(例 2.) 方程式 $x^3+2x^2=8x$ ヲ解ケ.

此方程式ハ $x^3+2x^2-8x=0$ 即チ $x(x^2+2x-8)=0$

故ニ一ツノ根ハ $x=0$ ナリ又 $x^2+2x-8=0$ ヲ常法ニヨリテ解キ

$x'=2$ $x''=-4$ ヲ得

ヨリテ原方程式ノ根ハ 0, 2, -4

ノ三ツナリ.

120. 1ノ立方根

1ノ立方根ハ $x^3=1$ 即チ $x^3-1=0$ ノ根ナリ, 而シテ $x^3=1$ ノ根ノ一ツハ $x=1$ ナルヿ一目瞭然タリ, 即 $x-1$ ハ $x^3-1=0$ ナル方程式ノ左邊ノ一因數ナルヲ知ル而シテ割算ノ結果 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

依テ $x^3-1=0$ ハ $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ニ同シ今 $x^2+x+1=0$ ノ根ヲ求ムレバ

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

今 $\sqrt{-1}$ ヲ i ニテ表セバ 21ニ 根ハ

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

即チ $x^3-1=0$ ナル方程式ノ根ハ

$$1, \quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

ニシテ換言スレバ 1 ノ立方根ナリ, 即チ此等ハ何レモ三乘スレバ皆 1 トナルモノナリ.

121. 立方根

一ツノ數ノ立方ガ與ヘラレタル數ニ等シキ𪜊ハ此數ヲ稱シテ與ヘラレタル數ノ**立方根**ト稱シ, 之レヲ書キ表ハスニハ與ヘラレタル數ニ $\sqrt[3]{\ }$ ナル符號ヲ冠セシムルモノトス.

玆ニ一ツノ數 a ヲ與ヘ之レガ立方根ヲ求メントスル際此 a ガ立方ニ開クコトヲ得ル場合ハ a ガ丁度或ル有理數ノ立方ナル場合ニ限ルナリ其他ノ場合ニハ a ノ立方根ナルモノハ無理數ナリ.

實數ノ範圍內ニ於テハ或ル數 a ノ立方根ハ唯一ツナリ コハ吾人ガ已ニ算術ニ於テ知ル所ニシテ算術ニ於テ諸子ガ學ビタル際ニ於テハ多分 a ノ立方根ニ一ツヨリ多クアルコトハ學バザリシナラム.

然レ𪜈數ノ範圍ヲ虛數迄擴張スル𪜊ハ a ノ立方根ハ一ツヨリモ多クアルヲ知ルベシ已ニ前條ニ於テ 1 ノ立方根ガ一ツヨリモ多クアリ即三個存スルコトヲ見タリ.

仍テ單ニ a ノ立方根ヲ表ハスニ $\sqrt[3]{a}$ ト記スル𪜊ハ其種々ノ値ヲ表示スルニ混雜ヲ來スベキガ故

$\sqrt[3]{a}$ ハ a ノ實數ノ立方根ヲ表スモノト約束ス.

今或ル有理數 a ノ立方根ハ幾個アルニセヨ, 之レヲ表スニ x ヲ以テスベシ, 然ル𪜊ハ立方根ノ定義ニヨリ

$$x^3=a \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

扨テ此方程式ノ根ハ a ノ立方根ナルベシ.

之レヨリ a ノ立方根ヲ求ムルコトニ就キ說カントス.

先ヅ第一ニ $a=1$ ノ場合ニハ上ノ方程式ハ

$$x^3=1$$

ニシテコノ方程式ノ根ハ已ニ前條ニ於テ之レヲ索メタリ.

即 $1,\quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

ニシテ其數三ツナリ, 其内一ツハ實數ナレドモ他ノ二ツハ虛數ナリ.

今此第二ノ根ヲ平方スレバ第三ノ根ニ一致スルヲ見ル, 即チ

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{-3}-3}{4}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

依テ便利ノ爲メ $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ヲ ω ヲ以テ表ストキハ 1 ノ立方根ハ次ノ如シ,

$1\quad \omega\quad \omega^2$ 〔ω ハ「オメガ」ト讀ム希臘文字ナリ〕

扨テ方程式 $x^3=a$ ニ戻リテ考フルニ此方程式ハ次ノ如ク書キ直スコトヲ得ベシ.

$$\left(\frac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)^3=1 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

今便宜ノ爲メ $\frac{x}{\sqrt[3]{a}}=y$ ト置ク, 然ルトキハ上式ハ

$$y^3=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

コノ方程式ヲ滿足スル y ノ値ハ已ニ知ル如ク, $1,\ \omega,\ \omega^2$ ナルカ故ニ $\frac{x}{\sqrt[3]{a}}$ ノ値ハ從テ $1,\ \omega,\ \omega^2$ ニ等シク; 即

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a}}=1 \quad ヨリシテ \quad x=\sqrt[3]{a}$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a}}=\omega \quad ヨリシテ \quad x=\omega\sqrt[3]{a}$$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{a}}=\omega^2 \quad ヨリシテ \quad x=\omega^2\sqrt[3]{a}$$

コレ即索ムル所ノ a ノ立方根ナリ.

之レニ依テ觀ルニ或ル有理數ノ立方根ハ恒ニ三個アリテ其中ノ一ツハ實數ニシテ他ノ二ツハ虛數ナリ.

第二十章

聯立方程式

122. 茲ニ二ツノ未知數ヲ表ハスニ x ト y トヲ以テシ, x ト y トヲ含ム所ノ二ツノ聯立方程式ノ中其ノ解法ヲシテ二次方程式ノ解法ニ歸セシメ得ベキモノヲ說述セントス.

初メ先ツ二ツノ聯立方程式ノ一方ガ一次ノ方程式ニシテ他ノ一方ガ二次方程式ナル場合ヲ例ヲ以テ示サン.

(例 1.) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$2x+3y=1,\quad x^2-2xy+3y^2-x+y-8=0$$

第一ノ方程式ヨリシテ

$$y=\frac{1-2x}{3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ得之レヲ第二ノ方程式ニ代入スレバ

$$x^2-2x\left(\frac{1-2x}{3}\right)+3\left(\frac{1-2x}{3}\right)^2-x+\frac{1-2x}{3}-8=0$$

之レヲ單ニスレバ

$$x^2-x-2=0$$

$-2x+4x^2$
$1-12x+12x^2$

依テ之レヲ解キテ

$$x=2 \quad 或ハ \quad -1$$

ヲ得

$x=2$ ヲ(1)式ニ置ケバ

$$y=\frac{1-4}{3}=-1$$

即 $x=2$ ナル𪜈ハ　$y=-1$

又 $x=-1$ ヲ(1)式ニ置ケバ

$$y=\frac{1+2}{3}=1$$

即 $x=-1$ ナル𪜈ハ　$y=1$

故ニ本題ノ答ハ

$$x=2, \quad y=-1$$

或ハ　$x=-1$, $y=1$

驗メシ

$x=2$, $y=-1$ ヲ與ヘラレタル方程式ニ置換ヘテ見ルニ

$$2x+3y=4-3=1$$

$$x^2-2xy+3y^2-x+y-8=4+4+3-2-1-8=0$$

又　$x=-1$, $y=1$ ヲ置ケバ

$$2x+3y=-2+3=1$$

$$x^2-2xy+3y^2-x+y-8=1+2+3+1+1-8=0$$

ニシテ何レモ正シキヲ知ル.

注意　$x=2$, $y=-1$ ト置ク𪜈ハ與ヘラレタル聯立方程式ガ滿足セラルヽヲ見タリ, 故ニ $x=2$, $y=-1$ ハ一組ヲ成ス. 又 $x=-1$ $y=1$ ハ別ノ一組ヲ成ス. 然レ𪜈 $x=2$ $y=1$ ハ方程式ヲ滿足セズ之レヲ以テ聯立方程式ノ答ヲ記スルニハ根ノ組ミ合セヲ明示セザル可カラズ, 例ヘバ上ノ聯立方程式ノ答ヲ示スニ $x=2$ 或ハ -1 $y=-1$ 或ハ 1 ト記スルハ宜シカラズ, 是レ甚ダ疑ハシキ書キ方ナレバナリ.

上ノ例ノ示スガ如ク一次方程式ト二次方程式トヨリ成ル聯立方程式ヲ解クニハ

一次方程式ヨリシテ二ツノ未知數ノ何レカ一方ヲ他ノ未知數ト既知數ニテ表ハシ之レヲ二次ノ方程式ニ置キ換ヘ由テ得ベキ未知數一ツノ二次方程式ヲ解クベシ

(例 2.)　次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$xy+x=25 \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$xy+x=25$ ....(1)

$$2xy-3y=28 \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

與ヘラレタル二方程式ハ何レモ一次方程式ニアラズ（何ントナレバ x 及 y ハ共ニ未知數ニシテ其方程式中ニハコノ未知數ノ積 xy ヲ有スルガ故二次方程式ナリ）然レバ吾人ハ此等ノ方程式ヨリシテ容易ニ一次方程式ヲ誘導シ得ルナリ．即(1)式ニ 2 ヲ掛ケ (2) 式ヲ減ジテ

$$2x+3y=22$$

ヲ得此一次方程式ヨリシテ

$$y=\frac{22-2x}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

y ノ此値ヲ (1) ニ置キ換ヘテ

$$x\left(\frac{22-2x}{3}\right)+x=25$$

$$-2x^2+22x+3x=75$$

$$2x^2-25x+75=0$$

之レヲ解キテ $x=-5$ 或ハ $-\frac{15}{2}$ ヲ得．次ニ(3)式ヨリシテ

$x=-5$ ナルトキハ $y=\frac{22+10}{3}=10\frac{2}{3}$

$x=-\frac{15}{2}$ ナルトキハ $y=\dfrac{22+\frac{15}{2}}{3}=9\frac{5}{6}$

ヲ得即チ $x=-5,\ y=10\frac{2}{3}$ 或ハ $x=-\frac{15}{2},\ y=9\frac{5}{6}$ ヲ以テ答トス．

問　　題

次ノ方程式ヲ解ケ．

(1) $x+y=7,\ x^2-y^2=21$

(2) $x-y=3,\ x^2+y^2=65$

(3) $x+y=15,\ xy=36$

(4) $4x+9y=12,\ 2x^2+xy=6y^2$

(5) $2xy-3=y,\ 5-xy=2x$ 　　答 $x=1\ y=3$

或ハ $x=\frac{5}{4},\ y=2$

(6) $2x+3y=3,\ 4x^2+9xy+9y^2=44$

(7) $4x-5y=1,\ 2x^2-xy+3y^2+3x-4y=47$

(8) $x-y=1,\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}$

(9) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2,\ \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=a+b$ 　　答 $x=a,\ y=b$

或ハ $x=\dfrac{a(3b-a)}{a+b}$

$y=\dfrac{b(3a-b)}{a+b}$

---

123 一次方程式ト二次方程式ヨリ成ル聯立方程式ヲ解クニ或ル特別ナル場合ニ於テハ次ニ示ス如キ方法ヲ用フルコヲ得ベシ．

(例 1.)
$$x+y=15 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$xy=36 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ解ケ． $y^2-15x+36=0$

(1)ヲ平方シテ　$x^2+2xy+y^2=225$

又(2)式ノ兩邊ニ4ヲ掛ケテ　$4xy=144$

コノ二式ヲ相引キテ　$x^2-2xy+y^2=81$

即　$(x-y)^2=81$

平方ニ開キテ　$x-y=\pm 9$

之レヲ(1)ト結合シテ次ノ二組ノ方程式ヲ得ベシ.

$$\left.\begin{array}{l}x+y=15\\x-y=9\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}x+y=15\\x-y=-9\end{array}\right\}$$

之レニ依リ

$$\left.\begin{array}{l}x=12\\y=3\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}x=3\\y=12\end{array}\right\}$$

(例2.)

$$x^2-y^2=24 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x+y=6 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ解ケ.

(2)式ヲ以テ(1)式ヲ割リ

$$x-y=4 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヲ得, (2)ト(3)ヲ加ヘテ

$$2x=10$$

$$\therefore\ x=5$$

(2)ヨリ(3)ヲ減シテ　$2y=2$

$$\therefore\ y=1$$

注意 一次方程式ト二次方程式トヨリ成レル聯立方程式ノ答ハ通常二組アルモノナレド此例ノ如ク單ニ一組ナルコトモアリ.

(例3.) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x^2-y^2=a \quad\cdots\cdots(1)$$

$$x+y=b \quad\cdots\cdots(2)$$

(1)ナル方程式ハ次ノ如ク書クヲ得.

$$(x-y)(x+y)=a$$

今若シ $x+y$ ニ換ルニ (2)式ニ表ス其値 b ヲ以テスレバ

$$x-y=\frac{a}{b} \quad\cdots\cdots(3)$$

(2)ト(3)ヨリシテ

$$x=\frac{b^2+a}{2b}$$

$$y=\frac{b^2-a}{2b}$$ ヲ得.

注意 本題ハ例(2)ノ一般ノ場合ノ解ヲ與フルモノナリ。

(例4.) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x-y=4 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+y^2=40 \quad\cdots\cdots(2)$$

先ヅ(1)ヲ平方シテ

$$x^2-2xy+y^2=16 \quad\cdots\cdots(3)$$

(2)ヨリ(3)ヲ減シテ

$$2xy=24 \quad\cdots\cdots(4)$$

(2) = (4) ヲ加ヘテ $x^2+2xy+y^2=64$

即 $(x+y)^2=64$

依テ平方ニ開キテ

$$x+y=\pm 8 \qquad \cdots\cdots(5)$$

(5) ト (1) トヲ結合シテ次ノ二組ノ方程式ヲ得ベシ.

$$\left.\begin{array}{l} x-y=4 \\ x+y=8 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x-y=4 \\ x+y=-8 \end{array}\right\}$$

依テ

$$\left.\begin{array}{l} x=6 \\ y=2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-6 \end{array}\right\}$$

ナル答ヲ得.

123 二ツノ方程式ガ何レモ二次方程式ナルトキハ其ノ一般ナル解法ハ初等代數學ノ判圍外ニ屬ス.

然レ圧未知數ヲ含ム項ガ悉ク二次ナルトキハ二次方程式ノ解方ヲ應用シテ恒ニ之レヲ解クコトヲ得ルナリ, 即次ノ例ノ如シ.

(例 1.) $\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=a \\ xy=b \end{array}\right\}$ ヲ解ケ.

第二ノ方程式ヨリ y ノ値ヲ出シ即 $y=\dfrac{b}{x}$

之レヲ第一ノ方程式ニ置キ換フレバ $x^2-\left(\dfrac{b}{x}\right)^2=a$

即 $x^4-ax^2-b^2=0$

此方程式ハ二ツノ實根ト二ツノ虚根トヲ有ス.(107條)

今其ノ虚根ヲ棄ツレバ $x=\pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}$

次ニ y ヲ求ムル爲メニハ前ニ x ヲ求メタルガ如クスベシ. (第二ノ方程式ニ於テ x ニ上ノ値ヲ置キ換フルハ甚ダ便ナラザルガ故與ヘラレタル二ツノ方程式ノ間ニ x ヲ消去スルヲヨシトス)

然ルトキハ次ノ複二次方程式ヲ得.

$$y^4+ay^2-b^2=0$$

之レヲ解キテ $y=\pm\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}}$

x 及ビ y ノ値ヲ表スベキ根號 $\sqrt{\ }$ ノ前ニ置クベキ符號ハ xy ナル積ガ b ト同シ符號ニナル樣ニ一組ツヽトルベシ. 何トナレバ與ヘラレタル方程式ノ第二ノモノハ $xy=b$ ナルガ故ナリ.

(例 2.) 次ノ一組ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\left\{\begin{array}{ll} y^2-xy=15 & \cdots\cdots(1) \\ x^2+xy=14 & \cdots\cdots(2) \end{array}\right.$$

(1)式ノ兩邊ニ 14 ヲ掛ケ(2)式ノ兩邊ニ 15 ヲ掛クレバ

$$14(y^2-xy)=15\times 14$$
$$15(x^2+xy)=14\times 15$$

コノ二式ノ右邊ハ同シキガ故ニ左邊モ亦然ラザル可カラズ

依テ $14(y^2-xy)=15(x^2+xy)$

之レヲ簡單ニスレバ $15x^2+29xy-14y^2=0$

コノ式ハ因數分解法ニヨリテ次ノ如ク書キ得

$$(5x-2y)(3x+7y)=0$$

117 條ノ理由ニヨリテ此式ヲ得, 從テ與ヘラレタル方程式ノ根ハ次ノ二式ヨリ得ベキ所ノモノナリ.

$$5x-2y=0 \quad 及ビ \quad 3x+7y=0$$

$5x-2y=0$ ヨリ $x=\frac{2}{5}y$ ヲ得, 之レヲ與ヘラレタル方程式(2)ニ代入スレバ $y^2-\frac{2}{5}y^2=15$

之レヲ解ケバ $y=\pm5$

扨又 $x=\frac{2}{5}y$ ナルガ故ニ $x=\frac{2}{5}(\pm5)=\pm2$

次ニ $3x+7y=0$ ヨリ $x=-\frac{7}{3}y$

之レヲ(1)式ニ代入スレバ $y^2+\frac{7}{3}y^2=15$

之レヲ解キテ $y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$x=-\frac{7}{3}y$ ニ g ノコノ値ヲ代入スレバ

$$x=-\frac{7}{3}\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=\mp\frac{7}{\sqrt{2}}$$

依テ所求ノ根ハ次ノ如シ.

$$\begin{cases}x=\pm2\\y=\pm5\end{cases} \quad 或ハ \quad \begin{cases}x=\mp\frac{7}{\sqrt{2}}\\y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

尚ホ詳シク書ケバ次ノ如シ.

$$\left[\begin{cases}x=+2\\y=+5\end{cases}\ \begin{cases}x=-2\\y=-5\end{cases}\right] 或ハ \left[\begin{cases}x=-\frac{7}{\sqrt{2}}\\y=+\frac{3}{\sqrt{2}}\end{cases}, \begin{cases}x=+\frac{7}{\sqrt{2}}\\y=-\frac{7}{\sqrt{2}}\end{cases}\right]$$

(例 3.) 次ノ一組ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x^2-2y^2=4y \quad \cdots\cdots(1)$$

$$3x^2+xy-2y^2=16y \quad \cdots\cdots(2)$$

(1)ニ 4 ヲ掛ケ(2)式ヨリ引ケバ

$$x^2-xg-6y^2=0$$

即チ $(x+2y)(x-3y)=0$

依テ次ノ二方程式ヲ得, 即チ

$$x+2y=0 \quad \cdots\cdots(a)$$

$$x-3y=0 \quad \cdots\cdots(b)$$

(a)式ヨリ $x=-2y$ コレヲ(1)式ニ代入スレバ

$$4y^2-2y^2=4y \quad \therefore\ y(2y-4)=0$$

依テ $y=0$ 或ハ $y=2$

$x=-2y$ ニコノ y ノ二ツノ値ヲ代入スレバ相當スル x ノ値ヲ得.

即 $y=0$ ヲ代入シテ $x=0$ ヲ得, 又 $y=2$ ヲ代入スレバ $x=-4$ ヲ得.

次ニ(b)式ヨリ $x=3y$ ヲ得, 之レヲ(1)式ニ代入スレバ

$$9y^2-2y^2=4yy$$

即チ $y(7y-4)=0$

故ニ $y=0$ 或ハ $y=\frac{4}{7}$

y ノコノ値ヲ $x=3y$ ニ代入スレバ相應スル x ノ値ヲ得ベシ.

即 $y=0$ ヲ代入スレバ $x=3\times0=0$ ヲ得. 又 $y=\frac{4}{7}$ ヲ代入スレバ $x=3\times\frac{4}{7}=\frac{12}{7}$

之レニヨリテ與ヘラレタル聯立方程式ノ根ハ次ノ如シ.

$$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-4\\y=2\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\frac{12}{7}\\y=\frac{4}{7}\end{cases}$$

(例 4.) 次ノ一組ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x^2+y^2=(x+y+1)^2 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+y^2=(x-y+2)^2 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) (2) 兩式ノ左邊ハ相等シキガ故

$$(x+y+1)^2=(x-y+2)^2$$

平方ニ開キテ $x+y+1=\pm(x-y+2)$ $\cdots\cdots(3)$

先ヅ $\pm$ ノ $+$ ノ方ヲトレバ次ノ式ヲ得.

$$x+y+1=x-y+2$$

即 $2y=1$ $\therefore$ $y=\frac{1}{2}$

之レヲ (1) 式ニ代入スレバ

$$x^2+\frac{1}{4}=(x+\frac{1}{2}+1)^2$$

即 $x=-\frac{2}{3}$ ヲ得.

次ニ一號ノ方ヲトレバ

$x+y+1=-(x-y+2)$ 即チ $2x=-3$ ヲ得.

是レヨリ $x=-\frac{3}{2}$ 之レヲ (1) ノ方程式ニ代入スレバ

$\frac{9}{4}+y^2=(-\frac{3}{2}+y+1)^2$ 即 $y=-2$

依テ與ヘラレタル聯立方程式ノ根ハ次ノ如シ.

$$\begin{cases}x=-\frac{2}{3}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-\frac{3}{2}\\y=-2\end{cases}$$

(例 5.) 次ノ一組ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x^2+xy+y^2=a^2 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^4+x^2y^2+y^4=b^4 \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)式ニテ(2)式ヲ除スレバ次ノ如シ

$$x^2-xy+y^2=\frac{b^4}{a^2} \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)式ヨリ(3)式ヲ引ケバ

$$2xy=a^2-\frac{b^2}{a^2}$$

ヲ得, 之レヲ簡單ニセバ

$$xy=\frac{a^4-b^2}{2a^2} \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

(1) ニ (4) ヲ加フレバ

$$x^2+2xy+y^2=a^2+\frac{a^4-b^4}{2a^2}$$

$$\therefore x+y=\pm\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{2a^2}} \quad\cdots\cdots\cdots(5)$$

次ニ (3) ヨリ (4) ヲ引ケバ

$$x^2-2xy+y^2=\frac{b^4}{a^2}-\frac{a^4-b^4}{2a^2}$$

$$\therefore x-y=\pm\sqrt{\frac{3b^4-a^4}{2a^4}} \quad\cdots\cdots(6)$$

(5) ト (6) ト相加ヘ 2 ニテ除スルトキハ x ノ値ヲ得, 即

$$x=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{2a^2}}\mp\sqrt{\frac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right)$$

次ニ(5)ヨリ(6)ヲ引キ其ノ結果ヲ2ニテ除スルトキハ

$$y=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{2a^2}}\pm\sqrt{\frac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right)$$

即與ヘラレタル聯立方程式ハ次ノ四組ノ根アリ.

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}+\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right) \\ y=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}-\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}-\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right) & \text{即}\ -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}+\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right) \\ y=\dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}+\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right) & \text{即}\ \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}-\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}-\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right) \\ y=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}+\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}+\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right) & \text{即}\ \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}-\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}\right) \\ y=\dfrac{1}{2}\left(-\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}-\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right) & \text{即}\ -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{3a^4-b^4}{2a^2}}+\sqrt{\dfrac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right) \end{cases}$$

問題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(1) $y^2-3xy=0,\quad 3x^2+5y^2=48$ 答 $\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}\ \begin{cases}x=-4\\y=0\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2+xy=23\\xy-y^2=3\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}\ \begin{cases}x=-4\\y=-3\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x^2+xy=45\\y^2+xy=36\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=\dfrac{7}{\sqrt{2}}\\y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\ \begin{cases}x=-\dfrac{7}{\sqrt{2}}\\y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x^2+xy=15\\y^2+xy=10\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}\ \begin{cases}x=-3\\y=-2\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x^2+y^2=5\\2xy-y^2=3\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=\pm2,\ \pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}\\y=\pm1,\ \pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}\end{cases}$

(6) $\begin{cases}3x^2-5y^2=28\\3xy-4y^2=8\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=\pm4,\ \pm9\\y=\pm2,\ \pm4\end{cases}$

(7) $\begin{cases}3x^2-y^2=23\\2x^2-xy=12\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=\pm3,\ \pm4\\y=\pm2,\ \pm5\end{cases}$

(8) $\begin{cases}x^2-3xy+y^2+1=0\\3x^2-xy+3y^2=13\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=\pm2,\ \pm1\\y=\pm1,\ \pm2\end{cases}$

(9) $\begin{cases}7xy-8x^2=10\\5y^2-9xy=18\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=\pm2,\ \pm5\\y=\pm3,\ \pm\text{[illegible]}\end{cases}$

(10) $\begin{cases}x^2-2xy=21\\xy+y^2=18\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=\pm7,\ \pm\sqrt{3}\\y=\pm2,\ \pm\sqrt{3}\end{cases}$

(11) $\begin{cases}x^2+3xy=54\\xy+4y^2=115\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=\pm3,\ \pm36\\y=\pm5,\ \pm\dfrac{23}{2}\end{cases}$

(12) $\begin{cases} x^2-2xy+5=0 \\ (x-y)^2=4 \end{cases}$　　答 $\begin{cases} x=\pm1,\ \pm5 \\ y=\pm3,\ \pm3 \end{cases}$

124. 未知數三ツノ聯立方程式ニシテ其中ノ少ナクトモ一ツガ一次以上ノ方程式ナルモノハ解キ方ハ甚ダ複雜ナルガ故ニ通常初等代數學ノ範圍外ニ置クモノトス,唯其解法ノ極メテ簡單ナルモノヲ例示セン.

(例 1.) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$yz=a^2 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$
$$zx=b^2 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$
$$xy=c^2 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)(3)ノ二式ヲ邊々相乘スレバ　$(zx)(xy)=b^2c^2$

之レヲ(1)式ニテ割レバ

$$x^2=\frac{b^2c^2}{a^2}$$

平方ニ開キテ　$x=\pm\frac{bc}{a}$

コレト全ク同樣ノ方法ニヨリテ

$$y=\pm\frac{bc}{a}$$
$$z=\pm\frac{ab}{c}$$

ヲ得.

(例 2.) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x(x+y+z)=a^2\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y(y+z+x)=b^2\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$z(z+x+y)=c^2\cdots\cdots\cdots(3)$$

三方程式ヲ邊々相加フレバ

$$(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2$$
$$\therefore\ x+y+z=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

之レヲ以テ式(1)ヲ割ルトキハ

$$x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ヲ得,

若シ又式(2)ヲ割ルトキハ

$$y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ヲ得,

同樣ニ式(3)ヲ割ルトキハ

$$z=\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ヲ得.

125. 聯立方程式中ニ分數式ヲ含ムトキハ次ノ例ノ如クシテ解クベシ.

(例 1.) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=9,\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=26$ ヲ解ケ.

此クノ如キ聯立方程式ヲ解クニハ $\frac{1}{x},\frac{1}{y}$ ヲ未知數トシテ考ヘ之レヲ解キテ $\frac{1}{x},\frac{1}{y}$ ヲ索メ而ル後 x 及ビ y ノ値ヲ求ムベシ.然レ氏計算ノ途中混雜ヲ生ズルノ掛念アルトキハ $\frac{1}{x}=u,\frac{1}{y}=w$ ト

置クベシ,然ルトキハ上ノ方程式ハ

$$v+w=9\ ,\ v^2+w^2=16$$

トナル,

之レヲ解キテ v 及 w ノ値ヲ得レバ $x=\dfrac{1}{v}, y=\dfrac{1}{w}$

ニヨリテ x, y ノ値ヲ得ベシ.

(例 2). $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{7},\quad x^2-y^2=7$ ヲ解ケ.

第一ノ方程式ノ分母ヲ拂ヘバ次ノ如シ

$$(x+y)^2+(x-y)^2=\frac{10}{7}(x^2-y^2)$$

之レヲ簡約スレバ $2x^2+2y^2=\dfrac{10}{7}(x^2-y^2)$ トナル

然ルニ $x^2-y^2=7$ ナルガ故

$$2x^2+2y^2=10$$

即チ $x^2+y^2=5$

依テ $x^2+y^2=5$ 及ヒ $x^2-y^2=7$ ノ二式ヨリ x^2 及 y^2 ノ値ヲ得ベク,從テ x,y ノ値ヲ得ベシ.即チコノ二式ヲ相加フレバ

$$2x^2=12$$

即 $x^2=6\qquad \therefore x=\pm\sqrt{6}$

又始メノ式ヨリ後ノ式ヲ相減ズルコトニヨリテ

$$2y^2=-2$$

$$y^2=-1\qquad \therefore\ y=\pm\sqrt{-1}\ =\pm 2$$

(例 3). $\dfrac{x+y}{1-xy}=3, \dfrac{x-y}{1+xy}=\dfrac{1}{3}$ ヲ解ケ.

第一ノ式ヨリ $x+y=3(1-xy)$

コノ式ハ次ノ如ク書キ換フルヲ得. $x(1+3y)=3-y$ $\cdots(1,$

第二ノ式ヨリ同樣ニシテ $x(3-y)=1+3y$ $\cdots(2$

ヲ得.

(1)式ヲ(2)式ヲ以テ割リテ $\dfrac{1+3y}{3-y}=\dfrac{3-y}{1+3y}$ ヲ得,

分母ヲ拂ヘバ $(1+3y)^2=(3-y)^2$

ヲ得,平方ニ開ケバ $1+3y=\pm(3-y)$

依テ $1+3y=+(3-y)$ ヨリ $y=\dfrac{1}{2}$

ヲ得,又 $1+3y=-(3-y)$ ヨリ $y=-2$

ヲ得, $y=\dfrac{1}{2}$ ヲ第一ノ式ニ代入スレバ $x=1$ ヲ得,

又 $y=-2$ ヲ第一ノ式ニ代入スレバ $x=-1$ ヲ得,

依テ與ヘラレタル方程式ノ根ハ $\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$

ナリ.

問題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(1) $\begin{cases}x^2yz=a\\ xy^2z=b\\ xyz^2=c\end{cases}$ 答 $\begin{cases}x=\dfrac{a}{\sqrt[4]{abc}}\\ y=\dfrac{b}{\sqrt[4]{abc}}\\ z=\dfrac{c}{\sqrt[4]{abc}}\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2+2yz=y^2\\ x^2+2yz=z^2+2xy\\ x^2+xyz=12\end{cases}$ 答 $x=y=z=\pm 2$

(3) $\begin{cases} 6(x^2+y^2+z^2)=13(x+y+z) \\ (x^2+y^2+z^2)=\dfrac{481}{6} \\ xy=z^2 \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=\dfrac{8}{3} \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{8}{3} \\ z=2 \end{cases}$

(4) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=7$, $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=25$ 答 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

(5) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{4y^2}=3$, $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{4y^2}=9$ 答 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

(6) $\dfrac{x+y}{x+y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}$, $x^2+y^2=90$ 答 $\begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ x=-9 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-9 \\ y=-3 \\ x=9 \\ g=-3 \end{cases}$

(7) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{25}{7}$; $xy=48$ 答 $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-8 \\ y=-6 \end{cases}$

聯立方程式應用問題

126. 二次式ニ關スル聯立方程式ニ導カルベキ問題ヲ例ヲ以テ說明セントス.

(例 1). 或ル矩形ノ二邊ノ和 a ト此矩形ト同ジ面積ヲ有スル正方形ノ一邊 b トヲ知リテ此矩形ノ各邊ヲ求ムベシ.

x 及ビ y ヲ以テ求ムル所ノ二邊ヲ表スモノトス. (但シ其單位ハ a 及ビ b ト同ジ單位ニテ計ルベキモノトス)

然ルトキハ題意ニヨリテ次ノ二ツノ方程式ヲ得.

$$x+y=a \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$xy=b^2 \qquad \cdots\cdots(2)$$

(1)式ヲ平方シテ $x^2+2xy+y^2=a^2$ $\cdots\cdots(3)$

(2)式ノ兩邊ニ 4 ヲ掛ケテ $4xy=4b^2$ $\cdots\cdots(4)$

(3) ヨリ (4) ヲ引キテ $x^2-2xy+y^2=a^2-4b^2$

即 $(x-y)^2=a^2-4b^2$

$$x-y=\pm\sqrt{a^2-4b^2}$$

コレヲ (1) ト結合シテ遂ニ次ノ根ヲ得.

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$$

$$y=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}$$

注意 問題ガ出來得ル爲メニハ x 及ビ y ノ値ガ實數ニシテ且ツ正ナルヲ要ス, 而シテ其實數ナル爲メノ要件ハ次ノ如シ.

$\dfrac{a^2}{4}-b^2$ ガ正數ナルカ又ハ零ナレバ可ナリ.

又 x 及ビ y ハ上ノ要件ガ成リ立テバ必ズ正數ナリ, 何トナレバ問題ノ方程式ニ於テ x ト y トノ和ハ a ナル正數ニシテ又其積モ b^2 ナル正數ナレバナリ.

(例 2). 自轉車アリ, 130 間ノ行程ニ於テ小輪ト大輪トノ回轉數ノ差 135 ナリト云フ, 然ルニ若シ各輪周ヲ一尺ヅヽ增スキハ 35 間ノ行程ニ於テ 27 轉ノ差ヲ生ズベシト云フ, 各ノ輪周ヲ問フ.

小輪ノ周ヲ x 尺トシ大輪ノ周ヲ y 尺トス,然ルトキハ 130 間ノ行程ニ於テ兩輪ノ回轉ノ數ハ $\frac{780}{x}$ 及ビ $\frac{780}{y}$ ナリ.

故ニ題意ニヨリテ $\frac{780}{x}-\frac{780}{y}=135$

即チ $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{9}{52}$ ....(1)

同樣ニ第二ノ關係ヨリ次ノ方程式ヲ得.

$$\frac{210}{x+1}-\frac{210}{y+1}=27$$

即チ $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y+1}=\frac{9}{70}$ ....(2)

扨テ(1)式ヨリ $x=\frac{52y}{52+9y}$

依テ $x+1=\frac{61y+52}{9y+52}$

之レヲ(2)式ニ代入シテ $\frac{9y+52}{61y+52}-\frac{1}{y+1}=\frac{9}{70}$

依テ $70\times 9y=9(61y+52)(y+1)$

即 $9y2-113y-52=0$

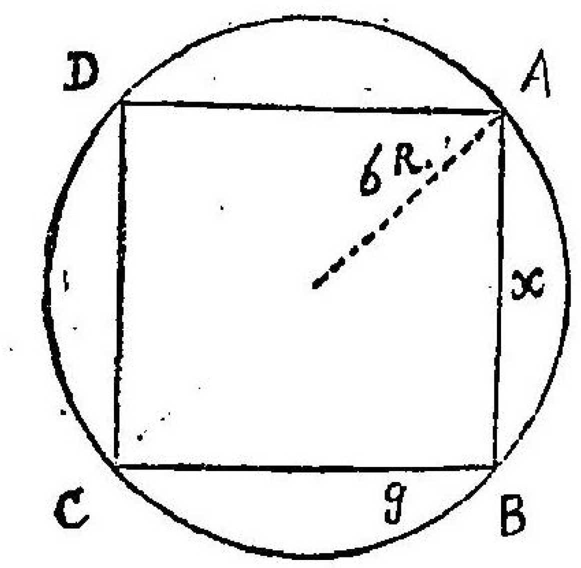
之レヲ解キテ $y=13$ 或ハ $-\frac{4}{9}$

ヲ得. $y=13$ ヲ用ヒテ $x=4$ ヲ得. 而シテ $y=-\frac{4}{9}$ ハ負數ナルガ故用フル能ハズ

依テ小輪周ハ 4 尺,大輪周ハ 13 尺ナリ.

(例 3.) 半徑六尺ノ圓ニ面積六十四平方尺ノ矩形ヲ內接セシメントス,矩形ノ二邊ヲ如何ニシテ可ナルカ.

先ツ此問題ヲ既ニ解カレタルモノト假定シ ABCD ヲ索ムル所ノ



矩形トシ x 及ビ y ヲ其二邊トスレバ幾何學ノ定理ニヨリ次ノ二方程式ヲ得ベシ.

$x^2+y^2=4\times 6^2$ ....(1)

$x\cdot y=64$ ....(2)

コノ聯立方程式ヨリ x 及ビ y ヲ求ムレバ可ナリ.

