

數學列車

王峻峇著

數學列車

著 岑 竣 王



開 明 書 店

開
明
書
店

王
竣
岑

數 學 列 車

民 國 三 十 七 年 二 月 初 版

每 冊 定 價 國 幣 二 元

印
刷
者

開
明
書
店

發
行
者

開 上
明 海
書 福
店 州
代 書
表 店
人 路
范 滄
人

著
作
者

王
峻
岑

有 著 者 權 * 不 准 翻 印

序

以幾何學爲中心的古希臘數學，固然早已成了陳跡，就是以解方程式爲中心的代數學，也在現代的數學陣營裏面，稱不了英雄好漢。全世界研究數學的人士，莫不認爲數學的核心乃是函數，而治理函數的唯一利器乃是微積分。所以二十餘年以前，歐美各國的數學專家與教育專家，有很多人主張把函數的概念定爲學習數學的中心概念，而在中等教育的課程之中，加入簡易微積分一項，使學生對於變化率的比較與極限的應用，早有初步的認識，以建立入大學修習微積分的基礎，並作修習物理學、統計學等科的準備。我以爲他們的主張非常合理，在科學突飛猛晉的今日，這個老問題實在有重加注意與討論之必要。

也許有人要提出反對的意見，以爲現行中學課程裏邊的數學，已經太嫌繁重，差不多把學生壓得透不過氣來。過去別人曾喊過「救救中學生」的口號，目的就是要減輕中學生對於數學的擔負。現在若主張在中學課程裏面，再加上微積分，豈不是真要把學生壓得透不過氣來麼？假使他向我這樣表示，那麼我就請他看一看王峻岑先生寫的數學列車這本書。照王先生的方

法來講微積分，是不是比教中學生白白地絞盡腦汁，去演幾道代數幾何的難題，更爲輕鬆，更易明白，更有意義。這些難題，大都瑣碎複雜，迂迴曲折，其實無關宏旨，而且跡近猜謎。假使底本在手，真是會者不難；但是古本罕見，孤本少傳，一謎二謎已可招來眠食俱廢，三謎四謎簡直要了人的命。經過這種「思想訓練」的青年，歷年來不知道多多少少，可惜不僅不見有幾百幾千的大數學家，紛紛登世界數學之壇，反而見有很多病夫加入了肺癆團體。然而在教材的補充與升學的指導兩頂堂皇動人的帽子之下，也只得拚一拚小命。好在一方面躡等以求，博得個用功美名，且可獲得敲門之磚，何妨不惜健康而一試。他方面樂育英才，大顯身手，八方延聘，比得上印佩六國，當然不去管什麼三育並重，教育意義，與夫世界趨勢了。

須知中學課程標準，本來已有問題，再加上補充指導，自然要弄得艱深繁重。倘若將難題名題，一掃而空，單講些基本概念與基本方法，那麼簡易微積分的講授，即使不像數學列車那樣的輕鬆流利，引人入勝，我想總不會比教授艱深的方程式論，級數理論，連分數，消去法，恆等式證法，作圖與軌跡等等項目，更爲艱深罷！

王先生寫數學列車，不但把微積分的基礎，如無窮小的概念，極限的意義，變化率的應用等等，說得明白透徹，人人可懂，而且提出了一個獨到的意見，即是「變爲常而不變爲非常。」這句

話，大可讓那些捧着古本與孤本的人，細細地咀嚼一下。此外，王先生更能將全書寫得詩意盎然，尤屬難能可貴。奧斯古先生的書，我現在正用作教本，王先生也把此書作為根據，好說是與我有同見。因此就不顧文筆的拙陋，率爾亂道數言，不敢謂之序也。

