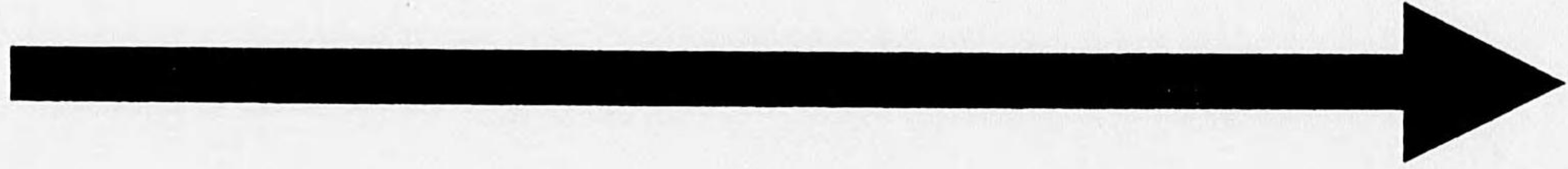


始





929  
13







929

13

## 序

本書は故東京帝國大學教授從三位勳二等工學博士山内鎮一君の遺著である。山内博士は温厚篤學の士であり、その學殖の深きは同僚友人並に學生の常に畏敬するところであつた。

然るに昨年10月22日電車内に於て腦溢血症を起し、遂に急逝せられたのは誠に痛恨の至りである。

博士の専攻は砲架構造及理論であり、その一部である高射砲の射撃計算機の講義をしてゐられた關係上特に精密なる齒車の必要を痛感せられ、それが動機となつて本書の原稿を作成されたものと想像される。本稿は進むにつれ初等齒車講義と題して逐次精機協會誌[精密機械]に發表せられたものである。

今その内容を見るに、極めて初歩のところから周到なる注意を以て齒車の原理を、諄々と説き、齒車の具備すべき諸性質、各種齒型の性質、滑り率、齒面干涉等に到るまで、之を理論的に解明したもので、齒車を學ばんとする人々には誠によき參考書であると思はれる。

山内教授の他の遺稿は特殊向のものであるから別途に出版されることになつてゐるが、本書は一般向のものとして理化書院から出版されることになつたのである。茲に本書の由來と内容の概要を略記して、永く記念すると共に、本書の汎く利用されんことを冀ふ次第である。

昭和16年9月 日

山内教授記念出版委員會委員長

同 學 青 木 保



## 目 次

第 1 章 回轉の速さの表はし方	1
回轉速度と線速度	1
角速度	2
線速度から見た角速度	4
瞬間的の回轉軸と其の回轉角速度	5
速度の分解及び合成	6
分速度と角速度との關係	8
第 2 章 滑り接觸と轉り接觸	10
直接接觸に依る運動の傳達	10
直接接觸に於ける角速度比	11
滑り接觸と轉り接觸	12
轉り接觸の條件と角速度比	14
第 3 章 相對運動	16
相對速度	16
移動する回轉軸	17
相對回轉速度	19
轉り接觸に於ける相對轉り線速度	20
第 4 章 ひら齒車	22
ひら齒車の基本的意味	22
齒車のピッチ	23
直徑ピッチとモジュール	25
齒及び齒車の各部名稱	27
圓周ピッチの最大値と接觸位置軌跡	27



第5章 歯の接觸條件	30
歯は滑り接觸をする	30
歯の滑りの量的變化	31
歯の形についての必要條件	32
歯形を求める根本法則	33
對手歯形を求める畫法	34
エンベロープ線に依る歯形の求め方	36
第6章 サイクロイド	41
ルレット	41
サイクロイド	43
種々のサイクロイド	44
第7章 サイクロイド歯車の成立	48
サイクロイド歯形の可能性	48
サイクロイド歯形の實用形狀	50
第8章 サイクロイド歯車の性質	53
接觸位置軌跡と壓力角	53
サイクロイド歯車間の滑り	58
第9章 サイクロイド歯車の種々の型	62
小型歯車	62
内歯車	65
内歯車の接觸位置軌跡	67
ピン歯車	70
グラント氏略近畫法	71
第10章 インボリュート	74

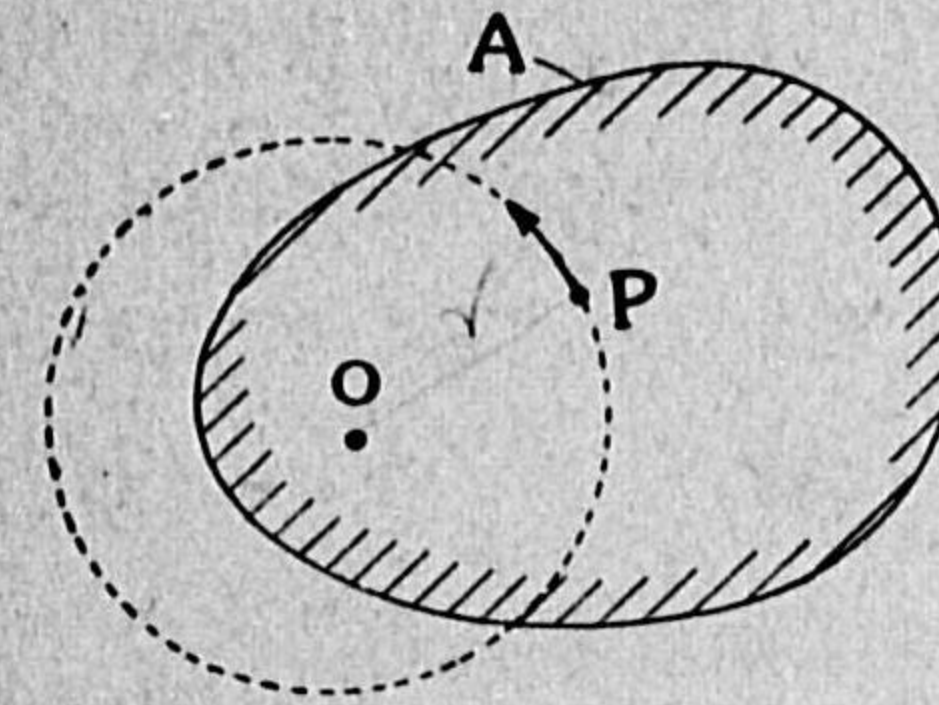
インボリュート	74
インボリュートの二三の性質	75
インボリュートを利用した簡単な装置	77
インボリュートの數式的な表し方	81
第11章 インボリュート歯車	85
インボリュート歯車の成立	85
接觸位置軌跡,壓力角,角速度比	88
インボリュート内歯車	90
内接嚙合の壓力角と接觸位置軌跡	93
第12章 インボリュート歯形の計算	96
計算其一	96
計算其二	97
計算其三	98
計算其四	100
計算其五	102
計算其六	104
第13章 インボリュート歯車のピッチ	106
ピッチ圓の不確定であること	106
ピッチ的數値の表し方	107
連續運轉のために必要な條件	109
條件(C)への計算	112
交換性インボリュート歯車と規格ピッチ圓	115
ラックとの嚙合について補説	118
第14章 滑り率	120
曲率半徑	120



インボリュートの曲率半径	121
インボリュート歯面の相互運動	124
滑り率	125
滑り速度	128
ラックに於ける滑り率	129
ラックに於ける滑り速度	132
第15章 歯先圓と滑り率	134
歯先圓半径	134
上齒高	136
ラックの上齒高	138
最大滑り率	140
第16章 接觸齒數	144
インボリュート齒車の接觸齒數	144
内接の接觸齒數	148
第17章 上齒高制限と齒數制限	152
上齒高制限	152
互換性齒車の齒數制限	154
壓力角の影響	158
第18章 齒面干涉	159
アングカッタ	159
アングカッタと接觸齒數	161
アングカッタ圓半径	165
索引	171

## 第1章 回轉の速さの表はし方

回轉速度と線速度 或る固形物體Aが、O點を通つて此の紙面に垂直な軸の周に廻つてゐるとする。言葉を簡單にするために、こんな場合には以後は單に或る物體AがO軸の周に廻つてゐるといふ風な言ひ方にしておく。このとき其の回轉速度が1分



第1圖

間につきN回轉であるといふことは、其の物體の中の勝手な一點、例へばP點がO軸の周に圓周を描きながら(第1圖)、毎分N回の割合で其の圓に沿つて廻るといふことである。勿論その速度が其の1分間の

間は變化なしに續いたものとしての計算である。「回轉速度が1分間につきN回轉である」といふ代りに、これからは「回轉速度がNである」といふことにする。

この場合に、P點がvなる線速度(linear velocity)を有してゐると吾々はいふ。回轉速度が今述べたやうに變化なしに續いたものと假定したときに、P點が單位時間、例へば1秒間に此の圓に沿つて動く長さの數を以て線速度vとする。即ち回轉速度がNだとすると、1秒間にはN/60回轉する。従つて1秒間に動いた長さ、即ちP點の線速度vは

$$v = (\text{圓周一と廻りの長さ}) \times \frac{N}{60}$$

である。今O軸とP點との距離をr cm とすると、圓周一と廻りの長さは $2\pi r$  cm だから、線速度vは長さの單位をcm、時間の單位

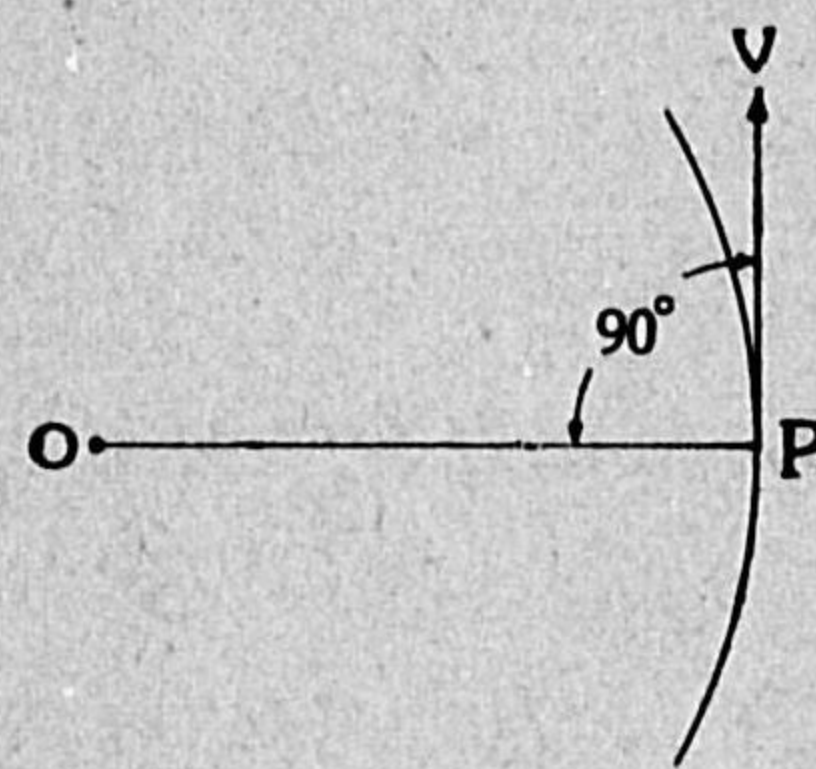


を秒としたときに

$$v = 2\pi r \frac{N}{60} \quad (1)$$

である。こゝで断つておくが、今の物体Aは唯單にO軸の周に廻つてゐるだけで、その他の運動はして居ないとして話である。Aが全體として移動してゐるやうな場合には、P點の線速度は上式とは違つてくる。線速度にはいつも此の種の注意が伴ふものと了解されたい。

一般に速度は大きさと共に方向を有してゐる。線速度も従つてvなる大きさと共に、或る方向を有してゐる。今の場合にP點はO



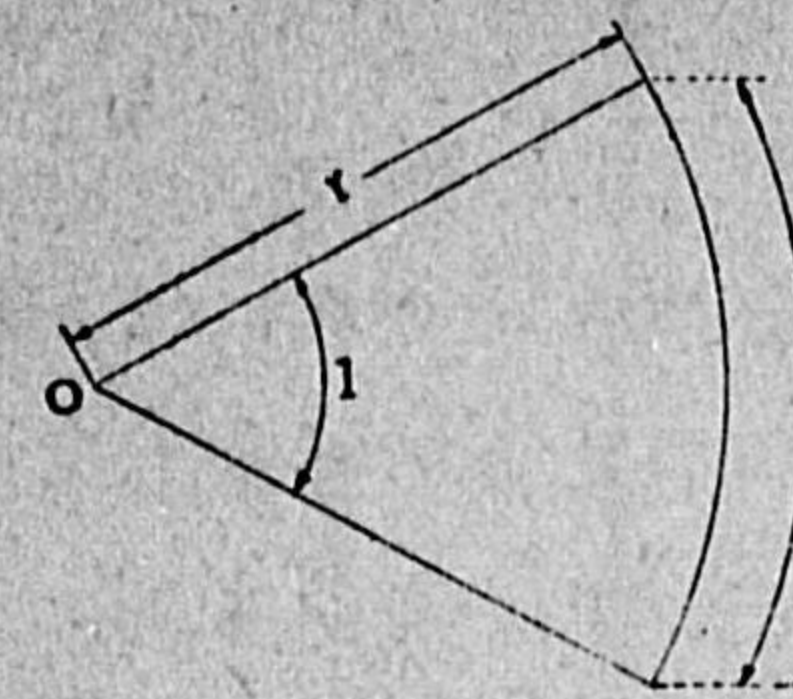
第2圖

軸を取巻く圓に沿つて動いてゐるのだから、どの瞬間に於ても、P點は其の圓に切する直線の方へ進まうとしてゐる筈である。即ちP點の線速度の方向は、P點からO軸へ下した垂直線と90°の角をなして、進行の方向へ向いてゐると考へていゝ。だからP點の線速度を圖上に示すには、第2圖の如く、其の瞬間のP點から矢を立て、矢の向きはPO線に直角とし、進行方向に矢尖を向け、矢の全長をvの數に比例させればいゝ。

**角速度**—— 前述のやうに物体AはO軸の周に1秒間にN/60回の割合で廻つてゐるから、1秒間に廻る角を度の單位で表はすと、それは  $360^\circ \times (N/60)$  度である。これを此の物体のO軸の周の角速度といふ。角速度を  $\omega$  なる文字で表はすとすると、即ち

$$\omega = 360 \frac{N}{60} = 6N \quad (2)$$

である。勿論これは角の單位を度とし、時間の單位を秒としたと



第3圖

きの値である。

角の單位には度の外にラジアン (radian) といふのがあつた。1ラジアンといふ角の大きさは、圓周の中から其の圓の半徑に等しい長さの一つの圓弧を切り、

其の圓弧の兩端を圓の中心へ夫々直線

で結びつけたときに、其の二直線の間角(第3圖)の大きさである。

従つて圓周を一と廻りした角、即ち  $360^\circ$  をラジアン單位で表はすと、圓周の長さは  $2\pi r$  だから

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ ラジアン}$$

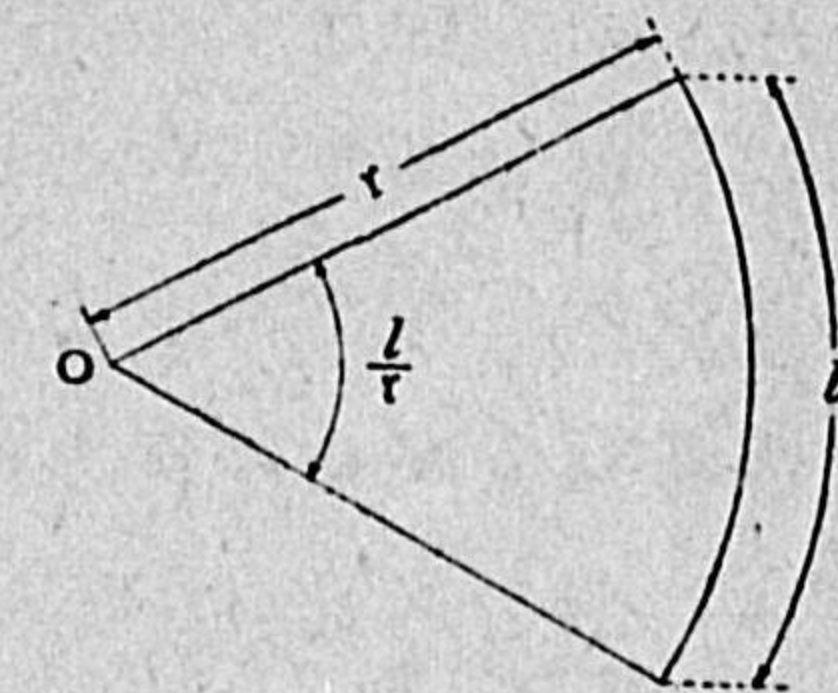
といふことになる。即ちこれが  $360^\circ$  だから1ラジアンは

$$57.2957795^\circ = 57^\circ 17' 44.806'' = 206,264.806''$$

に相當する。一般に長さがlである圓弧が、上述と同じ作圖をしたとき、中心に對して開く角(第4圖)は

$$l/r \text{ ラジアン}$$

である。但しこの場合に長さlと長さrとは、同じ單位で數へられることが必要である。



第4圖

角速度を度と時間秒との單位で表はす代りに、ラジアンと時間秒とで表はす方が計算上便利であることが甚だ多い。ラジアン單位の角速度とは、1秒間にO軸の周に廻つた角をラジアンで表はした値である。1回轉の角は  $2\pi$  ラジアンだから、O軸の周に毎秒N/60回の割合で廻つてゐるAのラジアン單位角速度は



$$\omega = \frac{N}{60} \times 2\pi = \frac{\pi N}{30} \text{ ラジアン/秒} \quad (3)$$

(ラジ)

である。さきに度で表した角速度  $\omega$  (度) は  $6N$  であつたから、物体 A の同じ回転速度に於て、兩角速度の数値の割合は

$$\frac{\omega \text{ (ラジ)}}{\omega \text{ (度)}} = \frac{\pi N}{30} \div 6N = \frac{\pi}{180}$$

である。

**線速度から見た角速度**—— 物体 A が O 軸の周に廻つてゐるとき、その中の或る点 P の線速度が若し  $v$  であるとする、その瞬間の A の回転の角速度は、この  $v$  からして逆に求められる。即ち式(2)又は式(3)へ式(1)を代入して  $N$  を消去すると

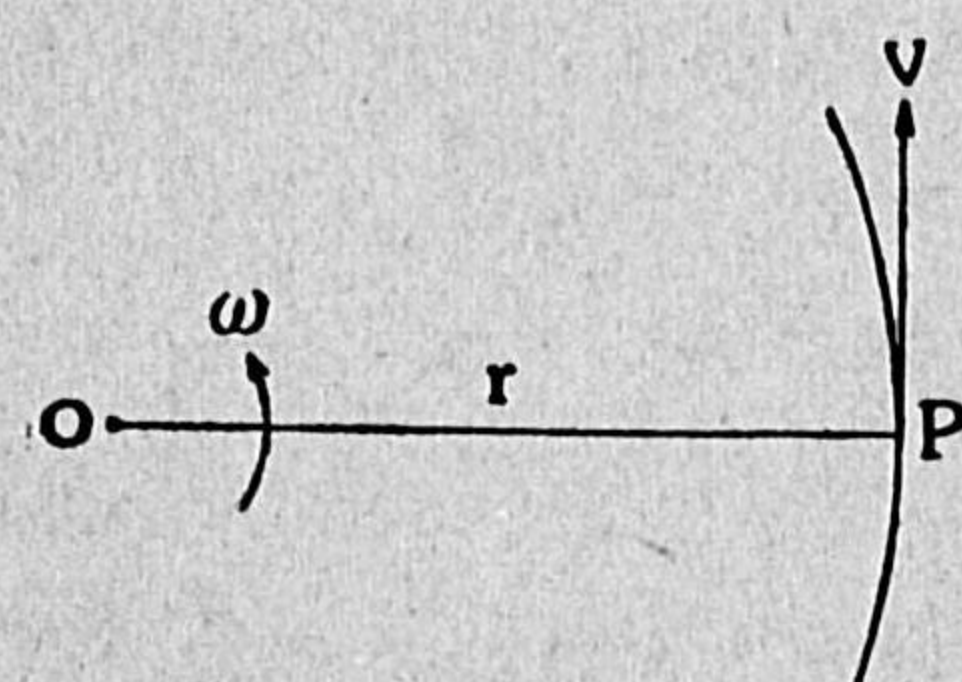
$$\omega = \frac{v}{2\pi r} \times 360 = \frac{180}{\pi} \times \frac{v}{r} \text{ 度/秒}$$

(度)

$$\omega = \frac{v}{2\pi r} \times 2\pi = \frac{v}{r} \text{ ラジアン/秒}$$

(ラジ)

となる。これらの式で、 $v/2\pi r$  は P 点が 1 秒間に O 軸の周を廻る回数を示し、従つて一と廻りの角度  $360^\circ$  又は  $2\pi$  を之に乗じて角速度の値を得たものと考へても宜しい。



第5圖

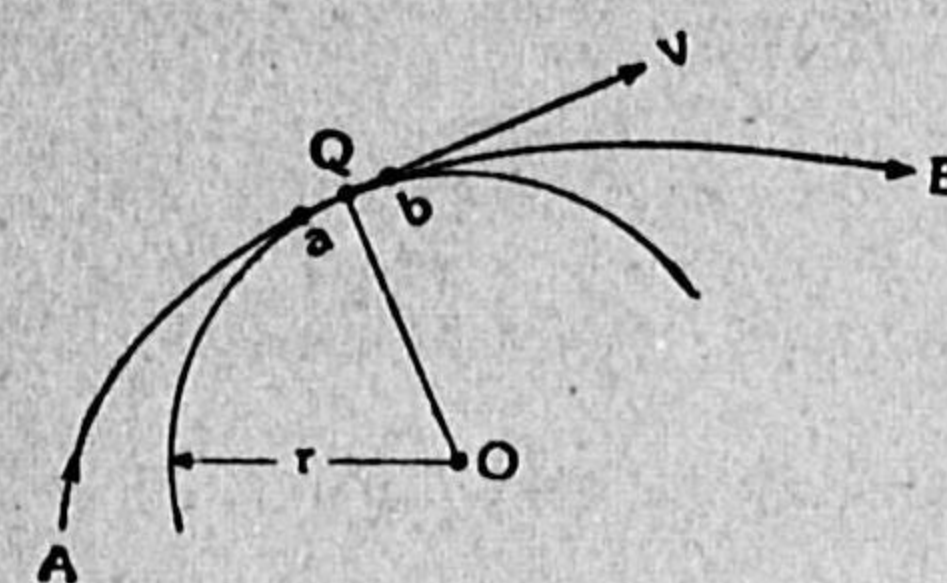
若し角がいつもラジアン単位で測られるものとする、上式からして

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{v}{OP} \quad (4)$$

即ち或る点の線速度と、回転軸又は回転中心から其の点への距離とが知れてゐると(第5圖)、この式から其の回転の角速度が計算される。これは歯車の理論に於て最も有用な式である。但し此の式で長さの単位は分子と分母とで同じ単位、例へば cm が用ひられてゐる。

ることを必要とする。

**瞬間的の回転軸と其の回転角速度**—— P 点が常に一定の軸 O の周に廻つてゐるなら、P の動く路は無論 O 軸を中心とし、半径が



第6圖

$\overline{OP}$  なる圓となるべきだが、P 点の回転の軸が瞬間毎に異なる場合には、P 点の通路はもはや圓ではなくて、其の場合に應じた或る何等かの曲線となるであらう。例へば P 点が第6圖に示す如く曲線 AB なる通路を行くものとし、其の中の任意の一点 Q を P 点を通る瞬間を考へ、そのときに P 点の有する線速度が  $v$  であるとしよう。其の線速度の方向は即ち Q 点に於ける其の曲線への切線と同じである。

P 点 が Q 点 を通るときの回転軸は何處にあるか。それは普通には數學的方法に従つて求められるのだが、茲では之を簡単に考へて、Q 点を挟む成るべく極く近い二点 a 及び b を曲線上に採つて、曲線の此の部分  $\widehat{ab}$  と丁度重なり合ふ圓を描くものとする、その圓の中心 O が即ち求めるところの瞬間的回転軸の位置を大體に於て示すものである。

此の圓の半径を  $r$  とすると、式(4)に従つて

$$\omega = \frac{v}{r} \text{ ラジアン/秒}$$

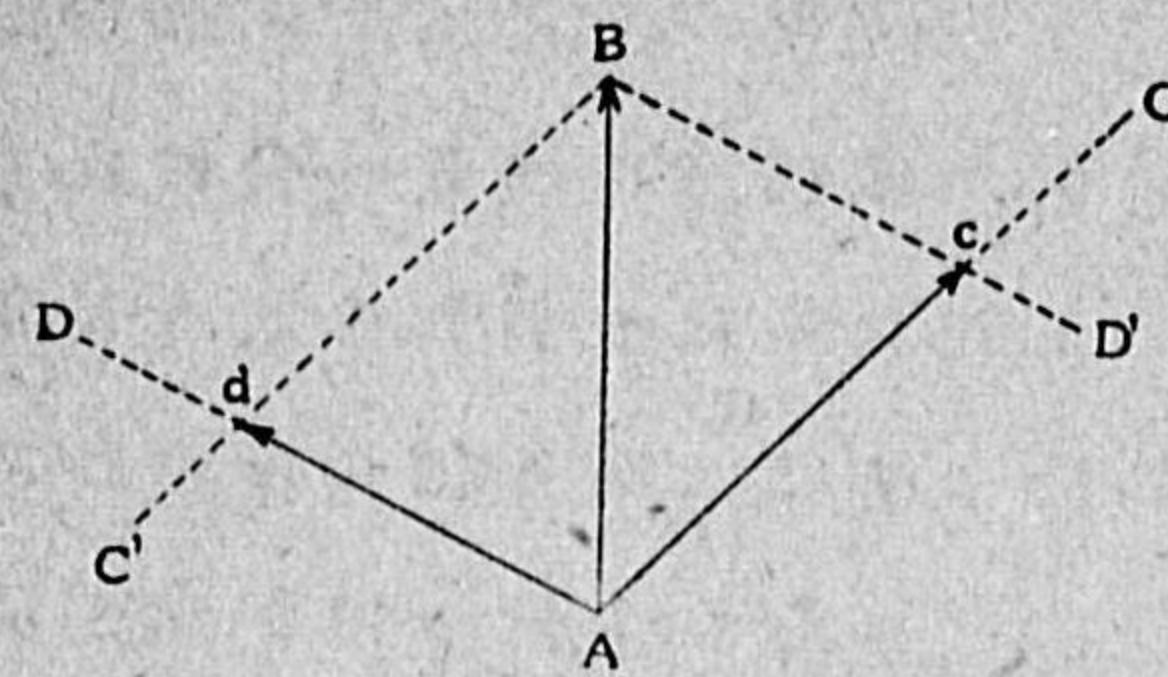
これが Q 点に於ける P の瞬間的角速度である。だから要するに、回転軸又は回転中心が時々刻々に變化する此の種の回転運動に於ても、回転の角速度は一々の瞬間に於て

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\text{瞬間的線速度}}{\text{瞬間的回轉半径}} \text{ ラジアン/秒}$$

で表はされ得る。



**速度の分解及び合成**——或る一點の速度を圖で現はすには、前に第2圖で示した如く一つの矢を以てし、矢の長さが其の速度の數に比例するやうにすると述べた。例へば矢の長さを1秒間に



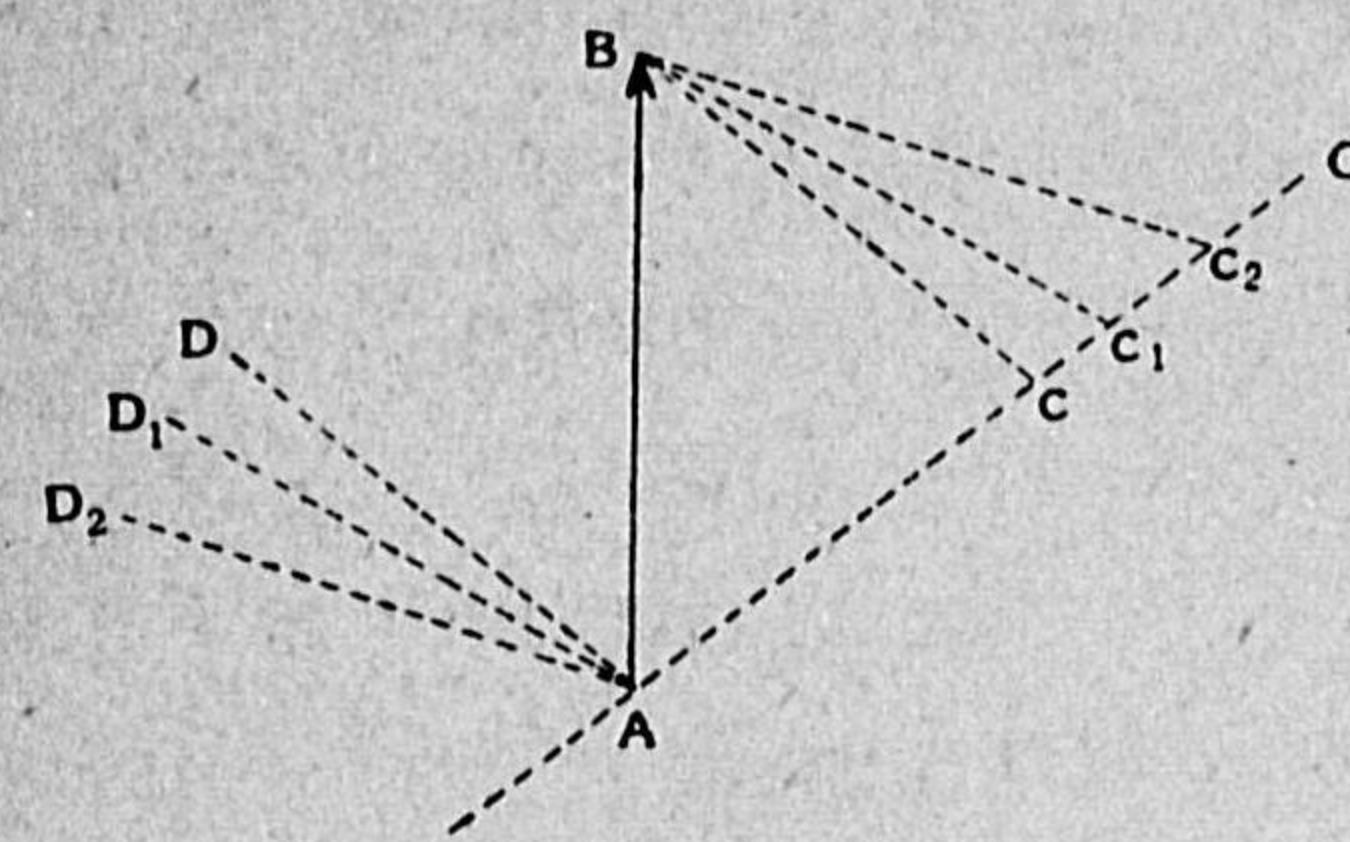
第7圖

動く長さに等しくすると定めても宜しい。即ち速度を現はす矢が第7圖の如く  $\overline{AB}$  であるとすると、最初にAに在つたP點が、1秒間の後にはBに在ることとなる。P點をAからBへ移すには、單にAB方向の速度だけで移すことの代りに、他の任意の二つの方向、例へばAC方向の速度とAD方向の速度とに依つて移すことも出来る。AC線に平行にBC'線を引いて、それがAD線と交るところをd點とし、同様にしてBD'とACとの交點をc點とすると、矢  $\overline{Ac}$  で現はされる速度と、矢  $\overline{Ad}$  で表はされる速度とを同時に與へた場合にもP點は同じく1秒間の後にはAからBへ移る。1秒間をもつと短かい時間に刻んで、各短小時間毎にP點がACに平行に、且同時にADに平行に移動させられると考へたら、このことを一層理解し易いかも知れない。以上の如き場合に、言葉を簡單にするために、速度  $\overline{Ac}$  及び速度  $\overline{Ad}$  を合成すると速度  $\overline{AB}$  となると呼び、又或は逆に、速度  $\overline{AB}$  をAC方向及びAD方向に分解すると速度  $\overline{Ac}$  及び速度  $\overline{Ad}$  となると呼ぶ。従つて速度  $\overline{AB}$  を速度  $\overline{Ac}$  及び速度  $\overline{Ad}$  の合成速度(resultant)と言ひ、速度  $\overline{Ac}$  及び速度  $\overline{Ad}$  を夫々方向AC及び方向ADへの速度  $\overline{AB}$  の分速度(component)と言ふ。分速度は又更に同様の手続きで其の下の分速度へ分解され得るから、一つの點の速度は任意

動く長さに等しくすると定めても宜しい。即ち速度を現はす矢が第7圖の如く  $\overline{AB}$  であるとすると、最初にAに在つたP點が、1秒間の後にはBに在ることとなる。P點をAから

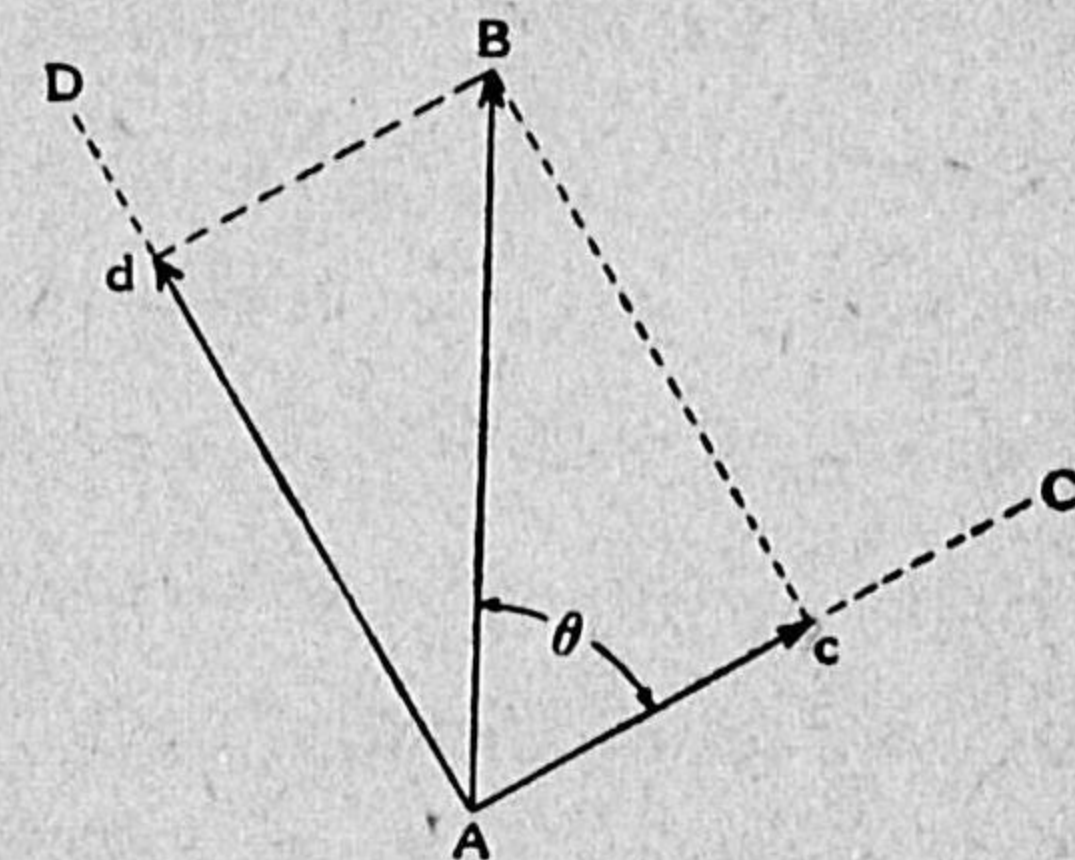
のいくつかの速度に分解され得るし、一點の有する任意のいくつかの速度は、其の點の唯一つの速度に合成せられ得る。

今矢  $\overline{AB}$  で現はされた速度があるときに、AC方向への其の分



第8圖

速度  $\overline{Ac}$  は、もう一つ別の方向ADが與へられたときに始めて其の大きさが定まる。第8圖に示すやうに、他の方向がADであり、又はAD<sub>1</sub>であり、又はAD<sub>2</sub>であるに従つて、AC方向の分速度は  $\overline{Ac}$  であり、又は  $\overline{Ac}_1$  であり、又は  $\overline{Ac}_2$  であるからである。即ち單に一つ方向ACだけを與へて其の方向への分速度といふことは確定的には言へないのである。然しながら一つの約束として、ACなる一つ方向が指定されたとき、他の一つ方向は之に直角をなす方向AD(第9圖)であると了解することにすれば、今述べた不確定さは消失するから、普通には屢々此の約束に従ふのである。即ち普通に速度  $\overline{AB}$  のAC方向への分速度と單にいふ場合にはBからAC線へ



第9圖

垂線を下して其の交點をcとし、 $\overline{Ac}$ を以て其の分速度とするのである。AB線とACとの間の角度を $\theta$ とすると、従つて

$$\text{分速度 } \overline{Ac} = (\text{速度 } \overline{AB}) \times \cos \theta$$

である。同じ意味でAD方向への分速度はAd(第9圖)であると



考へて

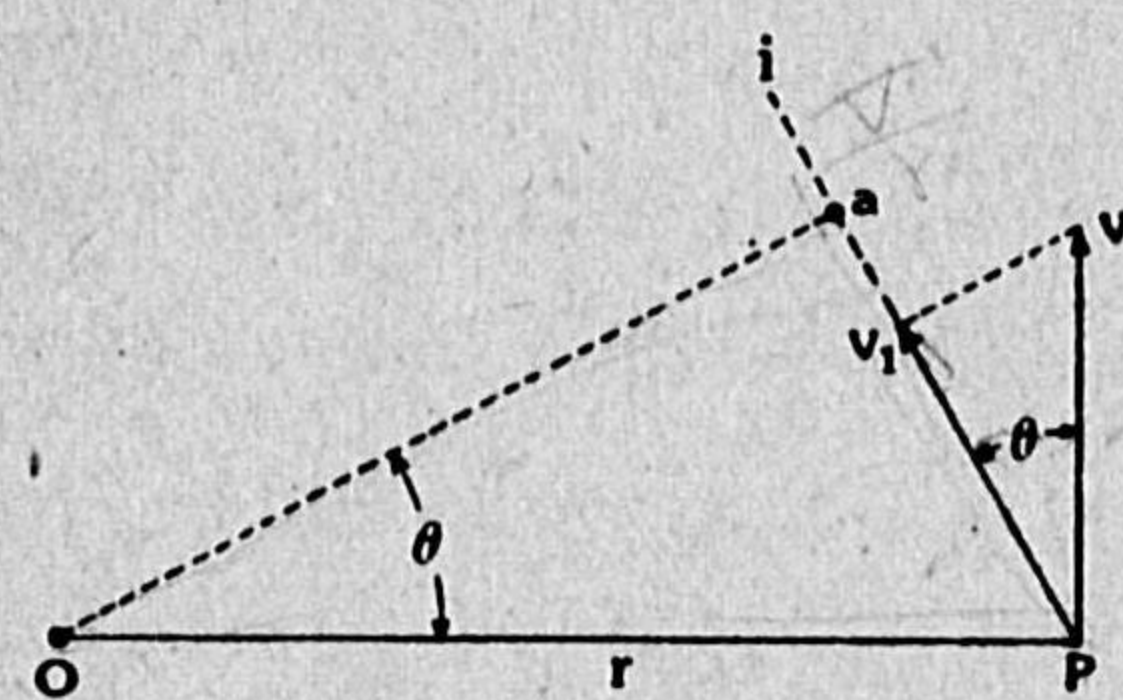
$$\text{分速度 } \overline{Ad} = (\text{速度 } \overline{AB}) \times \sin \theta$$

である。以上の意味の分速度  $\overline{Ac}$  及び  $\overline{Ad}$  は、言葉を丁寧にすると、互に直角な方向の分速度である。即ち一つの速度は互に直角な方向の二つの分速度から合成せられ、それらの間には直角三角形の定理に従つて

$$\overline{AB}^2 = \overline{Ac}^2 + \overline{Ad}^2$$

なる関係がある。

**分速度と角速度との関係** — 物體AがO軸の周に廻つてゐる



第10圖

とき、その一点Pの線速度を $v$ とし、 $\overline{OP}$ の長さを $r$ とする。 $v$ の向きはOP線に直角である。今 $v$ の向きと角度 $\theta$ をなした線Pi(第10圖)方向への $v$ の分速度を $v_1$ とすると、前節の式

からして

$$v_1 = v \cos \theta$$

である。又O点からPi線へ下した垂線の長さ $\overline{Oa}$ は

$$\overline{Oa} = r \cos \theta$$

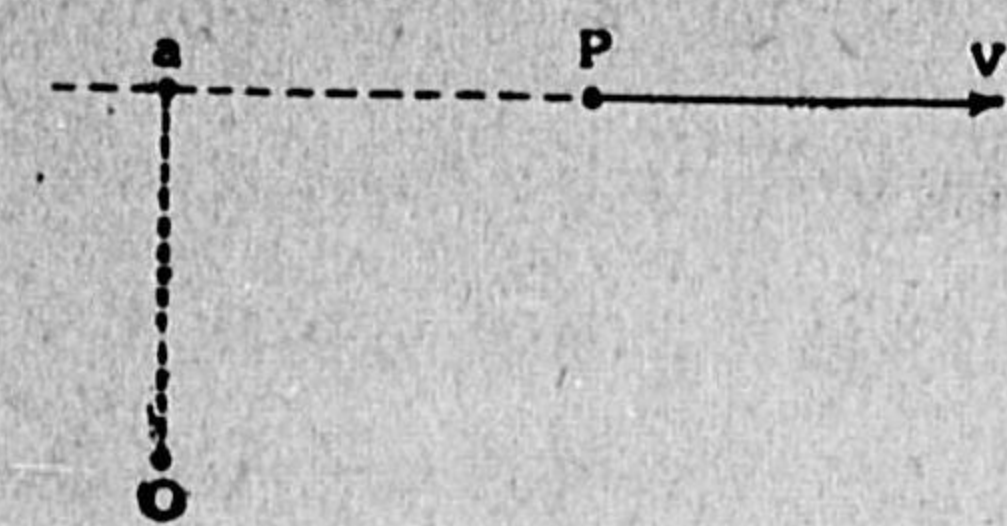
である。故に此の兩式から

$$\frac{v_1}{\overline{Oa}} = \frac{v \cos \theta}{r \cos \theta} = \frac{v}{r}$$

となる。然るに式(4)に依ると、此の物體の角速度 $\omega$ は $v/r$ に等しいのだから、

$$\frac{\text{分速度 } v_1}{\overline{Oa}} = \text{角速度} \quad (5)$$

となる。言ひ換へると、或る物體がO軸の周りに廻つて居るため



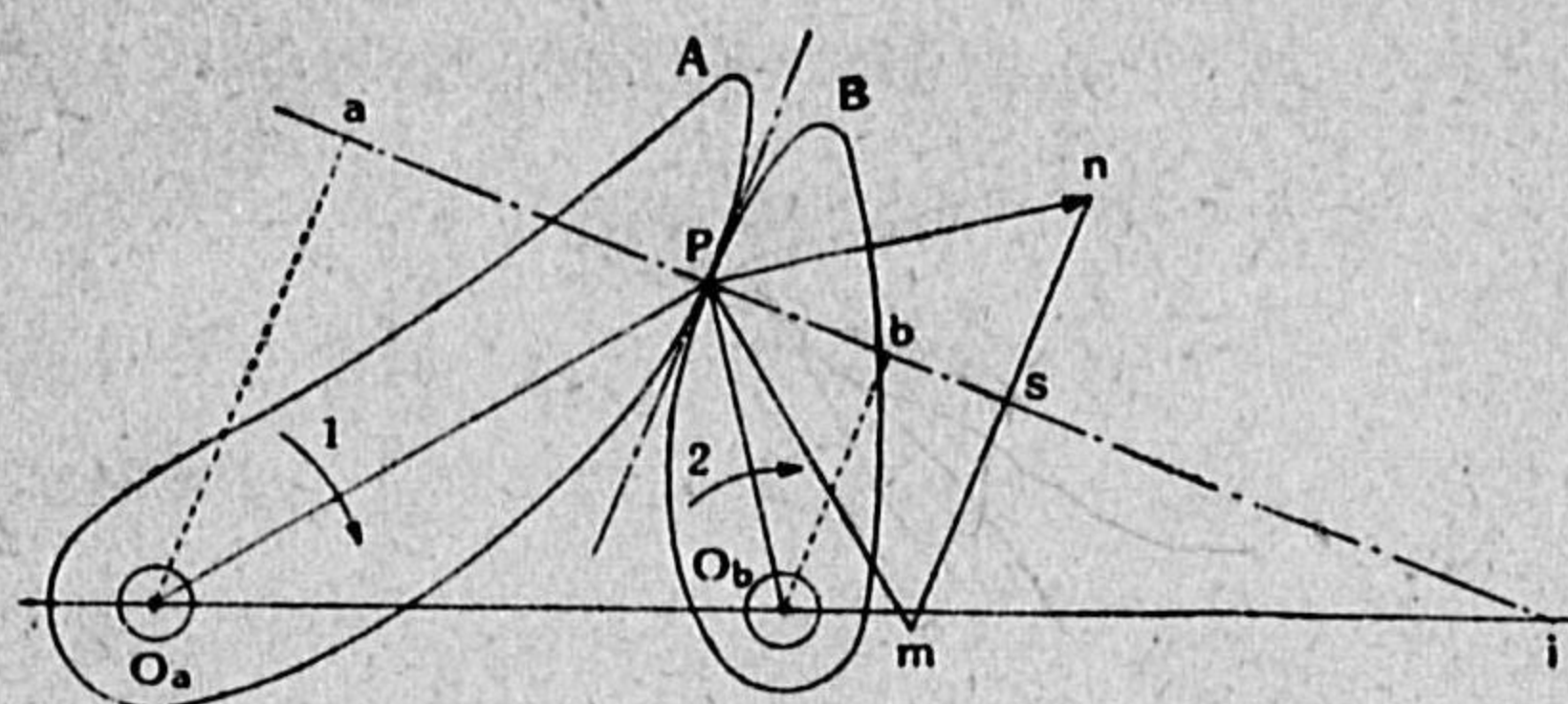
第11圖

に、その中の一点Pが或る方向へ分速度 $v_1$ を有してゐるとすると、その物體の回轉の角速度は式(5)で與へられる。 $\overline{Oa}$ は其の分速度 $v_1$ の線へ下したO軸からの垂線(第11圖)の長さである。合成速度についても同じことは勿論言へる。



## 第 2 章 滑り接触と轉り接触

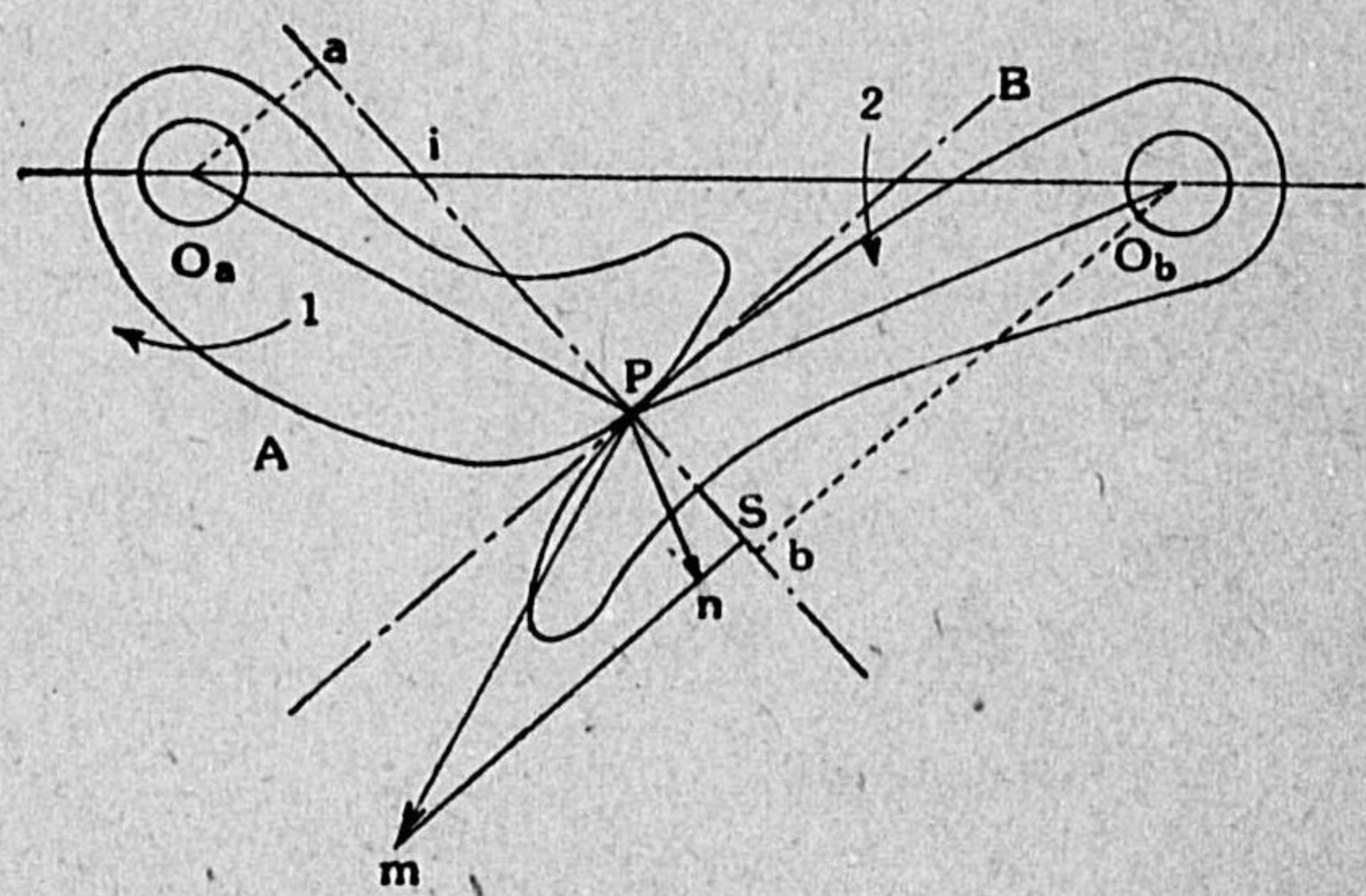
直接接触に依る運動の傳達 —— 二つの平面體 A 及び B (第 12 圖



第 12 圖

又は第 13 圖)があつて、A は  $O_a$  軸の周に廻り得、B は  $O_b$  軸の周に廻り得、ものとする。又 A 及び B の縁邊は紙面に直角な平滑な面

出來てゐるとする。今 A 及び B が圖の如く其の縁邊中的一点 P で互に接してゐるとしよう。このとき A を  $O_a$  軸の周に矢 1 の方向へ廻すと、之に押されて B は其の軸  $O_b$  の周に矢 2 の方向へ廻されるだらう。此の種類の装置は直接接触に依る運動の傳達装置と呼ばれるべきで、特に此の場合は回

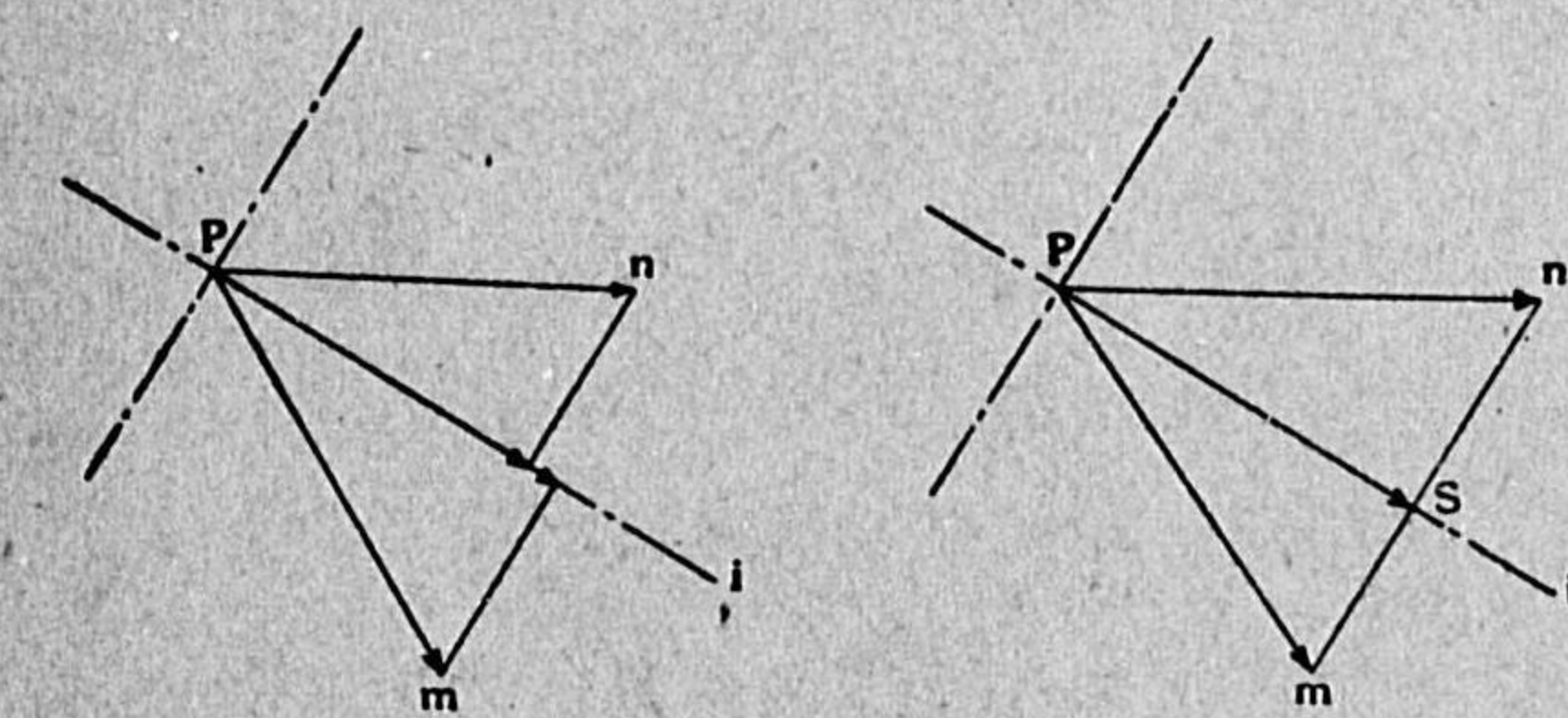


第 13 圖

轉運動の傳達装置である。A に押されて B が動くのであるから、兩者の内 A を主動體 (driver), B を從動體 (follower) といふ。然し乍ら茲に示した圖の装置では、逆に B を以て A を押し動かすこと

もでき、即ち可逆的 (reversible) な装置であるから、此の場合に主動體從動體の區別は其のものに屬する絶對的な性質ではない。

直接接触に於ける角速度比 —— 今 A を以て B を連続的に廻すものとし、其の回轉傳達の途中の或る瞬間に於て第 12 圖又は第 13 圖の如く兩者の縁邊が P 點に於て相接してゐるとする。この瞬間に於て A に屬する P 點の線速度を  $\overline{Pm}$ 、B に屬する P 點の線速度を  $\overline{Pn}$  としたとき、直接接触に依つて回轉運動を A B 間に傳へるためには、 $\overline{Pm}$  と  $\overline{Pn}$  との間如何なる關係があることを必要條件とするかを先づ調べよう。兩者が P 點で接してゐるのだから、その接點に於て平面形狀が尖銳でない限り、P 點に於て兩縁邊へ共通に切線及び垂直(線鏈線で圖示したもの)を描くことが出来る。然も此の共通垂直線  $Pi$  の線に沿つては、A に屬する P 點と B に屬する P 點とが同じ速さで同じ側へ向つて動いてなくてはならない。若しそうでないとすると、AB が互に開き離れたり、或は互に押つぶしたりしなければならぬからである。此の條件を別の言葉で言ひ直すと、 $\overline{Pm}$  なる速度の  $Pi$  方向への分速度と、 $\overline{Pn}$  なる速度の  $Pi$  方向への分速度とが全く相等しくなくてはならぬと



第 14 圖

方向へ互に相等しい分速度  $P_s$  をもつことである。

いふことである。此の條件を更に圖で示せば、第 14 圖に於て左圖の如くではなくて右圖の如くになり、共通垂直線  $Pi$







ひ方では車輪は轉り接触でなくて、滑り接触をやつてゐるのである。それは共通切線方向、即ち路面方向の分速度が車輪と地面とで、滑り量だけ異なるからである。

轉り接触の條件と角速度比 — AとBとがP點で轉り接触をするために必要な條件と、そのときのAB間の角速度比とを求め、轉り接触の場合には同じ方向に於て

$$\overline{Pm'} = \overline{Pn'}$$

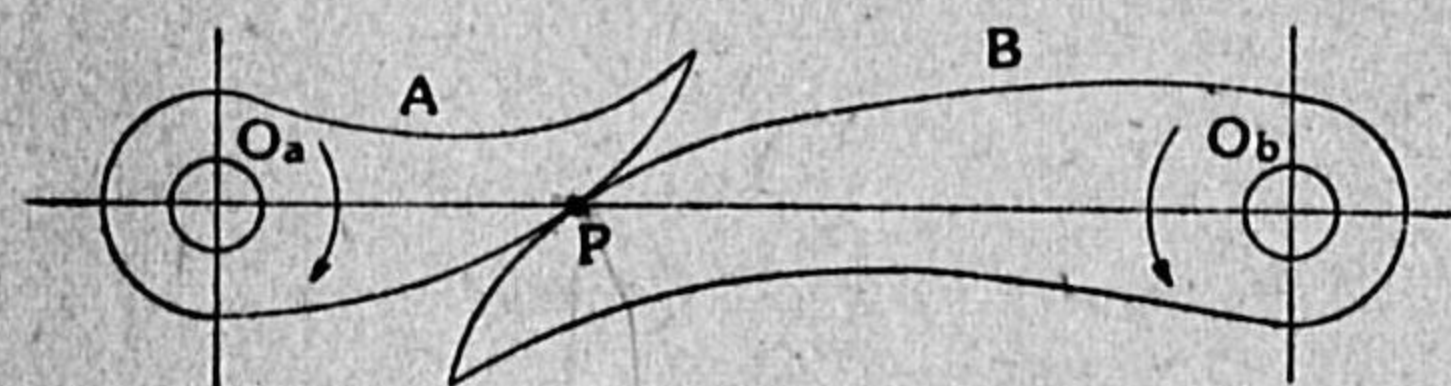
だつたから、第16圖で

$$\overline{sm} = \overline{sn}$$

となり、従つて  $\angle mPn$  は零となる。然るに  $\overline{Pm}$  はAに屬するP點の線速度だから  $\angle O_a P m$  は  $90^\circ$  であり、同様にして  $\angle O_b P n$  も  $90^\circ$  だから、

$$\angle O_a P m + \angle m P n + \angle O_b P n = \angle O_a P O_b = 180^\circ$$

となる。即ち轉り接触に於ては、接觸點Pを紙面内に於て  $O_a$  軸へ結びつけた直線  $O_a P$  と、同じく  $O_b$  軸へ結びつけた直線  $O_b P$  とが



第17圖

一直線をなすのである。言ひ換へると、紙面内に接觸點があるとき、紙面内で  $O_a$  軸と  $O_b$  軸とを直線で結びつけると、その直線は接觸點を通るのである。即ち第17圖の如く直線  $O_a O_b$  内に接觸點Pがあることになる。これが轉り接触をなすに必要な條件である。

此の場合に接觸點Pへ共通垂直線を描くと、それは  $O_a O_b$  線とP點に於て交る。即ち第12圖、第13圖のi點が此の場合にはP點と合致するのである。さきに直接接觸の場合の角速度比が式(7)で

$$\frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{\overline{O_b i}}{\overline{O_a i}}$$

であることを述べたが、轉り接触と雖も直接接觸の一種に外ならないから、やはり此の式が成立し、然も今述べたやうにi點はP點に合致するのだから

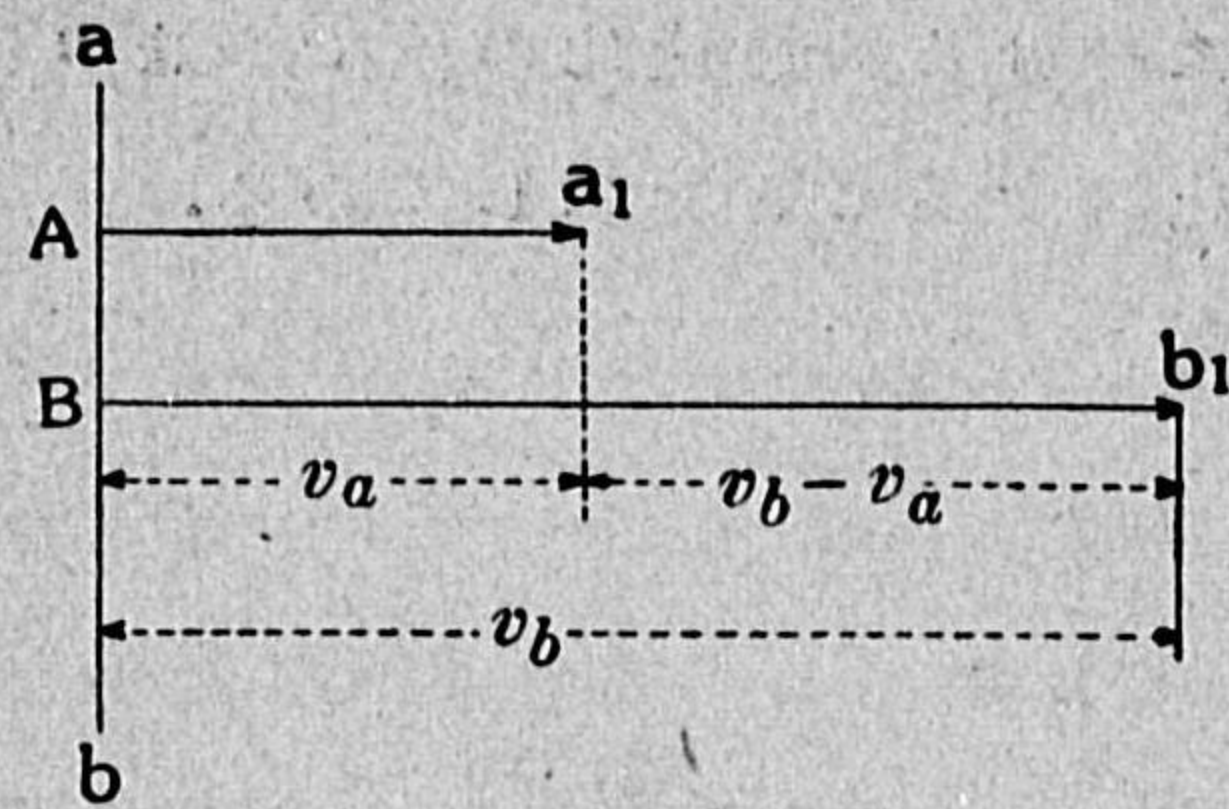
$$\frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{\overline{O_b P}}{\overline{O_a P}} \quad (8)$$

となる。これが即ち轉り接觸に於ける角速度比の値で、つまり接觸點と回轉中心との距離に逆比例することを示してゐる。



### 第3章 相對運動

相對速度 —— 二つの物體 A と B (第18圖) とが互に平行に動いて  
るものとして, A の速度を  $v_a$ , B の速度を  $v_b$  とする. 今兩者が或

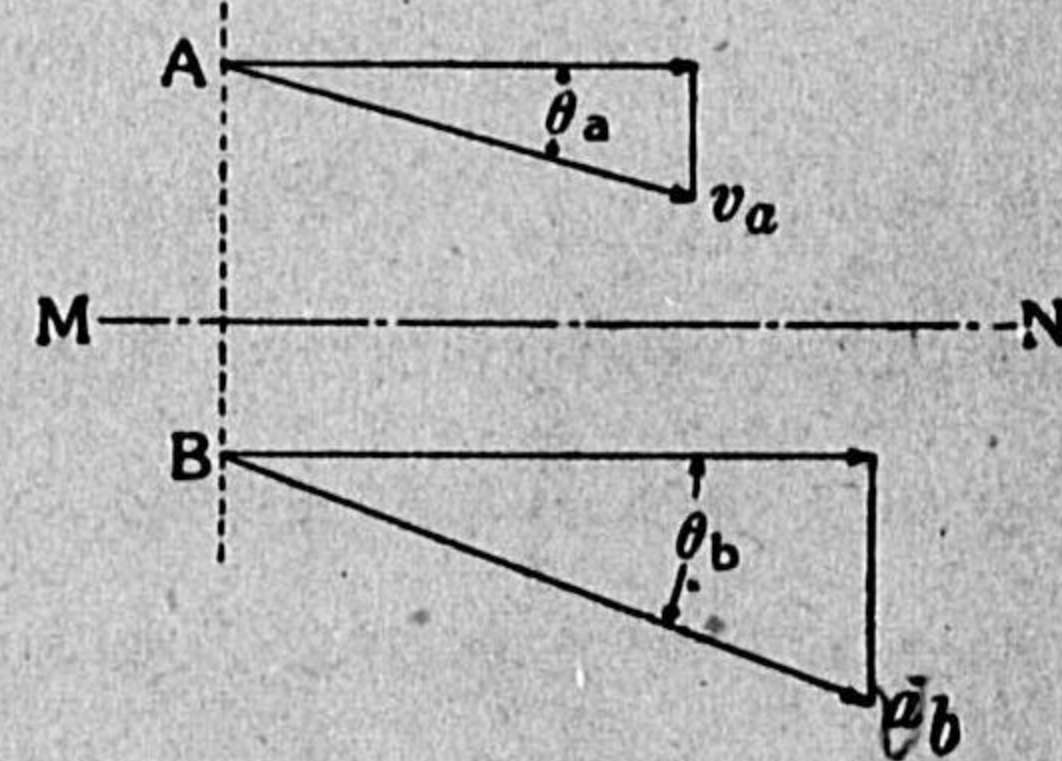


第18圖

る瞬間では丁度  $ab$  線上に相  
並んで居たとし, その速さを  
續けて1秒間を経た後では,  
A は  $a_1$  に在り, B は  $b_1$  に在  
るとしよう. すると  $\overline{aa_1} = v_a$ ,  
 $\overline{bb_1} = v_b$  だから  $a_1$  と  $b_1$  との  
前後の隔りは  $(v_b - v_a)$  である.

だから A の上に或る観測者が乗つてゐるものと想像し, その観測  
者が B の運動を眺めたとする, B は恰も其の観測者に對して速  
度  $(v_b - v_a)$  で動いてゐる様に見られるだらう. なぜならば今述べ  
たやうに最初の瞬間には観測者と共に  $ab$  線に並んで居た B が, 1  
秒間の後には観測者よりも  $(v_b - v_a)$  だけ前方へ進んでゐるからであ  
る.  $(v_b - v_a)$  を A に對する B の速度, 或は A に對する B の相對速度,  
又は A に相對的な B の速度といふ.

A と B とが互に平行とは限らな  
い異つた方向へ動いてゐるとす  
ると, 或る一つの任意の方向例へば M  
N なる方向(第19圖)について考へそ  
の方向への分速度に對して同じや  
うなことが言へる筈である. 即ち



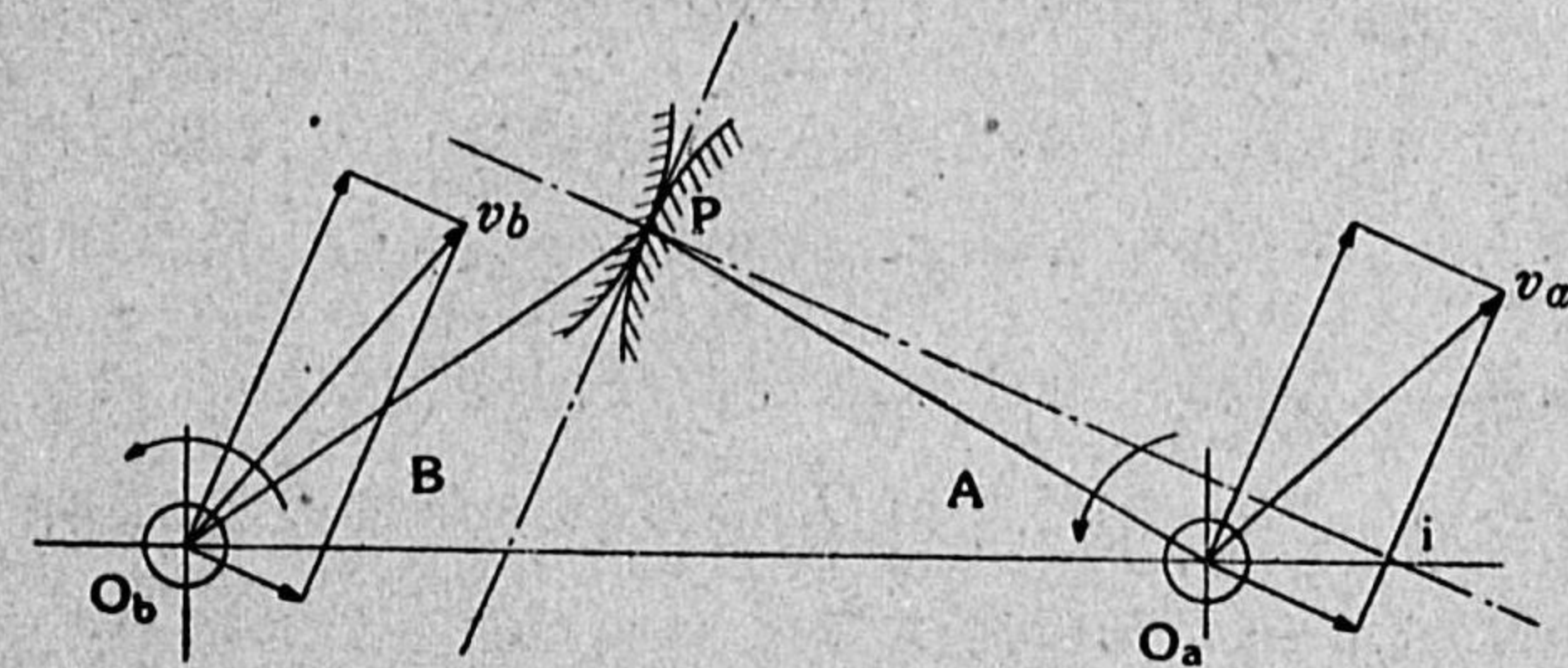
第19圖

MN 方向に對して  $v_a$  がなす角度を  $\theta_a$ ,  $v_b$  がなす角度を  $\theta_b$  とす  
ると MN 方向への分速度は A に於ては  $v_a \cos \theta_a$ , B に於ては  $v_b \cos \theta_b$   
だから,

$$v_b \cos \theta_b - v_a \cos \theta_a$$

なる値を以て A に對する B の MN 方向相對速度と呼び得るわけ  
である.

移動する回轉軸 —— 前に述べた如く二つの物體 A 及び B が夫  
夫  $O_a$  及び  $O_b$  を軸とし, P を接觸點として直接接觸をやつてゐる  
とする. これまで述べたところでは軸の位置は不變と考へて來  
たが, 若しそうでなくて, それらが動いてゐるものとする(第20圖), 第  
2章の接觸條件はどうなるか問題である. この場合には, 例へば  
A 軸に對する B 軸の移動の相對速度を, 接觸點に於ける共通垂直  
線の方について求め, それが零であれば, 直接接觸に依つて運動



第20圖

を傳へるための條件は第2章のまゝで宜しい. 同様にして共通  
切線方向相對速度が零であるなら, 滑り接觸と轉り接觸との區別  
條件も亦第2章の通りで宜しい. 以上に反し, 相對速度が零でな  
い場合には, 接觸點 P が軸の周りに回轉することに基く線速度の  
分速度へ, 軸そのものゝ移動に基く分速度を加へ又は減じたもの



について AB を比較し、其の値が共通垂線方向に於て AB 相等しければ直接接触に依る傳動が行はれ、それが更に共通切線の方に於て AB 相等しければ轉り接觸が成立つのである。

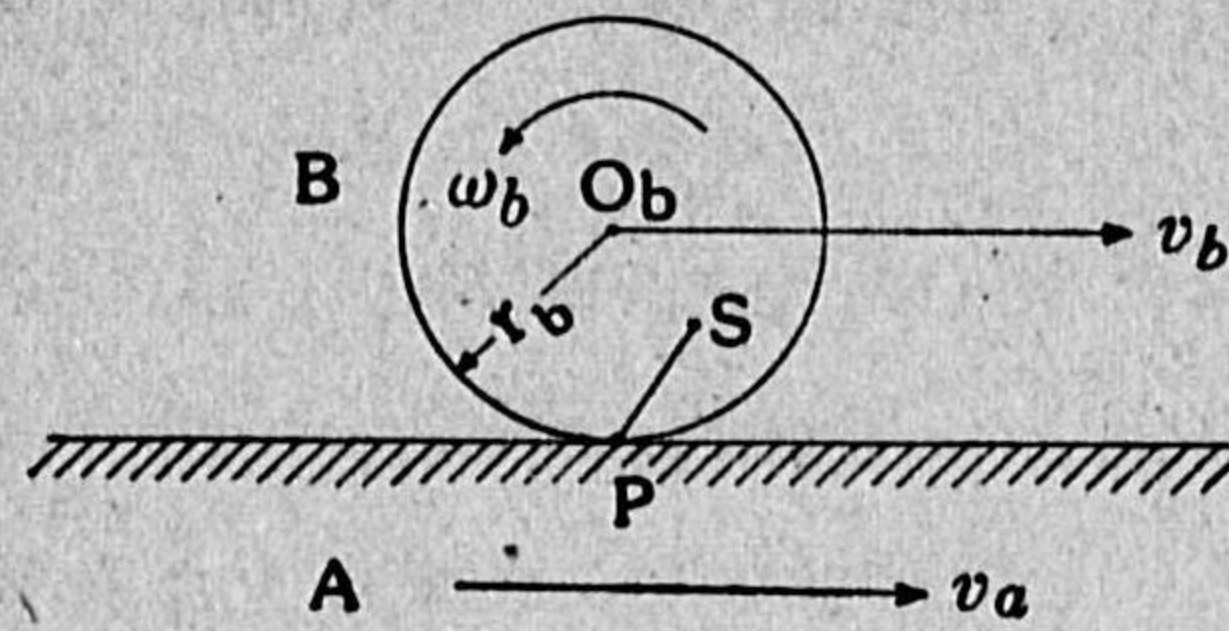
其の一例として第21圖の如き場合を考へよう。この圖で B は半徑  $r_b$  なる圓板で、その中心  $O_b$  の周に角速度  $\omega_b$  を以て廻ると共に、中心  $O_b$  が速さ  $v_b$  を以て移動するもの、A は其の一つの縁邊が直線をしてゐる平板で、この縁邊に平行に速さ  $v_a$  を以て移動し得るが回轉はしないものとする。今兩者が P 點で相接してゐると共に、 $v_b$  の方向が  $v_a$  の方向と平行である場合について考へよう。兩者は接觸點 P に於て共通垂直線方向への分速度が共に相等しく、明かに零であるから、直接接触に依る傳動の條件に合してゐる。次ぎに共通切線方向、即ち板 A の直線狀縁邊方向に於て、A の分速度は右方へ  $v_a$  であり、又一方で B に屬する P 點の回轉に基く線速度の分速度は式(4)に依り左轉のとき右方へ  $r_b \omega_b$  であり、更に軸  $O_b$  の移動の分速度は右方へ  $v_b$  である。今述べたところから従つて

$$v_a = v_b + r_b \omega_b$$

ならば轉り接觸であり

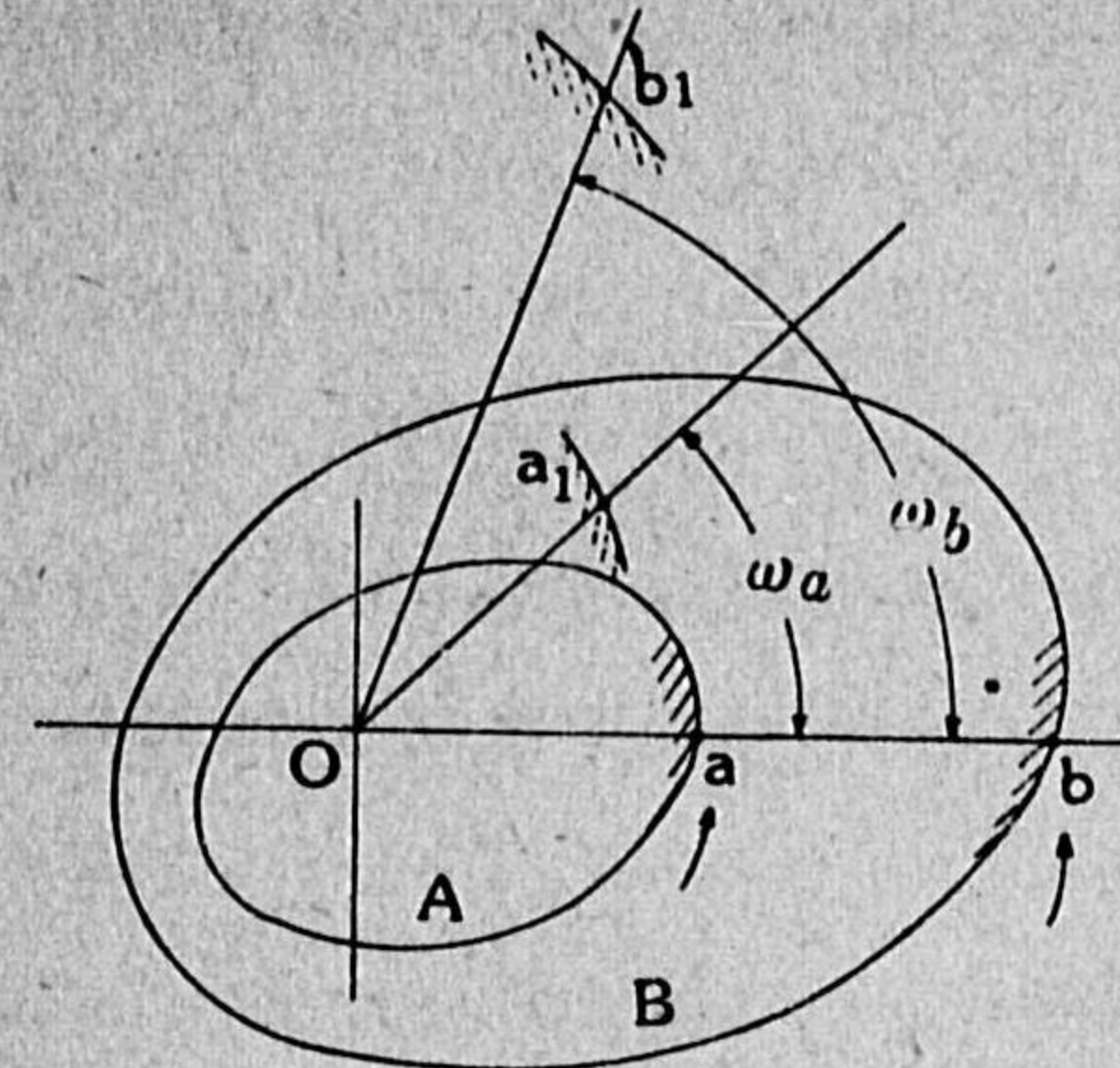
$$v_a \neq v_b + r_b \omega_b$$

ならば滑り接觸である。但し運動の向きが矢で示したのと反對だつたら、それには負號を附した上で此の比較を行はなくてはならぬ。



第 21 圖

相對回轉速度 — 二つの回轉體 A 及び B が一つの軸 O を共通

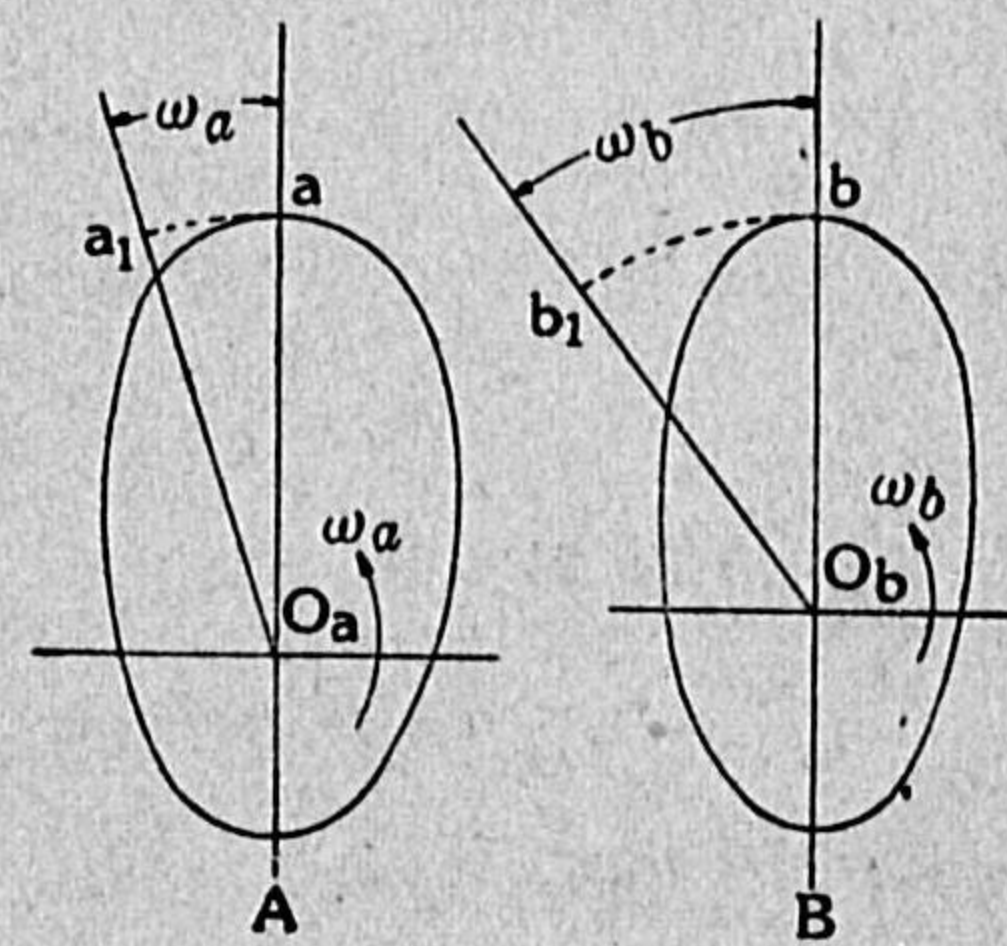


第 22 圖

の回轉軸として(第22圖),それぞれ角速度  $\omega_a$  及び  $\omega_b$  を以て廻つてゐるとする。A の上に直線  $Oa$  を描き、同じく B の上に直線  $Ob$  を描き、この兩線が或る瞬間に直線  $ON$  に一致して居たとする。その瞬間から 1 秒間を経た後では、A に於ける描線は  $Oa_1$

に位置し、B に於けるものは  $Ob_1$  に位置し、 $Oa_1$  線と  $Ob_1$  線との間の角度は  $(\omega_b - \omega_a)$  であらう。従つて A の上に固著して A と共に廻つてゐる觀測者が B を眺めると、B は恰も自己に對して角速度  $(\omega_b - \omega_a)$  を以て廻つてゐるかの如くに見えるだらう。だから此の場合にも  $(\omega_b - \omega_a)$  を A に對する B の角速度、或は A に對する B の相對角速度、又は A に相對的な B の角速度といふ。

A と B との回轉軸が第22圖の如く共通軸 O である代りに、第23圖の如く別々の軸  $O_a$  及び  $O_b$  である場合にも同様の考へ方が成立し得る。即ち或る瞬間に互に平行であつた描線  $O_a a$  と  $O_b b$  とが、1 秒間の後には  $O_a a_1$  及び  $O_b b_1$  へ移り、角度差  $(\omega_b - \omega_a)$  を生ずるからである。即ち此の場合にも A に相對的な B の角速度は



第 23 圖



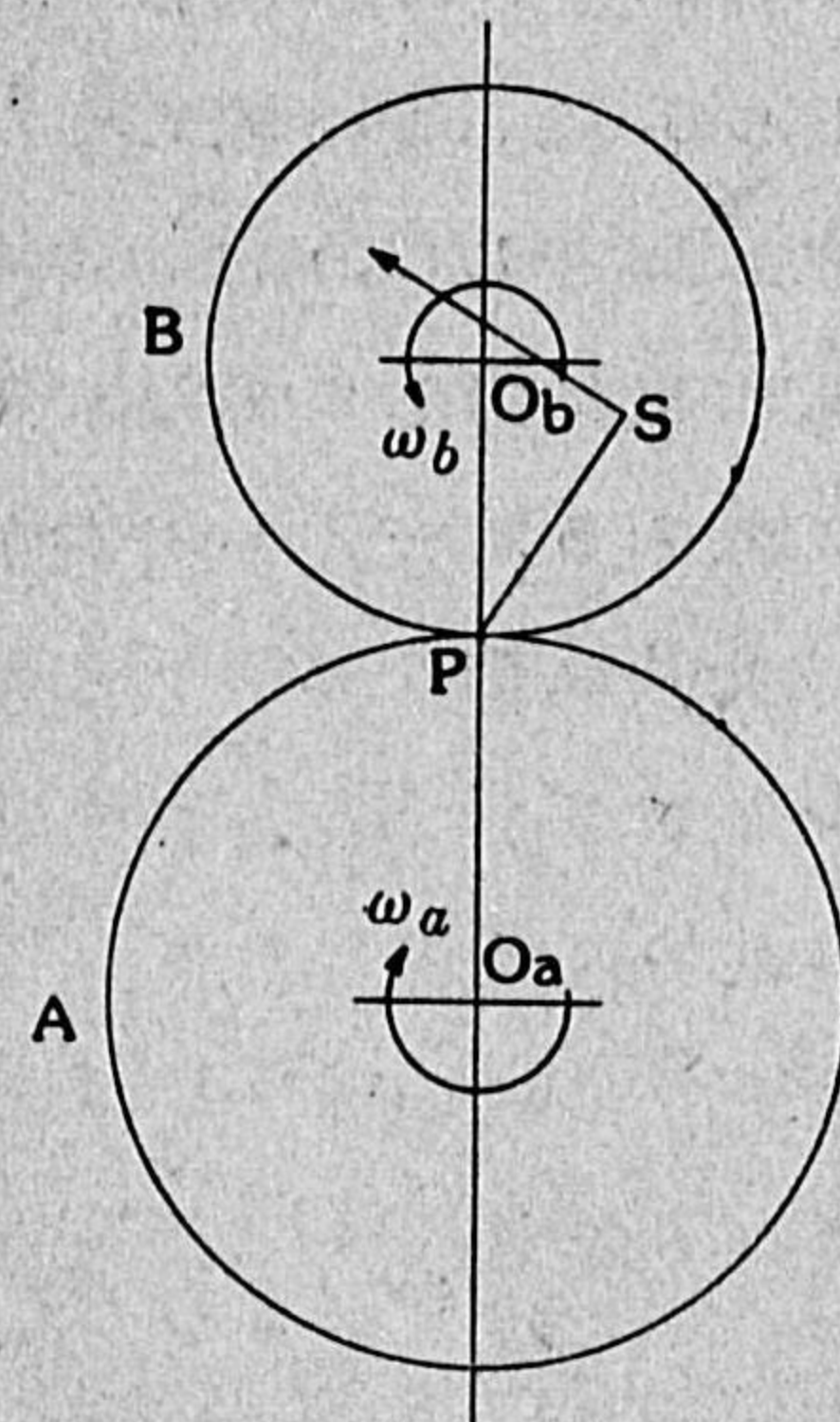
$$\omega_b - \omega_a$$

である。回轉の方向が矢に示したと反対ならばそれには負號をつける。例へばAが第23圖とは反対に右轉だつたら、Aに相對的なBの角速度は

$$\omega_b + \omega_a$$

である。その一つの例は第24圖の如き場合で即ち中心  $O_a$  の周に角速度  $\omega_a$  で廻つてゐる圓板Aと、中心  $O_b$  の周に角速度  $\omega_b$  で廻つてゐる圓板Bとが、P點で轉り接觸をしてゐるやうな場合である。

轉り接觸に於ける相對轉り線速度 — 第24圖の例で更に注意



第24圖

すべきことは、Aに固著してゐる觀測者が、Bの中のP點を眺めると、その瞬間には、それがA自身の中のP點と離れもせず滑りもせずにくつついてゐるから、Bの中のP點は其の瞬間其の觀測者には不動のやうに見えるだらう。だから其の瞬間にはBはP點の周に角速度  $(\omega_b + \omega_a)$  を以て廻つてゐるやうに見えるだらう。だから更に従つて、Bの中の任意の點Sは式(4)に依り線速度

$$\overline{PS} \times (\omega_a + \omega_b) \quad (9)$$

を有するやうに見えるだらう。その方向は圖の如くOSに直角である。之を一般的に言ふと、二つの回轉體AとBとがP點に於て轉り接觸をやつてゐるとき、Bの中の任意の點Sは

$$\overline{PS} \times (\text{Aに對する相對角速度}) \quad (10)$$

なる相對轉り線速度をAに對して有してゐると言へる。これは齒車の理論に於て、よく使はれる定理である。

このことはP點に於て轉り接觸が維持される限り、 $O_a$  軸又は  $O_b$  軸が移動して居ても同様である。例へば第24圖の場合に  $\omega_a$  が零であるとき又は  $O_b$  軸は當然  $O_a$  軸の周に圓運動をするだらうが、そんな場合でもS點のAに對する相對轉り線速度は

$$\overline{PS} \times (\text{相對角速度}) = \overline{PS} \times \omega_b$$

である。

第24圖のものに於て、A圓の半徑が無限大になつたものは、即ち第21圖である。このとき  $O_a$  軸は無限に遠方に在ると考へなくてはならぬ。そんなときAが  $O_a$  軸の周に少しでも角速度を有すれば、式(4)から見てAの中のP點は無限大の線速度をもつことになる。そんな無限大速度の如き場合は吾々の取扱範圍外だから、第21圖の速度  $v_a$  はAの回轉に基く速度ではなくてA自身全體としての移動に基くものであるとして取扱ふ方が宜しい。これは即ちAの角速度が零であるとするのであつて、従つて第21圖に於けるBの中の任意の點Sは前說に従ひAに對して

$$\overline{PS} \times \omega_b$$

なる相對轉り線速度を有してゐると考へられてくる。



## 第4章 ひら齒車

ひら齒車の基本的意味——轉り接觸を以てAからBへ回轉を傳へるためには、接觸點P(第17圖)が $O_a$ 軸と $O_b$ 軸とを結ぶ直線内に在ることを必要とすると第2章の終りに於て述べた。このことはそのために最も必要な條件ではあるが、單にこれだけを以てしては主動體Aから不斷に従動體Bへ回轉を傳へることはできぬ。即ちもう一つ必要な條件は、Aが廻るに従つて長さ $\overline{O_aP}$ が少しでも減少するものであつてはならぬことである。然しながら其の場合に $\overline{O_aP}$ が若し増すものであると、傳へられる角速度比は式(8)に従つて刻々に變化する。だから若しAからBへ不斷に同一の角速度比を傳へさせようとする場合だと、長さ $\overline{O_aP}$ は廻るに従つて減つても増してもいけない。即ちAは $O_a$ 軸を軸とする圓嚙體であり、その紙面に於ける切口は圓でなくてはならぬ。それと同時にBも同様に圓嚙體となるから、兩者の紙面に於ける切口は夫々 $O_a$ 、 $O_b$ を中心とせる二つの圓で、それがP點に於て相接してゐるものとなる。

圓嚙體Aが圓嚙體Bへ上記の如く一定の角速度比を以て回轉を傳へるには、それがどこまでも圓嚙面に於ける轉り接觸であることが必要條件で、決して滑り接觸であつてはならない。即ち二つの切口圓はP點で轉り接觸をすることを要する。その滑りを防ぐ積極的な方法は、圓嚙面へギザギザ、筋目、凸凹の類を刻することであるが、正確に一定の角速度比を傳へる主旨の下に、最も合理的な凸凹を圓嚙面に刻んだものが即ち齒車であつて、今述べつゝ

ある場合では、それが圓嚙面に刻まれてゐるから、特に之を圓形ひら齒車、或は單にひら齒車 (spur wheel) といふ。

これまで述べたところでは、軸 $O_a$ と軸 $O_b$ とは互に平行に、即ち共に紙面に垂直であるとしたのだが、二つの軸が平行でない場合でも、AからBへ一定の角速度比を以て回轉を傳へるやうな齒車装置を構成することが出来る。傘齒車、食違齒車などゝ呼ばれるのがそれであるが、それらについては、ひら齒車の説明のあとで述べよう。

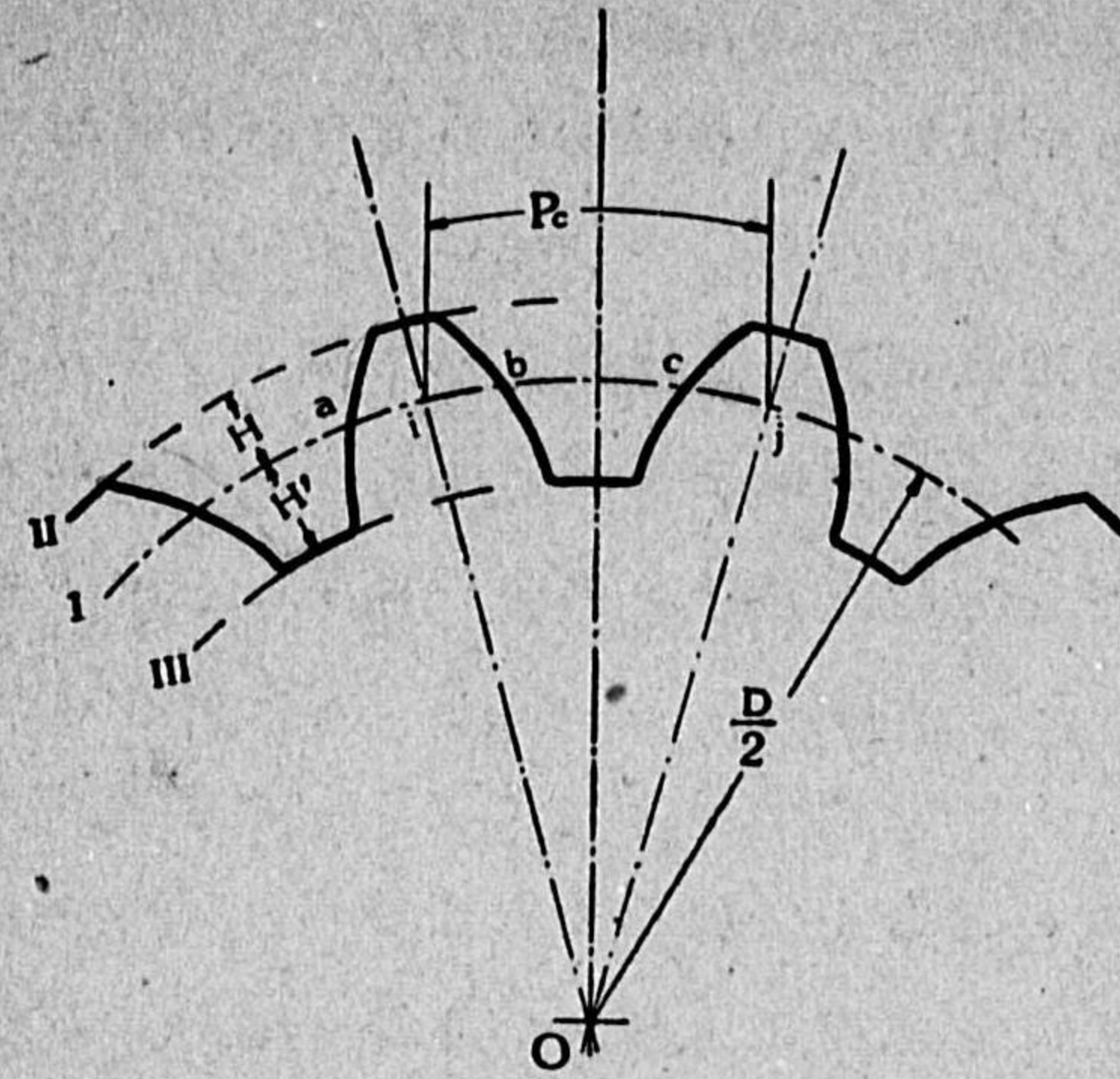
互に轉り接觸をやると考へた圓嚙面上には、既に全面に齒が刻まれてゐるのだから、現實の形の上ではそんな圓嚙面は最早現れて居ない。吾々は單にそれを思料上の便宜から、その意味の圓嚙面を想像するだけである。この想像的轉り接觸圓嚙面を、此の齒車の刻み面又はピッチ面 (pitch surface) と呼び、その紙面の切口を刻み圓又はピッチ圓 (pitch circle)、ピッチ圓の相接する點Pを刻み點又はピッチ點 (pitch point) と呼ぶ。

齒車のピッチ——紙面の切口に於て、齒はピッチ圓の内外へ凸出凹没した一連の圖形即ち齒形となるのであるが、その齒形はピッチ圓に沿つて必ずしも等齊である絶對的の必要はない。例へばA車の齒形が其のピッチ圓に沿つて不等齊であつても、之と接するB車のピッチ圓の半徑がA車のものゝ例へば二倍であるとき、B車のピッチ圓の半周づゝをA車の齒形に照應して作つて置けばいゝからである。然しこれは實用上の話ではない。

實用上の圓形ひら齒車では、同形の凸部と同形の凹部とがピッチ線上に交互に連続するものが専用せられ、従つてその齒車に一定固有であるところの齒間のあらし、即ち齒のピッチ又は刻みな



る考へが生れて来る。このあらさを数量的に表すために、相隣れ



第25圖

る歯の中心線(歯の左側形と右側形とが此の中心線に對して對稱的に出来てゐるものと見做す)の間の距りをピッチ圓の圓弧に沿つて測り、それを此の齒車の刻み又はピッチ (pitch) と名付ける。第25圖の  $ij$  即ち  $P_c$  がそれである。

ピッチ圓に沿つて齒形は等齊であつて、半ばな齒形の介在は許さないのだから、ピッチ圓の全圓周の長さは  $P_c$  の整数倍であり、即ち  $P_c$  と全齒數(以下は單に齒數と呼ぶ)  $N$  との積に等しい。従つて  $D$  をピッチ圓の直徑とすると

$$P_c = \frac{\text{圓周}}{\text{齒數}} = \frac{\pi D}{N} \quad (10)$$

である。

長さ  $D$  を表す單位として普通に mm 又は吋が用ひられる。従つて同じ車に於てピッチ  $P_c$  の數値は、用ひられた長さの單位の如何に依つて相違して来るから、ピッチ何 mm、或はピッチ何吋といふ風に單位稱呼を添へなくては行けない。一つの齒車のピッチ  $P_c$  が mm と吋との二様に稱呼されるときそれらの間の關係は

$$(\text{mm 稱呼のピッチ } P_c) = (\text{吋稱呼のピッチ } P_c) \times 25.4$$

である。

直徑ピッチとモジュール——齒間のあらさを数量的に表すものとして、 $P_c$  の外に別に直徑ピッチ (diametral pitch)  $P_d$  なるものが用ひられる。それは齒數をピッチ圓の直徑で割つたもの、即ち

$$P_d = \frac{N}{D} \quad (11)$$

である。之と區別するために、式(10)で表された  $P_c$  を圓周ピッチ (circular pitch) といふ。直徑ピッチを以て表すことは主に英國、米國などで行はれ、従つて式(11)の  $D$  には吋を單位とすることが普通である。即ち直徑ピッチとは直徑1吋についての平均齒數と見ればよい。

同じく齒間のあらさの数量的表し方として、モジュール (modul)  $M$  なるものがある。これはピッチ圓の直徑を齒數で割つたもの、即ち

$$M = \frac{D}{N} \quad (12)$$

である。 $P_d$  と  $M$  とは式(11)及び式(12)が示す通り互に逆數であるが、モジュールを以てする表し方は、メートル法を採用してゐる國々に寧ろ行はれてゐるから、式(12)の  $D$  の單位には多くは mm が用ひられ、従つて普通には單なる逆數關係でなく、次式のやうな關係にあるものと見た方がよい。

$$M(\text{mm}) = \frac{25.4}{P_d(\text{吋})} \quad (13)$$

尚ほそれらと圓周ピッチとの關係は

$$P_c = \pi M \quad \text{及び} \quad P_c = \frac{\pi}{P_d} \quad (14)$$

である。式(14)に於て式の右邊と左邊とは同一の長さ單位を用ふべきで、そうでない場合には一方へ換算率 25.4 を掛けなくてはならぬ。式(14)の計算はそれを一々やらなくとも、大抵のポケットブック又は型録に表にして掲げられてゐるから、それを見れば宜し



い。然し尙ほ念のため其の計算例を次ぎに示しておく。

第1例  $D=120\text{mm}$ ,  $N=48$ ,  $M=2.5\text{mm}$ ,  $P_c=7.8540\text{mm}$ .

