始

非ゆうくりど幾何學

非ゆうくりっど幾何學

西内貞吉

非ゆうくりっど幾何學

京都帝國大學教授
理學博士
西内貞吉著

東京
成象堂

序

非ゆうくりつど幾何學ハ約貳百年以前ニ建設セラレタル幾何學ナレドモ，ゆうくりつど幾何學ノ先天的確實性ヲ過信セル世人ハ，單ニ思想ノ一建築物トシテ之ヲ看過シ來レリ．然ルニ *Lobachevski* 氏ニヨリ，氏ノ幾何學ハ天文學上ニ何等不都合ナキコトヲ證セラレタルノミナラズ，最近 *Einstein, Weyl* 氏等ニヨリテ一般相對原律ニ於テハ經驗的世界ハゆうくりつど幾何學的ニ非ズシテ寧ロ非ゆうくりつど幾何學的ニ解釋スベキモノナル事ヲ說明サレタリ．

本書ハ大正十年八月上旬，京都帝國大學夏期講演會ニ於テ余ガ說述シタルモノヲ增補敷衍シタルモノニシテ，微分幾何學的見地ヨリ，非ゆうくりつど幾何學ノ研究ヲ進メ，之ヲ解析的ニ陳述シタルモノナリ．是蓋シ比較的容易ニ非ゆうくりつど幾何學ノ全般ニ亙ル概念ヲ得ルト共ニ，一般相對原律ノ研究方法ト其步調ヲ一致セシムルコトヲ得ルガ爲ナリ．

若シ其レ本書ガ幾何學研究者ノ好侶伴トナリ，又一般相對原律研究者ニ一縷ノ光明ヲ與フルヲ得バ，余ノ滿足之ニ過ズ．

終リニ，此ノ著述ヲ爲シ得タルハ全ク京都帝國大學講師理學士柏木秀利君ノ多大ナル補助ニヨル，之レ余ノ大ニ感謝スルトコロナリ．

大正十二年一月

著者識ス

目　次

緒　論

I. 歴　史

II. 微分幾何學

第一章　點及曲線

第二章 點及直線ニ關スル坐標幾何學

第三章 三角法

第四章 圓

第五章 曲線弧ノ長サ

第六章 平面圖形ノ面積

第七章 非ゆうくりつど空間幾何學

非ゆうくりっど幾何學

理學博士 西內貞吉 著

緒論

I. 歷史

1. 幾何學ノ歷史及平行線公理。 幾何學ハ英語ニテ *Geometry*, 佛語ニテ *la géométrie*, 獨逸語ニテ *die Geometrie*, 伊語ニテ *la geometria* ト稱シ, 其語源ハ希臘ノ *γεωμετρία* (げをめとりあ) ニテ, 即土地ヲ測ルト云フ意ナリ。昔埃及ニ於テないる河ガ時々汎濫スルガ故其都度土地ノ境界ヲ定ムル必要ヨリ來リシモノニシテ, 最初ハ箇々ノ事實及大體ノ計算ノ法則ヲ敎フルニ過ザリシガ, 紀元前 546—640 年頃希臘ノ七賢ノ一人 *θαλης* (たれーす) ガ埃及ヨリ之ヲ歐洲ニ紹介セリ。然レドモ其ガ一ツノ計量的科學トナリシハ紀元前 500—580 年頃ニシテ, *πυθαγωρας* (ぴゅたごらす) ノ力ニ依テナリ。其後紀元前 300 年 *Εὐκλείδης* (ゑぅくれーです) 出デヽ始メテ之ヲ組織的トセリ。氏ノ著書ノ第一卷ハ幾何學的圖形ノ定義ノ目錄, 公理及五個ノ普通公理ヨリ成ル。其五個ノ普通公理ノ初メノ三個ハ直線及圓ノ作圖ニ關係セルモノニシテ, 第四ハ總テノ直角ハ相等シト云フモノナリ。然ルニ *Hilbert* (ひるべると) 氏ハ之ヲ定理トシテ證明

セリ。第五公理ハ有名ナル平行線公理ナリ。即二ツノ直線ガ一直線ニ交リ同一ノ側ニアル内角ノ和ヲ二直角ヨリ小ナラシムルトキハ此二直線ヲ延長セバ内角ノ和ガ二直角ヨリ小ナル側ニ於テ交ル。

然ルニ此公理ハ一見之ヲ公理トシテ承認スルコトヲ得ザリシト見ヘ，之ヲ證明セント試ミル者今尚多シ。然レドモ皆其證明中ニ平行線公理ノ變形物ヲ用ヒテ之ヲ證シ得タルモノトセリ。

茲ニ注意スベキハ，平行即希臘語ニテノ παρ'αλληλος (ぱらゝれーろす)トハ元來等距離ト云フ意ナレドモ，ゑぅくれーですハ之ヲ 'α-σύμπτωτος (あしゅむふとーさす)(交ラズ)ト云フ意味ニ於テ使用セリ。

次ニ上述ノ平行線公理ノ變形物ノ主ナルモノヲ擧グレバ次ノ如シ

(1). 二ツノ交ル直線ハ第三ノ直線ニ平行ナルコトヲ得ズ。

(2). 一點ヲ過リテ一直線ニ平行ナル只一ツノ直線ヲ引クコトヲ得。

(3). 三角形ノ三ツノ内角ノ和ハ二直角ニ等シ。

(4). 三ツノ點ハ同一直線上ニ在ルカ然ラサレバ同一圓上ニアリ。

(5). 三角形ノ面積ニハ最大限ナシ。

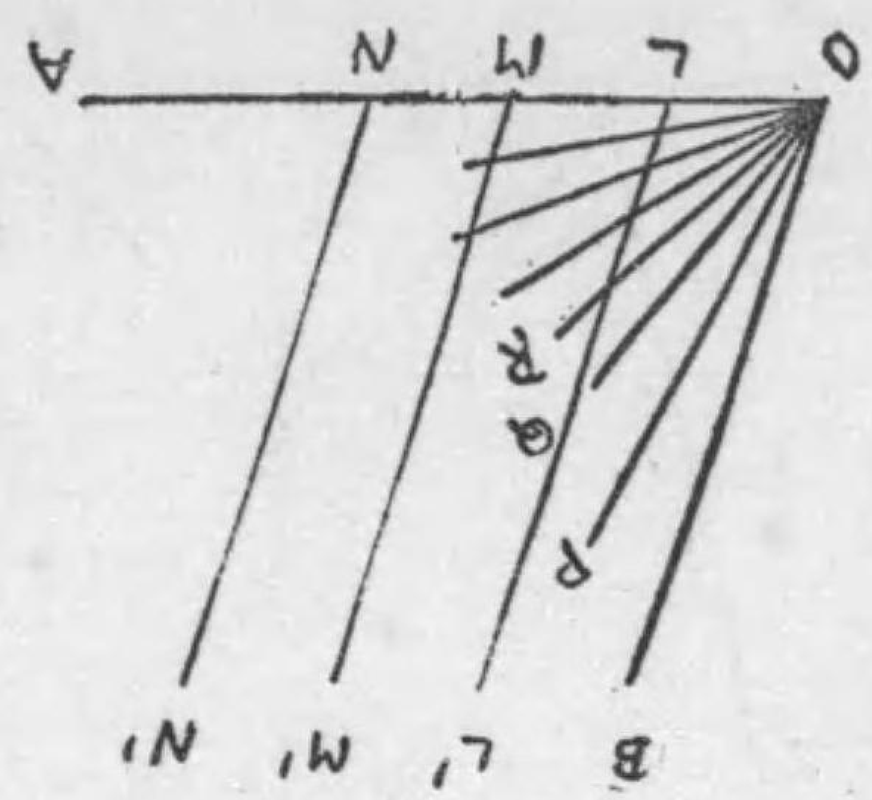
(6). 相似形ノ存在ヲ許容ス。

次ニ平行線ノ公理及之ヲ變形セシ公理中二三ノ有名ナルモノノ證明ヲ列擧セン。

(1). 平行線公理ノ證明。

角 AOB 内ニ含マレタル平面ノ一部分ヲ考ヘ OA ノ方向ニ無限ニ延長セル直線 OA ヲ線分 $OL, LM, MN, \ldots\ldots$ ニ分ツ。點 $O, L, M, N,$

…… ニ於テ OA ト等角ヲナス直線 $OB, LL', MM', NN', \ldots\ldots$ ヲ引ク。



第一圖

然ルトキハ AOB ナル平面ノ一部分ハ，$BOLL'$, $L'LMM', \ldots\ldots$ ナル平面ノ一部分ヨリ構成サレタルモノト見テ可ナリ。次ニ $\angle AOB$ ヲ $OP, OQ, OR, \ldots\ldots$ ナル直線ニテ等分ス。斯ノ如キ等分線ハ有限箇ノミ存在ス。從テ

面積 $BOLL' >$ 面積 BOP.

故ニ面積 BOP ハ面積 $BOLL'$ ノ一部分ナリ。因テ直線 OP ハ直線 LL' ヲ切ラザルベカラズ. 即二直線 OP, LL' ニ他ノ直線 OA ガ交リテナス内對角ノ和ガ二直角ヨリ小ナルトキハ二直線 OP, LL' ハ相交ルト云フゑぅくれーですノ公理ヲ證シ得タリト云フニアルモ，是無限大ノ面積ヲ恰モ有限ノ面積ノ如ク取扱ヒシ結果ニシテ誤ナリ。

(2). 「三角形ノ三内角ノ和ハ二直角ニ等シ」ノ證明 (*Thibaut* (ちばうと)ノ廻轉證明)。

三角形 ABC ガ與ヘラレシトキ A ヲ中心トシテ AC ガ BA ノ延長ニ來ル迄ニ三角形 ABC ヲ廻轉シ之ガ新位置 AB_1C_1 ヲ占メタリトセヨ。次ニ B ヲ中心トシテ三角形 AB_1C_1 ヲ邊 AC_1 ガ CB ノ延長ニ來ル迄廻轉シ之ガ新位置 $A_2B_2C_2$ ヲ占メシモノトセヨ。最後ニ C ヲ中心トシテ三角形 $A_2B_2C_2$ ヲ廻轉シ邊 A_2C_2 ガ AC ノ延長

ニ來ル如クセヨ。然ルトキニ三角形ガ位置 $A_3B_3C_3$ ヲ占ムルモノトセバ,

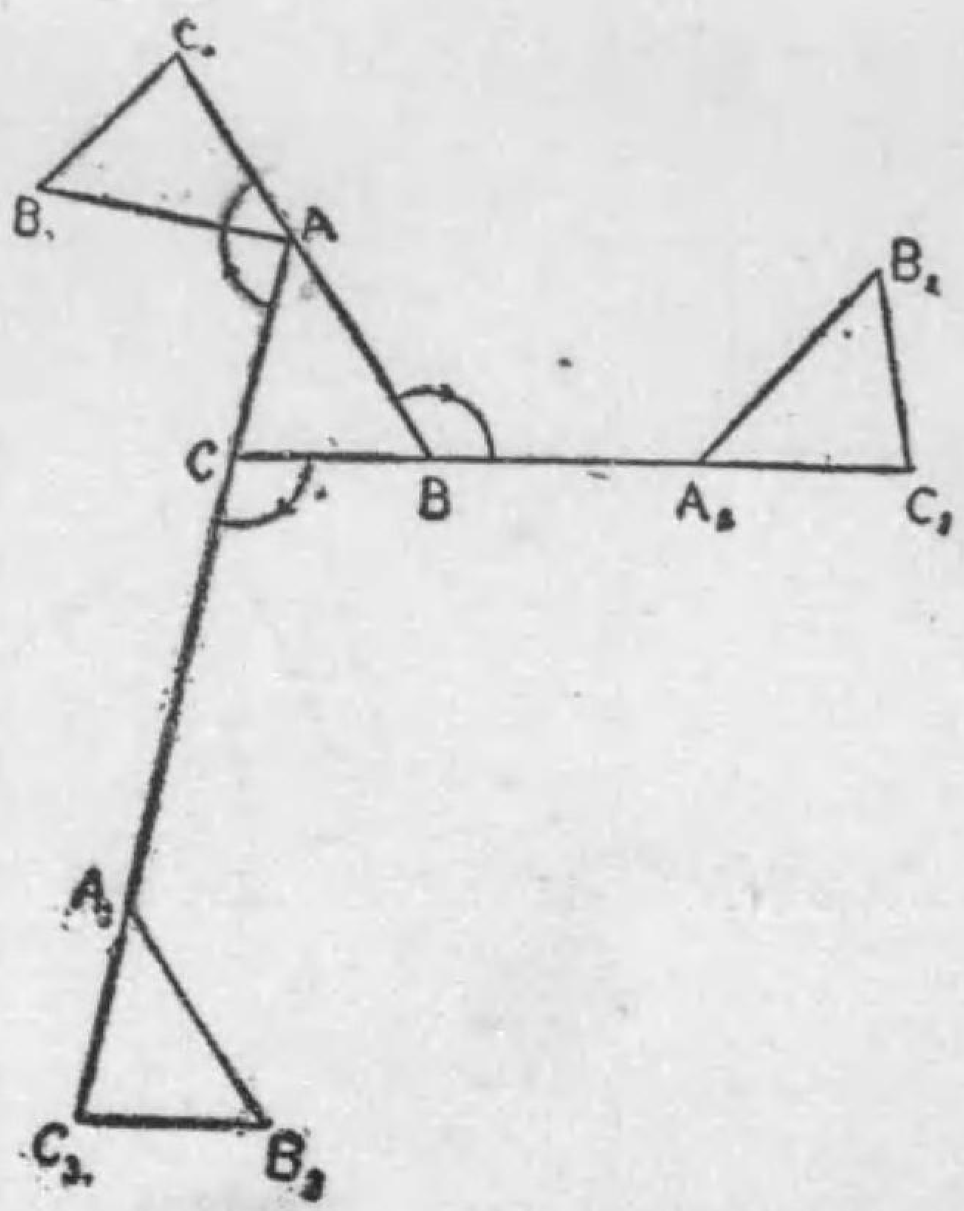
最初ノ廻轉角＝$\pi-A$,

第二ノ廻轉角＝$\pi-B$,

最後ノ廻轉角＝$\pi-C$,

合計＝$3\pi-(A+B+C)$.

此三廻轉ノ結果 AC ガ其延長 A_3C_3 ノ位置ヲ占ムルニ至リシヲ以テ AC ハ一廻轉セシコトトナル,



第　二　圖

故ニ

$$3\pi-(A+B+C)=2\pi.$$

從テ

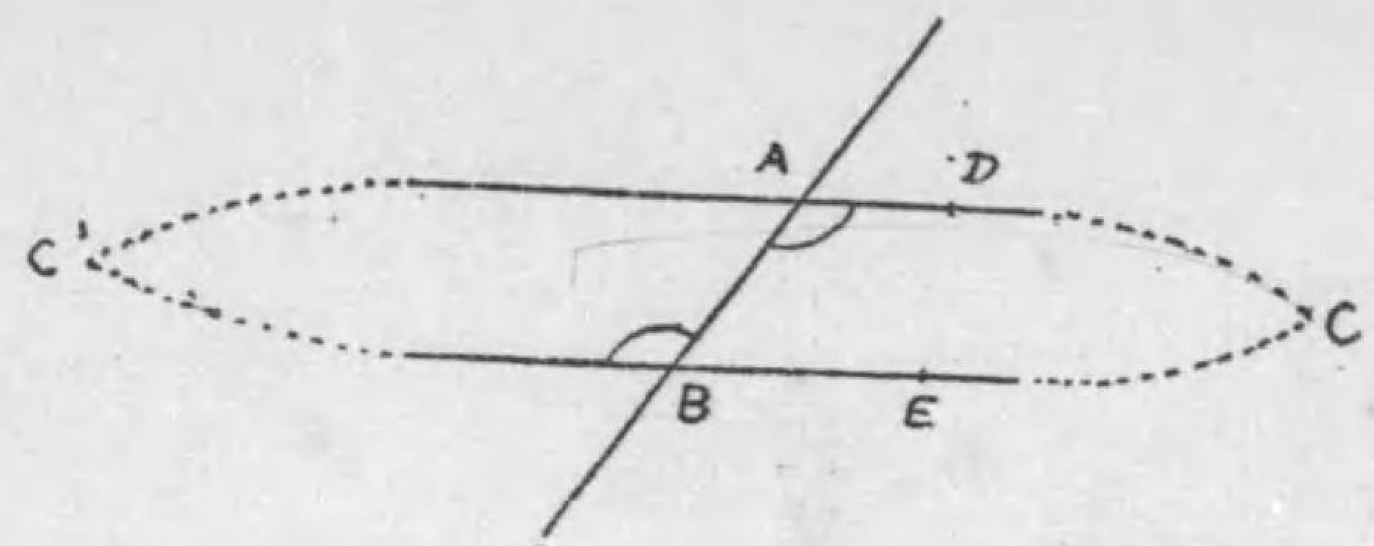
$$A+B+C=\pi$$

ト云フニアルモ，一點ノ廻リニ一廻轉スルコトト中心ヲ異ニシテ一廻轉ヲ完結スルコトトハ其結果同一ニ非ズ。之此證明ノ誤レル點ナリ。

(3).「二直線ガ一直線ニ交リテナス錯角ガ相等シケレバ此二直線ハ互ニ平行ナリ」ノ證明。

之ヲ證明スルニ廻轉法ヲ用ヒルヲ普通トス。今二直線 AD 及 BE ガ一直線 AB ト交リ，且其ナス錯角相等シトス。若シモ，假リニ二直線 AD 及 BE ガ一點 C ニ於テ交ルトセバ，廻轉法ニヨリ二直線 DA

及 EB モ亦其延長上ノ一點 C' ニ於テ交ルコトヲ證明シ得，然ルニ



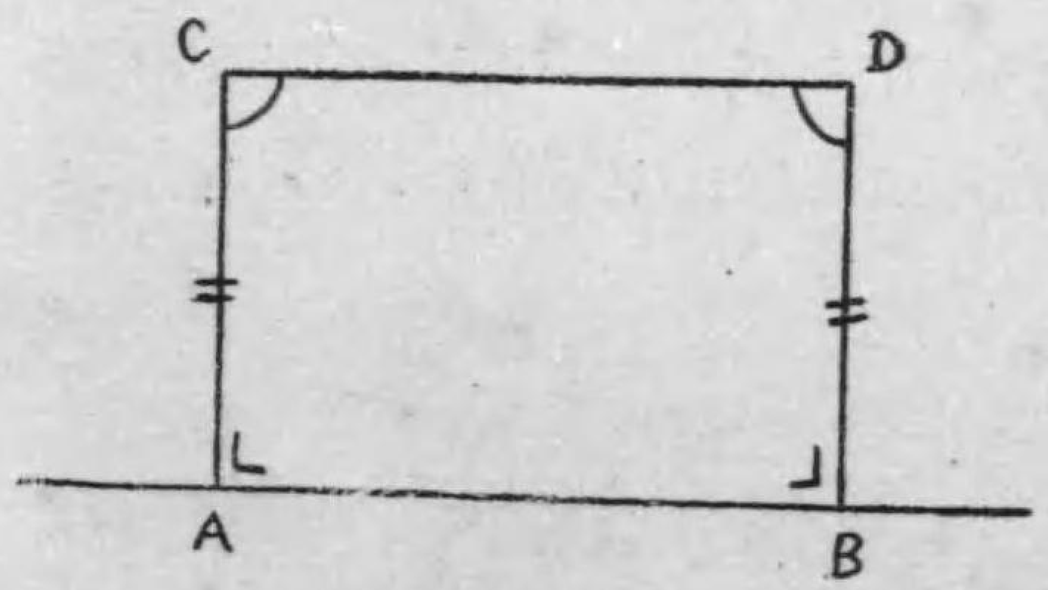
第　三　圖

二點ヲ通過スル直線ハ只一ツナルガ故ニ AD 及 BE ハ平行ナリト云フニアリ。然レドモ之ハ點 C ト C' トハ相異ナレル點ト假定セシコトヨリ來レル結果ナリ。依テ豫メ點 C ト C' トハ同一ナル點ナルヤ否ヤヲ確メザルベカラズ。

以上要スルニ平行線公理ハ，コレニ關係セル何等カノ公理ヲ用ヒズシテハ之ヲ證明スルコトヲ得ズ。此事柄ノ明トナレルハ非ゆうくりつど幾何學ノ發見以後ナリ。

2. 非ゆうくりつど幾何學ノ歴史。

非ゆうくりつど幾何學ノ源ハ甚ダ古シ。最初其發見ノ端緒ヲ開キシハ伊國ノ天主教ノ僧 *Gerolamo Saccheri*（さつけりー）氏(1667–1733)ナリ。一般ニ一直線 AB ニ垂直ナル二直線 AC, BD ヲ考



第　四　圖

ヘ且 AC ガ BD ニ等シク點 C 及 D ヲ取リ二點 C, D ヲ結ブトキハ

$$\angle C = \angle D$$

ナルコトハ容易ニ證セラル，然レドモ此等ノ角ガ直角ナルカ否カハ不明ナリ。依テ氏ハ次ノ三假定ヲ考ヘタリ。即

(i). $\angle C =$(直角),

(ii). $\angle C >$(直角),

(iii). $\angle C <$(直角).

而テ氏ハ此三假定ノ內ノ一假定ガ或ル場合ニ眞ナルトキハ他ノ總テノ場合ニ於テ眞ナルコトヲ證明セリ。且此三假定ニ應ジテ三角形ノ三內角ノ和ハ (i) 二直角ニ等シ, (ii) 二直角ヨリ大, (iii) 二直角ヨリ小ナルコトヲモ證明セリ。然レドモ ゑぅくれーです 氏ノ假定ヲ絕對的ニ眞ナリトセシ氏ハ此第一ノ假定ガ最モ好都合ナリト考ヘタリ。氏ノ後約五十年 *J.H. Lambert* (らんべる) 氏 (1728-1777) ハ *Saccheri* 氏ト同ジ出發點ヨリ發シテ同ジク三假定ヲ設立シ $\angle C$ ガ鋭角ナル假定ノモノトニハ三角形 ABC ノ面積ハ $\pi-(A+B+C)$ ニ比例スルコトヲ證明セリ。是球面上ノ幾何學ノ場合ナリ。然ルニ *Lambert* 氏ハ $\angle C$ ガ鈍角ノ假定ノモトニハ二直角ハ空間ヲ包圍スル故是ヲ放棄セリ。又 *Legendre* (るじやんどる) 氏 (1752-1833) ハ平行線ノ公理ヲ用キズシテ三角形ノ三內角ノ和ガ二直角ニ等シキコトヲ證明セリ。然レドモ此證明ニハ誤アリ。

後 *Nikolai Jvanovitch Labachevski* (ろばちゑぶすきー) 氏* (1793-1856) ハ 1815 年頃ヨリ平行線ノ理論ニ趣味ヲ有シ深ク是ヲ研究セリ。1823年ニ氏ノ奉職セシ *Kazan* 大學ノ爲メニ幾何學敎科書ヲ著シ 1909 年ニ是ヲ出版セリ。其書中ニ ゑぅくれーです 氏ノ第五公理ノ既往ノ證明ハ眞ノ證明ニアラズシテ說明ナリト書セリ。其後三年，氏ハ *Kazan* 大學ノ數物學會ニ於テ *Exp osition succinte des principles de la géometrié avec une démonstruction rigoureuse du théoréme des paralles* ナル題ノモトニ論文ヲ發表セリ。此論文ハ彼ノ有名ナル虛幾何學 (*Imaginary geometry*) ノ原理ノ說明ニシテ從來ノ ゑぅくれーです 氏ノ幾何學ヨリ更ニ一般ナルモノナリ。該論文中ニ氏ハ一點ヨリ一直線ニ二本ノ平行線ヲ引キ得ルト云フ假定ヨリ發シ三角形ノ三內角ノ和ハ二直角ヨリ小ナリト結論セリ。後氏ハ平行線ニ關スル論文六編ヲ發表シ 1840 年是ヲ獨語ニ飜譯セリ。後氏ノ諸研究ヲ一括シテ是ヲ *Pan-géométrie* ト名命シテ出版セリ。

* *Lobachevski* 氏ハ 1793 年露國 *Niji-Novgorad* (にじのぶごらうど)州ノ *Makarief* (まかりゑふ)ニ生レ *Kazan* 大學創立ノ際入學シ學業ヲ修メタリ。氏ハ同大學ニ於テ *Bartels* (ばるてるす)氏ノ講義ヲ聽キ 1811 年天體力學ノ論文ニヨリ學士ノ稱號ヲ得タリ。爾後益々深遠ナル攻究ニ沒頭シ遂ニ同學ノ敎授トナリ更ニ部長トナリ 1856 年沒セリ。

匈牙利人 *Farkas Bolyai* (ふあーかす，ぼるやい) 氏 (1775-1856) は *Göttingen* 大學ニテ數學ヲ學ビ其學友 *Gauss* (がうす) 氏ト共ニ平行線ノ公理ヲ證明セント試ミタレドモ失敗セリ。然レドモ其子 *John Bolyai* (ぢよん，ぼるやい) 氏 (1802-1860) ハ *Lobachevski* 氏ト全ク獨立ニ同樣ナル幾何學ヲ發見セリ。氏ハ *Wien* ノ工業學校在學時代ヨリ平行線ノ公理ニ趣味ヲ持チ是ヲ證明セントシテ失敗セリ。然レドモ其副產物トシテ此公理ヲ用ヒザル幾何學ヲ創立セントシ之ニ成功セリ。氏ハ此幾何學ヲ絕對幾何學 (*Absolute geometry*) ト命名セリ。

而テコノ幾何學ノ特別ノ場合ガゑぅくれーです氏ノ幾何學ナリ。氏ハ 1823 年ニ父ニ此發見ヲ報告セシニ父ハ驚キ且喜ビ其出版ヲ進メ當時父ノ著シツヽアリシ書 *Tentamen* ノ附錄トシテ是ヲ出版セリ。然レドモ氏及 *Lobachevski* 氏ハ共ニ直線ハ無限ノモノニシテ其兩端ノ閉ヂタル (*Closed*) モノニアラズトノ考ヘニヨリ三角形ノ三內角ノ和ガ二直角ヨリ大ナリトノ假定ハ是ヲ採用セザリキ。其後 *Bernhard Riemann* (りーまん) 氏 (1826-1860) ハ直線ハ閉鎖 (*Closed*) セルモノニシテ恰モ球面上ノ大圓ノ如キモノナリトノ考ヘヨリ三角形ノ三內角ノ和ガ二直角ヨリ大ナル如キ幾何學ヲ創設シ是ヲ球面幾何學 (*Spherical geometry*) ト名命セリ。此幾何學ニ於テハ球面上ノ幾何學ト同樣ニ二直線ハ二點ニテ交リ且一點ヨリ一直線ニ平行ナル直線ハ之ヲ引クコトヲ得ズ。

而テ *Riemann* ノ後 *Klein* (くらいん)氏ハ此 *Riemann* 氏ノ幾何學ヲ改良シ二直線ガ一點ニテ相交リ且三角形ノ三內角ノ和ガ二直角ヨリ大ナル如キ幾何學ヲ創立シ是ヲ楕圓的幾何學 (*Elliptic geometry*) ト名命シ且 *Lobachevski* 及 *Bolyai* 氏ノ幾何學ヲ双曲的幾何學 (*Hyperbolic geometry*), ゑぅくれーです氏ノ幾何學ヲ 拋物的幾何學 (*Parabolic geometry*) ト名命セリ。此拋物的幾何學ヲゆうくりつど幾何學, 楕圓的及双曲的幾何學ヲ非ゆうくりつど幾何學ト云フ。又氏及 *Cayley*(けいれー)氏ハ射影幾何學ノ方面ヨリ兩ゆうくりつど幾何學ヲ研究シ *Lie* (りー)氏ハ變更群論 (*Transformation group*) ノ理論ヲ基礎トシ運動 (*Motion*) ノ方面ヨリ兩ゆうくりつど幾何學ヲ研究セリ。

3. 幾何學公理。 *Kant* (かんと)氏曰ク「或ル假定ナクシテ思想ノ建築物ヲ作ルコトハ不可能ナリ」ト。幾何學ハ自然科學ニアラズシテ經驗ノ理想化ニヨル一種ノ思想ノ建築物ナリ。故ニ幾何學モ亦或ル種ノ假定ヨリ出發スベキナリ。此假定ヲ公理ト云フ。公理トハ從來自明 (*Self evident*) ナルモノト稱セラレタルガ近世ノ嚴密ナル見地ニヨレバ公理トハ是ヲ證明スルコト不可能ナルモノニシテ假定スベキモノナリト考フベキモノナリ。故ニ幾何學ハ公理ニ論理ヲ應用シテ築キ上ゲタル思想ノ建築物ナリ。從テ公理ガ異ナレバ別種ノ幾何學ヲ得ル譯ナリ。哲學者 *John Stuart Mill* (みる)氏曰ク「必要ナル假定ニシテ便利ナルモノハ如何ナル假定ニテモ是ヲ導入スルニ躊躇スル勿レ」ト。尤ナルコトナリ。然ルニ理論上幾何學ノ基礎タル假定即公理ハ數ニ於テ成可少ク, 簡單ニシテ且各公理間ニ關係ナキコトコソ望マシケレ。然レドモ公理ノ關係ヲ嚴密ニ論ズルニハ數學解析 (*Analysis*) ノ力ニヨルベキナリ。

II. 微分幾何學

4. 非ゆうくりうつど幾何學ノ研究方法。 非ゆうくりつど幾何學ノ研究方法ニ次ノ三種アリ。

1. 綜合的方法 (*Synthetic method*). 綜合幾何學的見地ヨリ研究ヲ進ムル方法。

2. 射影的方法 (*Projective method*). 射影幾何學的見地ヨリ研究

ヲ進ムル方法。一般ニ射影幾何學ノ理論ハ總テノ科學ノ中最モ美シキモノナリ。

3. 微分的方法 (*Differential method*) 微分幾何學的見地ヨリ研究ヲ進ムル方法。

此微分的方法ヨリ研究スルトキハ比較的容易ニ非ゆうくりつど幾何學ノ概念ヲ得ルト共ニ一般ノ相對性原理ノ研究方法ト其歩調ヲ一致セシムルコトヲ得ルガ故ニコノ微分的方法ニヨリ非ゆうくりつど幾何學ヲ陳述セン。

次ニ本書ニ必要ナル微分幾何學初歩ノ部分ノ概要ヲ簡單ニ記載セン。

5. 空間曲線ノ助變數方程式。(*Parametric equation of a space curve*).

直交軸ニ關スル空間ノ任意ノ一點 P ノ坐標ヲ (x,y,z) トス。若シモ x,y 及 z ガ夫々一助變數 u ノ解析函數* ナルトキハ，即

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(u),\\ y&=f_2(u),\\ z&=f_3(u), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ナルトキハ，u ガ連續的ニ變ズルニ相應ジテ點 P ハ空間ニ於ケル一曲線ヲ畫ク。而テ方程式 (1) ヲ空間曲線ノ助變數方程式ト稱ス。例ヘバ

$$x=a+r\cos u,$$

* 解析函數トハ冪級數ヲモトトシテ定義サレタル函數ナリ。從テ其函數ノ變數ノ區間內ノ或ル値ノ近傍ニ於テ此函數ヲ冪級數ニ展開スルコトヲ得。

$$y=b+r\sin u,$$
$$z=0, \qquad (0\leqq u<2\pi)$$

ナル方程式ハ，a,b,r ヲ常數，u ヲ助變數ト考フレバ，點 (a,b,o) ニ中心ヲ有シ，半徑 r ナル xy 平面上ノ圓ヲ表ス。而テ助變數 u ハ明ニ圓周上ノ一點ヲ過ル半徑ト x 軸トノナス角ヲ表ス。故ニ之ハ圓ノ助變數方程式ナリ。又

$$x=a+u\alpha,$$
$$y=b+u\beta, \qquad (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1)$$
$$z=c+u\gamma$$

ナル方程式ハ，a,b,c 及 α,β,γ ヲ常數，u ヲ助變數ト考フレバ，點 (a,b,c) ヲ通過シ其向キノ餘弦 (*Direction cosine*) ガ α,β,γ ナル如キ直線ヲ表スコト明ナリ。而テ助變數 u ハ點 (a,b,c) ヨリ直線上ノ點 (x,y,z) ニ至ル距離ヲ表ス。故ニ之ハ直線ノ助變數方程式ナリ。又

$$x=a\cos u,$$
$$y=a\sin u,$$
$$z=bu$$

ナル方程式ハ a,b ヲ常數，u ヲ助變數ト考フレバ，xy 平面上ノ正射影ガ原點ヲ中心トシ半徑 a ヲ有スル圓ナル如キ曲線ヲ表ス。此曲線ヲ螺線 (*Helix*) ト稱ス。故ニ是ハ螺線ノ助變數方程式ナリ。

6. 曲面ノ助變數方程式 (*Parametric equation of a surface*).

前節ニ述ベタルト同樣ニ，若シモ點 $P(x,y,z)$ ノ坐標 x,y 及 z ガ夫々二ツノ助變數 u 及 v ノ解析函數ナルトキ，即

$$
\begin{aligned}
x&=f_1(u,v),\\
y&=f_2(u,v),\\
z&=f_3(u,v)
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

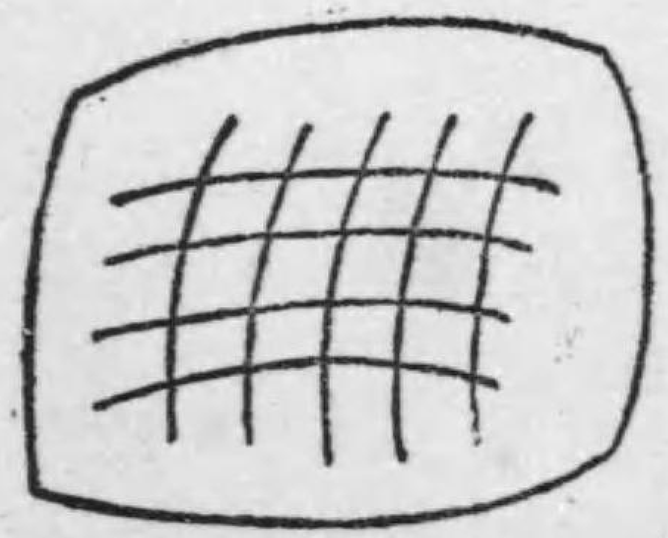
ナルトキハ，u 及 v ガ連續的ニ變ズルニ相應ジテ點 P ハ一ツノ曲面ヲ畫ク。而テ方程式 (2) ヲ曲面ノ助變數方程式ト稱ス。例ヘバ

$$
\begin{aligned}
x&=a\sin u\cos v,\\
y&=a\sin u\sin v,\\
z&=a\cos u
\end{aligned}
$$

$$(但\ -\pi\leqq u\leqq\pi,\quad 0\leqq v<2\pi)$$

ナル方程式ハ，a ヲ常數, u, v ヲ助變數ト考フレバ，原點ヲ中心トスル半徑 a ナル球面ヲ表ス。而テ助變數 v ハ球面上ノ一點 P ト z 軸トニテ決定サルゝ平面ト xz 平面トノナス角ヲ表シ，u ハ點 P ヲ過ル半徑ト z 軸トノナス角ヲ表ス。故ニ是ハ球ノ助變數方程式ナリ。

方程式 (2) ニ於テ $u=\alpha$ (常數) ト置ケバ (2) ハ曲面上ノ曲線ヲ表ス。コノ曲線ヲ $u=\alpha$ ノ曲線ト稱ス。今 α ヲ區間 $[a, b]$ 内ニ於テ連續的ニ變ズレバ其ニ相應ジテ曲面上ニ曲線ノ群ヲ得. 同樣ニシテ, $v=\beta$ (常數) ト置ケバ曲面上ノ曲線ヲ得。コノ曲線ヲ $v=\beta$ ノ曲線ト稱ス。而テ β ヲ區間 $[c, d]$ 内ニ於テ連續的ニ變ズレバ其ニ相應ジテ曲面上ニ前ト異レル曲線ノ群ヲ得。從テ曲面ハコノ二ツノ曲線群ヨリ成ルモノト考フルコトヲ



第五圖

得。又曲面上ノ點ハ $u=\alpha$ (常數), $v=\beta$ (常數) ナル二曲線ノ交リトシテ與ヘラル。

7. 距離元素 (*Distance element*) 又ハ線元素 (*Line element*).

曲面上ノ二點ヲ $P(x, y, z)$ 及 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ トス，然ルトキハ點 P ハ u, v 點 P' ハ $u+\Delta u$, $v+\Delta v$ ナル助變數ニテ定マル。且

$$\overline{PP'}^2=\overline{\Delta x}^2+\overline{\Delta y}^2+\overline{\Delta z}^2$$

ナリ。今點 P 及 P' ヲ通過スル曲面上ノ曲線ヲ考ヘ其曲線弧 $PP'=\Delta s$ トセバ，點 P' ガ點 P ニ近ヅキタル極限ニ於テハ

$$\overline{ds}^2=\overline{dx}^2+\overline{dy}^2+\overline{dz}^2$$

トナル。而テ ds ヲ此曲線ノ距離元素又ハ線元素ト稱ス。

(2) ヨリ

$$
\begin{aligned}
dx&=\frac{\partial f_1}{\partial u}du+\frac{\partial f_1}{\partial v}dv,\\
dy&=\frac{\partial f_2}{\partial u}du+\frac{\partial f_2}{\partial v}dv,\\
dz&=\frac{\partial f_3}{\partial u}du+\frac{\partial f_3}{\partial v}dv.
\end{aligned}
$$

故ニ

$$
\begin{aligned}
\overline{ds}^2&=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_i}{\partial u}du+\frac{\partial f_i}{\partial v}dv\right)^2\\
&=\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial u}\right)^2\right]\overline{du}^2
\end{aligned}
$$

$$+2\left[\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial v}+\frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{\partial f_3}{\partial v}\right]du\,dv$$

$$+\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial v}\right)^2\right]\overline{dv}^2.$$

今若シモ

$$E=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_i}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial u}\right)^2,$$

$$F=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_i}{\partial u}\frac{\partial f_i}{\partial v}\right)=\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f_1}{\partial v}+\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial v}+\frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{\partial f_3}{\partial v},\quad (3)$$

$$G=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_i}{\partial v}\right)^2=\left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial f_3}{\partial v}\right)^2$$

ト置ケバ

$$\overline{ds}^2=E\,\overline{du}^2+2F\,du\,dv+G\,\overline{dv}^2 \quad (4)$$

トナル。此 E, F, G ナル記號ハ最初 Gauss (がうす)氏ニ依テ用ヒラレタルモノニシテ, u, v ガ實ナルトキハ $\sqrt{E}$, 及 $\sqrt{G}$ ハ正ノ實數ナルコト明カナリ。又 u, v ガ實ナルトキハ

$$EG-F^2=\begin{vmatrix}E & F\\ F & G\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_i}{\partial u}\right)^2 & \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial u}\frac{\partial f_i}{\partial v}\\ \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial u}\frac{\partial f_i}{\partial v} & \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f_i}{\partial v}\right)^2\end{vmatrix}=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial u}\\ \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial v}\end{matrix}\right\|^2$$

$$\geqq 0 \quad (5)$$

ナリ。

8. 二曲線ノ交角。

一般ニ曲面上ノ曲線ハ二點 (u, v), $(u+du, v+dv)$ ニテ定マル。今コノ曲線上ノ一點 (u, v) ニ於ケル曲線ヘノ切線ノ向キノ餘弦ヲ α, β, γ トセバ

$$\alpha=\frac{dx}{ds}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right),$$

$$\beta=\frac{dy}{ds}=\left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right),$$

$$\gamma=\frac{dz}{ds}=\left(\frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial f_3}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right),$$

但 $\overline{ds}^2=E\,\overline{du}^2+2F\,du\,dv+G\,\overline{dv}^2.$

同樣ニ二點 (u, v), $(u+d_1u,\ v+d_1v)$ ニテ定メラレタル曲線上ノ一點 (u, v) ニ於ケル曲線ヘノ切線ノ向キノ餘弦ヲ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ トセバ

$$\alpha_1=\frac{d_1x}{d_1s}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{d_1u}{d_1s}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{d_1v}{d_1s}\right),$$

$$\beta_1=\frac{d_1y}{d_1s}=\left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{d_1u}{d_1s}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{d_1v}{d_1s}\right),$$

$$\gamma_1=\frac{d_1z}{d_1s}=\left(\frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{d_1u}{d_1s}+\frac{\partial f_3}{\partial v}\frac{d_1v}{d_1s}\right),$$

但 $\overline{d_1s}^2=E\,\overline{d_1u}^2+2F\,d_1u\,d_1v+G\,\overline{d_1v}^2.$

故ニ θ ヲ上ノ二曲線ノ交角トセバ

$$\cos\theta=\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1$$
$$=\frac{E\,du\,d_1u+F(du\,d_1v+d_1u\,dv)+G\,dv\,d_1v}{ds\,d_1s} \quad (6)$$

トナル。

9. 測地曲線 (*Geodesic line*)

曲面上ノ二點 P, Q ヲ通過スル任意ノ曲線ノ P, Q 間ノ長サヲ s トセバ

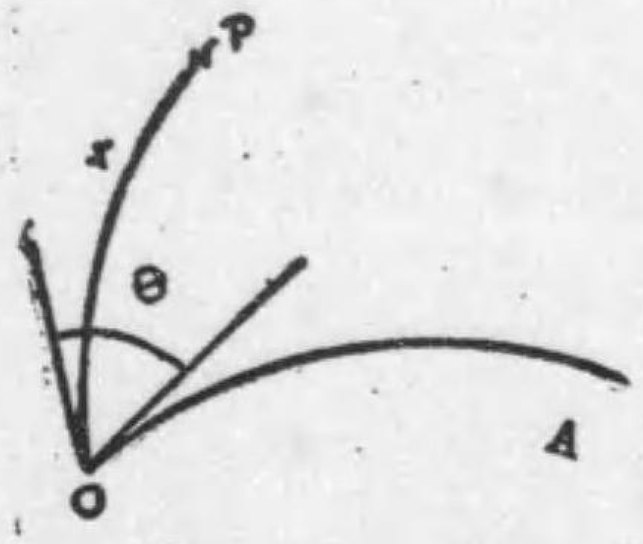
$$s=\int ds.$$

而テ二點 P, Q ヲ通過スル諸曲線ノ中其長サノ變分ガ零ニ等シキ曲線，即

$$\delta s=\delta\int ds=0$$

ヲ滿足スル曲線ヲ測地曲線ト云フ。

今曲面上ニ一定點 O 及點 O ヲ通過スル一定測地曲線 OA ヲトル。而テ曲面上ノ他ノ任意ノ點 P ト O トヲ測地曲線ニテ結ビ二點 O, P 間ノ測地曲線弧ノ長ヲ r, 二測地曲線 OA, OP ノ角ヲ θ トス。然ルトキハ點 P ハ θ 及 r ノ値ニテ決定セラル。從テ此 θ 及 r ヲ點 P ノ**測地極坐標** (*Geodesic polar coordinates*) ト云フ。而テ此坐標ヲ用フルトキニハ距離元素ハ



第　六　圖

$$\overline{ds}^2=\overline{dr}^2+G\,\overline{d\theta}^2 \tag{7}$$

ナル形トナル。

10. 全曲率 (*Total curvature*).