三十七年元月陳嶽生作於上海大夏大學

自序

無論研究什麼科學，總是離不開數學；而且這個數學，還不僅只是代數幾何，除此之外，用得最多最廣的，卻是微積分。

其次，就整個的數學來說，無論數學的分類有多少不同的意見，然而解析學是數學裏最重要的一支，這也是沒有問題的。在解析學裏，我們又不能不指出微積分是它的一個主幹。

照這樣說起來，無論是研究科學，或是僅僅研究數學，微積分應該是一個必需知道的常識。然而在事實上，一個高中畢業的學生，常常是沒有機會和它接觸。這件事情有點太遺憾。

在中文本裏，拿着通俗的文字來介紹微積分的，只有劉薰宇先生的一本數學的園地。在那本書裏，雖然大部分講的都是微積分，然而全書的企圖，在於整個數學內容的介紹。現在我寫的這本書，卻是專門以微積分為範圍，沒有談到別的部門或是別的問題。雖然在我不敢高攀，但是我以為如果這兩本書能夠對照的看起來，倒是對於讀者是很有益處的。

再就是在這一本書裏，因為對象是一般的讀者，尤其是不研究數學的人，或是沒有機會去

學習的人，所以處處着重在基本的觀念，同時又竭力的避免算式。還有爲了不太枯燥，因此講起來就又不免添枝添葉的。

其實，即使學過微積分的人也無妨看看，權作是個消遣；我相信，至少不會讓你頭痛。而且天在數學裏轉圈子，偶爾到外面散散心，也不是一件沒有意義的事情。

照這樣說來說去的，倒變成爲這本書作廣告了。可是如果廣告作不好，反倒不如不說。——然而還有幾句話，卻是不能不說。

第一，這本書裏的內容，多少是取材於奧斯古先生的微積導論（*W. F. Osgood: Introduction to the Calculus*）。第二，蒙陳嶽生先生爲本書作序，盧錫疇先生爲本書製圖，開明書店爲本書出版，還有金問魯先生曾對本書提供不少的建議，統此一併道謝。

至於內容究竟如何，還是請看正文。

三十六年七月，濟南。

目錄

第一站	孫悟空坐火車	一
第二站	動的話題	一〇
第三站	火車究竟多麼快	一八
第四站	數的行列	二六
第五站	這個年頭變了	三五
第六站	跑到哪裏算一站	四三
第七站	大和小的賽跑(上)	五四
第八站	大和小的賽跑(下)	六六
第九站	一個跟着一個變	七八
第十站	Do Re Mi	八七
第十一站	一切都是時間的函數	九五

第十二站	用算式來描寫這世界·····	一〇四
第十三站	化零爲整·····	一一三
第十四站	點線面體·····	一二一
第十五站	求積的設計·····	一三〇
第十六站	開擴了許多的眼界·····	一四一
附 錄	車廂檢查·····	一五二

第一站 孫悟空坐火車

今天沒有事，咱們隨便談個問題。

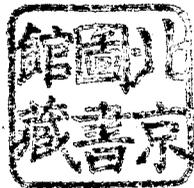
談什麼呢？

我想，你大概看過西遊記吧？那是一本長篇小說，講的唐僧取經的故事。至少，你總該聽到別人講過。

這裏面一共有四個主角，就是唐僧，沙僧，豬八戒，孫悟空。又叫做孫行者，是一個猴子；一個筋斗十萬八千里，他有這麼一副好的本領。豬八戒是一個豬，肥頭大耳朵，走起路來大搖大擺；因為太胖了，所以只有邁着四方步，腳底下是非常吃力的。他們倆，一個好動，一個好靜，個性恰好相反。假設他們能夠活到現在，那真是再好玩沒有了！