第2例  $D=2\frac{1}{2}\text{吋}$ ,  $N=20$ ,  $P_d=8(\text{吋})$ ,  $P_c=0.39270\text{吋}$ .

歯間のあらしさを表すには圓周ピッチを以てするのが最も直接簡明であるにも係らず、わざわざモジュール又は直径ピッチの如きを用ふるのは、歯間あらしの呼稱を簡単にすること、又従つて之を削成する双物の呼稱を簡単にすることが目的である。歯数  $N$  は當然整数であり、直径  $D$  も設計上端数のものは好まれないから、上掲の計算例で明かな如く、圓周ピッチ  $P_c$  を當然桁数の多い端数にしなくてはならぬ。従つて例へば此の場合に、 $N=48$ ,  $P_c=7.8540$  の歯車を削成するフライス双物と呼ぶよりも、 $N=48$ ,  $M=2.5$  の歯車を削成するフライス双物と呼んだ方が簡単である。

勿論  $M$  でも  $P_d$  でも、 $D$  及び  $N$  の割合如何に依つては、やはり可なりな端数がつくであらうが、若しそれらに對して甚しく端数を許すとすると、例へば同じ  $N$  の歯車用の双物でも、その種類を非常に澤山備へなくてはならないといふやうなことも生ずるから、作業成品検査等あらゆる方面の簡單化の立場に於て、ひどく端数の  $M$  又は  $P_d$  は排斥せらるべきである。既にドイツでは、工業品標準規格 (DIN 780) に於て、モジュールの常用すべき値、止むを得ないときには用ひ得る端数の値等を規定して居るし、又本邦に於ても追つて同様のものが必ず定められることであらうと思ふ。ドイツ規定のモジュール (mm) を示すと次ぎの通りで、その中( )を附したのは止むを得ないときだけに使ふものを示してゐる。

0.3, (0.35), 0.4, (0.45), 0.5, (0.55), 0.6, (0.65), 0.7, 0.8, 0.9,  
1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3, 3.25, 3.5, 3.75, 4,

4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7, 8, 9, 10 (中略) 60, 65, 70, 75.

歯及び歯車の各部名稱——ピッチの外に、更に必要な歯車術語を掲げよう。

齒先圓 (addendum circle) と齒元圓 (root circle)——第25圖で II が齒先圓, III が齒元圓, ピッチ圓は I である。

上齒 (addendum) と下齒 (dedendum)——上齒は圓 II と圓 I との間に夾まれてる齒の部分, 下齒は同じく I と III との間のものである。

上齒高と下齒高——従つて  $H$  を上齒高,  $H'$  を下齒高といふ。

頂隙 (radial clearance) —— $H'$  から  $H$  を差引いた残り。

齒厚と齒隙——齒厚は  $\widehat{ab}$ , 齒隙は  $\widehat{bc}$  で共にピッチ圓に沿つて測つたもの。

背隙 (backlash)——齒隙から齒厚を差引いた残り。

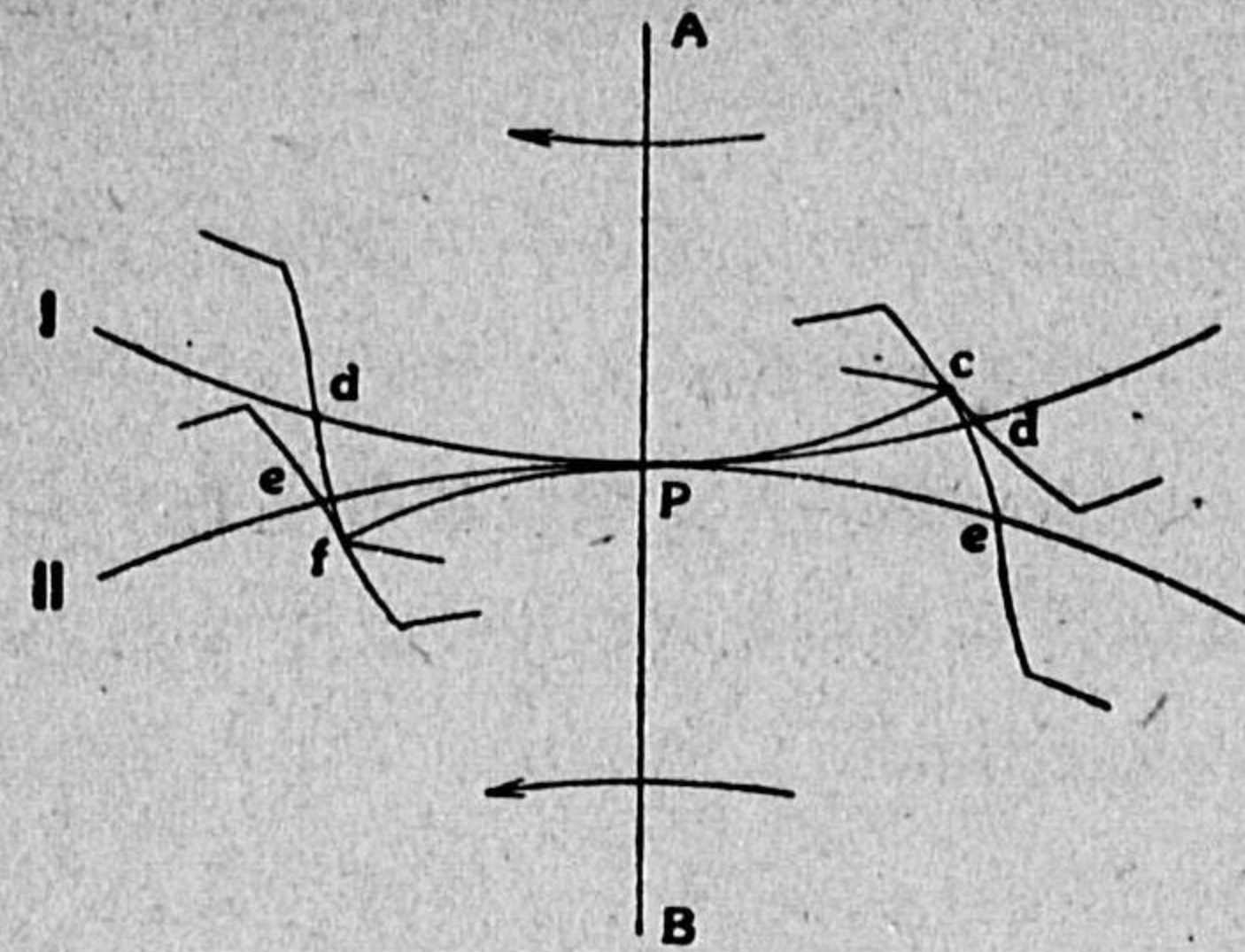
齒幅——回轉軸の方向へ測つた齒の寸法。

以上の内で頂隙と背隙とは、對手の齒の頂面又は背面を避けて、運轉を圓滑にするために設けるもの、齒幅は齒に與へるべき強さに關係するもので、それらは齒高及び齒厚と共に、 $P_c$ ,  $P_d$  又は  $M$  の分數又は倍數の形で、其の適當な割合が與へられてるのが普通である。それらは機械學教科書、ポケットブック又は製品型録の類に必ず記載せられてるから、茲には一々載せない。但し特に注意しておくことは、背隙の大小が齒車の精確さを一面に於て代表することで、粗製の齒車ほど背隙が多く、之に反し近代の最も精密な可逆運轉用齒車では背隙をほとんど零にするのである。

圓周ピッチの最大値と接觸位置軌跡——A を主動車, B を從動車として、A 車の中の一つの齒が B 車の中の一つの齒と接觸を始



めてからそれらが接触を終つて互に離れるまでの経過を考へて



第 26 圖

見よう。第26圖に示すやうに、最初B車の上歯の先端がA車の下歯の中の或る點とcなる位置に於て先づ接し、兩車が次第に矢の方向に廻るに伴つて、A車の歯面の中のd點とB車の歯面の中のe點とが共に

ピッチ點Pへ來て、その位置で互に接觸する。たゞしd點はA車のピッチ圓Iがその歯面と交る點、eも同じくB車のピッチ圓IIが歯面と交る點、換言するとd點もe點も上歯と下歯との界の點である。

更に矢の方向へ回轉を續けると、その最後に於てA車の上歯の先端がB車の下歯の中の或る點とfなる位置に於て接觸し、更にその次ぎの瞬間には兩齒は互に離れ去る。

即ち兩齒の接觸位置は回轉に伴つてc→P→fと移動し、それらすべての接觸位置を連ねたものは圖示の如きcPf線となる。この線を此の嚙合に於ける接觸位置軌跡(Path of contact)と呼ぶ。接觸位置軌跡の形狀及び大きさは兩車の形狀と大きさに従つて定まるものであることは勿論である。

接觸がc位置に始つてP位置に至るまでは、A車の下歯がB車の上歯と接觸し、その間にA車はピッチ圓Iに沿つて圓弧右Pdだけ廻る。更にP位置からf位置までは、A車の上歯がB車の下歯

と接觸し、その間にA車はピッチ圓Iに沿つて圓弧左Pdだけ廻る。即ち二つの齒は結局A車が其のピッチ圓Iに沿つて

$$\text{右 } \widehat{Pd} + \text{左 } \widehat{Pd}$$

なる圓弧を廻る間だけ接觸してゐることになる。A車からB車へ不斷に一樣な角速度比を以て回轉を傳へるためには、一對の齒が接觸を終るまでに、少くとも次ぎの一對の齒が接觸状態に這入つて居なくてはならぬ。言ひ換へると上記の接觸弧の長さ(右Pd+左Pd)は兩車に共通である圓周ピッチの値よりも小であつてはいけない。即ち

$$P_c \geq \text{右 } \widehat{Pd} + \text{左 } \widehat{Pd}$$

實用上に於ては此の不等式が充分な餘裕を以て成立つことが望ましく、従つて成るべくは

$$P_c \geq \frac{1}{2} \times (\text{接觸弧の長さ})$$

でありたく、 $P_c$ が最も大きい場合でも

$$\frac{P_c}{\text{接觸弧の長さ}} = \frac{10}{12}$$

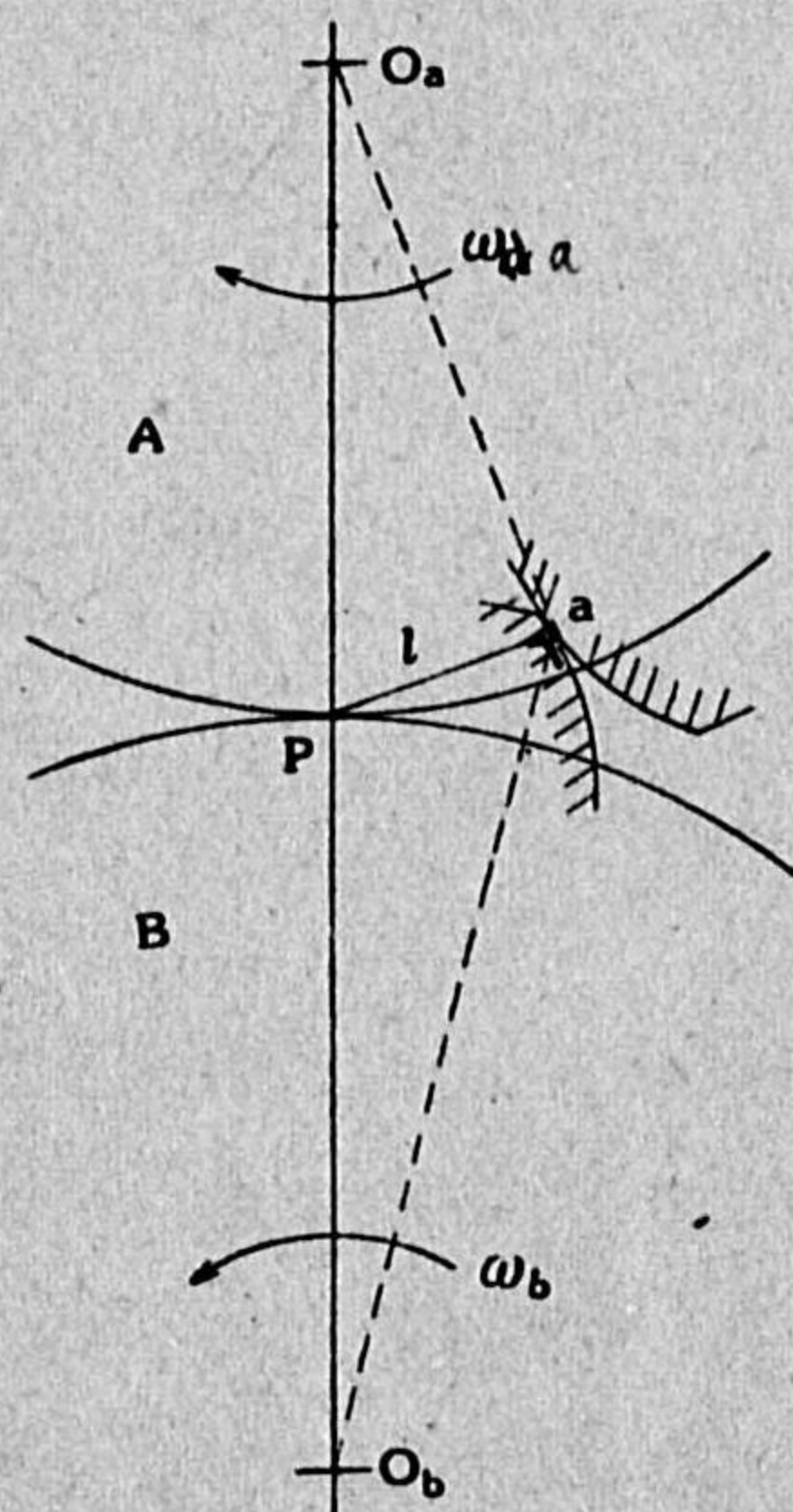
位にとどめたい。



### 第 5 章 歯の接觸條件

○ 歯は滑り接觸をする — 相接してゐる二つの歯は果してどんな接觸をやつてゐるかを見よう。二つのピッチ圓が P 點で轉り接觸をやり、之に依つて A 車から B 車へ一定の角速度比を以て傳動することを要求されてゐるのだから、齒の形も亦この條件に合ふやうに、常にその同じ角速度比を以て A 車から B 車へ傳動するものでなくてはならぬ。

元來滑り接觸は其の際の摩擦に依つて、接觸面が互に摺り減ると共に、A 車から B 車へ力を傳へる場合に、滑りの摩擦抵抗に依つて、それだけエネルギーを餘分に消費し、機械としての效率が低く



第 27 圖

なる。だから齒が互に接觸して上記の條件の如く運動を傳へる場合に、それが轉り接觸で若しあり得たとするならば最も好都合である。

今齒が第 27 圖に示す如く或る任意の點 a なる位置に於て接觸が生じてる瞬間を考へる。A 車の角速度を  $\omega_a$ 、B 車のを  $\omega_b$  としたとき、a 點に於て假りに轉り接觸が行はれてゐるものとする、第 2 章の終りに於て述べたところに従ひ、直線  $O_a a$  と直線  $O_b a$  とは一直線をなすと共に、式(8)に従ひ

$$\frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{O_b a}{O_a a} = \frac{O_b P}{O_a P}$$

でなくてはならぬ。だからこの場合の a 點は第 27 圖のピッチ點 P と一致し、従つて齒と齒との轉り接觸はピッチ點に於てのみ實現せられ、接觸位置軌跡上の P 點以外に於て接觸する場合には、轉り接觸は實現せられないといふことになる。言ひ換へると、ピッチ圓が轉り接觸を行ひつゝある間に、齒と齒とは一般に滑り接觸を行ひ、たゞピッチ點で接觸する瞬間に於てのみ齒間の轉り接觸が行はれる。

○ 齒の滑りの量的變化 — ピッチ點で接觸する瞬間には滑りが零であることを以上に依つて明かにしたから、次ぎには其の他の位置での接觸に於て、滑りが量的に如何なる値を呈するかを見よう。右方接觸弧では最初 c 位置(第 26 圖)で互に接し、次第に廻つてピッチ點 P の位置で接觸が生ずる瞬間には A 車の d 點と B 車の e 點とが接する。だから此の期間、即ち近より接觸の期間では、互に齒が

$$\widehat{ce} - \widehat{cd}$$

なる各の齒面に沿つた圖示の長さの差額だけ滑る。同様にして遠ざかり接觸弧に於ては

$$\widehat{fd} - \widehat{fe}$$

なる長さ差額だけ互に滑る。

次ぎに接觸位置軌跡上のどの點で接してゐる場合に、滑りの程度が最も激しいかであるが、それは第 3 章の相對回轉速度の考へに依つて之を求めることができる。即ち B 車に固著してゐる人が A 車の運動を觀測すると、A 車は常に其の瞬間のピッチ點 P を瞬間的回轉中心として、角速度



$$\omega_a + \omega_b$$

を以て廻つてると見られるだらう。だから齒と齒とが a 點(第27圖)で接してるとき、其のときの Pa なる距離を例へば  $l$  とすると、A 車の中の a 點は式(4)に依り

$$l(\omega_a + \omega_b)$$

なる線速度を以て B 車に相對的に動いてるのである。即ち A 車の齒 a 點は B 車の齒 a 點に對し、これだけの線速度で動き滑つてゐる。故に齒と齒との滑りの程度は、長さ  $l$  に比例し、従つて接觸を始めた位置 c 點に於て最も激しく、廻るに従つて其の程度が減じて P 點では零となり、P 點を越すと更に又滑りの程度が増して、接觸の終位置 f 點では再び最大となる。従つて滑りだけの原因でいふならば、齒の摩滅は齒面がピッチ圓と交る點(d,e)に於て最小で、それから遠い點ほど上齒に於ても下齒に於ても摩滅が次第に多くなると謂へる。

✓**齒の形についての必要條件**——相接觸する二つの齒の形は、どんな條件を満すことが必要であるか、たゞしその條件の基礎となる要求事項は、兩車のピッチ圓に轉り接觸をさして、角速度比  $\omega_b/\omega_a$  を傳へさせようとする本來の目的に従ひ、齒に於ても互の滑り接觸に依つて同じ角速度比を傳へるやうにしようとするのである。即ち此の要求を實現するための齒形條件を求めらる。

齒が或る任意の瞬間に於て、例へば第28圖の如く a 點に於て相接觸してるとする。その状態で a 點に於ける兩齒面への共通垂直線が  $O_aO_b$  線を切るところを i 點とすると、この場合に滑り接觸で傳へられる角速度比は式(7)に従ひ

$$\frac{O_a i}{O_b i}$$

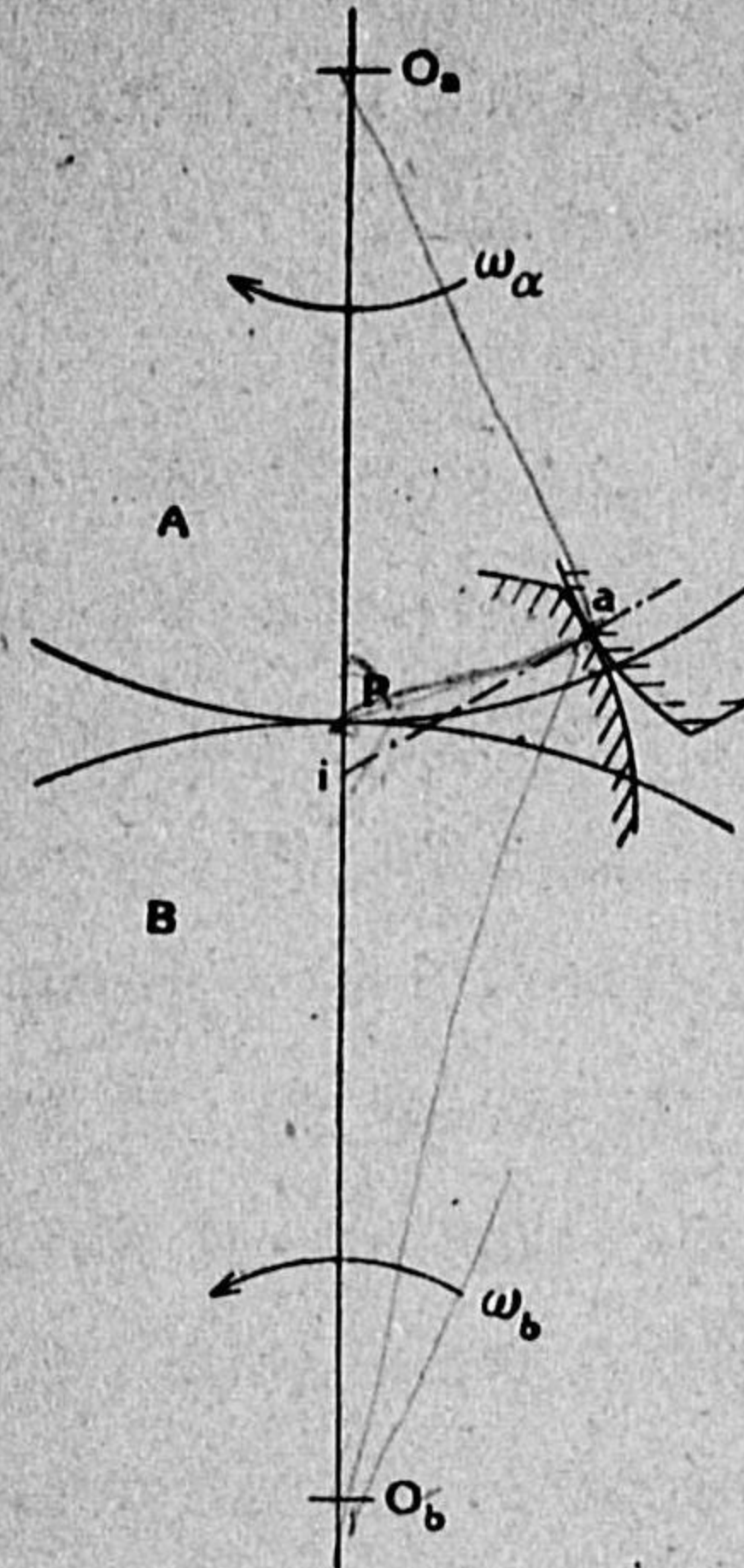
であり、又一方で兩車のピッチ圓の轉り接觸で傳へられる角速度比は式(8)に依つて

$$\frac{O_a P}{O_b P}$$

である。而してこの兩角速度比が上述の如く共に  $\omega_b/\omega_a$  であることが本來の目的であるから、齒形は

$$\frac{O_a P}{O_b P} = \frac{O_a i}{O_b i}$$

なる條件を満さなくてはならぬ。言ひ換へると i 點は P 點と一致しなくてはならぬ。即ち接觸のどの瞬間に於ても、そのときの接觸點 a に於ける共通垂直線は第27圖の如くピッチ點 P を通過すべきである。然もこのとき



第28圖

きには言ふまでもなく

$$\angle a P O_a + \angle a P O_b = 180^\circ$$

である。

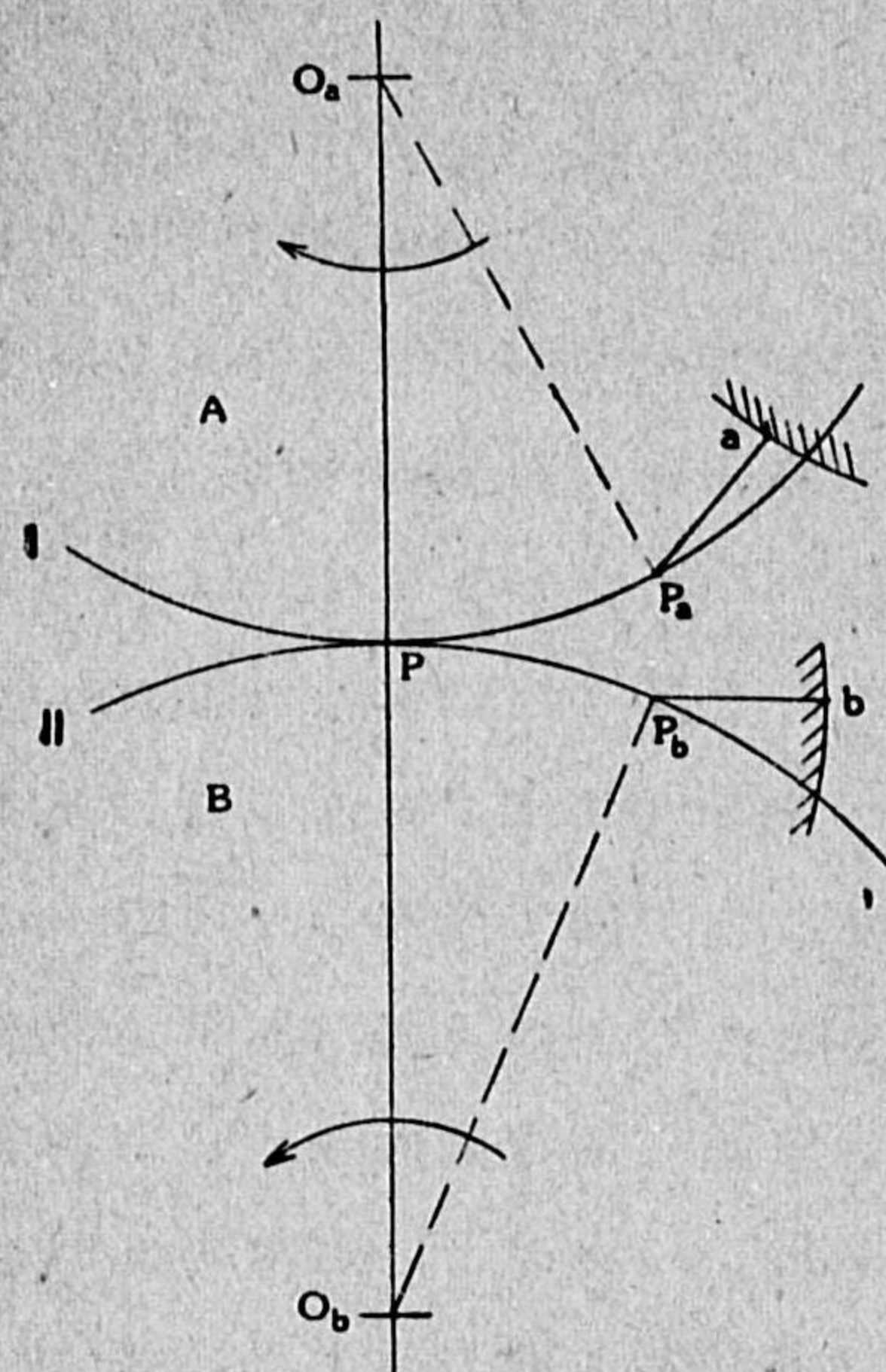
**齒形を求める根本法則**——A 車に於ける齒の一部分 a (第29圖) と B 車に於ける齒の一部分 b とが、現在の瞬間では圖示の如く接觸せず離れてゐるが、兩車がいづらか廻つたあとでは前節の條件の如く相接觸するものとする。それには a と b との形狀及び位置が如何なる關係にあればいゝか、若しそれが明かになれば齒形 a が與へられたとき、それに應ずる齒形 b が定まるであらう。

先づ a 點に於て其の齒面へ垂直線を立て、それが A 車のピッチ圓 I を切る點を  $P_a$  點とする。次ぎに b 點についても同様に垂直



線を立て、それが B 車のピッチ圓 II を切る點を  $P_b$  點とする。兩車が廻つて a 點と b 點とが第 27 圖の如き状態となるためには

- (i)  $\widehat{PP_a} = \widehat{PP_b}$
- (ii)  $\overline{P_a a} = \overline{P_b b}$
- (iii)  $\angle a P_a O_a + \angle b P_b O_b = 180^\circ$

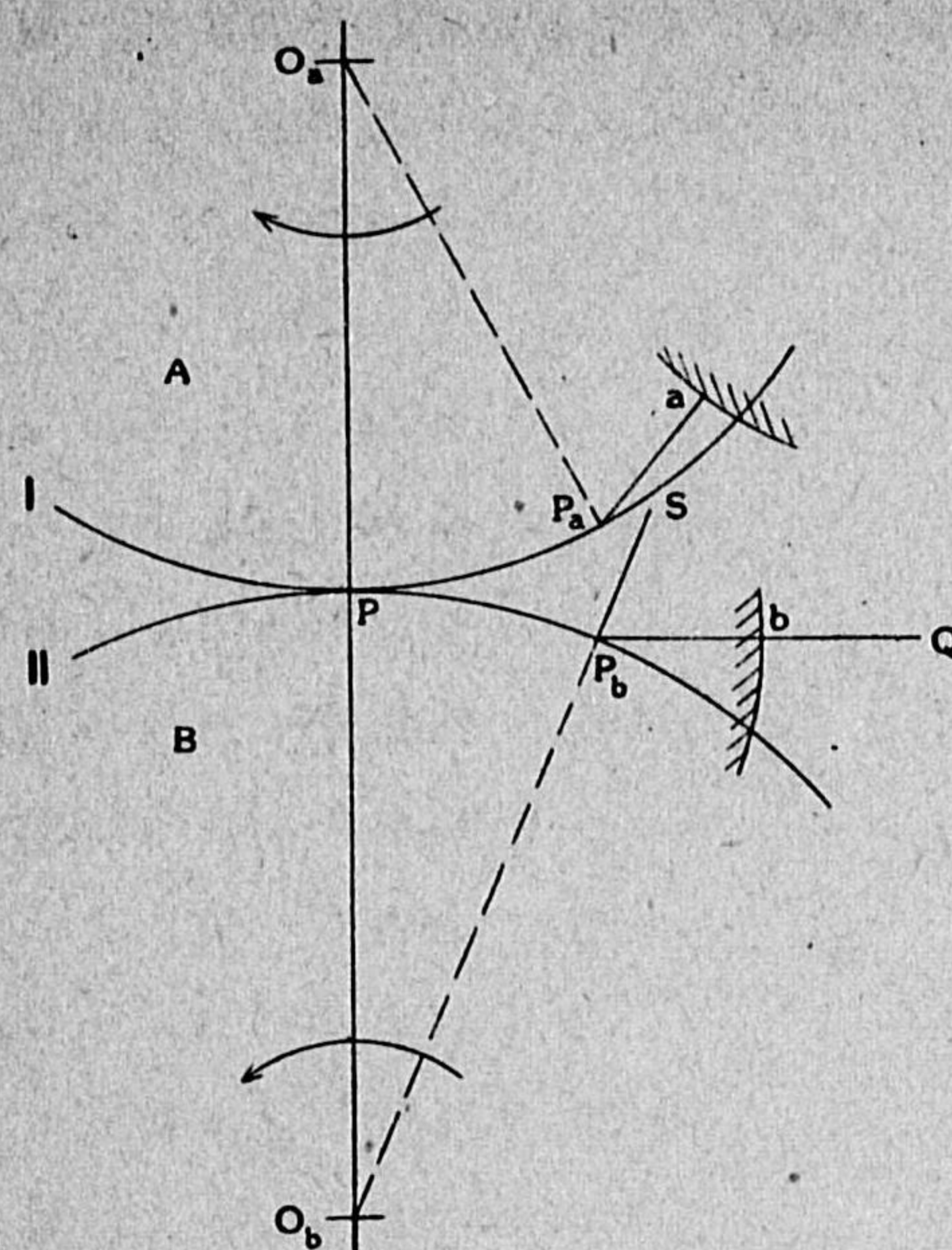


第 29 圖

であれば宜しい。なぜなら、このとき A 車はそのピッチ圓 I に沿つて圓弧  $\widehat{PP_a}$  だけ廻り、且同時に B 車はそのピッチ圓 II に沿つて圓弧  $\widehat{PP_b}$  だけ廻るとすると、第 29 圖のものは第 27 圖の状態となることが明かであるからである。即ち上に掲げた三つの條件が、一方の車 A の齒形を與へたとき、之に對應する對手の車 B の齒形を求める

ための根本條件である。

**對手齒形を求める畫法** — A 車の齒の一部 a (第 30 圖) が與へられてゐるとき、之と接觸して前記の目的を達するやうな對手齒形の對應部分 b を圖上で求める。それには前節に述べたことを逆にやればいゝわけで、(1) 先づ a 點に於て其の齒面へ垂直線を立て、それが自身のピッチ圓 I を切る點を  $P_a$  とする。(2) 次ぎに長さ  $\widehat{PP_a}$  に等しく B 車のピッチ圓 II に於て長さ  $\widehat{PP_b}$  を求め、(3)  $\angle a P_a O_a$  と  $\angle Q P_b O_b$  との和が  $180^\circ$  になるやうに直線  $P_b Q$  を引く、或は同じことだが、 $\angle Q P_b S$  が  $\angle a P_a O_a$  と等しくなるやうに直線  $P_b Q$  を引き、(4)



第 30 圖

$\overline{P_a a} = \overline{P_b b}$  なるやうに b 點を求め、(5) b 點に於て直線  $Q P_b$  へ垂直な面を作る。かくして得られた b 點に於ける面が、齒 a に對應する B 車に於ける齒である。

A 車の齒形が與へられてゐるとき、其の齒面の各點について上述の操作を繰返へして、一々それに対応する b 點を求め、それらの b 點を連結した曲線を作れば、此

の曲線が即ち B 車に於ける求めるところの齒形である。だから實用上の問題を離れて、單に畫法の上から言ふならば、任意の形の齒が與へられてゐるとき、それと嚙合つて前述の角速度比要件を満すやうな對手の齒は必ず見出され得るのである。

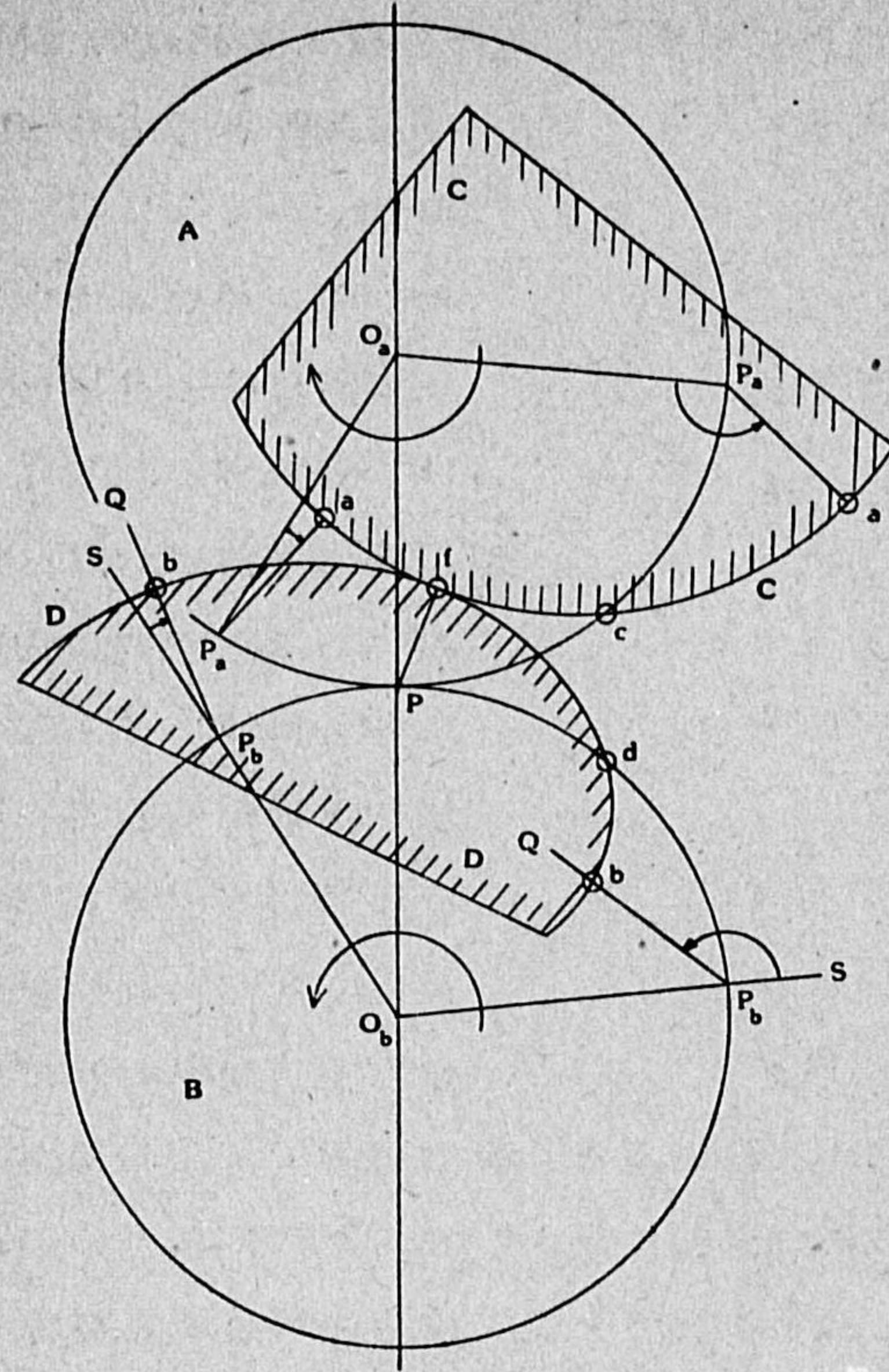
例へば A 車が C なる平板 (第 31 圖) で示した齒を有するものとし、之と接觸する B 車の所要の齒 D を求めて見よう。

第 30 圖と同じ操作に従つて、C の齒の中の任意の一點 a をとり、それへの垂直線が A 車のピッチ圓と交るところを  $P_a$  とし、 $\widehat{PP_a}$  に等しいやうに B 車のピッチ圓に於て、それと同じ側へ  $\widehat{PP_b}$  をとり、 $P_b$  點をその圓の中心 O へ結ぶ直線  $O_b S$  を描き、 $\angle O_a P_a a = \angle S P_b Q$  なるやうに直線  $P_b Q$  を描き、 $\overline{P_a a} = \overline{P_b b}$  なるやうに直線  $P_b Q$  上に b 點





を求める。Cに於けるその他のa点について同様の操作を繰返



第 31 圖

であることは、第28圖及び第27圖に就いて論じたことからして明瞭であらう。

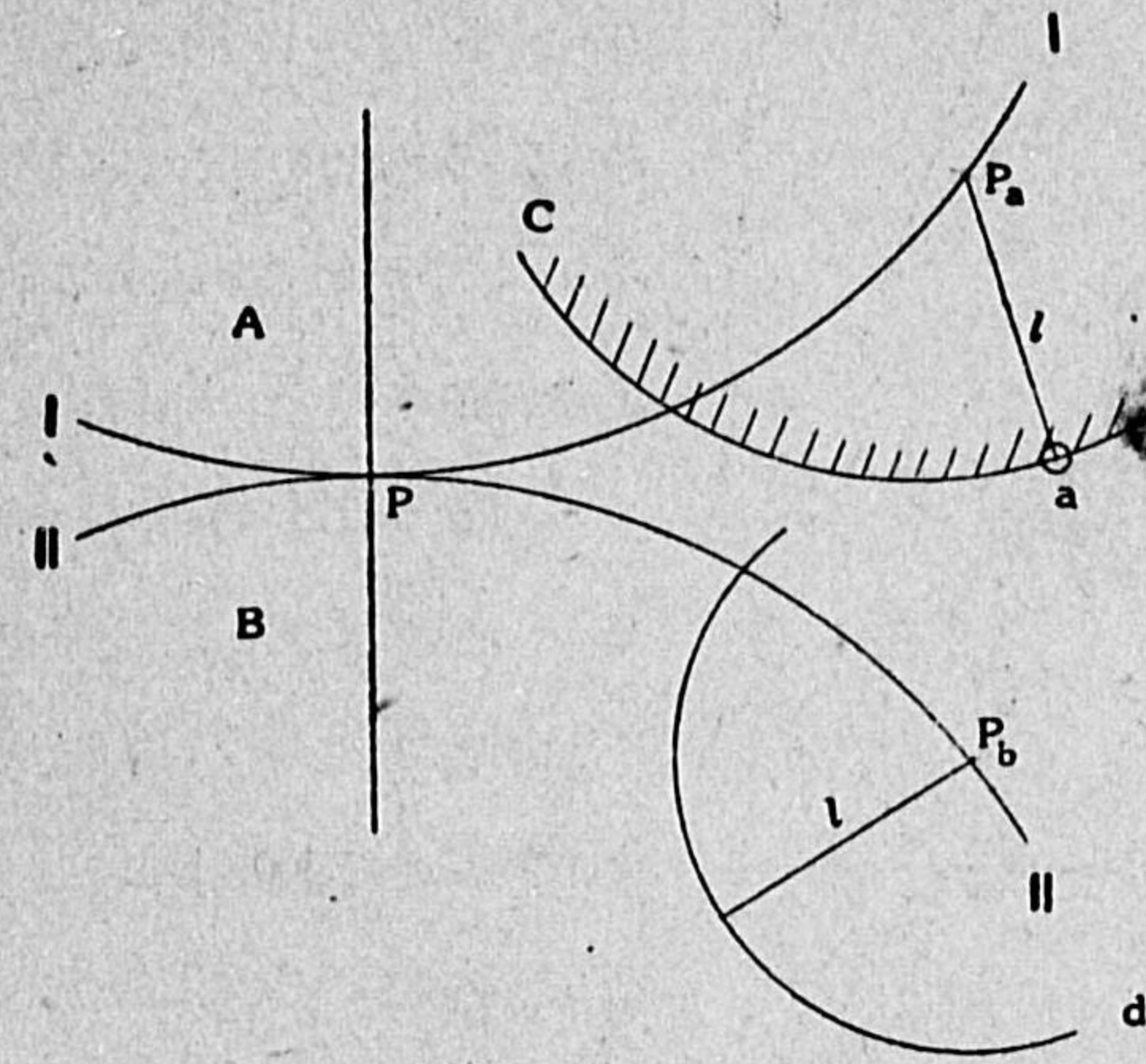
第二の特異點は齒形CがA車のピッチ圓と交る點cで、B車のこれに對應する點は、ピッチ圓に沿つて  $\widehat{Pc} = \widehat{Pd}$  なる條件を満足するやうな點dである。これは長さ  $\widehat{Pa}$ ,  $\widehat{Pb}$  が零となつた特別の場合を意味してゐる。

エンベロープ線に依る齒形の求め方——前節の方法では  $P_a$  點

へして、一々のb點を求め、それらのb點を連結すると、それが求めるところのB車の齒Dである。

尙ほ第31圖に示した齒形Cに於て、上記の操作に依らなくても、直ちにDに於ける對手を求められる特異點が二箇所ある。その一つは、其の點への垂直線が現在そのまゝでピッチ點Pを通るやうな點fである。兩齒面が此の點で相接觸すべきもの

及び  $P_b$  點を一々其の圓の中心へ結附けるのであつたが、次ぎの様にすれば必ずしも其の必要がない。a點の對手を求めるための前節の方法に従つてB車のピッチ圓上に  $P_b$  點を定め、 $P_b$  點を中心として半徑  $l$  なる圓(第32圖)を描き、 $l$  を長さ  $\widehat{Pa}$  に等しくする。

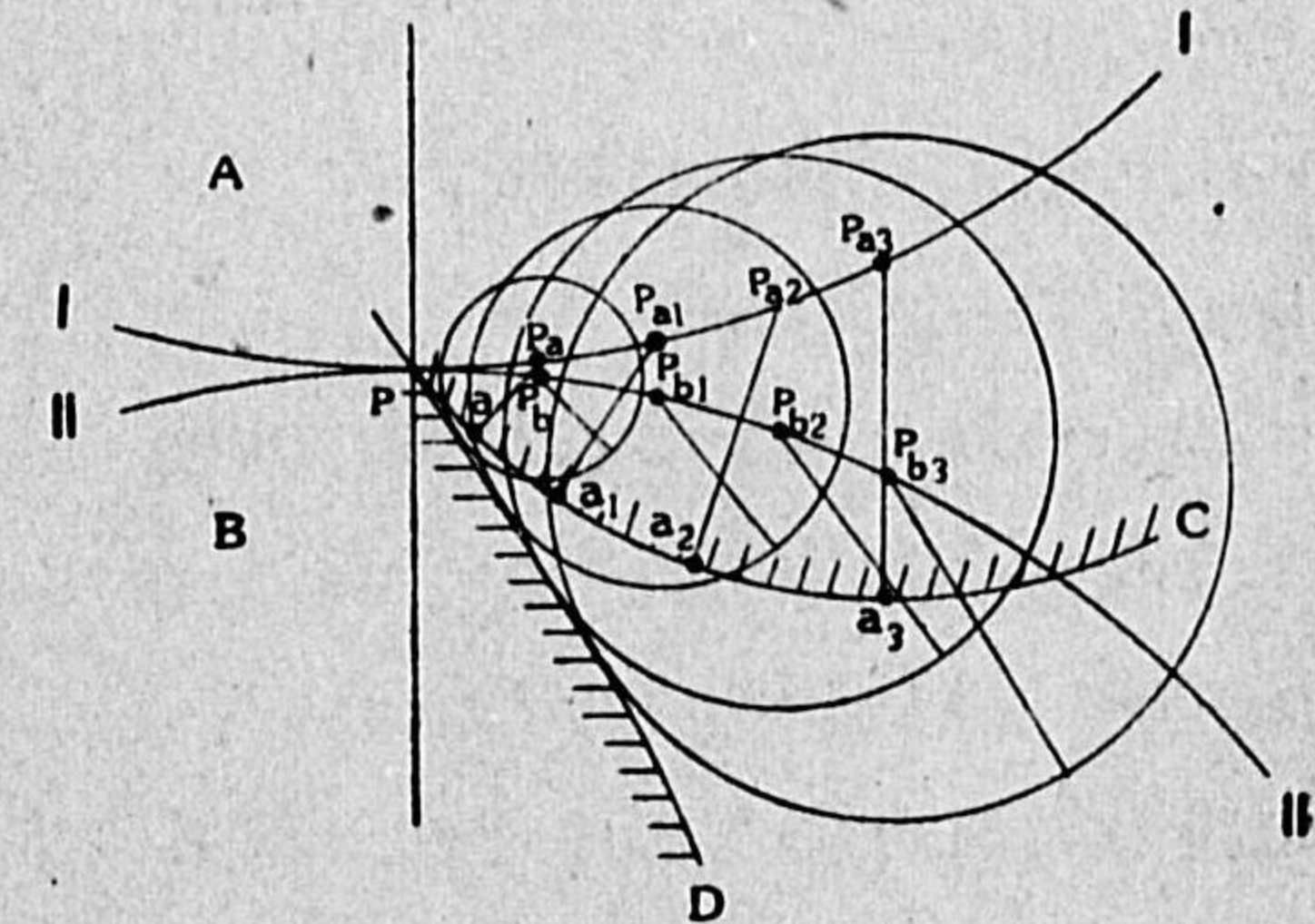


第 32 圖

するとaの對手たるbは、必ず此の圓周の中にある筈である。従つて第33圖の如く、既に與られてゐる齒形Cに沿つてa點のみならず、それに引續いて  $a_1, a_2, a_3$  等の諸點を任意にとり、それらの點に於ける齒面への垂直線とA車のピ

ッチ圓Iとの交點  $P_a, P_{a_1}, P_{a_2}, P_{a_3}$  等を求め、夫々  $\widehat{PP_a} = \widehat{PP_b}$ ,  $\widehat{PP_{a_1}} = \widehat{PP_{b_1}}$ ,  $\widehat{PP_{a_2}} = \widehat{PP_{b_2}}$ ,  $\widehat{PP_{a_3}} = \widehat{PP_{b_3}}$  等であるやうに、B車のピッチ圓II上に  $P_b, P_{b_1}, P_{b_2}, P_{b_3}$  等の諸點を定め、それらを中心にして夫々半徑  $\widehat{Pa}, \widehat{Pa_1}, \widehat{Pa_2}, \widehat{Pa_3}$  等なる圓を圖の如くに描き、そのすべての圓を包絡する曲線、即ちエンベロープ線Dを作れば、Dが即ちCに對する求めるところのB車の齒形である

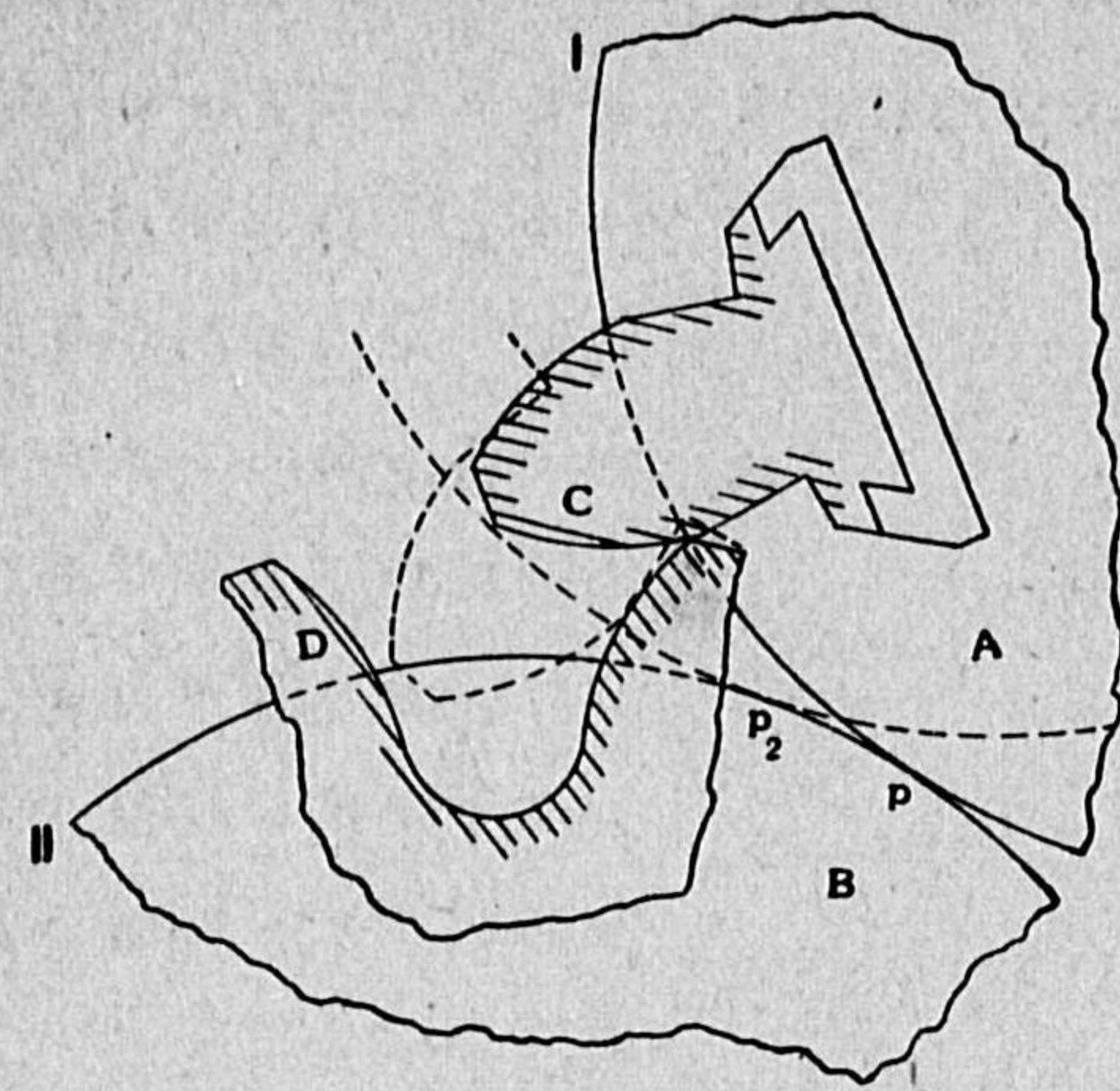
エンベロープ線に依る



第 33 圖



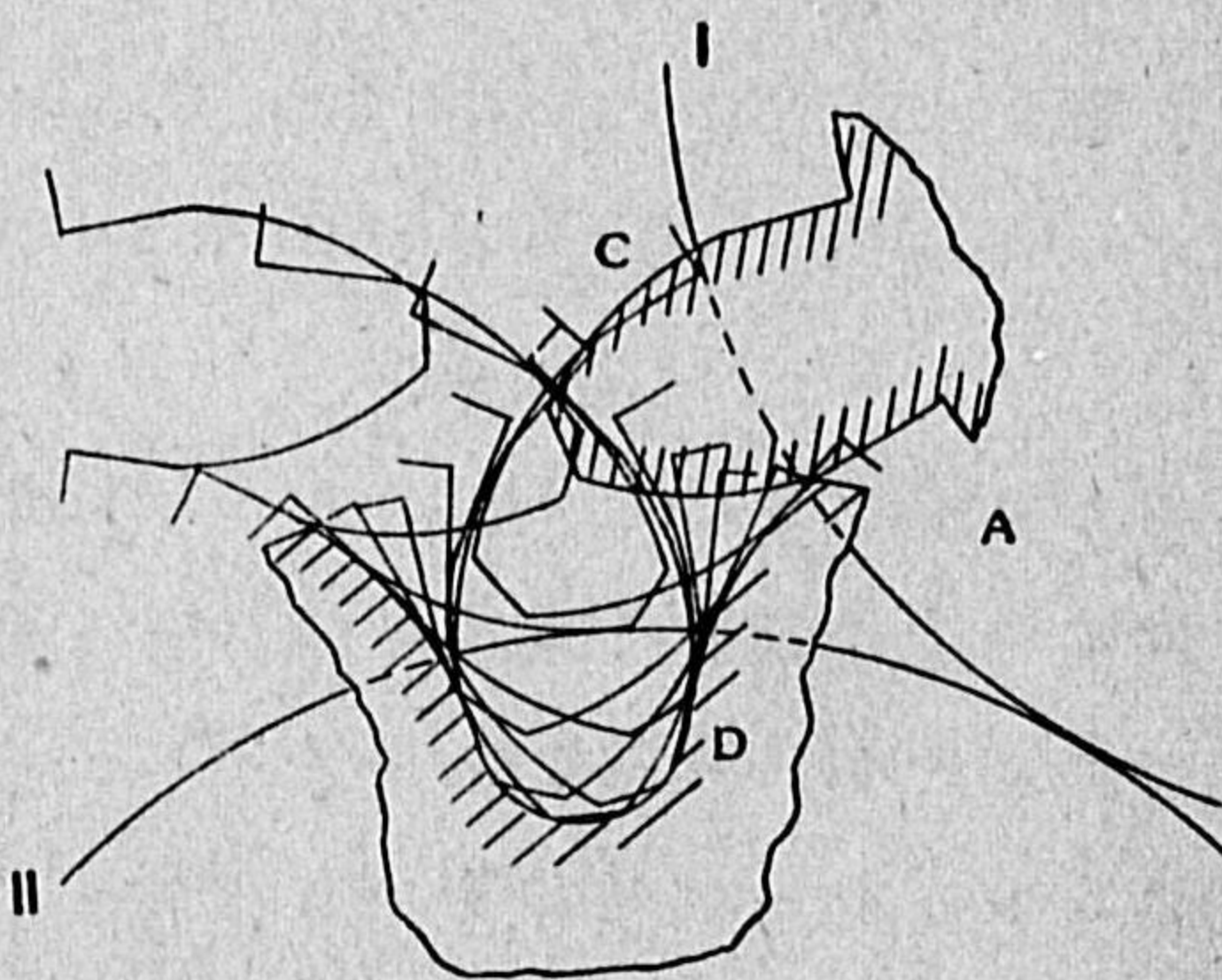
齒形の求め方に、尚ほ別の方法がある。それは相對的運動の考へから來るものであつて、今例へばA車が第34圖の如き既知の齒形



第34圖

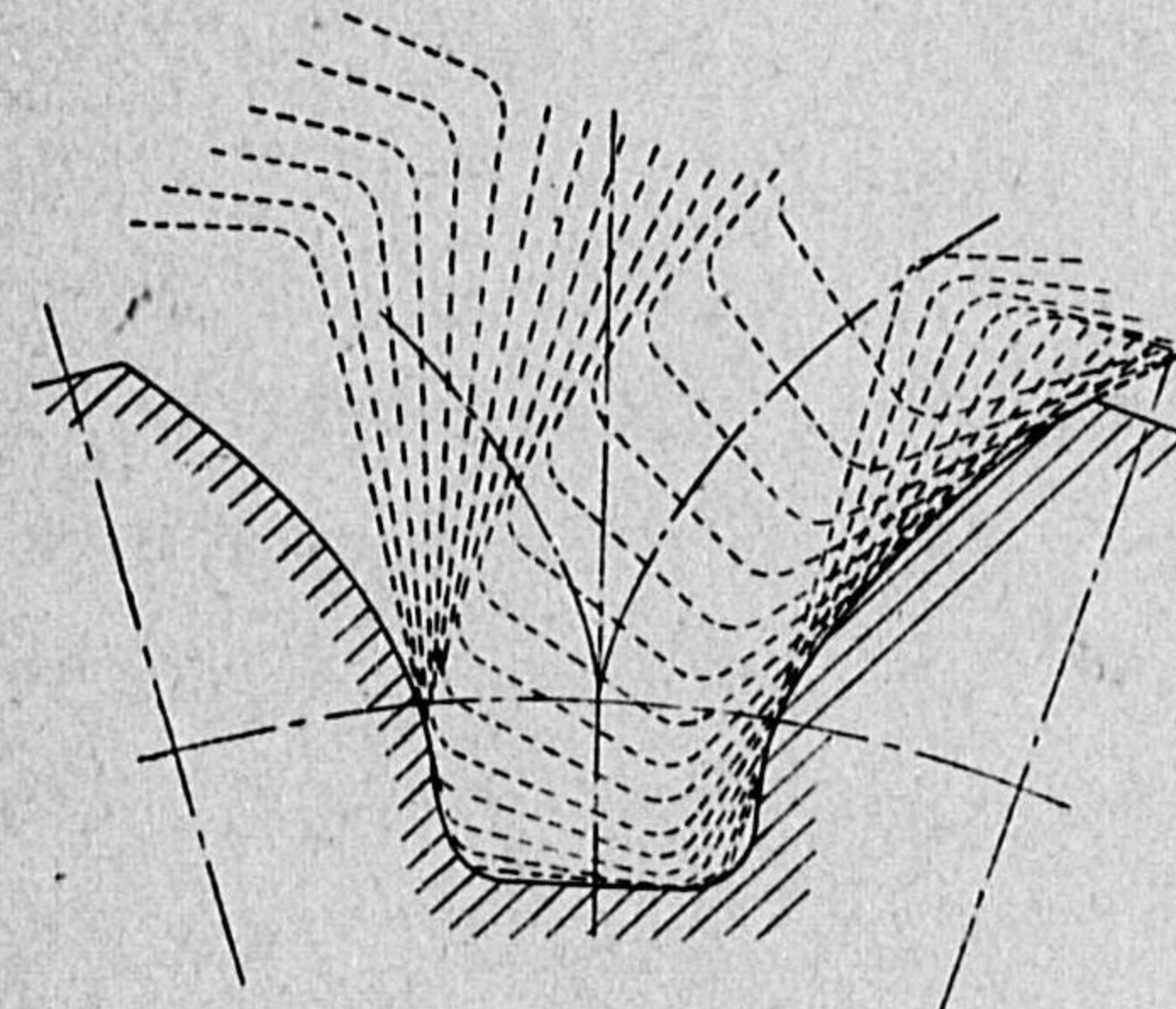
Cを有し、之と接觸するB車の齒形Dを求める場合であるとする。B車に固著してゐるものが、それに對するA車の運動を眺めると、A車のピッチ圓IはB車自身のピッチ圓IIと或る瞬間には $P_1$ 點に於て接觸し、次ぎの或る瞬間では $P_2$ 點で接觸するだらう。

そのどの瞬間に於ても、DはCの運動を妨げず、然もそれと或る點に於て接觸することが必要である。だから第35圖の如く圓IIの上に圓Iを次第に轉がして、その各々の位置に於けるCの形を重疊して描き、それらを包絡するエンベロープ線Dを、B車の齒先圓の範圍内で作れば、それが即ちB車に於ける求めるところの齒形である。



第35圖

此の最後の方法は對手齒形を描くための方法であるばかりではなく、與へられたA車と嚙合ふべきB車の齒を削成するための一つの方法でもある。例へば前の第34圖に於てIを與へられたA車のピッチ圓と同じ半徑の圓、Cを其の齒の形及び大きさを正確に代表してゐる齒形刃物とし、Cを紙の面に垂直に動かせば、削成せらるべきB車の齒が其の方向に削られるものとする。そこで圓Iをして被工作B車のピッチ圓IIに沿つて轉り接觸をさせると同時に、刃物Cを上記の如き方向へ、B車の齒幅以上の距離を充分に頻繁に往復させると、B車上に第35圖の如くDが自然に削成される。



第36圖

斯くの如くにして削成せられたB車は、ピッチ圓I及び齒形Cを有するA車と嚙合ひ運轉をなし得るは勿論であるのみでなく、A以外の車でも其の齒形が以下の各章で述べるやうにA車のものと同じ法則で出來て居るものならば、その圓周ピッチ $P_0$ がA車のと等しくある限り、それらの車も差支へなく此のB車と嚙合ひ運轉する。但し實際にはそれらの車の齒數が、削成に代表使用せられたA車の齒數よりも少いことを必要とする。それはAよりも齒數の多い車と嚙合はすと、第35圖の齒隙底の兩隅角の肉が對手車の齒先と行當つて運轉を妨げるからである。従つて實際の削成に於ては、運轉對手の齒數が大であつても差支

をなし得るは勿論であるのみでなく、A以外の車でも其の齒形が以下の各章で述べるやうにA車のものと同じ法則で出來て居るものならば、その圓周ピッチ $P_0$ がA車のと等しくある限り、それらの車も差支へなく此のB車と嚙合ひ運轉する。但し實際にはそれらの車の齒數が、削成に代表使用せられたA車の齒數よりも少いことを必要とする。それはAよりも齒數の多い車と嚙合はすと、第35圖の齒隙底の兩隅角の肉が對手車の齒先と行當つて運轉を妨げるからである。従つて實際の削成に於ては、運轉對手の齒數が大であつても差支



へないことを望むならば、削成刃物が代表する A 車の齒數を充分に多くすべきである。即ちその場合には第 36 圖の如く、刃物は後に述べるところの所謂ラック (rack) を代表することが望ましい。但しこのことは齒車工作上の問題であつて、今強ひて直ぐ茲で考へるには及ばない。

## 第 6 章 サイクロイド

ルレット — 今まで述べたところでは齒形の曲線について何等の制限をしなかつたが、これからは更に齒形として普通に用ひられる曲線に之を制限することとし、その一つであるサイクロイドなる曲線に就て述べるための順序として、先づルレットなる曲線を考へよう。今 A なる平面曲線と E なる平面曲線とが同一平面内に置かれて、不動の A に對し E が轉り接觸をしながら動くものとする、E に屬する或る一點は其の際その平面内に或る一つの曲線 C を描くであらう、此の種の曲線 C は一般にルレット (roulette) と呼ばれるものであつて、その形は言ふまでもなく曲線 A 及び E、並に曲線 C を描くための點の如何なぞに依るものである。此の場合一般に不動の曲線 A を基礎曲線 (base)、移動する曲線 E を造形曲線 (generating curve) と言ひ、曲線を描くための點を造形點 (tracing point) と呼ぶ。

第 37 圖は造形點  $t_1$  が特に造形曲線 E そのものゝ上に在る場合のルレットの描かれ方の一例を示したもので、例へば最初に造形點  $t_1$  が曲線 A 上の一處  $a_1$  に接して居たとし、之を轉がして E の一處  $t_2$  が A の一處  $a_2$  に接するに至ると、造形點  $t_1$  はそのとき或る點  $c_2$  に位置するであらう。同様にして  $t_3$  が  $a_3$  に接するときには  $c_3$  に位置し、順次に  $c_4, c_5$  と位置して、それらの點  $a_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  等を連ねた曲線、即ちルレット C が描かれるだらう。

以上は運動に關する説明であるが、ルレットを紙上に描く方法も又之と同様である。即ち造形曲線 E に沿つて任意の多くの點

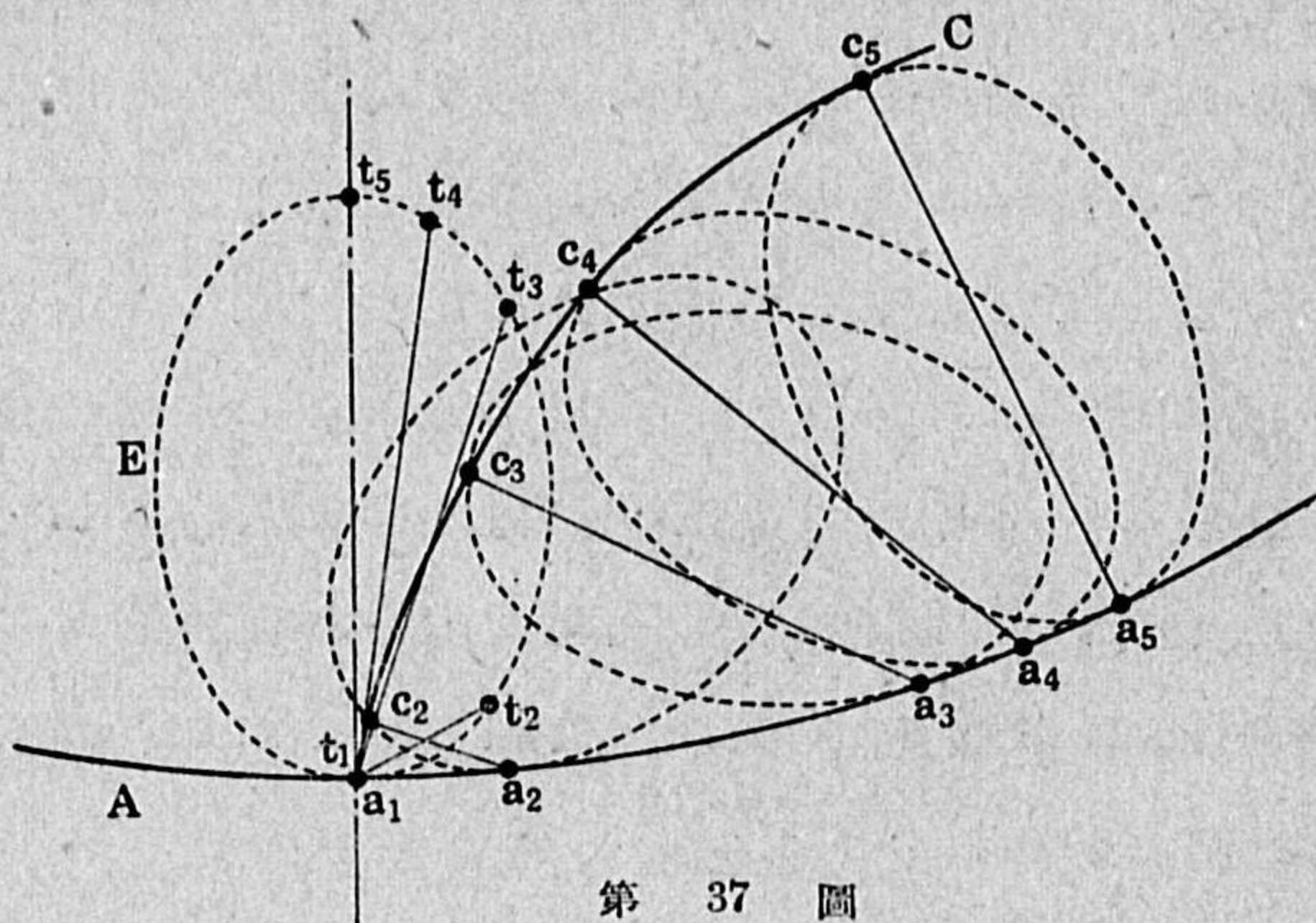


$t_2, t_3, t_4, t_5$  等を探り、轉り接觸の條件に基き

$$\widehat{a_1 a_2} = \widehat{t_1 t_2}, \widehat{a_1 a_3} = \widehat{t_1 t_3}, \widehat{a_1 a_4} = \widehat{t_1 t_4} \text{ 等}$$

であるやうに點  $a_2, a_3, a_4$  等を基礎曲線  $A$  に沿つて探り、 $a_2, a_3, a_4$  等を中心にして夫々半径  $\widehat{t_1 t_2}, \widehat{t_1 t_3}, \widehat{t_1 t_4}$  等の圓を描き、それらの圓を包絡する一つのエンベロープを描けば、それが即ち求めるところのルレット  $C$  である。

第37圖の基礎曲線  $A$  が例へば圓であるとすると、ルレット  $C$  は

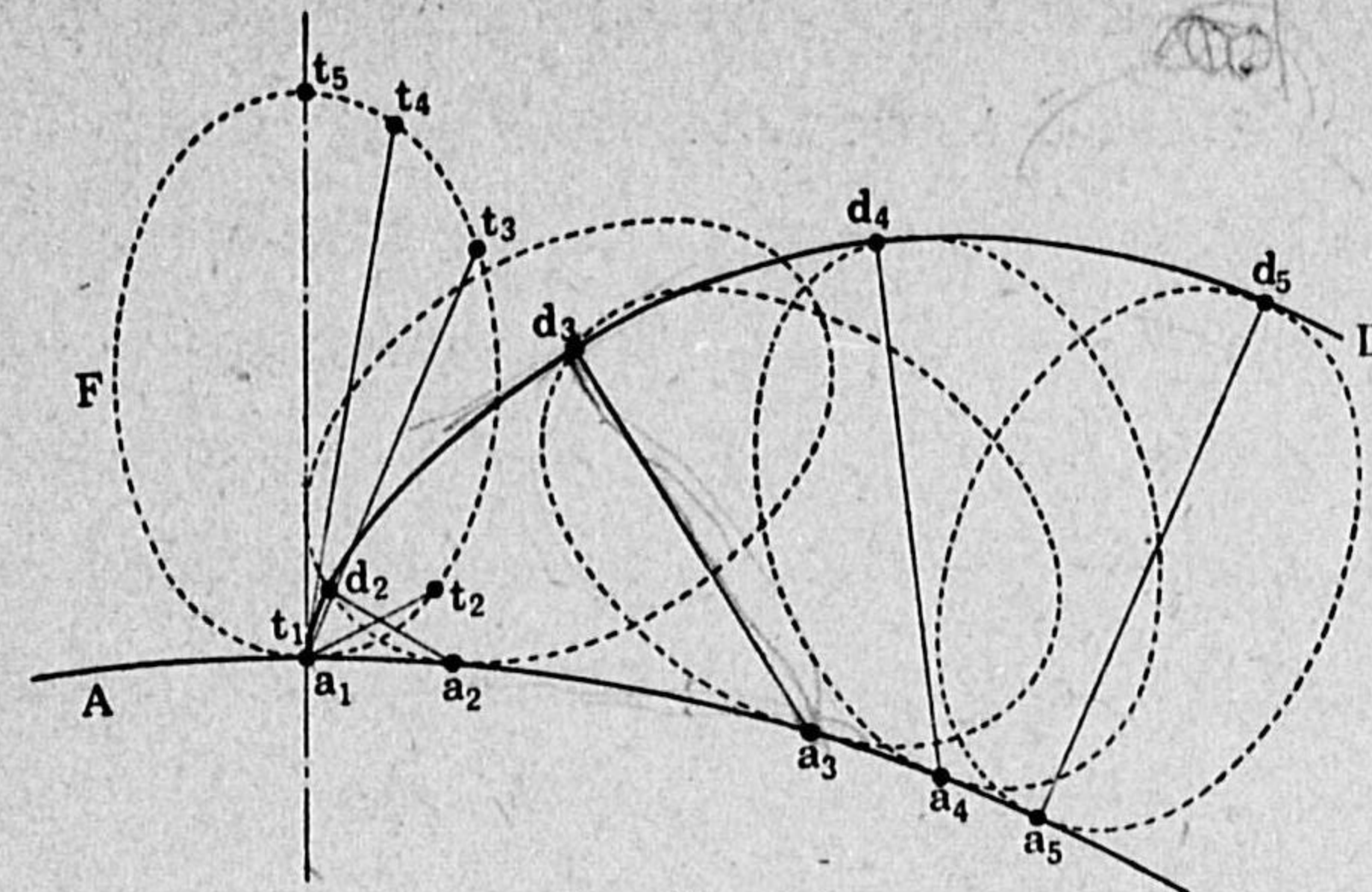


第 37 圖

曲線  $E$  が圓  $A$  の内側を轉がつて出來たものと言へる。従つて之と同様にして、圓  $A$  の外側を造形曲線が轉がることに依つても、又或るルレットが描かれるわけである。第38圖はその場合を示し、造形曲線  $F$  が  $A$  の外側を轉がりながら、 $F$  の上にある造形點  $t_1$  が  $d_2, d_3, d_4$  と移行してルレット  $D$  を形成したものである。

ルレットに於て一つの重要な性質は、その中の任意の點、例へば  $d_3$  (第38圖) に於てルレット  $D$  へ垂直線を描くと、それと基礎曲線  $A$  との交點は、造形點  $t_1$  が  $d_3$  に在る瞬間に於ける兩曲線  $AF$  の接觸

點  $a_3$  と一致することである。これは此の瞬間に於て、造形曲線  $F$



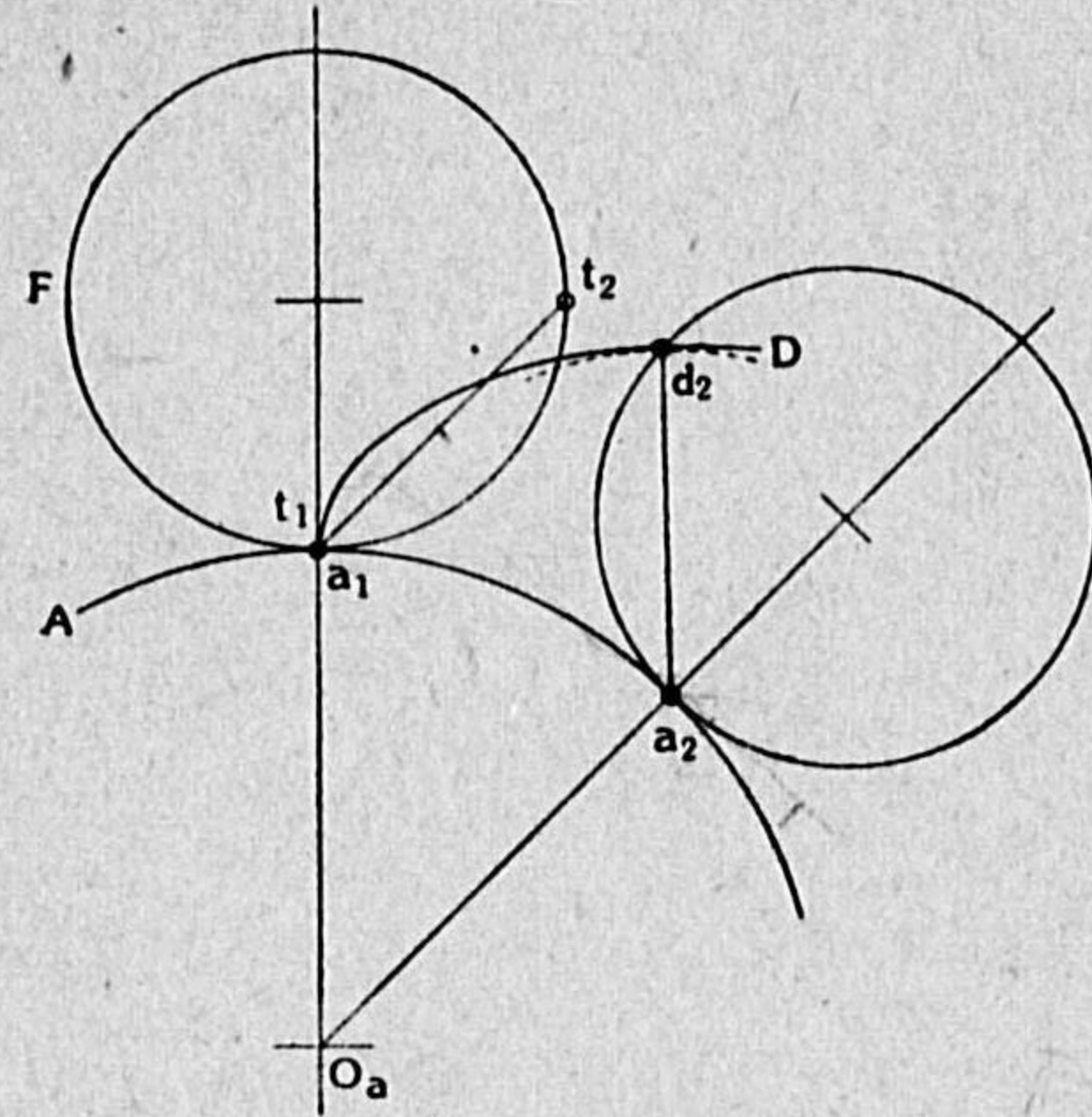
第 38 圖

が  $a_3$  を中心として  $A$  に對して回轉してることから考へて明かである。このことを更に逆に言ふと、 $A$  上の任意の點  $a_3$  からルレット  $D$  へ垂直線  $a_3 d_3$  を描くと、造形曲線が  $a_3$  に於て接觸してゐる瞬間に、造形點  $t_1$  は即ち  $d_3$  に在るとも言へる。以上はルレットに屬するすべての曲線に適用せられる定理であり、従つて又齒車の理論に於て重要な役目をするところのものでもある。

**サイクロイド** — 基礎曲線  $A$  が圓であると共に、造形曲線  $E$  又は  $F$  が同じく圓であるときのルレットを特にトロコイド (trochoid) と呼び、従つて其のときの基礎曲線及び造形曲線を夫々基礎圓 (base circle) 及び造形圓 (generating circle) と呼ぶ。この場合更に造形點  $t_1$  が造形圓の圓周上の一點であるものを稱してサイクロイド (cycloid) といふ。これらの場合にも圓  $A$  の内側に轉がつて出來るものと、外側に轉がつて出來るものとの區別があるわけで、圓  $A$  の内側に轉がつて出來るものをハイポトロコイド (hypotrochoid), ハイポサイクロイド (hypocycloid) と呼び、外側に轉がつて出



来るものをエピトロコイド (epitrochoid), エピサイクロイド (epicycloid) と呼ぶ。これらのサイクロイドは齒形の曲線として屢々用ひられるところのものである。



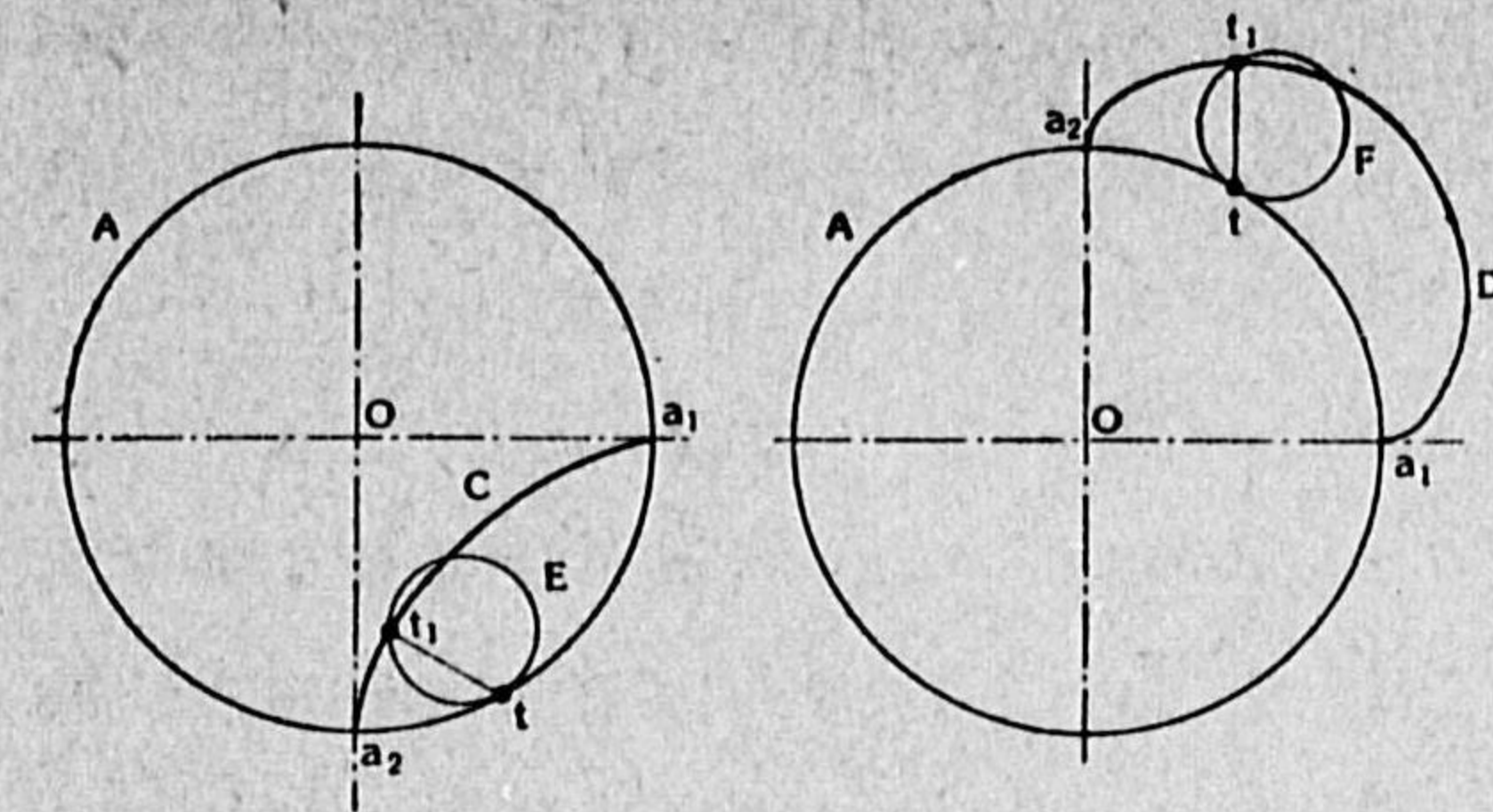
第 39 圖

サイクロイドを紙上に描く方法は前述の一般ルレットのものと同様であるが、それよりも簡単であつて、エンベロープを描く必要がない。即ち例へばエピサイクロイドであると、第39圖に示す如く基礎圓 A の圓周上に任意の點  $a_2$  を採り、之を前の如く

$$\widehat{a_1 a_2} = t_1 t_2$$

ならしめて、 $a_2$  を中心とし長さ  $\widehat{t_1 t_2}$  を半徑とする圓を描き、それと  $a_2$  に外接して描かれた造形圓との交點  $d_2$  を求める。  $d_2$  は即ち求めるところのサイクロイドの中の一點である。従つて第38圖の如く更に順次に  $a_3, a_4, a_5$  等をとつて、同じ操作を繰返へしつゝ  $d_3, d_4, d_5$  等を求め、それらの諸點を連結すればサイクロイド D が出來上る。

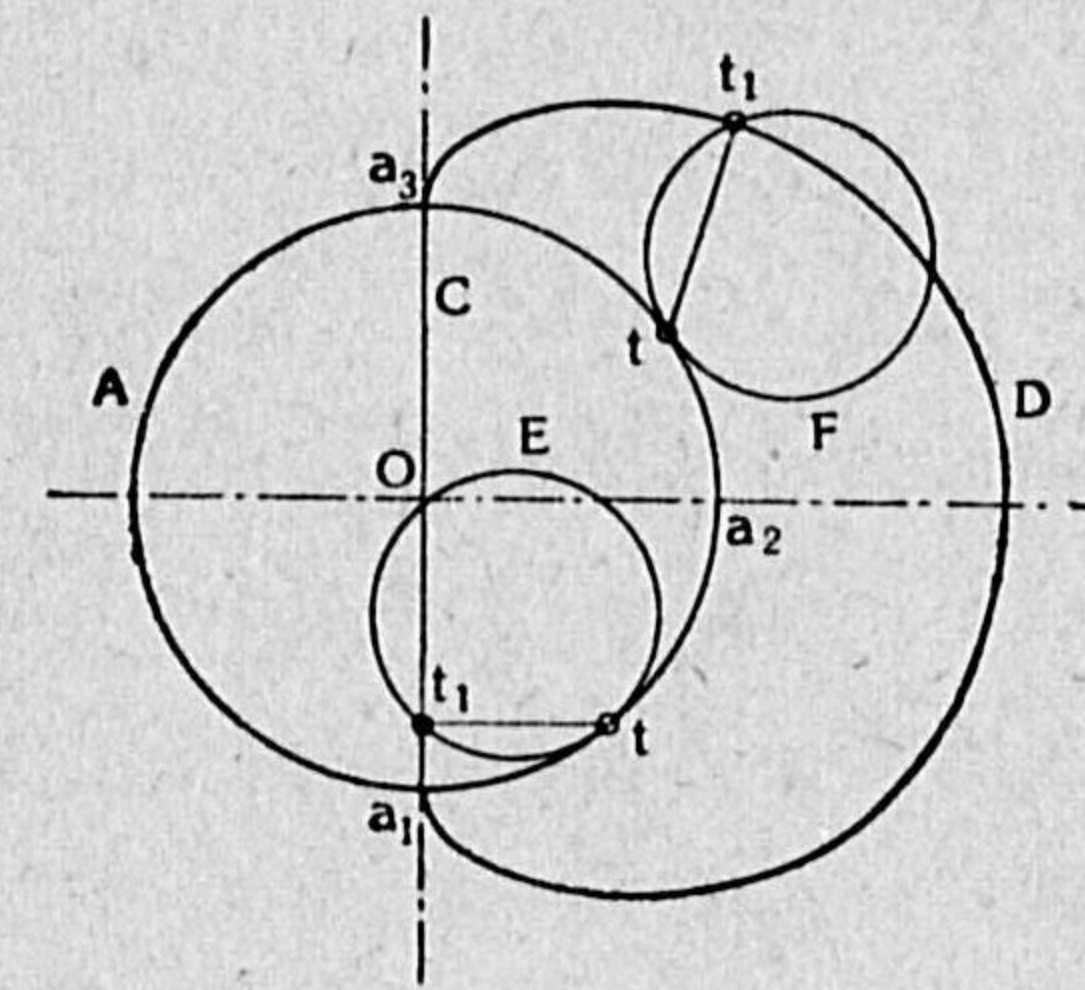
**種々のサイクロイド** — サイクロイドの場合に、造形圓の半徑が基礎圓の半徑の  $1/4$  であつた場合には、造形點が基礎圓圓周から離れた後再び基礎圓圓周へ歸るまでには、造形圓が基礎圓圓周の丁度  $1/4$  を轉がることを要する。それは造形圓圓周の長さが基礎圓圓周の長さの丁度  $1/4$  であるからである。従つてそのときのサイクロイドの形は第40圖の通りとなる。圖に於て  $t$  及び



第 40 圖

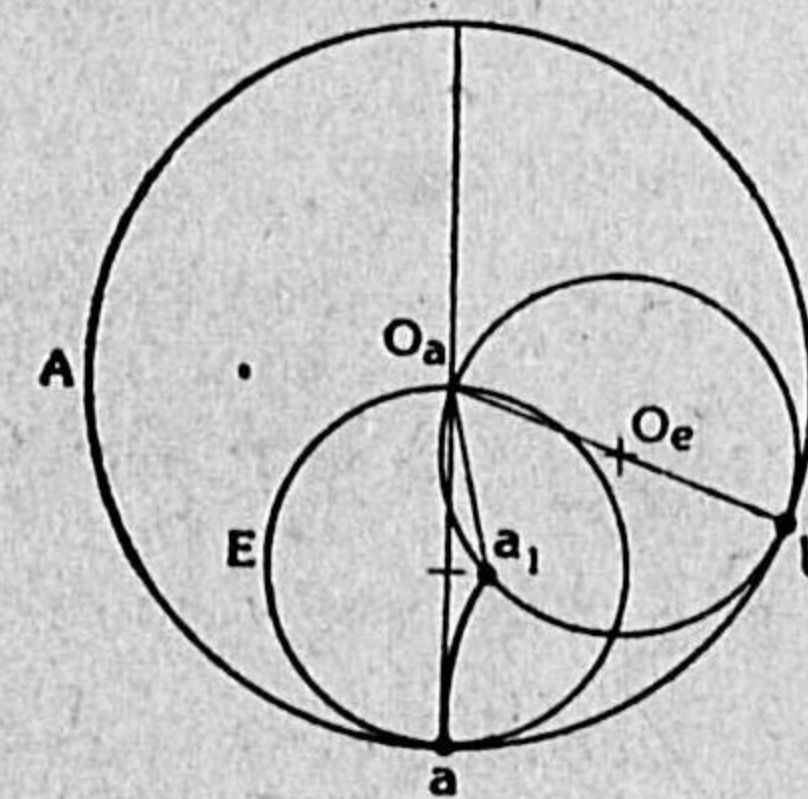
大きさが基礎圓の大きさの丁度半分である場合を示すものであつて、この圖に於ても同様に  $t, t_1$  は或る瞬間に於ける接觸點及び造形點であり、又  $\widehat{a_1 a_2 a_3}$  は基礎圓 A の圓周の半分であると共に、直徑  $a_1 a_3$  がそのまゝハイポサイクロイド C である。

$t_1$  は或る瞬間に於ける接觸點及び造形點の位置、 $\widehat{a_1 a_2}$  は基礎圓圓周の  $1/4$  である。同様にして第41圖は造形圓の



第 41 圖

第41圖の如く直徑  $a_1 a_3$  がそのときのハイポサイクロイドとなることは、之を次ぎのやうにして證明することができる。第42

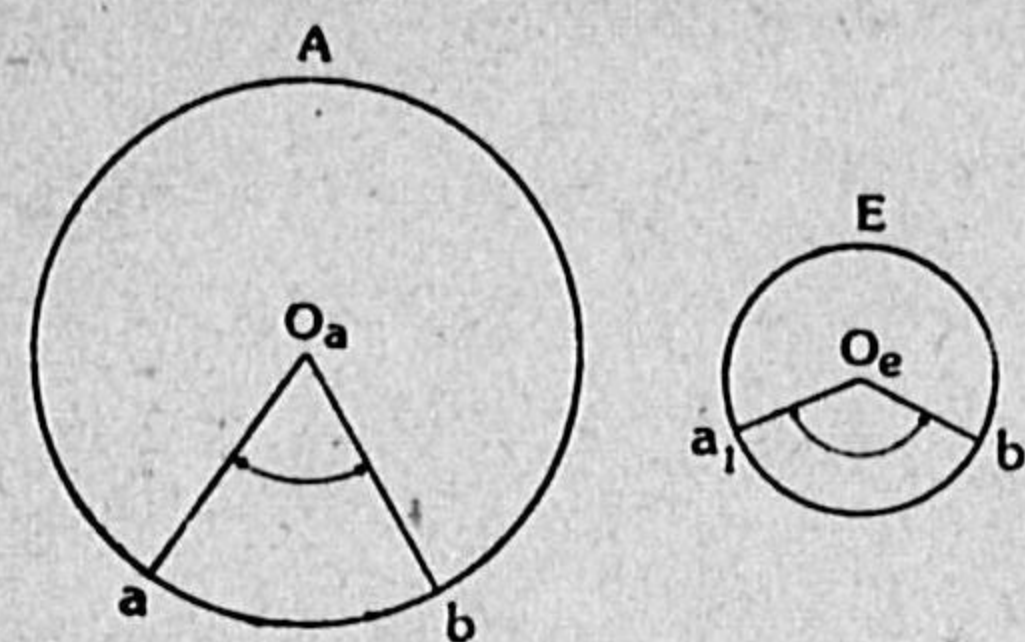


第 42 圖

圖に於て A を基礎圓、 $O_a$  をその中心、E を A の半分の大さの造形圓とする。E が A の内側を轉がる時、その圓周は常に必ず  $O_a$  點を通ることは明かである。a 及び b を A の圓周上の任意の二點とし、E が a に於て A と接觸してゐるときの造形點の位置を即ち a とし、又 E が b に於て A と接觸してゐるときの造形點の位置を  $a_1$  とし、且そのと



きの造形圓の中心の位置を  $O_e$  であるとする。上記の証明のためには、 $a_1$  點が直線  $O_a a$  上にあることを證明すればよい。この場合、



第 43 圖

轉り接觸の條件に従つて

$$\widehat{ab} = \widehat{a_1 b}$$

であるから、E の半徑が A の半徑の  $1/2$  であることを併せ考へると、第 43 圖に於て

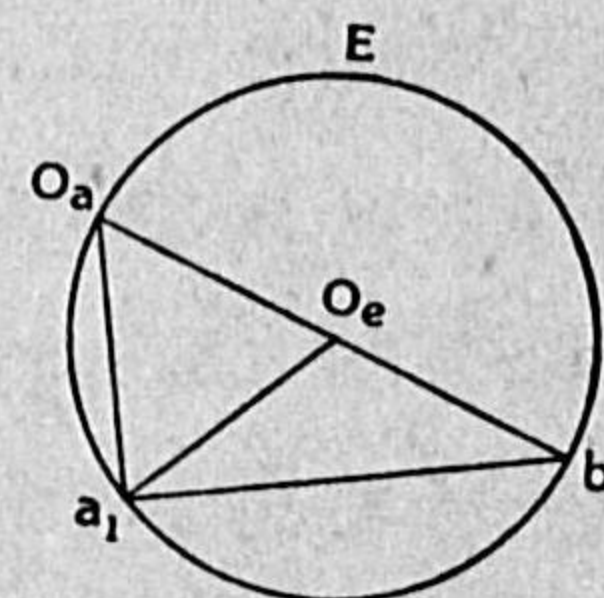
$$\angle a O_a b = \frac{1}{2} \angle a_1 O_e b$$

となる。又一方に於て第 42 圖の如く直線  $O_a b$  は  $O_e$  點を通るから、その状態を第 44 圖の如くに書き改めると、幾何學の定理に従つて

$$\angle a_1 O_a b = \frac{1}{2} \angle a_1 O_e b$$

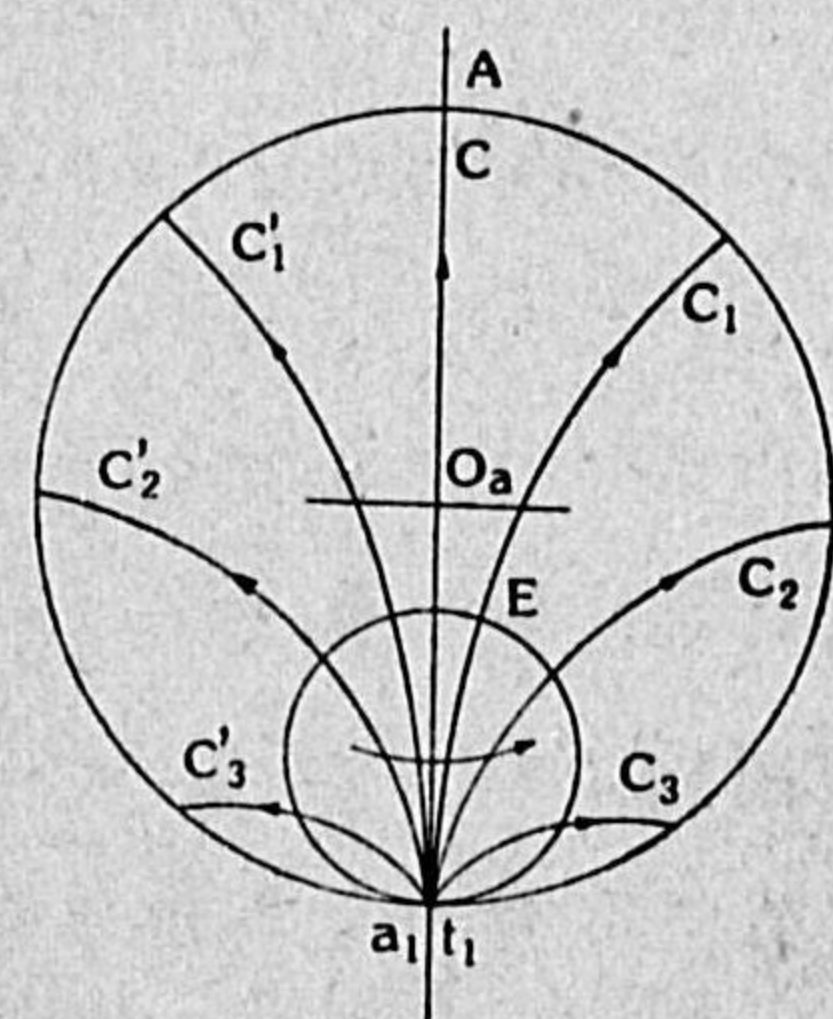
である。之と前式とを對照すると、即ち

$$\angle a O_a b = \angle a_1 O_a b$$



第 44 圖

となる。この關係を翻つて第 42 圖の上で見ると、即ち  $a_1$  點は第 42 圖に示したとは異り、それは直線の  $O_a a$  上に在るといふことに歸