曲面上ノ一點 P ニ於ケル法線ヲ含ム平面ニテ此曲面ヲ切斷スルトキハ，種々ノ平面曲線ガ得ラル。コレ等ノ曲線中，點 P ニ於ケル曲率 (*Curvature*) ガ極大ナルモノ及極小ナルモノアリ。其極大及極小曲率ヲ夫々 $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ トスレバ，此兩者ノ積即 $\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}$ ハ Gauss 氏ニ依リテ點 P ニ於ケル曲面ノ**全曲率**ト名命サレタリ。今

$$\frac{1}{k^2}=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}$$

ト置ケバ (7) ナル等式ノ G ハ

$$G=k^2\sin^2\frac{r}{k}\ *$$

ニテ表サレ，從テ

$$\overline{ds}^2=\overline{dr}^2+k^2\sin^2\frac{r}{k}\overline{d\theta}^2$$

トナル。

曲面ノ各部分ニ伸縮ナキ樣ニシテ其曲面ノ形ヲ變ズルコトヲ曲面自身ヲ**變形スル** (*deform*) ト云フ。又曲面上ノ各點ノ近傍ノ曲面ノ部分ヲ他ノ曲面ノ之ニ對應スル部分ト一致セシムル如ク伸縮ナク曲面ヲ曲グル影像ノ方法ヲ**變形** (*Deformation*) ト云フ。例ヘバ二平面(平面ハ一種ノ曲面ト考フルコトヲ得)ガ相重ナレルトキハ，一方ノ平面ヲ滑ラスモ依然此二平面ハ相重ナル。從テコノトキノ滑ラス影像ノ方法ハ一種ノ變形ナリ。

測地曲線ハ變形ノ後ニモ亦測地曲線ナリ。又一點ニ於ケル全曲率ハ變形ノ後ノ是ニ對應スル點ニ於ケル全曲率ト相等シ。卽測地曲線ハ變形ニ對シテ不變ニシテ且全曲率モ亦變形ニ對シテ不變ノ量ナリ。斯クノ如ク，變形ニ對シテ不變ノ圖形及量アリ。

---

* 高等數學ニ於テハ

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i},\qquad \cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

但 $e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots$

ナリ。

11. 定全曲率曲面 (*Surface of constant total curvature*).

曲面上ノ總テノ點ニ於ケル全曲率ノ相等シキ曲面ヲ定全曲率曲面ト云フ。定全曲率曲面ノ中ニ其定全曲率ガ零ナルモノ, 正ナルモノ及負ナルモノアリ。例ヘバ平面及圓壔面ハ零ナル定全曲率ヲ有スル曲面ニシテ, 球ハ其半徑ノ二乘ノ逆數ニ等シキ定全曲率ヲ有スル曲面ナリ。又似非的球面 (*Pseudo-sphere*) ト稱スル曲面ハ引線弧曲線* (*Tractrix*) ガ其漸近線ヲ軸トシテ廻轉シタル曲面ニシテ負ノ定全曲率ヲ有スル曲面ナリ。

第七圖

今若シモ, 斯ノ如キ三種ノ定全曲率曲面上ノ點ヲ點, 測地曲線ヲ直線, 測地曲線ト相交ル測地曲線及相交ラザル測地曲線トノ限界ニアル測地曲線ヲ平行直線且曲面自身ノ變形ヲ運動ト考フルトキハ, 定全曲率零ナル曲面ニ於テハ其上ノ一點ヲ通過シ一直線ニ平行ナル直線ハ唯一本存在シ, 定全曲率正ナル曲面ニ於テハ平行線存在セズ, 又定全曲率負ナル曲面ニ於テハ一點ヲ通過シ一直線ニ平行ナル直線ハ二本存在ス。且之ニ應ジテ三角形ノ三内角ノ和ハ第一ノ場合ニハ二直角ニ等シク, 第二ノ場合ニハ二直角ヨリ大, 第三ノ場合ニハ二直角ヨリ小ナリ。是實ニ非ゆうくりつど幾何學ノ模型ナリ。(以上ハ伊人 Bertrami 氏ノ研究ニ依レルモノナリ)。

* 切線上ニテ切點ヨリ切線ト定直線トノ交點ニ至ル巨離ノ一定ナル如キ曲線。

第一章 點及曲線

12. 點, 制限域, 距離元素及曲線。

既ニ述タル如ク幾何學ハ或種ノ假定ノ上ニ築カレタル思想ノ建造物ナリ。從テ如何ナル幾何學ニテモ, 其ノ研究ニ際シテハ必ズ研究ノ對象物ノ基礎的目的物ノ存在ヲ假定スベキモノナリ。本書ニ於テハ先ヅ第一ニ點ナル目的物ノ存在ヲ假定シ漸次非ゆうくりつど幾何學ヲ建設セントス。

公理 1. **點**ト名ヅクル目的物ノ一群存在シ, 且其各ハ二ツノ獨立變數 z_1, z_2 ノ實値ノ一組ニヨリテ決定サル。

定義。 公理 1 中ニ述タル點群ヲ**平面**ト云ヒ z_1, z_2 ノ一組ヲ點ノ**坐標**ト云フ。z_1, z_2 ガ

$$a < z_1 < b,$$
$$c < z_2 < d$$

ナル不等式ニヨリテ制限サレタルトキ, 此ノ z_1, z_2 ノ一組ト一對一ノ對應ヲナス點群ヲ**制限域** (*Restricted region*) ト云フ。

公理 2. 制限域ノ存在ヲ認定ス。

公理 2 制限域内ノ何レノ點ニ對シテモ**距離元素** (*Distance element*) (又ハ**線元素** *Line element* トモ云フ) 存在シ, 式

$$+\sqrt{a_{11}\,dz_1^2+2a_{12}\,dz_1\,dz_2+a_{22}\,dz_2^2}$$

ニテ與ヘラル。但 $a_{11}, a_{12}\equiv a_{21}, a_{22}$ ハ皆 z_1, z_2 ノ解析函數ニシテ

$$|a_{ij}|\equiv\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\,a_{22}-a_{12}^2\neq 0,$$

且上ノ方程式ノ根號內ノ式

$$a_{11}\,dz_1^2+2a_{12}\,dz_1\,dz_2+a_{22}\,dz_2^2$$

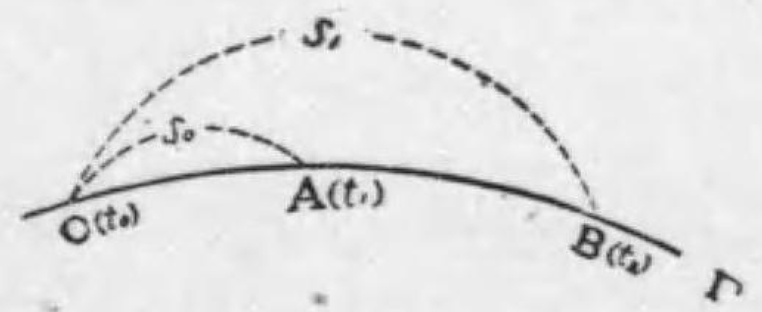
ハ與ヘラレタル制限域內ノ點ニ對應スル z_1, z_2 及 dz_1, dz_2 ノ實値ニ對シテ正ノ確定形ヲトル。

定義 方程式

$$z_1=\varphi_1(t),$$
$$z_2=\varphi_2(t),\quad a<t<b$$

(但 t ハ助變數, φ ハ $a<t<b$ ニ於ケル解析函數 a, b ハ實數)ニテ表サレタル點ノ集合ヲ**曲線** (*Curve*) ト云ヒ，此方程式ヲ曲線ノ方程式ト云フ。

OAB ヲ一曲線 Γ トシ, Γ 上ノ點 A ハ $t=t_1$ 點 B ハ $t=t_2$ ニ對應スルモノトセバ



第八圖

$$s\equiv\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{a_{11}\frac{dz_1^2}{dt^2}+2a_{12}\frac{dz_1}{dt}\frac{dz_2}{dt}+a_{22}\frac{dz_2^2}{dt^2}}\,dt$$

ヲ二點 AB 間ノ Γ **曲線ノ長サ**ト云フ。

今

(弧 OA ノ長サ)$=s_0$,

(弧 OB ノ長サ)$=s_1$,

トシ，且點 O ハ $t=t_0$ ニ對應スルモノトセバ 定義ニヨリ

$$s_0=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\Sigma a_{ij}\frac{dz_i}{dt}\frac{dz_j}{dt}}\,dt,$$

$$s_1=\int_{t_0}^{t_2}\sqrt{\Sigma a_{ij}\frac{dz_i}{dt}\frac{dz_j}{dt}}\,dt\quad (i, j=1, 2)$$

依テ

$$s_1-s_0=\int_{t_0}^{t_2}\sqrt{\Sigma a_{ij}\frac{dz_i}{dt}\frac{dz_j}{dt}}\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\Sigma a_{ij}\frac{dz_i}{dt}\frac{dz_j}{dt}}\,dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\Sigma a_{ij}\frac{dz_i}{dt}\frac{dz_j}{dt}}\,dt$$

然ルニ上ノ等式ノ左邊ハ弧 AB ノ長サ s ヲ表ス故

$$s=s_1-s_0$$
$$=\int_{s_0}^{s_1}ds$$

トナル。

曲線 Γ ニ接近シ且點 A 及 B ヲ通過スル他ノ曲線ヲ考ヘルトキハ，此曲線ニ對シテハ

$$\bar{z}_1=\varphi_1(t)+\sigma_1(t),$$
$$\bar{z}_2=\varphi_2(t)+\sigma_2(t)$$

ナル方程式ガ得ラル。今

$$\sigma_1(t)=\delta z_1,\qquad \sigma_2(t)=\delta z_2$$

ト置クトキハ $\delta z_1, \delta z$ ヲ曲線 Γ ノ坐標ノ變分ト云フ。

13. 補助定理。 積分

$$J\equiv\int_a^b f(z_1, z_2, z_1', z_2', t)\,dt$$

但

$$\left(z_1'=\frac{dz_1}{dt}, \qquad z_2'=\frac{dz_2}{dt}\right)$$

ニ於テ z_1 及 z_2 ガ夫々 $z_1+\delta z_1, z_2+\delta z_2$ トナリタルトキノ積分値ヲ

$$\bar{J}=\int_a^b f(z_1+\delta z_1, z_2+\delta z_2, z_1'+\delta z_1', z_2'+\delta z_2', t)dt$$

トシ,

$$\delta J=\bar{J}-J$$

トヲクトキ,若シモ

$$\delta J=0$$

ナラバ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z_1'}\right)=0,\\ \frac{\partial f}{\partial z_2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z_2'}\right)=0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ナリ。

證明。

$$f(z_1+\delta z_1, z_2+\delta z_2, z_1'+\delta z_1', z_2'+\delta z_2'\ t)$$

$$=f(z_1, z_2, z_1', z_2', t)+\frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial f}{\partial z_2}\delta z_2+\frac{\partial f}{\partial z_1'}\delta z_1'+\frac{\partial f}{\partial z_2'}\delta z_2'+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}(\delta z_1)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z_2^2}(\delta z_2)^2+\cdots\cdots$$

從テ二次以上ノ無窮小ヲ切捨ルトキハ

$$\delta J=\int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial f}{\partial z_2}\delta z_2+\frac{\partial f}{\partial z_1'}\delta z_1'+\frac{\partial f}{\partial z_2'}\delta z_2'\right]dt$$

トナル。而テ

$$\int\frac{\partial f}{\partial z_1'}\delta z_1'\,dt=\int\frac{\partial f}{\partial z_1'}\frac{d(\delta z_1)}{dt}dt=\int\frac{\partial f}{\partial z_1'}d(\delta z_1)$$

$$=\frac{\partial}{\partial z_1'}\delta z_1-\int\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z_1'}\right)\delta z_1\,dt$$

ナル故ニ

$$\int_a^b\frac{\partial f}{\partial z_1'}\delta z_1'\,dt=\left[\frac{\partial f}{\partial z_1'}\delta z_1\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z_1'}\right)\delta z_1\,dt.$$

同様ニシテ

$$\int_a^b\frac{\partial f}{\partial z_2'}\delta z_2'\,dt=\left[\frac{\partial f}{\partial z_2'}\delta z_2\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z_2'}\right)\delta z_2\,dt.$$

且

$$\left[\frac{\partial f}{\partial z_1'}\delta z_1\right]_a^b=\left[\frac{\partial f}{\partial z_2'}\delta z_2\right]_a^b=0.$$

依テ

$$\delta J=\int_a^b\left[\left\{\frac{\partial f}{\partial z_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z_1'}\right)\right\}\delta z_1+\left\{\frac{\partial f}{\partial z_2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z_2'}\right)\right\}\delta z_2\right]dt$$

トナル。從テ

$$\delta J=0$$

ナルトキハ, δz_1 及 δz_2 ハ全ク任意ナル故

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z_1'}\right)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_2}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z_2'}\right)=0$$

ナルベキナリ。

14. 測地曲線 (*Geodesic line*).

定義

$$\delta\left[\int_{s_0}^{s_1}ds\right]=0 \qquad (3)$$

ナル方程式ヲ滿足スル曲線ヲ測地曲線ト云フ。

今

$$J=\int_s^{s_1}ds$$

ト置クトキハ

$$f=\sqrt{a_{11}\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+2a_{12}\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds}+a_{22}\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2}=1 \tag{4}$$

トナル。從テ

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}=\frac{\frac{\partial a_{11}}{\partial z_1}\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+2\frac{\partial a_{12}}{\partial z_1}\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds}+\frac{\partial a_{22}}{\partial z_1}\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2}{2\sqrt{a_{11}\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+2a_{12}\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds}+a_{22}\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_2}=\frac{\frac{\partial a_{11}}{\partial z_2}\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+2\frac{\partial a_{12}}{\partial z_2}\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds}+\frac{\partial a_{22}}{\partial z_2}\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2}{2\sqrt{a_{11}\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+2a_{12}\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds}+a_{22}\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_1'}=\frac{1}{f}\left(a_{11}\frac{dz_1}{ds}+a_{12}\frac{dz_2}{ds}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_2'}=\frac{1}{f}\left(a_{12}\frac{dz_1}{ds}+a_{22}\frac{dz_2}{ds}\right).$$

而テ測地曲線ニ對シテハ

$$\delta J=\delta\left[\int_{s_0}^{s_1}ds\right]=0$$

ナル故,補助定理ニヨリ

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial z_1'}\right)=\frac{\partial f}{\partial z_1},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial z_2'}\right)=\frac{\partial f}{\partial z_2}.$$

依テ

$$\left\{\begin{aligned}2\frac{d}{ds}\left(a_{11}\frac{dz_1}{ds}+a_{12}\frac{dz_2}{ds}\right)&=\frac{\partial a_{11}}{\partial z_1}\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+2\frac{\partial a_{12}}{\partial z_1}\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds}\\&\quad+\frac{\partial a_{22}}{\partial z_1}\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2,\\2\frac{d}{ds}\left(a_{12}\frac{dz_1}{ds}+a_{22}\frac{dz_2}{ds}\right)&=\frac{\partial a_{11}}{\partial z_2}\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+2\frac{\partial a_{12}}{\partial z_2}\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds}\\&\quad+\frac{\partial a_{22}}{\partial z_2}\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

是測地曲線ヲ定義スル微分方程式. 即測地曲線ノ微分方程式ナリ。

上ノ微分方程式ヨリ

$$2\left(a_{11}\frac{d^2z_1}{ds^2}+a_{12}\frac{d^2z_2}{ds^2}+\frac{da_{11}}{ds}\frac{dz_1}{ds}+\frac{da_{12}}{ds}\frac{dz_2}{ds}\right)=\frac{\partial a_{11}}{\partial z_1}\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+\cdots\cdots,$$

$$\left(a_{12}\frac{d^2z_1}{ds^2}+a_{22}\frac{d^2z_2}{ds^2}+\frac{da_{12}}{ds}\frac{dz_1}{ds}+\frac{da_{22}}{ds}\frac{dz_2}{ds}\right)=\frac{\partial a_{11}}{\partial z_2}\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+\cdots\cdots$$

ヲ得。從テ

$$a_{11}\frac{d^2z_1}{ds^2}+a_{12}\frac{d^2z_2}{ds^2}=a\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+2b\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds}+c\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2,$$

$$a_{12}\frac{d^2z_1}{ds^2}+a_{22}\frac{d^2z_2}{ds^2}=a'\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+2b'\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds}+c'\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2$$

トナル。但 a, b, c 及 a', b', c' 皆 z_1, z_2 ノ函數ナリ。

$|a_{ij}|\neq 0$ ナル故上ノ二微分方程式ヲ $\frac{d^2z_1}{ds^2}$, $\frac{d^2z_2}{ds^2}$ ニ就キテ解クトキハ

$$\begin{aligned}\frac{d^2z_1}{ds^2}&=\alpha\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+2\beta\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds}+\gamma\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2,\\\frac{d^2z_2}{ds^2}&=\alpha'\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2+2\beta'\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds}+\gamma'\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2\end{aligned} \tag{6}$$

トナル。之モ亦測地曲線ノ微分方程式ナリ。但 α, β, γ 及 α', β', γ' ハ皆 $\bar{z}_1$ 及 $\bar{z}_2$ ノ函數ナリ。

定理　制限域内ノ極メテ相接近セル二點ヲ通過スル唯一本ノ測地曲線アリ。

證明．測地曲線上ノ一點ヲ $P(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ トシ，此點ニ於ケル $\dfrac{dz_1}{ds}$ 及 $\dfrac{dz_2}{ds}$ ノ値ヲ $\left(\dfrac{dz_1}{ds}\right)_0$ 及 $\left(\dfrac{dz_2}{ds}\right)_0$ トス。然ルトキハ，測地曲線ハ $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$, $\left(\dfrac{dz_1}{ds}\right)_0$ 及 $\left(\dfrac{dz_2}{ds}\right)_0$ ニテ決定サル，又測地曲線ノ微分方程式ニ於テ s ノ代リニ ks (k ハ常數)ヲ入ルルモ方程式ハ變形セザルガ故ニ今

$$\xi_1 \equiv \left(\frac{dz_1}{ds}\right)_0 s,$$

$$\xi_2 \equiv \left(\frac{dz_2}{ds}\right)_0 s$$

ト置ケバ，點 P ノ近傍ノ測地曲線上ノ任意ノ點 $Q(z_1, z_2)$ ノ坐標ハ

$$z_1 = \bar{z}_1 + s\left(\frac{dz_1}{ds}\right)_0 + \frac{s^2}{1\cdot 2}\left(\frac{d^2 z_1}{ds^2}\right)_0 + \cdots\cdots$$

$$= \bar{z}_1 + \xi_1 + \frac{s^2}{2}\left[\alpha\left(\frac{dz_1}{ds}\right)_0^2 + 2\beta\left(\frac{dz_1}{ds}\right)_0\left(\frac{dz_2}{ds}\right)_0 + \gamma\left(\frac{dz_2}{ds}\right)_0^2\right] + \cdots$$

$$= \bar{z}_1 + \xi_1 + \frac{1}{2}(\alpha\xi_1^2 + 2\beta\xi_1\xi_2 + \gamma\xi_2^2) + \cdots\cdots \tag{7}$$

$$\equiv f(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \xi_1, \xi_2),$$

$$z_2 = \bar{z}_2 + \xi_2 + \frac{1}{2}(\alpha'\xi_1 + 2\beta'\xi_1\xi_2 + \gamma'\xi_2^2) + \cdots\cdots$$

$$\equiv \varphi(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \xi_1, \xi_2)$$

トナル。即 $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \left(\dfrac{dz_1}{ds}\right)_0$ 及 $\left(\dfrac{dz_2}{ds}\right)_0$ ヲ知ルキハ點 P ヨリ測地曲線弧上 s ナル距離ニアル點 Q ノ坐標ヲ定ムルコトヲ得。且其坐標ノ値ハ唯一組ノミナリ。

又上ノ級數ヨリ

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial \xi_1}\right)_{s=0} = 1, \quad \left(\frac{\partial z_1}{\partial \xi_2}\right)_{s=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial z_2}{\partial \xi_1}\right)_{s=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial z_2}{\partial \xi_2}\right)_{s=0} = 1.$$

ヲ得。從テ $s=0$ ニ向ツテハやこびあん (*Jacobian*)

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial z_1}{\partial \xi_2} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial z_2}{\partial \xi_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial z_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial z_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial z_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial z_2}{\partial \xi_1}$$

$$= 1 \neq 0$$

ナル故上ノ級數ヨリ點 P ノ近傍ニ於テ

$$\begin{aligned} \xi_1 &= a(z_1 - \bar{z}_1) + a_1(z_1 - \bar{z}_1)^2 + a_2(z_1 - \bar{z}_1)(z_2 - \bar{z}_2) + a_3(z_2 - \bar{z}_2)^2 + \cdots\cdots \\ \xi_2 &= b_0(z_1 - \bar{z}_1) + b_1(z_1 - \bar{z}_2)^2 + b_2(z_1 - \bar{z}_1)(z_2 - \bar{z}_2) + b_3(z_2 - \bar{z}_2)^2 + \cdots\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

ナル級數ヲ得。今

$$|z_1 - \bar{z}_1| < \lambda, \quad |z_2 - \bar{z}_2| < \lambda$$

ナル如キ正數 λ ヲ適當ニ取リ，上ノ不等式ヲ滿ス變域内ニ於テハ上ノ級數ガ齊一收斂ナル如クセヨ。然ルトキハ點 $P(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ ヲ定ムルトキハ ξ_1, ξ_2 ノ値ヲ決定スルコトヲ得。且

$$a_{11}\left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2 + 2a_{12}\frac{dz_1}{ds}\frac{dz_2}{ds} + a_{22}\left(\frac{dz_2}{ds}\right)^2 = 1$$

ナル故點 $P(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ ノ近傍ニテハ

$$s^2 = a_{11} s^2 \left(\frac{dz_1}{ds}\right)_0^2 + 2a_{12} s^2 \left(\frac{dz_1}{ds}\right)_0 \left(\frac{dz_2}{ds}\right) + a_{22} s^2 \left(\frac{dz_2}{ds}\right)_0^2$$

$$= a_{11} \xi_1^2 + 2a_{12} \xi_1 \xi_2 + a_{22} \xi_2^2$$

ヨリ s ノ値ヲモ決定スルコトヲ得。依テ

$$\left(\frac{dz_1}{ds}\right)_0 = \frac{\xi_1}{s}, \quad \left(\frac{dz_2}{ds}\right)_0 = \frac{\xi_2}{s}$$

ヨリ $\left(\frac{dz_1}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{dz_2}{ds}\right)_0$ ヲモ亦求ムルコトヲ得。

是ヲ要スルニ,一點 $P(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ 及其點ノ $\left(\frac{dz_1}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{dz_2}{ds}\right)_0$ ヲ知レバ測地曲線ヲ定ムルコトヲ得且其曲線上ノ他ノ點 $Q(z_1, z_2)$ ノ坐標ヲモ知ルコトヲ得。逆ニ點 $P(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ 及其點ノ近傍ニ點 $Q(z_1, z_2)$ ヲ與フルトキハ點 P ニ於ケル $\left(\frac{dz_1}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{dz_2}{ds}\right)_0$ ヲ決定スルコトヲ得。從テ點 P 及 Q ヲ通過スル測地曲線ガ得ラル。故ニ點 P 及 Q ガ充分近キトキハ,此二點ヲ通過シテ唯一本ノ測地曲線ヲ引クコトヲ得。

15. 合同變更 (*Congruent transformation*).

定義 制限域内ニ於テ距離元素ヲ絶對ニ不變トナス實ノ解析的變更* ヲ合同變更ト云フ。

定義 點 $P(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ ヲ通過スル二測地曲線ノ距離元素ヲ夫々 ds 及 d_1s トシ,且

$$\left(\frac{dz_1}{ds}\right)_P = \zeta_1, \quad \left(\frac{dz_2}{ds}\right)_P = \zeta_2,$$

$$\left(\frac{d_1z_1}{d_1s}\right)_P = \bar{\zeta}_1, \quad \left(\frac{d_1z_2}{d_1s}\right)_P = \bar{\zeta}_2$$

* 變更ノ方程式ガ解析函數ナル如キ變更ヲ解析的變更ト云フ。

トス。然ルトキハ,式

$$a_{11}\zeta_1\bar{\zeta}_1 + a_{12}(\zeta_1\bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_1\zeta_2) + a_{22}\zeta_2\bar{\zeta}_2 = \Sigma a_{ij}\zeta_i\bar{\zeta}_j$$

ハ,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

ナル變域内ニ於テハ

$$1 - (\Sigma a_{ij}\zeta_i\bar{\zeta}_j)^2 = (\Sigma a_{ij}\zeta_i\zeta_j)(\Sigma a_{ij}\bar{\zeta}_i\bar{\zeta}_j) - (\Sigma a_{ij}\zeta_i\bar{\zeta}_j)^2$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(\zeta_1\bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_2\zeta_1)^2 > 0$$

ナルガ故ニ,其絶對値ハ 1 ヨリ小ナリ。即

$$|\Sigma a_{ij}\zeta_i\bar{\zeta}_j| < 1$$

依テ

$$\Sigma a_{ij}\zeta_i\bar{\zeta}_j = \cos\theta$$

ヲ滿足スル實函數 θ ハ存在ス。コノ函數 θ ヲ此二測地曲線ノ交角ト定義ス。故ニ

$$\cos\theta = \frac{a_{11}dz_1d_1z_1 + a_{12}(dz_1d_1z_2 + dz_2d_1z_1) + a_{22}dz_2d_1z_2}{ds\, d_1s} \qquad (9)$$

此式ハ微分幾何學ニ於ケル二曲線ノ交角ヲ表ス式ト同一ナリ。(前章ヲ參照セヨ)。

公理 3. 一點 P ヨリ出ヅル二ツノ充分ニ小ナル測地曲線ノ線分 PQ 及 PR ヲ夫々他ノ任意ノ點 P' ヨリ出デ且ツ角 $Q'P'R'$ ガ角 QPR ニ等シク又 $P'Q' = PQ, P'R' = PR$ ナル如キ測地曲線ノ線分 $P'Q'$ 及 $P'R'$ ニ運ブ如キ合同變更アリ。

一測地曲線弧 s_0s ガ合同變更ニヨリテ曲線弧 $s_0's'$ ニ變更サレタルモノトス。然ルトキハ

$$\delta\int_{s_0}^{s} ds=0$$

ナル故

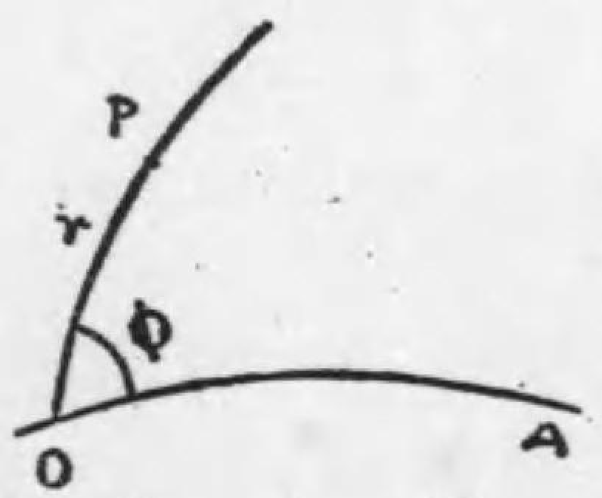
$$\delta\int_{s'}^{s'} ds'=0$$

トナル。從テ曲線 $s_0's'$ モ亦測地曲線ナリ。即合同變更ニヨリテ測地曲線ハ測地曲線ニ變更サル。

又二測地曲線ノ交角ヲ表ハス式ヨリ明ナル如ク，該交角ハ合同變更ニヨリテ絶對不變ナリ。

16. 測地曲線ノ距離元素。

OA ヲ定點 O ヲ通過スル定測地曲線トシ，是ト他ノ一測地曲線 OP トノ交角ヲ ϕ, $\widehat{OP}=r$ トス。然ルトキハ點 P ノ位置ハ r,ϕ ニテ決定サル。此 r,ϕ ヲ點 P ノ**測地極坐標** (*Geodesic polar coordinates*) ト云ヒ，O ヲ原點，OA ヲ原線，OP ヲ動徑，ϕ ヲ變角ト云フ。而テ點 P ヲ通過スル測地曲線ノ距離元素ハ



第九圖

$$\overline{ds}^2=a_{11}\overline{dz}_1^2+2a_{12}\,dz_1\,dz_2+a_{22}\overline{dz}_{12}^2$$

ナリ。今

$$z_1=f(r,\phi)$$

$$z_2=\varphi(r,\phi)$$

ト置ケバ

$$\overline{ds}^2=a_{11}\left(\frac{\partial z_1}{\partial r}dr+\frac{\partial z_1}{\partial \phi}d\phi\right)^2+2a_{12}\left(\frac{\partial z_1}{\partial r}dr+\frac{\partial z_1}{\partial \phi}d\phi\right)\left(\frac{\partial z_2}{\partial r}dr+\frac{\partial z_2}{\partial \phi}d\phi\right)$$
$$+a_{22}\left(\frac{\partial z_2}{\partial r}dr+\frac{\partial z_2}{\partial \phi}d\phi\right)^2$$
$$\equiv \boldsymbol{E}\,\overline{dr}^2+2\boldsymbol{F}\,dr\,d\phi+\boldsymbol{G}\,\overline{d\phi}^2$$

但

$$\boldsymbol{E}=a_{11}\left(\frac{\partial z_1}{\partial r}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial z_1}{\partial r}\frac{\partial z_2}{\partial r}+a_{22}\left(\frac{\partial z_2}{\partial r}\right)^2,$$

$$\boldsymbol{F}=a_{11}\frac{\partial z_1}{\partial r}\frac{\partial z_1}{\partial \phi}+a_1\left(\frac{\partial z_1}{\partial r}\frac{\partial z_2}{\partial \phi}+\frac{\partial z_1}{\partial \phi}\frac{\partial z_2}{\partial r}\right)+a_{22}\frac{\partial z_2}{\partial r}\frac{\partial z_2}{\partial \phi},$$

$$\boldsymbol{G}=a_{11}\left(\frac{\partial z_1}{\partial \phi}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial z_1}{\partial \phi}\frac{\partial z_2}{\partial \phi}+a_{22}\left(\frac{\partial z_2}{\partial \phi}\right)^2.$$

若シモ ϕ ガ一定ナルトキハ $d\phi=0$, $ds=dr$ ナル故ニ

$$\overline{ds}^2=\boldsymbol{E}\,\overline{dr}^2$$

$$\boldsymbol{E}=1$$

ヲ得。又コノトキハ $\left(\frac{d\phi}{ds}\right)=0$ ナル故之ヲ測地曲線ノ微分方程式ニ代入スレバ，$a_{11}=\boldsymbol{E}$, $a_{12}=\boldsymbol{F}$, $a_{22}=\boldsymbol{G}$ ナル故

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial r}=0$$

ヲ得。即 F ハ r ニ無關係ナリ。從テ $\boldsymbol{F}$ ハ ϕ ノミノ函數ニシテ $r=0$ ノトキノ $\boldsymbol{F}$ ノ値ト $r\neq 0$ ノトキノ $\boldsymbol{F}$ ノ値トハ相等シ。然ルニ

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial \phi}\right)_{r=0}=0,\quad \left(\frac{\partial z_2}{\partial \phi}\right)_{r=0}=0$$

ナル故 $r=0$ ノトキハ $\boldsymbol{F}=0$ トナル。依テ一般ニ

$$\boldsymbol{F}=0$$

ナリ。從テ測地曲線ニ對シテハ

$$\overline{ds}^2=\overline{dr}^2+G\,\overline{d\phi}^2$$

トナル。

次ニ G ヲ決定セン。

Riemann 氏ノ曲率

$$K=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial G}{\partial u}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial u}\right]\right\}^*$$

ハ此場合ニハ

$$K\equiv\frac{1}{k^2}=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}$$

トナル。且コノ曲率ハ合同變更ニ對シテ不變ナル故(證明略ス)吾人ノ考ヘツヽアル何レノ點ニ對シテモ一定ナリ。故ニ

$$-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}=\frac{1}{k^2}(\text{一定})$$

從テ

$$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}=-\frac{\sqrt{G}}{k^2},$$

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r}=-\frac{\sqrt{G}}{k^2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r},$$

或ハ

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)^2=\frac{-1}{2k}\frac{\partial(\sqrt{G})^2}{\partial r}.$$

* E, F, G ハ a_{11}, a_{12}, a_{22} ニ相當スル函數ニシテ u, v ハ一般ノ助變數ニシテ r, ϕ ハ其特別ナル場合ナリ。緒論ノ 5-8 節ヲ參照セヨ。

依テ

$$\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)^2=-\frac{1}{k^2}(\sqrt{G})^2+C.\qquad (C\text{ ハ }r\text{ ニ關係ナキ積分常數}$$

即

$$\frac{d\sqrt{G}}{\sqrt{C-\left(\frac{\sqrt{G}}{k}\right)^2}}=dr.$$

兩邊ヲ積分シ

$$\arcsin\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{C}k}=\frac{r}{k}+C'\quad (C'\text{ ハ }r\text{ ニ無關係ナル積分常數})$$

或ハ

$$\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{C}k}=\sin\left(\frac{r}{k}+C'\right).$$

$$\sqrt{G}=\sqrt{C}k\left(\sin\frac{r}{k}\cos C'+\sin C'\cos\frac{r}{k}\right)$$

故ニ

$$\sqrt{G}=A\sin\frac{r}{k}+B\cos\frac{r}{k}$$

ト置クコトヲ得。$r=0$ ノトキハ

$$\left(\frac{\partial z_1}{\partial\phi}\right)_{r=0}=0,\quad\left(\frac{\partial z_2}{\partial\phi}\right)_{r=0}=0$$

ナル故 $G=0$ トナル。依テ

$$B=(\sqrt{G})_{r=0}=0.$$

又既ニ述ベタル如ク

$$\begin{aligned}z_1&=\bar{z}_1+\xi_1+\cdots\cdots\\&=\bar{z}_1+r\zeta_1+\cdots\cdots\\z_2&=\bar{z}_2+\xi_2+\cdots\cdots\\&=\bar{z}_2+r\zeta_2+\cdots\cdots\end{aligned}$$

ナルガ故ニ

$$G=a_{11}\left(\frac{\partial z_1}{\partial\phi}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial z_1}{\partial\phi}\frac{\partial z_2}{\partial\phi}+a_{22}\left(\frac{\partial z_2}{\partial\phi}\right)^2$$

$$=r^2\left\{a_{11}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\phi}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\phi}\frac{\partial\zeta_2}{\partial\phi}+a_{22}\left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial\phi}\right)^2\right\}+r^4\left\{\cdots\cdots\right\}+\cdots\cdots$$

從テ

$$\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)_{r=0}=\sqrt{\sum_{i,j}^{1,2}a_{ij}\frac{\partial\zeta_i}{\partial\phi}\frac{\partial\zeta_j}{\partial\phi}}$$

然ルニ (4) ヨリ

$$1=a_{11}\zeta_1^2+2a_{12}\zeta_1\zeta_2+a_{22}\zeta_2^2$$

$$=a_{11}\left(\zeta_1+\frac{\partial\zeta_1}{\partial\phi}d\phi\right)^2+2a_{12}\left(\zeta_1+\frac{\partial\zeta_1}{\partial\phi}d\phi\right)\left(\zeta_2+\frac{\partial\zeta_2}{\partial\phi}d\phi\right)$$

$$+a_{22}\left(\zeta_2+\frac{\partial\zeta_2}{\partial\phi}d\phi\right)^2,$$

故ニ

$$\left\{a_{11}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\phi}\right)^2+2a_{12}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\phi}\frac{\partial\zeta_2}{\partial\phi}+a_{22}\left(\frac{\partial\zeta_2}{\partial\phi}\right)^2\right\}d\phi^2$$

$$+2\left\{a_{11}\zeta_1\frac{\partial\zeta_1}{\partial\phi}+a_{12}\left(\zeta_1\frac{\partial\zeta_2}{\partial\phi}+\zeta_2\frac{\partial\zeta_1}{\partial\phi}\right)+a_{22}\zeta_2\frac{\partial\zeta_2}{\partial\phi}\right\}d\phi=0.$$

依テ (9) ヨリ

$$\cos d\phi=a_{11}\zeta_1\left(\zeta_1+\frac{\partial\zeta_1}{\partial\phi}d\phi\right)+a_{12}\left[\zeta_1\left(\zeta_2+\frac{\partial\zeta_2}{\partial\phi}\partial\phi\right)\right.$$

$$\left.+\zeta_2\left(\zeta_1+\frac{\partial\zeta_1}{\partial\phi}d\phi\right)\right]+a_{22}\zeta_2\left(\zeta_2+\frac{\partial\zeta_2}{\partial\phi}d\phi\right)$$

$$=1-d\phi\left(\sum a_{ij}\frac{\partial\zeta_i}{\partial\phi}\frac{\partial\zeta_j}{\partial\phi}\right)$$

從テ

$$\sin\frac{d\phi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos d\phi}{2}}$$

$$=\frac{d\phi}{2}\sqrt{\sum a_{ij}\frac{\partial\zeta_i}{\partial\phi}\frac{\partial\zeta_j}{\partial\phi}}$$

而シテ $d\phi$ ガ殆ド零ニ近キトキハ $\sin\frac{d\phi}{2}$ ハ $\frac{d\phi}{2}$ ト殆ド相等シキガ故ニ

$$\frac{d\phi}{2}=\frac{d\phi}{2}\sqrt{\sum a_{ij}\frac{\partial\zeta_i}{\partial\phi}\frac{\partial\zeta_j}{\partial\phi}}$$

$$=\frac{d\phi}{2}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)_{r=0}$$

依テ

$$\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)_{r=0}=1$$

又

$$\sqrt{G}=A\sin\frac{r}{k}$$

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}=\frac{A}{k}\cos\frac{r}{k}.$$

故ニ

$$\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\right)_{r=0}=\frac{A}{k}=1.$$

從テ

$$A=k.$$

依テ

$$\overline{ds}^2=\overline{dr}^2+k^2\sin^2\frac{r}{k}\overline{d\phi}^2$$

トナル。即非ゆくりつご平面ニ於ケル距離元素ハ上ノ等式ニテ表ハサル。特別ノ場合トシテ上ノ等式ニ $k\to\infty$ ト置クトキハ

$$\lim_{k\to\infty}k^2\sin^2\frac{r}{k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{r}{k}}{\frac{r}{k}}\right)^2r^2=r^2$$

ナル故

$$\overline{ds}^2=\overline{dr}^2+r^2\overline{d\phi}^2$$

トナル。是即ゆうくりつご平面ニ於ケル距離元素ヲ表ス等式ナリ(極坐標ニ關シテ)。

第二章 點及直線ニ關スル坐標幾何學

17. *Weirstrass* **(わいやすとらす)氏ノ坐標。** 平面上ノ一點 P ノ測地極坐標ヲ (r,ϕ) トシ

$$\mathfrak{X}_0=k\cos\frac{r}{k},$$

$$\mathfrak{X}_1=k\sin\frac{r}{k}\cos\phi,$$

$$\mathfrak{X}_2=k\sin\frac{r}{k}\sin\phi$$

ト置クトキ，此

$$\mathfrak{X}_0,\ \mathfrak{X}_1,\ \mathfrak{X}_2$$

ヲ點 P ニ關スル *Weirstrass* 氏ノ坐標ト云ヒ，之ヲ $(\mathfrak{X})$ ナル記號ヲ以テ表ス。但 $\frac{1}{k^2}$ ハ *Riemann* 氏ノ曲率ヲ表スモノトス。而テ $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ ノ間ニハ次ノ關係アリ。

$$\mathfrak{X}_0^2+\mathfrak{X}_1^2+\mathfrak{X}_2^2\equiv(\mathfrak{X}\mathfrak{X})^*=k^2,$$

$$(d\mathfrak{X}_0)^2+(d\mathfrak{X}_1)^2+(d\mathfrak{X}_2)^2\equiv(d\mathfrak{X}\,d\mathfrak{X})=\overline{ds}^2.$$

直線ノ方程式. *Weirstrass* 氏ノ坐標ヲ以テ測地曲線ノ方程式ヲ表サンニ，測地曲線ニ對シテハ

$$\delta\int_0^s ds=0$$

ナリ。然ルニ

* $(\mathfrak{X}\mathfrak{X})=\mathfrak{X}_0^2+\mathfrak{X}_1^2+\mathfrak{X}_2^2$ ナル記號 $(\mathfrak{X}\mathfrak{X})$ ヲ *Grassmann*（ぐらすまん）氏ノ記號ト云フ。

$$\int_0^s ds=\int_0^s \sqrt{\left(\frac{d\mathscr{X}}{ds}\;\frac{d\mathscr{X}}{ds}\right)}ds$$

$$=\int_0^s\left[\sqrt{\left(\frac{d\mathscr{X}}{ds}\;\frac{d\mathscr{X}}{ds}\right)}-\lambda\{(\mathscr{X}\mathscr{X})-k^2\}\right]ds$$

