泰和匡文濤編譯

球面三角法講義

商務印書館出版

球面三角法講義

目　次

第一編　大圓及小圓(1–3)

球面三角形(3–7)　球面三角形之面積(8–11)

第二編　球面三角形之決定(12–18)

納披氏之比例式(19–21)

德蘭布魯氏之比例式(21–35)

第三編 直角三角形之解法 (36–51)

第四編 球面三角形一般之解法 (52–75)

第五編 關於E之公式 (76–92)

第六編 雜定理 (93–97)

三線坐標 (97–99)　球面之平均中心 (99–100)

內切圓及外接圓 (100–115)

第七編 關於小圓之定理 (116–136)

第八編 關於多面體之定理 (137–154)

第九編 相似之中心及軸 (155–159)

倒形 (159–163)　射影 (163–172)

第十編 引球面上定點之弧 (173–179)

第十一編 球面三角形之真數解法 (180–188)

第十二編 球面三角法之應用 (189–195)

第十三編 球面星學 射影(196—206)

第十四編 球面星學之問題(207—233)

弦尺,正弦尺及正切尺之製法

以適當之長畫圓周.其對於60°之弦,等於圓之半徑.故決定此長度.由是可作得50°,40°等相應之弦.然90°之正弦.適等於圓之半徑.故以半徑之長爲90°之正弦.由是得80°,70°等相應之正弦之値.

又45°之正切,等於圓之半徑.故以半徑表45°之正切.以下仿正弦之法定之.

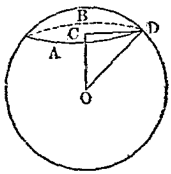
球面三角法講義

第一編

大圓及小圓

1. 從一定點至一定距離之面爲界之體,曰**球**.其表面,曰**球面**.其一定點,曰**球之中心**.由此中心至球面之距離,曰**半徑**.通過中心之直線,其兩端交於球面,則此部分曰**直徑**.

2. 依平面而截球.則其截口常爲圓.



AB爲球面之截口.O爲球之中心.OC爲自O至AB之垂直線.從截口之一點D.各至C,O結成直線.則

$\angle DCO = R\angle$, $\quad \therefore \quad CD = \sqrt{(OD^2 - OC^2)}$.

然OC,OD爲一定.故CD亦爲一定.而D點至定點C有一定之距離.卽知AB之截口,爲自C至定距離之一圓周.

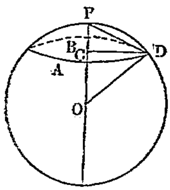
3. 以過中心之平面截球.則其截口爲大圓.反之.不過中心之平面截球.則其截口爲小圓.

大圓得依過球面上之二點以決定之.因通球面上之二點,及球之中心.共有三點.得以決定一平面故也.然球面上之二點.若在直徑之兩端.則三點同在一直線上.而包含無數平面.從而發生無數大圓.由是不能決定.

小圓得依球面上三點以決定之.因小圓不過球之中心故也.

4. 分球之某圓軸.曰垂直於此圓之直徑.此直徑之兩端,關於圓而稱極.

5. 圓之極至圓之周爲等距離.

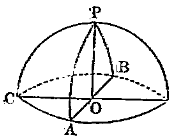


如圖. O爲球之中心. AB爲小圓. C爲小圓中心. P爲小圓之極. 今連結O, P. 則OP通過C. 從小圓周上任意取一點D. 連結PD, OD, CD. 則$PC=PO-CO$. 然PO, CO爲一定. 故PC亦爲一定. 又CD爲小圓之半徑, 亦爲一定. 由是

$PD=\sqrt{(PC^2+CD^2)}$, 卽 PD爲一定之長.

故從極至圓周之距離, 皆相等.

6. 從大圓之極至其大圓周上任意一點作大圓. 則其大圓之弧爲四分圓.



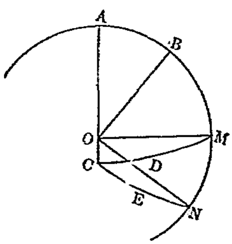
介P爲ABC大圓之極. 則PA爲四分圓.

O爲球之中心. 引PO. 則PO垂直於ABC大圓上. 含PO之大圓APB, 亦垂直於ABC大圓上.

故 $\angle POA=R\angle$.

由是知PA爲四分圓.

7. 二大圓之傾度, 等於其極相結之大圓弧.



O爲球之中心. CD, CE爲二大圓. A, B各爲大圓之極. 則立於弧AB上之中心角AOB, 等於CD, CE之傾度.

今通過AB畫大圓. 交CD於M, 交CE於N, 則從A至C, 從B至C之弧, 均爲四分圓.

故C爲大圓AB之極.

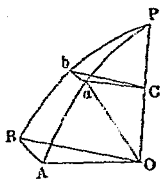
故 $\angle MON$ 爲CD, CE之傾度.

而 $\angle AOM=\angle BON=R\angle$,

$\angle AOM-\angle BOM=\angle BON-\angle BOM$,

卽 $\angle AOB=\angle MON$.

8. 小圓之弧.得以其相對之中心角,及同中心角之大圓弧,與至小圓之極距之中心角.而決定之.



ab 爲小圓之弧.C, P 爲其中心及極.連結 PC.且延長 C 端.必通過球之中心 O.而 aCb 面與 PO 互爲直交.PA, PB 爲一象限.過 AB 畫大圓.則 AOB 與 PO 直交.由是 aCb 面與 AOB 面平行.

故 $\angle aCb=\angle AOB$,

$\therefore\ \widehat{ab}:\widehat{AB}=aC:AO,=aC:aO,$

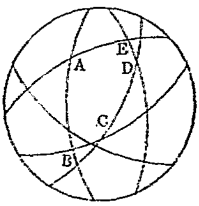
$\therefore\ \widehat{ab}:\widehat{AB}=sinPoa.$

9. 球面上二點間之最短距離爲大圓弧.

今連結二點引直線.爲凡過此二點之各圓之共通弦.而弦最切近之弧爲大圓弧.

球面三角形

10. 球面多角形.乃多數大圓弧所包圍之部分之名稱.



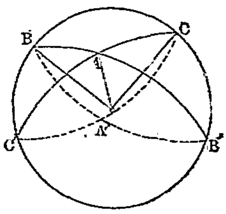
令此多角形爲 ABCDE.則 AB, BC, CD, DE, EA.名多角形之邊.$\angle ABC$, $\angle BCD$.........等.名多角形之角.

引長球面多角形之各邊.其所生之各大圓.任以其一而亦分其球面.且多角形之各邊在半球上.則此名凸多角形.

11. 凸多角形之各邊,比大圓之半周小.

如前圖.設 AB 比半周大 則 AB 之上.於 A 與 B 二點之間.取一點 P.令 AP 等於半周 然合邊 AE 之大圓過 P 點.故此多角形不在半球上.是與假設相反.故各邊均應比半周小.

球面三角形.乃三大圓弧所包圍之三角形.三大圓之直徑不相同.則其三大圓相交.而得八個球面三角形.此八個球面三角形之中.還其二邊或三邊.比四分圓小.則便於推究.因避兩意之式故也.



ABC為球面三角形.O為球之中心.以平面OAB, OBC, OCA作立體角O−ABC.其平面為球面三角△ABC之三邊之測度.而其二面角.等於球面三角形之角.故知球面三角形之一.其他卽可由球面三角形之性質導出.

A'B'C'在ABC所對角頂直徑之兩端.此等球三角.稱為對稱三角形.

12. 球面三角形.其任意二邊之和,比第三邊小.又三邊之和,比大圓周小.

球面三角形之角頂.與球之中心O連結.畫OA, OB, OC.則與此對應之三角形O−ABC,其三個平面角AOB, BOC, COA,任取其中二個平面角之和,比第三平面角小.又此三個平面之和.比四直角小.故測平面角之弧,卽ABC之三邊和,比大圓周小.而二邊之和,比第三邊大.

13. 球面三角形ABC,在BC之極A之同方.AB之極C之同方.CA之極B之同方.各取A' B', C'.各取二點相連.發生A'B'C'三角形.此A'B'C'三角形.名曰ABC三角形之極三角形.

14. 球面三角形之邊.與其極三角形對應之角之和,等於二直角.

引長A'B', A'C',切邊BC於E, F,則點C為弧A'B'之極.

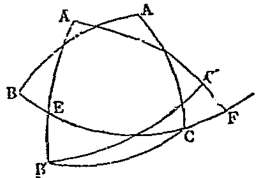
故 $EC=90°$, 同樣, BF亦等於$90°$,

$\therefore\ EC+BF=180°$.

15. 球面三角形之角度.

二角之和,比第三角及180°之和小.

三角之和,比二直角大而比六直角小.



令原三角形爲ABC,其A, B, C對應之邊爲a, b, c,極三角形爲A′B′C′,其A′, B′, C′對應之邊爲a', b', c'. 則

$a'=180°-A$, $A'=180°-a$,

$b'=180°-B$, $B'=180°-b$,

$c'=180°-C$, $C'=180°-c$.

然極三角形之邊爲$a'+b'>c'$,

故 $180°\times 2-(A+B)>180°-C$, 卽 $180°+C>A+B$,

又 $a'+b'+c'=180°\times 3-(A+B+C)$,

故 $A+B+C=180°\times 3-(a'+b'+c')$,

$\therefore$ $A+B+C<180°\times 3$, $\therefore$ $A+B+C<90°\times 6$,

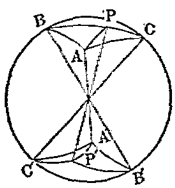
又 $a'+b'+c'<360°$,

故 $A+B+C>180°\times 3-360°$, $\therefore$ $A+B+C>180°$.

16. 球面三角形,從三角之和減去180°.所餘之差.稱球面過剩.

17. 二個三角形ABC, A′B′C′爲對稱,則其積相等.

各相應之邊相等.而爲兩個等邊三角形.故能重合.卽一定三角形ABC.關於球之中心.而迴轉A′B′C′.重合於ABC之上.則AB與A′C′相合.AC與A′B′相合.而對應之邊各各相合.

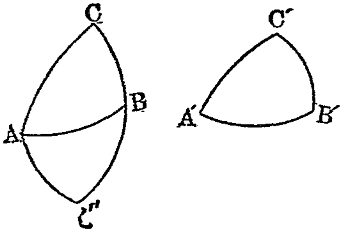


今證明其面積相等. 過A, B, C三點畫一小圓.其極爲P.又過A′, B′, C′三點畫一小圓其極爲P′.則PP′爲直徑.而PAB, P′B′A′; PBC, P′C′B′; PCA, P′A′C′,各爲對稱兩個等邊三角形.今此一對之三角形APB, A′P′B′,相重合.同樣.他之一對等邊三角形亦相重合.由是知三角形ABC與A′B′C′相等.

18. 二個三角形同在球面上.若相對應之各部相等.則合次列四種之一.其兩三角形亦全相等.

1. 二邊及其夾角相等.
2. 一邊及二隣角相等.
3. 三邊相等.
4. 三角相等.

1. 之證明. $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle BAC=\angle B'A'C'$.



A'B' 重於 AB 之上.因夾角相等.故 A'C' 與 AC 相合. B', C' 各與 B, C 相合.故 B'C' 與 BC 相合.由是 ABC 與 A'B'C' 全相合而相等.

2. 之證明.依極三角形之理.得由 1. 導出.

3. 之證明.以弧 A'B' 置於 AB 之上.則點 C' 爲 A. B 之極,以 AC, BC 爲半徑,畫二個小圓.其交點當重合於 C 之上.設若不相合.則取 C 反對之極 C'' 之位置, ABC 卽 ABC'' 對稱之位置,然 $AC=AC''$, $BC=BC''$,由是關於球之中心.而迴轉三角形 ABC'',置於 ABC 之上,全不相合.此由前對稱之證明而知其相等.

4. 之證明 依極三角形之理.得從 3. 導來.

19. 球面三角形之二邊相等.則兩底角亦相等,此二邊所夾之角頂.結對邊之中點.則分頂角爲二等分.

因頂角與對邊中點相連結.則爲三邊相等之對稱三角形.

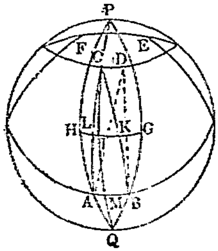
故分爲相等之二個三角形.

故兩底角相等.及頂角爲二等分.

20. 二個球面三角形.其底邊同.其各頂點在過底邊兩端對稱點之小圓周上.則此二個三角形等積.

兩三角形ABC, ABD. A之對稱點爲E. B之對稱點爲F. 頂角C, D在通過上二對稱點之圓周上. 則ABC與ABD爲等積.

證　平行於CEF圓, 作大圓KLG. 交CA於L. 交CB於K.



自極P, Q. 過底之兩端A, B畫大圓PAQ, PBQ. 並過C畫PCQ. 則PE, AQ爲對稱而相等, 又PC等於PE, 而AQ=PC.

∠CPH=∠AQM, 故PA, QC顚倒而重合. 則C與A合. 又PI=QH=90°. 以I與H相合. 故L自I重合, 而AHL=CIL.

同樣. PB, QC顚倒而重合之. 自其相重合而知

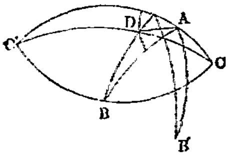
$$BGK=CIK, \qquad \therefore \quad AHL+BKG=CLK.$$

由是所設之球面三角形ABC. 與球面四角形ABGH等積.

同樣. ABD三角形與球面四角形ABGH等積.

∴　三角形ABC=三角形ABD.

21. 立於定底邊上之球面三角形. 其兩底角之和. 一定不易. 則其頂角及頂角之外角之二等分弧. 各過一定點.



設ABC爲球面三角形. BC爲定底邊.

$\angle ABC+\angle ACB$ 爲一定.

則 $\angle B+\angle C=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)+\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$,

$\therefore \quad \frac{1}{2}(\angle B+\angle C)-\angle B=\angle C-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$.

今自底邊之兩端B, C, 以 $\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$ 二等分之角作BD, CD. 相交於D. 因 $\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$ 爲一定, 故D點亦爲一定. 又 BD=CD.

$\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)-\angle B=\angle C-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$.

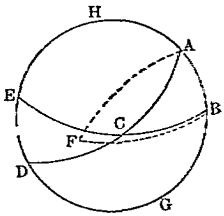
由是 $\angle ABD=\angle ACD$. 　　∴　月形 $ABDB'$=月形 $ACDC'$.

故自D引 CAC' 之垂線, 與自同點引 BAB' 之垂線, 必相等.

故A之外角之二等分線必過D點.

球面三角形之面積

22. 有三角形ABC. 引長底邊AB. 又引長BC, AC, 截底之引長線於E, D. 再引長CA, CB交於F. 則三角形BAF, 與三角形EDC爲對稱. 而其面積相等.



又

月形 ABDC$=$ABC$+$BCD,

月形 BAEC$=$ABC$+$ACE,

月形 CBFA$=$ABC$+$CED,

此三月形相加, 則

半球之面積 $+2ABC=2Ar^2+2Br^2+2Cr^2$.

$\therefore\quad 2\pi r^2+2\triangle=2Ar^2+2Br^2+2Cr^2$,

$\therefore\quad \triangle=r^2(A+B+C-\pi)$,

令 $A+B+C-\pi=E$,

則 $\triangle=Er^2$,

但 $\triangle$ 爲三角形ABC,

r 爲球之半徑.

月形 ABDC$=2Ar^2$,

月形 BAEC$=2Br^2$,

月形 CBFA$=2Cr^2$.

求此月形之面積. 則取有$\angle A$之月形如次.

月形之面積 : 球之全面積

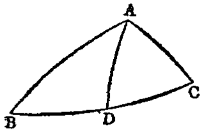
$::$ 月形之角 A : 2π.

$\therefore$ 月形之面積$=\dfrac{4\pi r^2.A}{2\pi}=2Ar^2$.

問　題　一

1. 直徑三角形·其直徑邊所對之角,等於餘二角之和·且比直角大·試證之·

三角形·其外接圓之中心在一邊上·稱直徑三角形·其一邊稱直徑邊·



三角形 ABC·其 BC 邊之中點 D·為外接圓之中心·則

$$\widehat{BD}=\widehat{AD}=\widehat{DC},$$

∴ $\triangle ADB$, $\triangle ADC$ 爲二等邊三角形·而

$$\angle DAC=\angle DCA,\quad \angle DAB=\angle DBA,$$

∴ $\angle ABD+\angle ACD=\angle BAD+\angle CAD=\angle BAC.$

而三角形之三角和,比二直角大·

故其半角 BAC 比直角大·

2. 設大圓周上之四點爲 A, B, C, D. 則

i　$\sin BC\sin AD+\sin CA\sin BD+\sin AB\sin CD=0,$

ii　$\sin BC\cos AD+\sin CA\cos BD+\sin AB\cos CD=0.$

試證之·

i 之證.　$\sin BC\sin AD+\sin AB\sin CD$

$$=\tfrac{1}{2}[2\sin BC\sin AD+2\sin AB\sin CD]$$

$$=\tfrac{1}{2}[\cos(AB+CD+2BC)-\cos(AB+CD)+\cos(AB+CD)-\cos(AB-CD)]$$

$$=\tfrac{1}{2}[\cos(AB+CD+2BC)-\cos(AB-CD)]$$

$$=\tfrac{1}{2}[2\sin(AB+BC)\sin(CD+BC)]$$

$$=\sin AC\sin BD.$$

然弧 AC 自 A 向 C 之方向迴轉,則爲負·自 C 向 A 之方向迴轉,則爲正·故上式之右端爲　$-\sin CA\sin BD.$

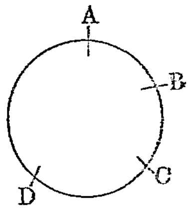
ii 之證. $\sin BC\cos AD+\sin AB\cos CD$

$$=\frac{1}{2}[2\sin BC\cos AD+2\sin AB\cos CD]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(AB+CD+2BC)-\sin(AB+CD)+\sin(AB+CD)-\sin(AB-CD)]$$

$$=\frac{1}{2}[2\cos(AB+BC)\sin(CD+BC)]$$

$$=\cos AC\sin BD.$$



故與i同樣.得 $-\cos AC\sin DB$.

由是

i $\sin BC\sin AD+\sin AB\sin CD=-\sin CA\sin BD$,

$\therefore$ $\sin BC\sin AD+\sin AB\sin CD+\sin CA\sin BD=0.$

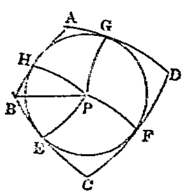
ii $\sin BC\cos AD+\sin AB\cos CD=-\cos AC\sin DB$,

$\therefore$ $\sin BC\cos AD+\sin AB\cos CD+\cos AC\sin DB=0.$

3. 球面四角形.外切於小圓,則其兩兩對邊之和相等.

P為小圓之中心.ABCD為球面四角形外切於小圓之四角.則 $AB+CD=BC+AD$.

設切點為 E, F, G, H. 而此切點,各與中心P相連.又P與B



連結.則弧AB與PH成直角.BC與PE成直角.而 $PH=EP$.

$\therefore$ $\triangle PHB=\triangle PEB$, $BH=BE$,

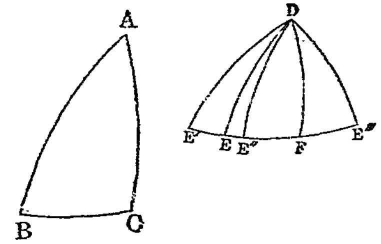
同樣. $CE=CF$, $DF=DG$, $AG=AH$,

$\therefore$ $BH+AH+CF+DF=AG+DG+BE+CE$,

卽 $AB+CD=BC+AD$.

補題.

ABC, DEF 為二個直角三角形.而 $AB=DE$,

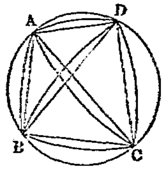


AC=DF, (比象限弧小) 則△ABC與△DEF相等.

今以ABC重於DEF之上.則先以A置於D之上. AC重於DF之上.則C與F合. CB落於FE之上.設AB與DE不相合.則當落於DE, DF之間或外.然任何亦爲不同之長.而與假設相反.只限於DFE'''之對稱形.始能相等.故AB與DF苟相等.則必相合.或爲對稱之形.故BC等於EF.

4. <u>設A, B, C, D同在一小圓周上.則</u>

$\sin\frac{1}{2}CA\sin\frac{1}{2}BD=\sin\frac{1}{2}BC\sin\frac{1}{2}AD+\sin\frac{1}{2}AB\sin\frac{1}{2}CD$. 試證之.



內切於圓之四角形爲ABCD. 引弦AB, BC, CD, AD, 從球之中心.向各弦作垂線.各分弦爲二等分.同樣.對角線AC, BD之弦.亦爲二等分.而此各垂線與半徑所成之角.各爲AB, BC, CD, DA, AC, BD之弧之半.又由德列密氏之定理.知

弦 $AB.\,CD+AD.\,BC=BD.\,AC$,

$\therefore\ \frac{1}{2}AB.\,\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}AD.\,\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}BD.\,\frac{1}{2}AC.$

令外切圓之半徑爲R. 則上式爲

$$R\sin\frac{1}{2}AB.R\sin\frac{1}{2}CD+R\sin\frac{1}{2}AD.R\sin\frac{1}{2}BC$$
$$=R\sin\frac{1}{2}BD.\ R\sin\frac{1}{2}AC,$$

(AB, BC, CD, AD, AC, BD 乃表弧之長)

$$\therefore\ \sin\frac{1}{2}AB.\sin\frac{1}{2}CD+\sin\frac{1}{2}AD\sin\frac{1}{2}BC$$
$$=\sin\frac{1}{2}BD\sin\frac{1}{2}AC.$$

以下凡言圓.皆指大圓而言.

又單稱弧.亦指大圓之弧.

第二編

球面三角形之決定

1. 球面三角形.有六個部分.卽三邊及其所對之三角是也.此六個部分中.任意知其三部.則可求得其他之三部分.

故由下列四種.得以決定三角形.

I 三邊與一角.

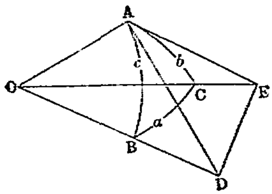
II 二邊及其所對之各角.

III 二邊與夾角及其一邊所對之角.

IV 三角與一邊.

今分論之如次.

I 三邊與一角.



ABC 爲球面三角形.O 爲球之中心.就弧 AB 之 A 點.作切線 AD.交 OB 之延長於 D.又自弧 AC 之 A 點.作切線 AE.交 OC 之延長於 E.連結 DE.則由 $\triangle$ADE 及 $\triangle$ODE.可得次式.

$$DE^2=AD^2+AE^2-2AD.\,AE\cos A,$$

$$DE^2=OD^2+OE^2-2OD.\,OE\cos a.$$

而角 OAD, OAE 爲直角.故

$$OD^2=OA^2+AD^2,\qquad OE^2=OA^2+AE^2,$$ 故

$$DE^2=OA^2+AD^2+OA^2+AE^2-2OD.OE\cos a,\quad\cdots\cdots(1)$$

$$DE^2=AD^2+AE^2-2AD.AE\cos A\quad\cdots\cdots(2)$$

從 (1) 減 (2).則

$$0=2OA^2+2AD.AE\cos A-2OD.OE\cos a,$$

$$\therefore\quad \cos a=\frac{OA}{OE}\cdot\frac{OA}{OD}+\frac{AE}{OE}\cdot\frac{AD}{OD}\cos A,$$

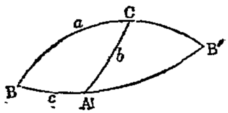
卽 $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$ 1

同樣.

$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B,$..................2

$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$ 3

2. 公式1只就b, c二弧.各比象限小,而證明之耳.然一般之眞理.$\triangle ABC$之中.有一邊a比象限大.則



引長BC, BA.相會於B′.則CA, CB′比象限小.而

$$\cos AB'=\cos AC\cos B'C+\sin AC\sin B'C\cos ACB',$$

$$\therefore\quad \cos(\pi-c)=\cos b\cos(\pi-a)+\sin b\sin(\pi-a)\cos(\pi-C)$$

$$\therefore\quad \cos c=\cos b\cos a+\sin b\sin a\cos C.$$

若b, c二邊均比象限大.則引長AB, AC相交於A′.就A′BC之三角形論.知公式能成立.從可知三角形ABC爲合理.

此1, 2, 3式.曰根原式.

3. 用球面三角形之邊之三角函數.得以表其角.

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

$$\therefore\quad \cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

$$\therefore\quad \sin A=\sqrt{1-\left(\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right)^2}=\sqrt{\frac{\sin^2 b\sin^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}},$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{\sqrt{(1-\cos^2 b-\cos^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos c)}}{\sin b\sin c}.$$

上式之根號 本有±二種.因$\sin b$, $\sin c$, $\sin A$.皆以正量測之.故僅取+之符號.

4. II 二邊與其對角.

由 3.

$$\frac{sinA}{sina}=\frac{\sqrt{(1-cos^2a-cos^2b-cos^2c+2cosacosbcosc)}}{sinasinbsinc},$$

同樣 $$\frac{sinB}{sinb}=\frac{\sqrt{(1-cos^2a-cos^2b-cos^2c+2cosacosbcosc)}}{sinasinbsinc},$$

$$\frac{sinC}{sinc}=\frac{\sqrt{(1-cos^2a-cos^2b-cos^2c+2cosacosbcosc)}}{sinasinbsinc},$$

$$\therefore \quad \frac{sinA}{sina}=\frac{sinB}{sinb}=\frac{sinC}{sinc}\text{..............................}4$$

卽球面三角形.其角之正弦,與對邊之正弦成比例.

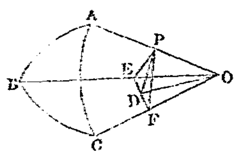
此又可直接以幾何學的證明而證明之.

球面三角形 ABC 之各角頂.與球之中心 O 連結.於 OA 上任意取一點 P.向平面 BOC 作垂線 PD.自 D 至 OB, OC 各作垂線 DE, DF.結 PE, PF, PD.則 PD 垂直於平面 BOC.故凡此平面中之各直線.皆與 PD 成直角.

$$\therefore \quad PE^2=PD^2+DE^2=PO^2-OD^2+DE^2$$

$$=PO^2-(OD^2-DE^2)=PO^2-OE^2,$$

卽 $\angle PEO=R\angle$, $\therefore$ $PE=PO.sinPOE=PO.sinc$,



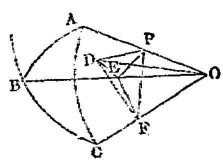
又 $PD=PEsinPED=PEsinB=POsincsinB$,

同樣.

$PD=POsinbsinC$,

$\therefore POsincsinB=POsinbsinC$,

$$\therefore \frac{sinB}{sinb}=\frac{sinC}{sinc}.$$



證明. B, C, b, c 各比象限小.然必比象限小爲限.一般能成立.今 B 角比直角大.則從 P

向平面 OBC 之垂線 PD. 在 OB, OC 之間. 而應落於 $\angle$BOC 之外. 故可得下式.

$$PD=PO\sin c\sin(\pi-B),\qquad PD=PO\sin b\sin C,$$

$$\therefore\quad \sin c\sin(\pi-B)=\sin b\sin C,$$

$$\therefore\quad \frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

5. III <u>二邊與其夾角及其一對角.</u>

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C,\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

又由 4 式.

$$\sin c=\sin a\frac{\sin C}{\sin A},\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

(a) 式中之 $\cos c, \sin c.$ 代以 (b), (c) 之右邊而換置之. 則

$$\cos a=(\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C)\cos b+\frac{\sin a\sin b\cos A\sin C}{\sin A},$$

$$\therefore\quad \cos a\sin^2 b=\sin a\sin b\cos b\cos C+\sin a\sin b\sin C\cot A,$$

此兩邊各以 $\sin a\sin b$ 除之. 則

$$\cot a\sin b=\cos b\cos C+\cot A\sin C,\cdots\cdots\cdots\cdots 5$$

同樣.

$$\cot b\sin a=\cos a\cos C+\cot B\sin C,\cdots\cdots\cdots\cdots 6$$

$$\cot b\sin c=\cos c\cos A+\cot B\sin A,\cdots\cdots\cdots\cdots 7$$

$$\cot c\sin b=\cos b\cos A+\cot C\sin A,\cdots\cdots\cdots\cdots 8$$

$$\cot c\sin a=\cos a\cos B+\cot C\sin B,\cdots\cdots\cdots\cdots 9$$

$$\cot a\sin c=\cos c\cos B+\cot A\sin B.\cdots\cdots\cdots\cdots 10$$

6. IV <u>三角與一邊.</u>

三角形之三邊. 與極三角形之三角. 各為補角. 故令原三角形之三邊為 a, b, c. 其三角為 A, B, C. 極三角形之三邊及三角. 各為 a', b', c', A', B', C'. 則

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

從而

$$\cos(\pi-A')=\cos(\pi-B')\cos(\pi-C')+\sin(\pi-B')\sin(\pi-C')\cos(\pi-a'),$$

即 $-\cos A'=\cos B'\cos C'-\sin B'\sin C'\cos a',$

$\therefore$ $\cos A'=-\cos B'\cos C'+\sin B'\sin C'\cos a',$

同樣.

$$\cos B'=-\cos C'\cos A'+\sin C'\sin A'\cos b'$$

$$\cos C'=-\cos A'\cos B'+\sin A'\sin B'\cos c'$$

又 5 式以 $\sin a$ 乘之, 6 式以 $\sin b\sin C$ 乘之. 則

$$\cos a\sin b=\sin a\cot A\sin C+\sin a\cos b\cos C,$$

$$\sin a\cos b\cos C=\sin b\cot B\sin C\cos C+\cos a\sin b\cos^2 C,$$

前式代入後式而簡約之. 則

$$\cos a\sin b\sin C=\sin a\cot A+\sin b\cot B\cos C,$$

此式之 $\sin a, \cot A$. 試以 $\frac{\sin b\cos A}{\sin B}$ 代入之. 則

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a, \cdots\cdots 11$$

同樣.

$$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b, \cdots\cdots 12$$

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c, \cdots\cdots 13$$

7. 以邊之函數而求角之函數.

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

$$1-\cos A=1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}=\frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c},$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\sin c},$$

令 $2s=a+b+c$, 則

$2s-2c=a+b-c,\qquad 2s-2b=a-b+c,$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-b)}{\sin b\sin c}},\quad\cdots\cdots\cdots\cdots 14$$

又 $1+\cos A=\dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}+1$

$$=\frac{\cos a-\cos b\cos c+\sin b\sin c}{\sin b\sin c}=\frac{\cos a-\cos(b+c)}{\sin b\sin c},$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin(b+c-a)}{\sin b\sin c},$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},\quad\cdots\cdots\cdots\cdots 15$$

由 $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, 得

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}},\quad\cdots\cdots\cdots\cdots 16$$

上式之 $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$. 其根號前之符號均以正數爲限.

因 $\frac{A}{2}$ 任何亦比直角小故也.

由是依 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, 得

$$\sin A=2\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\quad 即$$

$$\sin A=\frac{2}{\sin b\sin c}\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)},\cdots 17$$

然第 4 節 $\sin A=\dfrac{\sqrt{(1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c)}}{\sin b\sin c},$

故 $4\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)$

$$=1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c,$$

試簡單之.令

$$n^2=\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c),$$

則 $4n^2=1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c+2\cos a\cos b\cos c.$

8. 以角之函數而求邊之函數.

由第6節公式11.

$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C},$$

$$1-\cos a=1-\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}=-\frac{\cos A+\cos(B+C)}{\sin B\sin C},$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{a}{2}=-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C},$$

令 $2S=A+B+C$, 則 $2S-2A=B+C-A$,

$$\therefore\quad \sin\frac{a}{2}=\sqrt{\left\{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}\right\}},\quad\cdots\cdots 18$$

又 $1+\cos a=1+\dfrac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}=\dfrac{\cos A+\cos(B-C)}{\sin B\sin C},$

$$\therefore\quad \cos^2\frac{a}{2}=\frac{\cos(A+B-C)\cos(A+C-B)}{\sin B\sin C},$$

即 $\cos\dfrac{a}{2}=\sqrt{\left\{\dfrac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}\right\}},\quad\cdots\cdots 19$

由公式18, 19.得

$$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{\left\{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}\right\}}.\quad\cdots\cdots 20$$

$\dfrac{a}{2}$比直角小,故各根號均當取其正號.

又 $\sin\dfrac{a}{2}$, $\cos\dfrac{a}{2}$, $\tan\dfrac{a}{2}$為實數.

公式 **18, 19, 20** 右邊之S. 乃A, B, C之半和. 故比直角大而比三直角小 故 $\cos S$ 取負值. 而由極三角形 b', c' 之和, 比 a' 更大. 故 $\pi-B, \pi-C$ 之和, 比 $\pi-A$ 更大.

$$\therefore \quad \pi-A<\pi-B+\pi-C, \qquad B+C-A<\pi,$$

$$\therefore \quad S-A<\frac{\pi}{2}.$$

而 $\cos(S-A)$ 有正值.

同様. $\cos(S-B)$, $\cos(S-C)$ 亦有正值.

故 $\cos\frac{a}{2}, \sin\frac{a}{2}, \tan\frac{a}{2}$. 任何亦皆爲實數.

從 $\sin a=2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$,

得 $\sin a=\frac{2}{\sin B\sin C}\{-\cos S\cos(S-B)\cos(S-C)\cos(S-A)\}^{\frac{1}{2}}$,

令 $N=\{-\cos S\cos(S-B)\cos(S-C)\cos(S-A)\}^{\frac{1}{2}}$,

則 $\sin a=\frac{2}{\sin B\sin C}N.$ **21**

納披之比例式

9. 以 $\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=m$,

則 $\sin A=m\sin a, \qquad \sin B=m\sin b$,

$\sin A+\sin B=m(\sin a+\sin b)$,

$$\therefore \quad \frac{\sin A+\sin B}{\sin a+\sin b}=m,$$

又 $\cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C\cos a=m\sin C\sin b\cos a$,

$\cos B+\cos A\cos C=\sin A\sin C\cos b=m\sin C\sin a\cos b$,

此兩式相加. 則

$$(\cos A+\cos B)(1+\cos C)=m\sin C(\sin a\cos b+\sin b\cos a),$$

即　$(\cos A+\cos B)(1+\cos C)=m\sin C\sin(a+b)$,

$$\frac{1+\cos C}{\sin(a+b)}=\frac{m\sin C}{\cos A+\cos B},$$

$$\therefore\quad \frac{(\sin a+\sin b)(1+\cos C)}{\sin(a+b)\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B},$$

$$\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\frac{2\cos^2\frac{C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots 22$$

次作　$\sin A=m\sin a$,　$\sin B=m\sin b$ 之差. 則

$$m=\frac{\sin A-\sin B}{\sin a-\sin b},$$

以此代入 $\frac{1+\cos C}{\sin(a+b)}=\frac{m\sin C}{\cos A+\cos B}$ 式中. 則

$$\frac{1+\cos C}{\sin(a+b)\sin C}=\frac{\sin A-\sin B}{(\sin a-\sin b)(\cos A+\cos B)},$$

即　$\frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}=\frac{\sin a-\sin b}{\sin(a+b)}\cdot\frac{(1+\cos C)}{\sin C}$,

$$\therefore\quad \tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots 23$$

令 22, 23 式爲極三角形之公式. 則原三角形爲

$$\pi-A'=a,\quad \pi-B'=b,\quad \pi-a'=A,\quad \pi-b'=B.$$

以此代入. 則

$$\tan\frac{1}{2}(2\pi-a-b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(2\pi-A-B)}\cot\left(\frac{\pi-c}{2}\right),$$

$$-\tan\frac{1}{2}(a+b)=-\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2},$$

$$\therefore\quad \tan\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 24$$

同樣. $$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 25$$

22, 23, 24, 25 之四式.乃納披氏所發明.故名納披氏之比例式.

「德蘭布魯」之比例式

根原式爲 $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$,

雙方加 1, 且置換 $\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}$, 則

$$1+\cos a=1+\cos b\cos c+\sin b\sin c\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right),$$

$$2\cos^2\frac{a}{2}=1+\cos b\cos c\left(\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}\right)+\sin b\sin c\left(\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=\cos^2\frac{A}{2}+\cos b\cos c\cos^2\frac{A}{2}+\sin b\sin c\cos^2\frac{A}{2}$$

$$+\sin^2\frac{A}{2}+\cos b\cos c\sin^2\frac{A}{2}-\sin b\sin c\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=\{1+\cos(b-c)\}\cos^2\frac{A}{2}+\{1+\cos(b+c)\}\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=2\cos^2\frac{b-c}{2}\cos^2\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{b+c}{2}\sin^2\frac{A}{2},$$

$$\therefore\quad \cos^2\frac{a}{2}=\cos^2\frac{b-c}{2}\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{b+c}{2}\sin^2\frac{A}{2},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a$$

又 $1-\cos a=1-\cos b\cos c-\sin b\sin c\cos A$,

$$2\sin^2\frac{a}{2}=\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-\cos b\cos c\cos^2\frac{A}{2}$$

$$-\cos b\cos c\sin^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{A}{2}\sin b\sin c+\sin^2\frac{A}{2}\sin b\sin c$$

$$=\cos^2\frac{A}{2}(1-\cos b\cos c-\sin b\sin c)$$

$$+\sin^2\frac{A}{2}(1-\cos b\cos c+\sin b\sin c)$$

$$=\cos^2\frac{A}{2}\{1-\cos(b-c)\}+\sin^2\frac{A}{2}\{1-\cos(b+c)\}$$

$$=\cos^2\frac{A}{2}\cdot 2\sin^2\frac{b-c}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\cdot 2\sin^2\frac{b+c}{2},$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{a}{2}=\sin^2\frac{b-c}{2}\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{b+c}{2}\sin^2\frac{A}{2},\cdots\cdots\cdots\cdots b$$

次就納披比例式之22, 23各邊平方之加1. 則

$$1+\tan^2\frac{A+B}{2}=1+\frac{\cos^2\frac{1}{2}(a-b)}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)}\cot^2\frac{C}{2},$$

$$\therefore\quad \sec^2\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{C}{2}},$$

與 a 式同樣. 求得

$$\cos^2\frac{C}{2}=\cos^2\tfrac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\tfrac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{C}{2},$$

$$故\quad \sec^2\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos^2\frac{c}{2}}{\cos^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{C}{2}},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad 26$$

同樣.

$$\sec^2\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin^2\frac{c}{2}}{\sin^2\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{C}{2}},$$

取此平方根. 則

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{C}{2},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 27$$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{C}{2},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 28$$

22 與 27 相乘. 則

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{C}{2},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 29$$

23 與 28 相乘. 則

$$\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{C}{2},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 30$$

德蘭布魯比例式 27, 28, 29, 30 等. 一名卡夫士之定理. 最初由德蘭布魯所發明. 故名.

問題二

1. 設二個三角形. 其一個三角形之二邊, 與他三角形之二邊. 各各相等. 惟此邊之夾角不同. 則大角所對之邊. 比小角所對之邊更大.

二個三角形之等邊爲 b, c. $\angle A$ 所對之邊爲 a, $\angle A'$ 所對之邊爲 a'. 則

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A,$$

$$\cos a'=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A',$$

$$\cos a-\cos a'=\sin b\sin c(\cos A-\cos A'),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+a')\sin\tfrac{1}{2}(a-a')=\sin b\sin c\sin\tfrac{1}{2}(A+A')\sin(A-A').$$

故 $\frac{1}{2}(a-a')$ 之符號. 與 $\frac{1}{2}(A-A')$ 同. 卽

$a>a'$, 則 $A>A'$,

$a<a'$, 則 $A<A'$,

$a=a'$. 則 $A=A'$.

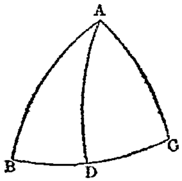
2. D 點爲球面三角形之 BC 上任意一點. 則

$$\frac{\sin BD}{\sin CD}=\frac{\sin BAD}{\sin CAD}\cdot\frac{\sin C}{\sin B},$$

若D點爲BC之中點.則

$$\frac{sin\mathrm{BAD}}{sin\mathrm{CAD}}=\frac{sin\mathrm{B}}{sin\mathrm{C}}=\frac{sin b}{sin c},$$

$$\frac{sin\mathrm{AD}}{sin\mathrm{ABD}}=\frac{sin\mathrm{BD}}{sin\mathrm{BAD}},$$



$$sin\mathrm{AD}=\frac{sin\mathrm{BD}}{sin\mathrm{BAD}}sin\mathrm{B},$$

$$\frac{sin\mathrm{AD}}{sin\mathrm{ACD}}=\frac{sin\mathrm{CD}}{sin\mathrm{CAD}},$$

$$sin\mathrm{AD}=\frac{sin\mathrm{CD}}{sin\mathrm{CAD}}sin\mathrm{C}$$

$$\therefore\quad \frac{sin\mathrm{BD}}{sin\mathrm{BAD}}sin\mathrm{B}=\frac{sin\mathrm{CD}}{sin\mathrm{CAD}}sin\mathrm{C},$$

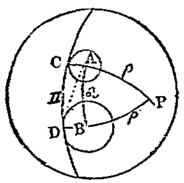
$$\therefore\quad \frac{sin\mathrm{B}}{sin\mathrm{C}}=\frac{sin\mathrm{BAD}}{sin\mathrm{CAD}}\cdot\frac{sin\mathrm{CD}}{sin\mathrm{BD}},$$

若D爲中點.則 $sin\mathrm{CD}=sin\mathrm{BD}$,

$$\therefore\quad \frac{sin\mathrm{B}}{sin\mathrm{C}}=\frac{sin\mathrm{BAD}}{sin\mathrm{CAD}}=\frac{sin b}{sin c}.$$

3. 有二個小圓.各與大圓相接觸.其二個小圓之半徑爲 ρ, ρ'. 極距離爲 δ. 兩觸點間之弧爲 τ. 則

$$sin^2\frac{1}{2}\tau=\frac{sin^2\frac{1}{2}\delta-sin^2\frac{1}{2}(\rho-\rho')}{cos\rho\; cos\rho'}.$$



令兩小圓之中心爲A, B.切點爲C, D.則CA, DB爲大圓CD之垂線.各引長之在大圓之極P點相會.今連結弧AD.則三角形ACD之C角爲直角.故

$cos\mathrm{AD}=cos\rho\; cos\tau$, {見直角三角形解法之部}

又由△ABD.

$$cos\,\mathrm{AD}=cos\delta\; cos\rho'+sin\delta\; sin\rho'\; cos\mathrm{ABD},\cdots\cdots\cdots\cdots\quad a$$

由△PAB.

$$\cos AP=\cos\delta\cos BP+\sin\delta\sin BP\cos ABP,$$

今 CP, DP 各爲一象限. 故

$$\cos\rho=\cos\delta\cos\rho'-\sin\delta\cos\rho'\cos ABD\cdots\cdots\cdots\cdots\beta$$

從 α, β 消去 $\sin\delta\cos ABD$. 則

$$\cos\rho\cos\rho'\cos\tau=\cos\delta\cos^2\rho+\sin^2\rho\cos\delta-\sin\rho\sin\rho'$$

$$=\cos\delta-\sin\rho\sin\rho'.$$

試化 $\cos\tau$ 及 $\cos\delta$ 爲半角. 則

$$\cos\rho\cos\rho'\left(1-2\sin^2\frac{\tau}{2}\right)=\left(1-2\sin^2\frac{\delta}{2}\right)-\sin\rho\sin\rho',$$

$$\cos\rho\cos\rho'.\ 2\sin^2\frac{\tau}{2}=\cos(\rho-\rho')+2\sin^2\frac{\delta}{2}-1$$

$$=2\sin^2\frac{\delta}{2}-2\sin^2\frac{1}{2}(\rho-\rho'),$$

$$\therefore\quad \cos\rho\cos\rho'\sin^2\frac{\tau}{2}=\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{1}{2}(\rho-\rho'),$$

$$\therefore\quad \sin^2\frac{\tau}{2}=\left\{\sin^2\frac{\delta}{2}-\sin^2\frac{1}{2}(\rho-\rho')\right\}/\cos\rho\cos\rho'.$$

注意. A 圓與 B 圓在大圓之兩側. 則其切點 P, P′. 以異符號攷之. 當得同一之結果.

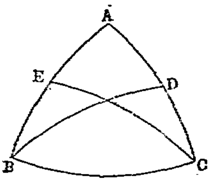
4. 有球面三角形 ABC. 從 B 至 AC 之中點引弧 m_b. 從 C 至 AB 之中點引弧 m_c. 若 $m_b=m_c$, 則 $b=c$, 或

$$\sin^2\frac{1}{2}a=\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c,$$

由 △ABD, △AEC. 則得次式.

$$\cos m_b=\cos C\cos\frac{1}{2}b+\sin C\sin\frac{1}{2}b\cos A,$$

$$\cos m_c=\cos b\cos\frac{1}{2}c+\sin b\sin\frac{1}{2}C\cos A$$



然 $m_b=m_c$, 故 $\cos m_b=\cos m_c$,

$$\therefore\quad \cos c\cos\frac{1}{2}b+\sin C\sin\frac{1}{2}b\cos A$$

$$=\cos b\cos\frac{1}{2}C+\sin b\sin\frac{1}{2}C\cos A,$$

$$\therefore\quad \cos A\left(\sin C\sin\frac{1}{2}b-\sin b\sin\frac{1}{2}c\right)=\cos b\cos\frac{1}{2}C-\cos C\cos\frac{1}{2}b,$$

從 $\triangle ABC$.

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin C\cos A,$$

$$\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\left(\sin c\sin\frac{1}{2}b-\sin b\sin\frac{1}{2}c\right)$$

$$=\cos b\cos\frac{1}{2}C-\cos C\cos\frac{1}{2}b,$$

即 $$(\cos a-\cos b\cos c)\left\{\frac{1}{2\cos\frac{1}{2}b}-\frac{1}{2\cos\frac{1}{2}C}\right\}=\cos b\cos\frac{1}{2}c-\cos c\cos\frac{1}{2}b,$$

$$(\cos a-\cos b\cos c)\left(\cos\frac{1}{2}c-\cos\frac{1}{2}b\right)$$

$$=2\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}b\left(\cos b\cos\frac{1}{2}c-\cos c\cos\frac{1}{2}b\right)$$

$$=2\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}b\left\{\left(2\cos^2\frac{1}{2}b-1\right)\cos\frac{1}{2}c\right.$$

$$\left.-\left(2\cos^2\frac{1}{2}c-1\right)\cos\frac{1}{2}b\right\}$$

$$=2\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}b\left(\cos\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}c\right)\left(2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c+1\right),$$

$\therefore\quad \cos\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}c=0,$ 即 $b=c.$

或

$$-(\cos a-\cos b\cos c)=2\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}b\left(2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c+1\right),$$

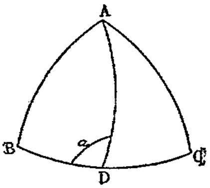
$$(1-2\sin^2\frac{1}{2}b)(1-2\sin^2\frac{1}{2}c)-(1-2\sin^2\frac{1}{2}a)$$

$$=2\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}b(2\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c+1),$$

簡之.則

$$\sin^2\frac{a}{2}=\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c.$$

5. 有球面三角形 ABC. 若 $1+\cos a+\cos b+\cos c=0$. 則各中線爲相當邊之半之補角.試證之.



由 $\triangle ABD$, $\triangle ADC$.

得 $\cos c=\cos m_a\cos\frac{1}{2}a+\sin m_a\sin\frac{1}{2}a\cos\alpha,$

$$\cos b=\cos m_a\cos\frac{1}{2}a+\sin m_a\sin\frac{1}{2}a\cos(\pi-\alpha).$$

但 m_a 爲從 A 向對邊之中線.

$\therefore\quad \cos b+\cos c=2\cos m_a\cos\frac{1}{2}a,$

$$1+\cos c+\cos b+\cos c=2\cos m_a\cos\frac{1}{2}a+1+\cos a,$$

$\therefore\quad 2\cos\frac{1}{2}a\{\cos m_a+\cos\frac{1}{2}a\}=0,$

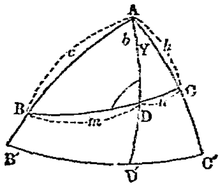
$\therefore\quad \cos m_a=-\cos\frac{1}{2}a=\cos(180^\circ-\frac{1}{2}a),$

$\therefore\quad m_a=180^\circ-\frac{1}{2}a.$

6. 有球面三角形 ABC. 於 BC 上任意取一點 D. 則

$\cot AB\sin DAC+\cot AC\sin DAB=\cot AD\sin BAC,$

$\cot ABC\sin DC+\cot ACB\sin BD=\cot ADB\sin BC.$



依第6節公式8.

$$\cot c\sin AD=\cot ADB\sin\beta+\cos\beta\cos AD,$$

$$\cot b\sin AD=\cot ADC\sin\gamma+\cos\gamma\cos AD,$$

即

$$\cot b\sin AD=-\cot ADB\sin\gamma+\cos\gamma\cos AD.$$

從此消去 $\cot ADB$. 則

$$\frac{\cot c\sin AD-\cos\beta\cos AD}{\sin\beta}=\frac{-\cot b\sin AD+\cos\gamma\cos AD}{\sin\gamma},$$

$$\cot c\sin AD\sin\gamma-\cos\beta\sin\gamma\cos AD=-\cot b\sin AD\sin\beta$$
$$+\cos\gamma\sin\beta\cos AD,$$

$$\cot c\sin AD\sin\gamma+\cot b\sin AD\sin\beta=\cos AD\sin(\beta+\gamma)$$
$$=\cos AD\sin BAC.$$

$$\therefore\quad \cot AB\sin DAC+\cot AC\sin DAB=\cot AD\sin BAC,$$

又依第6節公式6. 得

$$\cot AD\sin m=\cot B\sin ADB+\cos ADB\cos m,$$

$$\cot AD\sin n=\cot C\sin ADB-\cos ADB\cos n,$$

從此兩式消去 $\cot AD$. 則

$$\frac{\cot B\sin ADB+\cos ADB\cos m}{\sin m}=\frac{\cot C\sin ADB-\cos ADB\cos n}{\sin n},$$

$$\cot B\sin ADB\sin n+\cos ADB\cos m\sin n$$
$$=\cos C\sin ADB\sin m-\cos ADB\cos n\sin m,$$

$$\cot B\sin ADB\sin n+\cos ADB\cos(m+n)=\cot C\sin ADB\sin m,$$

$$\cot B\sin n+\cot ADB\cos(m+n)=\cot C\sin m,$$

$$\therefore\quad \cot ABC\sin CD+\cot ADB\cos BC=\cot ACB\sin BD.$$

7. 若A為極而畫大圓 B′DC′. 則

$$\tan DD'\sin B'C'=\tan BB'\sin D'C'+\tan CC'\sin B'D',$$

於前問.

$$\cot AB \sin DAC + \cot AC \sin DAB = \cot AD \sin BAC,$$

而 $AD=\frac{\pi}{2}-DD'$, $AC=\frac{\pi}{2}-CC'$, $AB=\frac{\pi}{2}-BB'$,

測 $\angle DAB$ 爲 $\widehat{B'D'}$, 測 $\angle DAC$ 爲 $\widehat{C'D'}$, 測 $\angle BAC$ 爲 $\widehat{B'C'}$,

$$\therefore \quad \cot\left(\frac{\pi}{2}-BB'\right)\sin C'D'+\cot\left(\frac{\pi}{2}-CC'\right)\sin B'D'$$

$$=\cot\left(\frac{\pi}{2}-DD'\right)\sin B'C',$$

$$\therefore \quad \tan BB' \sin C'D' + \tan CC' \sin B'D' = \tan DD' \sin B'C'.$$

8. 等邊三角形有次之關係.

$$2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{A}{2}=1,$$

$$\because \quad \cos\frac{a}{2}=\sqrt{\left\{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}\right\}}=\sqrt{\left\{\frac{\cos^2(S-A)}{\sin^2 A}\right\}}$$

$$=\frac{\cos(S-A)}{\sin A}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}},$$

$$\therefore \quad 2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{A}{2}=1.$$

9. 等邊三角形 $\tan^2\frac{a}{2}=1-2\cos A$. 又示此三角形成立之界限.

由第6問.

$$2\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{\cos\frac{a}{2}}=\sec\frac{a}{2},$$

此兩邊各自乘. 則

$$\sec^2\frac{a}{2}=4\sin^2\frac{A}{2}, \qquad 1+\tan^2\frac{a}{2}=2(1-\cos A)=2-2\cos A,$$

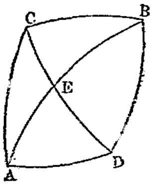
$\therefore\quad \tan^2\frac{a}{2}=1-2\cos A.$

此等邊三角形果能成立.則 $\cos A$ 當比 $\frac{1}{2}$ 小.即 A 比 $\frac{\pi}{3}$ 大.

從而 $\tan\frac{a}{2}$ 比 $\sqrt{3}$ 小, $\frac{a}{2}$ 比 $\frac{\pi}{3}$ 小.