好啦，現在就算他們還在活着。於是我就想出了一個題目，我們讓孫悟空和豬八戒來個運動競賽。譬如說，跑個長距離吧。那麼我們預測一下，誰能跑第一呢？

當然是孫悟空了！



是的，我也是這樣想；十拿九穩，包管沒有錯。

爲什麼呢？因爲論快慢就要比較距離。豬八戒頂多一步走五尺，可是孫悟空一跳就是十萬八千里！那還會有錯麼？

可是這究竟是一個難得的機會，咱們都應當去瞧一下。

沙僧是發令員，唐僧是評判長。一共四個人包辦這個運動會。

你聽，發令員吹哨了！咱們都得戴起望遠鏡來。豬八戒那麼胖，還沒有走幾步就張着大嘴喘起粗氣來了；可是孫悟空還是不改當年的脾氣，一跳就跳到半天雲裏去！

「孫悟空真快呀！」大家都喊起來了，這真是一個奇蹟。

然而——你猜怎麼着？結果倒是豬八戒得了第一！你說奇怪不奇怪？爲什麼呢？

老了，孫悟空老了！雖然他是人老心不老，可是腿腳卻不大受用，這一個筋斗跳上去，因爲用力太猛，腿肚子轉了筋，就在半天雲裏來了個四肢無力，週轉不靈。豬八戒雖然也老了，可是老實人專辦老實事，傻勁總還有點，一路上早起晚睡，辛辛苦苦一直就沒有停下來。

結局豬八戒跑了三個月，而孫悟空卻費了一百二十天。你能說孫悟空比豬八戒跑得快嗎？

你笑了，你以為這是胡說，可是這裏面就有一個道理。論快慢，不但要比較距離，而且還要比較時間。

你大概知道，表示快慢的叫做速度。所謂速度就是表示一個單位時間所走的距離。

什麼叫做單位時間呢？我們先要知道表示時間的是個複名數。小的單位有時，分，秒；大的單位有日，月，年。一年，一月，一日，一時，一分，一秒，這都叫做一個單位時間。用哪個就說哪個，這倒沒有限制。

至於速度，倘然始終不變，就可以用下面的公式推算：

$$\text{速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}$$

譬如一個速度是每小時十二里，也就是每分鐘三十丈，同時也就是每秒鐘五尺。

而且，時間和距離既然有個單位，所以速度也有個單位。在一個單位時間之內走一個單位的距離，就叫做一個速度的單位。譬如每小時走一里，叫做一時里；每秒鐘走一尺，叫做一秒尺。速度快的，時間就得用個小單位；速度慢的，時間就要用個大單位。這僅是爲了表示的便利，並沒有什麼別的道理。

因為速度的表示需要知道距離和時間，所以兩個速度比較的時候，就得先確定一個標準。

假設時間一定，那麼距離大的速度大，這是普通的一個想法。假設距離一定，那麼時間短的速度大，這就是運動會上比較快慢的一個標準。所謂徑賽一百公尺，二百公尺，四百公尺，成績是什麼？十二秒，二十八秒，六十秒。這就是比較的時間。

所以要想表示快慢，那麼時間和距離都得說清楚，不然就沒有意義。我們說，孫悟空一個筋斗十萬八千里，這只是表示他的本領，實在並沒有表示他的速度。然而爲什麼我們都以爲他跑得快呢？這是因爲我們自己認爲一個筋斗用不了多大的時間。看看舊劇裏的武生，一分鐘能夠打十個筋斗，平均一個筋斗不過需要六秒；要是六秒鐘走十萬八千里，一秒鐘就能走一萬八千里——所以我們覺得他快。但是這一個筋斗打下來要是用了一百二十天，平均一天纔走九十里，那就還不如我們騎腳踏車快了。所以結果就叫豬八戒得了第一。