但 λ ハ未定係數ニシテ, $\delta\int_0^s ds=0$ ヲ滿足スル如ク決定セントス。

一般ニ

$$\delta\int_{t_0}^{t} f(z_0, z_1, z_2, z_0', z_1', z_2', t)dt=0$$

ナル爲ニハ

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z_i'}\right)=0, \quad (i=0, 1, 2)$$

ナル故

$$\delta\int_0^s\left[\sqrt{\left(\frac{d\mathscr{X}}{ds}\;\frac{d\mathscr{X}}{ds}\right)}-\lambda\{(\mathscr{X}\mathscr{X})-k^2\}\right]ds=0$$

ナル爲ニハ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathscr{X}_0}{ds}\right)-2\lambda\,\mathscr{X}_0=0,\\
&\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathscr{X}_1}{ds}\right)-2\lambda\,\mathscr{X}_1=0,\\
&\frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathscr{X}_2}{ds}\right)-2\lambda\,\mathscr{X}_2=0
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ナルベキナリ。今上ノ等式ノ第一ニ $\mathscr{X}_0$, 第二ニ $\mathscr{X}_1$, 第三ニ $\mathscr{X}_2$ ヲ乘ジ邊々相加フルトキハ

$$\frac{(\mathscr{X}\,d^2\mathscr{X})}{\overline{ds}^2}-2\lambda(\mathscr{X}\mathscr{X})=0$$

即

$$(\mathscr{X}d^2\mathscr{X})=2\lambda k^2\,\overline{ds}^2 \qquad (2)$$

ヲ得。

然ルニ

$$(\mathscr{X}\mathscr{X})=k^2, \quad (\mathscr{X}+d\mathscr{X}\;\;\mathscr{X}+d\mathscr{X})=k^2$$

ナル故

$$2(\mathscr{X}\,d\mathscr{X})+(d\mathscr{X}\,d\mathscr{X})=0,$$

或ハ

$$(\mathscr{X}d^2\mathscr{X})+(d\mathscr{X}\,d\mathscr{X})=d\left(-\frac{\overline{ds}^2}{2}\right).$$

ナリ。而テ二次以上ノ無窮小ヲ切リ捨ツレバ

$$(\mathscr{X}d^2\mathscr{X})+\overline{ds}^2=0 \qquad (3)$$

關係 (2) 及 (3) ヲ比較シ

$$\lambda=-\frac{1}{2k^2}$$

ナル關係ヲ得。故ニ (1) ヨリ

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\mathscr{X}_0}{ds^2}+\frac{1}{k^2}\mathscr{X}_0=0,\\
&\frac{d^2\mathscr{X}_1}{ds^2}+\frac{1}{k^2}\mathscr{X}_1=0,\\
&\frac{d^2\mathscr{X}_2}{ds^2}+\frac{1}{k^2}\mathscr{X}_2=0
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ヲ得。是 *Weirstrass* 氏ノ坐標ニ關スル測地曲線ノ方程式ナリ。此方程式ヲ解キテ*

* 解キ方ハ $\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}+\frac{1}{k^2}\sqrt{G}=0$ ヨリ $\sqrt{G}$ ヲ見出シタル方法ト全ク同ジ。讀者是ヲ試ヨ。(32 頁參照)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X}_0 &= \mathfrak{Y}_0 \sin\frac{s}{k} + \mathfrak{Z}_0 \cos\frac{s}{k},\\ \mathfrak{X}_1 &= \mathfrak{Y}_1 \sin\frac{s}{k} + \mathfrak{Z}_1 \cos\frac{s}{k},\\ \mathfrak{X}_2 &= \mathfrak{Y}_2 \sin\frac{s}{k} + \mathfrak{Z}_2 \cos\frac{s}{k}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ヲ得。是明ニ測地曲線上ノ點ノ Weirstrass 氏ノ坐標ヲ表スベキ方程式ナリ。但 $\mathfrak{Y}_0, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ 及 $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ ハ皆常數ナリ。今 $s=k\frac{\pi}{2}$ ト置クトキハ

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X})=(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})=k^2,$$

$s=k\pi$ ト置クトキハ

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X})=(\mathfrak{Z}\mathfrak{Z})=k^2.$$

故ニ一般ニ

$$(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})=k^2, \quad (\mathfrak{Z}\mathfrak{Z})=k^2.$$

從テ

$$\begin{aligned}(\mathfrak{X}\mathfrak{X})&=k^2\\ &=(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})\sin^2\frac{s}{k}+(\mathfrak{Z}\mathfrak{Z})\cos^2\frac{s}{k}+2(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})\sin\frac{s}{k}\cos\frac{s}{k}\\ &=k^2+2(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})\sin\frac{s}{k}\cos\frac{s}{k}\end{aligned}$$

ナル故

$$(\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})=0.$$

(5) ヨリ s ヲ消去スルトキハ

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{X}_0 & \mathfrak{Y}_0 & \mathfrak{Z}_0\\ \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Z}_1\\ \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{Y}_2 & \mathfrak{Z}_2\end{vmatrix}=0,$$

即

$$(\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_1)\mathfrak{X}_0+(\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_0-\mathfrak{Y}_0\mathfrak{Z}_2)\mathfrak{X}_1+(\mathfrak{Y}_0\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_0)\mathfrak{X}_2=0$$

ヲ得。是モ亦測地曲線ノ方程式ナリ。

次ニ

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_1&\equiv\mathfrak{U}_0,\\ \mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_0-\mathfrak{Y}_0\mathfrak{Z}_2&\equiv\mathfrak{U}_1,\\ \mathfrak{Y}_0\mathfrak{Z}_1-\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_0&\equiv\mathfrak{U}_2\end{aligned}$$

トヲクトキハ，上ノ方程式ハ

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{X})\equiv\mathfrak{U}_0\mathfrak{X}_0+\mathfrak{U}_1\mathfrak{X}_1+\mathfrak{U}_2\mathfrak{X}_2=0 \qquad (6)$$

ナル形トナル。即測地曲線ノ方程式ハ Weirstrass 氏ノ坐標ニ關シテ一次式ナリ。依テ今後測地曲線ノコトヲ單ニ直線ト名命セム。

次ニ $P(\mathfrak{Y})$ 及 $Q(\mathfrak{Z})$ ナル二點ヲ通過スル直線ノ方程式ヲ求メンニ，求ムル直線ノ方程式ヲ

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{X})=0$$

トセヨ。然ルトキハ點 $P(\mathfrak{Y})$ 及 $Q(\mathfrak{Z})$ ハ此直線上ニ在ルガ故ニ

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{Y})=0,$$
$$(\mathfrak{U}\mathfrak{Z})=0$$

ナリ。依テ上ノ三方程式ヨリ $(\mathfrak{U})$ ヲ消去シ

$$\begin{vmatrix}\mathfrak{X}_0 & \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2\\ \mathfrak{Y}_0 & \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}_2\\ \mathfrak{Z}_0 & \mathfrak{Z}_1 & \mathfrak{Z}_2\end{vmatrix}=0$$

ヲ得。是求ムル直線即二點 $P(\mathfrak{Y})$ 及 $Q(\mathfrak{Z})$ ヲ通過スル直線ノ方程式ナリ。從テ二點 P, Q ヲ通過スル直線ハ唯一本ノミ存在スルコト明

ナリ。又(5)ナル方程式ニテ與ヘラレタル $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ ハ上方程式ヲ滿足スル故斯カル $(\mathfrak{X})$ ハ二點 $P(\mathfrak{Y}), Q(\mathfrak{Z})$ ヲ結ブ直線上ノ點ノ坐標ニシテ點 $Q(\mathfrak{Z})$ ヨリ s ナル距離ニ在ル點ノ坐標ナリ。

次ニ

$$\mathfrak{X}_0=\frac{kx_0}{\sqrt{(xx)}},$$

$$\mathfrak{X}_1=\frac{kx_1}{\sqrt{(xx)}},$$

$$\mathfrak{X}_2=\frac{kx_2}{\sqrt{(xx)}}$$

ト置クトキハ

$$\mathfrak{X}_0:\mathfrak{X}_1:\mathfrak{X}_2=x_0:x_1:x_2$$

ナリ。而テ比

$$x_0:x_1:x_2$$

ニテ新坐標ヲ作ルトキハ直線ノ方程式(之ヲ記號 (x) ヲ以テ表ス)

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{X})=0$$

ハ

$$(u\,x)=0$$

トナル。但

$$\mathfrak{U}_i=\frac{ku_i}{\sqrt{(uu)}},\quad (i=0,1,2).$$

方程式

$$(u\,x)=0$$

ガ與ヘラレタルトキハ

$$u_0:u_1:u_2$$

ハ定マリ其直線ガ定マル。逆ニ直線ガ與ヘラレタルトキハ

$$u_0:u_1:u_2$$

ガ定マリ，從テ其直線ノ方程式ヲ定ムルコトヲ得。故ニ (u) ヲ直線ノ**線坐標**ト云フ。線坐標ニ對シテ普通ノ點ノ坐標ヲ**點坐標**ト云フ。

18. 二點間ノ距離。 既ニ述ベタルガ如ク，二點 $P(\mathfrak{Y})$ 及 $Q(\mathfrak{Z})$ ヲ結ブ直線上ニテ點 P ヨリ s ナル距離ニアル點 $R(\mathfrak{X})$ ハ

$$\mathfrak{X}_0=\mathfrak{Y}_0\cos\frac{s}{k}+\mathfrak{Z}_0\sin\frac{s}{k},$$

$$\mathfrak{X}_1=\mathfrak{Y}_1\cos\frac{s}{k}+\mathfrak{Z}_1\sin\frac{s}{k},$$

$$\mathfrak{X}_2=\mathfrak{Y}_2\cos\frac{s}{k}+\mathfrak{Z}_2\sin\frac{s}{k}$$

ニテ與ヘラル。從テ

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})=(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})\cos\frac{s}{k}+(\mathfrak{Z}\mathfrak{Y})\sin\frac{s}{k}$$

$$=k^2\cos\frac{s}{k}.$$

故ニ

$$\cos\frac{s}{k}=\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})}{k^2}$$

トナル。又新坐標ヲ用ヒテ

$$\mathfrak{X}_i=\frac{kx_i}{\sqrt{(xx)}},$$

$$\mathfrak{Y}_i=\frac{ky_i}{\sqrt{(yy)}},\qquad (i=0,1,2)$$

ト置クトキハ

$$\cos\frac{s}{k}=\frac{(xy)}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}}$$

トナル。是二點 P, R ノ距離ヲ與フル公式ナリ。

従テ

$$\sin\frac{s}{k}=\frac{\sqrt{(xx)(yy)-(xy)^2}}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}}$$

又

$$\sin\frac{s}{k}=\frac{e^{i\frac{s}{k}}-e^{-i\frac{s}{k}}}{2i},$$

$$\cos\frac{s}{k}=\frac{e^{i\frac{s}{k}}+e^{-i\frac{s}{k}}}{2}$$

ナル故

$$e^{i\frac{s}{k}}=\cos\frac{s}{k}+i\sin\frac{s}{k},$$

依テ

$$e^{2i\frac{s}{k}}=\frac{\cos\frac{s}{k}+i\sin\frac{s}{k}}{\cos\frac{s}{k}-i\sin\frac{s}{k}}$$

$$=\frac{(xy)+\sqrt{(xy)^2-(xx)(yy)}}{(xy)-\sqrt{(xy)^2-(xx)(yy)}}$$

故ニ

$$s=\frac{k}{2i}\log\left\{\frac{(xy)+\sqrt{(xy)^2-(xx)(yy)}}{(xy)-\sqrt{(xy)^2-(xx)(yy)}}\right\}$$

今 (y) ヲ制限域内ニ置キ，制限域ヲ漸次擴大シ點 (y) ヨリノ距離 s ヲ無限ニ大ニナシタル極限ニ於テハ上式ヨリ

$$(xx)\to 0$$

ナル關係ヲ得。一般ニ

$$(xx)=0$$

ナル方程式ヲ滿ス點ノ集合ハ二次方程式ニテ表サレタル曲線ニシテ *Cayley* (けいれい)氏ハ是ヲ**絶對形** (*Absolute*) ト名命セリ。依テ制限域内ノ點ヨリ絶對形上ノ任意ノ點ニ至ル距離ハ恒ニ無窮大ナリ。従テ絶對形上ノ點ハ特別ニ取扱フ。

次ニ距離ヲ表ス公式

$$\sin\frac{s}{k}=\frac{\sqrt{(xx)(yy)-(xy)^2}}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}}$$

ニ於テ $k\to\infty$ ノ場合ヲ考ヘン。

Lagrange 氏ノ恒等式ニヨリ

$$(xx)(yy)-(xy)^2$$
$$=(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_0-x_0y_1)^2+(x_2y_0-x_0y_2)^2.$$

又 *Maclaurin* 氏ノ公式ニヨリ

$$\sin\frac{s}{k}=\frac{s}{k}-\frac{s^3}{3k^3}+\cdots\cdots$$

故ニ上ノ公式ハ

$$\frac{s}{k}-\frac{s^3}{3k^3}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\frac{x_1}{x_0}\frac{y_2}{y_0}-\frac{x_2}{x_0}\frac{y_1}{y_0}\right)^2+\left(\frac{x_1}{x_0}-\frac{y_1}{y_0}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_0}-\frac{y_2}{y_0}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{x_1^2}{x_0^2}+\frac{x_2^2}{x_0^2}}\sqrt{1+\frac{y_1^2}{y_0^2}+\frac{y_2^2}{y_0^2}}}$$

トナル。然ルニ

$$\frac{kx_0}{\sqrt{(xx)}}=k\cos\frac{r}{k},$$

$$\frac{kx_1}{\sqrt{(xx)}}=k\sin\frac{r}{k}\cos\phi,$$

$$\frac{kx_2}{\sqrt{(xx)}}=k\sin\frac{r}{k}\sin\phi$$

従テ

$$\frac{x_1}{x_0}=\tan\frac{r}{k}\cos\phi,$$

$$\frac{x_2}{x_0}=\tan\frac{r}{k}\sin\phi.$$

同樣ニ

$$\frac{y_1}{y_0}=\tan\frac{r'}{k}\cos\psi,$$

$$\frac{y_2}{y_0}=\tan\frac{r'}{k}\sin\psi.$$

故ニ

$$\frac{s}{k}-\frac{s^3}{3k^3}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\frac{r}{k}}\sqrt{1+\tan^2\frac{r'}{k}}}\Big[\tan^2\frac{r}{k}\tan^2\frac{r'}{k}\left(\cos\phi\sin\psi-\cos\psi\sin\phi\right)^2$$

$$+\left(\tan\frac{r}{k}\cos\phi-\tan\frac{r'}{k}\cos\psi\right)^2+\left(\tan\frac{r}{k}\sin\phi-\tan\frac{r'}{k}\sin\psi\right)^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

然ルニ

$$\lim_{k\to\infty} k\tan\frac{r}{k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\tan\frac{r}{k}\cdot r}{\frac{r}{k}}\right)=r$$

ナル故 $k\to\infty$ ニ向ツテハ

$$s=\sqrt{(r\cos\phi-r'\cos\psi)^2+(r\sin\phi-r'\sin\psi)^2}.$$

今

$$r\cos\phi=X,\quad r\sin\phi=Y,$$

$$r'\cos\psi=X',\quad r'\sin\psi=Y'$$

ト置クトキハ(第25節ヲ參照セヨ)。

$$s=\sqrt{(X-X')^2+(Y-Y')^2}$$

トナル。是明ニ解析幾何學ニ於テノ二點 (X, Y), (X', Y') 間ノ距離ヲ與フル公式ナリ。以上要スルニ $k\to\infty$ ノトキ距離ヲ表ス公式ハゆうくりつど平面ニ於ケル距離ヲ表ス公式ト一致ス。

19. 二直線ノ交角。 一定點 $P(r,\phi)$ ニテ相交ルニ直線 g, l 上ニ夫々 $Q(r+dr,\phi+d\phi)$, $R(r+d_1r,\phi+d_1\phi)$ ナル二點ヲ取ルトキハ此二直線ノ交角 θ ハ

$$\cos\theta=\frac{drd_1r+k^2\sin^2\frac{r}{k}d\phi d_1\phi}{dsd_1s},$$

或ハ

$$=\frac{d\mathfrak{X}_0d_1\mathfrak{X}_0+d\mathfrak{X}_1d_1\mathfrak{X}_1+d\mathfrak{X}_2d_1\mathfrak{X}_2}{\sqrt{(d\mathfrak{X}d\mathfrak{X})}\sqrt{(d_1\mathfrak{X}d_1\mathfrak{X})}}$$

ニテ表サル事明ナリ。

今二點 P, Q ヲ過ル直線 g 及二點 P, R ヲ過ル直線 l ノ方程式ヲ夫々

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{X})=0,\quad (\mathfrak{V}\mathfrak{X})=0$$

トス。然ルトキハ

$$\mathfrak{U}_0:\mathfrak{U}_1:\mathfrak{U}_2=\begin{vmatrix}\mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2\\ d\mathfrak{X}_1 & d\mathfrak{X}_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_0\\ d\mathfrak{X}_2 & d\mathfrak{X}_0\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\mathfrak{X}_0 & \mathfrak{X}_1\\ d\mathfrak{X}_0 & d\mathfrak{X}_1\end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{V}_0:\mathfrak{V}_1:\mathfrak{V}_2=\begin{vmatrix}\mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2\\ d_1\mathfrak{X}_1 & d_1\mathfrak{X}_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_0\\ d_1\mathfrak{X}_2 & d_1\mathfrak{X}_0\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\mathfrak{X}_0 & \mathfrak{X}_1\\ d_1\mathfrak{X}_0 & d_1\mathfrak{X}_1\end{vmatrix}$$

ニシテ

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{U})=\begin{vmatrix}(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) & (\mathfrak{X}d\mathfrak{X})\\ (\mathfrak{X}d\mathfrak{X}) & (d\mathfrak{X}d\mathfrak{X})\end{vmatrix},$$

$$(\mathfrak{V}\mathfrak{V})=\begin{vmatrix}(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) & (\mathfrak{X}d_1\mathfrak{X})\\ (\mathfrak{X}d_1\mathfrak{X}) & (d_1\mathfrak{X}d_1\mathfrak{X})\end{vmatrix}$$

然ルニ

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X})=k^2.$$

從テ

$$(\mathfrak{X}d\mathfrak{X})=0,\quad (\mathfrak{X}d_1\mathfrak{X})=0.$$

故ニ

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{U})=k^2(d\mathfrak{X}d\mathfrak{X}),$$
$$(\mathfrak{V}\mathfrak{V})=k^2(d_1\mathfrak{X}d_1\mathfrak{X}),$$
$$(\mathfrak{U}\mathfrak{V})=k^2(d\mathfrak{X}d_1\mathfrak{X}).$$

依テ

$$\cos\theta=\frac{(\mathfrak{U}\mathfrak{V})}{\sqrt{(\mathfrak{U}\mathfrak{U})}\sqrt{(\mathfrak{V}\mathfrak{V})}}$$

$$=\frac{(uv)}{\sqrt{(uu)}\sqrt{(vv)}}$$

但 (u) 及 (v) ハ夫々 g 及 l 直線ノ線坐標トス。上式ハ明ニ線坐標ニテ表サレタル二直線ノ交角ノ餘弦ヲ與フルモノナリ。此式ト二點間ノ距離ヲ k ニテ除シタルモノ（是ヲ**距離測度** (*Distance measure*) ト云フ。）ノ餘弦ヲ點坐標ニテ表セル式トハ同ジ形ヲ有ス。此事實ヨリ二點間ノ距離測度ト二直線ノ交角トハ同様ニ取扱ヒ得可ナルコトヲ知ル。

交角 θ ガ $\dfrac{\pi}{2}$ ニ等シキトキハ此二直線ハ**直交ス**ト云フ。依テ二直線ガ直交スルトトキハ

$$\cos\theta=0$$

トナリ。從テ

$$(uv)=0$$

トナル。

又

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{(uu)(vv)-(uv)^2}}{\sqrt{(uu)}\ \sqrt{(vv)}}$$

ナルコト明ナリ。

20. 非調和比 (*Anharmonic ratio, double ratio or cross-ratio*) 及調和群 (*Harmonic group*).

一直線上ニ四點 A, C, B, D ヲ考ヘタルトキ比

$$\sin\frac{\overrightarrow{AC}}{k}:\sin\frac{\overrightarrow{BC}}{k}$$

ヲ二點 A, B ニ關スル點 C ノ**位置比** (*Position ratio*) ト云ヒ，點 A, B ニ關スル點 C ノ位置比ト點 D ノ位置比トノ比，即

$$\frac{\sin\dfrac{\overrightarrow{AC}}{k}}{\sin\dfrac{\overrightarrow{BC}}{k}}:\frac{\sin\dfrac{\overrightarrow{AD}}{k}}{\sin\dfrac{\overrightarrow{BD}}{k}}$$

ヲ點 A, B, C, D ノ非調和比ト云ヒ，記號 (AB, CD) ニテ是ヲ表ス，即

$$(AB, CD)\equiv\frac{\sin\dfrac{\overrightarrow{AC}}{k}}{\sin\dfrac{\overrightarrow{BC}}{k}}:\frac{\sin\dfrac{\overrightarrow{AD}}{k}}{\sin\dfrac{\overrightarrow{BD}}{k}}$$

若シモ

$$(AB, CD)=-1$$

ナルトキハ，點 A, B, C, D ハ調和群ヲナスト云ヒ點 A, B ハ點 C, D ニテ調和ニ分タルルト云フ。而シテ若シモ點 A, B ガ點 C, D ニテ調和ニ分タレタルトキハ點 C, D ハ又點 A, B ニテ調和ニ分タル。又三點 A, B, C ガ與ヘラレタル時ハ

$$(AB, CD)=-1$$

ヲ滿足スル如キ點 D ヲ定ムル事ヲ得。此點 D ヲ點 A, B, C ノ第四調和點ト云フ。

點 A, B ノ坐標ヲ夫々 (x) 及 (y) トスルトキハ點 C ノ坐標ハ $\lambda(x)+\mu(y)$ ニテ表サル（第十七節ヲ參照セヨ）。而テ

$$\sin\frac{\overrightarrow{AC}}{k}=\frac{\sqrt{(xx)(\lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y)-\{\lambda(xx)+\mu(xy)\}^2}}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(\lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y)}}$$

$$=\frac{\mu\sqrt{(xx)(yy)-(xy)^2}}{\sqrt{(xx)}\sqrt{\lambda^2(xx)+2\lambda\mu(xy)+\mu^2(yy)}}$$

$$\sin\frac{\overrightarrow{BC}}{k}=\frac{\lambda\sqrt{(xx)(yy)-(xy)^2}}{\sqrt{(yy)}\sqrt{\lambda^2(xx)+2\lambda\mu(xy)+\mu^2(yy)}}$$

因テ點 C ノ位置比ハ

$$\frac{\sin\dfrac{\overrightarrow{AC}}{k}}{\sin\dfrac{\overrightarrow{BC}}{k}}=\frac{\mu}{\sqrt{(xx)}}:\frac{\lambda}{\sqrt{(yy)}}$$

同樣ニ點 D ノ坐標ヲ $\lambda'(x)+\mu'(y)$ トセバ點 D ノ位置比ハ

$$\frac{\sin\dfrac{\overrightarrow{AD}}{k}}{\sin\dfrac{\overrightarrow{BD}}{k}}=\frac{\mu'}{\sqrt{(xx)}}:\frac{\lambda'}{\sqrt{(yy)}}$$

ナリ。依テ是等ノ四點ノ非調和比ハ

$$\frac{\mu\sqrt{(yy)}}{\lambda\sqrt{(xx)}}:\frac{\mu'\sqrt{(yy)}}{\lambda'\sqrt{(xx)}}=\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{\lambda'}{\mu'}$$

故ニ是等四點ガ調和群ヲナストキハ

$$\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{\lambda'}{\mu'}=-1.$$

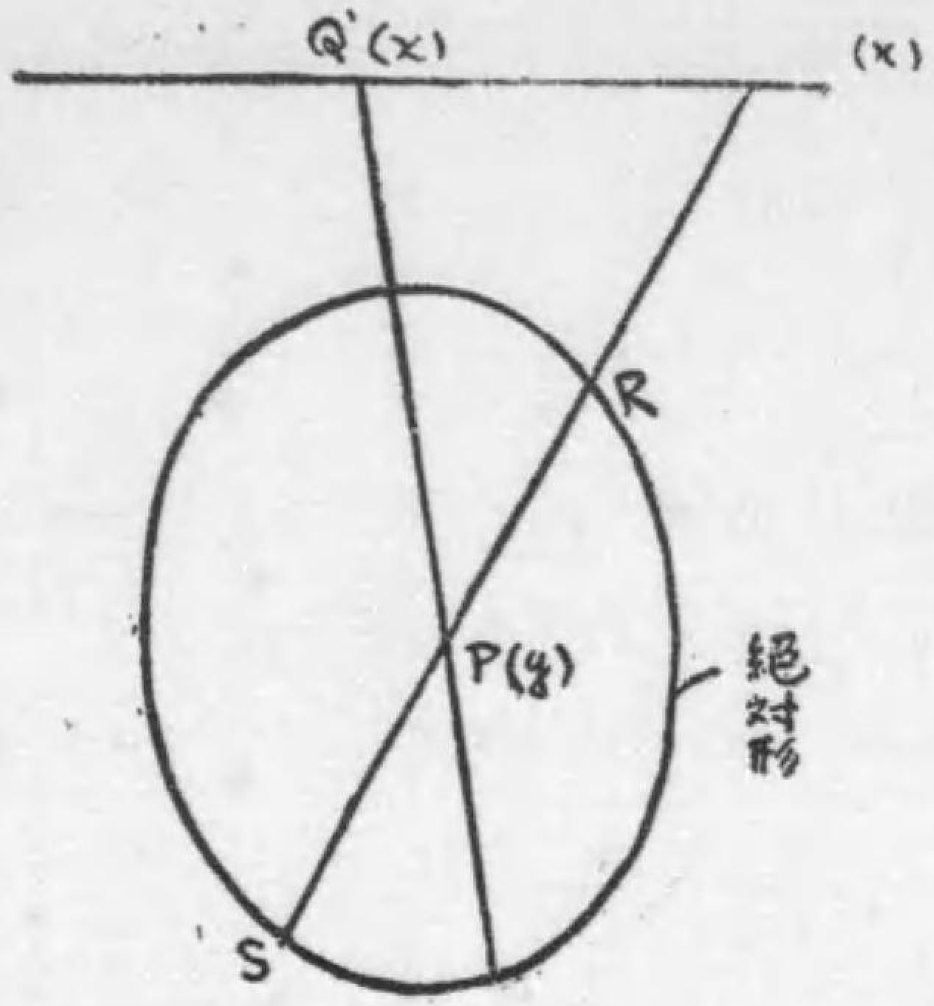
即

$$\frac{\lambda'}{\mu'}+\frac{\lambda}{\mu}=0$$

ナル關係アリ。

21. 絕對極點（*Absolute pole*）及絕對極線（*Absolute polar*）.

點 $P(y)$ ヲ過ル任意ノ直線上ニ點 $Q(x)$ ヲ取ル。然ルトキハ此直線上ノ任意ノ點ノ坐標ハ $\lambda(x)+\mu(y)$ ニテ表サル。而テ此直線



第　十　圖

ト絶對形トノ交點ニ對シテハ

$$(\lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y)=0$$

即

$$\lambda^2(xx)+2\lambda\mu(xy)+\mu^2(yy)=0$$

ナル故，$\frac{\lambda}{\mu}$ ニ關スル此二次方程式ノ二根ヲ $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$ トスレバ PQ 直線ト絶對形トノ交點ノ坐標ハ $\lambda_1(x)+\mu_1(y)$ 及 $\lambda_2(x)+\mu_2(y)$ ニテ表サル。即一般ニ直線ハ絶對形ト二點ニテ交ル。今 PQ 直線ト絶對形トノ交點ヲ $R(\lambda_1(x)+\mu_1(y))$ 及 $S(\lambda_2(x)+\mu_2(y))$ トス。然ルトキ若シモ四點 P, Q, R, S ガ調和群ヲナス爲ニハ

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2}=-\frac{2(xy)}{(xx)}=0$$

ナル事ヲ要ス。即

$$(xy)=0$$

ナルベキナリ。故ニ點 $P(y)$ ヲ一定ニシ PQ 直線ヲ種々變化セシムルトキハ點 $Q(x)$ ノ位置ハ變化スレドモ

$$(xy)=0$$

ナル關係ガ存在スルトキハ，常ニ點 $Q(x)$ ハ其直線ト絶對形トノ二交點ト定點 P トノ第四調和點トナル。從テ點 $Q(x)$ ハ直線 PQ ノ位置ニ無關係ナリ。依テ方程式

$$(xy)=0$$

ハ點 $Q(x)$ ノ軌跡ヲ表ス。而テ此軌跡ハ明カニ直線ナリ。此直線ヲ點 $P(y)$ ノ絶對極線(或ハ極線)ト云フ。

逆ニ直線ガ與ヘラレタルトキ，此直線ヲ絶對極線トナス點アリ。斯ノ如キ點ヲ其直線ノ絶對極點(或ハ極點)ト云フ。從テ點 P ハ其點ノ極線ニ關シテハ極點ナリ。

次ニ直線 $(ux)=0$ ノ極點ヲ求ムニ，其極點ノ坐標ヲ (y) トセバ點 (y) ノ極線ノ方程式ハ

$$(yx)=0$$

ナリ。然ルニ點 (y) ハ直線 $(ux)=0$ ノ極點ト考ヘタル故其極線ノ方程式ハ

$$(ux)=0$$

ナリ。因テ

$$y_0:y_1:y_2=u_0:u_1:u_2$$

ナリ。即直線 $(ux)=0$ ノ線坐標ハ其直線ノ極點ノ點坐標ト同一ナリ。故ニ二直線ノナス角ハ各直線ノ極點間ノ距離測度ニ等シ。然レドモゆうくりつどノ平面ニ於テハ $k\to\infty$ ノ場合ナル故斯クノ如キ事實ハ成立セズ。即ゆうくりつどノ平面ニ於テハ線分ニ關スル定理ト角ニ關スル定理トハ別々ナレドモ非ゆうくりつどノ平面ニ於テハ兩者相對應ス。

一點ヲ通過シ一直線ニ垂直ナル直線ノ方程式。$(ux)=0$ ヲ與ヘラレタル直線 g ノ方程式，點 $P(y)$ ヲ與ヘラレタル點トス。然ルトキハ直線 g ノ極點ノ坐標ハ $u_0:u_1:u_2$ ナリ。今 $(vx)=0$ ヲ點 P ヲ通過シ直線

g ニ垂直ナル直線 h ノ方程式トセバ直線 g, h ハ垂直ナル故

$$(uv)=0$$

ナリ。即坐標 (u) ハ $(vx)=0$ ナル方程式ヲ滿足ス。依テ直線 g ノ極點 (u) ハ直線 h 上ニアリ。逆ニ直線 g ノ極點 (u) ヲ通過スル任意ノ直線 $(vx)=0$ ハ

$$(uv)=0$$

ナル關係ガ存在スル故直線 g ニ垂線ナリ。從テ一般ニ一直線ニ垂直ナル直線ハ其直線ノ極點ヲ通過ス。

故ニ點 $P(y)$ ヲ通過シ直線 $g((ux)=0)$ ニ垂線ナル直線 h ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \end{vmatrix}=0$$

ナリ。

次ニ一點 (y) ヨリ一直線 (u) ニ至ル距離ヲ求メンニ，點 (y) ヲ通過シテ直線 (u) ニ垂直ナル直線ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \end{vmatrix}=0$$

ナルガ故ニ，此等二直線ノ交點ノ坐標ハ

$$\bar{x}_0 : \bar{x}_1 : \bar{x}_2$$

$$=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ y_0u_2-y_2u_0 & y_1u_0-y_0u_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_2 & u_0 \\ y_1u_0-y_0u_1 & y_2u_1-y_1u_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ y_2u_1-y_1u_2 & y_1u_2-y_2u_0 \end{vmatrix}$$

ナリ。從テ一點 (y) ヨリ一直線 (u) ニ至ル距離ヲ d トセバ

$$\sin\frac{d}{k}=\frac{\sqrt{(yy)(\bar{x}\bar{x})-(y\bar{x})^2}}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(\bar{x}\bar{x})}}$$

$$=\frac{\sqrt{(yy)(uu)\{(uu)(yy)-(uy)^2\}-\left[\sum\begin{vmatrix} u_i & u_j \\ y_i & y_j\end{vmatrix}^2\right]^2}}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(uu)\{(uu)(yy)-(uy)^2\}}}$$

$$=\frac{\sqrt{(uu)(yy)-(uy)^2}\sqrt{(yy)(uu)-\{(uu)(yy)-(uy)^2\}}}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(uu)\{(uu)(yy)-(uy)^2\}}}$$

故ニ

$$\sin\frac{d}{k}=\frac{(uy)}{\sqrt{(uu)(yy)}}$$

卽點 (y) ト直線 (u) トノ距離測度ノ正弦ハ點 (y) ト直線 (u) ノ絕對極點トノ距離測度ノ餘弦ニ等シ。

22. 圓，双曲及拋物的平面 (*Elliptic, hyperbolic and parabolic plane*).

非ゆうくりつど平面ノ中，*Riemann* 氏ノ曲率 $\frac{1}{k^2}$ ガ正ノ實數ナル平面ヲ楕圓的平面又ハ *Riemann* 氏ノ平面，$\frac{1}{k^2}$ ガ負ノ實數ナル平面ヲ双曲的平面，$\frac{1}{k^2}$ ガ零ナル平面ヲ拋物的平面ト云フ。拋物的平面ハゆうくりつど平面ノコトナリ。

双曲的平面ニ於テハ

$$\frac{1}{k^2}=\text{負}=-p^2 \quad (p \text{ ハ實數})$$

ニシテ且

$$\frac{kx_0}{\sqrt{(xx)}}=\mathfrak{X}_0=k\cos\frac{r}{k},$$

$$\frac{kx_1}{\sqrt{(xx)}}=\mathfrak{X}_1=k\sin\frac{r}{k}\cos\phi,$$

$$\frac{kx_2}{\sqrt{(xx)}}=\mathfrak{X}_2=k\sin\frac{r}{k}\sin\phi,$$

$$\cos\frac{r}{k}=\frac{e^{i\frac{r}{k}}+e^{-i\frac{r}{k}}}{2}=\frac{e^{pr}+{}^{-pr}}{2}\text{(實數)}$$

$$\sin\frac{r}{k}=\frac{e^{i\frac{r}{k}}-e^{-i\frac{r}{k}}}{2i}=\frac{e^{pr}-e^{-pr}}{2i}\text{(虛數)}$$

ナル故 $\mathfrak{X}_1$ ノミ虛トナリ他ノ $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_2$ ハ實トナル。從テ

$$(xx)=0$$

ナル絶對形ノ方程式ハ

$$x_1^2+x_2^2-(|x_0|)^2=0$$

トナル。依テコノトキハ絶對形ハ實ナリ。

楕圓的平面ニ於テハ

$$\frac{1}{k^2}=\text{正}=p^2\quad(p\ \text{ハ實數})$$

ナル故 $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ ハ總テ實ナルコト明ナリ。從テ絶對形ハ虛トナル。

拋物的平面ニ於テハ

$$\frac{1}{k^2}\to 0$$

ニシテ

$$\frac{\dot{x}_0}{\sqrt{(\dot{x}\dot{x})}}=\dot{\mathfrak{X}}_0\equiv\cos\frac{r}{k},$$

$$\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{(\dot{x}\dot{x})}}=\dot{\mathfrak{X}}_1\equiv k\sin\frac{r}{k}\cos\phi,$$

$$\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{(\dot{x}\dot{x})}}=\dot{\mathfrak{X}}\equiv k\sin\frac{r}{k}\sin\phi$$

ト置クトキハ

$$\dot{\mathfrak{X}}_0=\cos\frac{r}{k}$$

トナル。且 $\dot{\mathfrak{X}}_1$, $\dot{\mathfrak{X}}_2$ ハ

$$\dot{\mathfrak{X}}_1\equiv r\frac{\sin\frac{r}{k}}{\frac{r}{k}}\cos\phi,\quad \dot{\mathfrak{X}}_2\equiv r\frac{\sin\frac{r}{k}}{\frac{r}{k}}\sin\phi$$

ナル故 $k\to\infty$ ニ對シテ有限ノ値ヲ有ス。從テ $r\to\infty$ ノトキハ $\dot{\mathfrak{X}}_0=1$ ニシテ少クトモ $\dot{\mathfrak{X}}_1$ カ又ハ $\dot{\mathfrak{X}}_2$ ノ一ツガ∞トナラザルベガラズ。隨テ

$$\left.\begin{array}{r}\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2=0\\ \dot{x}_0=0\end{array}\right\}$$

故ニ絶對形ノ方程式ハ

$$\left.\begin{array}{r}\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2=0\\ \dot{x}_0=0\end{array}\right\}$$

トナル。而テ $\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2=0$ ハ $\dot{x}_1+\sqrt{-1}\dot{x}_2=0$, $\dot{x}_1-\sqrt{-1}\dot{x}_2=0$ ナル二直線ヲ表シ且 $\dot{x}_0=0$ モ亦他ノ直線ヲ表ス故上ノ聯立方程式ハ此等ノ直線ノ交點ナル二ツノ互ニ共軛ナル虛點ヲ表ス。今ゆうくりつど平面ニ於ケル直交軸ニ關スル坐標ヲ (X, Y) トスレバ

$$X=\lim_{k\to\infty}\frac{\dot{\mathfrak{X}}_1}{\dot{\mathfrak{X}}_0},$$

$$Y=\lim_{k\to\infty}\frac{\dot{\mathfrak{X}}}{\dot{\mathfrak{X}}_0}$$

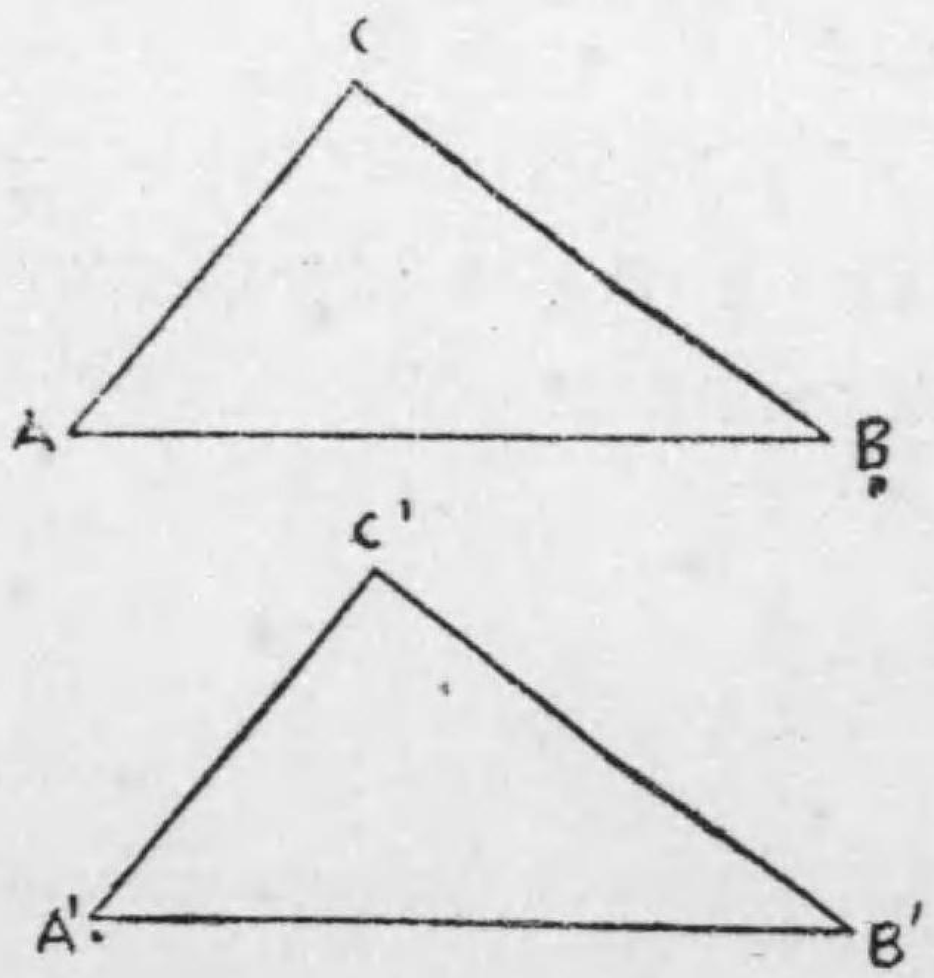
ナリ。依テ $\dot{x}_0=0$ ナルトキハ X, Y ノ何レカハ ∞ トナルベキナリ。故ニ $\dot{x}_0=0$ ハ無限遠ニ於ケル直線ヲ表ス。從テゆうくりつどノ

平面ニ於テハ絶對形ハ無限遠ニアル直線上ノ二共軛虚點トナル。此等ノ二點ヲ**無限遠ノ虚圓點***（*Imarginary circular points at infinity*）ト云フ。卽換言スレバゆうくりつごノ平面ニ於ケル絶對形ハ無限遠ノ虚圓點ナリ。

超無限遠點　絶對形上ニアラザル任意ノ一點ヨリ絶對形ニ引キタル切線ガ虚ナルトキハ其點ハ絶對形ノ內ニアル點ト稱シ又其切線ガ實ナルトキハ其點ハ絶對形ノ外ニアル點ト稱ス。此絶對形ノ外ニアル點ヲ超無限遠點（*Ultrainfinite point*）ト云ヒ絶對形外ノ變域ヲ超無限遠域（*Ultrainfinite domain*）ト云フ。而テ超無限遠域內ニ於テ絶對形ニ切線ヲ引クトキハ其切線上ノ任意ノ二點間ノ距離ハ零トナル。