10. 弧 AB, CD 相交於 E. 此爲象限弧. 則

$\cos AEC=\cos AC\cos BD-\cos BC\cos AD,$



$\because\quad \cos BD=\cos BE\cos ED+\sin BE\sin ED\cos BED,$

$\cos AD=\cos AE\cos ED+\sin AE\sin ED\cos AED$

$=\cos AE\sin CE-\sin AE\cos CE\cos BED,$

$\cos AC=\cos AE\cos CE+\sin AE\sin CD\cos BED,$

$\cos BC=\cos BE\cos CE+\sin BE\sin CE\cos BEC$

$=\cos CE\sin AE-\sin CE\cos AE\cos AEC,$

$\therefore\quad \cos AC\cos BD-\cos BC\cos AD$

$=(\sin AE\sin CE+\cos AE\cos CE\cos BED)$

$(\cos AE\cos CE+\sin CE\sin AE\cos BED)$

$-(\cos E\sin AE-\sin CE\cos AE\cos AEC)$

$(\sin AE\cos CE-\sin AE\cos CE\cos BED)$

$=\cos^2 AE\cos^2 CE\cos BED+\sin^2 CE\sin^2 AE\cos BED$

$+\sin^2 AE\cos^2 CE\cos BED+\sin^2 AE\cos^2 CE\cos BED$

$=\cos BED(\cos^2 AE\cos^2 CE+\sin^2 CE\sin^2 AE$

$+\sin^2 AE\cos^2 CE+\sin^2 AE\cos^2 CE)$

$=\cos AEC.$

11. 球面三角形. 設 $b+c=\pi$, 則

$\sin 2B+\sin 2C=0.$ 試證之.

$\because\ b+c=\pi,\qquad \therefore\ b=\pi-c,$

$\therefore\ \sin b=\sin(\pi-c),$

$\therefore\ \dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sin(\pi-c)}{\sin c}=1,$　卽　$\sin B=\sin C.$

是 B 等於 C.

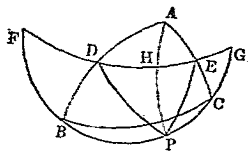
則 b 不可不等於 c.

由是 $B+C=\pi,$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sin 2B+\sin 2C&=2\sin B\cos B+2\sin C\cos C\\&=2\{\sin B\cos B+\sin(\pi-B)\cos(\pi-B)\}\\&=2\{\sin B\cos B-\sin B\cos B\}\\&=0.\end{aligned}$$

12. 有球面三角形 ABC. 連結 AB, AC 之中點 D, E, 作大圓弧. DE 之極爲 P. 作 PB, PE, PC, PD 之大圓. 則 $\angle BPC=2\angle DPE$.

PB, PA, PC 或其引長弧. 交 DE 或其引長弧於. F, H, G.



則　$\cot AE\sin EH=\cot AHE\sin AEH+\cos HE\cos AEH,$

因　$\angle AHE$ 爲直角.　故　$\tan EH=\tan AE\cos AEH,$

同理.

$\tan EG=\tan EC\cos GEC,$

$\therefore\ \tan EH=\tan EG.$

卽 HG 等於 EH 之二倍.

同樣. HF 等於 HD 之二倍.

故知 $\angle BPC$ 等於 $\angle DPE$ 之二倍.

13. 球面三角形之式如次.試證之.

$$\sin b \sin c+\cos b \cos c \cos \mathrm{A}=\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}-\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} \cos a,$$

由根原式得

$$\sin b \sin c=\frac{\cos a-\cos b \cos c}{\cos \mathrm{A}},$$

以此代入原式.則

$$\frac{\cos a-\cos b \cos c}{\cos \mathrm{A}}+\cos b \cos c \cos \mathrm{A}=\frac{\cos a-\cos b \cos c\,(1-\cos^2 \mathrm{A})}{\cos \mathrm{A}}$$

$$=\frac{1}{\cos \mathrm{A}}\{\cos a-\cos b \cos c \sin^2 \mathrm{A}\},$$

然 $\cos a=\dfrac{\cos \mathrm{A}+\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C}}{\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}},$

$$\cos b=\frac{\cos \mathrm{B}+\cos \mathrm{C} \cos \mathrm{A}}{\sin \mathrm{C} \sin \mathrm{A}},$$

$$\cos c=\frac{\cos \mathrm{C}+\cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B}}{\sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B}}.$$

以此代入之.則

$$=\frac{1}{\cos \mathrm{A}}\left\{\frac{\cos \mathrm{A}+\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C}}{\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}-\frac{(\cos \mathrm{B}+\cos \mathrm{C} \cos \mathrm{A})}{\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}\right.$$

$$\left.\frac{(\cos \mathrm{C}+\cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B})\sin^2 \mathrm{A}}{\sin \mathrm{A} \sin \mathrm{B}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\cos \mathrm{A}}\left\{\frac{\cos \mathrm{A}+\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C}-(\cos \mathrm{B}+\cos \mathrm{C} \cos \mathrm{A})(\cos \mathrm{C}+\cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B})}{\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\cos \mathrm{A} \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}\{\cos \mathrm{A}+\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C}-\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C}-\cos \mathrm{A} \cos^2 \mathrm{B}$$

$$-\cos \mathrm{A} \cos^2 \mathrm{C}-\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} \cos^2 \mathrm{A}\}$$

$$=\frac{1}{\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}\{1-(\cos^2 \mathrm{B}+\cos^2 \mathrm{C})-\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} \cos \mathrm{A}\}$$

$$=\frac{1}{\sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C}}\{\sin^2 \mathrm{B} \sin^2 \mathrm{C}-\cos^2 \mathrm{B} \cos^2 \mathrm{C}-\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} \cos \mathrm{A}\}$$

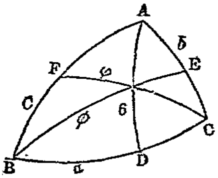
$$=\sin B\sin C-\cos B\cos C\left(\frac{\cos B\cos C-\cos A}{\sin B\sin C}\right)$$

$$=\sin B\sin C-\cos B\cos C\cos a.$$

14. 有球面三角形 ABC. 從各角頂 A, B, C 向對邊引垂線 θ, ϕ, ψ. 則

$$\sin a\sin\theta=\sin b\sin\phi=\sin c\sin\psi$$

$$=\surd(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c),$$



$$\because\quad \frac{\sin B}{\sin\theta}=\frac{\sin ADB}{\sin C}=\sin ADB$$

$$=\sin 90^\circ=1,$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\sin B\sin C,$$

又

$$\sin B=\frac{1}{\sin a\sin c}\surd\{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c\},$$

$$\therefore\quad \sin\theta\sin a=\sin B\sin a\sin c$$

$$=\surd\{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c\},$$

同理.

$$\sin\phi\sin b=\sin\psi\sin c=\sin\theta\sin a.$$

15. 若 θ, ϕ, ψ 為角之二等分線. 則

$$\cot\theta\cos\frac{A}{2}+\cot\phi\cos\frac{B}{2}+\cot\psi\cot\frac{C}{2}=\cot a+\cot b+\cot c,$$

$$\cot\theta\cos\frac{A}{2}\sin b=\cot C\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos b\cos^2\frac{A}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cot C\sin A+\frac{1}{2}\cos b(1+\cos A),$$

而　$\cot C\sin A+\cos b\cos A=\cot c\sin b,$

$$\therefore\quad \cot\theta\cos\frac{A}{2}\sin b=\frac{1}{2}\cos b+\frac{1}{2}\cot C\sin b,$$

$$\therefore\quad \cot\theta\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\cot b+\frac{1}{2}\cot c,$$

同樣.

$$\cot\phi\cos\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\cot c+\frac{1}{2}\cot a,$$

$$\cot\psi\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\cot b+\frac{1}{2}\cot a,$$

以此相加.則

$$\cot\theta\cos\frac{A}{2}+\cot\phi\cos\frac{B}{2}+\cot\psi\cos\frac{C}{2}=\cot a+\cot b+\cot c.$$

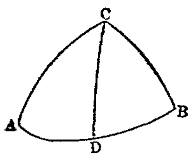
16. 有球面三角形ABC.令AB之中點爲D.則

$$\cos AC+\cos BC=2\cos\frac{1}{2}AB\cos CD,$$

$$\because\quad \cos AC+\cos BC=\cos AC+\cos AB\cos AC+\sin AB\sin AC\cos A$$

$$=\cos AC(1+\cos AB)+2\sin\frac{1}{2}AB\cos\frac{1}{2}AB\sin AC\cos A$$

$$=2\cos AC\cos^2\frac{1}{2}AB+2\sin\frac{1}{2}AB\cos\frac{1}{2}AB\sin AC\cos A$$



$$=2\cos\frac{1}{2}AB(\cos\frac{1}{2}AB\cos AC+\sin\frac{1}{2}AB\sin AC\cos A),$$

又　$\cos CD=\cos AD\cos AC+\sin AD\sin AC\cos A$

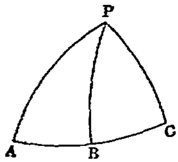
$$=\cos\frac{1}{2}AB\cos AC+\sin\frac{1}{2}AB\sin AC\cos A,$$

$$\therefore\quad \cos AC+\cos BC=2\cos\frac{1}{2}AB\cos CD.$$

17. 有船等速進行.迨終止時.在緯度l_1, l_2, l_3觀測之.其航行之距離爲S.則

$$S=r\cos^{-1}\frac{\sin\frac{1}{2}(l_1+l_3)\cos\frac{1}{2}(l_1-l_3)}{\sin l_2}.$$

又經度之變化.以三緯度而計算.但r爲地球之半徑.



A, B, C 爲船之三位置. P 爲地球之極.

然　AB=BC.

故由前問.

$$\cos PA+\cos PC=2\cos PB\cos\tfrac{1}{2}AC,$$

即　$\sin l_1+\sin l_3=2\sin l_2\cos\frac{1}{2}AC,$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}AC=\cos^{-1}\frac{\sin l_1+\sin l_3}{2\sin l_2}$$

$$=\cos^{-1}\frac{\sin\frac{1}{2}(l_1+l_3)\cos\frac{1}{2}(l_1+l_3)}{\sin l_2},$$

次　$\cos APB=\dfrac{\cos AB-\cos PA\cos PB}{\sin PA\sin PB}$

$$=\frac{\dfrac{\sin l_1+\sin l_3}{2\sin l_2}-\sin l_1\sin l_3}{\cos l_1\cos l_2}$$

$$=\frac{\sin l_3+\sin l_1\cos 2l_2}{\cos l_3\sin 2l_2},$$

同樣.

$$\cos BPC=\frac{\sin l_1+\sin l_3\cos 2l_2}{\cos l_2,\ \sin 2l_2}.$$

第　三　編

直角三角形之解法

第二編既說明三角形之解法.以三邊及三角之六件爲基礎.知其中三件.卽可求得其餘之三件.然直角三角形內有一角爲直角.故知其他之二件.則其餘之關係悉可求得.今列關於直角三角形之公式如次.

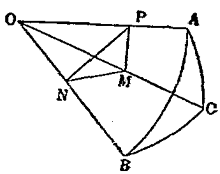
根原式爲

$$\cos C=\cos b\cos a+\sin b\sin a\cos C,$$

$\because\ C=90^\circ,\qquad \therefore\ \cos C=\cos a\cos b.$

此解法最切要.玆別以幾何學的解法證明公式.

1. ABC爲球面直角三角形.C爲直角.O爲球之中心.從OA上任意一點P.向OC引垂線PM.從M向OB引垂線MN.結NP.



則PN爲OB之垂線.

因 $PN^2=PM^2+MN^2=OP^2-OM^2+OM^2-ON^2$

$=OP^2-ON^2.$

故PNO爲直角.

而得證明次式.

$$\frac{ON}{OP}=\frac{ON}{OM}\cdot\frac{OM}{OP},\ \text{卽}\ \cos c=\cos a\cos b,\cdots\cdots 31$$

$$\frac{PM}{OP}=\frac{PM}{PN}\cdot\frac{PN}{OP},\ \text{卽}\ \sin b=\sin B\sin c,\cdots\cdots 32$$

同樣.

$$\sin a=\sin A\sin c,\cdots\cdots 33$$

$$\frac{MN}{ON}=\frac{MN}{PN}\cdot\frac{PN}{ON},\ \text{卽}\ \tan a=\cos B\tan c,\cdots\cdots 34$$

同樣.　$\tan b=\cos A\tan c,$ ……………35

$\frac{PM}{OM}=\frac{PM}{MN}\cdot\frac{MN}{OM}$, 即 $\tan b=\tan B\sin a,$ ……………36

同樣.　$\tan a=\tan A\sin b,$ ……………37

36, 37 相乘而變其形狀. 則

$$\tan A\tan B=\frac{\tan a\tan b}{\sin a\sin b}=\frac{1}{\cos a\cos b}=\frac{1}{\cos c},$$

$\therefore\quad \cos c=\cot A\cot B,$ ………………………………………38

又 34 之兩邊互換而乘 33 式. 則

$$\sin a\cos B\tan c=\tan a\sin A\sin c,$$

$$\therefore\quad \cos B=\frac{\sin A\cos c}{\cos a}=\sin A\cos b,$$

$\therefore\quad \cos B=\sin A\cos b,$ ………………………………………39

同樣. $\cos A=\sin B\cos a,$ ………………………………………40

自 31 至 40 之公式. 足供一般直角三角形解法之用.

餘論. 31 至 40 各公式之 $\cos c$ 與 $\cos a\cos b$. 非同符號不可. 即 $\cos c$, $\cos a$, $\cos b$ 各爲正. 或其中有一爲正之二種. 第一種之三弧. 任何均比象限小. 而第二種之弧. 有一邊比象限小.

又 37 $\tan a$ 與 $\tan A$, 非同符號不可. 因正角之正弦. 自 0° 至 180° 以內爲正故也.

故 a 與 A 俱比象限小. 或俱比象限大. 即 a 與 A 有同一之關係. 同樣. b 與 B 亦有同一之關係.

2. 今應用公式. 進論直角三角形之解法. 然此解法. 其所設之邊, 比大圓之半周小. 而其所設之角, 比二直角小. 有此限制. 不可不知.

3. 解斜邊 c 及一角 A 之三角形.

$$\tan b = \tan c \cos A, \qquad \cot B = \cos c \tan A,$$
$$\sin a = \sin c \sin A.$$

公式之 $\tan b$, $\cot B$. 因 A 比直角小. 而 c 比象限弧小, 或大. 從而爲正. 或爲負. c 比直角小. 而 A 比直角小, 或大. 從而爲正, 或負. 又 c 及 A 俱比直角小, 或俱比直角大. 從而孰爲正. 而發生 b, B 兩意之式. 此可得而決定之.

而 A 增或減. 從而 a 爲同一之變化. 故此式不生兩意.

此種三角形. 常能成立.

4. 解一邊 b 及接角 A 之三角形.

$$\tan c = \frac{\tan b}{\cos A}, \quad \tan a = \tan A \sin b.$$
$$\cos B = \cot b \sin a.$$

由本式得決定 c, a, B 非兩意之式. 故此三角形常可成立.

5. 解二邊 a, b 之三角形.

$$\cos c = \cos a \cos b. \qquad \cot A = \cot a \cot b$$
$$\cot B = \cot b \sin a.$$

此式之 c, A, B 亦非兩意. 故此三角形得以決定.

6. 解斜邊 c 及一邊 a 之三角形.

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}, \quad \cos B = \frac{\tan a}{\tan c}, \quad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

各式任何. 亦可決定其不發生兩意. 故 A 如與 a 有同一之關係. 本題尙爲確實. 則旣知之要件. 自有限制. 卽 c 在 a 與 $\pi - a$ 之間. 是爲必要之要件. 因 $\cos b$, $\cos B$, $\sin A$ 任何亦比 1 小故也.

7. 解兩角 A 及 B 之三角形.

$$\cos c = \cot A \cot B, \ \cos a = \frac{\cos A}{\sin B}, \ \cos b = \frac{\cos B}{\sin A}.$$

c, a, b 得決定非兩意. 又本題之成立. 附帶次之要件.

A 若比直角小. 則 B 在 $\frac{\pi}{2}-A$, 與 $\frac{\pi}{2}+A$ 之間.

若比直角大. 則在 $\frac{\pi}{2}-(\pi-A)$ 與 $\frac{\pi}{2}+(\pi-A)$ 之間.

即在 $A-\frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{3}{2}\pi-A$ 之間.

8. 有一邊A及對角A之三角形之解法.

$$\sin c=\frac{\sin a}{\sin A},\ \sin b=\tan a \cot A,\quad \sin B=\frac{\cos A}{\cos a}.$$

因求 $\sin c$ 之項有兩意. 故 c 亦有兩值. 從而由 $\cos c=\cos\quad\cos b$, $\cos c=\cot A\cot B$ 之方程式. c 之兩值相當之解法. 各有一種.

由是一般三角形有兩様解法.

然 a 等於 A, 則只有一解.

又 a 及 A 各爲直角. 則 b 及 B 不可決定.

今此以圖解之. 滿足所設之形狀之三角形. 爲 ABC. 引長 AB, AC. 再交於 A′. 則 A′BC 亦滿足所設之形狀.

因 $\sin c=\sin(180°-c)$ 而 BC 等於所設之邊 A=A′ 故也.

若 a=A, 則 c, b, B 爲直角. 而 A 爲 BC 之極. A′BC 與 ABC 爲對稱三角形而相等. 即祇有一解法.

又 a 及 A 爲直角. 則 B 爲 AC 之極. B 與 b 相等而爲不定.

今適合三角形所必要之條件. 爲須保持 A 與 a 有同一之關係而變化之. 而

a 及 A 爲銳角. 則 a 比 A 小.

a 及 A 爲鈍角 則 a 比 A 大.

問　題　三

1. 有球面三角形 ABC. 其 C 爲直角. 試證明次所列之五式.

(I) $\sin^2\frac{c}{2}=\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}$,

$\because\quad \cos c=\cos b\cos a,$

$\therefore\quad 1-\cos c=1-\cos b\cos a,$

$$\sin^2\frac{c}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos b\cos a),$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(2\cos^2\frac{b}{2}-1\right)\left(2\cos^2\frac{a}{2}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-4\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{a}{2}+2\cos^2\frac{b}{2}+2\cos^2\frac{a}{2}-1\right\}$$

$$=\cos^2\frac{b}{2}+2\cos^2\frac{a}{2}-2\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}$$

$$=\cos^2\frac{b}{2}-\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{a}{2}$$

$$=\cos^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{a}{2}.$$

(II) $\tan\frac{1}{2}(c+a)\tan\frac{1}{2}(c-a)=\tan^2\frac{b}{2}$,

$\because\quad \frac{\cos c}{\cos a}=\cos b,$

$\therefore\quad \frac{1-\frac{\cos c}{\cos a}}{1+\frac{\cos c}{\cos a}}=\frac{1-\cos b}{1+\cos b},\qquad \therefore\quad \frac{\cos a-\cos c}{\cos a+\cos c}=\frac{1-\cos b}{1+\cos b},$

$$\frac{2\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{a-c}{2}}{2\cos\frac{a+c}{2}\cos\frac{a-c}{2}}=\tan^2\frac{b}{2},$$

$$\tan\frac{a+c}{2}\tan\frac{a-c}{2}=\tan^2\frac{b}{2}.$$

(III) $\sin(c-b)=\tan^2\frac{A}{2}\sin(c+b)$,

$$\cos A=\frac{\tan b}{\tan c},\qquad 1+\cos A=\frac{\tan c+\tan b}{\tan c},$$

$$1-\cos A=\frac{\tan c-\tan b}{\tan c},$$

$$\therefore\ \frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{\tan c-\tan b}{\tan c+\tan b}=\frac{\sin c\cos b-\sin b\cos c}{\sin c\cos b+\sin b\cos c}=\frac{\sin(c-b)}{\sin(c+b)},$$

$$\therefore\ \tan^2\frac{A}{2}=\frac{\sin(c-b)}{\sin(c+b)},\qquad \therefore\ \sin(c-b)=\sin(c+b)\tan^2\frac{A}{2}.$$

(IV) $\sin a\tan\frac{1}{2}A-\sin b\tan\frac{1}{2}B=\sin(a-b)$,

$$\sin a\tan\frac{1}{2}A-\sin b\tan\frac{1}{2}B=\frac{\sin A}{\sin B}\sin b\tan\frac{A}{2}-\sin b\tan\frac{1}{2}B$$

$$=\frac{\sin b}{\sin B}\left\{\sin A\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{1}{2}B\sin B\right\}$$

$$=\frac{\sin b}{\sin B}\left\{\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}-\frac{\sin\frac{A}{2}\ 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{1}{2}B}\right\}$$

$$=\frac{2\sin b}{\sin B}\left\{\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right\}$$

$$=\frac{\sin b}{\sin B}\left\{1-2\sin^2\frac{B}{2}-(1-2\sin^2\frac{A}{2})\right\}$$

$$=\frac{\sin b}{\sin B}\left\{\cos B-\cos A\right\}$$

$$=\frac{\tan b}{\tan B}\cos b-\frac{\cos A}{\sin B}\sin b$$

$$=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$

$$=\sin(a-b).$$

(V) $\sin(c-a)=\sin b\cos a\tan\frac{1}{2}B$,

$\sin(c-a)=\tan b\cos c\tan\frac{1}{2}B$,

$$\sin(c-a)=\sin c\cos a-\sin a\cos c$$

$$=\sin c\cos a\sin b\left(1-\frac{\sin a}{\cos a}\,\frac{\cos c}{\sin c}\right)/\sin b$$

$$=\frac{\sin b\cos a}{\sin B}(1-\tan a\cot c)$$

$$=\frac{\sin b\cos a}{\sin B}(1-\cos B)$$

$$=\sin b\cos a\tan\frac{1}{2}B,$$

$$\sin(c-a)=\sin c\cos a-\cos c\sin a$$

$$=\tan b\cos c\sin a\left(\frac{\sin c\cos a}{\cos c\sin a}\right)-1\Big)/\tan b$$

$$=\tan b\cos c\sin a(\tan c\cot a-1)/\tan b$$

$$=\tan b\cos c\left\{\frac{1}{\cos B}-1\right\}\frac{\sin a}{\tan b}$$

$$=\tan b\cos c\left\{\frac{1-\cos B}{\cos B}\right\}\cot B$$

$$=\tan b\cos c\tan\frac{1}{2}B.$$

2. 球面三角形ABC. 其C爲直角. 而A非等於直角. 又b, c任何亦比$\pi/2$小或大. 從此關係. 且$\cos A=\cos^2 a$, 則$b+c=\frac{1}{2}\pi$或$=\frac{3}{2}\pi$, 試證之.

$\because\quad \cos A=\cos a\sin B=\cos^2 a$,

$\therefore\quad \cos a=0$, 　　或　$\sin B=\cos a$,

然 $\cos a$ 不能爲零. 故 $\cos \mathrm{A}$ 亦不能爲零.

$\therefore \quad \sin \mathrm{B}=\cos a,$

又 $\cos(b+c)=\cos b\cos c-\sin b\sin c$

$$=\cos^2 b\cos a-\sin^2 b/\sin \mathrm{B}$$

$$=\frac{1}{\cos a}\{\cos^2 b\cos^2 a-\sin^2 b\}$$

$$=\frac{1}{\cos a}\{\cos^2 a-(1+\cos^2 a)\sin^2 b\}$$

$$=\frac{1}{\cos a}\left\{\cos^2 a-(1+\cos^2 a)\sin^2 a\frac{\sin^2 \mathrm{B}}{\sin^2 \mathrm{A}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\cos a}\{\cos^2 a-\cos^2 a(1-\cos^4 a)/\sin^2 \mathrm{A}\}$$

$$=\frac{1}{\cos a}\{\cos^2 a-\cos^2 a(1-\cos^2 \mathrm{A})/\sin^2 \mathrm{A}\}$$

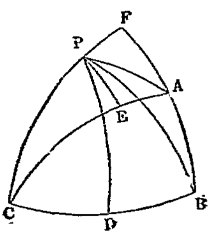
$$=\frac{1}{\cos a}\{\cos^2 a-\cos^2 a\}=0,$$

$\therefore \quad \cos(b+c)=0.$

故知 b, c 任一比直角小. 則 $b+c=\frac{\pi}{2}$,

又任一比直角大. 則 $b+c=\frac{3}{2}\pi$.

3. 試用幾何學的證法. 證明納披氏之比例式.



有 $\triangle$ABC. 從 B 及 C 之兩端. 作 $\angle \mathrm{PBC}=\angle \mathrm{PCB}=\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})$. 引 $\widehat{\mathrm{PB}}$. $\widehat{\mathrm{PC}}$ 會於 P 點. 而連結 PA. 又從 P 向 BC, CA, BA 各作垂線 PD, PE, PF. 則

$$\angle \mathrm{PCE}=\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})-\mathrm{C}=\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{C}),$$

$$\angle \mathrm{ABP}=\mathrm{B}-\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})=\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{C}),$$

又 $PC=PB$, $\therefore$ $\triangle PCE=\triangle FBP$, $\therefore$ $CE=BF$,

又 $AF=AE$,

而 $CE=\frac{1}{2}(b+c)$, $AF=\frac{1}{2}(b-c)$, $\angle FAP=\angle PAE$,

故由公式.

$$tan\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{tan\,PF}{sin\frac{1}{2}(b+c)},\quad tan\tfrac{1}{2}(\pi-A)=\frac{tan\,PF}{sin\frac{1}{2}(b-c)},$$

$$\therefore\quad tan\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{sin\frac{1}{2}(b-c)}{sin\frac{1}{2}(b+c)}tan\tfrac{1}{2}(\pi-A),$$

$$tan\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{sin\frac{1}{2}(b-c)}{sin\frac{1}{2}(b+c)}cot\tfrac{1}{2}A,$$

又 $\angle CPE=\angle BPF$, $\therefore$ $\angle CPB=\angle FPE$,

卽 $\angle CPD=\angle FPA=\angle APE$,

故由公式.

$$tan\tfrac{1}{2}(B+C)=\frac{cot\,CPD}{cos\,CP},$$

$$tan\tfrac{1}{2}(\pi-A)=\frac{cos\,APE}{cos\,PA},$$

$$\therefore\quad \frac{tan\frac{1}{2}(B+C)}{tan\frac{1}{2}(\pi-A)}=\frac{cos\,PA}{cos\,CP}=\frac{cos\frac{1}{2}(b-c)\,cos\,PE}{cos\frac{1}{2}(b+c)\,cos\,PF},$$

$$\frac{tan\frac{1}{2}(B+C)}{tan\frac{1}{2}(\pi-A)}=\frac{cos\frac{1}{2}(b-c)}{cos\frac{1}{2}(b+c)},$$

$$\therefore\quad tan\tfrac{1}{2}(B+C)=\frac{cos\frac{1}{2}(b-c)}{cos\frac{1}{2}(b+c)}cot\tfrac{1}{2}A.$$

4. 從直角三角形之直角頂,向對邊引垂弧 δ. 則

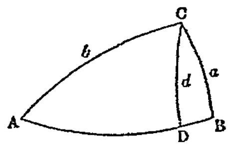
$$cot\delta=\sqrt{(cot^2a+cot^2b)},$$

$$\because\quad sin\,\delta=sin\,A.\,sin\,b=\frac{sin\,a}{sin\,c}sin\,b.$$

又 $\cos\delta=\sqrt{1-\sin^2\delta}$

$$=\sqrt{\left\{1-\frac{\sin^2 a\sin^2 b}{\sin^2 c}\right\}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sin^2 c-\sin^2 a\sin^2 b}}{\sin c},$$



$$\therefore\quad \cot\delta=\frac{\sqrt{\sin^2 c-\sin^2 a\sin^2 b}}{\sin a\sin b}$$

$$=\frac{\sqrt{\{1-\cos^2 c-(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)\}}}{\sin a\sin b}$$

$$=\frac{\sqrt{\{1-\cos^2 c-1+\cos^2 a+\cos^2 b-\cos^2 a\cos^2 b\}}}{\sin a\sin b}$$

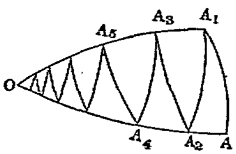
$$=\frac{\sqrt{\{\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos^2 a\cos^2 b\}}}{\sin a\sin b}$$

$$=\frac{\sqrt{\{\cos^2 a(1-\cos^2 b)+\cos^2 b(1-\cos^2 a)\}}}{\sin a\sin b}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{\cos^2 a\sin^2 b+\cos^2 b\sin^2 a}{\sin^2 a\sin^2 b}\right\}}$$

$$=\sqrt{\{\cot^2 a+\cot^2 b\}}.$$

5. 有球面三角形 OAA_1. 其 A_1 爲直角. A 爲銳角. 而 A_1A_2 爲 OA 之垂弧. A_2A_3 爲 OA_1 之垂弧. 以下同樣作垂弧, 以至 n 無限大. 則 A_nA_{n+1} 可消失. 試證之. 並求 $\cos AA_1\ \cos A_1A_2\ \cos A_2A_3\ \cos A_3A_4\cdots\cdots$ 之值.



因 A 爲銳角. 故得決定角 O 爲銳角或鈍角. 而就題之要件說明之.

由公式得

$$\tan AA_1=\tan OA\cos A.$$

然 A 爲銳角. 故 $\cos A$ 爲正. 而 $\tan AA_1$, $\tan OA$ 均爲正, 或均爲負. 故 AA_1, OA 均比直角小, 或均比直角大.

又 $\cos OA = \cos OA_1 \cos AA_1$.

由是考之. AA_1 比直角小. 則 OA_1, OA 均比直角小, 或大. 而

$$\tan OA_1 = \tan OA \cos O.$$

其 $\tan OA_1$, $\tan OA$ 採同一之符號. 故 $\cos O$ 爲正. 而 O 比直角小.

故本題取 AA_1 比直角小而說明之.

$$\tan OA_1 = \tan OA \cos O,$$

$$\tan OA_2 = \tan OA_1 \cos O = \tan OA \cos^2 O,$$

$$\tan OA_3 = \tan OA_2 \cos O = \tan OA \cos^3 O,$$

$$\tan OA_4 = \tan OA_3 \cos O = \tan OA \cos^4 O,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tan OA_n = \tan OA \cos^n O.$$

就此結果言. OA 爲一定不易. 而 $\cos O$ 比 1 小. 故 $\cos^n O$ 之 n 爲無限大. 則可消失.

從而 $\tan OA_n$ 亦可消失.

又 $\sin A_n A_{n+1} = \sin OA_n \sin O$.

由公式. 亦可知 $\sin A_n A_{n+1}$ 可以消失.

次求 $\cos AA_1 \cos A_1A_2 \cdots\cdots$ 之值.

$$\cos AA_1 = \frac{\cos OA}{\cos OA_1}, \qquad \cos A_1A_2 = \frac{\cos OA_1}{\cos OA_2},$$

$$\cos A_2A_3 = \frac{\cos OA_2}{\cos OA_3}, \qquad \cos A_3A_4 = \frac{\cos OA_3}{\cos OA_4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cos A_nA_{n+1} = \frac{\cos OA_n}{\cos OA_{n+1}},$$

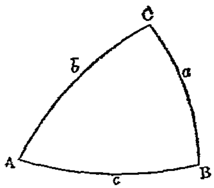
$\therefore\quad \cos AA_1 \cos A_1A_2 \cos A_2A_3 \cos A_3A_4 \cdots\cdots \cos A_n \cos A_{n+1}$

$$=\frac{\cos OA}{\cos OA_1}\cdot\frac{\cos OA_1}{\cos OA_2}\cdot\frac{\cos OA_2}{\cos OA_3}\cdot\frac{\cos OA_3}{\cos OA_4}\cdots\cdots\frac{\cos OA_n}{\cos OA_{n+1}}$$

$$=\frac{\cos OA}{\cos OA_{n+1}}=\cos OA.$$

因 n 爲無限大. 則 $\cos OA_{n+1}=1$ 故也.

6. 有直角三角形 ABC. 其 A 不等於直角而等於 a. 則 c 及 b 各等於象限.



C 爲直角. 則於

$$\left.\begin{aligned}\tan a&=\tan A\sin b,\\ \sin a&=\sin A\sin c,\end{aligned}\right\}$$

而　　$a=A$,

$\therefore\quad \tan a=\tan a\sin b,\qquad \sin a=\sin a\sin c,$

$\therefore\quad \sin b=1=\sin 90^\circ,\qquad \sin c=1=\sin 90^\circ,$

$\therefore\quad b=c=90^\circ.$

7. 有三角形 ABC. 從 C 向 AB 作垂弧 δ. 則

$$\cos\delta=\csc(\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos a\ \cos b\ \cos c)^{\frac{1}{2}}.$$

由例題 4.　$\cos\delta=\sqrt{\left(1-\frac{\sin^2 a}{\sin^2 c}\sin^2 b\right)}$,

$$\cos\delta=\frac{1}{\sin c}\sqrt{\{\sin^2 c-\sin^2 a\sin^2 b\}}$$

$$=\csc c\sqrt{\{1-\cos^2 c-1+\cos^2 a+\cos^2 b-\cos^2 a\cos^2 b\}}$$

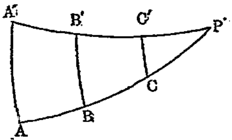
$$=\csc c\{\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos^2 a\cos^2 b\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\csc c\{\cos^2 a+\cos^2 b-2\cos a\cos b\cos c\}^{\frac{1}{2}}.$$

8. A, B, C. 在球面上同一大圓周上. 引 AA′, BB′, CC′ 弧. 各與 ABC 成直角 (凡同方向爲正. 異方向爲負.) A′, B′, C′ 又在同一大圓周上. 則

$$\tan AA' \sin BC + \tan BB' \sin CA + \tan CC' \sin AB = 0.$$

令 ABC 大圓與 A′B′C′ 大圓相交於 P 點. 則



$$\tan AA' = \tan P \sin PA,$$

$$\tan BB' = \tan P \sin (PA - AB),$$

$$\tan CC' = \tan P \sin (PA - AC),$$

$$\therefore \quad \frac{\tan BB'}{\tan AA'} = \frac{\sin (PA - AB)}{\sin PA} = \cos AB - \sin AB \cot PA,$$

$$\frac{\tan CC'}{\tan AA'} = \frac{\sin (PA - AC)}{\sin PA} = \cos AC - \sin AC \cot PA,$$

從此消去 $\cot PA$. 則

$$\sin AC \left\{ \frac{\tan BB'}{\tan AA'} - \cos AB \right\} = \sin AB \left\{ \frac{\tan CC'}{\tan AA'} - \cos AC \right\},$$

$$\sin AC \tan BB' - \cos AB \sin AC \tan AA'$$

$$= \sin AB \tan CC' - \cos AC \sin AB \tan AA',$$

$$\therefore \quad \tan BB' \sin AC - \sin AB \tan CC'$$

$$+ \tan AA' (\sin AB \cos AC - \cos AB \sin AC) = 0,$$

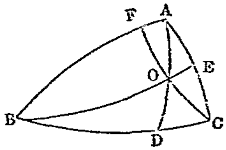
$$\tan BB' \sin AC - \sin AB \tan CC' + \tan AA' \sin BC = 0,$$

此式中之 CC′ 爲他之垂弧. 在反對之方向. 則爲 $-CC'$. 而

$$\tan (-CC') = -\tan CC',$$

$$\therefore \quad \tan BB' \sin AC + \sin AB \tan CC' + \tan AA' \sin BC = 0.$$

9. 有三角形 ABC. 從各角頂向對邊引垂弧 AD, BE, CF. 則 $\tan BD \tan CE \tan AF = \tan DC \tan EA \tan FB$.



$$\because\quad \left.\begin{aligned} \tan \mathrm{BD} &= \tan c \cos \mathrm{B}, \\ \tan \mathrm{CE} &= \tan a \cos \mathrm{C}, \\ \tan \mathrm{AF} &= \tan b \cos \mathrm{A}. \end{aligned}\right\}$$

此三式之乘積.爲

$$\tan \mathrm{BD} \tan \mathrm{CE} \tan \mathrm{AF} = \tan a \tan b \tan c \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C},$$

又 $$\left.\begin{aligned} \tan \mathrm{AE} &= \tan c \cos \mathrm{A}, \\ \tan \mathrm{CD} &= \tan b \cos \mathrm{C}, \\ \tan \mathrm{BF} &= \tan a \cos \mathrm{B}. \end{aligned}\right\}$$

此三式相乘.則

$$\tan \mathrm{AE} \tan \mathrm{CD} \tan \mathrm{BF} = \tan a \tan b \tan c \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C},$$

$$\therefore\quad \tan \mathrm{AE} \tan \mathrm{CD} \tan \mathrm{BF} = \tan \mathrm{BD} \tan \mathrm{CE} \tan \mathrm{AF}.$$

10. 從三角形之各角頂向對邊引垂線.會於一點 O. 如例題 9 之圖.其初 AD, CF 會於 O 點.結 BO. 又從 O 引垂弧 OE. 則

$$\tan \mathrm{DO} = \tan \mathrm{BO} \cos \mathrm{BOD}, \quad \tan \mathrm{OF} = \tan \mathrm{BO} \cos \mathrm{FOB},$$

$$\therefore\quad \tan \mathrm{DO} / \tan \mathrm{OF} = \cos \mathrm{BOD} / \cos \mathrm{FOB}, \cdots\cdots (1)$$

$$\tan \mathrm{OE} = \tan \mathrm{OC} \cos \mathrm{EOC}, \quad \tan \mathrm{OD} = \tan \mathrm{OC} \cos \mathrm{COD},$$

$$\therefore\quad \frac{\tan \mathrm{OE}}{\tan \mathrm{OD}} = \frac{\cos \mathrm{EOC}}{\cos \mathrm{COD}}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\tan \mathrm{OE} = \tan \mathrm{OA} \cos \mathrm{OAE}, \quad \tan \mathrm{OF} = \tan \mathrm{AO} \cos \mathrm{AOF},$$

$$\therefore\quad \frac{\tan \mathrm{OE}}{\tan \mathrm{OF}} = \frac{\cos \mathrm{AOE}}{\cos \mathrm{AOF}}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

以 (2) 除 (3). 則

$$\frac{\tan \mathrm{OD}}{\tan \mathrm{OF}} = \frac{\cos \mathrm{AOE}}{\cos \mathrm{EOC}}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

因 (1) 與 (4) 相等.故

$$\frac{\cos \mathrm{BOD}}{\cos \mathrm{FOB}} = \frac{\cos \mathrm{AOE}}{\cos \mathrm{EOC}},$$

而　BOD+FOB=AOE+EOC.

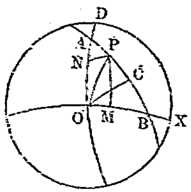
$\therefore$　BOD=AOE.　　FOB=EOC.

而 BOE 在一大圓周上. 且爲 AC 之垂弧.

卽三垂弧會於一點.

11. 球面上有二大圓弧 Ox, Oy. 互交成直角. P 爲其他大圓弧 AB 上之一點. 而 OC=P. 爲從 O 向 AB 所作之垂弧. 此垂弧與 Ox 成 $\angle COx=\alpha$. 又 PM, PN 爲 Ox, Oy 之垂弧. 令 $OM=x$, 及 $ON=y$. 則

$$\cos\alpha\tan x+\sin\alpha\tan y=\tan P.$$



證明. 結 PO.　$\angle POC=\beta$,

因

$$\tan x=\tan OP\cos(\alpha+\beta),$$

$$\tan y=\tan OP\cos\{90^\circ-(\alpha+\beta)\}$$

$$=\tan OP\sin(\alpha+\beta),$$

$$\tan P=\tan OP\cos\beta,$$

$$\therefore\quad \frac{\tan x}{\tan P}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\beta}=\cos\alpha-\sin\alpha\tan\beta,$$

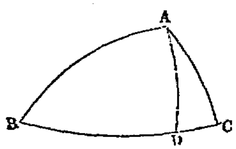
$$\frac{\tan y}{\tan P}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta}=\sin\alpha+\cos\alpha\tan\beta,$$

$$\cos\alpha\left(\frac{\tan x}{\tan P}-\cos\alpha\right)+\sin\alpha\left(\frac{\tan y}{\tan P}-\sin\alpha\right)=0,$$

$$\cos\alpha\tan x-\cos^2\alpha\tan P+\sin\alpha\tan y-\sin^2\alpha\tan P=0.$$

$$\therefore\quad \cos\alpha\tan x+\sin\alpha\tan y-\tan P=0.$$

11. 設底 BC 爲固定. 而邊之餘弦之比爲常數. 則 A 點之軌跡, 必通過一定點.



$$\because\quad \cos AB=\cos AD\cos BD,$$

$$\cos AC=\cos AD\cos CD,$$

$$\cos AB:\cos AC=\cos BD:\cos CD,$$

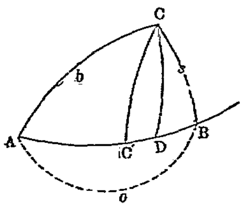
$\therefore$　$\cos BD:\cos CD$ 爲一定.

而 D 爲定點.

即軌跡爲 AD 之垂弧. 而通過 D 點.

13. 有三角形 ABC. 從 C 角頂向對邊之中點作中線 CC′. 則

$\cos a+\cos b=2\cos\frac{c}{2}\cos CC'$.



$$\because\quad \cos a=\cos BD\cos CD,$$

$$\cos b=\cos CD\cos AD,$$

$$\cos a+\cos b=\cos CD(\cos AD+\cos BD)$$

$$=\cos CD.2\cos AC'\cos C'D$$

$$=2\cos\frac{c}{2}\cos CC'.$$

$$\therefore\quad \cos a+\cos b=2\cos\frac{c}{2}\cos CC'.$$

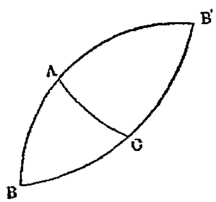
第四編

球面三角形一般之解法

1. 球面三角形之一邊爲象限時.則就其極三角形考之.極三角形爲直角三角形.則得適用直角三角形之解法,以解此三角形.

2. 設球面三角形之邊或角中.二邊若二角相等.則連結角頂與對邊之中點.分爲二個直角三角形.得用直角三角形之解法,以解此三角形.

3. 設球面三角形之邊或角中.二邊互爲補弧,或二角互爲補角.換言之.$b+c=\pi$, 或 $B+C=\pi$.



引長弧BC,及引長弧BA.交於B′.則

$$AC=AB'.$$

而由前之解法.得解B′AC.

同樣. $B+C=\pi$, $\angle ACB'=\angle AB'C$.

是又由前之方法.

得解三角形AB′C.

從而可求得三角形ABC.

4. 設三角形有三邊.試解之.

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},\qquad \cos B=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin a\sin c},$$

$$\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}.$$

從此求之卽得.然欲便於對數用法.則可用由三邊之半和.求半角之公式.

5. 設三角形已知三角.試解之.

$$\cos a=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C},\qquad \cos b=\frac{\cos B+\cos A\cos C}{\sin A\sin C},$$

$$\cos c=\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}.$$

從此求之卽得.雖不如前例之適於對數用法.然可由三角之半和.以求半邊而解之.

上二解法.雖別無不審之點.然於解法爲不適當.

6 已知二邊 a, b 及夾角 C.試解此三角形.

由納披氏之比例式.

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C.$$

得決定 $\frac{1}{2}(A+B)$, $\frac{1}{2}(A-B)$.故可決定 A, B.

而求 c 則用次之公式.

$$\sin c=\frac{\sin a\sin C}{\sin A}.$$

由 $\sin c$ 求得 c.

此可取得二値.卽任何均可.是爲不安定之解法.然有時得用三角形大邊對大角之理,以決定之.或用次之公式求之亦可.

$$\cos\tfrac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\sin C.$$

此式不發生兩意.

又求 c 以求 A, B.則用前之公式卽得.然

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\sin C,$$

此公式不生兩意.

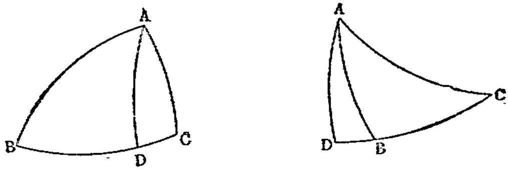
將所求之公式化爲對數式.則

$$\cos c=\cos b\,(\cos a+\sin a\,\tan b\,\cos C),$$

今適用補助角 $\tan\theta=\tan b\,\cos C$,

則 $\cos c=\cos b\,(\cos a+\sin a\,\tan\theta)=\dfrac{\cos b\,\cos(a-\theta)}{\cos\theta}$.

本式於對數使用上亦最方便.



或如圖所示.從三角形 ABC 之角頂 A,向 BC 作垂弧 AD.則由直角三角形考之.亦最便宜.

直角三角形之公式.爲

$$\tan CD=\tan b\,\cos C,$$

從此得以決定 CD.

又 $\cos c=\cos AD\,\cos BD=\cos BD\dfrac{\cos b}{\cos CD}$,

令 $CD=\theta$, 則 $\cos c=\dfrac{\cos b\,\cos(a-\theta)}{\cos\theta}$,

用補助角.得以求 c 一致之値.

又 $\tan AD=\tan C\,\sin CD$, $\tan AD=\tan ABD\,\sin BD$,

$$\therefore\quad \tan ABD\,\sin BD=\tan C\,\sin\theta.$$

垂弧 AD 落於 BC,或其引長弧上.從而 BD 爲 $a-\theta$ 或 $\theta-a$. 而 ABD 角爲 B 角或爲補角.故任何亦不生兩意,而得適合.

7. 知二角及此二角間所夾之邊.試解此三角形.

納披氏之比例式.爲

$$\tan\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\tan\tfrac{1}{2}c,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\tfrac{1}{2}c.$$

從此決定 $\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{2}(a-b)$ 後.即可決定 a, b. 次決定 C. 由下之公式.即可求得.

$$\sin C=\frac{\sin A\sin c}{\sin a}.$$

由此求 $\sin c$ 之項.發生兩意.任何亦不判明.

然有時得用大角對大邊之理以決定之.

今於求 a, b 之前.獨立得以求 C.

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c,$$

化本式爲對數式.

$$\cos C=\cos B\{-\cos A+\sin A\tan B\cos c\},$$

令補助角 $=\phi$, $\cot\phi=\tan B\cos c$, 以此代入上式.則

$$\cos C=\cos B\{-\cos A+\sin A\cot\phi\}$$

$$=\cos B\left\{\frac{-\cos A\sin\phi+\sin A\cos\phi}{\sin\phi}\right\}=\frac{\cos B\sin(A-\phi)}{\sin\phi}.$$

由是得適用對數以求 C.

或如第6節引垂弧.適用直角三角形之解法亦可.

(依第6節之圖)

直角三角形之公式. $\cos C=\cot B\cot DAB.$

從此決定 $\angle DAB$. 從而求得 $\angle CAD$.

次 $\cos AD\sin CAD=\cos C,\qquad \cos AD\sin BAD=\cos B,$

$\therefore\quad \cos C=\dfrac{\cos B}{\sin BAD}\sin CAD,$

今令 $\angle BAD=\phi$, 則

$$\cos C=\frac{\cos B\sin(A-\phi)}{\sin\phi},$$

又 $\tan AD=\tan AC\cos CAD,\qquad \tan AD=\tan AB\cos BAD,$

$\therefore\quad \tan b\cos CAD=\tan c\cos\phi.$

CAD 爲 $A-\phi$. 而與 a 無關係. 得以求 b.

若垂弧之足在 BC 之引長弧上. 則 CAD 爲 $A+\phi$ 而求得 b. 此解法爲兩意. 常可適合.

8. 知二邊 a, b 及其一對角 A 之三角形. 試解之.

由次之公式導得 $\angle B$.

$$\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}\sin A,$$

由納披氏之比例式. 求得 C, c. 卽

$$\tan\tfrac{1}{2}c=\tan\tfrac{1}{2}(a-b)\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}C=\cot\tfrac{1}{2}(A-B\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

於上之公式而求 B. 有 $\sin c$ 之項. 故以 $\sin b\sin A<\sin a$ 爲限. 則生兩意. 而有二種解法. 令其一爲 B_1. 則其他爲 $180^\circ-B_1$. 審查何種適於本題. 代入求 $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}C$ 之公式中. 取 $\tan\frac{1}{2}c$, $\tan\frac{1}{2}C$ 爲正值與否而試之. 若爲正值. 則此三角形可以成立. 故 $a-b$. $A-B$ 取其同符號而試之可也.

對於 B 之二值同符號時. 有兩種. 若僅適於一個條件. 而得一種 B 之數值. 任何亦不適於要件. 則無解法.

然 C, c 之值. 可與 B 脫離關係而獨立求之.

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A$$

$$= \cos b \left\{ \cos C + \frac{\cot A}{\cos b} \sin C \right\},$$

令 $\tan\phi = \dfrac{\cot A}{\cos b}$,

則 $\cot a \sin b = \cos b \{\cos C + \tan\phi \sin C\} = \dfrac{\cos b \cos(C-\phi)}{\cos\phi}$,

$\therefore\ \cos(C-\phi) = \cot a \tan b \cos\phi$.

由此方程式.求得 $C-\phi$ 之值.然後可求得 C.但此尚有兩意.因令 $C-\phi=\alpha$ 代入 $\cos(C-\phi)$ 之 $C-\phi$.亦同得 $\cos\alpha$.其 $\phi+\alpha$ 比 π 小.則 $\phi-\alpha$ 爲正時.常發生兩意.

又 $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$

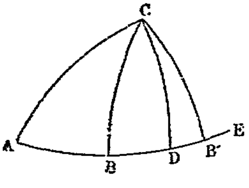
$$= \cos b (\cos c + \sin c \tan b \cos A),$$

令 $\tan b \cos A = \tan\theta$,

則 $\cos a = \cos b (\cos c + \sin c \tan\theta)$

$$= \cos b \left\{ \frac{\cos c \cos\theta + \sin c \sin\theta}{\cos\theta} \right\} = \frac{\cos b \cos(c-\theta)}{\cos\theta}.$$

由此方程式,求得 $c-\theta$ 之後.卽可求 c 之值.此亦如前發生兩意.以幾何學的論調證之.先由直角三角形之公式.論其方法.



CA 爲 b, $\angle$CAB 爲 A.從 C 向 AE 引垂弧 CD.令 CB, CB′ 等於 a.以 C 爲中心.CB 爲半徑作弧.交於 B, B′.則得二個三角形 ABC, AB′C.

故由直角三角形之公式.

$\cos b = \cot A \cot ACD$,

求得 ACD.而

$$\tan\mathrm{CD}=\tan\mathrm{AC}\cos\mathrm{ACD},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\tan\mathrm{CD}=\tan\mathrm{CB}\cos\mathrm{BCD},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\tan\mathrm{CD}=\tan\mathrm{CB}\cos\mathrm{B'CD}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

從 (1) 可求得 CD. 從 (2),(3) 可求得 BCD, B′CD,

今令 $\angle\mathrm{ACD}=\phi$, 則 $\angle\mathrm{BCD}=\phi-\mathrm{C}$,

又令 $\angle\mathrm{ACB'}=\mathrm{C}$. 則 $\angle\mathrm{BCD}=\mathrm{C}-\phi$,

而 $\cos\mathrm{BCD}=\cos(\mathrm{C}-\phi)$,

$$\tan\mathrm{AC}\cos\mathrm{ACD}=\tan\mathrm{CB}\cos\mathrm{BCD},\quad \tan b\cos\phi=\sin a\cos(\phi-\mathrm{C}),$$

$\therefore\quad \cos(\phi-\mathrm{C})=\cos\phi\cot a\tan b,$

又 $\tan\mathrm{AC}\cos\mathrm{ACD}=\tan\mathrm{CB'}\cos\mathrm{B'CD},\quad \tan b\cos\phi=\tan a\cos(\mathrm{C}-\phi),$

$\therefore\quad \cos(\mathrm{C}-\phi)=\cos\phi\cot a\tan b.$

故知有發生兩意之式.

次求 c 邊.

$$\tan\mathrm{AD}=\tan\mathrm{AC}\cos\mathrm{A}.$$

從此得以決定 AD.

而 $\cos\mathrm{AC}=\cos\mathrm{CD}\cos\mathrm{AD},\quad \cos\mathrm{CB}=\cos\mathrm{CD}\cos\mathrm{BD},$

$\cos\mathrm{CB'}=\cos\mathrm{CD}\cos\mathrm{B'D},$

$\therefore\quad \cos\mathrm{BD}=\dfrac{\cos\mathrm{BC}}{\cos\mathrm{AC}}\cos\mathrm{AD},\ \cos\mathrm{B'D}=\dfrac{\cos\mathrm{B'C}}{\cos\mathrm{AC}}\cos\mathrm{AD},$

令 $\mathrm{AD}=\theta$, 則最初 $\mathrm{AB}=c$, $\quad\therefore\quad \mathrm{BD}=\theta-c,$

又 AB′ 為 c, 則 $\mathrm{B'D}=c-\theta$,

而 $\cos(\theta-c)=\dfrac{\cos a\cos\theta}{\cos b},\quad \cos(c-\theta)=\dfrac{\cos a\cos\theta}{\cos b}.$

本式以代數的證明.亦明知其生兩意矣.

9. <u>知二角A,B及其一對邊 a 之三角形</u>.試解之.

此亦如前節發生兩意.以研究之方法.全然相同.故略.

今依次式以求 b.

$$\sin b=\frac{\sin B\sin a}{\sin A},$$

用所求得之 b, 由次式以求 C, c.

$$\tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\tan\tfrac{1}{2}(a-b),$$

$$\tan\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}(A-B),$$

然 C, c 可以脫離 b 之關係. 而直接以求之.

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$$

$$=\cos B\{-\cos C+\tan B\cos a\sin C\},$$

令　$\cot\varphi=\tan B\cos a$, 則

$$\cos A=\cos B\{-\cos C+\cot\varphi\sin C\}=\cos B\frac{\sin(C-\varphi)}{\sin\varphi},$$

$\therefore$　$\sin(C-\varphi)=\cos A\sin\varphi/\cos B.$

由此方程式. 求得 $C-\varphi$ 之後. 可求得 C.