第 45 圖

著する。言ひ換へると、このときのハイポトロコイドは直線  $O_a a$  と一致する。

第 45 圖に於て、造形點  $t_1$  が最初に  $a_1$  に在つて、造形圓 E の中心をそれから矢の方向へ轉がすとすると、造形圓 E の大きさが基礎圓 A の大きさの半分の時、上記の證明に従つてハイポサイクロイドは  $a_1 O_a$  を結ぶ直徑 C となる。造形圓 E の大き

が若し基礎圓 A の大きさの半分よりも小さいと、そのときのハイポ

サイクロイドは或は  $C_1$  となり、又もつと小さいと或は  $C_2$  となり若くは  $C_3$  となる。遂に E の大きさが零となると、ハイポサイクロイドは結局一點  $a_1$  に歸著する。以上とは反對に、造形圓 E の大きさが基礎圓 A の大きさの半分よりも大きいと、そのときのハイポサイクロイドは或は  $C'_1$  となり、又もつと大きいと或は  $C'_2$  となり若くは  $C'_3$  となる。遂に E の大きさが A の大きさと等しくなると、ハイポサイクロイドは又結局一點  $a_1$  となる。

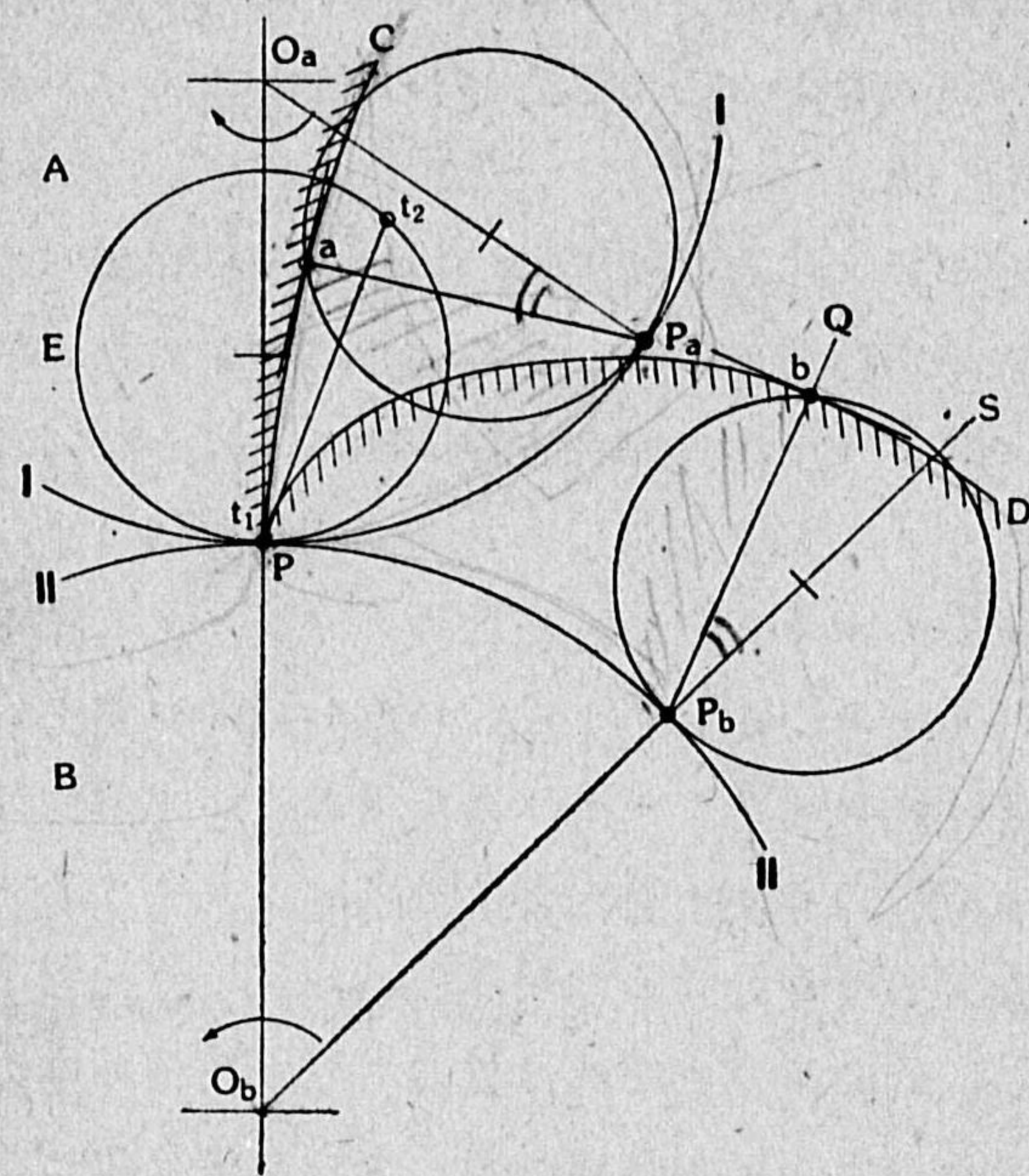
之と類似のことをエピサイクロイドについて考へるに、例へば第 39 圖に於て造形圓 F が次第に縮小して其の半徑が零となると、そのときのエピサイクロイドは一點  $a_1$  に歸著する。之と反對に造形圓 F が次第に大きくなり、その極限に於て半徑が無限大になつて圓 F が直線になるとすると、同じく一種のエピサイクロイド的ルレットが描かれる。此のルレットを特に稱してインボリュート (involute) といふ。インボリュートは齒形曲線として現在最も多く用ひられるものであるが、上述の如くそれはエピサイクロイドの一つの特殊型であるに外ならない。

基礎圓 A が無限に大きくなると、それは直線となり、内側外側の區別が消滅するから、その上を圓が轉がつて出来る曲線は單にサイクロイドといふより外はない。これはサイクロイド型ラックに利用されるものである。又基礎曲線が圓でない場合でも、それに沿つて圓が轉がつたときに出来る曲線を夫々トロコイド、サイクロイド、又はインボリュートなどと呼んでも差支へないことゝ思はれる。此の種のルレットは圓形齒車でない例へば橢圓形齒車、カム齒車、筒齒車等に関係するものであるが、茲では今それらには論及しないことにする。



## 第 7 章 サイクロイド歯車の成立

サイクロイド歯形の可能性 — A車の回轉中心を  $O_a$  (第46圖),



第 46 圖

れども不動であるところの二つの基礎圓を想像し、造形圓が此等の二つの基礎圓に沿つて轉がり接觸をするものとする。造形圓 E が兩圓と P 點で接觸してゐるときに造形圓圓周上にある造形點  $t_1$  が P 點と一致してゐるものと考え、上記の轉り接觸に伴つて  $t_1$  點が圓 I と一致する基礎圓に依つて描くハイポサイクロイドを C、圓 II と一致する基礎圓に依つて描くエピサイクロイドを D とする。そうすると、曲線 C を下齒として第46圖の如く A 車へ取

ビッチ圓を I、B 車の回轉中心を  $O_b$ 、ビッチを圓 II とし、 $O_a$  點  $O_b$  點は不動とし、圓 I と圓 II とはビッチ點 P に於て轉り接觸をするものとする。P 點に於て兩圓 I、II に接觸する造形圓 E を考へ、又ビッチ圓 I 及び II と全く等しいけ

附けたとき、角速度比條件を満足して之と嚙合ふべき B 車の<sup>上</sup>齒は、同圖に示した通りの關係位置に於て B 車へ取附けられた曲線 D である。

このことを證明するため、次ぎの如くに考へる。<sup>下</sup>齒 C 又は<sup>上</sup>齒 D を圖示の如く取附けられた A 車及び B 車が、少しく矢の方向へ回轉して、圓 I 上の一<sup>上</sup>點  $P_a$  と圓 II 上の一<sup>下</sup>點  $P_b$  とが共にビッチ P へ來つて相接觸するものとする。即ち  $\widehat{PP_a} = \widehat{PP_b}$  である。  $P_a$  點から A 車に固定の曲線 C へ下した垂直線を  $P_a a$  とし、C 曲線が之と交る點を a とすると、前章に於て述べた通り、造形圓 E が其の圓周上の一<sup>上</sup>點  $t_2$  で  $P_a$  點と接觸してゐるとき、造形點  $t_1$  は a 點に位置する。即ち

$$\widehat{PP_a} = \widehat{t_1 t_2} = \widehat{P_a a} \quad \text{及び} \quad \overline{t_1 t_2} = \overline{P_a a}$$

である。同様にして  $P_b$  から曲線 D へ下した垂直線が、それと交る點を b とすると、同じ論法で

$$\widehat{PP_b} = \widehat{t_1 t_2} = \widehat{P_b b} \quad \text{及び} \quad \overline{t_1 t_2} = \overline{P_b b}$$

である。即ち  $\overline{P_a a} = \overline{P_b b}$  となり、又従つて弓形  $P_a a$  と弓形  $P_b b$  とは同形であるといふことになる。

以上を要約すると

$$(i) \quad \widehat{PP_a} = \widehat{PP_b}$$

$$(ii) \quad \overline{P_a a} = \overline{P_b b}$$

$$(iii) \quad \angle a P_a O_a = \angle Q P_b S$$

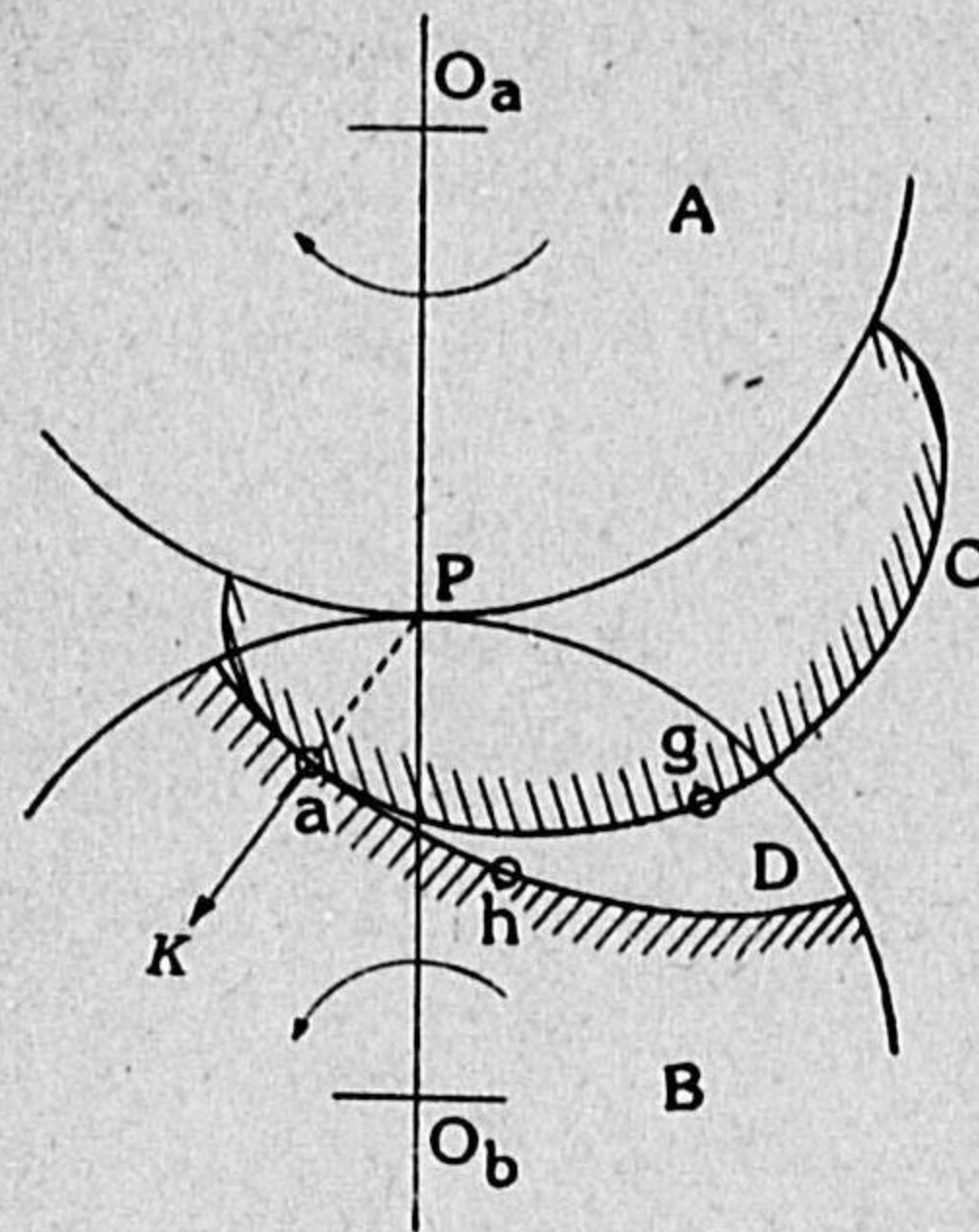
となり、第 5 章第 29 圖及び第 30 圖に於て述べた條件を完全に充足してゐる。即ち D は C の對手齒形である。

A 車がエピサイクロイドの上齒を有し、B 車が同じ造形圓のハイポサイクロイドの下齒を有するときでも、その嚙合可能の證明



は全然同一である。

**サイクロイド歯形の實用形状**——今試みにA車が上歯としてエピサイクロイドの全曲線Cを有し、之と嚙合ふべきB車が下歯



第 47 圖

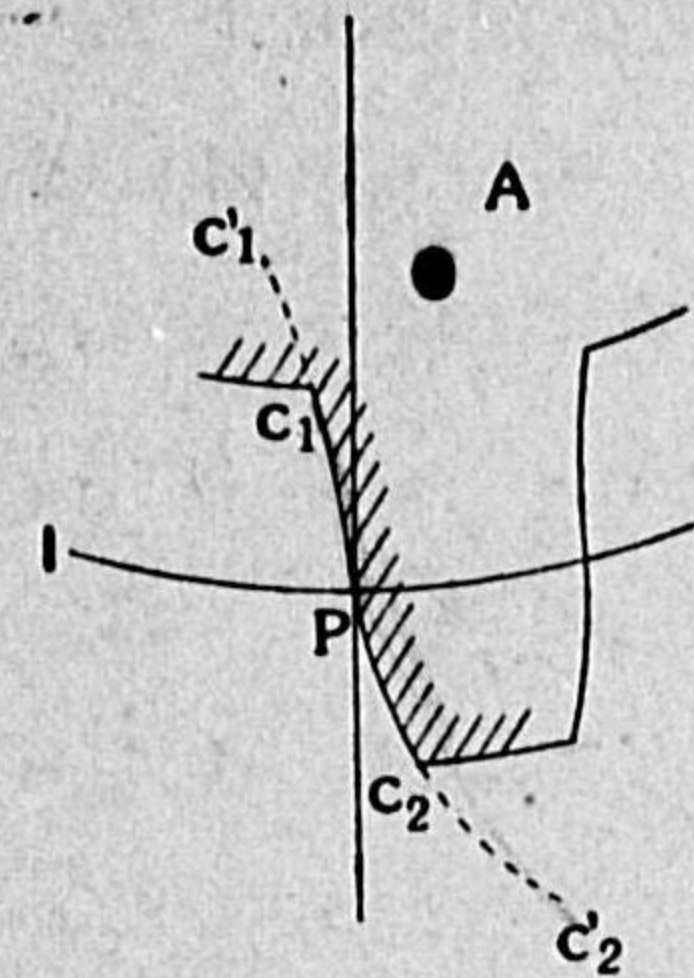
として同じ造形圓のハイポサイクロイドの全曲線Dを有するものとする。此の兩車が例へば第47圖の如く嚙合つてゐる瞬間を考へ、その瞬間に於て兩齒がa點に於て接觸してゐるものとする。今A車を主動車として之を矢の方向へ廻すとすると、接觸點aに於て矢Kの如き力が齒Cから齒Dへ對して共通垂直線

の方向へ働き、此の力KがB車を其の中心Obの周に廻す原動力となる。圖示の状態に於ては矢Kの向きは直線OaObの向きと相當な傾きをなしてゐるから、此の力Kは充分にB車を廻し得るが、兩車の回轉が次第に矢の方向に進むに従つて、力Kの方向はOaOb線の方

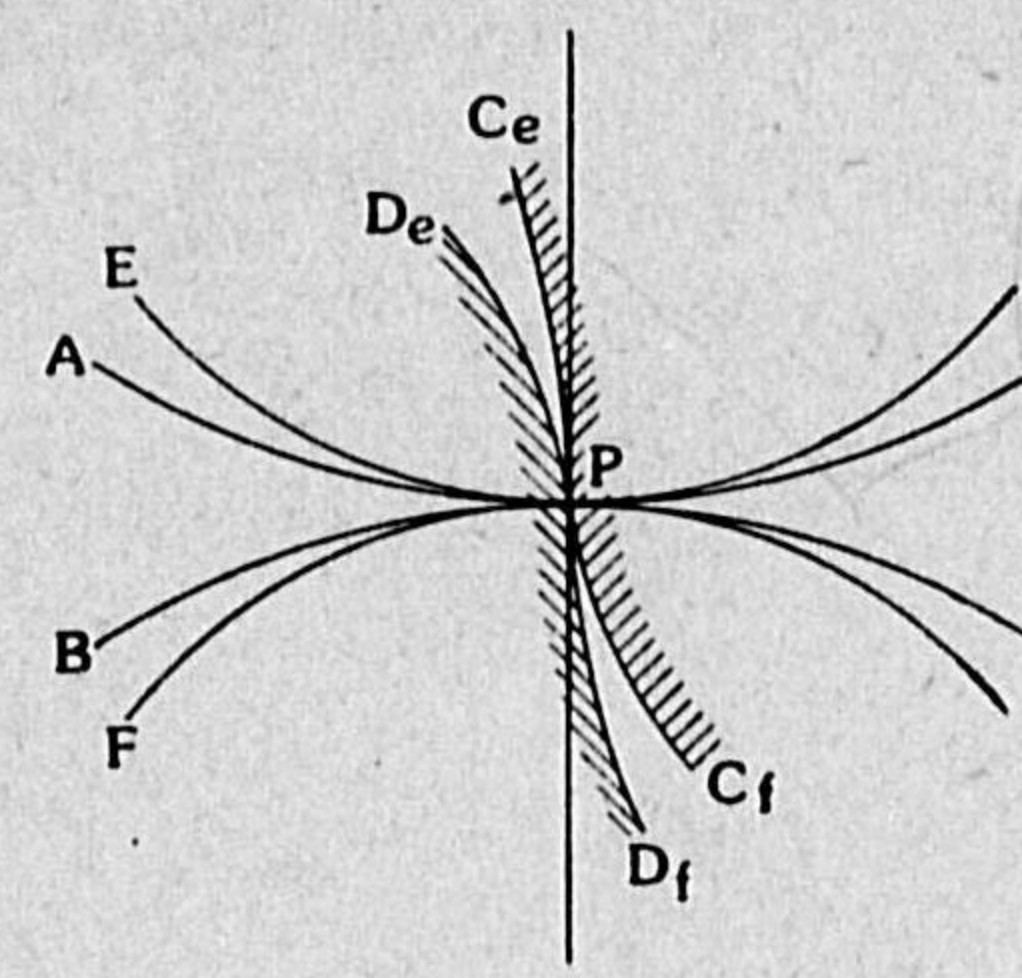
向と次第に平行に近づき、それに相應する大きな力を以てA車を廻すのでない限りはB車は廻されない。即ち力傳達の效率が著しく低下する。更に回轉が進んで、例へば點g點とh點との如きが相接觸するに至ると、そのときの共通垂直線の方向がOaOb線と一致することゝなつて、最早Aは有効にBへ力を傳達し得ない。更にその以後は、Aは勿論主動車として働きから離れてしまふ。

以上に依つて見ると、サイクロイドが齒形曲線として實用される部分は、ピッチ圓に近い部分に限られるといふことになる。又

第47圖は速さかり接觸弧(第5章)だけに於ける傳動を問題としたもので、従つてA車は上齒だけ有するかの如くに示したのであるが、實際には主動車Aは近より接觸弧に於ても主動車として傳動作用を呈することが望ましいから、A車は下齒をも有すべきであり、之に對してB車はそれに應ずる上齒を必要とする。而して此



第 48 圖

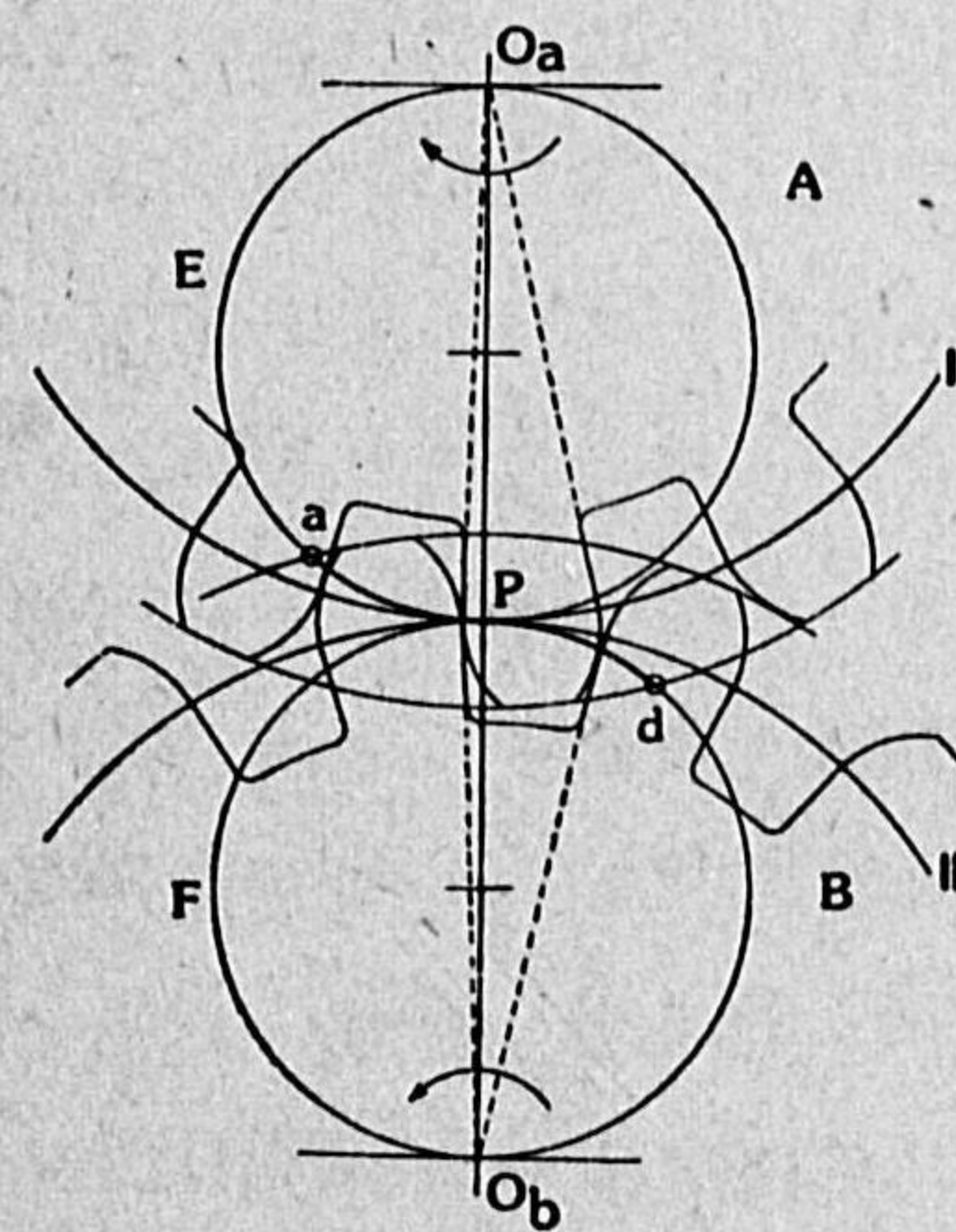


第 49 圖

のA下齒を同じくサイクロイドで形成するものとする、結局その齒形は第48圖の如くなり、ハイポサイクロイドPc1c1'の内、ピッチ圓Iに近い部分Pc1が下齒として用ひられ、エピサイクロイドPc2c2'の内、同じく圓Iに近い部分Pc2が上齒として用ひられるべきである。

之を更にA車及びB車について考へるならば、第49圖に示した通り

Aの下齒はEのAに関するハイポサイクロイドC。



第 50 圖



Bの上歯はEのBに関するエピサイクロイド $D_e$

Aの上歯はFのAに関するエピサイクロイド $C_f$

Bの下歯はFのBに関するハイポサイクロイド $D_f$

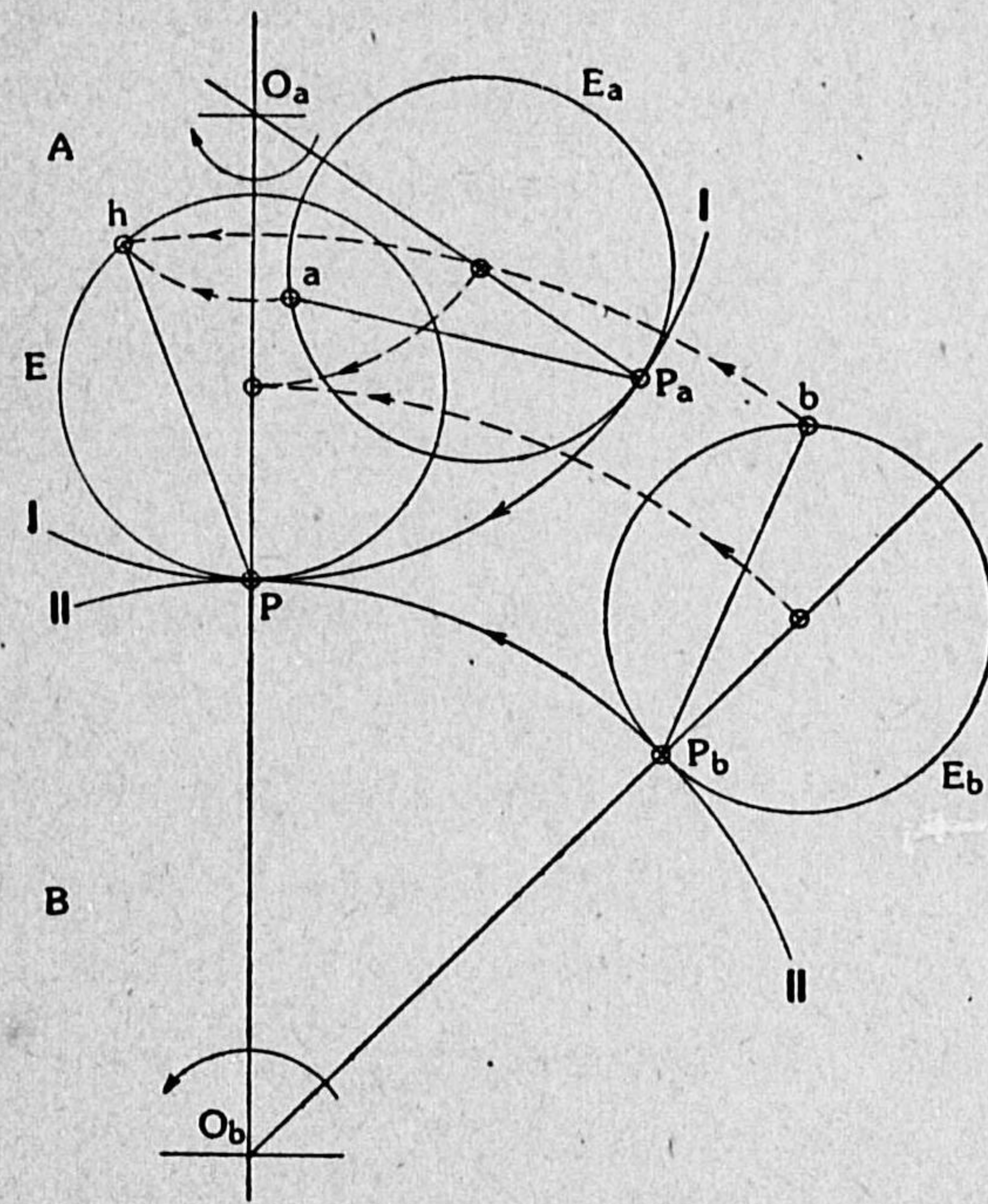
となる。即ちAの歯面は $C_ePC_f$ , Bのは $D_fPD_e$ である。

一層具体的にサイクロイド歯形の一例を示すものとして更に第50圖を掲げる。此の例ではA車とB車とを同じ大きにすると共に、造形圓E及びFを共に其の半分の大きとし、また歯数は兩車共12としたものである。

### 第 8 章 サイクロイド歯車の性質

接觸位置軌跡と壓力角 — サイクロイド歯形を有する二つの歯車ABが嚙合運轉をするときの接觸位置軌跡(第4章)を求めよう。前章第46圖に於て、B車を起動車として矢の方向へ兩車とも

廻るものとする。その際述べた通り、兩車が廻つて $P_a$ 點と $P_b$ 點とが共にP點へ來たときに、齒の一部であるところのaとbとが互に接觸する。その接觸が起る位置そのものを見出すために、第46圖を更に第51圖の如くに書き改めよう。 $P_a$ 及び $P_b$

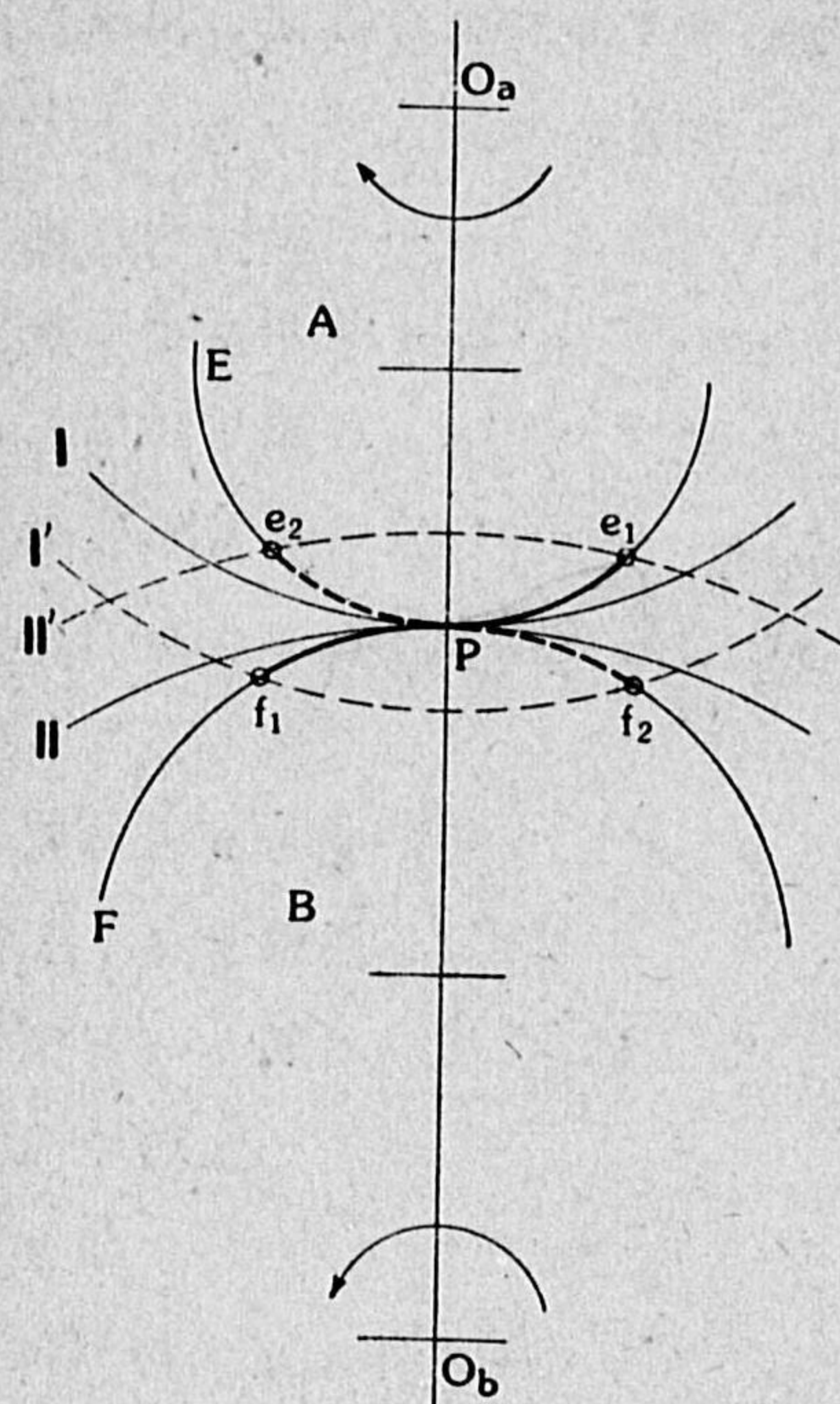


第 51 圖

がPへ來るとき、 $P_a$ 及び $P_b$ に接して描かれてゐる造形圓Eと同じ圓 $E_a$ 及び $E_b$ は、車の回轉に伴つて夫々 $O_a$ 及び $O_b$ を中心に矢の如く移動し、Eと重なるところへ來る、そのときaもbも同じく夫々 $O_a$ 及び $O_b$ を中心に矢の如く移動して、圓Eの圓周上の一處hへ來る。



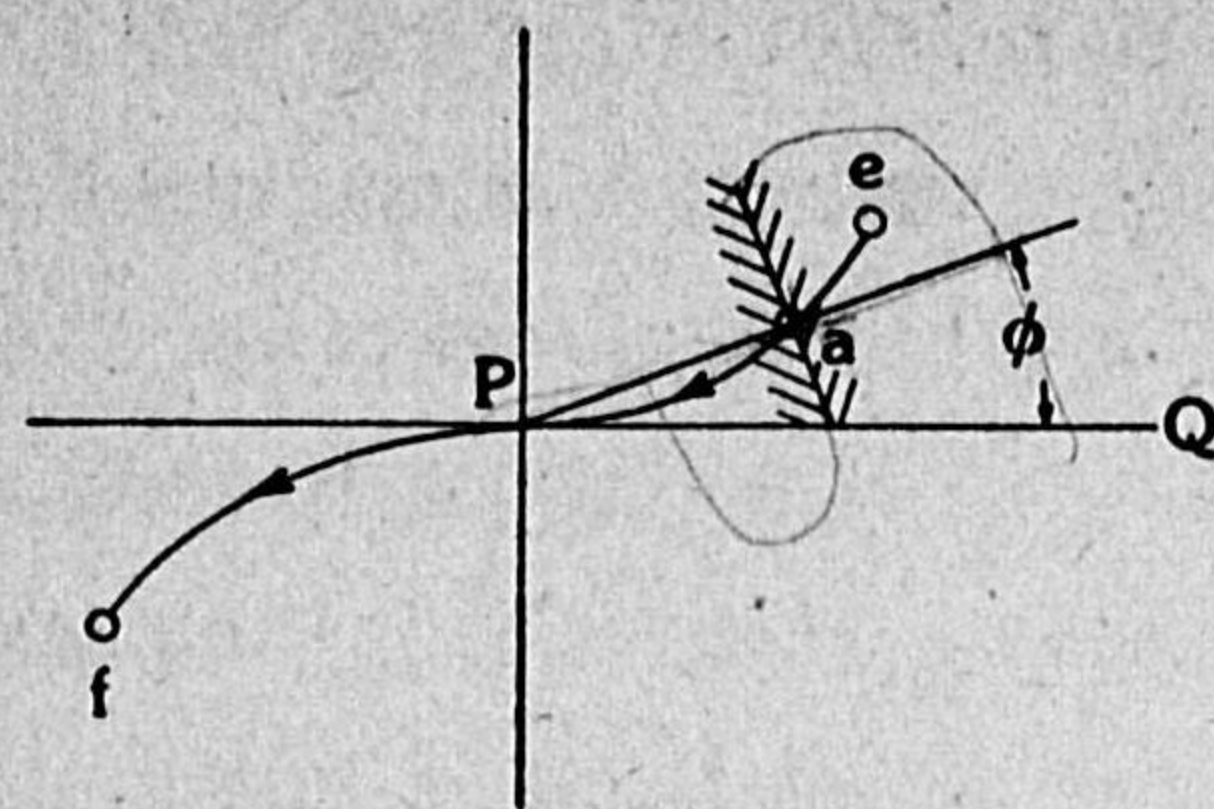
即ち  $h$  點が  $a$  と  $b$  との接觸する位置である。  $a$  點  $b$  點のみならず、齒面  $C$  及び  $D$  (第 46 圖) 上の他の任意の部分も同様にして圓  $E$  の圓周上の或る點に於て接觸する。即ち圓  $E$  が  $A$  車の下齒と  $B$  車の上齒との接觸位置軌跡である。之と同様にして  $A$  車の上齒と  $B$  車の下齒との接觸位置軌跡は圓  $F$  (第 49 圖) であるといふことになる。



第 52 圖

勿論兩車の接觸は、從動車の上齒の先端が接するときから始まり、主動車の上齒の先端が接するときを於て終るのだから、第 52 圖に於て、圓  $I'$  を  $A$  車の上齒先圓、圓  $II'$  を  $B$  車の上齒先圓とするとき、兩車が矢の如く回轉する場合に、 $A$  車が主動車なら接觸位置軌跡は  $e_1 P f_1$ 、始點は  $e_1$ 、終點は  $f_1$  であり、若し  $B$  車が主動車なら接觸位置軌跡は  $f_2 P e_2$ 、始點は  $f_2$ 、終點は  $e_2$  である。

二つの齒が相接してゐるとき、接觸位置  $a$  (第 53 圖) に於て兩齒への共通垂直線  $Pa$  は、齒車の一般性質に従つて、常に必ずピッチ點  $P$  を通るのであるが、サイクロイド齒車に於ては、車の回轉に伴ひ接觸位置が上述の如く例へば圓  $e P f$  に沿つて逐次に遷移するのであるから、上記の共通垂直線  $Pa$  と  $P$  點に於ける兩ピッチ圓への



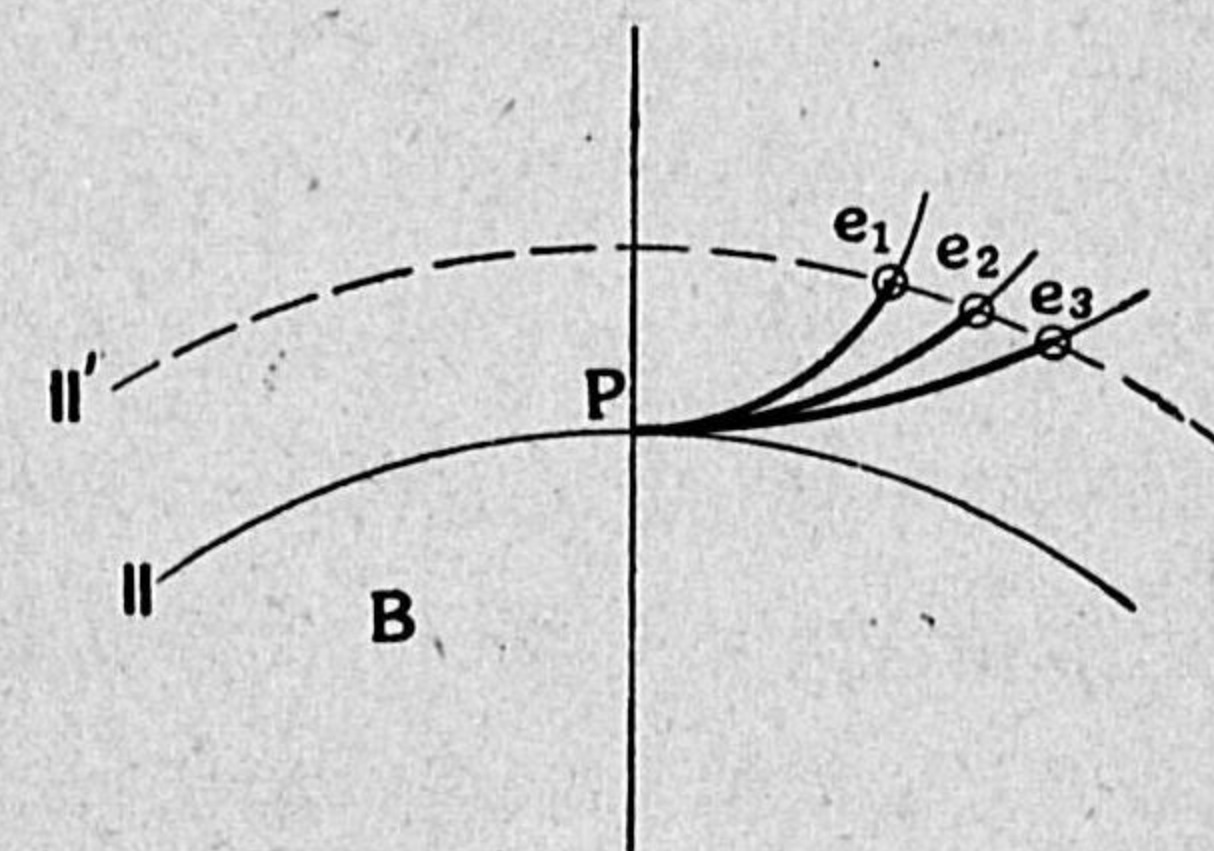
第 53 圖

共通切線  $PQ$  との間の角  $\phi$  は回轉に伴つて逐次に變化し、その値は始點  $e$  及び終點  $f$  に於て最大で、ピッチ點  $P$  に於ては零となる。

此の角  $\phi$  を兩車間の壓力角 (pressure angle) といふ、

即ちサイクロイド齒車に於ては、齒の接觸がピッチ點で行はれる瞬間だけ壓力角が零であつて、接觸がピッチ點を多く離れた位置で行はれるほど壓力が大となる。壓力角があまりに大であることは傳動上から見て好ましくなく、これと同じことは既に第 7 章に於て述べたところであつて、齒先圓の半徑には従つて自ら一定の限度があるといふことになる。

造形圓の大小 — 齒先圓が即ち上述の如く一定に與へられてゐるものとし、例へば  $B$  車に於てそれが  $II'$  (第 54 圖) であるとする。このとき造形圓の大きさを種々に變へると、接觸位置軌跡の右半は  $e_1 P$  となり、又は  $e_2 P$  となり、或は  $e_3 P$  となる。即ち上齒の高さ一定のとき、造形圓



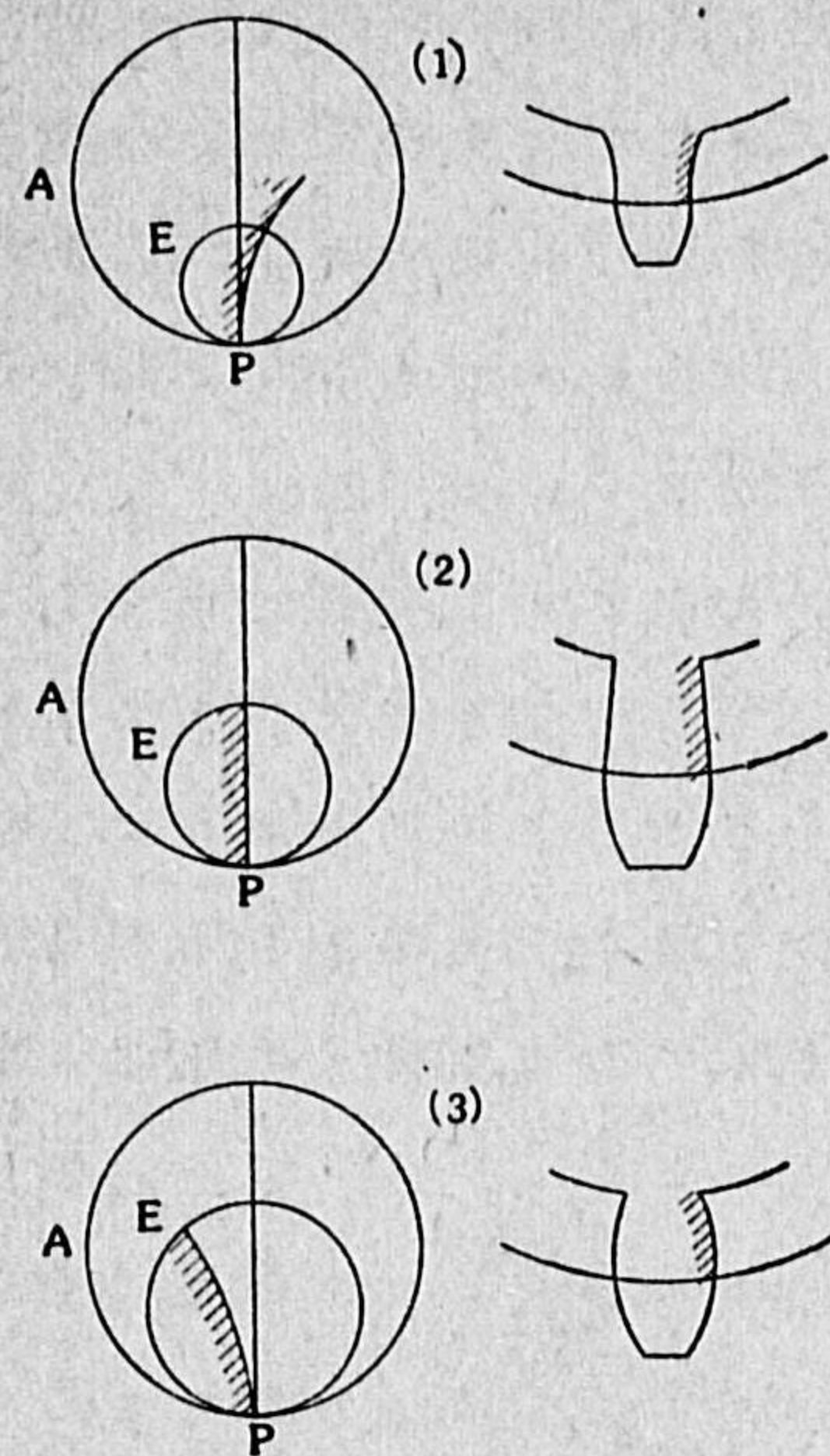
第 54 圖

の半徑を大きくするほど、接觸位置軌跡の長さが長くなり、接觸弧の長さ (第 4 章) の増加、従つて同時嚙合齒數の増加となり、齒車として最も好ましきものとなる。

内廻り造形圓の大小に依るハイポサイクロイドの形の變化は、



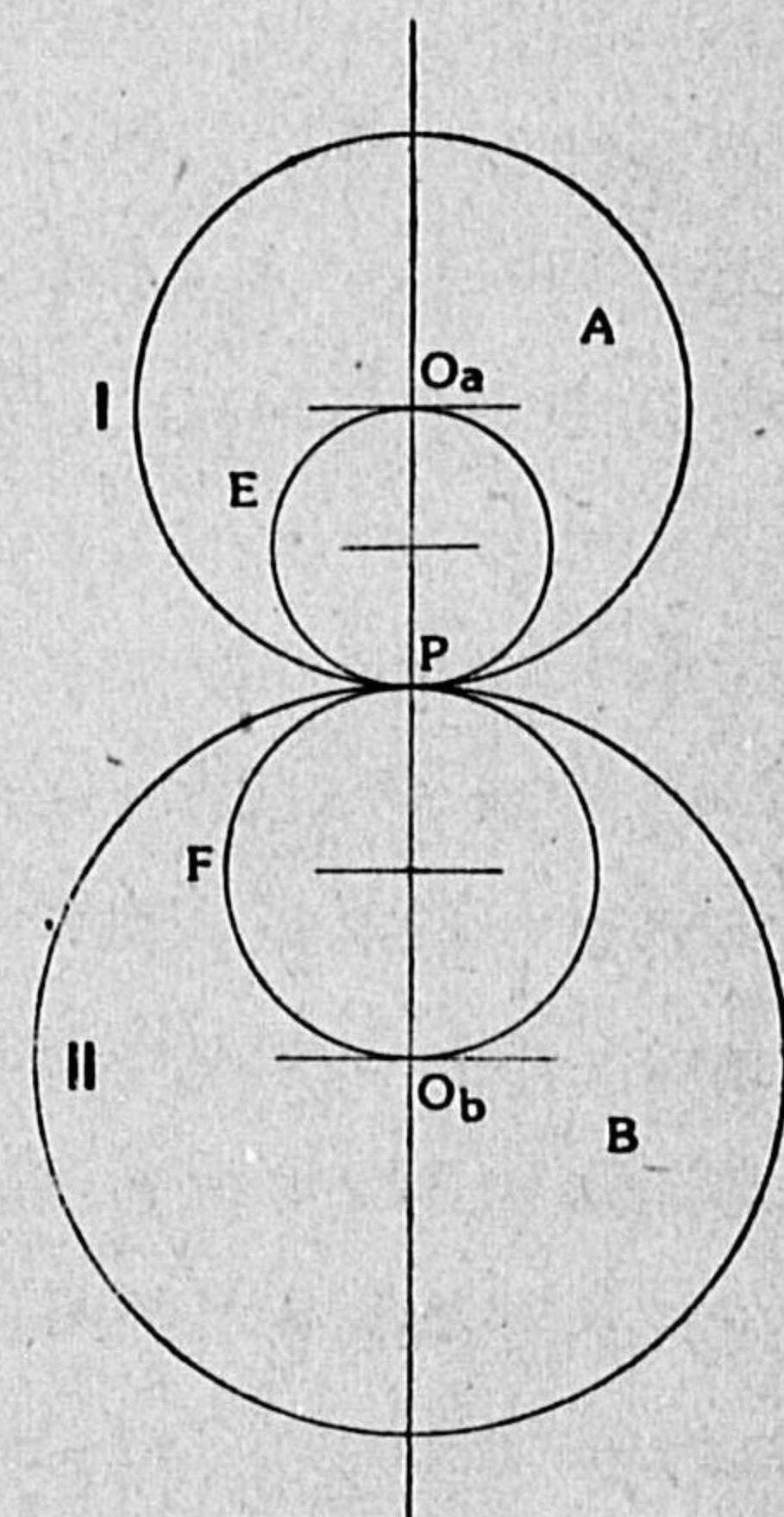
第 6 章に於て第 45 圖について之を述べた。それらのハイポサイクロイドを以て下齒を形造る場合を考へて見ると、第 55 圖の如く



第 55 圖

ある反面に、他方に於ては齒を弱くする不利益を伴はざるを得ない。だから造形圓を大にすることにも限度があつて、最も普通には造形圓を、それを包むピッチ圓の半分程度以内にするのである。ことに齒數の少い齒車に於ては造形圓を充分小さくすべきであつて、又このことに依つて、齒數の少い、しかしながら齒の根元の弱くない

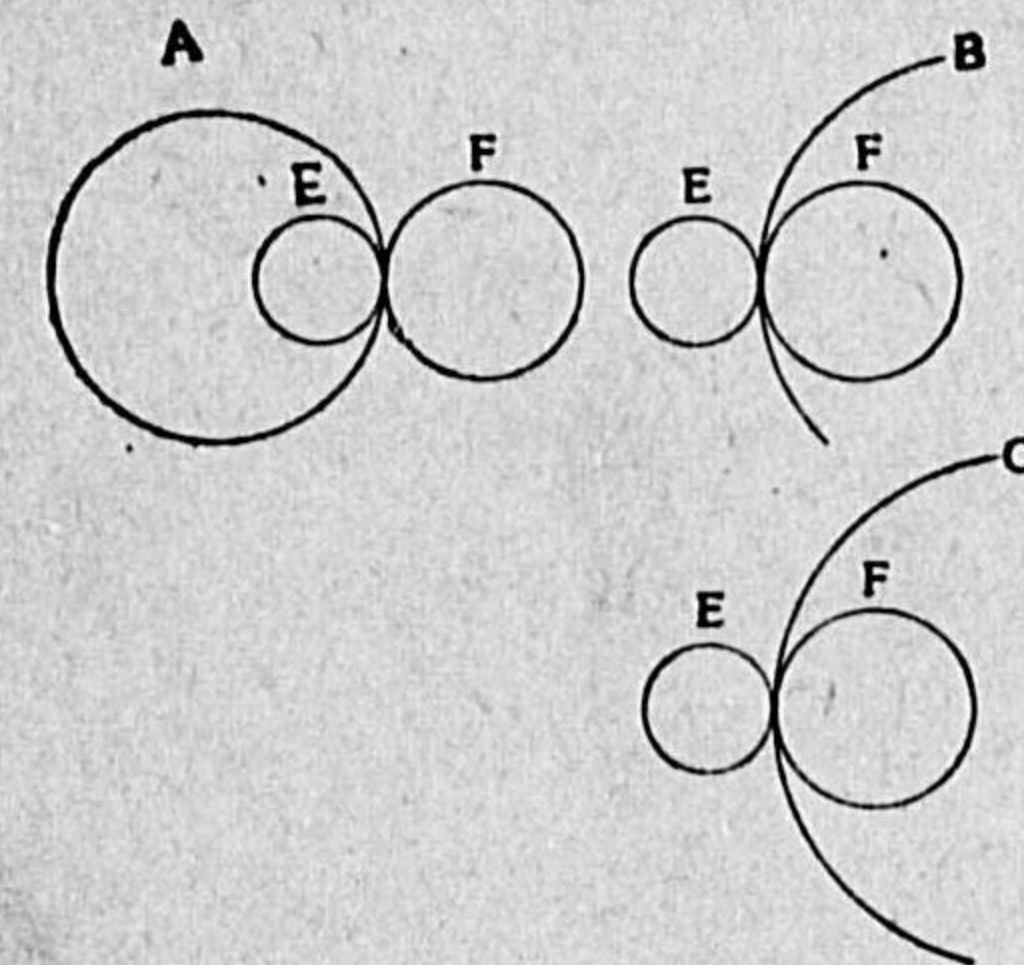
造形圓がピッチ圓の半分以下のときは(1)の如き下齒となり、丁度半分のときは(2)となり、造形圓がピッチ圓の半分よりも大きいときは(3)となる。即ち造形圓が大きくなるに従つて下齒の根元の厚さが小になり、齒としての強さが減少する。従つて造形圓を大にすることは、一方に於ては前述の如く接觸弧を長くする利益が



第 56 圖

齒車を造り得ることが、サイクロイド齒車のインボリュート齒車に優る所以でもある。このことは後のインボリュート齒車の説明に依つて自然に解るであらう。要するに A 車と B 車とが例へば第 56 圖の如く嚙合はされるとき、A 車内の造形圓 E を其のピッチ圓 I の半分にし、B 車内の造形圓 F を其のピッチ圓 II の半分にすることが、最も好ましい、不都合のない取り合せであると謂つていふ。その一つの例は既に第 50 圖に於て示した。

第 56 圖は A 車と B 車とが永久的な嚙合せにある場合、例へば時計の齒車の如き場合であるが、若しそうでなくて A 車が或るときには B ではなくて C と嚙合はされ、又或るときは D と嚙合はされるといふが如き場合、即ち例へば旋盤の送り變へ齒車の如き交換



第 57 圖

性齒車に於ては、造形圓を如何に定むべきであるかと又一つの問題となる。今 A 車が第 57 圖の如く上齒を造形圓 F で、又下齒を造形圓 E で作られてゐるとすると、之と嚙合すべき B 車も C 車も、上齒を同じ E で、下齒を同じ F で造らなくてはならぬ。従つて F の大きさは B 車、C 車等

の内、齒數の最も少い車のピッチ圓の半分に選ばれることが結局必要といふことになる。この齒數の最も少い車のピッチ圓半徑を  $R_{min}$ 、これ等齒車に共通な圓周ピッチを  $P_0$  とし、更にこの最少齒數の車の齒數を假りに 11 であるとする

$$2\pi R_{min} = 11P_0$$

次ぎに造形圓 F の半徑を  $r$  とし、之を



$$r = \frac{1}{2} R_{min}$$

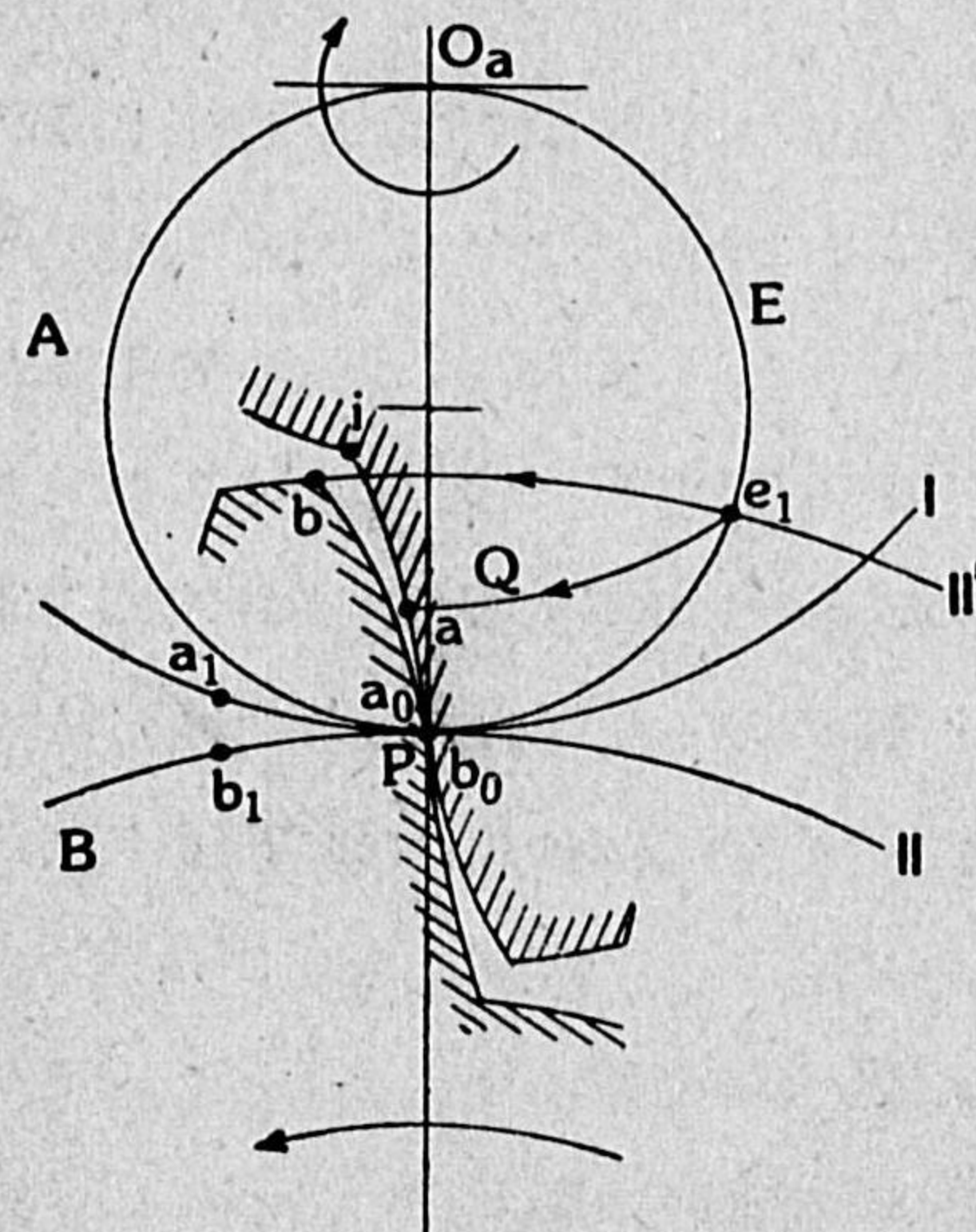
に選ぶとすると、兩式から

$$r = \frac{11}{4\pi} P_c = 0.875 P_c$$

を得る。これが交換歯車に於て普通に行はれる造形圓のきめ方である。

以上は B 車, C 車等の間は相互に嚙合はすことがないものとした場合であるが、若しそうでなくて A 車, B 車, C 車等が互に任意に嚙合される必要のある場合だと、最早 E と F とは異つた大さではいけない。そのときの造形圓はすべて同じ大さで、それは最少齒數の車のピッチ圓の半分に選ぶべきである。

サイクロイド歯車間の滑り——一般に齒と齒との間の滑りは、兩齒が接觸を始めた位置に於て最も甚しく、廻るに従つて其の程度を減じ、ピッチ點に於ては滑りが零となり、その點を過ぎると更に増加して、接觸を終る位置に於て又再び最も甚しくなる。このことは既に一般の齒車に關して第 5 章に於て述べたところである。茲では更にサイクロイド歯車について、之を再考し、摩擦作用を受けることが上齒よりも下齒に於て甚しいことを特に述べようと思ふ。



第 58 圖

に増加して、接觸を終る位置に於て又再び最も甚しくなる。このことは既に一般の齒車に關して第 5 章に於て述べたところである。茲では更にサイクロイド歯車について、之を再考し、摩擦作用を受けることが上齒よりも下齒に於て甚しいことを特に述べようと思ふ。

二つのサイクロイド齒が第 58 圖の如くピッチ點 P に

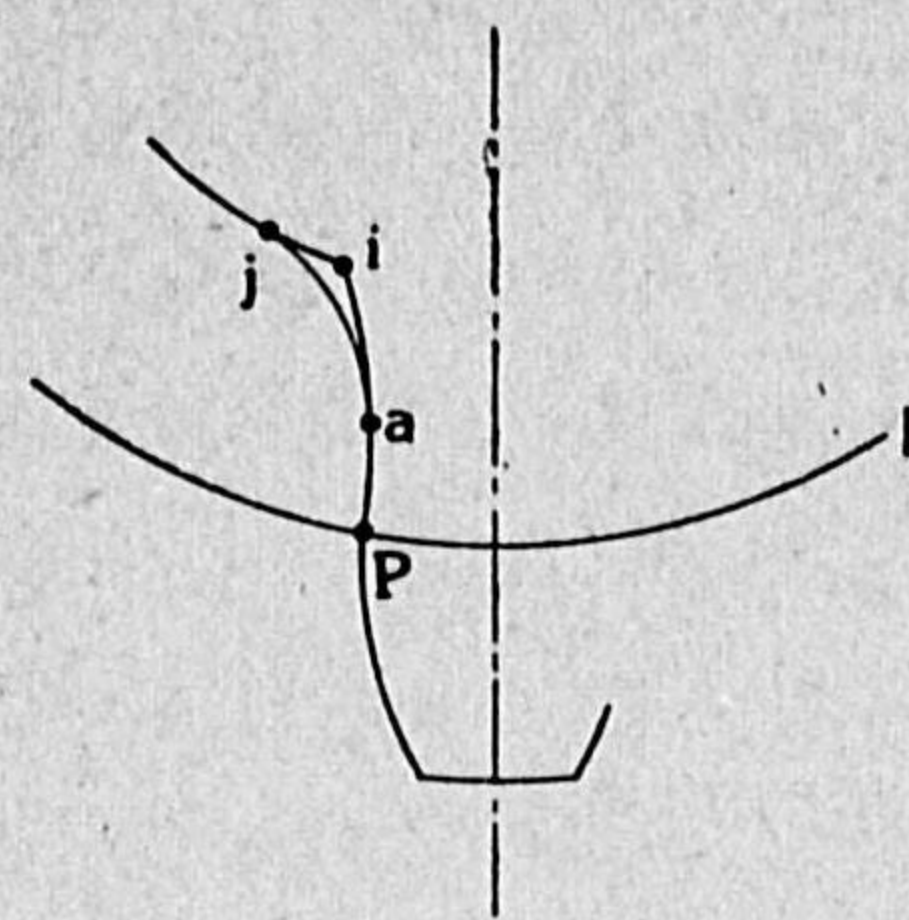
於て相接してゐるとし、接觸の始まる位置を  $e_1$  とする。接觸が始まる瞬間に於ては、謂ふまでもなく B 車の齒先  $b$  點が A 車の下齒の一點と  $e_1$  なる位置に於て相接して居たのであるが、それが次第に廻つて此の圖の状態となつたのである。そこで  $e_1$  位置に於て  $b$  點と接觸した A 車の下齒の一點はどれかといふと、それは  $O_a$  を中心にして  $e_1$  を通るところの圓 Q が、A 車の齒面と交る點  $a$  であることは明かである。即ち  $a$  點と  $b$  點とが  $e_1$  位置に於て相接したのである。 $a$  點と  $b$  點との接觸から始まつて、圖の状態へ移ると P 點で兩者が接してゐるのだから、A 車の  $aP$  なる齒面が B 車の  $bP$  なる齒面と滑り合ひ摺り合ふわけである。 $\widehat{aP}$  なる長さは  $\widehat{bP}$  なる長さよりも當然に短いから、摺れ合ひは上齒よりも下齒の方が短い局部に限られてゐることとなり、即ちさきに述べた通りで、この事柄に原因する齒の摩擦は、従つて上齒よりも下齒に於て甚しいと謂へる。

又以上の事柄からして序に考へ得られることは、下齒の根元  $ai$  なる部分が嚙合の間少しも對手の齒と接しないといふことで、従つて此の部分は必ずしもサイクロイド曲線でなくても差支へなく、たゞ單に對手の齒に觸れない限りの勝手な便宜の形であつていゝといふことになる。だから例へば  $ai$  なる部分へは、對手の齒に觸れない限り充分な肉をつけて、齒の強さを増した方が利益だとも考へられる。即ち  $ai$  を齒面にする代りに、 $aj$  (第 59 圖) の如きを齒面にするのである。

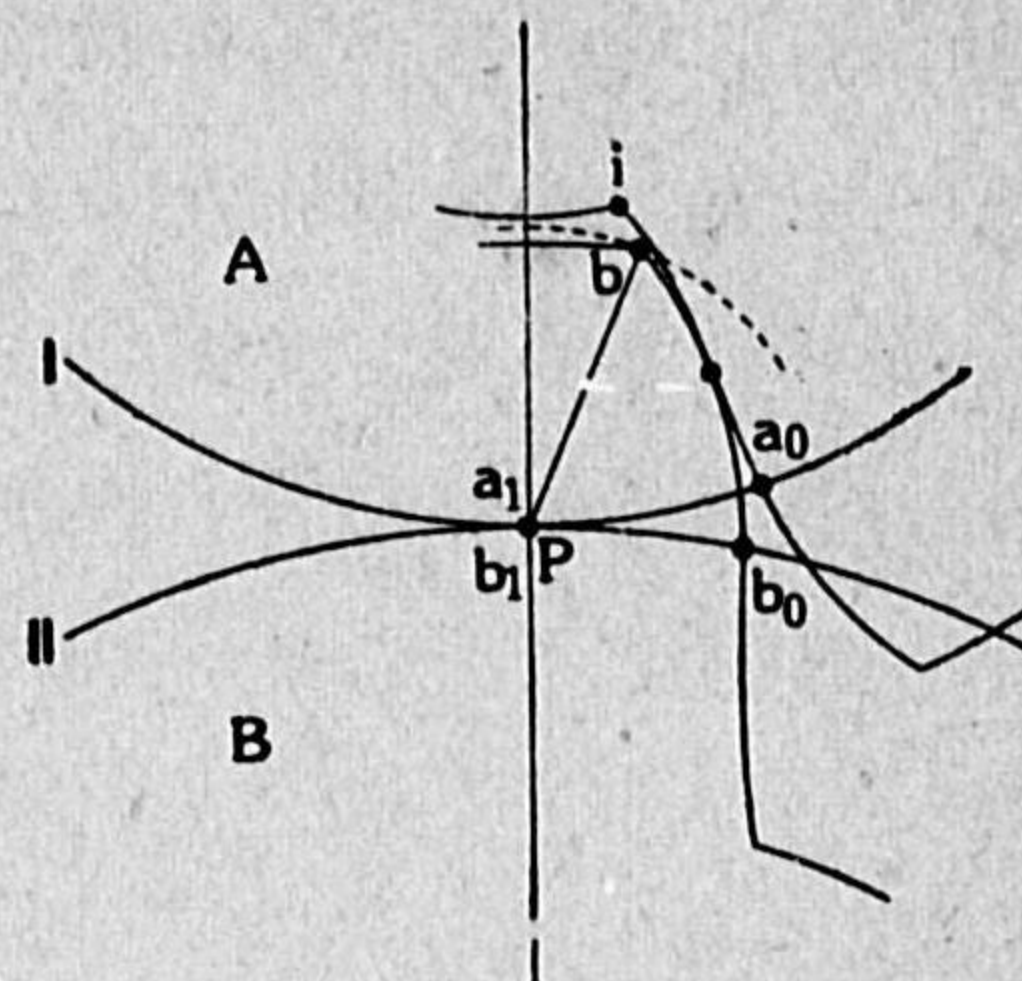
この補強齒面  $aj$  を求めるには、次ぎのやうな考へから進めばいい。第 58 圖の状態では A 車のピッチ圓の一點  $a_0$  が B 車のピッチ圓の一點  $b_0$  と P 點に於て相接してゐるのであるが、それよりも少



しく前に於ては、A車のピッチ圓の一點  $a_1$  が B車のピッチ圓の一點  $b_1$  と同じく P 點に於て相接して居たものであると考へよう。

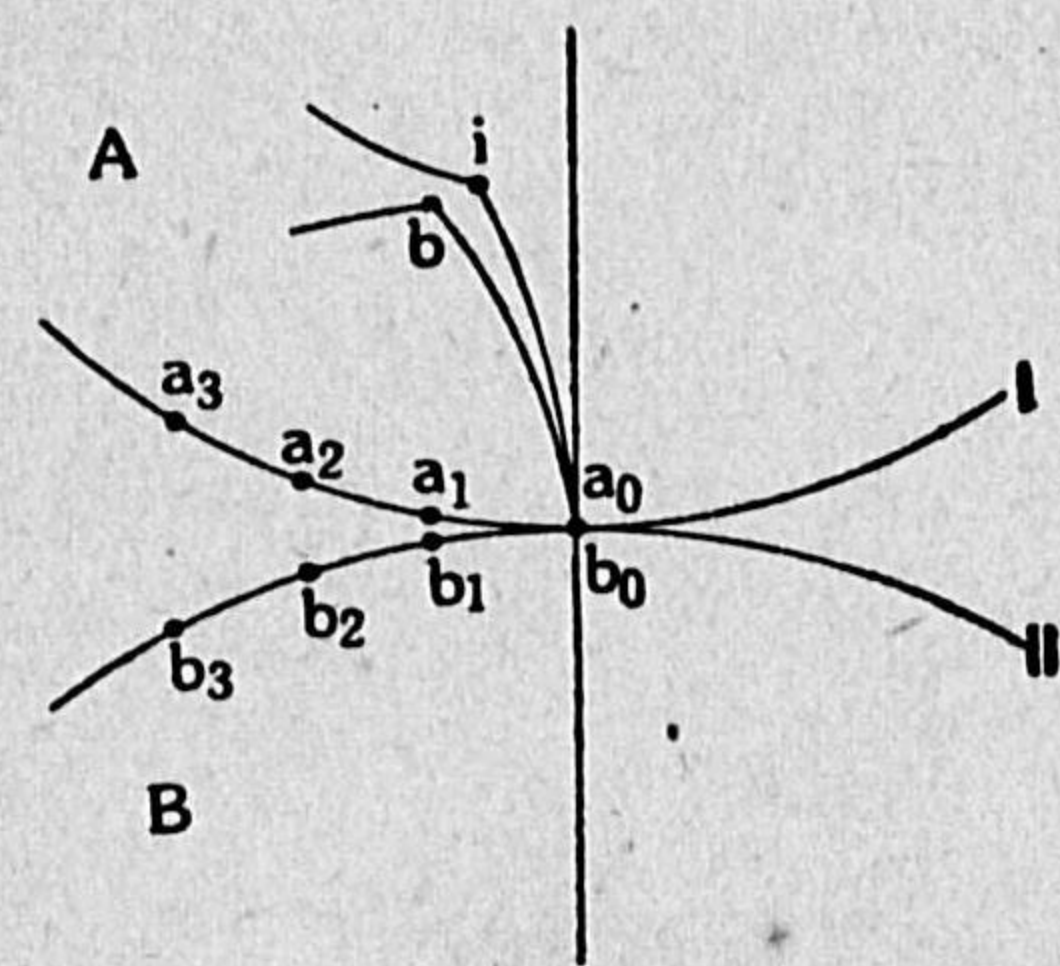


第 59 圖



第 60 圖

そこで圖を  $a_1, b_1$  が相接してゐる状態に書改めると第 60 圖の如く



第 61 圖

なるであらう。このとき A 車に附屬して B 車を眺めると、B 車は  $a_1$  點を中心として A に相對的に廻つて居り、従つて B 車の齒先 b 點は半徑  $\overline{bb_1}$  を以て  $a_1$  點を中心として A 車に相對的に廻つてゐる筈である。だから此の瞬間に於て A 車の下齒面は b 點附近の

此の圓周から外れて居りさへすれば運轉の妨げとならない。この相互關係は回轉の間の時々刻々に變化するが、要するに以上を原則として齒の根元の形を定めればよい。即ちピッチ圓 I 及び II に沿つて  $a_0$  點及び  $b_0$  點から細かい間隔で  $a_1, a_2, a_3, \dots$  及び  $b_1, b_2, b_3, \dots$  等の諸點(第 61 圖)をとり  $\widehat{a_0 a_1} = \widehat{b_0 b_1}$ ,  $\widehat{a_1 a_2} = \widehat{b_1 b_2}$ ,  $\widehat{a_2 a_3} = \widehat{b_2 b_3}$ , 等であるやうにそれら諸點の間隔を定める。次ぎに

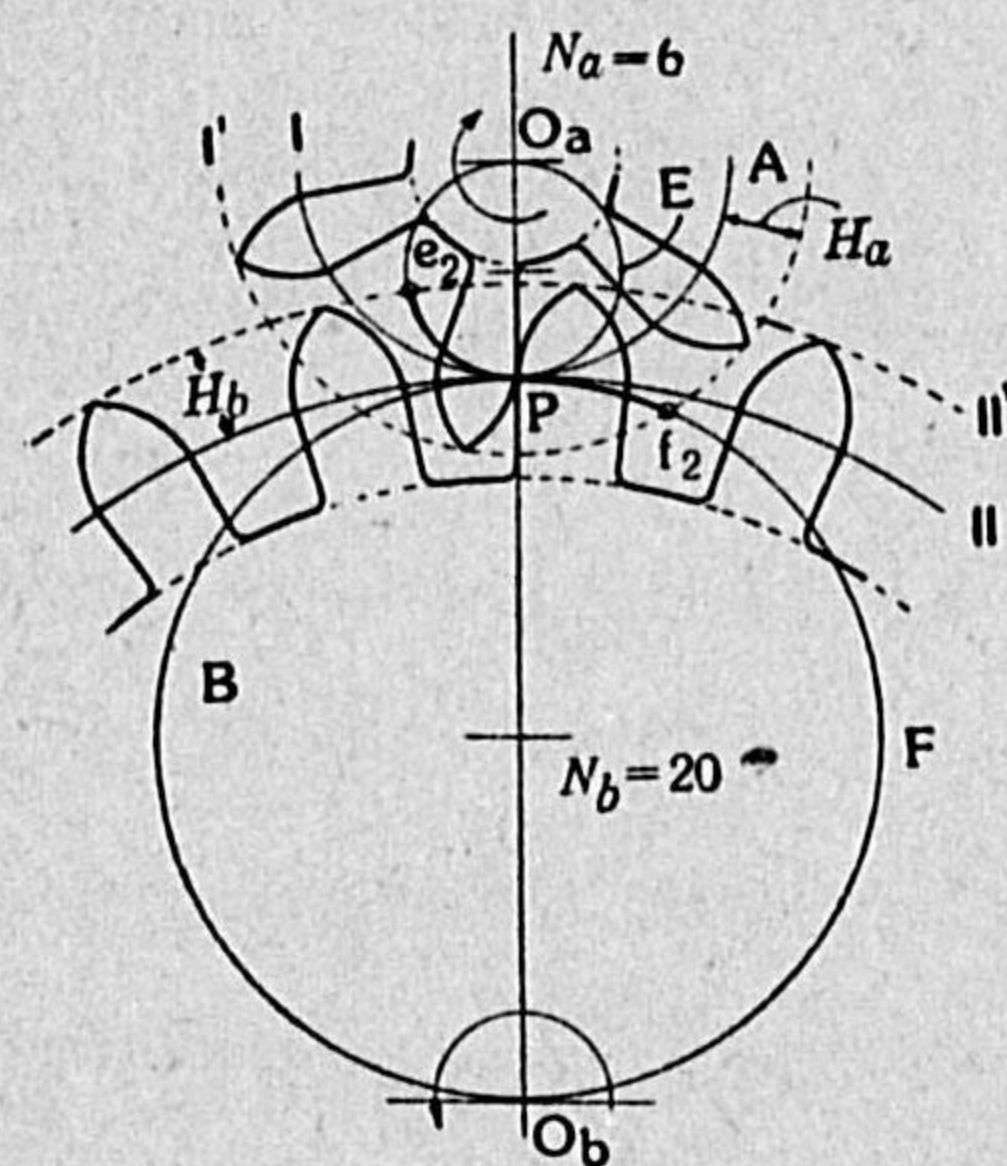
- (1)  $a_1$  點を中心とした半徑  $\overline{bb_1}$  なる圓
- (2)  $a_2$  點を " 半徑  $\overline{bb_2}$  "
- (3)  $a_3$  點を " 半徑  $\overline{bb_3}$  "

等を順次に描き、それらの圓を包絡する曲線を作ると、此の曲線が即ち b 點の A 車に相對的な運動軌跡だから、A 車の下齒根元の形は此の曲線又はそれ以内の曲線であればよいといふことになる。



## 第 9 章 サイクロイド歯車の種々の型

**小型歯車** — サイクロイド歯形は歯数の少ない歯車を作るには便利である(第 8 章)が、車の中心距離を厳密にしなくてはならず、又その歯形それ自身も正確に製造せられることが困難である等の事情からして、現在に於ては此等の缺點の少ないインボリュート歯形に壓倒せられ、最早實用からは全然却けられたと謂つていゝ。ことにインボリュート歯形に於ても後に述べるやうに少ない歯数に適した様式が種々に発見せられてゐるから、ことにそうである。サイクロイド歯形を最も最後まで用ひたものは時計の歯車又は之に類する小型装置の歯車であるが、それも人性の一つの惰性に基づくものと謂はなくてはならない。



第 62 圖

時計歯車としてのサイクロイド小型歯車の一例を示すと第 62 圖の如きである。此の種の機械装置では其の原動力が頗る微弱であるから、歯の強さといふ問題よりも、塵埃が齒間へ侵入することに依つて容易く運轉が停められることの方を遙かに多く恐れる。だから圖示の通り背隙と頂隙とを著しく多くしてあるのである。このためと、又同じピッチ圓に於て歯数を充分に増すためとの必要から、齒厚が小にしてあると共に、更に一方に於ては接觸弧の長さを大きくするために齒

高を著しく増してあるから、従つて齒先は圖に示したやうに尖鋭状をなしてゐる。一般にモジュール数は 1mm 以下で、その各部の割合の一例を挙げると、次ぎの通りである。

$$\text{小車 A の齒厚} = 1.14 M$$

$$\text{大車 B の齒厚} = 1.57 M$$

$$\text{小車 A の齒隙} = 2.00 M$$

$$\text{大車 B の齒隙} = 1.57 M$$

$$\text{背隙} = 0.43 M$$

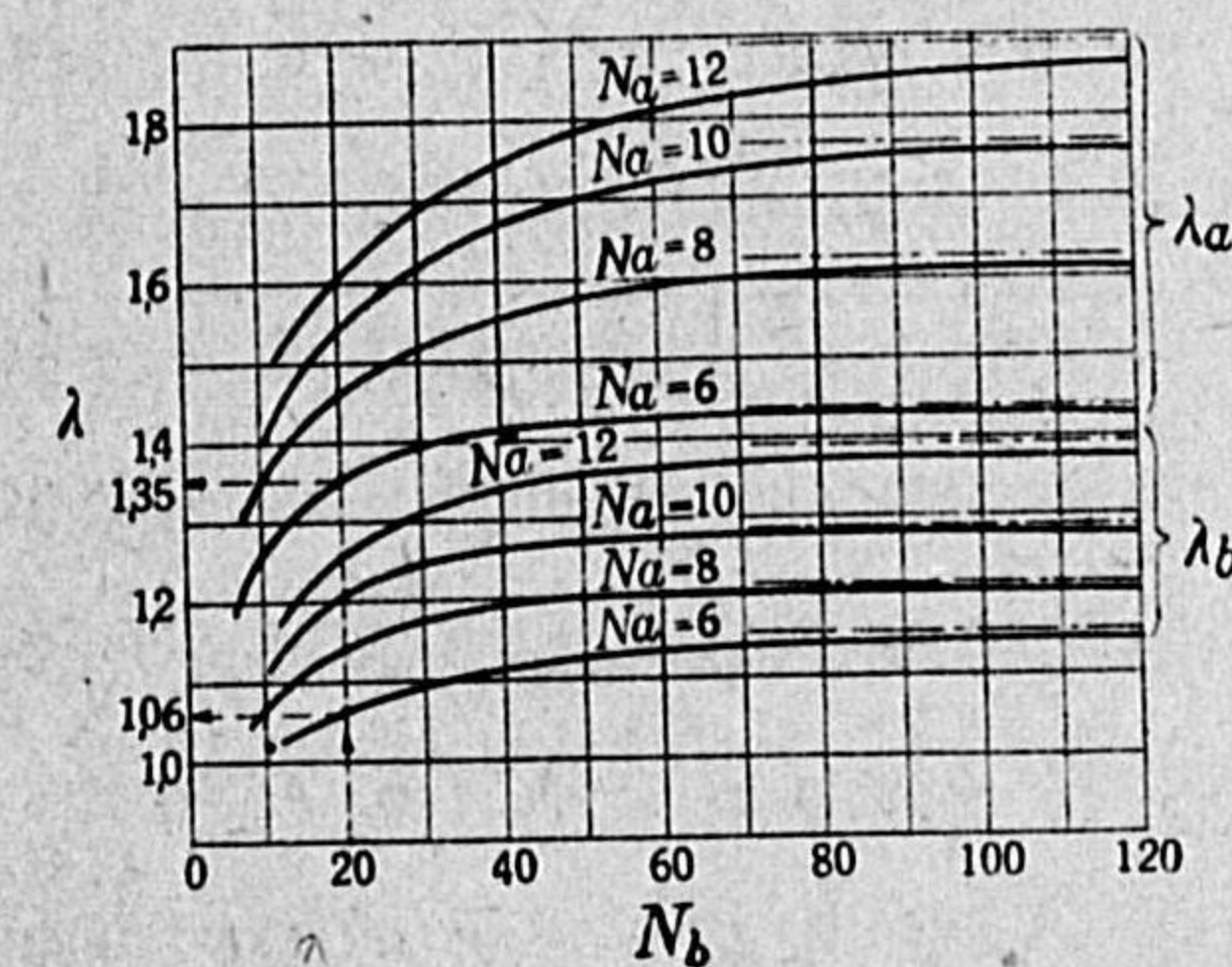
$$\text{頂隙} = 0.30 M$$

$$\text{小車 A の上齒高 } H_a = \lambda_a M$$

$$\text{大車 B の上齒高 } H_b = \lambda_b M$$

$M$  はモジュール數

係數  $\lambda_a, \lambda_b$  の値は第 63 圖の線圖から求められる。これらの  $\lambda$



第 63 圖

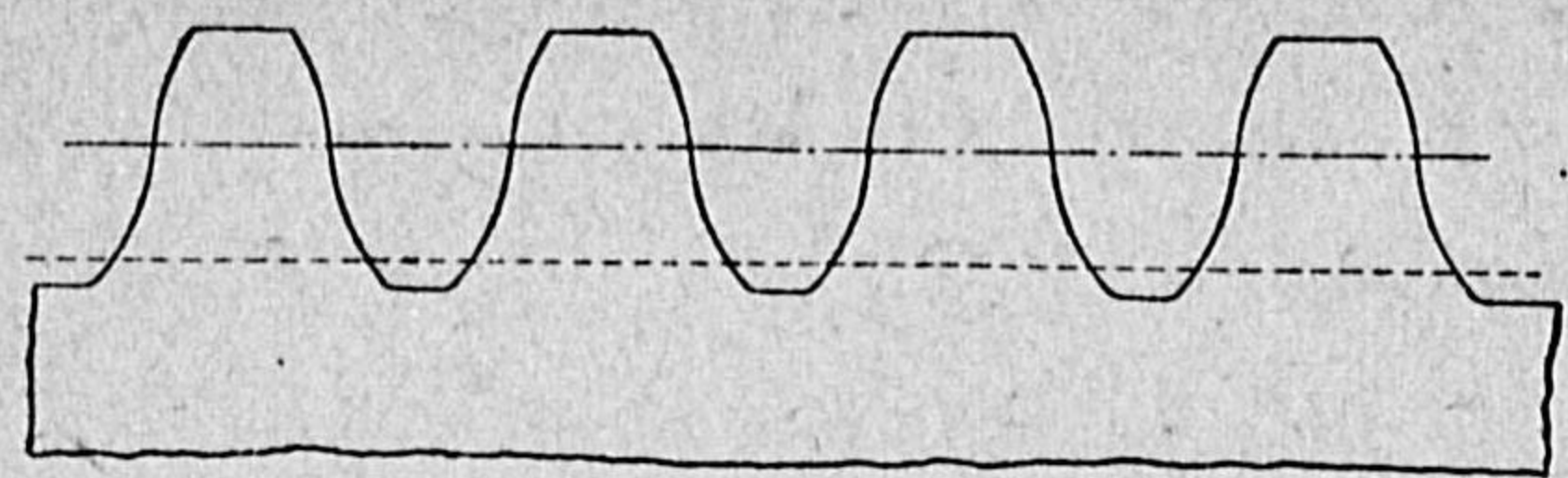
値は造形圓がピッチ圓の半分であることゝ、齒先が尖鋭であることゝから自然に定まる數である。此の線圖の上から第 62 圖に例示した齒車の  $\lambda_a$  及び  $\lambda_b$  の値を求めると、齒數  $N_a=6, N_b=20$  の線をたどつて、 $\lambda_a=1.06, \lambda_b=1.35$  を

得る。又別の計算に依て此の場合の接觸位置軌跡の長さ  $f_2 P e_2 = 4.20 M = 1.34 P_0$  が得られる。

**ラック** — 一般に齒車のピッチ圓半徑が非常に大きくなつて、遂に無限大になつた場合を想像すると、ピッチ圓は直線となり、そ



これは最早車ではなくて、歯を刻まれた棒又は板の如きもの(第64圖)

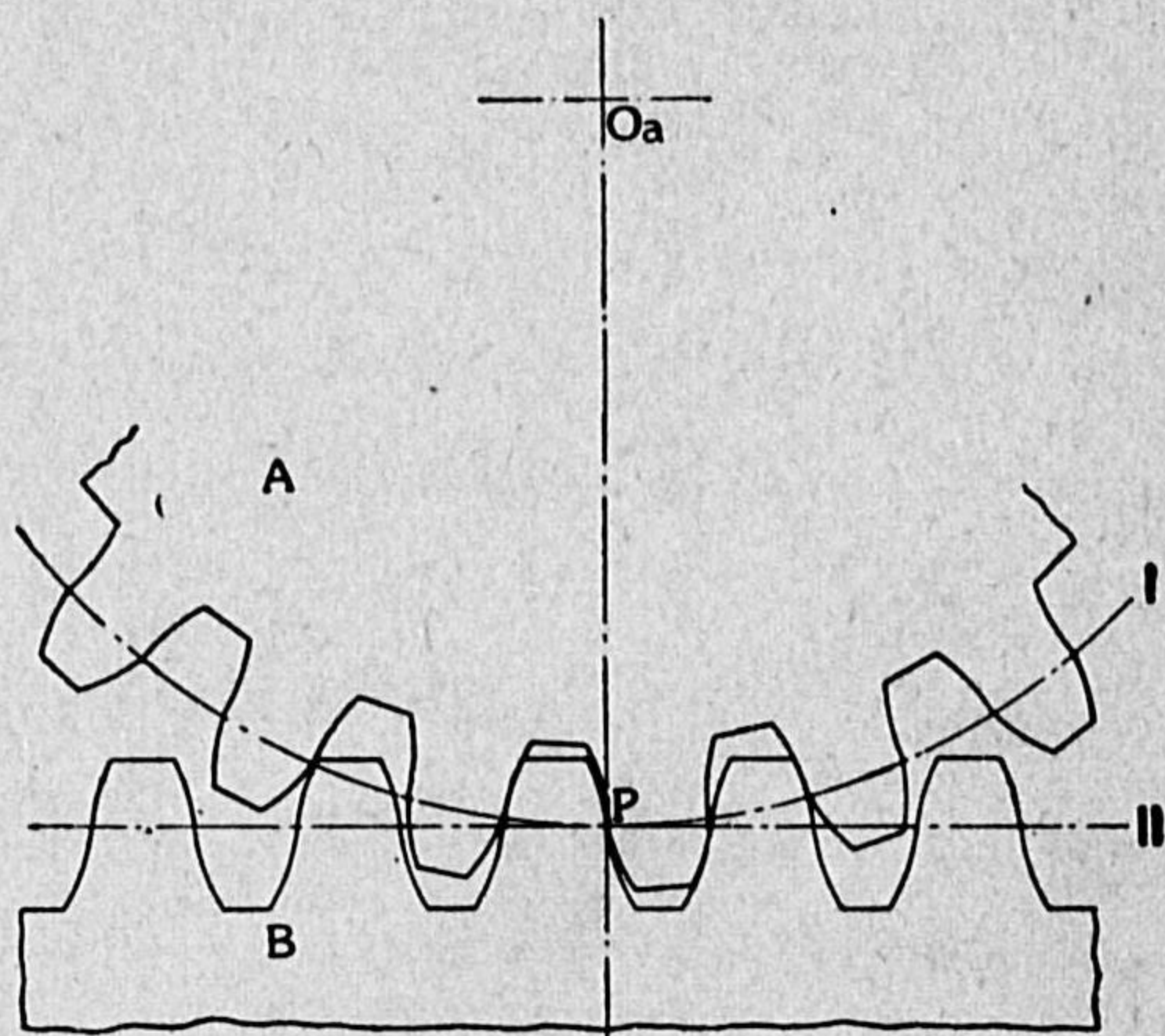


第64圖

となる。この種のものラック(rack)又は齒竿と呼ぶ。第65圖の如く之と齒車

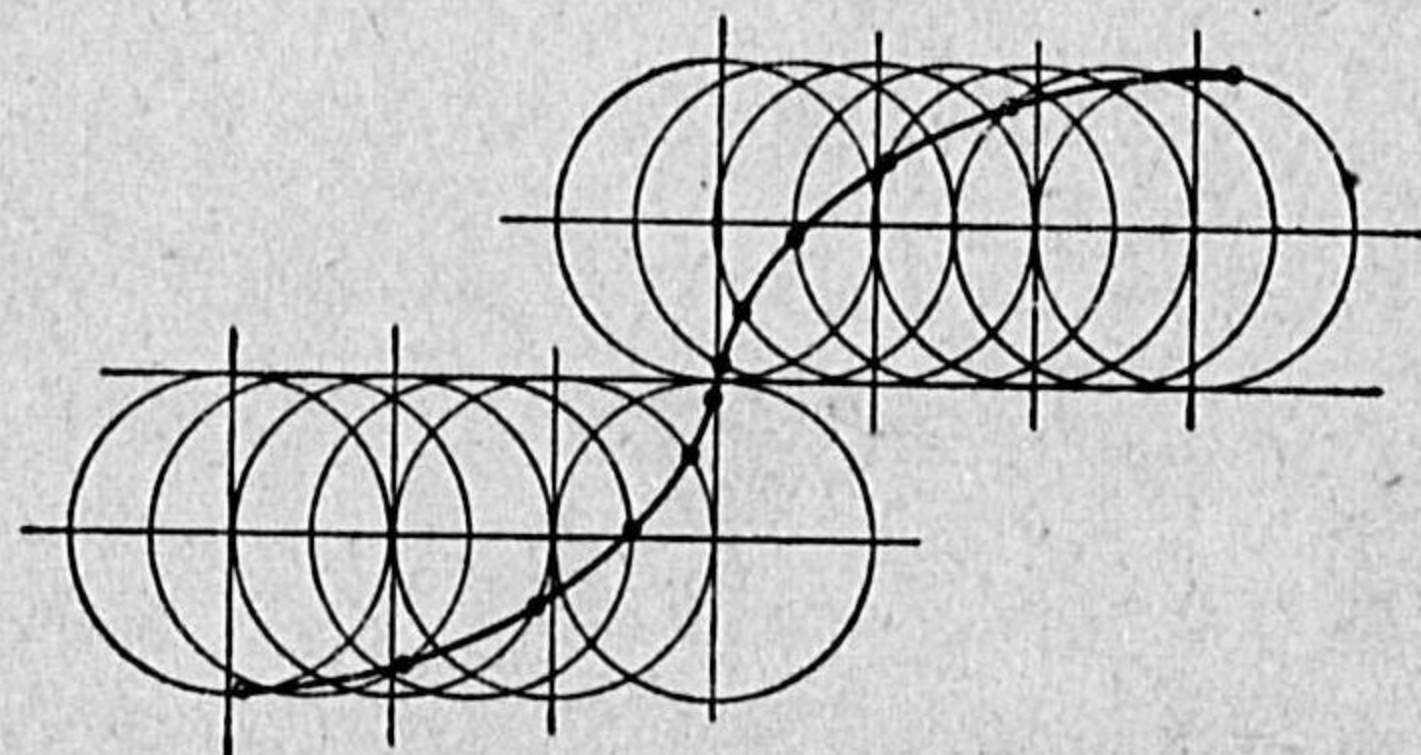
とを嚙合せたものは回轉運動を直線運動に變じ、又は直線運動を回轉運動に變ずるための装置として利用せられる。

ラックの齒形にサイクロイド曲線を使ふ場合に、其の基礎圓は直線であるから、造形圓が同じ大きさなら、直線の一側に出来るサイクロイド



第65圖

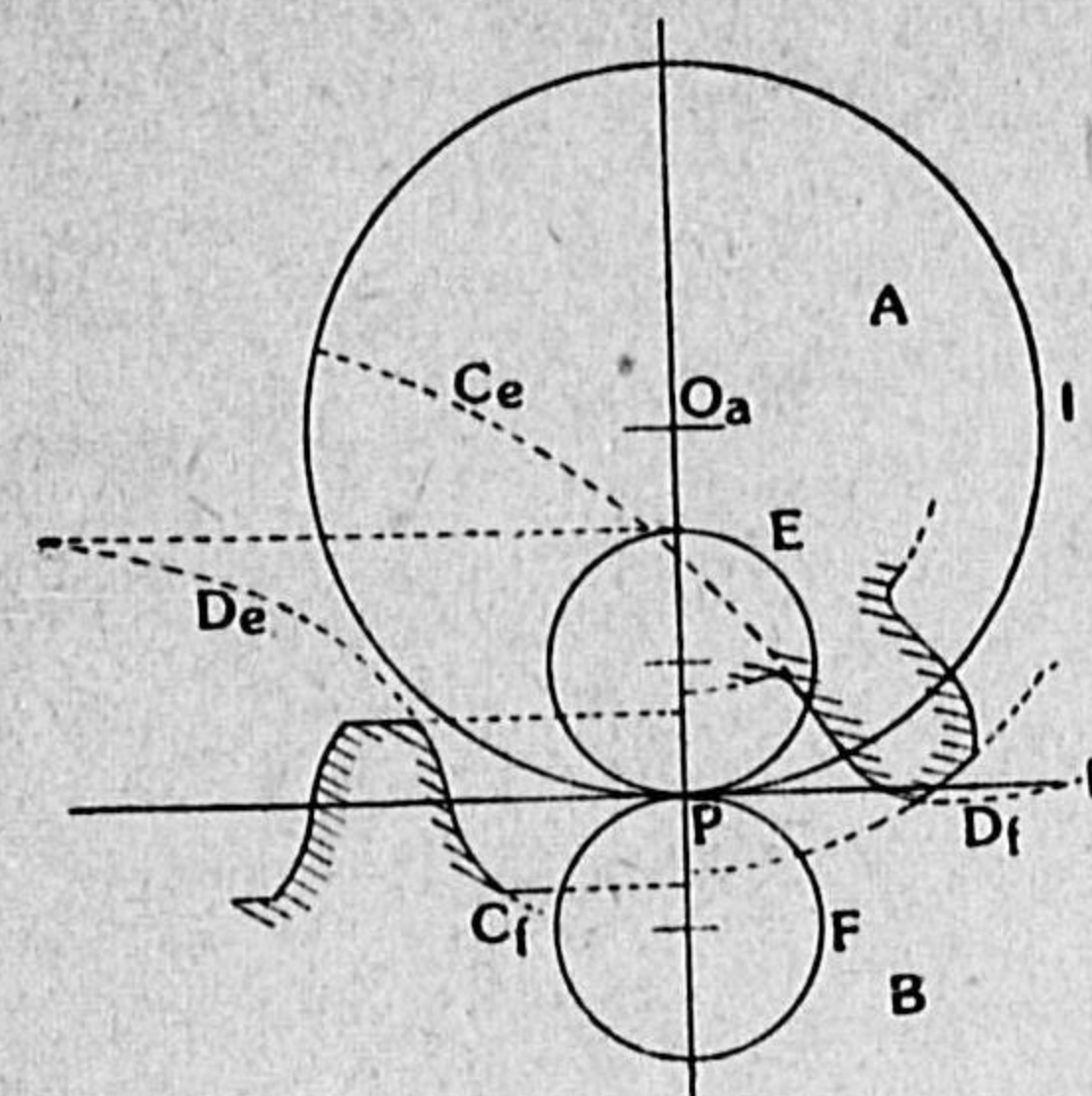
は他側に出来るサイクロイドと全然同一形(第66圖)であり、従つて



第66圖

エピサイクロイドとハイポサイクロイドとの區別は消滅して單に、サイクロイドと呼ぶべきものとなり、その形はただ造形圓の大きさだけで定まることとなる。そ

れが第65圖の如き嚙合をする場合には第67圖に示す如く



第67圖

ラック B:

上齒 圓 E の線 II の上側のサイクロイド  $D_e$

下齒 圓 F の線 II の下側のサイクロイド  $C_f$

齒車 A:

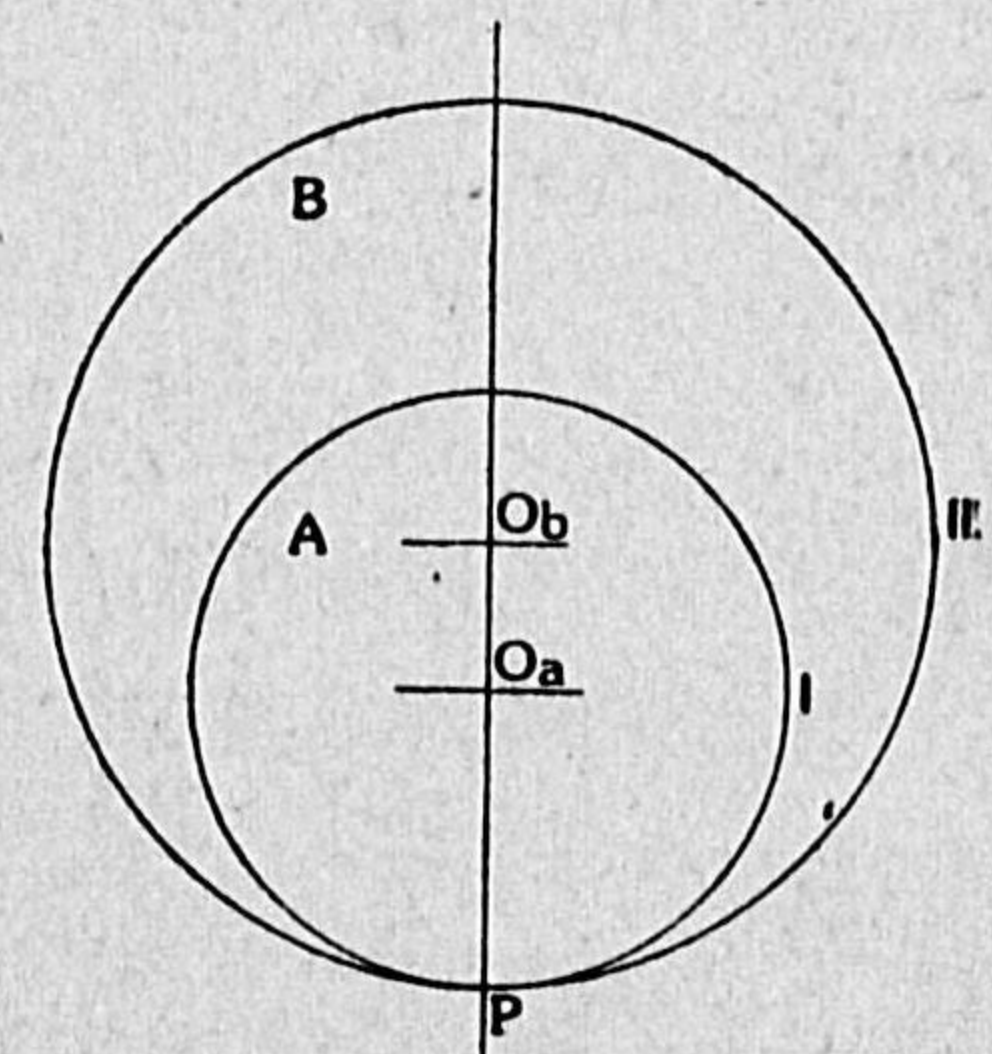
上齒 圓 F の圓 I 外のエピサイクロイド  $D_f$

下齒 圓 E の圓 I 内のハイポサイクロイド  $C_e$

として形成せられる。

内齒車 — ラック B は A 齒車と嚙合ふ齒車 B の中心點  $O_b$  が、無限に遠く A と反對の側へ移動し去つたものと考へていゝのであるが、第66圖に關して述べたやうに、ピッチ圓がピッチ線となつた場合には、齒面曲線の形に内側外側なる區別がないのであるから、ラック B は A 齒車と嚙合ふ齒車 B の

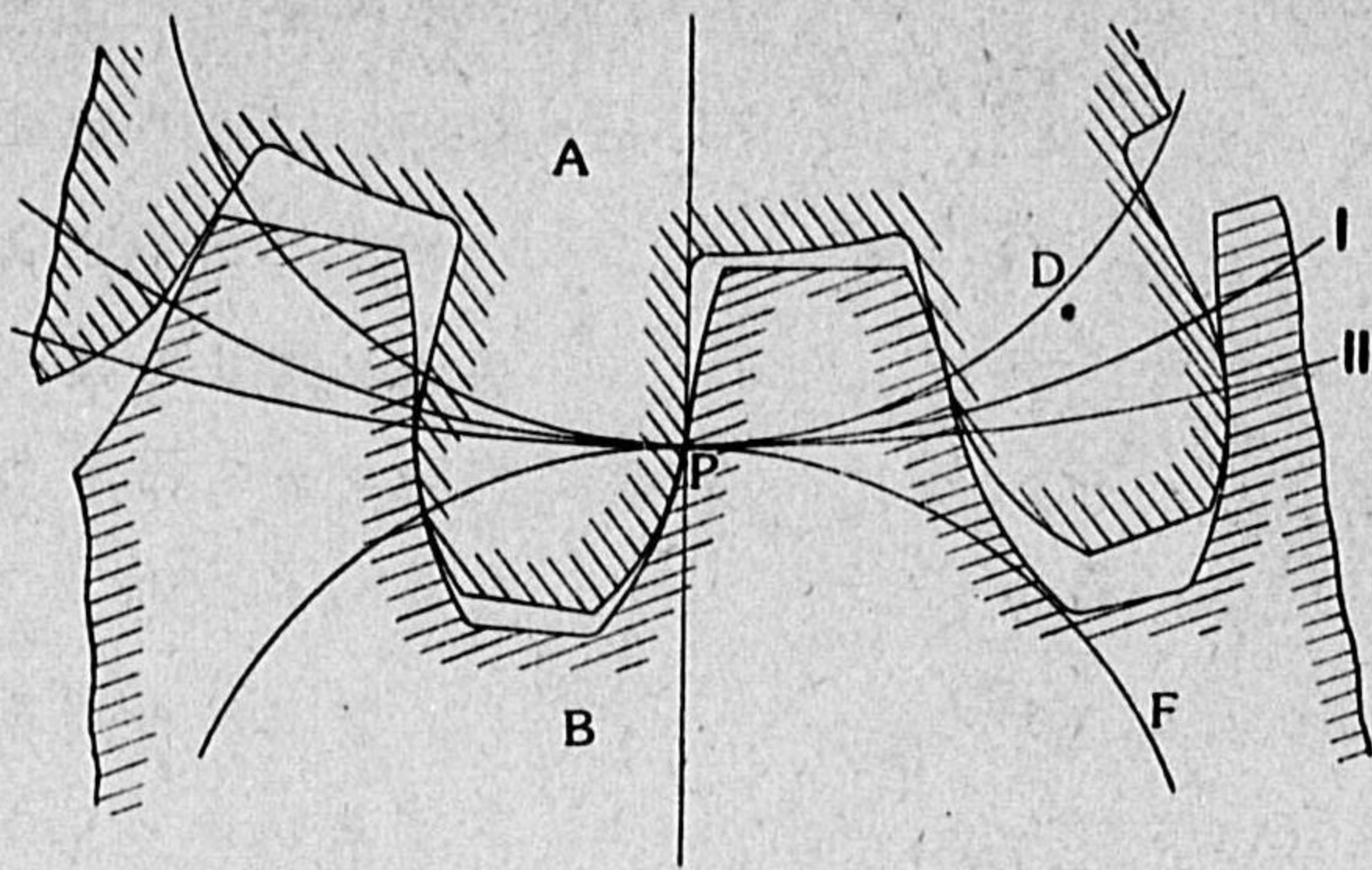
中心點  $O_b$  が無限に遠く反對に A の側へ移動して出來たものと考へても宜しい。そこでそのとき、中心點  $O_b$  が又再び A の側なる有限距離のところへ歸つて來たとすると、B のピッチ圓は第68圖の如く A のピッチ圓を包むこととなり、その嚙合状態は第69圖の如くなる。此のとき A と B とは内接



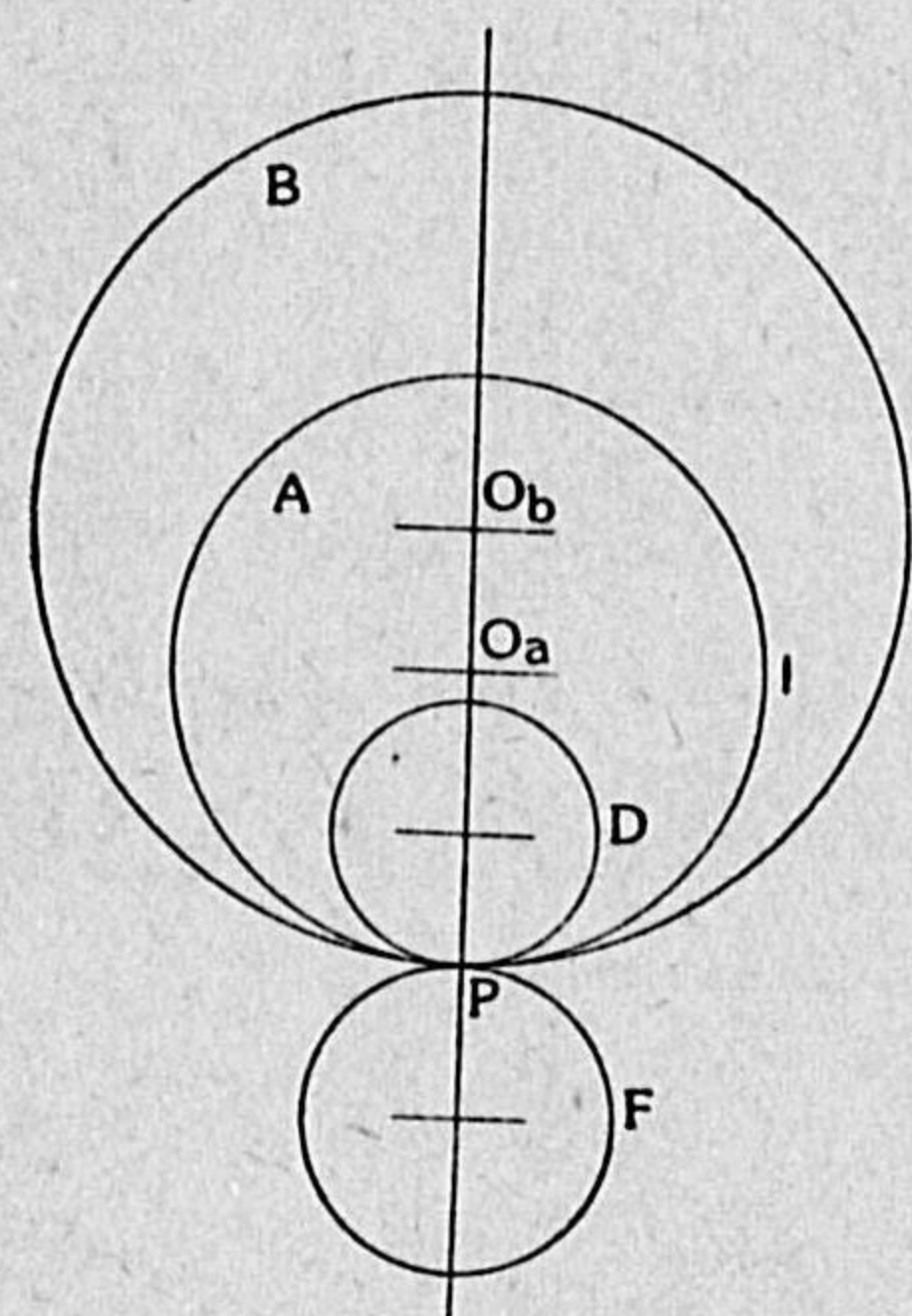
第68圖



の嚙合 (internal gear, annular gear) をやつてゐると呼ばれ、内側に



第 69 圖



第 70 圖

齒のある B 車を内齒車と名づけ、従つて A の如き普通の齒車を之と區別して外齒車と謂ふ。

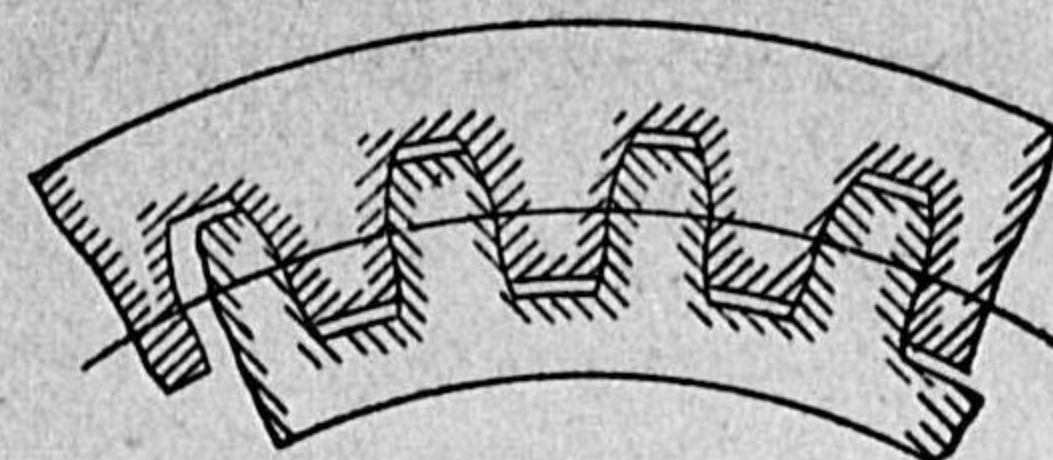
内齒車に於てピッチ圓から内側の齒の部分を上齒、外側の齒の部分を下齒と呼ぶことにするならば、上齒と下齒とが接し合ふことは、外齒車同志の嚙合、即ち外接の嚙合の場合と同一であるが、齒形をサイクロイドとするとときに、齒面の作られ方は

此の場合には(第70圖)

{ 外齒車Aの上齒 EのA上のエピサイクロイド  
 { 内齒車Bの下齒 EのB上の "

{ 外齒車Aの下齒 DのA上のハイポサイクロイド  
 { 内齒車Bの上齒 DのB上の "

となり、即ちエピとエピ、ハイポとハイポとが接し合ひ、この點が前

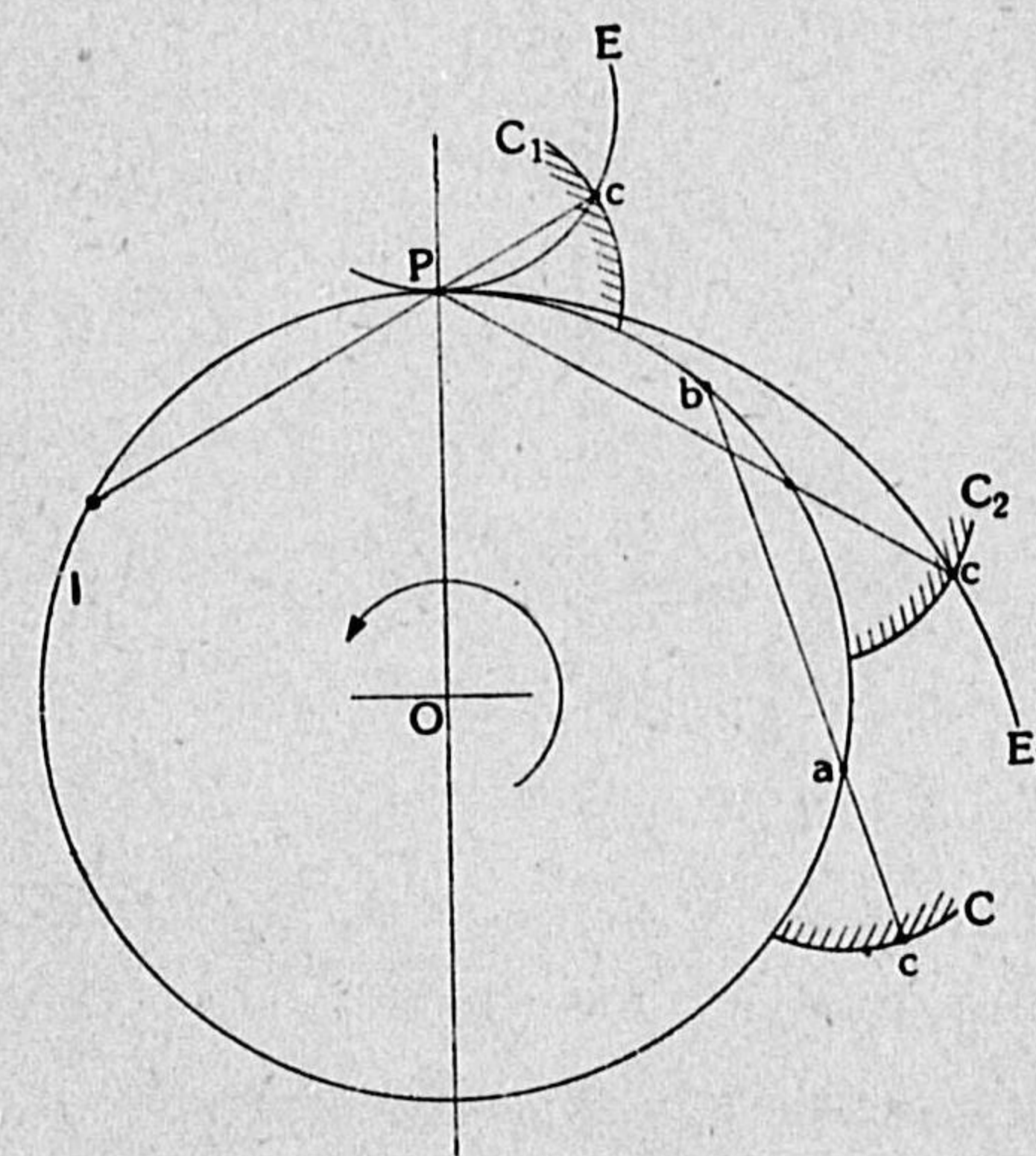


第 71 圖

の外接の嚙合の場合と相違する。又従つて内齒車の齒形は、同じピッチ圓と同じ造形圓とで出來てゐる外齒車の齒形と全然同一であつて、第71圖に示す如く、外齒車の中へ内齒車を丁度に箝め込み得る理屈のものである。即ち頂隙の部分を除けば、一方の上齒の形が他の下齒の形と全く同一といふことになる。

内齒車の接觸位置軌跡 — サイクロイド齒車の内接嚙合に於ける接觸位置軌跡は第70圖のE圓及びF圓であることは明かであるが、このとき別に第二の接觸位置軌跡を發生することがある。そのことを説明するた

めに次ぎのやうに考へる。例へば第72圖の如き齒面Cがあるとして、その一點cに於て齒面へ垂線を立てると、それはピッチ圓Iとa點及びb點で交るだらう。此の車が矢の方向へ廻つて、a點がピッチ點Pと一致した位置C<sub>1</sub>に於けるc點は、第5章齒の形についての必要條件の條



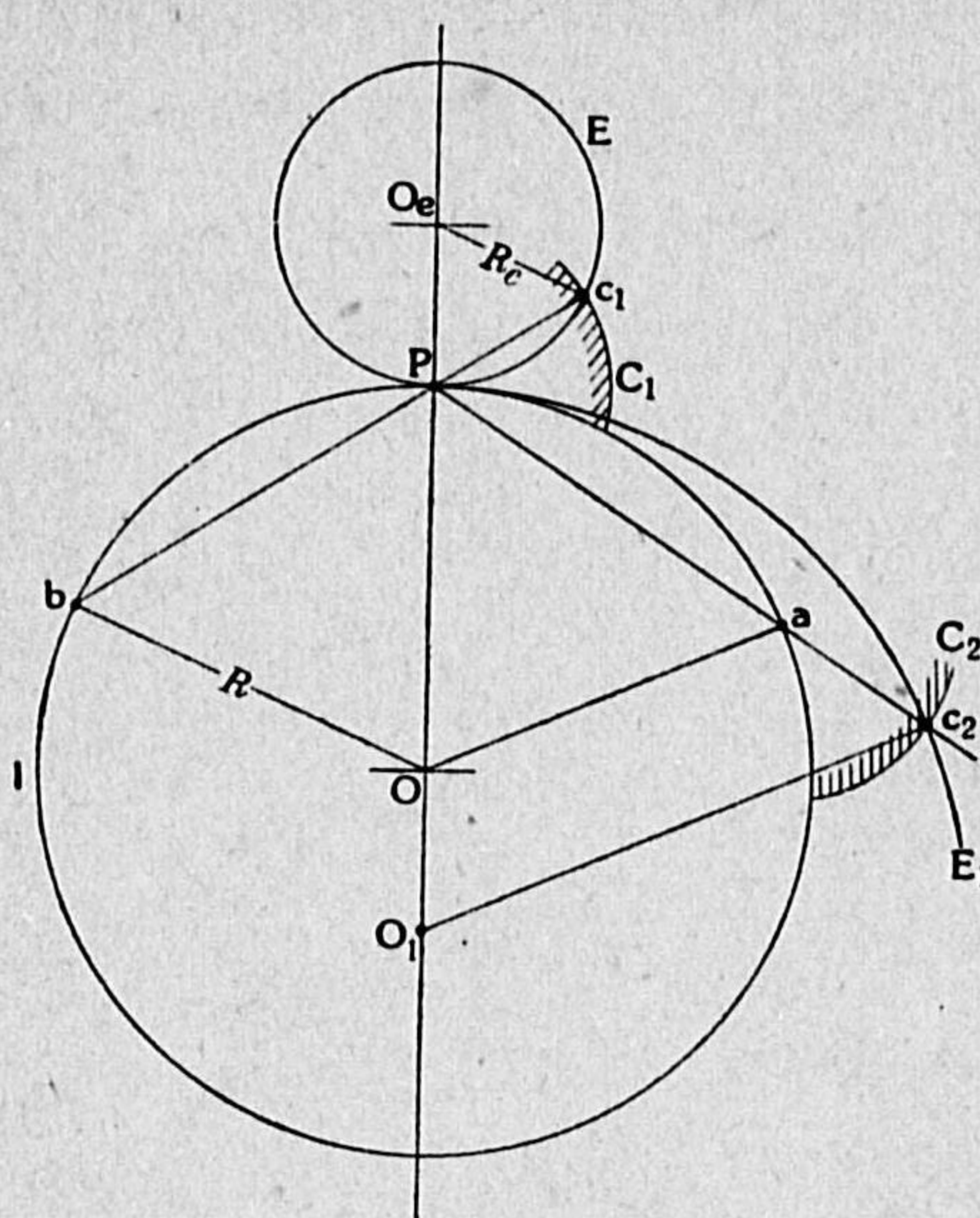
第 72 圖

下で述べた通り、勿論接觸の條件を満足するものであるが、更にもう一つの點bがピッチ點Pと一致した位置C<sub>2</sub>に於けるc點も又同じ理由で接觸の條件の少くとも一半を満足すると見なくては



ならぬ。従つて普通の如き接觸位置軌跡 E を考へる外に、更に第二の接觸位置軌跡 E<sub>1</sub> をも考へ得るわけである。

上圖に於て齒面 C が造形圓 E で作られるエピサイクロイドであるとき、第二の接觸位置軌跡 E<sub>1</sub> は同じくピッチ點に接する圓であつて、その半徑はピッチ圓 I の半徑と造形圓 E の半徑との和に等しい。そのことを證明するために、第 72 圖の C 齒面が C<sub>1</sub> 位置及び C<sub>2</sub> 位置に在る有様を第 73 圖の如くに描き、第 72 圖に示した齒面の任意の一點 c が夫々 c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub> にあるものとする。圖の aO 線に平行に c<sub>2</sub>O<sub>1</sub> 線を引き、それが PO 線と交るところを O<sub>1</sub> 點とすると



第 73 圖

るを O<sub>1</sub> 點とすると

$$\frac{PO_1}{PO} = \frac{Pc_2}{Pa} = \frac{bc_1}{bP} = \frac{O_eO}{PO}$$

故に

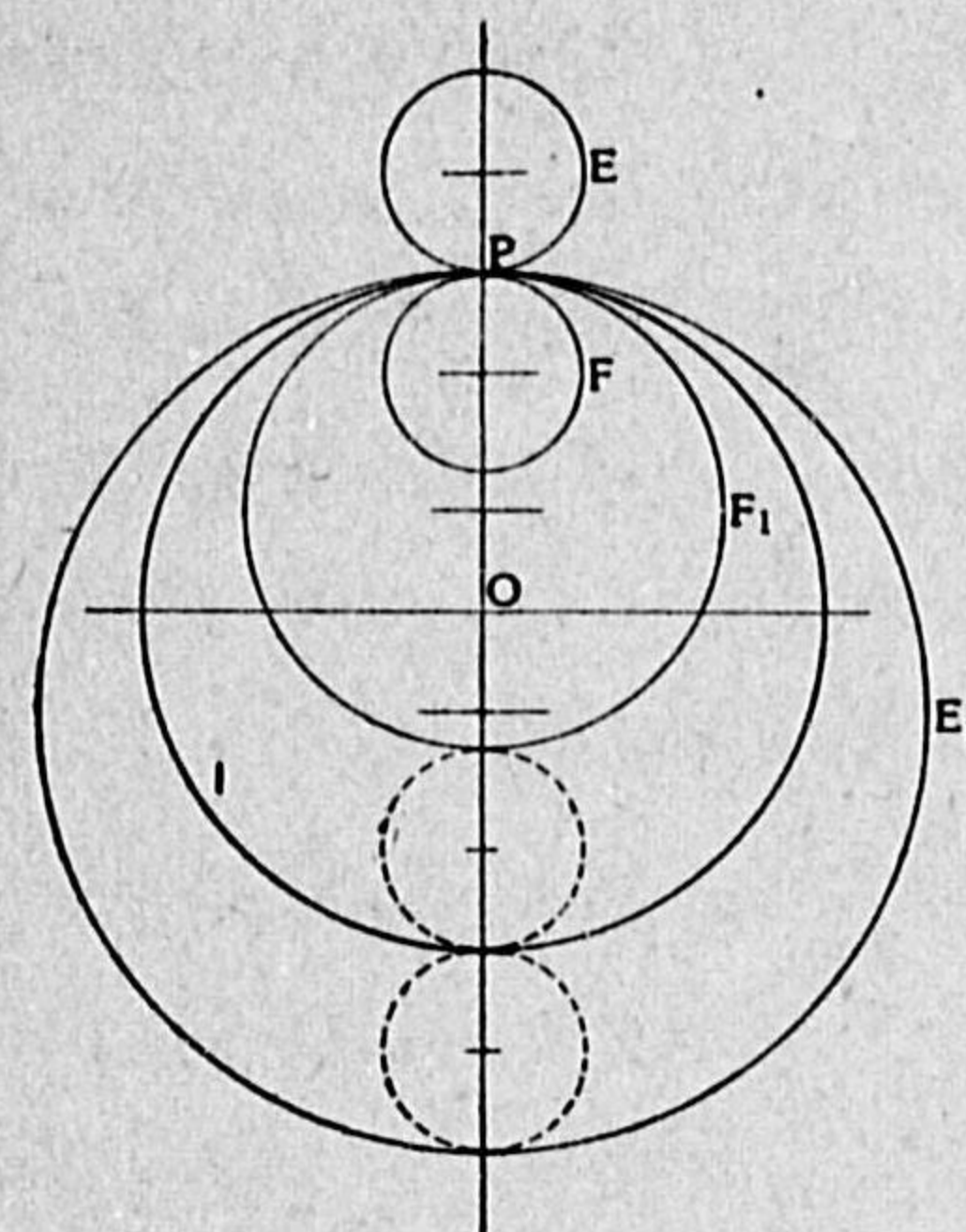
$$\overline{PO_1} = \overline{O_eO} = \overline{PO_e} + \overline{PO}$$

となる。即ち c 點が齒面 C 内の任意の點であるにも拘らず O<sub>1</sub> 點は常に一定點であつて、P 點からの其の距離はピッチ圓 I の半徑に造形圓 E の半徑を加へたものに等しく、又  $\overline{PO} = \overline{aO}$  である故に  $\overline{PO_1} = \overline{c_2O_1}$  である。即ち c<sub>2</sub> 點は P 點を通る中心 O<sub>1</sub> なる圓の上に

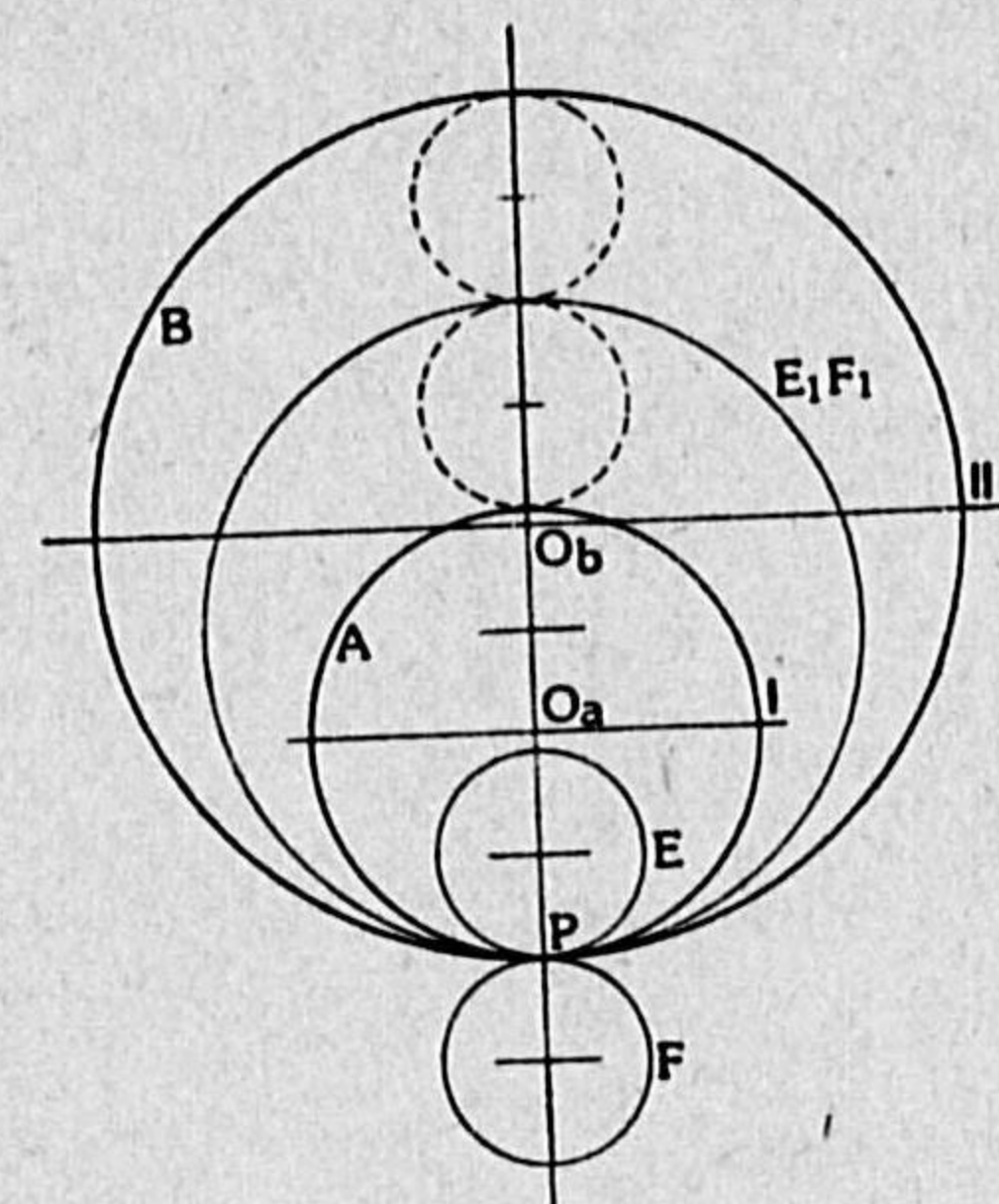
あつて、その半徑はピッチ圓 I の半徑と造形圓 E の半徑との和に等しい。そのことを證明するために、第 72 圖の C 齒面が C<sub>1</sub> 位置及び C<sub>2</sub> 位置に在る有様を第 73 圖の如くに描き、第 72 圖に示した齒面の任意の一點 c が夫々 c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub> にあるものとする。圖の aO 線に平行に c<sub>2</sub>O<sub>1</sub> 線を引き、それが PO 線と交るところを O<sub>1</sub> 點とすると

在り、軌跡 E<sub>1</sub> は其の圓であるといふことになる。

第 72 圖及び第 73 圖は上齒についてのみ考へたのであるが、下齒についても同様に考へることができ、従つて一つのサイクロイド歯車に於ては、第 74 圖の如く正規の軌跡 E, F の外に、第二の軌跡としてピッチ圓の外方に E<sub>1</sub>, 内方に F<sub>1</sub> が考へられ得る。これらの



第 74 圖



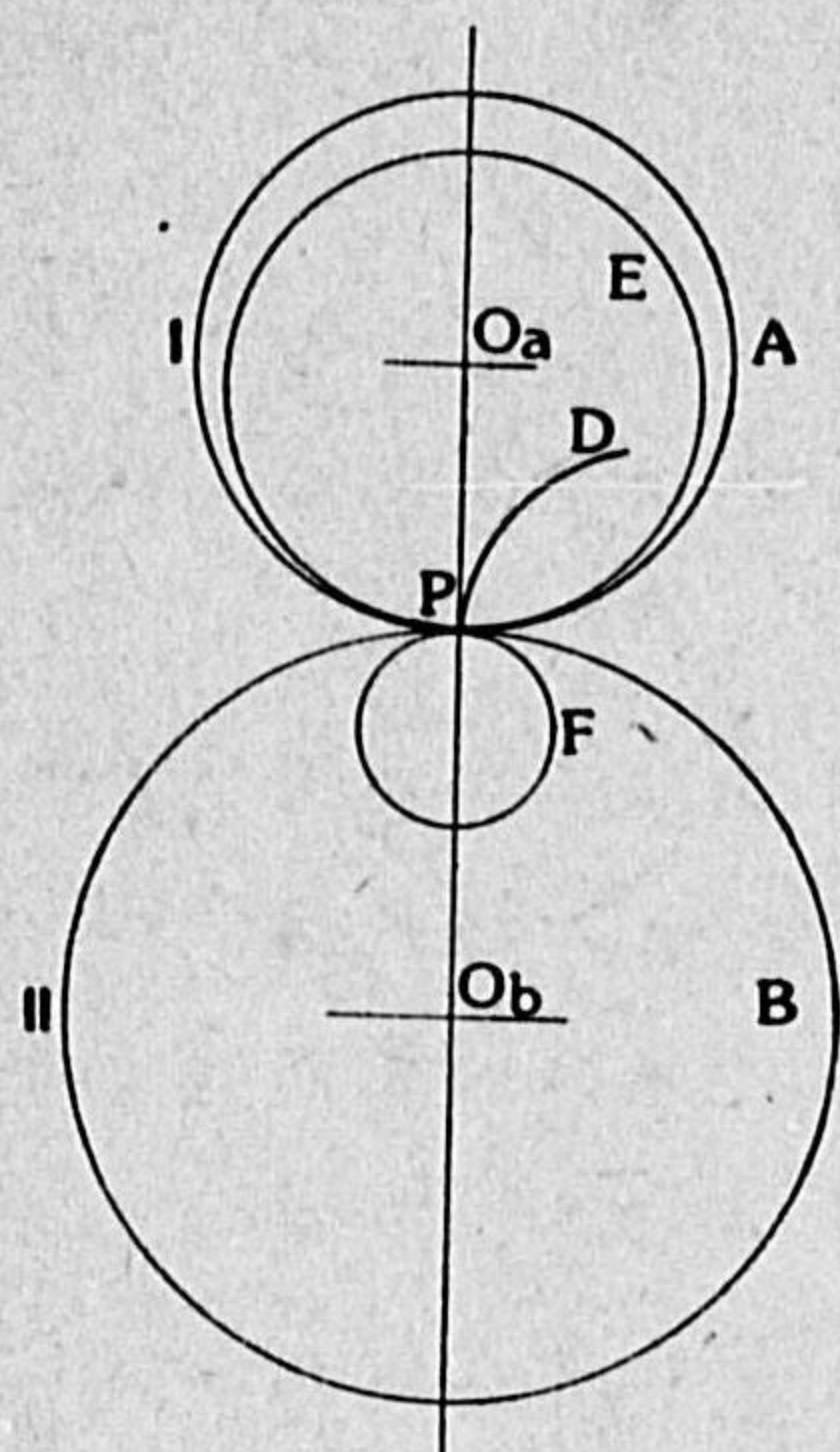
第 75 圖

軌跡が實際に齒の接觸位置軌跡として實現するためには、相噛合ふ二つの齒車に於て、其の双方の軌跡が合致することが必要であることは自明の理である。軌跡 E, F は従前から述べたところから従つて此の條件を満足するが、軌跡 E<sub>1</sub>, F<sub>1</sub> は毫も満足しないから、E<sub>1</sub>, F<sub>1</sub> は實際の接觸位置軌跡としては成立しない。只一つ例外的に考へられる場合は、内接の噛合に於て、第 75 圖に示す如く外齒車 A の外方第二軌跡が、内齒車 B の内方第二軌跡と合致して、一つの圓 E<sub>1</sub>F<sub>1</sub> となるやうな場合である。このときには此の圓 E<sub>1</sub>F<sub>1</sub> にも實際の接觸位置軌跡が成立し得る筈で、その圖例としては前の第 69 圖に於て二つのピッチ圓 I, II の間に介在する接觸點を之に



由來するものとして示しておいた。

**ピン歯車** — 内廻り造形圓の大きさが基礎圓の大きさと等しくなると、そのハイポサイクロイドが基礎圓圓周上の一點となることは既に第6章第45圖に於て述べた。之と反對に造形圓が縮小して一點となつたときにも、それに依るハイポサイクロイド及びエ

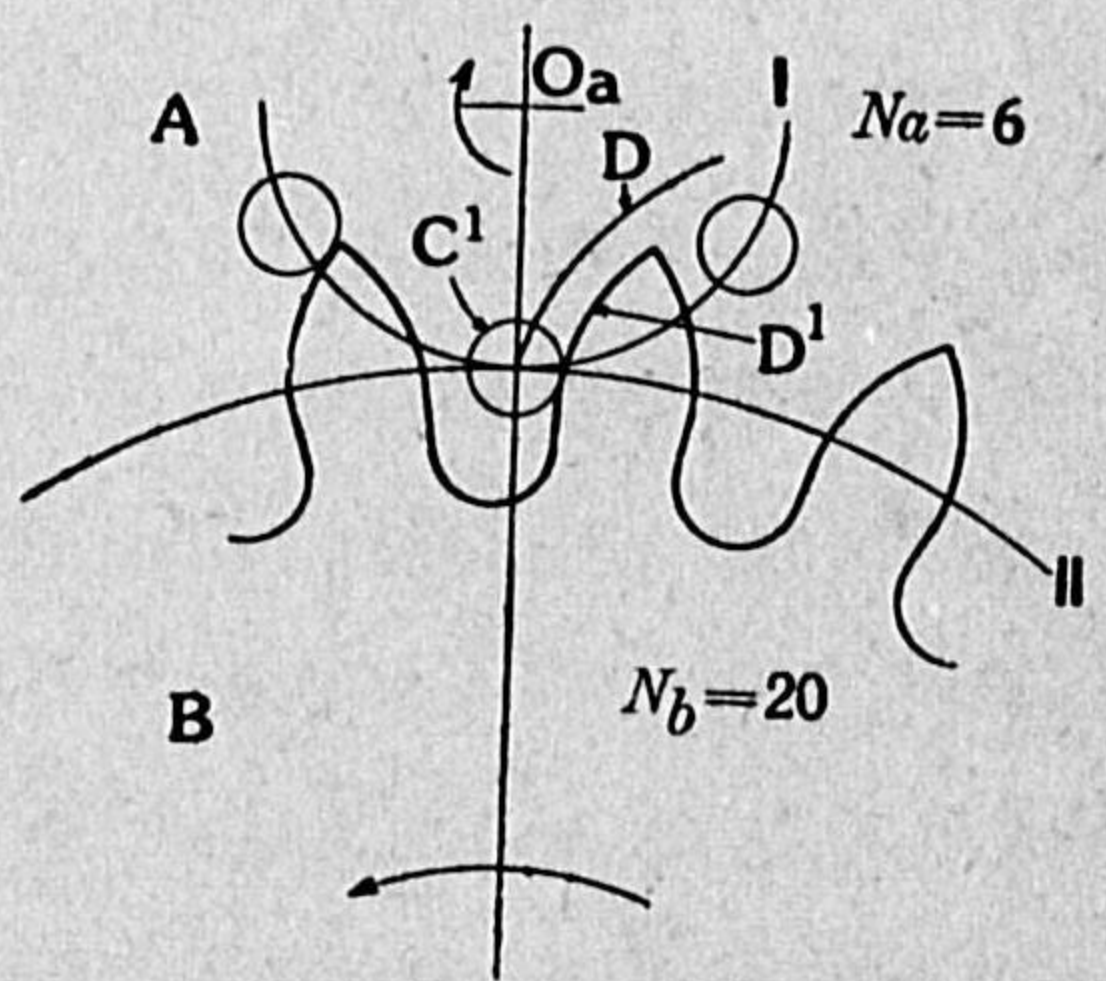


第 76 圖

ピサイクロイドが又同じく一點となること勿論である。故に第76圖の如く外接嚙合のA車及びB車に於て、A内の造形圓Eが其のピッチ圓Iと同大のものであり、且同時にB内の造形圓Fが其のピッチ圓IIに接しつゝ一點に縮小したものであるとすると、A車の上齒及び下齒は合してピッチ圓I上の一點となり、又B車の上齒は圓E即ち圓Iの外廻りに依つて生ずるエピサイクロイドDであると共に、其の下齒はピッチ圓II上の一點となる。A車の齒が單なる點では全く實用的でないから、一定の半徑で此の點を取巻くピッチ圓に直角な圓柱即ちピンC'(第77圖)を以て之に代へ、B車の齒は之に應じて、此の半徑の寸法だけ齒面をDに平行に第77圖の如く削取つた面D'を以て

ピサイクロイドが又同じく一點となること勿論である。

故に第76圖の如く外接嚙合のA車及びB車に於て、A内の造形圓Eが其のピッチ圓Iと同大のものであり、且同時にB内の造形圓Fが其のピッチ圓IIに接しつゝ一點に縮小したものであるとすると、A車の上齒及び下齒は合してピッチ圓I上の一點となり、又B車の上齒は圓E即ち圓Iの外廻りに依つて生ずるエピサイクロイド



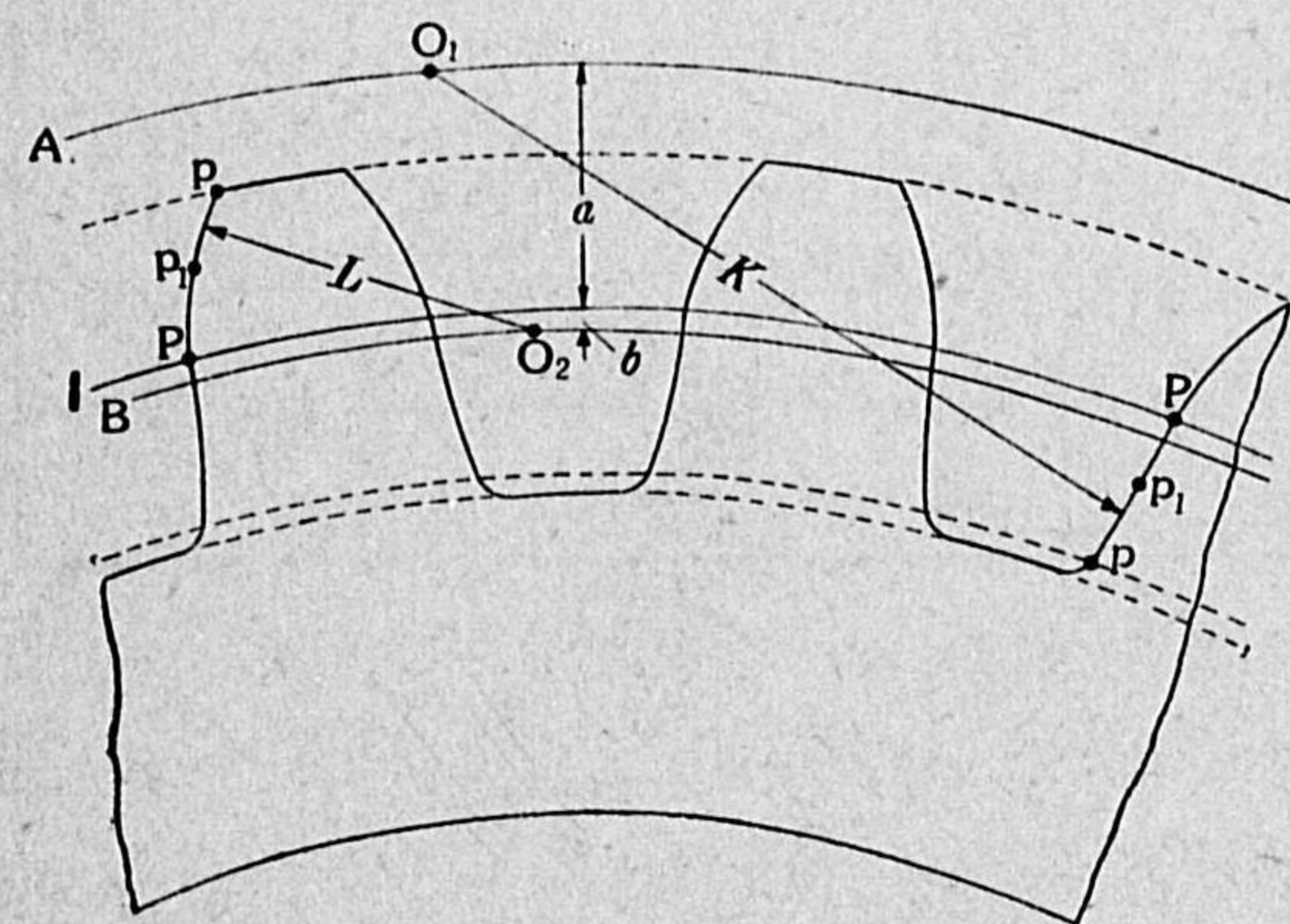
第 77 圖

すると、茲に同圖の如き装置が出来上る。ピン歯車と呼ばれるものが即ちこれであつて、サイクロイド歯車の一つの特珠な場合に外ならない。

ピン歯車は其の製造が比較的容易であると共に、塵埃の侵入を普通歯車ほどには恐れないから、安價な小器械類に用ひられることがある。第77圖は其の實用例で、A車は二つの圓板の間に6本のピンがピッチ圓Iに沿つて植立せられてゐるのである。

ピン歯車又はピンラックの種々の種類、又その他の異型サイクロイド系統装置については、普通の機構學の著書、例へば工學博士丹羽重光氏著「機構學」の如きを参照せられたい。

**グラント氏略近畫法** — サイクロイド歯車を圖示するにはピッチ圓、齒先圓、齒底圓、造形圓等の大き、齒數、齒底の特殊形狀等を表示すればよいのであるが、特に齒形そのものを圖示したいとならば、基礎圓に沿つて造形圓を轉がして、其の場合のサイクロイド曲線を求めるより外に手段がない。これは習熟すれば困難な仕事



第 78 圖

ではないが、それだけの勞作をしないで、それと殆むど同様の結果を簡単に得ようとする方法にグラント (George B. Grant) 氏の畫法がある。但しこれは任意の造



形圓の場合ではなくて、第 8 章造形圓の大きさの條下最後に述べたと同じ流儀で、齒數 12 の齒車のピッチ圓の半分に等しい圓を、すべての齒數の齒車に共通な造形圓としたところの完全互換性齒車の場合と限定されてゐる。そのグラント氏畫法は第 78 圖に示すやうに、ピッチ圓 I よりも半徑が  $a$  だけ大きい圓 A の圓周上の一點  $O_1$  を中心として、半徑  $K$  なる圓をピッチ圓上の點 P から齒底(p 點)までの間に互つて描き、之を下齒面とする。次にピッチ圓 I よりも半徑が  $b$  だけ小さい圓 B の圓周上の一點  $O_2$  を中心として、半徑  $L$  なる圓を P 點から齒先(p 點)までの間に互つて描き、之を上

グラント氏サイクロイド齒車畫法表

齒數範圍	$a/P_c$	$K/P_c$	$b/P_c$	$L/P_c$	$a/M$	$K/M$	$b/M$	$L/M$	最適齒數
10	1.27	-2.55	0.01	0.62	4.00	-8.00	0.02	1.99	10
11	2.00	-3.34	0.01	0.63	6.50	-11.05	0.04	2.00	11
12	(半徑直線)		0.02	0.64	(半徑直線)		0.06	2.01	12
13, 14	3.00	4.80	0.02	0.65	9.43	15.10	0.07	2.04	13.5
15, 16	1.10	2.50	0.03	0.67	3.46	7.86	0.09	2.10	15.5
17, 18	0.70	1.95	0.04	0.68	2.20	6.13	0.11	2.14	17.5
19, 20, 21	0.50	1.63	0.04	0.70	1.57	5.12	0.13	2.20	20
22, 23, 24	0.36	1.43	0.05	0.72	1.13	4.50	0.15	2.26	23
25-29	0.29	1.30	0.05	0.74	0.96	4.10	0.16	2.33	27
30-36	0.23	1.20	0.06	0.76	0.72	3.80	0.19	2.40	33
37-48	0.20	1.12	0.07	0.79	0.63	3.52	0.22	2.48	42
49-72	0.17	1.06	0.08	0.83	0.54	3.33	0.25	2.60	58
73-144	0.14	1.00	0.09	0.90	0.44	3.14	0.28	2.83	97
145-300	0.12	0.95	0.10	0.93	0.38	3.00	0.31	2.92	290
ラック	0.11	0.94	0.11	0.94	0.34	2.96	0.34	2.96	$\infty$

齒面とする。以上に要する  $a, b, K, L$  の値はグラント氏に依つて茲に掲げた表の通りに與へられてゐるから畫法としては頗る簡單である。但し表中  $P_c$  は圓周ピッチを、 $M$  はモジュールを夫々意味し、又負號を附した分は第 78 圖に示したとは反對の側に中心  $O_1$

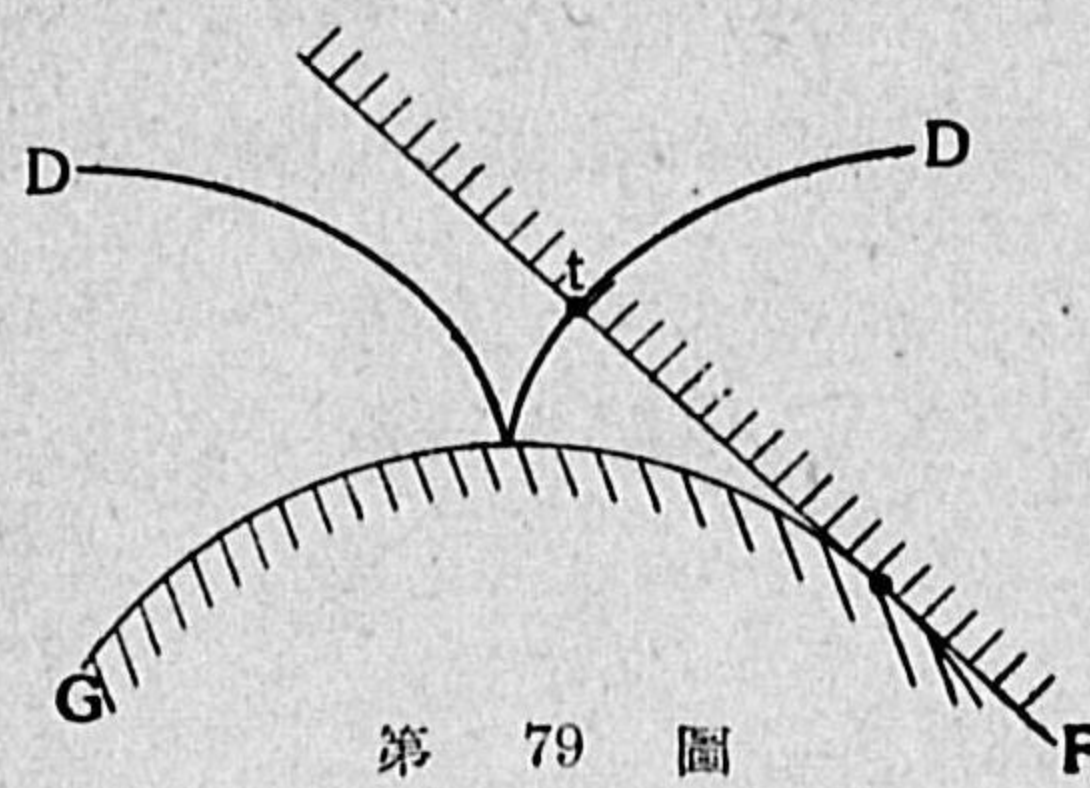
をとるものであることを示してゐる。

上述の表の値は、グラント氏の述べるところに依ると表の最右行に示した最適齒數とした齒數の齒車に於て、その齒高が普通の値であるときに、P 點、p 點、並にその中間の點  $p_1$  點(第 78 圖)なる三點に於て眞のサイクロイドと一致する圓を求めることに依つて得られたものであるといふ。眞のサイクロイドとの喰違ひは齒數が 12 よりも増すに従つて少く、一般に P 點と  $p_1$  點との間に於て最も多く、然しながら齒數 12、圓周ピッチ 3 吋なる大形車に於ても、其の最大喰違ひは 0.01 吋、上齒面 8 箇所の平均の喰違ひ 0.004 吋に過ぎないとグラント氏は述べてゐる。



## 第10章 インボリュート

インボリュート——ここに直線F(第79圖)と不動の曲線Gとが互に同一の平面内に在つて、FがGに沿つて轉り接觸をするとき、直線F中の一定點tが描く曲線Dをインボリュート(involute)といふ。吾々は専ら曲線Gが圓である場合のインボリュートを考へるのであるから、曲線Gは即ち基礎圓と呼ぶべきものである。インボリュートは明かにサイクロイドの一つの特別の場合に屬し、即ち第6章第39圖の造形圓Fが無限に大きくなつたときのサイクロイドDに外ならない。

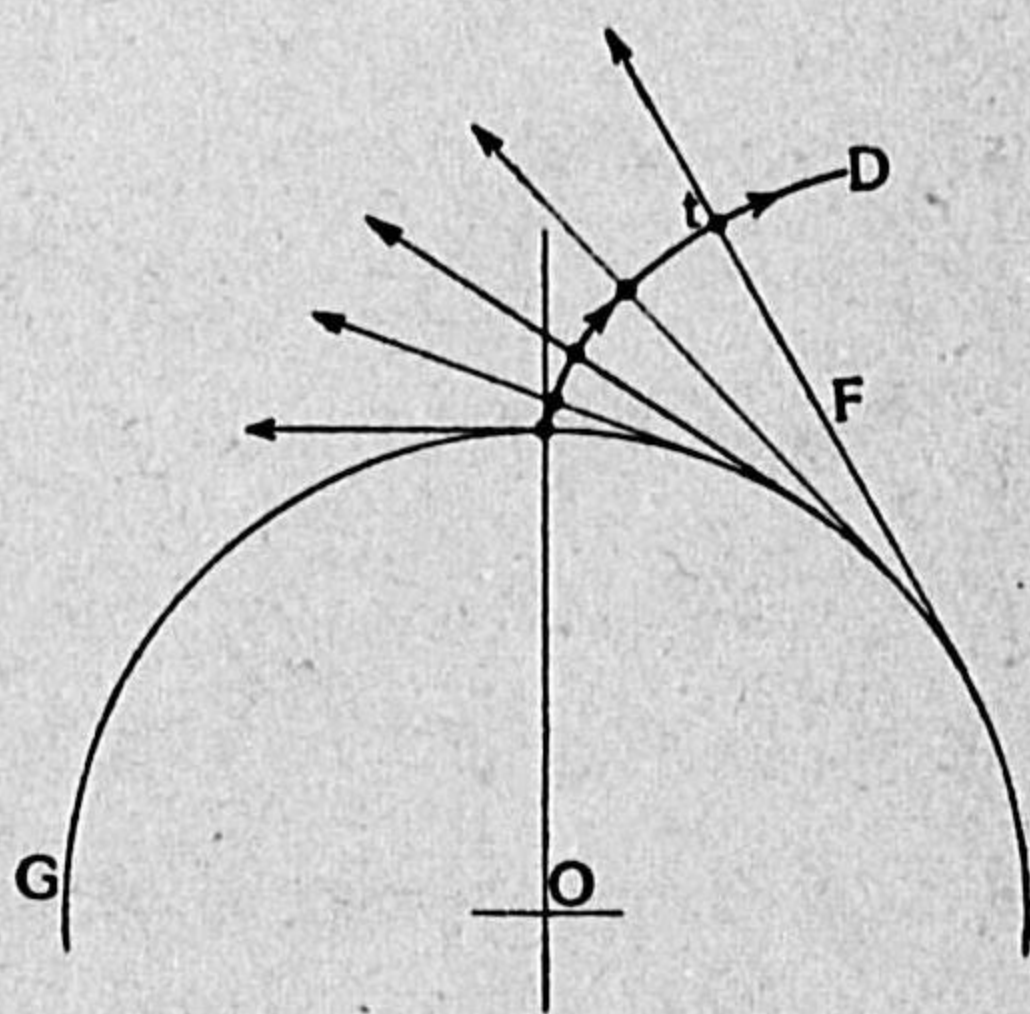


第79圖

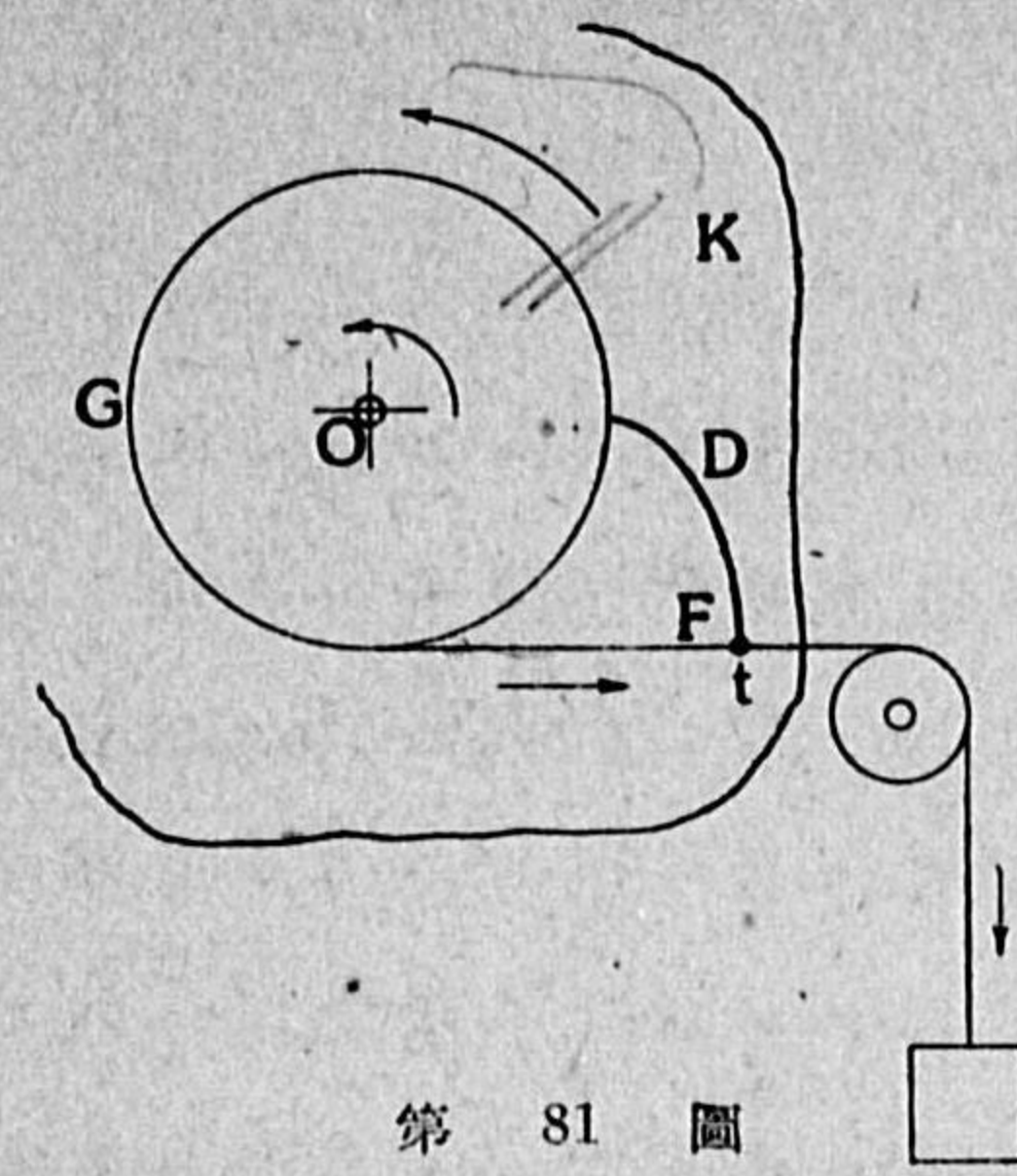
サイクロイドDに外ならない。

引張られた糸を以て造形直線Fを代表させることにすると、不動の基礎圓Gの周に捲かれてゐる極めて細い糸Fを、圓の面内に於て引張りながら捲戻すとき、糸の一定點tが描く曲線D(第80圖)が即ちインボリュートである。

或はGとFとの動不動を交換して、第81圖の如く基礎圓Gがその中心點Oの周に廻れるやうにし、糸Fを一定方向へ引張りながら基礎圓から之を引出すやうにすると、糸の一定點tに取附けられてゐる鉛筆



第80圖



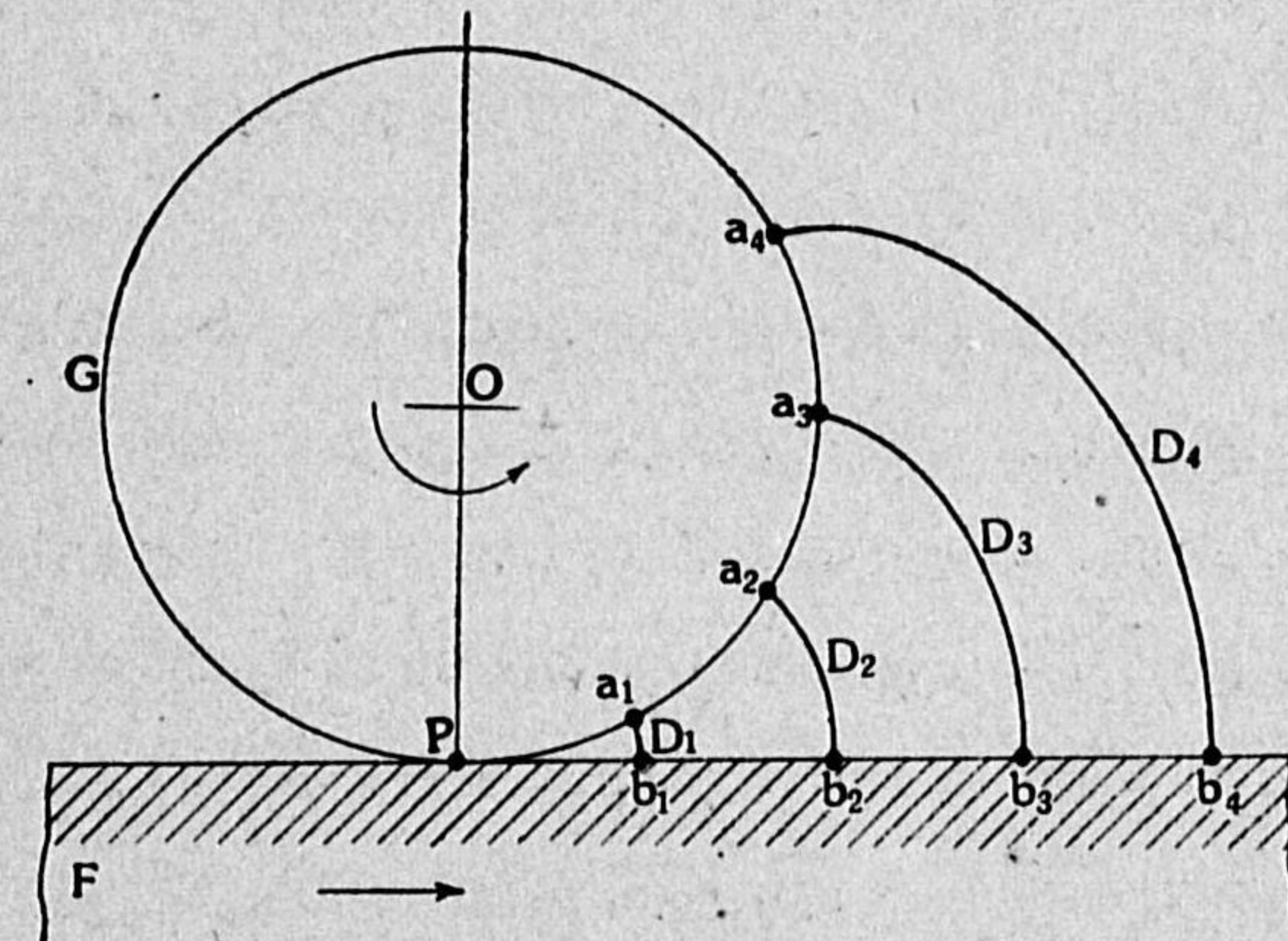
第81圖

が、圓Gに貼附けられて其れと共に廻るところの紙Kの面に描く曲線Dが即ちインボリュートである。

或はもつと異つた考へ方をするならば、基礎圓Gを其の中心點Oで軸止し、直線體Fを其の直線

の方向へ動かしながら、それとの轉り接觸に依つて圓GをO點の周りに廻すものと考へ、更に一つの假想として、第82圖の如く直線體Fに穿たれてゐる幾つかの小孔 $b_1, b_2, b_3$ 等から、粘液が直線Fに直角な方向へ

圓Gとの接觸に依つて引出され、引出されるや直ちに凝固するものとする、GとFとの轉り接觸の連続に依つて逐次に凝固形成せられる線條 $D_1,$



第82圖

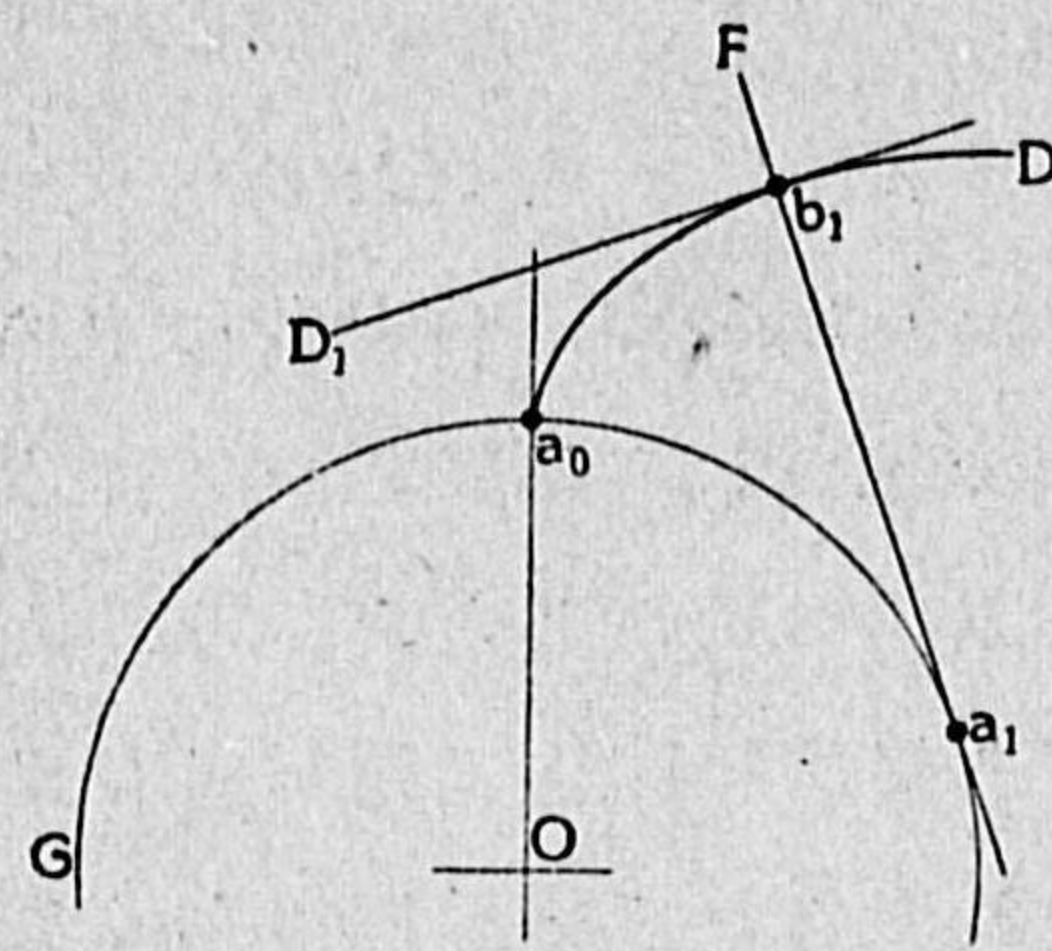
$D_2, D_3$ 等の形が即ちインボリュートである。

インボリュートの二三の性質——前に述べたサイクロイドでは、其の形が基礎圓の大小と造形圓の大小とで夫々變化するが、インボリュートに於ては、たゞ單に基礎圓の大小だけで變化する。



従つて其の性質もサイクロイドのに比べて、それだけ簡単であると謂へる。

先づ基礎圓周上の任意の一點  $a_1$  (第83圖) に切して直線  $F$  を描



第 83 圖

き、之がインボリュート  $D$  と交るところを  $b_1$  點とすると、 $b_1$  點に於ける曲線  $D$  への切線  $D_1$  は直線  $F$  に垂直である。つまり  $F$  は曲線  $D$  と直角に交るのである。それは造形點  $t$  が曲線  $D$  の  $b_1$  點を描く瞬間に於て、造形直線  $F$  は  $a_1$  點を瞬間的回轉中心として廻つて

ゐるからである。

以上のことを逆にいふと、曲線  $D$  中の任意の一點  $b_1$  へ垂直線  $F$  を描くと、その垂直線は基礎圓  $G$  のどこか或る點、即ち  $a_1$  點に於て必ず基礎圓に切するといふことである。これは第6章ルレットの項下に於て述べたところからも直ちに知られるのである。

インボリュートの起點、即ち造形點  $t$  が基礎圓に接した點を  $a_0$  (第83圖) とすると、基礎圓  $G$  と造形直線  $F$  との轉り接觸といふことからして直ちに明かなことは、任意の點  $a_1$  (又は點  $b_1$ ) に於て

$$\widehat{a_0 a_1} = \overline{b_1 a_1} \quad (15)$$

であることである。これは周邊  $\widehat{a_0 a_1}$  に捲かれて居た糸が、捲戻されて直線  $\overline{b_1 a_1}$  となつたと考へても直ちに了解されるだらう。

更にもう一つの點  $a_2$  (第84圖) に於て同じく切線  $a_2 b_2$  を描くと、これに於ても同様に

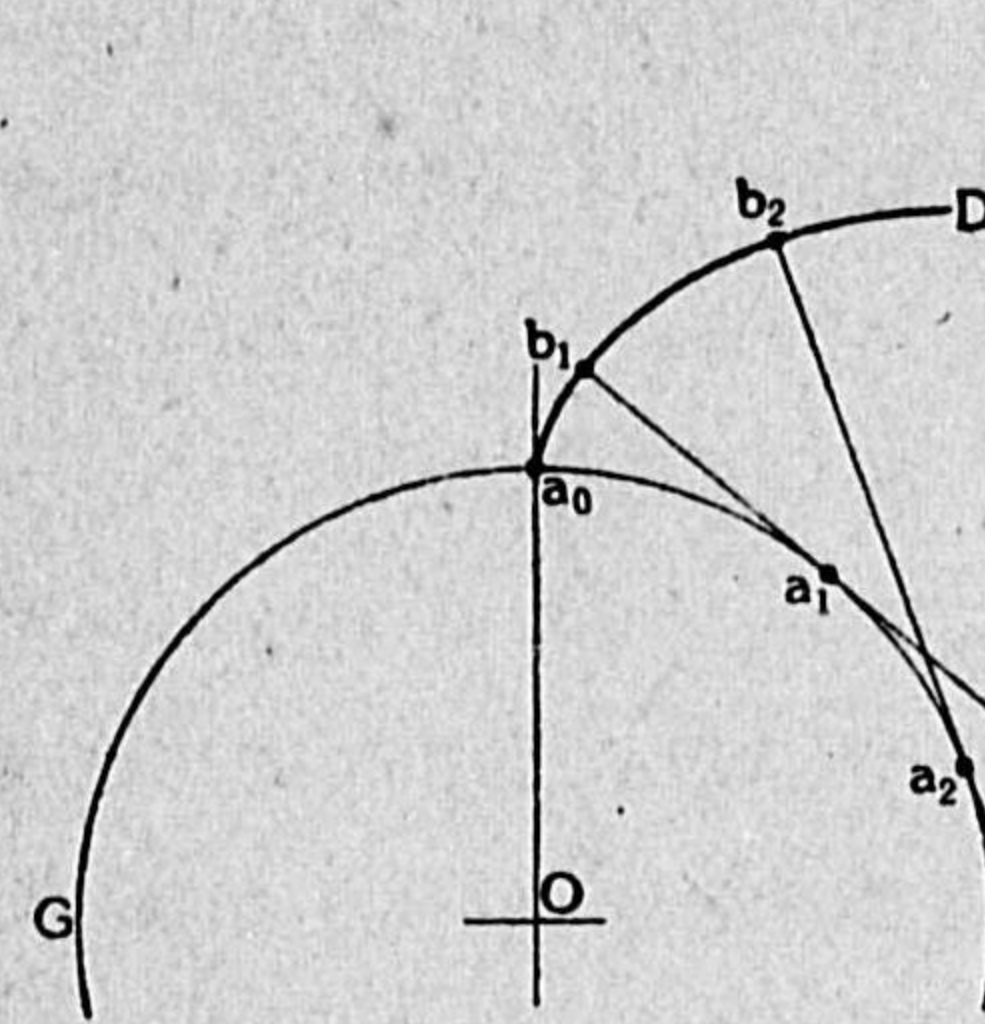
$$\widehat{a_0 a_2} = \overline{b_2 a_2},$$

従つて前式(15)を之から引くと

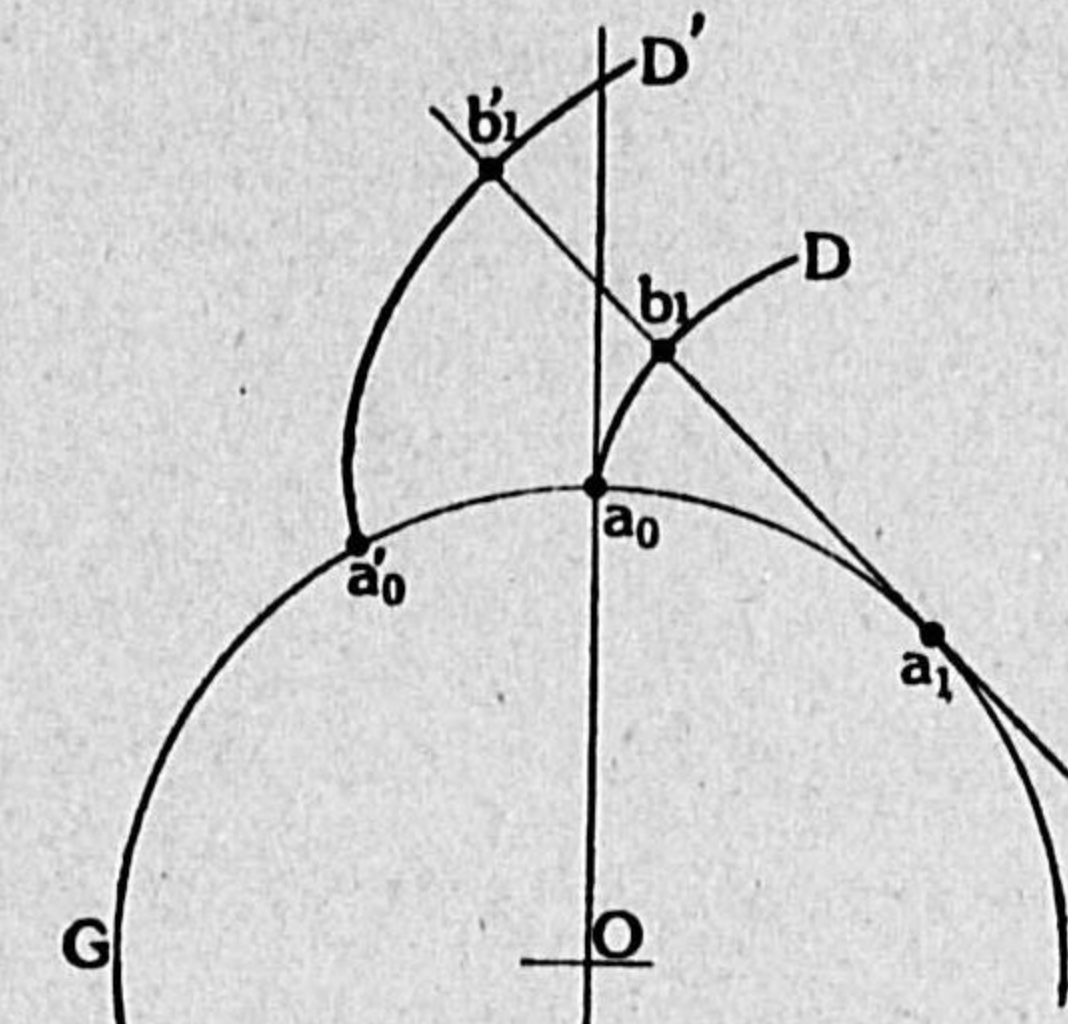
$$\widehat{a_0 a_2} - \widehat{a_0 a_1} = \overline{b_2 a_2} - \overline{b_1 a_1},$$

即ち

$$\overline{b_2 a_2} = \overline{b_1 a_1} + \widehat{a_1 a_2} \quad (16)$$



第 84 圖



第 85 圖

である。又第85圖の如く  $a_0$  を起點(前述)とするインボリュート  $D$  の外に更に、 $a_0'$  を起點とする第二のインボリュート  $D'$  を描いたものとし、 $a_1$  點に於ける切線が  $D$  と  $b_1$  點で交ると共に、 $D'$  と  $b_1'$  點で交るとすると、同じく

$$\widehat{a_0' a_1} = \overline{b_1' a_1}$$

だから、これから式(15)を差引くと

$$\widehat{a_0' a_1} - \widehat{a_0 a_1} = \overline{b_1' a_1} - \overline{b_1 a_1}$$

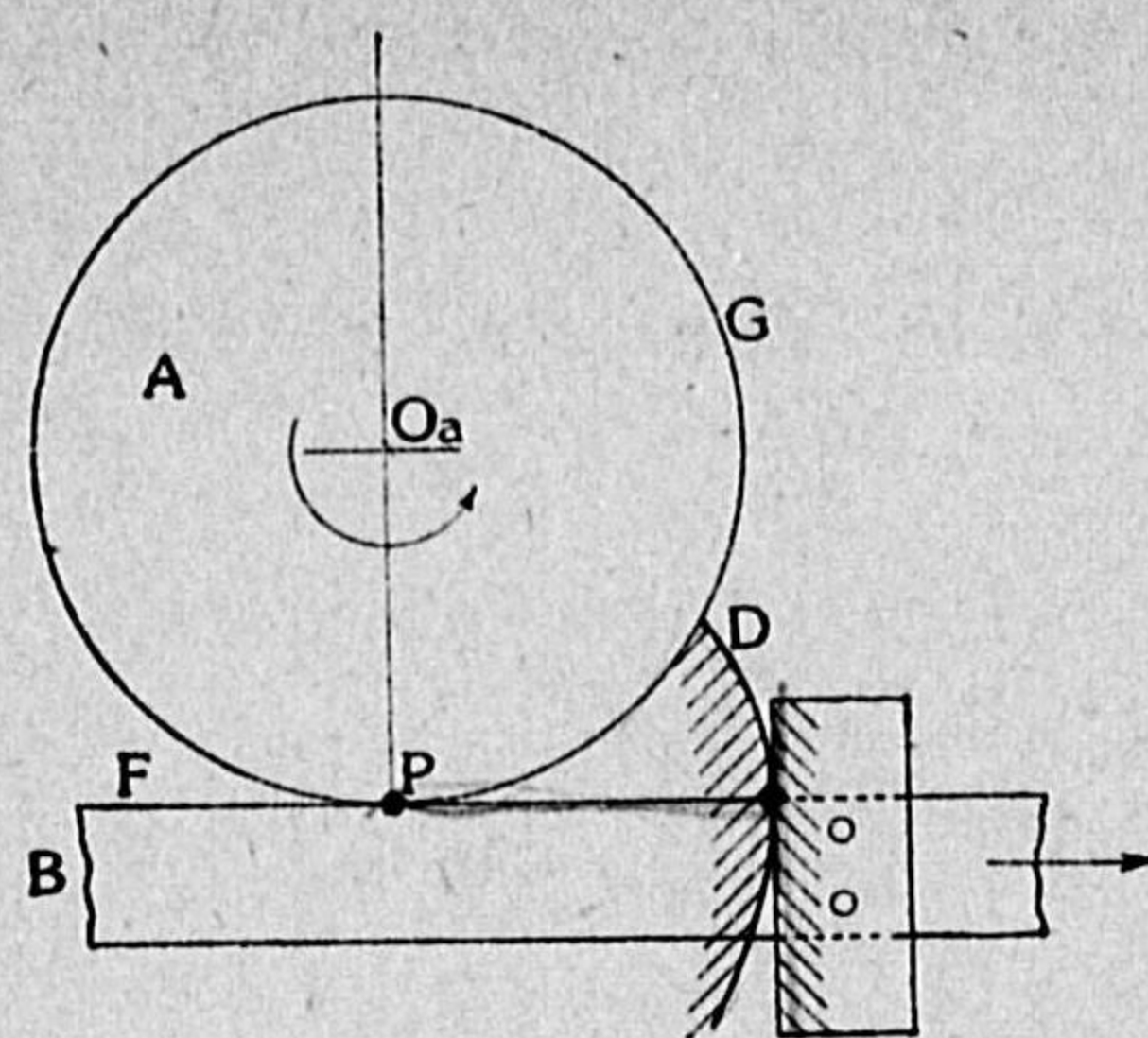
となり、即ち

$$\widehat{a_0' a_0} = \overline{b_1' b_1} \quad (17)$$

なる関係が生ずる。

**インボリュートを利用した簡単な装置** — 基礎圓への切線はインボリュートと直角に交るのであるから、前の第82圖の如き圖形に於て、切線  $F$  はインボリュート  $D_1, D_2, D_3$  等と悉く直角に交る。だから其の圖に於て  $G$  を A 齒車、 $F$  を B ラックとして、兩者を





第 86 圖

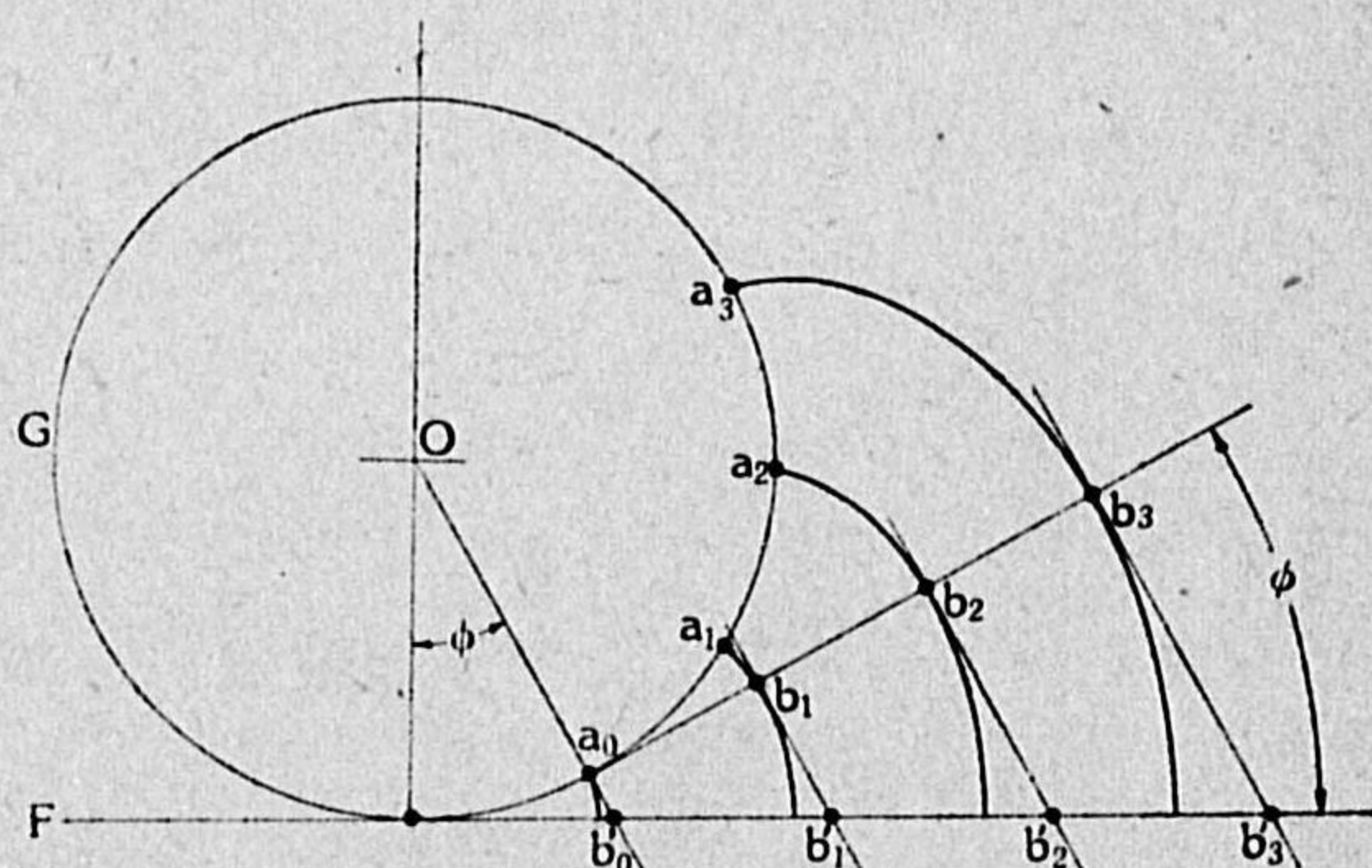
線 G と F とに於て轉り接觸をさせるために、A 車へ圖の如き  $D_1, D_2, D_3$  等の齒を設けたとすると、これに嚙合ふラック B の齒は直線 F に直角な齒面のものであればいふことになる。即ち第 86 圖の如き装置がそれである。

第 82 圖の圖形のものに於て、G と F とが現在切してゐる點を P とし、インボリュート  $D_1, D_2, D_3$  等の起點を夫々  $a_1, a_2, a_3$  等とすると、今の式(17)に依つて

$$\frac{\widehat{Pa_1}}{\widehat{Pb_1}} = \frac{\widehat{a_1a_2}}{\widehat{b_1b_2}} = \frac{\widehat{a_2a_3}}{\widehat{b_2b_3}} = \dots = 1$$

となる。即ち G が其の圓周に沿つて動いただけ F は其の直線の方角へ動くのである。今第 86 圖の如き装置が動いてゐるときの一定時間毎の状態を重疊して描いたものが、即ち第 82 圖であると見るならば、今述

べたことからして直ちに言ひ得ることは、第 86 圖の A を其の中心點  $Oa$  の周に一樣な角速度即ち等角速度で矢の方角へ廻したと



第 87 圖

き、B は同じく一樣な速度即ち等速度で其の矢の方角へ動くといふことである。

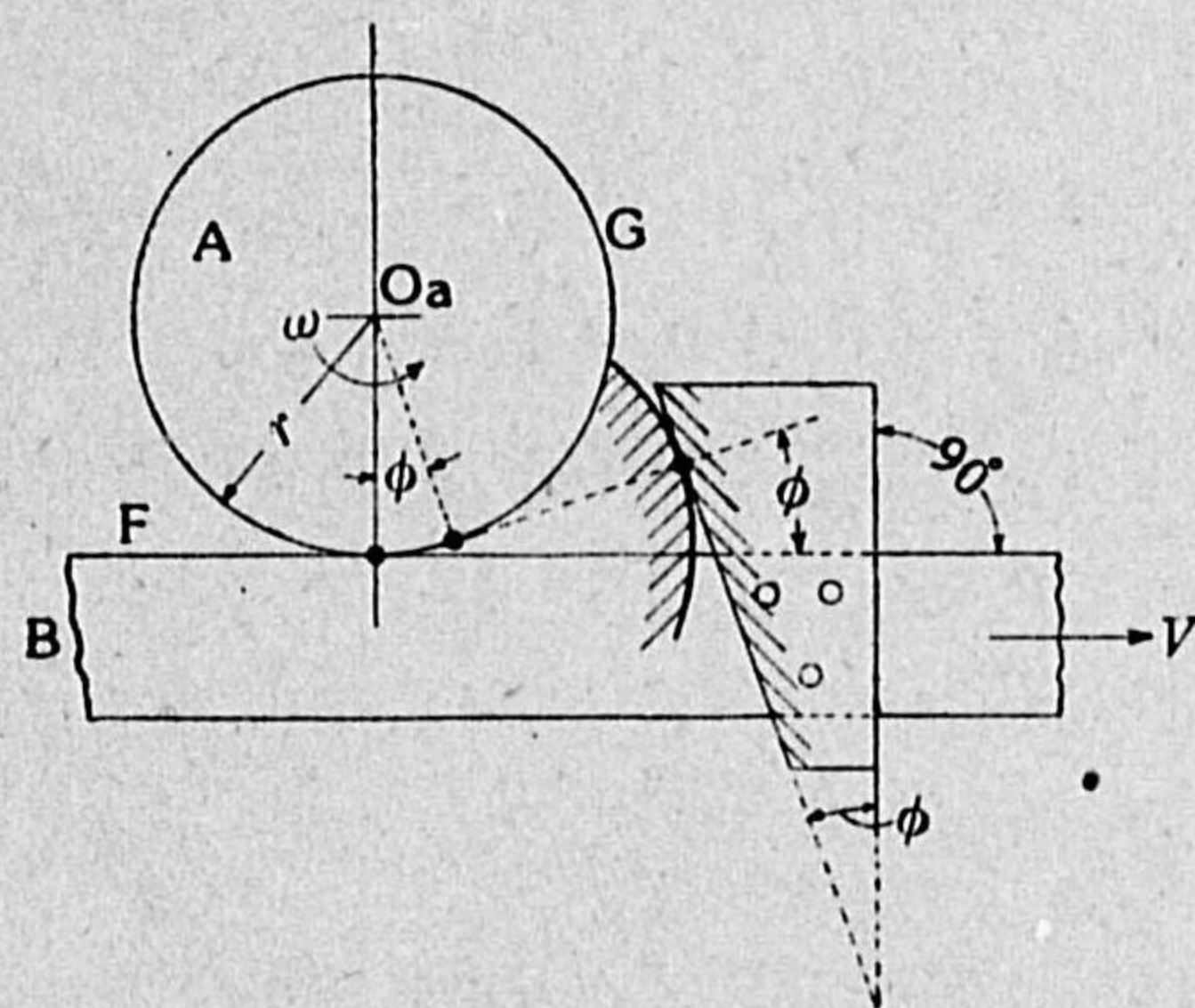
第 87 圖は第 82 圖の G 及び D を任意の角度  $\phi$  だけ傾けて描いたものである。此の圖に於て

$$\frac{\overline{a_0b_1}}{\overline{b_0'b_1'}} = \frac{\overline{b_1b_2}}{\overline{b_1'b_2'}} = \frac{\overline{b_2b_3}}{\overline{b_2'b_3'}} = \dots = \cos \phi.$$

然るに式(17)に依つて  $\widehat{a_0a_1} = \widehat{a_0b_1}$ ,  $\widehat{a_1a_2} = \widehat{b_1b_2}$ ,  $\widehat{a_2a_3} = \widehat{b_2b_3}$  等であるから

$$\frac{\widehat{a_0a_1}}{\overline{b_0'b_1'}} = \frac{\widehat{a_1a_2}}{\overline{b_1'b_2'}} = \frac{\widehat{a_2a_3}}{\overline{b_2'b_3'}} = \dots = \cos \phi = \text{常數}$$

となる。即ち G の圓周に沿つての一と刻み  $\widehat{a_0a_1}$ ,  $\widehat{a_1a_2}$  等と、F に沿つての一と刻み  $\overline{b_0'b_1'}$ ,  $\overline{b_1'b_2'}$  等との割合は一定不變で、その値が  $\cos \phi$  であることを示してゐる。だから G と其のインボリュート



第 88 圖

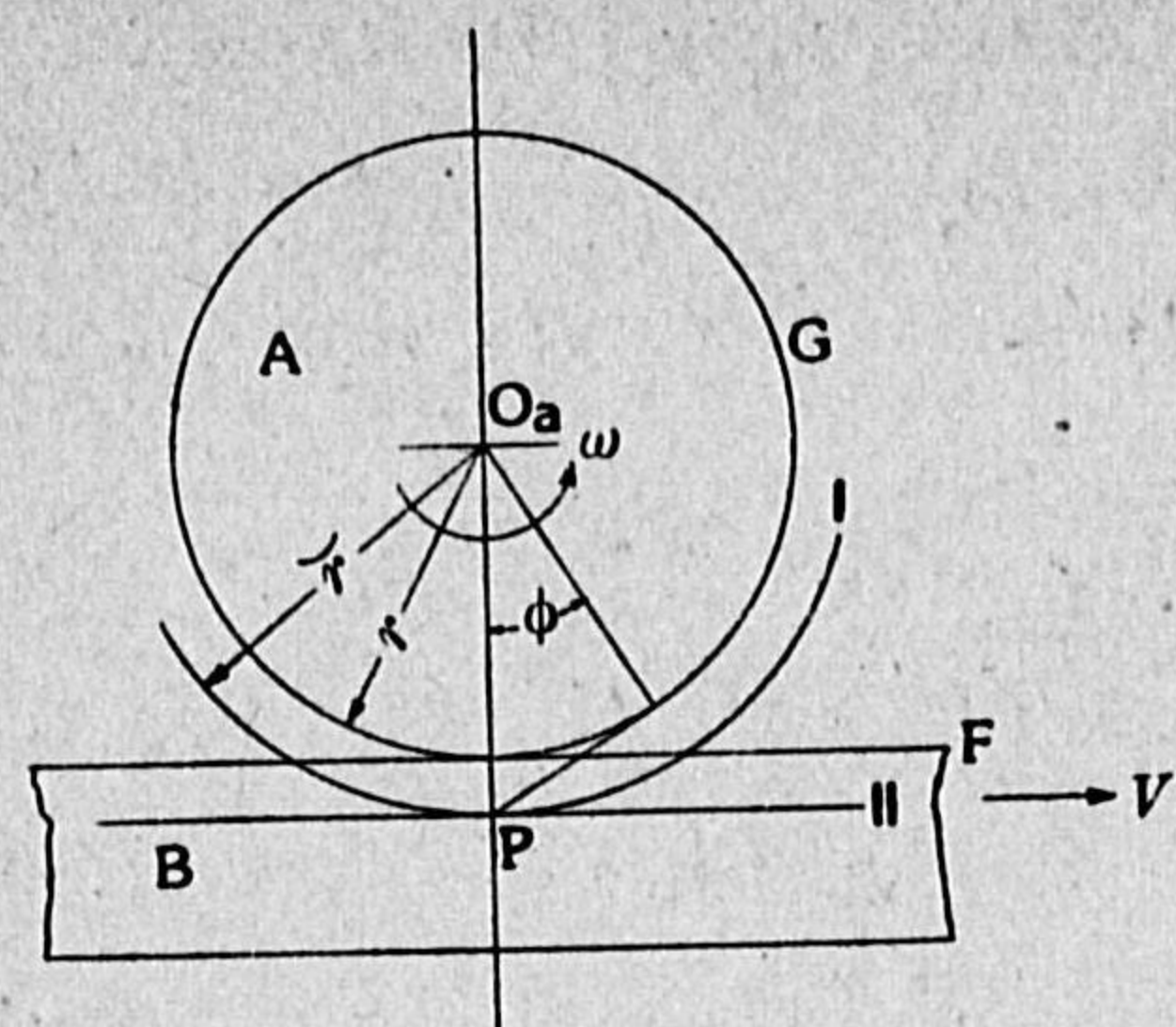
とから成るものを A 齒車とし、F と其の斜線例へば  $b_1b_1'$  とから成るものを B ラックとした第 88 圖の如き装置を作り、A を其の中心點  $Oa$  の周に矢の方角に等角速度を以て廻すと、此の場合にも B は同じく等速度を以て其の矢の方角