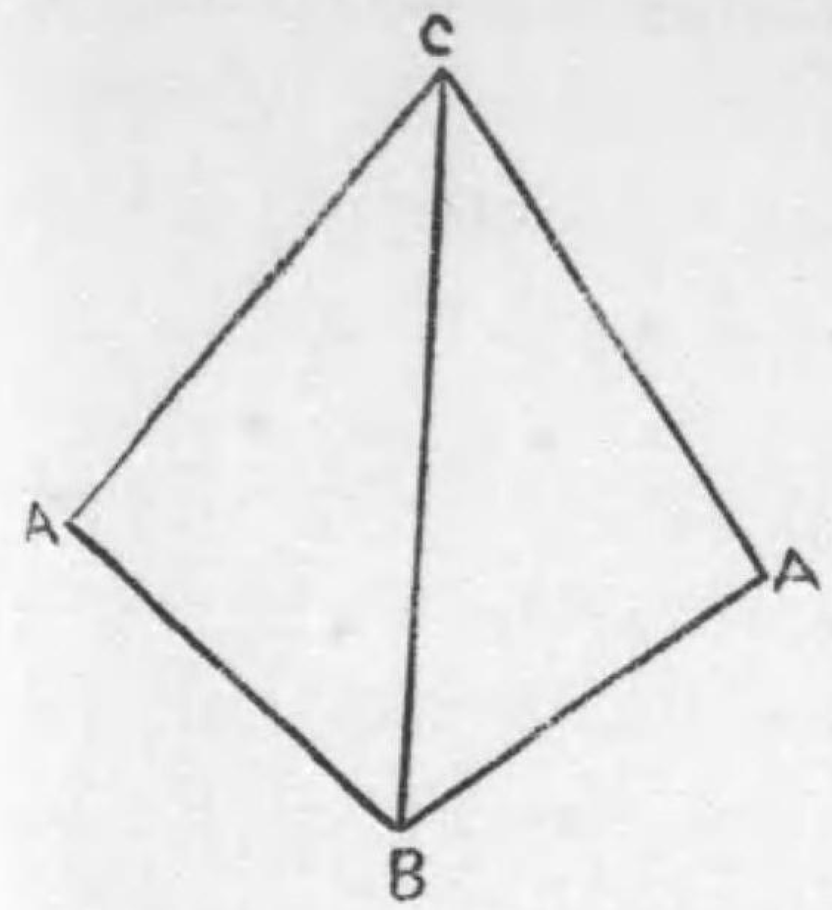
23.　合同變更（*Congruent transformation*）及其變更方程式

第十一圖ノ如キ同一平面上ニアル邊々相等シキ兩三角形ハ此平面內ノ運動（*Motion*）ニ依リテ兩者相重ネ合スコトヲ得。又第十二圖ノ如キ直線ニ對シテ對稱ナル同一平面上ニ在ル全等ナル兩三角形ハ此平面外ニ運動ヲ行ハザレバ兩者相重ネ合スコトヲ得ズ。是ヲ對稱變更（*Symmetric transformation*）ト云フ。而テ運動ト對稱變更トヲ合セタルモノガ合同變更ナリ。



第十一圖

* 總テノ圓ハ此虚圓點ヲ過ルガ故ニ斯ク名命セラレタルモノナリ。



第十二圖

旣ニ述タル如ク，合同變更ニヨリ距離元素及直線ハ不變ナル故二點間ノ距離モ亦不變ナリ。

合同變更ニヨレバ點ハ點，直線ハ直線ニ變更サル。今

$$x_i=f_i(x_0', x_1', x_2')$$

（但 $i=0, 1, 2$, f_i ハ x_0', x_1', x_2' ノ解析函數トス）ヲ合同變更ヲ表ス方程式トス。然ルトキハ，直線ノ方程式ハ此變更方程式ニヨリ依然直線ノ方程式トナル故ニ

$$(ux)=0$$

或ハ

$$u_0f_0+u_1f_1+u_2f_2=0$$

ガ

$$(u'x')=0$$

トナルベキナリ。從テ上ノ變更方程式ハ

$$x_0=a_0x_0'+a_1x_1'+a_2x_2',$$

$$x_1=b_0x_0'+b_1x_1'+b_2x_2',$$

$$x_2=c_0x_0'+c_1x_1'+c_2x_2'$$

ナル形ヲトルベキナリ。（但 a_i, b_i, c_i $(i=0, 1, 2)$ ハ皆常數），卽合同變更ハ一次ノ變更ナリ。

次ニ合同變更ニヨリ點 $P(y)$ ガ點 $P'(y')$ ニ，絶對形上ノ點 $Q(x)$ ガ

$Q'(x')$ ニ變更サレタリトス。而テ合同變更ニ對シテハ二點間ノ距離ハ不變ナル故 $\overline{PQ}=\overline{P'Q'}$ ナルベキナリ。然ルニ $\overline{PQ}$ ハ無限大ナル故 $\overline{P'Q'}$ モ亦無限大ナリ。從テ點 $Q'(x')$ ハ亦絶對形上ノ點ナリ。即合同變更ニヨリテハ絶對形上ノ點ハ絶對形上ノ點ニ變更サル。故ニ絶對形ノ方程式

$$(xx)=0$$

ハ

$$(x'x')=0$$

ナル形ニ變更サルベキナリ。從テ

$$(a_0x_0'+a_1x_1'+a_2x_2')^2+(b_0x_0'+b_1x_1'+b_2x_2')^2+(c_0x_0'+c_1x_1'+c_2x_2')^2=0$$

或ハ

$$(a_0^2+b_0^2+c_0^2)x_0'^2+(a_1^2+b_1^2+c_1^2)x_1'^2+(a_2^2+b_2^2+c_2^2)x_2'^2$$
$$+2(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)x_1'x_2'+\cdots\cdots=0$$

ガ

$$(x'x')=0$$

トナルベキナリ。故ニ

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0,$$
$$a_2a_0+b_2b_0+c_2c_0=0,$$
$$a_0a_1+b_0b_1+c_0c_1=0,$$
$$a_0^2+b_0^2+c_0^2=a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2$$

ナリ。是一種ノ直角變更 (*Orthogonal transformation*) ナリ。卽合同變更ハ坐標 (x) ノ直角變更ナリ。

24. 双曲的平面ノ合同變更。 一般ニ絶對形ノ方程式ハ

$$k^2\bar{x}_0^2+\bar{x}_1^2+\bar{x}_2^2=0$$

ニシテ，双曲的平面ニ於テハ k ガ虛ナル故 $k\bar{x}_0=ix_0$ トトルモ一般性ヲ失ハズ。從テ双曲的平面ノ絶對形ノ方程式ハ

(1) $$-x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$$

ト書クコトヲ得。依テ

$$x_0+x_2=z_0,$$
$$x_0-x_2=z_2,$$
$$x_1=z_1$$

トヲクトキハ絶對形ノ方程式ハ

(2) $$z_0z_2-z_1^2=0$$

トナル。次ニ

(3) $$z_0:z_1:z_2=\lambda^2:\lambda:1$$

トヲクトキハ絶對形上ノ點ノ坐標ハ $\lambda^2:\lambda:1$ ニテ與ヘラル。此助變數 λ ニ相當スル點ヲ A, $\bar{\lambda}$ ナル助變數ニ相當スル點ヲ B トシ，點 A 及 B ニ於テ絶對形ニ切線 AC, BC ヲ引クトキ其等ノ切線ノ方程式ハ

(4)
$$z_0-2\lambda z_1+\lambda^2z_2=0,$$
$$z_0-2\bar{\lambda}z_1+\bar{\lambda}^2z_2=0$$

トナリ且點 A, B ヲ結ブ直線ノ方程式ハ

(5) $$z_0-(\lambda+\bar{\lambda})z_1+\lambda\bar{\lambda}z_2=0$$

トナル。

偖合同變更ニ對シテハ絶對形ハ不變即絶對形上ノ點ハ其形上ニ變更サレ，又直線ハ直線ニ變更サレル。從テ點 A 及 B ハ絶對形上ノ點 A', B' ニ變更サレ直線 AB ハ直線 $A'B'$ ニ變更サル。且絶對形上ノ相接近セル二點 (*Two consecutive points*) ハ其形上ノ相接近セル二點

ニ變更サルル故切線 AC, BC ハ點 A', B' ニ於ケル絶對形ヘノ切線 $AC', B'C'$ ニ變更サル。今

直線 AC ノ方程式ヲ $z_0'=0$,

直線 $A'B'$ ノ方程式ヲ $z_1'=0$,

直線 $B'C'$ ノ方程式ヲ $z_2'=0$

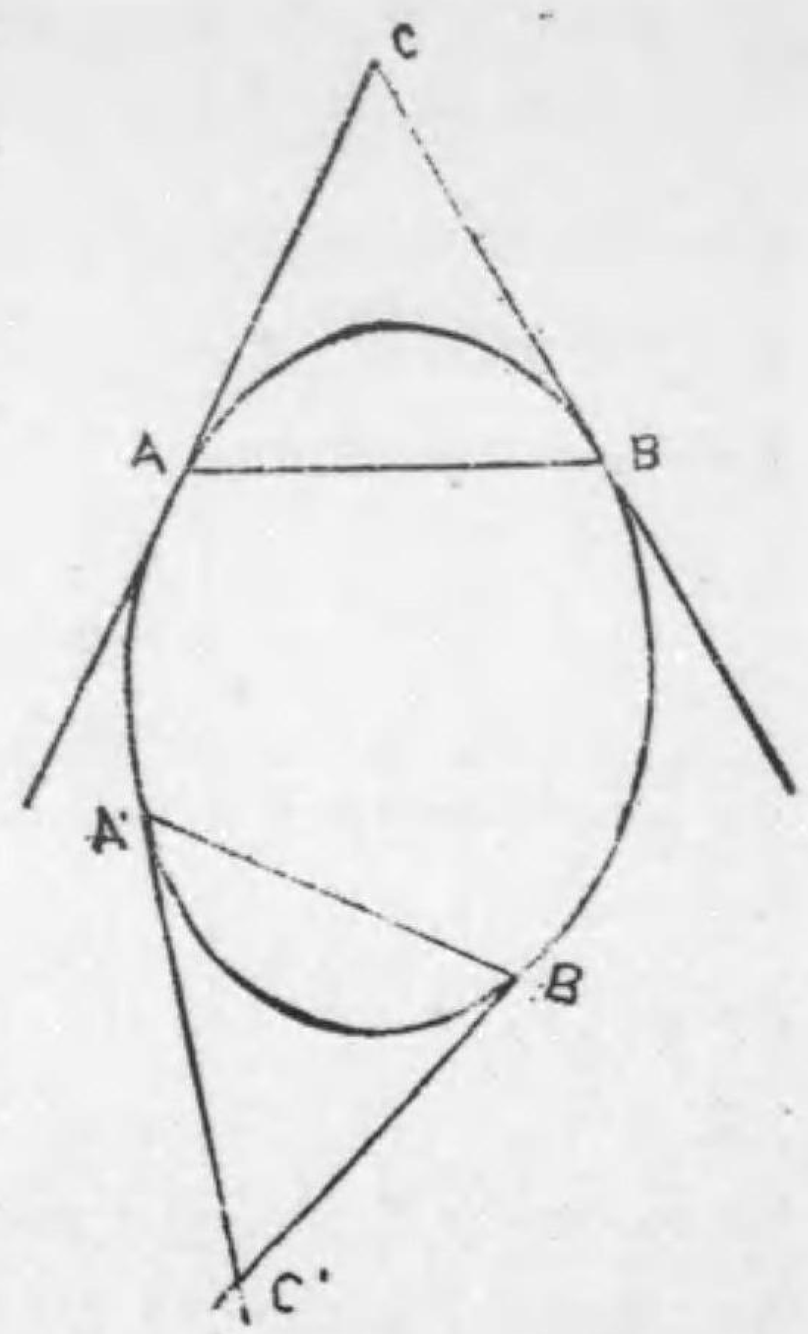
ト取レバ合同變更ノ方程式ハ

$$
\begin{aligned}
& z_0'=a(z_0-2\lambda z_1+\lambda^2 z_2) \\
(6) \qquad & z_1'=b(z_0-(\lambda+\bar{\lambda})z_1+\lambda\bar{\lambda}z_2), \\
& z_2'=c(z_0-2\bar{\lambda}z_1+\bar{\lambda}^2 z_2)
\end{aligned}
$$

トナル。但 a, b, c ハ常數ニシテ $ac=b^2$ トス。然ルトキハ

$$(7) \quad z_0'z_2'-z_1'^2=b^2(\lambda-\bar{\lambda})^2(z_0z_2-z_1^2)$$

トナリ，上ノ變更方程式ハ明ニ絶對形ヲ不變ニナスモノナリ。次ニ



第十三圖

$$\sqrt{a}=\alpha, \quad -\sqrt{a}\lambda=\beta, \quad \frac{b}{\sqrt{a}}=\gamma, \quad -\frac{b\bar{\lambda}}{\sqrt{a}}=\delta$$

トヲクトキハ (6) ナル變更方程式ハ

$$
\begin{aligned}
& z_0'=\alpha^2 z_0+2\alpha\beta z_1+\beta^2 z_2, \\
(8) \qquad & z_1'=\alpha\gamma z_0+(\alpha\delta+\beta\gamma)z_1+\beta\delta z_2, \\
& z_2'=\gamma^2 z_0+2\gamma\delta z_1+\delta^2 z_2
\end{aligned}
$$

トナリ且等式 (7) ハ

$$(9) \qquad z_0'z_2'-z_1'^2=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2(z_0z_2-z_1^2)$$

トナル。而テ $\lambda, \bar{\lambda}, \delta$ ハ何レモ零ナラズト考フレバ

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$$

ナリ。且双曲的平面ノ絶對形上ノ實點ハ合同變更ニヨリテ依然其形上ノ實點ニ變更サルル故 (8) ナル變更方程式ノ各係數 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ皆實ナリ。

(3) ヨリ

$$\frac{z_0}{z_1}=\frac{z_1}{z_2}=\lambda$$

ナル故 (8) ヨリ

$$
\begin{aligned}
\lambda'=\frac{z_0'}{z_1'} &= \frac{\alpha^2\lambda+2\alpha\beta+\beta^2\dfrac{1}{\lambda}}{\alpha\gamma\lambda+(\alpha\delta+\beta\gamma)+\beta\delta\dfrac{1}{\lambda}} \\
&= \frac{(\alpha\lambda+\beta)^2}{(\alpha\lambda+\beta)(\gamma\lambda+\delta)} \\
&= \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}
\end{aligned}
$$

故ニ双曲的平面上ノ合同變更ノ助變數ノ變更方程式ハ

$$\lambda'=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$$

(但 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ實數ニシテ $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$) ニテ表サル。

或ハ

$$\lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \lambda=\frac{\lambda_1'}{\lambda_2'}$$

トヲクトキハ合同變更ノ方程式ハ

$$\sigma\lambda_1'=\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2, \qquad \text{(i)}$$

$$\sigma\lambda_2'=\gamma\lambda_1+\delta\lambda_2' \qquad \text{(i)}$$

トナル。且此助變數ヲ用フルトキハ絶對形ノ方程式ハ

$$\dot{x}_0=\lambda_1^2+\lambda_2^2,\quad \dot{x}_1=2\lambda_1\lambda_2,\quad \dot{x}_2=\lambda_1^2-\lambda_2^2 \qquad \text{(ii)}$$

トナル。故ニ合同變更ノ方程式ハ

$$\dot{x}_0'=\lambda_1'^2+\lambda_2'^2,\quad \dot{x}_1'=2\lambda_1'\lambda_2',\quad \dot{x}_2'=\lambda_1'^2-\lambda_2'^2 \qquad \text{(iii)}$$

ナルヲ以テ (i), (ii), (iii) ヨリ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1' \lambda_2'$ ヲ消去スルコトニヨリ

$$\rho\dot{x}_0'=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\dot{x}_0+(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2)\dot{x}_1+2(\alpha\beta+\gamma\delta)\dot{x}_2,$$

$$\rho\dot{x}_1'=2(\alpha\gamma+\beta\delta)\dot{x}_0+2(\alpha\gamma-\beta\delta)\dot{x}_1+2(\alpha\delta+\beta\gamma)\dot{x}_2,$$

$$\rho\dot{x}_2=(\alpha^2-\gamma^2+\beta^2-\delta^2)\dot{x}_0+(\alpha^2-\gamma^2-\beta^2+\delta^2)\dot{x}_1+2(\alpha\beta-\gamma\delta)\dot{x}_2,$$

$$\Delta=(\alpha\delta-\beta\gamma)^3$$

ヲ得。(但△ハ上ノ三等式ノ左邊ノ係數ニテ作リタル行列式ニシテ是ヲ變更式ノ變更率ト云フ)。

絶對形上ニ合同變更ニ對シテ不變トナル如キ點ハ

$$\sigma\lambda_1=\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2,$$

$$\sigma\lambda_2=\gamma\lambda_1+\delta\lambda_2$$

ヲ滿足ス。即

$$\begin{vmatrix}\sigma-\alpha & \beta\\ \gamma & \sigma-\delta\end{vmatrix}=0$$

ナル σ ニ就テノ二次方程式ヲ滿足スル故一般ニ二點存在ス。

25. 楕圓的平面ノ合同變更。 楕圓的平面ニ於テハ k^2 ハ實數ナル故 $k^2=1$ ト取ルモ一般性ヲ失ハズ。從テ絶對形ノ方程式ハ

$$\dot{x}_0^2+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2=0$$

ナル形ヲ取ル，而テ双曲的平面ノトキト同樣ニシテ絶對形ノ方程式ハ

$$\dot{x}_0=i(\lambda_1^2+\lambda_2^2),$$

$$\dot{x}_1=2\lambda_1\lambda_2,$$

$$\dot{x}_2=\lambda_1^2-\lambda_2^2$$

ナル助變數方程式ニテ表サレ，合同變更ノ助變數方程式ハ

$$\sigma\lambda_1'=(\alpha+\beta i)\lambda_1-(\gamma+\delta i)\lambda_2,$$

$$\sigma\lambda_2'=(\gamma-\delta i)\lambda_1+(\alpha-\beta i)\lambda_2$$

トナル。從テ $(\dot{x})$ ニ關スル合同變更方程式ハ

$$\rho\dot{x}_0'=(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)\dot{x}_0+2(\gamma\delta-\beta\alpha)\dot{x}_1+2(\beta\gamma+\delta\alpha)\dot{x}_2,$$

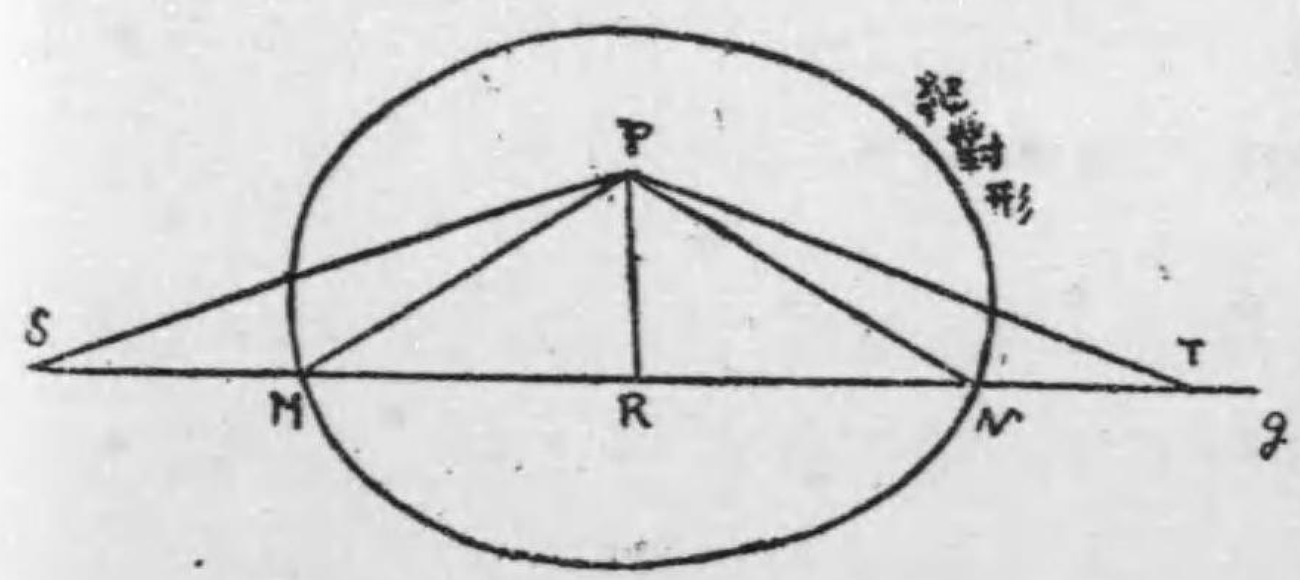
$$\rho\dot{x}_1'=2(\beta\gamma-\delta\alpha)\dot{x}_0+2(\beta\delta+\gamma\alpha)\dot{x}_1+(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)\dot{x}_2,$$

$$\rho\dot{x}_2'=2(\gamma\delta+\beta\alpha)\dot{x}_0+(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)\dot{x}_1+2(\beta\delta-\gamma\alpha)\dot{x}_2$$

トナル。此變更式ノ變更率 Δ ノ値ハ次ノ如シ。

$$\Delta=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)^3.$$

26. 平行線。 制限域內ニアル一直線ヲ g，一點ヲ P トス(但點 P ハ直線 g 上ニ在ラズトス且 PR ヲ點 P ヨリ直線 g ニ下シタル垂線，PQ ヲ制限域內ニテ直線 g ト交ル任意ノ直線トス。然ルトキ點 Q ガ點 R ヲ漸々ニ遠ザ



第十四圖

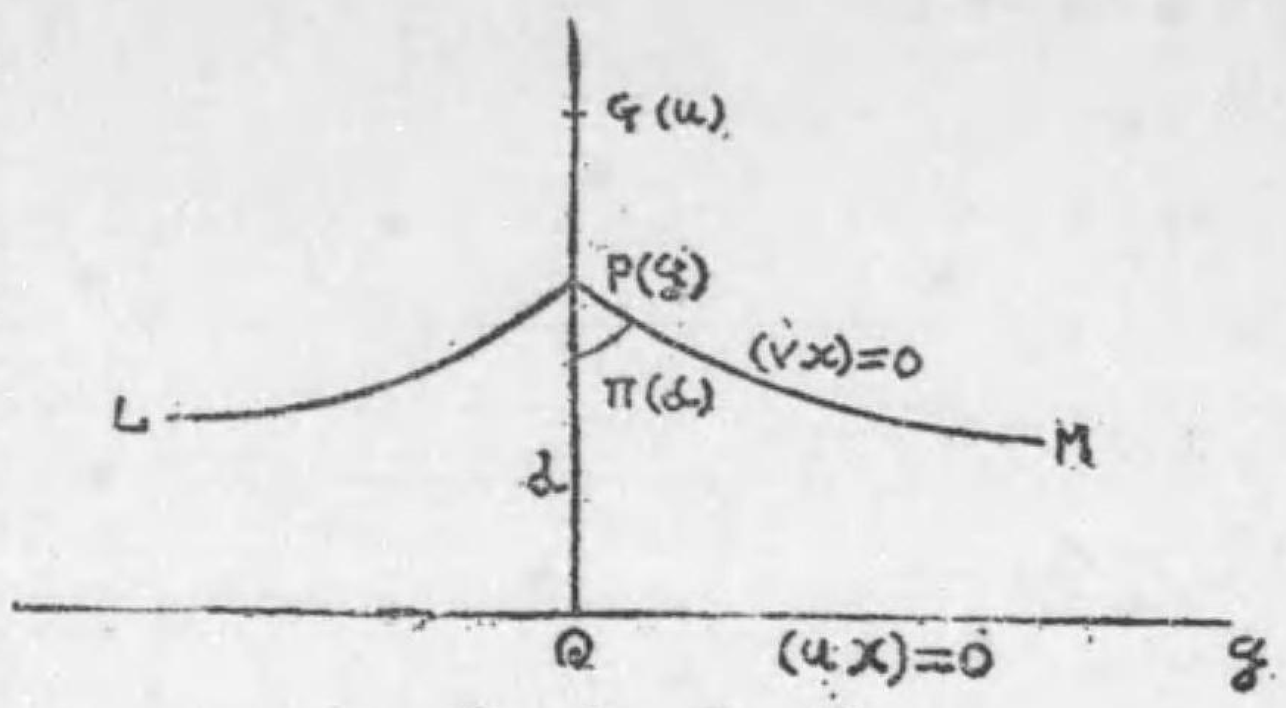
カリタル極限ノ位置ニ於ケル直線 PQ ヲ點 P ヨリ直線 g ニ引ケル平行線ト云フ。而テ絕對形上ノ點ハ何レモ點 P 及 R ヨリ無限遠ノ距離ニ在ル故點 P ヨリ g 直線ニ引ル平行線ハ直線 g ト絕對形上ノ點ニテ相交ル。然ルニ絕對形ト一直線トハ一般ニ二點ニテ交ル故ニ今直線 g ト絕對形トノ交點ヲ夫々 M, N トセバ PM, PN ナル二直線ハ直線 g ニ平行ナリ。

Lobachevski 氏平面即双曲的平面ニ於テハ絕對形ハ實曲線ナル故制限域內ノ直線 g ハ絕對形ト二實點ニテ交ル。從テ一點 P ヨリ直線 g ニ二本ノ平行線ガ存在ス。又 *Riemann* 氏平面即楕圓的平面ニ於テハ絕對形ハ虛曲線ナリ。依テ總テノ直線ハ有限ノ點ニ於テノミ相交ル。依テ一點 P ヲ過リ直線 g ニ平行ナル實直線存在セズ。又ゆうくりつど平面即拋物的平面ニ於テハ直線 g ト $x_0=0$ ナル無限遠ニ在ル直線トノ交點ハ唯一點ナル故點 P ヨリ唯一本ノ平行線ヲ引クコトヲ得。

注意 圖中ニ於テ PS, PT 等ノ直線ハ直線 g ト制限域內ニテハ相交ラザル直線ナレドモ是等ハ直線 g ニ平行ナリトハ稱セズ。即超無限遠點ニテ相交ル二直線ハ平行ト稱セズ。

27. 平行角。 双曲的平面ニ於テ一點 $P(y)$ ヨリ一直線 g $((ux)=0)$ ニ引キタル二平行線ヲ PM, PL トシ, 點 P ヨリ直線 g ニ下シタル垂線ノ足ヲ Q, 直線 g ノ極點ヲ $G(u)$ トス。然ルトキ $\angle QPM=\angle QPL$ ヲ *Lobachevski* 氏ハ**平行角** (*Parallel angle*) ト名命シ, 是ヲ表スニ $\Pi(d)$ ナル記號ヲ用ヒタリ。但 d ハ PQ ノ長サヲ

表スモノトス。次ニ平行角 $\Pi(d)$ ノ大サヲ求メン。



第十五圖

今平行線 PM ノ方程式ヲ $(vx)=0$ トス。然ルトキハ點 $P(y)$ ハ直線 PM 上ニアル故

$$(vy)=0$$

ナリ。又直線 PQ ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \end{vmatrix}=0$$

或ハ

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} x_0+\begin{vmatrix} y_2 & y_0 \\ u_2 & u_0 \end{vmatrix} x_1+\begin{vmatrix} y_0 & y_1 \\ u_0 & u_1 \end{vmatrix} x_2=0$$

ニシテ其線坐標ハ

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} y_2 & y_0 \\ u_2 & u_0 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} y_0 & y_1 \\ u_0 & u_1 \end{vmatrix}$$

ナル故

$$\cos(\Pi(d))=\frac{v_0\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}+v_1\begin{vmatrix} y_2 & y_0 \\ u_2 & u_0 \end{vmatrix}+v_2\begin{vmatrix} y_0 & y_1 \\ u_0 & u_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(vv)}\sqrt{\sum\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}^2}}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(vv)}\sqrt{\begin{vmatrix} (yy) & (yu) \\ (uy) & (uu) \end{vmatrix}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(vv)}\sqrt{(yy)(uu)-(uy)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} (vv) & (yv) & (uv) \\ (vy) & (yy) & (uy) \\ (vu) & (yu) & (uu) \end{vmatrix}}}{\sqrt{(vv)}\sqrt{(yy)(uu)-(uy)^2}}$$

然ルニ $(vy)=0$ ナル故

$$\cos(\Pi(d))=\frac{\sqrt{(vv)\begin{vmatrix} (yy) & (uy) \\ (yu) & (uu) \end{vmatrix}-(yy)(uv)^2}}{\sqrt{(vv)}\sqrt{(yy)(uu)-(uy)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(yy)\{(uu)(vv)-(uv)\}-(vv)(uy)^2}}{\sqrt{(vv)}\sqrt{(yy)(uu)-(uy)^2}}$$

而テ直線 $g((ux)=0)$ ト $PM((vx)=0)$ トノ交點ノ坐標ハ

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_2 & u_0 \\ v_2 & v_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ v_0 & v_1 \end{vmatrix}$$

ニシテ絶對形上ノ點ナル故

$$\Sigma\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2=0$$

即

$$(uu)(vv)-(uv)^2=0$$

ナリ。依テ

$$\cos(\Pi(d))=\frac{\sqrt{-1}\,(uy)}{\sqrt{(yy)(uu)-(uy)^2}}.$$

然ルニ點 Q ノ坐標ヲ $(\bar{x})$ トスレバ

$$\bar{x}_0:\bar{x}_1:\bar{x}_2$$

$$=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2y_0-u_0y_2 & u_0y_1-u_1y_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_2 & u_0 \\ u_0y_1-u_1y_0 & u_1y_2-u_2y_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ u_1y_2-u_2y_1 & u_2y_0-u_0y_2 \end{vmatrix}$$

ナル故

$$\cos\frac{\overline{PQ}}{k}\equiv\cos\frac{d}{k}=\frac{(y\bar{x})}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(\bar{x}\bar{x})}}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \\ u_2y_1-u_1y_2 & u_2y_0-u_0y_2 & u_0y_1-u_1y_0 \end{vmatrix}}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(\bar{x}\bar{x})}}$$

$$=\frac{\Sigma\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(uu)\{(uu)(yy)-(uy)^2\}}}$$

$$=\frac{(uu)(yy)-(uy)^2}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(uu)\{(uu)(yy)-(uy)^2\}}}$$

$$=\frac{\sqrt{(uu)(yy)-(uy)^2}}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(uu)}}$$

從テ

$$\sin\frac{d}{k}=\sqrt{1-\cos^2\frac{d}{k}}=\frac{(uy)}{\sqrt{(uu)}\sqrt{(yy)}}$$

依テ

$$\tan\frac{d}{k}=\frac{\sin\frac{d}{k}}{\cos\frac{d}{k}}=\frac{(uy)}{\sqrt{(uu)(yy)-(uy)^2}}.$$

故ニ

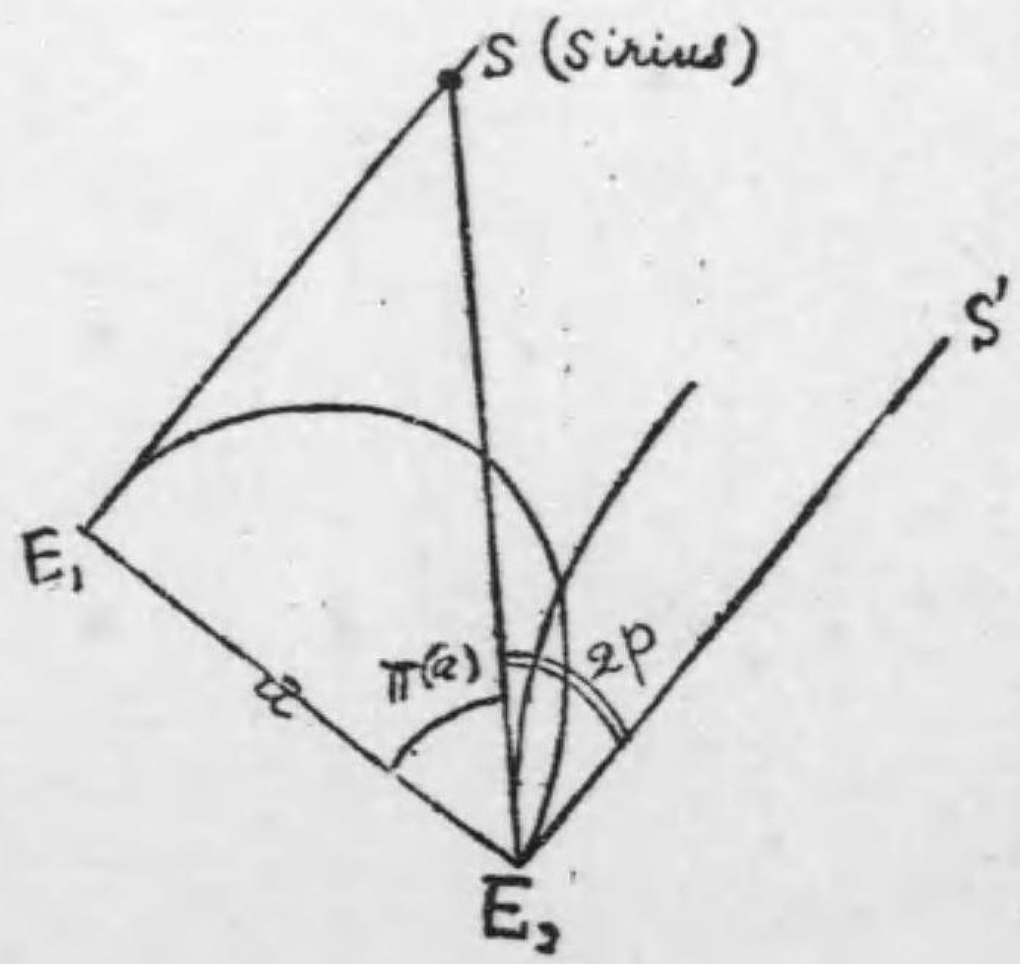
$$\cos(\Pi(d)) = \sqrt{-1}\tan\frac{d}{k}$$

或ハ

$$\tan\frac{\Pi(d)}{2} = e^{-\frac{d}{|k|}} = \frac{1}{e^{\frac{d}{|k|}}}.$$

上ノ等式ヨリ明ナル如ク $e>1$ ナル故 $e^{\frac{d}{|k|}}$ ハ d ト共ニ增減ス。即 $\tan\frac{\Pi(d)}{2}$ ハ d ガ增加スルニ從ヒ減少シ，d ガ減少スルニ從ヒ增加ス。且 $\frac{\Pi(d)}{2}$ ハ直角ヨリ小ナルガ故 $\frac{\Pi(d)}{2}$ ハ d ト增減ヲ相反ス。

Lobachevski 氏ハ此平行角ヲ用ヒテ氏ノ創設セル幾何學的空間ハ $|k|$ ノ値ヲ適當ニ定ムルトキハ實際ノ空間ニ適用シテ實際的誤差ヲ極メテ小トナサシムルコトノ可能ナルヲ，即實用空間ニ用ヒテ何等差支ナキコトヲ天狼星(*Sirius*)ノ視差觀測ニ依リテ證明セリ。其證明ハ次ノ如シ。



第十六圖

E_1 ヲ最初ノ觀測者ノ位置，E_2 ヲ半年後ノ觀測者ノ位置トシ，a ヲ地球ノ軌道ノ直徑トシ，$2p$ ヲ半年間ニ於ケル *Sirius* ノ視差トス。然ルトキハ

$$\angle E_1E_2S = \angle SE_1E_2 = \text{直角}$$

$$\angle E_1E_2S' - \angle SE_2E_1 = 2p\ (\text{視差})$$

$$\angle E_1E_2S = \frac{\pi}{2} - 2p < \Pi(a).$$

故ニ

$$\frac{\Pi(a)}{2} > \frac{\pi}{4} - p$$

或ハ

$$\tan\frac{\Pi(a)}{2} > \tan\left(\frac{\pi}{4} - p\right)$$

然ルニ $\tan\frac{\Pi(a)}{2} = e^{-\frac{a}{|k|}}$ ナル故ニ

$$e^{-\frac{a}{|k|}} > \tan\left(\frac{\pi}{4} - p\right) = \frac{1-\tan p}{1+\tan p}.$$

即

$$e^{\frac{a}{|k|}} < \frac{1+\tan p}{1-\tan p}.$$

而テ $p<\frac{\pi}{4}$ ナル故 $1>\tan p$ ナリ。從テ上ノ不等式ノ兩邊ノ對數ヲトリ

$$\frac{a}{|k|} < \log\left(\frac{1+\tan p}{1-\tan p}\right).$$

上ノ不等式ノ右邊ヲ展開シ

$$\frac{a}{|k|} < 2\left(\tan p + \frac{1}{3}\tan^3 p + \cdots\right).$$

又

$$\tan 2p=\frac{2\tan p}{1-\tan^2 p}=2(\tan p+\tan^3 p+\cdots\cdots)$$

ニシテ

$$\tan p+\frac{1}{3}\tan^3 p+\cdots\cdots<\tan p+\tan^3 p+\cdots\cdots$$

ナル故

$$\frac{a}{|k|}<\tan 2p.$$

然ルニ觀測ノ結果 *Sirius* ニ對シテハ

$$2p=1''.24$$

ナル故

$$\frac{a}{|k|}<0.000006102,$$

即

$$\frac{k}{a}>\frac{1}{0.000006102},$$

或ハ

$$\frac{|k|}{a}>166320.$$

故ニ

$$|k|>166320\times a.$$

即 $|k|$ ヲ上ノ不等式ヲ滿足スル如クトルトキハ *Lobachevski* 氏ノ幾何學ハ吾人ノ實用ニ何等ノ不都合ナシ。

28. 非ゆうくりつど平面ノ模型。

既ニ述タルガ如ク *Beltrami* 氏ハ非ゆうくりつど平面ヲ定全曲率曲面上ニ影像セリ。

Poincaré (ぽあんかれい)氏ハ *Lobachevski* 氏ノ平面ヲゆうくりつど平面ニ影像セリ。即氏ハ *Lobachevski* 氏平面上ノ點 $(\mathfrak{X})$ トゆうくりつど平面上ノ點 (x, y) トガ

$$\frac{\mathfrak{X}_0}{i} : \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2=1+x^2+y^2 : 1-x^2-y^2 : 2x$$

ナル關係ヲ有スル如ク影像セリ。今

$$z=x+\sqrt{-1}\,y,$$
$$\bar{z}=x-\sqrt{-1}\,y$$

トヲケバ上ノ比例式ハ

$$\frac{\mathfrak{X}_0}{i} : \mathfrak{X}_1 : \mathfrak{X}_2=1+z\bar{z}\cdot 1-z\bar{z} : z+\bar{z}$$

トナル。從テ

$$(\ \mathfrak{X})=4y^2$$

トナリ絶對形ハ

$$y=0$$

即 x-軸ニテ表サレ，制限域内ノ點ハ x-軸ノ上半面内ノ點，超無限遠域ハ x-軸ノ下半面ニ影像サル。又

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{X})=0$$

ナル直線ノ方程式ハ

$$l(x^2+y^2)+mx+n=0$$

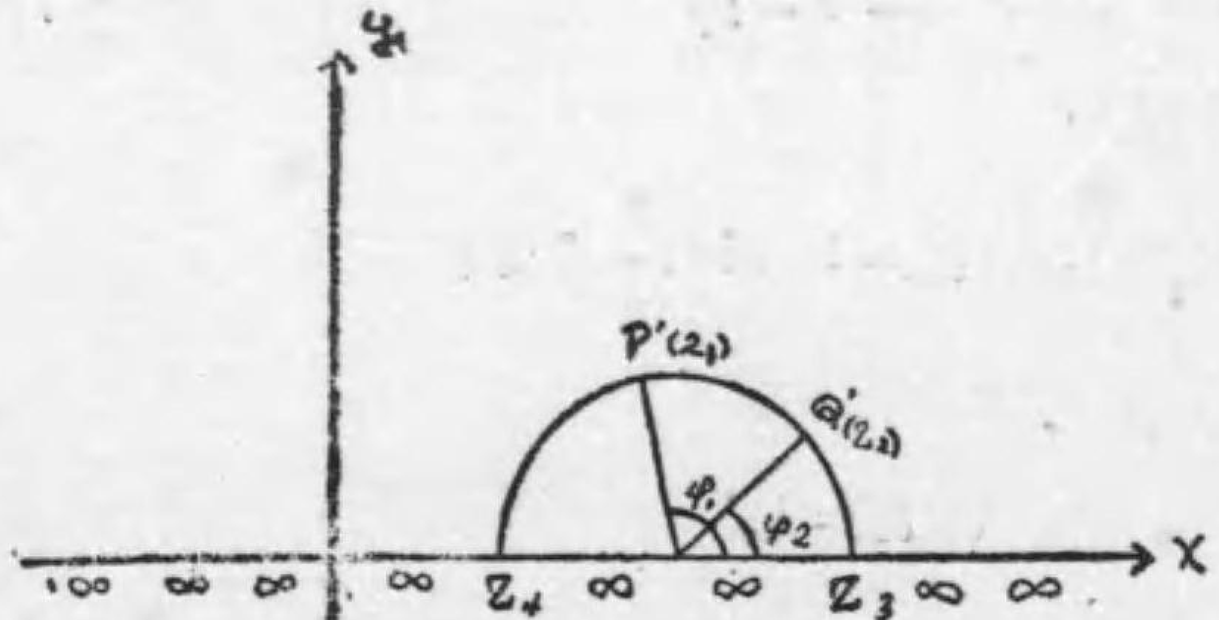
トナル。即 直線ハ x-軸上ニ中心ヲ有スル圓ニ影像サル。

又二點 PQ ニ對應スルゆうくりつど平面上ノ二點ヲ $P'(z_1)$ $Q'(z_2)$ トスレバ，二點ノ距離ヲ表ス式ハ $\left(k=\frac{\sqrt{-1}}{2}\text{ト取ルトキハ}\right)$

$$P'Q' \text{ ノ長サ} = log\left(\frac{z_1-z_4}{z_1-z_3} \div \frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}\right)$$

$$= log\left[\frac{e^{i\varphi_1}-1}{e^{i\varphi_1}+1} \div \frac{e^{i\varphi_2}-1}{e^{i\varphi_2}+1}\right]$$

$$= log\frac{tan\frac{\varphi_1}{2}}{tan\frac{\varphi_2}{2}}$$



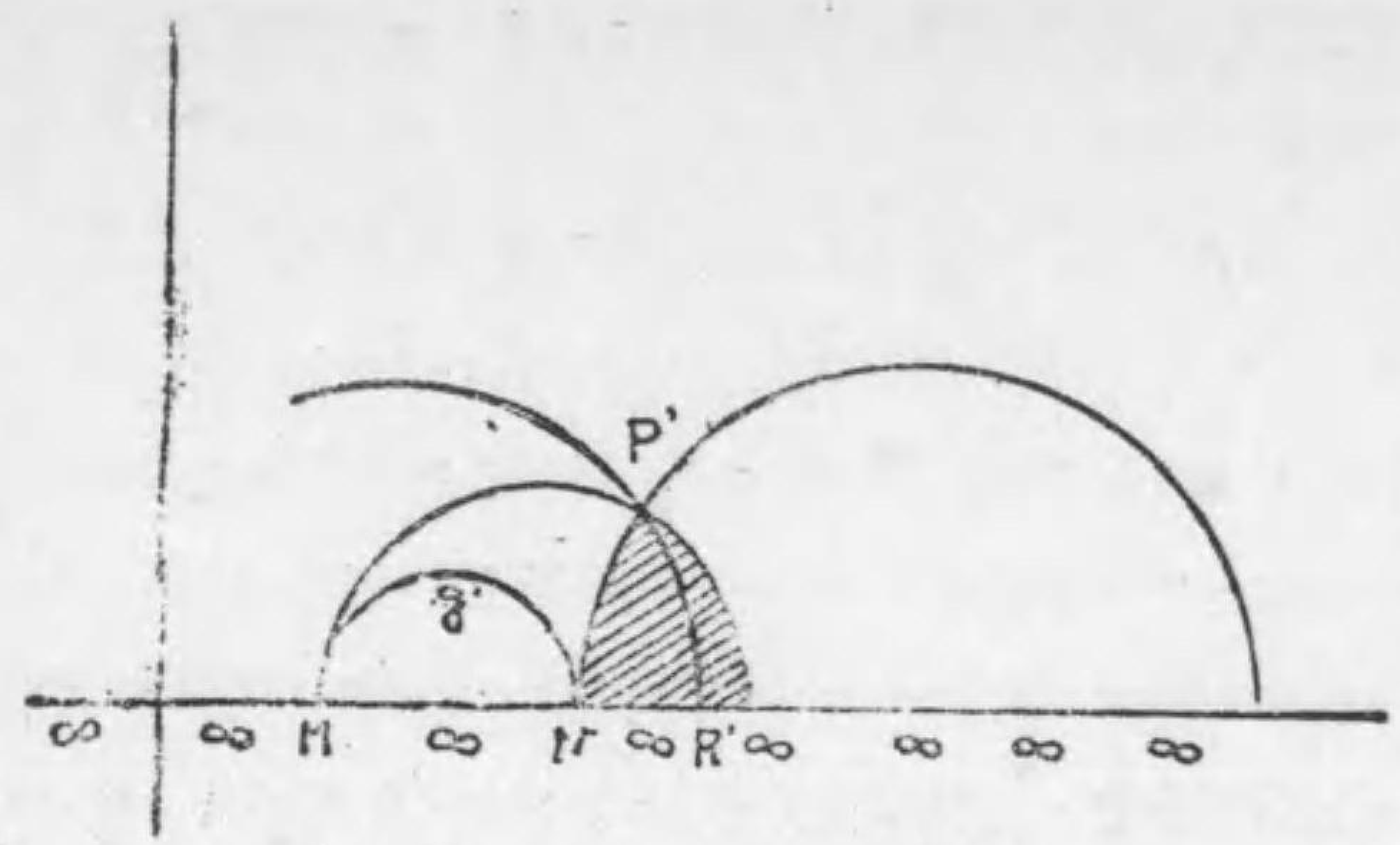
第十七圖

トナル。但 z_3 z_4 ハ PQ 直線ト絶對形トノ二交點ニ對スル點卽 P', Q' ナル二點ヲ通過スル圓ト x-軸トノ交點トス。

而テ一點 P ヨリ一直線 g ニ引ケル平行線ハ直線 g ト絶對形上ニ於テノミ相交ル故 g 直線ニ相當スル圓ト x-軸上ニテ交リ且點 P ノ影像 P' ヲ通過スル圓トナル。

