Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 17

Aufgabe 17.1. Vergleiche die Definition 17.1 eines geometrischen Vektorbündels über einem Schema mit der Definition 1.4 eines reellen Vektorbündels über einem topologischen Raum.

Aufgabe 17.2. Es sei $p\colon V \to X$ ein geometrisches Vektorbündel vom Rang r über dem Schema X. Zeige, dass die Faser zu p über dem Punkt $P \in X$ isomorph zu $\mathbb{A}^r_{\kappa(P)}$ ist.

Aufgabe 17.3. Was ist ein Vektorbündel über einem Schema X vom Rang 0?

Aufgabe 17.4. Diskutiere das triviale Geradenbündel

$$\operatorname{Spek}(\mathbb{Z}[X]) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \operatorname{Spek}(\mathbb{Z}).$$

Was kann man über die Fasern, was über Schnitte, was über abgeschlossene Teilmengen $Y \subseteq \operatorname{Spek}(\mathbb{Z}[X])$ und ihre Bilder in $\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$ sagen?

Aufgabe 17.5. Bestimme in Beispiel 17.3 die Trivialisierungen und die Übergangsabbildungen explizit.

Aufgabe 17.6. Zeige, dass in Beispiel 17.4 bei $k = 0$ das triviale Geradenbündel

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{P}^n_K} = \mathbb{A}^1_K \times \mathbb{P}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

vorliegt.

Aufgabe 17.7. Zeige, dass in Beispiel 17.4 bei $k = 1$ die sogenannte Projektion weg von einem Punkt

$$\mathbb{P}^{n+1}_K \supset \mathbb{P}^{n+1}_K \setminus (0,0,\ldots,0,1) = V_1 \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

vorliegt.

Aufgabe 17.8. Es sei X ein Schema und seien $p\colon V \to X$ und $W \to X$ Vektorbündel über X vom Rang r bzw. s. Definiere die *direkte Summe* $V \times_X W$ der beiden Vektorbündel unter Bezugnahme auf (simultane) Trivialisierungen $V|_U \cong \mathbb{A}_U^r$ und $W|_U \cong \mathbb{A}_U^s$ (es soll also $(V \times_X W)_U \cong V|_U \times_U W|_U \cong \mathbb{A}_U^{r+s}$ gelten).

Aufgabe 17.9. Definiere Konstruktionen aus der linearen Algebra wie direkte Summe, Dual, Tensorprodukt, äußeres Produkt für geometrische Vektorbündel über einem Schema.

Man orientiere sich an der dritten Vorlesung.

Aufgabe 17.10. Zeige, dass bei einem geometrischen Vektorbündel $V \to X$ der Nullschnitt eine abgeschlossene Einbettung ist.

Aufgabe 17.11. Es sei $p\colon V \to X$ ein Vektorbündel über X. Zeige, dass die Addition $\alpha\colon V \times_X V \to V$ die folgenden Eigenschaften besitzt (es ist zugleich zu zeigen, dass die angegebenen Morphismen existieren).

(1) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{\mathrm{Id} \times (N \circ p)}{\longrightarrow} & V \times_X V \\ & \mathrm{Id} \searrow & \downarrow \alpha \\ & & V \end{array}$$

kommutiert, wobei $N\colon X \to V$ den Nullschnitt bezeichnet.

(2) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times_X V & \stackrel{\pi}{\longrightarrow} & V \times_X V \\ & \alpha \searrow & \downarrow \alpha \\ & & V \end{array}$$

kommutiert, wobei π die Vertauschung der beiden Faktoren bezeichnet.

(3) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times_X V \times_X V & \stackrel{\alpha \times \mathrm{Id}}{\longrightarrow} & V \times_X V \\ \mathrm{Id} \times \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ V \times_X V & \stackrel{\alpha}{\longrightarrow} & V \end{array}$$

kommutiert.

Zur folgenden Aufgabe vergleiche man Aufgabe 1.6.

Aufgabe 17.12. Es sei K ein Körper. Wir betrachten

$$A = K[X,Y,U,V]/(XU+YV-1),$$

die Spektrumsabbildung

$$\mathrm{Spek}\,(A) \longrightarrow \mathrm{Spek}\,(K[X,Y]) = \mathbb{A}_K^2$$

und die Einschränkung

$$p\colon\ \mathrm{Spek}\,(A) = D(X,Y) = V \longrightarrow U = D(X,Y) \subseteq \mathbb{A}_K^2$$

(worauf beruht die Gleichheit links?) Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Abbildung p ist auf $D(X)$ und auf $D(Y)$ isomorph zur affinen Gerade über der Basis.
(2) Die Abbildung $p\colon\ V \to U$ besitzt keinen Schnitt.
(3) V ist kein Geradenbündel.