然由 $\sin c$ 以求之. 則生兩意.

又　$\cot A\sin B=\cot a\sin c-\cos c\cos B$

$$=\cos B\left(-\cos c+\frac{\cot a\sin c}{\cos B}\right),$$

令　$\cot\theta=\cot a/\cos B$;

則　$\cot A\sin B=\cos B(-\cos c+\cot\theta\sin c)=\dfrac{\cos B\sin(c-\theta)}{\sin\theta},$

$\therefore$　$\sin(c-\theta)=\cot A\tan B\sin\theta.$

由此方程式, 求得 $c-\theta$. 而後求得 c.

此亦求 $\sin c$ 之項. 故生兩意.

由前節之圖. 得幾何學的證明. 玆略.

10. 就前二節所論之結果.再進而論一般之三角形.

<u>知三角形之二邊及其一對角</u>.試解此三角形.納披比例式.

$$\tan\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}(A+B),\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\tan\tfrac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\tan\tfrac{1}{2}(a+b).\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

前已用之以示一般之解法矣.茲就其特別者考之.設二邊相等如 $a=b$.則兩底角相等如 $A=B$.而 (1), (2) 兩式變化如次.

$$\cot\tfrac{1}{2}C=\cos a\tan A,\quad \tan\tfrac{1}{2}c=\cos A\tan a.$$

然 $\frac{1}{2}C$, $\frac{1}{2}c$ 無論若何.非爲正數不可.故 $\tan A$, $\cos a$ 及 $\tan a$, $\cos A$ 同符號.而 a 與 A 之變化.有同一之界限.則只有一解法.若 $\tan A$, $\cos a$ 或 $\tan a$, $\cos A$ 異符號.則無解法.

又 a, A 兩方爲直角.則

$$\tan\tfrac{1}{2}C=\infty\quad \tan\tfrac{1}{2}c=\infty,$$

此有無數解法.

由是一般之研究如次.

$$\sin B=\frac{\sin b\sin A}{\sin a}.$$

設 $\sin b\sin A$ 比 $\sin a$ 大.則所設之形狀爲不合理.而無一解法.

若 $\sin b\sin A$ 比 $\sin a$ 小.則 B 有二價值.令其一爲 β'.則其他爲 β.而 $\beta=\pi-\beta'$.有此關係.故得二値.如前節所論.試代入納披氏之比例式中.由 $\cot\frac{1}{2}C$, $\cot\frac{1}{2}c$ 爲正.$A-B$, $a-b$ 非同符號不可.前節已說明之矣.故 $A-\beta$, $A-\beta'$ 之符號.以 $a-b$ 之關係,而比較的論證之.

A比直角小.則有三種.分論如次.

I　$\frac{\pi}{2}>b$.

(1) a 比 b 小. 則就公式.

$$\sin B=\sin b\sin A/\sin a.$$

而 $\beta>A$, 又 $\beta'>A$. 故有二種解法.

(2) $a=b$, 則 $B=A$. 故只有一個解法.

(3) $a>b$, 則 $a+b$ 比 π 小或等或大.

若 $a+b$ 比 π 小. 則 $\sin a$ 比 $\sin b$ 大. 而 β 不比 A 小, β' 比 A 大

故前者成立. 後者不能成立. 卽只有一解法.

若 $a+b$ 等於 π, 則 β 等於 A, β' 比 A 大.

此雙方均不合理. 而無有一解法.

若 $a+b$ 比 π 大. 則 $\sin a$ 比 $\sin b$ 小. 而 β, β' 任何亦比 A 較大.

此兩方均不合理. 卽無有解法.

II $\frac{\pi}{2}=b$.

(1) $a<b$, 則 β, β' 之兩方均比 A 大.

而任何亦合理. 故有二解法.

(2) $a=b$, 則 $B=A$, 而 $a=b=\frac{\pi}{2}$.

由是 B 及 A 爲直角. 是不合理.

此無一解法.

(3) $a>b$, 則 $\sin a<\sin b$. 而 β 及 β'. 任何亦比 A 大.

是不合理. 卽無一解法.

III $\frac{\pi}{2}<b$.

(1) $a<b$, 則 $a+b$ 比 π 小, 或等, 或大.

若 $a+b<\pi$, 則 $\sin a<\sin b$. 而 β, β' 任何亦比 A 大. 正合公理. 故有二種解法.

若 $a+b=\pi$, 則 $\beta=A$. 是不合理. $\beta'>A$. 此方合理. 故只有一解法.

若$a+b>\pi$, 則$\sin a>\sin b$, 而$\beta<A$, $\beta'>A$, 故有一不合理.有一合理.由此結果.知止有一解法.

(2)　$a=b$.

此任何亦不合理.故無有解法.

(3)　$a>b$, 則$\sin a<\sin b$. 而β, β'任何亦比A大.

故雙方均不合理.而無有解法.

今A比直角小.就上所論之結果.而總合之如次.

$$b<\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b.\cdots\cdots\cdots\cdots\text{有二解法.}\\ a=b.\cdots\cdots\cdots\cdots\text{有一解法.}\\ a>b,\ \text{且}\ a+b<\pi.\cdots\cdots\text{有一解法.}\\ a>b,\ \text{且}\ a+b=\pi.\cdots\cdots\text{無解法.}\\ a>b,\ \text{且}\ a+b>\pi.\cdots\cdots\text{無解法.}\end{cases}$$

$$b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b.\cdots\cdots\cdots\cdots\text{有二解法.}\\ a=b.\cdots\cdots\cdots\cdots\text{無解法.}\\ a>b.\cdots\cdots\cdots\cdots\text{無解法.}\end{cases}$$

$$b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b,\ \text{且}\ a+b<\pi.\cdots\cdots\text{有二解法.}\\ a<b,\ \text{且}\ a+b=\pi.\cdots\cdots\text{有一解法.}\\ a<b,\ \text{且}\ a+b>\pi.\cdots\cdots\text{有一解法.}\\ a=b.\cdots\cdots\cdots\cdots\text{無解法.}\\ a>b,\cdots\cdots\cdots\cdots\text{無解法.}\end{cases}$$

就此結果而論.凡有二解法之式.其$\sin a$比$\sin b\sin A$小之式.不能成立.當記之勿忘.

次論A等於直角,或大於直角.

此亦得與上同樣論及之.

今示其結果如次.

$A=R\angle.$

$$b<\frac{\pi}{2}\begin{cases} a=b,\ \text{或}\ a<b.\cdots\cdots\cdots & \text{無解法.}\\ a>b,\ \text{且}\ a+b<\pi.\ \cdots\cdots\cdots & \text{有一解法.}\\ a>b,\ \text{且}\ a+b=\pi\ \cdots\cdots\cdots & \text{無解法.}\\ a>b,\ \text{且}\ a+b>\pi.\ \cdots\cdots\cdots & \text{無解法.} \end{cases}$$

$$b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a>b,\ \text{或}\ a<b.\cdots\cdots\cdots & \text{無解法.}\\ a=b.\cdots\cdots\cdots & \text{有無數解法.} \end{cases}$$

$$b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b,\ \text{且}\ a+b>\pi.\ \cdots\cdots\cdots & \text{有一解法.}\\ a<b,\ \text{且}\ a+b=\pi.\ \cdots\cdots\cdots & \text{無解法.}\\ a<b,\ \text{且}\ a+b<\pi.\ \cdots\cdots\cdots & \text{無解法.}\\ a=b,\ \text{或}\ a>b.\cdots\cdots\cdots & \text{無解法.} \end{cases}$$

$A>R\angle.$

$$b<\frac{\pi}{2}\begin{cases} a=b,\ \text{或}\ a<b.\cdots\cdots\cdots & \text{無解法.}\\ a>b,\ \text{且}\ a+b=\pi.\ \cdots\cdots\cdots & \text{有一解法.}\\ a>b,\ \text{且}\ a+b>\pi.\ \cdots\cdots\cdots & \text{有二解法.}\\ a>b,\ \text{且}\ a+b<\pi.\ \cdots\cdots\cdots & \text{有一解法.} \end{cases}$$

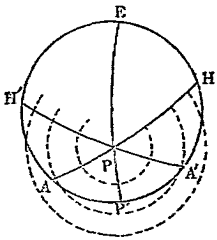
$$b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b,\ \text{或}\ a=b.\cdots\cdots\cdots & \text{無解法.}\\ a>b.\cdots\cdots\cdots & \text{有二解法.} \end{cases}$$

$$b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b,\ \text{且}\ a+b>\pi.\ \cdots\cdots\cdots & \text{有一解法.}\\ a<b,\ \text{且}\ a+b=\pi.\ \cdots\cdots\cdots & \text{無解法.}\\ a<b,\ \text{且}\ a+b<\pi.\ \cdots\cdots\cdots & \text{無解法.}\\ a=b.\cdots\cdots\cdots & \text{有一解法.}\\ a>b.\cdots\cdots\cdots & \text{有二解法.} \end{cases}$$

A 等於直角,或大於直角.而 $\sin a$ 不比 $\sin b \sin A$ 大.則無解法.

以上研究之結果. a 在 b 與 $\pi-b$ 之間.則只有一解法.若不在 b 與 $\pi-b$ 之間.則有二解法,或無一解法.此要件包含 a 等於 b, 或 $\pi-b$ 在內.

又此等之研究.得以幾何學的論及之.



AP′A′E 爲大圓. PA, PA′ 各等於 b 弧之射影.而 AP′A′ 弧等於 A 角之傾斜.又 PP′, PE 爲 P 至大圓弧之最小距離與最大距離之射影.是爲 A 及 b, 各比 $\frac{\pi}{2}$ 小之圖形.

今令 a 比 PP′ 小.則不交大圓 AP′A′H. 是不能成一個三角形.

若 a 比 PA 小,而比 PP′ 大.則交 AP′A′ 於二點.得作兩個三角形.若 a 之大.取 PA, PH 之間.則在 PH′ 與 PA 之間,及 PH 與 PA′ 之間相交.令其交點爲 B.則得 $\triangle$PAB, 及 $\triangle$PA′B. 然是在對稱上相等.故歸著只作一個三角形.若 a 比 PH 大.假設與大圓周相交.則有比二直角較大之角.而似一個三角形.如是卽得幾何的說明.

次令 A 及 b 比 $\frac{\pi}{2}$ 大.則得以 $\angle$PAE 爲 A, PH, PH′ 爲 b 而論之.

問　題　四

1. 先證明 $\tan\frac{1}{2}A \tan\frac{1}{2}B=\frac{\sin(s-a)}{\sin s}$. 而後解已知一邊及其接角他二邊之和之三角形.

$$\tan\frac{1}{2}A \tan\frac{1}{2}B=\sqrt{\left\{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}\right\}\left\{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s\sin(s-b)}\right\}}$$

$$=\frac{\sin(s-c)}{\sin s}.$$

令一邊爲c,一接角爲A,二邊之和爲$a+b$,則由上式得

$$\tan\frac{1}{2}B=\frac{\sin(s-c)}{\sin s}\cot\frac{1}{2}A,$$

從此可求得無兩意之B.

故 $$\tan\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\tan\frac{c}{2}.$$

從此可求得$a-b$. 又已知$a+b$. 卽可求得c, b.

2. 已知一邊及接角與他二角和.試解其三角形.

$$\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}=\sqrt{\left\{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}\right\}\left\{-\frac{\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}\right\}}$$

$$=\frac{\cos S}{\cos(S-C)},$$

$$\therefore\quad \tan\frac{b}{2}=\frac{\cos S}{\cos(S-C)}\cot\frac{a}{2}.$$

從此得以決定無兩意之b.

因A+B, a, C等.爲題所假設故也.

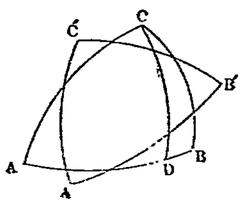
又由納披氏之比例式,

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{1}{2}C.$$

得以求得A−B.

由是可求得A, B.

3. 設BC$=a$, AC$=b$, AB$=c=\frac{\pi}{2}$. 則各角之大如何.又CD之垂弧爲δ. 則$\cos^2\delta=\cos^2a+\cos^2b$. 試證之.



令 $\triangle ABC$ 之極三角形爲 $A'B'C'$. 則 AB 爲象限弧. 故 C' 爲直角. 而 $A'B'C'$ 爲直角三角形.

$$\therefore \quad \cos b' = \frac{\cos B'}{\sin A'}, \quad \cos a' = \frac{\cos A'}{\sin B'},$$

即 $\cos B = \dfrac{\cos b}{\sin a}, \quad \cos A = \dfrac{\cos a}{\sin b}, \quad \cos c' = \cot A' \cot B',$

$$\therefore \quad \cos C = \cot a \cot b,$$

$\triangle CDB$, $\triangle CDA$. 任何亦爲直角三角形.

$$\therefore \quad \sin CD = \sin a \sin B,$$

兩邊各自乘. 則

$$\sin^2 CD = \sin^2 a \sin^2 B,$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \cos^2 CD &= 1 - \sin^2 a \sin^2 B \\
&= 1 - (1-\cos^2 a)(1-\cos^2 B) \\
&= \cos^2 a + \cos^2 B - \cos^2 a \cos^2 B \\
&= \cos^2 a + \cos^2 B (1 - \cos^2 a) \\
&= \cos^2 a + \cos^2 B \sin^2 a \\
&= \cos^2 a + \cos^2 b,
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \cos^2 \delta = \cos^2 a + \cos^2 b,$$

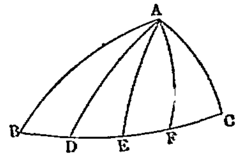
但 $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B,$

$$\because \quad c = \frac{\pi}{2}, \quad \therefore \cos c = 0, \quad \sin c = 1,$$

$$\therefore \quad \cos b = \sin a \cos B.$$

4. 有三角形 ABC. 分一邊 BC 爲四等分. 各分點爲 D, E, F. 各分之對角爲 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$. 則

$$\sin(\theta\ + \theta_2) \sin\theta_2 \sin\theta_4 = \sin(\theta_3 + \theta_4) \sin\theta_1 \sin\theta_3.$$ 試證之.



$$\therefore \quad \frac{\sin AE}{\sin CE}=\frac{\sin C}{\sin(\theta_3+\theta_4)},$$

$$\frac{\sin AE}{\sin BE}=\frac{\sin B}{\sin(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\therefore \quad \frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\sin(\theta_3+\theta_4)}.$$

因 $CE=BE$ 故也.

又 $\dfrac{\sin BD}{\sin AD}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin B}$, $\quad \dfrac{\sin DE}{\sin AD}=\dfrac{\sin\theta_2}{\sin DEA}$,

$$\therefore \quad \sin DEA=\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\sin B.$$

又 $\dfrac{\sin CF}{\sin AF}=\dfrac{\sin\theta_4}{\sin C}$, $\quad \dfrac{\sin EF}{\sin AF}=\dfrac{\sin\theta_3}{\sin AEF}$,

$$\therefore \quad \sin AEF=\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}\sin C,$$

而 $\sin DEA=\sin AEF$,

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\sin B=\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4}\sin C,$$

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}\cdot\frac{\sin(\theta_1+\theta_2)}{\sin(\theta_3+\theta_4)}=\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_4},$$

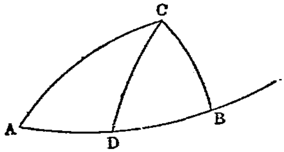
$$\therefore \quad \sin\theta_2\sin\theta_4\sin(\theta_1+\theta_2)=\sin\theta_1\sin\theta_3\sin(\theta_3+\theta_4).$$

5. 有三角形 ABC. 設 $A=B=2C$. 試證次式.

$$8\sin\left(a+\frac{c}{2}\right)\cos\frac{c}{2}\sin^2\frac{c}{2}=\sin^3 a.$$

$$\frac{\sin a}{\sin c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin 2C}{\sin C}=2\cos C.$$

次從 C 引 AB 之垂弧 CD. 則 CD 分 AB 爲二等分.



$$BD=AD=\frac{c}{2},$$

$$\therefore \quad \tan\frac{c}{2}=\tan b\cos A=\tan a\cos A,$$

$$\frac{\tan\frac{c}{2}}{\tan a}=\cos A=\cos 2C=2\cos^2 C-1=2\left(\frac{\sin a}{2\sin c}\right)^2-1,$$

$$\frac{\sin^2 a}{2\sin^2 c}=1+\frac{\tan\frac{c}{2}}{\tan a}=\frac{\sin\left(a+\frac{c}{2}\right)}{\sin a\cos\frac{c}{2}},$$

$$\therefore\quad \sin^3 a\cos\frac{c}{2}=2\sin^2 c\sin\left(a+\frac{c}{2}\right),$$

$$\sin^3 a=8\sin^2\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\sin\left(a+\frac{c}{2}\right).$$

6. 有三角形 ABC. 令 A=B=2C. 試證次之關係式.

$$8\sin^2\frac{C}{2}\left(\cos s+\sin\frac{C}{2}\right)\frac{\cos\frac{c}{2}}{\sin a}=1.$$

如前圖.

$$\sin\frac{1}{2}C=\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin a},$$

$$\sin\frac{1}{2}C+\cos s=\cos\left(a+\frac{c}{2}\right)+\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin a},$$

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=a+\frac{c}{2}$

$$=\frac{\cos\left(a+\frac{c}{2}\right)\sin a+\sin\frac{c}{2}}{\sin a}$$

$$=\frac{\cos a\sin a\cos\frac{c}{2}-\sin^2 a\sin\frac{c}{2}+\sin\frac{c}{2}}{\sin a}$$

$$=\frac{\cos a\sin a\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{c}{2}\cos^2 a}{\sin a}=\frac{\cos a\sin\left(a+\frac{c}{2}\right)}{\sin a}$$

依前問.

$$=\frac{\sin^2 a\cos\frac{c}{2}\cos a}{2\sin^2 c}$$

$$=\frac{\sin^2 a\cos a}{8\sin^2\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}},\quad=\frac{\cos a}{8\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\therefore\quad \sin\frac{1}{2}\mathrm{C}+\sin s=\frac{\cos a}{8\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}\cos\frac{c}{2}},$$

$$\therefore\quad 8\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}(\sin\frac{1}{2}\mathrm{C}+\sin s)\frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos a}=1.$$

7. 二等邊三角形 ABC. 其相等之邊 AC, AB. 依弧 DE 分爲二等分. 則

$$\sin\frac{\mathrm{DE}}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{\mathrm{BC}}{2}\sec\frac{\mathrm{AC}}{2}.$$ 試證之.

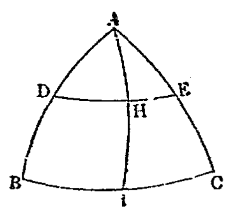
從 A 向 BC 作垂弧 AI. 則亦垂直於 DE. 而

$$\mathrm{BI}=\mathrm{IC}=\tfrac{1}{2}\mathrm{BC},\quad \mathrm{DH}=\mathrm{HE}=\tfrac{1}{2}\mathrm{DE}.$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{BC}=\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{A}\sin\mathrm{AC},\quad \sin\tfrac{1}{2}\mathrm{DE}=\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{A}\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{AC},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{DE}=\frac{\sin\frac{1}{2}\mathrm{BC}}{\sin\mathrm{AC}}\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{AC},$$

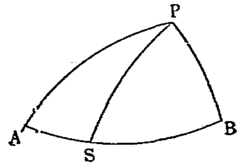
$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{D}=\frac{\sin\frac{1}{2}\mathrm{BC}\sin\frac{1}{2}\mathrm{AC}}{2\sin\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cos\frac{1}{2}\mathrm{AC}}=\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{BC}\sec\tfrac{1}{2}\mathrm{AC}.$$



8. 就三角形之 A, a, b. 求得第三邊 c_1, c_2. 則

$$\tan\frac{c_1}{2}\tan\frac{c_2}{2}=\tan\tfrac{1}{2}(b-a)\tan\tfrac{1}{2}(b+a).$$ 試證之.

令 AC 爲 b, CAB 爲 A, CB 爲 a. 則生 ABC 及 AB′C 之二個三角形. 故 AB 爲 c_1, AB′ 爲 c_2, 又 $B'=\pi-B$. 今由納披氏比例式.



$$\tan\frac{c_1}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\tan\tfrac{1}{2}(a-b),$$

$$\tan\frac{c_2}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+\pi-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-\pi+B)}\tan\tfrac{1}{2}(a+b)$$

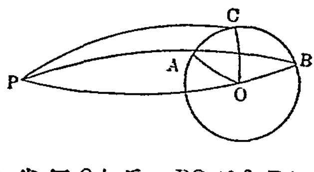
$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)}\tan\tfrac{1}{2}(a+b),$$

$$\therefore\quad \tan\frac{c_1}{2}\tan\frac{c_2}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\tan\tfrac{1}{2}(a-b).\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)}\tan\tfrac{1}{2}(a+b),$$

$$\therefore\quad \tan\frac{c_1}{2}\tan\frac{c_2}{2}=-\tan\tfrac{1}{2}(a-b)\tan\tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$=\tan\tfrac{1}{2}(b-a)\tan\tfrac{1}{2}(a+b).$$

9. 從球面上之一點 P. 引大圓弧 PAB 交於小圓. 自 P 至小圓各分弧正切之積. 一定不易. 且從 P 點引小圓之切線 此切線之平方, 等於各分弧正切之積.



令小圓之極爲 O, 半徑 OA 爲 r, PO 爲 δ. PA, PB 爲 c_1, c_2. 切線 PC 爲 c. 則由前例.

$$\tan\tfrac{1}{2}c_1\tan\tfrac{1}{2}c_2=\tan\tfrac{1}{2}(\delta-r)\tan(\delta+r).$$

然 δ, r 爲一定不易. 而 APC 之變角. 與上式無關係.

故知 PAB 弧任爲如何之位置.

$\tan\frac{c_1}{2}\tan\frac{c_2}{2}$ 亦一定不易.

又 $\cos c=\frac{\cos\delta}{\cos r}$,

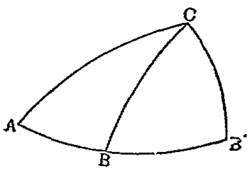
$$2\cos^2\frac{c}{2}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\delta+r)\cos\frac{1}{2}(\delta-r)}{\cos r},$$

$$2\sin^2\frac{c}{2}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\delta+r)\sin\frac{1}{2}(\delta-r)}{\cos r},$$

$\therefore\quad \tan^2\frac{c}{2}=\tan\frac{1}{2}(\delta+r)\tan\frac{1}{2}(\delta-r),$

$\therefore\quad \tan^2\frac{c}{2}=\tan\frac{c_1}{2}\tan\frac{c_2}{2}.$

10. A, B 爲球面上之二定點. P 爲球面上之任意一點. 今 a, b 爲定數. 如 $a\cos\mathrm{AP}+b\cos\mathrm{BP}=s\cos\mathrm{SP}$. 求得 AB 或其引長弧上之定點 S. 但 s 爲定數.



$\cos\mathrm{AP}=$

$\cos\mathrm{AS}\cos\mathrm{SP}+\sin\mathrm{AS}\sin\mathrm{SP}\cos\mathrm{ASP},$

$\cos\mathrm{BP}=$

$\cos(\mathrm{AB}-\mathrm{AS})\cos\mathrm{SP}+\cos\mathrm{PSB}\sin\mathrm{SP}\sin(\mathrm{AB}-\mathrm{AS}),$

$a\cos\mathrm{AP}+b\cos\mathrm{BP}=$

$$\cos\mathrm{SP}\{a\cos\mathrm{AS}+b\cos(\mathrm{AB}-\mathrm{AS})\}+\sin\mathrm{SP}\cos\mathrm{ASP}\{a\sin\mathrm{AS}-b\sin(\mathrm{AB}-\mathrm{AS})\},$$

就本式如

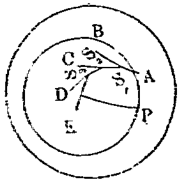
$a\sin\mathrm{AS}-b\sin(\mathrm{AB}-\mathrm{AS})=0$, 以决定 S. 則

$$a\cos\mathrm{AP}+b\cos\mathrm{BP}=\cos\mathrm{PS}\{a\cos\mathrm{AS}+b\cos\mathrm{SB}\}$$
$$=s\cos\mathrm{PS},$$

但 $s=a\cos\mathrm{AS}+b\cos\mathrm{SB}.$

11. A, B, C, … 等. 爲球面上之定點. $a, b, c, \cdots$ 等爲定數. P 爲球面上任意一點. 試求 P 點之軌跡. 但 P 點有

$a\cos AP + b\cos BP + c\cos CP + \cdots =$ 定數之關係.



$s_1, s_2, s_3 \cdots$ 等爲定數. $S_1, S_2, S_3 \cdots$ 等. 如前例有關係之點. 則

$$a\cos AP + b\cos BP = s_1\cos PS_1,$$

$$s_1\cos PS_1 + c\cos CP = s_2\cos PS_2,$$

$$s_2\cos PS_2 + d\cos DP = s_3\cos PS_3,$$

$$\cdots = \cdots$$

$$s_{m-1}\cos PS_{m-1} = s_m\cos PS_m,$$

$\therefore\quad a\cos AP + b\cos BP + c\cos CP + \cdots = s_m\cos PS_m,$

$\therefore\quad \cos PS_m$ 爲定數.

故 P 點之軌跡. 爲 S_m 點爲中心 PS_m 爲半徑之圓周.

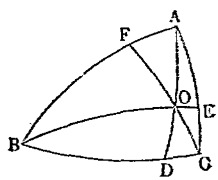
12. 有三角形 ABC. 從各角頂向對邊引垂弧 AD, BE, CF. 相交於 O 點. 則有次式之關係. 試證之.

$$\frac{\tan AD}{\tan OD} = 1 + \frac{\cos A}{\cos B\cos C}, \quad \frac{\tan BE}{\tan OE} = 1 + \frac{\cos B}{\cos A\cos C},$$

$$\frac{\tan CF}{\tan OF} = 1 + \frac{\cos C}{\cos A\cos B}.$$

$\because\quad \tan AD = \tan B\sin BD,$

$\quad\quad \tan OD = \tan OBD\sin BD,$



$$\therefore\quad \frac{\tan AD}{\tan OD} = \frac{\tan B}{\tan OBD} = \tan B\cot OBD$$

$$= \tan B\tan C\cos A$$

$$= \frac{\sin B\sin C\cos a}{\cos B\cos C} = \frac{\cos A + \cos B\cos C}{\cos B\cos C} = 1 + \frac{\cos A}{\cos B\cos C},$$

(依 $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a$)

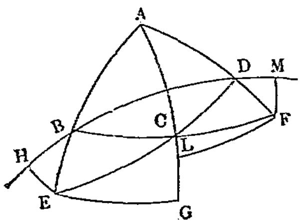
又　$\tan CF=\tan B\sin BF$,　　$\tan OF=\tan OBF\sin BF$,

$$\therefore\quad \frac{\tan CF}{\tan OF}=\tan B\cot OBF=\tan B\tan A\cos C$$

$$=\frac{\cos C+\cos B\cos A}{\cos B\cos A}=1+\frac{\cos C}{\cos B\cos A}.$$

其他得同樣證明之.

13. 球面四角形ABCD.引長對邊交於E, F.從E引對角弧AC, BD之垂弧EG, EH.又從F引FM, FL.則



$$\frac{\sin EG}{\sin EH}=\frac{\sin FL}{\sin FM}.$$試證之.

$\sin EG=\sin AE\sin BAC$,

$\sin EH=\sin DE\sin BDC$,

$$\frac{\sin EG}{\sin EH}=\frac{\sin AE\sin BAC}{\sin DE\sin BDC}=\frac{\sin ADC}{\sin BAD}\cdot\frac{\sin BAC}{\sin BDC}$$

$$=\frac{\sin ADC}{\sin BAD}\cdot\frac{\sin ABC\sin BC\sin BD}{\sin AC\sin BCD\sin BC}$$

$$=\frac{\sin ADC\sin ABC\sin BD}{\sin BAD\sin BCD\sin AC},$$

又　$\sin FL=\sin FAC\sin AF$,　　$\sin FM=\sin MBF\sin BF$,

$$\frac{\sin FL}{\sin FM}=\frac{\sin AF}{\sin BF}\cdot\frac{\sin FAC}{\sin MBF}$$

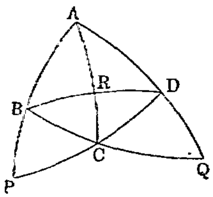
$$=\frac{\sin ABC}{\sin BAF}\cdot\frac{\sin ADC}{\sin AC}\cdot\sin CD\cdot\frac{\sin BD}{\sin BCD}\cdot\frac{1}{\sin CD}$$

$$=\frac{\sin ABC}{\sin BAF}\cdot\frac{\sin ADC}{\sin BCD}\cdot\frac{\sin BD}{\sin AC},$$

$$\therefore\quad \frac{\sin EG}{\sin EH}=\frac{\sin FL}{\sin FM}.$$

14. 有球面四角形ABCD.引長AB, CD.相交於P.引長BC, AD.相交於Q.作對角弧AC, BD.相交於R.則有次之關係.

$$\sin AB \sin CD \cos P - \sin AD \sin BC \cos Q = \sin AC \sin BD \cos R.$$



$\because$ $\cos BC = \cos BP \cos CP$

$+ \sin BP \sin CP \cos BPC,$

$$\cos BPC = \frac{\cos BC - \cos BP \cos CP}{\sin BP \sin CP},$$

又 $\cos AC = \cos AP \cos CP$

$+ \sin AP \sin CP \cos BPC,$

$$\cos BPC = \frac{\cos AC - \cos AP \cos CP}{\sin AP \sin CP},$$

$$\therefore \quad \frac{\cos BC - \cos BP \cos CP}{\sin BP \sin CP} = \frac{\cos AC - \cos AP \cos CP}{\sin AP \sin CP},$$

$$\cos BC \sin AP - \cos BP \cos CP \sin AP = \cos AC \sin BP - \cos AP \cos CP \sin BP,$$

$$\cos BC \sin AP - \cos AC \sin BP - \cos CP \{\cos BP \sin AP - \sin BP \cos AP\} = 0,$$

$$\cos BC \sin AP - \cos AC \sin BP - \cos CP \sin AB = 0,$$

$$\therefore \quad \cos CP = \frac{\cos BC \sin AP - \cos AC \sin BP}{\sin AB},$$

同理.

$$\cos PD = \frac{\sin PA \cos BD - \sin PB \cos AD}{\sin AB},$$

又

$$\sin AB \sin CD \cos P = \sin(PA - PB) \sin(PD - PC) \cos P$$

$$= \{\sin PA \cos BP - \sin BP \cos PA\}\{\sin PD \cos PC - \cos PD \sin PC\} \cos P$$

$$= \{\sin PA \sin PD \cos BP \cos PC - \sin PA \sin PC \cos BP \cos PD$$

$$- \sin BP \sin PD \cos PA \cos PC + \sin BP \sin PC \cos PA \cos PD\} \cos BPC$$

$$= (\cos \mathrm{AD} - \cos \mathrm{PA} \cos \mathrm{PD}) \cos \mathrm{BP} \cos \mathrm{PC}$$
$$- (\cos \mathrm{AC} - \cos \mathrm{AP} \cos \mathrm{PC}) \cos \mathrm{PB} \cos \mathrm{PD}$$
$$- (\cos \mathrm{BD} - \cos \mathrm{PB} \cos \mathrm{PD}) \cos \mathrm{PA} \cos \mathrm{PC}$$
$$+ (\cos \mathrm{BC} - \cos \mathrm{PB} \cos \mathrm{PC}) \cos \mathrm{AP} \cos \mathrm{PD}$$

$$= \cos \mathrm{AD} \cos \mathrm{PB} \cos \mathrm{PC} - \cos \mathrm{AC} \cos \mathrm{PB} \cos \mathrm{PD}$$
$$- \cos \mathrm{BD} \cos \mathrm{PA} \cos \mathrm{PC} + \cos \mathrm{BC} \cos \mathrm{PA} \cos \mathrm{PD}$$

$$= \frac{\cos \mathrm{PA}}{\sin \mathrm{AB}} \{\cos \mathrm{AD} (\sin \mathrm{PA} \cos \mathrm{BC} - \sin \mathrm{PB} \cos \mathrm{AC})$$
$$- \cos \mathrm{AC} (\sin \mathrm{PA} \cos \mathrm{BD} - \sin \mathrm{PB} \cos \mathrm{AD})\}$$
$$+ \frac{\cos \mathrm{PA}}{\sin \mathrm{AB}} \{\cos \mathrm{BC} (\sin \mathrm{PA} \cos \mathrm{BD} - \sin \mathrm{PB} \cos \mathrm{AB})$$
$$- \cos \mathrm{BD} (\sin \mathrm{PA} \cos \mathrm{BC} - \sin \mathrm{PB} \cos \mathrm{AC})\}$$

$$= \cos \mathrm{AD} \cos \mathrm{BC} - \cos \mathrm{AC} \cos \mathrm{BD}.$$

同様.

$$\sin \mathrm{BC} \sin \mathrm{AD} \cos \mathrm{Q} = \cos \mathrm{AB} \cos \mathrm{CD} - \cos \mathrm{AC} \cos \mathrm{BD}.$$

$$\sin \mathrm{BD} \sin \mathrm{AC} \cos \mathrm{R} = \cos \mathrm{BC} \cos \mathrm{AD} - \cos \mathrm{CD} \cos \mathrm{AB},$$

$$\therefore \quad \sin \mathrm{AB} \sin \mathrm{CD} \cos \mathrm{P} - \sin \mathrm{BC} \sin \mathrm{AD} \cos \mathrm{Q} = \sin \mathrm{BD} \sin \mathrm{AC} \cos \mathrm{R}.$$

第五編

關於E之公式

A+B+C−π為三角形之球面過剩.此以E表之.用此E卽得次之諸定理.

1. 喀格約里氏之定理.

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\frac{\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 41$$

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C-\pi)=\sin\{\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(\pi-C)\}$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(\pi-C)-\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(\pi-C)$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C-\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C.$$

由德蘭布魯氏之定理.

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}C}\{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\sin C\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\cdot\frac{2}{\sin a\sin b}\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}$$

$$=\frac{\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

2. 雷里氏之定理.

$$\tan\tfrac{1}{4}E=\sqrt{\{\tan\tfrac{1}{2}s\tan\tfrac{1}{2}(s-a)\tan\tfrac{1}{2}(s-b)\tan\tfrac{1}{2}(s-c)\}}\quad\cdots 42$$

$$\tan\tfrac{1}{4}E=\frac{\sin\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}{\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{4}(A+B+\pi-C)}{2\cos\frac{1}{4}(A+B+C-\pi)\cos\frac{1}{4}(A+B+\pi-C)}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\sin\frac{1}{2}(\pi-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\cos\frac{1}{2}(\pi-C)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}-\cos\frac{1}{2}C}{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}+\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}c}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}{2\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}$$

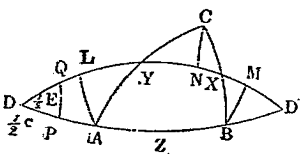
$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-a)}{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-c)}\sqrt{\left\{\frac{\dfrac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{\sin^2\frac{1}{2}(s-b)\sin^2\frac{1}{2}(s-a)}{\cos^2\frac{1}{2}s\cos^2\frac{1}{2}(s-c)}\times\frac{2\sin\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}s\cdot2\sin\frac{1}{2}(s-c)\cos\frac{1}{2}(s-c)}{2\sin\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-a)\cdot2\sin\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-b)}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}\right\}}$$

$$=\sqrt{\{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)\}}.$$

喀格約里之定理.又得以幾何學的證明之,



三角形ABC.令三邊BC, CA, AB之中點爲x, y, z.通過x, y畫大圓弧.交AB之引長弧於D, D′.作垂弧AL, BM, CN.則

$$AD=\frac{1}{2}(\pi-c),\quad 而\quad xy=r,\quad LAD=\pi-S=\frac{1}{2}(\pi-E),$$

則 $\triangle LAY=\triangle CYN,\quad \triangle CNX=\triangle BXM,$

$\therefore\ \angle LAY=\angle YCN,\quad \angle NCX=\angle XBM,$

又 $\angle LAB=\angle ABM,$

$\therefore\ \angle LAB=\frac{1}{2}(A+B+C)=S.$

由上之關係.

$$\cos AD = \cot D \cot LAD,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(\pi - c) = \cot D \cot LAD = \cot D \cot\tfrac{1}{2}(\pi - E),$$

$$\therefore\ \sin\tfrac{1}{2}c = \cot D \tan\tfrac{1}{2}E.$$

故若取 $DP = \frac{c}{2}$, 從 P 引 DA 之垂弧 PQ.

則 $\sin\frac{1}{2}c = \cot D \tan PQ, \quad \therefore\ PQ = \frac{1}{2}E,$

又 $\sin DL = \sin AD \sin LAD,$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\pi - 2XY) = \sin\tfrac{1}{2}(\pi - c)\sin\tfrac{1}{2}(\pi - E),$$

$$\cos\gamma = \cos\tfrac{1}{2}c \cos\tfrac{1}{2}E,$$

次 $\cos DQ = \cos\frac{1}{2}c \cos\frac{1}{2}E, \quad \therefore\ DQ = \gamma,$

故 $\triangle DPQ$ 之三邊.得以 $\frac{1}{2}C$, $\frac{1}{2}E$, γ 表之.

$$\therefore\ \sin\tfrac{1}{2}E = \sin\gamma \sin D = \sin\gamma \frac{\sin AL}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\sin\gamma \sin CN}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}.$$

補題. $\sin\gamma \sin CN = \sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}b \sin C, \qquad \sin\gamma \sin CN.$

$$\because\ \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \sin C = \sin\tfrac{1}{2}b \sin XU,$$

然 $\sin XYU = \dfrac{\sin XU}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin CN}{\sin\frac{1}{2}b},$

$$\therefore\ \sin XU . \sin\tfrac{1}{2}b = \sin CN . \sin\gamma,$$

$$\therefore\ \sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}b \sin C = \sin CN . \sin\gamma.$$

此含球面過剩諸定理 試應用以上之定理.則得以種種相異之公式表之.

3. $\cos\frac{1}{2}E=\cos\{\frac{1}{2}(A+B)-\frac{1}{2}(\pi-C)\}$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(\pi-C)+\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}(\pi-C)$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\sin\tfrac{1}{2}C+\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$=\{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin^2\tfrac{1}{2}C+\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos^2\tfrac{1}{2}C\}\sec\tfrac{1}{2}C$$

$$=\{(\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b-\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b)\sin^2\tfrac{1}{2}C$$
$$+(\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b)\cos^2\tfrac{1}{2}C\}\sec\tfrac{1}{2}C$$

$$=\{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b(\sin^2\tfrac{1}{2}C+\cos^2\tfrac{1}{2}C)$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b(\cos^2\tfrac{1}{2}C-\sin^2\tfrac{1}{2}C)\}\sec\tfrac{1}{2}C$$

$$\therefore\ \cos\tfrac{1}{2}E=\{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C\}\sec\tfrac{1}{2}C \cdots\cdots\cdots 43$$

又由喀格約里之定理.

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\sin C\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c,$$

$$\therefore\ \tan\tfrac{1}{2}E=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}, \cdots\cdots\cdots 44$$

從 43. $\cos\frac{1}{2}E=\{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C\}\sec\frac{1}{2}C$

$$=\frac{4\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b+2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b\cos C}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{(1+\cos a)(1+\cos b)+\sin a\sin b\cos C}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\therefore\ \cos\tfrac{1}{2}E=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}, \cdots\cdots\cdots 45$$

今 $\cos\frac{1}{2}E$ 代以 $1-2\sin^2\frac{1}{4}E$ 而變化之.則

$$\sin^2\tfrac{1}{4}E\frac{1+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\therefore\quad \sin^2\tfrac{1}{4}E=\frac{\sin\frac{1}{2}s\,\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{4\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}c},\ \cdots\cdots\cdots\cdots 46$$

又 $\cos\frac{1}{2}E$ 代以 $2\cos^2\frac{1}{4}E-1$ 而變化之.則

$$\cos^2\tfrac{1}{4}E=\frac{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c+\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}-1$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-1+\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}c)^2-(1-\cos^2\frac{1}{2}a)(1-\cos^2\frac{1}{2}b)}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b+\cos\tfrac{1}{2}c\}$$

$$\times\{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b-\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b+\cos\tfrac{1}{2}c\}$$

$$\div(4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c)$$

$$=\frac{\{\cos\frac{1}{2}(a-b)+\cos\frac{1}{2}c\}\{\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}c\}}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{4}(a-b+c)\cos\frac{1}{4}(b+c-a).2\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 47$$

試以 47 式除 46 式.則可得雷里氏之定理.

又

$$\frac{\sin(C-\frac{1}{2}E)}{\sin\frac{1}{2}E}=\sin C\cot\tfrac{1}{2}E-\cos C$$

$$=\sin C\left(\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}\right)-\cos C$$

$$=\cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b.$$

$$\therefore\quad \sin(C-\tfrac{1}{2}E)=\cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}E$$

$$=\cot\tfrac{1}{2}a\cot\tfrac{1}{2}b\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

卽 $$\sin(C-\tfrac{1}{2}E)=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\ \cdots\cdots\cdots 48$$

$$\cos(C-\tfrac{1}{2}E)=\cos C\cos\tfrac{1}{2}E+\sin C\sin\tfrac{1}{2}E$$

$$=\frac{\cos C\{(1+\cos a)(1+\cos b)+\sin a\sin b\cos C\}}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}+\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin^2 C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{(1+\cos a)(1+\cos b)\cos C+\sin a\sin b}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}a.2\cos^2\frac{1}{2}b\cos C+2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a.2\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}b}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos C+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\}\sec\tfrac{1}{2}c$$

$$=\frac{\sin a\sin b\sin c+4\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos c-\cos a\cos b+(1-\cos a)(1-\cos b)}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{1+\cos c-\cos a-\cos b}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

卽 $$\cos(C-\tfrac{1}{2}E)=\frac{\cos^2\frac{1}{2}c-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b+1}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\text{......................}49$$

從 49.

$$\sin^2(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}E)=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c+\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c-1}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=(\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2 b-1$$

$$-\sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b+2\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c-\cos^2\tfrac{1}{2}c)$$

$$\div(4\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c)$$

$$=\frac{\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b-1-(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}c)^2}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b-(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}c)^2}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b-\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b+\cos\tfrac{1}{2}c\}$$

$$\times\{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b-\cos\tfrac{1}{2}c\}\div(4\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c)$$

$$=\frac{\{\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}c\}\{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}c\}}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)\sin\frac{1}{4}(a-b+c)\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-c)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-a)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

同樣.

$$\cos^2(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}E)=\frac{\sin\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

4. 列克色爾氏之法則.

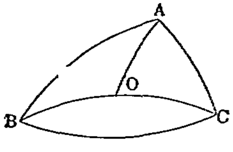
有球面三角形. 已知邊 BC 之大, 及其位置, 與其球面過剩之大. 則頂點之軌跡, 爲球面上之小圓. 試證之.

欲證明本題. 須知施起那魯氏之證明. 特補題如次. 球面三角形 ABC. 令 BC 邊及 $A-\frac{1}{2}E$ 爲常數. 則 A 之軌跡爲小圓. 且爲三角形 ABC 之外接圓.

令 O 爲外接圓之極. 則 $\angle OBC=\angle OCB$,

$$\therefore\ \angle A+\angle OBC=\frac{1}{2}(A+B+C),$$

$$\angle A-\frac{1}{2}(A+B+C-\pi)=\frac{\pi}{2}-\angle OBC,$$



$$\therefore\ \angle OBC=\frac{\pi}{2}-\left(A-\frac{1}{2}E\right).$$

$\therefore$ $\angle OBC$ 爲一定.

又 $\angle OCB$ 亦爲一定.

BC 爲一定. 故 O 點爲定點.

$OB=OC=OA=$ 常數.

故外接於 ABC 之圓.

從此證明本題.

令 ABC 爲球面三角形之一位置. B', C' 爲 B, C 之對稱點. P 爲 $AB'C'$ 圓之極. 則

$$E=A+B+C-\pi=B'AC'+\pi-AB'C'+\pi-AC'B'-\pi$$

$$=\pi-(B'+C'-A),$$

$$\therefore\quad E=\pi-(B'+C'-A).$$

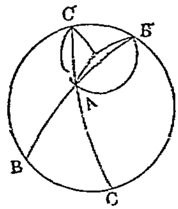
而 $B'+C'-A$ 爲常數.

依補題. A 點之軌跡, 爲外接於 $AB'C'$ 之圓.

又如色列氏證明如次.

令 E' 爲 $B'C'A$ 之球面過剩. R' 爲外接圓之半徑. 則

$$\tan R'=\tan\tfrac{1}{2}a/\sin(A-\tfrac{1}{2}E')=\tan\tfrac{1}{2}a/\sin\tfrac{1}{2}E.$$



而 a, E 爲已知. R' 亦爲已知. 卽知爲 $AB'C'$ 之外接圓.

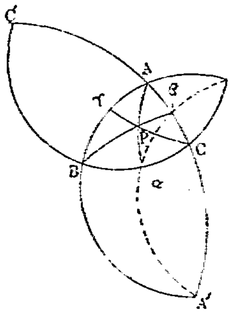
5. 施起那魯氏之法則.

依大圓弧通過球面三角形 ABC 之角頂. 且分積爲二等分. 令大圓弧截對邊之點. 順次爲 α, β, γ. 此弧分積爲二等分. 又 A', B', C' 爲 A, B, C 之對稱點. 則 $\triangle AB\alpha$, $\triangle AB\beta$ 之積兩兩相等. 均等於 ABC 之半分. 故依列克色爾氏之法則. 點 A', B' α, β, 在同一圓周上.

同樣. B', C', β, γ; C', A', γ, α. 又各同在一圓周上. 今 P 爲此三個小圓之平面之公通點. 則此等平面二個通過 P 點. 若 O 點爲球之中心. 則此平面 $OB'\beta B$, $OC'\gamma C$, $OA'\alpha A$. 當有交截之交通線. 是卽 OP 線.

別證.

三角形 $AB\alpha$, $AC\alpha$, 有同一球面過剩. 故依喀約克里氏之法則.



$$\frac{\sin\frac{c}{2}\sin\frac{B\alpha'}{2}\sin B}{\cos\frac{1}{2}A\alpha}$$

$$=\frac{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{C\alpha'}{2}\sin C}{\cos\frac{1}{2}A\alpha}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\frac{B\alpha'}{2}}{\sin\frac{C\alpha'}{2}}=\frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{b}{2}},$$

自與此同樣之二式及此式. 得

$$\sin\tfrac{1}{2}B\alpha\sin\tfrac{1}{2}C\beta\sin\tfrac{1}{2}A\gamma=\sin\tfrac{1}{2}\alpha C\sin\tfrac{1}{2}\beta A\sin\tfrac{1}{2}\gamma B.$$

又 $\triangle AB\alpha$, $\triangle\gamma BC$ 等積. 故

$$\tan\tfrac{1}{2}c\tan\tfrac{1}{2}B\alpha=\tan\tfrac{1}{2}\gamma B\tan\tfrac{1}{2}a,$$

$$\therefore\quad \tan\tfrac{1}{2}B\alpha\tan\tfrac{1}{2}C\beta\tan\tfrac{1}{2}A\gamma=\tan\tfrac{1}{2}\alpha C\tan\tfrac{1}{2}\beta A\tan\tfrac{1}{2}\gamma B,$$

$$\therefore\quad \cos\tfrac{1}{2}B\alpha\cos\tfrac{1}{2}C\beta\cos\tfrac{1}{2}A\gamma=\cos\tfrac{1}{2}\alpha C\cos\tfrac{1}{2}\beta A\cos\tfrac{1}{2}\gamma B,$$

又 $\sin B\alpha\sin C\beta\sin A\gamma=\sin\alpha C\sin\beta A\sin\gamma B.$

是則弧 $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ 當共集合.

補題 1. 有三角形 ABC. 從各角頂向對邊任意引一弧. 各弧集於一點. 則

$$\sin B\alpha\sin C\beta\sin A\gamma=\sin\alpha C\sin\beta A\sin\gamma B,$$

$$\because\quad \frac{\sin B\alpha}{\sin c}=\frac{\sin BA\alpha}{\sin A\alpha B},\quad \frac{\sin b}{\sin C\alpha}=\frac{\sin A\alpha C}{\sin\alpha AC},$$

$$\frac{\sin C\beta}{\sin a}=\frac{\sin\beta BC}{\sin B\beta C},\quad \frac{\sin c}{\sin A\beta}=\frac{\sin B\beta A}{\sin AB\beta},$$

$$\frac{\sin A\gamma}{\sin b}=\frac{\sin AC\gamma}{\sin b},\quad \frac{\sin a}{\sin B\gamma}=\frac{\sin C\gamma B}{\sin\gamma CB},$$

$$\therefore\quad \frac{\sin \mathrm{B}\alpha \sin \mathrm{C}\beta \sin \mathrm{A}\gamma}{\sin \mathrm{C}\alpha \sin \mathrm{A}\beta \sin \mathrm{B}\gamma}=\frac{\sin \mathrm{BA}\alpha \sin \beta\mathrm{BC} \sin \mathrm{AC}\gamma}{\sin \alpha\mathrm{AC} \sin \mathrm{AB}\beta \sin \gamma\mathrm{CB}}$$

$$=\frac{\sin \mathrm{BA}\alpha}{\sin \mathrm{AB}\beta}\cdot\frac{\sin \beta\mathrm{BC}}{\sin \gamma\mathrm{CB}}\cdot\frac{\sin \mathrm{AC}\gamma}{\sin \alpha\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{\sin \mathrm{BP}}{\sin \mathrm{AP}}\cdot\frac{\sin \mathrm{CP}}{\sin \mathrm{BP}}\cdot\frac{\sin \mathrm{AP}}{\sin \mathrm{CP}}=1,$$

$$\therefore\quad \sin \mathrm{B}\alpha \sin \mathrm{C}\beta \sin \mathrm{A}\gamma=\sin \mathrm{C}\alpha \sin \mathrm{A}\beta \sin \mathrm{B}\gamma.$$

補題 2. $\triangle \mathrm{AB}\alpha$ 與 $\triangle \mathrm{C}\gamma\mathrm{B}$ 等積. 則

$$\tan\tfrac{1}{2}\mathrm{C} \tan\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\alpha=\tan\tfrac{1}{2}\gamma\mathrm{B} \tan\tfrac{1}{2}a,$$

$$\because\quad \sin\tfrac{1}{2}\mathrm{E}=\frac{n}{2\cos\frac{1}{2}\mathrm{A}\alpha \cos\frac{1}{2}\mathrm{B}\alpha \cos\frac{1}{2}c},$$

$$\sin(\mathrm{B}-\mathrm{E})=\frac{n}{2\sin\frac{1}{2}c \sin\frac{1}{2}\mathrm{B}\alpha \cos\frac{1}{2}\mathrm{A}\alpha},$$

由上二式. 得

$$\cot\tfrac{1}{2}\mathrm{E}=\frac{\cot\frac{1}{2}\mathrm{B}\alpha \cot\frac{1}{2}c}{\sin \mathrm{B}}+\cot \mathrm{B},$$

同樣. $\cot\tfrac{1}{2}\mathrm{E}=\dfrac{\cot\frac{1}{2}\mathrm{B}\gamma \cot\frac{1}{2}a}{\sin \mathrm{B}}+\cot \mathrm{B},$

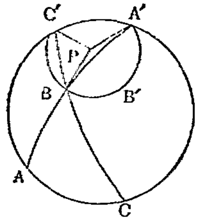
$$\therefore\quad \cot\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\alpha \cot\tfrac{1}{2}c=\cot\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\gamma \cot\tfrac{1}{2}a,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\alpha \tan\tfrac{1}{2}c=\tan\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\gamma \tan\tfrac{1}{2}a.$$

6. 三角形有 b, c 二邊, 試求其極大之積.

令 AC$=b$, 固定其位置. AC 之對稱為 A′C′. AB$=c$. 任意作一三角形 ABC. 作列克色爾氏之小圓. 又以 A 為中心, AB 為半徑. 畫圓弧. 交小圓於 B, B′. 當得 $\triangle$ABC, $\triangle$AB′C′. 而令小圓之極為 P. 則

$$\mathrm{PA'C'}=\frac{\pi}{2}-\frac{\mathrm{E}}{2},$$



$\because\quad \angle B+\angle PA'C=\frac{1}{2}(A'+\angle B+\angle C')$

$=\frac{1}{2}(\pi-A+\pi-C+B)=\pi-\frac{1}{2}(A+C-B)$

$\therefore\quad \angle PA'C=\pi-\frac{1}{2}(A+B+C)$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{E}{2}.$$

故以AC爲底.頂點置於小圓周上.則E爲一定不易.而△BAC之積爲Er^2.今欲令Er^2爲極大.則E須最大.即$\frac{\pi}{2}-\frac{E}{2}$須極小.

$\frac{\pi}{2}-\frac{E}{2}$爲極小.則PA′C′爲極小.而ABA′弧通過極P.

故　△BA′C′爲直徑三角形.

而　$C'=A'+B$,

然　$C'=\pi-C,\quad A'=\pi-C$,

由是$\pi-C=\pi-A+B,\qquad \therefore\quad A=B+C.$

而BC爲ABC外接圓之直徑.故直徑三角形.乃三角形積之極大者.

問　題　五

1. 等邊球面三角形之面積.等於其球面積四分之一之時.則其角及邊若干.