第十八圖ニ於テ圓 $P'M, P'N$ ハ g 直線ニ平行ナル直線ノ影像ニシテ，圓 $P'R'$ 等(影線ヲ附シタル部分ヲ通過スル圓)ハ直線 g ト相交ラザル直線ノ影像ナリ。

又二直線ノナス角ハ各直線ノ影像ナル二圓ノ交角トナル。



第十八圖

此ノ場合ニ於ケル合同變更ハ

$$z' = \frac{\alpha \ + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \left(\text{但 } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \atop \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ ハ皆實數}\right)$$

ニテ表サレ

$$\alpha\delta - \beta\gamma > 0$$

ノトキハ運動 (*Motion*) ヲ表シ

$$\alpha\delta - \beta\gamma < 0$$

ノトキハ對稱變更ヲ表ス。而シテ z ガ z' ニ變更サルルトキハ x, y ハ次ノ方程式ニヨリ x', y' ニ變更セラル。

$$x' = \frac{(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta) + \alpha\gamma y^2}{(\gamma x + \delta)^2 + \gamma^2 y^2},$$

$$y' = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)y}{(\gamma x + \delta)^2 + \gamma^2 y^2}.$$

而テ已上ノ方程式ノ分母ハ常ニ正ナリ。而テ運動ノトキハ $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ ナル故ニ y ト y' トハ同符號，對稱變更ノトキハ $\alpha\delta - \beta\gamma < 0$ ナル故

y ト y' トハ異符號ナリ。依テ運動ニヨリテハ x-軸ノ上半平面上ノ點ハ依然 x-軸ノ上半平面内ノ點ニ變更セラレ，對稱變更ニヨリテハ x-軸ノ上半平面内ノ點ハ下半平面内ノ點ニ變更セラル。

次ニ *Riemann* 氏ノ平面ノ模型ニ就テ述ンニ，氏ノ平面ハ之ヲゆうくりつどノ球面上ニ影像スルコトヲ得。但コノ場合ニハ球面上ノ直徑ノ兩端ニアル二點ヲ *Riemann* 氏平面上ノ一點ノ影像ト見ルベキナリ。而テ直線ハ大圓ニ，二點間ノ距離ハ大圓弧ノ長サニ，二直線ノナス角ハ二大圓ノ交角ニ影像サルモノト考フベキナリ。而テコノトキハ運動ハ球面ヲ球面ソレ自身ニ變更スルモノニシテ，且對稱變更ハ運動ト一致ス。

又 *Riemann* 氏平面ハ之ヲゆうくりつど空間ノ束 (*Bundle*)* ニ影像スルコトヲモ得。此場合ノ影像ノ關係ハ次ノ如シ。

Riemann 氏平面	ゆうくりつど空間ノ束
點	一點ヲ通過スル直線
直　線	一點ヲ通過スル平面
二點間ノ距離	一點ヲ通過スル二直線ノ角
二直線ノナス角	一點ヲ通過スル二平面ノナス角
平行線	一點ヲ通過スル平行平面
	(實ニ存在セズ)
運動 (*Motion*)	束内ノ運動

* 一点ヲ通過スル直線及平面ノ全体ヨリナル圖形ヲ束ト云フ。

29. 一直線上ニ於テ二點ヨリ等距離ニアル點ノ坐標。

ゆうくりつどノ平面ニ於テハ一直線上ニ於テ二點ヨリ等距離ニアル點ハ其二點ノ中點ニシテ唯一點ナリ。然レドモ非ゆうくりつどノ平面ニ於テハ二點ヨリ等距離ナル點ハ二ツアリ。次ニ之ヲ説明セン。

二點 A, B ノ坐標ヲ夫々 (x) 及 (y) トス。然ルトキハ直線 AB 上ノ任意ノ點ノ坐標ハ $\lambda x_i+\mu y_i$ ($i=0, 1, 2$, λ 及 μ ハ助變數) ナル形ニテ表サル。今 $P(\lambda x)+\mu(y)$ ナル點ガ點 A 及 B ヨリ等距離ニアル點トセヨ。然ルトキハ

$$\cos\frac{AP}{k}=\frac{(x, \lambda x+\mu y)}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(\lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y)}}$$

$$\cos\frac{BP}{k}=\frac{(y, \lambda x+\mu y)}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(\lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y)}}.$$

然ルニ

$$\cos\frac{AP}{k}=\cos\frac{BP}{k}$$

ナル故ニ

$$\frac{\lambda(xx)+\mu(xy)}{\sqrt{(xx)}}=\frac{\lambda(yx)+\mu(yy)}{\sqrt{(yy)}}.$$

即

$$\frac{\lambda^2}{(yy)}\left[(xx)(yy)-(xy)^2\right]=\frac{\mu^2}{(xx)}\left[(xx)(yy)-(xy)^2\right].$$

而テ一般ニ

$$(xx)(yy)-(xy)^2\neq 0$$

ナル故*

* 若シモ $(xx)(yy)-(xx)=0$ ナレバ直線 AB ハ絶對形ノ切線トナル。

$$\frac{\lambda^2}{(yy)}=\frac{\mu^2}{(xx)}$$

從テ

$$\lambda:\mu=\frac{1}{\sqrt{(xx)}}:\pm\frac{1}{\sqrt{(yy)}}$$

ナリ。依テ求ムル點 P ノ坐標ハ

$$\frac{x_0}{\sqrt{(xx)}}\pm\frac{y_0}{\sqrt{(yy)}}:\frac{x_1}{\sqrt{(xx)}}\pm\frac{y_1}{\sqrt{(yy)}}:\frac{x_2}{\sqrt{(xx)}}\pm\frac{y_2}{\sqrt{(yy)}}$$

ナリ。故ニ二點 A, B ヨリ等距離ナル點ハ二ツ存在ス。此關係ハゆうくりつど平面ニ於テ角ノ二等分線ガ二本アルコトト類似ノモノナリ。

30. 三角形ノ三中線。

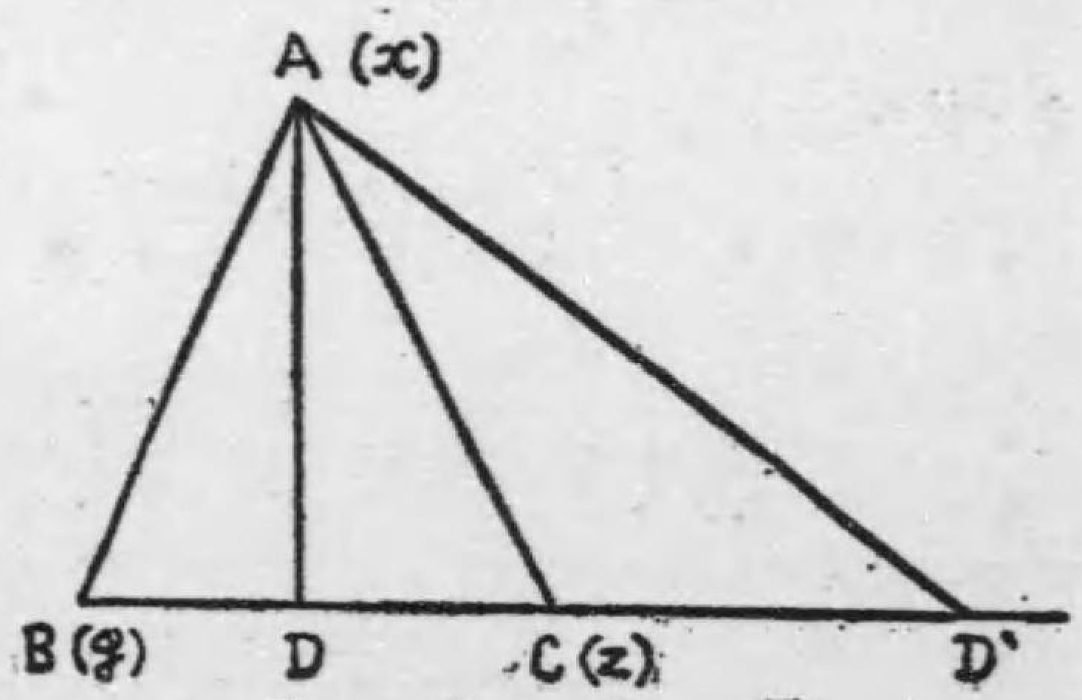
定理. 三角形ノ中線ハ六本アリテ，三本宛四點ニ於テ相交ル。

證明. 三角形 ABC ノ三頂點ノ坐標ヲ夫々 $(x), (y), (z)$ トシ邊 BC ノ中點ヲ D, D' トス。然ルトキハ點 D 及 D' ノ坐標ハ

$$D:\left(\frac{y}{\sqrt{(yy)}}+\frac{z}{\sqrt{(zz)}}\right)$$

$$D':\left(\frac{y}{\sqrt{(yy)}}-\frac{z}{\sqrt{(zz)}}\right)$$

ナリ。依テ直線 AD 及 AD' ノ方程式ハ



第 十 九 圖

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ \frac{y_0}{\sqrt{(yy)}}\pm\frac{z_0}{\sqrt{(zz)}} & \frac{y_1}{\sqrt{(yy)}}\pm\frac{z_1}{\sqrt{(zz)}} & \frac{y_2}{\sqrt{(yy)}}\pm\frac{z_2}{\sqrt{(zz)}} \end{vmatrix}=0$$

或ハ

$$\frac{1}{\sqrt{(yy)}}\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{(zz)}}\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}=0$$

ナリ。今簡單ノ為ニ

$$|Xxy|\equiv\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$|Xxz|\equiv\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

トヲクトキハ直線 AD 及 AD' ノ方程式ハ

$$\sqrt{(zz)}\,|Xxy|\pm\sqrt{(yy)}\,|Xxz|=0$$

ナル形ニテ書キ表サル。同樣ニシテ頂點 B 及 C ヲ通過スル中線ノ方程式ハ

$$\sqrt{(xx)}\,|Xyz|\pm\sqrt{(zz)}\,|Xyx|=0, \qquad (1)$$

$$\sqrt{(yy)}\,|Xzx|\pm\sqrt{(xx)}\,|Xzy|=0 \qquad (2)$$

ニテ表サル。而シテ頂點 A ヲ通過スル中線ノ方程式ト頂點 B ヲ通過スル一中線ノ方程式トヲトリ邊々相加(或ハ減)フレバ

$$\sqrt{(zz)}\,|Xxy|-\sqrt{(yy)}\,|Xxz|=0,$$

$$\sqrt{(xx)}\,|Xyz|+\sqrt{(zz)}\,|Xyz|=0,$$

$$\sqrt{(xx)}\,|Xyz|-\sqrt{(yy)}\,|Xxz|=0$$

或ハ

$$\sqrt{(xx)}\,|Xzy| - \sqrt{(yy)}\,|Xzx| = 0 \qquad (3)$$

トナル。是頂點 C ヲ通過スル一中線ノ方程式ナリ。依テ (1), (2), (3) ナル方程式ニテ表サレタル三中線ハ一點ニ於テ相交ル。* 同様ニシテ六本ノ中線ハ三本ヅヽ四點ニ會スルヿヲ證明スルヿヲ得。

ゆうくりつごノ平面ニ於テハ三角形ノ中線ハ三本ニシテ唯一點ニテ相交ル。然レドモ其角ノ二等分線ハ六本アリテ三本ヅヽ四點ニテ相交ル。コノ後者ノ關係ト非ゆうくりつご平面ニ於ケル三角形ノ中線ノ關係トハ全ク一致ス。

31. 三點ヨリ等巨離ニアル點。

定理。 同一直線上ニアラザル三點ヨリ等距離ナル四點アリ。

證明。 同一直線上ニアラザル三點ヲ夫々 $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$ トス。點 B 及 C ヨリ等距離ニアル點ヲ軌跡上ノ一點ヲ $P(X)$ トセバ

$$\cos\frac{BP}{k} = \frac{(yX)}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(XX)}},$$

$$\cos\frac{CP}{k} = \frac{(zX)}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(XX)}}$$

---

*
$$U \equiv (ax) = 0,$$
$$V \equiv (bx) = 0,$$
$$W \equiv (cx) = 0$$

ニテ表サレタル三本ノ直線アリ。方程式

$$\lambda U + \mu V = 0 \qquad (\lambda, \mu \text{ ハ助變數})$$

ヲ作レバ之ハ (x) ニ對シテ一次式ナル故依然直線ノ方程式ニシテ且 $U=0$, $V=0$ ニ依テ滿足セラルル故是ハ $U=0$, $V=0$ ナル二直線ノ交点ヲ通過スル直線ノ方程式ナリ。從テ λ, μ ヲ適當ニトリ $\lambda U + \mu U = \nu W$ (ν ハ助變數) トナリタルトキハ $U=0$, $V=0$, $W=0$ ナル三直線ハ一点ニ會ス事明カナリ。而テ本文ノ場合ハ $\lambda = \mu = \nu$ 1 ノトキナリ。

ナル故

$$\frac{(yX)^2}{(yy)} = \frac{(zX)^2}{(zz)},$$

或ハ

$$\left\{\frac{(yX)}{\sqrt{(yy)}} + \frac{(zX)}{\sqrt{(zz)}}\right\}\left\{\frac{(yX)}{\sqrt{(yy)}} - \frac{(zX)}{\sqrt{(zz)}}\right\} = 0.$$

故ニ點 B 及 C ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ

$$\frac{(yX)}{\sqrt{(yy)}} \pm \frac{(zX)}{\sqrt{(zz)}} = 0$$

ナル方程式ニテ表サル。此方程式ハ (X) ニ關シテ一次式ナル故直線ヲ表ス。同様ニシテ點 C, A 及點 A, B ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ直線ニシテ其方程式ハ

$$\frac{(zX)}{\sqrt{(zz)}} \pm \frac{(xX)}{\sqrt{(xx)}} = 0.$$

$$\frac{(xX)}{\sqrt{(xx)}} \pm \frac{(yX)}{\sqrt{(yy)}} = 0$$

ナリ。從テ此等六本ノ直線ガ三本ヅヽ四點ニテ相交ルヿハ前ト同様ニシテ證明スルヿヲ得。且其等ノ四點ノ坐標ハ

$$\left(\frac{x}{\sqrt{(xx)}} \pm \frac{y}{\sqrt{(yy)}} \pm \frac{z}{\sqrt{(zz)}}\right)$$

ナルヿヲモ容易ニ證明スルコトヲ得。

ゆうくりつごノ平面ニ於テハ三點ヨリ等距離ナル點ハ唯一ツ存在スル故三點ヲ通過スル圓ハ一ツアリ。然ルニ非ゆうくりつごノ平面ニ於テハ三點ヨリ等距離ナル點ハ四ツ存在スル故ニ三點ヲ通過スル圓ハ四ツアリ。

32. 三角形ノ三垂線。

定理。 三角形ノ垂心ハ唯一ツ存在ス。

證明。 三角形 ABC ノ邊 BC ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}=0$$

ナル故邊 BC ノ極點ノ坐標 (u) ハ

$$u_0 : u_1 : u_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_2 & y_0 \\ z_2 & z_0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_0 & y_1 \\ z_0 & z_1 \end{vmatrix}$$

ナリ。從テ頂點 A ヨリ邊 BC ニ下セル垂線ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 \end{vmatrix}=0$$

或ハ

$$\Sigma \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=0$$

即

$$\begin{vmatrix} (yX) & (yx) \\ (zX) & (xz) \end{vmatrix}=0$$

又ハ

$$(xz)(yX)-(xy)(zX)=0 \qquad (1)$$

ニシテ唯一本ナリ。同樣ニシテ頂點 B 及 C ヨリ對邊ヘ下セル垂線ノ方程式ハ

$$(yx)(zX)-(yz)(xX)=0, \qquad (2)$$

$$(zy)(xX)-(zx)(yX)=0. \qquad (3)$$

依テ (1)+(2) ヲ作レバ

$$(xz)(yX)-(yz)(xX)=0$$

トナリ (3) ト一致ス。故ニ三垂線ハ一點ニ會ス。

第三章　三角法

33. 直角三角形。

$$x_1=0$$

ナル方程式ハ

$$0\cdot x_0+1\cdot x_1+0\cdot x_2=0$$

ナル方程式ナル故直線ヲ表ス。同様ニ

$$x_2=0$$

ナル方程式ハ

$$0\cdot x_0+0\cdot x_1+1\cdot x_2=0$$

ナル故亦直線ヲ表ス。且コノ二直線ノ交角ヲ θ トセバ

$$\cos\theta=\frac{0\cdot 0+1\times 0+0\times 1}{1}=0$$

ナル故

$$\theta=\frac{\pi}{2}.$$

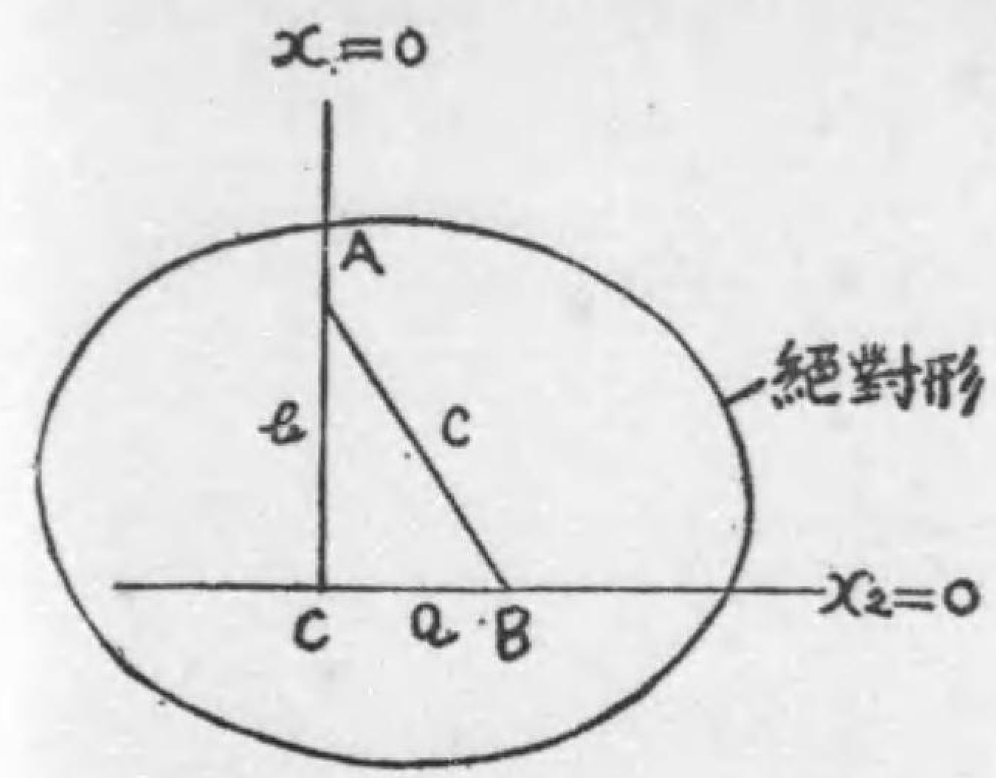
即 $x_1=0$, $x_2=0$ ナル二直線ハ直交ス。

角 C ガ直角ナルナル如キ三角形 ABC ヲトル、然ルトキハ合同變更ヲ行ヒ邊 AC 上ニ $x_1=0$ ナル直線ガ又邊 CB 上ニ $x_2=0$ ナル直線ガ來ル如クナスコトヲ得。從テ邊 AC 及 CB ノ方程式トシテ夫々

$$AC: x_1=0,$$
$$CB: x_2=0$$

ト取ルモ一般性ヲ失ハズ且此場合絶對形ノ方程式ハ依然 $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ ナリ。依テ頂點 A, B, C ノ坐標ハ夫々

$$A:(y_0 ; 0 : y_2)$$
$$B:(z_0 : z_1 : 0)$$
$$C:(1:0:0)$$



第二十圖

ニヲ表スコトヲ得。從テ邊 AB ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & 0 & y_2 \\ z_0 & z_1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

或ハ

$$\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ z_1 & 0 \end{vmatrix} x_0+\begin{vmatrix} y_2 & y_0 \\ 0 & z_0 \end{vmatrix} x_1+\begin{vmatrix} y_0 & 0 \\ z_0 & z_1 \end{vmatrix} x_2=0$$

即

$$-y_2z_1x_0+y_2z_0x_1+y_0z_1x_2=0$$

トナル。而テ

$$\cos A=\frac{0\times(-y_2z_1)+1\times(y_2z_0)+0\times(y_0z_1)}{\sqrt{0^2+1^2+0}\sqrt{y_2^2(z_0^2+z_1^2)+y_0^2z_1^2}},$$

$$=\frac{y_2z_0}{\sqrt{D}}\qquad (\text{但 } D=y_2^2(z_0^2+z_1^2)+y_0^2z_1^2)$$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$$

$$=\frac{z_1\sqrt{y_0^2+y_2^2}}{\sqrt{D}}.$$

同樣ニシテ

$$\cos B=\frac{y_0 z_1}{\sqrt{D}},$$

$$\sin B=\frac{y_2\sqrt{z_0^2+z_1^2}}{\sqrt{D}}.$$

次ニ

$$BC=a,\quad CA=b,\quad AB=c$$

トヲクトキハ

$$\cos\frac{a}{k}=\frac{z_0}{\sqrt{z_0^2+z_1^2}},$$

$$\sin\frac{a}{k}=\frac{z_1}{\sqrt{z_0^2+z_1^2}},$$

$$\cos\frac{b}{k}=\frac{y_0}{\sqrt{y_0^2+y_2^2}},$$

$$\sin\frac{b}{k}=\frac{y_2}{\sqrt{y_0^2+y_2^2}},$$

$$\cos\frac{c}{k}=\frac{y_0 z_0}{\sqrt{y_0^2+y_2^2}\sqrt{z_0^2+z_1^2}},$$

$$\sin\frac{c}{k}=\frac{\sqrt{D}}{\sqrt{y_0^2+y_2^2}\sqrt{z_0^2+z_1^2}}.$$

上記ノ關係ヨリ次ノ諸公式ヲ得。

〔*I*〕 $$\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}=\cos\frac{c}{k}$$

是ヲ *Lambert* 氏ノ公式ト云フ。此公式ハ球面三角形ニモ存在スルモノニシテ.半徑 k ナル球面上ノ直角三角形ノ邊ノ間ノ關係ヲ表スモノナリ。依テ *Lobachevski* 氏ノ平面ハ半徑ノ虛ナル球面トモ之ヲ考ヘルヿヲ得。

公式 [*I*] ノ兩邊ノ各項ヲ級數ニ展開スルトキハ

$$\left(1-\frac{a^2}{2k^2}+\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{b^2}{2k^2}+\cdots\cdots\right)=1-\frac{c^2}{2k^2}+\cdots\cdots$$

即

$$1-\frac{a^2+b^2}{2k^2}+\frac{1}{k^4}\left(\cdots\cdots\right)=1-\frac{c^2}{2k^2}+\frac{1}{k^4}\left(\cdots\cdots\right)$$

或ハ

$$-(a^2+b^2)+\frac{1}{k^2}\left(\cdots\cdots\right)=-c^2+\frac{1}{k^2}\left(\cdots\cdots\right).$$

今 $k\to\infty$ 或 $\frac{1}{k^2}\to 0$ ナル場合即ゆうくりつご平面ノ塲合ヲ考フレバ明カニ

$$a^2+b^2=c^2$$

トナル。是有名ナル *Pythagoras* 氏定理ナリ。即 [*I*] ナル *Lambert* 氏公式ハゆうくりご平面上ノ *Pythagoras* 氏定理ニ相當ス。

〔*II*〕 $$\frac{\sin\frac{b}{k}}{\sin\frac{c}{k}}=\sin B.$$

ゆうくりつごノ平面上ノ塲合ヲ考ヘンニ

$$\frac{\sin\frac{b}{k}\Big/\frac{1}{k}}{\sin\frac{c}{k}\Big/\frac{1}{k}}=\sin B$$

ナル故 $\frac{1}{k}\to 0$ ナル塲合ニハ

$$\frac{b}{c}=\sin B$$

トナル。

〔III〕 $$\frac{\tan\frac{b}{k}}{\tan\frac{c}{k}}=\cos A.$$

コノ公式モゆうくりぢノ平面上ニ於テハ前ノトキト同樣ニシテ

$$\frac{b}{c}=\cos A$$

トナルコトヲ知ル。

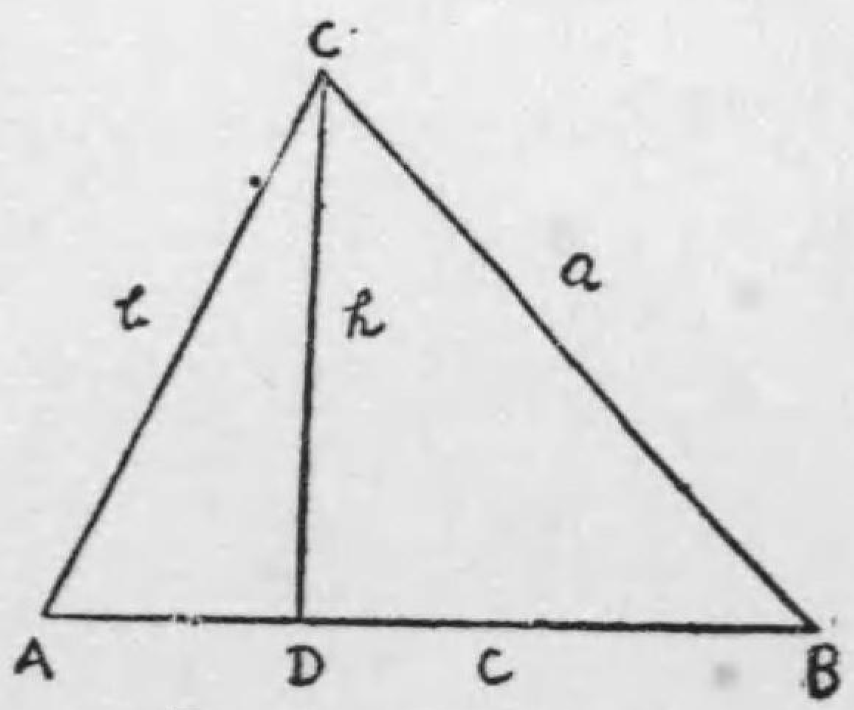
〔IV〕 $$\frac{\cos B}{\sin A}=\cos\frac{b}{k}.$$

〔V〕 $$\cos\frac{c}{k}=\cot A\cot B$$

34. 一般ノ三角形。

三角形 ABC ノ何レノ頂角モ直角ナラズトシ邊 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ トス。

〔VI〕 $$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{k}}=\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{k}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{k}}.$$



第二十一圖

證明。頂點 C ヨリ邊 AB ニ直線 CD ヲ下シ, $CD=h$ トス。然ルトキハ ΔDBC 及 ΔCAD ハ共ニ直角三角形ナリ。故ニ

$$\frac{\sin\frac{h}{k}}{\sin\frac{a}{k}}=\sin B \quad \text{(公式 } II\text{)}$$

従テ

$$\sin\frac{h}{k}=\sin\frac{a}{k}\sin B.$$

同樣ニ

$$\sin\frac{h}{k}=\sin\frac{b}{k}\sin A.$$

故ニ

$$\sin\frac{a}{k}\sin B=\sin\frac{b}{k}\sin A.$$

即

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{k}}=\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{k}}$$

全ク同樣ニシテ

$$\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{k}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{k}}$$

ナル關係ヲ證明スルコトヲ得。

$\frac{1}{k}\to 0$ ナルゆうくりつど平面ノ場合ニ於テハ

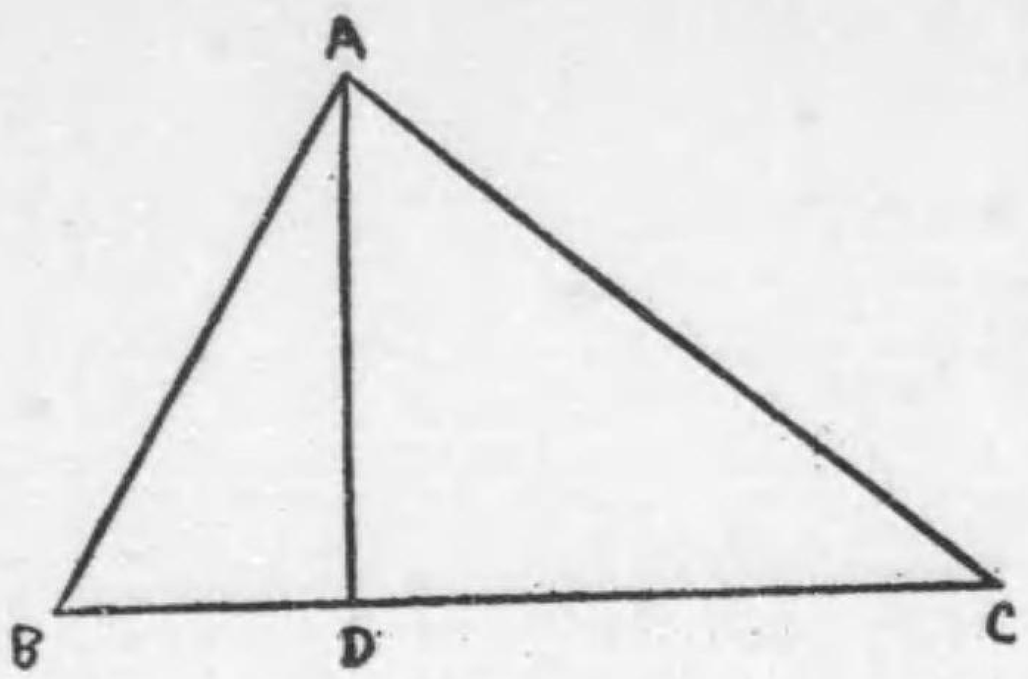
$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{k}}=\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{k}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{k}}$$

ノ $k\to\infty$ ノ極限ナル故

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

トナル。是正弦比例ノ公式ナリ。

〔VII〕 $$\cos\frac{b}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}+\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}\cos B.$$



第二十二圖

證明。

(i). $0<B<\frac{\pi}{2}$ ナル場合。角頂 A ヨリ邊 BC ニ垂線 AD ヲ下ス。然ルトキハ

$$\cos\frac{b}{k}=\cos\frac{\overline{DC}}{k}\cos\frac{\overline{AD}}{k} \quad (\text{公式 } I \text{ ニヨル})$$

$$\cos\frac{c}{k}=\cos\frac{\overline{BD}}{k}\cos\frac{\overline{AD}}{k} \quad (\quad 〃 \quad)$$

從テ

$$\cos\frac{b}{k}=\cos\frac{\overline{DC}}{k}\frac{\cos\frac{c}{k}}{\cos\frac{\overline{BD}}{k}}.$$

或ハ

$$\cos\frac{b}{k}=\frac{\cos\frac{c}{k}}{\cos\frac{\overline{BD}}{k}}\cos\left(\frac{a-\overline{BD}}{k}\right)$$

$$=\frac{\cos\frac{c}{k}}{\cos\frac{\overline{BD}}{k}}\left[\cos\frac{a}{k}\cos\frac{\overline{BD}}{k}+\sin\frac{a}{k}\sin\frac{\overline{BD}}{k}\right]$$

$$=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}+\sin\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}\frac{\sin\frac{\overline{BD}}{k}}{\cos\frac{\overline{BD}}{k}}$$

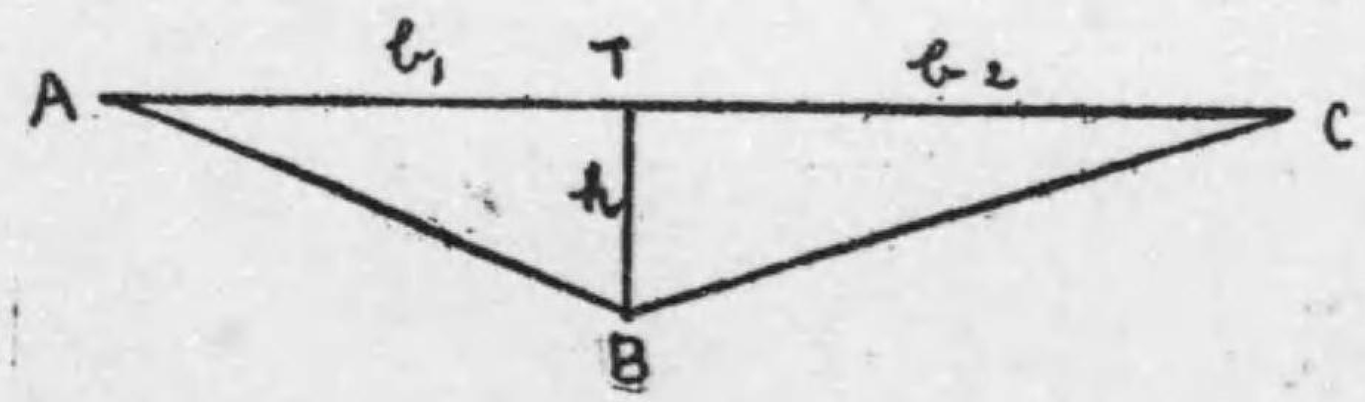
然ルニ ΔABD ニ公式 III ヲ適用スレバ

$$\tan\frac{\overline{BD}}{k}=\cos B\tan\frac{c}{k}$$

ナル故

$$\cos\frac{b}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}+\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}\cos B.$$

(ii). $B>\frac{\pi}{2}$ ナル場合。角頂 B ヨリ邊 AC ニ垂線 BT ヲ引キ角 B ヲ直角ヨリ小ナル二角 $A\hat{B}T$ 及 $T\hat{B}C$ ニ分ツベシ。但角 A 及 C ハ共ニ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ小ナリトス。而テ



第二十三圖

$$AT=b_1,\quad TC=b_2,\quad BT=h$$

$$\angle ABT=B_1,\quad \angle TBC=B_2$$

トヲケ。然ルトキハ

$$\cos B=\cos(B_1+B_2)$$

$$=\cos B_1\cos B_2-\sin B_1\sin B_2$$

然ルニ

$$\cos B_1=\frac{\tan\frac{h}{k}}{\tan\frac{c}{k}},\quad \cos B_2=\frac{\tan\frac{h}{k}}{\tan\frac{a}{k}}\quad (\text{公式 } III \text{ ニヨル})$$

$$\sin B_1=\frac{\sin\frac{b_1}{k}}{\sin\frac{c}{k}},\quad \sin B_2=\frac{\sin\frac{b_2}{k}}{\sin\frac{a}{k}}\quad (\text{公式 } II \text{ ニヨル})$$

故ニ

$$\cos B=\frac{\tan^2\frac{h}{k}\cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}-\sin\frac{b_1}{k}\sin\frac{b_2}{k}}{\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}}$$

又公式 I ニヨリ

$$\cos\frac{c}{k}=\cos\frac{b_1}{k}\cos\frac{h}{k},\qquad \cos\frac{a}{k}=\cos\frac{b_2}{k}\cos\frac{h}{k}$$

ナル故

$$\cos B=\frac{\sin^2\frac{h}{k}\cos\frac{b_1}{k}\cos\frac{b_2}{k}-\sin\frac{b_1}{k}\sin\frac{b_2}{k}}{\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}}$$

$$=\frac{\cos\frac{b}{k}-\cos^2\frac{h}{k}\cos\frac{b_1}{k}\cos\frac{b_2}{k}}{\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}}$$

$$=\frac{\cos\frac{b}{k}-\cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}}{\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}}$$

故ニ

$$\cos\frac{b}{k}=\cos\frac{a}{k}\cos\frac{c}{k}+\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}\cos B$$

次ニゆうくりどノ平面ノ場合ヲ考ヘンニ，本公式ノ兩邊ヲ級數ニ展開シ

$$1-\frac{b^2}{2k^2}+\frac{b^4}{4!k^4}-\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{a^2}{2k^2}+\frac{a^4}{4!k^4}-\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{c^2}{2k^2}+\frac{c^2}{4!k^4}\cdots\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{a}{k}-\frac{a^3}{3!k^3}+\cdots\cdots\right)\left(\frac{c}{k}-\frac{c^3}{3!k^3}+\cdots\cdots\right)\cos B$$

或ハ

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B+\frac{1}{k^2}(\cdots\cdots)$$

依テ $\frac{1}{k}\to 0$ ノ極限ニ於テハ

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

トナル。是餘弦式ナリ。

35. 三角形ノ三內角ノ和。

(I). 直角三角形ノ場合。直角三角形 ABC ニ於テ角 C ガ直角ナルトキニハ其各頂點 A, B, C ノ坐標ヲ

$$A:(y_0:0:y_2)$$

$$B:(z_0:z_1:0)$$

$$C:(1:0:0)$$

ト取ルモ既ニ述タルガ如ク其一般性ヲ失ハズ。然ルトキハ

(I) *Riemann* 氏平面ニ於テハ

$$\cos A = \frac{y_2 z_0}{\sqrt{y_2^2(z_0^2+z_1^2)+y_0^2 z_1^2}},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A=\frac{\sqrt{y_0^2+y_2^2 z_1^2}}{\sqrt{y_2^2(z_0^2+z_1^2)+y_0^2 z_1^2}},$$

$$\cos B = \frac{y_0 z_1}{\sqrt{y_2^2(z_0^2+z_1^2)+y_0^2 z_1^2}}$$

ニシテ二點ノ坐標 (y) 及 (z) ハ皆實ト考テ可ナル故

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right) > \cos B$$

從テ

$$\frac{\pi}{2}-A < B$$

即

$$A+B > \frac{\pi}{2}$$

故ニ

$$A+B+C = A+B+\frac{\pi}{2} > \pi.$$

(II) *Lobachevski* 氏平面ニ於ハ

$$y_0 : y_1 : y_2 = \mathfrak{y}_0 : \mathfrak{y}_1 : \mathfrak{y}_2$$

$$\mathfrak{y}_0 = k\cos\frac{r}{k},$$

$$\mathfrak{y}_1 = k\sin\frac{r}{k}\cos\phi,$$

$$\mathfrak{y}_2 = k\sin\frac{r}{k}\sin\phi$$

ト取レバ k ガ虛數ニシテ且

$$\cos\frac{r}{k} = \frac{e^{i\frac{r}{k}}+e^{-i\frac{r}{k}}}{2},$$

$$\sin\frac{r}{k} = \frac{e^{i\frac{r}{k}}-e^{-i\frac{r}{k}}}{2i}.$$

ナル故 $\cos\frac{r}{k}$ ハ常ニ正，$\sin\frac{r}{k}$ ハ常ニ虛從テ $\mathfrak{y}_0^2$ ハ負ニシテ $\mathfrak{y}_2^2$ ハ正ナリ。同樣ニシテ

$$z_0 : z_1 : z_2 = \mathfrak{z}_0 : \mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2$$