Aufgabe 17.13. Es sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ über einem Körper K. Es seien $f_1, \ldots, f_n, f$ Elemente in R und es sei

$$A = R[T_1, \ldots, T_n]/(f_1T_1 + \cdots + f_nT_n + f)$$

die erzwingende Algebra zu diesen Daten. Es sei

$$p\colon\ \mathrm{Spek}\,(A) \supseteq V = D(f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow U = D(f_1, \ldots, f_n) \subseteq \mathrm{Spek}\,(R)$$

die eingeschränkte Spektrumsabbildung. Zeige, dass es eine offene affine Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ derart gibt, dass $p^{-1}(U_i)$ isomorph zu $U_i \times \mathbb{A}^{n-1}$ ist, und dass dabei die Übergangsabbildungen affin-linear sind.

Aufgabe 17.14. Zeige, dass ein Homomorphismus von trivialen Vektorbündeln

$$\varphi\colon\ \mathbb{A}^r_{\mathrm{Spek}\,(R)} \longrightarrow \mathbb{A}^s_{\mathrm{Spek}\,(R)}$$

über dem affinen Schema $\mathrm{Spek}\,(R)$ durch eine $s \times r$-Matrix über R gegeben ist.

Aufgabe 17.15. Zeige, dass ein Homomorphismus von Vektorbündeln

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow W$$

über X den Nullschnitt von V (aufgefasst als abgeschlossenes Unterschema) in den Nullschnitt von W abbildet.

Aufgabe 17.16. Es sei $\varphi\colon V \to W$ ein Homomorphismus von Vektorbündeln V, W über X. Zeige, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times_X V & \stackrel{\varphi \times \varphi}{\longrightarrow} & W \times_X W \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ V & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & W \end{array}$$

kommutiert (ein Vektorbündelhomomorphismus ist also mit der Addition verträglich).

Aufgabe 17.17. Wir betrachten den Homomorphismus von trivialen Vektorbündeln

$$\varphi\colon \mathbb{A}^2_{\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})}$$

über $\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$, der durch die 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ gegeben ist. Bestimme die Punkte $P \in \operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$, für die die zugehörige Faserabbildung injektiv bzw. surjektiv ist.

Aufgabe 17.18. Es seien V und W Vektorbündel über einem Schema X und $\varphi\colon V \to W$ ein surjektiver Homomorphismus von Vektorbündeln. Zeige, dass der (punktweise genommene) Kern ein Vektorbündel über X ist.

Aufgabe 17.19. Es seien V und W Vektorbündel über einem Schema X. Zeige, dass die Garbe der Schnitte der direkten Summe $V \times_X W$ gleich der direkten Summe der Garbe der Schnitte von V und W ist.

Aufgabe 17.20. Zeige, dass die Garbe der Schnitte zu dem Geradenbündel

$$V_k \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

aus Beispiel 17.4 die getwistete Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(k)$ ist.

Aufgabe 17.21. Es seien $p\colon Y \to X$ und $q\colon Z \to X$ Schemata über einem Schema X und sei $\varphi\colon Y \to Z$ ein Schemamorphismus über X. Zeige, dass die zugehörige Abbildung der Garbe der Schnitte (in der Kategorie der Schemata) $\mathcal{S}_Y \to \mathcal{S}_Z$, die einem Schnitt $s\colon U \to p^{-1}(U)$ den Schnitt $\varphi \circ s\colon U \to q^{-1}(U)$ zuordnet, ein Garbenmorphismus ist.

Aufgabe 17.22. Es sei $\varphi\colon V \to W$ ein Vektorbündelhomomorphismus zwischen den Vektorbündeln V und W über X und sei

$$\psi\colon \mathcal{S}_V \longrightarrow \mathcal{S}_W$$

der zugehörigen Garbenmorphismus der Garbe der Schnitte. Zeige, dass ψ ein $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus ist.

Aufgabe 17.23. Es seien V und W Vektorbündel über dem Schema X und seien $\mathcal{S}_V$ $\mathcal{S}_W$ die zugehörigen Garben der Schnitte. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Hom}(V, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{S}_V, \mathcal{S}_W),$$

die einem Vektorbündelhomomorphismus der zugehörigen $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus zuordnet, eine Bijektion ist. Zeige ferner, dass sich unter dieser Korrespondenz die Isomorphismen entsprechen.

Aufgabe 17.24. Es seien V und W Vektorbündel über einem Schema X und $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ die zugehörigen lokal freien Garben der Schnitte. Es sei $\varphi\colon V \to W$ ein Homomorphismus von Vektorbündeln und $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ der zugehörige Garbenhomomorphismus. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) φ ist ein surjektiver Schemamorphismus.
(2) In jedem Punkt $P \in X$ ist die Faserabbildung $V(x) \to W(x)$ surjektiv.
(3) Der Homomorphismus $\psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist surjektiv.
(4) Es gibt eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und lokale Schnitte (Vektorbündelhomomorphismen)

$$s_i\colon W|_{U_i} \longrightarrow V|_{U_i}$$

zu φ.
(5) Es gibt eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und lokale Schnitte (Modulhomomorphismen)

$$t_i\colon \mathcal{G}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_i}$$

zu ψ.

Abbildungsverzeichnis