令各角爲α.則$(3\alpha-\pi)r^2$爲三角形之面積.$4\pi r^2$爲球之面積

$\therefore\quad (3\alpha-\pi)r^2=\frac{1}{4}.4\pi r^2,\qquad \therefore\quad \alpha=\frac{2\pi}{3}.$

又從一角頂引垂弧.則

$$\cos a=\cot\tfrac{2}{3}\pi\cot\tfrac{1}{3}\pi=-\tfrac{1}{3}.$$

從此得以決定a.但a作等邊之一看.

2. 球面三角形 ABC. 設 C 爲直角. 則

$\sin\frac{1}{2}E=\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c$. 試證之.

$\cos\frac{1}{2}E=\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c$,

$$\sin\frac{1}{2}E=\frac{\sin C\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}=\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c,$$

$$\cos\frac{1}{2}E=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c.$$

3. 球面三角形 ABC. 若 $a=b=\frac{\pi}{3}$, $c=\frac{\pi}{2}$, 則

$E=\cos^{-1}\frac{7}{9}$. 試證之.

$$\cos\frac{1}{2}E=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{4}-1}{2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore\quad \cos E=2\cos^2\frac{1}{2}E-1=2\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=\frac{7}{9},$$

$$\therefore\quad E=\cos^{-1}\frac{7}{9}.$$

4. 三角形ABC. 設C角爲直角. 則 $\frac{\sin^2 c}{\cos c}\cos \mathrm{E}=\frac{\sin^2 a}{\cos a}+\frac{\sin^2 b}{\cos b}$.

試證之.

$$\frac{\sin^2 c}{\cos c}\cos\mathrm{E}=\frac{\sin^2 c}{\cos c}\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}-\pi)$$

$$=\frac{\sin^2 c}{\cos c}\{\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cos-(\pi-\mathrm{S})-\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\sin-(\pi-\mathrm{C})\}$$

$$=\frac{\sin^2 c}{\cos c}\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\sin^2 c}{\cos c}\{\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{B}+\sin\mathrm{B}\cos\mathrm{A}\}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin^2 a}{\sin^2\mathrm{A}}}{\cos a\cos b}\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{B}+\frac{\dfrac{\sin^2 b}{\sin^2\mathrm{B}}}{\cos a\cos b}\sin\mathrm{B}\cos\mathrm{A}$$

$$=\frac{\sin^2 a\cos\mathrm{B}}{\cos a\cos b\sin\mathrm{A}}+\frac{\sin^2 b\cos\mathrm{A}}{\cos a\cos b\sin\mathrm{B}}$$

$$=\frac{\sin^2 a\cos b\sin\mathrm{A}}{\cos a\cos b\sin\mathrm{A}}+\frac{\sin^2 b\cos a\sin\mathrm{B}}{\cos a\cos b\sin\mathrm{B}}$$

$$=\frac{\sin^2 a}{\cos a}+\frac{\sin^2 b}{\cos b}.$$

5. 設前題之 a 等於 b. 則

$$\tan\mathrm{E}=\frac{\sin^2 a}{2\cos a},$$

$$\tan\mathrm{E}=\frac{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}-\pi)}{\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}-\pi)}=\frac{\sin-\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)}{\cos-\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{A}-\mathrm{B}\right)}=-\frac{\cos(\mathrm{A}+\mathrm{B})}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})},$$

然由 $a=b$, 知 $\mathrm{A}=\mathrm{B}$,

$$\therefore\quad \tan\mathrm{E}=-\frac{\cos 2\mathrm{A}}{\sin 2\mathrm{A}}=-\frac{\cos^2\mathrm{A}-\sin^2\mathrm{A}}{2\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{A}}$$

$$=\tfrac{1}{2}(\tan A-\cot A)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\tan a}{\sin b}-\frac{\sin b}{\tan a}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos a}-\cos a\right)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-\cos^2 a}{\cos a}\right)=\frac{\sin^2 a}{2\cos a}.$$

6. 直角三角形.其各角之和比四直角小.試證之.

由問題 2.

$$\cos\tfrac{1}{2}E=\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\sec\tfrac{1}{2}c,$$

此式之右邊爲正.故 $\cos\frac{1}{2}E$ 爲正.

而 E 比二直角小.

$\therefore\ \pi>E,$ 卽 $\pi>A+B+C-\pi,$

$\therefore\ 2\pi>A+B+C.$

7. 三角形 ABC. 若

$$\cos C=-\tan\tfrac{1}{2}a\tan\tfrac{1}{2}b,$$

則 $C=A+B$. 試證之.

$$\tan\tfrac{1}{2}a\tan\tfrac{1}{2}b=\sqrt{\left\{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}\right\}\left\{-\frac{\cos S\cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}\right\}}$$

$$=\frac{\cos S}{\cos(S-C)},$$

$$\therefore\ \cos C=-\frac{\cos S}{\cos(S-C)},\qquad \cos C\cos(S-C)=-\cos S,$$

$$\tfrac{1}{2}\{\cos S+\cos(S-2C)\}=-\cos S,\quad \cos(S-2C)=-\cos S=\cos-S,$$

$$S-2C=-S,\quad 2S=2C,\quad A+B+C=2C,$$

$\therefore\ A+B=C.$

8. 三角形 ABC. 若各角之和等於四直角.則

$\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c=1$. 試證之.

$$\because\ \cos\tfrac{1}{2}E=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

$$A+B+C=2\pi, \qquad A+B+C-\pi=\pi,$$

$$\frac{A+B+C-\pi}{2}=\frac{\pi}{2}, \quad \therefore \frac{E}{2}=\frac{\pi}{2}, \quad \cos\frac{1}{2}E=\cos\frac{1}{2}\pi=0,$$

$$\therefore \quad \cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c-1=0, \qquad \therefore \quad \cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c=1.$$

9. $$\sin s=\frac{\{\sin\frac{1}{2}E\sin(A-\frac{1}{2}E)\sin(B-\frac{1}{2}E)\sin(C-\frac{1}{2}E)\}^{\frac{1}{2}}}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$$

$$\because \quad \sin\tfrac{1}{2}E=\frac{n}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\sin(A-\tfrac{1}{2}E)=\frac{n}{2\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\sin(B-\tfrac{1}{2}E)=\frac{n}{2\frac{1}{2}\cos b\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\sin(C-\tfrac{1}{2}E)=\frac{n}{2\cos\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b},$$

$$\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}E\sin(A-\tfrac{1}{2}E)\sin(B-\tfrac{1}{2}E)\sin(C-\tfrac{1}{2}E)}$$

$$=\frac{n^2}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{2\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin a\sin b\sin c},$$

又 $$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\left\{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}\right\}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\left\{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}\right\}},$$

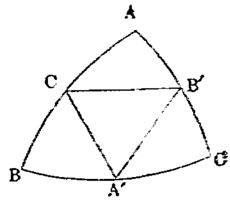
$$\sin\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\left\{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}\right\}},$$

$$\therefore \quad \sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C=\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin a\sin b\sin c},$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{\{\sin\frac{1}{2}E\sin(A-\frac{1}{2}E)\sin(B-\frac{1}{2}E)\sin(C-\frac{1}{2}E)\}}}{2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}=\sin s.$$

10. 設 A, B, C 爲三角形之角點. A′, B′, C′ 爲對邊之中點. E 爲球面過剩. 則

$$\cos\tfrac{1}{2}E=\frac{\cos A'B'}{\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos B'C'}{\cos\frac{1}{2}a}=\frac{\cos C'A'}{\cos\frac{1}{2}b}.$$



$$\because\quad \cos A'B'=\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos C$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b$$

$$+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}$$

$$=\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b+\frac{\cos c-\cos a\cos b}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}$$

$$=\frac{(1+\cos a)(1+\cos b)+\cos c-\cos a\cos b}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}$$

$$=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}$$

$$=\frac{(1+\cos a+\cos b+\cos c)\cos\frac{1}{2}c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}=\cos\tfrac{1}{2}E\cos\tfrac{1}{2}c,$$

$$\therefore\quad \frac{\cos A'B'}{\cos\frac{1}{2}c}=\cos\tfrac{1}{2}E.$$

同樣. 可求得其他各項.

11. 三角形之邊之中點. 結成大圓弧. 爲一象限. 則連結其他中點之二弧. 亦當爲一象限.

如問題 10, A′B′ 爲象限. 則他之二弧亦爲象限.

由是知 $\cos A'B'$, $\cos B'C'$, $\cos A'C'$ 爲零.

12. 三角形 ABC. 若 A 與 E 爲一定不易. 則欲 $b+c$ 爲極大. 必須 $b=c$. 試證之.

本題定理補題. 有式如

$$\cot\tfrac{1}{2}E=\frac{\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c}{\sin A}+\cot A,$$

以此變化之.則

$$\frac{\cos A \sin\frac{1}{2}E+\sin A\cos\frac{1}{2}E-\cos A\sin\frac{1}{2}E}{\sin\frac{1}{2}E\sin A}=\frac{\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c}{\sin A}+\cot A,$$

$$\frac{\cos A\sin E+\sin(A-\frac{1}{2}E)}{\sin\frac{1}{2}E\sin A}=\frac{\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c}{\sin A}+\cot A,$$

$$\frac{\cos A\sin\frac{1}{2}E+\sin(A-\frac{1}{2}E)-\sin\frac{1}{2}A\cos A}{\sin E\sin A}=\frac{\cot\frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}c}{\sin A},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin(A-\frac{1}{2}E)}=\tan\tfrac{1}{2}b\tan\tfrac{1}{2}c,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin(A-E)\sin A}=\frac{\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c}{\sin A},$$

$$\frac{\sin A\cos(A-\frac{1}{2}E)-\sin(A-\frac{1}{2}E)\cos A}{\sin A\sin(A-\frac{1}{2}E)}=\frac{\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c}{\sin A},$$

$$\therefore\quad \cot(A-\tfrac{1}{2}E)-\cot A=\frac{\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c}{\sin A},$$

$$\therefore\quad \cot(A-\tfrac{1}{2}E)=\frac{\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c}{\sin A}+\cot A.$$

以是爲基礎.即得解本問題.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin(A-\frac{1}{2}E)}=\frac{\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}E}{\sin(A-\frac{1}{2}E)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)-\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}(b+c)+\cos\frac{1}{2}(b-c)},$$

$$\therefore\quad \cos\tfrac{1}{2}(b+c)=\frac{\sin\frac{1}{2}E+\sin(A-\frac{1}{2}E)}{\sin(A-\frac{1}{2}E)-\sin\frac{1}{2}E}\cos\tfrac{1}{2}(b-c),$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(b+c)=\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(E-A)}{\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(E-A)}\cos\tfrac{1}{2}(b-c)$$

$$=\tan\tfrac{1}{2}A\cot\tfrac{1}{2}(E-A)\cos\tfrac{1}{2}(b-c).$$

$\tan\frac{1}{2}A$, $\tan\frac{1}{2}(E-A)$一定不易.故欲$\cos\frac{1}{2}(b+c)$爲極大.須$\cos\frac{1}{2}(b-c)$爲極大.即 $b-c=0$, $\therefore$ $b=c$.

第六編

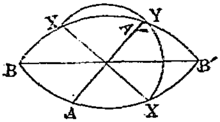
雜定理

橫直線之定理.

1. 設 A, B, X 同在一大圓弧上. 則

$\sin XA : \sin XB$. 名 AB 之部分比. 此以 (AB, X) 記之.

弧 XA, XB 由 X 之方向而異其符號. 卽與時計之針迴轉反對之方向爲正. 而與時計之針迴轉相同之方向爲負.



X 在 A′B 或 AB′ 之上爲正.

在 AB 或 A′B′ 之上爲負.

2. 設 A, B, X, Y 爲同一大圓周上之四點. 則部分比爲 (AB, X) : (AB, Y), 卽

$$\frac{\sin XA}{\sin XB} : \frac{\sin YA}{\sin YB}.$$

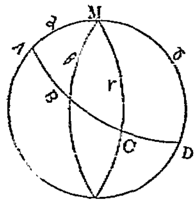
此二個二重比. 名四點之非調和比. 以 (ABXY) 記之.

若比 $=-1$. 則點 X, Y 云分 A, B 之調和比.

大圓周上之四點. 亦如幾何學之結果. 直線上之四點. 組合爲六個非調和比. 其任意一個. 得以名點之非調和比.

若大圓之三弧 α, β, γ 同過一點 M. 以 M 爲極. 而畫一大圓. 相交於 A, B, C. 則部分比 (α, β, γ). 卽

$$\frac{\sin CA}{\sin CB} = \frac{\sin(\gamma\alpha)}{\sin(\gamma\beta)}.$$



同過M點,而截大圓AC, BD之四大圓 (α, β, γ, δ). 爲交角之非調和比 [α, β, γ, δ]. 卽

$$\frac{sin(\gamma\alpha)}{sin(\gamma\beta)}:\frac{sin(\delta\alpha)}{sin(\delta\beta)}=\frac{sin\,CA}{sin\,CB}:\frac{sin\,DA}{sin\,DB}\cdots\cdots 50$$

若 [α, β, γ, δ] $=-1$. 則射影 α, β, γ, δ. 曰調和比. M曰調和尖頭.

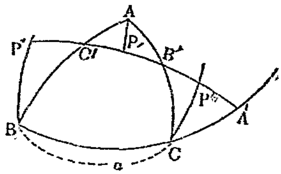
3. 三角形ABC. 有大圓截其三邊之點爲A′, B′, C′. 則

1. [AB, C′] [BC, A′] [CA, B′] $=1$. ……………………………51

2. [ab, $\overline{CC'}$] [bc, $\overline{AA'}$] [ca, $\overline{BB'}$] $=1$. ……………………52

1式之證明. 大圓截邊AB, AC於內部C′, B′點. 截邊BC於外部A′點. 從各角頂向其橫截線, 卽大圓弧C′B′A′. 引垂弧 p', p'', p'''. 則由直角三角形之性質.

$$[AB, C']=-\frac{sin\,p'}{sin\,p''},$$



$$[BC, A']=-\frac{sin\,p''}{sin\,p'''},$$

$$[CA, B']=-\frac{sin\,p'''}{sin\,p'},$$

$$\therefore\quad [AB, C'][BC, A'][CA, B']=-\frac{sin\,p'}{sin\,p''}\cdot\frac{sin\,p''}{sin\,p'''}\cdot\frac{sin\,p'''}{sin\,p'}=-1.$$

2式之證明. 結合CC′, AA′, BB′. 則

$$\frac{sin\,C'A}{sin\,C'B}=\frac{sin\,C'CA}{sin\,C'CB}:\frac{sin\,A}{sin\,B},$$

卽 $[AB, C']=[ba, \overline{CC'}]:\dfrac{sin\,A}{sin\,B},$

但 $[ba, \overline{CC'}]=\dfrac{sin(b, \overline{CC'})}{sin(a, \overline{CC'})}=\dfrac{sin\,C'CA}{sin\,C'CB},$

同樣. $[BC, A']=[cb, \overline{AA'}]:\dfrac{sin\,B}{sin\,C},\quad [CA, B']=[ac, \overline{BB'}]:\dfrac{sin\,C}{sin\,A},$

$\therefore\quad [AB, C'][BC, A'][CA, B'] = [ba, \overline{CC'}][cb, \overline{AA'}][ac, \overline{BB'}] = 1,$

$\therefore\quad [ab, \overline{CC'}][bc, \overline{AA'}][ca, \overline{BB'}] = 1$

4. 連結三角形二邊之中點作弧.與第三邊相交.則其交點在距第三邊中點90°之處.

如前圖. C′, B′ 爲 AB, AC 之中點.則

$$[AB, C'][BC, A'][CA, B'] = 1,$$

從此得 $[AB, C'] = 1,\qquad [CA, B'] = 1,$

又 $[BC, A'] = 1,$

故 $\dfrac{\sin BA'}{\sin CA'} = 1,\qquad \sin BA' = \sin CA',$

令 BC 之中點爲 E.則

$$\sin(EA'+EC) = \sin(EA'-EC) = \sin\{\pi - EA' + EC\},$$

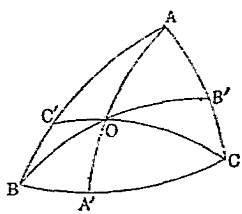
$\therefore\quad 2EA' = \pi,\qquad EA' = \dfrac{\pi}{2}.$

5. 三角形 ABC.從頂點向球面上任意一點 O 畫弧,且延長之.截三邊之弧於 A′, B′, C′.則

1. $[ab, \overline{CC'}][bc, \overline{AA'}][ca, \overline{BB'}] = -1,$ ………………… 53

2. $[AB, C'][BC, A'][CA, B'] = -1,$ …………………… 54

分原三角形爲三個三角形 AOB, BOC, COA.



就 $\triangle BAA'$ 得 $[BA', C][A'A, O][AB, C'] = 1,$

就 $\triangle A'AC$ 得 $[CA', B][CA, B'][AA', O] = 1,$

就 $\triangle BCB'$ 得 $[CB', A][B'B, O][BC, A'] = 1,$

就 $\triangle BB'A$ 得 $[AB', C][AB, C'][BB', O] = 1,$

就 $\triangle C'CA$ 得 $[AC', B][C'C, O][CA, B'] = 1,$

就 $\triangle C'CB$ 得 $[BC', A][BC, A'][CC', O]=1$,

以上各式相乘. 則 $[CA, B']^2[BC, A']^2[AB, C']^2=1$,

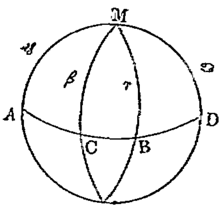
$\therefore\quad [CA, B'][BC, A'][AB, C']=\pm 1$,

此三比任何亦爲負. 故符號爲負.

$\therefore\quad [CA, B'][BC, A'][AB, C']=-1$.

2式之證明. 亦得如1式之證明. 以第3節之方法而知爲相等. 玆略.

6. <u>四個大圓射影所成角之非調和比 $[\alpha\beta, \delta]$, 等於任意横截線(大圓弧)所截四點之非調和比 $[ABCD]$.</u>



$$[\alpha\beta, \gamma]=[AB, C]\frac{\sin A}{\sin B},$$

$$[\alpha\beta, \delta]=[AB, D]\frac{\sin A}{\sin B},$$

$$[\alpha\beta, \gamma]:[\alpha\beta, \delta]=[AB, C]:[AB, D],$$

即 $$\frac{\sin(\gamma\alpha)}{\sin(\gamma\beta)}:\frac{\sin(\delta_1)}{\sin(\delta\beta)}=\frac{\sin CA}{\sin CB}:\frac{\sin DA}{\sin DB},$$

$\therefore\quad [\alpha\beta\gamma\delta]=[ABCD]$. ……………………………………………**55**

7. 球面上四點換取二個. 得結成多數四角形. 就其中某一四角形言. 曰他之補四角形.

凡補四角形之尖頭, 爲調和尖頭.

ABMC 爲 AC'MB' 之補四角形. 結合各點作弧. 截四角形之各邊. 其交截點爲 B, C, A', A''. 則

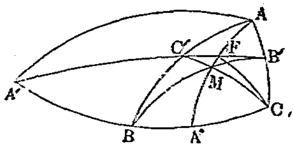
$[AB, C'][BC, A''][CA, B']=-1$,

又 $[AB, C'][BC, A'][CA, B']=+1$,

$\therefore\quad [BC, A'']=-[BC, A']$.

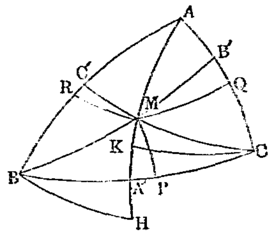
$\therefore$ A'. A'', B, C 爲調和比之點. 故 (A−A'A''BC) 爲調和射線形. A 爲調和尖點. A', A'', 爲分 BC 調和比之點.

又 A′FC′B′ 爲調和列點. 若 A′, F 爲分 B′C′ 之調和點.



又結合 CF 弧. 則射線 CA″, CM, CF, CA′ 爲調和射線. 而 A″, F, M, A 爲調和列點. 故知 A″, F 爲分 AM 之調和比.

三　線　坐　標



三角形之邊之正弦, 與從 M 向邊上所引垂弧之正弦相乘. 其積之半. 曰 M 點之三線坐標.

此 M 之三線坐標. 名三角形 AMB, BMC, CMA 之垂線部分. 以 n_c, n_a, n_b, 記之.

8. 就三角形 ABC 之內. 取一點 M. 連結 AM. BM. CM. 且引長之. 各交對面邊於 A′, B′, C′ 點. 則

$$[BC, A'] = n_c : n_b,\quad [CA, B'] = n_a : n_c,\quad [AB, C'] = n_b : n_a.$$

(證) 引長 AA′ 作垂弧 BH. CK. 則

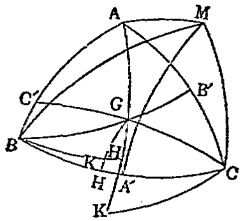
$$\begin{aligned} \sin A'B : \sin A'C &= \sin BH : \sin CK \\ &= \sin BH \sin AM : \sin CK \sin AM \\ &= \sin HR \sin AB : \sin HQ \sin AC \\ &= n_c : n_b, \end{aligned}$$

$\therefore\ [BC, A'] = n_c : n_b,$

其他亦得同樣證明之.

9. 設三角形ABCの中線之交點爲G. 任意取一點爲M. 三角形BGC之中線部分爲n'. 則

$$\frac{\cos MA+\cos MB+\cos MC}{\cos MG}=n\div n'. \text{ 試證之.}$$



$\because$ $\cos MB+\cos MC=2\cos\frac{a}{2}\cos MA'$,

$\cos MA'\sin AG+\cos MA\sin GA'$

$=\cos MG\sin AA'$,

$$\cos MB+\cos MC=2\cos\frac{a}{2}\left\{\frac{\cos MG\sin AA'}{\sin A}-\frac{\cos MA\sin GA'}{\sin AG}\right\}.$$

然從G引垂弧GH. 從C引垂弧CK. 則$n_b=n_a$,

而 $\sin GH\sin BC=\sin AG\sin CK$,

$$\frac{\sin AG}{\sin BC}=\frac{\sin GH}{\sin CK}=\frac{\sin GA'}{\sin CA'},$$

$$\therefore\ \frac{\sin AG}{\sin GA'}=\frac{\sin BC}{\sin CA'}=2\cos\frac{a}{2},$$

$$\therefore\ \cos MB+\cos MC=2\cos\frac{a}{2}\ \frac{\cos MG\sin AA'}{\sin AG}-2\cos\frac{a}{2}\ \frac{\sin A'G}{\sin AG}\cos MA,$$

$$\therefore\ \frac{\cos MA+\cos MB+\cos MC}{\cos MG}=2\cos\frac{a}{2}\ \frac{\sin AA'}{\sin AG}=\frac{\sin AA'}{\sin A'G}=n/n'.$$

10. n'/n 得以三角形三邊之關係式表之.

$$\frac{n'}{n}=\frac{\sin GA'}{\sin AA'},\qquad 2\cos\frac{a}{2}=\frac{\sin AG}{\sin A'G},$$

$$\cos b+\cos c=2\cos\frac{a}{2}\cos AA'.$$

由此三個方程式.得以消去GA′, AA′.

從第二式得

$$2\cos\frac{a}{2}\sin\mathrm{GA}'=\sin(\mathrm{AA}'-\mathrm{GA}')$$

$$=\sin\mathrm{AA}'\cos\mathrm{GA}'-\cos\mathrm{AA}'\sin\mathrm{GA}',$$

$$\therefore\quad \sin\mathrm{GA}'\left(2\cos\frac{a}{2}+\cos\mathrm{AA}'\right)=\sin\mathrm{AA}'\cos\mathrm{GA}',$$

$$\therefore\quad \frac{n'}{n}\left(2\cos\frac{a}{2}+\cos\mathrm{AA}'\right)=\cos\mathrm{GA}'=\sqrt{1-\frac{n'^2}{n^2}\sin^2\mathrm{AA}'},$$

$$\frac{n'^2}{n^2}=\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}+4\cos\frac{a}{2}\cos\mathrm{AA}'+1}=\frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}+2(\cos b+\cos c)+1},$$

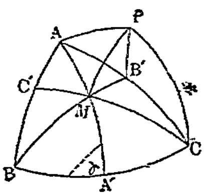
$$\therefore\quad \frac{n'}{n}=\frac{1}{\sqrt{1+2(\cos a+\cos b+\cos c)}}\cdots\cdots\cdots\cdots 56$$

球面之平均中心

三角形ABC之關係.而點M之三線坐標爲n_a, n_b, n_c.則弧AM, BM, CM.可就$n_c:n_b$, $n_a:n_c$, $n_b:n_a$分BC, CA, AB.又M之倍數爲$n_a:n_b:n_c$.此點曰球面平均中心.

11. 倍數爲n_a, n_b, n_c.他之點爲P.點A, B, C之平均中心爲M.則

$$n_a\cos\mathrm{AP}+n_b\cos\mathrm{BP}+n_c\cos\mathrm{CP}=n\cos\mathrm{MP}.$$



由　△BPC得

$$\cos\mathrm{PB}\sin\mathrm{A'C}+\cos\mathrm{PC}\sin\mathrm{BA}'=\cos\mathrm{PA}'\sin a,$$

由　△A′PA得

$$\cos\mathrm{PA}'\sin\mathrm{AM}+\cos\mathrm{PA}\sin\mathrm{AM}'=\cos\mathrm{PM}\sin\mathrm{AA}',$$

試消去PA′.則

$$\cos PB \sin A'C+\cos PC \sin BA'+\frac{\cos PA \sin a \sin MA'}{\sin AM}$$

$$=\frac{\cos PM \sin AA' \sin a}{\sin AM},$$

然 $2n_a=\sin AM \sin BA' \sin \alpha,\qquad 2n_b=\sin AM \sin CA' \sin \alpha,$

$2n_c=\sin a \sin MA' \sin \alpha,\qquad 2n=\sin a \sin AA' \sin \alpha,$

從此消去 BA′, CA′, MA′, AA′. 則

$$n_a \cos PA+n_b \cos PB+n_c \cos PC=n \cos PM.$$

12. $l \cos AP+m \cos BP+n \cos CP$ 爲常數. 而 l, m, n 爲已知之倍數. 則P點之軌跡爲小圓.

依前定理.

$$l \cos AP+m \cos BP+n \cos CP=s \cos MP.$$

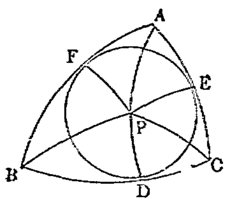
求平均中心 M. 則 PM 爲一定之長. 而 M 爲定點.

故 P 點之軌跡. 爲 M 爲中心 PM 爲半徑之小圓.

內切圓及外接圓

13. 求三角形內切圓之半徑.

三角形 ABC. 引 A, B 二角之二等分弧會於 P. 從 P 向對邊作



垂弧 PD, PE, PF.

然 $PD=PE=PF,$

又 $AE=AF,\ BF=BD,\ CD=CE,$

故 BC+AF=三邊之和之半.

令 $(AB+BC+CA)/2=s,$ 則 $AF=s-b.$

令 $PF=r,$ 則 $\tan PF=\tan PAF \sin AF.$

$\therefore\quad \tan r=\tan\frac{A}{2}\sin(s-a).$ ……57

此 $\tan r$ 之值. 尚得以種種之形狀表之.

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\left\{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}\right\}},$$

以此代入 57 式. 則

$$\tan r=\sqrt{\left\{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}\right\}}=\frac{n}{\sin s},\ \cdots\cdots 58$$

又 $\sin(s-a)=\sin\{\frac{1}{2}(b+c)-\frac{1}{2}a\}=\sin\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}a-\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(b+c)$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}A}\{\cos\tfrac{1}{2}(B-C)-\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\}$$

$$=\frac{\sin a\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}A},$$

$\therefore\quad \tan r=\frac{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}\sin a,$ ……59

又 $\sin a=\frac{2}{\sin B\sin C}\sqrt{\{\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)\}},$

以此代入 59 式. 則

$$\tan r=\frac{\sqrt{\{-\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)\}}}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$$

即 $\tan r=\frac{N}{2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C},$ ……60

次 $4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C=2\cos\frac{1}{2}A.2\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$

$$=2\cos\tfrac{1}{2}A\{\cos\tfrac{1}{2}(B+C)+\cos\tfrac{1}{2}(C-B)\}$$

$$=2\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}A+2\cos\tfrac{1}{2}(C-B)\cos\tfrac{1}{2}A$$

$$=2\cos(S-\tfrac{1}{2}A)\cos\{S-(S-\tfrac{1}{2}A)\}$$

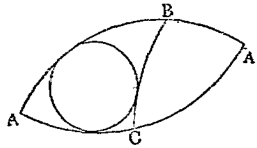
$$+2\cos\{S-\tfrac{1}{2}(B+C)\}\cos\tfrac{1}{2}\{(S-B)-(S-C)\}$$

$$=\cos S+\cos(S-A)+\cos(S-B)+\cos(S-C).$$

故 60 式變爲

$$cot\,r=\frac{1}{2N}\{cos\,S+cos(S-A)+cos(S-B)+cos(S-C)\}.\cdots 61$$

14. 三角形之一邊,與他二邊之引長弧.作相切小圓.試求其半徑.



三角形 ABC. 從 BC 及 AB, AC 之引長弧.作相切之圓.引長 AC, AB 交於 A′. 則小圓 A′BC 爲內切於三角形之圓.其三角形之邊爲 a, $\pi-b$, $\pi-c$. 又半徑爲 r_1. 令 $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$. 則由第 13 節得

$$tan\,r_1=tan\frac{A}{2}sin\left\{\frac{\pi-b+\pi-c+a}{2}-a\right\}$$

即 $$tan\,r_1=tan\frac{A}{2}sin\,s.\cdots 62$$

如前節示 $tan\,r_1$ 值之形狀.於三角形 A′BC. 其各角以 A, $\pi-$B, $\pi-$C 表之.又 $\frac{1}{2}$(A+B+C) 以 S 表之.則

$$tan\,r_1=\sqrt{\left\{\frac{sin\,s\,sin(s-b)\,sin(s-c)}{sin(s-a)}\right\}}=\frac{n}{sin(s-a)},\cdots 63$$

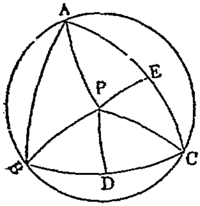
$$tan\,r_1=\frac{cos\frac{1}{2}B\,cos\frac{1}{2}C}{cos\frac{1}{2}A}sin\,a,\cdots 64$$

$$tan\,r_1=\frac{N}{2\,cos\frac{1}{2}A\,sin\frac{1}{2}B\,sin\frac{1}{2}C},\cdots 65$$

$$cot\,r_1=\frac{1}{2N}\{-cos\,S\,cos(S-A)cos(S-B)cos(S-C).\cdots 66$$

此證明之小圓.就 △ABC 言.曰傍切圓.而他之二邊各引長之.得作其他之二個傍切圓.各半徑爲 r_2, r_3. 同樣亦得求之.

15. 求外接於三角形之小圓之半徑.



於三角形ABC.從邊BC, AC之中點D, E引垂弧.相會於P.

即為外接圓之極.

而 $PA=PB=PC$,

又 $\angle PAC=\angle PCA$,

$\angle PAB=\angle PBA$, $\angle PBC=\angle PCB$,

$\therefore\ \angle PCB+\angle A=\frac{1}{2}(A+B+C)=S$,

$\therefore\ \angle PCB=S-A$,

令 $PC=R$,

則 $\tan CD=\tan CP\cos PCD$, $\tan\frac{1}{2}a=\tan R\cos(S-A)$,

$$\therefore\ \tan R=\frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos(S-A)}. \qquad\cdots\cdots 67$$

又 $\tan R$之值.得以種種之形狀示之.

$$\tan\tfrac{1}{2}a=\sqrt{\left\{-\frac{\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}\right\}},$$

以此代入67式中.則

$$\tan R=\sqrt{\left\{\frac{-\cos S}{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}\right\}}=\frac{\cos S}{N}. \qquad\cdots\cdots 68$$

又 $\cos(S-A)=\cos\{\frac{1}{2}(B+C)-\frac{1}{2}A\}$

$$=\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}A+\sin\tfrac{1}{2}(B+C)\sin\tfrac{1}{2}A$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}a}\{\cos\tfrac{1}{2}(b+c)+\cos\tfrac{1}{2}(b-c)\}$$

$$=\frac{\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a},$$

$$\therefore\ \tan R=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}. \qquad\cdots\cdots 69$$

69式之 $\sin A$. 以三邊之半和之式置換之. 則

$$\tan R = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}}$$

即 $$\tan R = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{n}, \quad\cdots\cdots 70$$

而 $4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c=\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s$,

以此代入70式中. 則

$$\tan R = \frac{1}{2n}\{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s\}. \quad\cdots\cdots 71$$

16. 三角形ABC之一邊. 與其他二邊之引長弧. 成三個三角形試求其各外接圓之半徑

引長AB, AC. 相會於A′. 此三角形外接圓之半徑爲 R_1. 如是引長其他邊. 作二個三角形. 其外接圓之半徑. 各爲 R_2, R_3. 如求 $\tan R$ 之法. 即可導得 $\tan R_1$, $\tan R_2$, $\tan R_3$.

從 $\tan R$ 導 $\tan R_1$. 則以 a, $\pi-b$, $\pi-c$ 及 A, $\pi-B$, $\pi-C$ 置於 $\tan R$ 之公式中而換之. 得

$$\tan R_1 = \frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos\left\{\frac{\pi-B+\pi-C+A}{2}-A\right\}}$$

$$= \frac{\tan\frac{1}{2}a}{\cos(\pi-S)} = \frac{\tan\frac{1}{2}a}{-\cos S}, \quad\cdots\cdots 72$$

同樣. $$\tan R_1 = \sqrt{\left\{\frac{\cos(S-A)}{-\cos S\cos(S-B)\cos(S-C)}\right\}} = \frac{\cos(S-A)}{N}, \quad\cdots\cdots 73$$

$$\tan R_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin A\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}, \quad\cdots\cdots 74$$

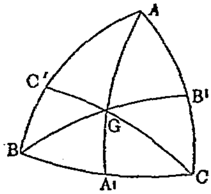
$$\tan R_1 = \frac{2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{n}, \quad\cdots\cdots 75$$

$$\tan R_1 = \frac{1}{2n}\{\sin s+\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\}. \quad\cdots\cdots 76$$

同理亦可求得 R_2, R_3.

問　題　六

1. 三角形之三中線.會於一點.



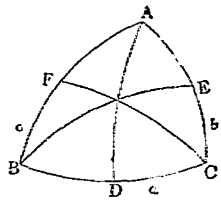
三角形 ABC. AA′, BB′, CC′ 爲三中線.

然 〔BC, A′〕〔CA, B′〕〔AB, C′〕

$$=-\frac{\sin BA'}{\sin CA'}\times-\frac{\sin AB'}{\sin CB'}\times-\frac{\sin AC'}{\sin BC'}=-1.$$

∴ 會於一點.

2. 球面三角形 ABC. 有三弧各分其積爲二等分. 則此三弧會於一點.



△BAD 與 △CAD 爲等積. 此各以球面過剩之 E 表之. 則

$$BAD=DAC=Er^2.$$

本題用 E 而證明之可也.

於三角形 ABD. 則

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\frac{n}{2\cos\frac{BD}{2}\cos\frac{AB}{2}\cos\frac{AD}{2}},$$

$$\sin(B-\tfrac{1}{2}E)=\frac{n}{2\sin\frac{BD}{2}\sin\frac{AB}{2}\cos\frac{AD}{2}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}E\sin(B-\tfrac{1}{2}E)=\frac{n^2}{\sin BD\sin AB\cos^2\frac{1}{2}AD}$$

$$=\frac{4n^2\sin^2\frac{1}{2}AD}{\sin BD\sin AB\sin^2 AD}$$

$$=\frac{2}{\sin BD\sin AD}n\frac{2}{\sin AB\sin AD}n\sin^2\tfrac{1}{2}AD$$

$$=\sin BAD\sin BDA\sin^2\frac{1}{2}AD,$$

$\therefore\quad \sin\frac{1}{2}\mathrm{AD}=\sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\mathrm{E}\sin(\mathrm{B}-\frac{1}{2}\mathrm{E})}{\sin\mathrm{BAD}\sin\mathrm{BDA}}}.$

同樣. 於三角形 ADC.

$$\sin\frac{1}{2}\mathrm{AD}=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\mathrm{E}\sin(\mathrm{C}-\frac{1}{2}\mathrm{E})}{\sin\mathrm{CAD}\sin\mathrm{ADC}}},$$

$\therefore\quad \sin\mathrm{CAD}:\sin\mathrm{BAD}=\sin(\mathrm{B}-\frac{1}{2}\mathrm{E}):\sin(\mathrm{C}-\frac{1}{2}\mathrm{E}).$

又由三角形 BAE 及 CBE. 得

$$\sin\mathrm{CBE}:\sin\mathrm{ABE}=\sin(\mathrm{A}-\tfrac{1}{2}\mathrm{E}):\sin(\mathrm{C}-\tfrac{1}{2}\mathrm{E}),$$

由三角形 ACF 及 FCB. 得

$$\sin\mathrm{ACF}:\sin\mathrm{FCB}=\sin(\mathrm{B}-\tfrac{1}{2}\mathrm{E}):\sin(\mathrm{A}-\tfrac{1}{2}\mathrm{E}),$$

試求後二比例式之反比. 則

$$\sin\mathrm{ABE}:\sin\mathrm{CBE}=\sin(\mathrm{C}-\tfrac{1}{2}\mathrm{E}):\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{A}-\tfrac{1}{2}\mathrm{E})$$

$$\sin\mathrm{FCB}:\sin\mathrm{ACF}=\sin(\mathrm{A}-\tfrac{1}{2}\mathrm{E}):\sin\tfrac{1}{2}(\mathrm{B}-\tfrac{1}{2}\mathrm{E}),$$

以再初所求之一式與後二式相乘. 則

$$-[bc,\overline{\mathrm{AD}}]\times-[ca,\overline{\mathrm{BE}}]\times-[ab,\overline{\mathrm{CF}}]=1,$$

卽 $[bc,\overline{\mathrm{AD}}][ca,\overline{\mathrm{BE}}][ab,\overline{\mathrm{CF}}]=-1.$

故會於一點.

3. 三角形 ABC 之中線. 爲 AA′, BB′, CC′. 其交點爲 G. 則

$$\frac{\sin\mathrm{AA'}}{\sin\mathrm{A'G}}=\frac{\sin\mathrm{BB'}}{\sin\mathrm{B'G}}=\frac{\sin\mathrm{CC'}}{\sin\mathrm{C'G}}.$$

由第9節得

$$\frac{\cos\mathrm{MA}+\cos\mathrm{MB}+\cos\mathrm{MC}}{\cos\mathrm{MG}}=\frac{\sin\mathrm{AA'}}{\sin\mathrm{A'G}}$$

$$\text{,,}\qquad\qquad=\frac{\sin\mathrm{BB'}}{\sin\mathrm{B'G}}$$

$$\text{,,}\qquad\qquad=\frac{\sin\mathrm{CC'}}{\sin\mathrm{C'G}},$$

$\therefore\quad \dfrac{\sin AA'}{\sin A'G}=\dfrac{\sin BB'}{\sin B'G}=\dfrac{\sin CC'}{\sin C'G}.$

4. $(\cot r+\tan R)^2=\dfrac{1}{4n^2}(\sin a+\sin b+\sin c)^2-1$. 試證之.

$$4n^2=1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c\,(\sin a+\sin b+\sin c)^2-4n^2$$
$$=2(1+\sin a\sin b+\sin b\sin c+\sin c\sin a-\cos a\cos b\cos c),$$

又 $\cot r+\tan R=\dfrac{1}{2n}\{\sin s+\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\}$,

$$(\cot r+\tan R)^2=\frac{1}{4n^2}\{\sin s+\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\}^2,$$

然 $\sin^2 s+\sin^2(s-a)+\sin^2(s-b)+\sin^2(s-c)=2-2\cos a\cos b\cos c$,

$$\sin s\sin(s-a)+\sin s\sin(s-b)+\sin s\sin(s-c)$$
$$+\sin(s-a)\sin(s-b)+\sin(s-b)\sin(s-c)+\sin(s-c)\sin(s-a)$$
$$=\sin a\sin b+\sin b\sin c+\sin c\sin a,$$

$\because\quad (\cot r+\tan R)^2=\dfrac{1}{4n^2}\{2+2\sin a\sin b+2\sin b\sin c+2\sin c\sin a$

$$-2\cos a\cos b\cos c\},$$

$\therefore\quad (\cot r+\tan R)^2=\dfrac{1}{4n^2}(\sin a+\sin b+\sin c)^2-1.$

5. $\tan r_1\tan r_2\tan r_3=\tan r\sin^2 s$. 試證之.

$$\tan r_1\tan r_2\tan r_3=\frac{n}{\sin(s-a)}\cdot\frac{n}{\sin(s-b)}\cdot\frac{n}{\sin(s-c)}$$
$$=\frac{n^3\sin s}{n^2}=n\sin s=\tan r\sin^2 s.$$

6. $\tan R+\cot r=\tan R_1+\cot r_1=\tan R_2+\cot r_2=\tan R_3+\cot r_3$
$=\frac{1}{2}(\cot r+\cot r_1+\cot r_2+\cot r_3)$. 試證之.

$$\tan R+\cot r=\frac{1}{2n}\{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s\}+\frac{\sin s}{n}$$
$$=\frac{1}{2n}\{\sin s+\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\},$$

$$\tan R_1+\cot r_1=\frac{1}{2n}\{\sin s-\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\}+\frac{\sin(s-a)}{n}$$

$$=\frac{1}{2n}\{\sin s+\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\},$$

$\therefore\quad \tan R+\cot r=\tan R_1+\cot r_1.$

同樣知

$$\tan R+\cot r=\tan R_2+\cot r_2=\tan R_3+\cot r_3,$$

又知

$$\tfrac{1}{2}(\cot r+\cot r_1+\cot r_2+\cot r_3)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin s}{n}+\frac{\sin(s-a)}{n}+\frac{\sin(s-b)}{n}+\frac{\sin(s-c)}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2n}\{\sin s+\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)\}=\tan R+\cot r.$$

7. $\tan^2R+\tan^2R_1+\tan^2R_2+\tan^2R_3=\cot^2r+\cot^2r_1+\cot^2r_2+\cot^2r_3.$

試證之.

$$\tan^2R=\frac{4\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b\sin^2\frac{1}{2}c}{n^2}=\frac{1}{2n^2}(1-\cos a)(1-\cos b)(1-\cos c),$$

$$\tan^2R_1=\frac{4\sin^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c}{n^2}=\frac{1}{2n^2}(1-\cos a)(1+\cos b)(1+\cos c),$$

$$\tan^2R_2=\frac{4\sin^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}a\cos^2\frac{1}{2}c}{n^2}=\frac{1}{2n^2}(1-\cos b)(1+\cos a)(1+\cos c),$$

$$\tan^2R_3=\frac{4\sin^2\frac{1}{2}c\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}a}{n^2}=\frac{1}{2n^2}(1-\cos c)(1+\cos b)(1+\cos a),$$

$\therefore\quad \tan^2R+\tan^2R_1+\tan^2R_2+\tan^2R_3$

$$=\frac{1}{2n^2}(1-\cos a)(2+2\cos b\cos c)+\frac{1}{2n^2}(1-\cos a)(2-2\cos b\cos c)$$

$$=\frac{1}{n^2}(2-2\cos a\cos b\cos c),$$

又 $\cot^2 r+\cot^2 r_1+\cot^2 r_2+\cot^2 r_3$

$$=\frac{\sin^2 s}{n^2}+\frac{\sin^2(s-a)}{n^2}+\frac{\sin(s-b)}{n^2}+\frac{\sin(s-c)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n^3}[2-\frac{1}{2}\{\cos 2s+\cos 2(s-a)+\cos 2(s-b)+\cos 2(s-c)\}]$$

$$=\frac{1}{n^2}[2-\{\cos a\cos(b+c)+\cos a\cos(b-c)\}]$$

$$=\frac{1}{n^2}(2-2\cos a\cos b\cos c),$$

$\therefore\quad \tan^2 R+\tan^2 R_1+\tan^2 R_2+\tan^2 R_3=\cot^2 r+\cot^2 r_1+\cot^2 r_2+\cot^2 r_3,$

8. $\dfrac{\tan r_1+\tan r_2+\tan r_3-\tan r}{\cot r_1+\cot r_1+\cot r_3-\cot r}=\dfrac{1}{2}(1+\cos a+\cos b+\cos c)$. 試證之.

$\tan r_1+\tan r_2+\tan r_3-\tan r$

$$=\frac{n}{\sin(s-a)}+\frac{n}{\sin(s-b)}+\frac{n}{\sin(s-c)}-\frac{n}{\sin s}$$

$$=\frac{2n\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{\sin(s-a)\sin(s-b)}+\frac{2n\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin s\sin(s-c)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{c}{2}}{n}\{\cos\frac{a-b}{2}\sin s\sin(s-c)+\cos\frac{(a+b)}{2}\sin(s-a)\sin(s-b)\}$$

$$=\frac{2\sin\frac{c}{2}}{n}[\cos\frac{a-b}{2}\{\cos c-\cos(a+b)\}+\cos\frac{a+b}{1}\{\cos(a-b)-\cos c\}]$$

$$=\frac{1}{n}\sin\frac{c}{2}\{2\cos c\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+2\sin a\sin b\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$$

$$-2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos a\cos b\}$$

$$=\frac{1}{n}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\{2\cos c+8\cos^2\frac{b}{2}-2\cos a\cos b\}$$

$$=\frac{2}{n}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}(1+\cos a+\cos b+\cos c),$$

又　$\cot r_1+\cot r_2+\cot r_3-\cot r$

$$=\frac{\sin(s-a)}{n}+\frac{\sin(s-b)}{n}+\frac{\sin(s-c)}{n}-\frac{\sin s}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\{\sin(s-a)+\sin(s-b)+\sin(s-c)-\sin s\}$$

$$=\frac{1}{n}\{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{1}{2}(b-a)-\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{c}{2}\}$$

$$=\frac{2}{n}\sin\frac{c}{2}\{\cos\frac{1}{2}(b-a)-\cos\frac{1}{2}(a+b)\}$$

$$=\frac{2}{n}\sin\frac{c}{2}\{2\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}a\}$$

$$=\frac{4}{n}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2},$$

$$\therefore\quad \frac{\tan r_1+\tan r_2+\tan r_3-\tan r}{\cot r_1+\cot r_2+\cot r_3-\cot r}=\frac{1}{2}(1+\cos a+\cos b+\cos c).$$

9.　$\operatorname{cosec}^2 r=\cot(s-a)\cot(s-b)$

$$+\cot(s-b)\cot(s-c)+\cot(s-c)\cot(s-a).$$

試證之.

$$\cot(s-a)\cot(s-b)+\cot(s-b)\cot(s-c)+\cot(s-c)\cot(s-a)$$

$$=\cot(s-b)\{\cot(s-a)+\cot(s-c)\}+\cot(s-c)\cot(s-a)$$

$$=\cot(s-b)\left\{\frac{\sin(s-c)\cos(s-a)+\sin(s-a)\cos(s-c)}{\sin(s-a)\sin(s-c)}\right\}$$

$$+\cot(s-c)\cot(s-a)$$

$$=\cot(s-b)\left[\frac{\sin b}{\sin(s-a)\sin(s-c)}\right]+\cot(s-c)\cot(s-a)$$

$$=\frac{\sin b\cos(s-b)+\cos(s-c)\cos(s-a)\sin(s-a)}{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$=1+\frac{\sin b\cos(s-b)+\cos(s-c)\cos(s-a)\sin(s-a)}{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}-1$$

$$=1+\frac{\cos(s-c)\cos(s-a)\sin(s-b)-\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$+\frac{\sin b\cos(s-b)}{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$=1+\frac{\cos(2s-a-c)\sin(s-b)+\sin b\cos(s-b)}{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

$$=1+\frac{\sin s}{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}=1+\frac{\sin^2 s}{n^2}=1+\cot^2 r=\operatorname{cosec}^2 r$$

10. 試證 $\tan R_1\tan R_2\tan R_3=\tan R\sec^2 S.$

$$\tan R_1\tan R_2\tan R_3=\frac{\cos(S-A)}{N}\cdot\frac{\cos(S-B)}{N}\cdot\frac{\cos(S-C)}{N}$$

$$=\frac{\cos S\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{N^3\cos S}$$

$$=-\frac{1}{N\cos S}=-\frac{\cos S}{N}\frac{1}{\cos^2 S}=\tan R\sec^2 S.$$

11. 等邊三角形. $\tan R=2\tan r$. 試證之.

∵ $\tan R=\dfrac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{n}$,

令 $a=b=c$,

則 $\tan R=\dfrac{2\sin^3\frac{1}{2}a}{n}$,

而 $\tan r=\dfrac{n}{\sin s}=\dfrac{n}{\sin\frac{3}{2}a}$,

又 $n^2=\sin\dfrac{3}{2}a\sin^3\dfrac{1}{2}a$,

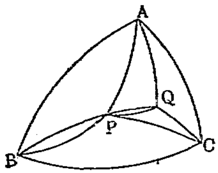
∴ $\dfrac{\tan R}{\tan r}=\dfrac{2\sin\frac{3}{2}a\sin\frac{1}{2}a}{n^2}=\dfrac{2\sin\frac{3}{2}a\sin^3\frac{1}{2}a}{\sin\frac{3}{2}a\sin^3\frac{1}{2}a}=2$,

∴ $\tan R=2\tan r$.

12. 等邊三角形ABC.其外接圓之中心爲P.球面上任意一點爲Q.則

$$\cos QA+\cos QB+\cos QC=3\cos PA\cos PQ.$$

試證之.



令 $\angle APQ=\alpha,$

則 $\angle QPC=\dfrac{2}{3}\pi-\alpha,$

$\angle BPQ=\dfrac{2}{3}\pi+\alpha,$

$$\cos QC=\cos PQ\cos PC+\sin PQ\sin PC\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi-\alpha\right),$$

$$\cos QB=\cos PB\cos PQ+\sin PB\sin PQ\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi+\alpha\right),$$

$$\cos QA=\cos PA\cos PQ+\sin PA\sin PQ\cos\alpha,$$

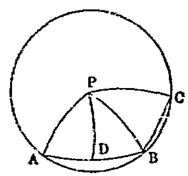
$$\cos QA+\cos QB+\cos QC$$

$$=3\cos PA\cos PQ+\sin PQ\sin PA\left\{\cos\alpha+\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi-\alpha\right)+\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi+\alpha\right)\right\}$$

$$=3\cos PA\cos PQ+\sin PQ\sin PA\{\cos\alpha-\cos\alpha\}$$

$$=3\cos PA\cos PQ.$$

13. 球面上畫小圓.已知半徑.試求其面積.



求面積之先.作內接於小圓之n邊正多角形.則

$$\angle APB=\angle BPC=\cdots=\frac{2\pi}{n},$$

$$\cot PAD\cot APD=\cos PA,$$

令 $PA=r$, 則

$$\cot PAD\cot\tfrac{1}{2}APB=\cos r,$$

$$\therefore\quad PAD=\cot^{-1}\frac{\cos r}{\cot\frac{1}{2}APB}=\cot^{-1}\frac{\cos r}{\cot\frac{\pi}{n}},$$

$\therefore\quad \triangle APB$ 之積$=(2\cot^{-1}\dfrac{\cos r}{\cos\frac{\pi}{n}}+\dfrac{2\pi}{n}-\pi)R^2,$

n 多角形之積$=n\{2\cot^{-1}\dfrac{\cos r}{\cot\frac{\pi}{n}}+\dfrac{2\pi}{n}-\pi\}R^2,$

$$=2(2\cot^{-1}\frac{\cos r}{\cot\frac{\pi}{n}}-\pi)R^2+2\pi R^2$$

$$=2n\{\cot^{-1}\frac{\cos r}{\cot\frac{\pi}{n}}-\frac{\pi}{2}\}R^2+2R^2\pi,$$

令 $\cot^{-1}\dfrac{\cos r}{\cos\frac{\pi}{n}}-\dfrac{\pi}{n}=\theta,$

則 $\tan\theta=-\tan\dfrac{\pi}{n}\cos r,\quad \theta=\tan^{-1}(-\tan\dfrac{\pi}{n}\cos r),$

多角形之積

$$=2n\{(-\tan\frac{\pi}{n}\cos r)-\frac{1}{3}(-\tan\frac{\pi}{n}\cos r)^2+\cdots\}R^2+2R^2\pi$$

$$=2\pi\{-\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cos r-(-\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\tan\frac{\pi}{n}\cos^2 r)+\cdots\}R^2+2R^2\pi,$$

至極限

$$=2n\{-\cos r\}R^2+2R^2\pi=-2\pi R^2\cos r+2\pi R^2,$$

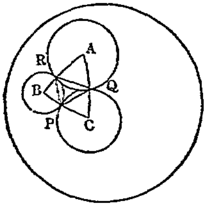
又多角形之極限,等於外接小圓.故

小圓之積$=2\pi R^2(1-\cos r)$.

14. 就半徑 R 之球面上.作相切三個小圓.其切點為 P, Q, R. 其半徑為 r_1, r_2, r_3 其小圓中心所連結三角形之各角為 A, B, C.則

PQR 之積$=(A\cos r_1+B\cos r_2+C\cos r_3-\pi)R^2.$

試證之.



小圓 A 之積爲

$$2\pi R^2(1-\cos r_1).$$

AQR 之積.得由次之比例式求之.