ト取レバ $\mathfrak{z}_0^2$ ハ常ニ負ニシテ，$\mathfrak{z}_1^2$ ハ正ナリ。依テ

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right) = \frac{\sqrt{(\mathfrak{y}_2^2+\mathfrak{y}_0^2)\mathfrak{z}_1^2}}{\sqrt{\mathfrak{y}_2^2(\mathfrak{z}_0^2+\mathfrak{z}_1^2)+\mathfrak{y}_0^2\mathfrak{z}_1^2}},$$

$$\cos B = \frac{\sqrt{\mathfrak{y}_0^2\mathfrak{z}_1^2}}{\sqrt{\mathfrak{y}_2^2(\mathfrak{z}_0^2+\mathfrak{z}_1^2)+\mathfrak{y}_0^2\mathfrak{z}_1^2}}$$

ナル故

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right) < \cos B$$

即

$$\frac{\pi}{2}-A > B$$

$$A+B < \frac{\pi}{2}$$

故ニ

$$A+B+C < \pi$$

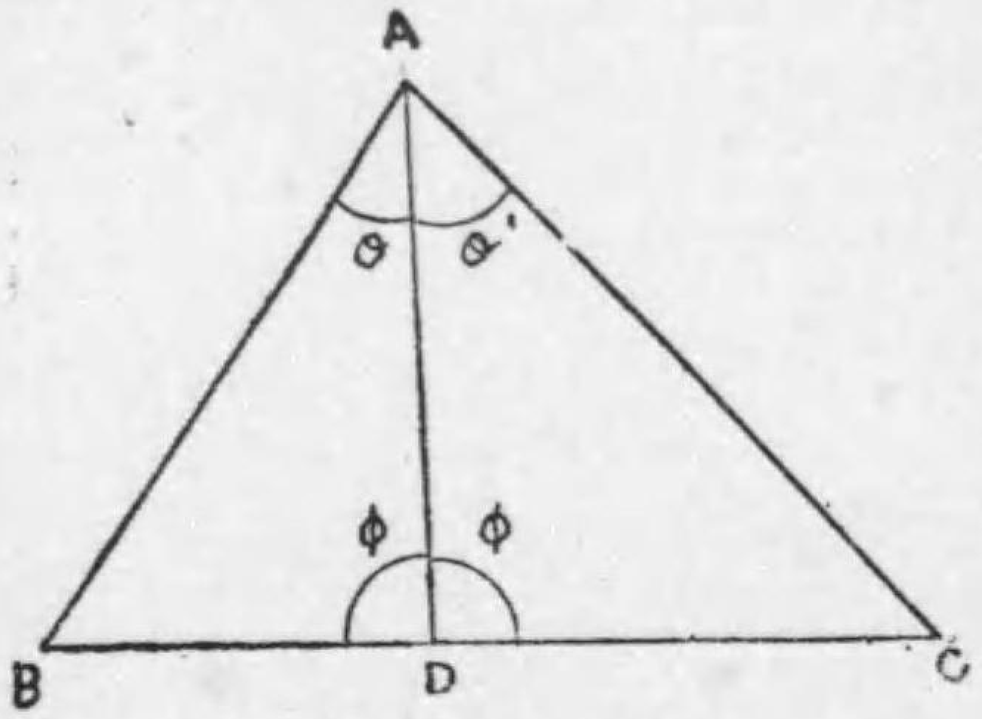
(III) ゆうくりつどノ平面ニ於テハ $k\to\infty$ ノ場合ナル故

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\cos B$$

トナリ

$$A+B+C=\pi$$

トナル。



第二十四圖

II. 一般ノ三角形ノ場合。何レノ角モ直角ナラザル三角形 ABC ハ是ヲ二ツノ直角三角形ニ分ツコトヲ得。例ヘバ頂點 A ヨリ邊 BC ニ垂線ヲ下シ二ツノ直角三角形 ABD 及 DCA ヲ作リ

$$\angle BAD=\theta,\ \angle DAC=\theta',\ \angle ADB=\phi,\ \angle ADC=\phi$$

ト置ケ，然ルトキハ

$$\theta+\theta'=A,$$

$$\phi=\frac{\pi}{2}$$

ニシテ且 *Riemann* 氏平面ニ於テハ

$$\theta+B+\phi>\pi$$

$$\theta'+C+\phi>\pi$$

ナル故

$$(\theta+\theta')+B+C+\phi+\phi>2\pi$$

即

$$A+B+C+\pi>2\pi$$

或ハ

$$A+B+C>\pi$$

ナリ。同樣ニシテ *Lobachevski* 氏ノ平面ニ於テハ

$$A+B+C<\pi,$$

ゆうくりつど平面ニ於テハ

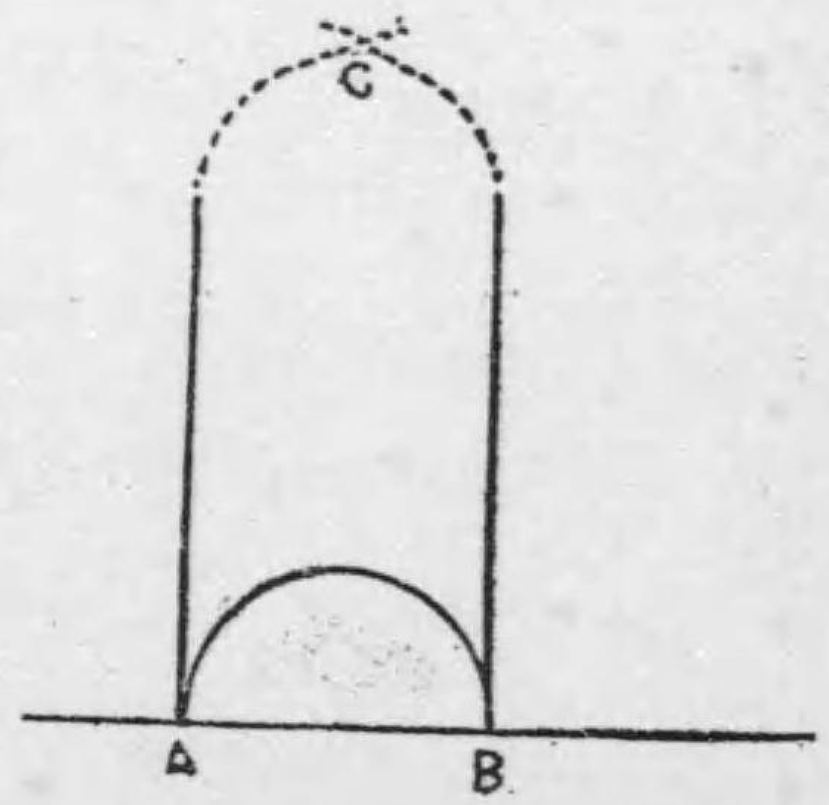
$$A+B+C=\pi$$

ナルコトヲ證明スルコトヲ得。

Lobachevski 氏平面上ノ三角形ニシテ其內角ノ和ガ零ナル如キモノアリ。斯ノ如キ三角形ヲゆうくりつど平面ノ x-軸ノ上半面上ニ影像スレバ直線ハ圓ニ（圓ノ特別ノ場合トシテ直線ニ）影像セラルル故圖ノ如キ三角形 ABC ヲ得。而テ

$$A=0,\ B=0,\ C=0$$

ナリ。故ニコノ三角形ノ內角ノ和ハ明ニ零ナリ。



第二十五圖

第四章　圓

36. 圓ノ定義及性質。 非ゆうくれつど平面ニ於テ最モ簡單ナル曲線ハ圓ナリ。

圓トハ平面上ニ於テ一定點ヨリ一定距離ニアル點ノ軌跡ナリ。而テ其一定點ヲ圓ノ**中心**，一定距離ヲ圓ノ**半徑**，中心ノ絶對極線ヲ圓ノ**軸**ト稱シ，且中心ヲ通過スル直線ヲ圓ノ**直徑**ト云フ。今半徑ヲ r，中心ノ坐標ヲ (a) トセバ圓上ノ任意ノ點ノ坐標 (x) ハ常ニ

$$\frac{(ax)}{\sqrt{(aa)}\sqrt{(xx)}}=\cos\frac{r}{k}$$

或ハ

$$(ax)^2-(aa)(xx)\cos^2\frac{r}{k}=0.$$

ナル方程式ヲ滿足ス。依テ是ハ圓ノ方程式ナリ。

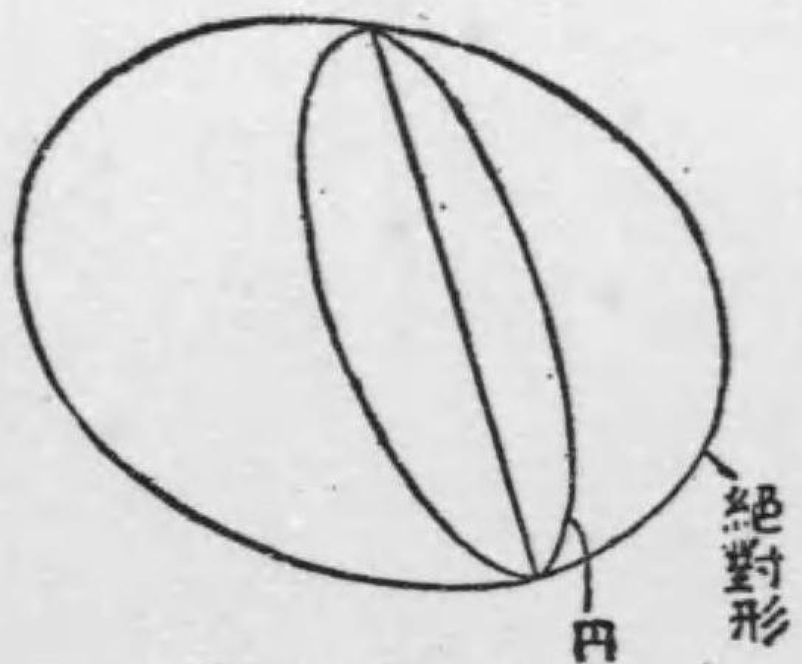
$\cos^2\frac{r}{k}\neq 0$ ナルトキハ，圓ト絶對形 $(xx)=0$ トノ交點ハ

$$(ax)^2=0$$

ナル方程式ヲ滿足ス。即圓ト絶對形トノ交點ハ

$$(ax)^2=0$$

ナル相重ナレル直線上ニアリ。故ニ圓ト絶對形トハ二重ノ切觸ヲ有ス。



第二十六圖

中心 (a) ノ絶對極線ナル軸ノ方程式ハ明ニ

$$(ax)=0$$

ナリ。從テ圓ノ軸ハ圓ト絶對形トノ切觸點ヲ結ブ弦ナリ。

$r=\frac{\pi k}{2}$ ナルトキハ圓ノ方程式ハ

$$(ax)^2=0$$

トナリ，相重ナル二直線ヲ表ス。又 $r=0$ 即半徑ノ零ナル圓ノ方程式ハ

$$(aa)(xx)-(ax)^2=0$$

トナリ，依然二直線ヲ表ス。(ゆうくりつどノ平面ニ於テハ半徑零ナル圓ハ點ナリ。)

又ゆうくりつど平面上ニ於テ一定直線ト一定角ヲナス如キ直線ノ包絡線ハ無限遠點ナレドモ非ゆくりつど平面ニ於テハ斯ノ如キ直線ノ包絡線ハ圓ナリ。如何トナレバ (a) ヲ與ヘラレタル定直線ノ線坐標，σ ヲ一定角，定直線ト σ ナル角ヲナス任意ノ直線ノ坐標ヲ (u) トセバ包絡線ノ方程式ハ

$$\frac{(au)}{\sqrt{(aa)}\sqrt{(uu)}}=\cos\sigma$$

或ハ

$$(au)^2-(aa)(uu)\cos^2\sigma=0$$

トナリ，圓ノ方程式トナル故ナリ。

圓ニ關スル諸定理。

定理 1. 圓ノ切線ト軸トノ交角ハ一定ナリ。

證明. 圓上ノ一點 $(\bar{x})$ ノ圓ニ關スル極線ノ方程式ハ

$$(a\bar{x})(ax)-(aa)(\bar{x}x)\cos^2\frac{r}{k}=0$$

ニシテ,明ニ點 $(\bar{x})$ ヲ通過ス,且圓ト二重點 $(\bar{x})$ ニテ交ル直線ナリ。依テ此直線ガ點 $(\bar{x})$ ニ於ケル圓ヘノ切線ナリ。此直線ト軸トノ交角ヲ θ トセバ

$$\cos\theta=\frac{(a\bar{x})(aa)-(aa)(a\bar{x})\cos^2\frac{r}{k}}{\sqrt{(aa)}\ \sqrt{(uu)}}$$

但

$$u_i=(a\bar{x})a_i-(aa)\bar{x}_i\cos^2\frac{r}{k},\quad (i=0,1,2).$$

從テ

$$(uu)=(a\bar{x})^2(aa)-2(a\bar{x})^2(aa)\cos^2\frac{r}{k}$$

$$+(aa)^2(\bar{x}\bar{x})\cos^4\frac{r}{k}$$

$$=(a\bar{x})^2(aa)\sin^2\frac{r}{k}-(aa)\cos^2\frac{r}{k}\left((a\bar{x})^2-(aa)(\bar{x}\bar{x})\cos^2\frac{r}{k}\right)$$

$$=(a\bar{x})^2(aa)\sin^2\frac{r}{k}$$

故ニ

$$\cos\theta=\frac{(aa)(a\bar{x})\sin^2\frac{r}{k}}{(aa)(a\bar{x})\sin\frac{r}{k}}=\sin\frac{r}{k}$$

即 θ ハ一定ナリ。

定理 2. 圓ノ切線ハ其切點ヲ通過スル直徑ニ垂線ナリ。

證明. 點 $(\bar{x})$ ニ於ケル切線ノ線坐標ヲ (u), 同點ヲ通過スル直徑ノ線坐標ヲ (v) トスレバ

$$u_i=(a\bar{x})a_i-(aa)\bar{x}_i\cos\frac{r}{k}$$

$$v_0:v_1:v_2=\begin{vmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\bar{x}_2 & \bar{x}_0\\ a_2 & a_0\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\bar{x}_0 & \bar{x}_1\\ a_0 & a_1\end{vmatrix}$$

ナル故

$$(uv)=(a\bar{x})\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2\\ \bar{x}_0 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2\\ a_0 & a_1 & a_2\end{vmatrix}-(aa)\cos\frac{r}{k}\begin{vmatrix}\bar{x}_0 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2\\ \bar{x}_0 & \bar{x}_1 & \bar{x}_2\\ a_0 & a_1 & a_2\end{vmatrix}$$

$$=0$$

即二直線ハ直交ス。

二圓ハ一般ニ四點ニテ相交ル。ゆうくりつどノ平面ニ於テモ虛圓點ヲ虛ノ線束ヨリナルモノト考フレバ圓ハ是ト二重切觸ヲ有スル故スベテノ圓ハ此二虛圓點ヲ通過スベキナリ。從テ一般ニ二圓ハ四點ニ相交ルト考ヘルコトヲ得。

二圓ガ四點ニテ相交ルトキ兩圓ニ共通ナル二ツノ割線ガ存在ス。此二共通割線ヲ**根軸** (*Radical axes*) ト云フ。

定理 3. 根軸ト圓ノ軸トハ一點ニ於テ相交ル。

證明. 二圓ノ方程式ヲ夫々

$$A\equiv(ax)^2-(aa)(xx)\cos^2\frac{r}{k}=0,\quad (\text{中心ノ坐標 }(a))$$

$$B\equiv(bx)^2-(bb)(xx)\cos^2\frac{r'}{k}=0 \quad (\text{中心ノ坐標}(b))$$

トス。然ルトキ $(bb)\cos^2\frac{r'}{k}A-(aa)\cos^2\frac{r}{k}B$ ヲ作レバ

$$(bb)(ax)^2\cos^2\frac{r'}{k}-(aa)(ax)^2\cos^2\frac{r}{k}=0$$

トナル。是ハ二圓ノ交點ヲ通ル曲線ノ方程式ナリ。然ルニ上ノ方程式ヨリ

$$\sqrt{(bb)}(ax)\cos\frac{r'}{k}-\sqrt{(aa)}(bx)\cos\frac{r}{k}=0,$$

$$\sqrt{(bb)}(ax)\cos\frac{r'}{k}+\sqrt{(aa)}(bx)\cos\frac{r}{k}=0$$

ナル二ツノ一次方程式ヲ得。依テコノ一次方程式ニテ表サレタル直線ハ二圓ノ交點ヲ通過スル故求ムル根軸ノ方程式ナリ。且根軸ノ方程式ハ共ニ

$$(ax)=0,\quad (bx)=0$$

ナル圓ノ軸ノ方程式ニヨリテ滿足サル、故ニ軸ノ交點ヲ通過スルコト明カナリ。即根軸及二圓ノ軸ハ一點ヲ共有ス。

37. 二圓ノ交角。

同心圓ニアラサル圓

$$(ax)^2-(aa)(xx)\cos^2\frac{r}{k}=0,$$

$$(bx)^2-(bb)(xx)\cos^2\frac{r'}{k}=0$$

ノ交角 θ ヲ求ン。

二圓ノ交リノ上ノ一點ヲ (y) トス。然ルトキハ點 (y) ヲ通過スル二圓ノ直徑ノ方程式ハ夫々

$$|x\ y\ a|=0,$$

$$|x\ y\ b|=0$$

トナル。而テ是等二直徑ノ交角ヲ以テ二圓ノ交角ト定義スル故

$$\cos\theta=\frac{\sum\begin{vmatrix}y_i & y_j\\ a_i & a_j\end{vmatrix}\begin{vmatrix}y_i & y_j\\ b_i & b_j\end{vmatrix}}{\sqrt{\sum\begin{vmatrix}y_i & y_j\\ a_i & a_j\end{vmatrix}^2}\sqrt{\sum\begin{vmatrix}y_i & y_j\\ b_j & b_j\end{vmatrix}^2}} \quad (i,j=0,1,2\ i\neq j)$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}(yy) & (ay)\\ (by) & (ab)\end{vmatrix}}{\sqrt{(yy)(aa)-(ay)^2}\sqrt{(yy)(bb)-(by)^2}}$$

故ニ

$$\cos\theta=\frac{(ab)-\cos\frac{r}{k}\cos\frac{r'}{k}\sqrt{(aa)}\sqrt{(bb)}}{\sin\frac{r}{k}\sin\frac{r'}{k}\sqrt{(aa)}\sqrt{(bb)}}.\ *$$

上式ヨリ θ ノ二ツノ値ヲ得。而テコノ二値ガ等シキ場合ハ

$$(ab)=0$$

ナルトキノミナリ。

二圓ガ直交スルトキハ

$$\cos\theta=0$$

---

* $$(ay)^2=(aa)(yy)\cos^2\frac{r}{k}$$

$$(by)^2=(bb)(yy)\cos^2\frac{r'}{k}\quad \text{ナル故}$$

ナル故

$$\cos\frac{r}{k}\cos\frac{r'}{k}=\frac{(ab)}{\sqrt{(aa)}\sqrt{(bb)}}$$

又二圓ガ相切スルトキハ

$$\cos\theta=\pm 1$$

ナル故

$$\cos\left(\frac{r}{k}\pm\frac{r'}{k}\right)=\frac{(ab)}{\sqrt{(aa)}\sqrt{(bb)}}.$$

双曲的平面ノ圓ノ種類。双曲的平面ニ於テハ絶對形ハ實ナリ。コノ場合圓ノ中心ガ超無限遠點ナルトキハ圓ノ軸ハ有限ノ所ニ來リ圓ハ恰モ絶對形內ニ於テ軸ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ノ如ク考ヘラル。コノ圓ヲ特ニ**等距離曲線**(*Equidistant Curve*)ト云フ。若シモ圓ノ中心ガ絶對形ノ內ニアルトキハ軸ハ超無限遠域ニ存在ス。コノ圓ヲ單ニ圓(*Proper Circle*)ト云フ。又若シモ中心(a)ガ絶對形ニ近ヅキタルトキハ圓ノ方程式

$$(ax)^2-(aa)(xx)\cos^2\frac{r}{k}=0$$

ハ不定形ニ近ヅク。而テ中心ガ絶對形ニ近ヅキタル極限ニ於テハ圓ハ絶對形ト四重切觸ヲ有スル二次曲線トナル。コノ曲線ヲ**極限圓**(*Limiting Circle*)ト稱シ其切觸點ヲ中心，絶對形トノ共過切線ヲ軸ト云フ。依テ極限圓ノ方程式ハ

$$(xx)=C(ax)^2 \quad (\text{但 } (aa)=0)$$

ナル形ヲトル。

注意。非ゆうくりつど平面ニ於テハ三直線ニ切スル圓ガ四ツアルト同樣ニ三點ヲ通過スル圓ハ四ツアリ。從テゆうくりつどノトキ異ナリ三點ニテハ圓ハ確定セズ。

第五章　曲線弧ノ長サ

38. 曲線弧ノ長サ。 *Weirstrass* 氏ノ坐標ヲ用フルトキハ曲線ノ方程式ハ

$$\mathfrak{X}_0=\mathfrak{X}_0(t),$$
$$\mathfrak{X}_1=\mathfrak{X}_1(t),$$
$$\mathfrak{X}_2=\mathfrak{X}_2(t)$$

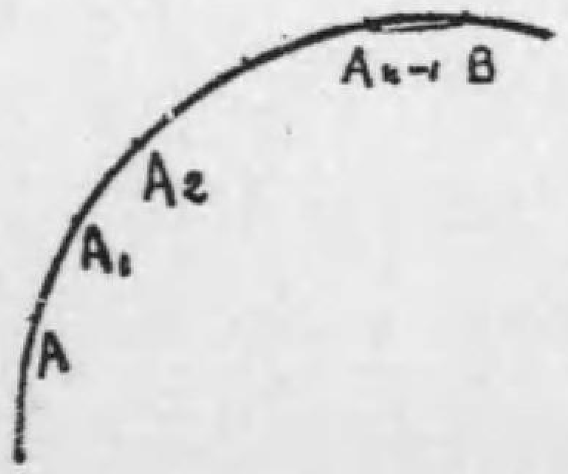
トナリ，(但 t ハ助變數ニシテ $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ ハ皆 t ノ解析函數トス)且曲線弧ノ長サハ §12 ニヨリ

$$\int_{s_0}^{s} ds=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dt}\ \frac{d\mathfrak{X}}{dt}\right)}dt$$

トナル。

今曲線弧 AB 上ニ順次ニ $t=t_0, t_1, \cdots\cdots, t_{n-1}, t$ ニ應ズル點 $A, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_{n-1}, B$ ヲ取リ是等ノ點ヲ直線ニテ結ビ折線 $AA_1A_2\cdots\cdots A_{n-1}B$ ヲ作ル。而テ $t=t_i, t_{i+}$ ニ應ズル點 A_i 及 A_{i+1} ノ坐標ヲ夫々

$$\mathfrak{X}_0(t_i),\ \mathfrak{X}_1(t_i),\ \mathfrak{X}_2(t_i)$$
$$\mathfrak{X}_0(t_{i+1}),\ \mathfrak{X}_1(t_{i+1}),\ \mathfrak{X}_2(t_{i+1})$$



トシ且

$$t_{i+1}-t_i=\Delta t_i$$
$$\mathfrak{X}_j(t_{i+1})-\mathfrak{X}_j(t_i)=\Delta\mathfrak{X}_j(t_i)\quad (j=0, 1, 2)$$

第二十七圖

トス。然ルトキハ

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X})=k^2$$

$$(\mathfrak{X}+\Delta\mathfrak{X}\ \mathfrak{X}+\Delta\mathfrak{X})=k^2$$

ナル故

$$\sin\frac{\overline{A_iA_{i+1}}}{k}=\frac{\sqrt{\left\|\begin{matrix}\mathfrak{X}_0(t_i) & \mathfrak{X}_1(t_i) & \mathfrak{X}_2(t_i)\\ \Delta\mathfrak{X}_0(t_i) & \Delta\mathfrak{X}_1(t_i) & \Delta\mathfrak{X}_2(t_i)\end{matrix}\right\|^2}}{k^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})(\Delta\mathfrak{X}\Delta\mathfrak{X})-(\mathfrak{X}\Delta\mathfrak{X})^2}}{k^2}$$

$$=\frac{1}{k}\left[\{\Delta\mathfrak{X}_0(t_i)\}^2+\{\Delta\mathfrak{X}_1(t_i)\}^2+\{\Delta\mathfrak{X}_2(t_i)\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

∴

$$A_iA_{i+1}=\frac{\dfrac{\overline{A_iA_{i+1}}}{k}}{\sin\dfrac{\overline{A_iA_{i+1}}}{k}}\Delta t_i\sqrt{\left(\frac{\Delta\mathfrak{X}_0}{\Delta t_i}\right)^2+\left(\frac{\Delta\mathfrak{X}_1}{\Delta t_i}\right)^2+\left(\frac{\Delta\mathfrak{X}_2}{\Delta t_i}\right)^2}$$

然ルニ

$$\lim_{\Delta t_i\to 0}\frac{\dfrac{\overline{A_iA_{i+1}}}{k}}{\sin\dfrac{\overline{A_iA_{i+1}}}{k}}=1,$$

$$\lim_{\Delta t_i\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta\mathfrak{X}_0}{\Delta t_i}\right)^2+\left(\frac{\Delta\mathfrak{X}_1}{\Delta t_i}\right)^2+\left(\frac{\Delta\mathfrak{X}_2}{\Delta t_i}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left[\left(\frac{d\mathfrak{X}_0}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{X}_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{X}_2}{dt}\right)^2\right]_{t=t_i}}$$

ナル故

$$\overline{A_iA_{i+1}}=\Delta t_i\left\{\sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dt}\ \frac{d\mathfrak{X}}{dt}\right)_{t=t_i}}+\varepsilon_i\right\},$$

但

$$\lim_{\Delta t_i\to 0}\varepsilon_i=0.$$

依テ

$$(\text{折線 } AA_1A_2\cdots\cdots A_{n-1}B \text{ ノ長サ})$$

$$=\Sigma\overline{A_iA_{i+1}}=\Sigma\Delta t_i\left\{\sqrt{\left(\frac{d\mathscr{X}}{dt}\ \frac{d\mathscr{X}}{dt}\right)_{t=t_i}}+\varepsilon_i\right\}.$$

然ルニ

$$\lim_{\Delta t_i\to 0}\ \Sigma\Delta t_i\sqrt{\left(\frac{d\mathscr{X}}{dt}\ \frac{d\mathscr{X}}{dt}\right)_{t=t_i}}$$

$$=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{d\mathscr{X}}{dt}\ \frac{d\mathscr{X}}{dt}\right)}dt.$$

且 $|\varepsilon_i|(i=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ ノ中最大ナルモノヲ ε トセバ

$$0\leqq|\Sigma\Delta t_i\varepsilon_i|\leqq(t-t_0)\varepsilon$$

ナル故

$$\lim_{\Delta t_i\to 0}\ \Sigma\Delta t_i\varepsilon_i=0.$$

故ニ

$$\lim_{n\to\infty}\ (\text{折線 } AA_1A_2\cdots\cdots A_{n-1}B \text{ ノ長サ})$$

$$=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{d\mathscr{X}}{dt}\ \frac{d\mathscr{X}}{dt}\right)}dt$$

$$=(\text{曲線 } AB \text{ ノ長サ}).$$

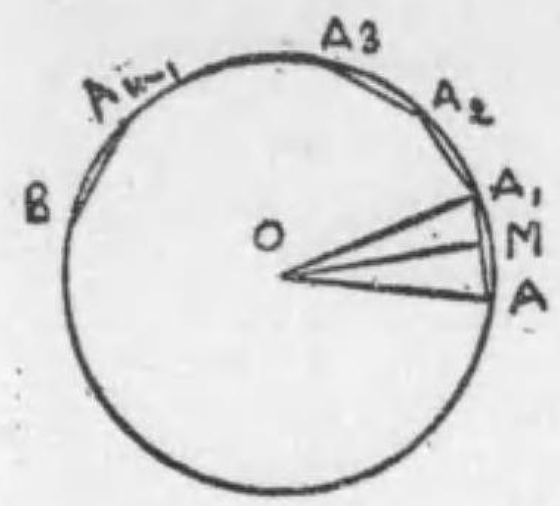
即

$$\lim_{n\to\infty}\ (\text{折線 } AA_1A_2\cdots\cdots B \text{ ノ長サ})$$

ハ曲線弧 AB ノ長サヲ表ス。

39. 圓弧ノ長サ。 前節ノ說明ニヨリ

$$(\text{圓弧 } AB \text{ ノ長サ})=\lim\ (\text{折線 } AA_1\cdots\cdots A_{n-1}B \text{ ノ長サ})$$



第二十八圖

ナリ。今二等邊三角形 OAA_1 ニ於テ邊 AA_1 ノ中點ヲ M トス，(但 AA_1 ノ中點ハ一般ニ二ツ存在スレドモ點 A 及 A_1 ガ接近セルトキハ A_1A_1 ノ中間ニアル中點ハ唯一ナリ。是ヲ M トス)然ルトキハ

$$\angle OMA_1=\text{直角}$$

ナリ。今圓ノ半徑ヲ r, $\angle AOA_1=\Delta\theta$ トスレバ三角法ノ公式ヨリ

$$\sin\left(\frac{\overline{AA_1}}{2k}\right)=\sin\frac{r}{k}\sin\frac{\Delta\theta}{2}.$$

故ニ

$$\lim\ \Sigma\overline{AA_1}=\lim\left(\Sigma k\sin\frac{r}{k}\Delta\theta\right).$$

從テ

$$(\text{圓弧ノ長サ})=\int_{\theta_0}^{\theta}k\sin\frac{r}{k}d\theta$$

$$=k\sin\frac{r}{k}\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta.$$

故ニ

$$(\text{全圓周})=k\sin\frac{r}{k}\int_{0}^{2\pi}d\theta$$

$$=2\pi k\sin\frac{r}{k}.$$

ゆうくりつどノ平面ノ圓ニ於テハ $k\to\infty$ ノ場合ナル故

$$(\text{全圓周})=2\pi r.$$

次ニ半徑 r ナル Riemann 氏平面上ノ圓トゆうくりつど平面上ノ圓トノ圓周ノ大小ヲ比較セシニ

$$\sin\frac{r}{k}=\frac{r}{k}-\frac{r^3}{3!\,k^3}+\cdots\cdots$$

ナル故 $r<k$ ナルトキハ

$$\sin\frac{r}{k}=\frac{r}{k}-q.$$

トナル。但 q ハ正ノ實數トス。從テ Riemann 氏平面上ノ圓周ハ

$$2\pi k\left(\frac{r}{k}-q\right)=2\pi r-2\pi kq$$

トナリ，明ニゆうくりつど平面上ノ同半徑ノ圓周ヨリ小トナル。

40. *Riemann* **氏平面上ノ直線ノ全長。** Riemann 氏平面ニ於テハ $k^2>0$ ニシテ k ハ實數ナリ。從テ總テノ點ノ坐標 (x) ハ皆實ナリ。今直線上ノ一點 $A(x)$ ヨリ直線ニ沿ヒテ一定ノ向キニ $k\pi$ ナル距離ニアル一點ヲ $B(y)$ トス。然ルトキハ

$$\cos^2\frac{\overline{AB}}{k}=1,$$

$$\sin^2\frac{\overline{AB}}{k}=0$$

ナリ。依テ

$$\sin^2\frac{\overline{AB}}{k}=\frac{(xx)(yy)-(xy)^2}{(xx)(yy)}=0.$$

故ニ

$$(xx)(yy)-(xy)^2=\left\|\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \end{matrix}\right\|^2$$

$$=\Sigma\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2=0.$$

然ルニ x_i 及 $y_i\,(i=0,1,2)$ ハ皆實ナル故上ノ等式ガ成立スル爲ニハ

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_2 & x_0 \\ y_2 & y_0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}=0$$

ナルベキナリ。故ニ

$$x_0:x_1:x_2=y_0:y_1:y_2.$$

即

$$(x)\equiv(y)$$

ナリ。從テ $A(x)$ ヨリアル一定ノ向キニ $k\pi$ ナル距離ニアル點 $B(y)$ ハ A 點自身ナリ。換言スレバ Riemann 氏平面上ニ於テハ或點ヨリ一定ノ向キニ $k\pi$ ダケ進メバ元ノ點ニ歸ル。即此平面ノ直線ハ πk ナル全長ヲ有スル閉鎖セル直線ナリ。

第六章　平面圖形ノ面積

41. 平面積ノ定義。 非ゆうくりつど平面上ノ三角形ノ面積ヲ定義スルニ際シゆうくりつど平面上ノ三角形ノ面積ヲ表ス函數ニ相當スル二ツノ異ナレル函數ヲ考フルコトヲ得。其第一ハゆうくりつど平面ニ於ケル

$$\Delta ABC \text{ ノ面積} = \frac{1}{2}ac\sin B$$

ノ二倍ニ相當スル函數. 第二ハ全面積ハ其内部ノ一小部分ノ面積ノ和ノ極限値ト定義シタルトキ得ラルル函數ナリ。然レドモ普通第二ノ函數ヲ**面積**ト名ヅケ. 第一ノ函數ヲ ***Sine amplitude*** ト名ヅク。

Sine amplitude. 三角法ノ公式ニヨリ

$$-\sin\frac{b}{k}\sin\frac{c}{k}\cos A=\cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k}-\cos\frac{a}{k}$$

ナル故

$$\sin\frac{b}{k}\sin\frac{c}{k}\sin A$$

$$=\left[\sin^2\frac{b}{k}\sin^2\frac{c}{k}-\cos^2\frac{b}{k}\cos^2\frac{c}{k}-2\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k}-\cos^2\frac{a}{k}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[1-\cos^2\frac{a}{k}-\cos^2\frac{b}{k}-\cos^2\frac{c}{k}+2\cos\frac{a}{k}\cos\frac{b}{k}\cos\frac{c}{k}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{c}{k} & \cos\frac{b}{k} \\ \cos\frac{c}{k} & 1 & \cos\frac{a}{k} \\ \cos\frac{b}{k} & \cos\frac{a}{k} & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

然ルニ上ノ等式ノ右邊ハ a, b, c ナル文字ニツキ對稱ナル故循環ノ順序ニ從ヒ $a,b,c,\ A,B,C$ ヲ變更シテ

$$\sin\frac{b}{k}\sin\frac{c}{k}\sin A=\sin\frac{c}{k}\sin\frac{a}{k}\sin B=\sin\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k}\sin C$$

$$=\pm\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{c}{k} & \cos\frac{b}{k} \\ \cos\frac{c}{k} & 1 & \cos\frac{a}{k} \\ \cos\frac{c}{k} & \cos\frac{a}{k} & 1 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

ヲ得。是等ノ式ヲ ΔABC ノ *Sine amplitude* ト名ツケ, $Sin(ABC)$ ナル記號ヲ以テ是ヲ表ス。三角形ノ**邊ノ測度** (*Measure of Side*) (邊ヲ k ニテ除シタルモノ) 及角ヲ正ニトレバ, 實ノ領域ニ於テハ上ノ等式ノ右邊ハ (i) *Lobachevski* 氏平面ニ於テハ負, (ii) *Riemann* 氏平面ニ於テハ正トナル故是等ニ應ジテ右邊ノ根號ノ前ノ $\pm$ ノ符號ヲ定ムベキナリ。

三形角 ABC ノ各頂點ノ坐標ヲ夫々 $(x), (y), (z)$ トスレバ (1) ヨリ

$$\sin(ABC)=\frac{\begin{vmatrix} (xx) & (xy) & (xz) \\ (yx) & (yy) & (yz) \\ (zx) & (zy) & (zz) \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}\sqrt{(zz)}}=\frac{|x\ y\ z|}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}\sqrt{(zz)}} \qquad (2)$$

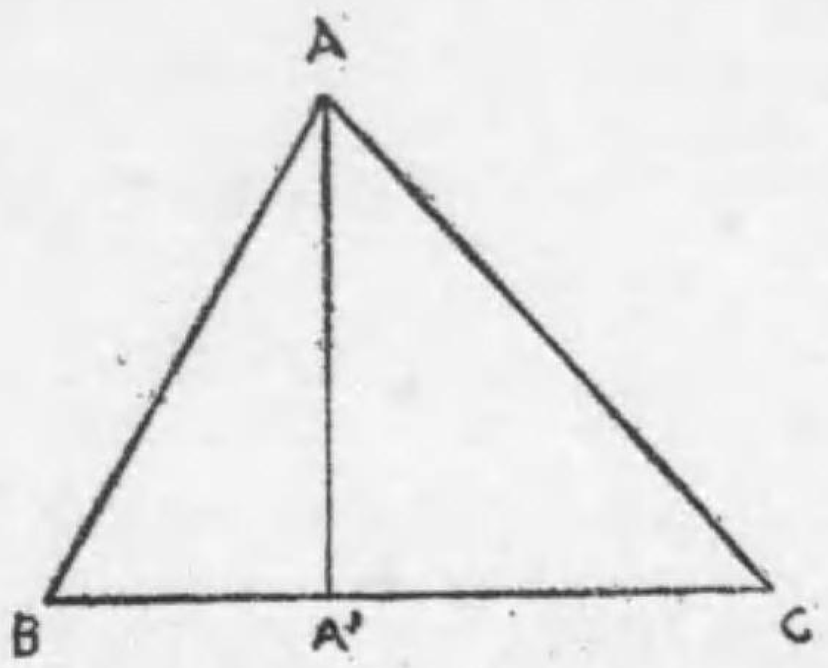
トナル。又 (1) ヲ書キ換レバ

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{k}}=\frac{\sin B}{\sin\frac{b}{k}}=\frac{\sin C}{\sin\frac{c}{k}}=\frac{\sin(ABC)}{\sin\frac{a}{k}\sin\frac{b}{k}\sin\frac{c}{k}}. \qquad (3)$$

コノ公式ハゆうくりつど平面上ノ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2\Delta ABC}{abc}$$

ナル公式ニ相當スルモノニシテ，コノ結果ヨリシテモ $\sin(ABC)$ ハ ΔABC ノ面積ノ二倍ニ相當スル如ク考ヘラル。



第二十九圖

面積. ΔABC ノ高サヲ AA' トス。然ルトキハゆうくりつどノ面積ハ

$$\frac{a\cdot\overline{AA'}}{2}$$

ナリ。今 ΔABC ガ非常ニ小トナレルトキノ

$$\lim \frac{\sin(ABC)}{2} \Big/ \frac{a\cdot\overline{AA'}}{2}$$

ヲ考フレバ

$$\lim \frac{\sin(ABC)}{2} \Big/ \frac{a\cdot\overline{AA'}}{2}$$

$$= \lim\left(\sin\frac{a}{k}\sin\frac{c}{k}\sin B / a\cdot\overline{AA'}\right)$$

$$= \lim\left(\sin\frac{a}{k}\sin\frac{\overline{AA'}}{k} / a\cdot\overline{AA'}\right)$$

$$= \frac{1}{k^2}.$$

故ニ非ゆうくりつどノ三角形ニ於テハコノ三角形ガ非常ニ小ナルトキハ其 *Sine amplitude* ノ二倍ハコレニ相當スルゆうくりつどノ三角形ノ面積ノ $\frac{1}{k^2}$ ナリ。

一般ニ閉鎖曲線ニテ包圍サレタル平面形ノ面積 S トハ之ヲ無窮小

ナル部分ニ分チ各ヲゆうくりつど平面ノ一部分ト考ヘ其面積ヲ求メ是等ヲ加ヘ合セタルモノノ極限値ト定義ス. 從テ三角形ノ面積 S ハ

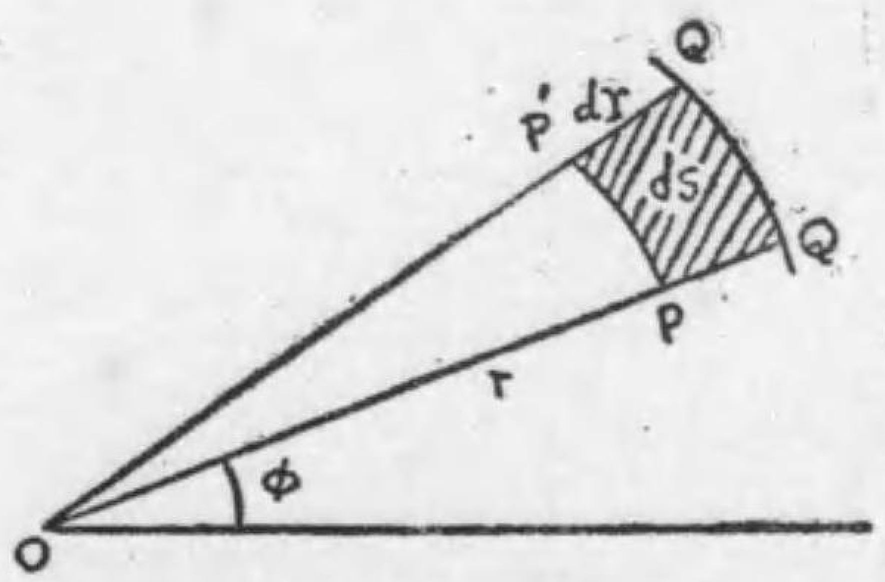
$$\text{面積}\ S = \lim\left(\Sigma\frac{k^2\sin(ABC)}{2}\right).$$

42. 面積ヲ求ムル公式。

測地極坐標ニヨレバ

$$\frac{x_1}{x_0} = k\tan\frac{r}{k}\cos\phi,$$

$$\frac{x_2}{x_0} = k\tan\frac{r}{k}\sin\phi$$



第三十圖

但點 $P(x)$ ノ坐標ヲ (r, ϕ), 點 Q ノ坐標ヲ $(r+dr, \phi+d\phi)$ トス, OQ 上ニ O ヨリ r ニ等シキ距離ニアル點 P' ヲ求メ P, P' ヲ測地曲線ニテ結べ。然ルトキハ

$$PP' = ds = \sqrt{(d\mathfrak{X}d\mathfrak{X})}$$

$$= k\sin\frac{r}{k}d\phi \quad (r=\text{一定ナル故})$$

依テ無窮小面積 $PP'QQ'$ ノゆうくりつどノ面積 dS ハ

$$dS = k\sin\frac{r}{k}d\phi dr$$

故ニ全面積ハ

$$S = \int dS = k\iint\sin\frac{r}{k}d\phi dr.$$

43. 直角三角形ノ面積。

ABC ヲ角 B ガ直角ナル如キ

三角形トシ BC ヲ $x_2=0$ ト取リ，C ヲ通過スル AB ニ平行ナル直線ヲ $x_1=0$ ト取ル。且 C 點ヨリ邊 AB 上ノ任意ノ點 P ニ至ル迄ノ距離ヲ R トス。