之レヲ解クニハ方程式(2)ノ兩邊ニ 2 ヲ掛ケテ得ル所ノ方程式

$$2xy=64\times 2$$

ヲ第一ノ方程式ニ加ヘ或ハ之レヨリ引ケバ次ノ二方程式ヲ得ベク

$(x+y)^2=4\times 6^2+2\times 64$ ....(3)

$(x-y)^2=4\times 6^2-2\times 64$ ....(4)

x 及ビ y ハ正數ナルコト勿論ナリ, 又 x ヲ以テ常ニ大ナル數ヲ表スモノト假定シ得ベシ,依テ $x+y$ 及ビ $x-y$ ハ共ニ正ナリトス,然レバ此兩方程式(3)及ビ(4)ノ平方根ヲ取ルトキハ根號ノ前ニハ(+)ノ符號ヲ附セザル可カラズ.

即チ $x+y=\sqrt{4\times 6^2+2\times 64}$ ....(5)

$x-y=\sqrt{4\times 6^2-2\times 64}$ ....(6)

(5)及(6)ノ二式ヲ加ヘ或ハ(5)ヨリ(6)ヲ減ズルコトニヨリテ

$$x=\frac{\sqrt{4\times 6^2+2\times 64}+\sqrt{4\times 6^2-2\times 64}}{2}$$

$$y=\frac{\sqrt{4\times 6^2+2\times 64}-\sqrt{4\times 6^2-2\times 64}}{2}$$

即チ
$$x=\frac{\sqrt{144+128}+\sqrt{144-128}}{2}=\frac{\sqrt{272}+\sqrt{16}}{2}$$
$$=2+\frac{\sqrt{272}}{2}$$
$$y=\frac{\sqrt{272}}{2}-2$$

(例 4.) 或ル河ノ邊リニ十二里ヲ距テヽ二ツノ都府アリ，今一旅人此兩府ノ間ヲ往復セシニ往復共ニ行程ノ半バヲ步ミ半バヲ船ニテ行ケリ，而シテ往キハ河流ヲ溯リシ故ニ七時間ヲ費シ，返リハ河流ニ順ヒシガ故ニ五時間ヲ費セリ，然ルニ若シ此河ニ水流ナカリシナラバ往復共ニ五時間三分ノ二ヲ費スベシト云フ，依テ問フ步行，漕行及ビ水流ノ速サ各々何程ナルカ．

步行ノ速サヲ每時 x 里トシ漕行ノ速サヲ每時 y 里(平均)トシ水流ノ速サヲ每時 z 里(平均)トス

然ルトキハ水流ニ順行スレバ每時 $y+z$ 里ヲ下ルベク又之レニ溯ヘバ每時 $y-z$ 里ヲ上ルベシ，

依テ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得ベシ．

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{y+z}=5 \qquad \cdots\cdots(1)$$
$$\frac{6}{x}+\frac{6}{y-z}=7 \qquad \cdots\cdots(2)$$
$$\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=5\frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots(3)$$

未知數ハ xyz ニシテ方程式ハ獨立ニ三ツアル故上ノ三式ヨリ xyz ノ値ヲ索メ得ベシ．

先ヅ(1)ヨリ(3)ヲ引キテ $\frac{1}{y}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{9}$ ……(4)

(2)ヨリ(3)ヲ引キテ $\frac{1}{y-z}-\frac{1}{y}=\frac{2}{9}$ ……(5)

(4)ヨリ $9z=y(y+z)$ ……(6)

(5)ヨリ $\frac{9}{2}z=y(y-z)$ ……(7)

(7)ニテ(6)ヲ割リ $2=\frac{y+z}{y-z}$

由テ $y=3z$

コレヲ(4)式ニ入ルヽトキハ $z=\frac{3}{4}$ 由テ $y=2\frac{1}{4}$，$x=2$ ヲ得ベシ

即チ步行ノ平均速度 ハ 每時 2 里．

漕行ノ平均速度 ハ 每時 $2\frac{1}{4}$ 里．

水流ノ平均速度 ハ 每時 $\frac{3}{4}$ 里．

問 題

(1) 二數ノ差ハ 10 ニシテ其平方ノ和ハ 178 ナリト云フ，二數ヲ求ム．

(2) 二數ノ積ハ 540 ニシテ其ノ和ハ其差ノ四倍ナリ，二數ヲ求ム．

(3) 二數ノ積ハ其和ノ 6 倍ニ等シク其平方ノ和ハ 325 ナリト云フ，仍テ此二數ヲ求ム．

(4) 二數ノ差ニ其平方ノ差ヲ掛ケタル積ハ 32 ニシテ同シ二數ノ和ニ其平方ノ和ヲ掛ケタル積ハ 272 ナリト云フ，仍テ此二數

ヲ索ム。　　　　　　　答　5 ト 3.

(5) 二數ノ積ハ其和ニ等シク又其和ニ其平方ノ和ヲ加ヘタルモノハ 12 ナリト云フ,二數ヲ問フ.

(6) 周圍 298 間,面積一町歩ノ矩形ノ地面ノ縱横各幾何ナルカ.

答　24 間,　125 間

(7) 長サハ幅ヨリハ 8 尺ダケ長キ教室ノ四壁ノ面積 1120 平方尺アリ若シ高サガ實際ヨリハ四尺高カヽリシナランニハ小サキ方ノ二壁ト大ナル方ノ一壁ニテ丁度 1120 平方尺ノ面積ヲ有スルナラムト云フ,仍テ此教室ノ長サ,幅,高サヲ計算セヨ.

答　長サ 32 尺,　幅 24 尺,　高サ 10 尺.

(8) 或人二種ノ羅紗ヲ買ヒシニ上種ハ下種ヨリモ一尺ニ~~附~~付キ 20 錢高價ニシテ下種ノ尺數ハ上種ヨリモ 10 尺多シ,又上種ノ代價 18 圓,下種ノ代價 16 圓ナリト云フ,問フ各種ノ尺數如何.

答　上種 30 尺,下種 40 尺.

(9) 或人若干里ノ地ヲ旅行セントテ 40 里ヲ進ミテ後每時速サヲ增スコト 2 里ナリ,サレド若シ初メヨリ後ノ如キ速サヲ以テ全行程ヲ旅行セシナランニハ 40 分時早ク到着セシナルベク,又初メノ速サニテ終マデ續ケタランニハ 20 分時遲ク到着シタラントス云フ,旅行ノ里程及最初ノ速サ如何.

[解　旅行ノ里程ヲ x 里トシ,最初ノ速サヲ y 里トスレバ

$$\frac{x}{y+2}=\frac{40}{y}+\frac{x-40}{y+2}-\frac{2}{3}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x}{y}=\frac{40}{y}+\frac{x-40}{y+2}+\frac{1}{3}\qquad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ナル聯立方程式ヲ解キテ　$x=60$　$y=10$　ヲ得.]

(10) 人アリ小麥若干ヲ買入レ之レヲ五分ノ利ニテ賣リ金十六圓ヲ利セリ,彼レ若シ一石ニ付キ二十五錢ノ利ニテ賣リタランニハ利潤金額ノ圓數ハ每石原價ノ白銅貨ノ數ニ等シカルベシ,仍テ問フ石數及ビ每石原價如何.　　　答 60 石,　2 圓.

(11) 甲乙二人ノ工夫アリ,各異ナル日給ニテ雇ハレタルニ數日ノ終リニ甲ハ 4 圓 80 錢ヲ受取レリ,然ルニ乙ハ 6 日欠勤シタルガ爲メニ僅ニ 2 圓 80 錢ヲ得タリ,若シ乙ハ皆勤ニシテ甲ガ 6 日ノ欠勤~~ナランニハ~~ヲセシナランニハ兩人ノ受取ルベキ賃金全ヲ相等シカルベシト云フ,工作ノ日數及ビ各工ノ日給金額如何ナルカ.

(12) 水槽アリ之レニ水ヲ注グニ甲乙二管ヲ具フ,甲管ノミニテスル片ハ乙管ノミニテスル片ヨリモ 2 時間早ク滿水シ得ベク,又二管共ニスル片ハ $1\frac{7}{8}$ 時間ニテ滿水シ得ベシト云フ各管特立ニテ滿水シ得ル時間ヲ問フ.　　　答　甲 5 時,　乙 3 時.

(13) 水槽ニ水ヲ注グニ甲乙二管ヲ具フ.今甲管ヲ開クコト乙管ノミニテ槽ヲ滿スニ要スル時間ノ $\frac{3}{5}$ ニシテ之ヲ閉チ直ニ乙管ヲ開ケリ,若シ斯クセスシテ二管共ニ開ク片ハ 6 時間早ク滿水スベク,且ツ甲管ノ注入スル水量ハ乙管ガ今實際注入シタル量ノ $\frac{2}{3}$ ナルベシ,各管獨自ニ滿水スベキ時間如何.

[解　甲管ノミニテ充スニ要スル時間ヲ x 時トシ又乙管ノミニテ充スニ要スル時間ヲ y 時トス.

然ルトキハ題意ニ依リ初メ甲管ヲ開クコ $\frac{3}{5}y$ 時間，此時間ニ充ツル水量ハ全容積ノ $\frac{3y}{5x}$，故ニ殘量ハ $1-\frac{3y}{5x}$

故ニ乙管ニテ殘量ヲ充タス時間ハ $y\left(1-\frac{3y}{5x}\right)$

故ニ總時間ハ $\frac{3}{5}y+y\left(1-\frac{3y}{5x}\right)$

又二管ヲ同時ニ開クトキハ $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{xy}{x+y}$ 時ヲ要ス

依テ次ノ方程式ヲ得.

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{3y}{5}+y\left(1-\frac{3y}{5x}\right)-6 \qquad \cdots\cdots\cdots(A)$$

$$\frac{1}{x}\times\frac{xy}{x+y}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{3y}{5x}\right) \qquad \cdots\cdots\cdots(B)$$

今 $\frac{y}{x}=n$ ト置ケバ

(B)ハ $\frac{n}{1+n}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{6}-n\right)$

$$\therefore \quad n=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad y=\frac{2}{3}x$$

コレヲ(A)ニ代入セズ $x=15$ 依テ $y=10$

答 甲 15 時, 乙 10 時,

(14) 二百四十哩ヲ隔テタル東西ノ停車場アリ，今東方ノ停車場ヨリ甲列車出發シ始終同一ノ速度ニテ進行シタリ，其出發後一時間ニシテ又東方ヨリ乙列車出發シ二時間進行シテ四十五分前ニ甲列車ノ通行シタル處ヘ來レリ，乙ハ其後チ速度ヲ一時間ニ五哩ヲ增シテ進行シタルヲ以テ終ニ甲列車ノ西方停車場ニ到着

スルト同時刻ニ乙列車モ到着セリト云フ，兩列車出發ノ際ノ速度幾何ナリシカ. 答 四十哩, 五十哩. (一時間ニ付キ)

(15) 甲乙ノ農夫飼牛合計三十頭ヲ有セリ，今兩人之レヲ賣却セシニ一頭ノ價ハ兩人異リタレモ其所得金ハ同一ナリシト云フ，然シテ甲若シ一頭ノ價ヲ乙ノ如ク賣ルトキハ三百二十圓ヲ得ベク，乙若シ一頭ノ價ヲ甲ノ如ク賣ルトキハ二百四十五圓ヲ得ベカリシト云フ，兩人各何頭ヲ飼ヒ居リシカ.

答 甲十六頭, 乙十四頭.

第二十一章

冪及ビ根

127. 吾人ハ既ニ第 35 條ニ於テ m 及ビ n ガ正ノ整數ナルトキハ

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

ナルヲ知レリ，之レハ指數定則中ノ第一ノ定則ニシテ此定則ヨリ次ノ結果ヲ誘導シ得ベシ.

$$a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n}\times a^p=a^{m+n+p}$$

因數ガ幾個アルモ同樣ニシテ

$$a^m\times a^n\times a^p\times a\times\cdots\cdots\cdots=a^{m+n+p+}$$

之ニ由リテ次ノ法則アリ.

同シ數(aノ如キ)ノ任意冪ヨリ成レル諸數(a^m, a^n ……ノ如キ)ノ積ノ指數ハ其因數ノ指數ノ和ニ等シ.

又 $(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times\cdots\cdots(a^m$ 合計 n 個ノ積)

$=a^{m+m+m+\cdots\cdots}$ (m ノ列スルコト合計 n 個)

$=a^{m\cdot n}$

即チ $(a^m)^n=a^{mn}$

仍テ其ノ定則アリ.

一ツノ數ノ m 冪ニ等シキ數ヲ n 冪シタル結果ハ初メノ數ヲ mn 冪シタルモノニ等シ.

注意 $(a^m)^n=a^{mn}$ ナル式ニ於テ $m=n$ ナル場合ニハ

$(a^m)^m=a^{m.m}=a^{m^2}$

即チ a^{m^2} ノ m ハ a ノ指數ニシテ 2 ハ m ノ指數ナリ.

今若シ $3^{2^{2^2}}$ ノ値ヲ求ムト問ハレタルトキニハ指數ノ指數アルヲ以テ初學者ノ惑フコトアリ. 乃チ $3^{2^{2^2}}=\{3^{2^2}\}^2=\{(3^2)^2\}^2$ ナリト誤推スルコトアルモ是レ大ナル誤ニシテ斯クノ如クスルトキハ 3^8 トナルモ其實 $3^{2^{2^2}}=3^{2^4}=3^{16}$ ニシテ決シテ 3^8 ニアラズ, 何トナレバ a^{m^2} ハ $(a^m)^m$ ニシテ決シテ $(a^m)^2$ ニアラザレバナリ. (注意終リ).

次ニ $(ab)^m$ ヲ求ムル法則ヲ示サム.

$(ab)^m=ab\times ab\times ab\times\cdots\cdots(ab$ ノ列スルコト合計 m 個).

$=(a\times a\times a\times\cdots$合計$m$個$)\times(b\times b\times b\times\cdots$合計$m$個$)$

$=a^m\times b^m$.

即チ $(ab)^m=a^m\cdot b^m$.

此理ヲ推シテ $(abc)^m=(ab)^m\times c^m=a^mb^mc^m$

一般ニ $(abc\cdots)^m=a^m\times b^m\times c^m\times\cdots\cdots$

仍テ次ノ法則アリ.

積ノ第 m 冪ハ其諸因數ノ第 m 冪ノ積ニ等シ.

此法則ヲ算術ニ於ケル計算ニ利用シ得ルコトアリ.

例ヘバ 256×625 ヲ求ムルニ

$256=4^4$, $625=5^4$ ナルヿヲ知リ居ラバ

$256\times625=4^4\times5^4=20^4=190000$ ノ如ク容易ニ計算シ得レバナリ.

一項式ノ最モ一般ナル場合ハ

$a^xa^yc^z\cdots\cdots$ ナリ.

而シテ今之レヲ m 冪スレバ

$(a^xb^yc^z\cdots\cdots\cdots)^m=(a^x)^m.(b^y)^m.(c^z)^m\cdots\cdots$

$=a^{xm}.b^{ym}.c^{zm}$

仍テ $(a^xa^yc^z\cdots)^m=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\cdots\cdots\cdots$

又 $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)\times\left(\frac{a}{b}\right)\times\cdots$(合計 n 個ノ積)

$=\frac{a^n}{b^n}$

128. 符號ノ定則ニヨリテ正數ノ冪ハ恒ニ正ニシテ負數ノ冪ハ其指數ガ奇數ナルトキハ負ニシテ偶數ナルトキハ正ナリ.

例ヘバ $(-a)^2=(-a)\times(-a)=+a^2$

$(-a)^3=(-a)\times(-a)\times(-a)=-a^3$

$(-a)^4=(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)=+a^4$

$(-a)^5=(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a)\times(-a=-a^5$

以下逐テ斯クノ如ク一般ニ

$$(-a)^{2n}=+a^{2n} \quad 又 \quad (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$$

ナリ何トナレバ $2n$ ハ常ニ偶數ヲ表シ $2n+1$ ハ常ニ奇數ヲ表ハセバナリ.

128. 與ヘラレタル式ノ羃ヲ作ラント欲スルトキハ只通常ノ乘ケ算ヲ幾度モ行ヘバ可ナリ,然レモ屢々入用ナル所ノモノハ公式ヲ記憶シ置キテ直チニ書キ下スヲ便ナリトス.

下ニ二三ノ二項式ノ羃ノ公式ヲ示ス(一般ノ公式ハ後章ニ於テ説クベシ)

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^2+10a^2b^2+5ab^4+b^5$$

$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$

第二十二章

指數ニ關スル論

129. 吾人ハ是迄指數ニ關スル諸種ノ定義并ニ法則ハ皆ナ指數ヲ正ノ整數トシテ定メタルモノナリ.

例ヘバ

$$a^3=a\times a\times a$$

$$a^3\times a^2=a^{3+2}=a^5$$

是レヲ以テ $a^{\frac{3}{2}}$, a^{-3} ノ如キハ意味ナキ式ト云ハザル可カラズ,然レモ凡テ代數式ハ其文字ガ如何ナル値ヲモツトキニモ常ニ同シ法則ニ從フ樣ナル一定ノ意味アルヲ便ナリトス.

故ニ n ガ正ノ整數ナラザル場合ニ於テモ亦 n ガ正ノ整數ナル場合ノ法則

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

ニ從フ樣ナル意味ヲ附スルコトヲ考究スベシ.

第一　分數指數ノ意味

$a^{\frac{1}{2}}$ ガ指數ノ法則ニ從フモノトスルトキハ

$$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$=a$$

故ニ $a^{\frac{1}{2}}$ ハ a ノ平方根ヲ表ス.

同樣ニ $a^{\frac{1}{3}}$ ガ指數法則ニ從フモノトセバ

$$a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$$ why had been eliminat

$$=a$$

故 $a^{\frac{1}{3}}$ ハ a ノ立方根ヲ表ス.

一般ニ $a^{\frac{1}{n}}$ ガ指數法則ニ從フモノトセバ $a^{\frac{1}{n}}$ ヲ n 個相乘シタル片次ノ式アリ.

$$a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots\text{因數 } n \text{ 個}=a^{\frac{n}{n}}$$

(n ハ正ノ整數トス)

$$=a$$

故ニ一般ニ $a^{\frac{1}{n}}$ ハ a ノ第 n 冪根ヲ表ス.

即 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

次ニ又 m 及ビ n ヲ二ツノ正ノ整數トスレバ指數ノ定則ニヨリ

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\cdots\text{因數 } n \text{ 個}$$

$$=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots\cdots\text{項數 } n \text{ 個}}$$

$$=a^{\frac{m}{n}\times n} \qquad =a^m$$

$$\therefore \quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

又

$$a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots\text{因數 } m \text{ 個}=a^{\frac{m}{n}}$$

$$\therefore \quad a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m$$

依テ $a^{\frac{m}{n}}$ ハ a ノ第 m 冪ノ第 n 冪根ヲ表スモノトスルヲ得. 或ハ又 a ノ第 n 冪根ノ第 m 冪ヲ表スモノトスルヲ得.

即 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a^m)}$

$$=(\sqrt[n]{a})^m$$

例ヘバ $4^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{4^3}=\sqrt{64}=8$

$8^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{8})^2=2^2=4$

$x^{\frac{5}{7}}=\sqrt[7]{x^5}$

第二 指數ノ零ナル場合ノ意味

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

ナルベキガ故 m ガ 0 ナル片ハ

$$a^0\times a^n=a^{0+n}=a^n$$

$$\therefore \quad a^0=\frac{a^n}{a^n}=1 \qquad \text{ヲ得}$$

依テ a ノ値ノ如何ニ拘ラズ a^0 ハ 1 ヲ表ス.

第三 指數ノ負數ナル場合ノ意味

n ヲ任意ノ正數ト定ム而シテ指數ノ定則ニヨリ

$$a^n\times a^{-n}=a^{n-n}=a^0$$

$$=1$$

$$\therefore \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

依テ a^{-n} ハ a^n ノ逆數ナリ.

例ヘバ $a^{-1}=\frac{1}{a},\quad a^{-2}=\frac{1}{a^2}$

$2^{-1}=\frac{1}{2},\quad 3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$

之レヲ應用シテ分數式ニ於ケル分母或ハ分子ノ因數ハ其ノ指數ノ符號ヲ變ズレバ之レヲ分母ヨリ分子ニ移シ或ハ分子ヨリ分母ニ移スコトヲ得.

例ヘバ $\frac{p}{q}=pq^{-1}=\frac{1}{p^{-1}q}$ ト書クヲ得ベク

又 $\frac{a^2b^3}{c^6d^7}=\frac{1}{a^{-2}b^{-3}c^6d^7}=a^2b^3c^{-6}d^{-7}$

ト書キ得ベシ.

130. 吾人ハ前條ニ於テ基本ノ指數法則

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

ニ基ツキ分數指數及ビ負指數ノ意味ヲ發見セリ．今斯クシテ得タル意味ニ從フ片ハ m 及ビ n ノ値ノ如何ニ關セズ恆ニ

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

$$(a^m)^n=a^{m+n}$$

$$(ab)^n=a^nb^n$$

ナルコトヲ證明セン.

第一. m 及ビ n ノ値ノ如何ニ關セズ $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ナルコトノ證明

若シモ m 及ビ n ガ正ノ整數ナル片ハ此事ノ眞ナルハ既ニ第35條ニ於テ明カニセリ．

依テ茲ニハ先ツ m 及ビ n ヲ正ノ分數トシ $m=\frac{p}{q}$, $n=\frac{r}{s}$ トシテ論ゼン．

$$a^m\times a^n=a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\times\sqrt[s]{a^r}$$

而シテ $$=\sqrt[qs]{a^{ps}}\times\sqrt[qs]{a^{rq}}$$

即 $$=\sqrt[qs]{a^{ps+qs}}$$

$$=a^{\frac{ps+rq}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}=a^{m+n}$$

故ニ $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ナル法則ハ m 及ビ n ガ正數ナル限リハ其値ノ

如何ニ拘ラズ恆ニ眞ナルヲ知レリ．

扨次ニ m 及ビ n ノ一ツ或ハ兩方共ガ負數ナル片ニモ此式ノ眞ナルコトヲ證明セン．

p 及ビ p ヲ正數トスル片ハ

$$a^{-p}\times a^{-q}=\frac{1}{a^p}\times\frac{1}{a^q}=\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-p-q}$$

又 $$a^p\times a^{-q}=a^p\times\frac{1}{a^q}=\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$$

故ニ法則 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ハ m ト n ガ正數ニテモ負數ニテモ將タ整數ニテモ分數ニテモ恆ニ眞ナリ．

第二. m 及ビ n ノ値ノ如何ニ關セズ． $(a^m)^n=a^{mn}$ ナルコトノ證明．

先ヅ m ノ値ハ任意ナリトシ，n ノ値ハ正ノ整數ト定ム

然ル片ハ

$$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times\cdots\cdot \text{因數 } n \text{ 個}=a^{mn}$$

次ニ m ノ値ハ任意ニシテ n ノ値ハ正ノ分數ト定ム，即 $n=\frac{p}{q}$ ニシテ p 及 q ハ正ノ整數ナリトス．

然ル片ハ

$$(a^m)^n=(a^m)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\{(a^m)^p\}}$$

$$=\sqrt[q]{a^{mp}}$$ (之レ p ハ正ノ整數ナルガ故ナリ)

$$=a^{\frac{mp}{q}}=a^{mn}$$

最後ニ m ノ値ハ任意ニシテ n ノ値ハ負數ナリトス，即チ $n=-p$ ニシテ其 p ハ勿論正數ナリ．

然ル片ハ

$$(a^m)^n=(a^m)^{-p}=\frac{1}{(a^m)^p}=\frac{1}{a^{mp}}=a^{-mp}=a^{mn}$$

依テ $(a^m)^n=a^{mn}$ ハ m 及ビ n ガ如何ナル値ヲ持ツトキモ恒ニ眞ナリ.

第三. n ノ値ノ如何ニ關セズ $(ab)^n=a^nb^n$ ナルコトノ證明.

n ノ値ノ整數ナルトキ此事ノ眞ナルハ已ニ第 **121** 條ニ於テ明ニセリ.

n ガ正ノ分數ニシテ $\frac{p}{q}$ ニ等シトセバ (但 p 及ビ q ハ正ノ整數)

$$\begin{aligned}(ab)^n=(ab)^{\frac{p}{q}}&=\sqrt[q]{(ab)^p}\\&=\sqrt[q]{(a^pb^p)}\\&=\sqrt[q]{a^p}\times\sqrt[q]{b^p}\\&=a^{\frac{p}{q}}\times b^{\frac{p}{q}}\\&=a^n\times b^n\end{aligned}$$

又 n ガ負數ニテ $-m$ ニ等シキトキハ

$$(ab)^n=(ab)^{-m}=\frac{1}{(ab)^m}=\frac{1}{a^mb^m}=a^{-m}b^{-m}=a^nb^n$$

故ニ $(ab)^n=a^nb^n$ ハ n ノ値ノ如何ニ關ラズ常ニ眞ナリ.

例題

1. $a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}$ ヲ簡單ニセヨ.

解 $a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}$

2. $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}}\times a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{6}{5}}$ ヲ簡單ニセヨ

解 $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}}\times a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{6}{5}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}=a^2b^2$

3. $(a^{-2}b^{\frac{4}{3}})^{-\frac{3}{2}}$ ヲ簡單ニセヨ.

解 原式 $=a^{-2\times(-\frac{3}{2})}b^{\frac{4}{3}\times(-\frac{2}{3})}=a^3b^{-2}=\frac{a^3}{b^2}$

4. $\sqrt{(a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{-\frac{2}{3}})}\div\sqrt[3]{(a^{\frac{1}{2}}b^4c^{-1})}$ ヲ簡單ニセヨ.

解 原式 $=a^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{3}}\div a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{4}{3}}c^{-\frac{1}{3}}$

$=a^{-\frac{5}{6}-\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}c^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$

$=a^{-1}b^{\frac{1}{6}}c^0=\frac{\sqrt[6]{b}}{a}$

---

131. 多項式ノ平方根ノ索メ方. 視察法.

恒同式 $a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$ ヨリシテ與ヘラレタル代數式(三項式ナル)ガ或ル兩數ノ各平方ノ和ニ其積ノ二倍ヲ加ヘ(或ハ減ジ)タルモノニ等シキトキハ其式ハ其兩數ノ和(或ハ差)ノ平方ニ等シキコトヲ知リ得ベシ.

之レガ故ニ完全平方數ナル三項式ノ平方根ハ上ノ形ニ合スルヲ以テ視察ニヨリテ直チニ書キ下スコトヲ得ベキナリ.

其法ハ先ツ式中ノ文字ニ付テ遞昇羃(或ハ遞降羃)ニ其式ヲ配列シ其兩外項ノ平方根ヲトリ中央ノ項ガ正或ハ負ナルニ從ヒテ其兩數ノ和或ハ差ヲ以テ索ムル平方根トナスナリ.

例ヘバ $4a^8+9b^6-12a^4b^3$

ノ平方根ヲ求メムトス.

先ツ a ニ付テノ遞降羃ニ此式ヲ配列スレバ

$$4a^8-12a^4b^3+9b^6$$

次ニ兩外項ノ平方根 $\pm2a^4$ 及ビ $\pm3b^3$ ヲトル

而シテ $4a^8-12a^4b^3+9b^6$ ハ $(2a^4)^2+(3b^3)^2-2(2a^4)(3b^3)$ トナリテ平方數ニ適合スルガ故其中央項 $-12a^4b^3$ ノ負數ヲ採リテ

$$\pm(2a^4-3b^3)$$

ヲ以テ所求ノ平方根トス.

以後平方根ヲトリシトキニハ唯正號ノミヲ記スコトヲ約束シ置カム(例ヘバ a^2 ノ平方根ハ $\pm a$ ナレドモ $+a$ 即 a ノミヲ記スコトヽナス)

132. 多項式ノ平方根ノ索メ方. 一般ノ方法

今或ル代數式ノ平方根ヲ求ムル一般ノ方法ニ就テ講ゼムトス.

與ヘラレタル代數式ガ完全ナル平方數ナルトキハ之レヲ次ノ形ニ書キ得ルヤ明ナリ.

$$(A+B)^2$$

茲ニ A ハ與ヘラレタル代數式ノ平方根ノ若干根ヲ表シ, B ハ其殘リノ若干項ヲ表スモノナリ. A 及ビ B ノ項ヲ或ル殊別ナル一字ノ遞降冪(或ハ遞昇冪)ニ配列ス,而シテ A ノ項ハ總テ B ノ項ヨリモ其一字ニツキテ高次(或ハ遞昇ニ列ベタルトキハ低次)ナルモノトス.

今 $(A+B)^2$ ノ平方根ノ A 項ガ知ラルヽトキ殘リノ B 項ヲ求ムル方法ヲ考究セントス.

先ヅ $(A+B)^2$ ヨリ A^2 ヲ減ズレバ $(2A+B)B$ トナル.

前ノ或一字ノ遞降冪ノ整列法(或ハ遞昇) ニヨリテ考フレバ此殘リ $(2A+B)B$ ノ最高次(或ハ最低)ノ項ハ A ノ第一項ト B ノ第一項トノ積ノ 2 倍ニ等シ.

是ニ由リテ求ムル所ノ根ノ次項ヲ得ルニハ B ノ最高次(或ハ最低次)ノ項ヲ求メザル可カラズ,而シテ其法ハ已ニ發見シ得タル根ノ若干項ノ平方ヲ原式ヨリ減ジ其殘式ノ最高次(或ハ最低次)ノ項ヲ其發見シタル根ノ第一項ノ 2 倍ニテ割リ其商ヲ根ノ次ノ項トナスベシ.

根ノ初項ハ原式ノ初項ナルコト明ナリ故ニ先ヅ根ノ初項ヲ求メ夫レヨリ前法ヲ次第ニ施シテ根ノ全項ヲ求ムルコトヲ要ス.

(例一) 次ノ式ノ平方根ヲ索ム.

$$x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$$

此運算ヲ次ノ如ク順次ニ施シ行クベシ.

$$x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4\,(x^3-2x^2+x-2)$$

$$(x^3)^2=x^6$$

$$(x^3-2x)^2=x^6-4x^5+x^4$$

$$(x^3-2x^2-+x)^2=x^6-4x^5+6x^4-4x_3+x^2$$

$$(x^3-2x^3+x-2)^2=x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$$

說明

先ヅ原式ノ初項 x^6 ノ平方根ヲ求メ x^3 ヲ得タリ(但シ原式ヲ x ノ遞降冪ニ配列シ置クベシ)

次ニ x^3 ノ平方 x^6 ヲ原式ヨリ減ジ殘リノ初項 $-4x^5$ ヲ $2x^3$ ニテ割リ $-2x^2$ ヲ得之レヲ根ノ第二項トナス

而シテ x^3-2x^2 ノ平方ヲ原式ヨリ引キ其殘リノ初項 $+2x^4$ ヲ $2x^3$ ニテ割リテ x ヲ得之レヲ根ノ第三項トナス.

次ニ x^3-2x^2+x ノ平方ヲ原式ヨリ減シ其殘リノ初項 $-4x^3$ ヲ $2x^3$ ニテ割リテ -2 ヲ得之レヲ根ノ第四ノ項トナス.

而シテ x^3-2x^2+x-2 ノ平方ヲ原式ヨリ減ジ殘リハ零ナリ, 故ニ之レヲ以テ所要ノ平方根トス.

x^3, x^3-2x^2 等ノ平方ハ原式ノ下ニ置キ各同類項ヲ相對セシムルトキハ殘式ノ初項ヲ一目シテ覗出スルコトヲ得ルヲ以テ通常斯ク配列スルモノトス.

(例二)

$9x^4+24x^3y+10x^2y^2-8xy^3+y^4$ ノ平方根ヲ索メヨ.

$$\begin{array}{r|l}
 & 9x^4+24x^3y+10x^2y^2-8xy^3+y^4\ (3x^2+4xy-y^2 \\
 & 9x^4 \\ \hline
6x^2+4xy & 24x^3y+10x^2y^2-8xy^3+y^4 \\
 & 24x^3y+16x^2y^2 \\ \hline
6x^2+8xy-y^2 & -6x^2y^2-8xy^3+y^4 \\
 & -6x^2y^2-8xy^3+y^4 \\ \hline
\end{array}$$

答 $3x^2+4xy-y^2$

算術ニ於ケル開平法ハ此理ニ基ケルモノナリ. 例ヘバ 183184 ノ平方根ヲ求ムルコ下ノ如シ

$$\begin{array}{r|l}
 & 18\ \ 31\ \ 84\ (428 \\
 & 16 \\ \hline
82 & 2\ \ 31\ \ 84 \\
 & 1\ \ 64 \\ \hline
848 & 67\ \ 84 \\
 & 67\ \ 84 \\ \hline
\end{array}$$

答 428

說明

$$\begin{array}{r|l}
 & 18\ \ 31\ \ 84\ \ (400+20+8 \\
a^2\cdots\cdots\cdots\cdots & 16\ \ 00\ \ 00\ \ \ \ \ \ \ a\ \ \ \ \ b\ \ \ \ c \\ \hline
2a+b\cdots 820 & 2\ \ 31\ \ 84 \\
(2a+b)b\cdots\cdots & 1\ \ 64\ \ 00 \\ \hline
2(a+b)+c\cdots 848 & 67\ \ 84 \\
(2a+2b+c)c\cdots\cdots\cdots & 67\ \ 84 \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{aligned}183184 &= (a+b+c)^2 \\ &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\end{aligned}$$

問　　題

次ノ各式ノ平方根ヲ求ム.

(1) $a^4+2a^3+3a^2+2a+1$

(2) $16-96x+216x^2-216x^3+81x^4$

(3) $25a^4+9b^4+4c^4 12b^2c^2-20c^2a^2-30a^2b^2$

〔此式ヲ公式ニ誘導スルトキハ

原式 $=25a^4-10a^2(3b^2+2c^2)+(3b^2+2c^2)^2$

$\therefore$ 所要ノ平方根ハ $5a^2-(3b^2+2c^2)^2$ ヲ得.

讀者ハ尙一般ノ方法ニヨリテ試ムベシ〕

(4) $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$

〔此式ヲ次ノ如ク誘導スルトキハ容易ニ其平方根ヲ求メ得ベシ

原式 $=(x^6+2x^5+x^4)+(2x^4+4x^3+2x^2)+(x^2+2x+1)$

$$=x^4(x+1)^2+2x^2(x+1)^2+(x+1)^2$$

$$=(x+1)^2(x^4+2x^2+1)$$

$$=(x+1)^2(x^2+1)^2$$

∴所要ノ平方根ハ　$(x+1)(x^2+1)$

讀者ハ尙一般ノ方法ニヨリテ試ムベシ〕

(5)　$4x^4-8x^3y^2+4xy^6+y^8$　　答$2x(x-y^2)-y^4$

$$=-y^4-2xy^2+2x^2$$

(6)　$49+112x^2+70x^3+64x^4+80x^5+25x^6$

答　$7+8x^2+5x^3$

〔次ノ如クスルモ可ナリ.

原式$=49+14(8x^2+5x^3)+(8x^2+5x^3)^2$

$$=\{7+(8x^2+5x^3)\}^2$$

∴所求ノ根ハ　$7+8x^2+5x^3$〕

(7)　$x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x+4x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}$

解　原式$=x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+4x-2x+4x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}$

$$=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})^2-2x^{\frac{1}{6}}(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})+x^{\frac{1}{3}}$$

$$=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{6}})^2$$

∴所要ノ平方根ハ　$x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{6}}$

132. 多項式ノ立方根ヲ索ムルコト.

恒同式　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

ヨリ二項式ノ立方ハ四項式トナルコトヲ知リ得. 而シテ之ヲ或一字

ノ遞降或ハ遞昇羃ニ整列スルトキハ其兩端ノ項ハ原二項式ノ各項ノ立方ニ等シキコトヲ見ル.

故ニ或ル代數式ガ三次ノ四項式ナルヰ此式ガ一ツノ二項式ノ完全立方式ナルヲ知ルヰハ上式ヲ參照シテ其立方根ヲ見出シ得ベシ.

例ヘバ

$$27a^6-54a^5b+36a^4b^2-8a^3b^3$$

ガ若シモ完全ナル立方數ナルヰハ, 其兩端ノ項ノ立方根$3a^2$及ビ$-2ab$ヲ取リ　$3a^2-2a$　ト書クベシ.

而シテ之レヲ立方シテ果シテ其結果ガ原式$27a^6-54a^5b+36a^4b^3-8a^3b^3$ニ等シカリシナラバ$3a^2-2a$ハ求ムル立方根トシテ正シキモノナリ. 此例ニ於テハ此結果ガ原式ニ合スルヲ以テ

$3a^2-2ab$ハ即所要ノ立方根ナルナリ.