小圓之積 : AQR 之積 $=2\pi : A$,

$$\therefore\quad 2\pi R^2(1-\cos_1) : \text{AQR 之積}=2\pi : A,$$

$$\therefore\quad \text{AQR 之積}=AR^2(1-\cos r_1),$$

同樣 BRP 之積 $=BR^2(1-\cos r_2)$, CPQ 之積 $=CR^2(1-\cos r_3)$,

$$\therefore\quad \text{PQR 之積}=(A+B+C-\pi)R^2-AR^2(1-\cos r_1)$$

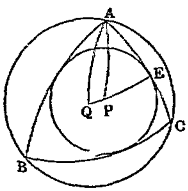
$$-BR^2(1-\cos r_2)-CR^2(1-\cos r_3)$$

$$=(A\cos r_1+B\cos r_2+C\cos r_3-\pi)R^2.$$

15. 求三角形內切圓及外接圓之極距.

P 爲內切圓之極. Q 爲外接圓之極.

然就三角形 ABC. 論. $PAB=\frac{1}{2}A$, $QAB=S-C$,



$\cos PAQ=\cos\frac{1}{2}(B-C)$, 而

$$\cos PQ=\cos PA\cos QA+\sin PA\sin QA\cos\tfrac{1}{2}(B-C),$$

$$\cos PA=\cos PE\cos AE=\cos r\cos(s-a),$$

$$\sin PA=\frac{\sin PE}{\sin PAE}=\frac{\sin r}{\sin\frac{1}{2}A},$$

$$\cos PQ=\cos R\cos r\cos(s-a)+\sin R\sin r\,\mathrm{cosec}\,\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(B-C),$$

$$\cos PQ=\cos R\cos r\cos(s-a)+\sin R\sin r\sin\frac{1}{2}(b+c)\,\mathrm{cosec}\,\frac{1}{2}a,$$

$$\frac{\cos PQ}{\cos R\sin r}=\cot r\cos(s-a)+\tan R\sin\frac{1}{2}(b+c)\,\mathrm{cosec}\,\frac{1}{2}a,$$

以 $cot r=\frac{sin s}{n}$, $tan R=\frac{2sin\frac{1}{2}a\,sin\frac{1}{2}b\,sin\frac{1}{2}c}{n}$ 代入之. 則

$$\frac{cos PQ}{cos R\,sin R}=\frac{1}{n}\{sin s\,cos(s-a)+2sin\frac{1}{2}(b+c)sin\frac{1}{2}b\,sin\frac{1}{2}c\}$$

$$=\frac{1}{2n}(sin a+sin b+sin c),$$

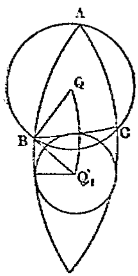
$$\left(\frac{cos PQ}{cos R\,sin r}\right)^2-1=\frac{1}{4n^2}(sin a+sin b+sin c)^2-1=(cot r+tan R)^2,$$

$\therefore$ $cos^2PQ=cos^2R\,sin^2r(cot r+tan R)^2,$

$cos^2PQ=cos^2R\,sin^2r+cos^2(R-r),$

$sin^2PQ=sin^2(R-r)-cos^2R\,sin^2r.$

16. 有三角形 ABC. 求其外接圓與傍切圓之極距.



Q 及 Q_1. 爲外接圓傍切圓之極. 但對於 A 角. 則

$$QBQ_1=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}(C-A),$$

而 $cos QQ_1=cos R\,cos r_1\,cos(s-c)$

$$-sin R\,sin r_1\,sin\frac{1}{2}(C-A)sec\frac{1}{2}B$$

$$=cos R\,cos r_1\,cos(s-c)-sin R\,sin r_1\,sin\frac{1}{2}(c-a)\,cosec\frac{1}{2}b,$$

$$\frac{cos QQ_1}{sin r_1\,cos R}=cot r_1\,cos(s-c)-tan R\,sin\frac{1}{2}(c-a)\,cosec\frac{1}{2}b$$

$$=\frac{1}{2n}(sin b+sin c-sin a),$$

$$\left(\frac{cos QQ}{sin r_1\,cos R}\right)^2-1=\frac{1}{4n^2}(sin b+sin c-sin a)^2-1=(tan R-cot r_1)^2,$$

$\therefore$ $cos QQ_1=cos^2R\,sin^2r_1+cos^2(R+r_1),$

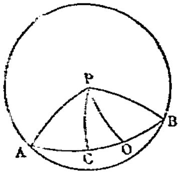
$sin^2QQ_1=sin^2(R+r_1)-cos^2R\,sin^2r_1.$

第七編

關於小圓之定理

1. 軸圓 A及B截X小圓之大圓.若通過定點.則

$\tan\frac{1}{2}\mathrm{AO}, \tan\frac{1}{2}\mathrm{BO}=$常數.



P爲小圓之極.結合O,P.畫PC之垂弧.則從三角形ACP, OCP.得

$$\frac{\cos \mathrm{AC}}{\cos \mathrm{CO}}=\frac{\cos \mathrm{AP}}{\cos \mathrm{OP}},$$

$$\therefore\quad \tan\frac{1}{2}(\mathrm{AC}+\mathrm{CO})\tan\frac{1}{2}(\mathrm{AC}-\mathrm{CO})=\tan\frac{1}{2}(\mathrm{AP}+\mathrm{PO})\tan(\mathrm{AP}-\mathrm{PO}).$$

又X圓之半徑爲ρ, 及OP爲δ. 則

$$\tan\frac{1}{2}\mathrm{OA}\tan\frac{1}{2}\mathrm{OB}=\tan\frac{1}{2}(\rho+\delta)\tan(\rho-\delta)=\text{常數}.$$

關於$\tan\frac{1}{2}\mathrm{OA}\tan\frac{1}{2}\mathrm{OB}$之圓.曰O之球面自乘.其符號因O點在圓內或圓外.從而爲正或負.

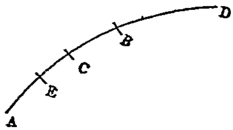
又 $$\tan\frac{1}{2}\mathrm{OA}\tan\frac{1}{2}\mathrm{OB}=\tan\frac{1}{2}(\rho+\delta)\tan\frac{1}{2}(\rho-\delta)$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\rho+\delta)\sin\frac{1}{2}(\rho-\delta)}{2\cos\frac{1}{2}(\rho+\delta)\cos\frac{1}{2}(\rho-\delta)}=\frac{\cos\rho-\cos\delta}{\cos\rho+\cos\delta}.$$

2. 極及對極線 設C,D爲分弓形之調和點.E爲AB之中點.則

i $\tan^2\mathrm{EB}=\tan\mathrm{EC}\tan\mathrm{ED}$,..............................77

ii $\cot^2\mathrm{AB}=\frac{1}{2}(\cot\mathrm{AC}+\cot\mathrm{AD})$. 78



依題意第i式為

$$\frac{\sin CA}{\sin CB}=\frac{\sin DA}{\sin DB},$$

$$\frac{\sin CA-\sin CB}{\sin CA+\sin CB}=\frac{\sin DA-\sin DB}{\sin DA+\sin DB},$$

$$\frac{2\cos AE\sin CE}{2\sin AE\cos CE}=\frac{2\cos ED\sin EA}{2\sin ED\cos EA},$$

$$\frac{\tan CE}{\tan AE}=\frac{\tan EA}{\tan ED},\qquad\therefore\quad \tan^2 EA=\tan CE\tan ED.$$

第ii式為

$$\sin BC\sin AD=\sin CA\sin DB,$$

$$\sin(AB-AC)\sin AD=\sin CA\sin DB,$$

$$(\sin AB\cos AC-\cos AB\sin AC)\sin AD=\sin CA\sin DB,$$

$$\sin AB\cos AC\sin AD-\cos AB\sin AC\sin AD$$
$$=\sin CA\sin(AD-AB)$$
$$=\sin CA\{\sin AD\cos AB-\sin AB\cos AD\}$$
$$=\sin CA\sin AD\cos AB-\sin CA\sin AB\cos AD,$$

此相當邊以 $\sin AB\sin AC\sin AD$ 除之. 則

$$\cot AC-\cot AB=\cot AB-\cot AD,$$

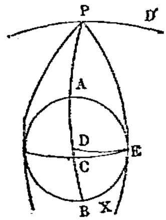
$$2\cot AB=\cot AC+\cot AD,$$

$$\therefore\quad \cot AB=\tfrac{1}{2}(\cot AC+\cot AD).$$

3.　P 為小圓 X 之中心. 若二點 C, D 分球面直徑 AB 為調和點、則通過其一點 D 之大圓弧 DD′, 垂直於直徑 AB. 此名他點 C 之調和極線. 而 C 名 DD′ 弧之調和極.

又由 D 以外之點畫小圓 X 之弧. 連結切線之切點之弧線. 為 D 之調和極線.

由　$\triangle$DEP,　$\triangle$ECP. 得



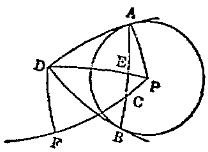
$$\cos \mathrm{DPE}=\frac{\tan \mathrm{EP}}{\tan \mathrm{DP}}=\frac{\tan \mathrm{CP}}{\tan \mathrm{EP}},$$

$\therefore$　$\tan^2 \mathrm{EP}=\tan \mathrm{DP}\tan \mathrm{CP}$,

$\tan^2 \mathrm{AP}=\tan \mathrm{DP}\tan \mathrm{CP}$,

故 C, D 爲分 AB 之調和點. 而 CE 爲 D 之極線.

4.　小圓 X 之弦 AB. 通過 C 之定點. 則切線 AD, BD 交點之軌跡. 爲 C 之調和極線.



P 爲小圓 X 之中心. 因而結合 P, D; P, A; P, C 爲大圓之弧. PC 上引垂弧 DF. (止得引長弧上作之)今就球面四角形 DECF 考之. 其 E, F 各爲直角.

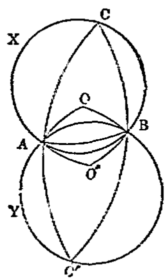
$\therefore$　$\tan \mathrm{PC}\tan \mathrm{PF}=\tan \mathrm{PE}\tan \mathrm{PD}=\tan^2 \mathrm{PA}$.

故對於 C 之調和極線爲 DF.

5.　設變點沿大圓之弧而運動. 則其調和極線通過定點.

如前圖. C 在 AB 弧上運動. 則其各點之調和極線通過 D 點. 因 C 之調和極線爲 DF. 而通過 D 點. 同樣. 由他點之極線, 亦通過 D 點. 而 D 爲定點.

6.　設 C 爲小圓 X 上之一定點. 則互爲直角之大圓. 任意取二弧 AC, CB. 連結其端作弦. 應通過一定點.

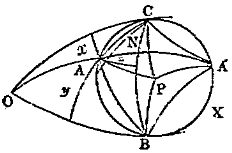


Y 爲 AC′B 小圓之外接圓. O, O′ 爲 X 圓及 Y 圓之中心. 而 C 角爲直角. 故圓 X, Y 爲直交. AO′, BO′ 乃 X 圓之切線. 然 AB 爲關於 X 圓之 O′ 之極線. 而

$$\mathrm{O'A}=\mathrm{O'C'}.$$

其 O′ 之軌跡. 爲圓 X 定點 C′ 之根軸. 故 AB 內關於 X 之 O 之極線. 當通過定點.

7. 通過定點O之各割線OA.可依X圓與O之調和極線.而爲調和分.



BC爲O之極.而三角形OBC之邊CO, OB, BC上.自A點引垂弧.其正弦爲X, Y, Z.及從A′點引垂弧.其正弦爲x', y', z'.則

$$x:z=\sin \mathrm{OCA}:\sin \mathrm{ACB},$$

卽 $x:z=\sin(\mathrm{B}-\frac{1}{2}\mathrm{E}):\sin \mathrm{C},$

及 $y:z=\sin(\mathrm{C}-\frac{1}{2}\mathrm{E}):\sin \mathrm{B},$

$\therefore\ xy:z^2=\sin(\mathrm{B}-\frac{1}{2}\mathrm{E})\sin(\mathrm{C}-\frac{1}{2}\mathrm{E}):\sin \mathrm{C}\sin \mathrm{B}=\cos^2\frac{1}{2}a.$

x', y', z'亦得同樣求之.得次之比例式.

$\therefore\ xy:x'y'=\mathrm{Z}^2:\mathrm{Z}'^2,$

然

$$xy:x'y'=\sin^2 \mathrm{OA}:\sin^2 \mathrm{OA}',$$

$$\mathrm{Z}^2:\mathrm{Z}'^2=\sin^2 \mathrm{AN}:\sin^2 \mathrm{AN}',$$

$\therefore\ \sin \mathrm{OA}:\sin \mathrm{OA}'=\sin \mathrm{AN}:\sin \mathrm{AN}'.$

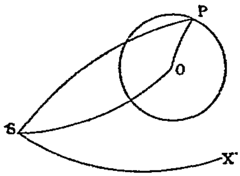
由是得證本題.但求$\mathrm{B}-\frac{1}{2}\mathrm{E}$,可自小圓之中心P.連結PC, PA. PB.則

$$\angle \mathrm{PCB}=\mathrm{PAC}-\mathrm{C},\qquad \mathrm{PBC}=\mathrm{PAB}-\mathrm{B},$$

$\therefore\ 2\angle \mathrm{PCB}=\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C},\quad \therefore\ \mathrm{PCA}=\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}+\mathrm{C},$

$$\mathrm{OCA}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}+\mathrm{B}}{2}-\mathrm{B}\right)=\mathrm{B}-\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}-\pi).$$

8. 求球面上小圓之方程式.



小圓之中心爲O.球面上之定點爲S. SX 爲所定之大圓弧.

令　OS$=\alpha$,

$\angle$OSX$=\beta$.

則由解析幾何學之極式. (α, β 爲坐標) 可決定O之位置.

圓周上P. 令 PS$=\theta$,　$\angle$PSX$=\phi$. 則 (θ, ϕ) 爲P之坐標,

又令圓之半徑爲 r. 則由 $\triangle$OSP 得

$$\cos r=\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos(\phi-\beta). \cdots\cdots 79$$

此示小圓周上某點坐標之關係.

若小圓爲大圓. 則 $r=\frac{\pi}{2}$. 方程式爲

$$0=\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos(\phi-\beta). \cdots\cdots 80$$

9. 第8節79之方程式.得書之如次.

$$\cos r\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\cos\alpha\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)+2\sin\alpha\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos(\phi-\beta),$$

相當邊以 $\cos^2\frac{\theta}{2}$ 除之.則

$$(\cos r+\cos\alpha)\tan^2\frac{\theta}{2}-2\tan\frac{\theta}{2}\sin\alpha\cos(\phi-\beta)+\cos r-\cos\alpha=0,$$

由此方程式,求得 $\tan\frac{\theta}{2}$ 之值.

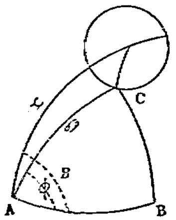
令其一值爲 $\tan\frac{\theta_1}{2}$ 其他爲 $\tan\frac{\theta_2}{2}$. 則

$$\tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2}=\frac{\cos r-\cos\alpha}{\cos r+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(r+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha-r)}{2\cos\frac{1}{2}(r+\alpha)\cos\frac{1}{2}(r-\alpha)}$$

$$=\tan\tfrac{1}{2}(r+\alpha)\tan\tfrac{1}{2}(\alpha-r)$$

積 $\tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2}$ 之值.對於 ϕ 而獨立.故圓得以已知條件示之.

10. 有底邊與積.求此三角形頂點之軌跡.



設底 AB 爲 C, AC 爲 θ, BAC 爲 ϕ. 其積爲已知.故球面過剩亦爲已知而得次式.

$$\cot\frac{1}{2}E=\cot\frac{1}{2}\theta\cot\frac{1}{2}c\csc\phi+\cot\phi.$$

$$\sin(\phi-\frac{1}{2}E)=\cot\frac{1}{2}\theta\cot\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}E,$$

$$\therefore\quad 2\cot\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}E\cos^2\frac{\theta}{2}=\sin\theta\sin(\phi-\frac{1}{2}E),$$

$$\therefore\quad \cos\theta\cot\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}E+\sin\theta\cos(\phi-\frac{1}{2}E+\frac{\pi}{2})=-\cot\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}E.$$

此方程式乃表小圓.故軌跡爲小圓.

今此小圓之坐標.以 α,β 示之.則

$$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\frac{1}{2}c\sin\frac{1}{2}E}=\frac{\tan\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}E},$$

又 $\beta=\frac{1}{2}E-\frac{\pi}{2}$,

則前之方程式爲

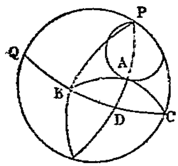
$$\csc\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cos(\phi-\beta)=-\cos\alpha=\cos(180^\circ-\alpha).$$

此小圓之中心.在 AB 直角二等分之弧上.則向此大圓之方程式.爲

$$0=\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right)+\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{c}{2}\right)\cos(\phi-\pi),$$

而令 $\theta=\alpha$, $\phi=\beta$. 則滿足此方程式.

今以圖解之更明瞭.



P 之坐標爲 (α,β). 直角二等分 BC 之大圓. 通過 P 點. 故引長 BC, 交 PQ 大圓之點爲 Q. 是爲大圓之極. 而 $IQ=QD=\frac{\pi}{2}$,

$$\therefore\quad \cos PQ=0,$$

$$\cos QB=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right).$$

$$\therefore\quad 0=\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)+\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos(\pi-\beta).$$

11. 哈氏之定理

平面幾何學. 關於三角形之九點圓. 切於內切圓及三個傍切圓. 球面三角形. 亦得與此同樣考究其性質. 是稱哈氏之定理.

有三角形 ABC. 從 A 角頂至內切圓之中心之距離爲 α. 切於此內切圓之小圓之半徑爲 ρ. 又觸於內切圓之小圓之中心與 A 角頂之距離爲 β. 而 α 距離線與 β 距離線所成之角爲 γ. 則

$$\cos(\rho-\gamma)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma,\cdots\cdots 81$$

觸於此內切圓切於傍切圓.

令從 A 角頂至傍切圓中心之距離爲 α. 則

$$\cos(\rho+\gamma_1)=\cos\alpha_1\cos\beta+\sin\alpha_1\sin\beta\cos\gamma.\cdots\cdots 82$$

同樣 α_2,α_3 各爲他之二個傍切圓至 A 角頂之距離. 則

$$\cos(\rho+\gamma_2)=\cos\alpha_2\cos\beta+\sin\alpha_2\sin\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right),\cdots\cdots 83$$

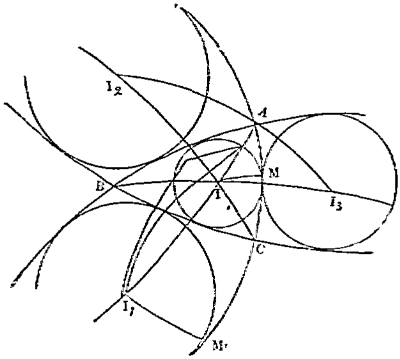
$$\cos(\rho+\gamma_3)=\cos\alpha_3\cos\beta+\sin\alpha_3\sin\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right),\cdots\cdots 84$$

ρ,β,γ 之實值. 可以滿足此四個方程式.

由 81, 82 式消去 $\cos\gamma$. 則

$$\cos\rho(\cos\gamma\sin\alpha_1-\cos\gamma_1\sin\alpha)+\sin\rho(\sin\gamma\sin\alpha_1+\sin\gamma_1\sin\alpha)$$

$$=\cos\beta(\cos\alpha\sin\alpha_1-\cos\alpha_1\sin\alpha)\ \cdots\cdots\cdots 85$$



從 A 角頂至內切圓觸於 AC 之點之距離爲 m,

從 A 角頂至 γ_1 傍切圓觸於 AB 之點之距離爲 m_1. 則

$$\cot\alpha=\cot m\cos\frac{A}{2},\quad \cos\alpha=\cos\gamma\cos m,\quad \sin\gamma=\sin\alpha\sin\frac{A}{2},$$

$$\therefore\quad \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}=\frac{\cot\alpha}{\cos m}=\frac{1}{\sin m}\cos\frac{A}{2},$$

$$\cot\alpha_1=\cot m_1\cos\frac{A}{2},\quad \cos\alpha_1=\cos\gamma_1\cos m_1,\quad \sin\gamma_1=\sin\alpha_1\sin\frac{A}{2},$$

$$\therefore\quad \frac{\cos\gamma_1}{\sin\alpha_1}=\frac{\cot\alpha_1}{\cos m_1}=\frac{1}{\sin m_1}\cos\frac{A}{2},$$

以此等之值代入 85 式. 則

$$\cos\rho\cos\frac{A}{2}\left(\frac{1}{\sin m}-\frac{1}{\sin m_1}\right)+2\sin\rho\sin\frac{A}{2}$$

$$=\cos\beta\cos\frac{A}{2}(\cot m-\cot m_1),$$

$$\therefore\quad \cos\rho(\sin m_1-\sin m)+2\sin\rho\sin m\sin m_1\tan\tfrac{1}{2}A=\cos\beta\sin(m_1-m),$$

然 $m=s-a$, $m_1=s$,

$$\cos\rho\{\sin(s-a)) -\sin s\} +2\sin\rho\sin(s-a)\sin s\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$$

$$=\cos\beta\sin\alpha,$$

$$2\cos\rho\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{a}{2}+2\sin\rho\cdot n=\cos\beta\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 86$$

同樣.由 83, 84 式消去 $\cos\gamma$.

令 $m_2=s-b$, $m_3=s-c$,

則最初消去 α_2, α_3 之式.爲

$$\cos\rho(\sin m_2+\sin m_3)-2\sin\rho\sin m_2\sin m_3\cot\tfrac{1}{2}A=\cos\beta\sin(m_2+m_3)$$

$$\therefore\ 2\cos\rho\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b-c}{2}-2n\sin\rho=\cos\beta\sin\alpha.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 87$$

由 86, 87 得

$$\tan\rho=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}{n}=\tfrac{1}{2}\tan R,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 88$$

$$及\quad \cos\beta=\frac{\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\rho}{\cos\frac{1}{2}a}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 89$$

89 式 $\cos\beta$ 比 1 小.故 $\cos\frac{1}{2}a$ 須比 $\cos\frac{1}{2}b$ 或 $\cos\frac{1}{2}c$ 大.方爲完全.

如是求得 ρ, β 之值.可滿足本題之基礎四式 81, 82, 83, 84.

既求得 α, β 之值.可由 81 或 82 式以求得 $\cos\gamma$.由 83 或 84 式.以求得 $\sin\gamma$.但 $\sin\gamma$ 與 $\cos\gamma$.須有 $\sin^2\gamma+\cos^2\gamma=1$ 之形狀.

由 81 式.

$$\frac{\cos\rho\sin\gamma}{\sin\alpha}\left(\cot\gamma+\tan\rho-\cos m\cot\gamma\frac{\cos\beta}{\cos\rho}\right)=\sin\beta\cos\gamma,$$

$$\therefore\ \frac{\cos\rho\sin\frac{A}{2}}{n}\left\{\sin s+\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c-\frac{\cos(s-a)\sin s\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{1}{2}a}\right\}$$

$$=\sin\beta\cos\gamma,$$

$$\therefore\ \frac{\cos\rho\sin\frac{1}{2}A}{n}\left\{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{b+c}{2}-\frac{\sin(b+c)\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}a}\right\}$$

$$=\sin\beta\cos\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 90$$

又由83式.

$$\frac{\cos\rho\cos\frac{1}{2}A}{n}\left\{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{c-b}{2}-\frac{\sin(c-b)\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{2\cos\frac{1}{2}a}\right\}$$

$$=\sin\beta\sin\gamma.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 91$$

91, 92式.獨能滿足 $\cos^2\gamma+\sin^2\gamma=1$ 之方程式.

今令 $\frac{\cos\beta}{\cos\rho}=k$, 則 $k=\frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}$.

又令 $\cot r\{1-k\cos(s-a)\}=x,\quad \cot r_1\{1-k\cos s\}=y,$

則變81, 82式之形如次.

$$(x\cos\rho+\sin\rho)\sin\tfrac{1}{2}A=\sin\beta\cos\gamma,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 92$$

$$(y\cos\rho-\sin\rho)\sin\tfrac{1}{2}A=\sin\beta\cos\gamma,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 93$$

此二式相加.

$$(x+y)\sin\tfrac{1}{2}A\cos\rho=2\sin\beta\cos\gamma,$$

從初式減次式.

$$(x-y)\cos\rho=-2\sin\rho,$$

卽 $(x^2+2xy+y^2)\sin^2\frac{1}{2}A\cos^2\rho=4\sin^2\rho\cos^2\gamma,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 94$

$$(x^2+y^2)\cos^2\rho=4\sin^2\rho+2xy\cos^2\rho,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 95$$

以95式代入94式.則

$$(4\sin^2\rho+4xy\cos^2\rho)\sin^2\tfrac{1}{2}A=4\sin^2\beta\cos^2\gamma,$$

$$\sin^2\beta\cos^2\gamma=(\sin^2\rho+xy\cos^2\rho)\sin^2\tfrac{1}{2}A,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 96$$

再令 $\cot r_2\{1-k\cos(s-c)\}=x_1\quad \cot r_3\{1-k\cos(s-b)\}=y_1$

則變換83, 84兩式如次.

$$(x_1\cos\rho-\sin\rho)\cos\tfrac{1}{2}A=\sin\beta\sin\gamma,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 97$$

$$(y_1 \cos\rho - \sin\rho)\cos\tfrac{1}{2}A = -\sin\beta\sin\gamma, \cdots\cdots 98$$

從97式減98式.則

$$(x_1 - y_1)\cos\rho\cos\tfrac{1}{2}A = 2\sin\beta\sin\gamma,$$

又兩式相加.則 $(x_1 + y_1)\cos\rho = 2\sin\rho$,

$$\therefore\quad \sin^2\beta\sin^2\gamma = (\sin^2\rho - x_1 y_1\cos^2\rho)\cos^2\tfrac{1}{2}A, \cdots\cdots 99$$

而由96, 99式.

$$\sin^2\beta = \sin^2\rho + (xy\sin^2\tfrac{1}{2}A - x_1 y_1\cos^2\tfrac{1}{2}A)\cos^2\rho,$$

然 $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = \sin^2\rho + \cos^2\rho - k^2\cos^2\rho$,

從而 $1 - k^2 = xy\sin^2\tfrac{1}{2}A - x_1 y_1\cos^2\tfrac{1}{2}A$,

今 $xy\sin^2\tfrac{1}{2}A = \dfrac{\cot r\cot r_1\{1 - k\cos s\}\{1 - k\cos(s-a)\}\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}$

$$= \frac{\{1 - k\cos s\}\{1 - k\cos(s-a)\}}{\sin b\sin c},$$

同様.

$$x_1 y_1\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{\{1 - k\cos(s-b)\}\{1 - k\cos(s-c)\}}{\sin b\sin c},$$

試從前式減後式.則

$$xy\sin^2\tfrac{1}{2}A - x_1 y_1\cos^2\tfrac{1}{2}A = \frac{k}{\sin b\sin c}\{\cos(s-b) + \cos(s-c) - \cos s - \cos(s-a)\}$$

$$+ \frac{k^2}{\sin b\sin c}\{\cos s\cos(s-a) - \cos(s-b)\cos(s-c)\}$$

$$= \frac{2k\cos\tfrac{1}{2}a}{\sin b\sin c}\left\{\cos\frac{b-c}{2} - \cos\frac{b+c}{2}\right\}$$

$$+ \frac{k^2}{\sin b\sin c}\left\{\cos\frac{b+c+a}{2}\cos\frac{b+c-a}{2} - \cos\frac{a+c-b}{2}\cos\frac{a+b-c}{2}\right\},$$

$$\therefore\quad 1 - k^2 = \frac{4\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}{\sin b\sin c}$$

$$+ \frac{k^2}{\sin b\sin c}\left\{\sin^2\frac{c-b}{2} - \sin^2\frac{c+b}{2}\right\}. \cdots\cdots 100$$

由以上關係式.切於內切圓及傍切圓之圓.得以決定其成立.而自三角形之B, C之角頂,至切於內切圓及傍切圓之圓心之距離.亦可與89式同樣求之.故勿具論.

從B及C角頂至該距離為β_1, β_2.則

$$\cos\beta_1=\frac{\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a\cos\rho}{\cos\frac{1}{2}b};\quad \cos\beta_2=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\rho}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

此兩式之左邊皆須比1小.

此所接觸之圓.當交三角形之各邊.今決定此交點之位置.接觸圓與AB邊之交點至A角頂之距離為λ, μ.則

$$\tan\frac{\lambda}{2}\tan\frac{\mu}{2}=\frac{\cos\rho-\cos\beta}{\cos\rho+\cos\beta}\ (\text{見第9節})$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}a-\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\ \cdots\cdots\cdots\cdots 101$$

同樣.

$$\tan\frac{c-\lambda}{2}\tan\frac{c-\mu}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c},\ \cdots\cdots\cdots 102$$

試以101式之$\tan\frac{1}{2}\lambda\tan\frac{1}{2}\mu$代入102式中.則

$$\tan\tfrac{1}{2}\lambda+\tan\tfrac{1}{2}\mu=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c+\cos^2\frac{1}{2}b\sin^2\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c(\cos\frac{1}{2}a+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c)}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}a-\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}+\frac{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\cdots\cdots 103$$

而由102, 103式.

$$\tan\tfrac{1}{2}\lambda=\frac{\cos\frac{1}{2}a-\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c},\ \cdots\cdots\cdots\cdots 104$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\mu=\frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a+\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\ \cdots\cdots\cdots\cdots 105$$

其他各邊與所接觸圓之交點,至對於此點之角頂之距離.亦可同樣求之.

12. 設從所接觸圓之中心向AC邊之垂線之距離爲Z. 則

$$\sin Z=\sin\beta\sin(\tfrac{1}{2}A+\gamma)=\sin\beta\{\sin\tfrac{1}{2}A\cos\gamma+\sin\gamma\cos\tfrac{1}{2}A\},$$

又由82, 83式.

$$\sin\beta\cos\gamma=\frac{\cos\rho\sin\frac{1}{2}A}{n}(Z-\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c),$$

但 $Z=\sin(s-a))-\cos s\sin(s-a)\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\sec\tfrac{1}{2}a,$

及 $\sin\beta\sin\gamma=\dfrac{\cos\rho\sin\frac{1}{2}A}{n}(Z_1-\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c),$

但 $Z_1=\sin(s-b)-\cos(s-c)\sin(s-b)\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\sec\tfrac{1}{2}a,$

$\therefore\quad \sin Z=\dfrac{\cos\rho}{n}\{Z\sin^2\tfrac{1}{2}A+Z_1\cos^2\tfrac{1}{2}A-\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\},$

今

$$Z\sin^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}\{1-\cos s\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\sec\tfrac{1}{2}a\},$$

及

$$Z_1\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin b\sin c}\{1-\cos(s-c)\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\sec\tfrac{1}{2}a\},$$

$$\therefore\quad Z\sin^2\tfrac{1}{2}A+Z_1\cos^2\tfrac{1}{2}A=\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin b\sin c}$$

$$\times\left\{2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sec\frac{a}{2}\sin(2s-c)\right\}$$

$$=\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{2\sin b\sin\frac{1}{2}c}\{2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)-\sin(a+b)\cos\tfrac{1}{2}b\sec\tfrac{1}{2}a\}$$

$$=\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}b}{\sin b\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a}$$

$$=\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin^2\frac{1}{2}(a+b)}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\therefore \quad \sin Z=\frac{\cos p}{n}\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\left\{\frac{2\sin^2\frac{1}{2}(a+b)\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin^2\frac{1}{2}c\sin a\sin b}-1\right\}$$

$$=\frac{\cos p}{n}\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\left\{2\cos^2\frac{A-B}{2}-1\right\},$$

$$\therefore \quad \sin Z=\frac{\cos p}{n}\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c\cos(A-B)=\sin p\cos(A-B),$$

向他邊接觸圓中心之距離.亦得同樣求之.

13. 三角形三垂線之交點爲P.三中線之交點爲G.切於內切圓及傍切圓之圓之中心爲N.則P, G, N在同一大圓周上.

自N, P, G各向三角形之邊a, b, c作垂弧.爲x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2:.則

$$\frac{\sin x}{\cos(B-C)}=\frac{\sin y}{\cos(C-A)}=\frac{\sin z}{\sin(A-B)},$$

$$\frac{\sin x_1}{\cos B\cos C}=\frac{\sin y_1}{\cos C\cos A}=\frac{\sin z_1}{\cos A\cos B},$$

$$\frac{\sin x_2}{\sin B\sin C}=\frac{\sin y_2}{\sin C\sin A}=\frac{\sin z_2}{\sin A\sin B},$$

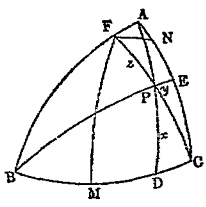
$$\therefore \quad \sin x=t_1\sin x_1+t_2\sin x_2,\quad \sin y=t_1\sin y_1+t_2\sin y_2,$$

$$\sin z=t_1\sin z_1+t_2\sin z_2,$$

但 $$\frac{\sin x}{\cos(B-C)}=\frac{t_1\sin x_1}{\cos B\cos C}=\frac{t_2\sin x_2}{\sin B\sin C}.$$

如此計算t_1, t_2而用不定係數.

通過P, G之大圓.在從a, b, c至x, y, z之距離.然在x, y, z距離之點爲N.故P, G, N在同一大圓周上.



補題1. 三角形之三垂線會於一點.

CF爲向AB之垂線.從F引垂弧FM, FN.將FM, FN以ξ, η代之.則

$$\frac{\sin\xi}{\sin\eta}=\frac{\sin FCB}{\sin FCA},$$

又 $\cos B=\cos CF \sin FCB$, $\cos A=\cos CF \sin FCB$,

$$\therefore \quad \frac{\sin\xi}{\sin\eta}=\frac{\cos B\cos C}{\cos A\cos C}.$$

從 CF 上之某點所引垂弧之正弦.常等於 ξ, η 之正弦之比.

同樣. AD 爲向 BC 之垂弧.又從 CF, AD 之交點 P 所引之垂弧爲 x, y, z. 則

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\cos B\cos C}{\cos A\cos C}, \quad \frac{\sin y}{\sin z}=\frac{\cos A\cos C}{\cos A\cos B},$$

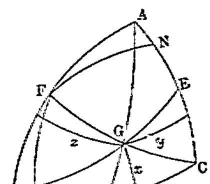
$$\therefore \quad \frac{\sin x}{\sin z}=\frac{\cos B\cos C}{\cos A\cos B}.$$

由此關係式.知 P 點在從 B 向 AC 所引垂弧 BE 之中.故三垂線會於一點.此點以次之關係式定之.

$$\frac{\sin x}{\cos B\cos C}=\frac{\sin y}{\cos C\cos A}=\frac{\sin z}{\cos A\cos B}.$$

補題 2. 三角形之三中線.會於一點.由此點向 a, b, c 邊引垂弧爲 x, y, z. 則

$$\frac{\sin x}{\sin B\sin C}=\frac{\sin y}{\sin C\sin A}=\frac{\sin z}{\sin A\sin B}.$$ 試證之.



如補題 1. 從 F 引垂弧 FM, FN. 此以 λ, μ 代之.則

$$\frac{\sin\lambda}{\sin\mu}=\frac{\sin FCB}{\sin FCA},$$

又 $$\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\dfrac{\sin FCB}{\sin FB}\sin CF}{\dfrac{\sin FCA}{\sin FA}\sin CF}=\frac{\sin FCB}{\sin FCA},$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\lambda}{\sin\mu}=\frac{\sin B}{\sin A}.$$

然從 CF 上任意一點所引垂弧正弦之比.等於 $\sin\lambda : \sin\mu$.

同様. 從中線AD上任意一點所引垂線正弦之比,等於$\sin C : \sin B$.

今令從G向邊a, b, c所引之垂弧爲x, y, z. 則

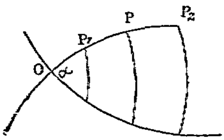
$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sin B \sin C}{\sin A \sin C}, \quad \frac{\sin y}{\sin z}=\frac{\sin C \sin A}{\sin B \sin A},$$

$$\therefore \quad \frac{\sin x}{\sin z}=\frac{\sin C \sin B}{\sin B \sin A}.$$

故G點在BE線中. 而三線會於一點. 又此點之關係如次.

$$\frac{\sin x}{\sin B \sin C}=\frac{\sin y}{\sin C \sin A}=\frac{\sin z}{\sin A \sin B}.$$

補題3. 從二點P_1, P_2引定弧之垂線. 又從同含P_1, P_2之大圓周中取一P點, 亦引垂線. 設



$$PP_1=\theta_1, \quad PP_2=\theta_2,$$

從P, P_1, P_2點引垂弧x, x_1, x_2. 則

$$\sin x=\frac{\sin \theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\sin x_1+\frac{\sin \theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\sin x_2.$$

引長弧$P_1 P_2$交定弧於O. 其交角爲α.

又P_1在O與P_2之間. P在P_1與P_2之間.

然 $\sin x_1=\sin\alpha \sin OP_1=\sin\alpha \sin(OP-\theta_1)$

$$=\sin\alpha\{\sin OP \cos\theta_1-\sin\theta_1 \cos OP\},$$

$$\sin x_2=\sin\alpha \sin OP_2=\sin\alpha \sin(OP+\theta_2)$$

$$=\sin\alpha\{\sin OP \cos\theta_2+\sin\theta_2 \cos OP\},$$

前式以$\sin\theta_2$乘之. 後式以$\sin\theta_1$乘之. 相加. 則

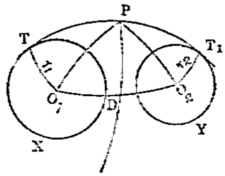
$$\sin x_1 \sin\theta_2+\sin x_2 \sin\theta_1=\sin\alpha \sin OP\{\sin\theta_2 \cos\theta_1+\cos\theta_2 \sin\theta_1\}$$

$$=\sin x \sin(\theta_2+\theta_1),$$

$$\therefore \quad \sin x=\frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\sin x_1+\frac{\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\sin x_2.$$

問題七

1. x, y 爲二小圓.從某點P至該二圓引切線PT, PT_1.設$PT=PT_1$.則P點之軌跡如何.



設x圓之中心爲O_1. y圓之中心爲O_2.引PO_1, PO_2, O_1O_2,又引O_1O_2之垂弧PD.則

$$\cos PT=\frac{\cos PO_1}{\cos O_1T},$$

$$\cos PT_1=\frac{\cos PO_2}{\cos O_2T_1},$$

又　$\cos PO_1=\cos PD\cos O_1D,\qquad \cos PO_2=\cos PD\cos O_2D,$

而　$\cos PT=\cos PT_1,$

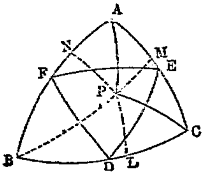
$$\therefore\quad \frac{\cos PO_1}{\cos PO_2}=\frac{\cos O_1T}{\cos O_2T_1}=\frac{\cos O_1D}{\cos O_2D}$$

然O_1T, O_2T_1爲定圓之半徑. $\cos O_1T:\cos O_2T_1$爲定比.而O_1O_2爲一定之距離.故D爲定點.卽所求之軌跡.爲依$\cos r_1:\cos r_2$分O_1O_2之垂直大圓弧.此大圓弧曰根軸.

2. 從三角形之各角.向其夾邊之中點連結之弧引垂弧.此各垂弧相會於一點.從此點向邊a, b, c所引垂弧之長爲x, y, z.則

$$\frac{\sin x}{\sin(S-B)\sin(S-C)}=\frac{\sin y}{\sin(S-C)\sin(S-A)}$$

$$=\frac{\sin z}{\sin(S-A)\sin(S-B)}.$$



從A及C之角頂,向夾角邊之中點連結之弧引垂弧,相交於P.則

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sin \mathrm{PC} \sin \mathrm{PCB}}{\sin \mathrm{PC} \sin \mathrm{PCA}}=\frac{\sin \mathrm{PCB}}{\sin \mathrm{PCA}}=\frac{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{B})}{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{A})}$$ 〔依次之例題〕

$$=\frac{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{B})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{C})}{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{A})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{C})},$$

同樣.

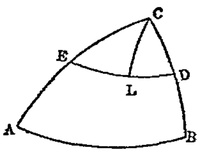
$$\frac{\sin y}{\sin z}=\frac{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{C})}{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{B})}=\frac{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{C})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{A})}{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{B})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{A})},$$

$$\therefore\quad \frac{\sin x}{\sin z}=\frac{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{C})}{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{A})}=\frac{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{C})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{B})}{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{A})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{B})}.$$

故 P 在從 B 點所引垂弧之中. 此三線會於一點之要件如次.

$$\frac{\sin x}{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{B})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{C})}=\frac{\sin y}{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{A})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{C})}=\frac{\sin z}{\sin(\mathrm{S}-\mathrm{A})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{B})}.$$

3. 有三角形 ABC. 從 C 角頂向 a, b 邊中點連結之線作垂線. 則此垂線與 a 邊成角 S−B. 與 b 邊成角 S−A.



連結 AC, CB 中點之線爲 DE.

其垂弧爲 CL.

則

$$\cot\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}a=\cot \mathrm{LDC} \sin \mathrm{C}+\cos\tfrac{1}{2}a \cos \mathrm{C},$$

$$\therefore\quad \cot \mathrm{LDC}=\frac{\cot\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}a-\cos\frac{1}{2}a \cos \mathrm{C}}{\sin \mathrm{C}},$$

又 $$\cot \mathrm{LCD}=\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\cot \mathrm{LDC}}=\frac{\cos\frac{1}{2}a \sin \mathrm{C}}{\cot\frac{1}{2}b \sin\frac{1}{2}a-\cos\frac{1}{2}a \cos \mathrm{C}}$$

$$=\frac{\sin \mathrm{C}}{\tan\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}-\cos \mathrm{C}}=\frac{\sin \mathrm{C}}{\frac{\cos(\mathrm{S}-\mathrm{A})}{\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B})}-\cos \mathrm{C}}$$

$$=\frac{\sin \mathrm{C}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B})}{\cos(\mathrm{S}-\mathrm{A})-\cos \mathrm{C}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B})}$$

$$=\frac{\sin \mathrm{C}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B})}{\cos(\mathrm{S}-\mathrm{A})-\frac{1}{2}\{\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B}+\mathrm{C})+\cos(\mathrm{S}-\mathrm{A})\}}$$

$$=\frac{\sin \mathrm{C}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B})}{\frac{1}{2}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{A})-\frac{1}{2}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{B}+\mathrm{C})}=\cot(\mathrm{S}-\mathrm{B}),$$

$\therefore \quad \mathrm{LDC}=\mathrm{S}-\mathrm{B},$

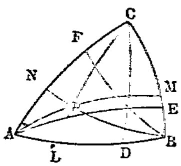
同樣. $\mathrm{LCE}=\mathrm{S}-\mathrm{A}.$

4. 從三角形之各角頂.向底邊作垂線.此垂線與一邊所成之角.等於他邊與某線間之角.如是作三線必會於一點.從此交點引邊 a, b, c 之垂弧為 x, y, z. 則

$$\frac{\sin x}{\cos \mathrm{A}}=\frac{\sin y}{\cos \mathrm{B}}=\frac{\sin z}{\cos \mathrm{C}},$$

AB 邊上引垂弧 CD, 又引 CL. $\angle \mathrm{DCB}=\angle \mathrm{LCA},$

同樣. $\angle \mathrm{BAE}=\angle \mathrm{CAM}, \quad \angle \mathrm{ABN}=\angle \mathrm{FBC}.$



則 CL, BN, AM 會於一點.先令此交點為 P.

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\sin \mathrm{LCB}}{\sin \mathrm{LCA}}=\frac{\sin \mathrm{DCA}}{\sin \mathrm{DCB}},$$

而 $\sin \mathrm{DCA}=\dfrac{\cos \mathrm{A}}{\cos \mathrm{DC}}, \quad \sin \mathrm{DCB}=\dfrac{\cos \mathrm{B}}{\cos \mathrm{DC}},$

$$\therefore \quad \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{\cos \mathrm{A}}{\cos \mathrm{B}},$$

同樣. $\dfrac{\sin y}{\sin z}=\dfrac{\cos \mathrm{B}}{\cos \mathrm{C}}, \quad \therefore \quad \dfrac{\sin x}{\sin z}=\dfrac{\cos \mathrm{A}}{\cos \mathrm{C}}.$

故 BN 通過 P 點.而三線會於一點.此三線會於一點之要件.以次之方程式示之.

$$\frac{\sin x}{\cos \mathrm{A}}=\frac{\sin y}{\cos \mathrm{B}}=\frac{\sin z}{\cos \mathrm{C}}.$$

5. 前例題2及4之交點,與內切圓及傍切圓相接觸之圓之中心.同在一大圓周中.

從例題2之交點,向三邊 a, b, c 之垂弧.為 x_1, y_1, z_1.

從例題4之交點,向三邊 a, b, c 之垂弧.為 x_2, y_2, z_2.

從內切圓及傍切圓相接觸之圓之中心N, 向三邊 a, b, c 之垂弧. 爲 x, y, z. 則

$$\frac{\sin x_1}{\sin(S-B)\sin(S-C)}=\frac{\sin y_1}{\sin(S-C)\sin(S-A)}$$

$$=\frac{\sin z_1}{\sin(S-A)\sin(S-B)},$$

$$\frac{\sin x_2}{\cos A}=\frac{\sin y_2}{\cos B}=\frac{\sin z_2}{\cos C},$$

$$\frac{\sin x}{\cos(B-C)}=\frac{\sin y}{\cos(C-A)}=\frac{\sin z}{\cos(A-B)}.$$

而令

$$\frac{\sin x_1}{\sin(S-B)\sin(S-C)}=\frac{\sin x_1}{\cos(B-C)-\cos A}=\lambda,$$

$$\frac{\sin x_2}{\cos A}=\mu,\quad \frac{\sin x}{\cos(B-C)}=\eta.$$

則 $\sin x_1=\lambda\cos(B-C)-\lambda\cos A,$

$\sin x_2=\mu\cos A,\quad \sin x=\eta\cos(B-C),$

$\therefore\quad \sin x_1=\frac{\lambda}{\eta}\sin x-\frac{\lambda}{\mu}\sin x_2,$

$\therefore\quad \sin x=\frac{\eta}{\lambda}\sin x_1+\frac{\eta}{\mu}\sin x_2,$

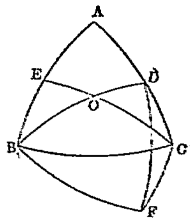
$\therefore\quad \sin x_1=t_1\sin x_1+t_2\sin x_2.$

同樣. $\sin y=t_1\sin y_1+t_2\sin y_2,$

$\sin z=t_1\sin z_1+t_2\sin z_2.$

故此三點同在一圓周內.

6. 三角形二角之二等分線與對邊相交. 其長相等. 而此二等分線之和. 比 180° 小. 則此二角相等.



BOD, COE 爲相等之二等分弧. 若 B 不等於 C. 而令 B 比 C 大. 則 CD 比 BE 大. 而 ∠OBC 比 ∠OCB 大. 故 OC 比 OB 大. 故 OD 比 OE 大. 而 ∠ODC 比 ∠OEB 大. 然就 BC 之他側作 △BCF. 令等於 CBE. 今 ODC 比 OEB 大. 故 ∠FDC 比 ∠DFC 大. 故 CD 比 CF 小. 卽 CD 比 BE 小. 於理不合. 故不可不令 ∠B＝∠C.

第 八 編

關於多面體之定理

多面體者.平面圖即表面所界成之立體也.

多面體之表面爲相等正多角形.而立體角均相等者.曰正多面體.

1. 有某多面體.其立體角之數爲S.表面之數爲F.側稜之數爲E.則

$$S+F=E+2.$$

從多面體之內部取一點爲中心.r爲半徑.畫球.而從中心至多面體之角點各引直線.此各直線會於球之表面.在球面上作弧線連結此會點.則有與多面體表面相同多角形之數.畫於球面上.

今此等某球面多角形.其內角之和以s表之.其邊數以m表之.則多角形之面積.爲

$$r^2\{s-(m-2)\pi\}.$$

何則.取多角形之一點.連結各角頂.可得m個三角形.故

$$m\{\text{三角形各角之和}-\pi\}r^2=(s+2\pi-m\pi)r^2=\{s-(m-2)\pi\}r^2,$$

然球面多角形之總和.爲球之表面.而

$$4\pi r^2=\{\Sigma s-\pi\Sigma m+2F\pi\}r^2,$$

而Σs乃多角形各角之和.而爲立體角之數之2π倍.

又Σm乃總多角形總邊數之和.故2E即相接多角形之邊相重.

$\therefore\ 4\pi=2\pi S-2\pi E+2\pi F,\qquad \therefore\ E+2=S+F.$

2. 正多面體只有五種.

設正多面體各表面之邊數爲 m. 各立體角之平面角之數爲 n. 然平面角之全數爲 mF 或 nS 或 2E.

$\therefore \quad m\mathrm{F}=n\mathrm{S}=2\mathrm{E}.$

而 $\mathrm{S}+\mathrm{F}=\mathrm{E}+2,$

從此方程式得次式.

$$\mathrm{S}=\frac{4m}{2(m+n)-mn}, \quad \mathrm{E}=\frac{2mn}{2(m+n)-mn}$$

$$\mathrm{F}=\frac{4n}{2(m+n)-mn}.$$

以上各式. 非爲正整數不可. 卽須

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2},$$

然 n 不能比 3 小. 卽

$$\frac{1}{n}\ngtr\frac{1}{3} \qquad \therefore \quad \frac{1}{m}>\frac{1}{6}.$$

而 m 爲整數. 不能比 3 小. 唯 3, 4, 5 爲 m 之値. 始能滿足.

而取正三角形之例. 會於一點之面. 須比 6 小.

何則 $\frac{2}{3}\mathrm{R}\angle\times6=4\mathrm{R}\angle,$ 不能構成立體.

$\frac{2}{3}\mathrm{R}\angle\times5<4\mathrm{R}\angle,$ 方能構成立體.

再言之. (1) $m=3, \quad n=3,$ (2) $m=4, \quad n=3,$

(3) $m=3, \quad n=4,$ (4) $m=5, \quad n=3,$

(5) $m=3, \quad n=5,$

而對應於此等所構成之正多面體. 爲四面體, 六面體. 八面體, 十二面體, 二十面體五種.

3. 構成多面體之立體角.其各平面角之總和.爲 $2(S-2)\pi$.

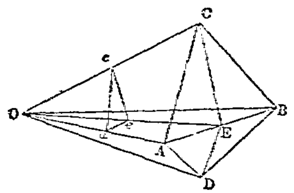
令多面體某表面之邊數爲 m.則此表面內角之總和爲 $(m-2)\pi$.

故統計表面內角之總和.爲

$$\Sigma(m-2)\pi=\Sigma m\pi-2F\pi=2(E-F)\pi=2(S-2)\pi.$$

4. 正多面體二接面之傾斜.以 I 表之.則

$$\sin\tfrac{1}{2}I=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{m}}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots 106$$



AB 爲二面共有之邊.C, D 爲此二接面之外接圓之中心.由是引 AB 之垂線 CE, DE.則 CE, DE 之傾斜角爲 I.又由 CE, DE 二線所成之平面上引垂線 CO, DO.相會於 O.連結 OA, OE, OB.又以 O 爲中心.任意取一半徑畫球.截 OA, OE, OB 之點爲 a, e, c.則 aec 爲球面三角形.$\angle e$ 爲直角.

而 $\angle cae=\pi/n$, 及 $\angle ace=\pi/m$,

$\therefore\ \sin ace=\cos cae/\cos ce.$

然 $\cos ce=\cos cOe=\sin\frac{1}{2}I$,

$$\therefore\ \sin\tfrac{1}{2}I=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{m}}.$$

5. 有正多面體.試求其內切或外接之球之半徑.

令側稜 AB 爲 a, OC 爲 r, OA 爲 R.但 r 爲內切球之半徑.R 爲外接球之半徑

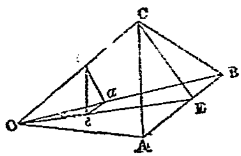
然 $CE = AE\ cot\ ACE = \frac{a}{2} cot \frac{\pi}{m}$,

$r = CE\ tan\ CEO = CE\ tan \frac{1}{2} I$,

$r = \frac{a}{2} cot \frac{\pi}{m} tan \frac{1}{2} I$, ...107

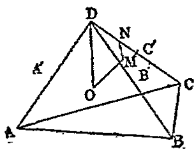
又 $r = R\ cos\ aOc = R\ cot\ ca\ cot\ eac = R\ cot \frac{\pi}{m} cot \frac{\pi}{n}$,

∴ $R = r\ tan \frac{\pi}{m} tan \frac{\pi}{n} = \frac{a}{2} tan \frac{1}{2} I\ tan \frac{\pi}{n}$. 108



-6. 有四面體 求其外接球之半徑.

令四面體爲DABC. 其外接球之中心爲O. 稜DA, DB, DC順次爲a, b, c. 其中點爲A′, B′, C′. 今畫OM平行於DA. 交平面BDC於M. 又畫MN平行於BD. 順次由DO射影之關係. 而得次式.