へ移動する。此の装置に於て圓 G の半徑を  $r$ 、その角速度を  $\omega$ 、B の速度を  $V$  とすると、前式からして

$$\cos \phi = \frac{\text{A の圓周速度}}{\text{B の速度}} = \frac{r\omega}{V}$$

となり、従つて





第 89 圖

$$V = \frac{r\omega}{\cos \phi}$$

となる。圓 G の外方に一つの圓 I (第 89 圖) を想像し、其の半徑  $\tilde{r}$  を

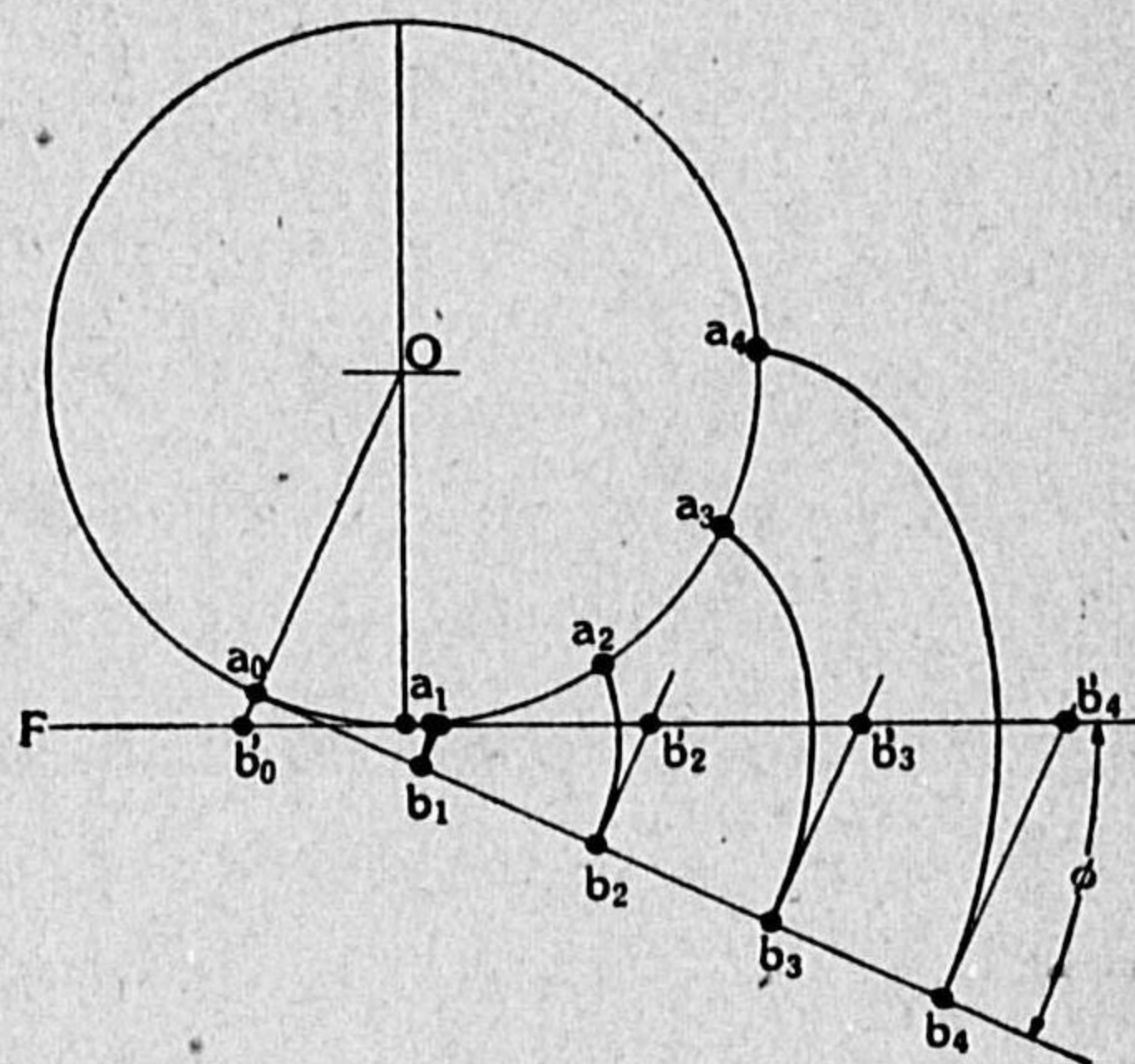
$$\tilde{r} = \frac{r}{\cos \phi}$$

ならしめ、この圓を A 車に屬する一部分として圓 G と共に角速度  $\omega$  で廻すものとする、圓 I に於ける圓周上の

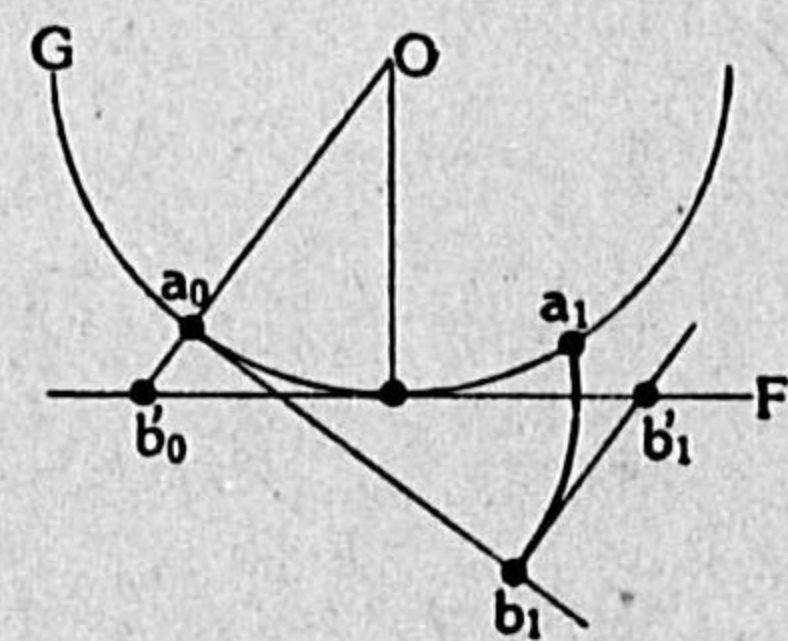
線速度は

$$\tilde{r}\omega = \frac{r\omega}{\cos \phi}$$

となり、B の速度 V に等しい。故に B の中に、F と平行で且圓 I と切する直線 II を想像すれば、I と II とは其の線速度が互に等しいから、両者は即ち轉り接觸の状態となり、齒車とラックとの嚙合に於けると同様に、ピッチ圓及びピッチ線なるものを此の場合にも考へるならば、圓 I は明かにピッチ圓であり、直線 II はそれに切するピッチ線である。従つて又第 88 圖に於



第 90 圖

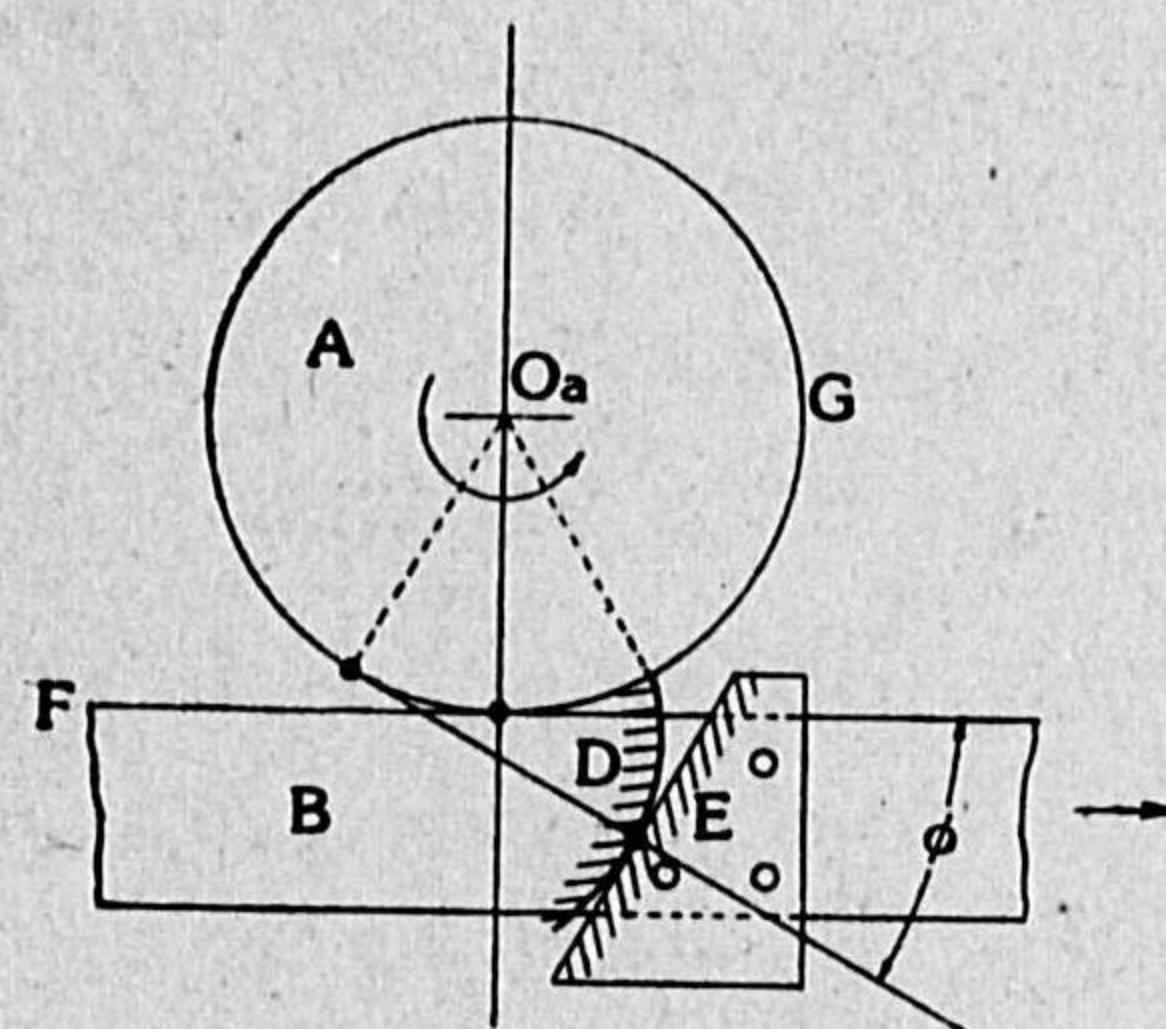


ては、圓 G はピッチ圓ではなく、直線 F もピッチ線ではない。

第 87 圖とは反對の側へ角度  $\phi$  をとつて描くと第 90 圖となる。この場合にも前と同様にして

$$\frac{a_0 a_1}{b_0' b_1'} = \frac{a_1 a_2}{b_1' b_2'} = \frac{a_2 a_3}{b_2' b_3'} = \dots \cos \phi = \text{常數}$$

となるから、第 91 圖の如き装置を作つて、A を矢の方向へ  $O_a$  の周に等角速度で廻せば、インボリュート D と直線 E との接觸に依つて、



第 91 圖

B も同じく矢の方向へ等速度で動く。此の装置は直線刃物 E を以てインボリュート齒面 D を削成することができることをも同時に示して居るもので、即ち兩者を矢の方向へ靜かに動かすと同時に、刃物 E を充分頻繁に紙面に例へば垂直の

方向へ往復運動をさせると齒 D が削成せられる。かやうにしてインボリュート齒面は直線刃物を以て造られ得るから、曲線刃物を必要とするサイクロイド齒面に比べて、正確且簡便に造られる可能性が多いこと明かである。これはインボリュート齒車がサイクロイド齒車に優ると認められる大切な事柄の一つである。

**インボリュートの數式的な表し方** — 第 92 圖に於て G を半徑が  $g$  である基礎圓、D が  $a_0$  點を起點とする其のインボリュートであると、D 中の任意の一點  $b$  をとり、これを圓 G の中心點 O と結びつけ

$$\overline{bO} = r, \angle a_0 O b = \theta$$



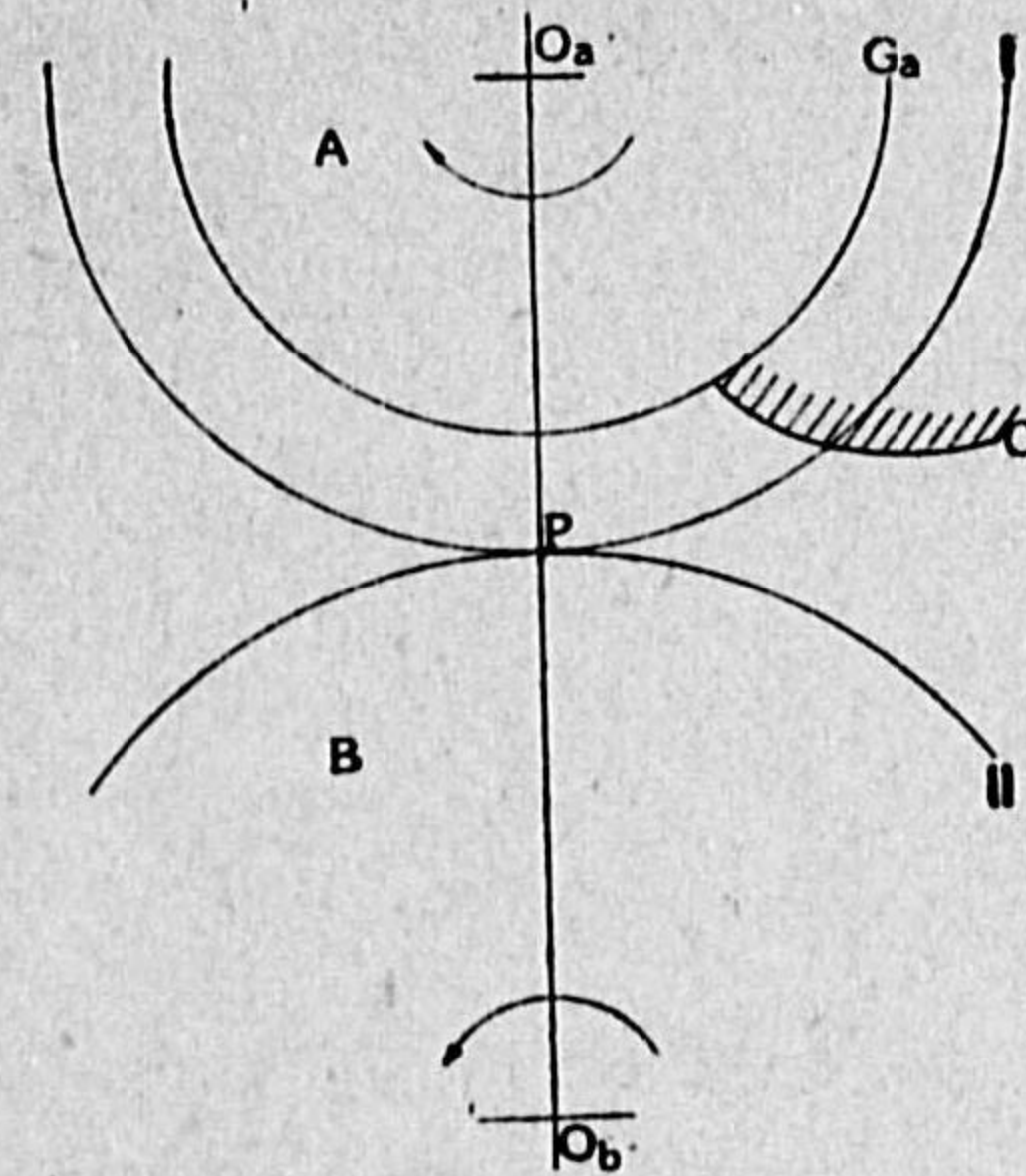




あるといふことである。従つて有らゆるインボリュートは悉く互に相似形であつて、一つのインボリュートを基礎圓の大小に応じて比例的に廓大又は縮小することに依つて、之を他の任意のインボリュートに合致せしめることができる。これは齒車の検査に於て利用せられるインボリュートの重要な性質の一つである。

### 第 11 章 インボリュート齒車

インボリュート齒車の成立 — A 及び B なる二つの齒車に於て、夫々のピッチ圓 I 及び II が中心點を  $O_a, O_b$  とし、且 P 點で轉り接觸をなしてゐるものとし(第 93 圖)、そのとき A の齒が中心點  $O_a$  なる或る圓  $G_a$  を基礎圓とするインボリュート C であるとき、之と嚙合ふ B の齒も亦一つのインボリュートであることを述べたい。



第 93 圖

て、夫々のピッチ圓 I 及び II が中心點を  $O_a, O_b$  とし、且 P 點で轉り接觸をなしてゐるものとし(第 93 圖)、そのとき A の齒が中心點  $O_a$  なる或る圓  $G_a$  を基礎圓とするインボリュート C であるとき、之と嚙合ふ B の齒も亦一つのインボリュートであることを述べたい。

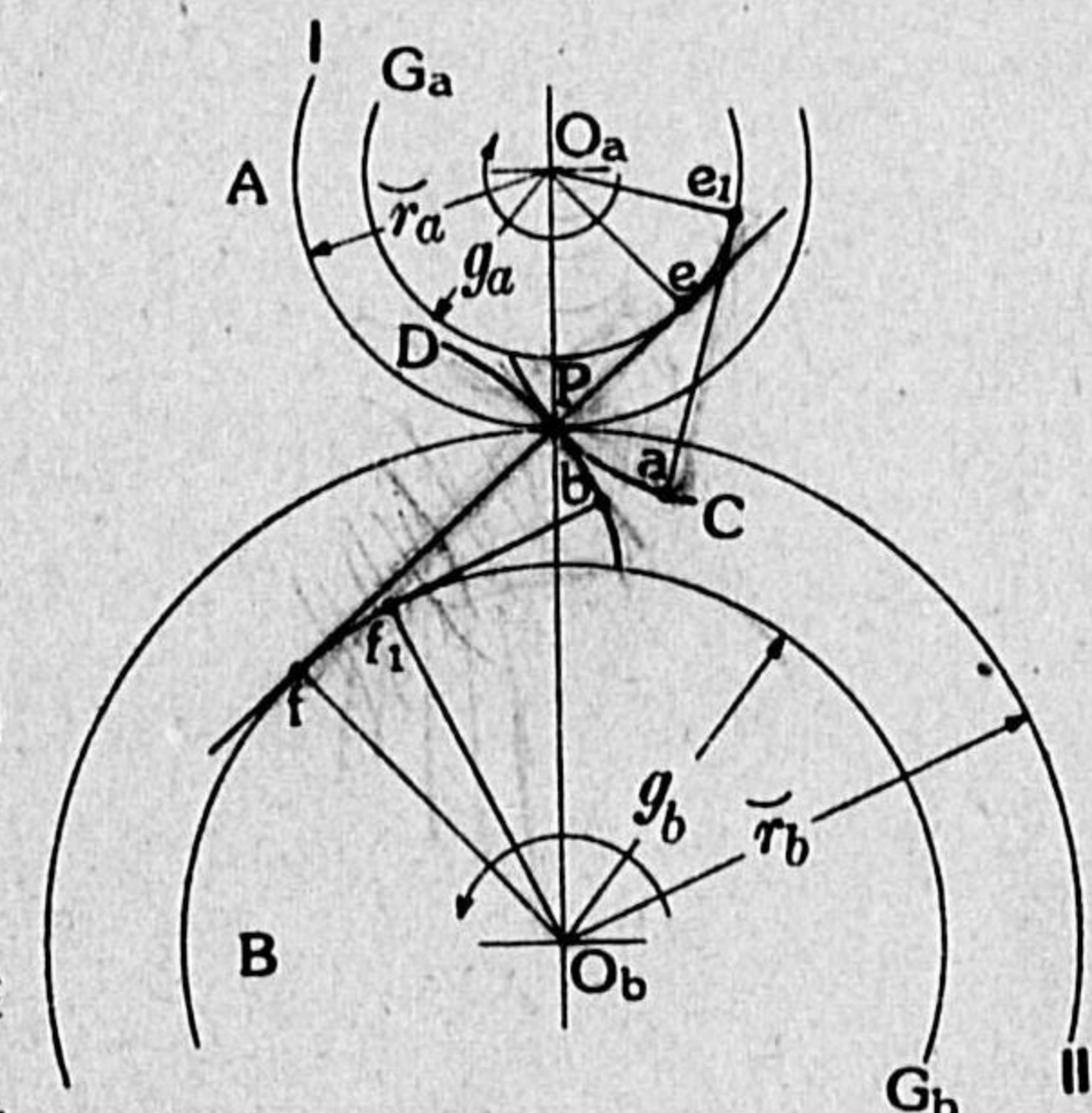
説明の便宜上、兩車が矢の方向へ廻つて曲線 C が丁度ピッチ點 P を通る瞬間の状態(第 94 圖)を考へ、P 點を通り且圓  $G_a$  に切する直線  $ePf$  を描き、次ぎにこの直線に接し且中心點を  $O_b$  とする圓  $G_b$  を描き、 $G_b$  を基礎圓として P 點を通るインボリュート D を作れば、この D が即ち C と嚙合ふべき B 車の齒面である。

之を次ぎのやうにして證明する。

第 10 章に述べたところから従つて、曲線 C は第 94 圖の状態では P 點に於て  $ePf$  線に直角で

之を次ぎのやうにして證明する。

第 10 章に述べたところから従つて、曲線 C は第 94 圖の状態では P 點に於て  $ePf$  線に直角で



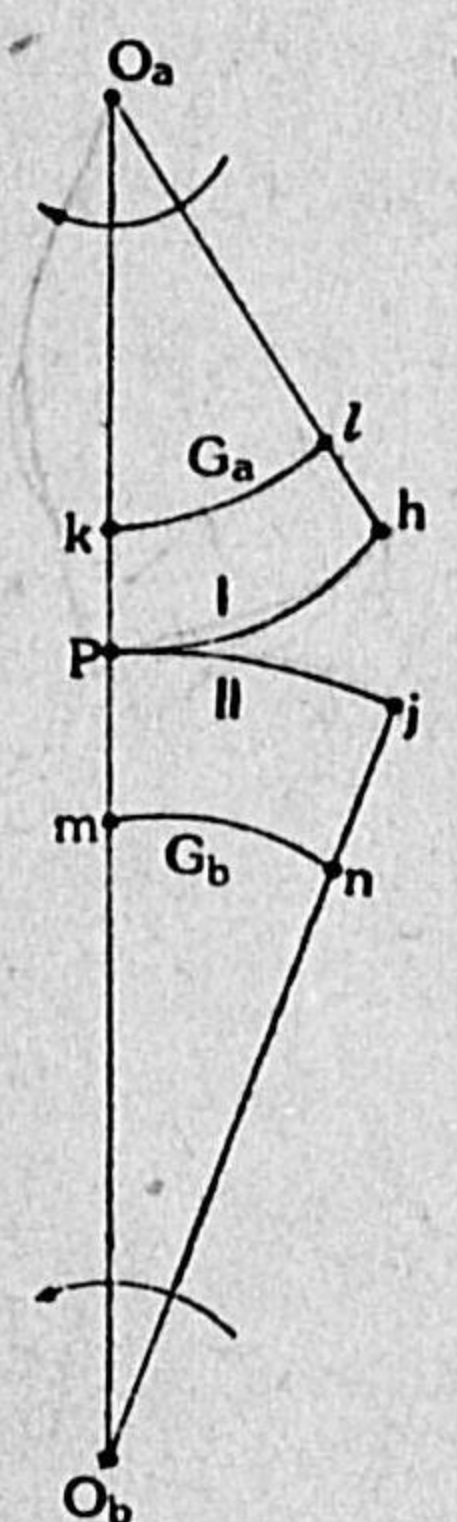
第 94 圖



あり、曲線 D も同じく P 點に於て ePf 線に直角であるから、兩曲線は明かに P 點に於ては共通垂直線を有して相接することが出来、即ち嚙合の條件を満足してゐる。従つてそれ以外の任意の點、例へば C 上の a 點が D 上の或る適當な一點と、必要な條件を満足するやうに相接し得るや否やを吟味すればいい。今

- $r_a$  A 車ピッチ圓半徑
- $r_b$  B 車ピッチ圓半徑
- $g_a$  A 車基礎圓半徑
- $g_b$  B 車 " "
- e 直線 ePf が基礎圓  $G_a$  に切する點
- f " "  $G_b$  "

とする。直線  $O_ae$  と直線  $O_bf$  とは共に直線 ePf に直角だから、



第 95 圖

$\triangle PO_ae$  と  $\triangle PO_bf$  とは相似形であり、従つて

$$\frac{r_a}{g_a} = \frac{r_b}{g_b}$$

である。故に四つの圓 I, II,  $G_a$ ,  $G_b$  を以て第95圖の如き扇形を描いたとき、それらの圓の弧長  $\widehat{Ph}$ ,  $\widehat{Pj}$ ,  $\widehat{kl}$ ,  $\widehat{mn}$  に於て、 $\widehat{Ph}$  と  $\widehat{kl}$  との比は  $\widehat{Pj}$  と  $\widehat{mn}$  との比に等しく、従つて轉り接觸のときのやうに  $\widehat{Ph} = \widehat{Pj}$  だつたら、即ち  $\widehat{kl} = \widehat{mn}$  である。

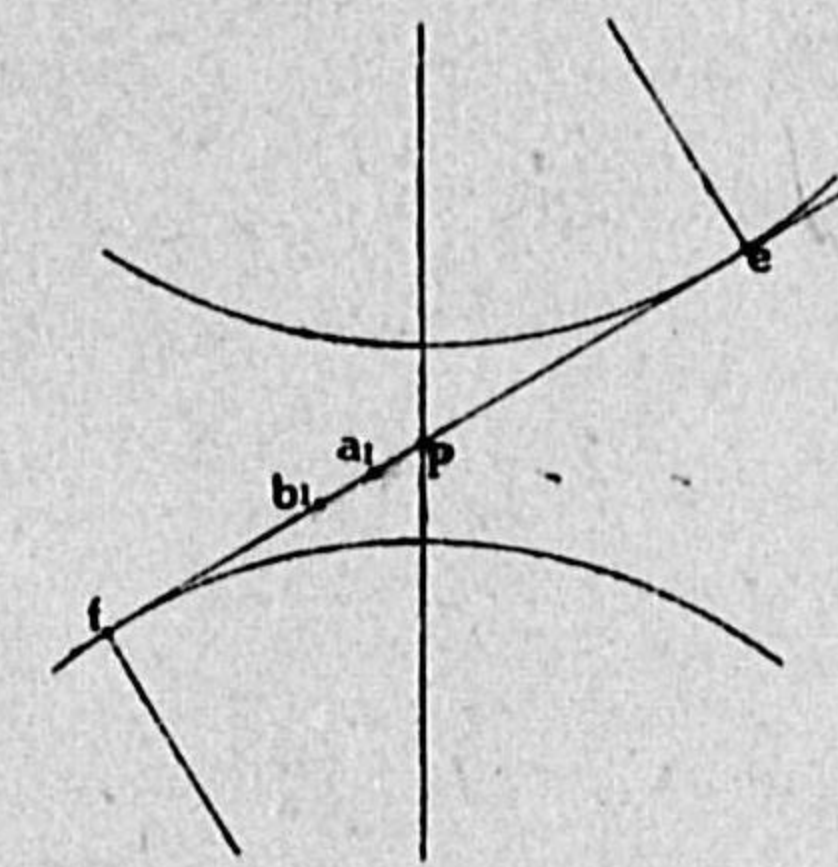
言ひ換へると I と II とが轉り接觸をやつてゐるとすると、基礎圓上の一點が基礎圓に沿つて動く長さは、同じ時間に於て AB 相等しといふことである。

前の第94圖に於て、既に述べた如く齒面 C 上の任意の一點 a をとり、之に垂直線  $ae_1$  を描くと、それは基礎圓  $G_a$  に

切するから、その接點を即ち  $e_1$  とする。今

$$\widehat{ee_1} = \widehat{ff_1}$$

なるやうに一點  $f_1$  を基礎圓  $G_b$  の上にとり、 $f_1$  に於て基礎圓  $G_b$  に切する直線が齒面 D と交るところを b とする。上に述べたところに従つて、AB の回轉に依つて  $e_1$  點が e 點へ移る間に、 $f_1$  點は丁度 f 點へ移るのであるから、 $O_ae_1$  線が  $O_ae$  線の位置へ移ると共に、



第 96 圖

$O_bf_1$  線は  $O_bf$  線の位置へ移り、又従つて  $e_1a$  線及び  $f_1b$  線は共に ePf 線と一致し、之と同時に第96圖の如く a 點は  $a_1$  點へ、b 點は  $b_1$  點へ移り、共に ePf 線上に位置することとなる。この  $a_1$  點と  $b_1$  點とが相一致した一つの點であり、齒面が此等の點に於て共通の垂直線を有し、且それが P 點を通る線即ち ePf 線である如き場合には、a と b とは條件を満足して互に嚙合ふところの齒面であると謂つていい。

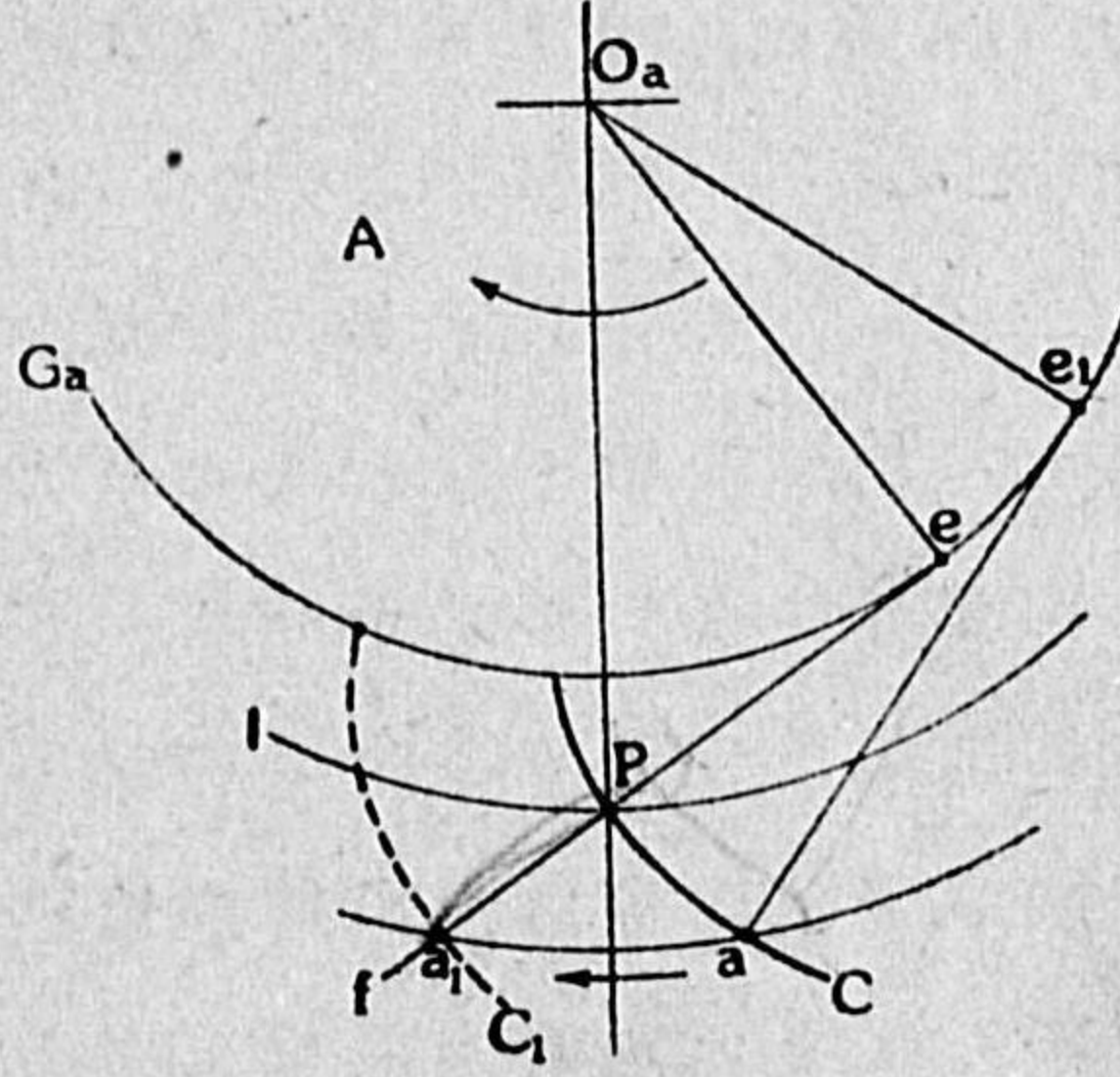
そのことを證明するために、先づ A 車の動きについて考へる。第97圖に於て車が矢の方向に廻つて、 $e_1$  點が e 點へ移る間に、線  $e_1a$  は線  $ea_1$  へ移るのだから

$$\overline{e_1a} = \overline{ea_1}$$

又一方に於て前章の式(16)に従ひ

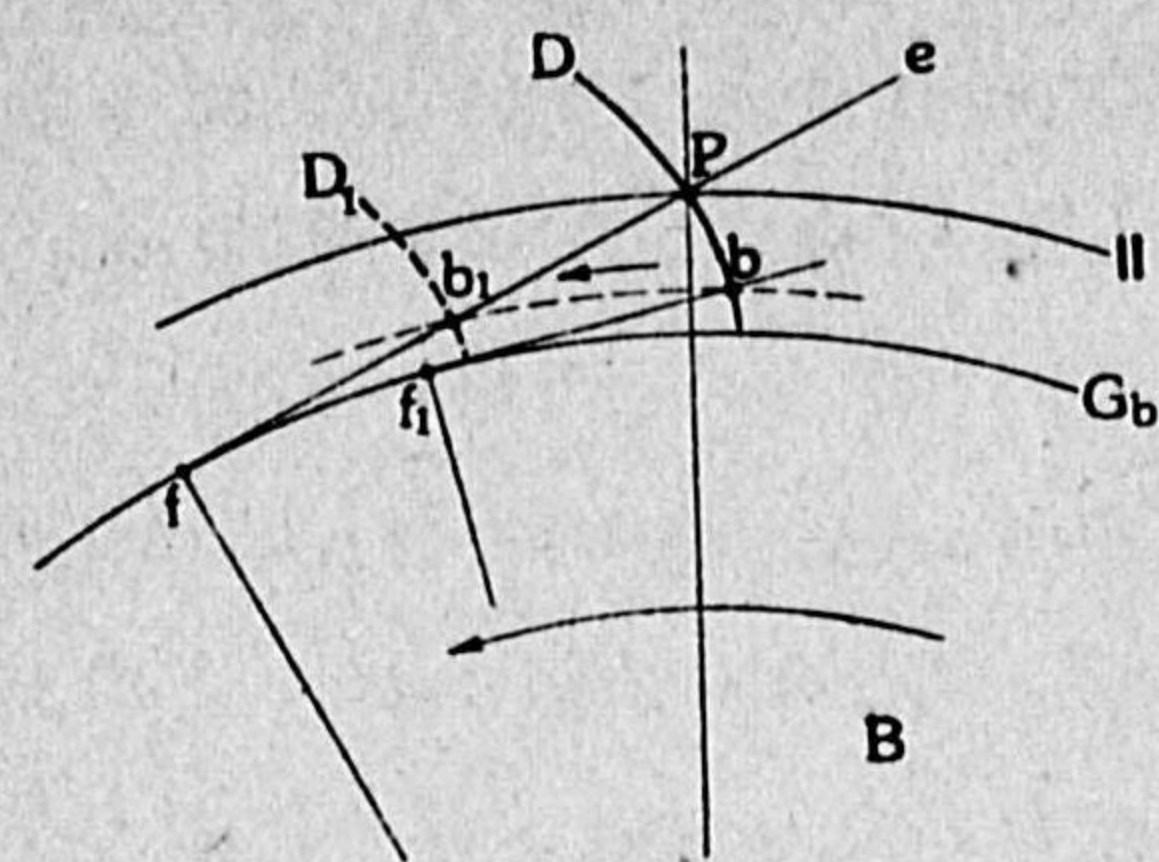
$$\overline{e_1a} = \overline{eP} + \overline{ee_1}$$

だから、即ち



第 97 圖





第 98 圖

然るに前に述べたやうに

$$\widehat{ee_1} = \widehat{ff_1}$$

であるやうに  $f_1$  點が選ばれたのだから、上記の(A)式と(B)式とに従ひ

$$\overline{Pa_1} = \overline{Pb_1}$$

となり、即ち  $a_1$  點と  $b_1$  點とは第96圖の如く別々の離れた點ではなくて、全く同一の點であることが知れる。尙ほその他  $a_1$  點を通る齒面  $C_1$  (第97圖) が其の點に於て  $ePf$  線に垂直であり、 $b_1$  點を通る齒面  $D_1$  (第98圖) も同じく其の點に於て  $ePf$  線に垂直であることは、インボリュートの性質として當然明かである。

以上に依つて、第94圖の  $a$  と  $b$  とは互に嚙合ふ齒面であることが證明せられ、従つて又一般に  $C$  の對手齒が  $D$  であることが證明せられたわけである。

**接觸位置軌跡、壓力角、角速度比** —— 上述の證明に伴つて同時に知られたことは、兩齒の接觸が必ず  $ePf$  線上に於て行はれること、即ち接觸位置軌跡が直線  $ePf$  であること、更に接觸が  $e$  點と  $f$  點との間に限つて行はれ、同じ  $ePf$  線の上でも  $ef$  間以外では接觸

$$\widehat{ee_1} = \widehat{ea_1} - \widehat{eP} = \widehat{Pa_1} \quad (A)$$

である。次ぎに  $B$  車について同様のことを考へる。第98圖に於て

$$\widehat{f_1b} = \widehat{fb_1},$$

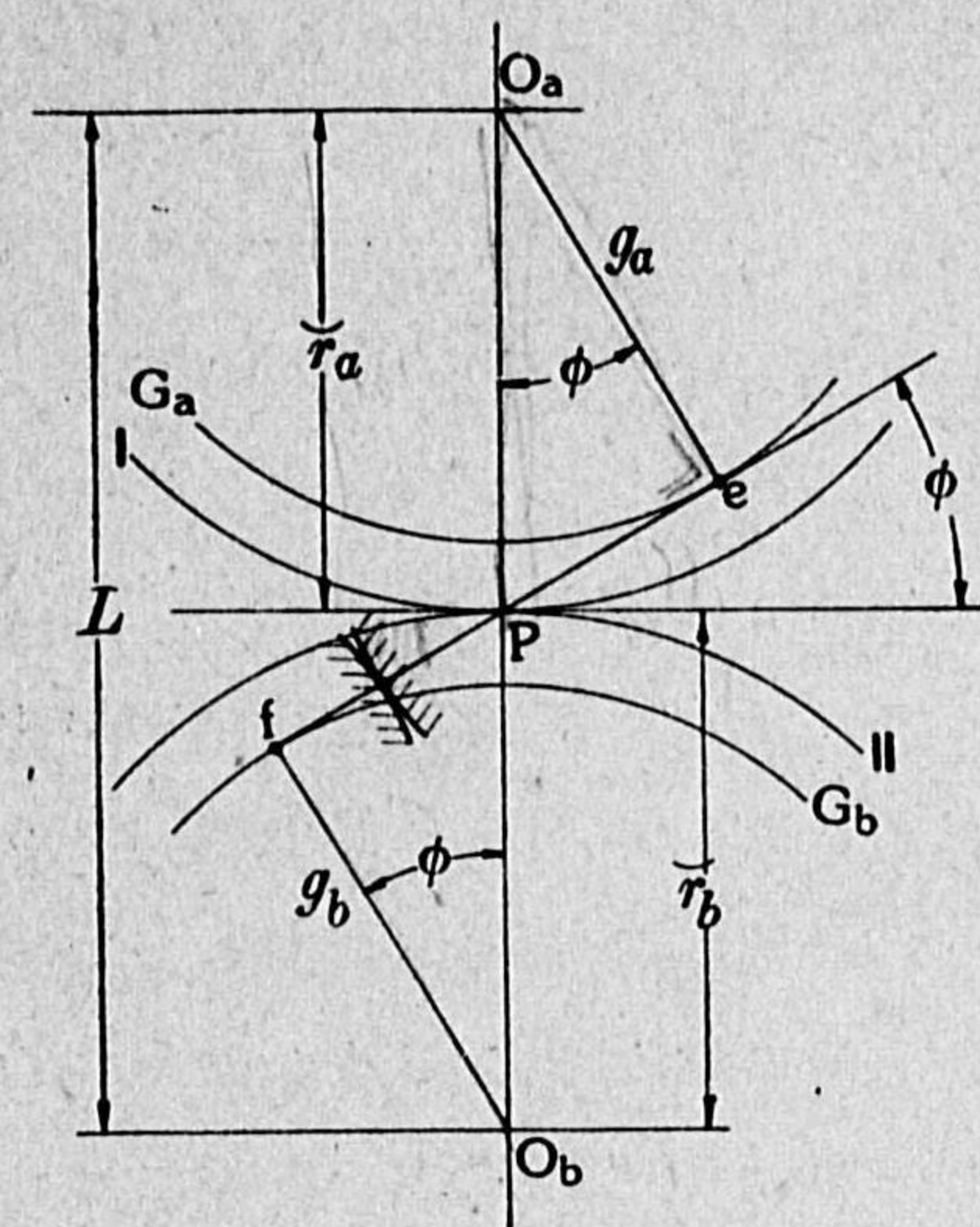
$$\text{一方で } \widehat{f_1b} = \widehat{fP} = \widehat{ff_1}$$

だから即ち

$$\widehat{ff_1} = \widehat{fP} - \widehat{fb_1} = \widehat{Pb_1} \quad (B)$$

が起らないことである。

壓力角、即ち相接してゐる齒面の共通垂直線が兩ピッチ圓の共通切線となす角度(第8章)は、



第 99 圖

サイクロイド齒車に在つては接觸の各瞬間に於て異つた値を呈するものであることを既に述べたのであるが、インボリュート齒車に於ては接觸位置軌跡が上述の如く一つの直線であるから、壓力角は接觸の終始を通じて一貫した一つの値  $\phi$  (第99圖) を呈する。

壓力角  $\phi$  は第99圖に示す

通り

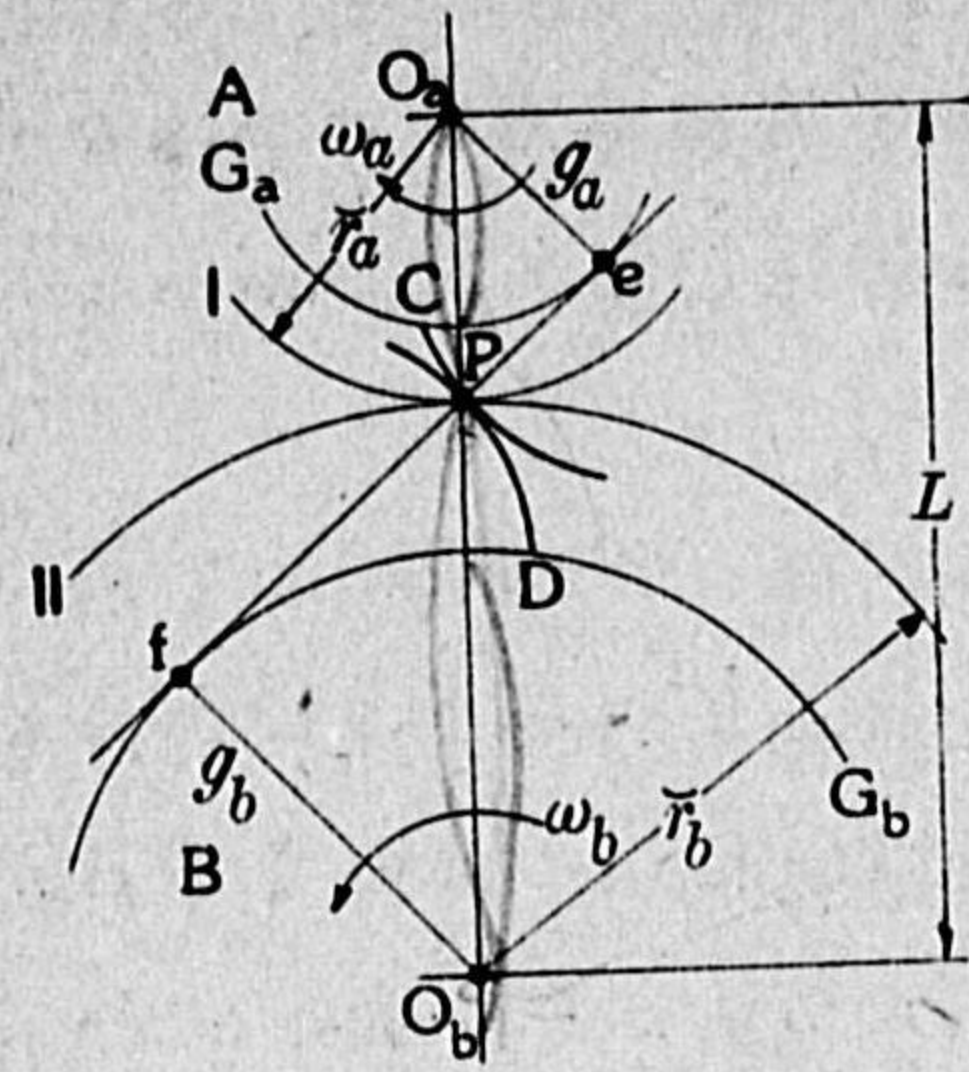
$$\cos \phi = \frac{g_a}{r_a} = \frac{g_b}{r_b} = \frac{g_a + g_b}{r_a + r_b} = \frac{g_a + g_b}{O_a O_b} = \frac{g_a + g_b}{L} \quad (21)$$

で與へられるから、中心點  $O_a$  と  $O_b$  と距離  $L$  が一定であり、且基礎圓半徑  $g_a, g_b$  が一定である限り、其の値は不變である。

半徑  $g_a$  なる基礎圓  $G_a$  から出來てゐる齒を有する  $A$  車と、同じく半徑  $g_b$  なる基礎圓  $G_b$  から出來てゐる齒を有する  $B$  車とが、 $L$  なる距離に其の中心點が置かれて嚙合はされたときに兩車は如何なる角速度比を以て廻るかを調べて見よう。

第100圖の如く圓  $G_a$  と圓  $G_b$  とに同時に切する直線  $ef$  を引き、それが兩中心點を連ねる線  $O_a O_b$  を切る點を  $P$  と名づけ、 $A$  の齒面  $C$  と  $B$  の齒面  $D$  とを共に  $P$  點を通過する位置に一應据ゑてみる。





第 100 圖

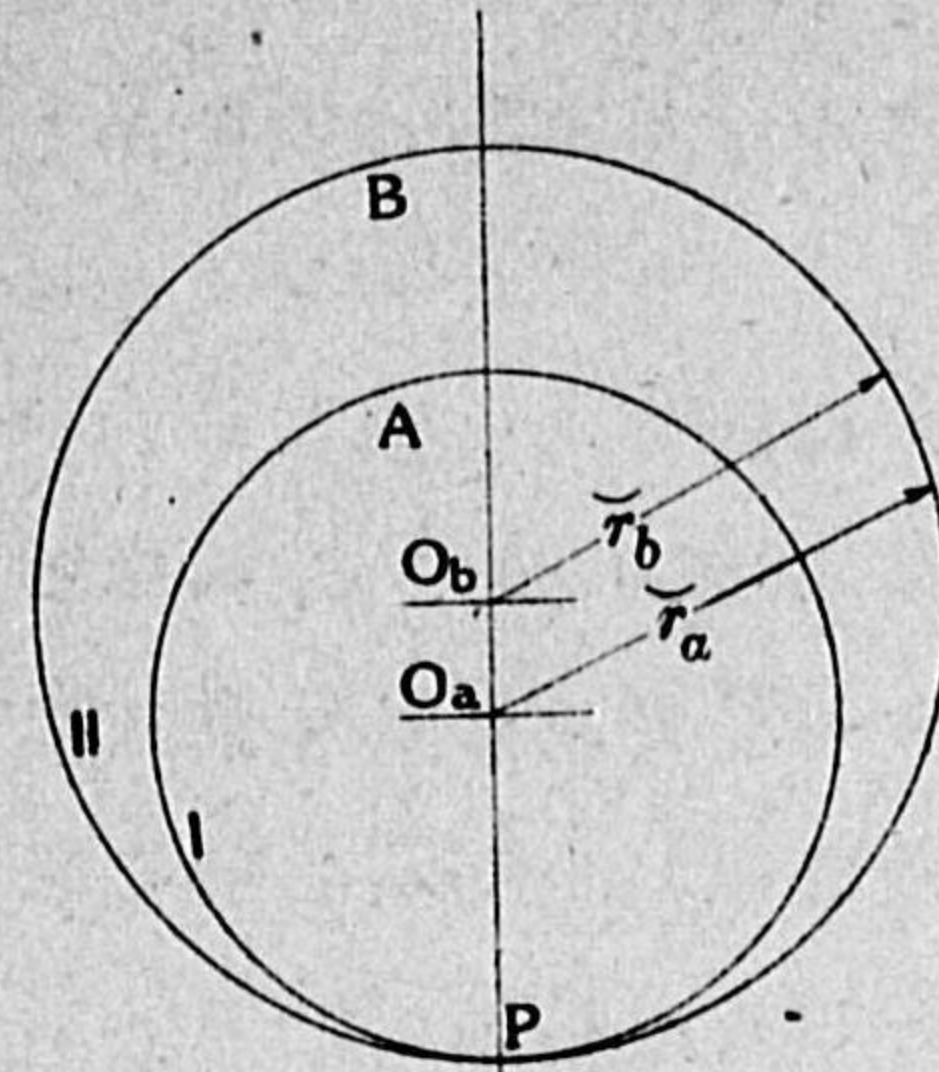
即ちそれは第94圖と全然同じ状態となるから、両者は嚙合の条件を満足すると共に、角速度比は

$$\frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{O_bP}{O_aP} = \frac{r_b}{r_a} \quad (22)$$

といふことになり、單に基礎圓半径の大きさだけで定まり、兩中心點間の距離  $L$  が變じても角速度比は變らないことを示してゐる。

サイクロイド歯車では兩車の中心を定められた一定の距離に正確に置くことが必要で、若しさうでないと定められた角速度を一定に傳へることができないのであるが、インボリュート歯車では上述の通り中心距離の如何に拘らず、定められた一定の角速度を不斷に傳へ得るのであつて、これがインボリュート歯車のサイクロイド歯車に優る理由の重要な一つである。無論實際には中心距離  $L$  の變化を無制限に許すのではなく、 $L$  が増せば嚙合齒數が減少すると共に齒の背隙が増し、反對に  $L$  を減少しようとするすると齒間に齒が這入れなくなる等の故障が起るから、實際問題としてはインボリュート歯車に於て  $L$  の微小な變差に限り運轉上無害であると解すべきである。但しこの際  $L$  の變化が壓力角の大きさに影響することは式(21)が示してゐる。

**インボリュート内歯車** — 二つの齒車 A 及び B がピッチ點 P に於て其のピッチ圓が相接して居り、兩者の内 A は外齒車、B は内齒車であり、中心點はそれぞれ  $O_a, O_b$ 、ピッチ圓半径はそれぞれ  $r_a, r_b$  (第 101 圖) であるとする。この A 車の齒面が半径  $g_a$  なる基



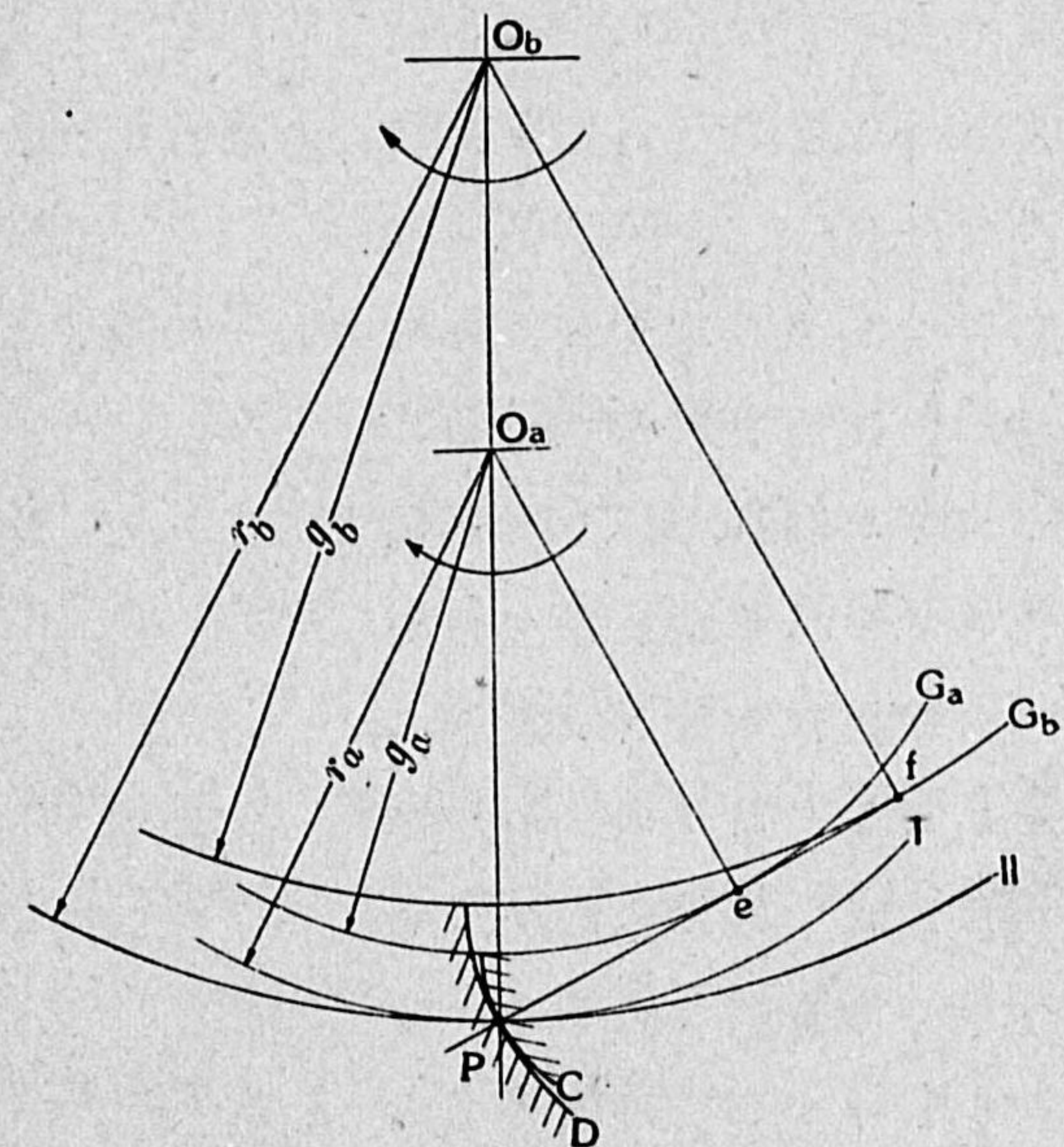
第 101 圖

礎圓  $G_a$  (第 102 圖) のインボリュート C であるとき、必要な条件を満足して之と嚙合すべき B 車の齒面を求めよう。

第 102 圖の如く A 車の齒面 C がピッチ點 P を通る瞬間を考へ、P 點を過ぎり且基礎圓  $G_a$  に切する直線 Pef を引き、 $O_b$  を中心點として直線 Pef に切する圓  $G_b$  を描き、圓  $G_b$  を基礎圓とし P 點を通過するイン

ボリュート D を作ると、この D が即ち B 車の齒として A 車の C と嚙合ふものである。

第 102 圖に於ては齒面 C と D とが P 點で共通垂直線を有し、全く嚙合の条件に叶つてゐるから、以上を證明するためには、回轉の任意の他の瞬間に於

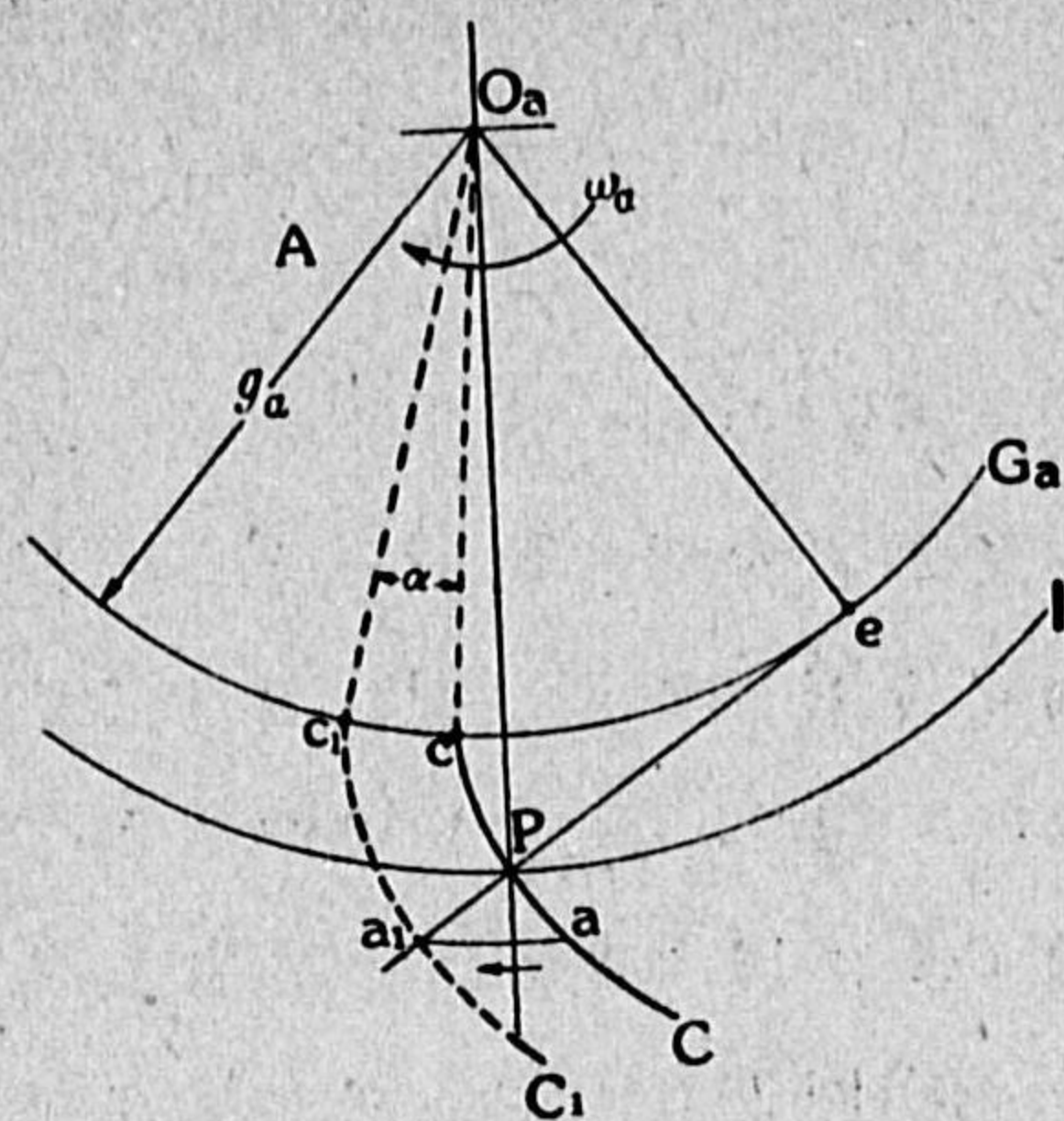


第 102 圖

ても同じく嚙合の条件に叶つてゐるかどうかを調べればよい。その證明は前述外接嚙合の場合と同様にして出来るが、こゝでは



練習のため証明のやり方を幾分變へて見よう。



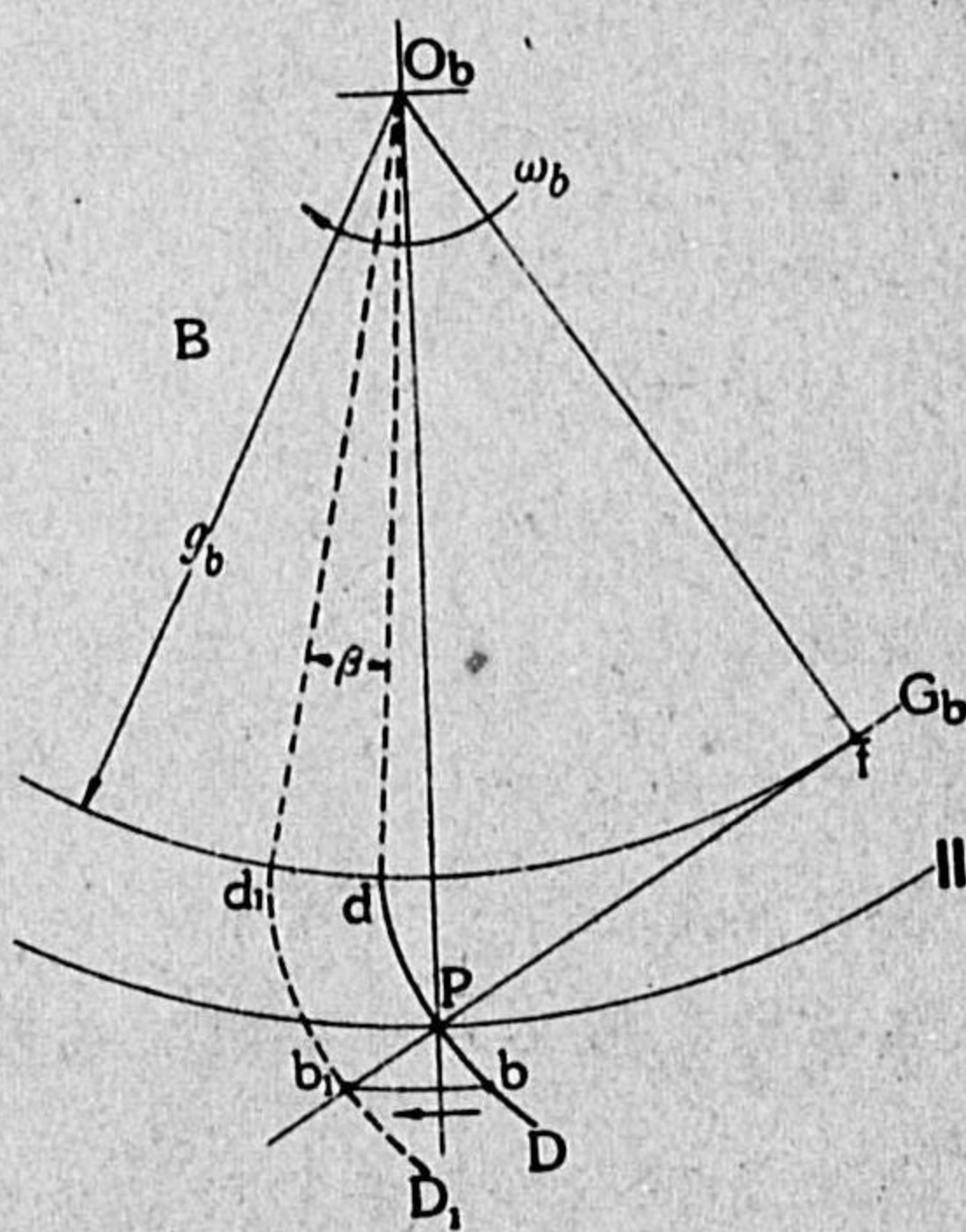
第 103 圖

A 車が第102圖の状態から矢の方向へ任意の角度  $\alpha$  だけ廻つた瞬間を考へ、齒面 C が従つて第103圖の如く  $C_1$  へ移つたとする。P 點に於て齒面 C への垂直線が齒面  $C_1$  を切る點を  $a_1$  とし、齒面 C 上の一點 a が角度  $\alpha$  の回轉に依つて  $a_1$  點へ移つたものとする。インボリュート C 及び  $C_1$  の基點を夫々

$c, c_1$  とすると、 $\angle cO c_1 = \alpha$  だから前章の式(17)に従ひ

$$\overline{Pa_1} = \overline{cc_1} = g_a \alpha. \quad (A)$$

同様にして B 車が矢の方向へ或る角度  $\beta$  だけ第102圖の状態から廻つた瞬間を考へ、齒面 D が従つて第104圖の如く  $D_1$  へ移つたとする。P 點に於て齒面 D への垂直線が齒面  $D_1$  を切る點を  $b_1$  とし、齒面 D 上の一點 b が角度  $\beta$  の回轉に依つて  $b_1$  點へ移つたものとする。インボリュート D 及び  $D_1$  の基點を夫々  $d, d_1$  とすると  $\angle dO d_1 = \beta$  だから、基礎圓  $G_b$  の半徑を  $g_b$  とすると



第 104 圖

$$\overline{Pb_1} = \overline{dd_1} = g_b \beta. \quad (B)$$

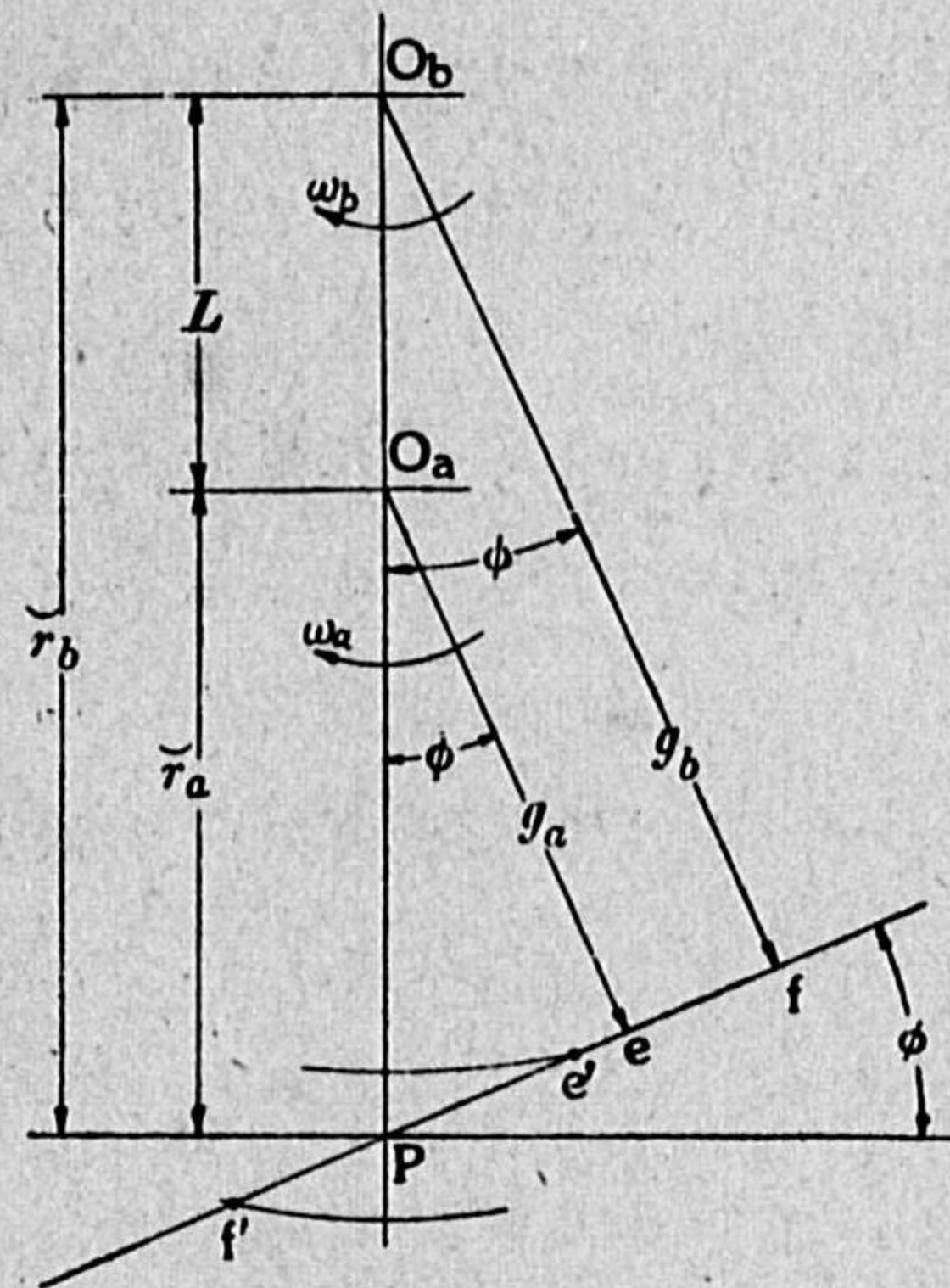
従つて(A) (B)兩式から

$$\frac{\overline{Pa_1}}{\overline{Pb_1}} = \frac{g_a \alpha}{g_b \beta} \quad (C)$$

である。

然るに兩車の角速度を夫々  $\omega_a, \omega_b$  とするとすると

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{\tilde{r}_b}{\tilde{r}_a} \quad (D)$$



第 105 圖

であると共に、第105圖で明かである如く  $\triangle O_a P e$  と  $\triangle O_b P f$  とが相似形であることからして

$$\frac{\tilde{r}_b}{\tilde{r}_a} = \frac{g_b}{g_a}$$

であるから、(D)に従ひ

$$g_a \alpha = g_b \beta$$

となり、従つて(C)式から

$$\overline{Pa_1} = \overline{Pb_1}$$

を得る。即ち  $a_1$  點と  $b_1$  點とは、P 點を通つて兩基礎圓へ共通に引かれた切線 Pef の上に位置する同一の點であり、齒面  $C_1$  と  $D_1$  とは此の點に於て相接して共通の垂直線 Pef を有し、又このことは他の値の  $\alpha$  に関しても同様に言へるから、従つて C に嚙合ふ B の齒面が D であることの證明が以上で成立つたのである。

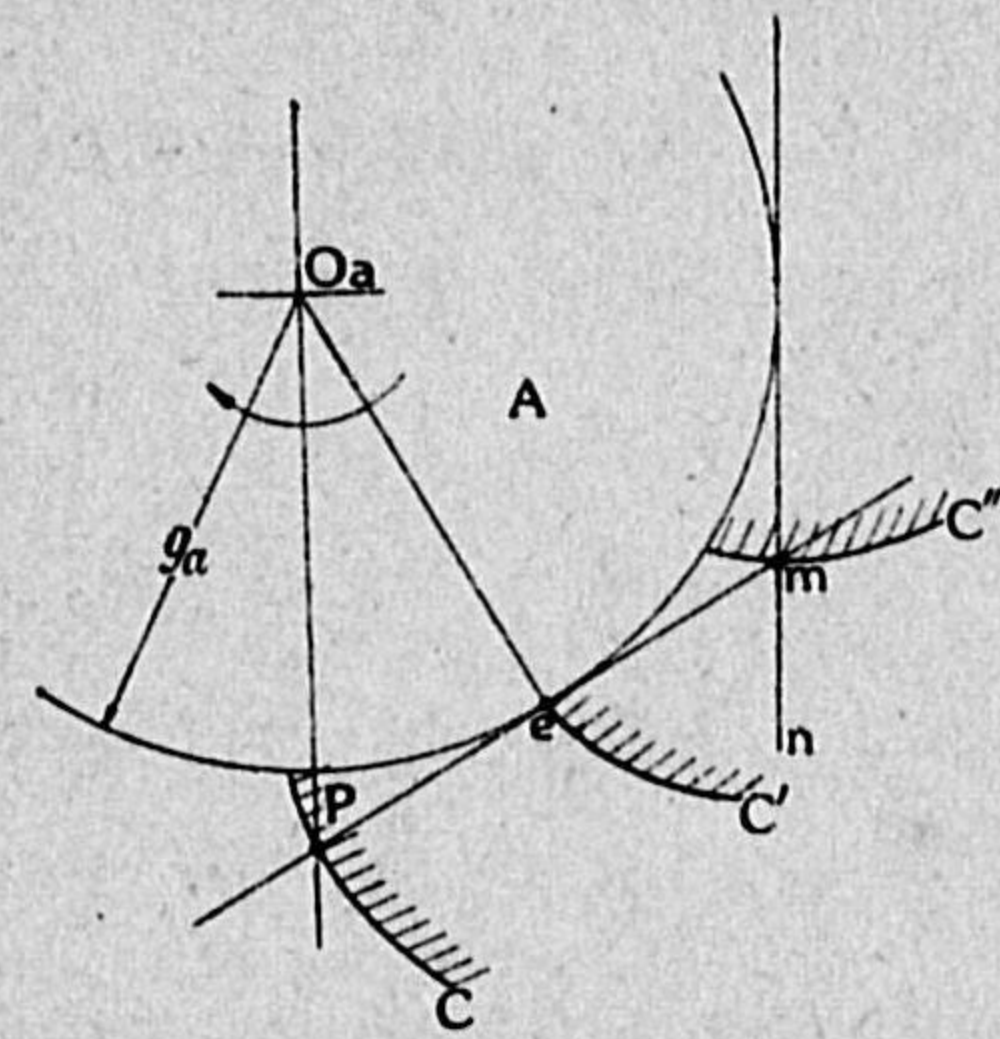
内接嚙合の壓力角と接觸位置軌跡——第105圖に於て壓力角  $\phi$  の値は

$$\cos \phi = \frac{g_a}{\tilde{r}_a} = \frac{g_b}{\tilde{r}_b} = \frac{g_b - g_a}{\tilde{r}_b - \tilde{r}_a} = \frac{g_b - g_a}{L} \quad (23)$$



で與へられ、さきに外接嚙合に於て得た式(21)と相違することを注意すべきである。但し角速度比は前の式(22)と全然同一である。

接觸位置軌跡は直線 Pef (第 105 圖) であるが、實際の接觸は P 點から見て e 點の外方には生じない。即ち接觸の始點は e 點若くは其の内方に於て、一般には B 車の齒先圓が Pef 線を切る點 e' (第 105 圖) であり、終點も同様にして一般には A 車の齒先圓が Pef 線を切る點 f' である。

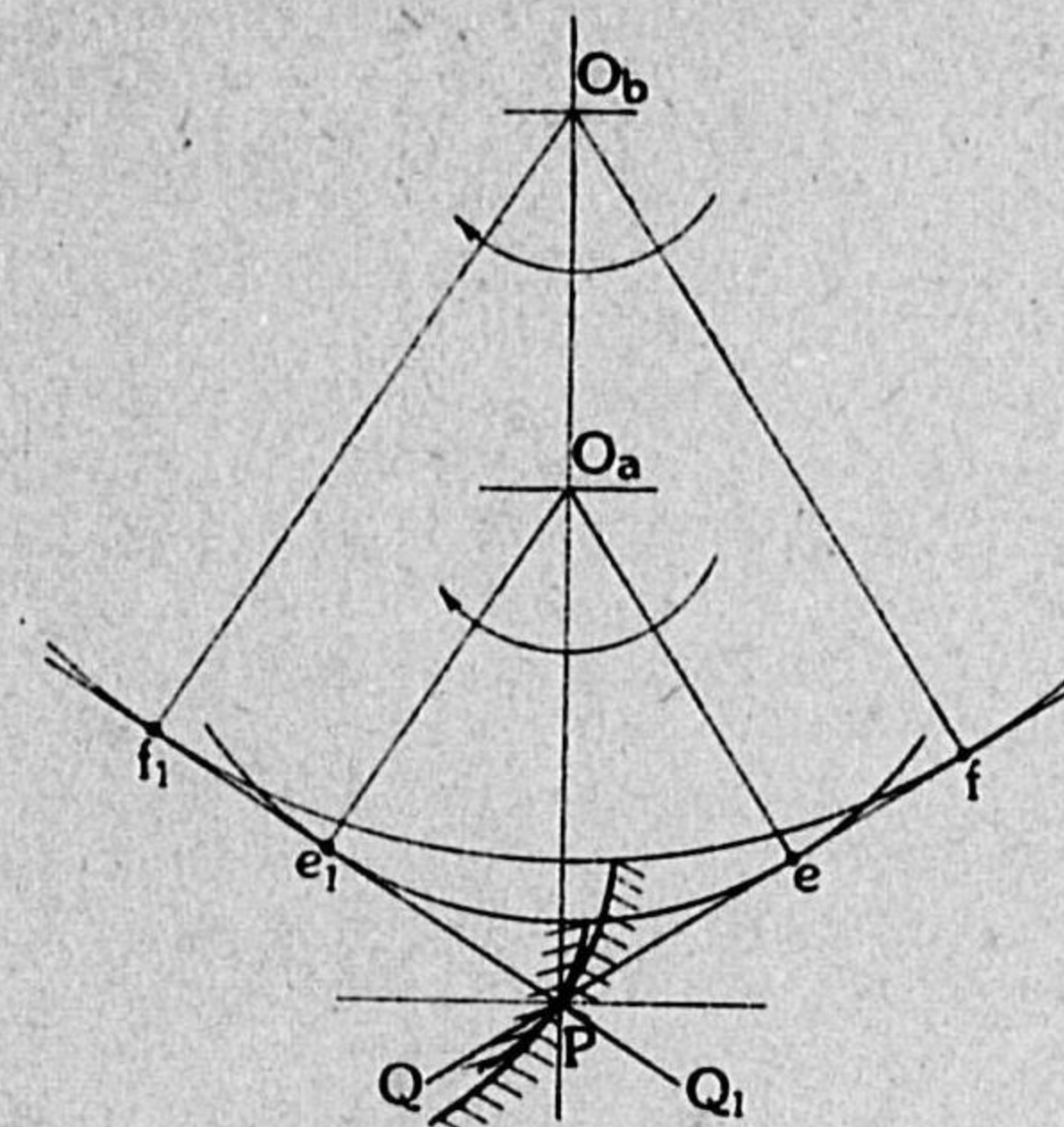


第 106 圖

e 點よりも外方に於て嚙合が許されないことは、之を次ぎのやうにして説明することが出来る。例へば第 106 圖の如く e 點外に在る點 m に於て嚙合が若し生ずるものとしても、m 點に於ける齒面 C' への垂直線 mn は P 點を通ることが決し

てない。従つてその嚙合は所要の角速度比を傳へ得ない筈のものであると言ひ得る。或は又之を次ぎのやうに説明することも出来る。第 106 圖の如く齒面 C, C' が夫々 e 點 P 點に於て嚙合ふ前に、齒面 C'' が m 點に於て若し先づ嚙合ふものとする、之は對手の B 車の齒が先づ m 點に接した後、次いでインボリュート起點 e 點と接し、更に引返して起點から離れた點と再び接することを意味するから、若しさうとすると、引返し點であるところのインボリュート起點 e に於ては、A の齒に對する B の齒の相對的滑り速度が零であるといふことになる。然るに既に第 5 章に於て述べた通り、相對的滑り速度は齒と齒との接觸點からピッチ點に至るまでの長さに比例するのであるから、従つて e 點に於ける相對的

滑り速度が零であることは有り得ない。即ち假定の如く m 點に於て齒が接することは許されないのである。然し若し實際寸度の關係からして、斯くの如き制限外不正規の接觸が起るものとする、その場合には角速度の傳達が不整となり、従つて斯くの如き



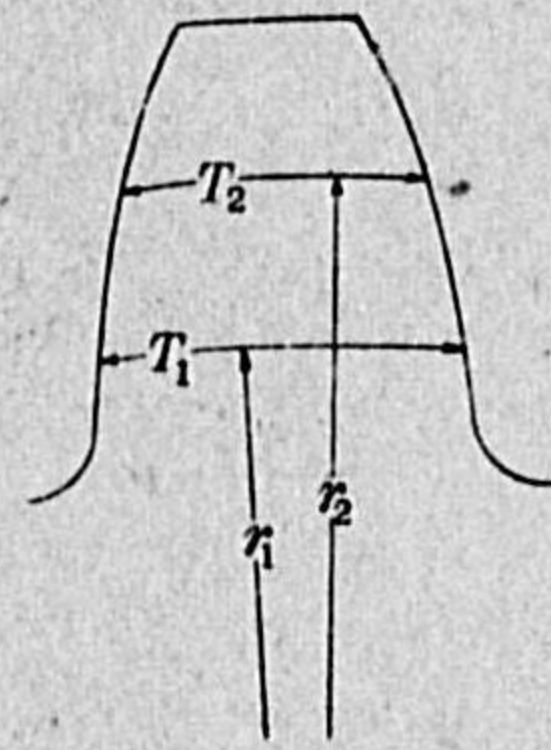
第 107 圖

齒車は精密な等齊角速度比傳達の用に適しない。尚ほ以上の説明は、外接の嚙合の場合に關しても同様に適用せられ得るものであることを注意しておく。  
内接嚙合について以上述べたところは、外齒車 A が起動車として矢の方向へ廻つた場合のことであるが、若し内齒車 B が起動車であつて、第 107 圖の矢の方向に回轉が行はれるのであると、接觸位置軌跡は直線 QPe の代りに、直線 Q<sub>1</sub>Pe<sub>1</sub> となり、接觸の始點及び終點は一般に A 及び B の齒先圓が夫々此の直線を切るところがそれに相當する。



## 第12章 インボリュート歯形の計算

計算其一 — 或る圓周での齒厚が既知のとき、他の圓周での齒厚を求めること — インボリュート齒車の諸性質を述べるに先だつて、齒形に関する二三の計算を先づ掲げることとする。これらは主として第10章の式(18)(19)(20)の敷衍に外ならないものである。先づ最初の問題として基礎圓半径が既知である一つのインボリュート齒車があると、第108圖に示す如く、半径  $r_1$  なる圓に沿つて測つた其の齒厚  $T_1$  が、例へば實測の結果知れてゐるときに、他の任意の半径  $r_2$  に沿つての齒厚  $T_2$  がいくばくであるかを求める。



第108圖

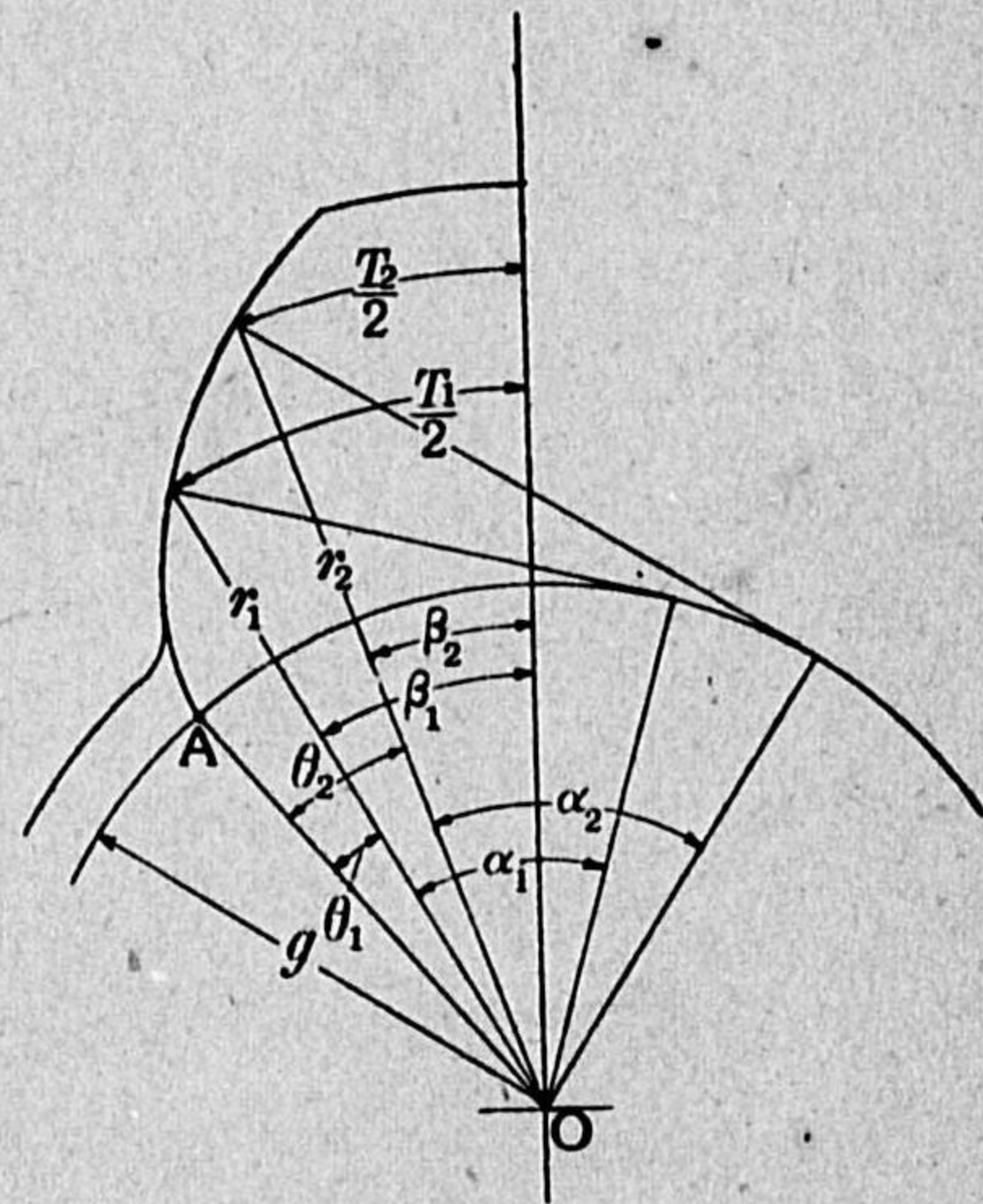
この齒を縦に中央から兩斷した一半を第109圖とすると、圖示の角度  $\beta_1, \beta_2$  をラジアンで表はしたものは

$$\frac{T_1}{2r_1} = \beta_1, \quad \frac{T_2}{2r_2} = \beta_2$$

であるから、前式から後式を引くと

$$\frac{T_1}{2r_1} - \frac{T_2}{2r_2} = \beta_1 - \beta_2 = \theta_2 - \theta_1,$$

式(20)から  $= \text{inv } \alpha_2 - \text{inv } \alpha_1,$



第109圖

\* 式(18)  $r = g/\cos \alpha$ , 式(19)  $\theta = \tan \alpha - \alpha$ , 式(20)  $\theta = \text{inv } \alpha$ .

従つて求めるところの  $T_2$  は

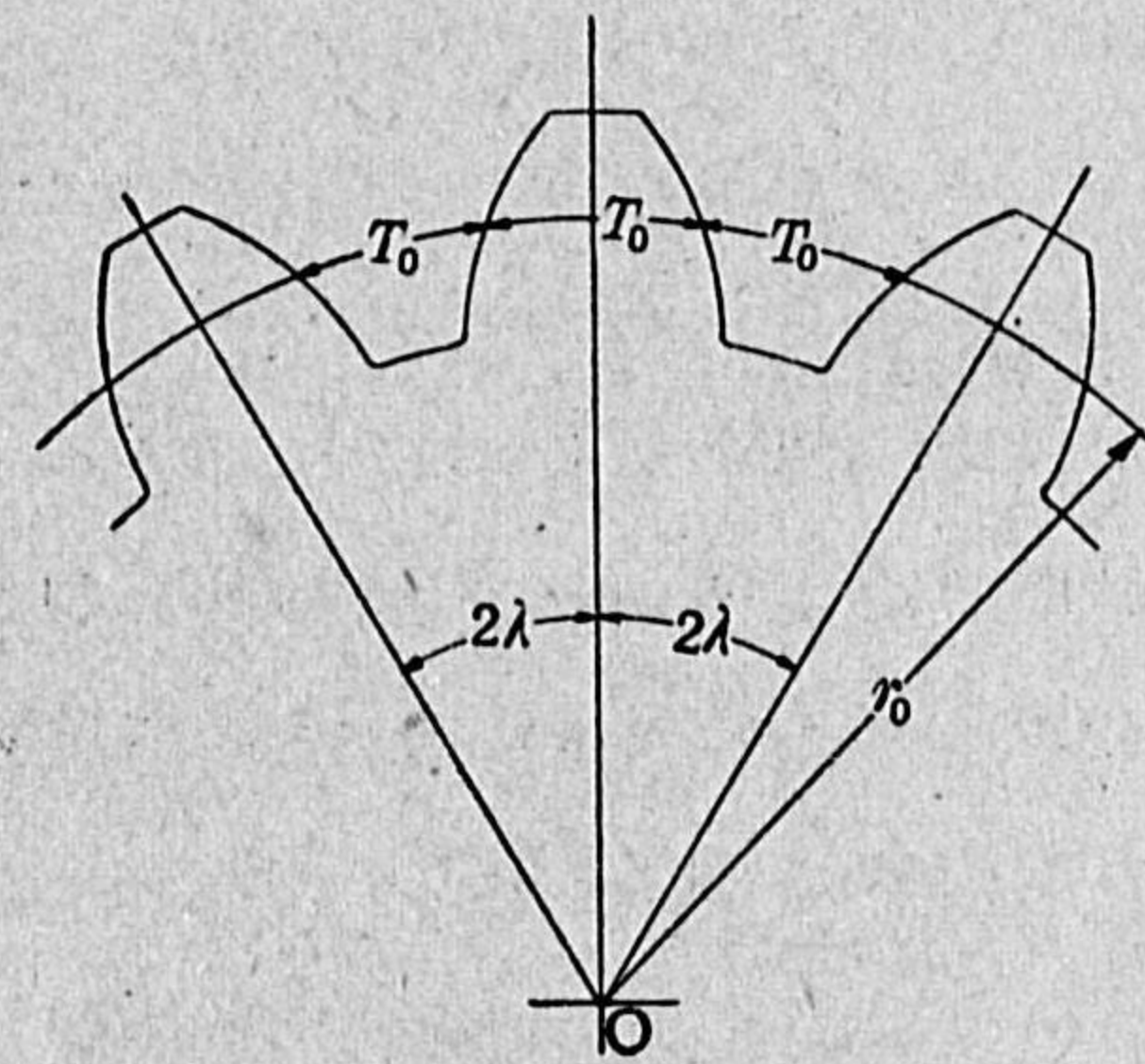
$$T_2 = 2r_2 \left( \frac{T_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha_1 - \text{inv } \alpha_2 \right) \quad (24)$$

となる。こゝに角  $\alpha_1$  は此のインボリュートの半径  $r_1$  なる點に於けるインボリュート角(第10章),  $\alpha_2$  は同じく半径  $r_2$  なる點に於けるインボリュート角であつて、それらの値は  $g$  を既知の基礎圓半径としたとき、式(18)に従ひ

$$\cos \alpha_1 = g/r_1, \quad \cos \alpha_2 = g/r_2$$

で夫々與へられるものである。式(24)を用ひて  $T_2$  を計算する順序は、先づ既知の  $g, r_1, r_2$  を以て上式から  $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2$  の値を求め、インボリュート函數表(第10章)を検して此等の  $\alpha_1, \alpha_2$  に應ずる  $\text{inv } \alpha_1, \text{inv } \alpha_2$  の値を見出し、次いで式(24)を以て  $T_2$  を計算するのである。

計算其二 — 齒厚と齒隙とが丁度等しくなるやうな半径を求めること — 齒厚は特別な場合でない限り、基礎圓から外方ほど其の値が小になり、又之に伴つて齒隙は外方ほど増すのであるから、半径  $r_0$  なる或る一つの圓に沿つて測ると、そこでは丁度齒厚と齒隙とが等しくなるといふことが、普通の齒車ではあり得るわけである。即ち  $g, r_1, T_1$  が前例の如く既知であるときに、この  $r_0$  の値を求める。



第110圖

このときの齒厚を  $T_0$  (第110圖) とすると、齒隙も同じく  $T_0$  である。相隣つてゐる二つの齒の縦の中央線の間角を  $2\lambda$  とする。即ち



此の $2\lambda$ は一つのピッチが中心に向つて開く角、一言にして言ふとピッチ角である。この歯車の歯数が全周に於て $N$ 箇であるとすると、角をラジアン単位で表はしたとき

$$2\lambda = 2\pi/N, \text{ 即ち } \lambda = \pi/N \quad (\text{A})$$

である。今の問題の場合に於て歯厚 $T_0$ が中心に向つて開く角は明かにピッチ角の半分であるから

$$\lambda = T_0/r_0$$

となり、式(A)から

$$T_0/r_0 = \pi/N \quad (\text{B})$$

を得る。又一方に於て半径 $r_1, r_0$ に於けるインボリュート角を夫々 $\alpha_1, \alpha_0$ とすると、式(24)に依つて

$$\frac{T_0}{2r_0} = \frac{T_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha_1 - \text{inv } \alpha_0 \quad (\text{C})$$

であるから、この中の $T_0/(2r_0)$ へ式(B)の値を代入すると

$$\text{inv } \alpha_0 = \frac{T_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha_1 - \frac{\pi}{2N} \quad (\text{D})$$

となる。この中の $\alpha_1$ は式(18)で

$$\cos \alpha_1 = g/r_1 \quad (\text{E})$$

として與へられる既知のものである。以上に依つて $r_0$ を求めるには、先づ式(E)から $\alpha_1$ を求め、次にインボリュート函数表を用ひて $\text{inv } \alpha_1$ の値を検出し、従つて式(D)に依つて $\text{inv } \alpha_0$ を得、再び其の函数表に依つて $\alpha_0$ を見出すと、次ぎの式

$$r_0 = g/\cos \alpha_0$$

からしてその $r_0$ が得られる。 $T_0$ の値は式

$$T_0 = \frac{\pi r_0}{N} = \frac{\pi}{N} \frac{g}{\cos \alpha_0}$$

を用ひて計算する。

**計算其三** —— 歯厚を二箇所で測つて基礎圓半径を求めること

—— 基礎圓半径 $g$ が未知の歯車に於て、第108圖の如く $r_1$ に於ける歯厚 $T_1$ と、 $r_2$ に於ける歯厚 $T_2$ とを測ることに依つて其の $g$ の値を求めむとする。このとき

$$\frac{T_1}{2r_1} - \frac{T_2}{2r_2} = z$$

と書くと、 $z$ の値は既知である。そこで前の式(24)から

$$\text{inv } \alpha_2 = \text{inv } \alpha_1 + z \quad (\text{F})$$

を得、一方に於て式(18)から $g = r_1 \cos \alpha_1 = r_2 \cos \alpha_2$ だから

$$\cos \alpha_2 = \frac{r_1}{r_2} \cos \alpha_1 \quad (\text{G})$$

を得る。この式(G)及び式(F)を連立方程式として、それから $\alpha_2$ の値を求めると、 $g$ の値は

$$g = r_2 \cos \alpha_2$$

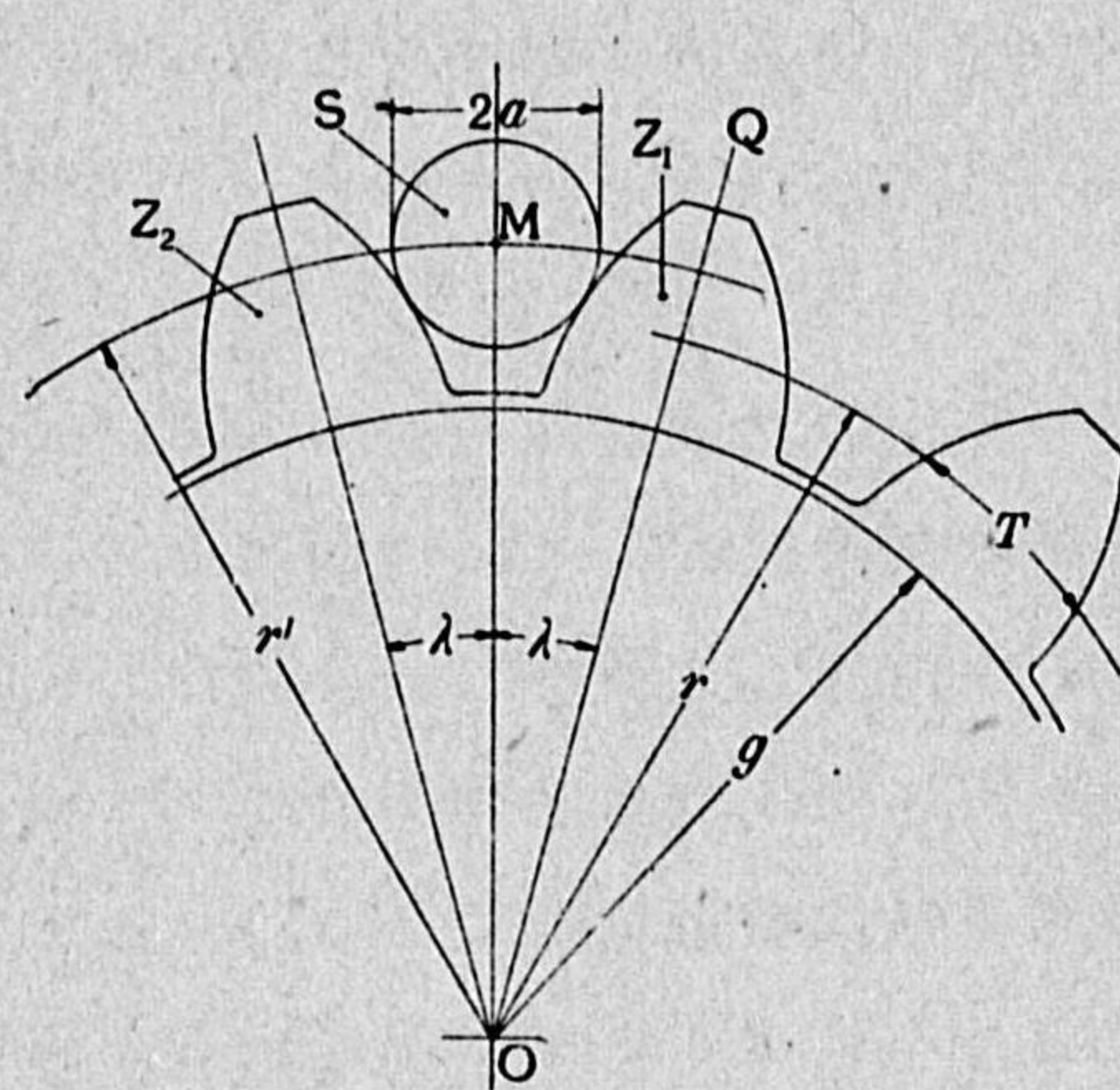
に依つて確定する。但し此の連立方程式から $\alpha_2$ を求めるには、圖解法か又は數値解法を適用する必要がある。圖解法だと、方眼紙の上に式(F)を代表する $\alpha_1$ 對 $\alpha_2$ の曲線と、式(G)を代表する同じく $\alpha_1$ 對 $\alpha_2$ の曲線とを描き、兩曲線が交叉する點に於ける $\alpha_2$ の値を讀取するもので、その $\alpha_2$ が即ち連立方程式の解であるところの $\alpha_2$ である。數値解法だと、三角函数表とインボリュート函数表とを備へ、例へば $\alpha_1$ に或る任意の値を與へて、第一には $(\text{inv } \alpha_1 + z)$ の値を計算して $\text{inv}$ の値が之に等しいところの角 $\alpha_2$ を求め、第二には $\frac{r_1}{r_2} \cos \alpha_1$ を計算して $\cos$ の値がそれに等しいところの角 $\alpha_2$ を求める。かくて第一で得た $\alpha_2$ と第二で得た $\alpha_2$ とが等しくなるまで最初の $\alpha_1$ の値をいろいろに變じて幾回も計算を試みるもので、第一の $\alpha_2$ と第二の $\alpha_2$ との値が丁度等しくなつたときの $\alpha_2$ が即ち求める $\alpha_2$ である。

序にこの場合に考へられることは、更に別の箇所 $r_3$ で測つた齒



厚が  $T_3$  であるとし、 $T_1$  と  $T_3$  とで同じ計算を試みて  $g$  を求めたとすると、歯面が正確なインボリュートで出来て居れば、この  $g$  と前の  $g$  とは同じ値となるべきであり、歯面が正確なインボリュートでなかつたら、この二つの  $g$  の値は一致しないと見ていいことである。

**計算其四** — 歯隙に挟まれた丸棒の位置を計算すること —  
基礎円半径  $g$  と、半径  $r$  に於ける歯厚  $T$  とが知れてゐる一つの歯車に於て、相隣つてゐる歯  $Z_1$  及び  $Z_2$  (第 111 圖) の間へ半径  $a$  なる圓