又公式　$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2c+3ac^2$$
$$+6abc+3b^2c+3bc^2$$

ヲ應用シテモ求メ得ベシ.

一般ノ代數式ノ立方根ヲ求ムル方法ハ次ノ條ニ記スル所ノ如シ.

134. 或代數式ノ立方根ヲ求ムル一般ノ法

一ツノ代數式ガ或ル他ノ代數式ノ完全立方式ナルモノトシ其立方根ヲ　A+B

ト記ス, 即原式ハ　$(A+B)^3$　ナリトス.

但A及ビBハ同字ノ遞降(或ハ遞昇)羃ニ整列シタルモノニシテAノ各項ハ其文字ニ付キBノ各項ヨリモ高次(或ハ低次)ナルモノトス.

今Aハ知リ得ラレタリトシ之ニヨリテBヲ求ムルコトヲ説カムトス

$(A+B)^3$ヨリA^3ヲ減ズルトキハ其殘リハ　$(3A^2+3AB+B^2)B$

ナリ.

此式ニ於ケル最高次(或ハ最低次)ハ　$3\times A$ノ初項ノ平方$\times B$ノ初項ナリ.之レニヨリテ所求ノ立方根ノ次項ヲ得ル方法ハ次ノ如シ.

Bノ最高次(或ハ最低次)ノ項ヲ得ルニハ根ノ其一部分(Aノ如キ)ノ立方ヲ原式ヨリ減シ其殘リノ式ノ最高次(或ハ最低次)ノ項ヲ其根ノ初項ノ立方ノ三倍ニテ割ルベシ.

此方法ヲ繰返シテ施ストキハ次第ニ根ノ次項ヲ得ベシ，但シ原式ノ初項ノ立方根ハ根ノ初項ナルコト明カナルガ故ニ此方法ニヨリ次第ニ根ノ次項ヲ得ベシ.

(例一)　$x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6$

ノ立方根ヲ索ム.

原式ハ丁度xノ遞降冪ニ整列シアレバ直チニ之レヲ記シテ次ノ如ク運算スベシ.

$$x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6$$
$$(x^2)^3=x^6$$
$$(x^2-2xy)^3=x^6-6x^5y+12x^4y^2-8x^3y^3$$
$$(x^2-2xy+3y^2)^3=x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6$$

說明

先ツ原式ノ初項x^6ノ立方根ヲ求メ根ノ初項x^2ヲ得此立方x^6ヲ原式ヨリ減シ殘式ノ初項$-6x^5y$ヲ$3\times(x^2)^2$ニテ割リ$-2xy$ヲ得,之レヲ根ノ次

項トシ原式ヨリ　$(x^2-2xy)^3$ヲ減シ其殘式ノ初項$9x^4y^2$ヲ$3\times(x^2)^2$ニテ割リ$3y^2$ヲ得之レヲ根ノ末項トス.

而シテ$(x^2-2xy+3y^2)^3$ヲ原式ヨリ引ケバ殘リナシ故ニ$x^2-2xy+3y^2$ハ所求ノ根ナリ.

上ノ演算ニ於テハ殘式ヲ一々記サズ，然レドモ次ノ例ノ如ク殘式ヲ記シ置クモ可ナリ.

(例二)　次ノ式ノ立方根ヲ求ム

$$x^6+12x^5+42x^4+16x^3-84x^2+48x-8$$

第一法.

コレハ例一ニ示セル方法ト同シ只便宜ノ爲メ殘式ノ初項ヲ記セリ.

$$x^6+12x^5+42x^4+16x^3-84x^2+48x-8\ (x^2+4x-2$$
$$(x^2)^3=x^6$$
$$12x^5$$
$$(x^2+4x)^3=x^6+12x^5+48x^4+64x^3$$
$$-6x^4$$
$$(x^2+4x-2)^3=x^6+12x^5+42x^4+16x^3-84x^2+48x-8$$

答　x^2+4x-2

第二法.

上例ニ示ス如ク毎回既得ノ部分ノ立方ヲ減ズル代リニ前ノ殘式ヨリ

$\{3(\text{前項ノ和})^2+3(\text{前諸項ノ和})(\text{新項})+(\text{新項})^2\}\times(\text{新項})$

ヲ減ズルモ可ナリ,即次例ノ如シ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \underline{x^2+4x-2} \\
 & x^6+12x^5+42x^4+16x^3-84x^2+48x-8 \\
 & \underline{x^6} \\
3(x^2)^2+3(x^2)(4x)+(4x)^2 & 12x^5+42x^4+16x^3-84x^2+48x-8 \\
=3x^4+12x^3+16x^2 & \underline{12x^5+48x^4+64x^3} \\
3(x^2+4x)^2+3(x^2+4x)(-2)+(-2)^2 & -6x^4-48x^3-84x^2+48x-8 \\
=3x^4+24x^3+42x^2-24x+4 & \underline{-6x^4-48x^3-84x^2+48x-8}
\end{array}
$$

答 x^2+4x-2

算術ノ開方法ハ即此理ニ基ヅクモノナリ.

例ヘバ 432081216 ヲ立方根ヲ求ムルニ

	432・081・216			(700+50+6
	343 000 000			(a b c
$3a^2$ …………………	1470000	89	081	216
$(3a+b)b$ …………………	107500			
$3a^2+3ab+b^2$ …………	1577500	78	875	000
$3(a+b)^2$ …………	1687500	10	206	216
$\{3(a+b)+c\}c$ …………	13536			
$3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2$ …	1701036	10	206	216

例　　題

次ノ各式ノ立方根ヲ求ム.

(1) $x^3-24x^2+192x-512$

解 原式$=x^3-3x^2 8-3x8^2-8^3$

$=(x-8)^3$

∴求ムル立方根ハ$x-8$

(2) $x^6-3x^5y+6x^4y^2-7x^3y^3+6x^2y^4-3xy^5+y^6$

解 原式$=(x^2-xy)^3+3x^4y^2-6x^3y^3+6x^2y^4-3xy^5+y^6$

$=(x^2-xy)^3+3y^2(x^2-xy)^2+3y^4(x^2-xy)+y^6$

$=\{(x^2-xy)+y^2\}^3$

∴求ムル立方根ハ x^2-xy+y^2

〔讀者ハ尙一般ノ方法ニヨリ試ムベシ.〕

(3) $1-9x^2+33x^4-63x^6+66x^8-36x^{10}+8x^{12}$

解 原式$=(1-3x)^3+6x^4-36x^6+66x^8-36x^{10}+8x^{12}$

$=(1-3x^2)^3+6x^4(1-6x^2+11x^4-6x^6)+8x^{12}$

$=(1-3x^2)^3+6x^4\{(1-6x^2+9x^4)+2x^4-6x^6\}+8x^{12}$

$=(1-3x^2)^3+6x^4(1-3x^2)^2+12x^8(1-3x^2)+8x^{12}$

$=\{(1-3x^2)+2x^4\}^3$

∴求ムル立方根ハ $1-3x^2+2x^4$

〔讀者ハ尙一般ノ方法ニヨリテ試ムベシ.〕

(初學者ハ次ノ三條ヲ省略スルモ可ナリ)

135. 代數式ノ平方根ノ或ル若干項ガ求メ得ラレタルトキハ通例ノ除法ニヨリテ尙ホ多クノ項ヲ見出スコトヲ得ベシ. 通常コノ方法ヲ呼ンデ**省略開平法**ト云フ.

平方根ヲ求メ得ベキ代數式ヲ次ノ代數式ノ平方ニ等シキモノトス.

$$(a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots\cdots+a_rx^{n-r+1})+(a_{r+1}x^{n-r}+\cdots\cdots+a_{2r}x^{n-2r+1})+R$$

爰ニ$a_1, a_2\cdots\cdots a_{2r}$ナル係數ハ上式ヲ平方ニセシトキ得ル式ノ$x$ノ最初ノ$2r$羃即チ$x^{2n}$ヨリ$x^{2n-r}$迄ノ項ト平方根ヲ求メ得ベキ原式ニ於テ之レニ相等スル項トヲ比較シテ求メ得ラルベシ即チ次ノ如シ.

上式ノ平方ハ

$$(a_1x^n+a_2x^{n-1}+\cdots\cdots+a_rx^{n-r+1})2$$

$$+2(a_1x^n+\cdots\cdots+a_rx^{n-r+1})(a_{r+1}x^{n-r}+\cdots\cdots+a_{2r}x^{n-2r+1})+$$

$$+[(a_{r+1}x^{n-r}+\cdots\cdots+a_{2r}x^{n-2r+1})^2+2R(a_1x^n+\cdots\cdots+a_rx^{n-r+1})+$$

$$+2R(a_{r+1}x^{n-r}+\cdots\cdots+a_{2r}x^{n-2r+1})+R^2]$$

R ニ於テ x ノ最高羃ハ x^{n-r} ナルガ故ニ此式ノ〔〕内ニアル x ノ最高羃ハ x^{2n-2r} 以内ナリ.

之レニ依リテ〔〕内ノ式ハ　$a_1, a_2, a_3\cdots\cdots a_{2r}$ ト比較シテ之レヲ求メ得ベキ x ノ高次ノ羃ヲ有セズ, 何トナレバ此等ノ係數ヲ有セル平方根ノ x ノ指數ハ n ヨリ $n-r-1$ 迄ナルガ故ニ其平方式ハ $x^{2n-2r+1}$ ヨリ低クカラザル可カラズ即チ原式ノ最初ノ項ハ x^{2n} ヨリ $x^{2n-2r+1}$ 迄ニ至ルヲ以テナリ.

故ニ原式中ヨリ平方根ノ最初ノ r 項ノ平方ヲ減シタル殘式ヲ其 r 項ノ 2 倍ニテ割レバ平方根ノ次項 r 項ヲ得ルナリ.

之レヲ式ニテ示セバ

$2(a_1x^n+\cdots\cdots+a_rx^{n-r+1})(a_{r+1}x^{n-r}+\cdots\cdots+a_{2r}x^{n-2r+1})$ ヲ

$2(a_1x^n+\cdots\cdots+a_rx^{n-r+1})$ ニテ割レバ平方根ノ次項 r 項ヲ見出シ得ルナリ.

136. 代數式ノ立方根ノ第 r 項ヲ得タルトキハ單ニ除法ニヨリテ其立方根ノ次項ヲ求ムルコヲ得.

今 $(A+B)^3$ ヲ或ル代數式トシ一ツノ文字(例ヘバ x)ニ付キテ遞降羃ニ整列シタルモノトス.

故ニ A ハ B ヨリ x ニ就キテ高次ノ式ナリ.

今 A ヲ $(A+B)^3$ ノ立方根ノ最初ノ r 項トスレバ

$(A+B)^3-A^3=(3A^2+3AB+B^2)B$ ヲ得.

而シテ除法ニヨリ A ノ平方ノ 3 倍ニテコノ殘式ヲ除スレバ次ノ如シ

$$\frac{(A+B)^3-A^3}{3A^2}=B+\frac{(3AB+B^2)B}{3A^2}$$

上式ニ於テ B ヲ得タリ即 B ハ A ノ次項ニテ除法ニヨリテ得タルモノナリ.

試ミニ B ハ立方根ノ最初 r 項ノ次ノ項ナラズトセンカ

$\dfrac{(3AB+B^2)B}{3A^2}$ ハ x ニ就テ B ト同次ナラザル可カラズ

然ルニ A ハ B ヨリ高次ナルヲ以テ $\dfrac{(3AB+B^2)B}{3A^2}$ ハ A ヨリハ必ズ低次ナリ故ニ B ヲ以テ r 項ノ次ノ項トス.

137. 省畧開平法ノ例.

$$x^{10}+6x^9+13x^8+4x^7-18x^6-12x^5+14x^4-12x^3+9x^2-2x+1$$

ノ平方根ヲ求ム.

〔此例ニ於テ根ノ最初三項ヲ得ルトキハ其殘リノ二項ハ除法ニヨリテ得ラルベシ〕

始メ先ツ通例ノ方法ニテ次ノ如ク演算ス.

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^{10}+6x^9+13x^8+4x^7-18x^6-12x^5+14x^4-12x^3+9x^2-2x+1 \;\big(\, x^5+3x^4+2x^3-4x^2+x-1 \\
 & x^{10} \\
\hline
2x^5+3x^4 & 6x^9+13x^8+4x^7-18x^6-12x^5+14x^4-12x^3+9x^2-2x+1 \\
 & 6x^9+9x^8 \\
\hline
2x^5+6x^4+2x^3 & 4x^8+4x^7-18x^6-12x^5+14x^4-12x^3+9x^2-2x+1 \\
 & 4x^8+12x^7+4x^6 \\
\hline
2x^5+6x^4+4x^3-4x^2 & -8x^7-22x^6-12x^5+14x^4-12x^3+9x^2-2x+1 \\
 & -8x^7-24x^6-16x^5+16x^4 \\
\hline
2x^5+6x^4+4x^3-8x^2 & 2x^6+4x^5-2x^4-12x^3+9x^2-2x+1 \\
 & 2x^6+6x^5+4x^4-8x^3 \\
\hline
 & -2x^5-6x^4-4x^3+9x^2-2x+1 \\
 & -2x^5-6x^4-4x^3+8x^2 \\
\hline
 & x^2-2x+1
\end{array}
$$

之レニ由テ此平方根ハ

$$x^5+3x^4+2x^3-4x^2+x-1$$

而シテ此殘リ x^2-2x+1 ハ此最後二項 $x-1$ ノ平方ナルガ故ニ與ヘラレタル式ハ完全平方數ナルヲ知ル.

省略開立法ノ演算モ之レト同様ナル方法ヲ以テ行ヒ得ベシ,讀者自ラ是レヲ試ムベシ.

第二十三章

比.比例及ビ對變

138. 甲ナル數ノ中ニ乙ナル數ガ幾個含マレテ居ルカヲ索ムル爲メニ此二數ヲ比ブルコヲ甲數ノ乙數ニ對スル**比**ヲ索ムト云フ.

比トハ何ナルカト云フ問ヒニ對シテ充分滿足ナル答ヲナシ能ハズ.然レモ上ノ如ク云フトキハ兎ニ角比ナルモノニ對シテノ明確ナル定義ヲ與フルモノナリ.

甲ナル數ノ乙ナル數ニ對スル比ノ値ハ甲ヲ乙ニテ割リテ得ル所ノ商ニ等シ.

例ヘバ 6ノ2ニ對スル比トハ何處マデモ6ノ2ニ對スル比ナリ,而シテ其比ノ値ハ6ヲ2ニテ割リテ得ル商3ニ等シ.

注意 然レモ屢々比ノ値ト云フベキヲ略シテ單ニ比ト云フコトアリ,故ニ比ナル言葉ハ比ノ値ト云フ意味ニモ用ヰラルルコトアリト知ルベシ.

例ヘバ 二ツノ比ガ相等シトハ其値ガ相等シト云フ意味ナリ.

甲ナル數ノ乙ナル數ニ對スル比ヲ書キ表ハスニハ甲數ノ右ニ「:」ナル符號ヲ書キ其右ニ乙數ヲ書クヲ法トス.

例ヘバ a ノ b ニ對スル比ヲ $a:b$

5ノ6ニ對スル比ヲ 5:6

$\frac{1}{2}$ ノ $\frac{1}{3}$ ニ對スル比ヲ $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$

ト書クガ如シ

比ナル言葉ヲ**比ノ値ノ意味**ニ用フル片ハ

a ノ b ニ對スル比ハ $\dfrac{a}{b}$

5 ノ 6 ニ對スル比ハ $\dfrac{5}{6}$

$\dfrac{1}{2}$ ノ $\dfrac{1}{3}$ ニ對スル比ハ $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}$ ト書ク.

分數ノ性質ニヨリ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ma}{mb}$

今 $ma=\mathrm{A}$

$mb=\mathrm{B}$ ト置ク片ハ

$$\frac{a}{b}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$$

即 a ト b ノ比ガ A ト B ノ比ニ等シト云フヲ得ベシ.

139. 二ツノ分數ノ比ハ二ツノ整數ノ比トシテ表ハスコヲ得.

二ツノ分數ヲ $\dfrac{a}{b}$ 及ビ $\dfrac{c}{d}$ ナリトセバ 其比ハ $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$

即 $\dfrac{ad}{bc}$ ヲ以テ表シ得.

140. 若シ比ノ一項若クハ兩項ガ不盡數ナル片ハ此比ノ値ヲ精密ニ表ハスベキ整數ヲ求ムルコトヲ得ズ.

141. 若シ二ツノ量ノ比ヲ二ツノ整數ノ比ニテ精密ニ表スコトヲ得ル片ハ此二量ヲ通約スベキ量ト云ヒ, 否ラザル片ハ通約スベカラザル量ト云フ.

二ツノ通約スベカラザル量ノ比ヲ精密ニ表スベキ二ツノ整數ハ之レヲ求ムルコト能ハズト雖モ, 其比ニ近似シタルモノハ之レヲ表スコ

トヲ得ルナリ. 而シテ其近似ノ度ハ欲スルダケ精密ニ至ラシムルコトヲ得ルモノナリ.

例ヘバ 二ツノ量ノ比ガ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ ニテ表ハサルベキモノナリシトセム

然ラバ

$$\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{2.236068\cdots\cdots}{4}=0.559017\cdots\cdots$$

故ニ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}>\dfrac{559017}{1000000}$

ニシテ $\dfrac{\sqrt{5}}{4}<\dfrac{559016}{1000000}$

ナリ. 即 $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ ハ $\dfrac{559017}{1000000}$ ト $\dfrac{559018}{1000000}$ トノ間ニアリテ何レヲ其比ノ値トスルモ其誤差ハ $\dfrac{1}{1000000}$ 即百萬分ノ一ヨリ小ナルナリ.

若シ小數ヲ求ムルコト一層密ナル片ハ其近似ノ度モ亦一層進ムベシ.

142. **定義** 若干個ノ比ノ前項ノ積ト後項ノ積ヨリ成レル一ツノ比ヲ其諸比ノ複比ト云フ. 例ヘバ

$ac:bd$ ハ $a:b$ ト $c:d$ トノ複比ナリ.

又 $a^2:b^2$ ハ $a:b$ ト $a:b$ トノ複比ナレドモ, 通常之ヲ呼ンデ $a:b$ ノ**二乘比** (Duplicate ratio) ト云フ.

又同樣ニ $a^3:b^3$ ヲ $a:b$ ノ**三乘比** (Triplicate ratio) ト云フ. 而シテ又 $a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}$ ヲ稱シテ $a:b$ ノ**半乘比** (Subduplicate ratio) ト云フ.

比例

143. 四ツノ數アリテ其第一ガ第二ニ於ケル比ト第三ガ第四ニ於

ケル比ト相等シキトキハ此四數ハ比例ヲナスト云フ。

例ヘバ　$abcd$ ナル四數アリテ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ナルトキハ $abcd$ ナル四數ハ比例ヲナスナリ。

比例ニ於ケル四數ノ中第一及ビ第四ヲ**外項**ト稱シ，第二及ビ第三ヲ**中項**ト稱ス。

144. **定理**　比例ノ外項ノ積ハ中項ノ積ニ等シ。

$abcd$ ガ比例ヲナストキハ定義ニヨリ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

此式ノ兩邊ニ bd ヲ掛クレバ

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd$$

即　$ad=cb$

此定理ハ甚ダ必要ナルモノナリ。

上ノ定理ノ逆定理モ亦眞ナリ。即

$ad=bc$ ナルトキハ a,b,c,d ノ四數ハ比例ヲナス。

何者　$ad=bc$

ノ兩邊ヲ b,d ニテ割ルトキハ

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$$

即　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

之レニ依リテ $abcd$ ガ比例ヲナストキハ次ノ如キ四ツノ關係アルヲ知ル。

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

$$\frac{b}{d}=\frac{a}{c}.$$

何トナレバ，此四ツハ總テ $a.d=b.c$ ヨリ誘導シ得ラルヽ故ナリ。

故ニ又此四ツノ關係ノ內一ツガ眞ナルトキハ他ノ三ツモ同時ニ眞ナルベキナリ。

145.　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ　$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{b-d}$　ナリ。

何者

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$　ヨリ　$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$

及ビ　$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$

之レニ由テ　$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

及ビ　$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

故ニ

$$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}}=\frac{\frac{c+d}{d}}{\frac{c-d}{d}}$$

即

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\qquad ナリ。$$

146. **定義** 一群ノ數アリテ其第一ノ第二ニ於ケル比ガ第二ノ第三ニ於ケル比ニ等シク,而シテコノ比ガ第三ノ第四ニ於ケル比ニ等シク,以下遂テ斯クノ如クナル𪜈ハ,此等ノ諸數ハ**連比例**ヲナスト云フ.

例ヘバ $a, b, c, d, e, f, \cdots$ ガ次ノ如クル𪜈ハ連比例ヲナスト云フ.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$$

而シテ三ツノ數 a,b,c アリテ連比例ヲナス𪜈,即チ

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$ $a:b=b:c$

ナル𪜈ハ b ヲ a 及 c ノ**比例中數**ト云ヒ,c ヲ a 及ビ b ノ**第三比例數**ト云フ.

147. abc ガ連比例ヲナス𪜈ハ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ ナルガ故 **144** 條ニヨリテ $b^2=ac$ ナリ.

由テ $b=\sqrt{ac}$

之レニ由テ"兩數ノ間ノ比例中數ハ其兩數ノ積ノ平方根ニ等シ."

148. abc ガ連比例ヲナス𪜈ハ a ノ c ニ於ケル比ハ a ト b ノ比ノ二乘比ニ等シク,又 b ト c ノ比ノ二乘ニモ等シ.

何者 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$

此式ノ兩邊ニ $\dfrac{b}{c}$ ヲ掛クレバ

$$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{b}{c}\times\frac{b}{c}$$

即 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b^2}{c^2}$

然ルニ $\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{b}$ ナルガ故ニ $\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$

$$\frac{a}{c}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

149. **代數學ニ於ケル比例ノ定義ト幾何學(「ユークリッド」流ノ)ニ於ケル比例ノ定義ノ比較**

「ユークリッド」ノ比例ノ定義ハ次ノ如シ.

茲ニ四ツノ量アリテ其第一及ビ第三ヲ任意ニ等倍シ,又第二及ビ第四ヲ任意ニ等倍シ,而シテ第一ノ其倍數ガ第二ノソレニ對シテ大ナルカ等シキカ小ナルカニ從ヒ,第三ノ其倍數ガ其四ノソレニ對シテ大或ハ等或ハ小ナル𪜈ニ此四量ハ比例ヲナスト云フ.

斯クノ如ク「ユークリッド」流ノ幾何學ニ於テハ,數ヲ用ヒズシテ量ソレ自身ヲ以テスルガ故ニ上ノ如ク述ブルヲ要スルナリ.

然ルニ代數學ニ於テハ,數ヲ扱フガ故ニ其定義モ亦已ニ述ベタルガ如ク,自ラ異リ,四數 a,b,c,d ガ比例ヲナス𪜈ハ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ナリ.

但シ上ニ示シタル第一量ヲ或ル單位ヲ以テ計リ,其單位ノ a 倍アリタリトシ,以下第二量ハ同シ單位ノ b 倍,第三量ハ c 倍,第四量ハ d 倍アリシトス.

然シテ此等ノ四量ヲ自身ヲ表スニ ABCD ヲ以テスベシ.

扨上ニ述ベタル「ユークリッド」ノ比例ノ定義ノ文中ニアル第一及第

三ノ等倍量ヲ m トシ，第二及ビ第四ノ等倍量ヲ n トスレバ，(m 及ビ n ハ零ニアラザル數)

$$\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}\qquad ナリ．\left(\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$$

故ニ mA ガ nB ヨリ大ナルカ或ハ等シキカ或ハ小ナルカニ從ヒテ nC ハ nD ヨリモ大或ハ等或ハ小ナルベシ．

是レ「ユークリツド」ノ定義ニ對應スルモノナリ．

上ニ云ヒタルハ代數學ノ比例ノ定義 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ヨリ「ユークリツド」ノ定義ニ誘キタレドモ．今若シ ABCD ガ「ユークリツド」ノ比例ノ定義ニ適合スルモノトシ，之レヲ代數學ノ定義ニ導クコヲ次ニ示サム．

a 及 b ガ不盡數ナラズトシ $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ ナリトス，但 m 及ビ n ハ整數ナリ．(零ニアラサル)

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\quad ヨリ\quad na=mb$$

假定ニヨリ $\quad nA \gtreqless mB \quad$ ニ從ヒ $\quad nC \gtreqless mD$

($\gtreqless$ ナル符號ハ"大ナルカ等シキカ小ナルカ"ナル意味ト知ルベシ．)

然ルニ $\quad na=mb\quad$ ナルニヨリ $\quad nc=md$

依テ $\quad \frac{c}{d}=\frac{m}{n}$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

故ニ ABCD 四量ハ比例ヲナス．

$a\ b\ c\ d$ ガ不盡數ナルトキモ上ノ結果ヲ誘導スルコトヲ得．

例題

(1) $7+x$ ト $12+x$ トノ比ガ 5 ト 6 トノ比ニ等シト云フ x ノ値如何ナルベキカ．

解． 題意ニヨリ $\frac{7+x}{12+x}=\frac{5}{6}$

x ハ -12 ニアラズト假定シ，兩邊ニ $(12+x)6$ ヲ掛クレバ

$$6(7+x)=5(12+x)$$

$$\therefore\quad x-18=0$$

$$\therefore\quad x=18$$

$42+6x=60+5x$

(2) $6x^2+6y^2=13xy$ ナルトキ x ト y ノ比ノ値如何．

解． 原方程式ヲ變形スレバ(全体ヲ y^2 ニテ割ル)

$$6\left(\frac{x}{y}\right)^2-13\left(\frac{x}{y}\right)+6=0$$

即 $\quad \left(2\frac{x}{y}-3\right)\left(3\frac{x}{y}-2\right)=0$

依テ $\quad 2\frac{x}{y}-3=0\quad$ 或ハ $\quad 3\frac{x}{y}-2=0$

第一ノ式ヨリ $\quad \frac{x}{y}=\frac{3}{2}\quad$ ……….(1)

第二ノ式ヨリ $\quad \frac{x}{y}=\frac{2}{3}\quad$ ……….(2)

答 $\frac{3}{2}$ 或ハ $\frac{2}{3}$

$x-18=0$

$x=18$

(3) $x+1$ ト $x+6$ トノ比ガ 3 ト 5 トノ比ノ二乘比ニ等シキ如キ

x ノ値ヲ求ム.

解. 題意ニヨリ $\frac{x+1}{x+6}=\frac{3^2}{5^2}$

故ニ $25(x+1)=9(x+6)$

之レヲ解キテ $x=\frac{29}{16}$ ヲ得.

(4) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナル卜キ次ノ各式ノ成立ツコトヲ證セヨ.

i $\frac{a^2+ab+b^2}{c^2+cd+d^2}=\frac{a^2-ab+c^2}{c^2-cd+d^2}$ $\frac{b^2k^2+bkb+b^2}{d^2k^2+dkd+d^2}$

$a=bk$, $c=dk$

ii $\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{(2a^2-3b^2)}}{\sqrt{(2c^2-3d^2)}}$

iii $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{(a+b)^2+(c+d)^2}=\frac{(a+c)^2+(b+c)^2}{(a+b+c+d)^2}$ $b^2(k^2+k+1)$

解(i) $\frac{a}{b}$ ノ値或ハ之レニ等シキ $\frac{c}{d}$ ノ値ヲ k トスレバ $a=bk$ 及ビ $c=dk$ ナリ

依テ $\frac{a^2+ab+b^2}{c^2+cd+d^2}=\frac{(bk)^2+(bk)b+b^2}{(dk)^2+(dk)d+d^2}=\frac{b^2(k^2+k+1)}{d^2(k^2+k+1)}=\frac{b^2}{d^2}$

$=\frac{b^2(k^2-k+1)}{d^2(k^2-k+1)}$ (1ニ等シキ $\frac{k^2-k+1}{k^2-k+1}$ ヲ掛クルモ差支ナキガ故ニ)

$=\frac{bk^2-(bk)b+b^2}{(dk)^2-(dk)d+d^2}=\frac{a^2-ab+b^2}{c^2-cd+d^2}$

(ii) $\frac{a+b}{c+d}=\frac{bk+b}{dk+d}=\frac{b}{d}=\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{d^2}}=\frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{d^2}}\times\frac{\sqrt{(2k^2-3)}}{\sqrt{(2k^2-3)}}$

$=\frac{\sqrt{(2b^2k^2-3b^2)}}{\sqrt{(2d^2k^2-3d^2)}}=\frac{\sqrt{(2a^2-3b^2)}}{\sqrt{(2c^2-3d^2)}}$

(iii) $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{(a+b)^2+(c+d)^2}=\frac{b^2k^2+b^2+d^2k^2+d^2}{(bk+b)^2+(dk+d)^2}$

$=\frac{(b^2+d^2)(k^2+1)}{(b^2+d^2)(k+1)^2}=\frac{k^2+1}{(k+1)^2}=\frac{(k^2+1)(b+d)^2}{(k+1)^2(b+d)^2}$

$=\frac{(bk+dk)^2+(b+d)^2}{(bk+dk+b+d)^2}=\frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{(a+b+c+d)^2}$

(5) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナル卜キ $ab+cd$ ハ a^2+c^2 及ビ b^2+d^2 ノ比例中數ナリ. 其證如何.

解. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルガ故 $\frac{a}{b}\times\frac{b^2}{cd}=\frac{c}{d}\times\frac{b^2}{cd}$

即 $\frac{ab}{cd}=\frac{b^2}{d^2}$

故ニ $\frac{ab}{cd}+1=\frac{b^2}{d^2}+1$ 即 $\frac{ab+cd}{cd}=\frac{b^2+d^2}{d^2}$ ....(A)

同様ニシテ $\frac{c}{d}\times\frac{ab}{c^2}=\frac{a}{b}\times\frac{ab}{c^2}$

$\frac{ab+cd}{cd}=\frac{a^2+c^2}{c^2}$ ....(B)

(A)及ビ(B)ヨリ $\frac{b^2+d^2}{ab+cd}=\frac{ab+cd}{a^2+c^2}$

即 $ab+cd$ ハ a^2+c^2 及ビ b^2+d^2 ノ比例中數ナリ.

相變數 (對變) Variation.

150. 定義 A及ビBノ二量アリテ若シBノ値ガ變ハル卜キハAノ値モ亦同シ比ヲ以テ變ハル可キ關係ヲ有スル卜キハ A ハ B ニ準ヒテ變ハル卜云フ, 或ハ略シテ A ハ B ノ如ク變ズ卜云フ.

例ヘバ A ノ或ル二ツノ値ヲ a_1, a_2 トシ之レニ應ズル B ノ二ツノ

値ヲ $b_1 b_2$ トスレバ

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2} \quad \therefore \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$$

ナルナリ.

之レニ由リテ對變スル二量ノ相應スル價ハ一ツノ常數比ヲナス.

即 a ガ b ノ如ク變ズルトキハ $\frac{a}{b}$ ハ常數ナリ, 今此常數ヲ m ト名ツクレバ

$$\frac{a}{b}=m \quad \therefore \quad a=mb$$

記號「$\propto$」ハ「ノ如ク變ズ」ト云フ語ノ代リニ用フ, 故ニ A∝B ハ「A ハ B ノ如ク變ズ」ト云フコトヲ代表スルモノト知ルベシ.

對變ノ實例ヲ示サムニ, 例ヘバ三角形ノ面積ハ其高サガ一定ナルトキハ底邊ノ大小ニヨリテ比例シ底邊ガ a ナルトキノ面積ト底邊ガ $2a$ ナルトキトノ面積トヲ比較スルニ後者ハ前者ノ二倍ナルコト幾何學ニ於テ知ル所ナリ, 一般ニ底邊ガ m 倍トナレバ面積モ亦 m 倍トナル即高サ一定ナル三角形ノ面積ハ底邊ノ如ク變ズルナリ.

依テ高サガ不變ナルトキ三角形ノ面積ハ底ノ大サニ從ヒテ變ズルコトヲ表スニ S, B ヲ以テ夫々面積及ビ底ヲ表セバ

$$S \propto B$$

ノ如ク記スルナリ.

或ハ又算術ニ於テ屢出ツル比例ノ應用問題ニ在ルガ如ク, 茶ノ量ノ或ル二ツノ値ヲ 2 斤及ビ 5 斤トシ金ノ量ノ之レニ相應ズル値ヲ 4 圓及ビ 10 圓トスレバ

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$$

即茶ガ 2 斤ノトキハ金額ハ 4 圓ニシテ茶 5 斤ノトキハ其金額 10 圓トナルトキ茶ノ量ハ金ノ量ノ如ク變ズト云フナリ.

$a\propto b$ ナルトキハ $\frac{a}{b}$ ハ常數ナルコト巳ニ述ベタルガ如シ, 此常數 m ノ値ヲ求ムルニ或場合ニ於テハ唯 a 及ビ b ノ相應スル價一組ヲ知ルコトヲ要スルノミ.

例ヘバ $a\propto b$ ナルトキニ $b=5$ ナルトキ $a=15$ ナルコトヲ知レバ

$$\frac{a}{b}=m=\frac{15}{5} \quad \therefore \frac{a}{b}=3 \quad 即 \quad a=3b$$

151. 第一ノ量ノ任意ノ値ガ常ニ第二ノ量ノ之レニ相應スル値ノ逆數ナル如クニ變ズルトキハ第一ハ第二ノ如ク反變スト云フ.

故ニ $\frac{a}{\frac{1}{b}}$ ナル比ノ値ガ常ニ常數ナルトキハ a ハ b ノ如ク反變スト云フ.

故ニ $\frac{a}{\frac{1}{b}}=m$ 即 $ab=m$

一ツノ量ガ他ノ二量ノ積ノ如ク變ズルトキ 例ヘバ

$a\propto bc$ ナルトキハ a ハ b 及 c ノ如ク變ズト云フ

即 $a=mbc$ ニシテ m ハ常數ナリ.

同樣ニ $a=m\frac{b}{c}$ ナルトキハ a ハ b ノ如ク正變シ c ノ如ク反變スト云フ. (通例 a ハ b ニ比例シ c ニ反比例スト云フガ如キ同意味ト知ルベシ)

注意 aガbノ如ク變ズ(或ハaハbニ比例ス)ト云フ事ハ結局aトbノ比ノ値ガ常數ナリト云フ事ト同ジ.

上ニ定メタル相變數ノ各場合ニ於テ相應スル價ノ壹組ヲ知ルトキハ常數ヲ見出シ得ベシ.

例ヘバ aガb及ビcノ如ク變ズルトキ $b=4, c=3$ $a=8$ ナレバ次ノ如シ

$$a=mbc$$

$$8=m\times4\times3$$

依テ $$m=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ a=\frac{2}{3}bc$$

152. 定理 aガ單ニb及ビcノミニヨリテ變ジ而シテaハcガ常數ナルトキハbノ如ク變ジ, 又bガ常數ナルトキハcノ如ク變ズルトキハ若シb及cノ雙方共ニ變ズルトキハaハ$b\times c$ノ如ク變ズ.

aハbニ比例シ又cニモ比例スルトキハaハ$b\times c$ニ比例スト云フ.

此定理ハ甚ダ要目ナルモノナリ, 今次ニ其證明ヲ掲ゲン.

初メcハ常數ナル場合ニハbガb'ナル値ヲトルトキハaハ從テ或ルa'ナル値ヲトラム, 次ニ又bガ常數ニシテ其値b'ニ保チツヽcヲc'ニ變ズルトキハaトa''ナル値ヲトルモノトセン. 然ルトキハa,b,c, a',b',c及ビa'',b',c'ノ相應ノ三組ミアリ. 扨テcハ第一及ビ第二ニ於テハ同一ナルガ故ニ

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又b'ハ第二及ビ第三ニ於テハ同一ナルガ故ニ

$$\frac{a'}{a''}=\frac{c}{c'} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)及ビ(2)ヨリ $$\frac{a}{a'}\times\frac{a'}{a''}=\frac{b}{b'}\times\frac{c}{c'}$$

$$\therefore\ \frac{a}{a''}=\frac{bc}{b'c'}$$

即 $a=\dfrac{a''}{b'c'}bc$ 但シa'',b',c'ハabcノ値ナルガ故常數ナリ.