$\frac{1}{2}a = DN\ cos\,ac + NM\ cos\,ab + MO$,

$\frac{1}{2}b = DN\ cos\,bc + NM + MO\ cos\,ab$,

$\frac{1}{2}c = DN + NM\ cos\,bc + MO\ cos\,ac$,

$R = DN\ cos(c, R) + NM\ cos(b, R) + MO\ cos(a, R)$,

然 $2R^2 = MO \cdot a + MN \cdot b + DN \cdot c$,

$a = 2MO + 2MN\ cos\,ab + 2DN\ cos\,ac$,

$b = 2MO\ cos\,ab + 2MN + 2DN\ cos\,bc$,

$c = 2MO\ cos\,ac + 2MN\ cos\,bc + 2DN$,

消去 MO, MN, DN. 則

$$\begin{vmatrix} 2R^2 & a & b & c \\ a & b & 2\cos ab & 2\cos ac \\ b & 2\cos ab & 2 & 2\cos bc \\ c & 2\cos ac & 2\cos bc & 2 \end{vmatrix}=0.$$

令 n 爲立體角 D−ABC 之第一中線部分.

$$\therefore\quad 4n^2=\begin{vmatrix} 1 & \cos ab & \cos ac \\ \cos ab & 1 & \cos bc \\ \cos ac & \cos bc & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\quad 64R^2n^2=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 2 & 2\cos ab & 2\cos ac \\ b & 2\cos ab & 2 & 2\cos bc \\ c & 2\cos ac & 2\cos bc & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2b^2c^2}\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 2a & 2ab\cos ab & 2ac\cos ac \\ b^2 & 2ab\cos ab & 2b^2 & 2bc\cos bc \\ c^2 & 2ac\cos ac & 2bc\cos bc & 2c^2 \end{vmatrix}$$

如是則 $64\,a^2b^2c^2n^2R^2=\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c^2 & b'^2 \\ b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix}$

$$=-\Sigma(aa')^4+2\Sigma(ab\,a'b')^2.\cdots\cdots\cdots\cdots 109$$

7. <u>試求正多面體之表面積及體積.</u>

多面體之一表面之面積. 爲

$$\frac{ma^2}{4}\cot\frac{\pi}{m}.$$

故多面體之全表面積.爲

$$\frac{mFa^2}{4}\cot\frac{\pi}{m}.$$

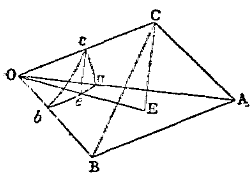
又以多面體之一表面爲底面,頂點爲內切球之中心.其所構成錐體之體積.爲

$$\frac{r}{3}\cdot\frac{ma^2}{4}\cot\frac{\pi}{m}.$$

故多面體之體積.爲

$$\frac{mFra^2}{12}\cot\frac{\pi}{m}.$$

8. 試以平行面體之稜,與各互爲傾斜之項.而求其體積.



稜 $OA=a,\quad OB=b,\quad OC=c.$

傾斜 $BOC=\alpha,\quad COA=\beta,\quad AOB=\gamma.$

引CE垂直於平面BOC.連結OE.以O爲中心.任意取一半徑畫球.交OB, OA, OC, OE於 $b, a, c, e.$

平行面體之積.各等於等底與高相乘之積.卽

$$ab\sin\gamma.CE=abc\sin\gamma\cos cOe,$$

又球面三角形 cae.其 e 爲直角.故

$$\sin cOe=\sin cOa\sin cae=\sin\beta\sin cab,$$

由球面三角形 cab.得

$$\sin cab=\frac{\sqrt{(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}}{\sin\beta\sin\gamma},$$

故平行面體之體積.爲

$$abc\sqrt{(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}.\cdots\cdots110$$

9. 試以平行面體之稜.(會於一點)與各互爲傾斜之項.而求其對角線.

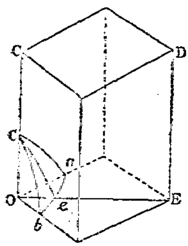
稜　$OA=a,\quad OB=b,\quad OC=c.$

傾斜 $BOC=\alpha,\quad COA=\beta,\quad AOB=\gamma.$　OD爲所求之對角線.

而 OE 爲面 OAB 之對角線.

然 $OD^2=OE^2+ED^2+2OE.ED\cos COE$

$$=a^2+b^2+2ab\cos\gamma+c^2+2c\cdot OE\cos COE.$$



以 O 爲中心畫球.交 OA, OB, OC, OE 於 a, b, c, e. 然

$$\cos cOe=\frac{\cos cOb\sin aOe+\cos cOa\sin bOe}{\sin aOb}$$

$$=\frac{\cos\alpha\sin aOe+\cos\beta\sin bOe}{\sin\gamma},$$

$$\therefore\quad OD^2=a^2+b^2+c^2+2ab\cos\gamma+\frac{2cOE}{\sin\gamma}(\cos\alpha\sin aOe+\cos\beta\sin bOe).$$

而　$OE\sin aOe=b\sin\gamma,\quad OE\sin bOe=a\sin\gamma,$

$$\therefore\quad OD^2=a+b^2+c^2+2ab\cos\gamma+2bc\cos\alpha+2ac\cos\beta.\ \cdots\cdots 111$$

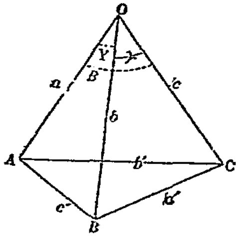
10. 求四面體之體積.

四面體等於同高與二倍底面之平行面體六分之一.

如是得以四面體之稜與傾斜而求其體積.以此稜及傾斜之項.求得平行面體之體積.取其六分之一卽得.又四面體之體積.得以六稜表之.

令　$BC=a',\quad CA=b',\quad AB=c'$, 則

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a'^2}{2bc},\quad \cos\beta=\frac{c^2+a^2-b'^2}{2ac},\quad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c'^2}{2ab}.$$



以 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 之值代入下式.

$$abc\sqrt{\{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\}}.$$

則四面體得以六個邊表之.

令四面體之體積爲V. 則

$$\begin{aligned}144V^2=&-a^2b^2c'^2+a^2a'^2(b'^2+c'^2-a'^2)+b^2b'^2(c'^2+a'^2-b'^2)\\&+c^2c'^2(a'^2+b'^2-c'^2)-a'^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)\\&-b'^2(b^2-c^2)(b^2-a^2)-c'^2(c^2-a^2)(c^2-b^2),\cdots\cdots112\end{aligned}$$

故四面體之體積.爲

$$144V^2=2a'^6.$$

11. 若四面體之頂點.在其底面中.則其體積消失.

112式之右邊.乃隨意取四點置於平面上.而顯六線之關係.此關係式得依喀魯里氏之式獨立以求之 而各由此導得四面體之體積.詳在後節.並備述喀魯里氏其他之定理.

12 就一平面上隨意選四點,連結成六直線.試求其關係式.

A, B, C, D 爲隨意選定之四點.

$AB=c,\quad BC=a,\quad CA=b,\quad DA=a',\quad DB=b',\quad DC=c'.$

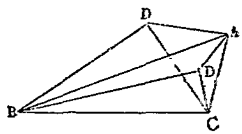
設D點爲△ABC內之一點.則

$$\angle ADB+\angle BDC+\angle CDA=4R\angle,$$

又 $\cos ADB=\cos(BDC+CDA)$,

試變其形狀.則

$$1=\cos^2 ADB+\cos^2 BDC+\cos^2 CDA$$
$$-2\cos ADB\cos BDC\cos CDA.$$



若D點在△ABC之外.則某一角等於他之二角之和.可導得同一之結果.

令　$\cos \mathrm{ADB}=\dfrac{a'^2+b'^2-c^2}{2a'b'}$,　$\cos \mathrm{BDC}=\dfrac{b'^2+c'^2-a^2}{2b'c'}$,

$\cos \mathrm{CDA}=\dfrac{c'^2+a'^2-b^2}{2c'a'}$,

以各値代入上式.則得所求之關係式如次.

$$\begin{aligned}0=&-a^2b^2c^2+a'^2a^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2b^2(c^2+a^2-b^2)\\&+c'^2c^2(a^2+b^2-c^2)-a^2(a'^2-b'^2)(a'^2-c'^2)\\&-b^2(b'^2-c'^2)(b'^2-a'^2)-c^2(c'^2-a'^2)(c'^2-b'^2)\end{aligned}$$

13.　試就前題之六項.以求四面體之體積.

四面體底面ABC之邊之長爲a, b, c.從頂點至A, B, C之長爲a', b', c'.從頂點至底面下垂線之長爲p.則自垂線之足至A, B, C之直線之長.爲

$$\sqrt{(a'^2-p^2)},\quad \sqrt{(b'^2-p^2)},\quad \sqrt{(c'^2-p^2)}.$$

故前節之a'以$\sqrt{(a'^2-p^2)}$代之.b'以$\sqrt{(b'^2-p^2)}$代之.c'以$\sqrt{(c'^2-p^2)}$代之.則

$$\begin{aligned}&p^2(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)\\&=-a^2b^2c^2+a'^2a^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2b^2(c^2+a^2-b^2)\\&\quad+c'^2c^2(a^2+b^2-c^2)-a^2(a'^2-b'^2)(a'^2-c'^2)\\&\quad-b^2(b'^2-c'^2)(b'^2-a'^2)-c^2(c'^2-a'^2)(c'^2-b'^2),\end{aligned}$$

此方程式p^2之係數.爲$\triangle$ABC之面積之十六倍.而其左邊卽$144\mathrm{V}^2$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad 144\mathrm{V}^2=&-a^2b^2c^2+a'^2a^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2b^2(c^2+a^2-b^2)\\&+c'^2c^2(a^2+b^2-c^2)-a^2(a'^2-b'^2)(a'^2-c'^2)\\&-b^2(b'^2-c'^2)(b'^2-a'^2)-c^2(c'^2-a'^2)(c'^2-b'^2).\end{aligned}$$

14. 球面上任意取四點連結爲六個大圓弧.試求其關係式.

A, B, C, D 爲任意所取之四點.

令 $AB=\gamma,\quad BC=\alpha,\quad CA=\beta;$

$DA=\alpha',\quad DB=\beta',\quad DC=\gamma'.$

依第12節.得

$$1=\cos ADB+\cos^2 BDC+\cos^2 CDA-2\cos ADB\cos BDC\cos CDA,$$

今 $\cos ADB=\dfrac{\cos\gamma-\cos\alpha'\cos\beta'}{\sin\alpha'\sin\beta'},\quad \cos BDC=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta'\cos\gamma'}{\sin\beta'\sin\gamma'},$

$$\cos CDA=\frac{\cos\beta-\cos\alpha'\cos\gamma'}{\sin\alpha'\sin\gamma'},$$

以此值代入上式.則得所求之關係式如次.

$$\begin{aligned}1=&\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\alpha'+\cos^2\beta'+\cos^2\gamma'\\&-\cos^2\alpha\cos^2\alpha'-\cos^2\beta\cos^2\beta'-\cos^2\gamma\cos^2\gamma'\\&-2(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta'\cos\gamma'\\&\qquad+\cos\beta\cos\gamma'\cos\alpha'+\cos\gamma\cos\alpha'\cos\beta')\\&+2(\cos\alpha\cos\beta\cos\alpha'\cos\beta'+\cos\beta\cos\gamma\cos\beta'\cos\gamma'\\&\qquad+\cos\gamma\cos\alpha\cos\gamma'\cos\alpha').\end{aligned}$$

問　題　八

1. 正多面體二接面之傾斜爲 I. 則

四面體爲

$$\cos I=\frac{1}{3},$$

立方體爲

$$\cos I=0,$$

八面體爲

$$\cos \mathrm{I} = -\frac{1}{3},$$

十二面體爲

$$\cos \mathrm{I} = -\frac{1}{5}\sqrt{5},$$

二十面體爲

$$\cos \mathrm{I} = -\frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

試證之.

四面體之證.

$$\sin\frac{\mathrm{I}}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad \cos\mathrm{I} = 1 - 2\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}。$$

立方體之證.

$$\sin\frac{\mathrm{I}}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore\quad \cos\mathrm{I} = 1 - 2\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2} = 1 - 2\times\frac{1}{2} = 0.$$

八面體之證.

$$\sin\frac{\mathrm{I}}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad \cos\mathrm{I} = 1 - 2\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2} = 1 - 2\times\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

十二面體之證.

$$\sin\frac{\mathrm{I}}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}}=\frac{2}{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}},$$

$$\therefore\quad \cos\mathrm{I}=1-2\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2}=1-\frac{8}{10-2\sqrt{5}}=\frac{2-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

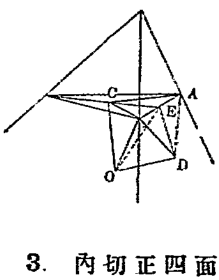
二十面體之證.

$$\sin\frac{\mathrm{I}}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad \cos\mathrm{I}=1-2\sin^2\frac{\mathrm{I}}{2}=1-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)^2$$

$$=1-\frac{2+4\sqrt{5}+10}{12}=\frac{-4\sqrt{5}}{12}=\frac{-\sqrt{5}}{3}.$$

2. 切於正四面體之一面,及他三面之延長面上作球.試求此球之半徑.

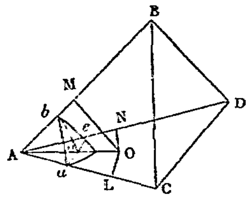


接觸於ABC面及ABD之延長面上作球.其球之半徑爲 r_1. 球心爲O.則

$$\mathrm{CE}\tan\mathrm{CEO}=\mathrm{CE}\tan\frac{1}{2}(\pi-\mathrm{I})=\mathrm{CE}\cot\frac{1}{2}\mathrm{I},$$

$$\therefore\quad r_1=\frac{1}{2}a\cot\frac{\pi}{m}\cot\frac{1}{2}\mathrm{I}=\frac{1}{2}a\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{6}}a.$$

3. 內切正四面體之球之半徑爲 a. 觸於各稜之球之半徑爲R.則 $\mathrm{R}^2=2a^2$. 試證之.



A 爲四面體之一角點. O 爲觸於各稜之球之中心. 從 O 向 AB, AC, AD 引垂線 OL, OM, ON. 爲此球之半徑. 而 $AL=\frac{1}{2}AC$. 因 O 與外接球之中心爲一致. 由此向相等弦之垂線. 分相等各弦爲二等分故也. 今引 OA. 則 $\angle OAL=\angle OAD=\angle OAB$. 故以 A 爲中心. 任意取一半徑畫球. 交各稜於 a, b, c 點. 故交 OA 於 o 點. 而 $oa=ob=oc$. 故 o 爲 abc 三角形之外接小圓之極.

$$\therefore\quad \sin oa=\frac{\sin\frac{1}{2}ab}{\sin\frac{1}{2}aob}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

又 $\quad R=OL=AL\tan OAL=AL\tan oa=AL\frac{1}{\sqrt{3}},$

$$a=AL\cot\frac{\pi}{m}\tan\frac{1}{2}I=AL\sqrt{\frac{1}{6}},$$

$\therefore\quad AL=\sqrt{3}\cdot R=\sqrt{6}\cdot a,\qquad \therefore\quad R^2=2a^2.$

4. 內切於正四面體之球之半徑爲 a. 切於一面及其他延長三面上之球之半徑爲 R'. 則 $R'=2a$. 試證之.

設稜之長爲 b. 則

$$R'=\frac{b}{2}\cot\frac{\pi}{m}\cot\frac{1}{2}I=\frac{b}{2}\cot\frac{\pi}{3}\cot\frac{1}{2}I=\frac{b}{\sqrt{6}},$$

又 $\quad a=\frac{b}{2}\cot\frac{\pi}{m}\tan\frac{1}{2}I=\frac{b}{2}\sqrt{\frac{1}{6}},\qquad \therefore\quad R'=\frac{b}{\sqrt{6}}=2a.$

5. 球內容立方體或正八面體.外接此等體畫球.其外接球相等.反之亦能成立.

由第五節108式.

$$R=r\tan\frac{\pi}{m}\tan\frac{\pi}{n},$$

故於立方體爲　$R=r\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3},$

於八面體爲　$R=r\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4},$

由此兩式考之.知 r 相等則 R 相等.反之.R 相等則 r 相等.

6. 球內接正四面體與正八面體.內切此各多面體作球.試比較其半徑.

於正四面體爲　$r=R\cot^2\frac{\pi}{3},$

於正八面體爲　$r'=R\cot\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{4},$

$$\therefore\quad r:r'=\cot\frac{\pi}{3}:\cot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7. 平行面體之四個對角線之平方和.等於相異稜平方和之四倍.

設四個對角線爲 A, B, C, D. 則

$$A^2=a^2+b^2+c^2+2ab\cos\gamma+2bc\cos\alpha+2ac\cos\beta,$$

$$B^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos\gamma-2bc\cos\alpha+2ac\cos\beta,$$

$$C^2=a^2+b^2+c^2+2ab\cos\gamma-2bc\cos\alpha-2ac\cos\beta,$$

$$D^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos\gamma+2bc\cos\alpha-2ac\cos\beta,$$

上四式相加.則

$$A^2+B^2+C^2+D^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

8. 就半徑ρ之球面上,作三角形ABC.連結此等之角點.又連結角點與球心.而作錐體.則此錐體之體積爲

$$\frac{1}{6}\rho^3\sqrt{(\tan r\tan r_1\tan r_2\tan r_3)}.$$

但 r, r_1, r_2, r_3 爲三角形內切圓傍切圓之半徑.

設球之中心爲O.則依OA, OB, OC成立平行面積六分之一.卽錐體體積.故

$$錐體體積=\frac{\rho^3}{6}\sqrt{\{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\}}$$

$$=\frac{\rho^3}{6}\sqrt{\left\{\frac{n}{\sin s}\cdot\frac{n}{\sin(s-a)}\cdot\frac{n}{\sin(s-b)}\cdot\frac{n}{\sin(s-c)}\right\}}$$

$$=\frac{\rho^3}{6}\sqrt{\{\tan r\tan r_1\tan r_2\tan r_3\}}.$$

9. 球內接正四面體之角點爲極所畫小圓之某小圓.各與他之三個小圓交互相切.則依此各小圓爲界之表面積如次.

$$2\pi r^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

設正四面體之稜爲a,球之半徑爲r.則

$$r=\frac{a}{2}\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{1}{2}\mathrm{I},$$

$$\therefore\quad a=2r\cot\frac{\pi}{3}\cot\frac{1}{2}\mathrm{I}=2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot r.$$

又兩角點間球面上之距離爲2α.則爲小圓兩半徑之和.且爲小圓之徑.

$$\therefore\quad \sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}};\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$因\quad \sin\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{r}=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot r}{r}=\sqrt{\frac{2}{3}}\ 故也.$$

又由第六編例題13.知

小圓包圍球之表面積.爲

$$2\pi(1-\cos\alpha)r^2=2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)r^2,$$

故四個小圓之表面積$=8\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)r^2.$

10. 有球面三角形ABC.從其內取一O點連結各頂角點.則某二邊之正弦,與此二邊夾角之正弦相乘.爲

$$\sin\mathrm{AO}\sin\mathrm{BO}\sin\mathrm{CO}\{\cot\mathrm{AO}\sin\mathrm{BOC}$$
$$+\cot\mathrm{BO}\sin\mathrm{COA}+\tan\mathrm{CO}\sin\mathrm{AOB}\}.$$

令 $\mathrm{AO}=\alpha,\quad \mathrm{BO}=\beta,\quad \mathrm{CO}=\gamma,$

$\mathrm{BOC}=x,\quad \mathrm{COA}=y,\quad \mathrm{AOB}=z.$

則

$$\begin{aligned}\sin^2 b\sin^2 c\sin^2\mathrm{A}&=1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c\\
&=1-(\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos x)^2\\
&\quad-(\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos y)^2\\
&\quad-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos z)^2\\
&\quad+2(\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos x)\\
&\quad\times(\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos y)\\
&\quad\times(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos z)\\
&=1-\cos^2\beta\cos^2\gamma-\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos^2 x\\
&\qquad-2\cos\beta\cos\gamma\sin\beta\sin\gamma\cos x\\
&\quad-\cos^2\gamma\cos^2\alpha-\sin^2\gamma\sin^2\alpha\cos^2 y\\
&\qquad-2\cos\gamma\cos\alpha\sin\gamma\sin\alpha\cos y\\
&\quad-\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2 z\\
&\qquad-2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\cos z\end{aligned}$$

$$+2\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos^2\beta\cos\gamma\sin\alpha\sin\gamma\cos y$$

$$+2\cos\alpha\cos\beta\cos^2\gamma\sin\alpha\sin\beta\cos z$$

$$+2\cos^2\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin\gamma\sin\beta\cos x$$

$$+2\cos\beta\cos\gamma\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma\cos y\cos z$$

$$+2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\sin^2\gamma\cos x\cos y$$

$$+2\cos\gamma\cos\alpha\sin\alpha\sin^2\beta\sin\gamma\cos z\cos x$$

$$+2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos x\cos y\cos z.$$

將此式之 $1-\cos^2\alpha\cos^2\beta-\cdots\cdots+2\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma$ 變其形狀. 則爲

$$\cos^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma+\cos^2\beta\sin^2\gamma\sin^2\alpha+\cos^2\gamma\sin^2\alpha\sin^2\beta.$$

次以 $x=2\pi-(y+z)$, $y=2\pi-(z+x)$, $z=2\pi-(x+y)$ 之關係式代入下式

$$-2\cos x\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+2\cos y\cos z\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\sin^2\alpha\cos\gamma+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

而變其形狀. 則爲

$$+2\sin y\sin x\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma\sin^2\alpha+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又 $2\cos x\cos y\cos z=\cos x(\cos x+\sin y\sin z)+\cos y(\cos y+\sin z\sin x)$

$$=\cos^2x+\cos^2y+\sin z\sin(x+y)$$

$$=\cos^2x+\cos^2y-\sin^2z$$

$$=\cos^2x+\cos^2y+\cos^2z-1,$$

變 $-\cos^2x\sin^2\beta\sin^2\gamma-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$+2\cos x\cos y\cos z\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma,$$

則 $-\cos^2x\sin^2\beta\sin^2\gamma\cos^2\alpha-\cdots\cdots\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma,$

由是 $\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = \sin^2 x \sin^2\beta \sin y \cos^2\alpha$

$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+ 2\sin y \sin z \sin\beta \sin\gamma \cos\beta \cos\gamma \sin^2\alpha$

$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$= \{\sin x \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + \sin y \cos\beta \sin\gamma \sin\alpha$

$+ \sin z \cos\gamma \sin\alpha \sin\beta\}^2,$

$\therefore \sin b \sin c \sin A$

$= \sin x \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + \sin y \cos\beta \sin\gamma \sin\alpha + \sin z \cos\gamma \sin\alpha \sin\beta$

$= \sin BOC \cos OA \sin OB \sin OC$

$+ \sin COA \cos OB \sin OC \sin OA + \sin AOB \cos OC \sin OA \sin OB$

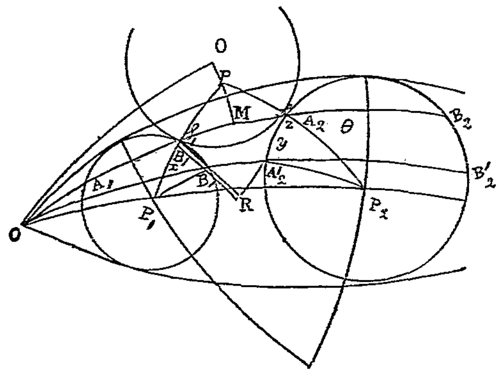
$= \sin AO \sin BO \sin CO\{\cot OA \sin COB$

$+ \cot OB \sin COA + \cot OC \sin AOB\}.$

第九編

相似之中心及軸

1. 試與二小圓相切畫一大圓



T_1T_2 爲與二小圓切於 T_1, T_2 之大圓. P_1, P_2 爲小圓之中心. 則 P_1T_1, P_2T_2 在 T_1T_2 之極 P 點相會. 今三角形 PP_1P_2 之二邊 PP_1 及 PP_2 爲 $90°-r_1$, $90°-r_2$. 但 r_1, r_2 爲兩小圓之半徑. 故依決定 PP_1, PP_2 之理. 得以決定 P 點之位置. 故引長 PP_1, PP_2 交小圓周於 T_1, T_2. 通過 T_1, T_2 畫大圓. 是卽所求之圓.

而此兩圓之公切圓. 若兩圓全在外時. 則可作兩對切圓. 其一對與連結兩圓中心之大圓周之引長上相交. 又一對內分其中心距離.

連結小圓中心之大圓周. 其引長部相會之點. 曰相似外心. 其內分點. 曰相似內心.

2. 兩圓中心連結爲弧.依相似中心而內分或外分之.則此等部分正弦之比.等於兩圓半徑正弦之比.

$$\frac{\sin r_1}{\sin \mathrm{OP}_1}=\frac{\sin r_2}{\sin \mathrm{OP}_2}=\sin \mathrm{P_1OT_1}.$$

此外分之式.而內分亦得同樣證明之.

3. 通過相似中心.引某大圓而截小圓.從其截點引半徑.則此兩小圓所生之角相等.

因 $\sin \mathrm{OP}_1 \sin \mathrm{P_1OB_1}=\sin r_1 \sin \mathrm{OB_1P_1}$,

及 $\sin \mathrm{OP}_2 \sin \mathrm{P_1OB_1}=\sin r_2 \sin \mathrm{P_2A_2B_2}$,

$\therefore\ \mathrm{OB_1P_1}=\mathrm{P_2A_2B_2}$,

結局. $\mathrm{P_1A_1B_1}=\mathrm{P_1B_1A_1}=\mathrm{P_2A_2B_2}$.

4. 有小圓與他之二小圓相切.則連結其切點之弧.必通過相似中心.

如前圖.切點爲 B_1, A_2.則引長 A_2B_1 之弧,通過相似中心 O.

今引長 A_2B_1.通過 O 點而交於 O_1.則

$$\sin \mathrm{O_1P_1} \sin \mathrm{P_1O_1B_1}=\sin r_1 \sin \mathrm{O_1B_1P_1},$$

$$\sin \mathrm{O_1P_2} \sin \mathrm{P_1O_1B_1}=\sin r_2 \sin \mathrm{OA_2P_2},$$

然 $\mathrm{O_1B_1P_1}=\mathrm{B_2A_2P_2}$,

故 $\sin \mathrm{O_1P_1} : \sin \mathrm{O_1P_2}=\sin r_1 : \sin r_2$,

又 $\sin \mathrm{OP_1} : \sin \mathrm{OP_2}=\sin r_1 : \sin r_2$.

故 O_1 點不可不與 O 點相合.

卽引長 A_2B_1 通過相似中心.

5. 有連結二個小圓中心之弧.試從相似之中心,而內分或外分之.

令內分點爲 O_1.則

$$\sin r_1 : \sin r_2 = \sin P_1O_1 : \sin P_2O_1,$$

又 $$\sin r_1 : \sin r_2 = \sin P_1O : \sin P_2O,$$

$$\therefore \quad \sin P_1O_1 : \sin P_2O_1 = \sin P_1O : \sin P_2O.$$

6. 通過相似中心之大圓,與二個小圓相交於 A_1, B_1, A_2, B_2, 四點.則 A_1 及 A_2 或 B_1 及 B_2 曰順相應. A_1 及 B_2 或 B_1 及 A_2 曰逆相應.

7. 通過二個小圓之相似中心.作二個大圓與小圓相交.則其逆相應之四點,在同一圓周上.

如前圖.作四邊形 $B_1A_2A'_2B'_1$ 考之. B_1 與 A_2; 及 A'_2 與 B'_1, 爲逆相應之點.而三角形 $P_1B_1B'_1$ 之相等角.以 x 表之.三角形 $P_2A_2A'_2$ 之相等角.以 y 表之.又 θ 記相等之角 P_1B_1O 及 $P_2A_2B_2$, ϕ 記 $P_1B'_1O$ 及 $P_2A'_2B'_2$.是向四邊形之角爲

$$BB_1A_2 = \pi - x - \theta, \qquad B_1B'_1A'_2 = \pi - (x - \phi),$$

$$\therefore \quad B_1' - B_1 = \theta + \phi = A'_2 - A_2, \text{ 或 } A_2 + B'_1 = A'_2 + B_1.$$

故四邊形 $A_2A'_2B_1B'_1$ 對角之一對與他之一對相等.而內接於圓,卽通過四點.

8. 試由前之定理.以求

$$\tan\tfrac{1}{2}OB_1 \tan\tfrac{1}{2}OA_2 = \tan\tfrac{1}{2}OB'_1 \tan\tfrac{1}{2}OA'_2 = \tan\tfrac{1}{2}OT_1 \tan\tfrac{1}{2}OT_2.$$

有外接於 $A_2A'_2B_1B'_1$ 之小圓.其中心爲 C.從 C 引 A_2B_1 之垂線 CM.又引 CB_1, CA_2 二半徑.此以 α 表之.

再令 $OC=\delta$, $OB_1=\rho$.則由 CB_1O 三角形.得

$$\cos\alpha = \cos\rho\cos\delta + \sin\rho\sin\delta\cos\theta,$$

然 $$\cos\rho = \frac{1-\tan^2\rho}{1+\tan^2\rho}; \quad \sin\rho = \frac{2\tan\frac{1}{2}\rho}{1+\tan^2\frac{1}{2}\rho},$$

$$\therefore \quad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{1}{2}\rho}{1+\tan^2\frac{1}{2}\rho}\cos\delta + \frac{2\tan\frac{1}{2}\rho}{1+\tan^2\frac{1}{2}\rho}\sin\delta\cos\theta,$$

$$\tan^2\tfrac{1}{2}\rho(\cos\alpha + \cos\delta) - 2\tan\tfrac{1}{2}\rho\sin\delta\cos\theta + \cos\alpha - \cos\delta = 0,$$

$$\therefore\quad tan\tfrac{1}{2}\rho\, tan\tfrac{1}{2}\rho'=\frac{\cos\alpha-\cos\delta}{\cos\alpha+\cos\delta}$$

$$=tan\tfrac{1}{2}(\delta-\alpha)\,tan\tfrac{1}{2}(\delta+\alpha)\,.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 113$$

但ρ'記引OA_2半徑之點與O點之距離OA_2.

同樣.知

$$tan\tfrac{1}{2}OB'_1\, tan\tfrac{1}{2}OA'_2=tan\tfrac{1}{2}(\delta-\alpha)\,tan\tfrac{1}{2}(\delta+\alpha)\,.$$

又外接於$T_1B_1A_2T_2$之四邊形.亦得作圓.故

$$tan\tfrac{1}{2}OB_1\, tan\tfrac{1}{2}OA_2=tan\tfrac{1}{2}OT_1\, tan\tfrac{1}{2}OT_2,$$

$$\therefore\quad tan\tfrac{1}{2}OB_1\, tan\tfrac{1}{2}OA_2=tan\tfrac{1}{2}OB'_1\, tan\tfrac{1}{2}OA'=tan\tfrac{1}{2}OT_1\, tan\tfrac{1}{2}OT_2.$$

9. 引長$B_1B'_1$, $A_2A'_2$相會於一點R.則

$$tan\tfrac{1}{2}RB_1\, tan\tfrac{1}{2}RB'_1=tan\tfrac{1}{2}RA_2\, tan\tfrac{1}{2}R_2A'_2.$$

試證之.

$B'_1B_1\,A'_1A_1$同在一圓周上.

由前題知

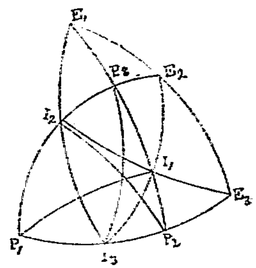
$$tan\tfrac{1}{2}RB_1\, tan\tfrac{1}{2}RB'_1=tan\tfrac{1}{2}RA_2\, tan\tfrac{1}{2}RA'_2.$$

故由R點引P_1, P_2小圓之兩切線相等.

而R點卽在小圓之根軸上.

10. 三個小圓之相似中心.共計六個.若有三個同在一圓周上.則此圓周曰相似軸.

令小圓之中心爲P_1, P_2, P_3.相似中心中之內分點爲I_1, I_2, I_3.又外分點爲E_1, E_2, E_3.則自小圓中心至分點距離之正弦之比,等於各小圓半徑之正弦之比.



$$\therefore\quad sin\,E_3P_1:sin\,E_3P_2=sin\,r_1:sin\,r_2,$$

又 $sin\,E_1P_2:sin\,E_1P_3=sin\,r_2:sin\,r_3,$

$sin E_2P_3 : sin E_2P_1 = sin r_3 : sin r_1,$

$\therefore \quad \boldsymbol{sin E_3P_1\ sin E_1P_2\ sin E_2P_3 = sin E_3P_2\ sin E_1P_3\ sin E_2P_1.}$ ……114

故依橫截線之定理.知同在一圓周上.

同樣.

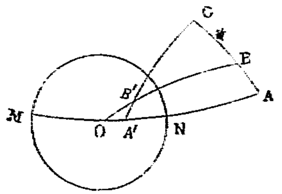
$I_2I_1E_3$; $I_3I_2E_1$, $I_3I_1E_2$ 等.亦同在一圓周上.

又由114式得之如次.

$[E_3, P_1P_2][E_1, P_2P_3][E_2, P_3P_1] = 1.$

倒　　形

11. 點之轉倒.爲二點A, A′至某點之半距離正切之積.等於某圓半徑之半之正切自乘.如此所定之A′.則關於A而曰倒形.曰與A爲轉倒.



例如A, A′點關於O圓.有次之關係.

$$tan\tfrac{1}{2}OA'\ tan\tfrac{1}{2}OA = tan^2\tfrac{1}{2}ON.$$

A′曰A之倒形.O爲中心之圓,曰倒形圓.其中心曰倒形中心.又曰原點.其半徑曰倒形半徑.

12. <u>某二點A.B之轉倒點爲A′, B′.則此四點在同一圓周上.</u>

命倒形之中心爲o,半徑爲α.則

$$tan\tfrac{1}{2}OA'\ tan\tfrac{1}{2}OA = tan^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$tan\tfrac{1}{2}OB'\ tan\tfrac{1}{2}OB = tan^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$\therefore \quad tan\tfrac{1}{2}OA'\ tan\tfrac{1}{2}OA = tan\tfrac{1}{2}OB'\ tan\tfrac{1}{2}OB.$

$\therefore$ 同在一圓周上.

13. 球面上之圓之倒形仍爲圓.

如第七節從相似中心至逆相應之點之距離.爲 OA′, OA. 則

$\tan\frac{1}{2}OA'\tan\frac{1}{2}OA=$常數.

故相似之中心.爲倒形之中心.選定適當之倒形半徑.此以 α 表之.則

$\tan^2\frac{1}{2}\alpha=\tan\frac{1}{2}OA'\tan\frac{1}{2}OA.$

A 點在某圓周上.則 A′ 爲倒形之點.而在他之圓周上.

14. 依前定理.關於二小圓之相似中心.若互爲轉倒.則倒形圓之半徑.爲次之方程式.

$\tan^2\frac{1}{2}\alpha=\tan\frac{1}{2}OA'\tan\frac{1}{2}OA.$

若有倒形圓之半徑及原點.則兩圓之交通切線轉倒切於圓之點.可決定之.

設 O 爲倒形圓之中心. P 爲 A 圓之中心. P′ 爲 A 圓之倒形圓 A′ 之中心.引弧 A′P′.作 $OA'P=OBP=\theta$.

令 $OP=\delta$, $O'P'=\delta'$, $PA=\gamma, P'A'=\gamma'$, $AOP=\phi$.

則

$$\frac{\sin\delta}{\sin\gamma}=\frac{\sin\delta'}{\sin\gamma'}=\frac{\sin\theta}{\sin\phi},$$

或 $$\frac{\tan\frac{1}{2}(\delta'+\gamma')}{\tan\frac{1}{2}(\delta'-\gamma')}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\delta+\gamma)}{\tan\frac{1}{2}(\delta-\gamma)}.$$

又當嵌於三角形 OP′A′, OPB. 由納披氏之比例式.得

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(\delta'+\gamma')}{\tan\frac{1}{2}(\delta+\gamma)}=\frac{\tan\frac{1}{2}OA'}{\tan\frac{1}{2}OB},$$

然 $\tan\frac{1}{2}OA\tan\frac{1}{2}OA'=\tan^2\frac{1}{2}\alpha,$

而 $\tan\frac{1}{2}OA\tan OB=\tan\frac{1}{2}(\delta+\gamma)\tan\frac{1}{2}(\delta-\gamma),$

$$\therefore\quad \tan\frac{1}{2}(\delta'+\gamma')=\frac{\tan^2\frac{1}{2}\alpha}{\tan\frac{1}{2}(\delta-\gamma)},$$

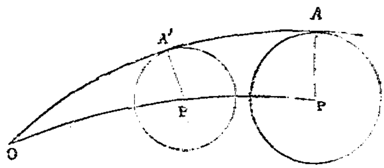
又 $\tan\frac{1}{2}(\delta'-r')=\dfrac{\tan^2\frac{1}{2}a}{\tan\frac{1}{2}(\delta+r)}$,

由此和及差.決定δ',γ'如次.

$$\tan\gamma'=\frac{\sin^2a\sin\gamma}{(1+\cos^2a)\cos\gamma-2\cos a\cos\delta}=\frac{\sin^2a\tan\gamma}{1-2\cos a\sec\gamma+\cos^2a},$$

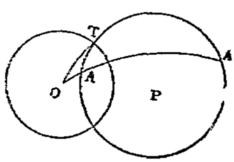
$$\tan\delta'=\frac{-\sin^2a\tan\delta}{(1+\cos^2a)\cos\delta-2\cos\delta\cos\gamma}=\frac{-\sin^2a\tan\delta}{1-2\cos a\sec\delta+\cos^2a}.$$

就上式之γ.δ以決定γ,δ.故定P′點,而知A′點在此圓周上.



15. 圓之倒形,各為自身之圓.

某點O為倒形圓之中心.直角交定圓而作圓.從此倒形圓之中心引大圓弧.與定圓出會於A、A′.然至此直交圓相關.而A,A′互為轉倒.因



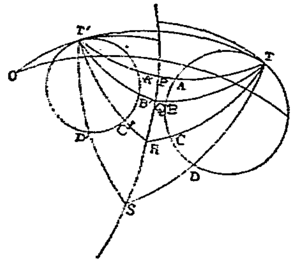
$$\tan^2\frac{1}{2}OT=\tan\frac{1}{2}OA'\tan\frac{1}{2}OA.$$

故A′為A之倒形.

而此圓之倒形.同為此圓.

16. 一圓周上之四點A, B, C, D之非調和比,等於轉倒圓之轉倒點A′, B′, C′, D′之非調和比.

從倒形圓之中心O.引一圓及轉倒圓之共通切線.其切點為T, T′.則T, A, T′, A′同在一圓周上.引長TA, T′A′.在兩圓之根



軸上相會．同樣．TB, T′B′; TC, T′C′; TD, T′D′ 等．亦同在一根軸上相會．

故 〔T, ABCD〕〔T′, A′B′C′D′〕之非調和比相等．

證明如次．

從 T 向 PS 之垂弧爲 p, 從 T′ 向 PS 之垂弧爲 p'. 則

$$\sin PT \sin TQ \sin PTQ = \sin PQ \sin p,$$

$$\sin RT \sin TS \sin RTS = \sin RS \sin p,$$

$$\sin PT \sin TR \sin PTR = \sin PR \sin p,$$

$$\sin QT \sin TS \sin QTS = \sin QS \sin p,$$

$$\therefore \quad \frac{\sin PTQ \sin RTS}{\sin PTR \sin QTS} = \frac{\sin PQ \sin RS}{\sin PR \sin QS},$$

同樣．

$$\frac{\sin PQ \sin RS}{\sin PR \sin QS} = \frac{\sin PT'Q \sin RT'S}{\sin PT'R \sin QT'S},$$

$$\therefore \quad \frac{\sin PTQ \sin RTS}{\sin PTR \sin QTS} = \frac{\sin PT'Q \sin RT'S}{\sin PT'R \sin QT'S}.$$

17. 二圓之半徑爲 r_1, r_2. 共通切線之切點間之距離爲 t. 其轉倒圓之半徑爲 r_1', r_2'. 共通切線之切點間之距離爲 t'. 則有次之關係式.

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} t}{\tan r_1 \tan r_2} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} t'}{\tan r_1' \tan r_2'} = \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha.$$

但 α 爲兩圓之中心距離之角.

令 δ 爲兩圓之中心距離．則

$$\cos\delta = \cos r_1 \cos r_2 + \sin r_1 \sin r_2 \cos\alpha,$$

$$\cos\delta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-r_1\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-r_2\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-r_1\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-r_2\right)\cos t$$

$$=\sin r_1\sin r_2+\cos r_1\cos r_2\cos t,$$

$$\therefore\quad 1-\cos t=\tan r_1\tan r_2(1-\cos\alpha),$$

即 $$\frac{\sin^2\frac{1}{2}t}{\tan r_1\tan r_2}=\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

令兩圓之交對於中心距離之角.與其轉倒圓之交之角相等.故得次式.

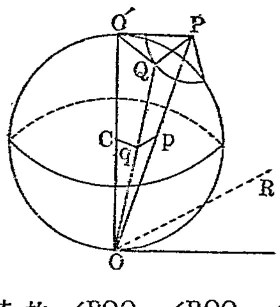
$$\frac{\sin^2\frac{1}{2}t'}{\tan r'_1\tan r'_2}=\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

若兩圓不相交.則無實點而為虛點.可以另外討論之.茲略.

射　影

18. 球面上曲線之立體平畫之射影.此曲線射影於大圓之平面上.此大圓之極為射影之中心.如是則射影中心,在球之表面上.而射影之表面.在通過球之中心且與射影中心之切平面平行之平面上.

19. 某大圓或小圓之立體平畫術射影,為通過射影中心之圓.



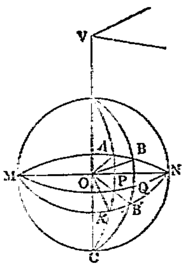
有圓之某點Q.於P之周圍.作切於球之圓錐體.則O為射影之中心.p,q為P,Q之射影.平面OPQ為射影平面.於pq線相會.又於O點引pq之平行線OR.作含OR之切平面.則OR, PQ為球之切線.而OQ為連結切點之弧之弦.故 ∠PQO＝∠ROQ＝∠QqP.故三角形OPQ, Opq.一角共有.其他之一角,互為補角.

∴　$pq : \mathrm{PQ} = \mathrm{O}p : \mathrm{OP}$,

∴　$pq = \mathrm{PQ}\dfrac{\mathrm{O}p}{\mathrm{OP}} =$ 常數.

故該射影爲中心 p 半徑 pq 之圓.

20. 有保持某角二直線.從其角之頂點與其射影之中心相連,爲直線.保角平面與射影平面.於反對方向成一樣之傾度.而此二平面之交,與前之直線直交.則所得夾角二直線之射影,等於所設之角.



所設之角之頂點,與其射影中心相連,成直線.此直線與射影平面 MA′B′N 相交於 O. 以 O 爲中心, OC 爲半徑.畫球.通過 O. 引 OA, OB. 與夾 V 角之二邊平行.此射影則爲 OA′, OB′. 今通過 MN, 且以 C 爲極.作大圓 MPN. 則由問題之性質.平面 ABN, A′B′N. 與 OV 成一樣之傾度.又 PQN 亦爲一樣傾度.而含 VC 之大圓.直交於 PQN. 故 $\angle\mathrm{ANP} = \angle\mathrm{A'NP}$, 即 $\mathrm{AP} = \mathrm{A'P}$, 又 $\mathrm{AN} = \mathrm{A'N}$, 及 $\mathrm{BN} = \mathrm{B'N}$,

∴　$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$,

∴　所設之角 $\mathrm{V} = \mathrm{AOB} = \mathrm{B'OA'}$.

21. 球面上二曲線之交角,與其相應當射影角相等.

如第 19 節之圖.Q 爲二曲線之交點.於 Q 點引曲線之二切線.此切線之交角.即測曲線交角之角.而 Q 點切線之平面.爲球之切平面.此平面與 O 之切平面出會.故射影之平面直交於 OQ. 因二切平面之交.垂直於 OQ 故也.含 OQ, C 之平面,與含所設之角之平面.在反對之側.成一樣之傾度.由是依 20 節.知其相等.

22. 球面上曲線之立體平畫法之射影.爲以原點爲射影中心之倒形.

如第19節之圖.Q爲曲線中之某點.連結O′點.又Q之射影連結C點.則

$\angle OCq=\angle OQO'=R\angle,$

故 $CO'Qq$ 四邊形.內接於圓.

$\therefore$ $OQ.Oq=OO'.OC=2r_2.$

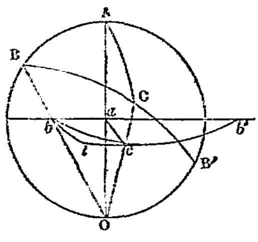
故 q 爲Q之倒形.而倒形之半徑爲 $r\sqrt{2}.$

23. 球面三角形之立體平畫法射影ABC,爲三角形.O爲從A引直徑至他端之點.則O爲射影之中心.邊AB, AC之射影爲二直線 ab, ac. BC之射影爲 bc. 故從 b, c 引此圓之切線 bt, ct. 則

bac, tba, tca 之角,等於A. B, C之角.

故引弦 bc, $b'c$. 則 $A+B+C-\pi=2tbc=2bb'c.$

故 $bb'c$ 等於球面三角形ABC之球面過剩之半.



24. 依前定理.三角形 abc. $ab'c$ 之項.得以球面三角形ABC之項表之.

取球之半徑爲單位.則

$$ab=\tan AOB=\tan\tfrac{1}{2}c, \quad\cdots\cdots 115$$

$$ac=\tan AOC=\tan\tfrac{1}{2}b, \quad\cdots\cdots 116$$

又三角形 BOC, bOc 爲相似形.

$$\therefore\quad bc=\mathrm{BC}\frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{OC}}=\mathrm{BC}\frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}}=\frac{2\mathrm{BC}}{\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}},$$

$$\therefore\quad bc=\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.\qquad\cdots\cdots 117$$

又 ac 再與 bcb' 圓出會於 c'. 則 c' 爲 C 之射影. C 爲直徑之對點. 角 BOB′ 爲直角. 故

$$ab'=\tan\mathrm{AOB}'=\cot\tfrac{1}{2}c,\qquad ac'=\tan\mathrm{AOC}'=\cot\tfrac{1}{2}b,$$

$$\therefore\quad bb'=ab+ab'=2\csc c,\qquad cc'=ac+ac'=2\csc b,$$

$$\therefore\quad b'c=\frac{2\mathrm{B'C}}{\mathrm{OB'}.\mathrm{OC}}=\frac{\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}.$$

25. 球面四角形面積之求法.

球面四角形爲 ABCD. 其邊 AB, BC, CD, DA. 以 a, b, c, d 表之. 對角線 AC, BD. 以 δ, δ' 表之. 先求此四角形之立體平畫術之射影. 則通過 A 引直徑. 此端爲 O. 是爲射影之中心. 射影爲二直線與二圓弧. 就 bc 圓弧引 bt, ct 切線. 就 cd 圓弧引 ct', dt' 切線. 則

$$\mathrm{E}=\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}+\mathrm{D}-2\pi=2tcb+2t'cd+2bc'd.$$

而 c 及 c' 爲 BC, CD 射影圓之交點.

故三角形 $bc'd$ 爲

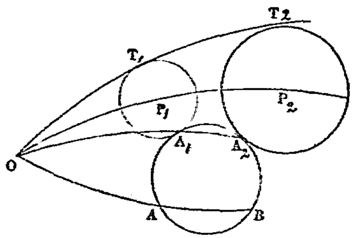
$$\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{E}=\sin^2\frac{1}{2}\widehat{bcd}=\frac{(bd+bc'-dc')(bd+dc'-bc')}{4bc'.dc'},$$

$$\text{而}\quad bd=\frac{\sin\frac{1}{2}\delta'}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d},\quad bc=\frac{\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}\delta'},\quad d'c=\frac{\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}d\sin\frac{1}{2}\delta},$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{E}=&(\sin\tfrac{1}{2}\delta\sin\tfrac{1}{2}\delta'+\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c-\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d)\\&\times(\sin\tfrac{1}{2}\delta\sin\tfrac{1}{2}\delta'-\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}c+\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}d)\\&\div(4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}d).\end{aligned}$$

問　題　九

1. 通過一定點.且切於二定圓.畫圓.



連結相似之中心O與A,且引長至B.則

$$tan\tfrac{1}{2}OA\ tan\tfrac{1}{2}OB=tan\tfrac{1}{2}OT_1\ tan\tfrac{1}{2}OT_2.$$

如是決定B點之位置.則切A,B二點及P_1圓畫圓.卽所求之圓.因

$$tan\tfrac{1}{2}OA\ tan\tfrac{1}{2}OB=tan\tfrac{1}{2}OA_1\ tan\tfrac{1}{2}OA_2=tan\tfrac{1}{2}OT_1\ tan\tfrac{1}{2}OT_2.$$

故A_2點在P_2圓周上.卽切於兩圓之圓.

2. 有小圓.其中心爲O.就其直徑MN之對倒形爲A,A′.則

$$\frac{sin\,OA}{sin\,OA'}=\frac{sin^2\frac{1}{2}MA}{sin^2\frac{1}{2}MA'}=\frac{sin^2\frac{1}{2}NA}{sin^2\frac{1}{2}NA'}.$$ 試證之.

$$\because\ \frac{tan\frac{1}{2}OA}{tan\frac{1}{2}OM}=\frac{tan\frac{1}{2}OM}{tan\frac{1}{2}OA'}=\frac{tan\frac{1}{2}OA\pm tan\frac{1}{2}OM}{tan\frac{1}{2}OM\pm tan\frac{1}{2}OA'},$$

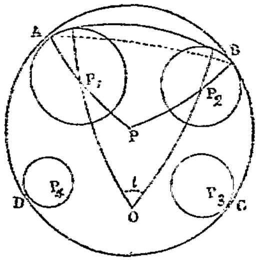
$$\therefore\ \frac{tan\frac{1}{2}OA}{tan\frac{1}{2}OA'}=\left(\frac{tan\frac{1}{2}OA\pm tan\frac{1}{2}OM}{tan\frac{1}{2}OM\pm tan\frac{1}{2}OA'}\right)^2=\frac{sin^2\frac{1}{2}(OA\pm OM)}{sin^2\frac{1}{2}(OM\pm OA')}$$

$$=\frac{sin^2\frac{1}{2}MA}{sin^2\frac{1}{2}MA'},$$

或

$$=\frac{sin^2\frac{1}{2}AN}{sin^2\frac{1}{2}A'N}.$$

3. 設有四個圓.均切於第五圓.試求此四個圓之共通關係式.



P_1, P_2, P_3, P_4 為四圓之中心. r_1, r_2, r_3, r_4 為其半徑. 又此四圓所切之圓之中心為 P. 其半徑為 R. 其切點為 A, B, C, D. 於三角形 P_1PP_2. 令 $P_1P_2=\delta_{1\cdot 2}$, 則

$$sin^2\tfrac{1}{2}P=\frac{cos(r_1-r_2)-cos\,\delta_{1\cdot 2}}{2sin(R-r_1)\,sin(R-r_2)},$$

$$\therefore\quad sin\tfrac{1}{2}AB=sin\,R\sqrt{\frac{cos(r_1-r_2)-cos\,\delta_{1\cdot 2}}{2sin(R-r_1)\,sin(R-r_2)}}.$$

又至圓 P_1, P_2 引共通切線. 此以 $t_{1\cdot 2}$ 記之. 則由三角形 P_1OP. 得

$$sin\tfrac{1}{2}t_{1\cdot 2}=sin\tfrac{1}{2}O=\sqrt{\frac{cos(r_1-r_2)-cos\,\delta_{1\cdot 2}}{2cos\,r_1\,cos\,r_2}},$$

$$\therefore\quad sin\tfrac{1}{2}AB=sin\tfrac{1}{2}t_{1\cdot 2}\,sin\,R\sqrt{\frac{cos\,r_1\,cos\,r_2}{sin(R-r_1)\,sin(R-r_2)}},$$

今四角形 ABCD 內接於圓. 故

$$sin\tfrac{1}{2}BC\,sin\tfrac{1}{2}AD+sin\tfrac{1}{2}CA\,sin\tfrac{1}{2}BD+sin\tfrac{1}{2}AB\,sin\tfrac{1}{2}CD=0,$$

以此代入之. 由是知

$$sin\tfrac{1}{2}t_{2\cdot 3}\,sin\tfrac{1}{2}t_{1\cdot 4}+sin\tfrac{1}{2}t_{3\cdot 1}\,sin\tfrac{1}{2}t_{2\cdot 4}+sin\tfrac{1}{2}t_{1\cdot 2}\,sin\tfrac{1}{2}t_{3\cdot 4}=0.$$

4. 試由射影導球面三角法之根原式.

如第23節之圖. 由三角形 abc. 得

$$(bc)^2=(ca)^2+(ab)^2-2(ca)(ab)\cos A$$

以此代入第24節之公式中. 則

$$\left(\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\right)^2=\left(\frac{\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}b}\right)^2+\left(\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}c}\right)^2-2\frac{\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\cos A,$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}a=\sin^2\tfrac{1}{2}b\cos^2\tfrac{1}{2}c+\sin^2\tfrac{1}{2}c\cos^2\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}\sin b\sin c\cos A,$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\cos a}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\cos b\cos c}{2}-\frac{\sin b\sin c\cos A}{2},$$

$$\therefore\quad \cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

5. 試依射影證明次式.

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

如第23節之圖. bcb' 圓之直徑爲 d. 對於 bb' 之圓周角爲 tbb'. 卽 B 角. 而

$$bb'=d\sin B;\quad cc'=d\sin C,$$

$$\therefore\quad \frac{\sin B}{\sin C}=\frac{bb'}{cc'}=\frac{\sin b}{\sin c}.$$

6. 試依射影求納披氏及德蘭布魯氏之比例式.