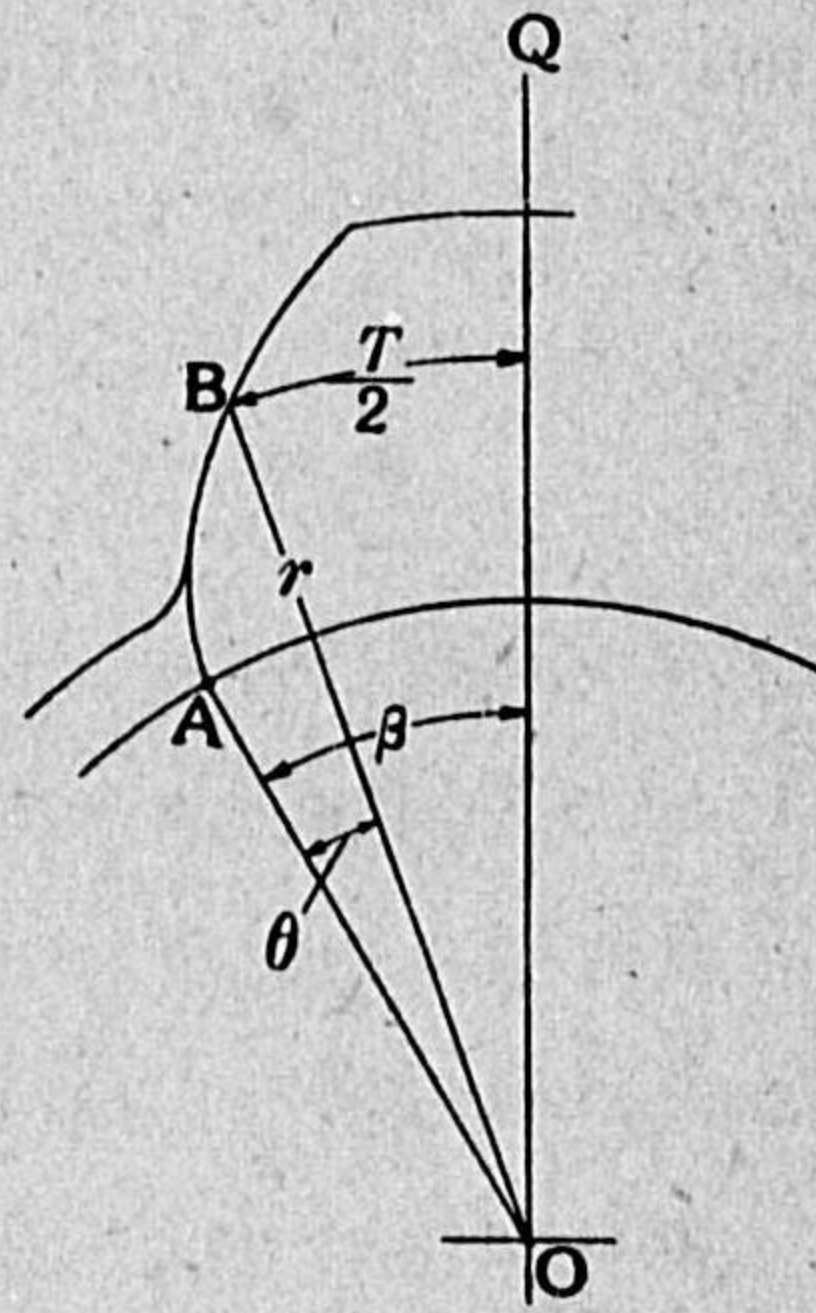
第 111 圖

棒  $S$  を丁度に挟み込んだとき、その圓棒の中心點  $M$  と車の中心點  $O$  との距離  $r'$  を求めようとするのである。

今  $OQ$  線(第 112 圖)で兩斷された齒の一半をとり、そのインボリュートの起點を  $A$ 、半径  $r$  なるインボリュート上の點  $B$  の座標角を  $\theta$ 、直線  $OA$  と直線  $OQ$  との間の角を  $\beta$  とすると、 $\beta$  の値は

$$\beta = \theta + \frac{1}{r} \frac{T}{2}$$

であり、更に式(19)で

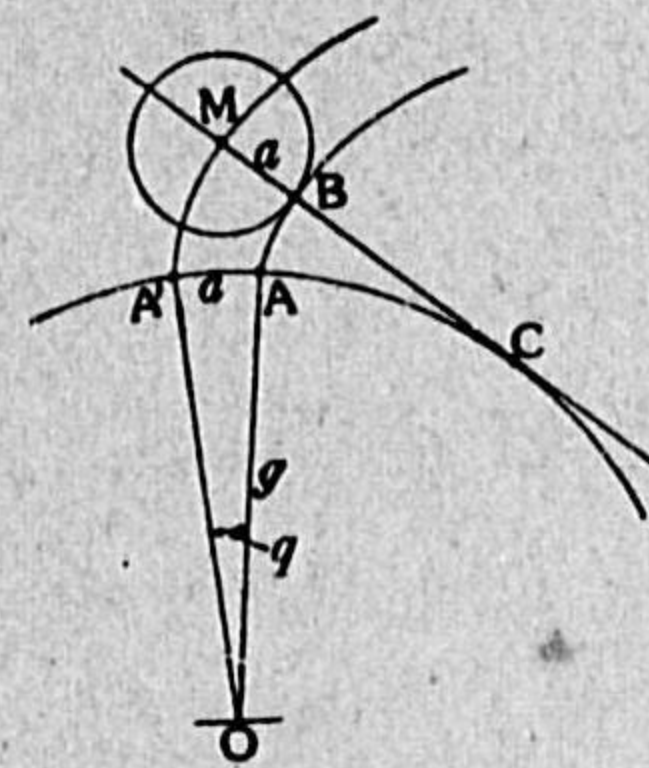


第 112 圖

$$= \text{inv } \alpha + \frac{T}{2r} \quad (\text{H})$$

である。但し角  $\alpha$  は式(18)に依つて  $\cos \alpha = g/r$  として與へられるもので、即ち既知の數である。一方に於て直線  $OQ$  と直線  $OM$  との間の角は前述のピッチ角の半分、即ち  $\lambda$  であるから、

$$\lambda = \pi/N \quad (\text{I})$$



第 113 圖

である。次に同じ基礎圓を基礎圓として丸棒の中心點  $M$  を通るインボリュートを描き、その起點を  $A'$  (第 113 圖) とする。又丸棒と齒とが接觸する點  $B$  に共通垂直線を描いて、それが基礎圓に切するところを  $C$  點とする。

そうすると  $\overline{MC} = \widehat{A'C}$  及び  $\overline{BC} = \widehat{AC}$  だから

$$\overline{MC} - \overline{BC} = \widehat{A'C} - \widehat{AC}$$

となり、従つて  $\widehat{AA'} = a$  である。だから圓弧  $\widehat{AA'}$  が中心點  $O$  に向つて開く角を  $q$  とすると

$$q = a/g \quad (\text{J})$$

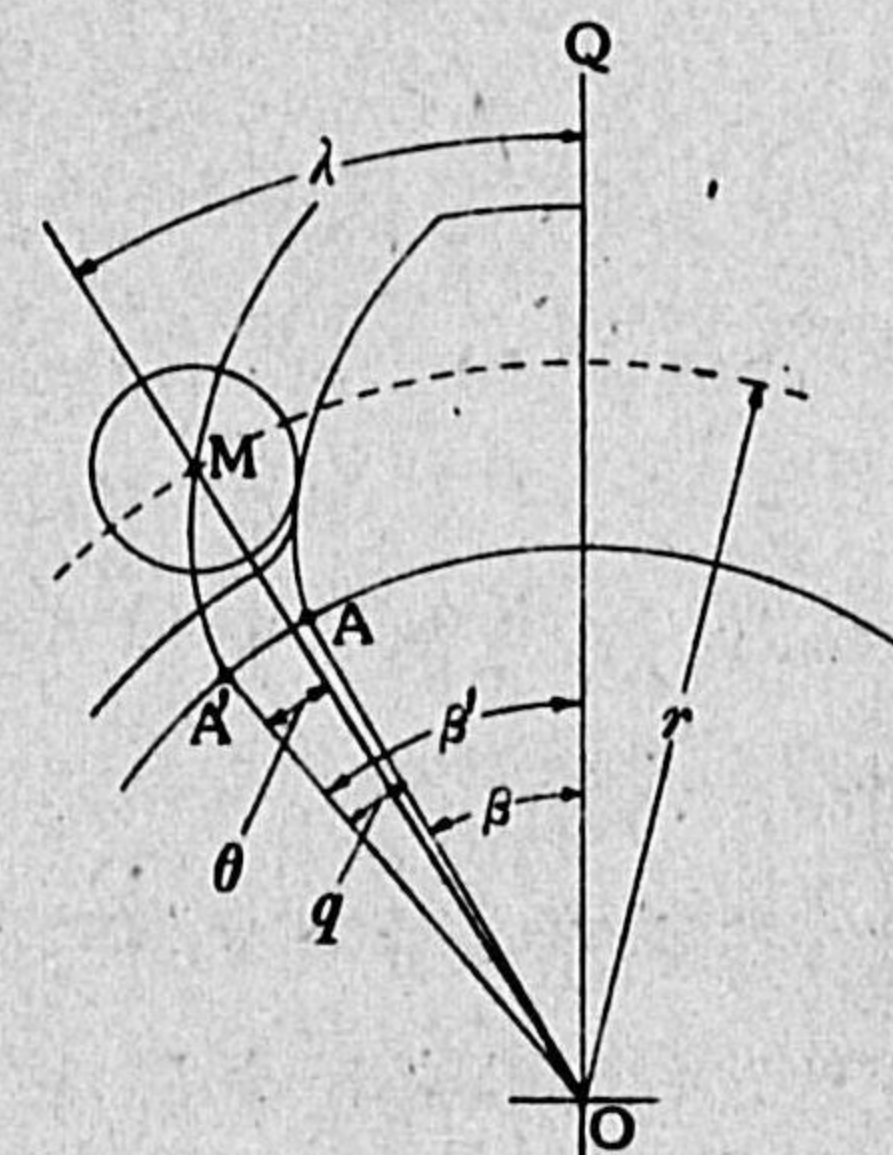
である。更に直線  $OA'$  と直線  $OQ$  との間の角を  $\beta'$  (第 114 圖) とし、直線  $OA'$  と直線  $OM$  との間の角を  $\theta'$  とすると

$$\beta' = \theta' + \lambda = \text{inv } \alpha' + \lambda,$$

但しこの中の  $\alpha'$  は

$$\cos \alpha' = g/r' \quad (\text{K})$$

で計算されるインボリュート角である。



第 114 圖

上記の  $\beta'$  式の右邊にある  $\lambda$  に式(I)の値を代入すると

$$\beta' = \text{inv } \alpha' + \pi/N \quad (\text{L})$$

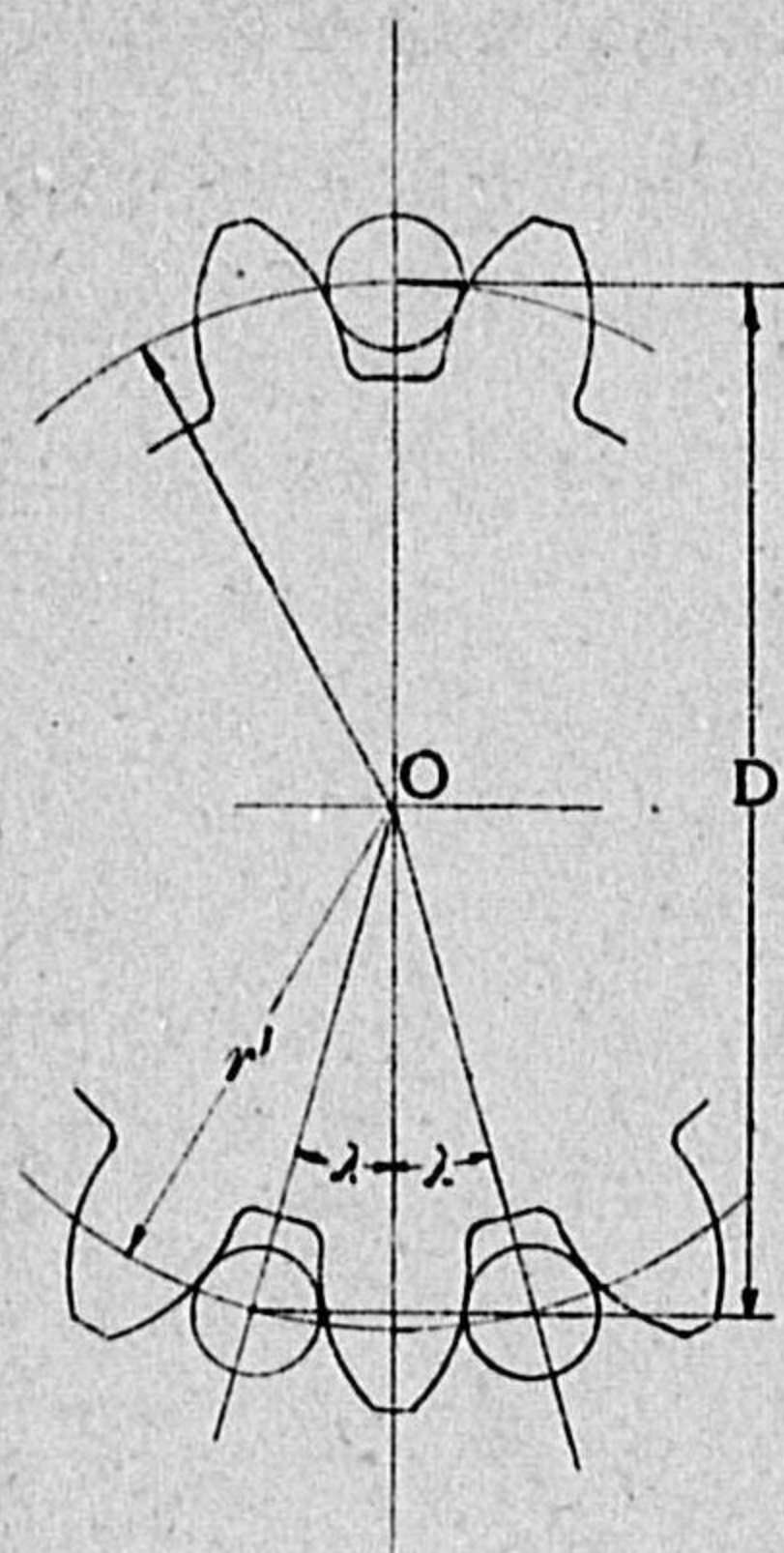
となる。又一方に於ては  $\beta' = \beta + q$  だから、之に式(H)と式(J)とを代



入し、それを式(L)と比較することに依つて

$$\text{inv } \alpha' = \text{inv } \alpha + \frac{T}{2r} + \frac{a}{g} - \frac{\pi}{N} \quad (\text{M})$$

を得る。此の式に於て  $T, r, a, N, g$  は既知であり、 $\alpha$  も  $\cos \alpha = g/r$  から求められるものであるから、結局式(M)から  $\alpha'$  の値を算出し得、従つて其の  $\alpha'$  を用ふることに依つて、求めるところの  $r'$  の値が式(K)から計算される。



第 115 圖

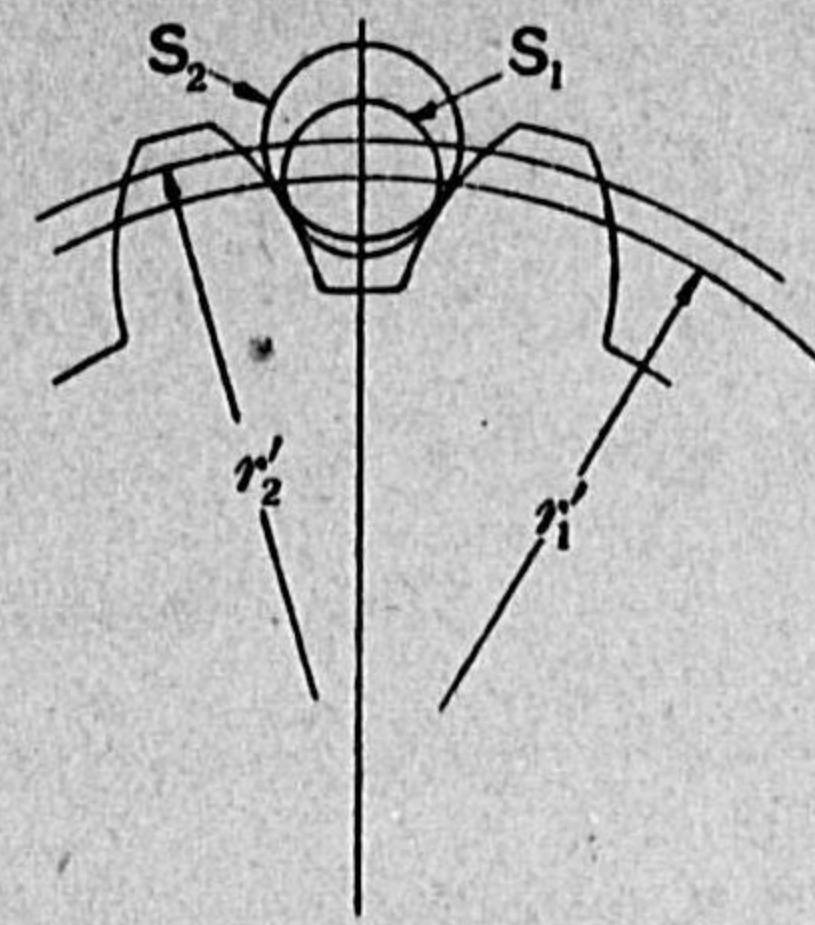
連立方程式として、計算其三に述べたと概ね同様の方法に依つて、基礎円半径  $g$  を計算することができる。

距離  $r'$  を実測するには、歯数  $N$  が偶数の場合だと、球頭マイクロメータを使へばいいし、又  $N$  が奇数の場合だと、第115圖の如く同じ大きさの三本の丸棒を用ひて、圖示の距離  $D$  を測り、それから  $r'$  の値を

$$r' = D/(1 + \cos \lambda)$$

で求めればいい。但し  $\lambda$  は前の式(L)で求めておくものである。

**計算其五** — 二つの異つた丸棒を齒隙に挟むことに依つて基



第 116 圖

礎円半径を求めること — 半径  $a_1$  なる丸棒  $S_1$  (第116圖) を齒隙に挟んだとき、その中心点と車の中心点との距離が  $r'_1$  であり、又半径  $a_2$  の丸棒  $S_2$  を同じ齒隙に挟んだときのものが  $r'_2$  であるとし、この  $r'_1$ 、及び  $r'_2$  を實際に測定して知つたとする。それに依つて此の車の基礎円半径  $g$  を求める。

前計算の式(M)に依つて明かに

$$\text{inv } \alpha'_1 = \text{inv } \alpha + \frac{T}{2r} + \frac{a_1}{g} - \frac{\pi}{N}$$

$$\text{inv } \alpha'_2 = \text{inv } \alpha + \frac{T}{2r} + \frac{a_2}{g} - \frac{\pi}{N}$$

であるから、下から上を差引きすると

$$\text{inv } \alpha'_2 - \text{inv } \alpha'_1 = \frac{a_2 - a_1}{g}$$

となる。又一方に於て

$$g = r'_1 \cos \alpha'_1 = r'_2 \cos \alpha'_2$$

だから、以上兩式を併記すると

$$\begin{cases} \cos \alpha'_2 = \frac{r'_1}{r'_2} \cos \alpha'_1 \\ \text{inv } \alpha'_2 = \text{inv } \alpha'_1 + \frac{a_2 - a_1}{r'_1 \cos \alpha'_1} \end{cases}$$

なる連立方程式となる。計算其三に於て述べたと同様の手段で、此の兩式から  $\alpha'_2$  の値を定め、それを用ひて  $g$  の値が

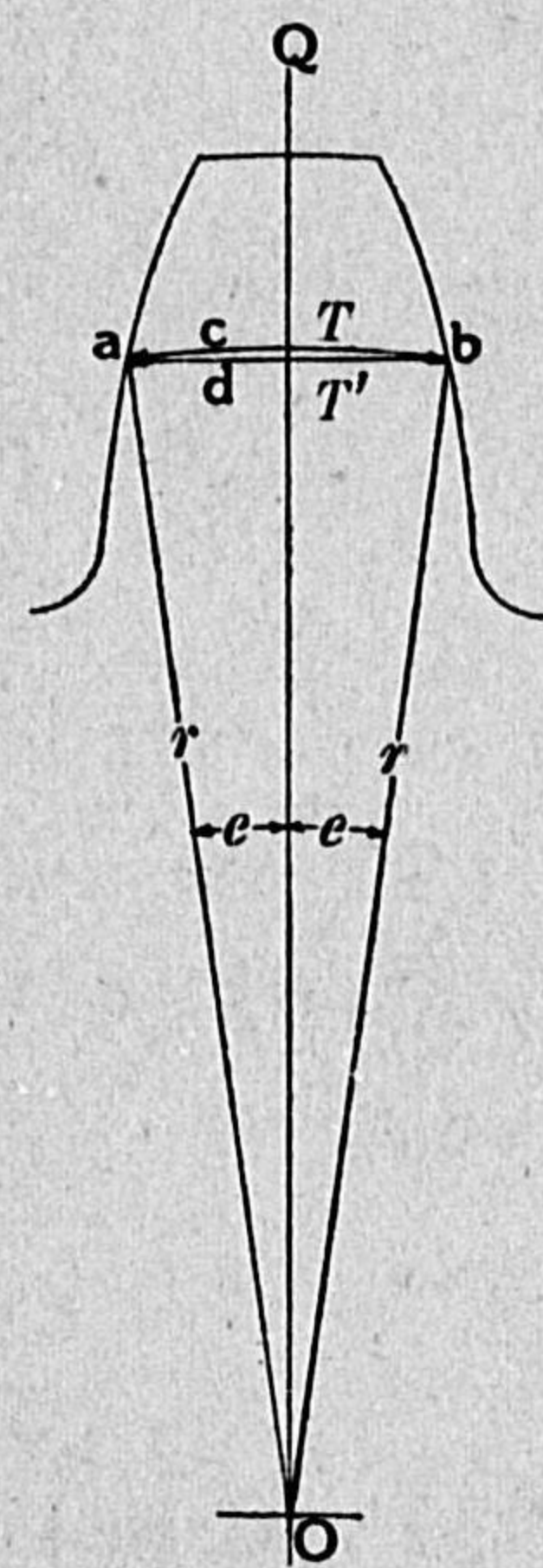
$$g = r'_2 \cos \alpha'_2$$

で算定される。

更に又同様にして半径  $a_3$  なる第三の丸棒を以て其の距離  $r'_3$  を實測したとすると、例へば丸棒  $S_1$  の値  $r'_1$  とそれとを組合せて



更にもう一度  $g$  の値が見出されるだらう。歯面が若し正確なインボリュートで出来て居るならば、この値は前の  $g$  の値と測定誤差の範囲内に於て完全に一致すべき筈であり、若し一致しなかつたならば歯面が正確なインボリュートで出来て居ないことを示してゐる。之と同じことは、計算其四に於て二つの異つた丸棒を使つて夫々の距離を測定した場合にも言へるし、もつと一般的に言ふと、歯厚を測るにせよ、歯隙について測るにせよ、とにかく半径方向に於て異つた位置にある歯面の二箇所を對象とした測定を行へば、其の車の基礎圓半径の大きさを知ることができ、三箇所を對象とした測定を行へば、其の歯面の曲線の正否を判定することができるのである。但し以上は、測定に使はれた歯面インボリュートがすべて同じ基礎圓から成立してゐることを假定したもので、若しそうでなくて、何かの都合で例へば丸棒の右側の歯面と左側の歯面とが別々の基礎圓から成立してゐるとすると、以上述べた如き計算はすべて不成立に歸する。



第 117 圖

**計算其六** — 圓周上の歯厚と實測の歯厚 — 以上の種々の計算に於て、例へば或る半径  $r$  に沿ふ歯厚  $T$  なるものを屢々用ひたが、それは言ふまでもなく  $r = \overline{Oa} = \overline{Ob}$  (第 117 圖) として、歯厚  $ab$  を半径  $r$  の圓弧  $\widehat{acb}$  に沿つて測つた長さ  $T$  を意味してゐる。然しながら歯厚  $ab$  を例へばノギスで實測するとすると、それは必ず直線  $\overline{adb}$  の長さ  $T'$  を測るわけで

ある。だから長さ  $T'$  を測つた上で、それを長さ  $T$  に換算することの必要を生ずる。こゝに直線  $OQ$  が歯を縦斷する中央線であるとし、これと直線  $Oa$  との間の角を  $e$  とすると

$$\sin e = \frac{1}{r} \frac{T'}{2}$$

であり、又一方で  $T = 2er$

だから、上の式から求められた角  $e$  (ラジアン單位) の値を下の式へ入れれば求めるところの  $T$  が得られる。或は  $\sin e$  を  $e$  の展開式に改めると

$$\begin{aligned} \frac{T'}{T} &= \frac{\sin e}{e} \\ &= 1 - \frac{e^2}{2 \cdot 3} + \frac{e^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{e^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \end{aligned}$$

となる。これからして  $(T - T')$  の値を求めると、 $e^4$  の項及びそれに續く各項を無視し得るほど角  $e$  の大きさが小さいときには、單に

$$\frac{T - T'}{T'} = \frac{e^2}{6}$$

として宜しい。又特に歯厚と歯隙とがほぼ等しくなるやうな半径  $r$  に沿つて測る場合であるとするならば、角  $e$  はピッチ角の  $1/4$  に大體等しくなるから

$$e = \lambda/2 = \pi/2N$$

と見て差支へなく、従つて

$$\frac{T - T'}{T'} = \frac{\pi^2}{24N^2}$$

となり、單に齒數  $N$  だけで計算される。



### 第13章 インボリュート歯車のピッチ

**ピッチ圓の不確定であること** — サイクロイド歯車では、例へば外歯車のとき、上齒面はエピサイクロイドで造られ、下齒面は之とは別の曲線であるハイポサイクロイドで作られる等、上齒面と下齒面とが夫々別々の曲線から造られてゐるから、其の境界をなす圓が即ちピッチ圓であり、單に一箇の齒車を取上げて考へたときでも、其の齒車には一つの固有のピッチ圓が元來から存在すると言ふことができる。

これに對し一箇のインボリュート齒車を取つて考へるに、今度はサイクロイド齒車に於けると同じ意味のピッチ圓は存在しなくて、存在するものはたゞ單に基礎圓である。或る二箇のインボリュート齒車を取上げ、之を  $L$  なる中心距離に嚙合はすと、既に式(21)(第11章)で示したやうに

$$\tilde{r}_a = \frac{g_a}{g_a + g_b} L, \quad \tilde{r}_b = \frac{g_b}{g_a + g_b} L \quad (25)$$

なる半徑の圓が現在嚙合の状態に相應するピッチ圓として生じ、 $L$  の大きさを變すれば、即ち嚙合の状態を變すれば、又それに應ずる違つたピッチ圓が生ずるといふわけで、理論的にはインボリュート齒車に於て固有のピッチ圓が存在しない。従つて又固有の圓周ピッチ  $P$ 、直徑ピッチ  $P_d$ 、モジュール  $M$  等は存在せず、只對手を求めて嚙合はしたときのみ、現在嚙合に於けるそれらが生ずるのである。

此の場合に特に注意したいことは、A 齒車と B 齒車とを任意の中心距離  $L$  を以て嚙合せたととき、そのピッチ圓半徑が夫々上式の

$\tilde{r}_a, \tilde{r}_b$  であるといふことは、半徑  $\tilde{r}_a$  を有する任意の圓を A 齒車のピッチ圓とし、同じく半徑  $\tilde{r}_b$  を有する任意の圓を B 齒車のピッチ圓として、兩者を中心距離  $L = \tilde{r}_a + \tilde{r}_b$  を以て嚙合せ得るといふ意味では決してない。それは A 齒車のピッチ圓半徑を  $\tilde{r}_a$  と一旦定め、た以上は、B 齒車の之と嚙合ふべきピッチ圓半徑  $\tilde{r}_b$  は、式(21)に依つて當然

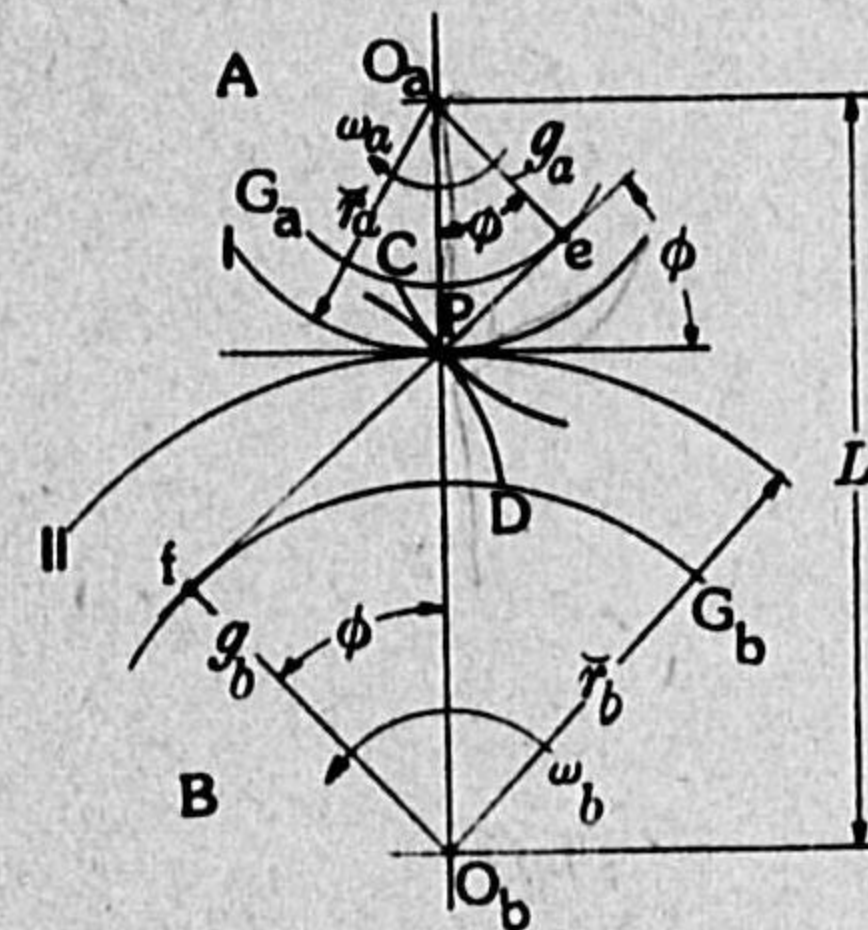
$$\tilde{r}_b = \frac{g_b}{g_a} \tilde{r}_a$$

であつて、他の任意のものではないからである。

尙ほ念のため、これと同じ事柄を、壓力角に關した方面からも述べておかう。A 齒車と B 齒車とが第118圖の如く中心距離  $L$  を以て嚙合つてゐるとき、この現在嚙合に於ける壓力角  $\phi$  の値は、式(21)に従つて

$$\cos \phi = \frac{g_a + g_b}{L}$$

で與へられると共に、その角は現在嚙合のピッチ圓 I が A 齒車の齒面 C を切る點に於けるインボリュート角に等しく、且同時にピッチ圓 II が B 齒車の齒面 D を切る點に於けるインボリュート角にも等しい。故に二つの齒車の嚙合に於て選ばれるべき雙方のピッチ圓は、これらの圓が夫々の齒面を切る點に於けるインボリュート角が雙方相等しくなるやうに限定せらるべきであつて、決して兩者が全然隨意に選ばれるべきではないのである。

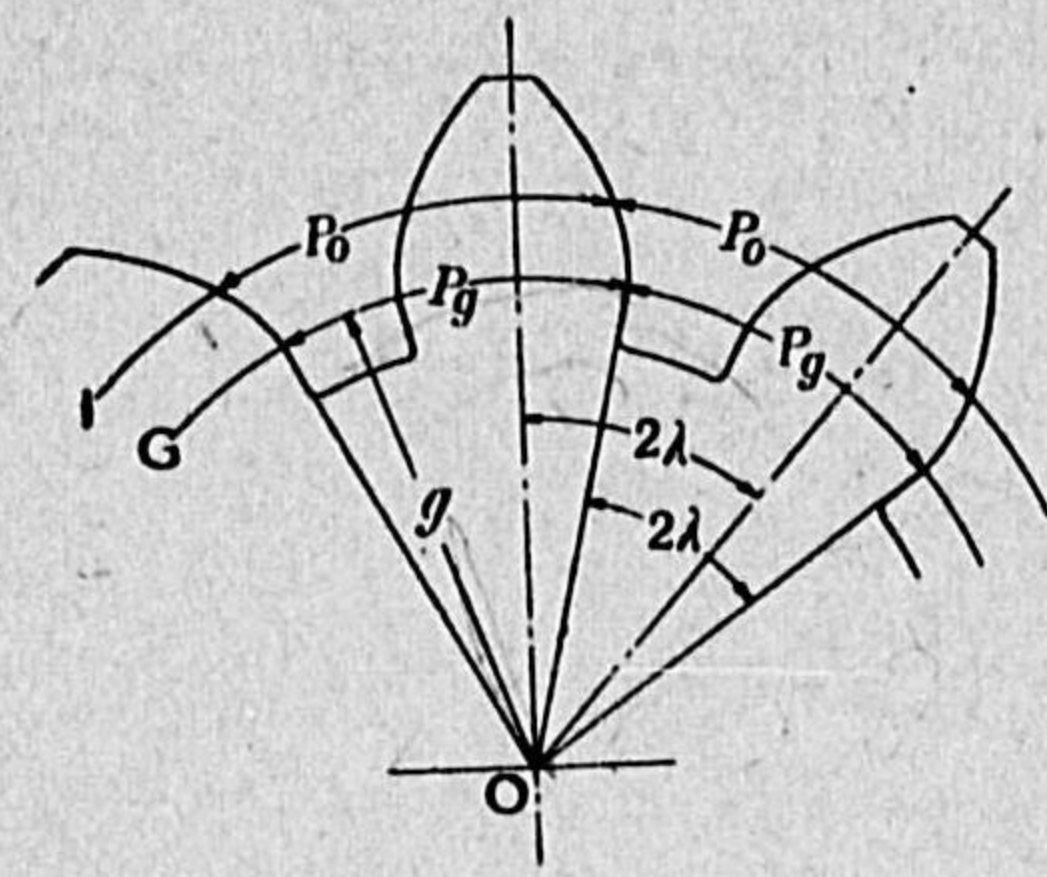


第 118 圖

ピッチ的數値の表はし方 — 單に一箇だけのインボリュート齒車を考へる場合では、上述のやうにそれに於ける固有のピッチ圓がなく、従つてピッチが定まらないのである。然しながらイン



ボリュート歯車と雖も、其の歯の強さを考へ、或は製造の双物を選  
定し、又は嚙合はすべき相手の歯車を探す場合などに於て、その車  
の歯の大小粗密とでもいふべきもの、即ちピッチ的なるものを數  
値を以つて表はし得るのでない甚だ不都合である。今試みに



第 119 圖

- 其の目的に適し得るものを二三  
挙げると、次の如きであらう。
- (1) 齒數  $N$  又はピッチ角  $2\lambda$   
(第 110 圖及第 119 圖)
  - (2) 後に説明するところの基  
礎圓圓周ピッチ  $P_0$  (第 119 圖)
  - (3) 齒面上或る定められたイン  
ボリュート角の點を通る圓に沿つて測つたピッチ
  - (4) 齒厚と齒隙とが相等しいやうな圓に沿つて測つたピッチ  
 $P_0$  (第 119 圖)

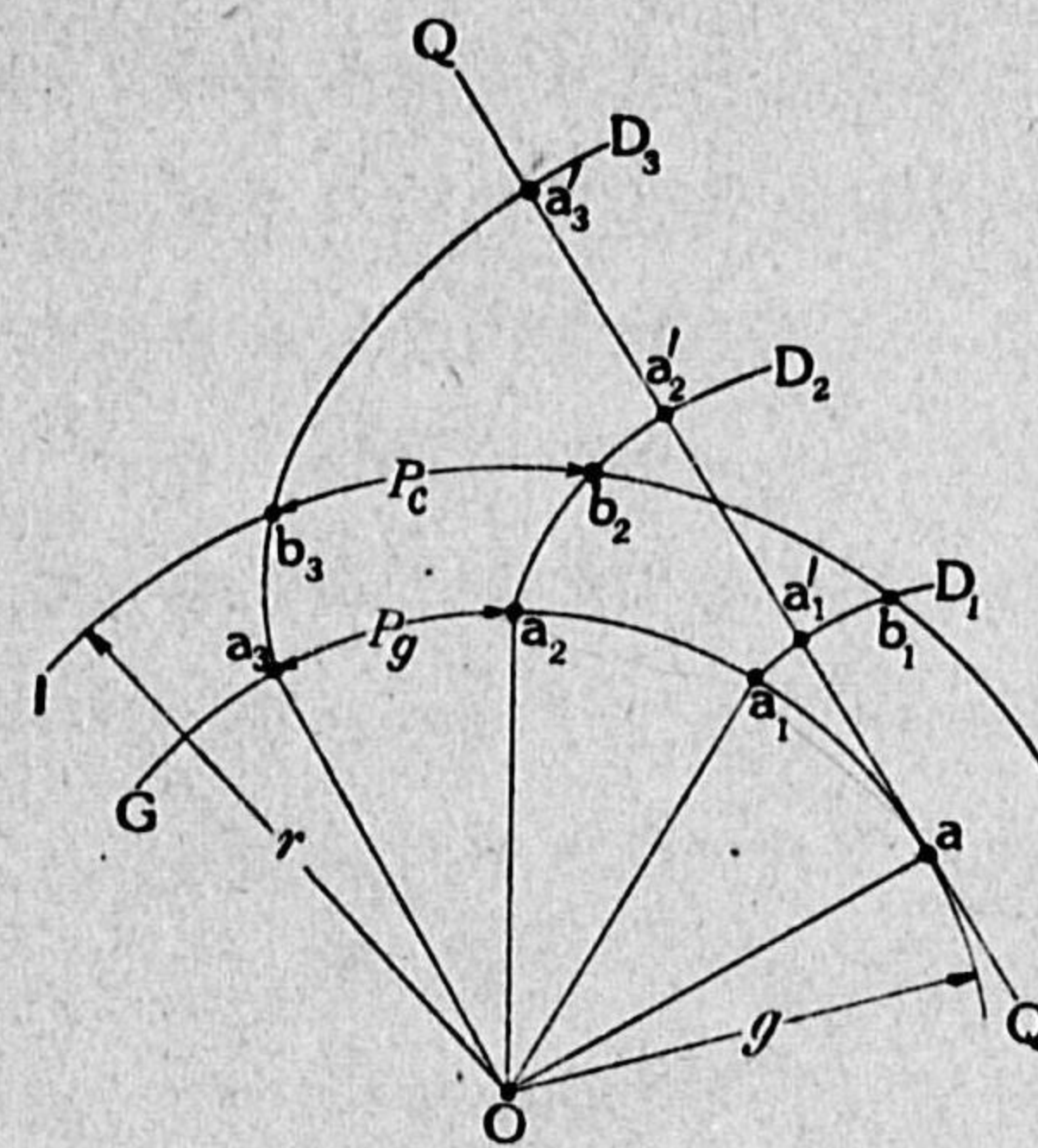
(1) 及び (4) については説明するまでもない。尚ほ (4) については  
第 12 章計算其二を参照せられたい。

(3) はインボリュート角  $\alpha$  が或る定められた  $\varphi$  なる値、例へば  
 $14^\circ 30'$  とか或は  $20^\circ$  とかを呈する點を通る圓をピッチ圓と定め、此  
の圓に沿つてピッチを測るのである。此の  $\varphi$  が或る一群の齒車  
に對して共通に定められるならば、その一群の齒車は、前節に於て  
述べたところに従ひ、他に差支へない限り、此のピッチ圓を以て互  
に相接し嚙合ふことができる。

(2) の基礎圓圓周ピッチ  $P_0$  とは相隣れる齒のインボリュート  
起點間の距離を基礎圓に沿つて測つたもの、即ち第 120 圖では基礎  
圓  $G$  に於ける圓弧  $\widehat{aa_1}$ ,  $\widehat{a_1a_2}$ ,  $\widehat{a_2a_3}$ ,  $\widehat{a_3a_4}$  等の長さを指すのである。

この齒車に於て齒數を  $N$ 、ピッチ角を  $2\lambda$ 、半徑  $r$  なる圓  $I$  に沿つ  
て測つた圓周ピッチを  $P_0$ 、半徑  $r$  なる點に於けるインボリュート  
角を  $\alpha$  とすると

$$2\pi g = NP_0, P_0/g = 2\lambda, 2\pi r = NP_0, g/r = \cos \alpha$$



第 120 圖

等の關係があるから、基礎圓  
圓周ピッチと齒數、ピッチ角、  
圓周ピッチ、インボリュート  
角等との間の關係は

$$P_0 = \frac{2\pi}{N} g = 2\lambda g = \frac{g}{r} P_0 = P_0 \cos \alpha \quad (26)$$

等で與へられる。又第 120 圖  
に示したやうに、一つの起點  
 $a$  を通つて各齒面への共通  
垂直線  $QQ$  を描き、それが各

齒面を切る點を、それぞれ  $a'_1, a'_2, a'_3$  等とすると、式 (17) に従ひ

$$\widehat{aa_1} = \widehat{a_1a_2} = \widehat{a_2a_3} = \dots = P_0$$

であるときは、又従つて

$$\widehat{aa'_1} = \widehat{a'_1a'_2} = \widehat{a'_2a'_3} = \dots = P_0$$

である。即ち此の意味で  $P_0$  を一名垂直線ピッチとも謂ふ。

**連続運轉のために必要な條件** —— 二つの圓形ひら齒車が嚙合  
を許される條件としては、齒面曲線に関する既述の諸條件の外に、  
更に

- (a) 兩車の齒先圓半徑の和が中心距離  $L$  よりも大であること
- (b) 一方の齒先圓半徑と他の齒元圓半徑との和が  $L$  よりも小  
であること



(c) 一方の車の歯隙へ他の車の歯が這入り得る程度に  $L$  が大であること

なる諸条件が當然必要である。条件(c)に関しては後節に於て別に述べるであらう。嚙合を許された此の二つの歯車が連続運転に依つて一つから他へ不斷に一定の角速度比を以て運動を傳へ得るためには、更に次ぎの条件が充されなくてはならない。

(d) 一對の歯の嚙合が終るまでに、他の一對の歯の嚙合が既に始まつてゐること

(e) 兩車の相接せるピッチ圓に於て圓周ピッチが兩車相等しいこと

条件(d)は接觸弧の長さの問題及び最少齒數の問題に係るもので、之に就いては別の機會に於て述べるであらう。

条件(e)を特にインボリュート歯車について言ふならば、現在嚙合のピッチ圓に沿つて測られた圓周ピッチが、兩車相等しいことを要求するもので、現在嚙合のピッチ圓半徑を、A齒車B齒車に於て夫々  $r_a, r_b$  とし、齒數及び基礎圓半徑を夫々  $N_a, N_b, g_a, g_b$  とすると、以上のことは即ち

$$\left. \begin{aligned} r_a/g_a &= r_b/g_b \\ 2\pi r_a/N_a &= 2\pi r_b/N_b = P_c \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

なることを要求するものである。この兩式を比較すると直ちに

$$g_a/N_a = g_b/N_b \quad (B)$$

が得られる。之を更に式(26)

$$P_g = 2\pi g/N$$

へ入れると

### A齒車の基礎圓圓周ピッチ

$$= B齒車の基礎圓圓周ピッチ \quad (C)$$

ともなる。(A), (B), (C)は同じ事柄を、たゞ異つた言葉で表現しただけのもので、そのどれが成立しても即ち条件(e)が満足せられる。

(A)が示す意味について特に述べておきたいことは、A及びBなる二つのインボリュート歯車に於て、半徑  $r_a, r_b$  なる圓に沿つて兩者の圓周ピッチが相等しいといふだけでは未だ條件が不充分で、その二つの圓が兩車嚙合の條件を満足するやうに選ばれてゐなくてはならないといふことである。即ち言ひ換へると、A齒車に於ける或る圓と、B齒車に於ける或る圓とが相接して、連続運転を行ひ得るためには、それらの圓に沿つての圓周ピッチが兩者相等しいばかりでなく、それらの圓が齒面を切る點に於けるインボリュート角も亦兩者相等しいことを必要とするといふ意味である。

$L$ なる中心距離を以て嚙合つてゐる二つのインボリュート歯車が、以上の各條件を満足して連続運転に適合してゐる場合に、若し其の中心距離を  $L'$ に改めたとしたら、条件(e)が果して依然として満足せられるかどうかの問題が残つてゐる。此の問題は例へば(C)に依つて直ちに解決される。即ち兩車は中心距離  $L$  のとき既に必要な條件を満足してゐるのだから、(C)は當然成立してゐる。ところが(C)は中心距離の如何には無關係だから、それが  $L'$  であつても一向に差支へない。もう一層之を具體的にいふならば、兩齒車の基礎圓圓周ピッチ  $P_g$  が(C)に従ひ既に雙方相等しいのだから、前節の式(26) (第120圖)

$$P_g = P_c \cos \alpha$$



を考えると、任意の中心距離  $L$  なる嚙合に於ける圓周ピッチ  $P_c$  もまた雙方相等しい。それは  $L$  なる嚙合に於けるピッチ圓に關しても、前節に述べた通り雙方のインボリュート角  $\alpha$  が相等しいからである。

条件(c)への計算——A歯車は半径  $r_a$  の圓に沿つて齒厚が  $T_a$  であり、又B歯車は半径  $r_b$  に沿つて齒厚が  $T_b$  であるとき、この二つの齒車を条件(c)に差支へないやうに嚙合はすためには、中心距離  $L$  がいくら以上であることを要するか、その値を求めよう。

今兩齒車を或る中心距離  $L$  を以て条件(c)に差支へなく、且連續運轉もできるやうに嚙合はせたいものとする。此の嚙合に於けるピッチ圓半径は式(25)に依り

$$\tilde{r}_a = \frac{g_a}{g_a + g_b} L, \quad \tilde{r}_b = \frac{g_b}{g_a + g_b} L.$$

これらのピッチ圓に沿つての齒厚を夫々

$$\bar{T}_a, \bar{T}_b$$

とし、且この嚙合に於ける圓周ピッチを  $P_c$  とすると、条件(c)は即ち

$$\bar{T}_a + \bar{T}_b \leq P_c$$

である。 $\bar{T}_a, \bar{T}_b$  の値は、半径  $r_a, \tilde{r}_a, r_b, \tilde{r}_b$  に於けるインボリュート角を夫々  $\alpha_a, \tilde{\alpha}_a, \alpha_b, \tilde{\alpha}_b$  としたときに、式(24)に依つて

$$\bar{T}_a = 2\tilde{r}_a \left( \frac{T_a}{2r_a} + \text{inv } \alpha_a - \text{inv } \tilde{\alpha}_a \right)$$

$$\bar{T}_b = 2\tilde{r}_b \left( \frac{T_b}{2r_b} + \text{inv } \alpha_b - \text{inv } \tilde{\alpha}_b \right)$$

として算出せられる。但し  $\alpha_a, \tilde{\alpha}_a, \alpha_b, \tilde{\alpha}_b$  の値は式(18)に従ひ

$$\cos \alpha_a = g_a / r_a, \quad \cos \tilde{\alpha}_a = g_a / \tilde{r}_a,$$

$$\cos \alpha_b = g_b / r_b, \quad \cos \tilde{\alpha}_b = g_b / \tilde{r}_b$$

から定まるものである。これらの内、 $\tilde{\alpha}_a, \tilde{\alpha}_b$  は共に現在の嚙合に於ける壓力角  $\varphi$  に等しいから、 $\tilde{\alpha}_a, \tilde{\alpha}_b$  の代りに  $\varphi$  と書くと、条件(c)

は

$$2\tilde{r}_a \left( \frac{T_a}{2r_a} + \text{inv } \alpha_a - \text{inv } \varphi \right) + 2\tilde{r}_b \left( \frac{T_b}{2r_b} + \text{inv } \alpha_b - \text{inv } \varphi \right) \leq P_c$$

となる。更に之を書き直すと

$$2\tilde{r}_a \left( \frac{T_a}{2r_a} + \text{inv } \alpha_a \right) + 2\tilde{r}_b \left( \frac{T_b}{2r_b} + \text{inv } \alpha_b \right) - 2(\tilde{r}_a + \tilde{r}_b) \text{inv } \varphi \leq P_c$$

今A歯車の齒数を  $N_a$ , B歯車の齒数を  $N_b$  とすると、

$$P_c = 2\pi\tilde{r}_a / N_a = 2\pi\tilde{r}_b / N_b$$

だから、上記の条件式は

$$\frac{\tilde{r}_a}{\tilde{r}_a + \tilde{r}_b} \left( \frac{T_a}{2r_a} + \text{inv } \alpha_a \right) + \frac{\tilde{r}_b}{\tilde{r}_a + \tilde{r}_b} \left( \frac{T_b}{2r_b} + \text{inv } \alpha_b \right) - \text{inv } \varphi \leq \frac{\pi}{N_a} \frac{\tilde{r}_a}{\tilde{r}_a + \tilde{r}_b}$$

となる。上掲の  $P_c$  の式から

$$\tilde{r}_a / \tilde{r}_b = N_a / N_b$$

を得るから、此の關係を利用し、 $N_a, N_b$  を以て  $\tilde{r}_a, \tilde{r}_b$  を消去すると、

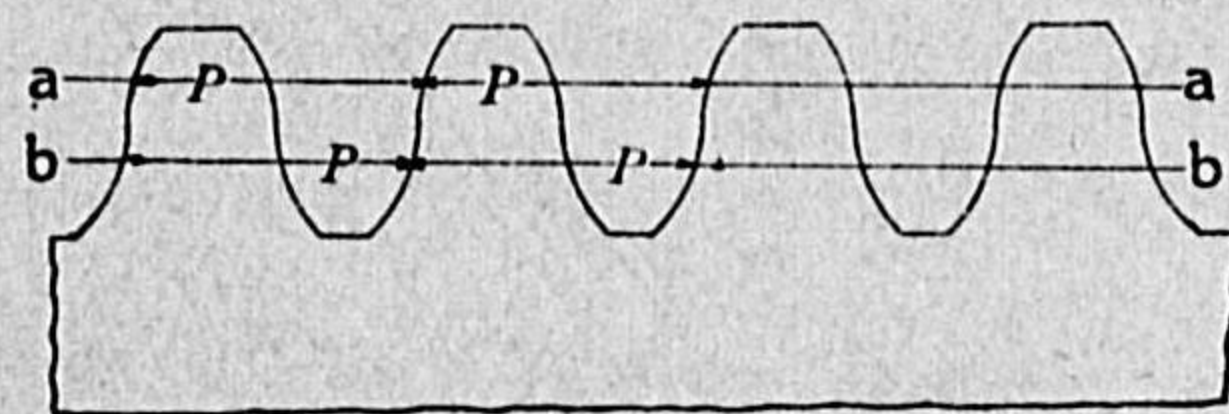
条件(c)は結局

$$\text{inv } \varphi \leq \frac{N_a}{N_a + N_b} \left( \frac{T_a}{2r_a} + \text{inv } \alpha_a \right) + \frac{N_b}{N_a + N_b} \left( \frac{T_b}{2r_b} + \text{inv } \alpha_b \right) - \frac{\pi}{N_a + N_b}$$

となる。即ち之を満足する最小限度の  $\varphi$  の値  $\varphi_{\min}$  を之から算出し、それを式(12)

$$L_{\min} = \frac{g_a + g_b}{\cos \varphi_{\min}}$$

へ導入して  $L$  の最小値  $L_{\min}$  を求め、最初豫定の  $L$  値が此の  $L_{\min}$  値よりも小でないならば、条件(c)が満足されたことになる。



第121圖

ラックとの嚙合——インボリュート歯車AがラックBと嚙合つてゐるとする。ラックの一般的な性質の一



つは、そのピッチがレベル a (第 121 圖) で測つても、又レベル b で測つても、どのレベルで測つても、みな等しく例へば  $P$  なる一つの値を有することである。従つてそれと嚙合つて連続運轉するところの A 歯車は、その圓周ピッチが  $P$  と等しくなるやうな圓をピッチ圓として此のラック B と嚙合つてゐるべきである。A 歯車の齒数を  $N_a$ 、今述べたピッチ圓の半徑を  $\tilde{r}_a$  とすると、以上のことは即ち

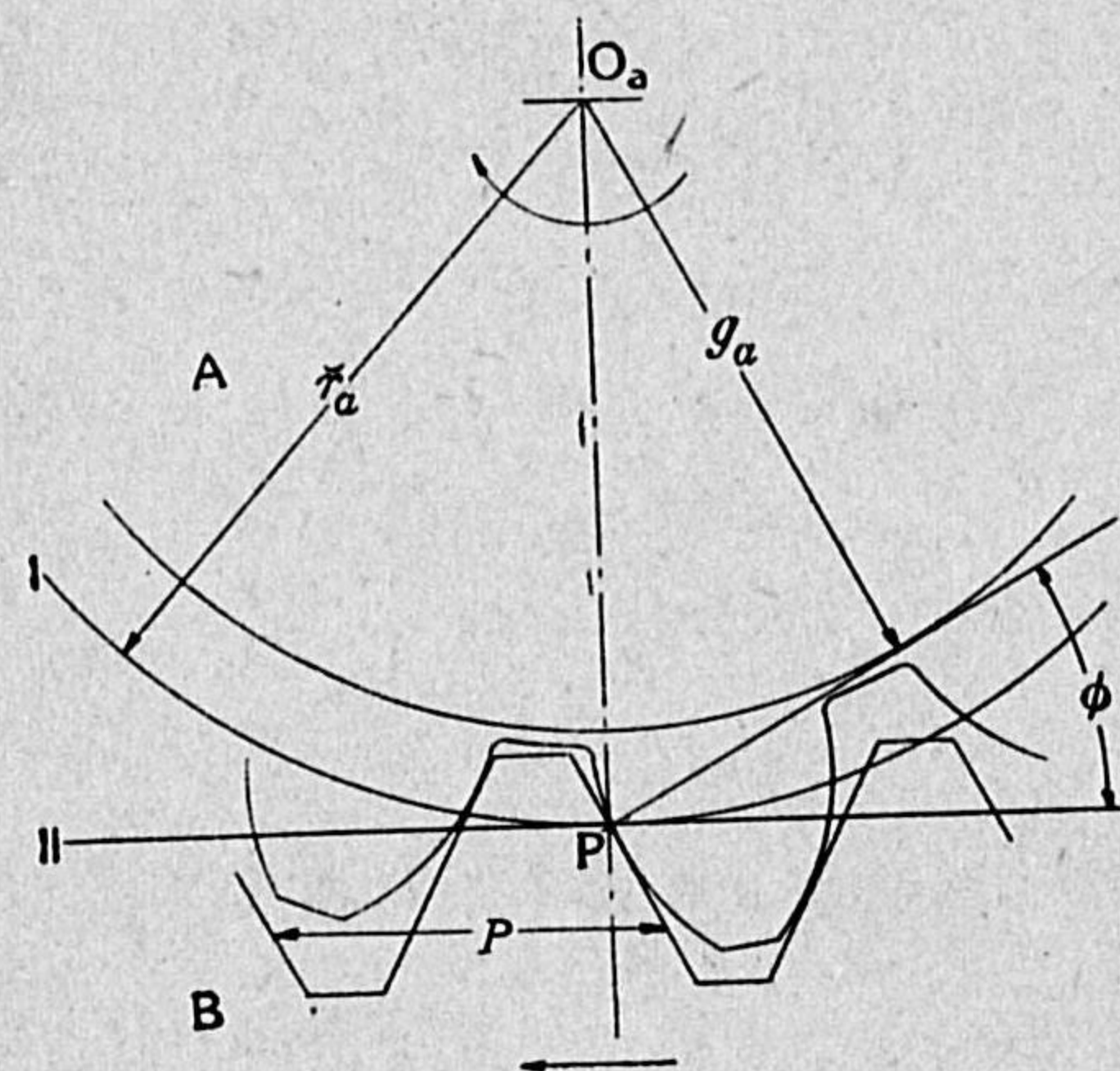
$$P = 2\pi\tilde{r}_a / N_a$$

であり、従つてピッチ圓半徑は

$$\tilde{r}_a = \frac{N_a P}{2\pi}$$

である。

インボリュート齒面と嚙合ふべきラックの齒面が直線状であることは、既に第 10 章に於て述べたところである。又ラックの齒面への垂直線がラックのレベルとなす角を  $\phi$  (第 87 圖乃至第 91 圖及び第 122 圖) とすると、兩者の嚙合に於ける壓力角が即ち  $\phi$  であることも第 10 章から知られるであらう。そうすると前章に於て述べたところに



第 122 圖

従つて、半徑  $r_a$  なる現在嚙合のピッチ圓が、A 齒車の齒面を切る點に於けるインボリュート角が即ち  $\phi$  に等しく、故に A 齒車の基礎圓半徑を  $g_a$  とすると、式

(18) に依つて

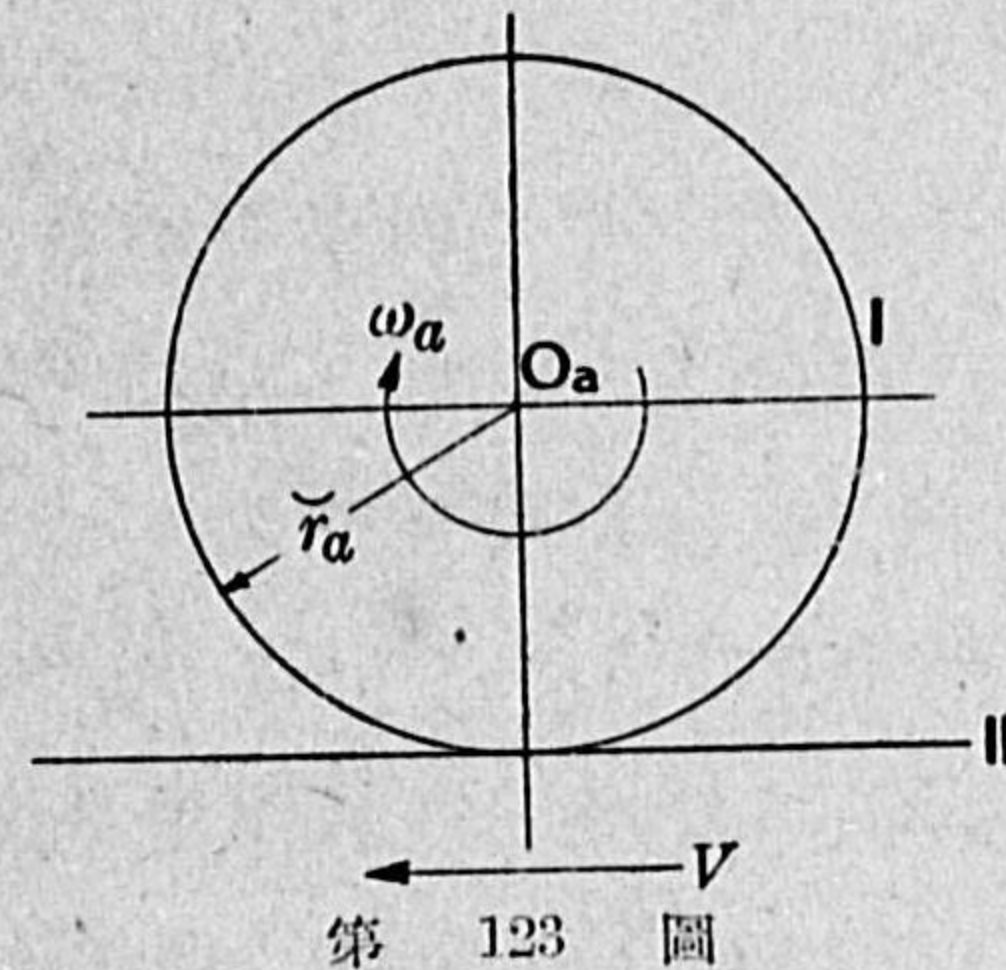
$$\tilde{r}_a = g_a / \cos \phi$$

である。兩式を組合せると

$$P \cos \phi = 2\pi g_a / N_a = P_0$$

となる。但し  $P_0$  は A 齒車の基礎圓圓周ピッチである。

以上の結果を改めて述べると、ピッチが  $P$ 、齒面の傾きが  $\phi$  であるところの直線狀齒面のラックが與へられてゐるとき、之と嚙合つて連続運轉するためのインボリュート齒車は、 $P \cos \phi$  に等しい基礎圓圓周ピッチを有してゐるものならば宜しく、そのときの壓力角は  $\phi$ 、ピッチ圓半徑は  $g_a / \cos \phi$  であつて、壓力角もピッチ圓



第 123 圖

半徑も齒車をラックに近づけ又は遠ざけることに依つて其の値に變化なく、他に差支のない限り、兩者を遠ざけても近づけても嚙合には支障を來さず、速度比にも變化がない。此の場合にラックの或るレベル II (第 123 圖) が A 車の半徑  $r_a$  なる圓 I

と轉り接觸をやつてゐると見るべきだから、即ち A と B との相互の隔たり如何に拘らず

$$\omega_a \tilde{r}_a = V$$

なる速度の關係が成立する。但し  $\omega_a$  は A 齒車の角速度、 $V$  はラック B の速度である。

**交換性インボリュート齒車と規格ピッチ圓** — 今 A なる一齒のインボリュート齒車を探り上げたとき、それに固有のピッチ圓がないばかりでなく、それと嚙合はすべき第二の齒車 B を併せ考



へたときでさへも未だAのピッチ圓がきまらないのであるが、噛合すべき相手Bが若しもラックであるといふことになる、そこに於て始めて一定不変のピッチ圓がAに生ずること、以上に述べた通りである。即ち齒面傾斜の一定であるラックを念頭においたとき、インボリュート歯車には固有のピッチ圓があると言へる。

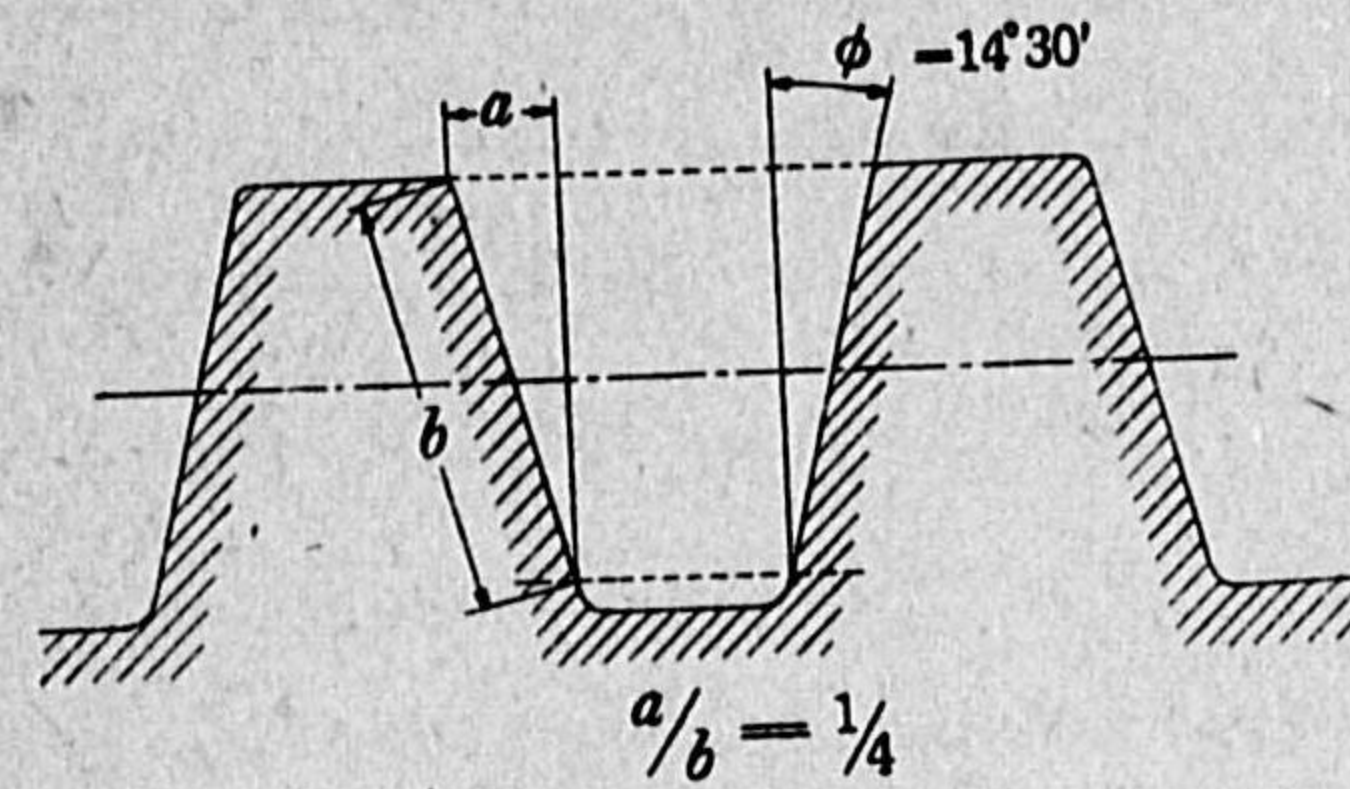
此の考へを更に擴めて、A, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, …なる一群のインボリュート歯車を取り、それらの對象として考へられる上記のラックが、A, A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, …等に對し共通の一つのものであるとするならば、これらの一群の歯車は互に掛け換へ得る交換性歯車として、上述の意味の固有ピッチ圓を以て之を互に接觸せしめ、連続運轉に適合して噛合はさすことができるであらう。それはそれらの歯車のピッチ圓に於けるインボリュート角が、すべてラックの齒面傾斜角φに等しく、且それらのピッチ圓に於ける圓周ピッチが、ラックのピッチに等しいからである。即ちラックの齒面傾斜を一定に規定したとき、前項ピッチ的數値の表はし方中の(3)をピッチ及びピッチ圓の規格的定義として選ぶことに依つて、茲に一つの交換性インボリュート歯車の組織が成立するのである。

箇々の歯車が是非とも實際にラックと噛合はされるのではないから、上記のラックは單に想像上のラックであるの一應は考へてもいゝのであるが、然し第10章に於て第91圖に關連して述べたやうに、インボリュート歯車はラック形刃物で削成せられ得るし、また事實に於ても好んでラック形刃物を以て造られつゝあるのであるから、それらはつまりラックと噛合されたと同じと考へるべきである。しかも一定の齒面傾斜のラック形刃物で造られた歯車は、一群の交換性歯車に屬する歯車として自然に出來上るの

だから、以上に述べた規格ピッチ圓の考へは齒車の實用上甚だ重要なものであると謂はなくてはならない。

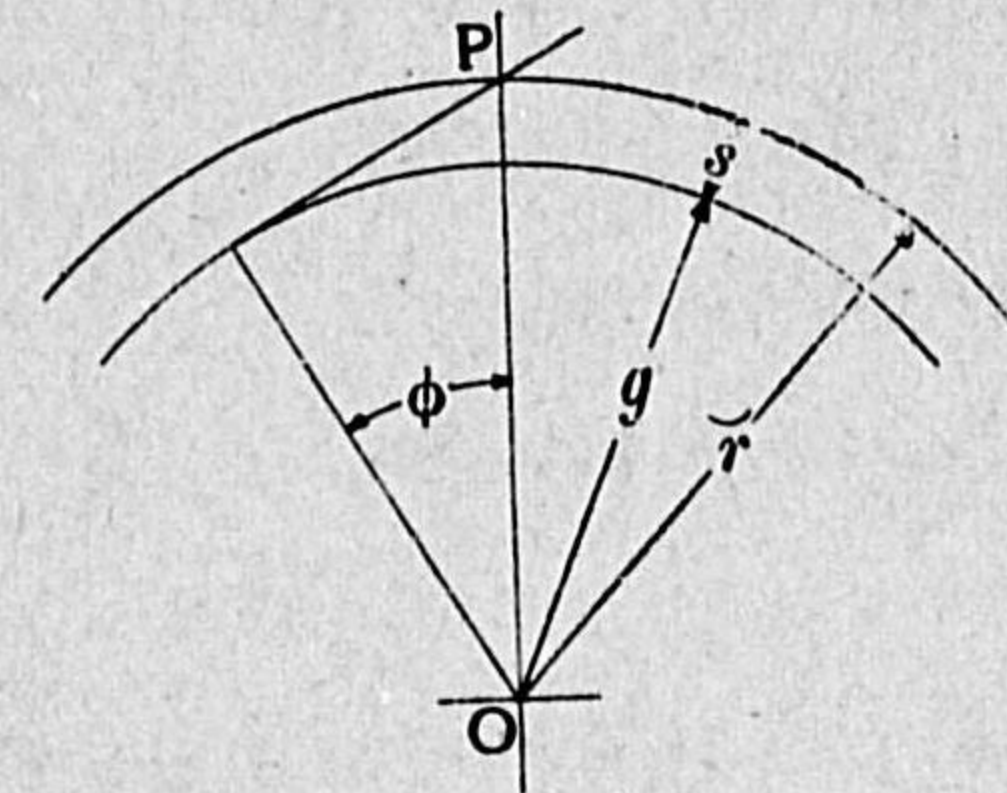
これまで標準規格として最も一般に採用されて居た交換性齒

車は、その規格の基礎となるラック傾斜角φが14°30' (時には15°) のものである。此の角度が選定せられた理由は、サイクロイド齒車に於ける壓力角の平均が凡そ此の値に近いと共に、



第 124 圖

第124圖に示す長さaと長さbとの比が、φ=14°30'に於ては0.25038であつて、1/4に甚だ近く、従つて齒形が簡單であるからであると謂はれてゐる。然しながらラック傾斜角即ち壓力角φの大小は、後で次第に述べるやうに、齒車の性質に重大な影響を及ぼすものであつて、それらの關係からして、必ずしも14°30'のものゝみを基準とせず、例へば20°といふが如きものも行は



第 125 圖

れるのである。これらについては後文に於て詳細に述べるであ

らう。尚ほ序ながら、壓力角φが既知のとき、ピッチ圓と基礎圓との距離s(第125圖)は

$$s = r(1 - \cos \phi)$$

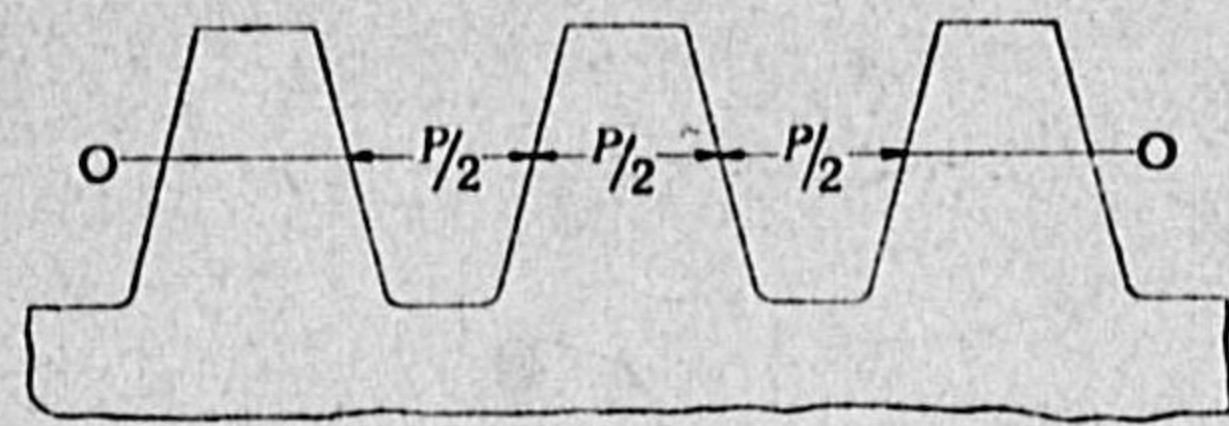
で與へられ、それとピッチ圓直径と

φ	s/2r
14° 30'	0.016
15°	0.017 = 1/59
20°	0.030
22°	0.0364



の比は種々の  $\varphi$  に対して別表の如き数となる。

ラックとの噛合について補説 — A 歯車と B ラックとを噛合せながら相互に近づけたとすると、その近づけ得る限度は、一方の歯先が他の歯底に行當るときか、若しくは A と B とが隙間なく噛合ふときであらう。後者の場合として、そのときの B に対する A の位置を求める。



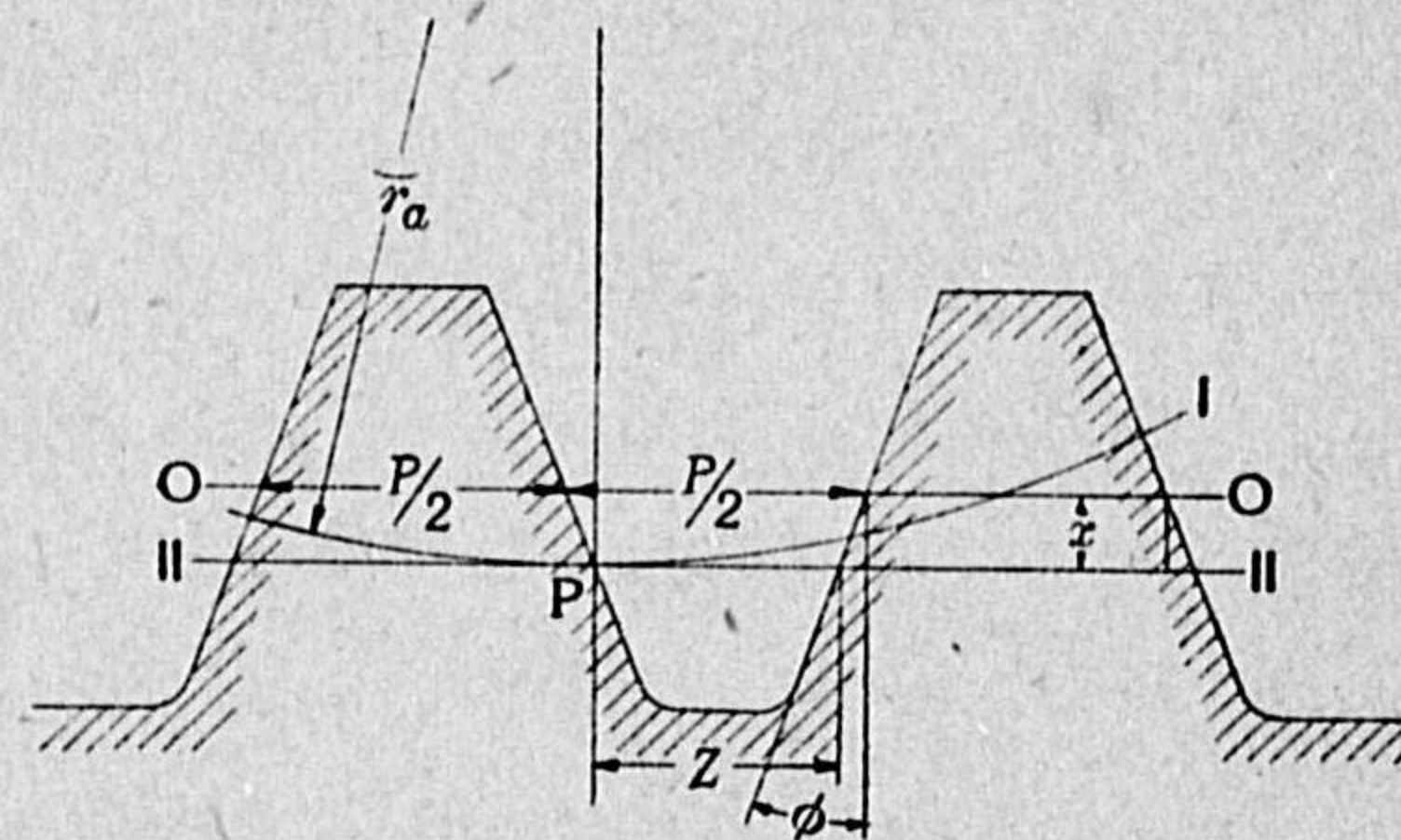
第 126 圖

今 B ラックのピッチを  $P$ 、傾斜角を  $\varphi$  とし、又 A 歯車の歯厚が半径  $r_1$  なる圓に沿つて  $T_1$  であるとする。すると半径  $r_a$  なるピッチ圓に沿つての歯厚  $T_a$  は、第 12 章の式(24)に従つて

$$T_a = 2r_a \left( \frac{T_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha_1 - \text{inv } \varphi \right)$$

である。但し  $\alpha_1$  は半径  $r_1$  に於けるインボリュート角である。ラック B に於て、第 126 圖

の如く歯厚と歯隙とが相等しく、共に  $P/2$  に等しいレベル O を假りにラックの中央線と呼ぶこととし、A 歯車のピッチ圓 I (第 127 圖) が此の中央線



第 127 圖

O から  $x$  だけ下方に隔つたレベル II と相接してゐるときに、両者が丁度隙間なく噛合ふものとする。この II なるレベルに於けるラックの歯隙  $Z$  は

$$Z = \frac{P}{2} - 2x \text{tg } \varphi$$

であり、隙間なく丁度噛合ふためには此の  $Z$  が  $T_a$  に等しく、従つてピッチ點 P と中央線 O との隔たり  $x$  は

$$x = \frac{P \cot \varphi}{4} - r_a \cot \varphi \left( \frac{T_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha_1 - \text{inv } \varphi \right)$$

となり、又 A 歯車の中心點と中央線 O との隔たり  $L$  は

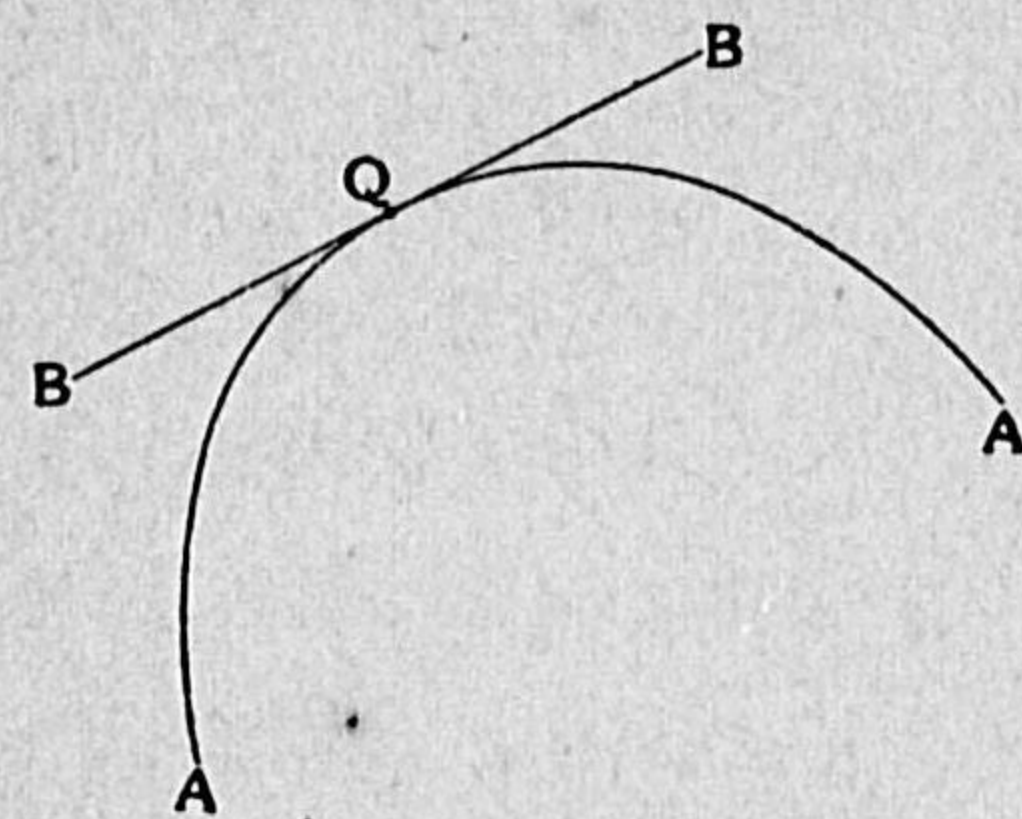
$$L = r_a - x = r_a \left\{ 1 + \cot \varphi \left( \frac{T_1}{2r_1} + \text{inv } \alpha_1 - \text{inv } \varphi \right) \right\} - \frac{P \cot \varphi}{4}$$

となる。



## 第14章 滑り率

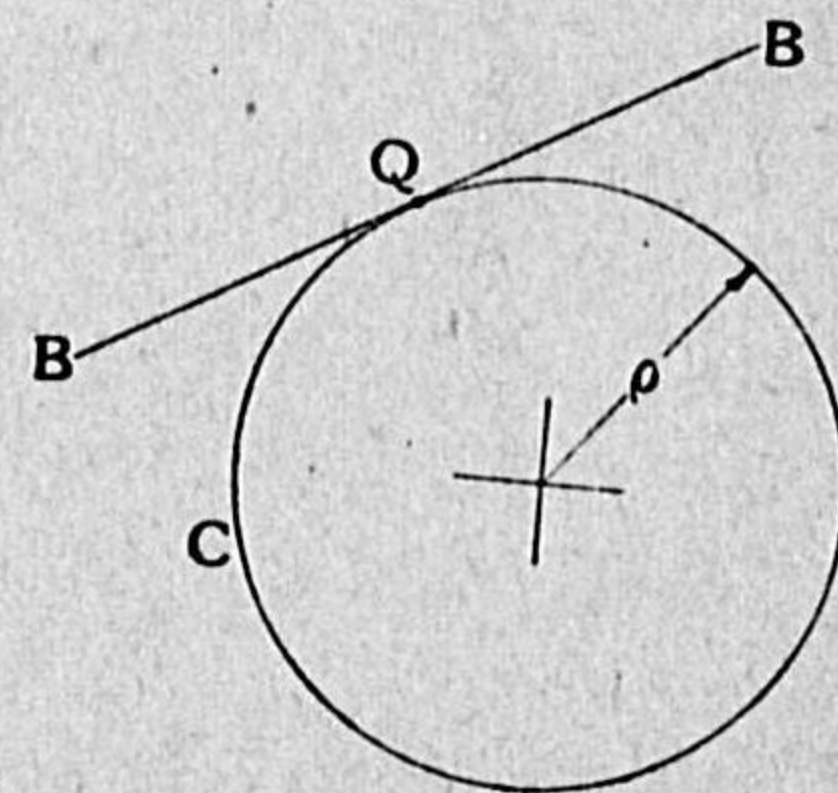
**曲率半径**——今一つの平面曲線A(第128圖)の中の一 $Q$ に於て、曲線への切線Bを描くと、直線Bと曲線Aとは $Q$ 点から遠ざかる



第 128 圖

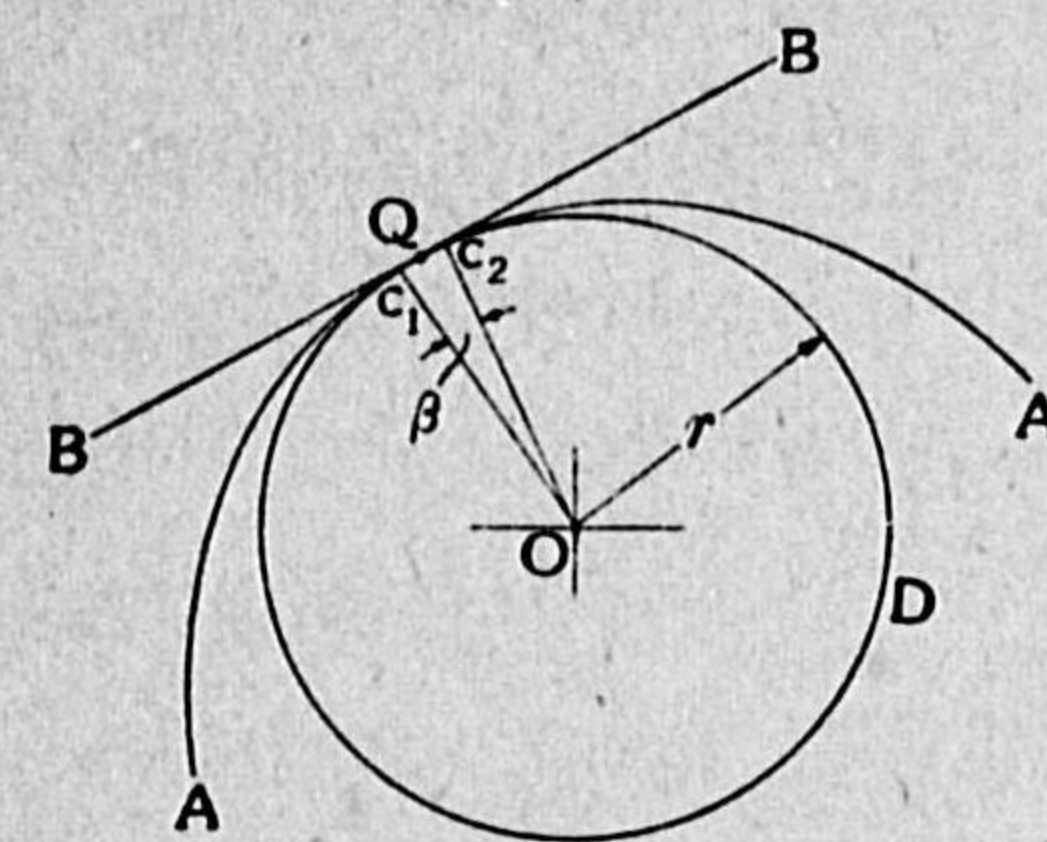
に従つて、相互に離れようとするのが一般である。曲線の形状如何に依つて、相互の離れ方が或は急であり、或は緩であつて、離れ方が急であるものは即ち $Q$ 点に於て曲線Aの曲り方がひどいのである。直線Bへ $Q$ 点に於て切する圓C(第129圖)を

描き、Bに對するAの離れ方と、Bに對するCの離れ方とが、 $Q$ 点の極く近くでは同じであるやうに圓Cの大きさを定めたものとする。と、 $Q$ 点の極く近くではAとCとは曲り方が等しいと考へ得られるから、曲線Aの $Q$ 点に於ける曲りの程度は、圓Cの大きさ、即ち例へば其の半径 $\rho$ を以て代表せしめ得るわけである。この $\rho$ を曲線Aの $Q$ 点に於ける曲率半径 (radius of curvature) と呼び、これを以て $Q$ 点に於ける曲りの程度を數量的に表はすものとする。無論 $\rho$ が小であるほど曲りが甚しいのである。AとCとは $Q$ 点の極く近くでは、Bに對する曲り方が相等しいのであるから、即ちそのところでは、AとCとは重なり合つてゐると考へるべきである。



第 129 圖

一點 $P$ が曲線Aに沿つて動くものと考へ、 $P$ が $Q$ 点を通る瞬間に於ける回轉軸を $O$ (第130圖)とし、その時の回轉半径を $r$ とすると、この中心點 $O$ 、半径 $r$ なる圓Dは、 $Q$ 点及び之を夾む極めて相近い二點 $c_1, c_2$ を通る圓であると見て差支へなく、それは既に第1章



第 130 圖

第6圖に於て述べたところである。即ち $Q$ 点の極く近くに於て曲線Aと重なり合つてゐることからして、此の圓Dは、さきの圓Cと同一物であると見て宜しく、従つて $Q$ 点に於ける瞬間的回轉半径 $r$ は、即ち $Q$ 点の曲率半径 $\rho$ であると言つていふ。

$c_1$ 点と $c_2$ 点とは極めて相近く、その間ではAとC及びDとは重なり合つてゐるのだから $\widehat{c_1c_2}$ なる曲線Aの長さは、 $\widehat{c_1c_2}$ なる圓弧の長さに等しく、且又 $c_1$ 点及び $c_2$ 点に於て曲線Aへ描いた兩垂直線は $O$ 点に於て相交るべきである。故に $\widehat{c_1c_2}$ なる曲線Aの極小部分の長さを $s$ とし、兩垂直線の間、の極小角度を $\beta$ (第130圖)とすると、 $\beta$ をラジアンで表はしたとき、第1章で示した通り

$$r = s/\beta = \text{曲率半径 } \rho \quad (27)$$

である。又之を逆に言ふと、曲線中の一 $Q$ 点を夾む極めて相近い二點 $c_1, c_2$ 間の曲線の長さ $s$ は、 $Q$ 点に於ける曲線の曲率半径を $\rho$ とし、且 $c_1$ 点に於ける曲線への垂直線と、 $c_2$ 点に於ける曲線への垂直線との間の角を $\beta$ としたとき

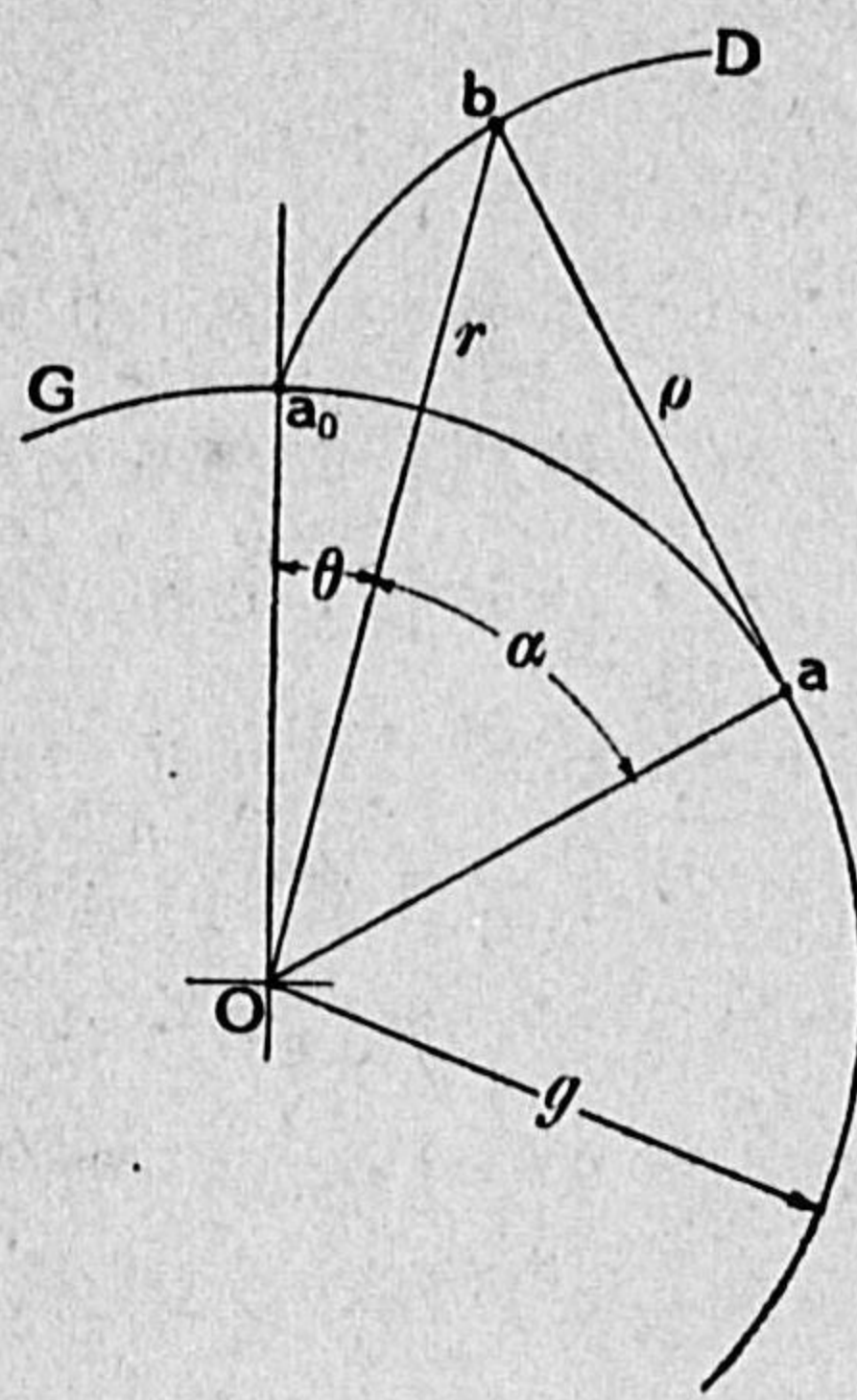
$$s = \rho\beta \quad \cdot$$

なる式で求められるとも言へる。

**インボリュートの曲率半径**——一般の曲線について其の曲率



半徑と曲線の長さとを、上述の方針に従つて實際に算出することは、微分學と解析幾何學との助けに依らなくてはならない。然しながら吾々が今こゝで問題としたい曲線は勿論インボリュートであるから、こゝでは單にそれだけに就いて考へようと思ふ。第



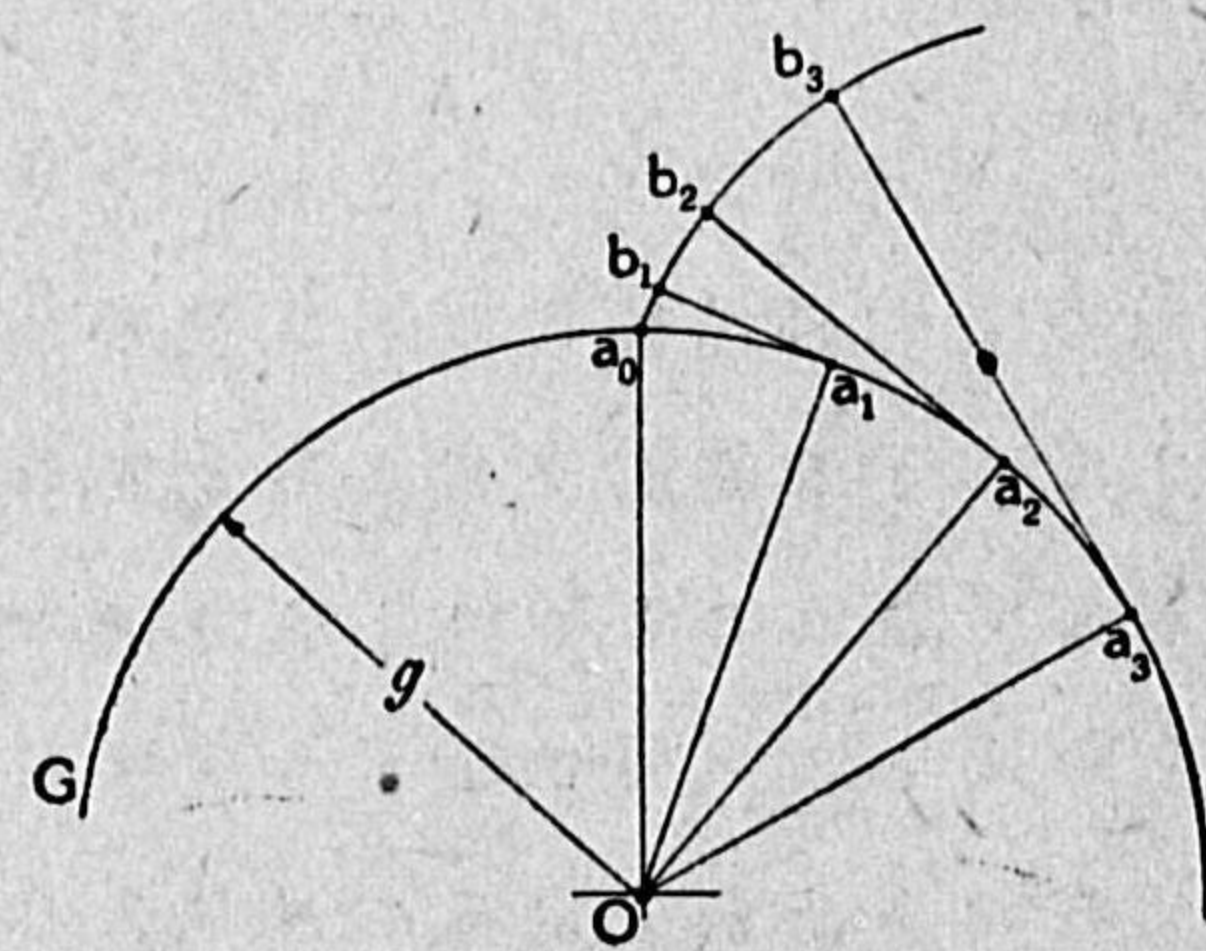
第 131 圖

131 圖の如く、Gを基礎圓とするインボリュートDがあるとし、その中の任意の一點bをとり、その極座標をr, theta, インボリュート角をalphaとする。又bに於てインボリュートへ描いた垂直線が基礎圓に切する點をaとする。既に第10章で述べた通り、造形點がb點を通る瞬間に於て、造形直線はa點を瞬間的回轉中心として廻つてゐるのだから、b點に於ける瞬間的回轉半徑はabであり、従つてb點の曲率半徑は上述に従ひ

徑は上述に従ひ

$$\rho = \overline{ab} = g \tan \alpha = r \sin \alpha = \sqrt{r^2 - g^2} = \widehat{a_0 a} \quad (28)$$

である。但しgは基礎圓半徑、a\_0はインボリュートの起點である。a\_0點から基礎圓Gに沿つて等間隔でa\_1, a\_2, a\_3, …(第132圖)をとり、それらの點への切線がインボリュートDを切る點を夫々b\_1, b\_2, b\_3, …とすると、曲率半徑の大

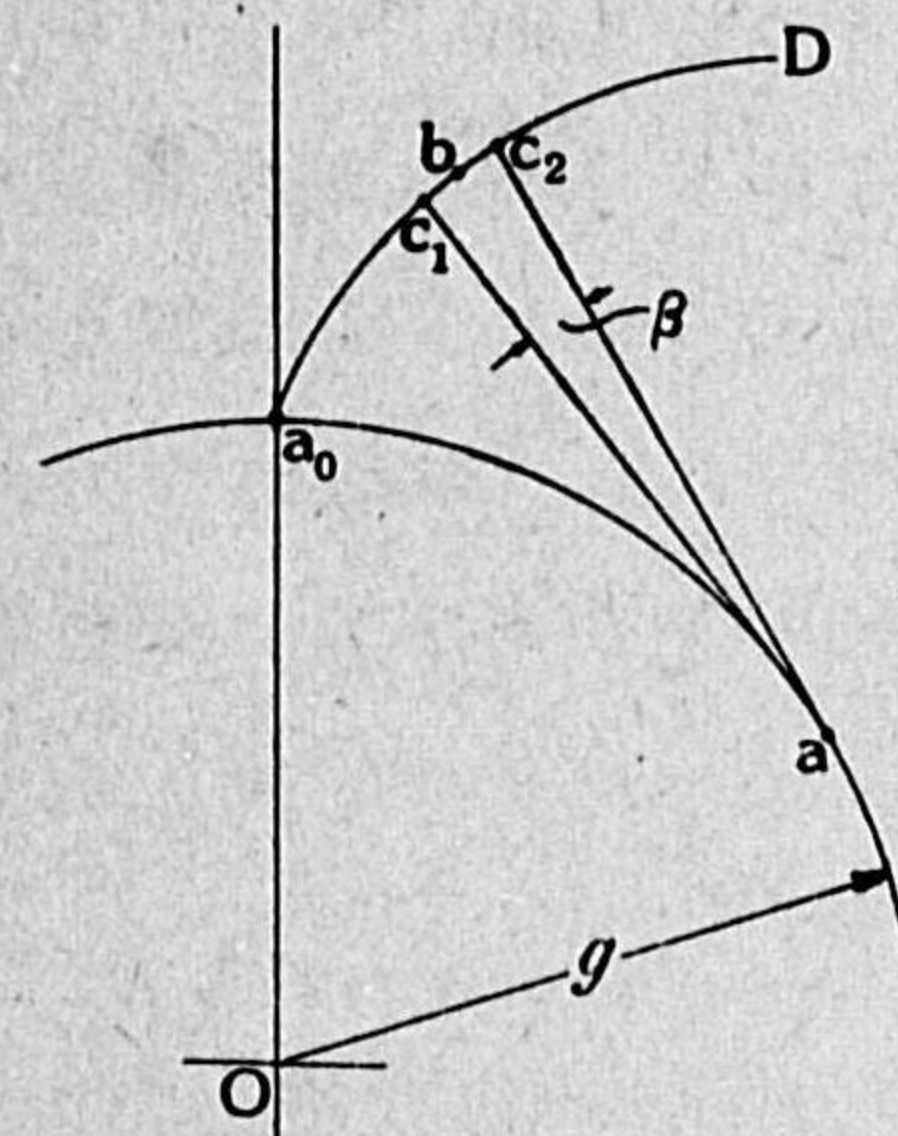


第 132 圖

さは

- a\_0 點に於て = 0
- b\_1 點 " = \overline{a\_1 b\_1} = \widehat{a\_0 a\_1}
- b\_2 點 " = \overline{a\_2 b\_2} = \widehat{a\_0 a\_2} = 2 \times \widehat{a\_0 a\_1}
- b\_3 點 " = \overline{a\_3 b\_3} = \widehat{a\_0 a\_3} = 3 \times \widehat{a\_0 a\_1}