故ニ $\dfrac{a''}{b'c'}$ ハ常數ナリ之レヲMト名ヅクレバ

$$a=\mathrm{M}b.c$$

$$\therefore\ a\propto b.c$$

之レヲ例スレバ

三角形ノ面積ハ高サガ常數ナルトキハ底邊ノ如ク變ジ, 底邊ガ常數ナルトキハ高サノ如ク變ズ, 之レニヨリテ高サ及ビ底邊ノ兩方共變ズルトキハ面積ハ高サト底邊ノ相乘積ノ如ク變ズ.

例題

(1) 圓ノ面積ハ其半徑ノ平方ノ如ク變ズ, 而シテ其半徑10尺ナル圓ノ面積ハ314.159平方尺ナリ, 然ラバ半徑7尺ナル圓ノ面積ハ幾許ナルカ.

(解) 面積ヲSトシ半徑ヲRトスレバ

$S \propto R^2$

即チ $S=mR^2$ (m ハ常數)

即チ $314{\cdot}159=m\times10^2$

$\therefore\ m=3{\cdot}14159$

依テ $S=3{\cdot}1459\times7^2$ ハ所要ノ面積ナリ.

(2) 球ノ体積ハ其半徑ノ立方ノ如ク變ズ,其半徑1尺ナル球ノ体積ハ 4·188 立方尺ナリ. 依テ半徑 3 尺ノ球ノ体積ヲ求ム.

(解) 球ノ体積ヲ V ニテ表シ,又其半徑ヲ R ニテ表ストキハ

$V=mR^3$

即チ $4{\cdot}188=m\times1^3$

$\therefore\ m=4{\cdot}188$

故ニ $V=4{\cdot}188\times3^3$ (立方尺) ハ所要ノ体積ナリ.

(3) 海面ヲ望ムニ其望見距離ハ水平面上ノ目ノ高サノ平方根ノ如ク變ズ,今目ノ高サ 6「フヒート」ナル時望見距離3哩ナリ,高サ 72「ヤード」ノ處ニテハ何哩迄ヲ望ミ得ベキカ.

(解) 6「フヒート」$=\frac{6}{3}$ 即 2「ヤード」ナリ

今距離ヲ D, 高サヲ H ニテ表ハセバ

$D=m\sqrt{H}$

即チ $3=m\sqrt{2}$

$\therefore\ m=\frac{3}{\sqrt{2}}$

由テ $D=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\sqrt{72}=18$ (哩) ナリ.

比例ニ關スル雜題及ビ其解

(1) $a+b,\ b+c,\ c+a$ ガ連比例ヲナス時ハ

$\frac{b+c}{c+a}=\frac{c-a}{a-b}$ ナルコトヲ証セヨ.

(解) 題意ニヨリ $\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}$

$\therefore\ 1-\frac{a+b}{b+c}=1-\frac{b+c}{c+a}$

即チ $\frac{c-a}{b+c}=\frac{a-b}{c+a}$

$\therefore\ \frac{b+c}{c+a}=\frac{c-a}{a-b}$

(2) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ナル時次ノ式アルヲ証セヨ.

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$$

(解)

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$ トスレバ

$x=ka,\ y=kb,\ z=kc.$

依テ $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{k^3a^3}{a^2}+\frac{k^3b^3}{b^2}+\frac{k^3c^3}{c^2}$

$$=k^3(a+b+c)$$

$$=\frac{k^3(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{(ak+bk+ck)^3}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+z)^2}$$

(3)　$(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$

ナラバ　a,b,c,d ハ比例ヲナスト云フ，之レヲ証明セヨ．

(解)　原式ヨリシテ　$(a+d)^2-(b+c)^2=(a-d)^2-(b-c)^2$

故ニ　$(a+d)^2-(a-d)^2=(b+c)^2-(b-c)^2$

此式ヲ簡單ニセバ　$4ad=4bc$

トナル　即チ　$ad=bc$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

(4)　7, 10, 19, 31 ナル各數ヨリ如何ナル數ヲ減ゼバ其殘リハ比例スベキカ．

(解)　x ヲ索ムル數トセバ題意ニヨリ

$$\frac{7-x}{10-x}=\frac{19-x}{31-x}\quad ナリ$$

依テ　$(7-x)(31-x)=(10-x)(19-x)$

之レヲ解キテ　$x=3$　ヲ得．

(5)　$a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$　ナルトキハ

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$$ ナルコトヲ証セヨ．

(解)　$a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$

ナル式ノ各邊ヲ abc ニテ割ルトキハ

$$\frac{y+z}{bc}=\frac{z+x}{ca}=\frac{x+y}{ab}$$

依テ　$$\frac{z+x-(y+z)}{ca-bc}=\frac{x+y-(z+x)}{ab-ca}=\frac{y+z-(x+y)}{bc-ab}$$

即チ　$$\frac{x-y}{c(a-b)}=\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}$$

第二十四章

級數

153. 或ル規率ヲ以テ順次ニ引キ續ク一群ノ數ヲ級數(Seeies)トス云フ．例ヘバ

Series

1, 2, 3, 4, ……………………　1, 2, 3, 4

ノ如キ一群ハ其各項ハ順次ニ 1 ヲ增ストテフ規率ヲ以テ引キ續クガ故ニ級數ナリ．

又　1, 2, 4, 8, 16, 32, ……………

ノ如キモ其各項ハ順次ニ 2 倍スルヲ以テ級數ナリ．

其他　$1, 2^2, 3^2, 4^2,$ ………

ノ如キ，或ハ

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \cdots\cdots\cdots$

ノ如キ

$1+x, 2+x, 3+x, 4+x, 5+x, \cdots\cdots\cdots\cdots$

ノ如キモ一定ノ規率ヲ以テ引キ續クガ故級數ノ一種ナリ.

此章ニ於テ級數ノ最モ簡單ナルモノ, 即チ等差級數, 等比級數, 調音級數ニ就テ講ゼントス.

等差級數 (A.P.)

154. 定義 等差級數(或ハ算術級數) トハ其任意ノ一ツノ項ト其前項トノ差ガ常ニ同ジキ如キ級數ヲ云フナリ, 而シテコノ差ヲ**通差**(或ハ**公差**) ト稱ス.

例ヘバ　$1, 2, 3, 4 \cdots\cdots\cdots$

或ハ　$3, 7, 11, 15, 19, \cdots\cdots\cdots\cdots$

ノ如キハ何レモ等差級數ノ一種ニシテ, 前者ハ其通差 1 ナル等差級數, 後者ハ其通差 4 ナル等差級數ナリ.

其他

$8, 2, -4, -10, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (通差 -6)

及ビ

$a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots\cdots\cdots\cdots$ (通差 d)

ノ如キ皆等差級數ナルヲ知ルベシ.

等差級數ト書ク代リニ英語ノ略記法ヲ用ヒテ A. P. ト書クコトアリ. (之レ等差級數ハ英語ニテ Arithmetical progression) ト云フガ故ナリ)

155. 等差級數ノ第一項ヲ a トシ通差ヲ d トスレバ定義ニヨリテ

第二項 $=a+d$

第三項 $=a+2d$

第四項 $=a+3d$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

上ノ如ク d ノ係數ハ常ニ項ノ數ヨリ 1 少シ, 即チ第二項ノ時ハ d ノ係數ハ $2-1=1$. 第三項ノ時ハ d ノ係數ハ $3-1=2$, 第四項ノ時ハ $4-1=3$ ナリ. コレヲ推シテ進メバ

第 n 項 $=a+(n-1)d$

ナルベキヤ勿論ナリ.

故ニ A. P. ノ第一項及ビ通差ヲ知ル時ハ任意番目ノ項ハ直チニ書キ下スコトヲ得ベシ.

例ヘバ A. P. ノ第一項ハ 5 ニシテ通差 4 ナルコトヲ知レル時ハ其級數ノ第十項ハ

$5+(10-1)4=5+9\times4=41$ ナリ.

又第三十項ハ

$5+(30-1)4=5+29\times4=121$

156. 等差級數ノ任意ノ二ツノ項ヲ知ル時ハ其級數ハ決定セラレ得ベシ.

例ヘバ今 A.P. ノ第 m 項ハ α, 又第 n 項ハ β ナルコトヲ知ル片ハ假リニ第一項ヲ a ニテ表ハシ通差ヲ d ニテ表ストセバ, 第 m 項ハ $a+(m-1)d$, 第 n 項ハ $a+(n-1)d$ ナルガ故

$$a+(m-1)d=\alpha \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$a+(n-1)d=\beta \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

此兩聯立方程式ニ於テ a ト d ガ未知數ナル故之レヲ索ムルコトヲ得ベシ, 之レガ爲メニハ先ツ (1) ヨリ (2) ヲ引キテ

$$(m-n)d=\alpha-\beta$$

$$\therefore \quad d=\frac{\alpha-\beta}{m-n}$$

之レヲ (1) ニ代入シテ $x=(m-1)d=\alpha-(m-1)\dfrac{\alpha-\beta}{m-n}$

$$=\frac{\beta(m-1)-\alpha(n-1)}{m-n}$$

而シテ a 及ビ d ヲ知ラバ最早此級數ハ決定セラレタルモノナリ.

(例)

A.P. ノ第七項ハ 15 ニシテ第二十一項ハ 22 ナリト云フ, 然ラバ第十項ハ如何.

a ヲ第一項トシ d ヲ通差トスレバ

題意ニヨリ $\quad a+(7-1)d=15 \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$

$$a+(21-1)d=22 \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) (2) ノ兩方程式ヨリ $d=\frac{1}{2}$, $a=12$, ヲ得, 依テ

$$第十項=12+(10-1)\frac{1}{2}=16\frac{1}{2}$$

157. 三ツノ數ガ等差級數ヲナストキハ其中央ノ數ヲ名ツケテ他ノ二數ノ**等差中項**ト稱ス. 〔或ハ**算術中項** (Arithmetic Mean) ト云フコトアリ〕

a, b, c ガ A.P. ヲナス片ハ定義ニヨリ.

$$b-a=c-b \qquad \therefore \quad b=\frac{1}{2}(a+c)$$

之レニ依リテ二ツノ數ノ等差中項ハ其兩數ノ和ノ半分ニ等シ.

158. 一群ノ數ガ等差級數ヲナストキニ於テ其兩端ニ在ル數ヲ兩外項ト云ヒ, 中間ニ在ル數ヲ兩外項ノ等差中項ト稱ス.

例ヘバ 7, 9, 11, 13, 15. ノ五數ハ 2 ヲ通差トセル等差級數ナルガ此等ノ中, 7 及ビ 15 ハ外項ニシテ 9, 11, 13, ハ 7 及ビ 15 ノ等差三中項ト稱スルガ如シ.

或ル既知ナル二ツノ數ノ間ニ若干ノ等差中項ヲ挿入スルコトヲ得, 其法次ノ如シ

a 及ビ b ヲ既知ノ二數トシ, コノ二數ヲ外項トシテ其間ニ n 項ノ等差中項ヲ挿入スルモノトスレバ a, b ノ二項ト其間ニ挿入ノ n 項ト共ニ $n+2$ 項ノ等差級數ヲ生ズベク, 而シテ其初項ハ a ニシテ末項即チ第 $n+2$ 項ハ b ナリ.

之レニ由リテ d ヲ通差トスレバ

$$b=a+(n+2-1)d$$

$$\therefore \quad d=\frac{b-a}{n+1}$$

依テ索ムル級數ハ次ノ如シ.

$$a,\quad a+\frac{b-a}{n+1},\quad a+2\frac{b-a}{n+1},\quad a+3\frac{b-a}{n+1},\ \cdots\cdots,\ b$$

然シテ所要ノ等差中項ハ

$$a+\frac{b-a}{n+1},\quad a+2\frac{b-a}{n+1},\quad \frac{(a+3)(b-a)}{n+1},\ \cdots\cdots a+n\frac{b-a}{n+1}$$

即チ $\frac{na+b}{n+1},\ \frac{(n-1)a+2b}{n+1},\ \frac{(n-2)a+3b}{n+1},\ \cdots\cdots\ \frac{a+nb}{n+1}$

ナリ。

例ヘバ 6 ト 18 ノ間ニ等差ノ 5 中項ヲ插入シテ A. P. ヲ作ラントセバ先ヅ d ヲ次ノ如クニ求メ

$$18=6+(5+2-1)d\quad \therefore\quad d=2$$

之レニ依テ索ムル級數

$$6,\ 6+2,\ 6+4,\ 6+6,\ 6+8,\ 6+10,\ 6+12$$

即チ 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

ヲ得。

故ニ所要ノ中項ハ 8, 10, 12, 14, 16 ナリ。

159. 等差級數ノ若干項ノ和ヲ求ムルコト

a ヲ初項, d ヲ通差, n ヲ項數, l ヲ末項 S ヲ和トスレバ

$$l=a+(n-1)d \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l \quad (i)$$

今此和ヲ反對ニ末項ヨリ記ストキハ

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \quad (ii)$$

今(i) (ii)兩式ヲ邊ニ相加フルトキハ

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots n\text{ 項ニ至ル}$$
$$=n(a+l)$$

$$\therefore\quad S=\frac{n}{2}(a+l)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)式ノ l ノ値ヲ(2)式ニ代入スレバ

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2), (3)ノ公式ヨリ $a, d, n, l,$ S ノ五ツノ數ノ内何レカ三ツヲ知ルトキハ殘リ二ツハ索メ得ベシ。

例. A. P. $3+6+9+\cdots\cdots\cdots$ ノ 20 項ノ和ヲ索ム。

$a=3,\ d=3\ \ n=20$ ナルガ故

公式(3)ヲ用ヰテ

$$S=\frac{20}{2}\{2\times3+(20-1)\times3\}=630$$

問題及ビ其解

(1) 次ノ級數ノ和ヲ求ム。

$$5\frac{1}{2},\quad 6\frac{3}{4},\quad 8,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{十七項ニ至ル}$$

24 8 6

(解) 通差ハ $1\frac{1}{4}$, 故ニ(3)ノ公式ヲ用ヒ

$$\text{所要ノ和}=\frac{17}{2}\left\{2\times\frac{11}{2}+16\times1\frac{1}{4}\right\}=\frac{17}{2}(11+20)$$

$$=\frac{17\times31}{2}=263\frac{1}{2}$$

(2) 1ヨリ起ル連續奇數若干項ノ和ヲ求ム。

(解) 所要ノ和ヲ S, 項數ヲ n トスレバ

先ヅ $S=1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots n$ 項ニ至ル

公式(3)ニ於テ $a=1$, $d=2$ ヲ置キ項數ハ n ナルガ故

$$S=\frac{n}{2}\left\{2\times\overset{a}{1}+(n-1)\overset{d}{2}\right\}=n^2$$

(3) $1+5+9+13+\cdots$ 17+21+25+29+33 ……

ナル級數ハ其幾何項ヲ寄スレバ其和ガ 190 トナリ得ルカ。

(解) 例ノ記號ヲ用フルトキハ

$S=190,\ a=1,\ d=4$

公式(3)ニヨリテ

$$190=\frac{n}{2}\left\{2\times1+(n-1)4\right\}$$

即チ $190=n(1+2n-2)$

即チ $2n^2-n-190=0$

或ル因數分括ニシテ $(n-10)(2n+19)=0$

$\therefore\ n=10$ 或ハ $n=-9\frac{1}{2}$

$n=-9\frac{1}{2}$ ハ意味ナキモノナリ，依テ之レヲ棄テ $n=10$ ヲ採用ス。

(4) $24, 20, 16\cdots\cdots\cdots$ ノ級數ヲ何項ニ至ル迄加レバ 72 ヲ得ベキカ。

(解) $a=24,\ d=-4,\ S=72$

公式(3)ニ依リテ $72=\frac{n}{2}\{2\times24+(n-1)(-4)\}=24n-2n(n-1)$

依テ $n^2-13n+36=0$

即チ $(n-4)(n-9)=0\quad\therefore\ n=4$ 或ハ 9.

玆ニ得タル n ノ値ハ二ツ共ニ問ニ應ズベキモノナリ。何者，初項ヨリ第九項ニ至ル諸項ヲ排列スルトキハ

$24, 20, 16, 12, 8, 4, 0, -4, -8$

ニシテ之レヲ加フルトキハ末ノ五項ハ自他互ニ消滅シ此九項ノ和ハ初メノ四項ノ和ニ等シキガ故ナリ。

(5) A. P. ノ第五項ハ 11 及ビ第九項ハ 7 ナルトキ第十四項ハ幾何ナルカ。

(解) 公式(1)ニヨリ

$$\left.\begin{array}{l}11=a+4d\\7=a+8d\end{array}\right\}$$

此聯立方程式ヲ解キ $d=-1\quad a=15$

ヲ得。 $\therefore$ 第十四項 $=15+(14-1)(-1)=2$

(6) A. P. ノ第四項ハ b, 第七項ハ $3a+4b$ ナリ。然ラバ第二項ハ如何。 a A+3d=b

(解) 初項ヲ A, 通差ヲ d トスレバ 公式(1)ニヨリ

$b=A+3d$ 及ビ $3a+4b=A+6d$

之レヨリ $d=a+b,\quad A=-3a-2b$

ヲ得。

之レニ由テ 第二項 $=A+d=-3a-2b+a+b=-2a-b$

(7) 5, 8, 11, ……… ナル級數ノ第何項ガ 320 トナルベキカ.

(解) $a=5,\ d=8-5=3,$

公式(1)ニヨリ $320=5+(n-1)3$

$\therefore\ n=106$

即第百六項ナリ.

(8) A. P. ノ各項ニ同數ヲ加ヘタルモノモ亦 A. P. ヲナス.

(解) $a, b, c, d,$ ……………

ハ A. P. ヲナスモノトスレバ定義ニヨリ

$b-a=c-b=d-c=\cdots\cdots$

此各項ニ同數例ヘバ m ヲ加フレバ

$(b+m)-(a+m)=(c+m)-(b+m)=(d+m)-(c+m)=\cdots\cdots$

由ヲ $a+m,\ b+m,\ c+m,\ d+m,\cdots\cdots$

モ亦 A. P. ヲナス

(9) A. P. ノ各項ニ同數ヲ倍スルモ亦 A. P. ヲナス.

(解) (8)ノ例ニ於テ m ヲ加フル代リニ各項ニ m ヲ掛クレバ

$bm-am=cm-bm=dm-cm=\cdots\cdots$

ノ式成立スベキヲ以テ, a, b, c …… ガ A. P. ヲナストキハ

$am,\ bm,\ cm,\ dm,\cdots\cdots$

モ亦 A. P. ヲナスベキヲ知ル.

(10) A. P. ノ各項間ニ同數ノ等差中項ヲ插入スレバ亦一ツノ A. P. ヲ生ズ.

(解) $a, b, c, d,$ ……………ヲ初メノ等差級數トス, 今コノ各項

ノ間ニ n 項ツヽ等差中項ヲ插入スルモノトスルトキハ 158 條ニ由リテ ab 間ノ插入項ノ通差 $=\frac{b-a}{n+1}$.

bc 間ノ 〃 〃 〃 $=\frac{c-b}{n+1}$.

然ルニ $b-a=c-b$ ナルニヨリ各插入項ノ通差ハ相等シク即チ新タニ生シタル數ノ一群モ亦等差級數ヲナスベキヲ知ル.

(11) 次ノ級數ノ和ヲ求ム.

(i) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{6}$ ……… 12 項ニ至ル　答 -16

(ii) $(a+9b),\ (a+7b),\ (a+5b),$ ……… 10 項ニ至ル

答 $10a$

(iii) $\frac{n-1}{n},\ \frac{n-2}{n},\ \frac{n-3}{n},$ ……………… n 項ニ至ル

答 $\frac{1}{2}(n-1)$

(12) 項數ガ奇數ナル A. P. ノ初項, 中項, 末項ハマタ A. P. ヲナス. コレヲ證明セヨ.

(解) $2n+1$ ヲ項數トシ初項ヲ a, 中項ヲ M, 末項ヲ l トス,

然ルトキハ公式(1)ニヨリテ

$l=a+(2n+1-1)d$　(d ハ通差)

$M=a+(n+1-1)d$

$\therefore\ M-a=nd$ 及ビ $l-M=a+2nd-(a+nd)=nd$

依テ $M-a=l-M$

故ニ a, M, l ハ等差級數ヲナス

(13) 8, 16, 24, ………………… ナル級數ノ若干項ノ和ニ 1 ヲ加フレバ常ニ平方數トナルト云フ. 之レヲ證明セヨ.

（解） n ヲ項數トセバ上ノ級數 n 項ノ和 S ハ公式 (3) ニヨリテ次ノ如シ

$$S=\frac{n}{2}\left\{2\times 8+(n-1)8\right\}=4n^2+4n$$

之レニ由リテ $S+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$

即チ本題ヲ證セリ.

(14) 200 及ビ 400 ノ間ニ於テ 7 ニテ割リ切リ得ベキ凡ベテノ數~~ヲ求ム~~.ノ和ヲ求ムベシ

（解） 200 ヲ 7 ニテ割レバ商 28 ト剩餘 4 ヲ得. 故ニ 7−4 即チ 3 ヲ 200 ニ加フレバ 203 ヲ得テ 200 ト 400 ノ間ニ於ケル數ノ内ノ最モ小ナル 7 ノ倍數タリ.

又 400 ヲ 7 ニテ割レバ剩餘トシテ 1 ヲ得. 故ニ 400 ヨリ 1 ヲ引キタル 399 ハ 200 ト 400 ノ間ニ於ケル 7 ノ倍數ノ最大ナルモノナリ.

1.5.23

之レニ由テ

$$a=203 \quad l=399 \quad d=7$$

ヲ公式(1)ニ代入スレバ $399=203+(n-1)7$

$$\therefore \quad n=29$$

公式(3)ニヨリテ此級數ノ和即チ所要ノ和 S ハ

$$S=\frac{29}{2}\left\{2\times 203+(29-1)\times 7\right\}=8729$$

等比級數 (G.P.)

160. 定義 等比級數(或ハ幾何級數 Geometrical progression) トハ各項ト其前項トノ比(比ノ値)ガ何レモ同一ナル級數ヲ云フ. 而シテ此比ヲ**通比**(或ハ**公比**)ト稱ス.

例ヘバ 1, 3, 9, 27, …………… ハ等比級數ヲナシ通比ハ 3 ナリ

又 4, −2, 1, $-\frac{1}{2}$, ……………

a, a^3, a^5, a^7, ……………

ノ如キモ等比級數ニシテ前者ハ其通比 $-\frac{1}{2}$, 後者ハ其通比 a^2 ナリ.

等比級數ト書ク代リニ英語ノ略記法ヲ用ヰテ G.P. ト書クコトアリ.

161. 等比級數ノ初項ヲ a トシ通比ヲ r トスレバ定義ニヨリ

第二項ハ ar

第三項ハ ar^2

第四項ハ ar^3

……………

以下斯クノ如ク r ノ指數ハ常ニ項ノ數ヨリ 1 ダケ少シ即チ第二項ノ𪜈ハ r ノ指數 1, 第三項ノ𪜈 r ノ指數 2, 第四項ノ𪜈ハ r ノ指數 3 ナルガ如シ, 之レニ由リテ第 n 項ノ𪜈ハ r ノ指數 $n-1$ ナリ 即チ

第 n 項 ハ ar^{n-1}

故ニ等比級數ノ初項ト通比ヲ知ルトキハ何番目ノ項ハ幾何ナルカハ容易ニ知ルコトヲ得.

例ヘバ　G. P. ノ初項 2 ニシテ通比 3 ナルトキ

第五項 $=2\times3^4$

第三十項 $=2\times3^{29}$

162. 等比級數ハ其任意ノ二ツノ項ヲ知ルトキハ決定セラルルモノナリ.　例ヘバ 第 m 項ハ α ニシテ第 n 項ハ β ナルコトヲ知レリトセンニ　a ヲ初項トシ r ヲ通比トスレバ

第 m 項 $=ar^{m-1}$

第 n 項 $=ar^{n-1}$　ナリ.

之レニ由テ　$\alpha=ar^{m-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$

及ビ　$\beta=ar^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$

(A) (B) ヲ聯立方程式トシテ a 及ビ r ヲ索ムレバ可ナリ, 之レガ爲メニハ (A) (B) ノ比ヲトレバ

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ar^{m-1}}{ar^{n-1}}=r^{m-n}$$

$$\therefore\quad r=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{m-n}}=\alpha^{\frac{1}{m-n}}\cdot\beta^{\frac{1}{n-m}}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ar^{m-1}}{ar^{n-1}}=r^{m-n}$$

即チ r ハ索メ得ラレタリ.

又 a ハ　$$a=\frac{\alpha}{r^{m-1}}=\alpha\left(\alpha^{\frac{1}{m-n}}\cdot\beta^{\frac{1}{n-m}}\right)^{1-m}$$

$$a=\alpha^{\frac{1-n}{m-n}}\ \beta^{\frac{1-m}{n-m}}$$

已ニ初項通比ヲ知レル上ハ 161 條ニ示セルガ如クシテ級數ノ任意ノ項ハ書キ下シ得ベク即チ級數ハ決定サレタルモノナリ.

(例)　G. P. ノ第三項ハ 18, 第五項ハ $40\frac{1}{2}$ ナリ. 第一項如何.

a ヲ索ムル第一項トシ r ヲ通比トスレバ

$$18=ar^2,\quad 40\tfrac{1}{2}=ar^4$$

$18=ar^2$
$40\frac{1}{2}=ar^4$

之レニ由テ　$\dfrac{ar^4}{ar^2}=\dfrac{40\frac{1}{2}}{18}$　即チ $r^2=\dfrac{9}{4}$　$\therefore\ r=\dfrac{3}{2}$

$$\therefore\quad a=\frac{18}{r^2}=\frac{18}{\frac{9}{4}}=8$$

163. 三ツノ數ガ等比級數ヲナストキハ其中項ヲ**等比中項**(或ハ幾何中數) (Geometric Mean) ト云フ.

a, b, c ガ G. P. ヲナストキハ定義ニヨリ

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$$

依テ　$b^2=ac$　$\therefore\ b=\pm\sqrt{ac}$

之レニ由テ次ノ規則ヲ得

二數ノ等比中數ハ其二數ノ積ノ平方根ナリ.

若干ノ數ガ等比級數ヲナストキ其中間ノ各數ヲ稱シテ其兩外項ノ**等比中項**ト云フ

例ヘバ $a\ b\ c\ d\ e\ f$ ガ G. P. ヲナストキ

$b\ c\ d\ e$ ハ a, f ノ等比中項ナリ.

既知ノ二數間ニ若干ノ等比中項ヲ挿入スルコトヲ得ベシ

a 及ビ b ヲ既知ノ二數トシ其間ニ n 個ノ等比中項ヲ挿入スルトセバ茲ニ生ズル等比級數ノ項數ハ合セテ $n+2$ 項ナリ. 然シテ初項ハ a ニシテ末項ハ b ナリ.

今公比ヲ r トスレバ

$$b=ar^{n+1} \quad \therefore \quad r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

此級數ハ $\quad a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots ar^n, b$

ニシテ索メントスル中項ハ

$$ar, ar^2, \cdots\cdots\cdots\cdots ar^n$$

ナリ.

故ニ r ニ上ニ得タル値ヲ代入スレバ可ナリ.

即 $\quad a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}, \quad a\sqrt[n+1]{\frac{b^2}{a^2}}, \cdots\cdots\cdots\cdots a\sqrt[n+1]{\frac{b^n}{a^n}}$

即 $\quad \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b}{a}}, \quad \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b^2}{a^2}}, \cdots\cdots\cdots\cdots \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b^n}{a^n}}$

即 $\quad a^{\frac{n}{n+1}}b^{\frac{1}{n+1}}, \quad a^{\frac{n-1}{n+1}}b^{\frac{3}{n+1}}, \cdots\cdots\cdots\cdots a^{\frac{1}{n+1}}b^{\frac{n}{n+1}}$

例ヘバ 3 ト 96 ノ間ニ等比中項四個ヲ入ルヽニ

通比ヲ r トシ, 項數ハ $4+2=6$ ナルガ故ニ

$$96=3r^5 \quad \therefore \quad r=\sqrt[5]{32}=2$$

由テ求ムル項ハ 6, 12, 24, 48 ナリ.

而シテ 3, 6, 12, 24, 48, 96 ハ等比級數ヲナセルヲ見ルベシ.

164. 等比級數ニ於ケル若干項ノ和ヲ求ムルコト

項數ヲ n, 初項ヲ a, 通比ヲ r, 末項ヲ l トスレバ, l ハ第 n 項ナルガ故 $\quad l=ar^{n-1}$

所要ノ總和 S ハ

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} \qquad (1)$$

依テ $\quad Sr=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots ar^{n-1}+ar^n \qquad (2)$

(1) 式ヨリ (2) 式ヲ引ケバ

$$S-Sr=a-ar^n$$

或ハ $\quad S(1-r)=a-ar^n$

$$\therefore \quad S=a\frac{1-r^n}{1-r}$$

(例) G. P. 3, 6, 12, $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ノ 10 項ノ和ヲ求ム.

公式ニ於ケル a ハ 3, r ハ $\frac{6}{3}=2$ n ハ 10 ナルヲ以テ

$$S=a\frac{1-r^n}{1-r}=3\frac{1-2^{10}}{1-2}=3(2^{10}-1)=3069$$

165. 前條ノ公式ハ次ノ如ク書キ換フルヿヲ得ベシ

即チ

$$S=a\frac{1-r^n}{1-r}$$

ヲ $\quad S=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$

ト書キ換フルヿヲ得, 扨テ若シモ r ガ 1 ヨリ小ナル數ナルトキハ其正負ナルニ論ナク n ガ增スニ從ツテ r^n ハ漸次小ナル數トナルベシ, 故ニ n ヲ充分增ストキハ r^n ハ如何程ニモ小ナル數トナスコトヲ得ベシ.

之レニ由テ r ガ 1 ヨリ小ナルトキニ項數ヲ充分多クトレバ $\frac{ar^n}{1-r}$ ニ於ケル分子ハ如何程マデモ小サクナスコトヲ得ベク, 從テ $\frac{ar^n}{1-r}$ ハ極メテ大キクトレバ如何程ニテモ小ナル數トナスコトヲ得ベシ是レ a ハ一定ノ數ニシテ r^n ハ n ヲ大キクトレバトル程如何程ニテモ小サキ小數タルヲ得ルガ故ナリ (或ル定數ニ 1 ヨリ小

ナル數ヲ掛クレバ其積ハ被乘數ヨリモ小ナルガ故ニ)
之レニ由テ $S=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$ ナル式ニ於テ r ガ 1 ヨリ小ナルトキ項數ヲ多クトレバ S ハ $\frac{a}{1-r}$ ト異ルコト極メテ小ニシテ項數ヲ充分多クトルトキハ $\frac{ar^n}{1-r}$ ハ $\frac{a}{1-r}$ ニ對シテ省略シテモ差支ナキニ至ルベシ.
即チ此トキ

$$S=\frac{a}{1-r}$$

トスルモ差支ナシ
即チ $r<1$ ナルトキ

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots=\frac{a}{1-r}$$

(例) 次ノ級數ノ無限項ノ和ヲ求ム.

9, −6, +4, ……………

(解.) a ハ 9 $r=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$ ヲ公式ニ代入スレバ

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{9}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{27}{5}$$

問題及ビ其解

(1) 通比 1 ヨリ小ナル G. P. ノ無限項ノ和ガ $4\frac{1}{2}$ ニシテ其第 2 項ガ −2 ナルトキ此級數ヲ索ム

(解) a ヲ初項 r ヲ通比トスレバ

$ar=-2$ 又 $4\frac{1}{2}=\frac{a}{1-r}$

此二式ヲ聯立方程式トシテ r ヲ見出サムニ 第一ノ式ヨリシテ $a=\frac{-2}{r}$ ヲ得コノ a ノ値ヲ第二ノ式ニ代入スレバ結局次ノ方程式ヲ得 $9r^2-9r-4=0$

之レヲ解キテ $r=-\frac{1}{3}$ 或ハ $\frac{4}{3}$ ……ヲ得
今

$r=\frac{1}{3}$ ヲトレバ $a=-\frac{2}{r}=6$

由テ所索ノ級數ハ

$6,\ -2,\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{9}\cdots\cdots$

ニシテ其無限項ノ和ハ $4\frac{1}{2}$ ナリ.

若シ又 $r=\frac{4}{3}$ ヲトレバ $a=-\frac{2}{r}=-\frac{3}{2}$

由テ所索ノ級數ハ

$-\frac{3}{2},\ -2,\ -\frac{8}{3},\ -\frac{32}{9}\cdots\cdots$

トナル. 然レドモ之レハ不可ナリ何トナレバ $r=\frac{4}{3}$ ハ 1 ヨリ大ナリ然ルニ問題ニ於テ問フ所ノ級數ハ $r<1$ ナルナリ, 即チ $r=\frac{4}{3}$ ヲトルコト能ハザルナリ.

(2) G. P. ノ各項ニ同數ヲ乘ズレバ其積ハ亦 G. P. ヲナス.

(解) a, b, c, d …………ヲ一ツノ G. P. トスレバ

其定義ニヨリ $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\cdots\cdots$

依テ $\frac{bm}{am}=\frac{cm}{bm}=\frac{dm}{cm}=\cdots\cdots$ (但 m ハ 0 ニアラズ)

故ニ $am, bm, cm, dm,$ ……モ亦 G. P. ヲナス

依テ G. P. ノ各項ニ零ヲ除クノ外ノ任意ノ同シ數ヲ乘ズルモ倘G. P. タルヲ失ハズ.

(3) G. P. ノ各項ノ逆數モ亦 G. P. ヲナス

(解) $a\ b\ c\ d$……ヲ G. P. トスレバ

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

今此逆數ヲトレバ $$\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\frac{d}{c}}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即チ $$\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}=\frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{b}}=\frac{\frac{1}{d}}{\frac{1}{c}}=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ $\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},\ \frac{1}{d},\cdots\cdots\cdots\cdots$ モ亦 G. P. ヲナス

(4) G.P. ノ各隣接二項ノ間ニ或ル定數ノ等比中項ヲ挿入スル卉ハ亦 G. P. ヲナス.

(解) $a, b, c,$ ガ G. P. ヲナストシ a, b ノ間及ビ b, c ノ間ニ n 個ノ等比中項ヲ入ルトトセバ

a, b 間ノ n 個中項ノ通比 $=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$　但 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

b, c 間ノ n 個中項ノ通比 $=\sqrt[n+1]{\frac{d}{c}}=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$

依テ a, b 及 b, c 間ニ挿入セル等比中項ニ於ケル通比相等シキヲ見ル即チ本題ヲ證スルモノナリ.

(5) G. P. ノ最初 10 項ノ和ハ最初 5 項ノ和ノ 244 倍ニ等シキトキハ其通比如何.

(解) a ヲ初項, r ヲ通比トスレバ

最初ノ 10 項ノ和 $=a\frac{1-r^{10}}{1-r}$ 又, 最初ノ 5 項ノ和 $=a\frac{1-r^{5}}{1-r}$

依テ $a\frac{1-r^{10}}{1-r}=a\frac{1-r^{5}}{1-r}\times 244$

即チ $1+r^{5}=244$　　$\therefore\ r=3$

(H. P.)

調 和 級 數 (或ハ調音級數ト云フ)

166. 定義 a, b, c ノ三ツノ數ガ $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$ ノ關係ヲ有スルトキハ a, b, c ガ調和級數 (Harmonical progression) ヲナスト云フ.

又列續セル一群ノ數アリテ其中チ相接シタル三項ハ常ニ上ノ如キ關係ヲ有スルトキハ此一群ノ數ヲ稱シテ調和級數ヲナスト云フ.

例ヘバ $a, b, c, d, e, f,$…………ガ次ノ如クナルトキ

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}\ ,\quad \frac{b-c}{c-d}=\frac{b}{d}\ ,\quad \frac{c-d}{d-e}=\frac{c}{e}\ ,\\ \frac{d-e}{e-f}=\frac{d}{f},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right.$$

此 $a, b, c, d, e, f,$…………ハ調和級數ヲナスト云フナリ.