如第23節之圖. 由 abc 三角形. 得

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(\hat{b}-\hat{c})}{\cot\frac{1}{2}\hat{a}}=\frac{ac-ab}{ac+ab},$$

以此代入第24節之公式中. 則

$$\tan\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cot\tfrac{1}{2}A,$$

$$\because\quad \frac{\tan\frac{1}{2}(\hat{b}+tbc-\hat{c}-tcb)}{\cot\frac{1}{2}A}=\frac{\tan\frac{1}{2}AC-\tan\frac{1}{2}AB}{\tan\frac{1}{2}AC+\tan\frac{1}{2}AB},$$

$$\therefore \quad \tan\tfrac{1}{2}(B-C)=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c)}\cot\tfrac{1}{2}A.$$

又由平面三角法.

$$a=\frac{(b+c)\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{(b-c)\sin A}{\sin B\sin C},$$

$$a=\frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}=\frac{(b-c)\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}.$$

此公式.恰當第23節之圖.故由三角形abc.可直接求球面三角形ABC.即

$$\sin\tfrac{1}{2}a=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}.$$

7. 試依射影以求$\sin\frac{1}{2}E$.而決定喀格約里氏之定理.

如第23節之圖.由三角形$ab'c$.得

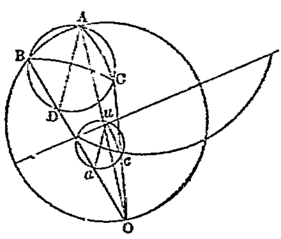
$$\frac{\sin\hat{b}}{\sin\hat{a}}=\frac{ac}{b'c},$$

又 $\sin\tfrac{1}{2}E=\sin\hat{a}\,\dfrac{ac}{b'c}=\dfrac{ac}{b'c}\sin A=\dfrac{\tan\frac{1}{2}b}{\dfrac{\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}}\sin A$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}\sin A.$$

8. 試依射影.求球面三角形外接圓之半徑R.表示如次式.

$$\tan R=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{n}.$$



從A引直徑.其他端爲O.爲射影之中心.爲直角於此直徑而畫大圓.爲射影之平面.今命外接於ABC之圓之直徑爲AD.其射影爲外接於abc三角形之圓之直徑.

故 $ad=\tan R$.

又由三角形 abc. 得

$$2R=\frac{2abc}{4\Delta},$$

$$\therefore\quad \tan R=\frac{2\dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\tan\frac{1}{2}b\tan\frac{1}{2}c}{\dfrac{n}{\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{c}{2}}}=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{n},$$

但 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

此以球面三角形 ABC 之邊之值代之. 則

$$s=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}+\frac{\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}b}+\frac{\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b+c)\cos\frac{1}{4}(b+c-a)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

同樣.

$$s-a=\frac{\cos 14(a+b+c)\sin 14(b+c-a)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

$$s-c=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c-\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{4}(a+b-c)\cos\frac{1}{4}(a+c-b)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

$$s-b=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}b-\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}a+\sin\frac{1}{2}(c-b)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\right)=\frac{\sin\frac{1}{4}(a+c-b)\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\therefore\quad \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{\{2\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)\cdot 2\sin\tfrac{1}{4}(b+c-a)\cos\tfrac{1}{4}(b+c-a)}$$

$$\times 2\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c)\cdot 2\sin\tfrac{1}{4}(c+a-b)\cos\tfrac{1}{4}(c+a-b)\}$$

$$\div 4\cos^2\tfrac{1}{2}b\cos^2\tfrac{1}{2}c$$

$$=\frac{1}{4\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c}\sqrt{\{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)}$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(c+a-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)\}$$

$$=\frac{1}{4\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c}\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}},$$

$$\therefore\quad \tan R=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c}\div\frac{n}{\cos^2\frac{1}{2}b\cos^2\frac{1}{2}c}=\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}{n}。$$

第十編

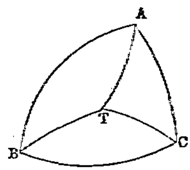
引球面上定點之弧

1. 本編論從球面上之某點,至同球面之定點,所引弧度,種種相關之定理.

2. 有三角形ABC.其各邊爲象限.而T爲球面上之一點.則

$$\cos^2 TA+\cos^2 TB+\cos^2 TC=1.$$

試證之.



$$\cos TA=\cos AB\cos TB+\sin AB\sin TB\cos TBA=\sin TB\cos TBA,$$

同樣. $\cos TC=\sin TB\cos TBC=\sin TB\sin TBA.$

此因各邊之對角爲直角故也.

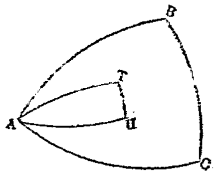
以上二式.平方之相加.則.

$$\cos^2 TA+\cos^2 TC=\sin^2 TB=1-\cos^2 TB,$$

$$\therefore\quad \cos^2 TA+\cos^2 TB+\cos^2 TC=1.$$

3. 有三角形ABC.其三邊各爲象限.而T,U爲球面上之二點.則

$$\cos TU=\cos TA\cos UA+\cos TB\cos UB+\cos TC\cos UC.$$



$\because\quad \cos TU = \cos TA \cos UA + \sin TA \sin UA \cos TAU,$

而 $\cos TAU = \cos(BAU - BAT) = \cos BAU \cos BAT + \sin BAU \sin BAT$

$= \cos BAU \cos BAT + \cos CAU \cos CAT,$

$\therefore\quad \cos TU = \cos TA \cos UA$

$+ \sin TA \sin UA(\cos BAU \cos BAT + \cos CAU \cos CAT),$

而 $\cos TB = \sin TA \cos BAT,\qquad \cos UB = \sin UA \cos BAU,$

$\cos TC = \sin TA \cos CAT,\qquad \cos UC = \sin UA \cos CAU,$

$\therefore\quad \cos TU = \cos TA \cos UA + \cos TB \cos UB + \cos TC \cos UC.$

4. 設 $H_1, H_2, H_3, \cdots$ 爲球面上之定點. T 爲任意一點. 從定點至任意點連結弧之餘弦和. 以 Σ 表之. 則

$$\Sigma = \cos TH_1 + \cos TH_2 + \cos TH_3 + \cdots.$$

凡球面上之象限所作之定三角形. 其 A, B, C 與 T 所結弧之餘弦. 以 λ, μ, ν 記之. A, B, C 與 H_1 所結弧之餘弦. 以 l_1, m_1, n_1 記之. 以下仿此. 則由前節得

$$\Sigma = l_1\lambda + m_1\mu + n_1\nu + l_2\lambda + m_2\mu + n_2\nu + \cdots$$

$$= P\lambda + Q\mu + R\nu,$$

但 $P = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots,$

$Q = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots,$

$R = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots,$

5. 就前節之結果.

$$G=\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)},$$

及 $\cos\alpha=P/G,\quad \cos\beta=Q/G,\quad \cos\gamma=R/G.$

則得 $\Sigma=G(\lambda\cos\alpha+\mu\cos\beta+\nu\cos\gamma)$.

$\because\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, 故 α,β,γ 各為A, B, C連結球面上某點之距離.命某一點為U.由是得記之如次.

$$\cos TU=\lambda\cos\alpha+\mu\cos\beta+\nu\cos\gamma,$$

$$\therefore\ \Sigma=G\cos TU.\cdots\cdots\cdots 118$$

此T無論在何位置.由種種定點與T連結弧之餘弦和.得依T與某點U所結弧之餘弦而變動.

G本為正負兩可之量.但就便宜上假定為正.

6. 外接正多面體作球.從球表面上一點.至立體角頂連結為弧.則各弧之餘弦之和為零.

由前節第118式.得 $\Sigma=G\cos TU$.

但Σ為球面上某點至立體角頂所引弧之餘弦之和.

若$G\neq 0$.則Σ當在所設T之一位置.而T與U相合時.其値為最大.然依對稱之理.當在同値t之他位置上.例如四面體有四表面.故在所設位置相對稱之其他三個位置上.故G不可不為0.故自立體角頂與T連結弧之餘弦之和.就凡T之一切位置論.當為零.

又 $G=0$,.導得P, Q, R各為零.此屬例外.

7. 設$H_1, H_2, H_3\cdots$為球面上之若干定點.T為其任意點.自T至各定點$H_1, H_2, H_3, \cdots$連結為弧.各弧餘弦之平方之和.以Σ表之.則

$$\Sigma=\cos^2TH_1+\cos^2TH_2+\cos^2TH_3+\cdots.$$

凡球面上各邊爲象限所作之定三角形爲ABC. 其角頂A, B, C與T連結弧之餘弦爲λ, μ, ν. H_1與A, B, C連結之弧之餘弦爲l_1, m_1, n_1. 以下仿此. 則

$$\Sigma=(l_1\lambda+m_1\mu+n_1\nu)^2+(l_2\lambda+m_2\mu+n_2\nu)^2+\cdots,$$

此右邊各各展開. 則

$$\Sigma=P\lambda^2+Q\mu^2+R\nu^2+2p\mu\nu+2q\nu\lambda+2r\lambda\mu,$$

但 $P=l_1{}^2+l_2{}^2+l_3{}^2+\cdots,$

$$p=m_1 n_1+m_2 n_2+m_3 n_3+\cdots.$$

其他Q, q及R, r亦同樣.

今選消失p, q, r之三角形ABC之某位置. 則

$$\Sigma=P\lambda^2+Q\mu^2+R\nu^2.$$

Σ常爲有限之正數量. 故Σ當有最大值之T之位置.

假定此位置爲A. 若有多數. 則假定其中之一.

T之位置爲A. 則μ, ν各爲零. λ等於1, Σ等於P.

故T得在任何之位置.

$$P\not<P\lambda^2+Q\mu^2+R\nu^2+2p\mu\nu+2q\nu\lambda+2r\lambda\mu,$$

即 $P(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)\not<P\lambda^2+Q\mu^2+R\nu^2+2p\mu\nu+2q\nu\lambda+2\nu\lambda\mu,$

$\therefore\quad (P-Q)\mu^2+(P-R)\nu^2\not<2p\mu\nu+2q\nu\lambda+2r\lambda\mu.$

今令$\nu=0$. 則T在象限弧AB之上.

而在T之任何位置. 亦爲

$$(P-Q)\mu^2\not<2r\lambda\mu,$$

$\therefore\quad P-Q\not<2r\dfrac{\lambda}{\mu}.$

然$\dfrac{\lambda}{\mu}$爲$\dfrac{\cos TA}{\cos TB}$. 即等於$\tan TB$. 而與T之適當值得如意選定較大之數值. 故在某形勢之下. $P-Q$比$2r\lambda/\mu$小. 但$\tan TB$. 得取正或負量. 故r不可不爲零.

同樣. q 亦可爲零.

故就 A 之特別値言. 不問 T 在何位置.

$$\Sigma=P\lambda^2+Q\mu^2+R\nu^2+2p\mu\nu.$$

又選定 B 之位置. T 與 B 合. 則 Σ 之値, 比 A 爲極之大圓周中任意一點更大. 其 λ, ν 爲零, 及 μ 等於 1, 而 Σ 等於 Q.

次於 A 爲極之大圓周中任意取一點. 其 λ 爲零. 則

$$Q \nless Q\mu^2+R\nu^2+2p\mu\nu, \quad Q(\mu^2+\nu^2) \nless Q\mu^2+R\nu^2+2p\mu\nu,$$

$$\therefore \quad Q-R \nless 2p\frac{\mu}{\nu}.$$

故與前同理. $p=0$.

故就三角形 ABC 之某位置言. 任意取 T 之位置. 常可滿足次式.

$$\Sigma=P\lambda^2+Q\mu^2+R\nu^2.$$

8. 有 $\Sigma=P\lambda^2+Q\mu^2+R\nu^2$. 其 R 得以 Σ 所有之最小値顯之.

$$\Sigma=P\lambda^2+Q\mu^2+R(1-\lambda^2-\mu^2)=(P-R)\lambda^2+(Q-R)\mu^2+R.$$

由假設知 $P-R$, $Q-R$. 任何亦爲正.

故 Σ 不能比 R 小.

問　題　十

1. 從球面上之某點, 至三角形 ABC 之各邊, 引垂線 x, y, z. 又由此點連結各角頂. 則其關係式如何.

從某點 P 向三角形 ABC 之各點, 引弧線 α, β, γ. 則得次式.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b & \cos\alpha \\ \cos c & 1 & \cos a & \cos\beta \\ \cos b & \cos a & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}=0.$$

換此三角形爲極三角形.則各邊爲 $\pi-A, \pi-B, \pi-C$. 而

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B & \sin x \\ \cos C & -1 & \cos A & \sin y \\ \cos B & \cos A & -1 & \sin z \\ \sin x & \sin y & \sin z & -1 \end{vmatrix}=0.$$

而從極三角形之各點向某點之距離之餘弦,等於從某點至原三角形相應邊所作垂線之正弦.故 $\sin^2 x$ 之係數.爲 $\sin^2 A$. 而 $\sin y \sin z$ 之係數.爲 $2(\cos A+\cos B\cos C)$. 即 $2\sin B\sin C\cos a$.

$$\therefore \quad \Sigma\sin^2 A\sin^2 x+2\Sigma\sin B\sin C\cos a\sin y\sin z$$

$$=-\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix}=4N^2.$$

以 N^2 除之.得

$$\frac{\sin A}{N}=\frac{\sin a}{n}\cdots,$$

從而得

$$\Sigma\sin^2 a\sin^2 x+2\Sigma\sin b\sin c\cos a\sin y\sin z=4n^2.$$

2. 有三個小圓.以等角截之.則其截圓中心之軌跡爲大圓.

令動圓中心與定圓中心之距離.爲 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. 圓之半徑爲 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. 動圓之半徑爲 ρ. 則

$$\cos\delta_1=\cos\rho\cos\gamma_1+\sin\rho\sin\gamma_1\cos\alpha,$$

$$\cos\delta_2=\cos\rho\cos\gamma_2+\sin\rho\sin\gamma_2\cos\alpha,$$

$$\cos\delta_3=\cos\rho\cos\gamma_3+\sin\rho\sin\gamma_3\cos\alpha,$$

從此消去 $\cos\rho$, $\sin\rho\cos\alpha$. 則

$$\begin{vmatrix} \cos\delta_1 & \cos\delta_2 & \cos\delta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \\ \sin\gamma_1 & \sin\gamma_2 & \sin\gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $$\cos\delta_1\sin(\gamma_2-\gamma_3)+\cos\delta_2\sin(\gamma_3-\gamma_1)+\cos\delta_3\sin(\gamma_1-\gamma_2)=0.$$

此方程式爲大圓之方程式.

故動圓中心之軌跡爲大圓.

第 十 一 編

球面三角形之真數解法

1. 本編示球面三角形之真數解法.最初舉直角三角形之解法.其後推斜角三角形之解法.

直 角 三 角 形

2. 有 $a=37°\,48'\,12''$, $b=59°\,44'\,16''$,

$C=90°$. 試求 c.

由公式 $\cos c=\cos b\cos a$. 得

$$\log\cos c=\log\cos b+\log\cos a,$$

$$L\cos c+10=L\cos b+L\cos a,$$

$$L\cos b=9.8976927,$$

$$L\cos a=9.7023945,$$

$$L\cos c+10=19.6000872,$$

$$\therefore\ e=66°\,32'\,6''.$$

3. 試求前題之 A.

公式 $\cot A=\cot a\sin b$,

$$\therefore\ L\cot A+10=L\cot a+L\sin b,$$

$$L\cot a=10.1102655,$$

$$L\sin b=9.9363770,$$

$$L\cot A+10=20.0466425,$$

$$\therefore\ A=41°\,55'\,45''.$$

4. 有 $A=53°32'45''$,　$c=98°14'24''$,　$C=90°$.

試求 a.

公式 $\sin a=\sin c\sin A$,

$$L\sin a+10=L\sin c+L\sin A,$$

$$L\sin c=9.9954932,$$

$$L\sin A=\underline{9.9162323},$$

$$L\sin a+10=19.9117255,$$

$\therefore$ $a=54°41'35''$.

5. 試由前題求 B.

公式 $\cot B=\cos c\tan A$,

本式之 $\cos c$ 爲負. 故 $\cot B$ 亦爲負. B 比直角大. 而 $\cos c$ 之數值. 全與 $\cos 81°45'36''$ 同.

故 $L\cot(180°-B)+10=L\cos(180°-c)+L\tan A$,

$\therefore$ $L\cos(180°-c)=9.1563065$,

$$L\tan A=\underline{10.1636102},$$

$$L\cot(180°-B)+10=19.3199167,$$

$180°-B=78°12'4''$,　$B=101°47'56''$.

6. 有 $A=46°15'25''$,　$C=90°$,　$a=42°18'45''$.

試求 c.

公式 $\sin c=\sin a/\sin A$,

$$L\sin c=10+L\sin a-L\sin A,$$

$\therefore$ $10+L\sin a=19.8281272$,

$$L\sin A=\underline{9.8588065},$$

$$L\sin c=9.9693207,$$

$\therefore$ $c=68°42'59''$ 或 $111°17'1''$.

7. 試由前題求 b,

公式 $\sin b = \tan a \cot \mathrm{A}$,

$$\mathrm{L}\sin b + 10 = \mathrm{L}\tan a + \mathrm{L}\cot \mathrm{A},$$

$$\mathrm{L}\tan a = 9.9591983,$$

$$\mathrm{L}\cot \mathrm{A} = 9.9809389,$$

$$\mathrm{L}\sin b + 10 = 19.9401372,$$

$\therefore\ b = 60°\,36'\,10''$ 或 $119°\,23'\,50''$.

8. 試由第6題求 B.

公式 $\sin \mathrm{B} = \cos \mathrm{A} / \cos a$,

$$\mathrm{L}\sin \mathrm{B} = 10 + \mathrm{L}\cos \mathrm{A} - \mathrm{L}\cos a,$$

$\therefore$ $\mathrm{L}\cos \mathrm{A} + 10 = 19.8397454,$

$$\mathrm{L}\cos a = 9.8689289,$$

$$\mathrm{L}\sin \mathrm{B} = 9.9708165,$$

$\therefore\ \mathrm{B} = 69°\,13'\,47''$ 或 $110°\,46'\,13''$.

斜角三角形

9. 設 $a = 70°\,14'\,20''$, $b = 49°\,24'\,10''$, $c = 38°\,46'\,10''$.

試解此三角形.

公式 $\tan \frac{1}{2}\mathrm{A} = \sqrt{\left\{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}\right\}}$,

$$\mathrm{L}\tan \tfrac{1}{2}\mathrm{A} = 10 + \tfrac{1}{2}\{\mathrm{L}\sin(s-b) + \mathrm{L}\sin(s-c) - \mathrm{L}\sin s - \mathrm{L}\sin(s-a)\},$$

而 $s = 79°\,12'\,20''$, $s-a = 8°\,58'$,

$s-b = 29°\,48'\,10''$, $s-c = 40°\,26'\,10''$,

$$L\sin(s-b)=9.6963704,$$
$$L\sin(s-c)=9.8119768,$$
$$19.5083472,$$
$$L\sin s=9.9922465,$$
$$L\sin(s-a)=9.1927342,$$
$$19.1849807,$$
$$\therefore \quad 19.5083472,$$
$$19.1849807,$$
$$2)\overline{.3233665},$$
$$L\tan\tfrac{1}{2}A-10=.1616832,$$
$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}A=55°\,25'\,38'', \qquad \mathbf{A=110°\,51'\,16''.}$$

同樣可以求得 B.

$$L\sin(s-a)=9.1927342,$$
$$L\sin(s-c)=9.8119768,$$
$$19.0047110,$$
$$L\sin s=9.9922465,$$
$$L\sin(s-b)=9.6963704,$$
$$19.6886169,$$
$$\therefore \quad 19.0047110,$$
$$19.6886169,$$
$$2)\overline{\bar{1}.3160941},$$
$$L\sin\tfrac{1}{2}B-10=\bar{1}.6580470,$$
$$L\tan\tfrac{1}{2}B=9.6580470,$$
$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}B=24°\,28'\,2'', \qquad B=48°\,56'\,4''.$$

10. 有 $a=68^\circ 20' 25''$, $b=52^\circ 18' 15''$,

$C=117^\circ 12' 20''$. 試解此三角形.

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C,$$

而 $\frac{1}{2}(a-b)=8^\circ 1' 5''$, $\frac{1}{2}(a+b)=60^\circ 19' 20''$

$\frac{1}{2}C=58^\circ 36' 10''$,

$\therefore$ $L\cos\frac{1}{2}(a-b)=9.9957335$

$L\cot\frac{1}{2}C=9.7855690$,

19.7813025,

$L\cos\frac{1}{2}(a+b)=9.6947120$,

$L\tan\frac{1}{2}(A+B)=10.0865905$,

$\therefore$ $\frac{1}{2}(A+B)=50^\circ 40' 28''$,

$L\sin\frac{1}{2}(a-b)=9.1445280$,

$L\cot\frac{1}{2}C=9.7855690$,

18.9300970,

$L\sin\frac{1}{2}(a-b)=9.9389316$,

$L\sin\frac{1}{2}(A-B)=8.9911654$,

$\therefore$ $\frac{1}{2}(A-B)=5^\circ 35' 47''$,

$\therefore$ $A=56^\circ 16' 15''$; $B=45^\circ 4' 41''$.

又依次式得以決定 c.

$$\cos\tfrac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$L\,cos\tfrac{1}{2}(a+b)=9.6947120,$$

$$L\,sin\tfrac{1}{2}C\quad=9.9312422,$$

$$19.6259542,$$

$$L\,cos\tfrac{1}{2}(A+B)=9.8019015,$$

$$L\,cos\tfrac{1}{2}c\quad=9.8240527,$$

$$\therefore\quad \tfrac{1}{2}c\quad=48°\,10'\,22''$$

$$c=96°\,20'\,44'',$$

其他方法.

$$cos\,c=cos\,a\,cos\,b+sin\,a\,sin\,b\,cos\,C=cos\,b\{cos\,a+sin\,a\,tan\,b\,cos\,C\},$$

$$tan\,\theta=tan\,b\,cos\,C.$$

因 $cos\,C$ 爲負.故 $tan\,\theta$ 亦爲負.θ 比直角大.

而 $cos\,C$ 之數值.與 $cos\,62°\,47'\,40''$ 同.故

$$L\,tan\,b=10.1119488,$$

$$L\,cos(180°-C)=\ 9.6600912,$$

$$L\,tan(180°-\theta)+10=19.7720400,$$

$$\therefore\quad 180°-\theta=30°\,36'\,33'',\qquad \theta=149°\,23'\,27'',$$

而 $$cos\,c=\frac{cos\,b\,cos(a-\theta)}{cos\,\theta},$$

$cos\,\theta$ 爲負.故 $cos\,c$ 亦爲負.而比直角大.

而 $cos\,\theta$ 之絕體數值,等於 $cos(180°-\theta)$ 之絕體數值.詳言之.等於 $cos\,30°\,36'\,33''$ 之數値.又 $cos(a-\theta)$ 之數値,等於 $cos(\theta-a)$ 之數值.詳言之.等於 $cos\,81°\,3'\,2''$ 之數値

$$\begin{aligned} &L\,cos\,b = 9.7863748, \\ &L\,cos(\theta - a) \quad = 9.1919060, \\ &\qquad\qquad\qquad 18.9782808, \\ &L\,cos(180^\circ - \theta) = 9.9348319, \\ &L\,cos(180^\circ - c) = 9.0434489, \end{aligned}$$

$\therefore\quad 180^\circ - c = 83^\circ\,39'\,17'',\qquad c = 96^\circ\,20'\,43''.$

由上二方法以求 c 數.相差一秒.是由四捨五入之結果而來.秒以下所生之端數.就 $43''\frac{1}{2}$ 爲一致

11. 有 $a = 50^\circ 45'\,20'',\qquad b = 69^\circ\,12'\,40'',$

$A = 44^\circ\,22'\,10''$.試解此三角形.

公式 $sin\,B = \dfrac{sin\,b}{sin\,a} sin\,A,$

$$\begin{aligned} &L\,sin\,b = 9.9707626, \\ &L\,sin\,A = 9.8446525, \\ &\qquad\quad 19.8154151, \\ &L\,sin\,a = 9.8889956, \\ &L\,tan\,B = 9.9264195, \end{aligned}$$

$\therefore\quad B = 57^\circ\,34'\,51''.4,$ 或 $B = 122^\circ\,25'\,8''.6.$

因 B 有二值.故求 C, c 有二解法.由納彼氏之比例式.

$$tan\tfrac{1}{2}C = \frac{cos\frac{1}{2}(b-a)}{cos\frac{1}{2}(b+a)} cot\tfrac{1}{2}(B+A),$$

$$tan\tfrac{1}{2}c = \frac{cos\frac{1}{2}(B+A)}{cos\frac{1}{2}(B-A)} tan\tfrac{1}{2}(b+a),$$

最初取 B 同樣之值.則

$\frac{1}{2}(B+A) = 50^\circ\,58'\,30''.7,\qquad \frac{1}{2}(B-A) = 6^\circ\,36'\,20''.7,$

$\therefore\quad L\cos\frac{1}{2}(a-b) = 9.9943430,$

$L\cot\frac{1}{2}(B+A) = \underline{9.9087536},$

$19.9030966,$

$L\tan\frac{1}{2}(a+b) = \underline{9.6991887},$

$L\tan\frac{1}{2}C = 10.2039079,$

$\frac{1}{2}C = 57°\,58'\,55''.3, \qquad C = 115°\,57'\,50''.6,$

$L\cos\frac{1}{2}(B+A) = 9.7991039,$

$L\tan\frac{1}{2}(a+b) = \underline{10.2382689},$

$20.0373728,$

$L\cos\frac{1}{2}(B-A) = \underline{9.9971072},$

$L\tan\frac{1}{2}c = 10.0402656,$

$\frac{1}{2}c = 47°\,39'\,8''.2, \qquad c = 95°\,18'\,16''.4.$

次取B較大之值.則

$\frac{1}{2}(B+A) = 83°\,23'\,39''.3, \qquad \frac{1}{2}(B-A) = 39°\,1'\,29''.3,$

$\therefore\quad L\cos\frac{1}{2}(b-a) = 9.9943430,$

$L\cot\frac{1}{2}(B+A) = \underline{9.0637297},$

$19.0580727,$

$L\cot\frac{1}{2}(b+a) = \underline{9.6991887},$

$L\tan\frac{1}{2}C = 9.3588840,$

$\therefore\quad \frac{1}{2}C = 12°\,52'\,15''.8, \qquad C = 25°\,44'\,31''.6,$

$L\cos\frac{1}{2}(B+A) = 9.0608369,$

$L\tan\frac{1}{2}(b+a) = \underline{10.2382689},$

$19.2991058,$

$L\cos\frac{1}{2}(B-A) = \underline{9.8903494},$

$L\tan\frac{1}{2}c = 9.4087564,$

$\therefore\quad \frac{1}{2}c = 14°\,22'\,32''.6, \qquad c = 38°\,45'\,5''.2.$

依以上之例.大概的解法.自可了然.茲舉二三例題.爲本編之結局.

問題十一

1. 有 $b=137°3'48''$, $A=147°2'54''$, $C=90°$. 試求 a, c, B.

2. 有 $A=36°$, $B=60°$ $C=90°$. 試求 a, b, c.

3. 有 $a=76°35'36''$, $b=50°10'30''$, $c=40°0'10''$. 試求此三角形其他之關係.

4. $C=109°40'20''$, $a=127°17'51''$, $b=113°49'31''$. 試解此三角形.

第十二編

球面三角法之應用

1. 球面三角法之最關緊要者.爲星學,及測地學.星學論出現於蒼天諸星體之位置及運動之學科.此大別爲理論星學.球面星學,實地星學三種.理論星學.論天體之運行,及其構造.球面星學.論其位置及運行.實地星學.以理論星學爲基礎而研究之.以供世界實用之方法也.至測地學家之目的.則測定地球之形狀大小,及其表面任意之一部分.

地球之形狀.古代測地學者.看做球體.故其測定亦假定球體爲基礎.然紀元前二百三十年.意那多斯色里斯氏.發明其術理以之實地試驗.又測定子午線弧一象限之長爲11562500米突.其後諸大家輩出.一千七百九十五年.魯西多魯氏測定爲99.9991米突.一千八百零六年.德蘭布魯氏測定爲10000000米突.赫叔色爾氏測定爲10001887米突.斯意蘭多斯氏.以地球當作眞球看.又魯色亞多爾氏.以地球當作橢圓體.其平匾率 1:3[illegible]0.而德蘭布魯氏爲1:334.赫色爾氏爲1:299.2.苛那苛氏爲1:2[illegible]5.

苛那苛氏之測定.最要注意.美國海岸測量時時用之.然赫色爾氏之結果.世界用之最廣.

2. <u>測地學.</u>

基線測量是第一要緊.欲基線測量精密.在測量水平線.其長爲數千米突.於平原上施行之.

日本陸地測量部.其基線之長.略舉如次.在近江國高島郡饗庭野六千二百餘米突.在伯耆國久米郡天神野三千三百餘米突.如此測量最宜注意.

所用之尺.用尋常竹尺.然在嚴密之測定法.用鋼紐尺.數回測量其距離.每回每時用檢溫器檢定其尺度器械之伸縮.

基線測量法有二.一為原基線.是為三角測量之根原.其他觀測數個三角點之後.檢定其各點之距離.是為實測法.讓諸測量學.

3. 三角測量約說.

試基線為 AB.從其兩端能覘望之地點為 C. D. 建此為標的.以之覘望.卽可測量其點之位置.次依前法 設 E, F,… 等多數標的.成多數三角形.各以之測定.卽可決定其三角形.至其算法.有數種.一依球面三角法.得以精密計算.是依地球之半徑.及地面弧三角形之函數式以推之.其他以球面三角形之各角連結為直線之弦所生三角形而解之.或依魯西亞魯氏之法.則略算之.

平面三角形三角之和.在實地觀測.必不能等於二直角.然依其和等於二直角之定律.從而測量精密與否.不可不配付以誤差.

凡就地球表面上觀測.欲驗球面三角形各角之度為精密與否.可依球面過剩之理以驗之.

4. 化斜角為水平.

設 OZ 為直立線.就 O 覘視其物體 M, N 之方向為 OM, ON. 令其角 MON $=a$, NOZ $=b$, MOZ $=c$. 則就通過其 O 之水平面.發見 MON 射影角.

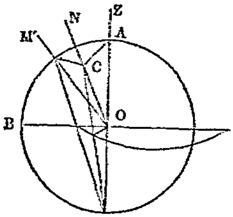
以 O 為中心,單位為半徑,作球.其各方向之交點為 A, B, C. 則所求之射影角,等於 AOM 與 AON 二平面之交角.卽等於三角形之 ABC 角.故公式為

$$\tan\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}.$$

是為立體平畫之射影.卽得所求.

5. 魯西亞多爾氏之第一解法.

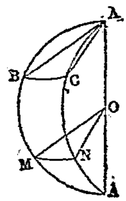
此解法. M, 與 N 之仰角必須甚小. 卽 b. 與 c 近於 $90°$.



今就球面三角形. 作通弦 AB, AC. 其角爲 A_1. 則得次式.

$$\cos A=\sin\tfrac{1}{2}b\,\sin\tfrac{1}{2}c+\cos\tfrac{1}{2}b\,\cos\tfrac{1}{2}c\,\cos A.\cdots\cdots\cdots\cdots 119$$

取 A 之對點 A′. 取 A′BC 三角形之弧 A′B, A′C 之中點 M, N. 引 OM, ON. 則弦 AB, AC 與 OM, ON 平行.



$\therefore\quad \cos MON=\cos MN,$

$$\therefore\quad \cos MON=\cos\tfrac{1}{2}(\pi-b)\cos\tfrac{1}{2}(\pi-c)+\sin\tfrac{1}{2}(\pi-b)\sin\tfrac{1}{2}(\pi-c)\cos A$$

$$=\sin\tfrac{1}{2}b\,\sin\tfrac{1}{2}c+\cos\tfrac{1}{2}b\,\cos\tfrac{1}{2}c\,\cos A,$$

$\therefore\quad \cos A'=\sin\tfrac{1}{2}b\,\sin\tfrac{1}{2}c+\cos\tfrac{1}{2}b\,\cos\tfrac{1}{2}c\,\cos A,$

令　$\theta=A-A'$, 則 $A'=A-\theta,$

$\therefore\quad \cos A'=\cos(A-\theta)=\cos A\,\cos\theta+\sin A\,\sin\theta,$

θ 爲甚小時. 則　$\cos A'=\cos A+\theta\sin A,$

而與第 119 式結合. 則

$$\theta=\tan\frac{1}{2}A\,\sin^2\frac{1}{4}(b+c)-\cot\frac{1}{2}A\,\sin^2\frac{1}{4}(b-c).$$

觀測者就水平面覘望二物體 M, N. 就其二物體空間之角 MAN 測之得 A. 而此角與就其水平之射影相減. 若差爲甚小. 則求其差之量.

A爲地平上測者之位置. AM, AN爲二物體之方向. 以單位爲半徑, 作球. 交AM, AN於B, C點. 而

$$H=\frac{1}{2}MAB, \quad H'=\frac{1}{2}NAC,$$

則就球面三角形ABC得

$$H=\tfrac{1}{2}c, \quad H'=\tfrac{1}{2}b,$$

又θ爲所求之差. 則

$$\theta=\tan\tfrac{1}{2}A\sin^2\tfrac{1}{2}(b+c)-\cot\tfrac{1}{2}A\sin^2\tfrac{1}{2}(b-c),$$

$$\therefore\quad \theta=\{\tfrac{1}{2}(H+H')\}^2\tan\tfrac{1}{2}MAN-\{\tfrac{1}{2}(H-H')\}^2\cot\tfrac{1}{2}MAN.$$

是卽所求. 但θ爲甚小.

6. 魯西亞多爾氏之第二解法.

球面三角形之邊. 若比球之半徑甚小. 則球面三角形之各角. 與其邊弧同大之平面三角形各角相減. 其減得之差, 等於其球面三角形之球面過剩之三分之一.

設球面三角形之各角爲A, B, C. 其各邊爲a, b, c. 球之半徑爲r. 則

$$\frac{a}{r}, \quad \frac{b}{r}, \quad \frac{c}{r}.$$

順次爲a, b, c弧度. 然

$$\cos A=\frac{\cos\frac{a}{r}-\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}.$$

而展開$\cos\frac{a}{r}, \cos\frac{b}{r}, \cdots$等代入上式. 其第五方乘上者去之.

則 $$\cos A=\frac{\left(1-\frac{a^2}{2r^2}+\frac{a^4}{24r^4}\right)-\left(1-\frac{b^2}{2r^2}+\frac{b^4}{24r^4}\right)\left(1-\frac{b^2}{2r^2}+\frac{b^4}{24r^4}\right)}{\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2}{6r^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{6r^2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2r^2}(b^2+c^2-a^2)+\frac{1}{24r^2}(a^4-b^4-c^4-6b^2c^2)}{\frac{bc}{r^2}\left(1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2bc}\left\{b^2+c^2-a^2+\frac{1}{12r^2}(a^4-b^4-c^4-6b^2c^2)\left(1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}\right)\right\}$$

$$\boldsymbol{\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2}{24bcr^2}.} \quad \cdots \mathbf{120}$$

若令α,β,γ為平面三角形之各角. a,b,c為其各邊. 則

$$\cos A=\cos\alpha-\frac{bc\sin^2\alpha}{6r^2}, \text{(近似值)}$$

$$\because \quad \cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\therefore \quad \sin^2\alpha=-\frac{a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2}{4b^2c^2},$$

以此代入120式. 則得

$$\cos A=\cos\alpha-\frac{bc\sin^2\alpha}{6r^2},$$

令 $A=A'+\theta$, 則 $\cos A=\cos\alpha-\theta\sin\alpha$, (概算)

$$\therefore \quad \theta=\frac{bc\sin\alpha}{6r^2}=\frac{S}{3r^2},$$

但S表平面三角形之面積.

$$\therefore \quad A-\alpha=\frac{S}{3r^2}, \quad B-\beta=\frac{S}{3r^2}, \quad C-\gamma=\frac{S}{3r^2},$$

$$\therefore \quad A+B+C-(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{S}{r^2}, \qquad \therefore \quad A+B+C-\pi=\frac{S}{r^2}$$

$\therefore$ $\frac{S}{r^2}$ 為球面過剩, $\therefore$ $A-\alpha=\frac{1}{3}$ 球面過剩.

7. 球面三角形面積之概算.

$$\sin\frac{1}{2}E=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}c},$$

此概算式.爲

$$\sin\frac{1}{2}E=\sin C\frac{ab}{4r^2}\left(1-\frac{a^2}{24r^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{24r^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{8r^2}\right)$$

$$=\sin C\frac{ab}{4r^2}\left(1+\frac{3c^2-a^2-b^2}{24r^2}\right),$$

$$\therefore\quad E=\sin C\frac{ab}{2r^2}\left(1+\frac{3c^2-a^2-b^2}{24r^2}\right),$$

而　$\sin C=\sin(C'-\frac{1}{3}E)=\sin C'+\frac{1}{3}E\cos C'$

$$=\sin C'+\frac{\sin C'\cos C'}{3}\cdot\frac{ab}{2r^2}=\sin C'\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{12r^2}\right),$$

$$\therefore\quad E=\sin C'\frac{ab}{2r^2}\left(1+\frac{a^2+b^2+c^2}{24r^2}\right),\quad Er^2=S\left(1+\frac{a^2+b^2+c^2}{24r^2}\right).$$

是卽所求之概算式.

8 設地球表面上球面三角形平方呎之面積爲△.球面過剩之秒數爲 n.則

$$\log n=\log\Delta-9.3267737.$$

令地球半徑之呎數爲 r,球面過剩之弧度爲E.則

$$E=\frac{n\pi}{180.60.60}=\frac{n}{206265},\ (\text{概略})$$

$$\therefore\quad\Delta=Er^2=\frac{nr^2}{206265},$$

今地球表面一度平均之長爲365155呎.(實驗)即

$$\frac{\pi r}{180}=365155,$$

$$\frac{\pi}{180}\sqrt{\frac{206265\triangle}{n}}=365155,$$

$$\frac{\triangle}{n}=\frac{365155^2}{\pi^2}\times 180^{\circ 2},$$

$$\log\triangle-9.3267737=\log n.$$

本編所記載應用問題.不過舉其大略耳.另論球面星學.以爲球面三角法之結局.

第十三編

球面星學　射影

1. 欲進論球面星學之測算 當先論其必要之射影.天體學上.以須用之弧線成立之特別大圓.在立體平畫術.得球之射影.此射影精密之智識.依測者計算之目的.得決定其所用圖中部分之配置.

就球面星學之目的.論其射影之表面之大圓.採用最要者如次.

1. 子午圈.卽時圈之平面之射影.

(子午圈為與地球之極互交.且與赤道圈及地平圈直交之圈.而時圈亦與地球之極互交.且與赤道平面直交.故子午圈卽時圈.)

2. 某處之地平面之射影.

3. 赤道面之射影.

4. 黃道面之射影.

5. 平分點之平面之射影.

(平分點之平面.卽通過春分點秋分點及地球之極之平面.)

6. 二至徑圈之平面之射影.

(通過夏至冬至之長短日點及地球之極之平面)

通過平分點及長短兩日點之平面.於球體上有一定之位置.在特別子午圈上,故總合第一第五第六之射影論.不可不一樣.然僅就此目的而言.亦不能看出有一樣之關係.假令所差之形狀一樣.則此等之關係.一部之赤緯度.足生差點.

(赤緯度.乃天之赤道與某天體中心之距角.)

2. 就子午圈卽時圈之平面上. 求立體平畫法之球之射影.

但其位置或射影之時無關係.

以此射影與赤道成直角之軸. 爲紙面水平及直立之位置. 置於與球平行之位置上. 如是選定. 然選定之方法, 與赤緯度無關係.

圖之作法如次

先定紙面之界限. 然後取適當或便宜之60°弦尺爲半徑. 得表任何之子午圈卽時圈. 最初作EPQS圓. 通過中心⊙可作天之赤道, 引直徑E⊙Q. 再與直徑E⊙Q成直角. 引他之直徑P⊙S. 此P⊙Q爲球之軸. 其P爲北極. 其S爲南極.

今太陽在某子午圈時. 此地平線下之某子午圈相隔十二時. 各時刻依此表之 每差一時, 等於赤道圈15°之差. 故赤道圈上之15°. 當現於子午圈上.

故依此目的. 從中心⊙沿赤道. 各向⊙E, ⊙Q之方向. 截取15°, 30°, 45°, 60°, 75°. 且通過極P, Q畫大圓. 是卽所求者也.

如圖所示. 於軸P⊙S之兩側中心. 至最初圓內15°. 五分子午圈或時圈. 交於赤道. 而自夜半十二時至正午十二時之時圈不現.

從最初子午圈E, Q二點. 向兩方. 等於23°28′. 取弧Ea, Ee, Qb, Qf. 連結E, b; E, f. 各爲六時之所. 截軸於c, g. 通過點a, c, b; e, g, f作平行圓acb, cgf. 表夏至冬至之二回歸線. 一爲表示北方太陽赤緯度之界限. 其他表示南方赤緯度之界限.

再就P, S之點爲極. 各至23°28′之距離. 畫小圓rst及vwx. 以表極圓. 一在赤道北方66°32′之距離. 其他在南方66°32′. 在北爲北極圈 在南爲南極圈.

此一般子午圈面上之射影.或特別之子午圈.假令如格林威地在北緯51°28′39″地方之子午圈面上之射影.依子午圈,回歸線,赤道,極圈,地平線,直立圈,或地平經度之助.得以畫圖.

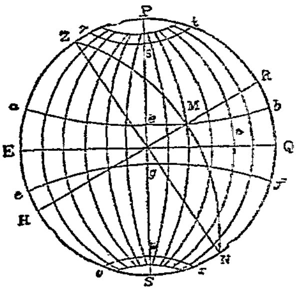
(地平線.假如以地球爲中心,畫天球以考察之.其天球之此一半面.得以觀察.其他之一半面.不能覘望.如此之界限之平面.曰地平線.)

(直立圈.卽通過天頂及其對點.且與地平圈直交之圈之謂.又此直立圈通過東西二點.則稱最初直立圈.)

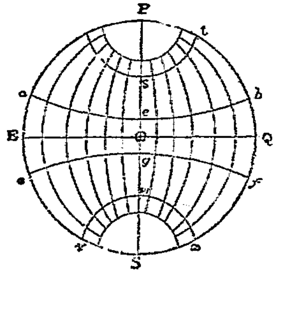
(某天體之地平經度.爲不依通過體中心直立圈之天頂角.而地平經度.爲依通過體中心直立圈間所夾地平上之弧測之.)

就北緯51°28′39″地方之子午圈面上.用立體平畫術.得球之射影.

以某適當大之六十度弦尺爲半徑.可表所設地方之子午圈.



最初作圓EPQS.通過赤道左右各15°.作他之子午圈或時圈.依前之方法.作回歸線,及極圈,赤道圈.與軸互爲直交.從E至北緯51°28′39″之弧.截取最初子午圈.是爲EZ.從Z引直徑Z⊙N作直立圓.則表最初直立圓,或東西之地平經度.其Z爲天頂.N爲其對點.



通過射影之中心⊙作與Z⊙N直交之直徑H⊙R.則H⊙R爲地方地平線.而射影於所定地方之子午圈上.

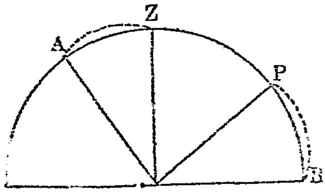
凡直立圈,及地平經度.皆通過Q,N之二個對點.且交於地平線上.

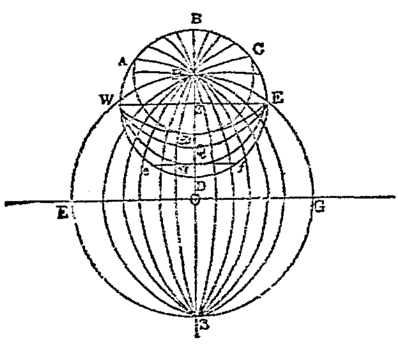
故就直立圈與地平線之關係.恰如子午圈之於赤道圈.即交地平線之直立圈.有無限數.

由此射影有太陽之最大緯度.則旭日通過太陽之中心直立圈.故就正東知太陽之昇點.即M點爲回歸線,直立圈,地平線之交點.

5. 就某特別地方之地平線平面.依立體平畫術.求球之射影.

設格林威池.在北緯51°28′39″之地方.以某適當尺度.取得60°弦尺爲半徑.即可表該地之地平線.畫BEDW之最初之圓.定格林威池地方之天頂Z.通過最初圓之中心及Z作直徑.畫直立於此面之圓.則WZE表最初直立圓.即東西之地平經度.而直交WZE,且通過射影中心Z.作直徑或面.畫直立圓BZD.則表其地之子午圈.然某地之緯度,等於該地平線上赤道之極之高度.故從北方之極端B點.在最初圓弧BC上.依51°28′39″截取C點.連結C,W作直線.於P點與所設子午圈BD交會.是爲赤道圈之極.通過極點.得引若干子午圈.即時圈.



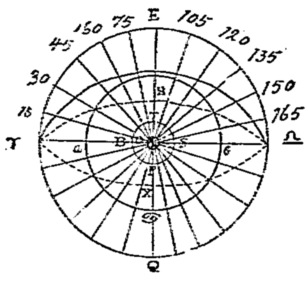


通過 E, P, W 之子午圈. 卽時圈. 引 EPW 最初直立圓. 與地平線東西 E, W 點直交. 則通過第六時之時圈⊙. 與子午圈 BZD 直交 引直徑 F⊙G. 從其半徑 G⊙, ⊙F 上. 取 15°, 30°, 45°, 60°, 75° 之正切尺. 從此與中心⊙重合. 而截取各點爲子午圈之中心. 卽時圈之中心. 而表子午圈. 則以此點爲中心, 向兩方如圖以作, 卽得.

某處相應之赤道. 爲從某處之地平線, 等於極之高度. 故 BZD 上取緯度 51° 28′ 39″ 之半正切尺. 截取一様之弧 ZQ. 則點 Q 爲赤道上與子午圈卽時圈十二時相交之一點. 故通過 E, Q, W 三點. 作 EQW 傾斜之圓. 爲通過地平線之赤道圈. 又回歸線各向赤道南北取 23° 28′ 之距離. 又於赤道反對之側. 取 23° 28′ 之距離. 引圓 AC 及 cgf. 與 EQW 圓平行. 是卽回歸線. 而 Qc 爲太陽北赤緯之最大點. Qγ 爲南赤緯之最大點.

4.　赤道平面上. 依立體平畫術, 求球之射影.

此種射影甚簡單. 因最初圓爲一直徑. 子午圈爲一直線. 又緯度之平行圓. 卽赤緯度. 均爲同心之小圓. 又圓之中心爲赤道圈之極. 黃道與赤道圈之交角爲 23° 28′. 依此得表太陽之最大赤緯度. 知此簡單之理. 卽得圖之作法如次.



從製圖紙面界限之中.取適宜大之六十度弦尺爲半徑.作赤道圈.畫最初圓爲EQ♎.而中心P.爲此赤道圈之極.通過極點.引直徑.或直立此面之圓EPQ.又引此直交之直徑.或直立此面之圓♈P♎.其前者爲夏至冬至點,及通過極之圓.後者爲平分點,及通過極之圓.

半圓♈E♎.各取15°.分爲12等分.從各分點至P極點引直線.且延長之.交他相應之半周上之點.亦十二等分.由是分圓周爲二十四等分.各等分爲15°.卽得作子午圈.或時圈.就距P極23°28′之點.引同心圓*pqrs*.是爲極圈.依地球之關係.包括極圈內之部分.地理學者稱寒帶.又從P極至66°32′之距離.作同心圓*a*♋*b*♋.此表太陽最大之赤緯度爲界限之回歸線.此回歸線與北極圈之間.有43°4′之廣依地球之關係.在地理學者稱溫帶.

♋點爲夏至點.故E♋爲太陽之最大北赤緯.通過♈,♋,♎之三點.畫斜圓♈♋♎爲黃道圈.就最初圓之♈,♎點.作23°28′之交角.是卽黃道圈之傾度.又黃道圈之極爲極圈之♈.

依上所記載之射影.爲北半球.而南半球亦同樣也.因黃道圈就冬至點♑.有太陽之最大南赤緯度.故方向全在反對之位置.

次子午圈,或時圈之某線上.得表特別地方之位置.以該地之地平線,及直立圈,通過天頂地方之地平經度等表之可也.今以簡單圖表之.通過夏至點之子午圈.就其射影取一特別地方.如格林威池.在北緯51°28′39″.就此形狀之下.地平線.及直立圈.或東西地平經度等.於平分點互爲直交.通過夏至點之EPQ上.從P向所設之緯度之角.取等於38°31′21″之半正切尺.切PX.此X表示所設地方之天頂.故通過♈,X,♎三點.得畫♈X♎之

傾斜圓.此所畫之圓.通過天頂X之直立圈.又出見傾斜圓♈X♎之極H而通過♈,H,♎三點之傾斜圓.以♈H♎記之.此表於平分點而最初直立圈直交於♈X♎之地方之地平線.

直立圈或地平經度.得於地平面上所設之點畫之.前已說明矣.茲略.

5. 於黃道平面上.依立體平畫術,求球之射影.

(黃道爲太陽繞某恆星中年年回轉所經過之道.此吾人以地球爲靜止.而視太陽爲運動.故云.實則黃道爲地球繞太陽經過之道也.)

假定太陽之中心.爲吾人棲息處.作地球回轉看.則此經過之路.以黃道記載之.

黃道分爲12宮.每宮30°.此12宮之基點,及命名如次.基點爲春分點.往古與白羊宮第一星爲一致.近代相差太甚.分十二宮用恒星爲目標.僅取理想上之點.爲太陽之宿坐.以配置於十二宮.

命名.

春 { 1 ♈ 白羊宮卽春分點
2 ♉ 金牛宮
3 ♊ 雙女宮 }

夏 { 4 ♋ 巨蟹宮卽夏至點
5 ♌ 獅子宮
6 ♍ 室女宮 }

秋 { 7 ♎ 天秤宮卽秋分點
8 ♏ 天蝎宮
9 ♐ 人馬宮 }

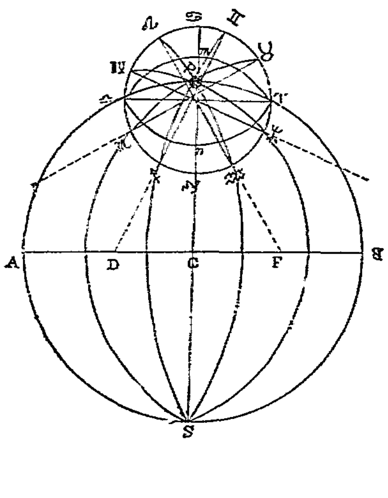
冬 { 10 ♑ 磨羯宮卽冬至點
11 ♒ 寶瓶宮
12 ♓ 雙魚宮 }

此射影.從地球之運動.可顯天體之現象於星學上之研究.最爲要用.其作法如次.

以適宜大之六十度弦尺爲半徑.表黃道圈.盖本初圓 ♈♋♎.而通過中心 E.引直徑,或直立於此圓之圓 ♋E♑.表二至徑圈.又引此直交之直徑.或直立本初圓之圓 ♈E♎.發現通過平分點之黃經度之圓.

(黃經度乃體之中心與黃道之極.連結成大圓.直交於黃道面上.而自春分點至此圈之經度測之.)

又赤道之極與黃道之極.互有 23°28′ 之距離.故在二至徑圈上.從黃道之極 E.等於黃道傾斜角 23°28′ 之距離.取 EP.則 P 點爲赤道圈之極.



通過 ♈, P, ♎ 之點. 畫大圓 PQRS. 其中心 C 點. 在二至徑圈 ♋P♑ 之引長上. 則 ♈P♎ 爲赤道圈之極 P 點直交於二至徑圈之平分圓. 此二個大圓. 交互通過極點. 且互爲直交. 令 ♈ 及 ♎ 爲直立於本初圓之圓 ♋P♑ 之極. 而通過此等點之斜圓 PQRS. 垂直於二至徑圈射影之 ♋PCS 上.

通過二至徑圈射影之中心. 引 PCS 之垂直線 AB. 就 A, B 兩方向引長至必要之部分. 而從 C 取 30°, 60° 之正切. 通黃道圈各異之符號. 引子午圈. 或時圈, 則此等圈之中點, 在 AB 直線上 而黃經度爲通過黃道極 E 之直徑, 或直立於黃道面之圓.

赤道圈關於夏至點 ♋. 冬至點 ♑. 其一在上. 其他在下. 各在 23° 28′ 之距離. 記載二至徑圈. 而赤道半分. 以半正切尺. 自 E 點切取. 依射影而表之. 各爲 23° 28′ 之餘角. 等於 66° 32′. 取 Em, En, 則 ♈, m, ♎ 及 ♈, n, ♎ 各三點所通過之圓. 其圓之半分. 表赤道之高卑. 一半在射影中. 其他在射影面外. 卽 ♈n♎ 在射影面中.

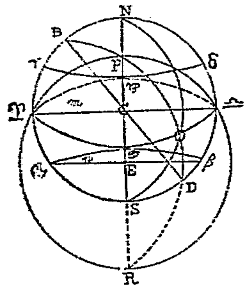
6. 平分圈之平面上. 依立體平畫術. 記載其球之射影.