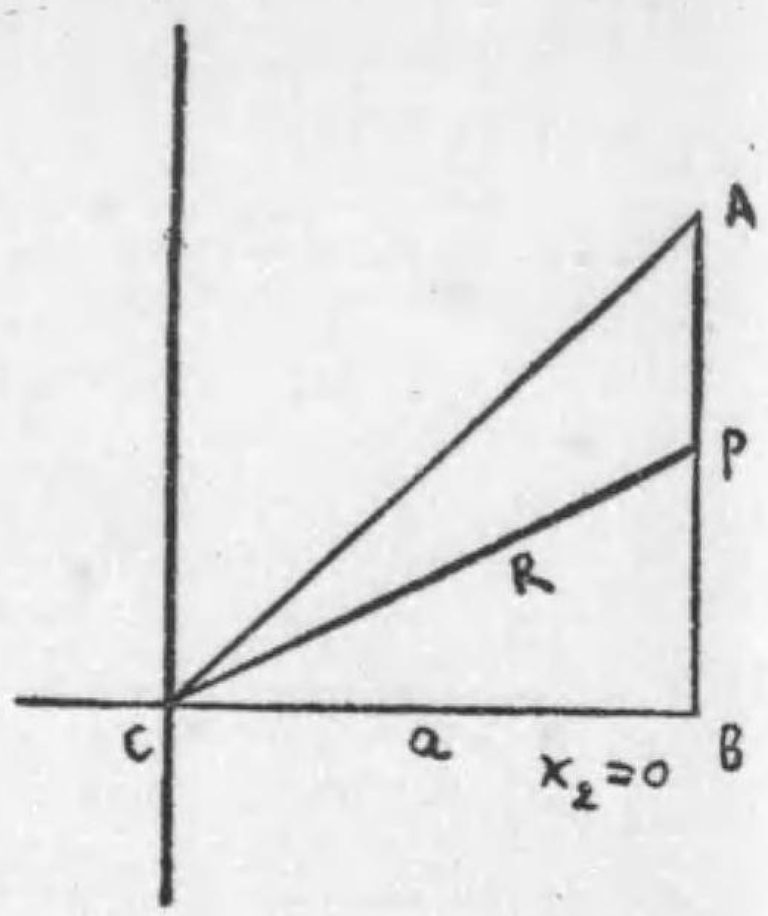
然ルトキハ

(ΔABC ノ面積)

$$=k\int_0^C d\phi\int_0^R \sin\frac{r}{k}dr$$

$$=k\int_0^C d\phi\, k\left(1-\cos\frac{R}{k}\right)$$

$$=k^2\int_0^C d\phi-k^2\int_0^C\cos\frac{R}{k}d\phi.$$



第三十一圖

然ルニ

$$\tan\frac{R}{k}=\tan\frac{a}{k}\sec\phi,$$

又

$$\int_0^C\cos\frac{R}{k}d\phi$$

$$=\int_0^C\frac{\cos\phi}{\sqrt{\cos^2\phi+\tan^2\frac{a}{k}}}d\phi$$

$$=\int_0^{\sin C}\frac{dx}{\sqrt{\sec^2\frac{a}{k}-x^2}}\qquad(x=\sin\phi)$$

$$=\left[\arcsin\left(x\cos\frac{a}{k}\right)\right]_0^{\sin C}$$

$$=\arcsin\left(\sin C\cos\frac{a}{k}\right)$$

$$=\arcsin(\cos A)\qquad\left(\cos A=\sin C\cos\frac{a}{k}\right)$$

$$=\arcsin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\right]$$

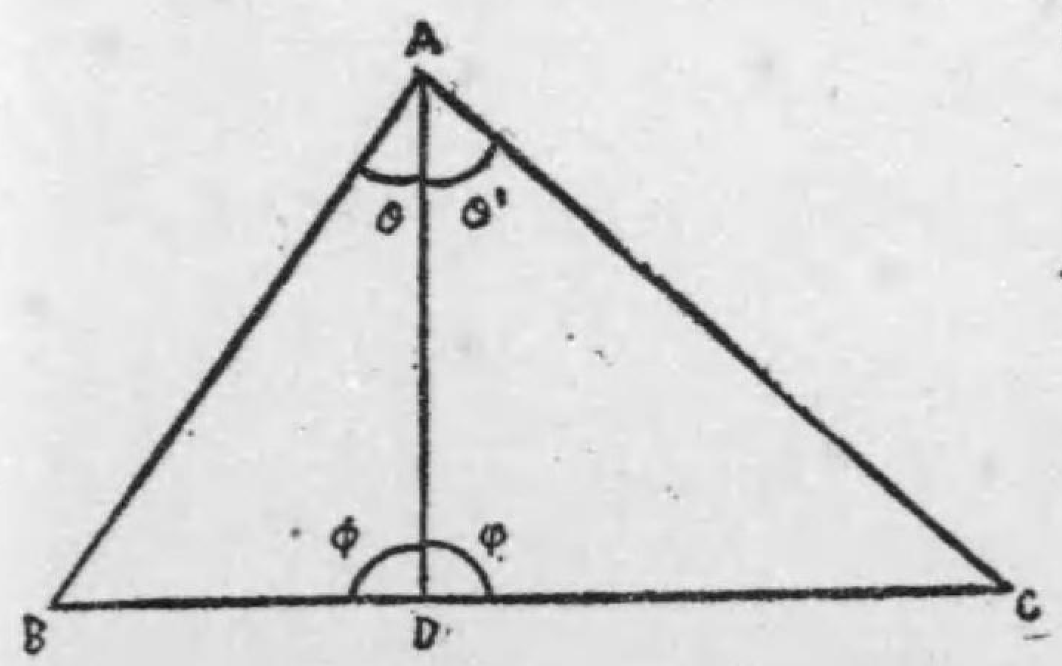
$$=\frac{\pi}{2}-A.$$

故ニ

$$(\Delta ABC\ \text{ノ面積})=k^2\left(A+C-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=k^2(A+B+C-\pi)\qquad\left(\text{但}\ B=\frac{\pi}{2}\right).$$

44. 一般ノ三角形ノ面積。 頂點 A ヨリ垂線 AD ヲ下シ ΔABC ヲ二ツノ直角三角形 ABD, ADC ニ分ツ。然ルトキハ



第三十二圖

若シモ $\angle BAD=\theta$,

$\angle DAC=\theta'$,

$\angle ADB=\angle ADC=\varphi=\frac{\pi}{2}$

トセバ

(ΔABD ノ面積)

$=k^2(\theta+B+\varphi-\pi)$,

(ΔADC ノ面積)

$=k^2(\theta'+\varphi+C-\pi)$.

故ニ

$$(\Delta ABC\ ノ面積)=(\Delta ABD\ ノ面積)+(\Delta ADC\ ノ面積)$$
$$=k^2(\theta+\theta'+B+C+2\varphi-2\pi)$$
$$=k^2(A+B+C+\pi-2\pi)$$
$$=k^2(A+B+C-\pi).^*$$

45. 圓ノ面積。 半徑 R ナル圓ノ面積ヲ求メンニ

$$(圓ノ面積)=\int_0^R\int_0^{2\pi} k\sin\frac{r}{k}dr\,d\phi$$
$$=k\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^R\sin\frac{r}{k}dr$$
$$=2\pi k^2\left(1-\cos\frac{R}{k}\right).$$

R

$k\to\infty$ ナルゆうくりつどノ場合ニ於テハ

$$(圓ノ面積)=2\pi k^2\left[1-\left(1-\frac{R^2}{2!\,k^2}+\frac{R^4}{4!\,k^4}-\cdots\cdots\right)\right]$$
$$=\pi R^2\left(1-\frac{1}{k^2}(\cdots\cdots)\right)$$
$$=\pi R^2 \qquad (k\to\infty)$$

46. 楕圓的平面ノ全面積。 此平面上ノ直線ノ全長ハ πk ナル故全面積ハ

$$\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\sin\frac{r}{k}dr$$
$$=2\pi k^2\left(1-\cos\frac{k\pi}{2k}\right)$$

* 垂線 AD ノ足ガ邊 BC ノ延長ニ來ル場合モ同樣ニシテ $\triangle ABC$ ノ面積ヲ得。讀者之ヲ試ミヨ。

$$=2\pi k^2.$$

即楕圓的平面ノ全面積ハ半徑ガ k ナルゆうくりつどノ球ノ面積ノ半分ニ等シ。

第七章　非ゆうくりつど空間幾何學

47. 點, 直線及合同變更。 平面非ゆうくりつど幾何學ヲ陳述シタルト同ジ方法ニヨリ逐次立體非ゆうくりつど幾何學ヲ簡單ニ陳述セン。先ヅ第一ニ研究ノ目的物トシテ點及距離元素ヲ採用セン。

公理 1. **點**ト名ヅクル目的物ノ一群存在シ, 且其各ハ三ツノ獨立變數 x_1, x_2, x_3 ノ實値ノ一組ニヨリテ決定サル。

定義. 點ノ集合ヲ**三次ノ空間**或ハ單ニ**空間**ト云フ。且

$$x_1=\overline{x}_1,\quad x_2=\overline{x}_2,\quad x_3=\overline{x}_3$$

ナル一對ニ應ズル點ヲ P トセバ $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ ヲ點 P ノ**坐標**ト云フ。從テ點ハ坐標ニヨリテ定マル。

定義. 其坐標ガ

$$a_1<x_1<b_1$$
$$a_2<x_2<b_2$$
$$a_3<x_3<b_3\quad (\text{但 } a_i, b_i\ (i=1,2,3) \text{ ハ實數トス})$$

ナル不等式ニテ制限セラレタル點ノ集合ヲ**制限域** (*Restricted region*) ト云フ。

公理 2. 制限域ノ存在ヲ認定ス。

公理 3. 制限域內ノ何レノ點ニ對シテモ**距離元素**存在シ, 式

$$\sqrt{\Sigma a_{ij}dx_i dx_j}$$
$$=\sqrt{a_{11}dx_1^2+a_{22}dx_2^2+a_{33}dx_3^2+2a_{23}dx_2dx_3+2a_{31}dx_3dx_1+2a_{12}dx_1dx_2}$$

ニテ與ヘラレ。(之ヲ ds ナル記號ヲ以テ表ス) 但 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{31}, a_{12}$ ハ皆 x_1, x_2, x_3 ノ解析函數ニシテ

$$|a_{ij}|\equiv\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0,\qquad (a_{ij}=a_{ji})$$

且上式ノ根號內ハ制限域內ノ點 x_1, x_2, x_3 及 dx_1, dx_2, dx_3 ノ實値ニ對シテ正ノ確定形ヲトルモノトス。

定義. 其坐標ガ

$$x_1=\varphi_1(t),\quad x_2=\varphi_2(t),\quad x_3=\varphi_3(t)$$

(但 t ハ助變數, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ハ何レモ t ノ解析函數トス) ナル方程式ヲ滿足スル如キ點ノ集合ヲ**曲線**ト云ヒ, 此方程式ヲ**曲線ノ方程式**ト云フ。

曲線上ニ於テ $t=t_1, t=t_2$ ニ應ズル點ヲ夫々 A, B トスルトキ, 定積分

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\Sigma a_{ij}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}}\,dt$$

ヲ AB 間ノ**曲線ノ長サ**ト云フ。

次ニ曲線上ニ於テ $t=t_0$ ニ對應スル點ヲ O トシ, 曲線弧 OA, OB ノ長サヲ夫々 s_0, s_1 トス。然ルトキハ

$$s_0=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\Sigma a_{ij}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}}\,dt,$$

$$s_1=\int_{t_0}^{t_2}\sqrt{\Sigma a_{ij}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}}\,dt$$

ナリ。依テ

$$\text{曲線弧 } AB \text{ ノ長サ} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\Sigma a_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}}\, dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_2} \sqrt{\Sigma a_{ij} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}}\, dt - \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\Sigma a_{ij} \frac{dx_i}{dx} \frac{dx_j}{dx}}\, dt$$

$$= s_1 - s_0$$

$$= \int_{s_0}^{s_1} ds$$

トナル。

定義. 方程式

$$\delta\left(\int_{s_0}^{s} ds\right) = 0$$

ヲ満足スル曲線ヲ**測地曲線**或ハ**直線**ト云フ。

平面ノ場合ニ行ヒタル方法ト同ジ方法ヲ適用シテ，直線ニ關スル微分方程式

$$\frac{d}{ds} \sum_{i}^{1,2,3} a_{ij} \frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^{1,2,3} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s} \frac{\partial x_k}{\partial s}$$

及次ノ定理ヲ得(第 13 節ヲ參照セヨ)。

定理. 制限域内ノ極メテ相接近セル二點ヲ通過スル唯一本ノ直線アリ。

定義. 制限域内ニ於テ距離元素ヲ不變トナス實ノ解析的變更ヲ**合同變更** (*Congruent transformation*) ト云フ。

平面ノ場合ニ於ケル證明ト全ク同樣ニシテ一點 P ノ坐標$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$

及其點ノ$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)_{x_1=\bar{x}_1}$, $\left(\frac{dx_2}{ds}\right)_{x_2=\bar{x}_2}$, $\left(\frac{dx_3}{ds}\right)_{x_3=\bar{x}_3}$ ヲ知ルトキハ其點ヲ通過スル直線ヲ知ル事ヲ得。依テ

$$\left(\frac{dx_i}{ds}\right)_{x_i=\bar{x}_i} \quad (i=1, 2, 3)$$

ヲ點 P ノ**向キノ餘弦** (*Direction cosine*) ト云フ。

任意ノ一點 $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ノ向キノ餘弦ヲ $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ トスルトキハ

$$\zeta_i = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)_{x_i=\bar{x}_i}$$

ニシテ

$$\Sigma a_{ij} \zeta_i \zeta_j = 1$$

$$(i, j = 1, 2, 3)$$

ナル關係存在ス。

定義. 一點 $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ヲ通過スル二直線 PQ, PR ノ距離元素ヲ夫々 ds, d_1s トスルトキハ

$$\left|\Sigma a_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{d_1x_j}{d_1s}\right| \leq 1$$

ナリ。(第 14 節ヲ參照セヨ) 依テ

$$\cos\theta = \Sigma a_{ij} \frac{dx_i}{ds} \frac{d_1x_j}{d_1s}$$

ト置クコトヲ得。然ルトキハコノ方程式ニテ與ヘランタル實函數 θ ヲ二直線 PQ, PR ノ**交角**ト云フ。而テ上式ガ零ニ等シクナリタルトキハ此二直線ハ**直交スル**ト云フ。

定理. 二直線ノ交角ハ合同變更ニ對シテ不變ナリ。

一點 O ニテ相交ル二直線ヲ OA, OB トシ，其交角ヲ ω. 向キノ餘弦ヲ夫々 a_i, β_i トス。點 O ヲ通過シ

$$\zeta_i=\lambda a_i+\mu\beta_i$$

ナル向キノ餘弦 ζ_i ヲ有スル直線ヲ OM トス。但 λ, μ ハ助變數ニシテ

$$\Sigma a_{ij}\zeta_i\zeta_j=1$$

ナル故

$$\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\cos\omega=1.$$

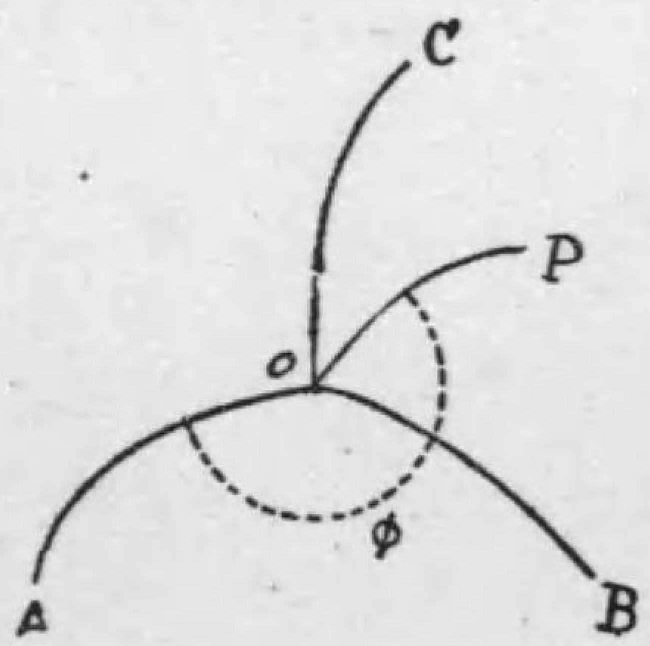
今此方程式ヲ滿足スル總テノ λ, μ ヲ取リテ ζ_i ヲ作ルトキハ點 O ヲ通過スル直線群ヲ得。之ヲ**直線束**ト云フ。而テ此直線束ニテ生ジタル曲面ヲ**測地曲面** (*Geodesic surface*) 或ハ**平面** (*Plane*) ト云フ。

公理 4. 一點 P ヨリ出ヅル二ツノ充分ニ小ナル直線ノ線分 PQ 及 PR ヲ，夫々地ノ任意ノ點 P' ヨリ出デ且 $\angle Q'P'R'$ ガ $\angle QPR$ ニ等シク又 $P'Q'=PQ, P'R'=PR$ ナル如キ直線ノ線分 $P'Q'$ 及 $P'R'$ ニ運ブガ如キ合同變更アリ。

合同變更ニヨリテハ直線ハ直線ニ變更サル，依テ直線束ヨリナル平面モ亦平面ニ變更サル。

48. 直線ノ距離元素。

一定點 O ヲ通過スル三ツノ相互ニ直交セル直線ヲ OA, OB, OC トシ任意ノ一點 P ト O トヲ直線ニテ結ビ，OP ノ長サヲ r, OP ト OA トノナス角ヲ ϕ, OC ト平面 OAP ヘノ垂線トノナス角ヲ θ トス。然ルトキハ點 P ハ



第三十三圖

r, ϕ, θ ニテ定マル。從テ r, ϕ, θ ヲ點 P ノ**坐標**ト考ルコトヲ得。而テ此ノ場合ニ於テハ點 P ノ距離元素ハ

$$\overline{ds^2}=\overline{dr^2}+E\overline{d\theta^2}+2Fd\theta d\phi+G\overline{d\phi^2}$$

ナル式ニテ與ヘラル。今 $\frac{1}{k^2}$ ヲ Riemann 氏ノ曲率トスレバ平面ノ場合ト全ク同樣ニシテ

$$\overline{ds^2}=\overline{dr^2}+k^2\sin^2\frac{r}{k}\left[\sin^2\phi\,\overline{d\theta^2}+\overline{d\phi^2}\right]$$

ヲ得。

Riemann 氏ノ曲率 $\frac{1}{k^2}$ ハ合同變更ニ對シテ不變ナル故空間上ノ總テノ點ニ對シテ一定ナリ。從テ平面上ニ於テモ亦一定ナリ。コノ $\frac{1}{k^2}$ ヲ空間ノ**曲率測度** (*Measure of curvature*) ト云フ。

49. *Weirstrass* 氏ノ坐標。

空間上ノ一點 (r, ϕ, θ) ガ與ヘラレタルトキ次ノ方程式ニテ表サレタル $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$ ヲ Weirstrass 氏ノ坐標ト云ヒ $(\mathfrak{X})$ ナル記號ヲ以テ之ヲ表ス。

$$\mathfrak{X}_0=k\cos\frac{r}{k},$$

$$\mathfrak{X}_1=k\sin\frac{r}{k}\cos\theta\cos\phi,$$

$$\mathfrak{X}_2=k\sin\frac{r}{k}\sin\theta\cos\phi,$$

$$\mathfrak{X}_3=k\sin\frac{r}{k}\sin\phi.$$

此坐標ノ間ニハ

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X})=k^2$$

ナル關係存在シ且一點ニ於ケル距離元素ハ

$$\overline{ds^2}=(d\mathfrak{X}d\mathfrak{X})$$

トナル。而テ平面ノ場合ト同樣ニシテ直線ノ方程式トシテ

$$\frac{d^2\mathfrak{X}_i}{ds^2}+\frac{\mathfrak{X}_i}{k^2}=0,\quad (i=0,1,2,3)$$

ヲ得。故ニ是ヲ解キテ

$$\mathfrak{X}_i=\mathfrak{Y}_i\sin\frac{s}{k}+\mathfrak{Z}_i\cos\frac{s}{k}$$

ヲ得。但 $(\mathfrak{Y}),(\mathfrak{Z})$ ハ常數ニシテ

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X})=(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})=(\mathfrak{Z}\mathfrak{Z})=k^2,\qquad (\mathfrak{Y}\mathfrak{Z})=0.$$

是ハ直線上ノ點ガ滿足スベキ方程式ニシテ (y) 及 $(\mathfrak{Z})$ ハ夫々或一定點ノ坐標ニシテ $(\mathfrak{Z})$ ハ $s=0$ ニ應ズル點ナリ。而テ

$$\frac{d\mathfrak{X}_i}{ds}=\frac{\mathfrak{Y}_i}{k}\cos\frac{s}{k}-\frac{\mathfrak{Z}_i}{k}\sin\frac{s}{k}$$

ナル故點 $(\mathfrak{Z})(s=0)$ ニ於ケル此直線ノ向キノ餘弦ハ明ニ $\frac{\mathfrak{Y}_i}{k}$ ナリ。
且點 $(\mathfrak{Z})$ ヨリ $(\mathfrak{X})$ 迄ノ距離 s ハ

$$\cos\frac{s}{k}=\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Z})}{k^2}$$

ニテ與ヘラル。

次ニ直線上ノ他ノ任意ノ點ヲ $(\mathfrak{X}')$ トシ

$$\mathfrak{X}_i'=\mathfrak{Y}_i\sin\frac{s'}{k}+\mathfrak{Z}_i\cos\frac{s'}{k}$$

トス。然ルトキハ

$$\mathfrak{X}_i'=\frac{1}{\sin\frac{s}{k}}\left(\mathfrak{X}_i-\mathfrak{Z}_i\cos\frac{s}{k}\right)\sin\frac{s'}{k}+\mathfrak{Z}_i\cos\frac{s'}{k}$$

$$=\frac{\sin\frac{s'}{k}}{\sin\frac{s}{k}}\mathfrak{X}_i+\frac{\sin\frac{s-s'}{k}}{\sin\frac{s}{k}}\mathfrak{Z}_i.$$

今

$$\frac{\sin\frac{s'}{k}}{\sin\frac{s}{k}}=\lambda,\qquad \frac{\sin\frac{s-s'}{k}}{\sin\frac{s}{k}}=\mu$$

トヲケバ

$$\mathfrak{X}_i'=\lambda\mathfrak{X}_i+\mu\mathfrak{Z}_i.$$

トナル。但

$$\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\cos\frac{s}{k}=1,\quad \cos\frac{s}{k}=\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Z})}{k^2}$$

ナリ。

逆ニ $(\mathfrak{X}),(\mathfrak{Z})$ ヲ直線上ノ二點トシ

$$\mathfrak{X}_i'=\lambda\mathfrak{X}_i+\mu\mathfrak{Z}_i$$

但

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X})=(\mathfrak{Z}\mathfrak{Z})=k^2$$

$$\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\cos\frac{s}{k}=1,\quad \cos\frac{s}{k}=\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{Z})}{k^2}$$

ナル坐標ヲ有スル點 $(\mathfrak{X}_i')$ ヲトレ。然ルトキハ

$$\lambda=\frac{\sin\frac{s'}{k}}{\sin\frac{s}{k}},$$

$$\mu=\frac{\sin\frac{s-s'}{k}}{\sin\frac{s}{k}}$$

ナル關係ヲ滿スベキs'ヲトルヿ可能ナリ。從テ$(\mathcal{X}_i')$ハ直線ノ微分方程式ヲ滿足ス。

即直線上ノ任意ノ二點ヲ$(\mathcal{X}), (\mathcal{Z})$トセバ, 直線上ノ他ノ點$(\mathcal{X}')$ハ

$$\mathcal{X}_i'=\lambda\mathcal{X}_i+\mu\mathcal{Z}_i \qquad (i=0, 1, 2, 3)$$

ナル方程式ニテ與ヘラル。但

$$(\mathcal{X}\mathcal{X})=(\mathcal{Z}\mathcal{Z})=k^2$$

$$\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu\cos\frac{s}{k}=1, \quad \cos\frac{(\mathcal{X}\mathcal{Z})}{k^2}$$

ナリ。是ヲ**直線ノ方程式**ト稱ス。

50. 二直線ノ交角。

一點$(\mathcal{Z})$ニテ交ル二直線

$$\mathcal{Y}_i=\mathcal{X}_i\sin\frac{s}{k}+\mathcal{Z}_i\cos\frac{s}{k}, \quad (\mathcal{X}\mathcal{Z})=0$$

$$\mathcal{Y}_i'=\mathcal{X}_i'\sin\frac{s'}{k}+\mathcal{Z}_i\cos\frac{s'}{k}, \quad (\mathcal{X}'\mathcal{Z})=0$$

ノ向キノ餘弦ハ夫々$\frac{\mathcal{X}_i}{k}, \frac{\mathcal{X}_i'}{k}$ナル故此等二直線ノ交角$\theta$ハ

$$\cos\theta=\frac{(\mathcal{X}\mathcal{X}')}{k^2}$$

ニテ與ヘラル。

51. 平面ノ方程式。

次ニ點$(\mathcal{Z})$ニテ直交スル二直線ノ向キノ餘弦ヲ$\frac{\mathcal{Y}_i}{k}, \frac{W_i}{k}$トスルトキハ$(\mathcal{Z})$ヲ通過スル直線束ノ向キノ餘弦ハ

$$\frac{1}{k}(\lambda\mathcal{Y}_i+\mu W_i)$$

ニテ表サル。但

$$\lambda^2+\mu^2=k^2$$

從テ是等ノ直線束上ノ點ノ坐標$(\mathcal{X})$ハ

$$\mathcal{X}_i=(\lambda\mathcal{Y}_i+\mu W_i)\sin\frac{s}{k}+\mathcal{Z}_i\cos\frac{s}{k} \quad (i=0, 1, 2, 3,)$$

ニテ表サル。此四方程式ヨリλ, μ, sヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} \mathcal{X}_0 & \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{X}_3 \\ \mathcal{Y}_0 & \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Y}_2 & \mathcal{Y}_3 \\ \mathcal{Z}_0 & \mathcal{Z}_1 & \mathcal{Z}_2 & \mathcal{Z}_3 \\ W_0 & W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix}=0$$

ヲ得。是明ニ三點$(\mathcal{Y}), (\mathcal{Z}), (W)$ヲ通過スル**平面ノ方程式**ナリ。從テ三點ハ一平面ヲ決定スルコト明カナリ。又上ノ方程式ノ$\mathcal{X}_i$ノ代リニ

$$\mathcal{X}_i=\mathcal{Y}_i\sin\frac{s}{k}+\mathcal{Z}_i\cos\frac{s}{k}$$

ヲ代入スルトキハ方程式ハ恒等的ニ零トナル故平面上ノ點ヲ結ブ直線ハ平面內ニ含マルヽコトモ明ナリ。從テ二平面ノ交リハ直線ナルヿヲモ知ル。

平面ノ方程式ヲ書キ換フレバ

$$\mathcal{U}_0\mathcal{X}_0+\mathcal{U}_1\mathcal{X}_1+\mathcal{U}_2\mathcal{X}_2+\mathcal{U}_3\mathcal{X}_3=0$$

トナル。但$(\mathcal{U})$ハ皆常數ニシテ

$$\mathfrak{U}_0,\ \mathfrak{U}_1,\ \mathfrak{U}_2,\ \mathfrak{U}_3=\left\|\begin{matrix}\mathfrak{Y}_0 & \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}_2 & \mathfrak{Y}_3\\ \mathfrak{Z}_0 & \mathfrak{Z}_1 & \mathfrak{Z}_2 & \mathfrak{Z}_3\\ W_0 & W_1 & W_2 & W_3\end{matrix}\right\|\text{ノ行列式,}$$

$$(\mathfrak{U}\mathfrak{U})=k^2.$$

即平面ノ方程式ハ *Weirstrass* 氏ノ坐標ニ關シテ一次式ナリ。$(\mathfrak{U})$ ヲ *Weirstrass* 氏ノ**面坐標** (*Plane coordinates*) ト云フ。

52. 齊次坐標 (*Homogeneous coordinates*). 次ニ

$$\mathfrak{X}_i=\frac{kx_i}{\sqrt{(xx)}},\qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

ト置ケバ $(x)=x_0:x_1:x_2:x_3$ ハ亦點 $(\mathfrak{X})$ ノ坐標ト考フルコトヲ得。此坐標ヲ用フレバ二點 (x) 及 (y) ノ距離ハ

$$\cos\frac{s}{k}=\frac{(xy)}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}}$$

トナル。且直線ノ方程式ハ

$$x_i=\lambda y_i+\mu z_i$$

トナリ，平面ノ方程式ハ

$$(ux)=0$$

トナリ。而テ點 (z) ニテ相交ル二直線

$$x_i=\lambda y_i+\mu z_i$$

$$x_i'=\lambda' y_i'+\mu' z_i$$

但

$$(yz)=(y'z)=0$$

ノ交角 θ ハ

$$\cos\theta=\frac{(yy')}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(y'y')}}$$

トナル。而テ一般ニ任意ノ二直線

$$ly_i+mz_i$$

$$py_i'+qz_i$$

ノ交角 θ ハ

$$\cos\theta=\frac{(xx')}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(x'x')}}$$

トナル。但

$$x_i=\lambda y_i+\mu z_i,$$

$$x_i'=\lambda' y_i'+\mu' z_i,$$

$$(xz)=(x'z)=0.$$

即

$$\cos\theta=\frac{\lambda\lambda'(yy')+\lambda\mu'(yz)+\lambda'\mu(y'z)+\mu\mu'(zz)}{\sqrt{\lambda^2(yy)+2\lambda\mu(yz)+\mu^2(zz)}\sqrt{\lambda'^2(y'y')+2\lambda'\mu'(y'z)+\mu'^2(zz)}}$$

然ルニ

$$(xz)=(x'z)=0$$

ナル故

$$0=\lambda(yz)+\mu(zz)$$

$$0=\lambda'(y'z)+\mu'(zz)$$

ナリ。依テ

$$\cos\theta=\frac{-\dfrac{(zz)^2(yy')}{(yz)(y'z)}-\dfrac{(zz)}{(yz)}(yz)-\dfrac{(zz)}{(y'z)}(y'z)+(zz)}{\sqrt{\dfrac{(zz)^2}{(yz)^2}(yy)-2\dfrac{(zz)}{(yz)}(yz)+(zz)}\sqrt{\dfrac{(zz)^2}{(y'z)^2}(y'y')-2\dfrac{(zz)}{(y'z)}(y'z)+(zz)}}$$

$$=-\frac{(zz)(yy')-(yz)(y'z)}{\sqrt{(zz)(yy)-(yz)^2}\sqrt{(zz)(y'y')-(y'z)^2}}$$

$$
=\frac{\left\|\begin{matrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} y_0' & y_1' & y_2' & y_3' \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{\left\|\begin{matrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix}\right\|^2} \sqrt{\left\|\begin{matrix} y_0' & y_1' & y_2' & y_3' \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{matrix}\right\|^2}}
$$

53. *Plücker* 氏ノ線坐標。

二點 (x), (y) ハ一直線 l ヲ決定ス。今此二點ノ坐標ニテ

$$
p_{01}\equiv\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}, \quad p_{02}\equiv\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{vmatrix}, \quad p_{03}\equiv\begin{vmatrix} x_0 & x_3 \\ y_0 & y_3 \end{vmatrix},
$$

$$
p_{23}\equiv\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad p_{31}\equiv\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \quad p_{12}\equiv\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}
$$

ヲ作ル。直線 l 上ノ他ノ任意ノ二點 (z), (t) ノ坐標ハ夫々

$$
z_i=\lambda x_i+\mu y_i,
$$

$$
t_i=\rho x_i+\sigma y_i
$$

ナル故

$$
\begin{vmatrix} z_i & z_j \\ t_i & t_j \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda x_i+\mu y_i & \lambda x_j+\mu y_j \\ \rho x_i+\sigma y_i & \rho x_j+\sigma y_j \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}
$$

ナル故是等ノ比ハ直線 l 上ノ二點ノ選ビ方ニ無關係ナリ。而テ是等ノ比ヲ *Plücker* 氏ノ**線坐標**又ハ**放射坐標** (*Radial coordinates*) ト云ヒ，記號 (p_{ij}) ニ以テ表ス。而テ放射坐標ノ間ニハ

$$
(p|p)\equiv p_{01}p_{23}+p_{02}p_{31}+p_{03}p_{12}
$$

$$
=\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}=0
$$

ナル恒等式存在ス。是ヲ ***Plücker* 氏ノ恒等式**ト云フ。

Plücker 氏ノ線坐標ヲ用フルトキハ二直線 (p_{ij}), (p'_{ij}) ノ交角 θ ハ

$$
\cos\theta=\frac{\Sigma p_{ij}p'_{ij}}{\sqrt{\Sigma p_{ij}^2}\sqrt{\Sigma p'^2_{ij}}},
$$

$$
\sin\theta=\frac{(p|p')}{\sqrt{(pp)}\sqrt{(p'p')}}
$$

但

$$
(pp)=\Sigma p_{ij}^2 \quad (i, j=0, 1, 2, 3 \quad i\neq j)
$$

トナル。

直線 l ガ二平面

$$
(ux)=0, \quad (vx)=0
$$

ニテ與ヘラレタルトキ，比

$$
\pi_{01}:\pi_{02}:\pi_{03}:\pi_{23}:\pi_{31}:\pi_{12}, \text{ 但 } \pi_{ij}=\begin{vmatrix} u_i & u_j \\ v_i & v_j \end{vmatrix}
$$

ヲ直線 l ノ**軸坐標** (*Axial coordinates*) ト云ヒ記號 (π_{ij}) ヲ以テ表ス。而テ放射坐標ノトキト同樣ニ

$$
(\pi|\pi)=0
$$

ナリ。而テ p_{ij}, π_{ij} ガ共ニ同一直線ノ坐標トナルトキニハ

$$
p_{ij}\propto\pi_{kl} \quad (i, j, k, l=0, 1, 2, 3\,;\ i\neq j\neq k\neq l)
$$

ナル關係アリ。(證明略ス，讀者之ヲ試ミヨ)

54. 絶對極平面及絶對共軛線。

$$
(xx)=0
$$

ナル二次方程式ヲ滿足スル點ノ集合ハ二次曲面ニシテ是ヲ**絶對形**

Absolute) ト云フ。

平面

$$(ux)=0$$

ガ與ヘラレタルトキ (u) ナル坐標ヲ有スル點ヲ此平面ノ絶對形ニ關スル**絶對極點**或ハ單ニ**極點**ト云ヒ，其平面ヲ點 (u) ノ**絶對極平面**ト云フ。二平面

$$(ux)=0,$$

$$(vx)=0$$

ノ極點 (u) 及 (v) ノ距離測度ヲ**二平面ノ角**ト稱ス。即二平面ノ角 θ ハ

$$\cos\theta=\frac{(uv)}{\sqrt{(uu)}\sqrt{(vv)}}$$

ニテ與ヘラル。

一直線 $\mathfrak{g}$ 上ノ任意ノ二點ヲ $(u),(v)$ トス。然ルトキ是等ノ點ノ絶對極平面

$$(ux)=0,$$

$$(vx)=0$$

ノ交線 $\mathfrak{g}'$ ヲ直線 $\mathfrak{g}$ ノ**絶對共軛線** (*Absolute conjugate line*) ト云フ。

次ニ $\mathfrak{g}'$ 上ニ任意ノ二點 $(a),(b)$ ヲ取ルトキハ

$$(ua)=(ub)=0,$$

$$(va)=(vb)=0$$

ナル故是等二點ノ絶對極平面

$$(ax)=0,$$

$$(bx)=0$$

ノ交線ハ明ニ $\mathfrak{g}$ ナリ。即直線 $\mathfrak{g}$ ノ絶對共軛線ヲ $\mathfrak{g}'$ トセバ，$\mathfrak{g}'$ ノ

絶對共軛線ハ $\mathfrak{g}$ ナリ。

從テ放射坐標 (p_{ij}) ナル直線ノ絶對共軛線ハ (p_{ij}) ナル軸坐標ヲ有スルコト明ナリ。

55. 橢圓，双曲及抛物的空間。 非ゆうくさりつど空間ノ中，*Riemann* 氏ノ曲率 $\frac{1}{k^2}$ ガ正ノ實數ナル空間ヲ楕圓的空間又ハ *Riemann* 氏ノ空間 $\frac{1}{k^2}$ ガ負ノ實數ナル空間ヲ双曲的空間又ハ *Lobachevski* 氏ノ空間，$\frac{1}{k^2}$ ガ零ナル空間ヲ抛物的空間ト云フ。抛物的空間ハゆうくりつど空間ノ意ナリ。

第二十二節ニ於テ既ニ述タル如ク，楕圓的空間ニ於テハ

$$\frac{1}{k^2}=\text{正}=p^2\ (p\ \text{ハ實數})$$

ナル故 $(\mathfrak{X})$ ハ總テ實ナルコト明ナリ。從テ絶對形ハ虚トナル。又双曲的空間ニ於テハ

$$\frac{1}{k^2}=\text{負}=-p^2\ (p\ \text{ハ實數})$$

ナル故 $\mathfrak{X}_0$ ノミ虚トナリ，他ノ $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3$ ハ皆實トナル。從テ絶對形ノ方程式ハ

$$\mathfrak{X}_1^2+\mathfrak{X}_2^2+\mathfrak{X}_3^2-(|\mathfrak{X}_0|)^2=0$$

トレ 。抛物的即ゆうくりつど空間ニ於テハ絶對形ノ方程式ハ

$$\mathfrak{X}_0=0,\quad \mathfrak{X}_1^2+\mathfrak{X}_2^2+\mathfrak{X}_3^2=0$$

或ハ

$$x_0=0,\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$$

トナル。然ルニ $x_0=0$ ハ無限遠ニアル平面ニシテ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ ハ

虛面ナリ。故ニ絕對形ハ此兩者ノ交リナル無限遠ニ在ル虛線トナル。是ヲ**無限遠ノ虛圓** (*Imaginary circle at infinity*) ト云フ。

56. 合同變更方程式。

$(\mathfrak{X})$ ヲ *Weirstrass* 氏ノ坐標トシ

$$\mathfrak{X}_0:\mathfrak{X}_1:\mathfrak{X}_2:\mathfrak{X}_3=\dot{x}_0:k\dot{x}_1:k\dot{x}_2:k\dot{x}_3$$

トヲクトキハ絕對形ノ方程式ハ

$$k^2\dot{x}_0^2+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2=0$$

トナル。

楕圓的空間ニ於ケル合同變更. 楕圓的空間ニ於テハ $k\dot{x}_0$ ノ代リニ $\dot{x}_0$ トヲクモ差支ナシ。從テ絕對形ノ方程式ハ

$$\dot{x}_0^2+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2=0$$

トナル。次ニ

$$y_0=\dot{x}_0+i\dot{x}_2,\quad y_1=\dot{x}_1+i\dot{x}_3$$

$$y_2=\dot{x}_0-i\dot{x}_2,\quad y_3=\dot{x}_1-i\dot{x}_3$$

即

$$2\dot{x}_0=y_0+y_2,\quad 2\dot{x}_2=i(-y_0+y_2)$$

$$2\dot{x}_1=y_1+y_3,\quad 2\dot{x}_3=i(-y_1+y_3)$$

トヲクトキハ, 絕對形ノ方程式ハ

$$y_0y_2+y_1y_3=0$$

トナル。而テ絕對形ハ

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases}\lambda_1y_1-\lambda_2y_0=0,\\ \lambda_1y_2+\lambda_2y_3=0\end{cases}$$

又ハ

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases}\mu_1y_3-\mu_2y_0=0,\\ \mu_1y_2+\mu_2y_1=0\end{cases}$$

(但 $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ ハ助變數)

ナル直線系 (*System of lines*) ニヨリテ產出 (*Generate*) セラル。此 (I) ナル直線系ヲ第一種母線. (II) ヲ第二種ノ母線ト稱ス。是等ノ母線ノ中同種ノ母線ハ相交ラズ異種ノ母線ハ相交ル。卽絕對形上ノ任意ノ一點ヲ通過シ恆ニ二種ノ母線ヲ引クコトヲ得。從テ絕對形上ノ點 (y) ハ

$$\rho y_0=\lambda_1\mu_1,$$
$$\rho y_1=\lambda_2\mu_1,$$
$$\rho y_2=-\lambda_2\mu_2,$$
$$\rho y_3=\lambda_1\mu_2$$

ニテ表サル。

次ニ第一第二種母線ノ助變數ノ變更方程式

$$\begin{aligned}\lambda_1'&=\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2,\\ \lambda_2'&=\gamma\lambda_1+\delta\lambda_2,\end{aligned}\qquad \begin{vmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{vmatrix}\neq0$$

及

$$\begin{aligned}\mu_1'&=a\mu_1+b\mu_2,\\ \mu_2'&=c\mu_1+d\mu_2\end{aligned}\qquad \begin{vmatrix}a&b\\ c&d\end{vmatrix}\neq0.$$

ヲ考フルニ, 是等ノ變更方程式ニヨリテハ第一種母線ハ第一種ノ母線ニ, 第二種母線モ亦第二種母線ニ變更サル。卽絕對形上ノ點ハ是等ノ變更ニヨリテ不變ナリ。依テ是ハ合同變更ナリ。而テ前者ヲ第一種變更, 後者ヲ第二種變更ト云フ。是等ノ變更ニヨリ點 (y) ハ (y') ニ變更サレ

$$\rho y_0' = \alpha a y_0 + \beta a y_1 - \beta b y_2 + a b y_3,$$

$$\rho y_1' = \gamma a y_0 + \delta a y_1 - \delta b y_2 + \gamma b y_3,$$

$$-\rho y_2' = \gamma c y_0 + \delta c y_1 - \delta d y_2 + \gamma d y_3,$$

$$\rho y_3' = \alpha c y_0 + \beta c y_1 - \beta d y_2 + \alpha d y_3$$

$$\left(\text{變更判別式} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^2\right)$$