167. 調和級數ヲナス所ノ一群ノ數ノ逆數ハ等差級數ヲナス.

a, b, c ヲ調和級數ノ相隣レル三項トスレバ定義ニヨリテ

$$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}\qquad \therefore\quad a(b-c)=c(a-b)$$

此處ニ得タル式ノ各項ヲ (abc) ニテ割ルトキハ次ノ式ヲ得

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$$

由テ $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ハ等差級數ヲナスコトヲ知ル.

調和ノ性質ノ要用ナル所以ハ幾何學幷ニ物理學(音響ノ論等)ニ於テ之レヲ用フルニアリテ代數學ニ於テハ單ニ上述ノ命題ヲ屢々用フルニ過ギズ.

調和級數ヲナス所ノ諸數ノ和ヲ求ムル公式ハ之レヲ求ムルコトヲ得ズ.

總テ調和級數ニ於ケル問題ヲ解クニハ其各級ヲ逆ニナシ以テ等差級數ニ改メ其性質ヲ利用スルヲ可トス.

調和級數ナル語ヲ表スニ略シテ H. P. ヲ用フルコトアリ.

168. 二ツノ數ノ間ニ入ルベキ調和中項ヲ求ムルコト

二ツノ數ヲ a, b トシ其中級ヲ H トセバ,前條ノ理ニヨリテ

$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{H}$, $\frac{1}{b}$ ハ等差級數ヲナスベシ

依テ
$$\frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H}$$

或ハ
$$\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

即チ
$$H=\frac{2ab}{a+b}$$

之レニ由テ二ツノ數ノ調和中項ハ其二數ノ和ニテ其二數ノ積ノ二倍ヲ除シタル商ニ等シ.

169. a 及ビ b ノ等差,等比,調和中項ヲ順次ニ A,G,H トスレバ

$$A=\frac{a+b}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$G=\sqrt{ab} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$H=\frac{2ab}{a+b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ナルコトハ巳ニ證セシ所ナリ.

今(1)式ト(3)式トヲ掛ケ合スレバ

$$AH=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$$

之レニ由テ二數ノ等比中項ハ亦タ其等差中項ト調和中項トノ等比中項ナルコトヲ知ル.

問題及ビ其解

級數ノ雜問ハ學生ノ熟練幷ニ技倆ヲ試ムルニ適當シタル材料ナリ而シテ其術ヲ用フルコト宜シキヲ得バ最モ巧妙ニ解キ得ルモノアリ,以下載スル所ノ解ノ外尚各自種々ナル解法ヲ試ミラルベシ.

(1) a, b, c ガ A. P. ヲナストキハ $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ モ亦タ A. P. ヲナス,之ヲ證セヨ.

(解) A. P. ノ定義ニヨリ $a-b=b-c$ ナリ,依テ今

$$\begin{aligned} a^2(b+c)-b^2(c+a) &= ab(a-b)+c(a+b)(a-b) \\ &= ab(b-c)+c(a+b)(b-c) \\ &= ab^2-abc+abc+b^2c-c^2a-bc^2 \\ &= b^2(c+a)-c^2(a+b) \end{aligned}$$

故ニ $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ ハ A. P. ヲナス.

(2) A. P. ヲナス四數アリ其各項ノ平方ノ和ハ 120 ニシテ又第一項ト第四項ノ積ハ他ノ二數ノ積ヨリ 8 少シト云フ，各數如何ナルカ.

(解) 四ツノ數ヲ

$a-3b$, $a-b$, $a+b$, $a+3b$ トス(但通差ヲ $2b$ ト假定ス)

然ルトキハ題意ニヨリ

$$(a-3b)^2+(a-b)^2+(a+b)^2+(a+3b)^2=120$$

即チ $4a^2+20b^2=120$ ……………(1)

又 $(a+b)(a-b)-(a+3b)(a-3b)=8$

即チ $8b^2=8$ $\therefore$ $b=\pm1$ ……………(2)

(2) ノ値ヲ (1) 式中ニ代入セバ $a=\pm5$

故ニ $a-3b=\pm2$, $a-b=\pm4$, $a+b=\pm6$, $a+3b=\pm8$

由テ求ムル四數ハ

2, 4, 6, 8 或ハ −2, −4, −6, −8.

ナリ.

(3) G. P. ノ三數ノ和 14, 其平方ノ和 18 ナリト云フ各如何.

(解) 三數ヲ a, ar, ar^2 トスレバ

$a+ar+ar^2=14$, 又 $a^2+(ar)^2+(ar^2)^2=84$.

故ニ此二式ノ間ニ割リ算ヲ施シテ

$$\frac{a^2(1+r^2+4^4)}{a(1+r+r^2)}=\frac{84}{14} \quad 即チ \quad a(1-r+r^2)=6$$

茲ニ得タル式ト第一式トノ間ニ割算ヲ施シテ

$$\frac{a(1+r+r^2)}{a(1-r+r^2)}=\frac{14}{6} \quad 即チ \quad 3(1+r+r^2)=7(1-r+r^2)$$

此方程式ヲ解キテ $r=2$ 或ハ $\frac{1}{2}$ ヲ得

故ニ $a=2$ 或ハ $\frac{1}{2}$ 依テ所要ノ三數ハ 2, 4, 8 ナリ.

(4) a, b, c ガ調和級數ヲナストキハ

$\frac{a}{b+c-a}$, $\frac{b}{c+a-b}$, $\frac{c}{a+b-c}$ モ亦タ調和級數ヲナスコトヲ證セヨ.

(解) a, b, c ガ H. P. ヲナスガ故ニ $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ ハ A. P. ヲナスベシ

即チ $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ $\left(\because \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$

此式ニ $a+b+c$ ヲ掛クレバ

$$\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{c}=\frac{2(a+b+c)}{b}$$

式ノ兩邊ヨリ 4 ヲ減ズルモ差支ナキガ故ニ

$$\frac{a+b+c}{a}-2+\frac{a+b+c}{c}-2=\frac{2(a+b+c)}{b}-4$$

即チ $\frac{b+c-a}{a}+\frac{a+b-c}{c}=\frac{2(c+a-b)}{b}$

即チ $\frac{b+c-a}{a}-\frac{c+a-b}{b}=\frac{c+a-b}{b}-\frac{a+b-c}{c}$

故ニ $\frac{b+c-a}{a}$, $\frac{c+a-b}{b}$, $\frac{a+b-c}{c}$ ハ A.P. ヲナス

故ニ其逆數タル $\frac{a}{b+c-a}$, $\frac{b}{c+a-b}$, $\frac{c}{a+b-c}$ ハ H. P. ヲナス.

(5) a, b, c, d ガ調和級數ヲナスキハ次ノ式アル㆑ヲ證セヨ,

$$3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$$

(解) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}$ (165 條)

故ニ次ノ式ヲ書ク㆑ヲ得ベシ

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{d}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)=3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

即チ $\frac{d-a}{ad}=\frac{3(b-a)}{ab}$ 又タ $\frac{c-b}{bc}=\frac{d-c}{cd}$

之レニ由リテ $\frac{d-a}{ad}\times\frac{c-b}{bc}=\frac{3(b-a)}{ab}\times\frac{d-c}{cd}$

$$\therefore\ (d-a)(c-b)=3(b-a)(d-c)$$

自然數ノ同次冪ノ和

170. 自然數トハ1ヨリ起リ一ツヾヽ增ス諸數ノコトニシテ即チ 1, 2, 3, 4, ・・・ヲ指スモノナリ.

扨テ自然數ノ同次冪ノ和ニシテ最重要ナルモノハ次ノ如シ

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\ \cdots\cdots(1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ \cdots\cdots(2)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\ \cdots\cdots(3)$$

(1) 式ハ已ニ知レルモノナリ, 今 (2), (3) 式ヲ證明セントス.

(1) 式ノ左邊ヲ表スニ Σn ヲ用ヒ (2) 式ノ左邊ヲ表スニ Σn^2

ヲ用ヒ (3) 式ノ左邊ヲ表スニ Σn^3 ヲ用フ Σ ハ和ノ意味ヲ表ス所ノ文字ニシテしぐまト呼ブ(希臘文字)即チ此條ニ於テハ Σn^2 ハ自然數ノ平方ノ和ナルコトヲ表示シ Σn^3 ハ自然數ノ立方ノ和ナルコトヲ表示スト知ルベシ.

式(2)ノ證.

$(x+1)^3-x^3=3x^2+3x+1$ ナル恒同式ニ於テ x ノ代リニ順次ニ $n, (n-1), (n-2), (n-3)\cdots 2, 1$ ヲ代入スルトキハ次ノ如ク

$$\begin{aligned}
(n+1)^3-n^3&=3n^2+3n+1\\
n^3-(n-1)^3&=3(n-1)^2+3(n-1)+1\\
(n-1)^3-(n-2)^3&=3(n-2)^2+3(n-2)+1\\
(n-2)^3-(n-3)^3&=3(n-3)^2+3(n-3)+1\\
(n-3)^3-(n-4)^3&=3(n-4)^2+3(n-4)+1\\
\cdots\cdots&=\cdots\cdots\\
\cdots\cdots&=\cdots\cdots\\
3^3-2^3&=3\times2^2+3\times2+1\\
2^3-1^3&=3\times1^2+3\times1+1\\
\hline
(n+1)^3-1&=3\Sigma n^2+3\Sigma n+n
\end{aligned}$$

而シテ得タル式ヲ邊々相邊フルキハ横線ノ下ニ書キ下セルガ如シ.

此式ヲ書キ直シテ $3\Sigma n^2=(n+1)^3-\frac{3}{2}n(n+1)-(n+1)$

$$3\Sigma n^2=\frac{n+1}{2}\left\{2(n+1)^2-3n-2\right\}$$

$$=\frac{n+1}{2}(2n^2+n)$$

故ニ $\Sigma n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

式(3)ノ證.

是亦上ノ證ト同樣ナル方法ニ依リテ証シ得ベシ，但用フル所ノ恒等式ハ　　$(x+1)^4-x^4=4x^3+6x^2+4x+1$

ニシテ此恒等式ノ x ニ逐次 $n, n-1, \cdots 2,\ 1$ ヲ代入シ前同樣ノ手續キヲ行フニ在リ．即チ下ノ如シ

$$\begin{array}{rcl}
(n+1)^4-n^4 &=& 4n^3+6n^2+4n+1\\
n^4-(n-1)^4 &=& 4(n-1)^3+6(n-1)^2+4(n-1)+1\\
(n-1)^4-(n-2)^4 &=& 4(n-2)^3+6(n-2)^2+4(n-2)+1\\
(n-2)^4-(n-3)^4 &=& 4(n-3)^3+6(n-3)^2+4(n-3)+1\\
\cdots\cdots\cdots &=& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots &=& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
3^4-2^4 &=& 4\times2^3+6\times2^2+4\times2+1\\
2^4-1^4 &=& 4\times1^3+6\times1^2+4\times1+1\\
\hline
(n+1)^4-1 &=& 4\Sigma n^3+6\Sigma n^2+4\Sigma n+n\\
&=& 4\Sigma n^3+n(n+1)(2n+1)+2n(n+1)+n
\end{array}$$

$$\therefore\ 4\Sigma n^3=n(n+1)(n^2+3n+3)-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$
$$=n(n+1)(n^2+3n+3-2n-1-2)$$
$$=n^2(n+1)^2$$

$$\therefore\ \Sigma n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

同法ニ依リ Σn^4, 及ビ Σn^5 等ヲ求ムルコトヲ得ベシ．

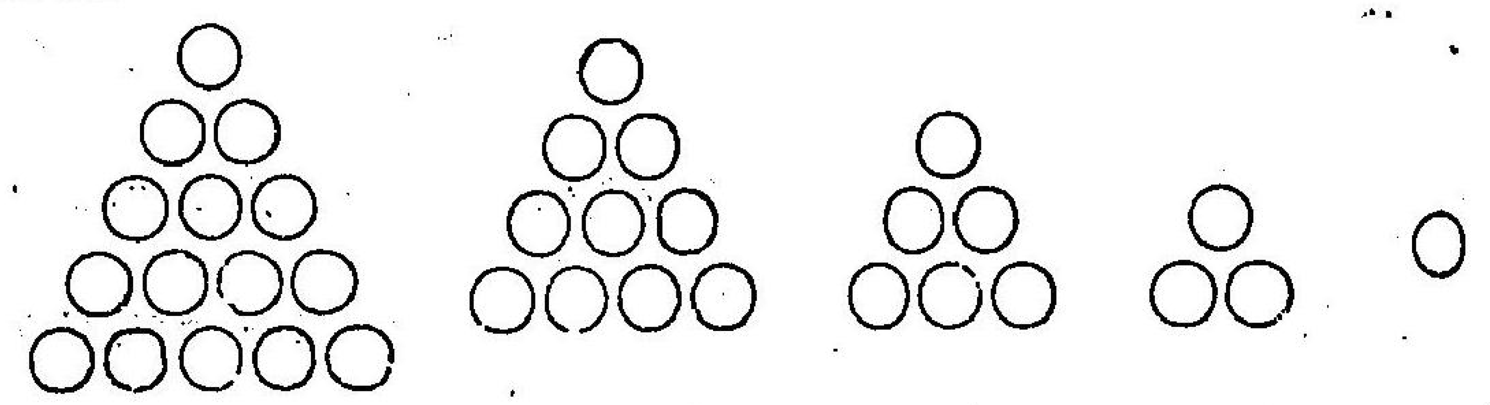
171. 積彈計算法

前條ノ應用トシテ大サ等シキ球形ノ丸ヲ錐狀ニ堆積シタルモノヽ

總數ヲ計算スル方式ヲ示サムトス．

I. 基底ヲ等邊三角形ニスルトキ

此積ミ方ハ基底ナル丸ヲ等邊三角形ニ配列シ其次層ニ於テモ亦等邊三角形ヲナサシメ以後順次此ノ如クナス．但基底ノ各邊ニ於ケル



最下層　　第二層　　第三層　　第四層　　第五層

ヨリモ一箇ツヽ少キ各邊ヲ有スルモノヲ置キ次第ニ此ノ如クシテ遂ニ項點ニハ唯一ツノミヲ有スルニ至ルナリ．

圖ニ表セルハ基底ノ一邊五個ナルヲ示セリ．

今基底ノ各邊ニアル丸ノ數ヲ n トスルトキハ

基底ヲナセル總數ハ

$n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+2+1$　即 $\frac{n(n+1)}{2}$ ナリ，此式ノ中ノ n ニ代フルニ逐次 $n-1, n-2, \cdots\cdots$ ヲ以テセバ順次ニ上層ノ丸ノ數ヲ得ルヲ以テ總テノ丸ノ數 s ハ

$$s=\frac{1}{2}\{n(n+1)+(n-1)n+(n-2)(n-1)+\cdots\cdots+1\times2\}$$
$$=\frac{1}{2}(\Sigma n^2+\Sigma n)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

例ヘバ圖ニ於ケルガ如ク $n=5$ ナルキハ

$$s=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{6}\times5\times6\times7=5\times7=35$$

即チ三十五個ナルヲ知ル.

II. 正方形ニ積メルトキ

此場合ニ於テハ何レノ層ニアル丸モ皆正方形ヲナスガ如ク積ムモノニシテ且其一邊ハ其下ニ隣接セル層ニ於ケルヨリモ一ツダケ少キ樣ニナスナリ.

依テ今 n ヲ以テ最底層ノ各邊ナル丸ノ數トスレバ n^2 ハ即チ基底ニアル所ノ丸ノ數ニシテ以下,上層ニ至ルニ從ヒ邊數ニ一個ツヽ減ズルヲ以テ此堆積ニ於ケル丸ノ總數 s ハ

$$s=n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots+3^2+2^2+1^2$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ナリ.

III. 矩形ヲ底トセル堆即チ楔形ニ積メルトキ

此場合ニ於テハ何レノ層ニ於テモ丸ヲ矩形ニ列ブルモノニシテ且ツ其各邊ニ在ル丸ノ數ハ其下ニ隣接セル層ニ於ケルヨリモ一ツ少キ樣ニナスナリ; 故ニ最上層ハ直線ノ形ヲナス.

今若シ最下層ノ矩形ヲナセル丸ノ二邊ニ列ベル數ヲ m 及ビ n トナス(m ハ n ヨリ小ナリトス) 然ルトキハ $m\times n$ ハ基底ニ於ケル丸ノ總數ニシテ從テ此堆積ニ於ケル丸ノ總數 s ハ

$$s=nm+(n-1)(m-1)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(n-m+1)\cdot 1$$
$$=(\overline{n-m}+m)m+(\overline{n-m}+m-1)(m-1)+\cdots\cdots+(\overline{n-m}+1)\cdot 1$$
$$=(n-m)\{m+(m-1)+\cdots\cdots+1\}+m^2+(m-1)^2+\cdots\cdots+1^2$$
$$=\frac{1}{2}(n-m)m(m+1)+\frac{1}{6}m(m+1)(m+1)$$

$$=\frac{1}{6}m(m+1)(3n-m+1)$$

問　　題

(1). 丸ヲ錐狀ニ堆積セントスルニ其基底ヲ等邊三角形トシ其各邊ニ十二個ノ丸ヲ置ク樣ニセリ. 而シテ既ニ八層ヲナセルトキ中止セリト云フ. 然レバ其既ニ成レル八層ニアル丸ノ總數ハ幾何ナルカ.

答 $\frac{1}{6}(12\times 13\times 14-4\times 5\times 6)$.

(2). 二十個ノ丸ト廿五個ノ丸トヲ兩邊トセル矩底ヲ以テ基底トスル所ノ堆積アリ. 其下ヨリ十層ニアル丸ノ數幾何

答 3260.

第二十五章

順　　列 (Permutations)

172. 定義 n 個ノ物ノ內ヨリ r 個ヲ取リ出シ之レヲ線形ニ列ブルトキ其列シタル物ガ異ル場合及ビ其物ノ列ベ方ノ順序ガ異ナリタル場合アリ, 此等各ノ場合ニ於ケル配列ノ方法ヲ稱シテ n 個ノモノヲ r ヅヽ取リタル**順列** (Permutation) ト云フ.

二ツノ順列ハ同シモノヲ同シ順序ニ列ベタルモノニアラザルトキハ相異リタルモノトス即チ上ノ定義ノ如ク列ベタル物ガ異リタルトキ或ハ同物ニテ列シタル順序ガ異リタルトキハ之レヲ異リタル順列

トシテ其列べ方ノ數ヲ數フベキナリ.

例ヘバ a, b, c ナル三字ニテ表ハサレタル三ツノ物アリトシ一度ニ二ツヽ取リタル順列ハ

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

ノ六ツナリ.

又 a, b, c, d ナル四ツノ物ヲ一度ニ二ツヽトリタル順列ハ

$$ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ ad,\ da,\ bc,\ cb,\ bd,\ db,\ cd,\ dc$$

ノ十二ナリ.

一度ニ r 個ツヽトリタル n 箇ノ相異ナレル物ノ順列ノ數ヲ表スニハ ${}_nP_r$ ナル記號ヲ以テス.

173. 一度ニ r 個ツヽトリタル n 個ノ相異ナレル物ノ順列ノ數ヲ索ムルコト.

$a, b, c \cdots\cdots$ 等ノ文字ヲ以テ夫レ等ノ相異ル物ヲ表スベシ扨テ一度ニ一個ツヽ n 個ノ物ノ順列ノ數ハ n ナルベキコト明カナリ

即チ $\qquad {}_nP_1 = n$

今茲ニ一度ニ $r-1$ ツヽヲトリタル順列ノ皆相異ナレルモノアリトセンニ其一ツヲ取リ其尾ニツクルニ其中ニ含マレザル文字 $n-(r-1)$ 個ノ中ノ何レカ一ツヲ以テセバ得ル所ノモノハ即チ一度ニ r 個ツヽトリタル n 個ノモノヽ順列ノ一ナルベシ.

是レニ依テ一度ニ $r-1$ 個ツヽ取リタル種々ノ順列ノ一ツニ就テ $n-(r-1)$ 個ダケノ「一度ニ r ツヽ取レル順列ノ相異ナレルモノ」

ヲ得べシ.

此ニ由リテ $\qquad {}_nP_r = {}_nP_{r-1} \times (n-r+1)$

コノ關係ハ r ノアラユル値ニ就キテ眞ナルモノナリ依テ,逐次ニ次ノ關係式ヲ得べシ

$$\begin{aligned}
{}_nP_{r-1} &= {}_nP_{r-2} \times (n-r+2) \\
{}_nP_{r-2} &= {}_nP_{r-3} \times (n-r+3) \\
{}_nP_{r-3} &= {}_nP_{r-4} \times (n-r+4) \\
\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots \\
{}_nP_3 &= {}_nP_2 \times (n-2) \\
{}_nP_2 &= {}_nP_1 \times (n-1)
\end{aligned}$$

且ツ又タ $\qquad {}_nP_1 = n$

上ノ等式ノ前邊ト後邊トヲ邊々相乘スルトキハ其通因數ハ悉ク消去シ得テ遂ニ次ノ式トナルべシ.

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)$$

若シ一度ニ n 個ノモノヲ悉クトリテ順列ヲ作ルトセバ $r=n$ トナリテ

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$$

附言 積 $n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$ ヲ表スニハ記號 $\underline{n|}$ 又ハ $n!$ ヲ用ヰ而シテ之レ等ノ記號ハ之レヲ**階乘** n ト讀ム.

r 個ノ數 $n, n-1, n-2, \cdots\cdots(n-r+1)$ ノ連乘積ハ之レヲ n_r ヲ以テ表ハシ而シテ n ハ必ズシモ整數タルヲ要セザルナリ.

例 $\quad n_5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ ナリ.

是ニ依テ $\quad {}_nP_n = |\underline{n}$

$${}_nP_r = n_r$$

例 題

(1). *abcde* ノ五物ヲ一度ニ三ツツ取リタル順列ノ數如何.

(解) $\quad {}_5P_3 = 5\times4\times3=60$

174. n 個ノモノハ悉クガ異ナラザルトキ(即チ n 個ノ品物ノ内同種ノモノガ幾分カアルトキ)之レヲ殘ラズ取リタル順列ノ數ヲ求ムルコト.

n 個ノ物品ヲ文字ニテ表ハシ $abc\cdots\cdots$ ノ内同シ文字ハ同種類ノ物品ヲ表スモノトシ

a ハ p 個. b 個 q 個. c ハ r 個, $\cdots\cdots$(以下之ニ準ズ)

アリトスベシ, 而シテ P ヲ以テ所求ノ順列ノ總數トセムニ

今現ニアルトコロ順列ノ一ツヲトリソレニアル a ヲ悉ク他ノ相等シカラザル且ツ其順列中ニ存在セザル p 個ノ文字ニテ置キカヘタリトスルトキハ獨リ是等 p 個ノ新文字ノミノ排列ヲ變フルコトニテ $|\underline{p}$ 個ノ相異ナレル順列ヲ得ベシ.

此ニ由リテ今總テノ a ニ代フルニ互ニ相異ナリ且ツ a ノ外ノ文字トモ全ク相異セル p 個ノ文字ヲ以テシ q 個アル b, r 個アル c 等ハ之レヲ元トノマヽニ存スルトキハ茲ニ $P\times|\underline{p}$ 箇ノ順列ヲ得ベシ.

又之レト同様ニ上ノ如クシテ得タル新順列ノ何レカ一ツヲトリ其總テノ b ニ代フルニ q 個ノ文字(互ニ異ニシテ其餘ノ文字トモ亦全ク異リタルモノ)ヲ以テスルトキハ獨リ是等 q 個ノ新文字ノミノ順列ヲ變フルコトニテ $|\underline{q}$ 個ノ順列ヲ得ベシ, 是ニ由リテ順列ノ總數ハ今ヤ $P\times|\underline{p}\times|\underline{q}$ トナルベシ.

此方法ヲ累子施コシテ遂ニ總テノ文字ガ全ク相異ナルニ至ラバ順列ノ總數ハ終ニ $\quad P\times|\underline{p}\times|\underline{q}\times|\underline{r}\times\cdots\cdots=|\underline{n}$

故ニ $$P=\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\times|\underline{q}\times|\underline{r}\times\cdots}$$

之レ求ムル所ノ式ナリ.

問 題

(1). ${}_6P_3$, ${}_5P_4$, 及ビ ${}_7P_7$ ヲ求ム.

答 $\quad {}_6P_3 = 120$

$${}_5P_4 = 120$$

$${}_7P_7 = 5040.$$

(2). ${}_{10}P_4$ ト ${}_7P_7$ トハ相等シ其證如何.

(證) $\quad {}_{10}P_4=10\times9\times8\times7=1\times2\times5\times8\times3\times2\times4\times7$

$$=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7=|\underline{7}$$

$$={}_7P_7$$

(3) ${}_nP_5$ ハ ${}_nP_3$ ノ十二倍ニ等シト云フ. 然ラバ n ハ幾何ナルカ.

(解) $\quad {}_nP_5=12\times{}_nP_3$

即チ $\quad n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=12n(n-1)(n-2)$

兩邊ヲ $n(n-1)(n-2)$, ニテ割レバ

$(n-3)(n-4)=12$　即チ　$n(n-7)=0$　$\therefore\ n=7$.

(4) 四ツノ語.　a cacia, hannah, success. mississippi ノ各ニ於ケル總テノ文字ノ順列ノ數ヲ求ム.

(解) 初メノ語ハ a ガ三ツ. c ガ二ツ, i ガ一ツニテ合計 6 字ナリ.

故ニ　$P=\dfrac{\underline{|6}}{\underline{|3}\,\underline{|2}}=\dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1}=60.$

第二ノ語, 第三ノ語モ同様ノ方法ニシテ夫々答 420, 34650 ヲ得.

(5) 八人ノ朋友相會シ圓キ食卓ヲ取リマキテ坐ヲ占メントス其並ビ方ハ幾通リアルベキカ.

(解)　圓卓ノ周圍ニ於テ順次ニ座ヲ移スモ席次ハ變ゼザルガ故ニ八人ノ坐ノ變化ハ其内一人ヲ取リ除キテ他ノ七人ガ一直線ニ並ビ得ル順列ノ數ニ等シ, 故ニ

所要ノ數 ＝ $\underline{|7}$.

第二十六章

組ミ合セ (Combinations)

175. **定義**　n 個ノ物品中ヨリ其 r 個ヲ取ルニ其前後ノ順序ヲ論ゼザルトキノ種々相異ナレル取リ方ヲ稱シテ一度ニ r 個ツヽ取リタル n 個ノ物品ノ**組ミ合セ**ト云フ.

順列ニ於テハ abc, acb 及ビ cab 等異ナレルモノナリシガ組ミ合セニ於テハ此等ハ同文字ナルガ故ニ異ナル組ミ合セトハナラズミナ同ジモノトナスナリ.

故ニ a,b,c,d ナル四物ヲ一度ニ三ツヽ取リタル組ミ合セハ次ノ四ツ　abc, abd, acd, bcd.

ナリ. 若シ之レガ順列ナリシナラバ二十四ヲ生ズル筈ナリ. 即チ

$abcd$ ナル四文字ノ順列ハ

$abcd$, $abdc$, $acbd$, $acdb$, $adbc$, $adcb$.

$bacd$, $badc$, $bcad$, $bcda$, $bdac$, $bdca$.

$cabd$, $cadb$, $cbad$, $cbda$, $cdab$, $cdba$.

$dabc$, $dacb$, $dbac$, $dbca$, $dcab$, $dcba$.

ノ二十四個ナリ.

176. 相異ナレル n 個ノ物ヲ一度ニ r ツヽ取リタル組ミ合セノ數ヲ索ムルコト.

相異ナリタル n 個ノモノヲ一度ニ r ツヽ取リタル組ミ合セノ數ヲ表スニ ${}_nC_r$ ヲ以テス, 即本條ニ於テハ ${}_nC_r$ ノ値ヲ求ムベキ公式ヲ知ラントスルナリ.

今相異ナレル n 個ノモノヲ表スニ $a, b, c, \cdots\cdots$ ヲ以テスベシ

扨テ一度ニ r ツヽ取リタル n 個ノ文字ノ組ミ合セニ於テ或ル一ツノ文字ノ出現スル度數ハ丁度殘リノ $n-1$ 個ノ文字ノ一度ニ $r-1$ ツヽ取リタル組ミ合セノ數ニ等シ, 故ニ一度ニ r 個ツヽ取リタル n 個ノ物ノ組ミ合セノ全數中ニハ各字 ${}_{n-1}C_{r-1}$ 度ツヽ出現スベシ, 依テ文字ノ總數ハ $n\times{}_{n-1}C_{r-1}$ ナルヲ知ル, 然ルニ何レノ場合ニ於テモ r 個ノ文字アルニ由リ文字ノ總數ハ亦 $r\times{}_nC_r$ ナラザル可カラズ.

之ニ依テ

$$r\times{}_{n}C_{r}=n\times{}_{n-1}C_{r-1}$$

同理ニ由リ. (r ガ如何ナル値ヲモツトキニテモ上ノ等式ハ成立ツベキガ故ニ r ニ 1 ヨリ r ニ至ル連續整數ヲ與フ)

$$(r-1)\times{}_{n-1}C_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}C_{r-2}$$

$$(r-2)\times{}_{n-2}C_{r-2}=(n-2)\times{}_{n-3}C_{r-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\times{}_{n-r+2}C_{2}=(n-r+2)\times{}_{n-r+1}C_{1} \qquad (\alpha)$$

又タ

$$ {}_{n-r+1}C_{1}=n-r+1 \qquad (\beta)$$

是等諸式ヲ逐々相掛ケ通因數ヲ消去スルトキハ

$$\lfloor\underline{r}\times{}_{n}C_{r}=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$$

ヲ得

之ニ依テ $${}_{n}C_{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor\underline{r}}=\frac{{}_{n}P_{r}}{\lfloor\underline{r}}. \qquad (1)$$

注意 上ノ (α) 式ハ $r\times{}_{n}C_{r}=n\times{}_{n-1}C_{r-1}$ ニ於テ n 及ビ r ヲ順次ニ 1 ツヽ減シテ遂ニ n ヲ $n-(r-2)$ トシ r ヲ $r-(r-2)$ トシテ得タルモノニシテ, 又 (β) 式ハ $n-r+1$ 個ノモノヲ一ツヽ取リタル組ミ合セノ數ヲ表セルモノニシテコノ式ノ成立ハ説明ヲ要セザルベシ.

式 (1) ハ所索ノ公式ナルガ. 今之レヲ次ノ如ク變形スルコトヲ得ベシ. 即チ (1) ノ分母子ニ $\lfloor\underline{n-r}$ ヲ乘スレバ

$${}_{n}C_{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\lfloor\underline{n-r}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}}$$

$$=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-r}} \qquad (2)$$

何トナレバ $\lfloor\underline{n-r}=(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ ナルガ故上ノ分子ニ $\lfloor\underline{n-r}$ ヲ乘セシトキ

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\lfloor\underline{n-r}$$

$$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

$$=\lfloor\underline{n}$$

ナレバナリ.

扨テ上ノ結果 [(2) 式] ト 174 條ニ於テ得シ結果トヲ比較スルトキハ

$${}_{n}P_{r}={}_{n}C_{r}\times\lfloor\underline{r}$$

ナルヲ知ルベシ.

然レトモコノコトハ右ノ結果ノ對照ヲ俟タズトモ直チニ之レヲ知ルコトヲ得ベキナリ. 何トナレバ r 個ノ相異ナレルモノヽ組ミ合セハ其文字ノ順序ヲアラユル仕方ニ變更スルトキハ各 $\lfloor\underline{r}$ 個ツヽノ順列ヲ生ズベケレバナリ.

公式 (2) ヲシテ r ト n トガ相等シキ場合ニモ尙眞ナラシメンニハ

$$\lfloor\underline{0}=1$$

ナル假定ヲ置カザルベカラズ何ントナレバ $r=n$ ノ場合ニハ (2) 式ハ

$${}_{n}C_{n}=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{n-n}}=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{0}}$$

トナリ事實ニ於テ ${}_{n}C_{n}$ ハ 1 ナルベキニ由リ $\lfloor\underline{0}=1$ ニアラザレバ上式ノ右邊ハ 1 トナルヲ得ザレバナリ.

然レトモ又 $\lfloor\underline{0}=1$ ナルコトハ他ノ方法ニヨリテ證定シ得ベシ.

如何ニモ $$\lfloor\underline{n}=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

$$=n\lfloor\underline{n-1}$$

n 若シ 1 ナル場合ニハ上式ハ

$$\underline{|1} = 1\,\underline{|1-1}$$

ヲ表示スルモノナリ然ルニ 1 ノ階乘ハ 1 ナルコト明ナリ. 故ニ

$$1 = 1\cdot\underline{|0} \qquad \therefore\ \underline{|0} = 1 \qquad \text{ナラザル可カラズ.}$$

但シ $\underline{|0}$ ノ意味ハ其何タルヤヲ窺フ能ハズ.

177. **定理** n 個ノ相異ナレル物ヲ一度ニ r 個ヅヽ取リタル組ミ合セノ數ハ其 n 物ヲ一度ニ $n-r$ 個ヅヽ取リタル組ミ合セノ數ニ等シ.

此定理ハ n 個ノ物ノ中ヨリ r 個ヲ取ルトキハ恒ニ $n-r$ 個ヲ殘スベキ事實ヨリシテ直チニ出デ來ルモノナリ. 此事實アルガ故ニ r 個ノモノヽ取リ方ノ數ト $n-r$ 個ノ物ノ殘シ樣即取リ方ノ數トハ丁度相等シカラザル可カラザルナリ.

此結果ハ又前條ニ得タル公式(2)ニヨリテモ得ラルヽナリ.

何トナラバ $$_nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} \qquad \text{(A)}$$

又 $$_nC_{n-r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r}} \qquad \text{(B)}$$

サテ(A), (B)二式ノ右邊ハ同シ數ヲ表ス所ノモノナルガ故其左邊ハ相等シカラザル可カラズ. 即チ

$$_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

注意 此定理ノ證明法ニ二樣アルコト上記ノ如シ. 然レモ初メノ證ハ n 個ノ物悉ク相異ルト否トニ拘ラズ恒ニ用ヰ得ベキ方法ナレドモ後ノ證明法ハ然ラザルナリ. 何トナレバ 176 條ノ公式ハ獨リ n 個ノモノヽ悉ク相異ナレル場合ニ限リテ適用スベキモノナレバナ

リ; 是レ注意ヲ要スル所ナリ.

178. n 個ノ物ヨリ r 個ヅヽヲ取リテ作レル組ミ合セノ數ガ最大ナル爲メニハ r ハ如何ナル値ナルヲ要スルカ.

此命題ハ屢々必要ヲ感ズルコトアリ今之レヲ解說セン.

已ニ得タル公式ニヨリテ

$$_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\cdots(r-1)r}$$

及ビ $$_nC_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots(r-1)}$$

ナルニヨリ $$_nC_r = {}_nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}$$

ナリ. コノ最後ノ式ノ右邊ノ因數 $\frac{n-r+1}{r}$ ハコレヲ書キカエテ $\frac{n+1}{r}-1$ トスルコトヲ得ルガ故ニ此式ノ數值ハ r ガ增スニ從テ減少スルコトヲ知ル, 依テ $r = 1,2,3,\cdots$ ノ數ヲ順次置換スルコトニヨリテ $_nC_r$ ノ值ハ次第ニ增加シ $\frac{n+1}{r}-1$ ノ值ガ 1 ニ等シキカ又ハ 1 ヨリ小トナルニ至リテ始メテ其ノ增加ヲ止ムベシ.

今 $\frac{n+1}{r}>2$ 即チ $\frac{n+1}{2}>r$ ナル間ハ恒ニ $\frac{n+1}{r}-1>1$ ナリ. (コレハ不等式ノ原則ヨリ來ルモノニシテ即チ「不等式ノ兩邊ニ零ニアラザル正數ヲ加減乘除スルモ其不等號ハ依然タリ」トノ原則ニヨリ中央ノ不等式ハ其左ノ不等式ノ兩邊ニ $\frac{r}{2}$ ヲ掛ケテ得タルモノニテ又其右ノ不等式ハ初メノ不等式ノ兩邊ヨリ 1 ヲ引キテ得タルモノナリ)

故ニ組ミ合セノ數ノ最大ナルモノヲ求ムルニハ $\frac{n+1}{2}>r$ ニ適スル r ノ值ノ最モ大ナルモノヲ求メザル可カラズ.

之レガ爲メニハ n ノ偶數ノ塲合ト奇數ノ塲合トヲ分ケテ論ゼザル可カラズ.