此種射影. 其本初圓爲子午圈或時圈. 赤道與二至徑圈. 於本初圓之中心點. 互交成直徑, 及直立於本初圈之面之圓. 黃道圈爲太陽最大赤緯度之餘角 66° 32′, 與本初作成之傾圓. 而以 23° 28′ 作成赤道圈. 凡通過赤道極之傾斜圓. 與本初圓. 同表子午圈或時圈. 又通過黃道極之傾斜圓. 表天體緯度所定之黃經度.

此形狀之作法如次.

以某適當大之六十度弦尺爲半徑, 畫本初圓 N♈S♎. 表平分圓. 通過中心 C. 引直徑 ♈C♎. 表赤道圓. 作與此直交之 NCS. 表二至徑圈.

從點♈, ♎.作太陽之最大緯度.等於23° 28′.切取本初圓之弧♈α, ♈γ及♎β, ♎δ.從本初圓之中心C.於二至徑圓23° 28′之半正切C之兩方.切取C♋及C♑.則通過α, ♋, β三點.畫平行小圓α♋β.是爲夏至線.通過γ, ♑, δ三點.畫平行小圓.γ♑δ.是爲冬至線.今平分點以通過夏至點,及冬至點.且傾於赤道兩邊之圓記之.是表黃道之半圓.一爲赤道之北.一爲赤道之南.而於夏至冬至二點直交於二至經圈上.



又由本初圓之中心C.以太陽最大赤緯之餘角66° 32′半正切尺.在二至徑圈上.取CP之距離.則P表距赤道之極至23° 28′之黃道極.確定其面在通過夏至冬至二點之子午圈或時圈上.

過三點♈, P, ♎.作傾斜圓♈P♎S.於平分點與黃道直交.而通過大圓之中心E.且與二至徑線成直角之兩方向.引長必要之直線Eα, Eβ.則通過極P之黃經度之中心.在此之上.而直線αEβ上之中點.有平行於此直線之赤道圈23° 28′之距離.

今欲表本射影所要用之子午圈或時圈.及與此相應之黃經度.則此射影.最爲困難.故須逐個另畫.然於方法上.與其他者亦相同.又在大平面圖.則兩方交於黃道圈上明甚.依此目的.於黃道上之交點⊙.得作子午圈及黃道圈.

通過三點N, ⊙, S.作大圓N⊙S.其中心爲m.此表子午圈或時圈.同樣通過P, ⊙, R三點.作P⊙S圓.其中心爲n.此圓表所設之點⊙,直交於黃道之黃經度.施同樣之方法.得作多數之子午圈或時圈,及黃經度.但不必過於嚴密畫之.只以實用爲主.故以15° 分赤道圈.於全周畫二十四個子午圈足矣.因一日夜爲二十四小時.每一子午圈.可表一小時故也.

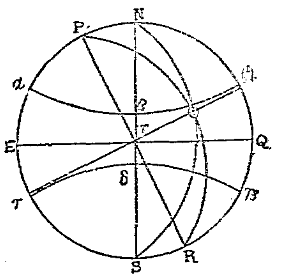
7. 二至經圈.卽地球之極適當通過夏至冬至二點之子午圈平面.依立體平畫術.求球之射影.

此射影.赤道之極與黃道之極.在太陽最大緯度上.爲23°28′之距離.定此爲本初圓.於星學上最便宜.

通過子午圈及平分點之黃經度.並赤道及黃道爲23°28′及66°32′之角.在本初圓之中心互交之射影.不以直線表之.

圖之作法如次.

取適宜大之六十度弦尺爲半徑.作本初圓NESQ.表示二至經圈.而通過二至經圈之極♈.引直徑.或引直立於此圓上之圓E♈Q.以表赤道與此成直角.引直徑N♈S.表平分圈.從N至本初圓上.切取等於黃道之傾角23°28′之NP.則P爲黃道之極.從P通過春分點♈.引直徑P♈R.表黃道之軸,或表通過春分點之黃經度.與此成直角.且通過春分點引線.爲本初圓於夏至冬至二點相交之黃道.



次通過夏至冬至二點.且與赤道平行.作小圓αβ♋,及γδ♑.表示太陽最大赤緯度之界限.☉爲所設定時間太陽之位置.而通過N,☉,S三點.作N☉S圓.通過P,☉,R三點.作R☉P圓.一表子午圈或時圈.其他表黃經度.而此二者同過二點.一個中心在E♈Q上.其他中心在♋♈♑上.

同樣.可畫得其他子午圈黃經度.

第十四編

球面星學之問題

前編就種種平面上．描畫球之射影．已將其方法說明矣．今畫球面之射影爲圓．而說明星學上之問題．是名球面星學．

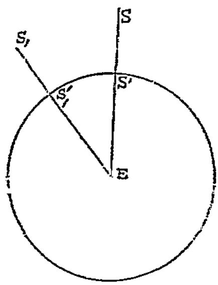
球面星學者．就吾人之眼界．以論宇宙形狀之一分科．而以地球之中心爲中心．作天球．以決定某天體之位置距離及方向等．

此位置距離及方向等．海陸測量．均爲需要．

觀察天球之凹面．及地球之凸面．相對同有中心．且互爲平行之球．

此想像之天球．畫種種圓形．以供星學上需要之計算．

今設二恆星距地球之距離雖不同．而得在同一球面上考之．假令E爲地球中心．S, S_1 恆星至地球之中心距離不同．先以任意半徑畫球．引SE, S_1 E．與球交於S', S'_1．此S', S'_1 與S, S_1．就同方向而變化其位置．故論位置運動等．皆可在同一球面上考之．



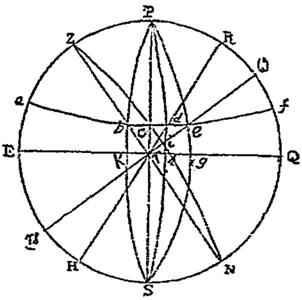
今欲解球面星學之問題．當先用二至徑圈之平面上之射影．三角形之二邊．於本初圓之中心互爲直交．由是得次之作圖法而解之．

以某適宜大之六十度弦尺爲半徑．作本初圓PESQ．表二至徑圈．通過中心♈．引E♈Q直徑．表赤道．與此直交．引直徑P♈S．表第六時之時圈．或表就春分點及秋

分點而通過平分點之子午圈.赤道與本初圓相交於E,Q二點.就其反對之方向.取弧E♑及Q♋.各等23°28′.冬時在南方.夏時在北方.而就本初圓之平面上引立圓♑♈♋.表黃道.

地方之緯度,及太陽之赤緯度.均在赤道北方.EZ表地方之緯度.Ea或Qf表現時太陽之赤緯度.引直徑Z♈N.表最初直立圈,或東西地平經度.與此直交之直徑,或直立本初圓之圓.表某地方之地平線.

連結E,f.交第六時之時圈於c.通過a, c, f三點.作平行圓acf.交黃道於e.交地平線於d.交最初直立圈.或東西地平經度於b.通過交點e, b, d,作子午圈或時圈PeS, PdS及PbS.各與赤道直交於g, h, k.則球面三角形g♈c, h♈d及h♈b.均爲直角三角形.



又通過c作地平經度,或直立圈ZcN.與地平線直交於i點.則成直角球面三角形i♈c.於本初圓直線射影.有兩邊合傾向緯度餘角之線.又合傾黃道之線.亦合直立圈等.就此三角形.得依直角球面三角形.成問題之大部分.

就吾人眼界所見.得顯出種種之實用.今先論天體適於何三角形而後測算之.

1. 試從黃道傾度,及春分點相距之黃經度.向子午圈上.看出赤道北方太陽之距離.

依前圖(以下暫用前圖)三角形♈eg.得

$$sin eg = sin e♈\ sin e♈g,$$

$$\therefore\ log\ sin eg = log\ sin e♈ + log\ sin e♈g,$$

$$\therefore\ \mathrm{L}\, sin eg + 10 = \mathrm{L}\, sin e♈ + \mathrm{L}\, sin e♈g.$$

2. 試以太陽之最大赤緯度,及黃經度.表相應之赤經度.

(赤經度者.於天之赤道上.從春分點至通過體之中心之子午線所測之弧之謂也.故通過春分點之子午圈.與通過體中心之子午圈之極點所成之角.表體之赤經度.)

設某體之赤經度為♈g.故由三角形e♈g.得

$$tan ♈g = \frac{cos e♈g}{cot e♈},$$

$$\therefore\ \mathrm{L}\, tan ♈g + 10 = \mathrm{L}\, cos e♈g + \mathrm{L}\, cot e♈.$$

3. 就某地之緯度,及設想瞬時間太陽之赤緯度.求太陽出入地平線上東西之距離.

∠b♈k為緯度.bk為太陽之赤緯度.♈為日出點.則

$$sin b♈ = sin bk / sin b♈k,$$

$$\therefore\ \mathrm{L}\, sin b♈ = \mathrm{L}\, sin bk - \mathrm{L}\, sin b♈k + 10.$$

4. 就太陽之出沒方位,及其相應之赤緯度.求某地之緯度.即求第六時之時圈,與地平線.在本圓中心點成角之極之高度.

(高度者.即通過體之中心及天頂之大圓周上.距地平線最近之弧.)

♈d 爲出沒方位角.

dh 爲太陽赤緯度.

d♈h 爲赤道之極之高度.卽緯度之餘角.

由三角形 d♈h.得

$\sin d$♈$h = \sin dh / \sin$ ♈d,

∴ $\mathrm{L} \sin d$♈$h = \mathrm{L} \sin dh - \mathrm{L} \sin$ ♈$d + 10$.

5. 試就太陽最初直立圈.從其距第六時之時.及其時之高度.而求該地之緯度.

♈b 爲太陽之高度.但在最初圈上.

♈k 於赤道上表示距第六時之時.

b♈k 爲緯度.

由三角形 b♈k.得

$\cos b$♈$k = \tan$ ♈$k \cot$ ♈b,

∴ $\mathrm{L} \cos b$♈$k = \mathrm{L} \tan$ ♈$k + \mathrm{L} \cot$ ♈$b - 10$.

6. 從地平線之東或西點所紀載太陽之地平經度,及第六時時圈之高度.求其時之赤緯度.

♈c 爲太陽之赤緯度.

♈i 爲太陽之地平經度.

ci 爲太陽之高度.

由三角形 c♈i.得

$\cos c$♈ $= \cos ci \cos$ ♈i,

∴ $\mathrm{L} \cos$ ♈$c = \mathrm{L} \cos ci + \mathrm{L} \cos$ ♈$i - 10$.

7. 既知與子午圈相應之中天赤經度.及黃道之傾斜.試求與赤經度相應之中天黃經度.

例題1　中天之赤經度.爲春分點距此66°30′.以定太陽運動之方向.黃道之傾度.爲23°28′.則黃道任一點如格林威池.在北緯51°28′39″地方之子午圈上.

茲示例題之作圖法.先取適宜大之六十度弦尺爲半徑.作本初圓PESQ.表通過夏至點♋及冬至點♑之子午圈.通過此圓之中心♈.引直徑E♈Q.表赤道之射影.與此垂直.引直徑P♈S.表地球之軸,或表通過平分點之子午圈之射影.

從E及Q在本初圓上.依反對之方向.切取弧E♑,Q♋.各等於太陽之最大緯度23°28′.引直徑♑♈♋.表黃道之射影.

從S點取ST弧.令等於所設中天之赤經度66°30′.於本初圓PE SQ上切取.依此T及P.用定規引直線.交赤道於p.通過P,p,S三點.得畫斜交於黃道之子午圈PpS.此圓在p點直交赤道.故p♈q爲直角球面三角形.其弦♈q.卽所求中天之黃經度.

就此問題之形狀.得圖之作法.然中天之赤經度.在格林威池之子午圈上.故得決定其射影.與所設之問題同.而地球之極.爲所設地方天頂之距離.卽等於該地方緯度之餘角.故從極至38°31′21″之距離.作小圓nZm.交子午圈PpS於Z點.此Z點表示所設緯度地方之天頂.由是作傾斜圓mxN.與子午圈PpS直交於Z點.此表最初直立圈,或表東西之地平經度.

就此圖用球面三角形之公式.先於直角球面三角形.得

$$\cot(\text{黃經度})=\cot(\text{中天之赤經度})\cos(\text{黃道傾斜})$$

卽 $$\cot \text{♈}q=\cot \text{♈}p \cos q\text{♈}p,$$

$$\log\cot \text{♈}q=\log\cot \text{♈}p+\log\cos q\text{♈}p,$$

$$\mathrm{L}\cot \text{♈}q+10=\mathrm{L}\cot \text{♈}p+\mathrm{L}\cos q\text{♈}p.$$

從此求得Υq.表從春分點在黃道中太陽之高度.即黃經度.此從第一例例題之度數代入之.則

$$\left.\begin{aligned}\Upsilon p&=66^\circ\,30'\,00'',\\ q\Upsilon p&=23^\circ\,28'\,00'',\end{aligned}\right\}$$

$$\mathrm{L}\,cot\,66^\circ\,30'\,00''=\ \ 9.638302,$$

$$\mathrm{L}\,cos\,23^\circ\,20'\,00''=\ \ \underline{9.962508},$$

$$\mathrm{L}\,cot\,68^\circ\,16'\,41''=19.600810-10,$$

$$\therefore\quad \Upsilon q=68^\circ\,16'\,41''.$$

例題2. 中天之赤經度.距春分點184° 13′ 9″.距秋分點4° 13′ 9″.黃道之傾斜23° 27′ 23″.則春分點或秋分點.在黃道上太陽之高度如何.

$$cot\,\Upsilon p=cot\,\Upsilon q\,cos p\Upsilon q,$$

$$\therefore\quad cot\,\Upsilon p=cot\,184^\circ\,13'\,9''\,cos\,23^\circ\,27'\,23'',$$

$$\therefore\quad \mathrm{L}\,cos\,\Upsilon p=\mathrm{L}\,cot\,184^\circ\,13'\,9''+\mathrm{L}\,cos\,23^\circ\,27'\,23''-10,$$

$$\mathrm{L}\,cot\,184^\circ\,13'\,9''=11.132110,$$

$$\mathrm{L}\,cos\,23^\circ\,27'\,23''=\ \ \underline{9.962541},$$

$$\mathrm{L}\,cos\,\Upsilon p\qquad\quad=21.094651-10,$$

$$\therefore\quad \Upsilon p=184^\circ\,35'\,52''.$$

例題3. 中天之赤經度.距春分點66° 49′ 45″.黃道之傾斜與前題同.求中天之黃經度.

$$cot\,\Upsilon p=cot\,\Upsilon q\,cos p\Upsilon q,$$

$$\therefore\quad cot\,\Upsilon p=cot 246^\circ\,49'\,45''\,cos\,23^\circ\,27'\,23'',$$

$$\therefore\quad \mathrm{L}\,cot\,\Upsilon p=\mathrm{L}\,cot\,246^\circ\,49'\,45''+\mathrm{L}\,cos\,23^\circ\,27'\,23''-10,$$

$\therefore$ $\quad \mathrm{L}\cot 246^\circ\,49'\,45'' = 9.631460,$

$\quad \mathrm{L}\cos 23^\circ\,27'\,23'' = 9.962541,$

$\quad \mathrm{L}\cot \Upsilon p \quad = 19.594001 - 10,$

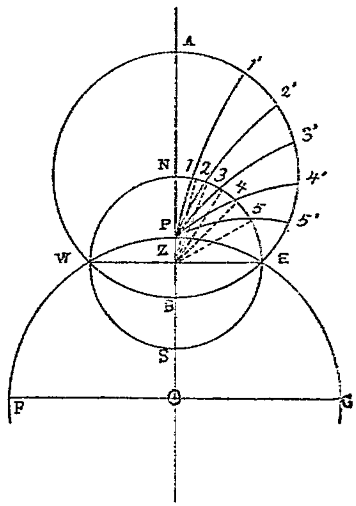
$\therefore$ $\quad \Upsilon p = 68^\circ\,33'\,46''.$

8. 就某地緯度.及赤道上之時角.以子午圈卽第十二時間之線.作地平上之日晷.而表時線之間隔.

(時角等於測點之子午圈,與通過體之中心之子午圈.在極點之交角.故得在此二個子午圈赤道交點所包有之弧測之).

例題 1. 英國格林威池.在北緯 51° 28′ 39″.其赤道上之時角.午后 1, 2, 3, 4, 5 時.與午前 11, 10, 9, 8, 7 時相應.求各時角若干.

本節之圖如次.



取某適當大之六十度弦尺爲半徑.作本初圓 NESW.日晷爲所設地方之地平線.而從中心 Z 引直徑 NZS.表該地之子午圈.

卽表第十二時之時圈.又引其他直徑WZE.與前直徑成直角.表最初直立圈,或東西之地平經度.則本初圓射影之天頂Z,與地球之極中間子午圈之距離.爲緯度之餘角.等於38°31′21″之半正切尺.截取ZP.表赤道之極P.今通過三點W, P, E.畫斜圓WPE.表第六時之時圈,或表通過東或西地方之子午圈.此斜圓之中心爲O.引長NZS至O.又引直徑FG與之成直角.則子午圈或時圈之中心.在此徑之上.

就某地方之子午圈言.赤道爲通過地平線之東E,或西W點.等於緯度餘角之子午圈之弧.爲各地方之地平線之高度.故於38°31′21″之角.畫傾於本初圓之圓AWBE.是爲赤道.

次引長子午圈,或第十二時圈.交赤道於A.則NZE及NZW之各角爲象限.一包含午后之時.其他包含午前之時.故得決定向此象限之時角.足供本題作圖之用.

作時角.則於直線FOG上.從O在反對之方向.測15°, 30°, 45°, 60°, 75°等等正切尺.當此正切尺之左或右.從而爲午前或午后時圈之中心.今從O向G之方向.截取中心.以決定午後之時.於時圈之中心.以前角之正割尺爲半徑.畫各弧P55′, P44′, P33′, P22′, P11′.交地平線於5, 4, 3, 2, 1.交赤道於5′, 4′, 3′, 2′, 1′.則弧N1, N2, N3, N4, N5.爲子午圈或第十二時圈與午后種種時圈交角所測之弧.故由本初圓之中心Z.至時圈交於地平線之點.得連結爲直線Z1, Z2, Z3, Z4, Z5.表午後一時二時三時四時五時之時刻.而EZ表直交於NZ子午圈第六時之直線.

同樣.於象限NZW之圓弧截取各點.至中心Z.連結成直線表午前十一時十時九時八時,七時之時刻.ZW表第六時之直

線.若四時及五時之直線.在反對方向.試引長之.令交於地平線上.則示午前六時以前之時.又七時及八時之直線.在反對方向引長.示午後六時以後之時

今由上圖直角球面三角形NP1, NP2, NP3, NP4, NP5.其子午圈與各時圈間之角及直線.爲既知之件.得以決定日晷中心角所測之弧卽底邊.而由第十二時之時圈.於兩方向.得以決定午前午後.

由球面三角法之公式.得

$$\cot N1=\cot NP1\csc PN,\qquad \cot N2=\cot NP2\csc PN,$$

$$\cot N3=\cot NP3\csc PN,\qquad \cot N4=\cot NP4\csc PN,$$

$$\cot N5=\cot NP5\csc PN,$$

$$\therefore\quad L\cot N1=L\cot NP1+L\csc PN-10.$$

其他亦可同樣求對數.

今以例題1所設之要件.代入最初之式.則

$$\cot N1=\cot 15^\circ\csc 51^\circ 28' 39'',$$

$$\therefore\quad L\cot 15^\circ 00' 00''=0.571948+10,$$

$$L\csc 51^\circ 28' 39''=0.106591+10,$$

$$L\cot N1\qquad =0.678539+10,$$

$$\therefore\quad N1=11^\circ 50' 22''.$$

是午後一時或午後十一時之角度.

同樣.求得其他之各角度.爲24° 18′ 31″, 38° 2′ 18″, 53° 34′ 28″,及71° 5′ 39″.

例題2. 就北緯55° 57′ 18″之某地方.以其子午圈,或第十二時圈.作地平線上之日晷.求各時間相距之角度.

從十二時至午前十一時或午後一時之距角.爲

$L\cot N1 = L\cot NP1 + L\csc PN - 10,$

$\therefore\ L\cot N1 = L\cot 15° + L\csc 55°\,57'\,18'' - 10,$

$\therefore\ L\cot 15°\,00'\,00'' = 10.571948,$

$L\csc 55°\,57'\,18'' = 10.081656,$

$L\cot N1 \qquad = 20.653604 - 10,$

$\therefore\ N1 = 12°\,31'\,4''.$

至午後二時或午前十時之距角.爲

$L\cot N2 = L\cot NP2 + L\csc PN - 10,$

$\therefore\ L\cot N2 = L\cot 30° + L\csc 55°\,57'\,18'' - 10,$

$\therefore\ L\cot 30°\,00'\,00'' = 10.238561,$

$L\csc 55°\,57'\,18'' = 10.081656,$

$L\cot N2 \qquad = 20.320217 - 10,$

$\therefore\ N2 = 25°\,23'\,58''.$

至午後三時或午前九時之距角.爲

$L\cot N3 = L\cot NP3 + L\csc PN - 10,$

$\therefore\ L\cot N3 = L\cot 45° + L\csc 55°\,57'\,18'' - 10,$

$\therefore\ L\cot 45° \qquad = 10.000000,$

$L\csc 55°\,57'\,18'' = 10.081656,$

$L\cot N3 \qquad = 20.081656 - 10,$

$\therefore\ N3 = 39°\,38'\,42''.$

至午後四時或午前八時之距角.爲

$L\cot N4 = L\cot NP4 + L\csc PN - 10,$

$\therefore\ L\cot N4 = L\cot 60° + L\csc 55°\,57'\,18'' - 10,$

$$L\,cot 60^\circ\,00'\,00'' = 9.761439,$$
$$L\,cot 55^\circ\,57'\,18'' = 10.081656,$$
$$L\,cot N4 \qquad = 19.843095-10,$$
$$\therefore\quad N4 = 55^\circ\,7'\,55''.$$

至午後五時或午前七時之距角.爲

$$L\,cot N5 = L\,cot NP5 + L\,csc PN - 10,$$
$$\therefore\quad L\,cot N5 = L\,cot 75^\circ + L\,csc 55^\circ\,57'\,18'' - 10,$$
$$\therefore\quad L\,cot 75^\circ\,00'\,00'' = 9.428052,$$
$$L\,csc 55^\circ\,57'\,18'' = 10.081656,$$
$$L\,cot N5 \qquad = 19.509708-10,$$
$$\therefore\quad N5 = 72^\circ\,4'\,48''.$$

例題3. 求日本東京城內天守臺(北緯$35^\circ\,41'\,6''$)地平線上日暑之時之間隔.

$$L\,cot N1 = L\,cot NP1 + L\,csc PN - 10,$$
$$\therefore\quad L\,cot N1 = L\,cot 15^\circ + L\,csc 35^\circ\,41'\,6'' - 10,$$
$$\therefore\quad L\,cot 15^\circ\,00'\,00'' = 10.571948,$$
$$L\,csc 35^\circ\,41'\,6'' \quad = 10.234122,$$
$$L\,cot N1 \qquad = 20.806070-10,$$
$$\therefore\quad N1 = 8^\circ\,52'\,58''.3.$$

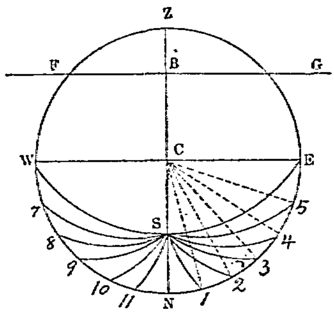
至第三時或第九時之距角.爲

$$L\,cot N3 = L\,cot NP3 + L\,csc PN - 10,$$
$$\therefore\quad L\,cot N3 = L\,cot 45^\circ + L\,csc 35^\circ\,41'\,6'' - 10,$$
$$\therefore\quad L\,cot 45^\circ \qquad = 10.000000,$$
$$L\,csc 35^\circ\,41'\,6'' = 10.234122,$$
$$L\,cot N3 \qquad = 20.234122-10,$$
$$\therefore\quad N3 = 30^\circ\,15'\,15''.1.$$

其他距角.亦同樣求之.

9. 就某地之緯度.及赤道之時距.求最初直立圈南平面之時距.

例題1. 求北緯51°28′39″地方最初直立圈上之時距.以適宜大之六十度弦尺爲半徑.作本初圓ZENW.表最初直立圈之平面.通過日晷之中心C.引直徑ZCN.表該地之子午圈.與此直交.引他直徑WCE.爲該地緯度之地平線.從日晷之中心C.在子午圈ZCN上.以緯度51°28′39″之半正切尺.截取CS.則S爲地球之南極.爲該地之天頂.N爲Z之對點.在該地之直下.SN爲就本初圓平面之極之高度.而爲緯度之餘角.



通過W, S, E三點.畫傾斜圓WSE.與地平線WCE相交.其交角等於該地緯度51°28′39″.最初之圓.交於其餘角.而WSE.爲交子午圈於S點通過地平線東西E, W兩點之第六時圈.

通過第六時圈之中心B.與ZCN直交.畫FBG.(引長至必要之處.)凡時圈中心.在此直線上.今從B點向兩方面.以15°, 30°, 45°, 60°, 75°之正切尺.切取各點.從各點以同角之正割尺.作通過極S之時圈S11, S1; S10, S2; S9, S3; S8, S4; S7, S5; 等弧.則N11, N10, N9, N8, N7等.是切取子午圈SN左邊之弧.表午前之時.同樣.切取SN右邊之弧.表午后之時.

而引 C1, C2, C3, C4, C5. 表日晷平面上各個之時線.

依此作圖.其直角球面三角形 SN1, SN2, SN3, SN4, SN5, 及 SNE. 有共通之垂弧 SN. 其弧度等於所設緯度餘角之極角 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°. 在赤道之時距.

故由球面三角法之公式.得

$$\cot N1 = \cot NS1 \csc SN, \qquad \cot N2 = \cot NS2 \csc SN,$$

$$\cot N3 = \cot NS3 \csc SN, \qquad \cot N4 = \cot NS4 \csc SN,$$

$$\cot N5 = \cot NS5 \csc SN, \qquad \cot N6 = \cot NS6 \csc SN,$$

以例題 1 所設之要件.代入最初之公式內.則

$$\cot N1 = \cot 15° \csc 51°\,28'\,39'',$$

$$\therefore\ L \cot N1 = L \cot 15° + L \csc 51°\,28'\,39'' - 10,$$

$$\therefore\ L \cot 15°\,00'\,00'' = 10.571948,$$

$$L \csc 51°\,28'\,39'' = 10.205636,$$

$$L \cot N1 \qquad = 20.777584 - 10,$$

$\therefore$ 1 時間之時距 $N1 = 9°\,28'\,28''$.

例題 2. 某地在北緯 $57°\,8'\,54''$. 試就最初直立圈之南面.求其日晷之時距.

至一時或十一時之時距.為

$$L \cot N1 = L \cot 15° + L \sec 57°\,8'\,54'' - 10,$$

$$\therefore\ L \cot 15°\,00'\,00'' = 10.571948,$$

$$L \sec 57°\,8'\,54'' = 10.265627,$$

$$L \cot N1 \qquad = 20.837575 - 10,$$

$$\therefore\ N1 = 8°\,16'\,13''.$$

至二時或十時之時距.為

$$L \cot N2 = L \cot 30° + L \sec 57°\,8'\,54'' - 10,$$

$\therefore$ $L\,cot\,30°\,00'\,00'' = 10.238561,$

$L\,sec\,57°\,8'\,54'' = 10.265627,$

$L\,cot\,N2 = 20.504188-10,$

$\therefore$ $N2 = 17°\,23'\,25''.$

至三時或九時之時距.

$L\,cot\,N3 = L\,cot\,45° + L\,sec\,57°\,8'\,54'' - 10,$

$\therefore$ $L\,cot\,45°\,00'\,00'' = 10.000000,$

$L\,sec\,57°\,8'\,54'' = 10.265627,$

$L\,cot\,N3 = 20.265627-10,$

$\therefore$ $N3 = 28°\,28'\,42''.$

至四時或八時之時距.爲

$L\,cot\,N4 = L\,cot\,60° + L\,sec\,57°\,8'\,54'' - 10,$

$\therefore$ $L\,cot\,60°\,00'\,00'' = 9.761439,$

$L\,sec\,57°\,8'\,54'' = 10.265627,$

$L\,cot\,N4 = 20.027066-10,$

$\therefore$ $N4 = 43°\,12'\,57''.$

至五時或七時之時距.

$L\,cot\,N5 = L\,cot\,NS5 + L\,sec$ (SN之餘角) $-10,$

卽 $L\,cot\,N5 = L\,cot\,75° + L\,sec\,57°\,8'\,54'' - 10,$

$\therefore$ $L\,cot\,75°\,00'\,00' = 9.428052,$

$L\,sec\,57°\,8'\,54'' = 10.265627,$

$L\,cot\,N5 = 19.693679-10,$

$\therefore$ $N5 = 63°\,42'\,47''.$

例題3. 日本下野晃石山.在北緯36° 21′ 35″.試就最初直立圈射影上之南面.求其日晷之時距.

至一時或十一時之時距.爲

$$L\,cot\,N1 = L\,cot\,NS1 + L\,csc\,SN - 10,$$

$\because\quad L\,cot\,N1 = L\,cot\,15^\circ + L\,csc\,36^\circ\,21'\,25'' - 10,$

$\therefore\quad L\,cot\,15^\circ\,00'\,00'' = 10.571948,$

$\quad\; L\,sec\,36^\circ\,21'\,25'' = 10.094036,$

$\quad\; L\,cot\,N1 \qquad = 20.665984 - 10,$

$\therefore\quad N1 = 12^\circ\,10'\,23''.8.$

至二時或十時之時距.爲

$$L\,cot\,N2 = L\,cot\,30^\circ + L\,sec\,36^\circ\,21'\,25'',$$

$\therefore\quad L\,cot\,30^\circ\,00'\,00'' = 10.238561,$

$\quad\; L\,sec\,36^\circ\,21'\,25'' = 10.094036,$

$\quad\; L\,cot\,N2 \qquad = 20.332597 - 10,$

$\therefore\quad N2 = 24^\circ\,56'\,50''.7.$

至三時或九時之時距.爲

$$L\,cot\,N3 = L\,cot\,45^\circ + L\,sec\,36^\circ\,21'\,25'' - 10,$$

$\therefore\quad L\,cot\,45^\circ\,00'\,00'' = 10.000000,$

$\quad\; L\,sec\,36^\circ\,21'\,25'' = 10.094036,$

$\quad\; L\,cot\,N3 \qquad = 20.094036 - 10,$

$\therefore\quad N3 = 38^\circ\,50'\,28''.4.$

至四時或八時之時距.爲

$$L\,cot\,N4 = L\,cot\,60^\circ + L\,sec\,36^\circ\,21'\,25'' - 10.$$

$\because\quad L\,cot\,60^\circ\,00'\,00'' = \;\;9.761439,$

$\quad\; L\,sec\,36^\circ\,21'\,25'' = 10.094036,$

$\quad\; L\,cot\,N4 \qquad = 19.855475 - 10,$

$\therefore\quad N4 = 54^\circ\,21'\,58''.6.$

至五時或七時之時距.爲

$$\mathrm{L}\,cot\,\mathrm{N}5=\mathrm{L}\,cot\,75^\circ+\mathrm{L}\,sec\,36^\circ\,21'\,25''-10,$$

$\therefore$ $\mathrm{L}\,cot\,75^\circ\,00'\,00''=\ \ 9.428052,$

$\mathrm{L}\,sec\,36^\circ\,21'\,25''=10.094036,$

$\mathrm{L}\,cot\,\mathrm{N}5\qquad\quad=19.522088-10,$

$\therefore$ $\mathrm{N}5=77^\circ\,35'\,46''.8.$

10. 既知觀測點之緯度.及太陽之實高度.試求其赤緯度相應之地平經度.

(實高度.卽下臨角光線之曲折.已無視差之修正之高度.)

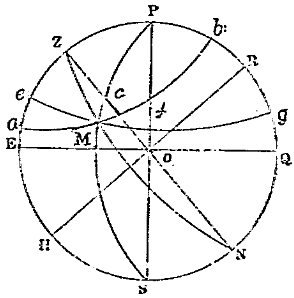
例題 1. 某地方在北緯 $51^\circ\,28'\,39''$.太陽之赤緯度爲北 $22^\circ\,30'$.太陽中心之實高度.爲 $40^\circ\,52'$.求其轉瞬間之實地平經度.

(凡加修正之高度.須冠以實字.)

本節之例.於決定磁針之變位.爲最緊要之問題.然後計算太陽之實地平經度.與磁針盤同時觀察而比較之.從其在子午圈之異側或同側.而變位爲和或差.

作圖法如次.

以某適宜大之弦尺爲半徑.畫最初圓 PESQ.表該地之子午圈.通過中心 O.引互爲直角之直徑 EOQ,及 POS.一爲赤道.一爲第六時之時圈.



從 E 點取等於所設緯度 $51^\circ\,28'\,39''$ 之弧 EZ.引直徑 ZON.表最初直立圈.又引與此直交之直徑 HOR.表該地之地平線.又從極 P.至太陽赤緯度之餘角 $67^\circ\,30'$ 之距離.切取最初圓.作平行圓 efg,同法.從極 Z 至 $49^\circ\,8'$ 之距離.作平行圓 acb.爲高度圈.

今此圓與 efg 圓相交於M點.則M為太陽之地位.通過P, M, S三點.引子午圈PMS.又通過Z, M, N三點.作直立圈.則球面三角形PZM.均為既知之量.因PZ為緯度之餘角.ZM為實高度之餘角.PM為赤緯度之餘角.

故由球面三角形之公式.

$$\cos PM=\cos ZM\cos ZP+\sin ZM\sin ZP\cos Z,$$

$\therefore\quad \cos Z=\cos PM\csc CPZ-\cot ZM\cot PZ,$

$\therefore\quad \cos Z=\sin$ 赤緯度 $\sec$ 高度 $\sec$ 緯度 $-\tan$ 高度 $\tan$ 緯度.

$\therefore\quad \log M=L\sin$ 赤緯度 $+L\sec$ 高度 $+L\sec$ 緯度 $-30,$

$\therefore\quad \log N=L\tan$ 高度 $+L\tan$ 緯度 $-20,$

則 $M-N=\cos$ 地平經度.

既知該地緯度及太陽之赤緯度.俱在北方或俱在南之時為正.太陽之赤緯度在南方該地之緯度在北方之時為負.可依此正負之關係而測算之.

以例題1之要件代入上式.則

$$L\sin 22°\,30'\,00''=\ 9.582840$$

$$L\sec 40°\,52'\,00''=10.121344,$$

$$L\sec 51°\,28'\,39''=10.205636,$$

$$\log M\qquad=29.909820-30,$$

$\therefore\quad M=0.81249.$

又 $L\tan 40°\,52'\,00''=\ 9.937121,$

$$L\tan 51°\,28'\,39''=10.099044,$$

$$\log N\qquad=20.036165-20,$$

$\therefore\quad N=1.08683,$

$\therefore\quad M-N=0.81249-1.08683=-0.27434=\cos 105°\,55'\,21''.$

故所求之地平經度.在北 105° 55′ 21″.

例題 2. 北緯 $45°37'$ 之地方. 其太陽中心之實高度 $24°58'$. 赤緯度在南 $6°19'24''$. 向該觀測點在北之地平經度爲何.

$$L\,sin\,6°19'24'' = 9.041941,$$
$$L\,sec\,24°58'00'' = 10.042607,$$
$$L\,sec\,45°37'00'' = 10.155240,$$
$$log\,M \qquad = 29.239788-30,$$

$\therefore \quad -M = -0.17370.$

又

$$L\,tan\,24°58'00'' = 9.668013,$$
$$L\,tan\,40°37'00'' = 10.009349,$$
$$log\,N \qquad = 19.677362-20,$$

$\therefore \quad N = 0.47573.$

此例題赤緯度南方之結果. M 爲負數.

$\therefore \quad -M-N = -0.17370-0.47573 = -0.64943.$

卽餘弦之值爲負數. 故比九十度大. 由表得 0.64943 相當之角度 $49°30'5''$. 其補角爲 $180°-49°30'5'' = 130°29'55''$. 卽所求之數.

例題 3. 南緯 $33°56'$ 之地方. 其太陽之北赤緯度. 爲 $2°45'24''$, 其中心之實高度爲 $24°57'24''$. 問在南方之地平經度.

$$L\,sin\,2°45'24'' = 8.682092,$$
$$L\,sec\,24°57'24'' = 10.042572,$$
$$L\,sec\,33°56'00'' = 10.081085,$$
$$log\,M \qquad = 28.805749-30,$$

$\therefore \quad -M = -0.06394.$

又 $L\,tan\,24°57'24'' = 9.667814,$

$$L\,tan\,33°56'00'' = 9.827897,$$
$$log\,N \qquad = 19.495711-20,$$

$\therefore$ $N=0.31312$.

該地之緯度赤緯度.在反對之方向.故爲負數.

$$-M-N=-0.06394-0.31312=-0.37706.$$

其餘弦比九十度大.

故知爲 $112°9'6''$.

例題 4. 太陽之赤緯度.在夏至點.其高度爲 $48°12$.其地之緯度爲 $51°28'39''$.則其在北之地平經度如何.

$$\begin{aligned} L\,sin\,23°\,27'\,23'' &= 9.599939, \\ L\,sec\,48°\,12'\,00'' &= 10.176179, \\ L\,sec\,51°\,28'\,39'' &= \underline{10.205636,} \\ log\,M \qquad &= 29.981754-30, \end{aligned}$$

$\therefore$ $M=.095886$.

$$\begin{aligned} L\,tan\,48°\,12'\,00'' &= 10.048612, \\ L\,tan\,51°\,28'\,39'' &= \underline{10.099044,} \\ log\,N \qquad &= 20.147656-20, \end{aligned}$$

$\therefore$ $N=1.40493$.

緯度赤緯度均同方向.故 M 爲正.

而 $M-N=0.95886-1.40493=-0.44607$.

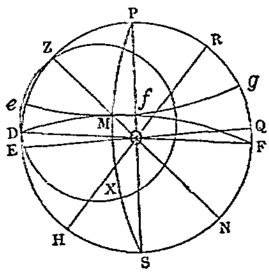
此餘弦爲負數,比九十度大.由表得 $63°30'30''$.

其補角爲 $116°29'30''$.爲地平經度.

11. <u>既知太陽中心之實高度,及赤緯度.試從該時子午圈所測之時距.以求觀測地之緯度.</u>

例題 1. 某地在北緯若干度.其朝八時三十二分十秒之時間.太陽中心之實高度.爲 $40°32'$.北赤緯度 $22°30'$.則某地之緯度知何.

本節之例.就前節之圖.球面三角形MPZ之一邊爲所求緯度之餘角.其他二邊MP,MZ.可從旣知角MPZ測算.然就本例題旣知件之布置.爲某特別之包含.亦得別以圖解而說明之.由最初正午觀測時之間隔.在地球之極點.發見同樣之角.詳言之.通過一個觀測點之子午圈.與通過太陽中心之子午圈.相交於極點成角.今從觀測時爲正午.至$3^h\ 27^m\ 40^s$之距離.以一時十五度約之.變換其約得之弧.在極點成角$51°\ 55'$.玆示作圖之方法如次.



以某適宜大之弦尺爲半徑.畫本初圓PESQ.表通過該地方之子午圈.引直徑EOQ表赤道.又引直徑POS.令與赤道直交.表地球之軸,或第六時之時圈.又從極至太陽赤緯度之餘角$67°\ 30'$之距離.作小圓efg.表就太陽的觀測時所定之平行圈.通過赤道之兩極P,S.引大圓PMS.與最初圓.於觀測時太陽之角距.爲$51°\ 55'$之傾斜.此圓與太陽赤緯度之平行圓相交於M.則M表太陽的觀察確定之點.以M爲極.於太陽之天頂$40°\ 8'$之距離.畫小圓ZDX.交子午圈於Z.則Z爲所求緯度之天頂.而引直徑ZON.表最初直立圈.與此成直角.引直徑HOR.表所求緯度之地平線.故PZ爲極與天頂之距離.卽所求緯度之餘角.

通過Z,M及N三點.畫直立圈ZMN.成球面三角形ZMP.其ZP卽所求之一部分.而依緯度PR或ZE.一表極之高度.其他表赤道與天頂之距離.

然以M爲中心.作小圓.交子午圈於D,Z二點.從中心至圓周之距離相等.故所設太陽之高度,及赤緯度.同時發生兩個球面三角形.卽所解問題之緯度發生兩意.故通過D點及中心O.

引 DOF. 與最初圓周交於 F. 而通過 D, M, F. 作直立圓 DMF. 則就球面三角形 DEM 言. PD 等於緯度之餘角. MD 等於 MZ.

今三角形 MPZ, MPD. 其 ∠MPD 爲共有. 邊 MP 亦共有. MZ 等於 MD.

故一爲平地經度 MZP 之鈍角. 其他爲 MDP 之銳角.

故求緯度之前. 當先決定地平經度.

今測算緯度之先. 決定地平經度. 則由球面三角法之公式. 得

$$\frac{\sin Z}{\sin PM}=\frac{\sin P}{\sin ZM},$$

$$\therefore\quad \sin Z=\sin P\csc ZM\sin PM,$$

$$\therefore\quad \log\sin Z=\log\sin P+\log\csc ZM+\log\sin PM,$$

$$\therefore\quad L\sin Z=L\sin P+L\csc ZM+L\sin PM-20.$$

此式由高度赤緯度子午圈之角距 以測算地平經度.

從此求緯度. 則依次之公式.

$$\cot\tfrac{1}{2}PZ=\sin\tfrac{1}{2}(Z-P)\csc\tfrac{1}{2}(Z+P)\cot\tfrac{1}{2}(MP+MZ),$$

$$\therefore\quad L\cot\tfrac{1}{2}PZ=L\sin\tfrac{1}{2}(Z-P)+L\csc\tfrac{1}{2}(Z+P)+L\cot\tfrac{1}{2}(MP+MZ)-20.$$

以例題 1 之旣知件. 代入上之公式而計算之. 則

$$L\cos 22°\,30'\,00''=\ \ 9.965615,$$

$$L\csc 40°\,52'\,00''=10.121344,$$

$$L\sin 51°\,55'\,00''=\ \ 9.896038,$$

$$L\sin Z\qquad=29.982997-20,$$

$$\therefore\quad Z=74°\,4'\,18''.$$

求該地之地平經度. 則由 PDM 相應之角求其正弦. 卽可取得其補角 105° 55′ 42″. 卽 PZM 之處 故所求之緯度. 任何亦不能明白判定. 然知地平經度之概略. 則任何亦可決定其一.

從所確定太陽之地平經度.卽可決定其緯度.

取最初地平經度 $74^\circ 4' 18''$.

$$\begin{array}{l} 74^\circ\ 4'\ 18'' \\ \underline{51^\circ 55'\ 0''}\ (\mp \\ 22^\circ\ 9'\ 18'' \div 2 = 11^\circ 4'\ 39'', \\ 125^\circ 59' 18'' \div 2 = 62^\circ 59' 39'', \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 40^\circ 52' 0'' \\ \underline{22^\circ 30' 0''}\ (- \\ 18^\circ 22' 0'' \div 2 = 9^\circ 11', \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} L\sin 11^\circ 4' 39'' & = 9.283610, \\ L\csc 62^\circ 59' 39'' & = 10.050142, \\ L\cot\ 9^\circ 11'\ 0'' & = \underline{10.791381}, \end{array}$$

$\therefore\ L\tan(45^\circ + \frac{1}{2}ED) = 30.125133 - 20,$

$\therefore\ \frac{1}{2}ED + 45^\circ = 53^\circ 8' 33'', \qquad \therefore\ ED = 16^\circ 17' 6''.$

又計算地平經度 $105^\circ 55' 42''$ 相應之緯度如次.

$$\begin{array}{l} 105^\circ 55' 42'' \\ \underline{\ 51^\circ 55'\ 0''}\ (\mp \\ \ 54^\circ\ 0' 42'' \div 2 = 27^\circ\ 0' 21'', \\ 157^\circ 50' 42'' \div 2 = 78^\circ 55' 21'', \end{array}$$

$(40^\circ 52' 0'' - 22^\circ 30' 0'') \div 2 = 18^\circ 22' 0'' \div 2 = 9^\circ 11' 0''.$

$$\begin{array}{lll} \therefore & L\sin 27^\circ 0' 21'' & = 9.657134, \\ & L\csc 78^\circ 55' 21'' & = 10.008168. \\ \therefore & L\cot\ 9^\circ 11'\ 0'' & = \underline{10.791381}, \end{array}$$

$L\tan(45^\circ + \frac{1}{2}EZ) = 30.456683 - 20,$

$\therefore\ 45°+\frac{1}{2}EZ=70°44'27''$,

$\therefore\ \frac{1}{2}EZ=25°44'27''$　　$\therefore\ EZ=51°28'54''$.

例題 2. 在北緯若干度之地方.已知午后 2^h7^m35 之時.太陽之高度爲 30°30′.南赤緯度 6°30′.試測定觀測地之緯度.

$2^h7^m35^s$ 之角距爲 31°53′41″.

$\therefore\ L\,cos\ 6°30'\ 0''=\ 9.997199$,

$L\,sec\ 6°30'\ 0''=10.064680$,

$L\,sin 31°53'41''=\ 9.722930$

$L\,sin Z\qquad =29.784809$

$\therefore\ Z=142°27'48''$,

$$\begin{array}{r} 142°27'48'' \\ 31°53'41''\text{(干} \\ \hline \end{array}$$

$110°34'\ 7''\div2=55°17'34''$,　(此秒數誤然無從改校者註)

$174°21'29''\div2=87°10'45''$.

$\therefore\ L\,sin 55°17'34''=\ 9.914909$.

$L\,csc\,87°10'45''=10.000527$,

$$\begin{array}{r} 30°30'0'' \\ 6°30'0''(+ \\ \hline \end{array}$$

$36°60'0''\div2=18°30'$,

$L\,cot\,18°30'0''=10.475480$,

$L\,tan(45°+\frac{1}{2}PZ)=30.390916-20$.

$\therefore\ 45°+\frac{1}{2}PZ=67°52'38''$,　　$\therefore\ PZ=45°45'16''$.

即北緯四十五度四十五分十六秒.

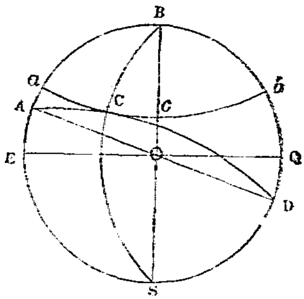
12. 知二恆星之赤緯度,及赤經度.試求其二星間之距離.

例題1 天商星在北赤緯 $16°11'56''$. 赤經度 $4^h 27^m 12^s$. 北河星在北赤緯 $28°23'18''$. 赤經度 $7^h 36^m$. 試求其距離.

決定此問題.則從赤道上取二星之赤經度之差.通過此二星子午圈之極角測之.卽 $7^h 36^m 0^s - 4^h 27^m 12^s = 47° 12'$.

故以適宜大之六十度弦尺爲半徑.作最初圓 BESQ.表通過子午圈.卽最小赤緯度之恆星之赤緯線.

今過中心 O.引直徑 EOQ.表示赤道.與此直交之直徑.表地球之軸,或表距最初圓 $90°$ 之子午圈.卽赤經線.而從 E 點切取弧 EA.令其最小之赤緯度,等於 $16°11'56''$.定天商星之位置 A.引直徑 AOD.交最初之圓於 D.通過 B 點.且與最初之圓傾斜 $47°12'$ 作圓.又以 B 爲極.北河星赤緯度餘角之弧 $61°36'42''$ 爲半徑.作圓 acb.交 BOS 圓於 C 點.則 C 點爲北河星之位置.



通過 A, C, D 三點.作圓 ACD.則弧 AC.表示兩星之距離.而由三角形 ABC.知 BA, BC 爲二星之極距.ABC 爲二星赤經度之差卽極角.

故 AC 爲所求.

故由三角形之公式.得

$$\cos AC = \sin AB \sin BC \cos B + \cos AB \cos BC,$$

$\therefore\quad \log M = L\sin AB + L\sin BC + L\cos B - 30,$

$\log N = L\cos AB + L\cos BC - 20,$

$\therefore\quad M + N = \cos AC.$

以例題1之既知件代入而測算之.則

$L\cos\ 47°\ 12'\ 0'' =\ 9.832154,$

$L\cos\ 28°\ 23'\ 18'' =\ 9.944356,$

$L\cos\ 16°\ 11'\ 56'' =\ 9.982407,$

$\log M \qquad = 29.758917 - 30,$

$\therefore\quad M = 0.57401,$

又 $L\sin 28°\ 23'\ 18'' =\ 9.677100,$

$L\sin 16°\ 11'\ 56'' =\ 9.445561,$

$\log N \qquad = 19.122661 - 20,$

$\therefore\quad N = 0.13264,$

$\therefore\quad M + N = 0.57401 + 0.13264 = 0.70665 = \cos 45°\ 2'\ 14'',$

$\therefore\quad AC = 45°\ 2'\ 14''.$

例題2. 求天門河鼓二星之角距.

但 天門在赤緯度 $10°\ 21'\ 59''$ 南.赤經度爲 $13^h\ 17^m\ 11^s$.

河鼓在赤緯度 $27°\ 13'\ 36''$ 北.赤經度 $15^h\ 28^m\ 15^s$.

$15^h\ 28^m\ 15^s$

$13\ \ 17\ \ 11\ (-$

$2^h\ \ 11^m\ \ 4^s = 32°\ 46'\ 0'',$

$\therefore$ $L\cos 32^\circ 46'\ 0'' = 9.924735,$

$L\cos 27^\circ 13' 46'' = 9.948990,$

$L\cos 10^\circ 21' 59'' = 9.992853,$

$\log M \qquad = 29.866578 - 30,$

$\therefore$ $M = 0.73549,$

又 $L\sin 27^\circ 13' 46'' = 9.660443,$

$L\sin 10^\circ 21' 59'' = 9.255135,$

$\log N \qquad = 18.915578 - 20,$

$\therefore$ $-N = -0.08233,$

其赤緯之一在南.故 N 爲負數.而

$M - N = 0.73549 - 0.08233 = 0.65316 = \cos 49^\circ 13' 11''.$

例題 3. 求太陽與太陰之距角.

但太陽之赤緯度在北 $22^\circ 12' 33''$.

赤經度 $7^h 19^m 10^s$.

太陰之赤緯度在南 $11^\circ 39' 10''$.

赤經度 $14^h 39^m 46^s$.

$14^h\ 39^m\ 46^s$

$7 \quad 19 \quad 10$

$7^h\ 20^m\ 36^s = 110^\circ 9' 0''.$

$\therefore$ $L\cos 110^\circ\ 9'\ 0'' = 9.537163,$

$L\cos 11^\circ 39' 10'' = 9.990956,$

$L\cos 22^\circ 12' 23'' = 9.966522,$

$\log M \qquad = 29.494641 - 20,$

$\therefore$ $-M = -0.31235,$

又　$L\sin 11°\,39'\,10'' = 9.305309,$

$L\sin 22°\,12'\,33'' = 9.577479,$

$\log N \quad = 18.882788 - 20,$

$\therefore \quad -N = -0.07635.$

本題赤經度之差.比 90° 大.而太陰之赤緯度在南.故 M, N 俱爲負.

$$-M - N = -0.31235 - 0.07635 = -0.38870 = \cos 112°\,52'\,35''.$$

(終)

球面三角法講義勘誤表

頁	行	原　文	訂　正
4	12	比第三邊小	比第三邊大
18	15	$\sqrt{\left\{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}\right.}\cdots$	$\sqrt{\left\{\frac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B \sin C}\right\}}\cdots$
	17	$\sqrt{\left\{-\frac{\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}\right.}$	$\sqrt{\left\{-\frac{\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}\right\}}\cdots$
23	7	間　題　二	問　題　二
78	15	$\sin\gamma \sin$ CN	〔重　出　應　删〕
88	4	$\{\cos(A+B)\cos-(\pi-S)-$	$\{\cos(A+B)\cos-(\pi-C)-$
104	19	$=\frac{1}{2n}\{\qquad\cdots 76$	$=\frac{1}{2n}\{\qquad\}\cdots 76$
109	3	$=\frac{1}{n^3}[\qquad]$	$=\frac{1}{n^2}[\qquad]$
129	8	x_2, y_2, z_3:	x_2, y_2, z_2:
192	19	其第五方乘上者	其第五方乘以上者
197	10	此 P⊙Q	此 P⊙S
198	2	地在北緯	池在北緯
223	12	或俱在南之時	或俱在南方之時

Lectures on Spherical Trigonometry

Commercial Press, Ltd.

中華民國八年二月初版
中華民國十二年一月再版

(球面三角法講義一冊)
(每冊定價大洋壹元貳角)
(外埠酌加運費滙費)

編譯者 泰和匡文濤
校訂者 紹興壽孝天
發行者 商務印書館
印刷所 商務印書館 上海北河南路北首寶山路
總發行所 商務印書館 上海棋盤街中市
分售處 商務印書分館 北京天津保定奉天吉林龍江 濟南太原開封洛陽西安南京 杭州蘭谿安慶蕪湖南昌漢口 長沙常德成都重慶瀘縣福州 廣州潮州香港桂林梧州雲南 貴陽張家口新嘉坡