Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 24

Übungsaufgaben

Aufgabe 24.1. Lucy Sonnenschein fährt fünf Stunden lang Fahrrad. In den ersten zwei Stunden schafft sie 30 km und in den folgenden drei Stunden schafft sie auch 30 km. Was ist insgesamt ihre Durchschnittsgeschwindigkeit?

Aufgabe 24.2. Es seien

$$f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Beweise, dass es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

Aufgabe 24.3. Es seien

$$f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen und es sei $g(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Zeige, dass es dann ein $s \in [a,b]$ gibt mit

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(s)\int_a^b g(t)\,dt.$$

Aufgabe 24.4.*

Beweise den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für differenzierbare Funktionen

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein kompaktes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (es muss nicht gezeigt werden, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit im Innern des Intervalls angenommen wird).

Aufgabe 24.5. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$. Zeige, dass $F(x-a)$ eine Stammfunktion zu $f(x-a)$ ist.

Aufgabe 24.6. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$. Zeige, dass $-F(-x)$ eine Stammfunktion zu $f(-x)$ ist.

Aufgabe 24.7. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$. Zeige, dass $F(x) + cx$ eine Stammfunktion zu $f(x) + c$ ist.

Aufgabe 24.8. Bestimme eine Stammfunktion zu

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 2,$$

die an der Stelle 3 den Wert 5 besitzt.

Aufgabe 24.9. Berechne das bestimmte Integral $\int_0^8 f(t)\,dt$, wobei die Funktion f durch

$$f(t) = \begin{cases} t+1, \text{ falls } 0 \le t \le 2\,, \\ t^2 - 6t + 11, \text{ falls } 2 < t \le 5\,, \\ 6, \text{ falls } 5 < t \le 6\,, \\ -2t + 18\,, \text{ falls } 6 < t \le 8\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 24.10. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{4} 3x^2 - 5x + 6\,dx\,.$$

Aufgabe 24.11. Ein Körper werde zum Zeitpunkt 0 losgelassen und falle luftwiderstandsfrei aus einer gewissen Höhe unter der (konstanten) Schwerkraft der Erde nach unten. Berechne die Geschwindigkeit $v(t)$ und die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t. Nach welcher Zeit hat der Körper 100 Meter zurückgelegt?

Aufgabe 24.12.*

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1, 4]$.

Aufgabe 24.13. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_2^5 \frac{x^2+3x-6}{x-1}\,dx\,.$$

Aufgabe 24.14. Bestimme den Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Sinusfunktion zwischen 0 und π.

Aufgabe 24.15.*

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 24.16. Es sei a die minimale positive Zahl mit $\sin a = \cos a$. Berechne den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die durch den Graphen des Kosinus und den Graphen des Sinus oberhalb von $[0, a]$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 24.17.*

Bestimme den Durchschnittswert der Quadratwurzel $\sqrt{x}$ für $x \in [1, 4]$. Vergleiche diesen Wert mit der Wurzel des arithmetischen Mittels von 1 und 4 und mit dem arithmetischen Mittel der Wurzel von 1 und der Wurzel von 4.

Aufgabe 24.18. Bestimme den Durchschnittswert des Sinus $\sin x$ für $x \in [0, \pi]$.

Aufgabe 24.19.*

Wir betrachten die Exponentialfunktion e^x auf einem Intervall der Form $[a, a+1]$.

(1) Bestimme den Mittelwert (Durchschnittswert) der Exponentialfunktion auf $[a, a+1]$.
(2) Bestimme den Punkt $c \in [a, a+1]$, in dem die Exponentialfunktion den Durchschnittswert annimmt.
(3) Was fällt auf?

Aufgabe 24.20.*

Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6, 22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f\colon [6, 22] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Aufgabe 24.21.*
Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \ln 2$$

gilt. Tipp: Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[1, 2]$.

Aufgabe 24.22. Bestimme die zweite Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 - t^3 + 2t}\, dt.$$

Aufgabe 24.23. Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$h(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\, dt$$

differenzierbar ist und bestimme ihre Ableitung.

Aufgabe 24.24. Es sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die durch

$$a_n := \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)\, dt$$

definierte Folge. Entscheide, ob diese Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 24.25. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit $a_n \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a_n} f(x) dx$$

absolut konvergent ist.

Aufgabe 24.26. Man zeige, dass die Gleichung

$$\int_0^x e^{t^2} dt = 1$$

eine einzige Lösung $x \in [0, 1]$ besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.27. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^7 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x+1}\, dx \,.$$

Aufgabe 24.28. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \,.$$

Aufgabe 24.29. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^2 \text{ und } g(x) = -2x^2 + 3x + 4$$

eingeschlossen wird.

Aufgabe 24.30. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} \text{ für } t \neq 0 \,. \end{cases}$$

Zeige, unter Bezug auf die Funktion $g(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, dass f eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 24.31. (5 Punkte)

Betrachte die durch

$$a_n \;=\; \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$$

gegebene Folge. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

(Verwende Eigenschaften der Wurzelfunktion.)

Aufgabe 24.32. (6 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft gibt, dass das Treppenintegral zur maximalen unteren Treppenfunktion zur äquidistanten Unterteilung in n Teilintervalle größer ist als dasjenige zu $n+1$ Teilintervallen (d.h. mehr Teilungspunkte führen zu einer schlechteren Approximation).

(Ignoriere zuerst die beiden Bedingungen stetig und streng.)

Abbildungsverzeichnis