(第一) n ノ偶數ナル塲合. 今 n ガ偶數ニシテ $2m$ ニ等シトセン

然ルトキハ $\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{2m+1}{2}=m+\dfrac{1}{2}$

ナルヲ以テ r ニ與フルニ 1 ヨリ m ニ至ルノ諸數ヲ以テセバ本式ノ値ハ r ヨリ大ナリ, 故ニ此塲合ニ於テハ $r=m=\dfrac{n}{2}$ トシテ最大ノ組ミ合セ數ヲ求ムルヲ得ベシ, 即チ ${}_nC_{\frac{n}{2}}$

(第二) n ノ奇數ナル塲合. 今 n ヲ奇數トシ而シテ $2m+1$ ニ等シトセン, 然ルトキハ $\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{2m+2}{2}=m+1$

ナルガ故 r ニ與フルニ 1 ヨリ m ニ至ル諸數ヲ以テスレバ本式ノ値ハ r ヨリ大ナリ, 然レモ若シ $r=m+1$ トスレバ初メノ因數 $\dfrac{n+1}{r}-1$ ハ 1 トナリ ${}_nC_{m+1}={}_nC_m$ 即チ ${}_nC_{\frac{n-1}{2}}={}_nC_{\frac{n-1}{2}}$

故ニ此塲合ニ於テハ $\dfrac{n+1}{2}$ 若クハ $\dfrac{n-1}{2}$ 個ツヽヲ作リ得ベキ組ミ合セノ數ハ相等シ, 而シテ之レガ最大ノ數タリ.

問題及ビ其解

(1) 相異ナレル 20 個ノ物ヲ五人ニ分配シ各自 4 個ツヽヲ得ントス, 其分配ノ仕方幾通リアルカ C_4

(解) 五人ノ内ノ一人ガ 20 個ノ内ヨリ 4 個ヲトル方法ハ ${}_{20}C_4$ 通リアリ, コノ變化毎ニ第二ノ人ガ殘リ 16 個ノ内ヨリ 4 個ヲトル方法ハ ${}_{16}C_4$ 通リアリ

故ニ第一, 第二ノ二人ヲ連結シタル變化ハ ${}_{20}C_4\times{}_{16}C_4$ ナリ.

同理ニヨリテ第三ノ人ヲ之レニ連結シタル變化ハ ${}_{20}C_4\times{}_{16}C_4\times{}_{12}C_4$ ナリ

故ニ全變化 $={}_{20}C_4\times{}_{16}C_4\times{}_{12}C_4\times{}_8C_4\times{}_4C_4$

ニシテ

$${}_{20}C_4=\frac{\underline{|20}}{\underline{|4}\,\underline{|16}}\ ,\qquad {}_{16}C_4=\frac{\underline{|61}}{\underline{|4}\,\underline{|12}}\ ,\qquad {}_{12}C_4=\frac{\underline{|12}}{\underline{|4}\,\underline{|8}}$$

$${}_8C_4=\frac{\underline{|8}}{\underline{|4}\,\underline{|4}}\ ,\qquad {}_4C_4=\frac{\underline{|4}}{\underline{|4}\,\underline{|0}}=\frac{\underline{|4}}{\underline{|4}}=1$$

ナルガ故ニ

$$所要ノ數=\frac{\underline{|20}}{\underline{|4}\,\underline{|61}}\times\frac{\underline{|16}}{\underline{|4}\,\underline{|12}}\times\frac{\underline{|12}}{\underline{|4}\,\underline{|8}}\times\frac{\underline{|8}}{\underline{|4}\,\underline{|4}}\times 1$$

$$=\frac{\underline{|20}}{\{\underline{|4}\}^5}$$

(2) 平面上ニ n 個ノ點アリ其内何レノ三點モ一直線ニアルモノナシト云フ. 然ルトキハ此等各二點ヲ連結スル直線ハ幾條アルベキカ.

(解) 一點 A ヨリ他ノ一點 B ニ至ル直線ハ AB ニシテ又 B 點ヨリ A 點ニ至ル直線ハ BA ナレ共 AB ト BA トハ同シ直線ナルガ故コノ理ヲ以テ推セバ本題ハ n 個ノモノヲ二ツヅヽ取リタル組ミ合セノ數ヲ求ムルコトナリ. 即チ

$${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

$${}_nC_2=\frac{\underline{|n}}{\underline{|2}\,\underline{|n-2}}=\frac{n(n-1)\underline{|n-2}}{\underline{|2}\,\underline{|n-2}}=\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}$$

ヲ以テ答トス.

(3) 一艘ノぼーとアリ 11 人乘リ込ミ八挺ノ楫ニテ之レヲ漕グニ

其內ノ五人ハ左舷，四人ハ右舷ニアリテ殘ル二人ハ雙方ノ舷ニ行クコトヲ得ベキモノトス．然ルトキハ其組ミ方ノ變化如何．

(解) 楫ハ各舷ニ於テ四挺ツヽ有チ二人ハ雙方ノ舷ニ交代ニ行クコトヲ得ルト云フニヨリ次ノ場合アリ．

二人ガ左舷五人ノ內ニ加ハルトキハ其變化ノ數ハ $_7C_4$ ニシテ其各變化毎ニ右舷ノ變化 $_4C_4$ ヲ生ズ，故ニ兩舷ヲ連結シテノ變化ハ

$_7C_4\times{}_4C_4=35$

一人カ左舷五人ノ內ニ加ハリ他ノ一人ハ右舷四人ノ內ニ加ハルトキハ兩舷ノ連結變化ハ $_6C_4\times{}_5C_4=75$ ナリ

又タ二人ガ皆右舷四人ノ內ニ加ハルトキハ兩舷ノ連結變化ハ

$_5C_4\times{}_6C_4=75$ ナリ．

故ニ全体ニテハ之等三ツノ場合ノ和ナルベキガ故

所要ノ數＝35+75+75=185 ナリ．

(4) 平面上ニ n 個ノ點アリテ其內 m 個ハ一直線上ニアリテ其他ハ何レモ三點一直線上ニアルモノナシ．今此等諸等ヲ頂點トシテ三角形ヲ畫カントス，問フ三角形ノ數幾何ナルベキカ

(解) n 個ノ點ガ何レモ三點一直線ニアラザルモノトスレバ n 個ノ點ヲ三ツヽ取リタル組ミ合セノ數ハ三角形ノ數ナリ．然ルニ n 個ノ內 m 個ハ一直線上ニアルヲ以テコノ m 個ヨリ成ル三角形ハ其實生ズルコトナシ，故ニ $_nC_3$ ノ內ヨリ $_mC_3$ ヲ引キタルモノガ實際生ズベキ三角形ノ數ナリ．

所要ノ數＝ $_nC_3-{}_mC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}-\dfrac{m(m-1)(m-2)}{\underline{|3}}$

$=\frac{1}{6}\{n(n-1)(n-2)-m(m-1)(m-2)\}$

(5) 或ル會社ニテ役員一名ヲ選擧セントスルニ候補者三名ト選擧人十二名アリ．其選擧方法ノ變化幾種アルカ．

(解) 各ノ選擧人ハ三名ノ候補者ヲ一人選擧スルガ故其方法三ツアリ．由テ第一選擧人ノ選擧方法 3 ノ各ニ付キ第二選擧人ノ方法 3 アルガ故ニ第一第二ノ選擧方法ヲ連結スレバ 3×3 ナリ，而シテコノ各方法ニ付キ第三ノ選擧方法ヲ連結スレバ $3\times3\times3$ ナリ，之レヲ推論スレバ 12 ノ選擧人ニ就テハ其方法 3^{12} ナリ．

(6) 0, 1, 2, 3, 4 ナル五ツノ數字ヲ用ヒテ同數字ヲ合マサル任意ノ數ヲ幾種作リ得ベキカ．

(解) 一位ノ數ハ 5−1 種ナリ　(五ツノ內 0 ヲ除ク故)

二位ノ數ハ $_5P_2$ ノ內首位ニ 0 アルモノ 4 ツヲ省クヲ要ス (首位ニ 0 アルモノハ四個生ズベク，コレハ結局一位ノ數タルニ過ギザレバナリ) 故ニ二位ノ數 $=5\times4-4=16$ 種.

三位ノ數ハ $_5P_3$ ノ內ヨリ首位ニ 0 アルモノ $_4P_2$ ヲ省クベシ，故ニ

三位ノ數ハ　$5\times4\times3-4\times3=48$ 種

四位ノ數ハ同樣ニ　$5\times4\times3\times2-4\times3\times2=96$ 種

五位ノ數ハ同樣ニ　$5\times4\times3\times2\times1-4\times3\times2\times1=96$ 種

之レニ依テ求ムル所ノ數ハ此等ノ和ノ $4+16+48+96+96=260$ ナリ．

P 5.4 P 43

第二十七章

二項式定理

179. 若干ノ代數式ノ連乘積ハ第一式ノ任意ノ一項ト第二式ノ任意一項ト第三式ノ任意一項トノ相乘ニヨリテ得タル各部ノ積ノ和ニ等シキコトハ掛ケ算ノ條下ニ述ベタル所ナリ．今此方法ニヨリテ二項式ノ羃等ヲ研究スベシ．

今 $(a+b)$ ノ n 箇ノ連乘積ヲ索メンニ

$$(a+b)(a+b)(a+b)\cdots\cdots\cdots$$

ノ各因數ヨリ一字ツヽヲトリ之レヲ悉ク掛ケ合スト キハ其連乘積ノ一項ヲ得ベシ，コノコトヲ有リト有ラユル仕方ニナセバ連乘積ノ總テノ項ヲ得ベシ．

扨各因數ヨリ a ノミヲ取ルコトヲ得ベク且ツ其方法ハ只一ツニ限ルヲ以テ a^n ハ積ノ一項ナリ．

b ヲ唯一ツダケ取リ a ヲ $(n-1)$ ダケ取ルコトヲ得ベク且ツ b ヲ唯一ツダケ取ルコトハ n 箇ノモノヽ中ヨリ其一個ヲトリ出スコトト同數仕方 ${}_nC_1$ 通リアルベシ，故ニ ${}_nC_1a^{n-1}b$ モ亦積ノ一項ナリ．

b ヲ二ツダケ取リ a ヲ殘リノ $(n-2)$ ダケ取ルコトヲ得ベク且ツ b ヲ二ツ取ルコトハ n 個ノ物ヨリ二個ヲ取リ出スコトヽ同數ニテ即 ${}_nC_2$ 通リノ仕方アルベシ故ニ ${}_nC_2a^{n-2}b^2$ ハ亦積ノ一項ナリ．

一般ニ b ヲ r 箇ダケ取リ(但 r ハ n ヨリ大ナラザル任意ノ正整數) a ヲ殘リ $(n-r)$ 箇ダケ取ルコトヲ得ベク且ツ r 箇ノ b ヲ取ルコトハ n 個ノ物ノ中ヨリ r 個ツヽヲ取リ出スコトヽ同數即チ ${}_nC_r$ 通リノ仕方アルヲ以テ ${}_nC_ra^{n-r}b^r$ 亦積ノ一項ナリ．

總テ此ノ如クナルヲ以テ

$$(a+b)(a+b)(a+b)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots[(a+b) \text{ ノ } n \text{ 個ノ連乘積}]$$

$$=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots$$

ヲ得，而シテ最後ノ項ハ ${}_nC_na^{n-n}b^n$ 即チ b^n ナリ．

是ニ由テ n ガ任意ノ正整數ナルトキハ

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+b^n$$

コノ公式ヲ二項定理名ト付ク(或ハにゅーとんノ二項法等ト稱ス)

コノ等式ノ右邊ニ於ケル ${}_nC_1$, ${}_nC_2$ 等ニ其値ヲ代入スレバ

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\times2}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{|n}{|r\,|n-r}a^{n-r}b^r+\cdots+b^n$$

ヲ得．

此右邊ニアル級數ヲ $(a+b)^n$ ノ**展開**(Expantion) ト云フ．

例 $(a+b)^6$ ヲ展開セヨ．

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+\frac{6\times5}{1\times2}a^{6-2}b^2+\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}a^{6-3}b^3+\frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4}a^{6-4}b^4$$

$$+\frac{6\times5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4\times5}a^{6-5}b^5+\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5\times6}a^{6-6}b^6$$

$$=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4$$

$$+6ab^5+b^6$$

180. 二項定理ヲ歸納法ニヨリテ證明スルコト．

二項定理ハ次ノ如キ方法ニヨリテ證明スルコトヲ得タリ，數學ニ

於テ此ノ如キ方法(所謂歸納法)ヲ用ヒテ証明ナスコト屢々アルニヨリ歸納法ノ如何ナルモノナルカヲ兼ネテ紹介センガ爲メニ茲ニ之レヲ示スコトヽナセリ.

n ガ正整數ナルトキハ

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a^{n-r}b^r+\cdots+b^n$$

即チ $(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n$

ナルコトノ証明ヲナサンニ

先ツコノ定理ハ指數ノ n ナルトキニ眞ナリト假定セヨ. 然ラバコノ式ノ兩邊ニ $(a+b)$ ヲ乘ジ同類項ヲ一所ニ集ムレバ

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(1+{}_nC_1)a^nb+({}_nC_1+{}_nC_2)a^{n-1}b^2+\cdots\cdots\cdots$$
$$+({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)a^{n-r+1}b^r+\cdots\cdots+b^{n+1}$$

トナル, 然ルニ $1+{}_nC_1=1+n={}_{n+1}C_1$

$${}_nC_1+{}_nC_2=n+\frac{n(n-1)}{1\times 2}=\frac{(n+1)n}{1\times 2}={}_{n+1}C_2$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$$

ナルガ故ニ

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+{}_{n+1}C_1a^nb+{}_{n+1}C_2a^{n-1}b^2+\cdots+{}_{n+1}C_ra^{n+1-r}b^r+\cdots+b^{n+1}$$

此ノ如ク若シコノ定理ニシテ n ノ何レノ値ニ就キテカ眞ナルコトアラバ必ズ其ノ次ノ夫レヨリモ大ナル値ニ就テモ眞ナルコトヲ知ル.

然ルニ $n=1$ ノトキハ本定理ノ眞ナルコト勿論ナルガ故上ノ論法ニテ $n=2$ ノトキニモ亦眞ナラザル可カラズ又 $n=2$ ノトキ眞ナルガ故 $n=3$ ナルトキ次ニ $n=4$ ナルトキ……モ眞ナラザル可カラズ追テ斯

クノ如ク論ジ行クニ際限ナカルベシ, 即チ本定理ハ n ノアラユル正整數ニツキ眞ナリ.

例 $(a-b)^n$ ノ展開ヲ求ム.

公式ニ於テ b ノ符號ヲ變フルトキハ

$$(a-b)^n=a^n+na^{n-1}.(-b)+\frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}(-b)^2+\cdots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a^{n-r}$$
$$(-b)^r+\cdots\cdots+(-b)^n$$
$$=a^n-na^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+(-1)^r\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a^{n-r}$$
$$b^r+\cdots\cdots+(-1)^n b^n$$

181. 普通項(或ハ一般項). General Tarm.

前條ニ由リ $(a+b)^n$ ノ展開ニ於ケル諸項ハ何レモ左ノ式中 r ニ適當ノ値ヲ與フレバ得ラルルナリ.

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a^{n-r}b^r$$

此ノ故ニコノ式ヲ稱シテ二項式展開ノ普通項ト云フ, 又コノ項ハ展開式ノ始メヨリ數ヘテ $r+1$ 番目ノ項ナルコトニ注意セヨ.

182. 初項ト末項トヨリ相等シキ距離ニアル兩項ノ係數ハ恒ニ相等シ.

二項定理ニ由ツテ $(a+b)^n$ ヲ展開スルトキハ其展開ニ於ケル初項ヨリ順ニ數ヘタルトキノ第 $r+1$ 項ト末項ヨリ逆ニ數ヘタルトキノ第 $(r+1)$ 項トハ夫々 ${}_nC_ra^{n-r}b^r$ 及ビ ${}_nC_{n-r}a^rb^{n-r}$ ナリ.

然ルニ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$

ナルガ故ニ $(a+b)^n$ ノ展開ニ於テ初項ト末項トヨリ等距離ニアル

兩項ノ係數ハ相等シ.

然レトモ此ノ結果ハ $(a+b)^n$ ハ a ト b トヲ交換スルモ變ルコトアルベキ理ナキ故其ノ展開モ亦從テ變ズルコトナカルベシト云フ事ヨリ直チニ出デ來ルモノナリ

即チコノ事實アルニヨリ $a^{n-r}b^r$ ノ係數ト $b^{n-r}a^r$ ノ係數トハ相等シカラザルベカラズ.

183. 第 179 條ノ公式ニ於テ若シモ a ノ代リニ 1 ヲ置キ x ノ代リニ n ヲ置クトキハ

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\times 2}x^2+\cdots\cdots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}x^r+\cdots\cdots+x^n$$

ヲ得. コレ二項定理ノ最モ簡單ニシテ且ツ弘ク用井ラルヽ形ナリ.

コノ形ノ內ニハアラユル場合ガ悉ク含マレアルナリ. 例ヘバコノ式ニ依テ $(a+b)^n$ ヲ求メンニハ

$$(a+b)^n=\left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$$

$$=a^n\left\{1+n\frac{b}{a}+\frac{n(n-1)}{1\times 2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\times 2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots\cdots$$

184. 二項定理ノ展開式ニ於ケル最大項.

$(1+x)^n$ ノ展開ニ於テ其第 $(r+1)$ 項ハ第 r 項ニ $\frac{n-r+1}{r}x$ ヲ掛ケタルモノニ等シ.

而シテ $\quad \frac{n-r+1}{r}x=\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$

且ツ $\frac{n+1}{r}$ ノ値ハ $n+1$ ガ定數ナルヲ以テ r ノ增大ニ從ヒテ減少スベキガ故 $\frac{n-r+1}{r}x$ ハ r ガ增スニ從ヒテ減少スベシ而シテ r ガ或ル値ヲ有スルトキニ $\frac{n-r+1}{r}x$ ガ若シ 1 ヨリ小ナランニハ第 $(r+1)$ 項ハ第 r 項ヨリモ小ナルベシ; 此故ニ今 $(1+x)^n$ ノ展開ニ於テ其第 n 項ニシテ最大ナランニハ

$$\frac{n-r+1}{r}x<1 \text{ ニシテ且ツ } \frac{n-(r-1)+1}{r-1}x>1$$

ナラザル可カラズ.

從テ

$$r>\frac{(n+1)x}{x+1} \text{ ニシテ且ツ } r-1<\frac{(n+1)x}{x+1}$$

ナラザル可カラズ.

$(1+x)^n$ ノ展開ニ於ケル諸項ノ絕對値ハ x ノ符號ヲ變ジテモ更ニ變ハルコトナキガ故今若シ

$$r>\frac{(n+1)x}{x+1} \text{ ニシテ且ツ } r<1+\frac{(n+1)x}{x+1}$$

ナリトスルトキハ $(1-x)^n$ ノ第 r 項ハ亦其最大項トナルベシ

故ニ若シ

$$r=\frac{(n+1)x}{x+1} \text{ トナルトキハ } \frac{n-r+1}{r}x=1 \text{ ナルベク}$$

因テ最大ナリト云フ一項ハアルコトナク只第 r 項ト第 $(n+1)$ 項トハ相等シクシテ何レノ他ヨリモ大ナルノミ.

(例一) $x=\frac{1}{4}$ ナルトキ $(1+x)^{20}$ ノ展開式ノ最大項ヲ求ム.

解. $n=20$ ナルガ故 $r>\dfrac{\frac{1}{4}(20+1)}{\frac{1}{4}+1}=\dfrac{21}{5}$

及ビ $r<1+\dfrac{21}{5}$

即チ r ハ $4\frac{1}{5}$ ヨリハ大ニシテ $5\frac{1}{5}$ ヨリ小ナレバヨシ, 而シテ r ハ項數ナルガ故ニ整數ナラザル可カラズ, 由テ $r=5$ 即チ $(1+x)^{20}$ ノ展開式ノ最大項ハ初ヨリ第五番目ノ項ナリ.

(例二) $x=\frac{5}{6}$ ナルトキ $(1+x)^{10}$ ノ展開式ノ最大ヲ求ム.

解. $n=20$ ナルガ故

$$r>\frac{(10+1)\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}+1}=5 \text{ 及ビ } r<1+5=6$$

ナレバヨシ, 即チ r ハ 5 ヨリ大ニシテ 6 ヨリハ小ナレバヨシ然ルニ r ハ整數ナルガ故 5 ト 6 トノ間ニ求ムル能ハズ, 依テ

$$r=5 \text{ 或ハ } 6$$

之レニ由テ $(1+x)^{10}$ ノ展開ニ於ケル最大項ハ第五項或ハ第六項ナリ

二項展開式ノ最大係數モ亦前法ノ如クシテ決定シ得ベシ.

$(1\pm x)^n$ ノ展開ニ於テ其第 $(r+1)$ 項ノ係數ハ, 其ノ第 r 項ノ係數ニ $\pm\frac{n-r+1}{r}$ ヲ掛ケタルモノニ等シキガ故若シ第 r 項ノ係數ガ絕對値ニ於テ最大ナルモノナランニハ

$$\frac{n-r+1}{r}<1 \quad \text{且ツ} \quad \frac{n-(r-1)+1}{r-1}>1$$

ナラザル可カラズ.

即チ

$$r>\frac{n+1}{2} \quad \text{且ツ} \quad r<1+\frac{n+1}{2}$$

ナラザル可カラズ.

由テ n ガ偶數ナレバ $r=\frac{n}{2}+1$ ナルトキ第 r 項ガ其係數最大ナリ, 若シ奇數ナレバ第 $\frac{n+1}{2}$ 項ト第 $\frac{n+3}{2}$ 項ト係數相等シク且ツ何レノ他ノ項ノ係數ヨリモ大ナリ (皆絕對値ニ就テ云ヘルナリ)

例ヘバ $(1+x)^{20}$ ニ於テハ第十一項ノ係數ノ絕對値最大ニシテ又 $(1+x)^{11}$ ニ於テハ第六項ト第七項トハ係數ノ絕對値相等シクシテ他ノ項ノソレヨリモ大ナリ.

問 題

(1) $(2x-y)^3$ ヲ展開セヨ.

解 公式ニ於テ $a=2x$ $b=-y$ $n=3$ トスレハヨシ,

即チ $$(2x-y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(-y)+\frac{3\times2}{1\times2}(2x)(-y)^2+(-y)^3$$

$$=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$$

(2) $(x+a)^5$ ヲ展開セヨ.

答. $x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$

(3) $(1-x^2)^6$ ヲ展開セヨ.

答. $1-6x^2+15x^4-20x^6+15x^8-6x^{10}+x^{12}$

(4) $(2x^2-3)^4$ ヲ展開セヨ.

答 $16x^8-96x^6+216x^4-216x^2+81$

(5) $(x^2+2y^3)^5$ ヲ展開セヨ.

答. $x^{10}-10x^8y^3+40x^6y^6-80x^4y^9+80x^2y^{12}-32y^{15}$

(6) $(x-3y)^{10}$ ノ展開ノ第三項ヲ求ム.

解. 二項展開普通項ノ公式ニ依テ

$$第三項=\frac{\underline{|10}}{\underline{|2}\,\underline{|10-2}}x^{10-2}(-3y)^2$$

$$=405x^8y^2$$

(7) $(3x-4)^{20}$ ノ展開ノ第五項ヲ求ム.

答. $\frac{\underline{|20}}{\underline{|16}\,\underline{|4}}3^{16}.4^4.x^{16}$

(8) $(2-x)^{22}$ ノ展開ノ第廿一項ヲ求ム.

答. $924x^{20}$

(9) $(1+x)^{12}$ ノ展開ニ於テ最大係數ヲ有スル項ヲ求ム.

第184條ニ由リ

$$r>\frac{12+1}{2}=6\frac{1}{2} \qquad r<7\frac{1}{2}$$

依テ $r=7$ 之レニ由テ第七項ヲ求ムレバ可ナリ.

即チ 第七項ハ $924x^6$ ニシテ之レヲ以テ答トス.

(10) $(1+x)^{15}$ ノ最大係數ヲ有スル項ヲ求ム.

答 $6435x^7, 6435x^8$

(11) $(1+x)^{2n}$ ノ中央ノ項ハ $\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{\underline{|n}}2^nx^n$ ナリ, 之レヲ証セヨ.

$(1+x)^{2n}$ ヲ展開スルトキハ $2n+1$ 項ヨリ成レル級數トナル故ニ其中央ノ項ハ第 $n+1$ 項ナリ, 故ニ

$$中央項=\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots3.2.1}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n$$

$$=\frac{2^n\{n.(n-1)\cdots1\}(2n-1)(2n-3)\cdots3.1}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n$$

$$=\frac{2^n\underline{|n}(2n-1)(2n-3)\cdots3.1}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n$$

$$=\frac{1.3\cdots(2n-1)}{\underline{|n}}2^nx^n$$

(12) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ ノ展開ノ x^r ノ係數ハ $\frac{\underline{|n}}{\underline{|\frac{1}{2}(n-r)}\,\underline{|\frac{1}{2}(n-r)}}$ ナリ. 之レヲ証セヨ.

解. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ 即チ $(x+x^{-1})^n$ ノ第 $(m+1)$ 項ハ

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|m}\,\underline{|n-m}}x^{n-m}(x^{-1})^m=\frac{\underline{|n}}{\underline{|m}\,\underline{|n-m}}x^{n-2m}$$

x^r ノ係數ヲ求ムルコトナルガ故今 $n-2m=r$ トスレバ $m=\frac{1}{2}(n-r)$ 之レヲ上式ニ代入スレバ

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|\frac{1}{2}(n-r)}\,\underline{|\frac{1}{2}(n-r)}}x^r$$

(13) $(1+x)^n$ ノ奇數項ノ和ヲ a トシ偶數項ノ和ヲ b トスレバ $(1-x^2)^n=a^2-b^2$ ナリ. 之レヲ証セヨ.

證.

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^2+\cdots\cdots$$

$$=\{1+\frac{n(n+1)}{1.2}x^2+\cdots\cdot\}+\{nx+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$

マタ $(1-x)^n=\{1+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdot\}-\{nx+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$

假設ニ依テ　$(1+x)^n=a+b,\quad (1-x)^n=a-b$

之ニ由リテ　$(1-x^2)^n=a^2-b^2$

185. 二項展開ニ於ケル諸係數ノ性質

二項定理ヲ次ノ形ニ書キ表スヲ便利ナリトス.

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_rx^r+\cdot\cdot+C_nx^n. \qquad (i)$$

但シ　$C_0, C_1\cdots\cdot$ノ間ニハ次ノ假定アルモノトス.

$$C_0=C_n=1.\quad C_1=C_{n-1}=n,\quad C_r=C_{n-r}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

等,總テ $_nC_0$, $_nC_1\cdots\cdot$ヲ略記シタル形ナリトス.

第一

(i)式ニ於テ x ノ代リニ 1 ヲ置クトキハ

$$2^n=C_0+C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots+C_r+\cdots\cdot+C_n$$

是レニ由テ觀レバ $(1+x)^n$ノ開展ニ於ケル諸係數ノ和ハ 2^n ニ等シキヲ知ルベシ.

第二

(i)式ニ於テ x ノ代リニ -1 ヲ置クトキハ

$$(1-1)^n=C_0-C_1+C_2-C_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^nC_n$$

故ニ　$0=(C_0+C_2+C_4+C_6+\cdots\cdot)-(C_1+C_3+C_5+C_7+\cdots\cdot)$

是レニ由テ見レバ或ル二項展開ニ於テ奇數番目ニ當レル項ノ係數ノ總和ト其偶數番目ニ當レル項ノ係數ノ總和トハ相等シキヲ知ルベシ.

第三

$C_r=C_{n-r}$ ナルニ由リ

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdot+C_rx^r+\cdots\cdot+C_nx^n.$$

$$(1+x)^n=C_n+C_{n-1}x+C_{n-2}x^2+\cdots\cdot+C_{n-r}x^r+\cdots\cdot+C_0x^n$$

上ノ二式ノ右邊ニ於ケル二ツノ級數ノ相乘積ヲ考フルニ x^n ノ係數ハ 第一ノ級數ノ C_0 ト第二ノ級數ノ C_0x^n, 第一ノ C_1x ト第二ノ C_1x^{n-1} ト,$\cdots\cdot$第一ノ C_nx^n ト第二ノ C_n トノ積ノ總和ニ等シ.

即チ兩級數ノ x^n ノ係數ハ $C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots\cdot+C_n^2$ ニ等シ.

而シテ左邊ノ兩二項式ノ積ハ $(1+x)^{2n}$ ナリ

故ニ $C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots\cdot+C_n^2$ ハ $(1+x)^{2n}$ ノ展開ノ x^n ノ係數ニ等シカルベシ然ルニコノ係數ハ $\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}$ ナリ

故ニ$(1+x)^n$ ノ展開ニ於ケル諸係數ノ平方ノ和ハ$\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}$ナリ.

第四

第三ニ於ケルガ如ク.

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdot+C_nx^n$$

$$(1-x)^n=C_n-C_{n-1}x+C_{n-2}x^2+\cdots\cdots+(-1)^nC_0x^n$$

コノ右邊ニ於ケル兩級數ノ積ニ於テ x^n ノ係數ハ

$$(-1)^n\{C_0^2-C_1^2+C_3^2+\cdots\cdots+(-1)^aC_n^2\}$$

ニ等シ.

然ルニ $(1+x)^n\times(1-x)^n$ 即チ $(1-x^2)^n$ ニ於ケル x^n ノ係數ハ n 若シ奇數ナラバ零ナリ. 又 n 若シ偶數ナラバ

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{\underline{|n}}{\underline{|\tfrac{1}{2}n}\ \underline{|\tfrac{1}{2}n}}$$ ニ等シ.

因テ n 奇數ナルトキハ

$$C_0^2-C_1^2+C_2^2-C_3^2+\cdots\cdots+(-1)^nC_2^2=0$$

又 n 偶數ナルトキハ

$$C_0^2-C_1^2+C_2^2-C_3^2+\cdots\cdots+(-1)^nC_n^2=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\underline{|n}}{(\underline{|\tfrac{1}{2}n})^2}$$

(例一) $C_1+2C_2+3C_3+\cdots\cdots+rC_r+\cdots+nC_n=n2^{n-1}$ ヲ證明セヨ.

證. $$C_1+2C_2+3C_3+\cdots\cdots+nC_n=n+2\frac{n(n-1)}{1.2}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

$$+\cdots\cdots+\cdots\cdots+r\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}+\cdots\cdots+n$$

$$=n\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\cdots\cdots+\frac{\underline{|r-1}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-1}}$$

$$+\cdots\cdots+1\}$$

$$=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}.$$

(例二) $C_0-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{3}C_2-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{C_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$ ヲ證明セヨ.

$$C_0-\frac{1}{2}C_1+\frac{1}{3}C_2-\cdots\cdots=1-\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}\frac{n(n-1)}{1.2}-\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{n+1}\{n+1-\frac{(n+1)n}{1.2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}$$

$$-\cdots\cdots+(-1)^n\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\{1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1.2}$$

$$-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\cdots+(-1)^{n+1}\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}(1-1)^{n-1}=\frac{1}{n+1}$$

---

186. $x+a, x+b, x+c$ 等 n 個ノ二項因數ノ積.

上ノ二項因數ノ積ヲ論ズルニ當リテ便宜上次ノ記法ヲ用ヒン.

S_1 ハ總テノ文字ヲ一度ニ一ツヅヽ取リタルモノヽ和, 即チ

$$S_1=a+b+c+\cdots\cdots\cdots$$

ナリ.

S_2 ハ總テノ文字ヲ一度ニ二ツヅヽ取リテ掛ケ合セタル積ノ和. 即

$$S_2=ab+ac+ad+\cdots\cdots\cdots$$

ナリ.

S_r ハ總テノ文字ヲ一度ニ r ヅツ取リテ掛ケ合セタル積ノ和ヲ表

スベシ.

扨テ $(x+a)\ (x+b)\ (x+c)\ (x+d)\cdots\cdots\cdots$ ノ二項因數ノ各ヨリ一字ツヽヲトリ悉ク之レヲ掛ケ合スルトキハ連乘積ノ一項ヲ得ベシ, コノコトヲ有ラユル仕方ニナセバ連乘積ノ總テノ項ヲ得ベシ.

各因數ヨリ x ノミヲトルコトヲ得而シテ之レヲナス仕方ハ只一ツナルヲ以テ x^n ハ連乘積ノ一項ナリ.

又 $a,b,c\cdots\cdot$ ノ何レニテモ一ツト殘リノ $(n-1)$ 個ノ因數ヨリ x ヲトリテ $ax^{n-1}, bx^{n-1}, cx^{n-1}\cdots\cdot$ ヲ得ベク即全体ニテ $S_1.x^{n-1}$ ヲ得ベシ

又 $a,b,c\cdots\cdot$ ノ何レニテモ二ツト殘リノ $(n-2)$ 個ノ因數ヨリ x ヲトリテ $abx^{n-2}, acx^{n-2}, adx^{n-2},\cdots\cdot$ ヲ得ベク即全体ニテ $S_2.x^{n-2}$ ヲ得ベシ.

此ノ如ク一般ニ $a,b,c\cdots\cdot$ ノ何レニテモ r 個ト殘リノ $(n-r)$ 個ヨリ x ヲトリ掛ケ合セテ $S_r x^{n-r}$ ヲ得ベシ.

是ニ依テ

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdot=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+S_3x^{n-3}+\cdots\cdot+S_rx^{n-r}$$
$$+\cdots\cdots\cdots$$

而シテ其ノ末項ハ $a,b,c,d\cdots\cdot$ ノ總テノ積 $abcd\cdots\cdot$ ナリ.

$a,b,c,d\cdots\cdot$ ノ符號ヲ變フルトキハ, 從テ $S_1, S_3, S_5\cdots\cdot$ 等 S ノ指標ノ奇數番目ノモノヽ符號モ亦變ズト雖モ, $S_2, S_4, S_6,\cdots\cdot$ 等 S ノ指標ノ偶數番目ノモノヽ符號ハ決シテ變ズルコトナシ.

是ニ由ツテ

$$(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdot=x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}-S_3x^{n-3}+\cdots\cdots\cdots$$
$$+(-1)^rS_rx^{n-r}+\cdots\cdot+(-1)^nabcd\cdots\cdot$$

187. 多項定理 (Multinomial Theorem)

多項式 $a+b+c+\cdots\cdot$ ノ n 乘冪ノ展開ハ二項定理ヨリシテ之レヲ索ムルコトヲ得ベシ.

今 $(a+b+c+\cdots\cdot)^n$ 即チ $\{a+(b+c+\cdots\cdot)\}^n$ ノ展開ニ於ケル普通項ハ二項定理ニ由リテ

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}a^r(b+c+d+\cdots\cdot)^{n-r}$$

ナリ.

又タ $(b+c+d+\cdots\cdot)^{n-r}=\{b+(c+d+\cdots\cdot)\}^{n-r}$ ノ普通項ハ二項定理ニ由リテ

$$\frac{\lfloor n-r}{\lfloor s\,\lfloor n-r-s}b^s(c+d+\cdots\cdot)^{n-r-s}$$

ナリ.

又タ $(c+d+\cdots\cdot)^{n-r-s}=\{c+(d+\cdots\cdot)\}^{n-r-s}$ ノ普通項ハ二項定理ニ由リテ

$$\frac{\lfloor n-r-s}{\lfloor t\,\lfloor n-r-s-t}c^t(d+\cdots\cdot)^{n-r-s-t}$$

ナリ.