であるから、インボリュートの曲率半徑は、其の起點から遠い點ほど、即ち基礎圓中心から遠い點ほど大である。曲率半徑の増し方は、a\_0, a\_1, a\_2, …等の等間隔の點に對應して上式の如く一定量づゝ増すのであるから、その増し方の割合は起點a\_0に近いほど甚しい。



第 133 圖

インボリュートDの任意の一點、例へばb點(第133圖)を夾む互に極く近い二點c\_1, c\_2間の曲線の長さsは、前式(27)(28)に従ひ

$$s = \beta \times \overline{ab} = \beta \times \widehat{a_0 a}$$

である、但しa點はb點に於ける曲線Dへの垂直線が基礎圓に切する點、角betaは線ac\_1と線ac\_2との間の角である。

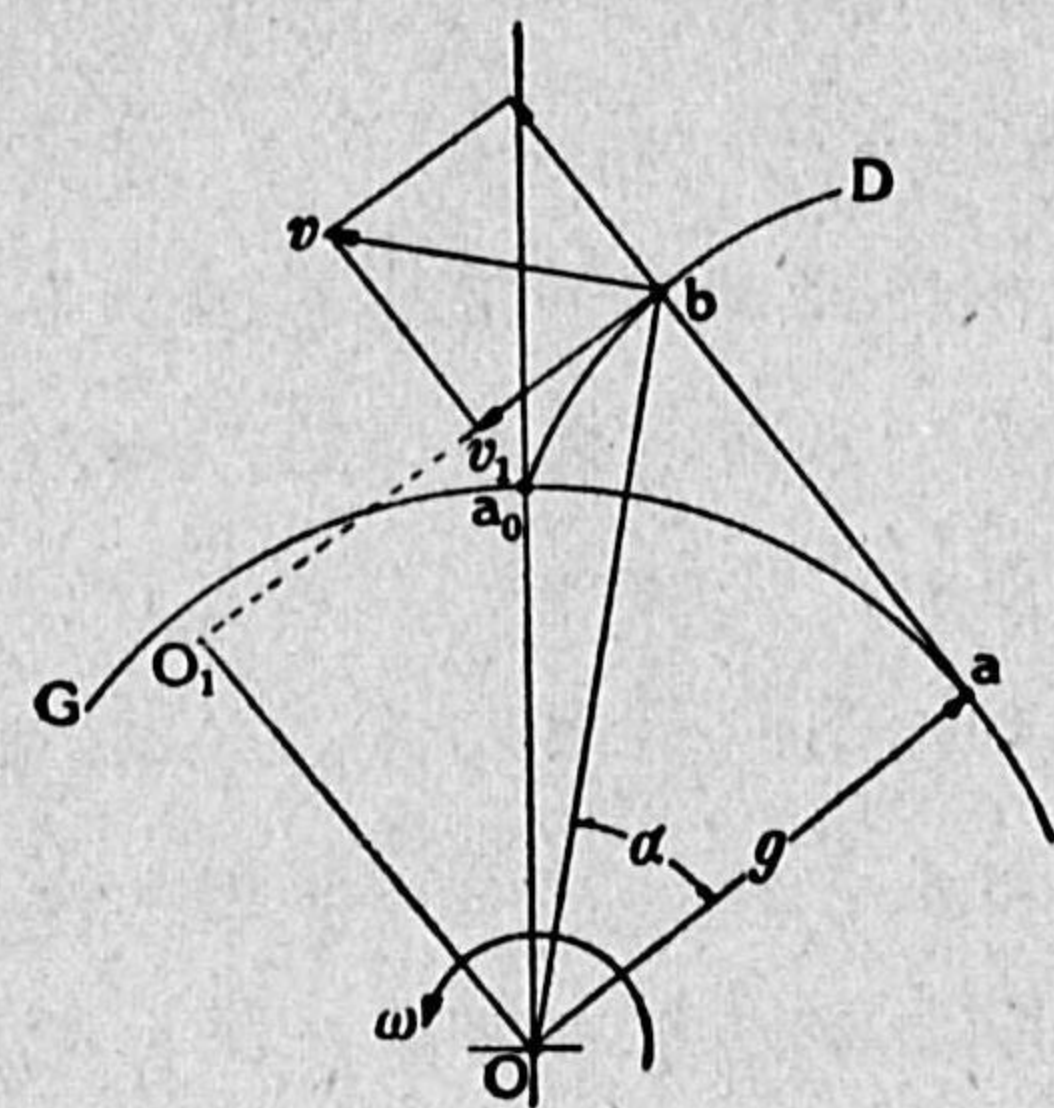
インボリュートDに沿つて、一定の小さい長さsを以て起點a\_0から細かく順次に刻むとすると、その一と刻み毎のbetaの値は、上式から見て起點a\_0に近いところほど大きく、然もa\_0に近いところほど急激に大きくなる。

之を要するにインボリュートに於ては、起點に近い點ほど曲線の曲り方がひどく、従つてインボリュートを以て齒面を形成したときに、形の上だけで考へるならば、起點に近い點ほど、正確に之を



製造することが困難であり、又使用中外力のために變形摩損せられることも多いと謂ひ得る。

インボリュート歯面の相互運動——第134圖に於てインボリュート歯面Dが、基礎圓Gの中心點Oの周に、角速度 $\omega$ を以て矢の方向へ廻るものとする。そのため



第 134 圖

にD中の任意の一點bが有する線速度を $v$ とし、齒面に切線方向への其の分速度を $v_1$ とすると、第1章の終に於て述べたところに従ひ

$$\omega = v/r = v_1/\overline{Oa_0} = v_1/\overline{ab}$$

である。たゞし $\overline{Oa_0}$ は圖示の如くO點から $v_1$ の線へ下した垂線の長さである。

今極く短い時間 $t$ の間、その角速度 $\omega$ を以て角度 $\beta$ だけ廻つたとすると、 $\beta = \omega t$ であると共に、b點が其の點の齒面に切線である方向へ動く長さ $l$ は

$$l = v_1 t$$

であるから、之れへ上式の關係を入れると

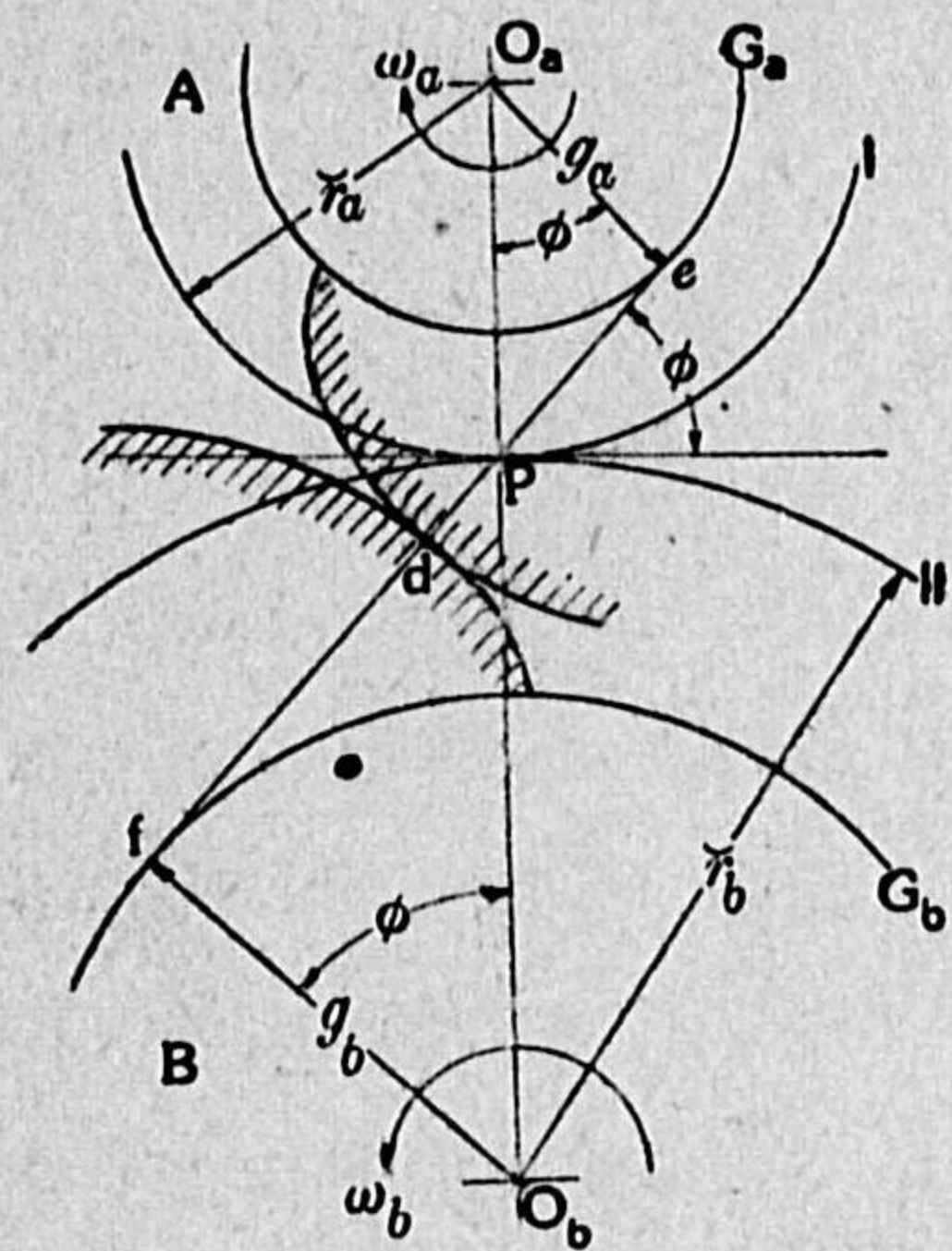
$$l = \omega t \times \overline{ab} = \beta \times \overline{ab}$$

となる。その意味は、短少時間について考へた場合に、齒面の一點が齒面の切線方向へ動く長さは、その點に於ける齒面の曲率半徑へ廻つた角度 $\beta$ を乗じたものに等しいといふことである。

更に次ぎには、二つのインボリュート齒車A及びB(第135圖)が嚙合つてゐる場合を考へ、ピッチ點をP、中心點を $O_a, O_b$ 。齒數を

$N_a, N_b$ 、基礎圓半徑を $g_a, g_b$ 、角速度を $\omega_a, \omega_b$ 、現在嚙合に於けるピッチ圓半徑を $\tilde{r}_a, \tilde{r}_b$ とする。

此の兩車に於て、一對の齒が圖示の如く例へばd點で接してゐる任意の瞬間を考へ、それに引續く短少時間の間兩車が廻つたために、d點の切線方向に兩齒面が夫々 $l_a, l_b$ だけ動いたとし、其の値を求め。壓力線をefとし、e點はそれが基礎圓 $G_a$ に切する



第 135 圖

點、f點は同じく $G_b$ に切する點とすると、前段に述べたところに従つて

$$l_a = \beta_a \times \overline{de} \text{ 及び } l_b = \beta_b \times \overline{df}$$

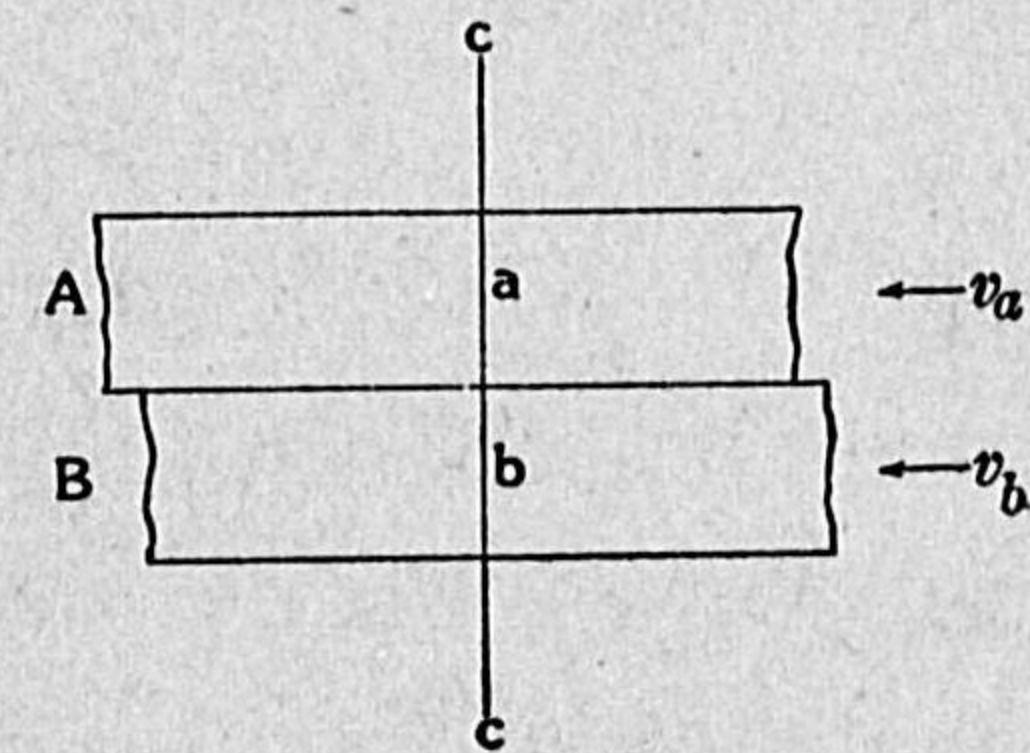
である。但し $\beta_a, \beta_b$ は夫々A車及びB車が其の短少時間の中に廻つた角度で

$$\frac{\beta_a}{\beta_b} = \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{\tilde{r}_b}{\tilde{r}_a} = \frac{g_b}{g_a} = \frac{N_b}{N_a}$$

なる關係を有するものである。

以上のやうにしてd點に於ける双方の齒面は、その點に於ける共通切線方向へ、同じ短少時間 $t$ 内に、一方は $\beta_a \times \overline{de}$ だけ動き、他は $\beta_b \times \overline{df}$ だけ動くから、その差だけ齒面が相互的に滑り合ふわけである。

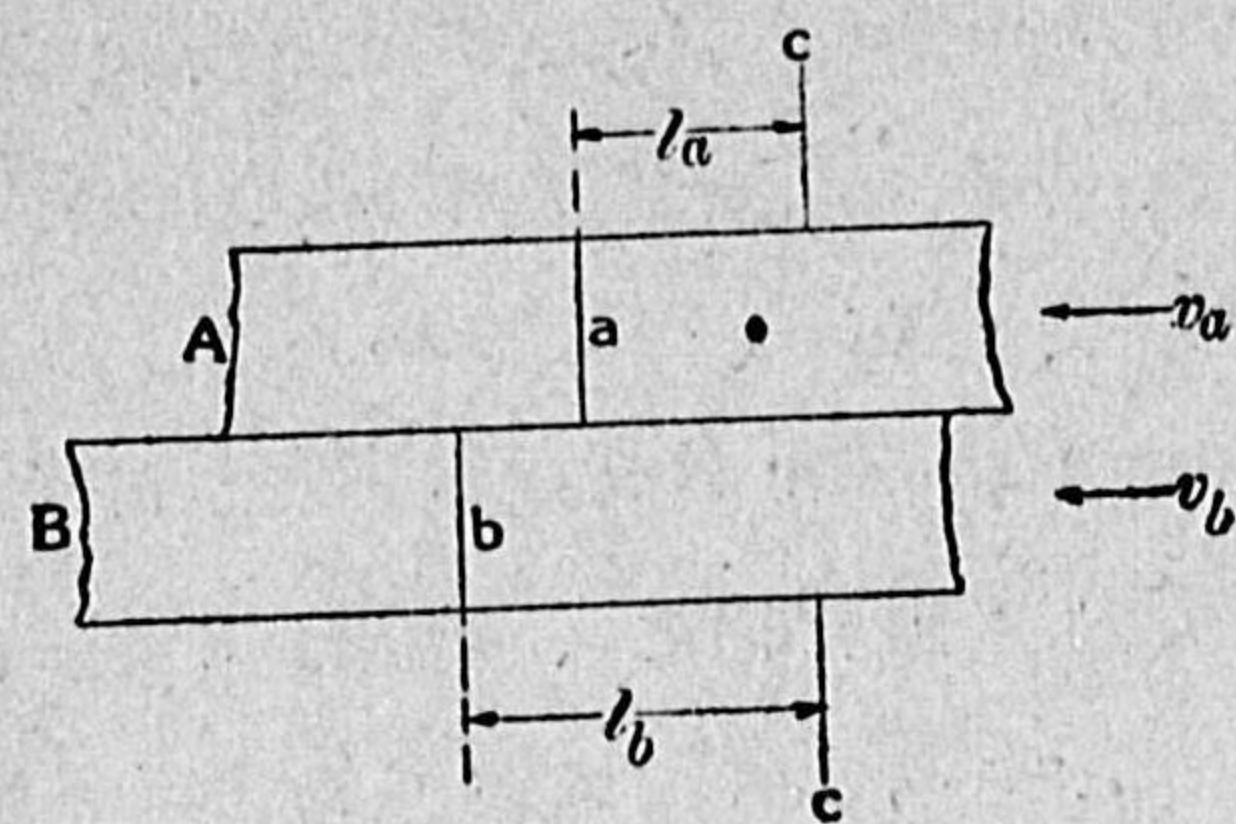
滑り率——平行に置かれてゐる或る二つの物尺A及びB(第136圖)が、その方向へ矢の如く夫々速度 $v_a, v_b$ を以て動いてゐるものとし、最初の瞬間には第136圖の如くAの中の



第 136 圖



一線 a と B の中の一線 b とが外部に在る不動の一線 c と一致して居たが、或る時間  $t$  を経たあとの次の瞬間には、第137圖の如く a



第 137 圖

は c から  $l_a$  だけ離れ、b は c から  $l_b$  だけ離れて前方に位置してゐるとする。そうすると其の時間内に於ける A 及び B 間の相互的な滑りの量は勿論

$$l_b - l_a$$

である。然しながら此の滑り量は、A に於てはそれが  $l_a$  だけ動いた間に生じたものであり、B に在つては同じくそれが  $l_b$  だけ動いた間に起つたものである。故に滑りの激しさとでもいふべきものを考へたい場合であるならば、滑り量  $(l_b - l_a)$  を  $l_a$  若しくは  $l_b$  で除した數を以て激しさを表すのが適當であつて、それを滑り率

(specific sliding) と名づけ、符號  $S$  を以て表示する。但しそれを A 及び B に對して區別して

$$S_a = \frac{l_a - l_b}{l_a} = \text{A 上の滑り率}$$

$$S_b = \frac{l_b - l_a}{l_b} = \text{B 上の滑り率}$$

と呼ぶことにする。

以上の表はし方を前節の二つの齒車の場合に於けるものへ適用すると

$$\left. \begin{aligned} S_a &= \frac{\beta_a \times \overline{de} - \beta_b \times \overline{df}}{\beta_a \times de} = \text{A 車上の滑り率} \\ S_b &= \frac{\beta_b \times \overline{df} - \beta_a \times \overline{de}}{\beta_b \times df} = \text{B 車上の滑り率} \end{aligned} \right\} (29)$$

となるべきである。

式(29)を例へば

$$S_a = 1 - \frac{\beta_b}{\beta_a} \frac{\overline{df}}{de}$$

と書き改めた上、 $\beta_b/\beta_a$  に對して前節の比例式を適用すると

$$\left. \begin{aligned} S_a &= \frac{g_b \times \overline{de} - g_a \times \overline{df}}{g_b \times de} = \frac{N_b \times \overline{de} - N_a \times \overline{df}}{N_b \times de} \\ S_b &= \frac{g_a \times \overline{df} - g_b \times \overline{de}}{g_a \times df} = \frac{N_a \times \overline{df} - N_b \times \overline{de}}{N_a \times df} \end{aligned} \right\} (30)$$

等を得る。

滑り率  $S_a, S_b$  の値は、一對の齒が嚙合ふ間、壓力線に沿ふ嚙合の各時期に於て夫々相違するもので、一定數ではない。例へば接觸位置がピッチ點であるときには

$$S_a = 1 - \frac{\beta_b}{\beta_a} \frac{Pf}{Pe}$$

となるが、一方に於て

$$\frac{Pf}{Pe} = \frac{g_b}{g_a} = \frac{\beta_a}{\beta_b}$$

だから、上記の P 點に於ける  $S_a$  の値は零となり、即ちピッチ點で接觸してゐる瞬間の滑り率は零である。  $S_b$  についても同様である。又接觸が e 點で行はれる瞬間には  $\overline{de} = 0$  だから

$$S_a = -\infty \text{ 及び } S_b = 1$$

となり、同じく f 點では  $\overline{df} = 0$  からして

$$S_a = 1 \text{ 及び } S_b = -\infty$$

となる。即ち接觸位置が

$$e \rightarrow P \rightarrow f$$

と移るに伴つて、滑り率は

$$S_a \quad -\infty \rightarrow 0 \rightarrow 1$$

$$S_b \quad 1 \rightarrow 0 \rightarrow -\infty$$



と變化するのである。尙ほ之れで判ることは、齒先上の滑り率に比べて、齒元上の滑り率が甚しく大であることである。

滑り速度 — 前の二つの物尺の例に於て、或る短少な時間  $t$  の間の相互的な滑り量が  $(l_b - l_a)$  であつたと考へると、これを  $t$  で除したものが即ち此場合の滑り速度である。それを  $s$  とすると、従つて

$$s = \frac{l_b - l_a}{t} = \frac{l_b - l_a}{l_b} \frac{l_b}{t} = -\frac{l_a - l_b}{l_a} \frac{l_a}{t}$$

である。前の如く A 及び B の滑り率を夫々  $S_a, S_b$ , 運動速度を夫々  $v_a, v_b$  (第136, 137圖) とすると

$$S_b = \frac{l_b - l_a}{l_b}, S_a = \frac{l_a - l_b}{l_a}, v_b = \frac{l_b}{t}, v_a = \frac{l_a}{t}$$

だから、之を  $s$  の式へ入れると

$$s = S_b v_b = -S_a v_a$$

となる。

此の計算を齒車 A, B の場合へ擴張して適用するためには、 $v_a, v_b$  を齒面の共通切線方向への分速度として扱へばよい。前節に述べた通り、短少時間  $t$  の間に其の方向へ動いた長さは、A では  $\beta_a \times \overline{de}$  であり、B では  $\beta_b \times \overline{df}$  であるから、

$$v_a = \frac{\beta_a}{t} \times \overline{de} = \omega_a \times \overline{de}$$

$$v_b = \frac{\beta_b}{t} \times \overline{df} = \omega_b \times \overline{df}$$

となり、従つて

$$s = -S_a \omega_a \times \overline{de} = S_b \omega_b \times \overline{df}$$

を得る。又一方では式(29)に依つて

$$S_a = \frac{\beta_a \times \overline{de} - \beta_b \times \overline{df}}{\beta_a \times \overline{de}}$$

であると共に

$$v_a = \frac{\beta_a}{t} \times \overline{de}$$

であるから

$$s = -S_a v_a = -\left(\frac{\beta_a}{t} \times \overline{de} - \frac{\beta_b}{t} \times \overline{df}\right) = -(\omega_a \times \overline{de} - \omega_b \times \overline{df})$$

と書くこともできる。

今の場合には明かに

$$\overline{de} = \overline{Pe} + \overline{Pd}$$

$$\overline{df} = \overline{Pf} - \overline{Pd}$$

であるから、之を上式へ代入すると

$$s = -\{\omega_a \times \overline{Pe} - \omega_b \times \overline{Pf} + (\omega_a + \omega_b) \times \overline{Pd}\}$$

となる。ところが第135圖に於て

$$\frac{\overline{Pe}}{\overline{Pf}} = \frac{\tilde{r}_a}{\tilde{r}_b} = \frac{\omega_b}{\omega_a}$$

だから

$$\omega_a \times \overline{Pe} - \omega_b \times \overline{Pf} = 0$$

である筈で、従つて滑り速度は單に

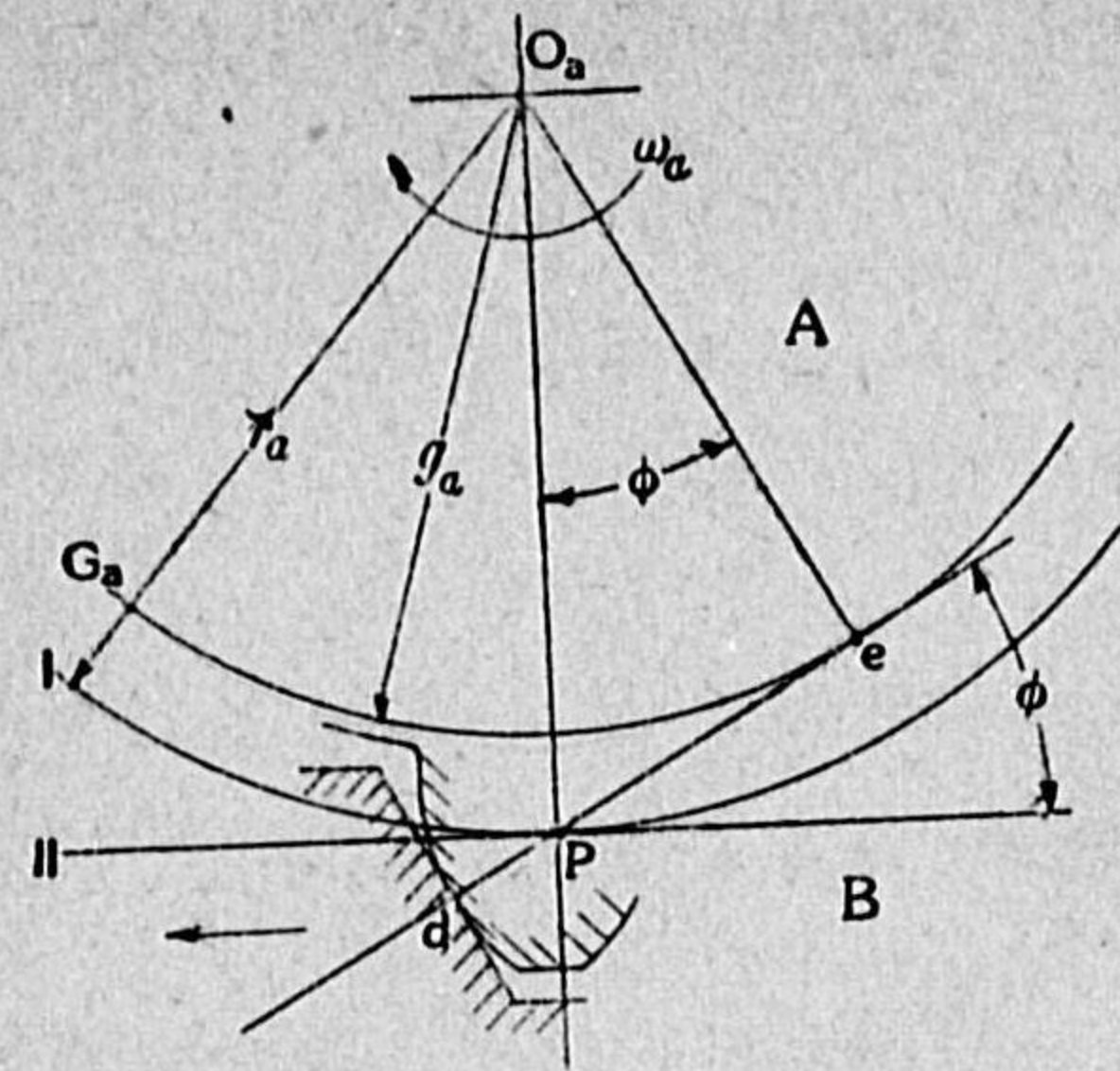
$$s = -(\omega_a + \omega_b) \times \overline{Pd}$$

とも書ける。この式は既に第5章に於て、別の方面からして求め得たものと同じである。

以上の  $s$  の計算は、滑り量  $(l_b - l_a)$  から出發したものであり、即ち A に対する B の滑り量を基としたものであるから、其の  $s$  は A に相對的な B の滑り速度と謂ふべきである。従つて之とは反對に、B に相對的な A の滑り速度といふものを考へ得る筈で、それには滑り量  $(l_a - l_b)$  が基となるべきであるから、その場合の  $s$  は、上掲の  $s$  とは單に正負の符號を異にするだけである。

ラックに於ける滑り率 — 齒車 A とラック B とが嚙合つて居り、A の基礎圓半徑を  $g_a$ , ピッチ圓半徑(第13章参照)を  $\tilde{r}_a$ , 壓力角を





第 138 圖

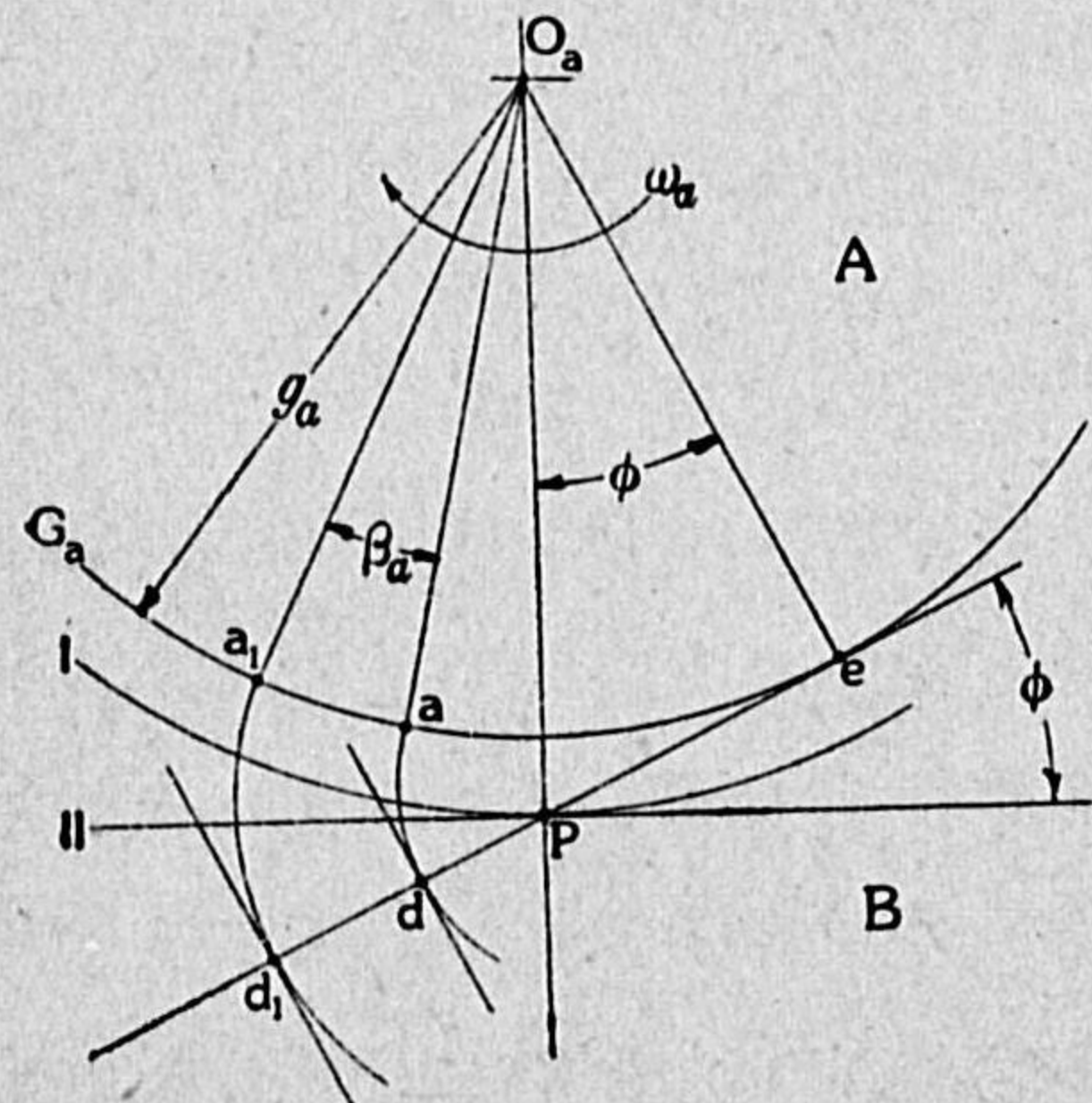
$\phi$ とする。両者が今第138圖の如くd點に於て相接してゐるとし、その瞬間から以後或る短い時間  $t$  の間に、両者がd點に於て共通切線の方へ動く長さ  $l_a, l_b$  を求めれば、それを用ひて前節と同様にして此の場合の滑り率が表はされる。

短少時間  $t$  の間にA車が廻

つた角度を  $\beta_a$  とすると、前と同様にして

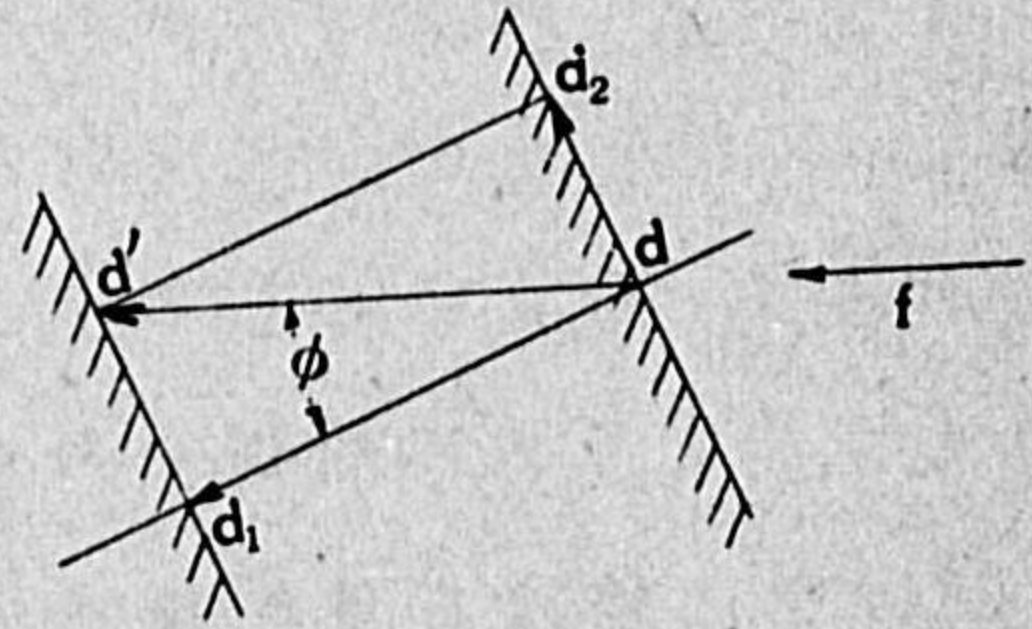
$$l_a = \beta_a \times \overline{de}$$

であるから、之に應ずる  $l_b$  をラックに就いて求めれば、角度  $\beta_a$  だけ廻つたために接觸位置 d が  $d_1$  (第139圖)へ移つたとし、其の間にラックBは矢  $f$  (第140圖)で示した自己の運動方向へ  $\overline{dd'}$  だけ動いたとする。即ち第140圖に示す如く、ラックBは矢  $f$  の方向へ  $\overline{dd'}$



第 139 圖

だけ動くことに依つて、兩齒面の共通垂直線の方へは  $\overline{dd_1}$  だけ動き、共通切線の方へは  $\overline{dd_2}$  だけ動くのである。



第 140 圖

即ち求めるところの  $l_b$  はその  $\overline{dd_2}$  である。ところが其の圖に於て

$$\overline{dd_2} = \overline{dd_1} \times \tan \phi,$$

又一方に於て第139圖及び第10章式(17)に従ひ

$$\overline{dd_1} = \overline{aa_1} = \beta_a g_a$$

だから

$$l_b = \overline{dd_2} = \beta_a g_a \tan \phi$$

となる。但し a 點は d 點を通るA車齒面インボリュートの基點、 $a_1$  は同じく  $d_1$  點を通るインボリュートの基點である。

以上の  $l_a$  及び  $l_b$  を使つて

$$\left. \begin{aligned} S_a &= \frac{l_a - l_b}{l_a} = \frac{\overline{de} - g_a \tan \phi}{\overline{de}} = \frac{\overline{de} - \overline{Pe}}{\overline{de}} = \text{A車上の滑り率} \\ S_b &= \frac{l_b - l_a}{l_b} = \frac{g_a \tan \phi - \overline{de}}{g_a \tan \phi} = \frac{\overline{Pe} - \overline{de}}{\overline{Pe}} = \text{Bラック上の滑り率} \end{aligned} \right\} (31)$$

が得られる。

此の式はBが齒車であるときのSの式(30)からも之を直接に求めることができる。式(30)の右邊を分子分母とも  $g_b$  で割ると

$$S_a = \frac{\overline{de} - g_a \frac{\overline{df}}{g_b}}{\overline{de}}, \quad S_b = \frac{g_a \frac{\overline{df}}{g_b} - \overline{de}}{g_a \frac{\overline{df}}{g_b}}$$

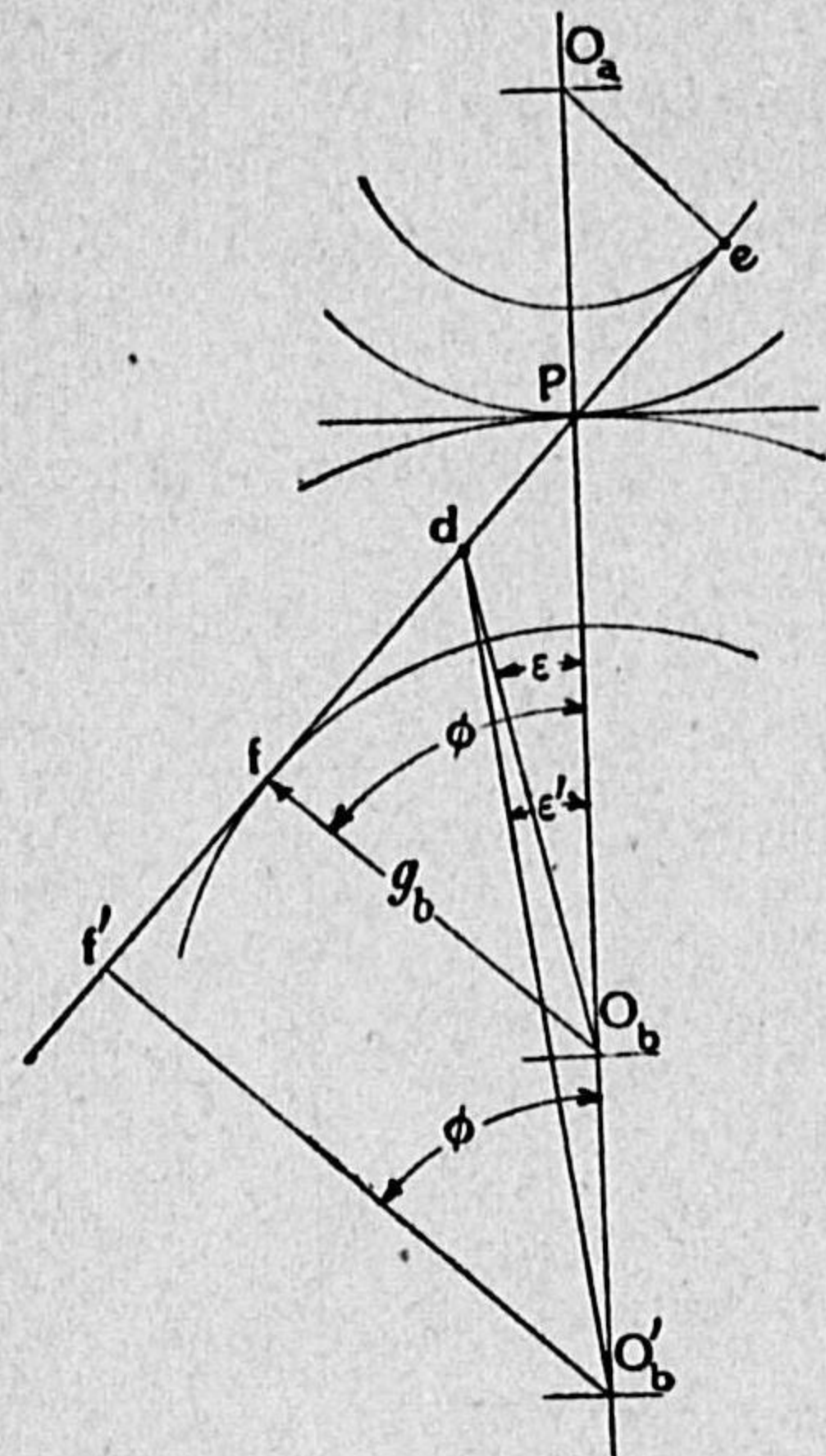
となる。ところで、この式の  $\overline{df}/g_b$  は第141圖で見ると  $\tan(\phi - \epsilon)$  に等しく、その中の角  $\epsilon$  は、B車の半徑を増して車の中心點が  $O_b$  から例へば  $O'_b$  へ移つたとすると、前よりも小さい値  $\epsilon'$  となり、次第にかやうにして、Bの半徑を無限大にして、即ち遂にラックになつたとすると、 $\epsilon$  なる角は結局零に歸するから、その際には

$$\overline{df}/g_b = \tan \phi$$



となり、之を上式に入れると

$$S_a = \frac{\bar{de} - g_a \tan \varphi}{de}, \quad S_b = \frac{g_a \tan \varphi - de}{g_a \tan \varphi}$$



第 141 圖

を得る。即ち前式(31)と同一物である。

接觸位置 d が車の回轉に伴つて e 點, P 點, 乃至 P 點から先き等へ順次に移るに従つて, S の値は式(31)が示すやうに

$$\begin{aligned} & e \text{ 點} \rightarrow P \text{ 點} \rightarrow P \text{ 點以後} \\ S_a & -\infty \rightarrow 0 \rightarrow 0 < S_a < 1 \\ S_b & 1 \rightarrow 0 \rightarrow S_b < 0 \end{aligned}$$

と變遷する。これで見ると、大體に於てラックに於けるよりも、齒車に於て滑り率は大であるといへる。

ラックに於ける滑り速度 — B

が上述の如くラックであるときの相對的滑り速度も、前節の二つの齒車の嚙合に於けるものから之を求めることができる。即ちそれには

$$s = S_b v_b = -S_a v_a$$

に於て、今求めた通りの値

$$S_b = \frac{g_a \tan \varphi - \bar{de}}{g_a \tan \varphi}, \quad v_b = \frac{l_b}{t} = \frac{\beta_a}{t} g_a \tan \varphi$$

$$S_a = \frac{\bar{de} - g_a \tan \varphi}{de}, \quad v_a = \frac{l_a}{t} = \frac{\beta_a}{t} \times \bar{de}$$

と、 $\beta_a/t = \omega_a$  なる關係とを代入して

$$s = \omega_a (g_a \tan \varphi - \bar{de})$$

を得る。尙この式で第138圖に對照して

$$g_a \tan \varphi = \bar{Pe}$$

と置けば

$$s = \omega_a (\bar{Pe} - \bar{de}) = -\omega_a \times \bar{Pd}$$

とも書ける。前に二つの齒車の嚙合に於ける滑り速度が

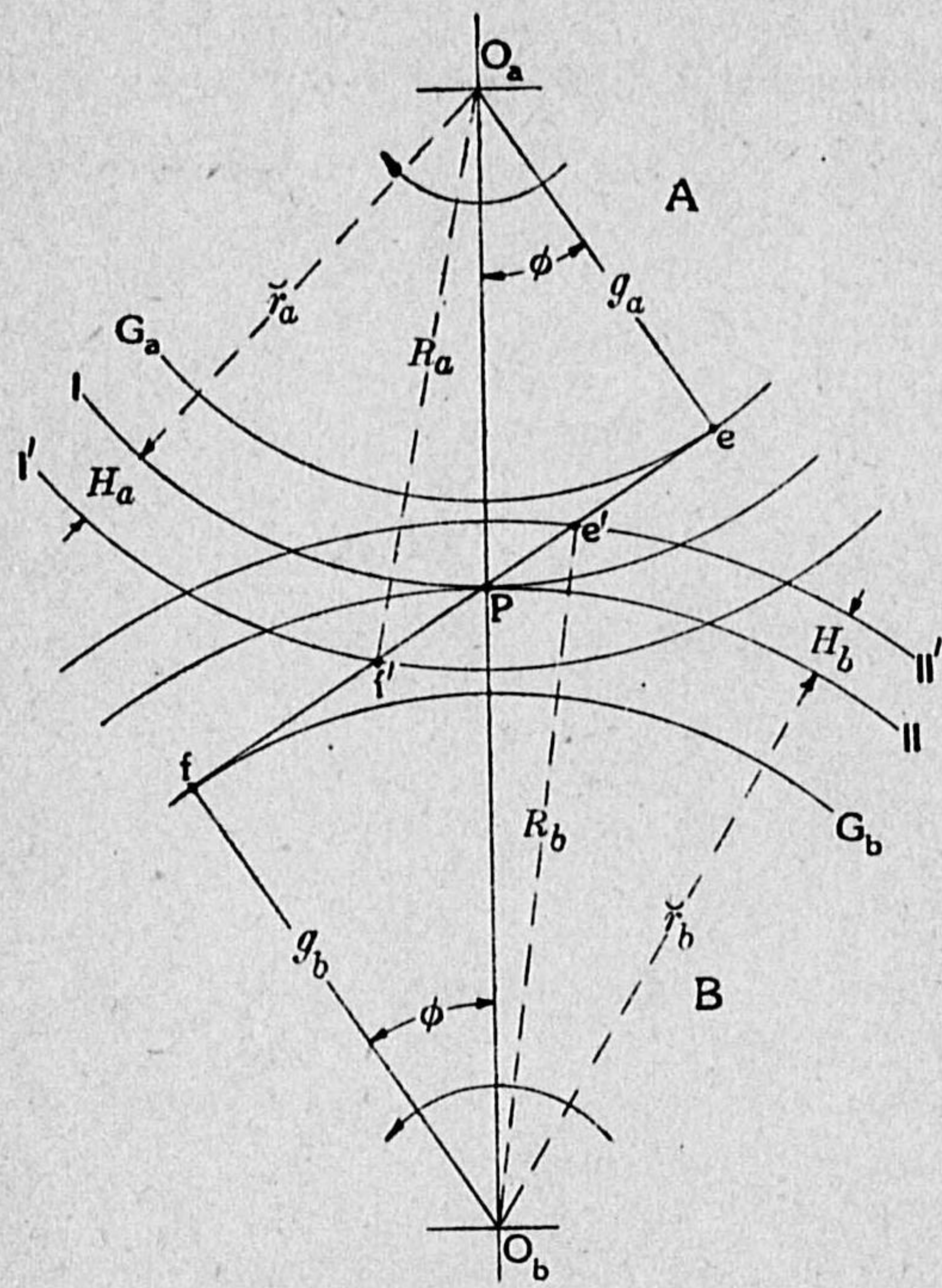
$$s = -(\omega_a + \omega_b) \times \bar{Pd}$$

であつたことに對して、此の場合の相違を注意すべきである。



### 第 15 章 齒先圓と滑り率

齒先圓半徑 — 相嚙合つてゐる二つのインボリュート外齒車 A 及び B (第 142 圖) に於て, A を起動車, B を從動車として矢の方向



第 142 圖

に廻すとき, 其の接觸位置軌跡は, ピッチ點 P を通つて兩車の基礎圓  $G_a$  及び  $G_b$  に切すところの直線即ち壓力線に沿つて生じ, その範圍は壓力線が圓  $G_a$  に切する點 e から, 圓  $G_b$  に切する點 f までの範圍内にあることを既に説明した。

接觸位置軌跡の實際の起點及び終點は, 兩車の中心距離と共に, 兩車の齒先圓(第 4 章)の大小に依つて定

まるべきで, 齒面が齒先まで完全にインボリュートで作られてゐるならば, B 車の齒先圓 II' が壓力線と交る點 e' を始點とし, A 車の齒先圓 I' が壓力線と交る點 f' を以て終點とするであらう。

今  $R_a = A$  車齒先圓 I' の半徑

$R_b = B$  車齒先圓 II' の半徑  
とすると, 上述の場合に於て, e' 點 f' 點と  $R_a$  及び  $R_b$  との關係は第 142 圖で明かである通り

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \sqrt{g_a^2 + (\overline{Pe} + \overline{Pf'})^2} \\ R_b &= \sqrt{g_b^2 + (\overline{Pf} + \overline{Pe'})^2} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

で與へられる, 但し  $g_a, g_b$  は基礎圓の半徑である。

この中で  $\overline{Pe}$  及び  $\overline{Pf}$  は, 前の如く  $r_a, r_b$  及び  $\phi$  を現在嚙合に於けるピッチ圓半徑及び壓力角としたとき

$$\overline{Pe} = r_a \sin \phi, \quad \overline{Pf} = r_b \sin \phi$$

であると共に,  $\overline{Pe}$  と  $\overline{Pe'}$  との長さの割合及び  $\overline{Pf}$  と  $\overline{Pf'}$  との長さの割合を

$$a = \frac{\overline{Pe'}}{\overline{Pe}}, \quad b = \frac{\overline{Pf'}}{\overline{Pf}}$$

の如く  $a$  及び  $b$  なる數で表はしたものとすると

$$\overline{Pe'} = a r_a \sin \phi, \quad \overline{Pf'} = b r_b \sin \phi$$

である。従つて之等を式(32)へ代入すると

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \sqrt{g_a^2 + (r_a + b r_b)^2 \sin^2 \phi} \\ R_b &= \sqrt{g_b^2 + (a r_a + r_b)^2 \sin^2 \phi} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

となる。この中で

$$g_a = r_a \cos \phi, \quad g_b = r_b \cos \phi$$

と置き, 且齒數を  $N_a, N_b$ , モジュールを  $M$  として

$$r_a = \frac{1}{2} M N_a, \quad r_b = \frac{1}{2} M N_b$$

と置けば, 式(33)は更に



$$\left. \begin{aligned} R_a &= \frac{1}{2} M \sqrt{N_a^2 \cos^2 \varphi + (N_a + bN_b)^2 \sin^2 \varphi} \\ R_b &= \frac{1}{2} M \sqrt{N_b^2 \cos^2 \varphi + (aN_a + N_b)^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

とも書ける。最後に兩車の齒數の比を式

$$\varepsilon = \frac{N_a}{N_b}$$

で示す通り  $\varepsilon$  とするならば

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \frac{1}{2} MN_a \sqrt{1 + \frac{b}{\varepsilon} (2 + \frac{b}{a\varepsilon}) \sin^2 \varphi} \\ R_b &= \frac{1}{2} MN_b \sqrt{1 + a\varepsilon (2 + a\varepsilon) \sin^2 \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

と書くこともできる。

特別な場合として、齒先圓が  $f$  點又は  $e$  點を通る場合だと、上式(32)乃至(35)に於て、 $a$  又は  $b$  を 1 と置けばよい。最も特別な場合として圓 I' が  $f$  點を通り、且同時に圓 II' が  $e$  點を通る場合だと、 $a$  及び  $b$  を共に 1 に等しと置いて、例へば

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \sqrt{g_a^2 + L^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{L^2 - g_b(2g_a + g_b)} \\ R_b &= \sqrt{g_b^2 + L^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{L^2 - g_a(g_a + 2g_b)} \end{aligned} \right\} \quad (33')$$

$$\left. \begin{aligned} R_a &= \frac{1}{2} MN_a \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon} (2 + \frac{1}{\varepsilon}) \sin^2 \varphi} \\ R_b &= \frac{1}{2} MN_b \sqrt{1 + \varepsilon (2 + \varepsilon) \sin^2 \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (35')$$

の如きが得られる。但し  $L$  は兩車間の中心距離であり、又式(33)の右端のは式(21)(第 11 章)

$$L \cos \varphi = g_a + g_b$$

を利用して求め得たものである。

**上齒高** — 上齒高(第 4 章)を A 車に於て  $H_a$ 、B 車に於て  $H_b$  とす

ると、それはピッチ圓半徑と齒先圓半徑との差、即ち

$$H_a = R_a - r_a, \quad H_b = R_b - r_b$$

であるから、例へば式(35)の表はし方に従ふならば

$$\left. \begin{aligned} H_a &= \frac{1}{2} MN_a \left[ \sqrt{1 + \frac{b}{\varepsilon} (2 + \frac{b}{\varepsilon}) \sin^2 \varphi} - 1 \right] \\ H_b &= \frac{1}{2} MN_b \left[ \sqrt{1 + a\varepsilon (2 + a\varepsilon) \sin^2 \varphi} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

である。

上齒高をモジュール單位で表はした數、即ち上齒高  $H$  とモジュール  $M$  との割合を、A 車では  $\mu_a$ 、B 車では  $\mu_b$  とすると

$$H_a = \mu_a M, \quad H_b = \mu_b M \quad (37)$$

であるから、之を式(36)と比較して

$$\left. \begin{aligned} \mu_a &= \frac{N_a}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{b}{\varepsilon} (1 + \frac{b}{\varepsilon}) \sin^2 \varphi} - 1 \right] \\ \mu_b &= \frac{N_b}{2} \left[ \sqrt{1 + a\varepsilon (2 + a\varepsilon) \sin^2 \varphi} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

を得る。

今假りに  $a=b$  なるやうに出来てゐるときに、A 車の齒數が B 車の齒數よりも少く、即ち

$$N_a < N_b, \quad \varepsilon < 1$$

の如き場合であるとするとき、式(36)(38)の實算の結果は

$$H_a > H_b, \quad \mu_a > \mu_b$$

となり、即ち小車の上齒高は大車の上齒高よりも大であり、又は大であり得ることを示してゐる。例へば

$$N_a = 20, \quad N_b = 26, \quad \varphi = 14^\circ 30', \quad a = b = 0.7$$

の場合について、式(38)から求めると

$$\mu_a = 0.798, \quad \mu_b = 0.545$$



となり、小車の上齒高の方が大である。然も上式が與へる上齒高は壓力角  $\phi$  を増すに従つて増大し、例へば上例と同じ場合に於て、壓力角  $\phi$  を變じて  $20^\circ$  としたものについて求めると

$$\mu_a = 1.444, \mu_b = 1.001$$

となることに依つても、之は明かである。

**ラックの上齒高** — A が齒數  $N_a$  の齒車であるのに對して、之に嚙合ふ B がラックであるときの同様なラック上齒高の算式を求めよう。

ラック B は B 齒車の齒數  $N_b$  が無限大になつたものと考へればよい。のだから、式(36)の第 2 式中、 $N_b$  に  $N_a/\epsilon$  を代入して  $H_b$  を

$$H_b = \frac{1}{2} MN_a \frac{\sqrt{1+a\epsilon(2+a\epsilon)\sin^2\phi}-1}{\epsilon}$$

の形に書き改めた後、この中の  $\epsilon$  を零に等しと置けば、そのときの  $H_b$  が即ち求めるところのラック上齒高であらう。然し此の式で、いきなり  $\epsilon=0$  と置いては、分數部分の分母も分子も共に零となつて、全體が不定數となるから、微分學の法則に従つて此の分數の代りに、この分子を  $\epsilon$  で微分したものを分子とし、この分母を同じく  $\epsilon$  で微分したものを分母とする新しい分數を作り、この新しい分數の中の  $\epsilon$  を零と置いて値を見出すことにする。分子を  $\epsilon$  で微分したものは

$$\frac{(1+a\epsilon)a\sin^2\phi}{\sqrt{1+a\epsilon(2+a\epsilon)\sin^2\phi}}$$

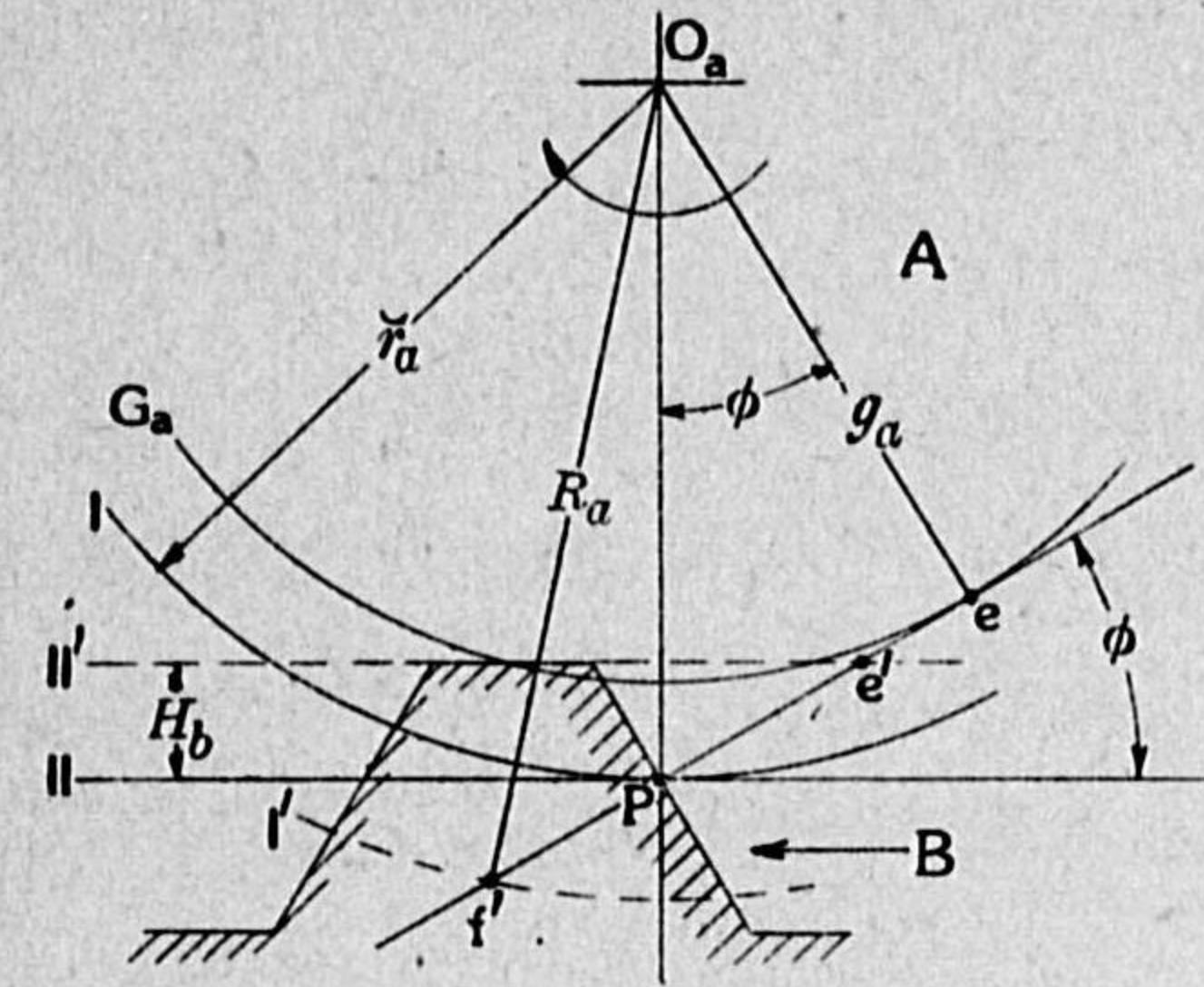
であり、分母  $\epsilon$  を  $\epsilon$  で微分したものは 1 であるから、それらで作つた新しい分數に於て  $\epsilon=0$  としたものは

$$a\sin^2\phi$$

であり、従つてラックの上齒高  $H_b$  は

$$H_b = \frac{1}{2} MN_a a \sin^2 \phi \quad (39)$$

となる。



第 143 圖

ラックの上齒高の式(39)を求めるための上述の方法は、學習者の練習のために、特に一般の式(36)から之を導き出す順序に従つたのであるが、單に式(39)を求めるだけのことならば、ラック嚙合圖(第143圖)から直接に之を見出した方が

簡單である。即ち第143圖に照し合せて

$$\begin{aligned} H_b &= \overline{Pe}' \times \sin \phi = \overline{Pe} \times a \sin \phi \\ &= \overline{r}_a \sin \phi \times a \sin \phi, \\ &= a \overline{r}_a \sin^2 \phi \\ &= \frac{1}{2} MN_a a \sin^2 \phi \end{aligned} \quad (40)$$

として得られる。

ラックの上齒高  $H_b$  は式(39)(40)が示す通り、A車が大であるときほど、又壓力角  $\phi$  が大であるときほど、之が大であり又は之を大にし得るのであつて、例へば上式に従ひ  $a=0.7$  のものについて一例を擧げると

$N_a =$	26	20
$\phi = 14^\circ 30'$	$H_b = 0.570 M$	$= 0.439 M$
$\phi = 20^\circ$	$H_b = 1.064 M$	$= 0.819 M$

となり、即ち  $\phi$  及び  $N_a$  の大なるに伴つて大である。



最大滑り率 — AB 兩齒車の嚙合に於て、滑り率は第 14 章の式 (30) に従ひ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A車} \text{上} \quad S_a = 1 - \varepsilon \frac{\overline{df}}{de} \\ \text{B車} \text{上} \quad S_b = 1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\overline{de}}{df} \end{array} \right.$$

であるから、齒先圓が前節の如く定まつてゐるときに、 $S_a$  に於ては接觸點 d (第 135 圖) が  $f'$  點 (第 142 圖) に在るときに正の最高値、d 點が  $e'$  點 (第 142 圖) に在るときに負の最高値となり、又  $S_b$  に於ては d 點が  $e'$  點に在るときに正の最高値、 $f'$  點に在るときに負の最高値となる。従つて

$\Sigma^*$  = 正であるときの  $S$  の最高値

$\Sigma$  = 負であるときの  $S$  の最高値

とすると

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_a^* = 1 - \varepsilon \frac{\overline{f'f}}{f'e}, \quad \Sigma_b^* = 1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\overline{e'e}}{e'f} \\ \Sigma_a = 1 - \varepsilon \frac{\overline{e'f}}{c'e}, \quad \Sigma_b = 1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\overline{f'e}}{f'f} \end{array} \right\} \quad (41)$$

である。

第 142 圖に従つて

$$f'e = \sqrt{R_a^2 - g_a^2}, \quad e'f = \sqrt{R_b^2 - g_b^2}$$

$$\overline{f'f} = \overline{Pf} - \overline{Pf'} = \check{r}_b \sin \varphi - (\sqrt{R_a^2 - g_a^2} - \check{r}_a \sin \varphi)$$

$$= (\check{r}_a + \check{r}_b) \sin \varphi - \sqrt{R_a^2 - g_a^2},$$

$$\overline{e'e} = \overline{Pe'} - \overline{Pe} = \check{r}_a \sin \varphi - (\sqrt{R_b^2 - g_b^2} - \check{r}_b \sin \varphi)$$

$$= (\check{r}_a + \check{r}_b) \sin \varphi - \sqrt{R_b^2 - g_b^2}$$

と書くならば、上式(40)中  $\overline{f'f}/\overline{f'e}$  と  $\overline{e'e}/\overline{e'f}$  は

$$\left. \begin{array}{l} \frac{f'f}{f'e} = \frac{L \sin \varphi - \sqrt{R_a^2 - g_a^2}}{\sqrt{R_a^2 - g_a^2}} \\ \frac{e'f}{e'e} = \frac{\sqrt{R_b^2 - g_b^2}}{L \sin \varphi - \sqrt{R_b^2 - g_b^2}} \end{array} \right\} \quad (42)$$

となる。又更に

$$\check{r}_a = \frac{1}{2} MN_a, \quad \check{r}_b = \frac{1}{2} MN_b,$$

$$L = \frac{1}{2} M(N_a + N_b),$$

$$R_a = \check{r}_a + H_a = \frac{1}{2} MN_a + \mu_a M,$$

$$= \frac{1}{2} M(N_a + 2\mu_a),$$

$$R_b = \frac{1}{2} M(N_b + 2\mu_b),$$

$$g_a = \check{r}_a \cos \varphi = \frac{1}{2} MN_a \cos \varphi,$$

$$g_b = \frac{1}{2} MN_b \cos \varphi$$

等を式(42)へ代入して若干の運算を行ふと

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\overline{f'f}}{f'e} = \frac{1 + \varepsilon(1 - \sqrt{1 + \mu_a'})}{\varepsilon \sqrt{1 + \mu_a'}} \\ \frac{\overline{e'f}}{e'e} = \frac{\sqrt{1 + \mu_b'}}{\varepsilon + (1 - \sqrt{1 + \mu_b'})} \end{array} \right\} \quad (43)$$

が得られる。但し上式中  $\mu_a', \mu_b'$  は

$$\mu_a' = \frac{4\mu_a}{N_a \sin^2 \varphi} \left(1 + \frac{\mu_a}{N_a}\right),$$

$$\mu_b' = \frac{4\mu_b}{N_b \sin^2 \varphi} \left(1 + \frac{\mu_b}{N_b}\right)$$

である。或は又同じものを次ぎのやうに書き表はすこともできる。即ち

$$\overline{f'f} = \overline{Pf} - \overline{Pf'} = (1 - b) \times \overline{Pf},$$



$$\begin{aligned}\bar{e}'e &= \bar{P}e - \bar{P}e' = (1-a) \times \bar{P}e, \\ \bar{e}'f &= \bar{P}f + \bar{P}e' = \bar{P}f + a \times \bar{P}e, \\ \bar{f}'e &= \bar{P}e + \bar{P}f' = \bar{P}e + b \times \bar{P}f, \\ \bar{P}e &= \bar{r}_a \sin \varphi, \quad \bar{P}f = \bar{r}_a \sin \varphi, \quad \varepsilon = \bar{r}_a / \bar{r}_b\end{aligned}$$

等を用ふると

$$\frac{\bar{f}'f}{\bar{f}'e} = \frac{1-b}{\varepsilon+b}, \quad \frac{\bar{e}'f}{\bar{e}'e} = \frac{1+a\varepsilon}{\varepsilon(1-a)} \quad (44)$$

である。

正負最高の滑り率  $\Sigma^*$  と  $\Sigma$  とを比較するに、一般に  $\Sigma$  の方が絶対値に於て  $\Sigma^*$  よりも大きい。即ち

$$|\Sigma_a| > \Sigma_a^*, \quad |\Sigma_b| > \Sigma_b^*$$

である。然し必ず常にそうなるといふのではなくて、反對に  $|\Sigma| < \Sigma^*$  である場合が考へ得られないこともない。その場合を式(44)を用ひて求めて見ると、 $a$  と  $b$  とが相等しくて、例へばそれが  $k$  である場合だと、多少の運算の後

$$|\Sigma_a| < \Sigma_a^* \text{ には } \varepsilon < 1-2k,$$

$$|\Sigma_b| < \Sigma_b^* \text{ には } 1/\varepsilon < 1-2k$$

を必要条件とするといふ結果が得られる。然しこの条件が成立つのは極端に特別な場合のみに限られ、普通一般には  $|\Sigma| > \Sigma^*$  と考へて差支へなく、即ち滑り率  $S_a, S_b$  の最大値は夫々  $\Sigma_a, \Sigma_b$  である。

A車がラックBと噛合つてゐるときの滑り率は、前章式(31)及び第138圖に従つて

$$\text{A車} \text{ 上 } S_a = 1 - \frac{\bar{P}e}{de}, \quad \text{ラックB} \text{ 上 } S_b = 1 - \frac{\bar{d}e}{\bar{P}e}$$

であつた。これらの最高値を同じく正を  $\Sigma^*$ 、負を  $\Sigma$  とすると、第

143圖に照し合せて

$$\left. \begin{aligned}\Sigma_a^* &= 1 - \frac{\bar{P}e}{f'e}, \quad \Sigma_b^* = 1 - \frac{\bar{e}'e}{\bar{P}e} \\ \Sigma_a &= 1 - \frac{\bar{P}e}{e'e}, \quad \Sigma_b = 1 - \frac{\bar{f}'e}{\bar{P}e}\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

となる。これへ

$$\bar{P}e = \bar{r}_a \sin \varphi = \frac{1}{2} MN_a \sin \varphi,$$

$$\bar{f}'e = \sqrt{R_a^2 - g_a^2} = \frac{1}{2} MN_a \sin \varphi \sqrt{1 + \mu_a'},$$

$$\bar{e}'e = \bar{P}e - \bar{P}e' = \bar{P}e - a \times \bar{P}e,$$

$$= (1-a) \bar{r}_a \sin \varphi = \frac{1}{2} (1-a) MN_a \sin \varphi$$

等を代入すると

$$\frac{\bar{P}e}{f'e} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_a'}}, \quad \frac{\bar{P}e}{e'e} = \frac{1}{1-a} \quad (46)$$

となる。式(46)の第一式は式(43)(41)より、又第二式は式(44)(41)より、夫夫  $\varepsilon=0$  と置いて直ちに得られるものである。

ラックの場合の最大滑り率は、式の上からは其の関係を簡単に表明しにくい、

$$|\Sigma_b| < \Sigma_b^* \text{ には } a > \sqrt{1 + \mu_a'} - 1$$

が必要であつて、それは或る程度以上に  $H_a$  が小であり、且  $H_b$  が大であることを意味し、 $\Sigma_b, \Sigma_b^*$  何れが最大であるかは一般的には言ひにくい。 $\Sigma_a, \Sigma_a^*$  については數式的關係が尙ほ一層複雑であるが、一般には  $\Sigma_a$  が最大滑り率であると見てよい。



## 第16章 接觸齒數

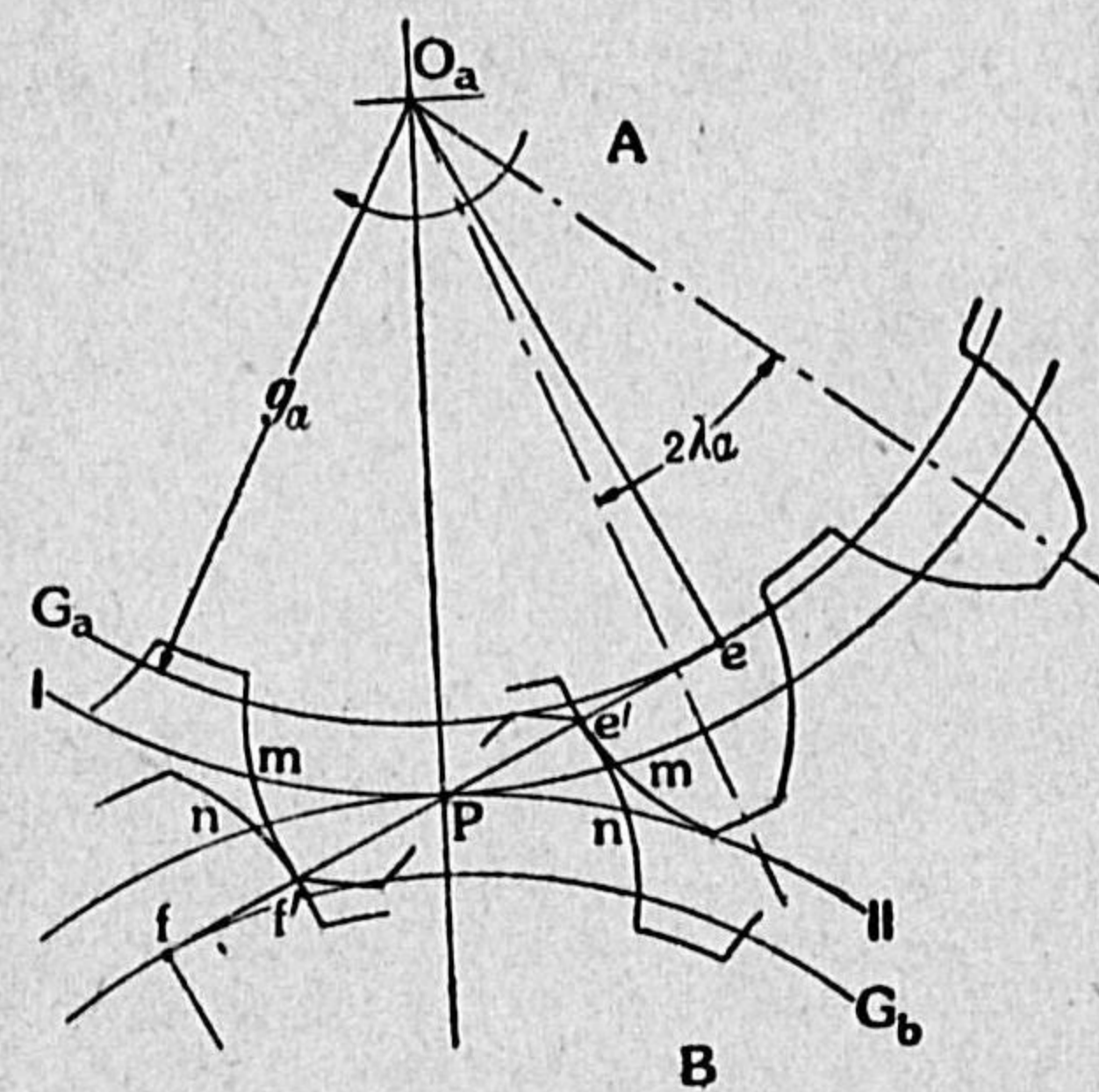
インボリュート歯車の接觸齒數——齒車のピッチの適否、即ち運轉の圓滑等齊さ、装置の大小、又は齒面荷重の多少などを問題とする場合には、相嚙合つてゐる二つの齒車に於て、同時に相接觸してゐる齒が何對あるかを考へることが必要である。この齒數が多ければ多いほど、装置それ自體は大きくなるが、運轉を圓滑にし荷重を輕減する上に於て有利であることは明かである。そこで或る一つの齒が對手の齒と接觸を始めて接觸を終るまでに、その車が廻つた角度 $\theta$ を其の車のピッチ角 $2\lambda$  (第13章) で除した商 $n$ を求め、之を同時接觸齒數又は略して接觸齒數と呼んで、上記問題を論ずる場合の代表數値とする。即ち

$$n = \theta / 2\lambda \quad (47)$$

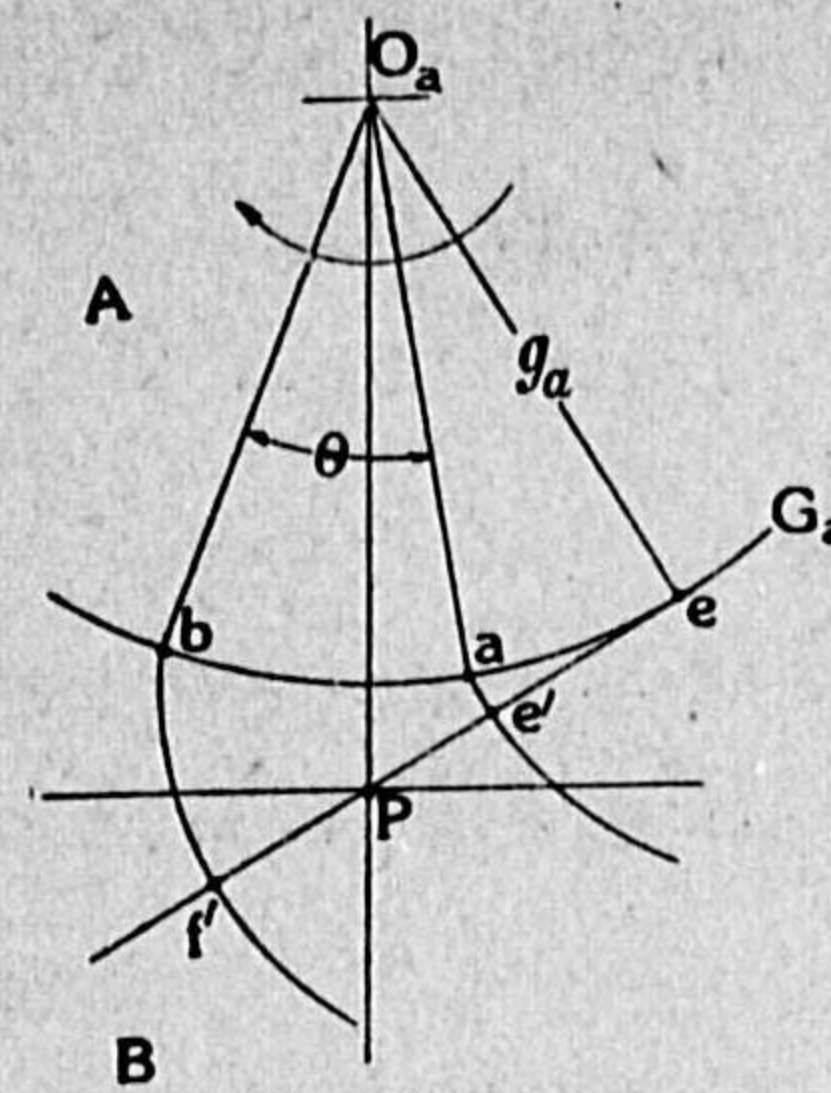
である。

例へばA及びBなる二つのインボリュート齒車がAを起動車として、第144圖の如く嚙合ひながら矢の方向に廻つてゐるとし、A車の或る齒mが對手の齒nと前章の

如く先づ位置 $e'$ に於て接觸を始め、接觸位置が次第に移つて、遂に位置 $f'$ に於て接觸が終るとする。齒面が $e'$ 點を通るときの齒面インボリュートの起點をa (第145圖)、同じく $f'$ 點を通るときの起



第 144 圖



第 145 圖

點をbとすると、齒mが接觸を始めてから終るまでの間にA車が廻つた角度 $\theta$ は、即ち $\angle aO_ab$ である。然るに $\angle aO_ab$ は之をラジアンで表はしたとき、圓弧 $\widehat{ab}$ をその半徑 $g_a$ で除したものに等しく、従つて

$$\theta = \widehat{ab} / g_a$$

である。また一方で此の車の基礎圓

圓周ピッチ(第13章)を $P_0$ とすると、式(26)に依り

$$P_0 = 2\lambda_a g_a$$

であるから、式(47)の接觸齒數 $n$ は

$$n = \theta / 2\lambda_a = \widehat{ab} / P_0$$

となる。圓弧の長さ $\widehat{ab}$ は第145圖で見ると、第10章の式(17)に従つて

$$\widehat{ab} = e'f'$$

であるから、 $n$ の値は更に

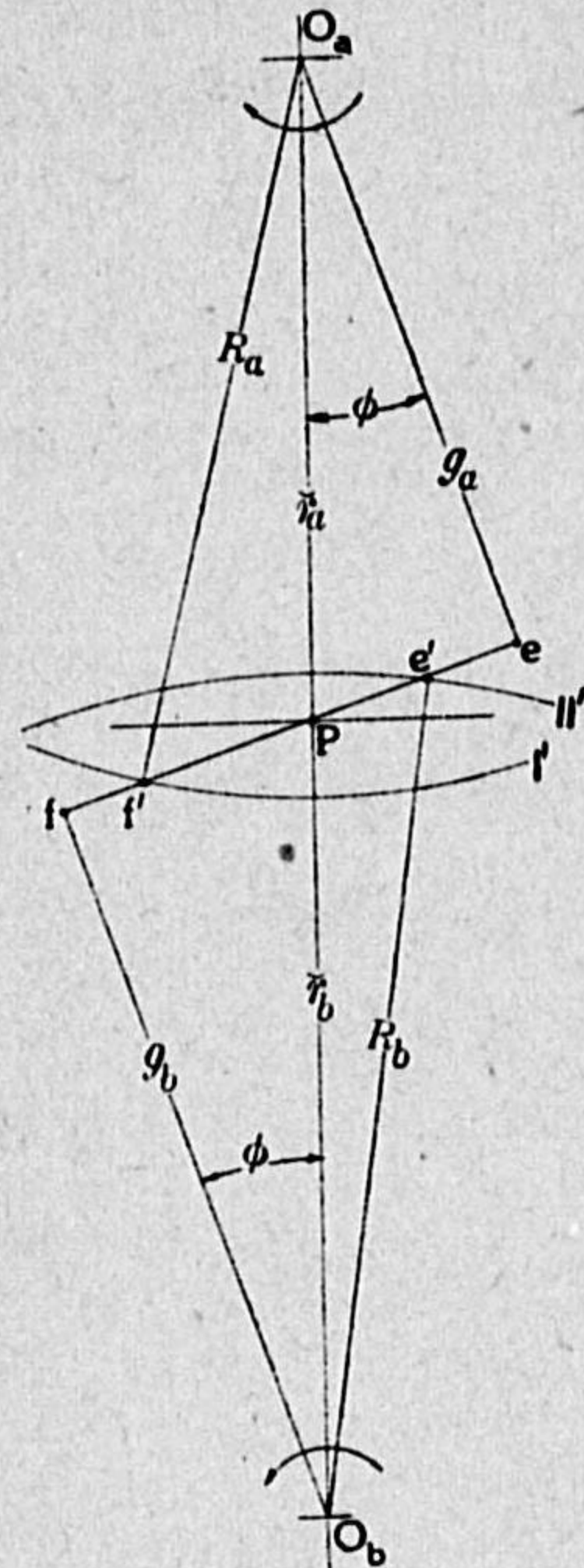
$$n = \frac{e'f'}{P_0} = \frac{\text{接觸位置軌跡の實際長さ}}{\text{基礎圓圓周ピッチ}} \quad (48)$$

となる。この $n$ の値は起動車Aの齒mについて、それが圖示の如く矢の方向へ廻つたものとして、之を求めたものであるが、基礎圓圓周ピッチは、既に第13章に於て述べた通り、B車のはA車のと當然相等しかるべきものであり、また接觸位置軌跡の實際長さなるものは、後の算式から見ても判る通り、壓力角が一定のとき、兩車の齒先圓の大きさに従つて定まり、回轉の方向如何、或は何れが起動車であるか等の事柄には無關係であるから、式(48)で求め得た接觸齒



數  $n$  は、兩側齒面が同一にできてゐる二つの一定のインボリュート齒車の嚙合に於て、中心距離さへ不變ならば、それは既に先天的に定つてゐる一つの固有値であるといふことができる。

第 146 圖に於て



第 146 圖

$$\begin{cases} Pe' = e'f - Pf = \sqrt{R_b^2 - g_b^2} - \tilde{r}_b \sin \varphi \\ Pf' = f'e - Pe = \sqrt{R_a^2 - g_a^2} - \tilde{r}_a \sin \varphi \end{cases}$$

であり、従つて

$$\begin{aligned} e'f' &= Pe' + Pf', \\ &= \sqrt{R_a^2 - g_a^2} + \sqrt{R_b^2 - g_b^2} \\ &\quad - (\tilde{r}_a + \tilde{r}_b) \sin \varphi \end{aligned}$$

となるから、式(48)は

$$n = \frac{\sqrt{R_a^2 - g_a^2} + \sqrt{R_b^2 - g_b^2} - (\tilde{r}_a + \tilde{r}_b) \sin \varphi}{P_q}$$

とも書ける。尚ほ此の式に於て、

$$g_a = \tilde{r}_a \cos \varphi = \frac{1}{2} MN_a \cos \varphi,$$

$$g_b = \tilde{r}_b \cos \varphi = \frac{1}{2} MN_b \cos \varphi,$$

$$P_q = 2\pi g_a / N_a = M\pi \cos \varphi$$

と置き、且第 15 章に従つて

$$\begin{cases} R_a = \tilde{r}_a + H_a = \frac{1}{2} MN_a + \mu_a M \\ R_b = \tilde{r}_b + H_b = \frac{1}{2} MN_b + \mu_b M \end{cases}$$

と置くならば、若干の運算の後に

$$n = \frac{1}{2\pi \cos \varphi} \left\{ \sqrt{N_a^2 \sin^2 \varphi + 4\mu_a N_a + 4\mu_a^2} + \sqrt{N_b^2 \sin^2 \varphi + 4\mu_b N_b + 4\mu_b^2} - (N_a + N_b) \sin \varphi \right\} \quad (50)$$

が得られる。即ち壓力角、齒數及び上齒高を用ひて接觸齒數を算出するための式である。

式(50)を用ひ、齒數比  $\varepsilon = N_a/N_b = 1$  なる一對の齒車の若干例について接觸齒數  $n$  の値を求めると次ぎの通りである。

	壓力角	齒 數	上齒高	接觸齒數
(1)	14°30'	21	1 $M$	1.81
(2)	20°	21	1 $M$	1.57
(3)	20°	18	1 $M$	1.53
(4)	20°	18	0.8 $M$	1.27
(5)	20°	12	0.8 $M$	1.19

以上の計算例で見ても明かである如く、壓力角が増すとき、齒數が減るとき、又は上齒高が減るときに接觸齒數は減少する。接觸齒數  $n$  が丁度 1 であるときは、1 對の齒が接觸を終ると同時に、直ぐ次ぎの 1 對の齒が接觸を始めることを示し、 $n=2$  のときは常に 2 對の接觸齒が存在し、又例へば  $n=1.27$  のときは接觸の全角度  $\theta$  の内、前後の 0.27/1.27 に於ては 2 對の齒が相接觸し、残りの 0.73/1.27 に於ては 1 對の齒が相接觸することを示すのである。一般に

$$n = q + p \quad (q \text{ 整數, } p \text{ 端數})$$

ならば、 $\theta$  の内、前後の  $p/(q+p)$  に於ては  $(q+1)$  對の齒が相接觸し、残りの  $(q-p)/(q+p)$  に於ては  $q$  對の齒が相接觸することを意味する。

連続運轉に必要な  $n$  の最小値は、極端に數理的にいへば 1 であつても差支へないわけであるが、實用上には其の最小値が 1.2 程度であるとせられてゐる。例へば上例の(5)の如きは  $n=1.19$  であるから、即ち最小値であり、従つてそれ以上に齒數又は上齒高を減じ又は壓力角を増すことは、即ち接觸齒數の點から見て、實際には



ほとんど許され難いと考へていゝ。

Bが齒車でなくてラックである場合には、前章第143圖に従ひ、

$$\overline{Pe'} = H_b / \sin \varphi$$

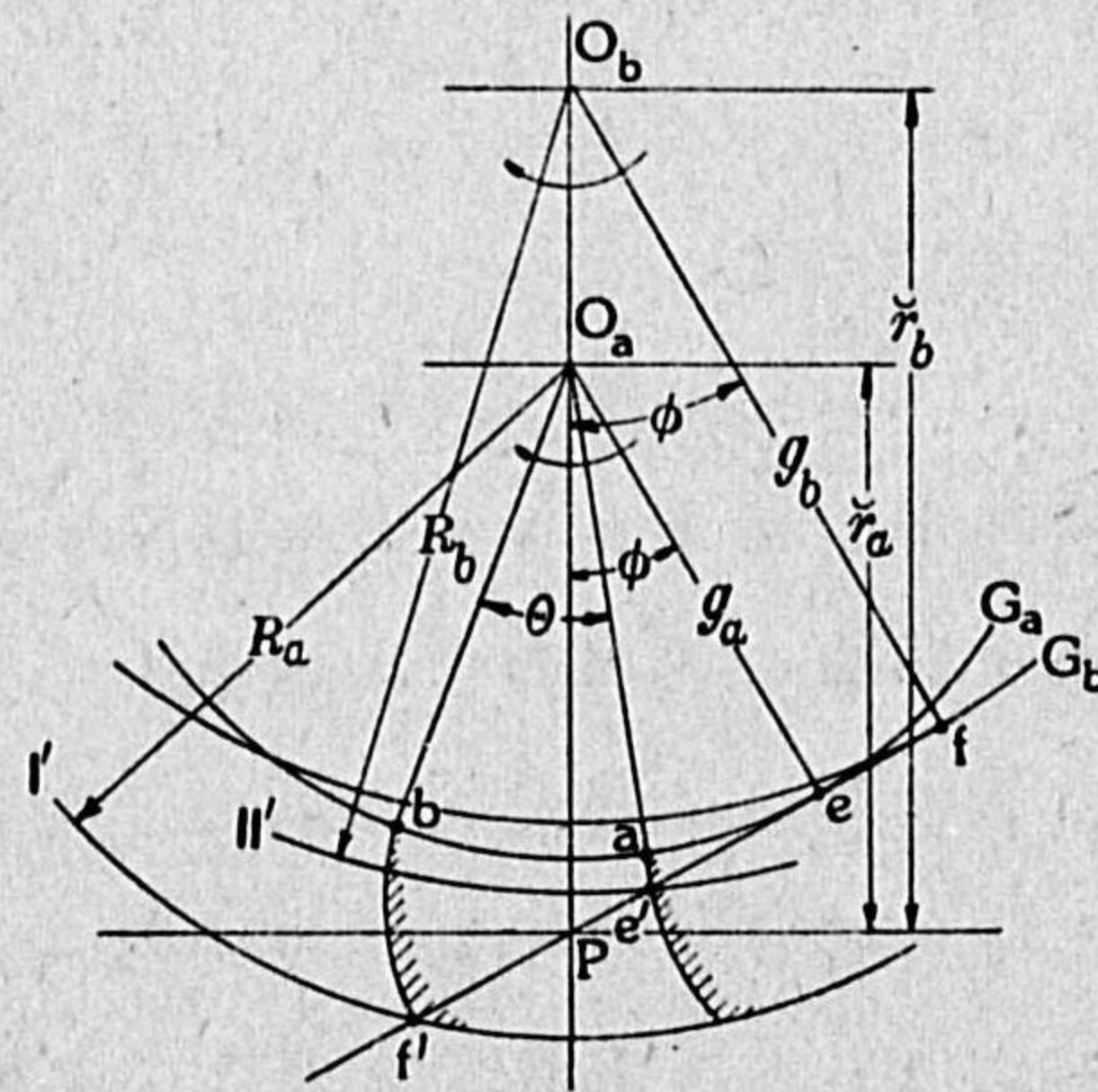
であるから、

$$\begin{aligned} n &= \frac{\sqrt{R_a^2 - g_a^2} - \tilde{r}_a \sin \varphi + H_b / \sin \varphi}{P_g} \\ &= \frac{1}{2\pi \cos \varphi} (\sqrt{N_a^2 \sin^2 \varphi + 4\mu_a N_a + 4\mu_a^2} \\ &\quad - N_a \sin \varphi + 2\mu_b / \sin \varphi) \end{aligned} \quad (51)$$

となる。

此の式(51)に従つて、若干の例につき接觸齒數  $n$  の値を求めると、次ぎの通りである。其の値は前例の嚙合比  $\varepsilon=1$  のものに比べて幾分増してゐることが判る。

壓力角	A車齒數	A車及びラック上齒高	嚙合齒數
20°	21	1M	1.78
20°	18	1M	1.76
20°	18	0.8M	1.43



第147圖

**内接の接觸齒數** —— 最後に内接嚙合の場合を考へ、例へばAが外齒車であるのに對して、之と嚙合ふBが内齒車であるとする。A車の齒先圓I' (第147圖)が壓力線を切る點を前の如く  $f'$  とし、又B内齒車の齒先圓II'が切る點を  $e'$  とすると、既に第11章に於て述べた通り、接觸位置

軌跡の實際長さは  $\overline{e'f'}$  であり、これは又A車の基礎圓  $G_a$  に沿ふ圓弧の長さ  $\widehat{ab}$  に等しい等、すべて前述の外接嚙合の場合に於けると同一の考察経路を経て

$$\begin{aligned} n &= \frac{\overline{e'f'}}{P_g} = \frac{\overline{Pe'} + \overline{Pf'}}{P_g} = \frac{(\overline{Pf'} - \overline{e'f'}) + (\overline{e'f'} - \overline{Pe})}{P_g} \\ &= \frac{(\tilde{r}_b \sin \varphi - \sqrt{R_b^2 - g_b^2}) + \sqrt{R_a^2 - g_a^2} - \tilde{r}_a \sin \varphi}{P_g} \end{aligned}$$

が得られ、更に之へ前と同様にして

$$g = \tilde{r} \cos \varphi, \quad \tilde{r} = \frac{1}{2} MN,$$

$$R_a = \tilde{r}_a + H_a = \frac{1}{2} MN_a + \mu_a M$$

を代入し、且内齒車に對しては

$$R_b = \tilde{r}_b - H_b = \frac{1}{2} MN_b - \mu_b M$$

と置くならば

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2\pi \cos \varphi} \left\{ \sqrt{N_a^2 \sin^2 \varphi + 4\mu_a N_a + 4\mu_a^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{N_b^2 \sin^2 \varphi - 4\mu_b N_b + 4\mu_b^2} + (N_b - N_a) \sin \varphi \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

が得られる。但し  $N_b$  は内齒車Bの齒數、 $H_b$  は同じく上齒高で、上齒とは第9章サイクロイド内齒車に關して述べた通り、ピッチ圓よりも内方に在る齒の部分の指したものである。

齒數及びその他の條件も相等しく、従つて嚙合比  $\varepsilon$  も相等しい一對の齒車に於て、それが外接嚙合であるときと内接嚙合であるときとを比べてみるに、接觸齒數  $n$  の値は内接の方が多かるべきことは、ラックの場合から推しても想像されることである。然し實際には必ずしもさうでなく、それは接觸位置が前に既に述べた通り一般に  $e$  點(第147圖, 第146圖, 第105圖)より外方に在ることを許されず、従つて之れに應ずる必要と、後の説明に於て述べる其の



他の必要とからして、P 點より e 點に至るまでの範囲内に e' 點が在るやうに上齒高を制限することが希望せられ、その制限の度は外齒車に對するよりもラックに對して強く、ラックに對するよりも内齒車に對して更にひどいから、内齒車の上齒高は即ち著しく小となり、結局接觸齒數  $n$  が内接嚙合に於ては必ずしも大でないといふことになるのである。

上述の如く上齒高  $H_b$  の適當な最大値は、その齒先圓  $\Pi'$  が e 點を通るときのものであるから、その  $\mu_b$  値は外齒車 B 及びラック B に對しては、式(38)及び式(39)の  $a$  を 1 に等しと置いて

## 1) 外齒車 B

$$\mu_b = \frac{1}{2} N_b \{ \sqrt{1 + \varepsilon(2 + \varepsilon) \sin^2 \varphi} - 1 \},$$

## 2) ラック B

$$\mu_b = \frac{1}{2} N_a \sin^2 \varphi$$

である。内齒車 B に對しては、第147圖に於て e' 點を e 點へ移して

$$\begin{aligned} H_b &= \tilde{r}_b - R_b, \\ &= \tilde{r}_b - \sqrt{(ef)^2 + g_b^2} = \tilde{r}_b - \sqrt{(\tilde{P}f - Pe)^2 + g_b^2}, \\ &= \tilde{r}_b - \sqrt{(\tilde{r}_b - \tilde{r}_a)^2 \sin^2 \varphi + \tilde{r}_b^2 \cos^2 \varphi}, \end{aligned}$$

従つて  $H_b = \mu_b M$ ,  $\tilde{r} = \frac{1}{2} MN$ ,  $\varepsilon = N_a/N_b$  とすると

## 3) 内齒車 B

$$\mu_b = \frac{1}{2} N_b \{ 1 - \sqrt{1 - \varepsilon(2 - \varepsilon) \sin^2 \varphi} \}$$

である。試みに  $\varphi = 14^\circ 30'$ ,  $N_a = 21$ ,  $N_b = 42$  のものについて、上式の如き最大の  $\mu_b$  値を求めると

	外齒車 B	ラック B	内齒車 B
$\mu_b =$	0.809	0.658	0.500

となる。

之に基き、例へば同じ場合に、 $\mu_a = 1$  なる A 車と、 $\mu_b = 0.80$  なる B 車とが外接嚙合に在るときの接觸齒數  $n$  を、既知の式(50)から求めると

$$n = 1.76$$

となり、又一方に於て  $\mu_a = 1$  なる外齒車 A と、 $\mu_b = 0.50$  なる内齒車 B とが内接嚙合に在るときの  $n$  を前式(52)から求めると

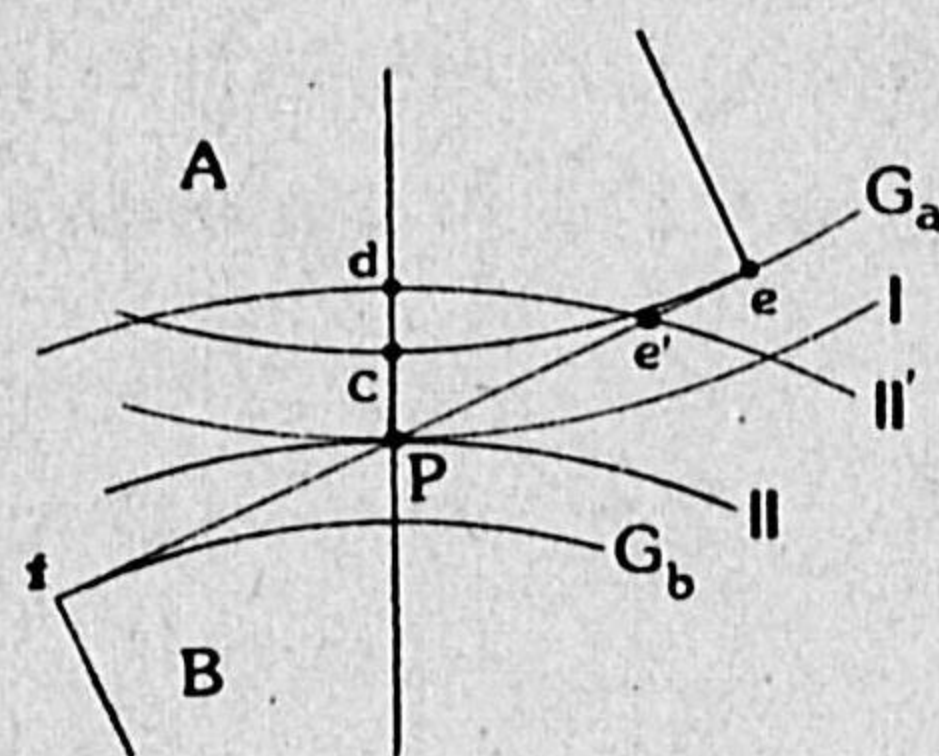
$$n = 1.77$$

を得、即ち此の場合には偶然にも外接と内接とが事實上同じ接觸齒數を與へる有様となつてゐる。要するに内接の接觸齒數は必ずしも大ならず、又ラックに於ても之と多少同様のことがあると謂へるのである。