トナル。而テ第一種變更方程式ハ

$$\rho y_0' = \frac{\alpha y_0 + \beta y_1}{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}},$$

$$\rho y_1' = \frac{\gamma y_0 + \delta y_1}{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}},$$

$$\rho y_2' = \frac{\delta y_2 - \gamma y_3}{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}},$$

$$\rho y_3' = \frac{-\beta y_2 + \alpha y_3}{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}}.$$

是ヲ書キ換レバ

$$2\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}\, x_0' = (\alpha + \delta) x_0 + (\beta - \gamma) x_1 + i(\alpha - \delta) x_2 + i(\beta + \gamma) x_3,$$

$$2\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}\, x_1' = (-\beta + \gamma) x_0 + (\alpha + \delta) x_1 + i(\beta + \gamma) x_2 + i(-\alpha + \delta) x_3,$$

$$2\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}\, x_2' = i(-\alpha + \delta) x_0 + i(-\beta - \gamma) x_1 + (\alpha + \delta) x_2 + (\beta - \gamma) x_3,$$

$$2\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}\, x_3' = i(-\beta - \gamma) x_0 + i(\alpha - \delta) x_1 + (-\beta + \gamma) x_2 + (\alpha + \delta) x_3$$

トナル。今

$$\alpha = A + iC, \quad \beta = -B + iD$$

$$\delta = A - iC, \quad \gamma = B + iD$$

トヲクトキハ上ノ變更方程式ハ更ニ

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}\, x_0' = A x_0 - B x_1 - C x_2 - D x_3,$$

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}\, x_1' = B x_0 + A x_1 - D x_2 + C x_3,$$

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}\, x_2' = C x_0 + D x_1 + A x_2 - B x_3,$$

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}\, x_3' = D x_0 - C x_1 + B x_2 + A x_3$$

トナル。同様ニシテ第二種變更方程式ハ

$$\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2}\, x_0' = A' x_0 - B' x_1 - C' x_2 - D' x_3,$$

$$\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2}\, x_1' = B' x_0 + A' x_1 + D' x_2 - C' x_3,$$

$$\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2}\, x_2' = C' x_0 - D' x_1 + A' x_2 + B' x_3,$$

$$\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2}\, x_3' = D' x_0 + C' x_1 - B' x_2 + A' x_3.$$

$1, i, j, k$ ナル四ツノ單位ヨリナル復素數

$$P \equiv A + iB + jC + kD$$

但

$$ij = -ji, \quad jk = -kj, \quad ki = -ik.$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

ヲ四元數 (*Quaternion*) ト云フ。是ヲ用フレバ第一種ノ變更方程式ハ

$$\mathfrak{X}' \equiv x_0' + i x_1' + j x_2' + k x_3' = \frac{(A + iB + jC + kD)(x_0 + i x_1 + j x_2 + k x_3)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}},$$

第二種變更方程式ハ

$$\mathfrak{X}' \equiv x_0' + i x_1' + j x_2' + k x_3' = \frac{(x_0 + i x_1 + j x_2 + k x_3)(A' + iB' + jC' + kD')}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2}}$$

トナル。從テ第一,第二種ノ變更ヲ合シタルモノノ方程式ハ

$$\mathfrak{X}' \equiv x_0' + i x_1' + j x_2' + k x_3'$$

$$= \frac{(A + iB + jC + kD)(x_0 + i x_1 + j x_2 + k x_3)(A' + iB' + jC' + kD')}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2}\,\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2}}.$$

依テ楕圓的空間ニ於ケル動運ノ方程式ハ

$$\mathfrak{X}'=P\mathfrak{X}P'.$$

之ハ第一種母線ヲ第一種母線ニ，第二種母線ヲ第二種母線ニ變ズル變更方程式ナリ。之ヲ**運動**ト云フ。此ノ外第一種母線ヲ第二種母線ニ．第二種母線ヲ第一種母線ニ變ズルガ如キ變更アリ。之ヲ**對稱變更**ト云ヒ其方程式ハ

$$\mathfrak{X}'=P\overline{\mathfrak{X}}P'$$

トナル。(讀者自ラ試ミヨ)但

$$\overline{\mathfrak{X}}=x_0-ix_1-jx_2-kx_3$$

$$P=\frac{A+iB+jC+kD}{\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}},\qquad P'=\frac{A'+iB'+jC'+kD'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2+D'^2}}.$$

双曲的空間ニ於ケル合同變更．双曲的空間ニ於テハ $k^2=-1$ トトルモ一般性ヲ失ハズ。從テ絶對形ノ方程式トシテ

$$-\dot{x}_0^2+\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2=0$$

ヲ得。今

$$X=\frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_0},\quad Y=\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_0},\quad Z=\frac{\dot{x}_3}{\dot{x}_0}$$

トヲクトキハ絶對形ノ方程式ハ

$$X^2+Y^2+Z^2=1$$

トナリゆうくりつど空間ノ球ノ方程式ト一致ス。從テ双曲的空間ノ合同變更ヲ求ムルコトハゆうくりつど空間ニ於ケル半徑1ナル球ヲ不變ニスル變更ヲ求ムルコトニ一致ス。然ルニ球上ノ點ヲ助變數ニテ表セバ

$$\dot{x}_0=z\bar{z}+1,$$
$$\dot{x}_1=z\bar{z}-1,$$

$$\dot{x}_2=z+\bar{z},$$
$$\dot{x}_3=-i(z-\bar{z})$$

ニシテ球ヲソレ自身ニ變ズル變更方程式ハ

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\quad \bar{z}'=\frac{\bar{\alpha}\bar{z}+\bar{\beta}}{\bar{\gamma}\bar{z}+\bar{\delta}}$$

ナリ。但 $\bar{z}$ 及 $\bar{\alpha}$ 等ハ夫々 z 及 α 等ノ共軛虚數ニシテ

$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq0.$$

依テ合同變更ノ方程式ハ

$$\rho\dot{x}_0'=(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}+\gamma\bar{\gamma}+\delta\bar{\delta})\dot{x}_0+(\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}+\gamma\bar{\gamma}-\delta\bar{\delta})\dot{x}_1$$
$$+(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+\gamma\bar{\delta}+\bar{\gamma}\delta)\dot{x}_2+i(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\gamma\bar{\delta}-\bar{\gamma}\delta)\dot{x}_3,$$
$$\rho\dot{x}_1'=(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}+\gamma\bar{\gamma}-\delta\bar{\delta})\dot{x}_0+(\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}-\gamma\bar{\gamma}+\delta\bar{\delta})\dot{x}_1$$
$$+(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta-\gamma\bar{\delta}-\bar{\gamma}\delta)\dot{x}_2+i(\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta-\gamma\bar{\delta}+\bar{\gamma}\delta)\dot{x}_3,$$
$$\rho\dot{x}_2'=(\alpha\bar{\gamma}+\bar{\alpha}\gamma+\beta\bar{\delta}+\bar{\beta}\delta)\dot{x}_0+(\alpha\bar{\gamma}+\bar{\alpha}\gamma-\beta\bar{\delta}-\bar{\beta}\delta)\dot{x}_1$$
$$+(\alpha\bar{\delta}+\bar{\alpha}\delta+\beta\bar{\gamma}+\bar{\beta}\gamma)\dot{x}_2+i(\alpha\bar{\delta}-\bar{\alpha}\delta-\beta\bar{\gamma}+\bar{\beta}\gamma)\dot{x}_3,$$
$$\rho\dot{x}_3'=i(\alpha\bar{\gamma}-\bar{\alpha}\gamma+\beta\bar{\delta}-\bar{\beta}\delta)\dot{x}_0+i(\alpha\bar{\gamma}-\bar{\alpha}\gamma-\beta\bar{\delta}+\bar{\beta}\delta)\dot{x}_1$$
$$+i(\alpha\bar{\delta}-\bar{\alpha}\delta+\beta\bar{\gamma}-\bar{\beta}\gamma)\dot{x}_2-(\alpha\bar{\delta}+\bar{\alpha}\delta-\beta\bar{\gamma}-\bar{\beta}\gamma)\dot{x}_3$$

$$\text{變更判別式}=[(\alpha\delta-\beta\gamma)(\bar{\alpha}\bar{\delta}-\bar{\beta}\bar{\gamma})]^2$$

トナル。但此塲合ハ變更判別式ガ正ナルトキナリ。コノ變更ヲ**運動**ト云フ。又變更判別式ガ負ナル如キ變更アリ。之ヲ**對稱變更**ト云ヒ其變更方程式ハ

$$z'=\frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta},\qquad \bar{z}'=\frac{\bar{\alpha}z+\bar{\beta}}{\bar{\gamma}z+\bar{\delta}}$$

ニテ表サル。但

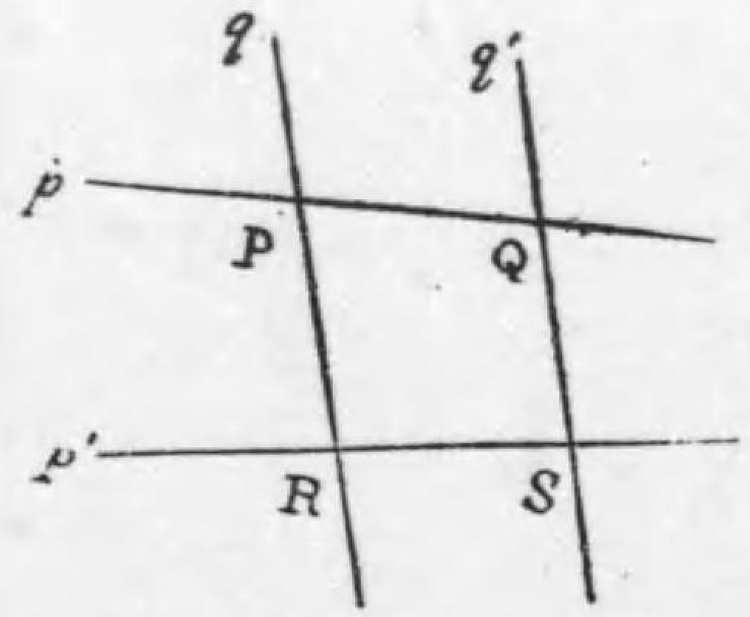
$$\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0,$$

57. 二直線ノ距離。 二直線 p, p' ガ與ヘラレタルトキ，此等ノ二直線ト直角ニ相交ル直線ヲ求メン。p 及 p' ノ *Plücker* 氏ノ線坐標ヲ夫々

$$(1)\qquad p_{ij}=\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix},\qquad p_{ij}'=\begin{vmatrix} x_i' & x_j' \\ y_i' & y_j' \end{vmatrix},\quad (i=0, 1, 2, 3)$$

但

$$(xy)=(x'y')=0,$$



第三十四圖

トス。然ルトキハ，p 及 p' ト相交ル直線ノ *Plücker* 氏線坐標ハ

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x_i+\lambda y_i & x_j+\lambda y_j \\ x_i'+\mu y_i' & x_j'+\mu y_j' \end{vmatrix}$$

ニテ與ヘラル。依テ此直線ガ p 及 p' ニ垂直ナル爲ニハ

$$(3)\qquad \Sigma\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_i+\lambda y_i & x_j+\lambda y_j \\ x_i'+\mu y_i' & x_j'+\mu y_j' \end{vmatrix}=0$$

及

$$(4)\qquad \Sigma\begin{vmatrix} x_i' & x_j' \\ y_i' & y_j' \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_i+\lambda y_i & x_j+\lambda y_j \\ x_i'+\mu y_i' & x_j'+\mu y_j' \end{vmatrix}=0$$

ナルベキナリ。即

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} (xx) & (xx')+\mu(xy') \\ \lambda(yy) & (x'y)+\mu(yy') \end{vmatrix}=0$$

及

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} (xx')+\lambda(x'y) & (x'x') \\ (xy')+\lambda(yy') & \mu(y'y') \end{vmatrix}=0.$$

或ハ

$$\lambda=\frac{(xx)(x'y)+\mu(yy')(xx)}{(xx')(yy)+\mu(xy')(yy)}$$

及

$$\lambda=\frac{\mu(xx')(y'y')-(x'x')(xy')}{(x'x')(yy')-\mu(x'y)(y'y')}.$$

從テ

$$\begin{aligned} &[(xy')(yy)(xx')(y'y')+(x'y)(y'y')(yy')(xx)]\mu^2 \\ &\quad+[(xx')(y'y')(xx')(yy)-(x'x')(xy')(xy')(yy) \\ (7)\qquad &\quad-(yy')(x'x')(yy')(xx)+(xx)(x'y)(x'y)(y'y')]\mu \\ &\quad-(x'x')(xy')(xx')(yy)-(xx)(x'y)(x'x')(yy')=0. \end{aligned}$$

此方程式ノ二根ヲ夫々 μ_1, μ_2 トシ是等ニ應ズル λ ノ値ヲ夫々 λ_1, λ_2 トセバ，p 及 p' ト直角ニ交ハル直線ノ *Plücker* 氏線坐標ハ

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} x_i+\lambda_1 y_i & x_j+\lambda_1 y_j \\ x_i'+\mu_1 y_i' & x_j'+\mu_1 y_j' \end{vmatrix}$$

及

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} x_i+\lambda_2 y_i & x_j+\lambda_2 y_j \\ x_i'+\lambda_2 y_i' & x_j'+\lambda_2 y_j' \end{vmatrix}$$

トナリ，二本存在ス。即非ゆうくりつど空間ニ於テハ與ヘラレタル二直線ト直角ニ交ハル二本ノ直線ガ存在ス。今是等ノ直線ヲ q, q' トシ，p 及 p' トノ交點ヲ夫々 P, Q, R, S（第三十四圖ヲ參照セヨ）トスルトキハ是等ノ點ノ坐標ハ明ニ

$$
\begin{aligned}
&P:(x)+\lambda_1(y)\\
&Q:(x)+\lambda_2(y)\\
(10)\qquad &R:(x')+\mu_1(y')\\
&S:(x')+\mu_2(y')
\end{aligned}
$$

ナリ。然ルニ

$$
\begin{aligned}
&\Sigma(x_i'+\mu_1 y_i')(x_i'+\mu_2 y_i')\\
&\quad=(x'x')+\mu_1\mu_2(y'y')\\
&\quad=(x'x')-\frac{(x'x')(xy')(xx')(yy)+(xx)(x'y)(x'x')(yy')}{(xy')(yy)(xx')(y'y')+(x'y)(y'y')(yy')(xx)}(y'y')\\
&\quad=0
\end{aligned}
$$

依テ R, S ナル p' 上ノ二點ハ互ニ他ノ垂直點 (*Orthogonal point*) ナリ。全ク同樣ニシテ p 上ノ二點 P, Q モ亦互ニ垂直點ナルコトヲ知ル。

又 (6) ヨリ

$$
\lambda_1=\frac{\mu_1\mu_2(xx')(y'y')-\mu_2(x'x')(xy')}{(x'x')(yy')\mu_2-\mu_1\mu_2(x'y)(y'y')}
$$

(7) ヲ用ヒテ

$$
\begin{aligned}
\lambda_1&=-\frac{(x'x')[(xy')(yy)(xx')+(x'y)(yy')(xx)][(xx')+\mu_2(xy')]}{(x'x')[(xy')(yy)(xx')+(x'y)(yy')(xx)][(yy')\mu_2+(x'y)]}\\
&=-\frac{(xx')+\mu_2(xy')}{(x'y)+\mu_2(yy')}
\end{aligned}
$$

依テ

$$
\Sigma(x_i+\lambda_1 y_i)(x_i'+\mu_2 y_i')
$$

$$
\begin{aligned}
&=(xx')+\lambda_1(x'y)+\mu_2(xy')+\lambda_1\mu_2(yy')\\
&=0.
\end{aligned}
$$

即點 P ハ S ノ垂直點ナリ。同樣ニシテ點 Q ハ R ノ垂直點ナリ。從テ直線 q 及 q' ハ互ニ他ノ絕對共軛線ナルコト明ナリ。

距離 PR, QS ヲ夫々 d_1, d_2 ト置クトキハ d_1, d_2 ヲ二直線 p, p' ノ距離ト云フ。今

$$
\begin{aligned}
&P:(x)+\lambda_1(y)\equiv(\mathfrak{X}),\\
&Q:(x)+\lambda_2(y)\equiv(\mathfrak{Y}),\\
&R:(x')+\mu_1(y')\equiv(\mathfrak{X}'),\\
&S:(x')+\mu_2(y')\equiv(\mathfrak{Y}')
\end{aligned}
$$

ト置クトキハ

$$
(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})=(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}')=(\mathfrak{X}'\mathfrak{Y})=(\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}')=0
$$

トナリ，且

$$
p_{ij}=\begin{vmatrix}\mathfrak{X}_i & \mathfrak{X}_j\\ \mathfrak{Y}_i & \mathfrak{Y}_j\end{vmatrix},\quad p_{ij}'=\begin{vmatrix}\mathfrak{X}_i' & \mathfrak{X}_j'\\ \mathfrak{Y}_i' & \mathfrak{Y}_j'\end{vmatrix}.
$$

依テ

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{d_1}{k}&=\frac{\sqrt{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')-(\mathfrak{X}\mathfrak{X}')^2}}{\sqrt{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})}\sqrt{(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')}},\\
\sin\frac{d_2}{k}&=\frac{\sqrt{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')-(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}')^2}}{\sqrt{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})}\sqrt{(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')}}.
\end{aligned}
$$

然ルニ

$$
\Sigma p_{ij}^2=(\mathfrak{X}\mathfrak{X})(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}).^*
$$

---

* $\Sigma p_{ij}=(\mathfrak{X}\mathfrak{X})(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})-(\mathfrak{X}\mathfrak{Y})^2$ ニシテ直線 p ガ絕對形ニ切線ナルトキニ於テノミコノ値ハ零トナル。本節ニ於テハ斯ノ如キ場合ハ之チノゾク。

$$\Sigma p_{ij}'^2=(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')$$

$$(\Sigma p_{ij}p_{ij}')^2\equiv(p|p')^2$$

$$=\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_0 & \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_3 \\ \mathfrak{Y}_0 & \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}_2 & \mathfrak{Y}_3 \\ \mathfrak{X}_0' & \mathfrak{X}_1' & \mathfrak{X}_2' & \mathfrak{X}_3' \\ \mathfrak{Y}_0' & \mathfrak{Y}_1' & \mathfrak{Y}_2' & \mathfrak{Y}_3' \end{vmatrix}^2$$

$$=\begin{vmatrix} (\mathfrak{X}\mathfrak{X}) & 0 & (\mathfrak{X}\mathfrak{X}') & 0 \\ 0 & (\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}) & 0 & (\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}') \\ (\mathfrak{X}\mathfrak{X}') & 0 & (\mathfrak{X}'\mathfrak{X}') & 0 \\ 0 & (\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}') & 0 & (\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}') \end{vmatrix}$$

$$=[(\mathfrak{X}\mathfrak{X})(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')-(\mathfrak{X}\mathfrak{X}')^2][(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')-(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}')^2].$$

故ニ

$$\sin^2\frac{d_1}{k}\sin^2\frac{d_2}{k}=\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')-(\mathfrak{X}\mathfrak{X}')^2}{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')}\cdot\frac{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')-(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}')^2}{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')}$$

(11)

$$=\frac{(p|p')^2}{\Sigma p_{ij}^2\Sigma p_{ij}'^2}.$$

又

$$\Sigma p_{ij}p_{ij}'=\begin{vmatrix} (\mathfrak{X}\mathfrak{X}') & (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}') \\ (\mathfrak{Y}\mathfrak{X}') & (\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}') \end{vmatrix}=(\mathfrak{X}\mathfrak{X}')(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}').$$

依テ

(12) $$\cos^2\frac{d_1}{k}\cos^2\frac{d_2}{k}=\frac{(\Sigma p_{ij}p'_{ij})^2}{\Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}}.$$

$\sin\frac{d_1}{k}\sin\frac{d_2}{k}$ 及 $\cos\frac{d_1}{k}\cos\frac{d_2}{k}$ ヲ夫々二直線 p 及 p' ノ**能率** (*Moment*) 及**準能率** (*Commoment*) ト云フ。

而テ

$$\sin^2\frac{d_1}{k}\sin^2\frac{d_2}{k}=1-\cos^2\frac{d_1}{k}-\cos^2\frac{d_2}{k}+\cos^2\frac{d_1}{k}\cos^2\frac{d_2}{k}$$

ナル故

$$\cos^2\frac{d_1}{k}+\cos^2\frac{d_2}{k}=1+\frac{(\Sigma p_{ij}p'_{ij})^2-(p|p')^2}{\Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}}$$

$$\sin^2\frac{d_1}{k}+\sin^2\frac{d_2}{k}=1-\frac{(\Sigma p_{ij}p'_{ij})^2-(p|p')^2}{\Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}}$$

依テ

(13) $$\Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}\sin^4\frac{d}{k}+\left[(\Sigma p_{ij}p'_{ij})^2-(p|p')^2-\Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}\right]\sin^2\frac{d}{k}+(p|p')^2=0,$$

(14) $$\Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}\cos^4\frac{d}{k}+\left[(p|p')^2-(\Sigma p_{ij}p'_{ij})^2-\Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}\right]\cos^2\frac{d}{k}+(\Sigma p_{ij}p'_{ij})^2=0.$$

能率ハ方程式(13)ノ二根ノ積ノ平方根ニシテ準能率ハ方程式(14)ノ二根ノ積ノ平方根ナリ。而テ二直線 p 及 p' ガ相交ルトキハ

$$(p|p')=0$$

ナル故能率ハ零トナリ，一直線ガ他ノ直線ノ絶對共軛線ト交ルトキハ

$$\Sigma p_{ij}p'_{ij}=0$$

ナル故準能率ガ零トナル。

$k\to\infty$ ナルゆうくりつど空間ニ對シテハ，$\mathfrak{X}_0$ ノ代リニ $k\mathfrak{X}_0$ ト置キ，k^2 ニテ除シ $\frac{1}{k^2}\to 0$ ト置クトキハ

$$\lim_{k\to\infty} k\sin\frac{d}{k}=d$$

ナル故

$$d^2=\frac{(p|p')^2}{(p_{01}^2+p_{02}^2+p_{03}^2)(p'^2_{01}+p'^2_{02}+p'^2_{03})-(p_{01}p'_{01}+p_{02}p'_{02}+p_{03}p'_{03})^2}$$

トナル。是立體解析幾何學ニ於テ熟知セル公式ナリ。

直線 p 及 q ヲ含ム平面ト p' 及 q ヲ含ム平面トノナス角ヲ θ^1 トシ直線 p 及 q' ヲ含ム平面ト p' 及 q' ヲ含ム平面トノ角ヲ θ_2 トスルトキハ，θ_1 及 θ_2 ヲ相交ラザル二直線 p, p' ノナス角ト稱ス。

p 及 q ヲ含ム平面ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ \mathfrak{X}_0 & \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_3 \\ \mathfrak{Y}_0 & \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}_2 & \mathfrak{Y}_3 \\ \mathfrak{X}_0' & \mathfrak{X}_1' & \mathfrak{X}_2' & \mathfrak{X}_3' \end{vmatrix}=0$$

p' 及 q ヲ含ム平面ノ方程式ハ

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ \mathfrak{X}_0' & \mathfrak{X}_1' & \mathfrak{X}_2' & \mathfrak{X}_3' \\ \mathfrak{Y}_0' & \mathfrak{Y}_1' & \mathfrak{Y}_2' & \mathfrak{Y}_3' \\ \mathfrak{X}_0 & \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & \mathfrak{X}_3 \end{vmatrix}=0$$

ナル故

$$sin^2\theta_1=\frac{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')-(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}')}{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')},$$

$$cos^2\theta_1=\frac{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}')^2}{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')}.$$

同様ニ

$$sin^2\theta_2=\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')-(\mathfrak{X}\mathfrak{X}')^2}{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')},$$

$$cos^2\theta_2=\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{X}')^2}{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')}.$$

依テ

$$(15)\quad \Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}\,sin^4\theta+[(\Sigma p_{ij}p'_{ij})^2-(p|p')^2-\Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}]sin^2\theta +(p|p')=0$$

$$(16)\quad \Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}cos^4\theta+[(p|p')^2-(\Sigma p_{ij}p'_{ij})^2-\Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}]cos^2\theta +(\Sigma p_{ij}p'_{ij})^2=0$$

ヲ得。

58. *Clifford*（くりふをーど）氏平行線。

前節ニ於テ空間ニ於ケル二直線ノ距離ガ互ニ合同ナリトセバ

$$\frac{(\mathfrak{X}\mathfrak{X}')^2}{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')}=\frac{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}')^2}{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')}$$

ナル關係ヲ得。此場合ニハ前節 (13) ノ二根ガ相等シキヲ以テ其判別式ハ零トナル，即

$$\{[(p|p')+(\Sigma p_{ij}p'_{ij})]^2-\Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}\}\{[(p|p')-(\Sigma p_{ij}p'_{ij})]^2 -\Sigma p_{ij}^2\Sigma p'^2_{ij}]=0.$$

然ルニ，p, p' ニ垂直ニ交ハル直線 q ノ坐標ハ一般ニハ

$$(p|q)=(p'|q)=\Sigma p_{ij}q_{ij}=\Sigma p'_{ij}q_{ij}=(q|q)=0$$

ヨリ求メラルヽガ此場合ニハ不定トナル，故ニ p, p' ヲ垂直ニ切ル直線ハ無數ナリ。斯ノ如キ二直線 p, p' ヲ *Clifford* 氏平行線ト云フ。

又 p, p' ガ絶對形ヲ切ル點ハ夫々

$$\mathfrak{X}\sqrt{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})}\pm i\mathfrak{Y}\sqrt{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})}),\qquad (\mathfrak{X}'\sqrt{(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')}\pm i\mathfrak{Y}'\sqrt{(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')})$$

ナリ。而テ點 $(\mathfrak{X}\sqrt{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})}+i\mathfrak{Y}\sqrt{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})})$, $(\mathfrak{X}'\sqrt{(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')}+i\mathfrak{Y}'\sqrt{(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')})$

ヲ過ル直線モ，點 $(\mathfrak{X}\sqrt{(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})}-i\mathfrak{Y}\sqrt{(\mathfrak{X}\mathfrak{X})})$ 及 $(\mathfrak{X}'\sqrt{(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')}-i\mathfrak{Y}'\sqrt{(\mathfrak{X}'\mathfrak{X}')})$ ヲ過ル直線モ共ニ全ク絶對形上ニアリ。故ニ p 及 p' ハ絶對形ノ同種ノ母線ノ二ツヲ切ルコトヲ知ル。

Clifford 氏平行線ハ楕圓的空間ニ於テハ實ニシテ，双曲的空間ニ於テハ虛ナルコトヲ容易ニ証スルコトヲ得ベシ。

空間ニ於テ一點ヨリ一ツノ直線ニ常ニ二ツノ *Clifford* 氏ノ平行線ヲ引クコトヲ得。之直線ガ絶對形ヲ切ル二點ヨリ二組ノ異種母線ヲ引クコトヲ得レバナリ。(讀者自ラ證明ヲ試ミヨ)

59. *Clifford* **氏面**。 空間ニ於テ一直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハゆうくりつご幾何ニ於テハ圓壔ナレドモ，楕圓的幾何ニ於テハ然ラズシテ，*Clifford* 氏面ト稱スル曲面トナル。此面ヲ其ノ軸(卽與ヘラレタル直線)ニ垂直ナル平面ニテ切ルトキハ一ツノ圓ヲ得。而テ此ノ圓ハ皆合同ナリ。又軸ヲ含ム平面ニテ之レヲ切レバ互ニ合同ナル等距離曲線(卽チ一種ノ圓)ヲ得。故ニ此面ハ軸ヲ廻轉軸トシテ此等距離曲線ヲ廻轉スルコトニヨリ得ラル。依テ此形ハゆうくりつご空間ノ錨環 (*Anchor ring*) ニ類スレドモ其ノ軸ヲ含ム平面ニテノ切口ハ只一ツノ圓ナル點ニ於テ相違アリ。依テ一面ヨリ見レバ一張双曲體 (*Hyperboloid of one sheet*) ニ類ス。此面ノ各點ハ軸ヨリ與ヘラレタル距離 d ニアリ，從テ軸ノ絶對共軛線ヨリ $\frac{k\pi}{2}-d$ ナル距離ニアリ。故ニ此面ハ二ツノ廻轉軸ヲ有ス。而テ此面上ニハ軸ヨリ等距離ニ在ル直線卽チ *Clifford* 氏平行線ガ含マルヽコト明ナリ。

60. **球** (*Sphere*). 三次空間ニ於テ最モ簡單ナル曲面ハ

球ナリ。 球トハ一定點ヨリ一定距離ニアル點ノ軌跡ナリ。 而テ其定點ヲ球ノ**中心**，一定距離ヲ球ノ**半徑**，中心ノ絶對極平面ヲ**軸平面** (*Axial plane*) ト云フ。

中心 (a). 半徑 r ナル球ノ方程式ハ明ニ

$$\cos^2\frac{r}{k}(aa)(xx)-(ax)^2=0$$

ニシテ軸平面ノ方程式ハ

$$(ax)=0$$

ナリ。球ノ方程式ヨリ明ナル如ク，球ハ $\cos\frac{r}{k}\neq 0$ ノトキハ絶對形ト二重切觸ヲ有スル曲面ニシテ，半徑ガ $\frac{\pi k}{2}$ ナル球ハ一平面，半徑ガ零トナル球ハ二ツ平面ナリ。

中心ガ絶對形上ニアル如キ球ヲ**極限球** (*Limiting sphere*)，中心ガ超無限達點(絶對形外ノ點)ナル如キ球ヲ**等距離面** (*Equidistant Surface*) ト云フ。

球ノ平面切口ハ常ニ圓ナリ。極限球ヲ法線ヲ含ム平面ニテ切レバ極限圓ヲ得。然レドモ他ノ平面ニテノ切口ハ普通ノ圓ナリ。又等距離曲面ヲ軸平面ト交ハラザル平面(二平面ノ交線ガ絶對形外ニ在ルトキ二平面ハ交ハラズト稱ス)ニテノ切口ハ圓ニシテ，軸平面ニ平行ナル平面ニテノ切口ハ極限圓ナリ。且軸平面ト交ハル平面ニテノ切口ハ其交線ヲ軸トスル等距離曲線ナリ。

球上ノ任意ノ一點 (a) ニ於ケル球ノ切平面ノ方程式ハ

$$(ax)(ax)-\cos^2\frac{r}{k}(aa)(ax)=0$$

ニシテ，其極點ノ坐標ハ

$$(aa)(a)-\cos^2\frac{r}{k}(aa)(a)$$

ニシテ明ニ中心 (a) ト (a) トヲ結ブ直線上ニアリ。依テ圓ノ切平面ハ切點ヲ通ル直徑(球ノ中心ヲ通ル直線ヲ直徑ト云フ)ニ垂直ナリ。

次ニ

$$\cos^2\frac{r}{k}(aa)(xx)-(ax)^2=0,$$

$$\cos^2\frac{r'}{k}(bb)(xx)-(bx)^2=0$$

ヲ二ツノ球ノ方程式トス。然ルトキハ二ツノ球ノ交リニ於テハ

$$\left(\cos\frac{r'}{k}\sqrt{(bb)}\,(ax)+\cos\frac{r}{k}\sqrt{(aa)}(bx)\right)$$

$$\times\left(\cos\frac{r'}{k}\sqrt{(bb)}\,(ax)-\cos\frac{r}{k}\sqrt{(aa)}(bx)\right)=0$$

ナル方程式ガ満足サル。即與ヘラレタル二球ノ交リハ

$$\cos\frac{r'}{k}\sqrt{(bb)}\,(ax)\pm\cos\frac{r}{k}\sqrt{(aa)}(bx)=0$$

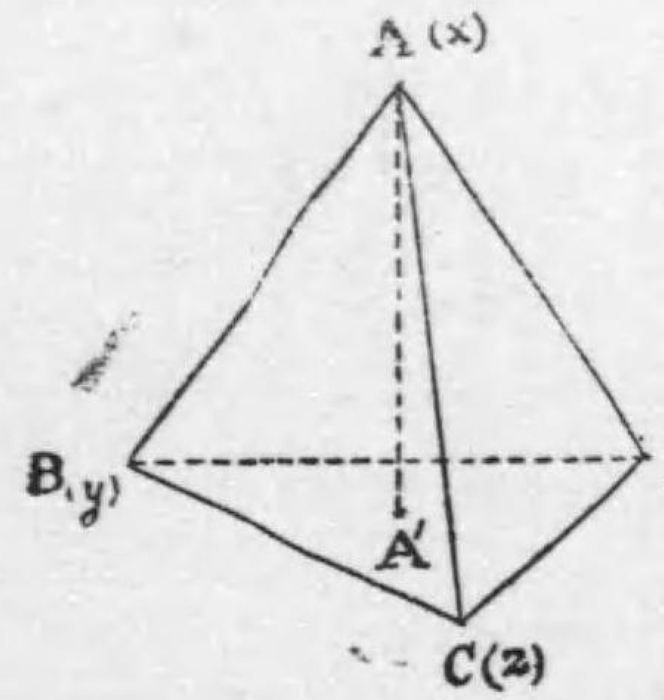
ナル二平面上ニアリ。此平面ヲ二球ノ**根平面**(*Radical plane*)ト云フ，然ルニ球ノ平面切口ハ圓ナル故一般ニ二ツノ球ノ交リハ二ツノ圓ナルコトヲ知ル。

二ツノ球ノ交角ヲ θ トスレバ

$$\cos\theta=\frac{(ab)-\cos\frac{r}{k}\cos\frac{r'}{k}\sqrt{(aa)}\sqrt{(bb)}}{\sin\frac{r}{k}\sin\frac{r'}{k}\sqrt{(aa)}\sqrt{(bb)}}$$

ナリ。(二圓ノ交角ヲ求メシトキト全ク同様ニシテ求メラル。讀者自ラ試ミヨ)。

61. 體積。 面積ノ場合ト同様ニゆうくりつど空間ノ體積ニ相當スル二ツノ函數アリ。例ヘバ四面體ノ體積ニ就テ考ヘンニゆうくりつどノ場合ニ於テハ四面體ノ各頂點ノ函數トシテ與ヘラレタル體積ト，之ヲ小體積ノ和ノ極限値卽定積分ニテ與ヘラレタル體積トハ一致スレドモ非ゆうくりつどノ場合ニ於テハ是等ニ相當スル函數ハ相異ナル。而テ前者ニ相當スル函數ヲ *Sine amplitude* ト稱シ後者ニ相當スル函數ヲ體積(*Volume*)ト云フ。



第三十五圖

Sine amplitude. $ABCD$ ヲ四面體トシ頂點 A, B, C, D ノ坐標ヲ夫々 $(x), (y), (z), (t)$ トス。然ルトキハ

$$\sin(BCD)=\begin{vmatrix}1 & \cos\frac{\overline{BC}}{k} & \cos\frac{\overline{DB}}{k}\\ \cos\frac{\overline{BC}}{k} & 1 & \cos\frac{\overline{CD}}{k}\\ \cos\frac{\overline{DB}}{k} & \cos\frac{\overline{CD}}{k} & 1\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}(yy) & (yz) & (yt)\\ (zy) & (zz) & (zt)\\ (ty) & (tz) & (tt)\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(zz)}\sqrt{(tt)}}$$

然ルニ頂點 A ヨリ面 BCD ニ下セル垂線ノ足ヲ A' トスレバ

$$\sin\frac{\overline{AA'}}{k}=\frac{|x\ y\ z\ t|}{\sqrt{\sum\begin{vmatrix} y_i & y_j & y_k \\ z_i & z_j & z_k \\ t_i & t_j & t_k \end{vmatrix}^2}\sqrt{(xx)}}$$

$$=\frac{|x\ y\ z\ t|}{\begin{vmatrix} (yy) & (yz) & (yt) \\ (zy) & (zz) & (zt) \\ (ty) & (tz) & (tt) \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}\sqrt{(xx)}}.$$

故ニ

$$\sin(BCD)\sin\frac{\overline{AA'}}{k}=\frac{|x\ y\ z\ t|}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}\sqrt{(zz)}\sqrt{(tt)}}.$$

是ヲ四面體 $ABCD$ ノ Sine amplitude ト云ヒ，記號 $\sin(ABCD)$ ヲ以テ之ヲ表ス。卽

$$\sin(ABCD)=\frac{|x\ y\ z\ t|}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}\sqrt{(zz)}\sqrt{(tt)}}.$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} (xx) & (xy) & (xz) & (xt) \\ (yx) & (yy) & (yz) & (yt) \\ (zx) & (zy) & (zz) & (zt) \\ (tx) & (ty) & (tz) & (tt) \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(xx)}\sqrt{(yy)}\sqrt{(zz)}\sqrt{(tt)}}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos\frac{\overline{AA}}{k} & \cos\frac{\overline{AB}}{k} & \cos\frac{\overline{AC}}{k} & \cos\frac{\overline{AD}}{k} \\ \cos\frac{\overline{BA}}{k} & \cos\frac{\overline{BB}}{k} & \cos\frac{\overline{BC}}{k} & \cos\frac{\overline{BD}}{k} \\ \cos\frac{\overline{CA}}{k} & \cos\frac{\overline{CB}}{k} & \cos\frac{\overline{CC}}{k} & \cos\frac{\overline{CD}}{k} \\ \cos\frac{\overline{DA}}{k} & \cos\frac{\overline{DB}}{k} & \cos\frac{\overline{DC}}{k} & \cos\frac{\overline{DD}}{k} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

B', C', D' ヲ夫々頂點 B, C, D ヨリ對邊ニ下セル垂線ノ足トスルトキハ全ク同樣ニシテ

$$\sin(ABCD)=\sin(BCD)\sin\frac{\overline{AA'}}{k}=\sin(CDA)\sin\frac{\overline{BB'}}{k}$$

$$=\sin(DBA)\sin\frac{\overline{CC'}}{k}=\sin(ABC)\sin\frac{\overline{DD'}}{k}$$

ナルコト知ル。從テ $\sin(ABCD)$ ハゆうくりつどノ場合ニ於ケル底面ト高サトノ積ニテ體積ヲ定義セルモノノ k^3 分ノ 1 ノ六倍ニ相當スルモノナリ。卽

$$\lim \sin(ABCD)=\frac{6}{k^3}(\text{四面體 } ABCD \text{ ノ體積})$$

體積. 立體ヲ數多ノ小サキ四面體ニ分チ各四面體ノゆうくりつど體積ヲ求メ其總和ヲ作リ各四面體ノ體積ヲ零ニ收斂セシメタル極限値ヲ以テ體積ト定義ス。卽

$$\lim\left[\sum\frac{k^3}{6}\sin(ABCD)\right]$$

ヲ以テ體積ヲ定義ス。

索　引

ア　行

カ　行

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ　行

正 誤 表

頁數	行 數	誤	正
21	下ヨリ 4	∂z	∂z_2
28	〃 1	$\left(\dfrac{dz_2}{d_1 s}\right)_P$	$\left(\dfrac{d_1 z_2}{d_1 s}\right)_P$
32	〃 3	$\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\ \dfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r}$	$\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\ \dfrac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial r^2}$
44	〃 4	$e^{i\frac{s}{k}}$	$e^{2i\frac{s}{k}}$
55	上ヨリ 8	22. 圓	22. 楕圓
57	下ヨリ 3	$\dot{\mathfrak{X}}$	$\dot{\mathfrak{X}}_2$
61		x ハ全部	$\dot{x}$
62	〃 3,4	AC'	$A'C'$
65	〃 10	$2\beta\gamma+\delta\alpha)\dot{x}_2$	$2(\beta\gamma+\delta\alpha)\dot{x}_2$
68	下ヨリ 8	$(uu)(vv)-(uv)$	$(uu)(vv)-(uv)^2$
72	〃 7	$\dfrac{\mid\ \mid}{a}$	$\dfrac{\lvert k\rvert}{a}$
73	上ヨリ 9	$z+$	$z+\bar{z}$
〃	〃 11	$(\ \ \mathfrak{X})=4y^2$	$(\mathfrak{X}\mathfrak{X})=4y^2$
75	〃 2	$\alpha\ \ +\beta$	$\alpha z+\beta$
78	下ヨリ10	$\lvert Xyz\rvert$	$\lvert Xyx\rvert$
79	下ヨリ 2	三中線	六中線
84	下ヨリ1,2	$AC: x=0,\ CB: x=0$	$AC: x_1=0,\ CB: x_2=0.$
110	〃 8	$A(\ )$	$A(x)$
112	上ヨリ 4	第 ハ	第一ハ
122	下ヨリ 7	$\dfrac{\partial x_j}{\partial s}\ \dfrac{\partial x_k}{\partial s}$	$\dfrac{dx_i}{ds}\ \dfrac{dx_k}{ds}$
126	上ヨリ 9	(y)	$(\mathfrak{Y})$
139	下ヨリ 1	動運	運動
148	〃 4	$(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')-(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}')$	$(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}'\mathfrak{Y}')-(\mathfrak{Y}\mathfrak{Y}')^2$
第一圖ハ倒ナリ			

注意 32, 125 頁ノ *Riemann* 氏曲率トハ一點及其點ニ相接近セル二點ニテ決定サレタル測地曲面(平面)ノ *Gauss* 氏ノ曲率ナリ。

非ゆうくりつど幾何學奥附

大正拾貳年十二月卅壹日印刷
大正拾參年壹月五日發行

（定價金貳圓）

著作者　西內貞吉

發行兼印刷者　東京市神田區錦町三丁目十八番地　博多久吉

發行所　東京市神田區錦町三丁目十八番地　成象堂
電話特神図四五三七番
振替東京五二六〇七番

發賣所
大阪市南區大寶寺町西之丁二十二番地　成象堂　電話特南壹壹七七番　振替大阪七三三三番
東京市神田區錦町參丁目　成海堂　電話特神区三四九六番　振替東京四八三七九番

終