是ニ由リ $(a+b+c+d+\cdots\cdot)^n$ ノ展開ニ於ケル普通項ハ

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}\times\frac{\lfloor n-r}{\lfloor s\,\lfloor n-r-s}\times\frac{\lfloor n-r-s}{\lfloor t\,\lfloor n-r-s-t}\times\cdots\cdot\times a^rb^sc^t\cdots\cdot$$

ナリ. 即チ

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor s\,\lfloor t\cdots\cdot}a^rb^sc^t\cdots\cdot$$

ナリ．但 $r\ s\ t\cdots\cdots$ ハ或ハ零或ハ正ノ整數ニシテ其和 $r+s+t\cdots\cdots$ ハ n ニ等シキモノトス

(例一) $(a+b+c)^3$ ノ展開ニ於ケル abc ノ係數ヲ求ム．

解. $a^rb^sc^t$ ニ於テ $r=s=t=1$ トセバ abc ヲ得

而シテ $r+s+t=1+1+1=3$ トナリ $(a+b+c)^3$ ノ羃指數 3 ト同一ナリ．

故ニ上ノ公式ニ於テ $r=s=t=1$ トスレバ

$$\frac{\underline{|3}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}}abc=6abc$$

即チ 6 ナリ．

(例二) $(a+b+c+d)^4$ ノ展開ニ於ケル a^2b^2, bcd^2 及ビ $abcd$ ノ係數ヲ求ム．

解. a^2b^2 ニ於テハ $r=2, s=2$ ナル故

$$\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}a^2b^2=6a^2b^2$$ ナリ．依テ答 6 ヲ得．

又 bcd^2 ニ於テハ $r=0, s=t=1, n=2$ ナル故

$$\frac{\underline{|4}}{\underline{|0}\,\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|2}}a^0bcd^2=12bcd^2$$ 依テ答 12 ヲ得．

或ハ又 b,c,d ヲ公式ノ a,b,c ナリト思考スレバ $r=s=1, t=2$ ニシテ

$$\frac{\underline{|4}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|2}}bcd^2=12bcd^2$$ ヲ得．

次ニ $abcd$ ノ係數ヲ求メンニ此場合ニ於テハ $r=s=t=u=1$ ニシ

テ

$$\frac{\underline{|4}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}}bcd=24abcd$$

問題

(1) ${}_nC_0-2{}_nC_1+3{}_nC_2-\cdots\cdots+(-1)^n(n+1){}_nC_n=0$ ヲ証明セヨ，

解. 上ノ式ヲ書キ直ストキハ

$$1-2\frac{n}{1}+3\frac{n(n-1)}{1.2}-\cdots\cdots+(-1)^n(n+1)$$

$$=\{1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\cdots\cdots+(-1)^n\}-n\{1-\frac{n-1}{1}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\}$$

$$=(1-1)^n-n(1-1)^{n-1}=0$$

(2) ${}_nC_1-2{}_nC_2+3{}_nC_3-\cdots\cdots(-1)^n n{}_nC_n=0$ ヲ證明セヨ．

第二十八章

級數ノ収歛及ビ發散

本章ノ事項ニハ高等代數ニ屬スベキ部分ナレモ微分,積分等トノ連絡ヲ計リテ茲ニ說述スルコトヽナセリ.

188. 既ニ述ベタルガ如ク級數トハ或ル規率ヲ以テ順次ニ引キ續ク一群ノ數ヲ稱スルモノニシテ若シ其ノ項數ガ定數ニテ止マルトキハ之レヲ有限級數ト云ヒ又無限ニ引續クトキハ之レヲ無限級數ト云フ.

既ニ論ジタルガ如ク等比級數ニ於テ其ノ通比ノ絶對値ガ1ヨリモ小ナルトキハ其n項ノ和ハnガ限リナク増大スルトモ決シテ定限モナク増大スルモノニアラズ却テ一定ノ有限値ニ益々近ツクベシ,之レニ依テ無限級數ナリトテモ其和ノ必ズシモ無限大トナラザルコトヲ知ルベシ.

級數ノ収歛及發散ナルコトヲ論ズル前ニ**極限**ナルコトニ就テ少シク述ブルコトアラントス.

189. 極限ノ理論

變化シ得ベキ數 x アリトシ其値變シテ或ル定數 a ニ近ツキ行キテxトaトノ差ガ漸々少サクナリ遂ニ如何程ニテモ小サクナルコトヲ得ルトキニxガaニ歸スルト云フ或ハxノ極限ガaナリトモ云フ.

例ヘバ一定ノ長サノ直線アリ(長サヲ a トス)其半分ニ殘リノ半

分ヲ加ヘ之レニ又其殘リノ半分ヲ加ヘ以下遂テ此ノ如クスルトキハ其和xハ次第ニ増大シaトxトノ差ハ漸々小サクナリ遂ニ此差ヲシテ如何程迄モ小ナラシムルコトヲ得レトモxハaヲ超過スルニ至ラザルノミナラズxハ常ニaヨリモ小ニシテ決シテ$x=a$トナルコト能ハザルベシ,之レヲ稱シテxノ極限ハaナリト云フ.

恰モ初項1.通比$\frac{1}{2}$ナル級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots\cdots\cdots$$

ノ總和ハ項數ヲ何程大クトルモ限リナク大トナルコト能ハズシテ2ナル極限ニ歸スルガ如シ.

定理 I.

有限ノ變化シ得ベキ數(之レヲ變數ト云フ)アリテ何レモ或ル極限ニ歸スルモノナルトキハ此等ノ變數ノ和モ亦一ツノ極限ニ歸シ其極限ハ各ノ變數ノ極限ノ和ニ等シ.

茲ニ $A,B,C\cdots L$ ナル變數アリトシ其數ハ合計m個ナリトス.

而シテ此等各變數ノ極限ヲ夫々 $a,b,c\cdots\cdot l$ ヲ以テ表セバ

極限ニ於テハ

$$A-a=0\quad B-b=0\quad C-c=0\cdots\cdots\cdots$$

ナルベシ(0 ハ無究小ヲ意味ス)

今 $$A-a=\alpha,\quad B-b=\beta,\quad C-c=\gamma\cdots\cdots\cdots$$
$$L-l=\lambda \qquad (1)$$

トセバ $$(A+B+C+\cdots\cdot+L)-(a+b+c+\cdots\cdots+l)=\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdot+\lambda \qquad (2)$$

$\alpha\beta\gamma\cdots\lambda$ ノ内ニテ最モ大ナルモノヲ ε ト名ツクレバ(2)式ノ右邊ハ $m\varepsilon$ ヨリハ小ナルヿ明ナリ然ルニ ε ハ $\alpha\beta\gamma\cdots\lambda$ ノ内ノ一ツナル故 ε ハ零ニ歸スルモノナリ從テ $m\varepsilon$ モ零ニ歸スルモノナリ然レバ $m\varepsilon$ ヨリ小ナル $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda$ ハ零ニ歸スベク即チ(2)式ノ右邊ハ零ニ歸スベシ換言スレバ $A+B+C+\cdots+L$ ハ $a+b+c+\cdots+l$ ヲ以テ其極限トナスベシ.

定理 II. ....

有限ノ變數ガ夫々或ル極限ニ歸スルトキハ此等ノ變數ノ積モ亦一ツノ極限ニ歸シ而シテ其極限ハ各變數ノ極限ノ積ニ等シ

定理 I ニ於テ用ヰタル記號ヲ襲用スレバ

$$A=a+\alpha \quad B=b+\beta \quad C=c+\gamma \quad \cdots\cdots \quad L=l+\lambda \qquad (1)$$

(1)ニ於ケル各式ヲ邊々相乘シテ次ノ式ヲ得.（Σ ハ同種ノモノヽ和ヲ示ス記號ナリ）

$$A\times B\times C\cdots\cdots\times L-a\times b\times c\times\cdots\cdots\times l$$
$$=\Sigma\alpha\times b\times c\times\cdots\cdots\times l+\Sigma\alpha\times\beta\times c\times\cdots\cdots\times l$$
$$+\Sigma\alpha\times\beta\times\gamma\cdots\cdots\times l+\cdots\cdots+\alpha\beta\gamma\cdots\cdots\lambda$$

而シテ此式ノ右邊ニ於ケル各項ハ何レモ零ニ歸スルモノナリ. 即チ右邊ハ零ニ歸スルモノヽ和ニ等シク其項數ハ有限ナルヲ以テ I ニヨリテ右邊全体ハ零ニ歸シ從テ左邊モ零ニ歸ス, 換言スレバ $ABC\cdots\cdots L$ ハ $abc\cdots\cdots l$ ニ歸ス.

同樣ニ二ツノ變數ノ商ノ極限ハ各變數ノ極限ノ商ニ等シ.

上ノ証明法ハ和或ハ積ヲ構成スル變數ノ數ニ限リアルコトニ基ケ

リ若シ此數ガ限リナキトキニハ其和或ハ積ノヿニ就テ上ノ如ク云フヿ能ハズ即其場合ニハ上ノ定理ハ必ズシモ成立ツ能ハズ.

190. 收歛級數及ビ發散級數ノ定義

一ツノ級數ノ初項以下 n 項ノ和ガ一ツノ有限ナル極限 S ナルトキ即 n ヲ充分ニ大キクスルヿニ依テ其和ト S トノ差ヲ如何程ニテモ小サクスルヿヲ得ルキハ之ヲ稱シテ**收歛級數**(Convergent series)ト云ヒ S ヲ其和ト稱ス

例ヘバ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ハ一ツノ收歛級數ニシテ其和ハ 2 ナリ.

一ツノ級數ノ初項以下 n 項ノ和ガ n ヲ限リナク增ストキニ其絕對値ガ限リナク增大スルトキハ之ヲ稱シテ**發散級數**(Divergent Series)ト云フ. 例ヘバ

$$1+2+3+4+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ハ一ツノ發散級數ナリ.

一ツノ級數ノ初項以下 n 項ノ和ガ n ヲ限ナク增大スルヿニ依テ限リナク增スヿモナク又一定ノ極限ニ近ツクヿモナキトキハ之レ收歛級數ニモアラズ又發散級數ニモアラザルナリ此ノ如キ級數ニハ時トシテ**不定級數**(Indeterminate Series)或ハ**中立級數**(Neutral Series)ノ名ヲツクルヿアリ.

例ヘバ

$$1-1+1-1+1-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{ノ如キ}$$

ハ是レ不定級數ナリ，如何ントナレバ其ノ n 項ノ和ハ n ノ奇數ナルト隅數ナルトニ從テ或ハ 1 或ハ 0 ナルベケレバナリ．

茲ニ注意スベキハ一級數ノ諸項皆同符號ノモノノミナルトキハ收斂級數ナルカ發散級數ナルカノ一ツニシテ決シテ不定級數ナルヿヲ得ザルヤ明ナリ．

191. 級數ノ逐次ノ各項ヲ示スニ $u_1, u_2, u_3, u_4, \cdots\cdots$ ヲ用ヰン．無限級數ノ各項ヲ書クヿハ決シテ爲シ能ハザルヿナレバ茲ニハ一般項(General Term) u_n ト n トノ關係即 u_n ヲ n ニテ表スコトヲナサン

今首項以下 n 項ノ和ヲ表スニ S_n ヲ用ヰ又級數ノ總和ヲ表スニ S ヲ用ヰン(和ト云フモノハ只收斂級數ノミニアルモノナレバ S ハ收斂級數ニノミ存スルモノナリ) 即チ

$$S=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots+u_n$$

192. 級數 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots u_n+u_{n+1}+\cdots\cdots$ ガ收斂級數タルニ必要ニシテ且ツ十分ナル要件ハ收斂級數ノ定義ニ依テ「其 n 項ノ和

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$$

ガ n ノ限リナク增ストキニ或ル有限ノ極限 S ニ限リナク近クベシト云フコト」ナリ

是ニ由テ $S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \cdots\cdots$ ノ各値ト S トノ差ハ n ガ限リナク增ストキニハ亦限リナク減少スベク從テ其相互ノ差モ亦同樣ニ減少スベシ．

然ルニ $\qquad S_{n+1}-S_n=u_{n+1}$

$$S_{n+2}-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots$$

$$S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots\cdots\cdots$$

ナルニ由リ 一ツノ級數ガ收斂級數タル爲メニハ其第 $n+1$ 項ガ n ノ限リナク增ストキニ限リナク減少セザル可カラズ而シテ又其第 $n+1$ 項以下幾項ノ和ナリトモ皆ナ n ガ限リナク增ストキハ如何ナル少サキ數値ヨリモ小サクナルコトヲ要スルナリ．

例ヘバ
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots$$

ナル級數ニ於テ其第 n 項ハ n ヲ限リナク增ストキニハ限リナク減少スベシト雖モ之レハ收斂級數トハナリ能ハズ，如何ントナラバ其第 $n+1$ 項以下 n 項ノ和ハ即チ

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\text{ニシテ}\frac{1}{2n}\times n$$

即チ $\frac{1}{2}$ ヨリモ大ナレバコノ級數ノ無限項ノ和ハ n ヲ多クトレバトル程大トナリ遂ニ如何ナル大ナル數ヨリモ大トナリ得ルヲ以テナリ即チ上ノ級數ハ收斂級數ニアラズシテ發散級數ナリ．

193. 吾人ハ先ツ級數ノ各項ガ悉ク同シ符號ヲ有スルモノヲ考ヘン，然ルトキハ斯カル級數ノ收斂，發散ハ毫モ其諸項ノ符號悉ク正ナリヤ或ハ悉ク負ナリヤニ關係スルモノニアラザルヲ以テ茲ニ總テノ項ヲ正號ヲ有スルモノナリト假定スルヲ得ルナリ．

級數ノ收斂，及ビ發散ハ次ノ定理ニ據リテ之レヲ判定スルヲ便ナリトス．

194. 定理第一

一ツノ級數ノ各項ガ既ニ收斂級數ナリト知レタル他ノ級數ノ相應項ヨリモ常ニ小ナルトキハソノ級數モ亦收斂級數ナリ.

何トナレバ今其兩級數ヲ

$$S=u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S'=u'_1+u'_2+u'_3+u'_4+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トスベシ

扨 r ノ値如何ニ關ラズ $u_r<u'_r$ ナルニ由リ(假設)S ハ S′ ヨリモ小ナルヿ明ナリ.

然ルニ S′ ハ有限數ナレバ(收斂級數故) S モ亦有限數ナラザル可カラズ,是レ即チ本定理ヲ證明スルモノナリ.如何ントナレバ級數ノ總和有限數ニシテ其諸項悉ク同符號ヲ有スルモノハ收斂級數ニ他ナラザレバナリ.

之レト同法ニテ次ノ定理ヲ證明スルヿヲ得ベシ.

一ツノ級數ノ各項ガ既ニ發散級數ナリト知レタル他ノ級數ノ相應項ヨリモ常ニ大ナルトキハ其級數モ亦發散級數ナリ.

(例一) 次ノ級數ノ收斂ナルヿヲ證明セヨ.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\cdots\cdots\cdots$$

(證明) 所題ノ級數ヲ次ノ級數

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times2}+\frac{1}{1\times2\times2\times2}+\cdots\cdots\cdots$$

ト對比スルニ相應各項ハ常ニ小ナルヲ見ル,而シテコノ後ノ級數ハ $\frac{1}{2}$ ヲ通比トスル所ノ等比級數ナレバ其收斂級數ナルコト明カナリ此故ニ所題ノ級數ハ定理一ニヨリテ收斂級數ナラザル可カラズ.

(例二) a,b,x ヲ皆ナ正數トシ且ツ a ハ b ヨリモ小ナリト假定スルトキハ

$$\frac{(a+x)}{(b+x)}+\frac{(a+x)(2a+x)}{(b+x)(2b+x)}+\frac{(a+x)(2a+x)(3a+x)}{(b+x)(2b+x)(3b+x)}+\cdots\cdots$$

ハ收斂級數ナルコトヲ證明セヨ.

(證明) a,b,x ノ三數ハミナ正數ニシテ且ツ b ハ a ヨリモ大ナルトキハ r ノ 1 ヨリモ大ナル場合ノミニ於テ

$$\frac{ra+x}{rb+x}<\frac{a+x}{b+x}$$

ノ關係アルニ由リテ與ヘラレタル級數ノ各項ハ

$$\frac{a+x}{b+x}+\frac{(a+x)^2}{(b+x)^2}+\frac{(a+x)^3}{(b+x)^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル他ノ級數ノ相應項ヨリモ小ナルコト明カナリ.然ルニ此ノ後ナル級數ハ收斂級數ナリ.故ニ與ヘラレタル級數モ亦收斂級數ナラザル可カラズ.

注意 第一ノ級數ガ收斂ナルヤヲ儘ムルニハ其諸項ミナ第二ノ級數ノ相應項ヨリモ小ナルコトヲ要セズ,其何個カノ有限ナル項數以下ノ諸項ガ悉ク第二ノ級數ノ相項數ヨリモ小ナレバ夫レニテ充分ナリトス.何トナレバ如何ナル級數ニテモ其有限ナル項數ノ和ハ有

限ナルベケレバナリ。

例ヘバ

$$\frac{4}{\lfloor\underline{2}}+\frac{4^2}{\lfloor\underline{3}}+\frac{4^4}{\lfloor\underline{5}}+\frac{4^5}{\lfloor\underline{6}}+\frac{4^6}{\lfloor\underline{7}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ハ收斂級數ナリ.

何トナラバ其第六項以下ハ各項

$$\frac{5^4}{\lfloor\underline{5}}+\frac{5^3.4}{\lfloor\underline{5}}+\frac{5^2.4^2}{\lfloor\underline{5}}+\frac{5.4^3}{\lfloor\underline{5}}+\frac{4^4}{\lfloor\underline{5}}+\frac{4^5}{5\lfloor\underline{5}}+\frac{4^6}{5^2\lfloor\underline{5}}+\cdots\cdots$$

ナル級數ノ相應項ヨリモ小ナリ然ルニ此ノ後ノ級數ハ收斂級數ナルニ由リ與ヘラレタル級數ノ第六項以下ノ收斂級數ナルヿ明ナリ. 故ニ其ノ全体モ亦收斂級數ナリ.

195. (定理第二)

二ツノ級數ノ相應項ノ比ノ値常ニ有限ナルトキハ此等ノ級數ハ二ツ乍ラ收斂級數ナルカ又ハ二ツ乍ラ發散級數ナリ.

(證明) 今二ツノ級數ヲ夫々

$$S=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S'=u'_1+u'_2+u'_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ニテ表サム, 扨テ兩級數ノ各項ハ正ノ數ト假定セルガ故 (193 條) 分數ノ定理ニ由テ

$$\frac{u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_r+\cdots\cdot}{u'_1+u'_2+u'_3+\cdots\cdots+u'_r+\cdots\cdot}$$ 即チ $\frac{S}{S'}$ ハ $\frac{u_r}{u'_r}$ ナル分數ノ中ノ最大ナルモノト最小ナルモノトノ中間ニアルベシ故ニ S/S′ ハ

有限ナリ, 依テ S 有限ナラバ S′ モ亦有限ナラザル可カラズ又 S 無限大ナラバ S′ モ亦無限大ナラザル可カラズ即チ本定理ヲ証セリ.

例. 次ノ二ツノ級數

(1). $$\frac{8}{2\cdot3}+\frac{16}{3\cdot4}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{8n}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots$$

(2). $$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ハ共ニ收斂級數ナルカ或ハ共ニ發散級數ナルベシ, 何トナラバ其第 r 項ノ比

$$\frac{8r}{(r+1)(r+2)}\bigg/\frac{1}{r}$$ ハ $\frac{8r^2}{(r+1)(r+2)}$ ニ等シク即チ r ノ值ノ如何ニ拘ハラズ 1 ヨリ大ニシテ 8 ヨリハ小ナレバナリ. 而シテ第二ノ級數ハ既ニ述ベタルガ如ク發散級數ナルガ故第一ノ級數モ亦發散級數ナラザル可カラズ.

196. 定理第三

二ツノ級數ノ或ル特別ナル項以下ハ其ノ各項ノ其ノ前ノ項ニ對スル比常ニ 1 ヨリモ小ナル定數ヨリモ小ナルトキハソノ級數ハ收斂級數ナリ

(證明) 級數ノ第 r 項以下ハ各項ノ其前項ニ對スル比常ニ k ナル常數 $(k<1)$ ヨリモ小ナリトセヨ.

然ルトキハ $\frac{u_{r+1}}{v_r}<k,\quad \frac{u_{r+2}}{u_{r+1}}<k,\cdots\cdots\cdots$

ナルヲ以テ $u_r+u_{r+1}+u_{r+2}+\cdots\cdots\cdots<u_r(1+k+k^2+k^3)$

[コレ上ノ式ニヨリ $u_{r+1}<ku_r,\ u_{r+2}<ku_{r+1},\cdots$ ナルヲ以テナリ]

即チ $u_r+u_{r+1}+u_{r+2}+\cdots\cdots\cdots<\frac{u_r}{1-k}$ （$k<1$ ナルニ由ル）

是ニ由テ此ノ級數ノ第 r 項以下ノ和ハ有限ナリ而シテ有限數ノ項ノ和ハ常ニ有限ナルガ故ニ此級數ハ收斂級數ナラザル可カラズ.

197. 定理第四

一ツノ級數ノ或ル特別ナル項以下ハ其ノ各項ノ其ノ前ノ項ニ對スル比ガ或ハ1ニ等シク或ハ1ヨリモ大ナルトキハ其級數ハ發散級數ナリ

（證明）　第一ノ場合即チ級數ノ第 r 項以下ノ諸項ハ悉ク u_r ニ等シキ場合ニハ

$$u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+\cdots\cdots\cdots+u_{n-r}=nu_r$$

ニシテ此 nu_r ハ n ヲ大キクスルトキハ如何ニ大ナル有限數ヨリモ大キクスルコトヲ得ベシ, 故ニ此ノ如キ級數ハ發散級數ナラザル可カラズ.

次ニ級數ノ第 r 項以下ノ各項ハ其前項ニ對シテ1ヨリモ大ナル比ヲ有スルモノニ就テ考フレバ

$$u_{r+1}>u_r,\quad u_{r+2}>u_{r+1}>u_r,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

依テ

$$u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+\cdots\cdots\cdots+u_{n+r}>nu_r$$

ニシテ nu_r ハ n ヲ大キクトレバ取ル程如何程大ナル數ヨリモ大キクスルコトヲ得ルガ故此ノ場合ニ於テモ發散級數ナラザル可カラズ

例ヘバ次ノ級數

$$\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{4}+\cdots\cdots\cdots+\frac{2^{n-1}}{n}+\cdots\cdots\cdots$$

ニ於テハ $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n}{n+1}$ ニシテ1ヨリモ大ナルヲ以テ此級數ハ發散級數ナリ.

198. 級數ニ於テ其初項以下有限ノ項數ノ後ヨリハ比 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ガ恒ニ1ヨリモ小ナルトモ n ガ限リナク増ストキニハ此比モ亦限リナク1ニ近ヅク場合ニ在リテハ定理第三ノ驗メシヲ適用スルコト能ハズシテ其收斂ナルヤ將タ發散ナルヤヲ判定スルコト困難ナルコトアリ.

例ヘバ

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル級數ニ於テハ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^k}{(n+1)^k}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}$$

ナルヲ以テ k ガ正號ノ數ナランニハ此驗メシニ於ケル比ハ1ヨリモ小ナレモ n ノ增スニ從ヒテ益々1ニ近ヅクベシ此故ニ定理第三ニ由リテハ此級數ノ收斂, 發散ヲ區別スルコト能ハザルナリ.

199. 級數

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ハ k ガ1ヨリモ大ナルトキハ收斂級數ニシテ k ガ1ニ等シキカ或ハ之レヨリ小ナルトキハ發散級數ナリ.

今三ツノ場合ニ區別シテ之レヲ解說セン二

第一, $k>1$ ノ場合.

此級數ノ各項ハ何レモ其直グ前ノ項ヨリモ小ナルヲ以テ次ノ關係式ヲ生ズ

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}<\frac{2}{2^k}$$

$$\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}<\frac{4}{4^k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{nk}}+\frac{1}{(2^n+1)^k}+\frac{1}{(2^n+2)^k}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^k}<\frac{2^n}{2^{nk}}$$

此故ニ與ヘラレタル級數ノ總和ハ次ノ級數

$$\frac{1}{1^k}+\frac{2}{2^k}+\frac{4}{4^k}+\frac{8}{8^k}+\cdots\cdots+\frac{2^n}{2^{nk}}+\cdots\cdots\cdots$$

ノ總和ヨリモ小ナリ.

即チ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{2(k-1)}}+\frac{1}{2^{3(k-1)}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n(k-1)}}+\cdots\cdots$

ヨリモ小ナリ.

然ルニ此最後ヲ級數ハ一ツノ等比級數ニシテ其通比ハ$\frac{1}{2^{k-1}}$ナリ, 又 k ハ 1 ヨリモ大ナルヲ以テ此通比ハ 1 ヨリモ小サク即チ此等比級數ハ收斂級數ナレバ是レヨリモ小ナル與ヘラレタル級數ハ收斂級數ナラザルヲ得ズ.

第二. $k=1$ ノ場合

此ノ場合ニハ與ヘラレタル級數ヲ次ノ如クニ書キ直シテ考フルニ

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left[\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right]+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此括弧內ニ在ル所ノ諸項ノ和ハ何レモ$\frac{1}{2}$ヨリ大ナリ. 故ニ與ヘラ

レタル級數ノ初項以下 2^n 項ノ和ハ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots(n+1 \text{ 項ニ至ル})$$

ヨリモ大ナリ, 即チ $1+\frac{1}{2}n$ ヨリモ大ナリ, 而シテコノ $1+\frac{1}{2}n$ ナル數ハ n ト共ニ限リナク增大シ得ルモノナリ, 之ニ由テ見レバ與ヘラレタル級數 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots$ 發散級數ナリ,

第三. $k<1$ ノ場合

此場合ニハ 級數

$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots\cdots$ ノ各項ハ常ニ級數$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$ ニ於ケル相應項ヨリモ大ナリ然ルニコノ終リノ級數ハ發散級數ナルガ故與ヘラレタル級數モ亦發散級數ナリ.

200. 一ツノ級數ガ收斂級數ナルカ將タ發散級數ナルカヲ決定スルニハ前條ノ級數ヲ基トシ之レニ定理第一及ビ第二ヲ適用シテナスヲ得ルコト多シ, 今一二ノ例ヲ示サン.

(例一) $\frac{2n}{n^2-1}$ ヲ一般項トスル級數ハ收斂級數ナルカ將タ發散級數ナルカヲ決定セヨ.

所題ノ級數ハ n ヲ順次ニ 1, 2, 3, $\cdots\cdots$ トスレバ之レヲ得ベシ, 即チ

$$\frac{2}{2}+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\frac{8}{17}+\cdots+\frac{2n}{n^2+1}+\cdots\left[\text{之レヲ } \Sigma\frac{2n}{n^2+1} \text{ ニテ表ス}\right]$$

今之レニ比較スベキ級數(之レヲ引用級數ト名ツケム)ハ前條ニ於ケル級數ノ $k=1$ ナルモノヲ以テスベシ, 即チ

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\left[\text{之レヲ } \Sigma\frac{1}{n} \text{ ニテ表ス}\right]$$

定理第一ヲ用ヰンニ

$n>1$ ナルトキ $\frac{2n}{n^2+1}>\frac{1}{n}$ ナルコ分明ナリ.

之レニ由リテ $\Sigma\frac{2n}{n^2+1}>\Sigma\frac{1}{n}$

即チ $\frac{2}{2}+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots>\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

而シテ $\Sigma\frac{1}{n}$ ハ發散級數ナルガ其所題ノ級數モ亦發散級數ナラザル可カラズ.

(例二) $\frac{n+2}{n^2+1}$ ヲ一般項トスル級數ハ收斂級數ナルコトヲ證明セヨ,

$$\frac{n+2}{n^3+1}<\frac{n+2}{n^3}<\frac{3n}{n^3}<\frac{3}{n^2}$$

ナルニ由リ, $\Sigma\frac{n+2}{n^2+1}<3\Sigma\frac{1}{n^2}$ ナリ.

然ルニ $\Sigma\frac{1}{n^2}$ ハ收斂級數ナルヲ以テ與ヘラレタル級數モ亦收斂級數ナラザル可カラズ

201. 是迄ハ級數ノ諸項皆ナ同符號ノモノト假定シテ其收斂,發散ノ判別ヲ研究セリ. 今一歩ヲ進ンテ級數ノ或ル項ハ正ニシテ他ノ項ハ負ナルモノニ就テ考フルニ此場合ニ於テハ先ツ其諸項ヲ悉ク正ナラシメ斯クシテ得ル所ノ級數ノ收斂ナリヤ將タ發散ナリヤヲ觀察スベシ, 若シ其級數ガ收斂ナラムニハ與ヘラレタル級數モ亦收斂ナラザル可カラズ, 如何ントナラバ諸項悉ク正號ナル級數ニ於テ其或ル項ノ符號ヲ變ズルモ尚ホ收斂級數ナルベキコト勿論ナレバナリ.

然レ圧諸項ヲ悉ク正號ニナシタルキニ發散級級ヲ得タレバトテ與

ヘラレタル級數ガ必ズシモ發散級數ニハアラザルナリ. 例ヘバ次ノ條下ニ證明スルガ如ク

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ガ發散級數ナルニモ拘ラズ

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ハ收斂級數ナルガ如シ.

202, 級數ノ諸項ガ一ツ飛ビニ正トナリ負トナルモノニアリテハ次ノ定理ニ依テ其收斂級數ナルコヲ直チニ見分クルコトヲ得ベキ場合少ナカラズ.

定理第五

一ツノ級數ノ項ガ一ツ置キニ正號トナリ負號トナルトキ其各項若シ其前項ヨリモ小ニシテ且ツ項ノ絕對値ガ遂ニ限リナク減小スルモノナランニハ其級數ハ收斂級數ナリ.

今假設ニ云ヘル級數ヲ

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots\pm u_n\pm u_{n+1}\pm\cdots\cdots\cdots$$

トセヨ, 今之レヲ書キ替ヘテ

$$(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\cdots\cdots\cdots\cdots=S$$

及ビ $u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=S$

ナル形ニナスニ各ノ項ハ其前ノ項ヨリモ小ナルニ由リテ此級數ノ和ハ u_1-u_2 ト u_1 トノ間ニアラザルベカラズ, 乃チ之レニ依テ此級數

ノ和ハ有限ナルベキヲ知ル.

之レト同理ニテ $S-S_n$ ノ絶對値ハ $(u_{n+1}-u_{n+2})$ ノ絶對値ト u_{n+1} ノ絶對値トノ中間ニアルベキコ明ナリ. 故ニ $S-S_n$ ハ n ノ限リナク大トナルトキニ限リナク減小スルナリ. 此故ニ假設ニ於ケル級數ハ收斂級數ナラザル可カラズ.

(例一)　級數 $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ ハ收斂級數ナリ.

何トナレバ

$$S=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又　$$S=\frac{1}{1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots\cdots$$

故ニ S ハ $\frac{1}{2}$ ト 1 トノ間ニアリテ有限ナリ.

又　$$S-S_n=\pm\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\pm\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)\pm\cdots\cdots$$

ニシテ　$$S-S_n=\pm\frac{1}{n+1}\mp\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\mp\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)\mp\cdots\cdots$$

即チ $S-S_n$ ハ絶對値ニ付テ $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$ ト $\frac{1}{n+1}$ トノ間ニアリ而シテ n ヲ無限ニ增ストキハ $S-S_n$ ハ無究小トナルガ故 S_n ハ有限ナル數 S ニ歸ス, 即チ收斂級數ナリ.

(例二)　級數 $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots\cdots$ ハ收斂級數ニアラズ.

何トナレバ S ハ $\frac{2}{1}$ ト $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}$ ノ間ニアリテ有限數ナレモ第 n 項 $\frac{n+1}{n}$ ハ n ヲ無究大トスルモ無究小トナラザレバナリ.

203. 今次ニ三ツノ肝要ナル級數ニ就テ前條ニ云ヘル級數ノ收斂ヲ驗メス方法ヲ講セントス.

第一, 二項法級數 (Binomial Series)　二項級數

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{\underline{n}}x^n+\cdots\cdots$$

ニ於テ, m 若シ正ノ整數ナラバ其項數ニハ限アレモ m 若シ正整數ニアラザルトキハ $m, m-1, m-2, \cdots\cdots$ ハ何レモ零トナルコ能ハザルヲ以テ此級數ハ無限級數ナラザル可カラズ.

m ガ正整數ナラザルトキニ此級數ノ收斂ナルヤ否ヤヲ定ムルニハ第一ニ u_{n+1} ノ u_n ニ對スル比ノ値ヲ考ヘザル可カラズ, 而シテ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{m-n+1}{n}x=-x\left(1-\frac{m+1}{n}\right)$$

ナルニ因リテ若シ n ノ値ガ $m+1$ ヨリ大ナルトキハ常ニ u_{n+1} ト u_n トハ x ノ正號ナルトキハ異號ナルベク, x 負ナルトキハ同號ナルベシ, 且ツ n ノ增ストキハ u_{n+1} ノ u_n ニ對スル比ノ絶對値ハ益々 x ニ近ヅクガ故ニ x ノ絶對値ニシテ 1 ヨリモ小ナランニハ u_{n+1}/u_n ハ或ハ初項ヨリ或ハ初項以下有限ノ項數ノ後ヨリハ絶對値上 1 ヨリモ小ナルベシ, 即定理第三ニ由テ其次ルノ項ヲ加フルコトニ依テ得ラルル級數ハ收斂級數ナルベシ, 此故ニ其級數自身モ亦收斂級數ナラザル可カラザルコト決シテ其項ノ悉ク同號ヲ有スルト交互ニ正號及ヒ負號ヲ有スルトニハ毫モ相關セザルベシ.

此ノ如クナルヲ以テ x ノ絶對値ガ 1 ヨリモ小ナルトキハ二項級數ハ收斂級數ナリ.

附言

此級數ハ x ガ 1 ト相等シキ場合ニ於テモ m サヘ -1 ヨリモ大ナラバ矢張リ收斂級數ナルベシ, 又タ m サヘ正數ナラバ x ガ -1 ト相等シキ場合ニモ收斂級數ナルベシ.

第二, 指數級數 (Exponential Series)

指數級數, 即チ

$$1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{\underline{|n}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ニアリテハ比 u_{n+1}/u_n ハ $\frac{x}{n}$ ニ等シ是ニ由テ比 u_{n+1}/u_n ノ絕對値ハ初項以下 x ノ數値ヨリモ大ナル番號ニ當レル總テノ項ニ就テ 1 ヨリモ小ナルベシ, 故ニ指數級數ハ x ノ値如何ニ拘ラズ恒ニ收斂級數ナリ.

第三, 對數級數 (Logarithmic Series)

對數級數, 即チ

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots\cdots-(-1)^n\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$$

ニ於テハ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{xn}{n+1}=-x\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$ ナルヲ以テ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ナル比ノ

絕對値ハ x ノ絕對値若シ 1 ヨリモ小ナラバ常ニ 1 ヨリモ小ナルベシ, 故ニ對數級數ハ x ノ値ガ -1 ト $+1$ トノ間ニアル場合ニハ恒ニ收斂級數ナリ.

$x=1$ ノ場合ニハ此級數ハ

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots$$

トナリ即チ定理第五ニヨリテ尙收斂級數ナリ.

$x=-1$ ノ場合ニハ此級數ハ

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right)$$

トナリ即チ發散級數ナリ.

問題

次ノ級數ノ收斂, 發散ヲ決定セヨ

(1) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\cdots\cdots\cdots$

答　收斂

(2) $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\frac{1}{(a+4b)(a+5b)}+\cdots\cdots\cdots$

答　收斂

(3) $\frac{3}{4}+\frac{3.4}{4.6}+\frac{3.4.5}{4.6.8}+\cdots\cdots\cdots+\frac{3.4\cdots\cdots(n+2)}{4.6\cdots\cdots(2n+2)}+\cdots\cdots$

答　收斂

(4) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

答　發散

(5) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

答　發散

(6) $\frac{1}{1.2}+\frac{x}{2.3}+\frac{x}{3.4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

答　$x<1$ ナルトキハ收斂, $x>1$ ナルトキハ發散

(7) $\frac{1}{1^k}+\frac{x}{3^k}+\frac{x^2}{5^k}+\cdots\cdots\cdots+\frac{x^n}{(2n+1)^k}+\cdots\cdots\cdots$

答　$x<1$ ナルトキハ收斂, $x>1$ ナルトキハ發散ナリ, 又 $x=1$ ナルトキハ $k>1$ ナルトキニ收斂ニシテ $k\ngtr 1$ ナルトキニ發散ナリ.

($k\ngtr 1$ ハ k ガ 1 ヨリ大ナラズトノ記號)

第二十九章

對數

204. $a^x=n$ ナルキハ x ハ a ノ底數(Base)トセル n ノ對數(Loga-rithm)ト云ヒコノ事ヲ式ニテ表ハスニ $x=\log_a n$ ヲ以テス。

例ヘバ $5^3=125$ ナリ，故ニ 3 ハ 5 ヲ底數トセル 125 ノ對數ナリ.