## 第17章 上齒高制限と齒數制限

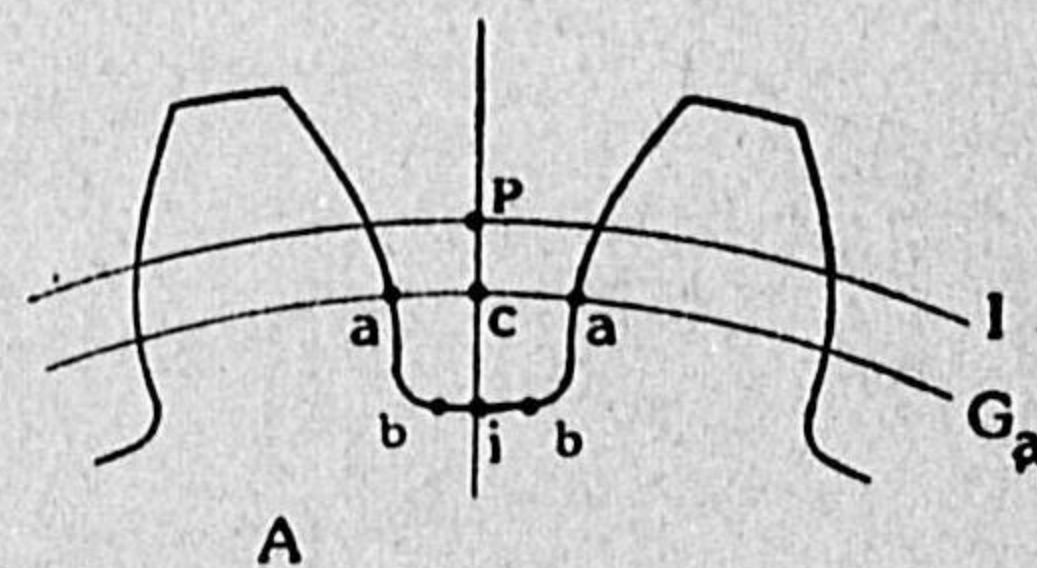
**上齒高制限** — インボリュートは其の基礎圓の外側にのみ存在し、基礎圓の内側には存在しない。従つてインボリュート齒車の有效齒面は基礎圓の外側だけに限られ、即ち齒と齒との接觸は基礎圓外の部分だけに限られなくてはならない。若しさうでなくて、A車とB車との齒面が基礎圓の内側で接觸するとなると、それは一定角速度比の完全な傳達には有害であつて、此の種の接觸



第 148 圖

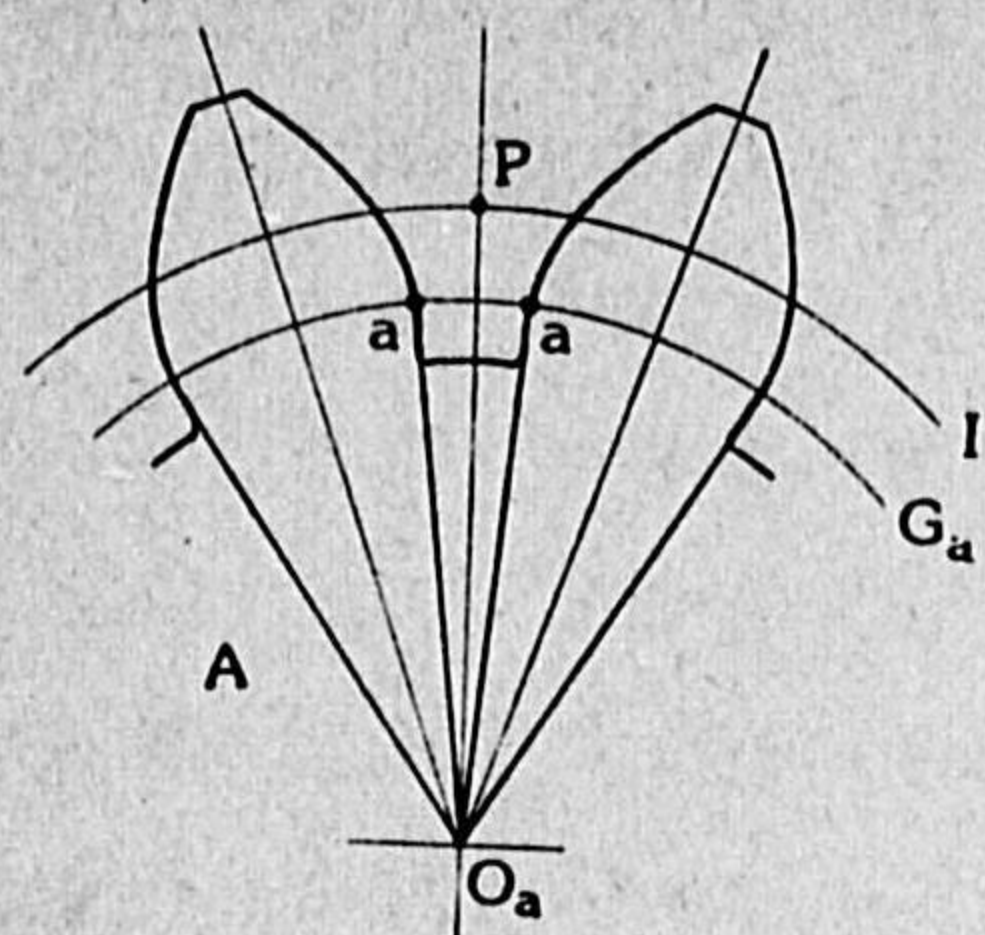
の起らないやうに齒底を形作り、且上齒高に制限を加へるべきである。今A車とB車とが第148圖の如く外接嚙合をしてゐるとき、兩車の中心點を結ぶ線を、A車の基礎圓  $G_a$  が  $c$  點で切り、又B車の齒先圓  $II'$  が  $d$  點で切るとすると、B車の齒先がA車の基礎圓内へ長さ  $\overline{cd}$  だけ喰ひ入ることとなり、従つてA車の齒隙に於ては、第149圖に示した  $\overline{ci}$  なる長さが、長さ  $\overline{cd}$  よりも

充分に大であると共に、下齒々面  $abi$  が、B車の上齒と決して接觸しないやうな形に作られてなくてはならないといふことになる。



第 149 圖

A車に對してB車に於ても亦同様である。長さ  $\overline{ci}$  と長さ  $\overline{cd}$  との差は第4章に述べた所謂頂隙であつて、例へばそれを  $0.2M$  とするが如きである。又下齒齒面の側面部分は、第150圖の如くインボ



第 150 圖

リュート起點  $a$  から、それを車の中心點  $O_a$  へ結びつけた半徑直線とすることが一般の慣行である。但しそれでは時に差支への起る場合があること、後に示す通りである。

上齒高を大にすることは接觸齒數を増す點に於て有利ではあるが、今述べた事柄から見ると、之を濫り

に増すことは必ずしも望ましくない。即ち對手の齒車に於て齒隙が深められ、且下齒が薄肉となつて負荷力の少い齒を生ずるからである。又一方から言ふと、接觸位置軌跡は  $ef$  間(第146圖, 第148圖)に限られてゐるのであるから、 $e'$  點又は  $f'$  點が此の範囲内にないやうな過大な上齒高は、單に上述のやうな不利益を伴ふばかりではなく、それは齒先として全然無用のものであるとも言はなくてはならない。

この有害無益を避ける主旨の下に上齒高の最大限を定めるとすると、それは  $e'$  點が  $e$  點と一致し、又は  $f'$  點が  $f$  點と一致した場合であるべきであるから、そのときの上齒高係數  $\mu$  の値は、外齒車A及びBのとき、式(38)の  $a$  及び  $b$  を夫々1と置いて

$$\left. \begin{aligned} \mu_a &= \frac{N_a}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon} \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) \sin^2 \varphi} - 1 \right] \\ \mu_b &= \frac{N_b}{2} \left[ \sqrt{1 + (2 + \epsilon) \sin^2 \varphi} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

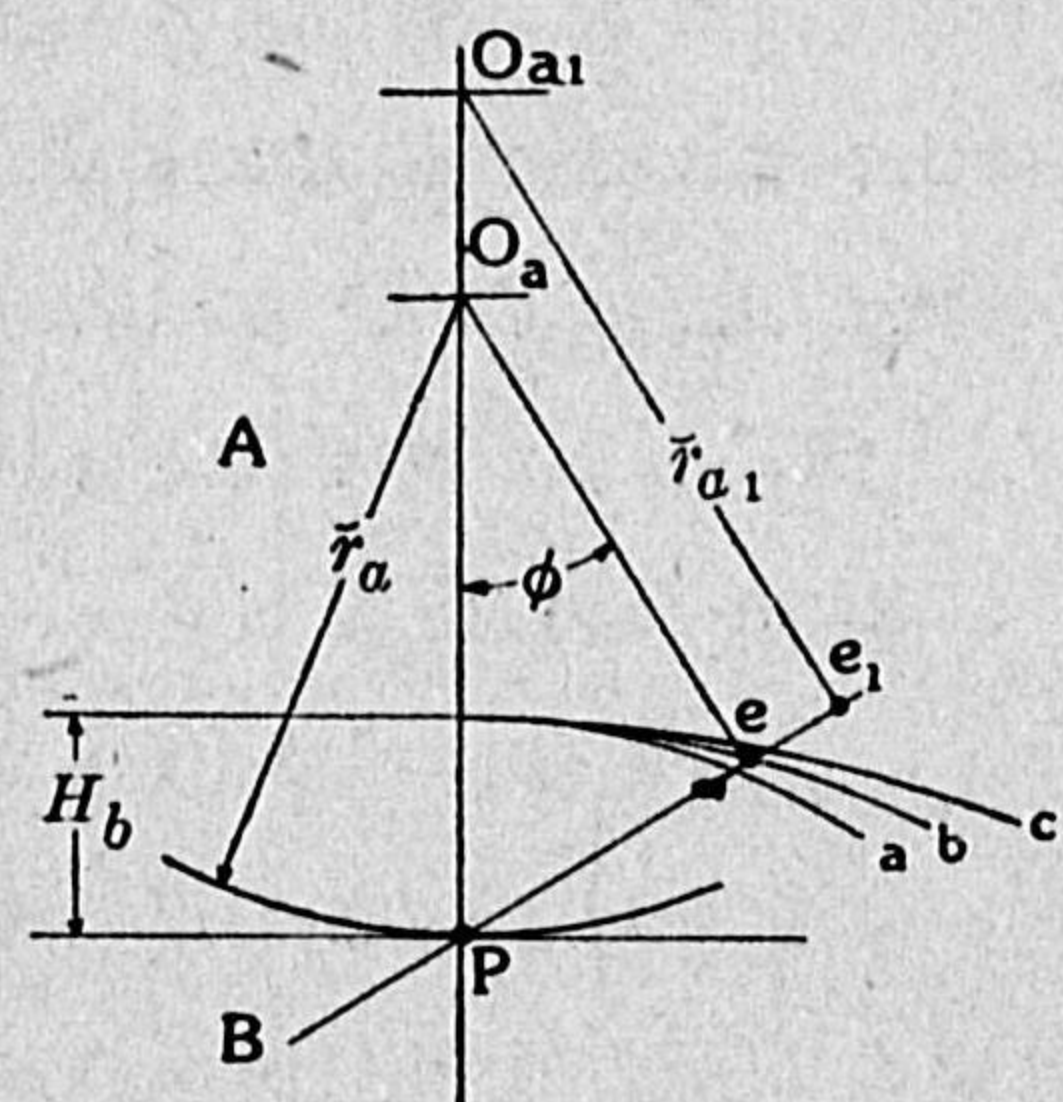
であり、又ラックBに於ては、同じく式(39)から

$$\mu_b = \frac{1}{2} N_a \sin^2 \varphi \quad (54)$$

であるだらう。



**互換性齒車の齒數制限** —— 互換を必要としない不換性の一対 A 及び B の場合では、一対ごとに一々その上齒高を式(53)若しくは式(54)が與へる値又はそれ以内に選ぶことに依つて、差支へない嚙合が得られるのであり、又實際にも其の方法に従ふことが望ましいのである。ところが互換性齒車の場合であると、その互換性からの必要條件として、其の一群の齒車に対しては上齒高が一律に例へば  $1M$  と定められるのであるから、其の中の或る二車を嚙合はしたときに、上齒高が前式の示す範圍を或は超過するかも知れないといふ不都合を生ずるだらう。例へば齒數  $N_a$ 、ピッチ圓半徑  $r_a$  なる一つの A 車に対して第151圖の如く上齒高がすべて一律に  $H_b$  であるところの大小數多の B 車を試みに嚙合はして見たとする。すると B 車の齒先圓は、或る B 車では a の如く eP 内を通るであらうが、また或る B 車では c の如く eP 外を通る不都合なのがあるかも知れない。此の A 車に対して嚙合はしていゝ最大の B 車は、b の如く齒先圓が丁度 e 點を通るものであり、c の如き車は此の限度を超過してゐるものである。然しながら、これも對手とする A 車の大小に依ることであつて、例へば A 車を  $r_a$  より更に大きなピッチ圓半徑  $r_{a1}$  のものに取り換へたとすると、e 點は移つて  $e_1$  點となり、齒先圓 c を有する B 車と雖も、此の A 車に対しては差支へないといふことになるであらう。



第 151 圖

る B 車と雖も、此の A 車に対しては差支へないといふことになるであらう。

かく論じて來たことを要約すると、齒數  $N_a$  なる A 車に嚙合はさるべき B 車の齒數  $N_b$  に一定の最大限があるといふことで、その  $N_a$  と  $N_b$  との相互關係は言ふまでもなく式(53)が與へるのである。今假りに上齒高が一律に  $1M$  であるところの一群の互換性齒車を考へるならば、式(53)の下式に於て

$$\mu_b = 1 \quad \text{及び} \quad \epsilon = N_a / N_b$$

と置いて其の式を變形し、所謂最大限であるところの  $N_b$  が

$$N_b = \frac{N_a^2 \sin^2 \phi - 4}{4 - 2N_a \sin^2 \phi} \quad (55)$$

で與へられる。之を一層具體的にするために、 $\phi$  を  $15^\circ$  又は  $20^\circ$  と

すると

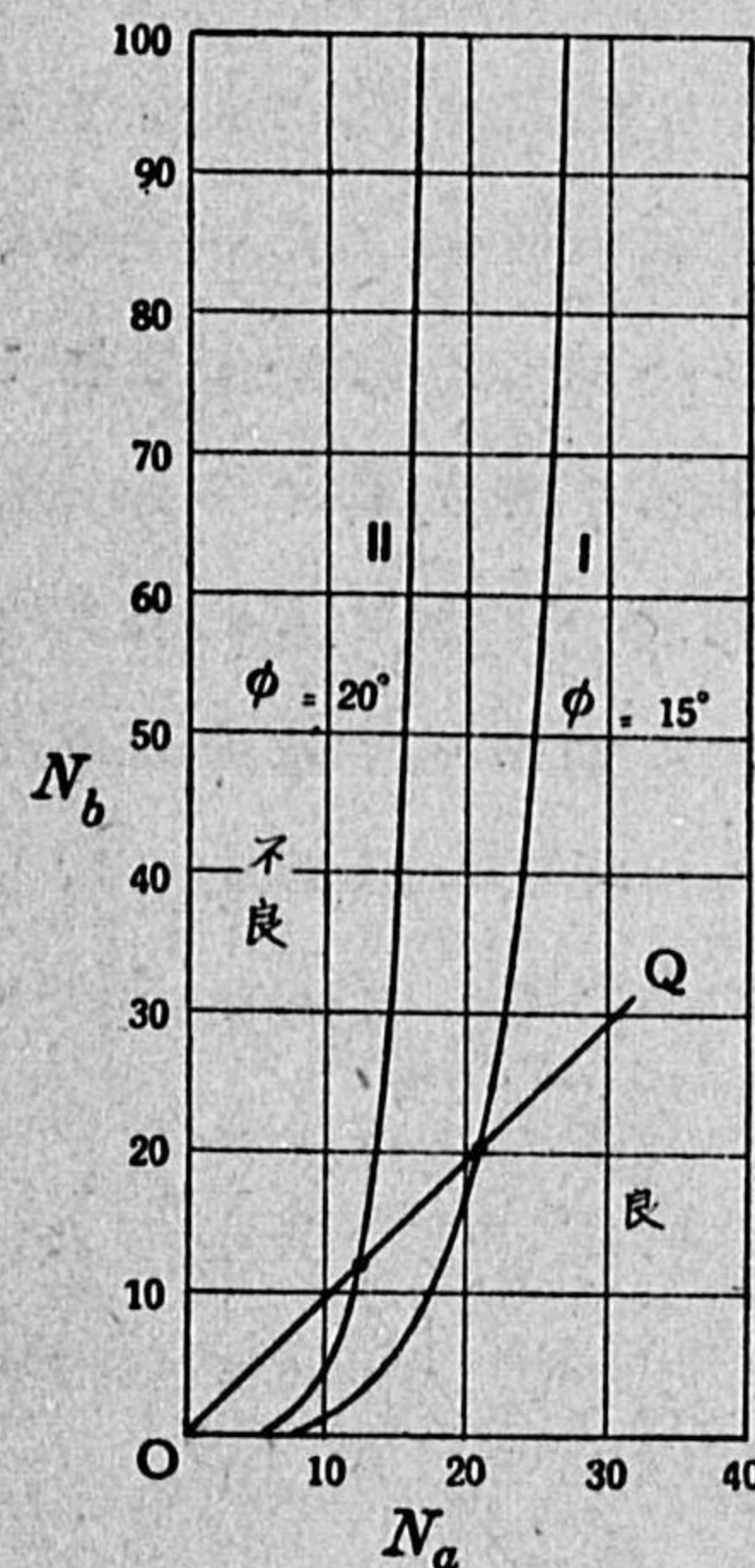
$\phi = 15^\circ$  のとき 最大

$$N_b = \frac{0.067 N_a^2 - 4}{4 - 0.135 N_a}$$

$\phi = 20^\circ$  のとき 最大

$$N_b = \frac{0.117 N_a^2 - 4}{4 - 0.234 N_a}$$

となる。これらを圖に描いたものが



第 152 圖

即ち第152圖の曲線で、その内、曲線 I は  $\phi = 15^\circ$  のものを、又曲線 II は  $\phi = 20^\circ$  のものを示してゐる。この圖の意味は、 $N_a$  と  $N_b$  とが與へられてゐるとき、その  $N_a$  を代表する縦線と  $N_b$  を代表する横線との交點を圖上に檢し、その交點が曲線の良と記した側の區域内にあれば兩者の嚙合ひが差支へないの

であり、之に反して其の交點が不良と記した側の區域内に若しあれば、その嚙合ひは A 車に対して有害であり、好ましくないといふ



ことなのである。

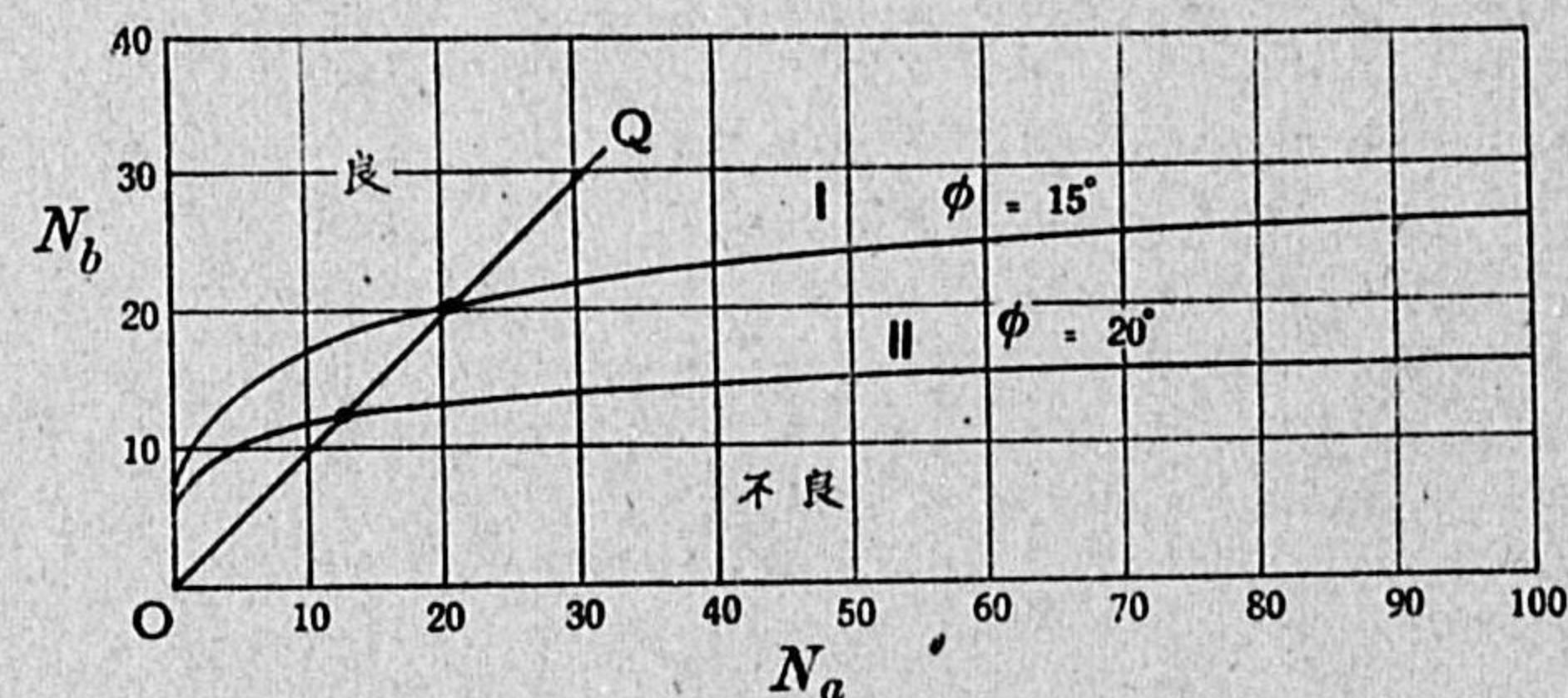
此の圖に於て 45° の傾きの直線 OQ を原點 O から引くと、それは曲線 I とは

$$N_a = N_b = 20.9$$

のところで交はり、又曲線 II とは

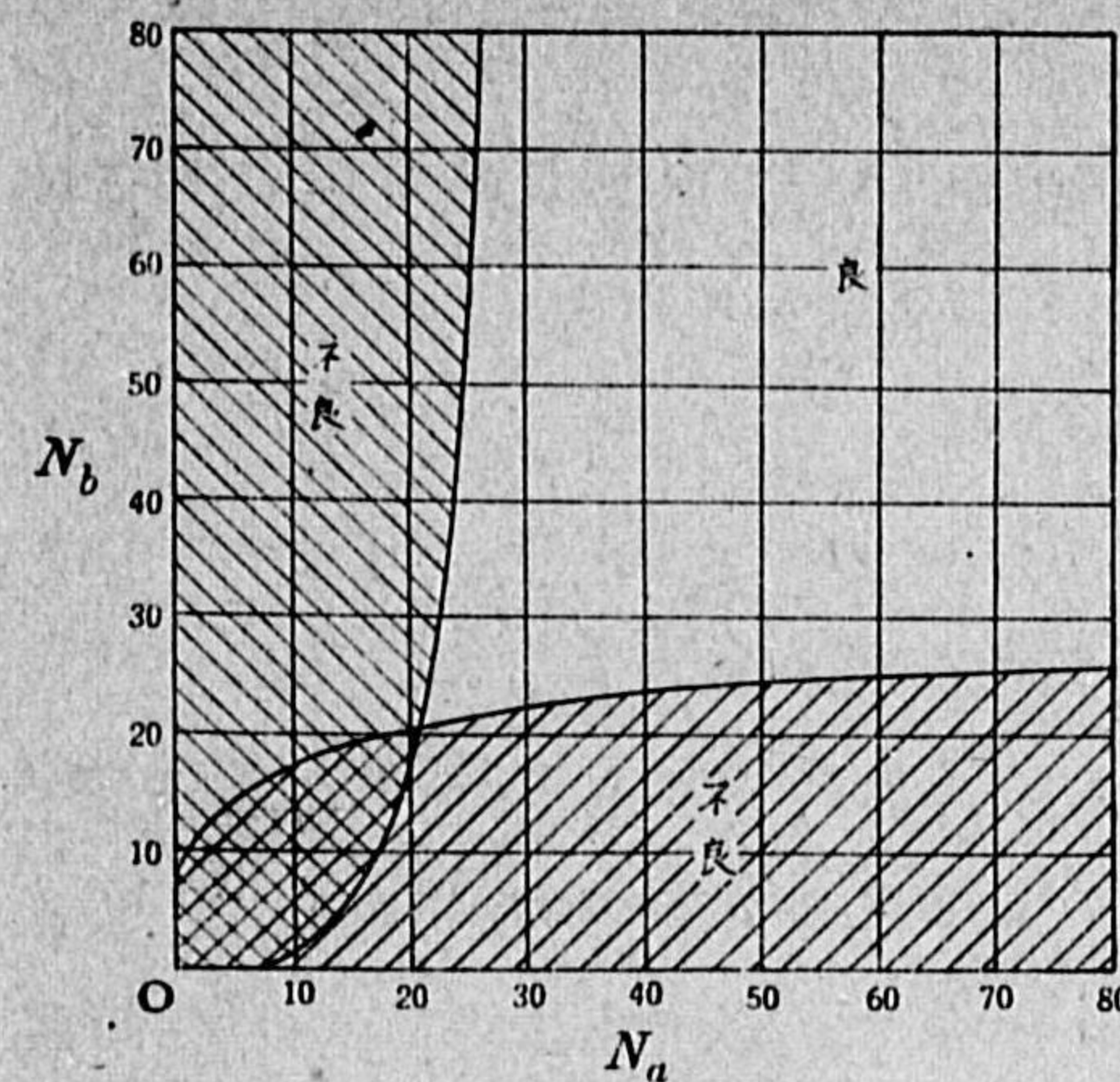
$$N_a = N_b = 12.3$$

のところで交はる。このことは、A 車と B 車とが相等しい齒數のものであるとき、差支へない最小齒數が、壓力角  $\phi = 15^\circ$  のとき 21 であり、壓力角  $\phi = 20^\circ$  のとき 13 であることを示すものである。尙ほ此の圖に於て、今一つ注意したいことは、 $\phi = 15^\circ$ 、 $N_a = 21$ 、 $N_b < 21$  のとき、此の兩者を代表する縦線と横線との交點が、明かに良の區域内に屬して嚙合ひ差支へないかの如くに見られるが、此の場合に、A 車に對しては其の示す通り此の嚙合ひが差支へないこと疑ひを容れないとしても、以上に述べ來つた事柄が、逆に B 車の齒底に對する A 車の齒先の關係についても全然同一に論じられるのであるから、此の第 152 圖を假りに A 車受害圖と名附けるならば、之と



第 153 圖

同様に第 153 圖の如き B 車受害圖が成立するわけで、此の第 153 圖に於ては問題の  $\phi = 15^\circ$ 、 $N_a = 21$ 、 $N_b < 21$  の嚙合ひは明かに不良で



第 154 圖

あり、結局は第 152 圖と第 153 圖とを重ね合せて描いた第 154 圖の上で、良と記入した區域内に屬する嚙合ひのみが差支へないといふことになるのである。但し第 153 圖の曲線は、式(53)の上式に於て、 $\mu_a = 1$ 、 $\epsilon = N_a/N_b$  として得られる式

$$N_a = \frac{N_b^2 \sin^2 \phi - 4}{4 - 2 N_b \sin^2 \phi} \quad (56)$$

を、 $\phi = 15^\circ$  及び  $\phi = 20^\circ$  について描いたものである。

第 152 圖に於て、其の曲線の形勢から見て、 $N_b$  が無限大に近づくに従ひ、 $N_a$  が或る一つの値に近づくことを看取し得る。即ち  $N_b$  が無限大になつた極限は B がラックである場合で、そのときの  $N_a$  は、従つてラック B と差支へなく嚙合はさるべき A 車の最小齒數を意味してゐる。其の  $N_a$  を求めるには、 $\mu_b$  を無限大にするために式(55)の分母を零と置くか、或は式(54)に於て  $\mu_b = 1$  と置くことに依つて

$$N_a = 2/\sin^2 \phi \quad (57)$$

が得られ、この  $N_a$  が即ち其の最小齒數である。例へば此の式から

$$\phi = 15^\circ \text{ のとき } N_a = 29.6$$

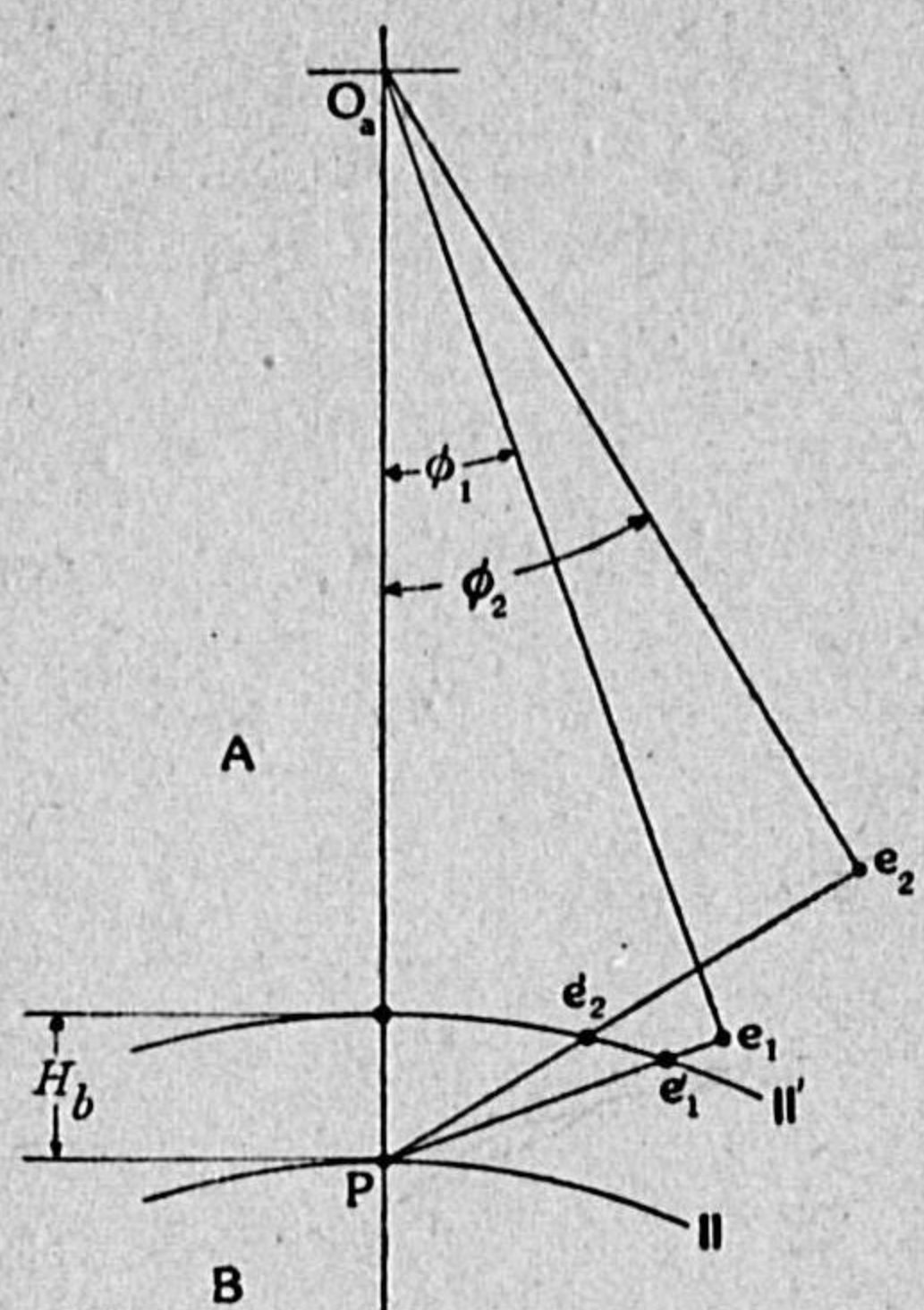
$$\phi = 20^\circ \text{ のとき } N_a = 17.1$$

となり、従つて實用上には A 車の最小齒數が、 $\phi = 15^\circ$  のときには 30、



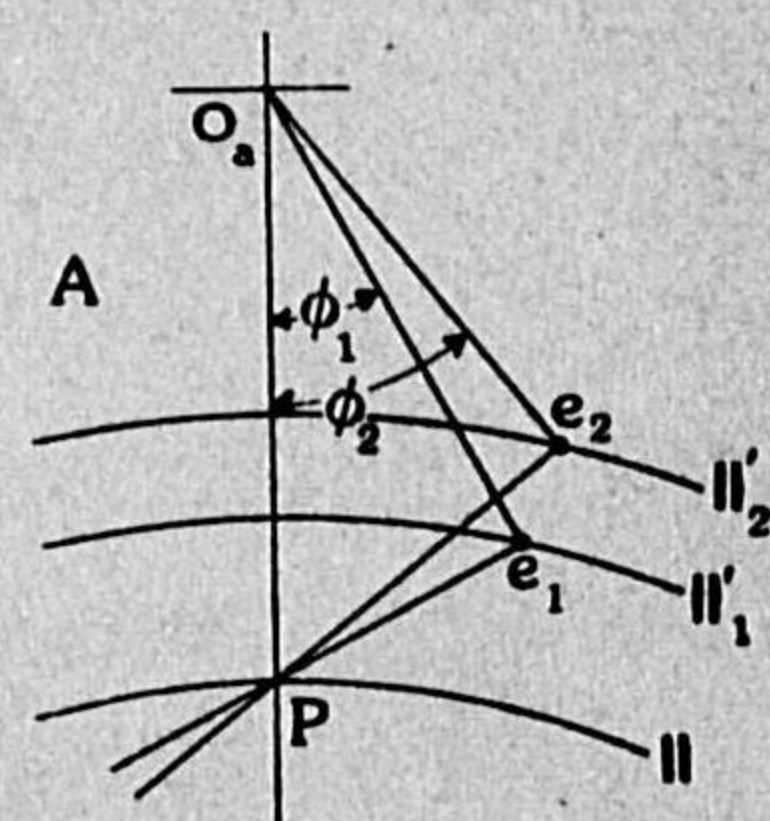
$\phi=20^\circ$  のときには17となるのである。無論A及びBとも上齒高が  $1M$  であることを前提としてゐる。

**壓力角の影響** — 第152圖及び第153圖で判る通り、一つの齒車が與へられてゐるとき、それと差支へなく嚙合ふところの對手の齒車の許容齒數範圍は、壓力角  $\phi$  が増すに伴つて増大する。例へば許し得る最小齒數が、前述の如く  $\phi=15^\circ$  では21であるのに對して、 $\phi=20^\circ$  では13にまで擴張せられる如きがそうである。壓力角を増すことに依つて齒數を減少し得る此の利益は、一方に於て接觸齒數が減少する不利益と相殺するから、終局の利害は一



第 155 圖

一の場合について吟味の上決定されることが必要である。接觸齒數が壓力角の増加と共に減少する有様は、第155圖に於て接觸位置軌跡  $\overline{Pe_2'}$  が  $\overline{Pe_1'}$  より小であることによつて直ちに知られるであらう。但し互換性でない齒車に於て、上齒高を一々對手の齒車に應じて式(53)の如く定める場合であるとすると、壓力角の増加が即ち接觸齒數の増加となること、別の第156圖が示す通りである。



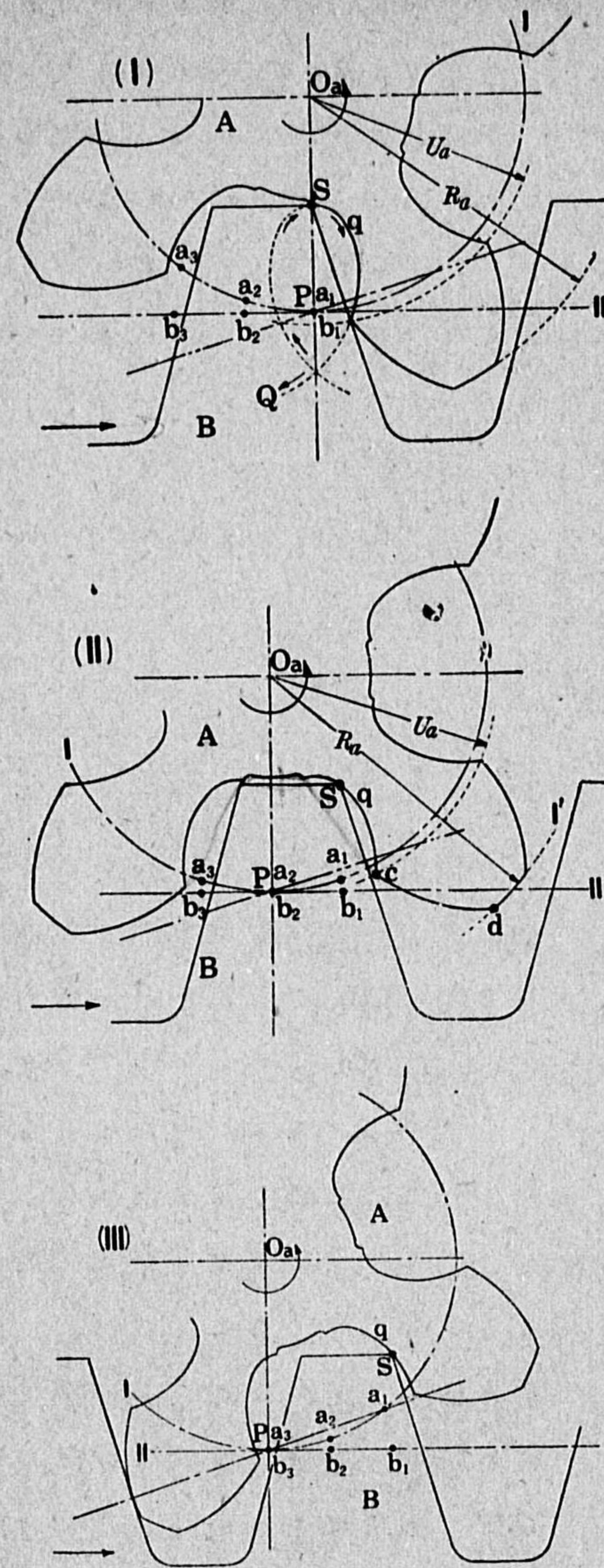
第 156 圖

## 第18章 齒面干涉

**アンダカット** — 前章に於てインボリュート齒車の上齒高が過大であるときの無益有害な點に就いて論じ、またそれを避けるための上齒高制限について述べた。本章に於ては更に其の問題について、もう一層考へることにしよう。

齒數の多くないインボリュート齒車Aと、上齒高の小でないラックBとをとり、第157圖(I)の如く其の一對の齒を密著して嚙合せ、Aを其の中心  $O_a$  の周に矢の方向へ廻すと同時に、ピッチ線IIがピッチ圓Iと轉り接觸をするやうに、ラックBを矢の方向へ動かすと、兩者の關係は同圖(II), (III)の如くに逐次に變化する。(II)に於ては(I)の  $a_2$  點と  $b_2$  點とがピッチ點Pに於て相接し、(III)に於ては同じく  $a_3$  點と  $b_3$  點とが相接してゐるのである。然しながら此の運動は、ラックBの上齒の先端Sが、A車の下齒へqなる曲線に沿つて逐次に喰入つてゆくのでないと實現されない。先端SはA車に相對的には、(I)に示したQなる曲線を描いて動き、上記の曲線qは即ち其の一部をなすものである。かやうにして、上齒高の多いラックに嚙合はさるゝ小齒車は、單に齒底が深くなるばかりではなく、下齒の齒厚が局部的に減少して、齒の強さが著しく少いものとなる。ことに又圖の如き場合では、曲線qがインボリュート齒面と交るところをc(第157圖(II)及び第158圖)とすると、基礎圓G附近にはインボリュート齒面が存在しなくて、有效な齒面は唯單にc點と齒先d點との間の部分、即ちc點を通る半徑Uなる圓と齒先圓との間に夾まれてゐる部分のみに限られるこ

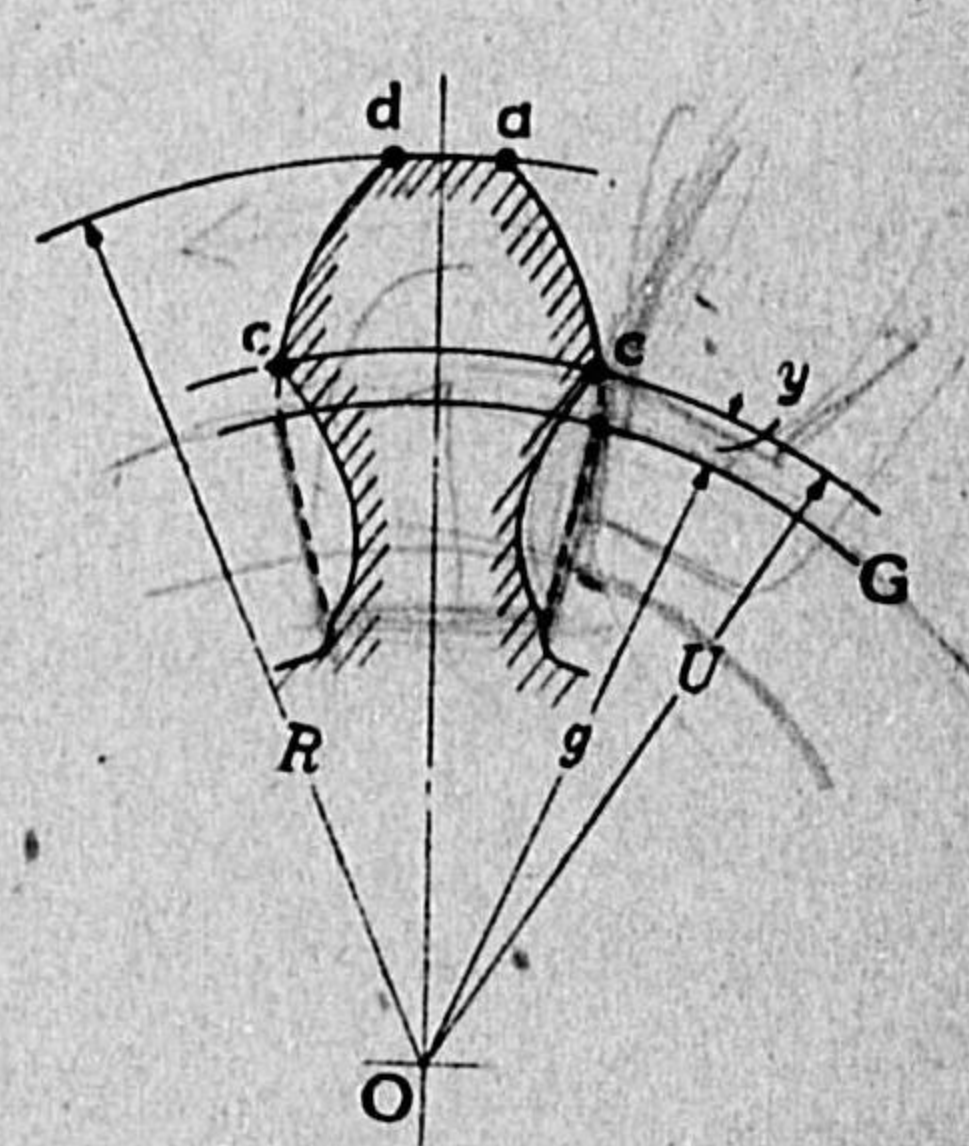




第 157 圖

となり、その直接な影響は、接觸齒數の減少となつて現はれるのである。

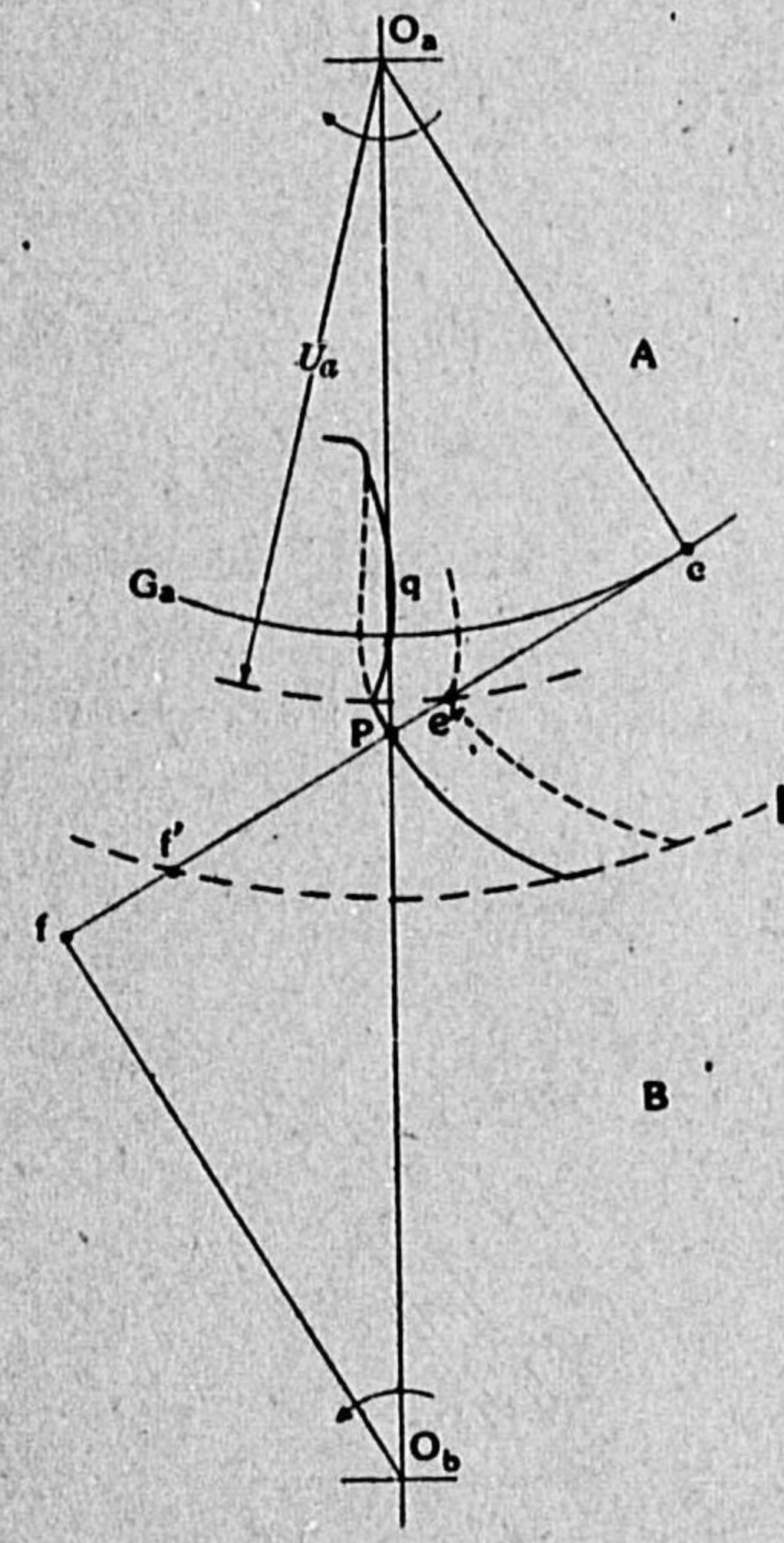
以上に述べた現象即ち齒面干涉 (interference) の現象は、一方がラックである場合に最も著しいのであるが、對手が齒數の多い、ことに上齒高の多い齒車であるときにも、程度の差こそあれ、また同様に生起する。尚ほ之は A と B との嚙合に於てのみでなく、車の齒面をラック形双物又は齒車形双物を以て嚙合成形する場合にも同様



第 158 圖

にして生起し、双物は被削成齒車の下齒を有害に削去るのである。その意味で齒面干涉のことをアンダカット (undercutting) とも呼んでゐる。一般にアンダカットとは齒面干涉に依つて下齒が側方へ喰込まれることを指し、更に狭い意味では基礎圓に近いインボリュート齒面が削除されることをいふのである。要するに此の現象はインボリュート齒の最大な缺點であつて、後に述べるやうに此の缺點を避けるために、種々の工夫が行はれるのである。

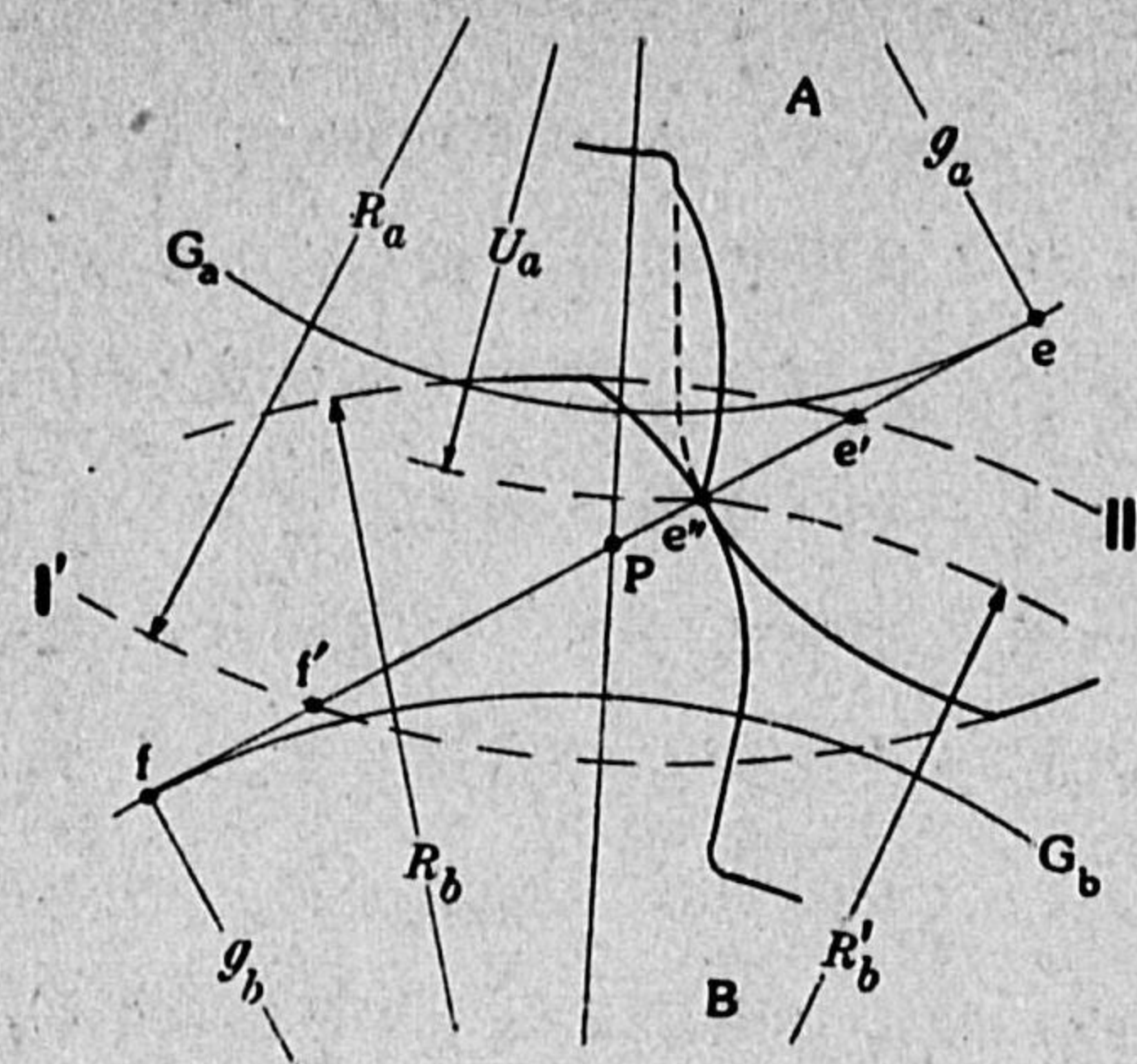
**アンダカットと接觸齒數** — アンダカットを有する一つの齒車に於て、その車の中心を中心として c 點 (第157圖及び第158圖) を通る圓を考へ、その圓をアンダカット圓と名づけ、且その半徑を一般に  $U$  を以て表はすことにしよう。



第 159 圖

今  $U_a$  なるアンダカット圓半徑を有する A 車が、第159圖の如く B 車と嚙合つて連続運轉してゐるとする。このとき接觸位置軌跡の一方の端末は、此のアンダカット圓が壓力線  $ePf$  と交る點  $e''$  であつて、アンダカットがあるために、 $e''$  點よりも外方に於ては有効な接觸が生じない。従つてそれだけ接觸齒數  $n$  に影響を及ぼすわけである。このことを又 B 車の側からいふと、第160圖に示す如く、B 車の齒先圓は半徑  $R_b$  なる圓  $II'$  であるにも拘らず、實際には  $e''$  點を通る半徑  $R'_b$  なる圓が恰も齒





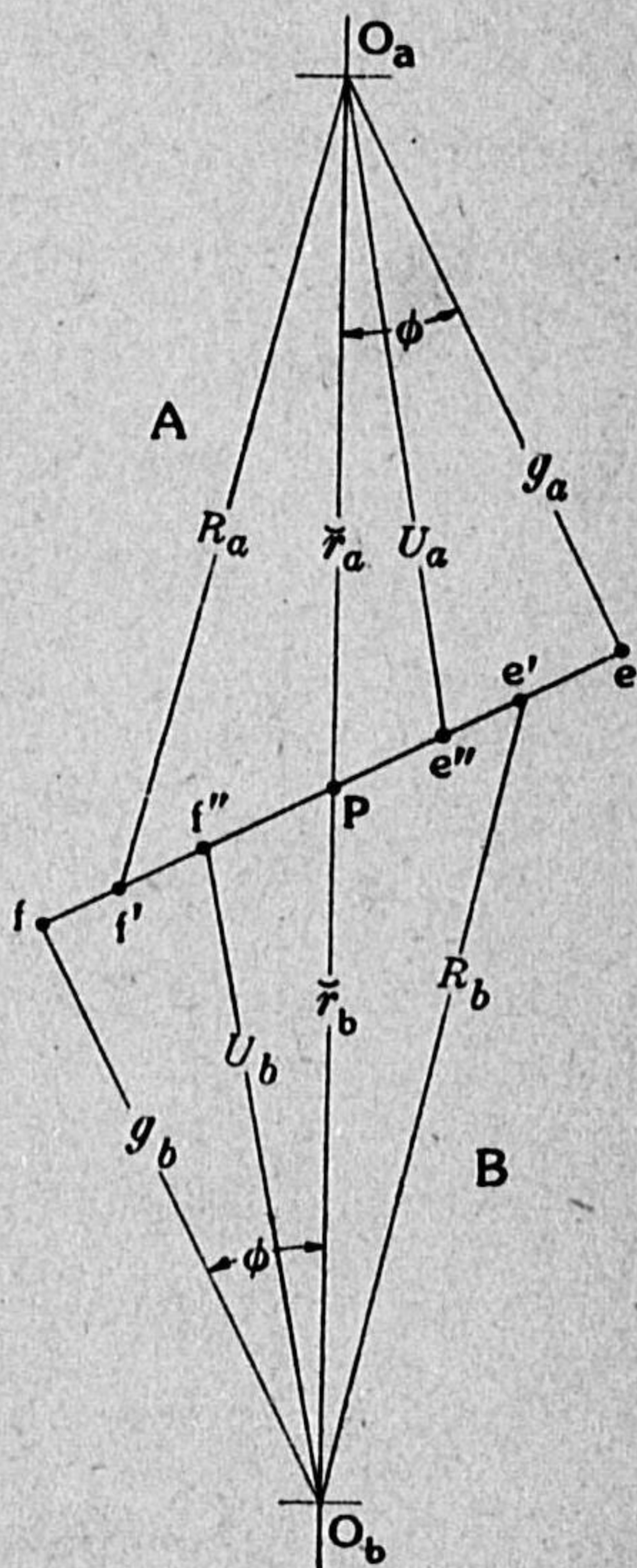
第 160 圖

先圓であるかの如くに働  
き、半徑  $R_b$  と半徑  $R'_b$  との  
間にある B 車のインボリ  
ュート齒面は最早役をし  
てないのである。即ち齒  
先圓 II' が ePf 線を切る點  
を前の如く  $e'$  とすると、普  
通ならば接觸位置軌跡の  
一半は  $\overline{Pe'}$  であるのに對

し、第160圖の場合ではアンダカットのため、それが  $\overline{Pe''}$  に減じてゐるのである。然しながらアンダカットが第160圖のものよりも十分に少い場合には  $e''$  點は  $e'$  點よりも外方へ移つて、接觸位置軌跡の一半は本來の  $\overline{Pe'}$  となるから、その程度の軽微なアンダカットであるならば、接觸齒數には最早何等の影響がないのである。

B 車も又假りにアンダカットを有するとし、そのアンダカット圓が壓力線を切り點を  $f''$  (第161圖) とすると、 $f''$  點についても亦同様のことがいへるから、すべて一般に

(イ)  $e''$  が  $e'$  の外側に在るか、又は A 車



第 161 圖

にアンダカットなし

(ロ)  $e''$  が  $e'$  の内側に在り

(ハ)  $f''$  が  $f'$  の外側に在るか、又は B 車にアンダカットなし

(ニ)  $f''$  が  $f'$  の内側に在り

なる四つの場合に區分せられ、その場合を更に任意に二つづゝ組合せることに依つて、一般に

(甲)  $e'' f''$  共に外側に在り、即ち(イ)(ハ)

(乙)  $e'' f''$  共に内側に在り、即ち(ロ)(ニ)

(丙)  $e''$  は外側に、 $f''$  は内側に在り、即ち(イ)(ニ)

(丁)  $e''$  は内側に、 $f''$  は外側に在り、即ち(ロ)(ハ)

なる 4 種の嚙合の生起が豫想され得るのである。

上記の(イ)乃至(ニ)の場合を式で表はすと

(イ) の起る場合は

$\overline{Pe''} > \overline{Pe'}$ , 即ち第 161 圖から

$$\tilde{r}_a \sin \phi - \sqrt{U_a^2 - g_a^2} > \sqrt{R_b^2 - g_b^2} - r_b \sin \phi,$$

又は

$$(\tilde{r}_a + \tilde{r}_b) \sin \phi > \sqrt{U_a^2 - g_a^2} + \sqrt{R_b^2 - g_b^2} \quad (58)$$

であり、同様にして

(ロ) の起る場合は

$$(\tilde{r}_a + \tilde{r}_b) \sin \phi < \sqrt{U_a^2 - g_a^2} + \sqrt{R_b^2 - g_b^2}, \quad (59)$$

(ハ) の起る場合は

$$(\tilde{r}_a + \tilde{r}_b) \sin \phi > \sqrt{R_a^2 - g_a^2} + \sqrt{U_b^2 - g_b^2}, \quad (60)$$

(ニ) の起る場合には

$$(\tilde{r}_a + \tilde{r}_b) \sin \phi < \sqrt{R_a^2 - g_a^2} + \sqrt{U_b^2 - g_b^2} \quad (61)$$

である。



更に嚙合(甲)乃至(丁)のときの接觸齒數  $n$  の式を求めると

(甲) の嚙合に於ては,第 18 章の通り

$$n = \frac{Pe' + Pf'}{P_g} = \frac{\sqrt{R_a^2 - g_a^2} + \sqrt{R_b^2 - g_b^2} - (\tilde{r}_a + \tilde{r}_b) \sin \varphi}{P_g}, \quad (62)$$

(乙) の嚙合に於ては

$$n = \frac{Pe'' + Pf''}{P_g} = \frac{(\tilde{r}_a + \tilde{r}_b) \sin \varphi - \sqrt{U_a^2 - g_a^2} - \sqrt{U_b^2 - g_b^2}}{P_g}, \quad (63)$$

(丙) の嚙合に於ては

$$n = \frac{Pe' + Pf''}{P_g} = \frac{\sqrt{R_b^2 - g_b^2} - \sqrt{U_b^2 - g_b^2}}{P_g}, \quad (64)$$

(丁) の嚙合に於ては

$$n = \frac{Pe'' + Pf'}{P_g} = \frac{\sqrt{R_a^2 - g_a^2} - \sqrt{U_a^2 - g_a^2}}{P_g}, \quad (65)$$

である. 更に第 158 圖に照して

$$\left. \begin{aligned} U_a &= g_a + y_a, & y_a &= \eta_a M \\ U_b &= g_b + y_b, & y_b &= \eta_b M \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

と書き,従つて第 18 章のときと同様に

$$P_g = M\pi \cos \varphi,$$

$$\tilde{r}_a + \tilde{r}_b = \frac{1}{2} M(N_a + N_b),$$

$$\sqrt{R_a^2 - g_a^2} = \frac{1}{2} M \sqrt{N_a^2 \sin^2 \varphi + 4\mu_a N_a + 4\mu_a^2}$$

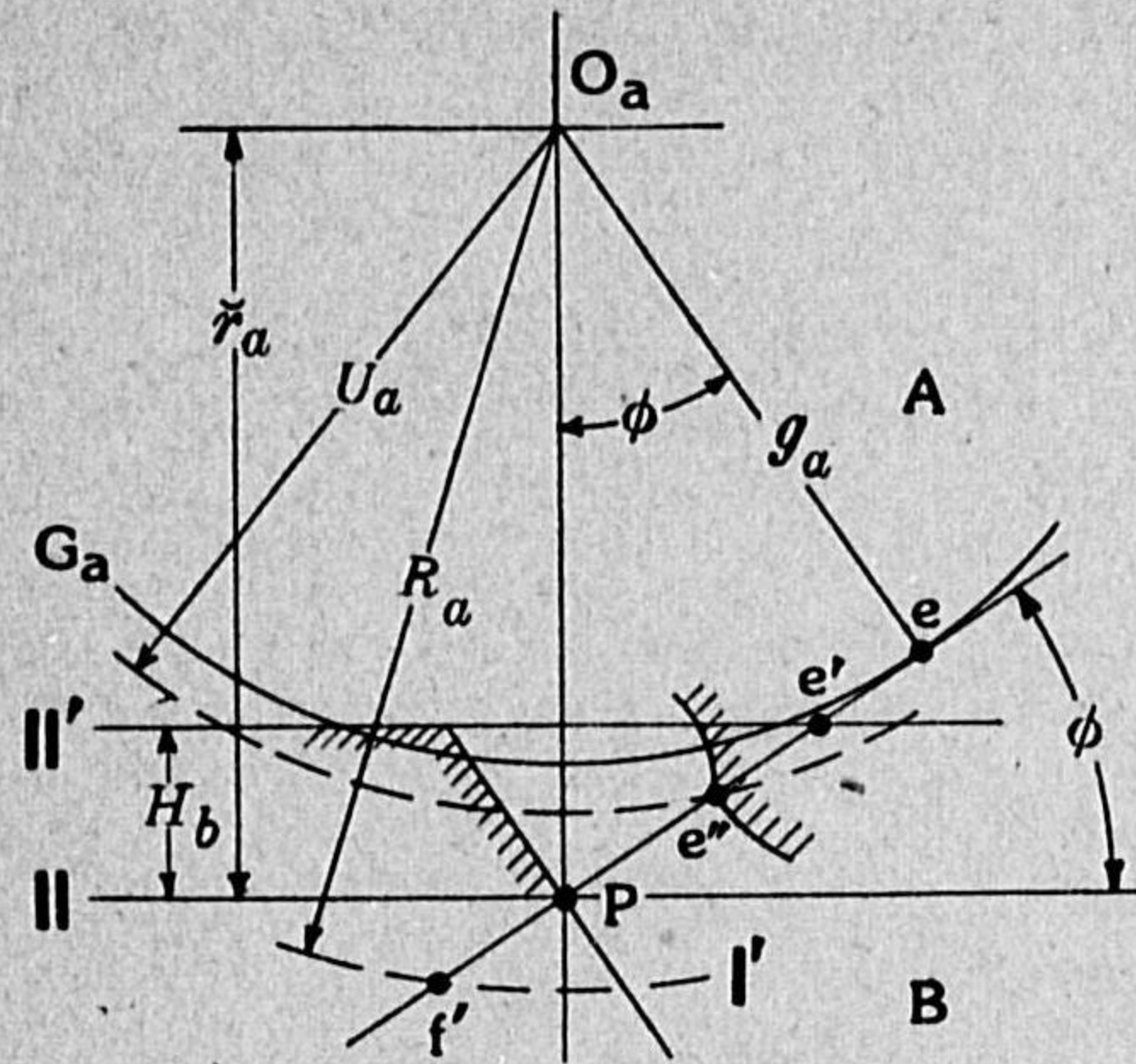
$$\sqrt{R_b^2 - g_b^2} = \frac{1}{2} M \sqrt{N_b^2 \sin^2 \varphi + 4\mu_b N_b + 4\mu_b^2}$$

$$\sqrt{U_a^2 - g_a^2} = M \sqrt{\eta_a N_a \cos \varphi + \eta_a^2}$$

$$\sqrt{U_b^2 - g_b^2} = M \sqrt{\eta_b N_b \cos \varphi + \eta_b^2}$$

として,これらを式(58)乃至式(65)へ代入すれば,實地計算に便利な式(50)に類するものが得られるであらう. 但し上記最後の平方根式

中の第 2 項  $\eta_a^2, \eta_b^2$  の値は,其の第 1 項に比べて實際上省略し得るほど小さなものであると見てよからう.



第 162 圖

B が上齒高  $H_b$  のラックである場合(第 162 圖)には,ラックの齒先線  $II'$  が壓力線を切る点を同じく  $e'$  とするとき,

$$H_b / \sin \varphi > \tilde{r}_a \sin \varphi - \sqrt{U_a^2 - g_a^2}$$

なる関係が若しあれば,圖の如く  $Pe'' < Pe'$  となり,そのときの接觸齒數  $n$  は

上掲の嚙合(丁)に準じ式(65)で與へられる.

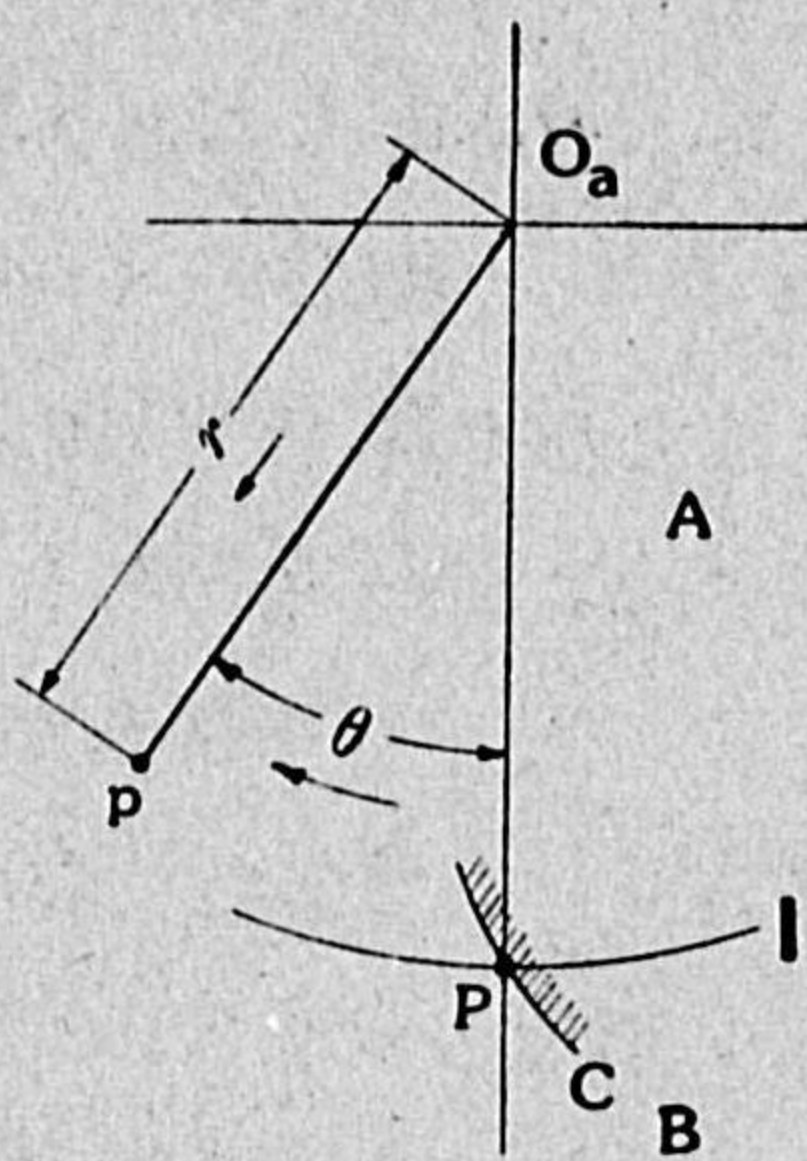
**アングカット圓半徑** — A 車と B 車との嚙合に於て,又は A 車と B ラックとの嚙合に於て,必要缺くべからざる最小のアングカット圓半徑  $U$  の値,又は必要缺くべからざる最小のアングカット幅  $\gamma$  (第 158 圖)の値が,いくばくであるかを知ることは上述の諸事情に照して甚だ必要なこと明らかである. それらの値を求める計算の方法は,複雑ではあるが大體次ぎのやうにするが正しからう.

A 車が受けるアングカットを求めるものとし,そのために先づ A 車に固定せらるべき極座標軸を設定し,此の極座標軸について A 車インボリュート齒面曲線の方程式を作る. 次ぎに此の齒面と接する B の齒の上齒先端  $S$  が, A に相對的に描く軌跡  $Q$  (ラックの場合は第 157 圖(I)の  $Q$ )を考へ,  $Q$  曲線の方程式を同じく上記の

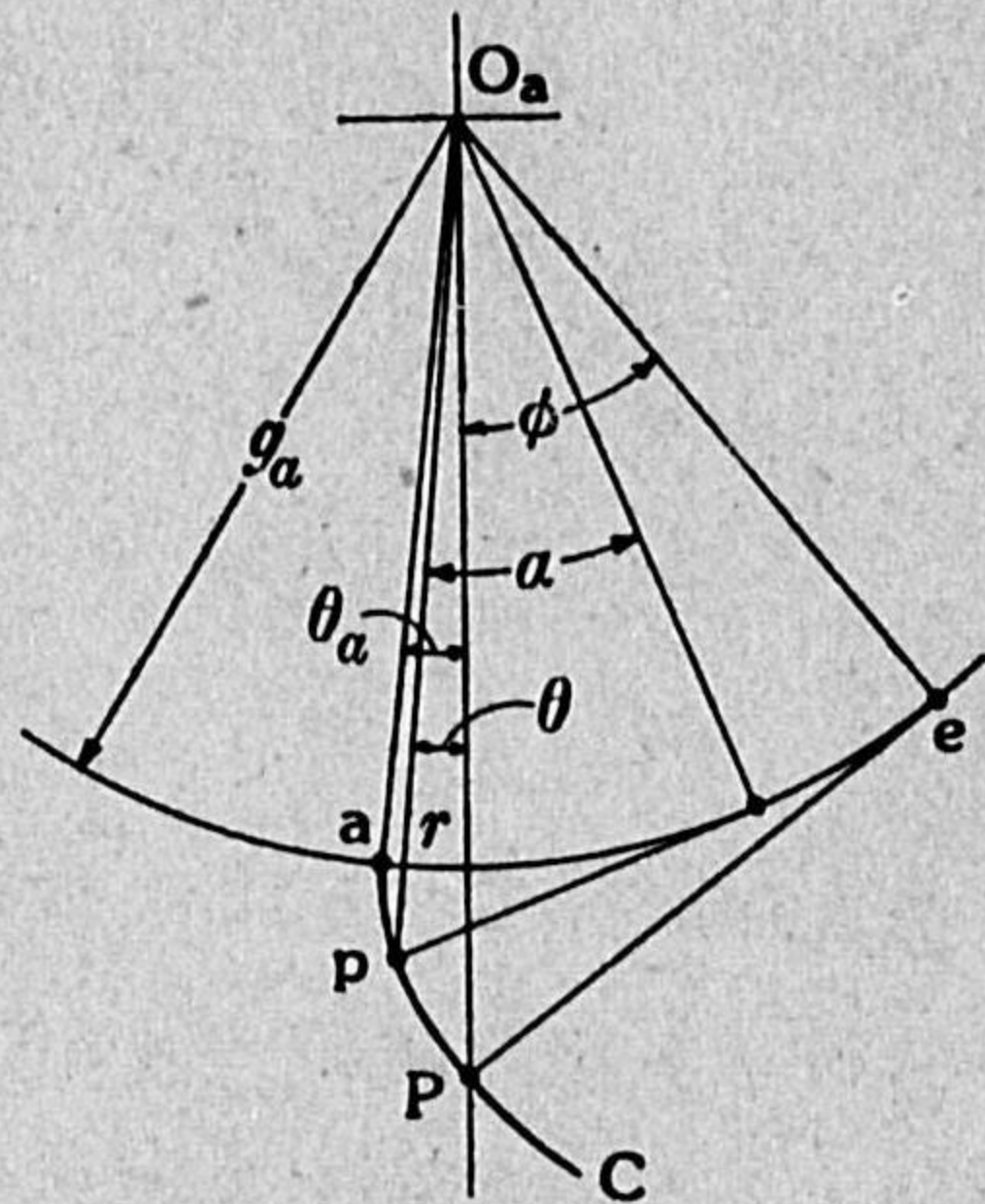


極座標軸について定める。その結果兩曲線の交點 c (第 157 圖 (II) 及び第 158 圖) の極座標値が求められ、従つて c 點と其の車の中心點  $O_a$  (第 158 圖の O 點) との距離が知られ、それが即ちアングカッタ圓半徑  $U_a$  であり、又それから  $g_a$  を引けばアングカッタ幅  $y_a$  が得られる。

極座標軸のとり方は便宜上第 163 圖の如くにしよう。即ち A 車



第 163 圖



第 164 圖

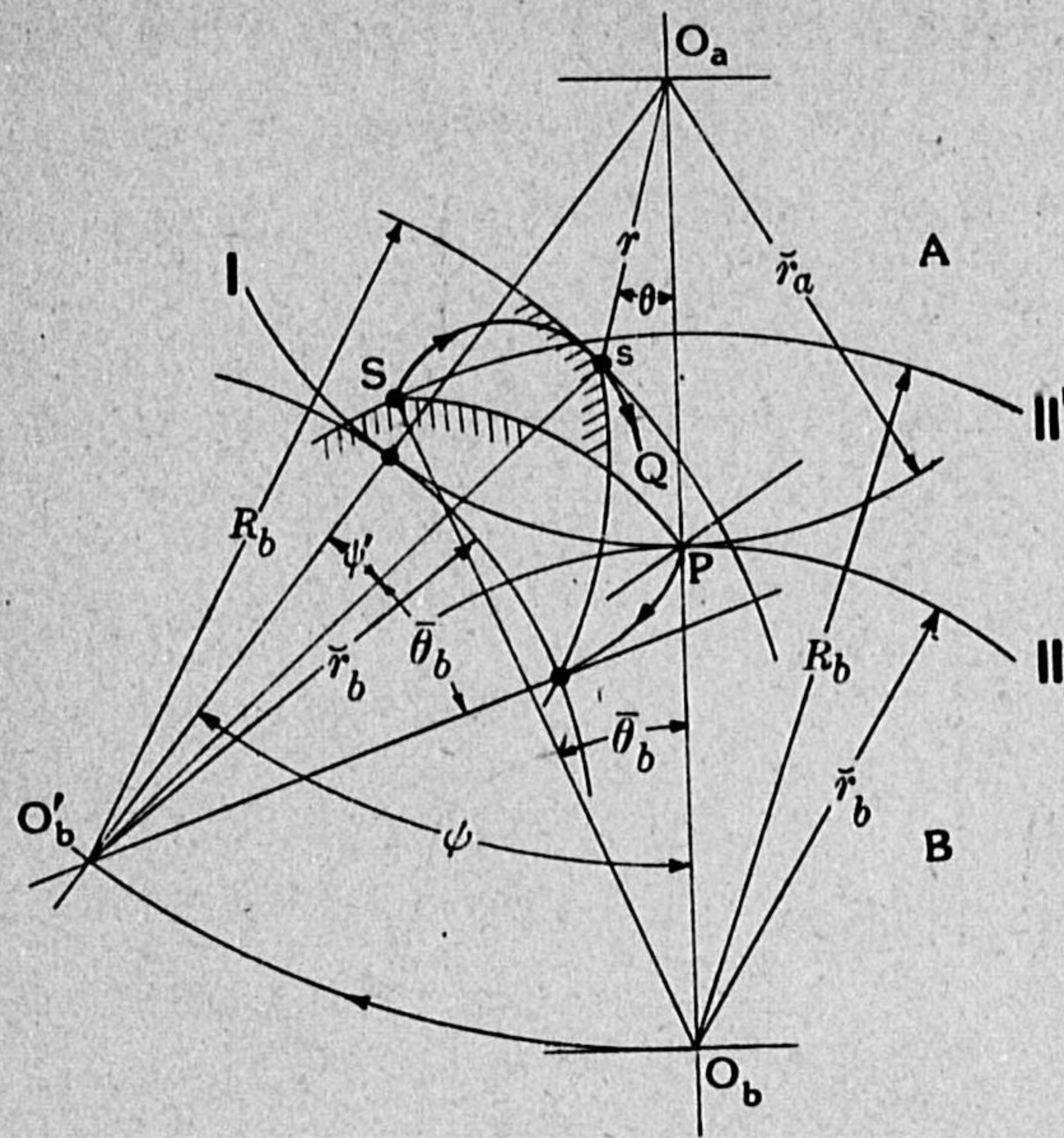
の中心點  $O_a$  を座標の原点として、任意の一點 p の座標  $r, \theta$  を定め、角度  $\theta$  の測り方は、目的とする此の車のインボリュート齒面の一つ C がピッチ圓と交る點 P を  $O_a$  點と結び、此の直線  $O_aP$  から出發して圖示の方向へ測るものとする。此の齒面曲線 C それ自身の方程式を先づ作るために、その中の任意の一點 p の  $r, \theta$  を求めると、第 164 圖に従ひ第 10 章に於けると同様にして  $\alpha$  なるパラメータを用ひ

$$\left. \begin{aligned} r &= g_a / \cos \alpha \\ \theta &= \theta_a - \text{inv } \alpha = \text{inv } \varphi - \text{inv } \alpha \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

として得られる。従つて之が即ち第 163 圖極座標軸に関する曲線

C の方程式である。

B 車の一つの齒が A 車の齒 C と第 164 圖の P 點に於て最初に接して居たものとし、其の上齒先端 S (第 165 圖) が其の以後に於て A に相對的に描く曲線 Q の方程式を求める。B 車の



第 165 圖

中心點  $O_b$  が A に相對的に動いて  $O'_b$  點へ移つた任意の瞬間を考へ、 $O_a O_b$  線との  $O_a O'_b$  線との間の角を  $\psi$  とし、そのときの上齒先端 S の位置を s とする。s の座標  $r, \theta$  は此の圖に照して

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(\bar{r}_a + \bar{r}_b)^2 + R_b^2 - 2R_b(\bar{r}_a + \bar{r}_b) \cos \psi'} \\ \tan(\psi - \theta) &= \frac{R_b \sin \psi'}{\bar{r}_a + \bar{r}_b - R_b \cos \psi'} \\ \text{但し } \psi' &= \psi \frac{\bar{r}_a}{\bar{r}_b} = \bar{\theta}_b \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

であることが明かであり、即ちこれが  $\psi$  をパラメータとした第 165 圖 Q 曲線の極座標方程式である。式 (68) の中、角  $\bar{\theta}_b$  は圖に示した通り 既知數で、その値は

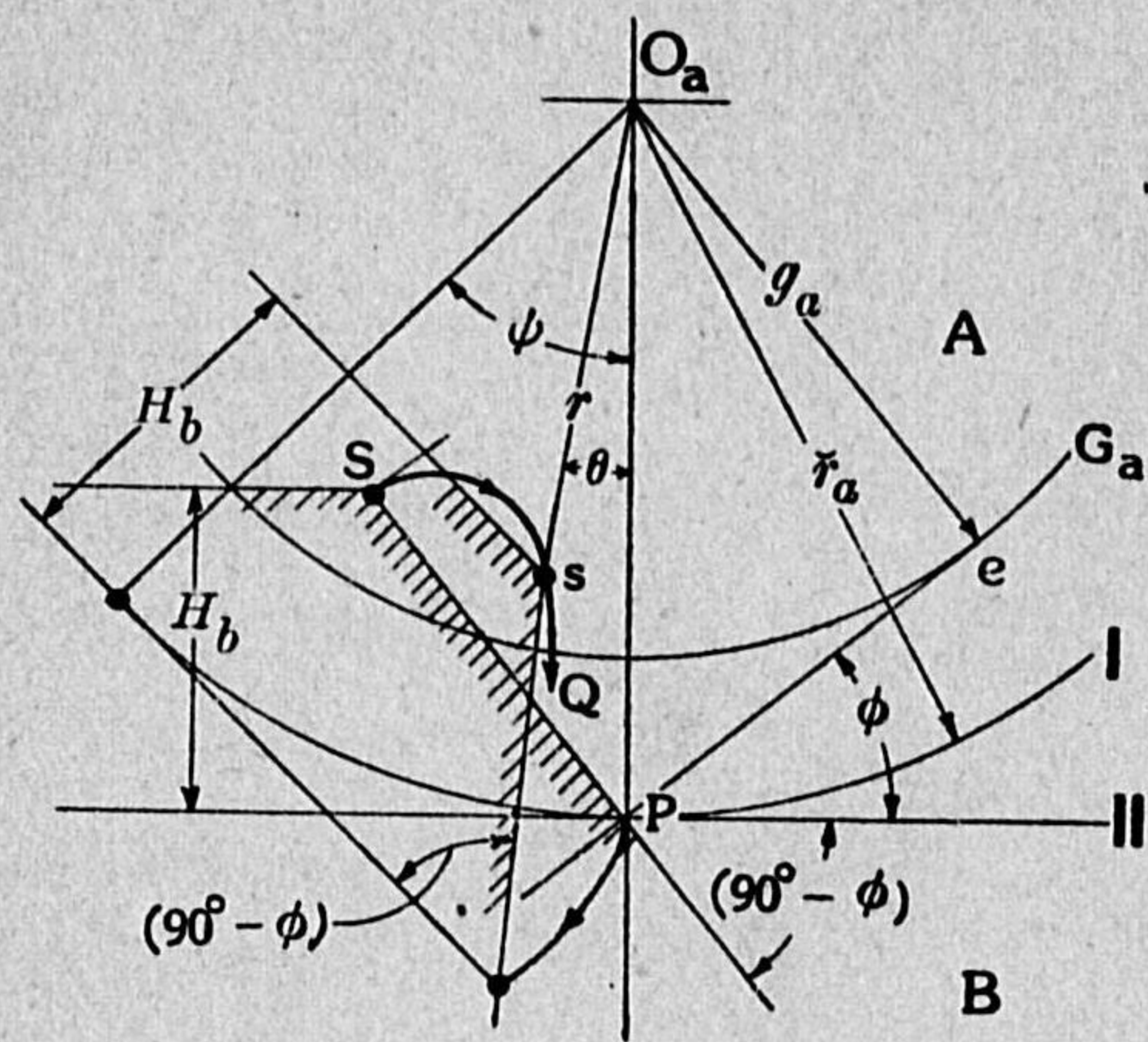
$$\bar{\theta}_b = \text{inv } \bar{\alpha} - \text{inv } \varphi, \quad \cos \bar{\alpha} = g_b / R_b$$



なる聯立方程式から求められる。

Bがラックである場合にも、之と全然同一の考へ方に従つて、第166圖につき

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(\bar{r}_a - H_b)^2 + (\bar{r}_a \psi - H_b \tan \varphi)^2} \\ \tan(\psi - \theta) &= \frac{\bar{r}_a \psi - H_b \tan \varphi}{\bar{r}_a - H_b} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$



第 166 圖

を得る。但し \$H\_b\$ はラック B の上齒高であり、又パラメータ \$\psi\$ は先端 S が座標 \$r, \theta\$ なる s 點へゆくまでに、A に相對的に B が初位置から廻つた角度を意味してゐる。

式(68)の \$r\$ 及び \$\theta\$ へ、式(67)が示す右邊の値を夫

夫代入すると、未知數 \$\psi\$ 及び \$\alpha\$ をきめるための聯立方程式ができる。それに依つて得られる \$\alpha\$ の値を式(67)へ代入して \$r\$ 及び \$\theta\$ を求めると、それが即ち B が齒車であるときの兩曲線の交點 c の極座標である。従つて其の \$r\$ がアングカッ ト圓半径 \$U\_a\$ となる。その聯立方程式は

$$\left. \begin{aligned} g_a / \cos \alpha &= \sqrt{(\bar{r}_a + \bar{r}_b)^2 + R_b^2 - 2R_b(\bar{r}_a + \bar{r}_b) \cos \psi'} \\ \tan(\psi - \text{inv } \varphi + \text{inv } \alpha) &= \frac{R_b \sin \psi'}{\bar{r}_a + \bar{r}_b - R_b \cos \psi'} \end{aligned} \right\}$$

であり、更に之を實用式に書き改めると

$$\left. \begin{aligned} N_a \cos \varphi / \cos \alpha &= \sqrt{(N_a + N_b)^2 + (N_b + 2\mu_b)^2} \\ &\quad - 2(N_a + N_b)(N_b + 2\mu_b) \cos \psi' \\ \tan(\psi - \text{inv } \varphi + \text{inv } \alpha) &= \frac{(N_b + 2\mu_b) \sin \psi'}{N_a + N_b - (N_b + 2\mu_b) \cos \psi'} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

である。聯立方程式(70)から \$\alpha\$ を求めるには、前に第12章計算其三に於て述べたと同じ方法に依るが便利であらう。即ち式(70)の第一式だけを取り、その \$\psi'\$、即ち \$\psi\$ の値を種々に變化して、それに應ずる一々の \$\alpha\$ の値を其の式から求め、\$\psi\$ 値對 \$\alpha\$ 値の曲線を描く。次ぎに第二式をとつて、同様に \$\psi\$ 値對 \$\alpha\$ の値の曲線を前の曲線上へ重ねて描き、兩曲線の交點に於ける \$\alpha\$ を看取すれば、それが即ち求めるところの \$\alpha\$ である。

Bがラックの場合にも同様にして式(67)を式(69)と組合せて

$$\left. \begin{aligned} g_a / \cos \alpha &= \sqrt{(\bar{r}_a - H_b)^2 + (\bar{r}_a \psi - H_b \tan \varphi)^2} \\ \tan(\psi - \text{inv } \varphi + \text{inv } \alpha) &= \frac{\bar{r}_a \psi - H_b \tan \varphi}{\bar{r}_a - H_b} \end{aligned} \right\}$$

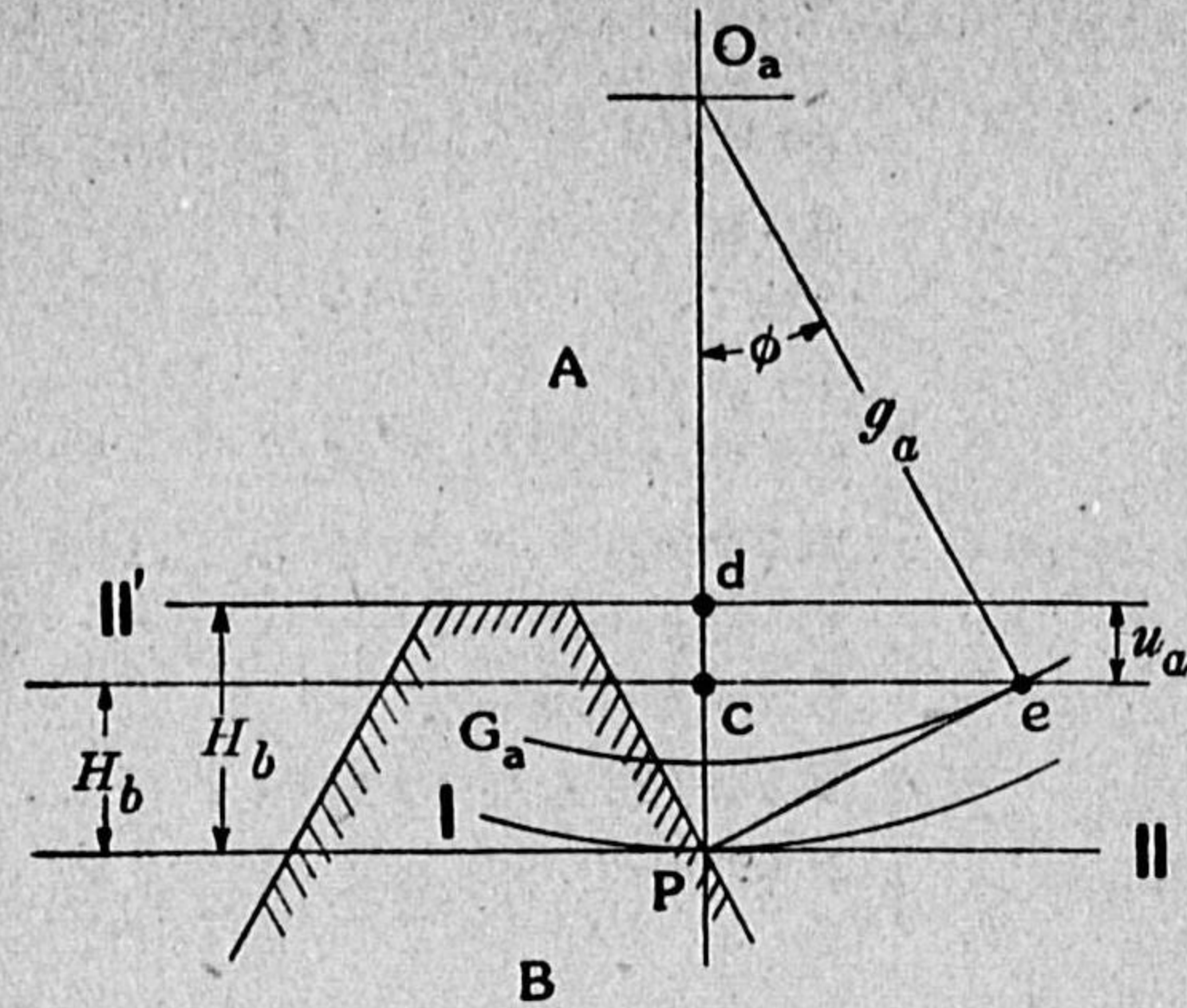
を得、之を變じて

$$\left. \begin{aligned} N_a \cos \varphi / \cos \alpha &= \sqrt{(N_a - 2\mu_b)^2 + (N_a \varphi - 2\mu_b \tan \varphi)^2} \\ \tan(\psi - \text{inv } \varphi + \text{inv } \alpha) &= \frac{N_a \varphi - 2\mu_b \tan \varphi}{N_a - 2\mu_b} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

とし、之について今述べたと同様にして \$\alpha\$ を求め、その \$\alpha\$ を式(67)の第一式へ入れれば、その \$r\$ が即ち \$U\_a\$ である。

式(70)及び式(71)に對して、其の中の微小數について若干の省略を行ふ等の手段を施せば、之等の代りに計算の一層簡易な實用式が得られるだらうと思ふが、その試みは筆者に於ては未だ成功してゐない。然しながら B がラックであるとき、アングカッ トが極めて輕微であるとしたときの略近式として、次ぎの式(73)が普通に慣





第 167 圖

用されてゐる。それは第167圖に示したやうに、ラックBの齒先線II'がe點のレベルを $\overline{cd}$ だけ超過突出してゐるときに、その突出量 $\overline{cd}=u_a$ を

$$u_a = k_a M \quad (72)$$

と置けば、式(66)の $\eta_a$ が大體に於て

$$\eta_a = \frac{k_a^2}{4N_a \sin^2 \varphi \cos \varphi} \quad (73)$$

であるとするのである。この式の求め方は参考書\* に譲ることとし、こゝでは其の説明を省略する。尚ほ此の式に従ふと、ラックの齒先線がe點を超過しないとき、此のラックとの嚙合に依つて受ける齒車の齒面干涉が皆無に近く、従つて其の意味で、壓力線と基礎圓との切點、即ちe點及びf點を干涉點と呼ぶことがある。

齒先線が丁度干涉點eを通るラックの上齒高を $\overline{H}_b$ (第167圖)とすると

$$u_a = H_b - \overline{H}_b = \mu_b M - \frac{1}{2} M N_a \sin^2 \varphi$$

だから

$$k_a = \mu_b - \frac{1}{2} N_a \sin^2 \varphi$$

となり、従つて式(73)は

$$\eta_a = \frac{1}{16 \cos \varphi} \frac{(2\mu_b - N_a \sin^2 \varphi)^2}{N_a \sin^2 \varphi} \quad (74)$$

とも書ける。

\* Buckingham, E, & Olah, G.: "Stirnräder", Berlin, J. Springer, 1932.

## 索引

**A**

對手齒形を求める畫法.....34  
 アンダカット.....159  
 アンダカット圓半径.....165  
 アンダカットと接觸齒數.....161  
 壓力角 (pressure angle).....55  
 壓力角の影響.....158

**B**

分速度 (component).....6  
 分速度と角速度との關係.....8

**C**

直徑ピッチ (diametral pitch).....25  
 直徑ピッチとモジュール.....25  
 直接接觸に於ける角速度比.....11  
 頂隙 (radial clearance).....27

**E**

エンベロープ線に依る齒形の求め方.....36  
 圓周ピッチ (circular pitch).....25  
 圓周ピッチの最大値と接觸位置軌跡.....27  
 エピサイクロイド (epicycloid).....44  
 エピトロコイド (epitrochoid).....44

**G**

互換性齒車.....155  
 互換性齒車の齒數制限.....154  
 合成速度 (resultant).....6  
 グラント氏略近畫法.....71

**H**

齒厚.....27  
 背隙 (backlash).....27  
 ハイポサイクロイド (hypocycloid).....43

ハイポトロコイド (hypotrochoid).....43  
 齒形を求める根本法則.....33  
 齒幅.....27  
 齒面干涉.....159  
 齒元圓 (root circle).....27  
 齒の形についての必要條件.....32  
 齒の接觸條件.....30  
 齒の滑りの量的變化.....31  
 齒先圓 (addendum circle).....27  
 齒先圓半径.....134  
 齒先圓と滑り率.....134  
 齒竿.....64  
 ひら齒車.....22, 23  
 ひら齒車の基本的意味.....22

**I**

移動する回轉軸.....17  
 インボリュート (involute).....47, 74  
 インボリュート齒形の計算.....96  
 インボリュート齒車.....85  
 インボリュート齒車の接觸齒數.....144  
 インボリュートの曲率半径.....121  
 インボリュート齒車のピッチ.....106  
 インボリュート齒車の成立.....85  
 インボリュート齒面の相互運動.....124  
 インボリュートの二三の性質.....75  
 インボリュートの數式的な表し方.....81  
 インボリュートを利用した簡単な裝置.....77  
 インボリュート内齒車.....90

**J**

從動體 (follower).....10

**K**

回轉の速さの表し方.....1  
 回轉速度.....1



回轉速度と線速度..... 1  
 角速度..... 2  
 基礎圓 (base circle) .....43  
 基礎曲線 (base) .....41  
 交換性インボリュート齒車と規格  
 ピッチ圓..... 115  
 小型齒車.....62  
 轉り接觸..... 10, 13  
 轉り接觸に於ける相對轉り線速度.....20  
 轉り接觸の條件と角速度比.....14  
 曲率半徑..... 120

M

モジュール (modul) .....25

N

内接嚙合の壓力角と接觸位置軌跡.....93  
 内接の嚙合 (internal gear, annular gear) 66  
 内接の接觸齒數..... 148

P

ピン齒車.....70  
 ピッチ圓 (pitch circle).....23  
 ピッチ面 (pitch surface) .....23  
 ピッチ點 (pitch point).....23

R

ラック (rack).....64  
 ラックに於ける滑り率..... 129  
 ラックに於ける滑り速度..... 132  
 ラックの上齒高..... 138  
 ラジアン (radian)..... 3  
 ルレット.....41

S

サイクロイド..... 41, 43  
 サイクロイド齒形の實用形狀.....50  
 サイクロイド齒車間の滑り.....58

サイクロイド齒車の成立.....48  
 サイクロイド齒車の性質.....53  
 サイクロイド齒車の種々の型.....63  
 最大滑り率..... 140  
 線速度..... 1  
 線速度から見た角速度..... 4  
 接觸位置軌跡 (path of contact) .....28  
 接觸位置軌跡, 壓力角, 角速度比.....38  
 接觸齒數..... 144  
 下齒 (dedendum).....27  
 主動體 (driver) .....10  
 種々のサイクロイド.....44  
 瞬間的の廻轉軸と其の廻轉角速度..... 5  
 速度の分解及び合成..... 6  
 相對回轉速度.....19  
 相對速度.....16  
 滑り率..... 120, 125  
 滑り接觸.....10, 13, 30  
 滑り接觸と轉り接觸.....12  
 滑り速度..... 128

T

トロコイド (trochoid) .....43

U

内齒車.....65  
 上齒 (addendum) .....27  
 上齒高..... 136  
 上齒高制限..... 152  
 上齒高制限と齒數制限..... 152

Z

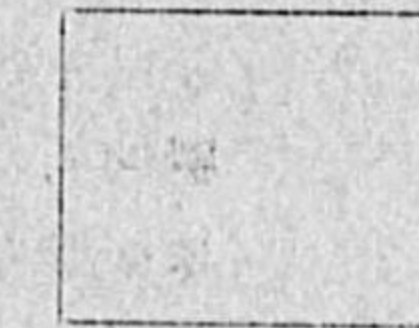
造形圓 (generating circle) .....43  
 造形圓の大きさ.....55  
 造形曲線 (generating curve).....41  
 造形點 (tracing point) .....41

終

日本出版文化協會會員番號第 140514 號

齒車理論・㊦定價金貳圓八拾錢

版權所有



昭和十六年十一月廿五日印刷  
昭和十六年十一月三十日發行

著作者 山ノ内 鎮一

發行者 泊瀬川 孝  
東京市神田區駿河臺二丁目一番地近岡ビル

印刷者 高田 壬午郎  
東京市神田區神保町一丁目三四番地

發行所 理化書院

東京市神田區駿河臺二丁目一番地近岡ビル  
電話・神田 (25) 3555 番  
振替口座東京 175741 番

配給元 日本出版配給株式會社

東京市神田區淡路町二丁目九番地

印刷所・株式會社開明堂



理化書院・新刊書(一)

工學博士 藤田保太郎著 定價 5.50  
**熱力學及熱機關** 送料 .22

本書は熱機關を對照とする熱力學の應用に重點を置き、理論と實際の關係を明確にして熱機關が如何に熱力學の法則に支配されながら作働するものであるかを説き、熱的實際問題に關する計算の誘導に勉めてゐる。専門學校及大學初年級程度を目標としたるも、具體的引例多く且平易端的なる敘述は機關の設計製作又は運用者に採ても絶好の資料である。

---

理學士 櫻井時夫著 定價 3.00  
**ヘビーサイド演算子** 送料 .14

ヘビーサイド演算子は工學及理學の計算、就中電氣過渡現象の計算に不可缺のものである。

本書はヘビーサイド演算子法の複素數を用ひた理論的考究より真空管回路、濾波器の過渡現象等の嶄新な工學的應用に到るまで理論應用の全範圍に互つて解説されてゐる權威ある唯一の著書で、卷末の公式集及文献のその數の豊富な事と分類の適切なることは既刊和洋書の何れにも冠絶してゐる。



5310  
Y39

531.6-Y39ウ



\*1200500745510\*

終