即チ $3=\log_5 125$

205. 對數ノ重要ナル性質

第一 底數ノ如何ニ拘ラズ 1 ノ底數ハ 0 ナリ. 又底數ノ對數ハ 1 ナリ.

何トナレバ $a^0=1$. ナル故 $\log_a 1=0$

又 $a^1=a$ ナル故 $\log_a a=1$

第二 積ノ對數ハ其ノ因數ノ對數ノ和ニ等シ

何トナレバ $\log_a m=x$, $\log_a n=y$ トスレバ $a^x=m$, $a^y=n$

ナルガ故 $mn=a^x\times a^y=a^{x+y}$

$$\therefore \log_a mn=x+y=\log_a m+\log_a n$$

同理ニ依リ因數ガ幾ツアルモ

$$\log_a mnpq\cdots\cdots=\log_a m+\log_a n+\log_a r+\log_a q+\cdots\cdots$$

ナルヤ明ナリ.

之レニ依テ對數表ヲ用ヰテ計算スルトキハ掛ケ算ニ代フルニ寄セ

算ヲ以テスルヲ得.

第三 商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ引キタルモノニ等シ

何トナレバ $\log_a m=x$, $\log_a n=y$ トスレバ $a^x=m$, $a^y=n$

ナルガ故 $\frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

$$\therefore \log_a\frac{m}{n}=x-y=\log_a m-\log_a n$$

之レニ依テ割リ算ニ代フルニ引キ算ヲ以テスルヿヲ得.

第四 一ツノ數ノ羃ノ對數ハ其數ノ對數ト指數トノ積ニ等シ

$\log_a m=x$ トスレバ $a^x=m$ ナリ

故ニ $m^k=(a^x)^k=a^{kx}$

$$\therefore \log_a m^k=kx$$
$$=k\log_a m$$

而シテコノ k ハ分數ナルモ差支ナシ，故ニ僅カノ掛ケ算，割リ算ヲ用ヰテ羃及ビ根ヲ索ムルヿヲ得.

206. 前條ニ述ベタル對數ノ諸性質ヲ應用シテ複雜ナル乘除及ビ開方法ノ如キモノヲバ簡易ニ行フヿヲ得，此目的ニ向テハ 10 ヲ底數トセル對數ノ表ヲ用ウルヲ便トス，仍テ 10 ヲ底數トセル對數ヲ常用對數ト稱ス.

高等數學ノ理論的攻究ニハ e ナル無究級數ノ和

$$e=1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\cdots$$
$$=2.718=818\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ヲ底數トセル對數ヲ用ウ之レヲ自然對數(Natural logarithm)或ハねぴーる對數(Napierian logarithm)ト稱ス.

常用對數ノ用法及ビ表ハ三角法講義ノ部ニ於テ述ベタレバ茲ニハ之レヲ略スルヿトセリ.

第三十章

利息 年金

207. **利息年金** 等ノ計算ハ通例算術ニ於テ述ブル所ノモノナリ. 然レ𪜈複利法(重利法トモ云フ Compound interest)ニ關スル問題ハ方程式對數ナドノ助ケヲ借ルヲ要スルモノアルニ由リ茲ニ之レヲ說クノ至當ナルヲ思フ.

金錢貸借ノ時日ガ數年ニ渡ルトキハ通例一年(或ハ半年若クハ三ケ月等)毎ニ借主ヨリ貸主ヘ利息ヲ拂フモノナレド𪜈特別ノ場合例ヘバ貯金預ケノ如キ場合ニ於テハ利息ヲ實際取リ遣リスルヿナク其マヽ元金ニ繰込ミ其後ハ之レニ對シテ利息ヲ附シ利息ヲ授受スベキ期日毎ニ此ノ如クシ元金ハ期ヲ逐フテ增加スル貸借法アリ之レヲ **複利法** ト云ヒ最初ノ元金ヲ最後ノ元利合計ヨリ引キ去リタル殘リヲ **複利** ト云フ.

複利ニ等シ唯ノ利息ヲ **單利** ト云フ.

本講義ニ於テ特ニ利子繰込ミノ期日ヲ明示セザルモノハ滿一ケ年毎ニ利子ヲ繰込ムモノト知ルベシ.

208. 複利法ニ於ケル元金(P), 利利率(R), 年數(n), 元利合計(M)利息(I)ノ關係.

第一期即チ第一年ノ終リニ於テ利息ハ PR ナリ故ニ元利合計ハ $P+PR$ 即チ $P(1+R)$ナリ.

次ニ第二期即チ第二年目ノ元金ハ $P(1+R)$ ナルヲ以テ第二期ノ終リニ於テ元利合計ハ $P(1+R)+P(1+R)R$ 即チ $P(1+R)^2$ ナリ.

第三期即チ第三年目ノ元金ハ $P(1+R)^2$ ナルヲ以テ第三期ノ終リニ於テ元利合計ハ $P(1+R)^2+P(1+R)^2R$ 即チ $P(1+R)^3$ ナリ.

此理ヲ推シテ第 n 年ノ終リニ於ケル元利合計ハ $P(1+R)^n$ ナルヲ知ル, 即チ

$$M=P(1+R)^n \qquad (1)$$

而シテ

$$I=M-P \qquad (2)$$

即チ

$$I=P\{(1+R)^n-1\} \qquad (3)$$

n ヲ索ムルニハ對數ヲ要ス(複利表ニ由ルモ可ナリ)

(1) 式ヨリ $\log M=\log P+n\log(1+R)$

$$\therefore \quad n=\frac{\log M-\log P}{\log(1+R)} \qquad (4)$$

此他ノ場合ニ於テモ對數ヲ應用シテ大ニ計算ノ勞ヲ省キ得ベシ式(1) (2) (3) (4) ハ所題ノモノナリ.

209. 複利法ニ於ケル現價 (Prosen+value) 及ビ割引 (Discount)

n 年ノ後ニ受取ルベキ金額(S)ノ現價ヲ V, 割引ヲ D トシ年利率ヲ R トセバ, ツマリ元金 V ナル貸金ノ n 年後ノ元利合計ハ S ナリト云フト同ジキガ故

$$S=V(1+R)^n$$

$$\therefore \quad V=\frac{S}{(1+R)^n} \quad \text{ニシテ} \quad D=S-V=S\left\{1-\frac{1}{(1+R^n}\right\}$$

210. 年金

或人若シ毎年定金額 A 圓ヲ受取ルベキ權利ヲ有スル𪜈ハ此人ハ A ノ年金(Annuity)ヲ所有スト云フ.

年金問題ニ於テ最モ多ク起ル所ノモノハ若干年間拂ハズニ (受取人ノ方ヨリ云ヘバ受取ラズニ) 捨テ置キタル年金ヲ其後一度ニ拂フトキ(受取人ヨリ云ヘバ受取ル𪜈)複利法ニ從テ其金額ヲ計算スルヿナリ.

今年金ヲ A 圓トシ捨テ置キタル年數ヲ n トシ年利率ヲ R トシ一度ニ拂フベキ(或ハ受取ルベキ)金額ヲ M 圓トセバ, 第一年ノ年金ハ其翌年即第二年目ヨリ利息ヲ生ズル故淸算ノ𪜈ニハ元利合計 $A(1+R)^{n-1}$ トナル, 第二年ノ年金ハ第三年ヨリ利息ヲ生ズル故淸算ノ𪜈ニ於テハ元利合計 $A(1+R)^{n-2}$ トナル.

此ノ如クナルヲ以テ

$$M=A(1+R)^{n-1}+A(1+R)^{n-2}+A(1+R)^{n-3}+\cdots\cdots+A(1+R)^2+A(1+R)+A$$

$$=A\{1+(1+R)+(1+R)^2+\cdots\cdots(1+R)^{n-3}+(1+R)^{n-2}+(1+R)^{n-1}\}$$

$$=A\frac{(1+R)^n-1}{(1+R)-1} \qquad \text{(等比級數ノ和ノ公式ニ由ル)}$$

$$=A\frac{(1+R)^n-1}{R}$$

此式ハ又生命保險, 火災保險ナドノ掛金ノ元利合計ヲ算スルニ適用セラル.

211. 若干年繼續スベキ年金ノ現價ヲ複利法ニテ計算スルヿ. (所謂定期年金ノ現價)

年金ヲ A 圓トシ繼續スベキ年數ヲ n トシ又年利率ヲ R 現價ヲ

次ニ第二期即チ第二年目ノ元金ハ $P(1+R)$ ナルヲ以テ第二期ノ終リニ於テ元利合計ハ $P(1+R)+P(1+R)R$ 即チ $P(1+R)^2$ ナリ.

第三期即チ第三年目ノ元金ハ $P(1+R)^2$ ナルヲ以テ第三期ノ終リニ於テ元利合計ハ $P(1+R)^2+P(1+R)^2R$ 即チ $P(1+R)^3$ ナリ.

此理ヲ推シテ第 n 年ノ終リニ於ケル元利合計ハ $P(1+R)^n$ ナルヲ知ル, 即チ

$$M=P(1+R)^n \qquad (1)$$

而シテ $$I=M-P \qquad (2)$$

即チ $$I=P\{(1+R)^n-1\} \qquad (3)$$

n ヲ索ムルニハ對數ヲ要ス(複利表ニ由ルモ可ナリ)

(1) 式ヨリ $\log M=\log P+n\log(1+R)$

$$\therefore\quad n=\frac{\log M-\log P}{\log(1+R)} \qquad (4)$$

此他ノ場合ニ於テモ對數ヲ應用シテ大ニ計算ノ勞ヲ省キ得ベシ.

式(1) (2) (3) (4) ハ所題ノモノナリ.

209. 複利法ニ於ケル現價(Prosen+value)**及ビ割引**(Discount)

n 年ノ後ニ受取ルベキ金額(S)ノ現價ヲ V, 割引ヲ D トシ年利率ヲ R トセバ, ツマリ元金 V ナル貸金ノ n 年後ノ元利合計ハ S ナリト云フト同ジキガ故

$$S=V(1+R)^n$$

$$\therefore\quad V=\frac{S}{(1+R)^n} \quad ニシテ \quad D=S-V=S\left\{1-\frac{1}{(1+R)^n}\right\}$$

210. 年金 或人若シ毎年定金額 A 圓ヲ受取ルベキ權利ヲ有スルトキハ此人ハ A ノ年金(Annuity)ヲ所有スト云フ.

年金問題ニ於テ最モ多ク起ル所ノモノハ若干年間拂ハズニ(受取人ノ方ヨリ云ヘバ受取ラズニ)捨テ置キタル年金ヲ其後一度ニ拂フトキ(受取人ヨリ云ヘバ受取ルトキ)複利法ニ從テ其金額ヲ計算スルヿナリ.

今年金ヲ A 圓トシ捨テ置キタル年數ヲ n トシ年利率ヲ R トシ一度ニ拂フベキ(或ハ受取ルベキ)金額ヲ M 圓トセバ, 第一年ノ年金ハ其翌年即第二年目ヨリ利息ヲ生ズル故清算ノトキニハ元利合計 $A(1+R)^{n-1}$ トナル, 第二年ノ年金ハ第三年ヨリ利息ヲ生ズル故清算ノトキニ於テハ元利合計 $A(1+R)^{n-2}$ トナル.

此ノ如クナルヲ以テ

$$M=A(1+R)^{n-1}+A(1+R)^{n-2}+A(1+R)^{n-3}+\cdots\cdots+A(1+R)^2+A(1+R)+A$$

$$=A\{1+(1+R)+(1+R)^2+\cdots\cdots(1+R)^{n-3}+(1+R)^{n-2}+(1+R)^{n-1}\}$$

$$=A\frac{(1+R)^n-1}{(1+R)-1} \qquad (等比級數ノ和ノ公式ニ由ル)$$

$$=A\frac{(1+R)^n-1}{R}$$

此式ハ又生命保險, 火災保險ナドノ掛金ノ元利合計ヲ算スルニ適用セラル.

211. 若干年繼續スベキ年金ノ現價ヲ複利法ニテ計算スルヿ.(所謂定期年金ノ現價)

年金ヲ A 圓トシ繼續スベキ年數ヲ n トシ又年利率ヲ R 現價ヲ

V 圓トスレバ

一年後ニ拂ハルベキ年金 A ノ現價ハ $A(1+R)^{-1}$ ナリ

二年後ニ拂ハルベキ年金 A ノ現價ハ $A(1+R)^{-2}$ ナリ

此ノ如クナルヲ以テ

$$V=A(1+R)^{-1}+A(1+R)^{-2}+A(1+R)^{-3}+\cdots\cdots(n\text{ 項ニ至ル})$$

$$=A(1+R)^{-1}\frac{1-(1+R)^{-n}}{1-(1+R)^{-1}}=A\frac{1-(1+R)^{-n}}{R}$$

$$=\frac{A}{R}\left\{1-\frac{1}{(1+R)^n}\right\}$$

又, m 年間据置. 後 n 年間繼續スル年金ノ現價ハ

$$\frac{A\{(1+R)^n-1\}}{R(1+R)^{m+n}}\qquad \text{ナリ.}$$

212. 永續年金ノ現價

今後每年 A 圓ツヽ受取ルベキ權利ノ現今ニ於ケル價卽チ永續年金ノ現價ハ, ツマリ一年ニ A 圓ノ利息ヲ生スル所ノ元金ニ等シカルベキガ故ニ

$$\text{永續年金ノ現價}=\frac{A}{R}$$

此式ハ前條ノ公式 $\frac{A}{R}\left\{1-\frac{1}{(1+R)^n}\right\}$ ニ於テ n ヲ無究大ニシテ得ラル, 何トナレバ n ガ甚ダ大ナル時ハ $\frac{1}{(1+R)^n}$ ハ零ニ近ク依テ極限ニ於テハ $\frac{A}{R}\left\{1-\frac{1}{(1+R)^n}\right\}$ ハ $\frac{A}{R}$ トナルヲ以テナリ

問　　題

(1)　每年五分ノ利ニテ元金 100 圓ヲ 50 年間貸ストキ其元利合計幾何ナルカ.(複利, 一年每繰込ミ)

(解)　$100\times\left(1+\frac{5}{100}\right)^{50}=1146.74$ 圓.

(2)　田地ヲ所有スル人アリ一年間ニ 70 圓ノ貸料ヲ取リテ此田地ヲ他ノ人ニ貸シ一年間 10 圓ノ地租ヲ拂ヘリ, 而シテ其貸ス期限ハ 40 年ニシテ終リノ 14 年間ノ收入高ヲ證書ニ認メ置ケリ此證書ノ價如何.

但シ年利率ヲ 6 分トス

(解)　最後ノ 14 年間ハ 27 年目ヨリ 40 年目ノ終リ迄ナリ, 而シテ此證書ノ價ハ其每年收入高 70－10＝60 圓ノ現價ニ相當ス, 故ニ 126 條ニ由リ證書ノ價ハ

$$60\left\{\frac{1}{(1+.06)^{27}}+\frac{1}{(1+.06)^{28}}+\cdots\cdots+\frac{1}{(1+.06)^{40}}\right\}$$

$$=\frac{60}{(1+.06)^{27}}\left\{1+\frac{1}{1+.06}+\frac{1}{(1+.06)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(1+.06)^{13}}\right\}$$

$$=\frac{60}{(1.06)^{27}}\left\{\frac{1-\frac{1}{(1.06)^{14}}}{1-\frac{1}{1.06}}\right\}=1000(1.06)^{-26}\{1-(1.06)^{-14}\}$$

對數表ヲ用ヰテ計算シ　答　122.58 圓ヲ得.

第三十一章

不等式

213. 不等式トハ不等號ヲ以テ結ビツケラレタル代數式ノ事ニシテ既ニ屢々用ヰタルコトアリシモノナリ.(不等式ニ於テハ數ノ範圍ヲ實數ニ限ルモノトス)

不等式ヲ解クトハ其式ノ成立ツ爲メニ其式中ノ特別ナル文字ニ代入シ得ベキ値ノ界限ヲ研究スルコトナリ.

二組ノ不等式アリテ各々ヨリ互ニ他ノモノヲ誘出シ得ベキモノナルトキハ此二組ハ**同價**ナリト云フ.

不等式ニ於ケル重モナル定則ヲ次ニ擧グ

I 不等式ノ兩邊ヨリ等シキ數ヲ引クモ或ハ兩邊ニ等シキ數ヲ加フルモ不等式ハ同價ナリ.

II 不等式ノ兩邊ニ零ニアラザル等シキ正號ノ數ヲ乘ズルモ或ハ兩邊ヲ之レニテ除スルモ不等式ハ同價ナリ.

III 不等式ノ兩邊ニ零ニアラザル等シキ負數ヲ乘ジ或ハ之ニテ兩邊ヲ除シ後不等式ノ方向ヲ變ジテ得タル不等式ハモトノ不等式ト同價ナリ.

214. 未知數一ツノ一次不等式

上ノ定則ニ由リ不等式ニ於テモ又任意ノ項ヲ符號ヲ變ジテ他ノ邊ニ移スコトヲ得

故ニ一般ニ一未知數ノ一次不等式ハ

$ax>b$ ....(1)

或ハ $ax<b$ ....(2)

ノ形ニ歸スベシ.

今此不等式ヲ解カンニ a ノ正負ニ依テ二ツノ場合アリ

a 正ノ場合(即 $a>0$ ノ場合)

(1) ヨリハ $x>\frac{b}{a}$

(2) ヨリハ $x<\frac{b}{a}$

a 負ノ場合(即チ $a<0$ ノ場合)

(1) ヨリハ $x<\frac{b}{a}$

(2) ヨリハ $x>\frac{b}{a}$

若シ又 $a=0$ ナルトキハ b ノ正負ニ由テ夫々二ツノ答アリ.

(1) ヨリハ $b<0$ ナルトキハ x ハ如何ナル値ニテモ適合ス
$b>0$ ナルトキハ不能ナリ.

(2) ヨリハ $b<0$ ナルトキハ不能ナリ
$b>0$ ナルトキハ x ハ任意ノ値ニテ適合ス.

例 1 $\frac{x}{6}-2<x+\frac{3}{4}$ ヲ解ケ.

兩邊ニ 12 ヲ乘スレバ $2x-24<12x+9$

移項シテ $-10x<33$

~~$-10x$~~ -10 ニテ除シテ(III 參照) $x>-\frac{33}{10}$

即 x ハ $-\frac{33}{10}$ ヨリ大ナリ.

例2 2 $2x-6y<11$, $x+4y=2$ ヲ解ケ.

方程式ノ兩邊ニ 2 ヲ掛ケ之レヨリ不等式ヲ引クトキハ

$$14y>-7 \quad \therefore \quad y>-\frac{1}{2}$$

次ニ不等式ニ 2 ヲ掛ケ方程式ニ 3 ヲ掛ケテ相加フレバ

$$7x<28 \quad \therefore \quad x<4$$

二次ノ不等式ニ就テハ次章ニ述ブル所アルベシ.

第三十二章

二次式ノ値ノ變化

極大 及ビ 極小

215. 二次式ノ一般ナル形ハ次ノ如シ

ax^2+bx+c 但 a ハ 0 ニアラザルモノトス

茲ニ abc ハ與ヘラレタル實數ヲ表ハシ, x ハ如何ナル値ヲモ取ルコトヲ得ル所ノ數(所謂變數)ヲ表ハスモノトス.

x ノヲ種々ナル値ニ對シテ二次式 ax^2+bx+c ノ値ガ如何ニ變化スルカヲ研究センガ爲メニ假リニ此式ノ値ヲ λ ト命ズレバ

$$ax^2+bx+c=\lambda$$

或ハ
$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=\lambda$$

今 x ヲシテ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ ニ至ル迄ノアラユル値ヲ取ラシムルトキニ λ 即 ax^2+bx+c ノ値ハ如何ニ變化スベキカト云フニ a ノ正ナルト負ナルトニ由リ其結果ニ差違アルハ勿論ナリト雖モ其何レノ場合ニ在リテモ x ノ値ノ變化ニ從テ變更スベキモノハ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ノミナレバ本研究ヲ遂行センニハ x ノ變更ニ從テ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ハ如何様ニ變更スルカヲ攻究スルヲ以テ便ナリトス.

(無究大)

第一 $a>0$ ナル場合

x ガ $-\infty$ ナルトキハ $x+\frac{b}{2a}$ ハ $-\infty$ ニシテ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ハ $+\infty$

トナリ從テ λ ハ $+\infty$ トナル $\left(\frac{b}{2a}\right.$ナド常數ハ ∞ ナル數ニ比スレバ殆ンド 0 ト見ルベキモノナレバ此等ノ存失ニ由テ ∞ ノ値ニ變化ヲ及ボス如キコトナシ)

而シテ x ガ $-\infty$ ヨリ斷エズ增加スルトキハ $x+\frac{b}{2a}$ ハ負ニシテ且ツ增加スルヲ以テ其絕對値ハ漸次減少スベク從テ其平方モ減少ス斯クシテ x ガ $-\frac{b}{2a}$ 迄增シ來リタリトセバ λ ノ値ハ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ナル値ヲ取ルニ至リ，尙進ンデ x ヲ $-\frac{b}{2a}$ ヨリ $+\infty$ 迄增加セシムレバ $x+\frac{b}{2a}$ ハ正數ニシテ增加シ其平方モ增加スルヲ以テ λ モ增加シ來リ終ニ x ガ $+\infty$ ニ達スルニ至レバ λ モ亦 $+\infty$ トナル．

今之レヲ表ニテ示セバ次ノ如シ

x	$-\infty$ ‥‥增‥‥ $-\frac{b}{2a}$ ‥‥增‥‥ $+\infty$
λ	$+\infty$ ‥‥減‥‥ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ‥‥增‥‥ $+\infty$

即チ a ガ正號ナルトキハ $x=-\frac{b}{2a}$ ナル時 λ ノ値極小トナル之レヲ λ ノ極小値ト云フ．

第二 $a<0$ ナル場合

此場合ニ於テハ x ヲ $-\infty$ ヨリ $-\frac{b}{2a}$ マデ增加セシムレバ前ト同樣ニ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ ハ $+\infty$ ヨリ $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ マデ減小ス，由テ此和ニ負數 a ヲ乘ジタル積ハ反對ノ方向ニ變更ス，即チ λ ノ値ハ $-\infty$ ヨリ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ マデ增加ス，尙進ンデ x ヲ $-\frac{b}{2a}$ ヨリ $+\infty$ マ

デ增加セシムレバ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ ハ $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ ヨリ $+\infty$ マデ增加スベシ之レヲ負數 a ヲ掛ケタル値 λ ハ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ヨリ $-\infty$ マデ減小ス，今表ヲ以テ之レヲ表ハセバ

x	$-\infty$ ‥‥增‥‥ $-\frac{b}{2a}$ ‥‥增‥‥ $+\infty$
λ	$-\infty$ ‥‥增‥‥ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ‥‥減‥‥ $-\infty$

即チ a ノ負數ナル時ハ $x=-\frac{b}{2a}$ ナル時 λ ノ値極大トナル之レヲ λ ノ極大値ト云フ

是ニ由テ之レヲ觀レバ λ 即チ ax^2+bx+c ノ値ハ a ノ正數ナルカ負數ナルカニ從テ $x=-\frac{b}{2a}$ ナル時夫々極小値或ハ極大値ヲ取リ其二値ハ共ニ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ナリ．

(例一) x ヲ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ 迄變セシムル時

$$x^2-5x+15$$

ナル二次三項式ノ取リ得ベキ極大或ハ極小値ヲ索メ且ツ之レニ應ズル x ノ値ヲ示セ．

此三項式ハ x^2 ノ係數正ナルヲ以テ極小値アルベシ而シテ其値ハ

$$\frac{4\times1\times15-(-5)^2}{4\times1}=\frac{35}{4} \qquad \left(\frac{4ac-b^2}{4a}\text{ニ相當スルモノ}\right)$$

ニシテ之レニ應ズル x ノ値ハ $-\frac{(-5)}{2\times1}=\frac{5}{2}$ $\left(-\frac{b}{2a}\right.$ ニ相當スルモノ) ナリ

注意 二次式ノ變化ノ研究ニ於テハ x ハ實數ニ限ルモノトス．

トナリ從テ λ ハ $+\infty$ トナル．($\frac{b}{2a}$ナド常數ハ ∞ ナル數ニ比スレバ殆ンド０ト見ルベキモノナレバ此等ノ存失ニ由テ ∞ ノ値ニ變化ヲ及ボス如キコナシ)

而シテ x ガ $-\infty$ ヨリ漸エズ增加スルトキハ $x+\frac{b}{2a}$ ハ負ニシテ且ツ增加スルヲ以テ其絕對値ハ漸次減少スベク從テ其平方モ減少ス斯クシテ x ガ $-\frac{b}{2a}$ 迄增シ來リタリトセバ λ ノ値ハ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ナル値ヲ取ルニ至リ，尙進ンデ x ヲ $-\frac{b}{2a}$ ヨリ $+\infty$ 迄增加セシムレバ $x+\frac{b}{2a}$ ハ正數ニシテ增加シ其平方モ增加スルヲ以テ λ モ增加シ來リ終ニ x ガ $+\infty$ ニ達スルニ至レバ λ モ亦 $+\infty$ トナル．

今之レヲ表ニテ示セバ次ノ如シ

x	$-\infty$ ‥‥增‥‥ $-\frac{b}{2a}$ ‥‥增‥‥ $+\infty$
λ	$+\infty$ ‥‥減‥‥ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ‥‥增‥‥ $+\infty$

即チ a ガ正號ナルトキハ $x=-\frac{b}{2a}$ ナルトキ λ ノ値極小トナル之レヲ λ ノ極小値ト云フ．

第二　$a<0$ ナル場合

此場合ニ於テハ x ヲ $-\infty$ ヨリ $-\frac{b}{2a}$ マデ增加セシムレバ前ト同樣ニ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ ハ $+\infty$ ヨリ $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ マデ減小ス，由テ此和ニ負數 a ヲ乘ジタル積ハ反對ノ方向ニ變更ス，即チ λ ノ値ハ $-\infty$ ヨリ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ マデ增加ス，尙進ンデ x ヲ $-\frac{b}{2a}$ ヨリ $+\infty$ マ

デ增加セシムレバ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ ハ $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ ヨリ $+\infty$ マデ增加スベシ之レヲ負數 a ヲ掛ケタル値 λ ハ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ヨリ $-\infty$ マデ減小ス，今表ヲ以テ之レヲ表ハセバ

x	$-\infty$ ‥‥增‥‥ $-\frac{b}{2a}$ ‥‥增‥‥ $+\infty$
λ	$-\infty$ ‥‥增‥‥ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ‥‥減‥‥ $-\infty$

即チ a ノ負數ナルトキハ $x=-\frac{b}{2a}$ ナルトキ λ ノ値極大トナル之レヲ λ ノ極大値ト云フ

是ニ由テ之レヲ觀レバ λ 即チ ax^2+bx+c ノ値ハ a ノ正數ナルカ負數ナルカニ從テ $x=-\frac{b}{2a}$ ナルトキ夫々極小値或ハ極大値ヲ取リ其二値ハ共ニ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ナリ．

(例一)　x ヲ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ 迄變セシムルトキ

$$x^2-5x+15$$

ナル二次三項式ノ取リ得ベキ極大或ハ極小値ヲ索メ且ツ之レニ應ズル x ノ値ヲ示セ．

此三項式ハ x^2 ノ係數正ナルヲ以テ極小値アルベシ而シテ其値ハ

$$\frac{4\times1\times15-(-5)^2}{4\times1}=\frac{35}{4}\qquad\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\text{ニ相當スルモノ}\right)$$

ニシテ之レニ應ズル x ノ値ハ $-\frac{(-5)}{2\times1}=\frac{5}{2}$　$\left(-\frac{b}{2a}\right.$ ニ相當スルモノ) ナリ

注意　二次式ノ變化ノ研究ニ於テハ x ハ實數ニ限ルモノトス．

216. 二次式ノ極大極小ハ次ニ述ブル方法ニテモ索ムルヿヲ得ベシ，即チ前條ニ於ケルカ如ク

$$ax^2+bx+c=\lambda$$

トシ，此式ヨリ

$$ax^2+bx+c-\lambda=0$$

ヲ得，之レヲ x ニ關シテ解ケバ（λ モ已知數ノ如ク取リ扱フ）

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-\lambda)}}{2a}$$

今 x ヲ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ ニ至ル,アラユル値ヲ取ラシメンニ其何レノ場合ニ於テモ常ニ實數ナルヿヲ要スルガ故

$$b^2-4a(c-\lambda)\geqq 0$$

（$\geqq$ ナル符號ハ或ル數ガ或ル他ノ數ヨリ大ナルカ或ハ之レニ等シキカヲ示スニ用フ，同様ニ或ル數ガ或ル他ノ數ヨリ小ナルカ或ハ之レニ等シキカヲ示スルハ $\leqq$ ナル記號ヲ用フ）

或ハ $$4a\left[\lambda-\frac{4ac-b^2}{4a}\right]\geqq 0$$

今 a ヲ正號トセバ括弧內ノ値ハ負數タルヿ能ハス何トナレバ正數ト負數トノ積ハ負トナレバナリ．即チ λ ハ如何ナル大値ヲモ取リ得ベシト雖モ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ヨリモ小ナルヿ能ハザルナリ．此故ニ a ガ正數ナル時 λ ノ取リ得ベキ極小値ハ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ニシテ此時ノ x ノ値ハ $-\frac{b}{2a}$ ナリ．

次ニ a ヲ負數ナリトセバ $\lambda-\frac{4ac-b^2}{4a}$ ハ正號ノ數タルヿ能ハザルガ故ニ λ ハ如何ナル小値ヲモ取リ得ベシト雖モ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ヨリ大ナ

ル値ハ取ルヿ能ハザルナリ，即チ a ガ負號數ナル時ハ λ ノ取リ得ベキ極大値ハ $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ニシテ此時ノ x ノ値モ $-\frac{b}{2a}$ ナリ

即チ前條ニ於テ得タルモノト同一ノ結論ヲ得タリ．

（例二）m 尺ノ繩ヲ以テ圍ミ得ベキ矩形ノ最大ナルモノヲ問フ。

此矩形ノ縦ヲ x 尺トスレバ横ハ $\left(\frac{m}{2}-x\right)$ 尺ナリ．

故ニ其面積ハ $x\left(\frac{m}{2}-x\right)$ 平方尺ナリ．今之レヲ λ ト命ズレバ

$$x\left(\frac{m}{2}-x\right)=\lambda$$

$$\therefore\ -x^2+\frac{m}{2}x-\lambda=0$$

上ニ述ベタル結論ニ由テ λ ノ極大値ハ $\dfrac{4\times(-1)\times0-\left(\frac{m}{2}\right)^2}{4\times(-1)}$

$=\frac{m^2}{16}$ ナリ

而シテ其時ノ x ノ値ハ $\frac{m}{4}$ ナリ．

故ニ m 尺ノ繩ヲ以テ圍ミ得ベキ最大ノ矩形ハ邊ノ長サ $\frac{m}{4}$ 尺ノ正方形ナルヲ知ル．

問　　題

(1) 與ヘラレタル圓ニ內接スル矩形ノ最大ナルモノヲ求ム．

(2) 100 ヲ二分シ其平行ノ和ヲ最小ナラシメヨ．

217. 二次ノ不等式ノ解キ方

今例ヲ擧ゲテ其解法ヲ示スベシ

(例一) $3x^2>6-7x$ ヲ解ケ.

總テノ項ヲ左邊ニ集ムレバ $3x^2+7x-6>0$

即チ $3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+3)>0$

此式ガ成立ツ爲メニハ $\left(x-\frac{3}{2}\right)$ ト $(x+3)$ トガ同シ符號(正ト正或ハ負ト負ヲ取ラザル可カラズ

即チ x ハ $\frac{2}{3}$ ヨリ -3 迄ノ間ノ數タルヿヲ得ズ, 由テ

$x>\frac{2}{3}$ 或ハ $x<-3$ ヲ以テ答トス.

次ニ此解キ方ノ原理ヲ解說スベシ

二次三項式 ax^2+bx+c ヲ取リ之レヲ零ニ等シト置キタル方程式ヲ解キテ二ツノ根 $\alpha\beta$ ヲ得タリトセバ根ト係數トノ關係ニヨリテ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \quad \text{(其係下參照)}$$

ナルベシ故ニ三項式(零ニ等シト置キタル方程式ト混同スル勿レ)ハ順次, 次ノ如ク變形シ得ベシ

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$$

$$=a[x^2-(\alpha+\beta)+\alpha\beta]$$

$$=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

故ニ二次三項式ハ常ニ一次ノ二因數ニ分解スルヿヲ得ベシ

是ニ由テ二次ノ不等式

$$ax^2+bx+c>0$$

ハ之レヲ $\quad a(x-\alpha)(x-\beta)>0$

ト書クヲ得ベク, 而シテ若シ a ガ正號ナレバ上ノ不等式ノ成立ツ爲メニハ $x-\alpha$ ト $x-\beta$ トハ倶ニ正ナルカ若クハ倶ニ負ナラザルベカラズ, 即チ x ノ値ハ α ト β トノ中ノ大ナルモノヨリモ大ナルカ或ハ α ト β トノ中ノ小ナルモノヨリモ小ナラザル可カラズ何トナレバ假リニ $\alpha>\beta$ ナリトセンカ x ガ α ヨリモ大ナランニハ勿論 β ヨリモ大ナルベキニヨリ $(x-\alpha)(x-\beta)$ ナル二因數ハ何レモ同シ符號ヲ有シ從テ其積ハ正數トナリ之レニ a ナル正數ヲ掛ケタルモノ即原三項式ハ正ナリトノ要件ニ適合スルニ至リ, 又 x ガ β ヨリモ小ナル片ハ無論 α ヨリモ小ナルガ故此場合ニモ亦 $(x-\alpha)(x-\beta)$ ナル二因數ハ同符號ヲ取リ從テ上ノ要件ヲ滿足スベケレバナリ.

次ニ a ガ負號ナル片ハ $x-\alpha$ ト $x-\beta$ トハ一方ハ正數ニシテ一方ハ負數ナラザル可カラズ即チ x ノ値ハ α ト β トノ間ニアル可キヲ要ス.

不等式 $\quad ax^2+bx+c<0$

ニ就テハ上ノ結論ト全ク反對ノモノヲ得ベキヿ勿論ナリ.

(例二) $4x-x^2<x^2-6$ ヲ解ケ.

總テノ項ヲ左邊ニ移シテ $\quad -2x^2+4x+6<0$

方程式 $-2x^2+4x+6=0$ ヲ解ケバ次ノ二根ヲ得

$$\alpha=3, \quad \beta=-1$$

依テ x ハ 3 ト -1 トノ間ノ數ナルヲ要ス, 即チ

$-1<x<3$

問題

次ノ不等式ヲ解ケ.

(1) $x^2>25$

(2) $x^2-8>2x$

(3) $ax(a+1)+(1+x)>a^2$

(4) $4x^2+8x+3>0$

代數學講義

終

明治三十七年六月廿日印刷
明治三十七年六月廿日發行

數理學講義録ノ内

正價金一円

著作權所有
不許複製

編輯者 東京數理學會

しよんべー、

東京市神田區三崎町三丁目一番地
發行者 村瀨兼太郎

東京市本郷區湯島一丁目二、三番地
印刷者 松本秋齋

東京市神田區三崎町三丁目一番地
發行所 東京數理學會

▲附　記

本書は本會が嘗て通信敎授法により講習會員へ頒布したる「數理學講義錄」の爲めに先生が特に執筆講述せられたるものにして先生は斯學を專攻せられ其學殖は深厚其知識は豐饒なり加之他年斯學を敎導して實驗に富み斯學に於て最も名聲隆々たるなり而して本講義の嶄新有益なるは世上に定評ありて今更に之を喋々するの要なし依て各科目毎に編綴して一冊子に製裝し以て讀者の學習の便に資す

本講義錄印刷の際は迅速を要せしが爲めに校正には注意に注意を重ねたるも猶且つ多少の誤謬なきを保しがたし其校正は本會編輯局に於て負擔せしを以て先生の關與せざる所なり聊か附記して之を辨明す

明治三十七年六月

東京數理學會　誌

代数学講義（物理学講義録）

田中　三四郎／著