因此要想說明速度，時間和距離必需都要交代明白——然而，這就是我們常常疏忽的一點。

同時，求速度的公式又可以寫成一個分數：

$$\text{速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}$$

按照上面比較速度的說法，假如分母一定，分子大的分數之值就大；假如分子一定，分母小的分數之值就大——這就是比較分數大小的一個原則。

不過在我們心裏，總覺得有點替孫悟空叫屈，說實在的，他自己也覺得有點冤枉！誰叫人老了，連自己的腿也不爭氣！

然而孫悟空卻有個小心眼。他告訴豬八戒說：「老豬，這次有你的，老孫算是栽倒你的手裏。可是咱們回去再比比看，要是我再輸了我就拜你爲師兄。」

豬八戒張開大嘴，哈哈的笑着說：「不敢不敢；只要你不怕丟人，咱們就無妨再試一下！」

這時候沙僧樂得的看個熱鬧，他拍着掌說：「好好好，說賽就賽，一，二，三！」

不等哨響，豬八戒就大搖大擺的又開了腿。這一次孫悟空不敢再翻筋斗了，可是他一個箭步就鑽到豬八戒的前頭。

「老豬加油啊！」沙僧跟着成了啦啦隊。

這一喊，給豬八戒助了威，果然他就越跑越快，連老命也不要了。——可是在他的腳底下加的並不是油，只是加了一個速度。這個額外增加的速度叫做加速度。

加速度也是按照單位時間來計算，如果每一秒鐘加一個速度每秒五尺，那麼這個加速度

就是五個每秒每秒尺。一個每秒尺是一個速度的單位，一個每秒每秒尺是一個加速度的單位。所謂五個每秒每秒尺就是：第一秒末了的速度是每秒五尺，到第二秒末了便是每秒一丈，第三秒末了是每秒一丈五尺，——這樣的一直加下去。豬八戒的加速度是多少，我們並不知道，不過他總是越走越快，遲早會趕上孫悟空的。

孫悟空一看不好，心中頓生一計。趁着老豬還沒有趕到，連忙往四面一瞧，嗖的一聲——就跳上了火車。

孫悟空坐在車上，嗚嗚嗚，——火車開了！豬八戒大叫一聲「不好！」這一來可就洩了氣。一洩氣腿就不由的慢下來，這時候加速度反而變成減速度了。速度每秒每秒的減下來，結果又恢復了原來的快慢，——一個不變的速度叫做常速。

這且不提；我要問你：這時候誰快誰慢？

當然是孫悟空快了！

可是孫悟空來到車上，樂得歇歇腳；心裏一痛快，結果就倒下睡了。既然睡着不動，那還講什麼快慢？

話卻不能這樣說。孫悟空雖然不動，然而車子一動就帶着他動，所以車子的速度就變成他

的速度了。

然而老孫一覺醒來，——卻不料豬八戒就正坐在他的對面。

「咦，奇怪，」老孫說：「你怎麼上來的？」

豬八戒笑了，他說：「傻人有個傻福。回頭來了一班快車，趕上你這慢車，恰好一錯車，我就換了車，一車一車的就扯到一塊了。」

「什麼車呀車呀的，你簡直是胡扯！」老孫氣紅了臉。

不錯，這一扯可就又扯出了一個問題。我再問你，這時候你說他倆誰快？

一般快！

是的，——不過這是咱們這樣說，他們自己可就覺不出來。這又說明了一件事實：論快慢，還要有個標準。

按現在這個情形，就說豬八戒吧。以我們看，他是動的；但是以孫悟空來看，他就變成靜的了。動靜既然是相對的，所以快慢也是相對的。拿着一個靜止的東西作為標準，這個運動的速度叫做絕對的速度；拿着另外一個運動的東西作為標準，這個速度就叫做相對的速度。

相對速度的大小是由兩個運動的方向來規定的。譬如你往東走，速度是每時八里，我也往

東走，速度是每時六里，那麼你對於我的相對速度就是每時二里，這就是說，每走一小時你就比我多走二里。這是兩個速度之差。如果你往東走，我往西走，那麼你對於我的相對速度就變成每時十四里，因為每走一小時，咱倆就要多離開十四里。這是兩個速度之和。

要想明白這個道理，咱們也得坐火車。走着走着旁邊又來了一輛快車，你放心，這是雙軌。現在咱們從窗裏往外瞧，假設兩個車是一個方向，錯車的時候還不覺得它是多麼快；可是要是兩個相反的方向的話，那可就快得多了！這就是因為：一個是速度之差，一個是速度之和。

假使這兩個車的速度一般快，我們走到哪裏，它也走到哪裏，除非是和別的東西比較，那你就看不出它是動的，因為相對的速度變成零。

現在孫悟空既然和豬八戒同坐在一個車裏，如果讓我們在地面上看，他們倆是一般快；可是讓他們自己看，那就覺不出來了。不但他們自己覺不出來；假如我們也上了這一輛車，那麼我們也看不出來，因為連你帶我，孫悟空，豬八戒，我們彼此的相對速度都變成了零。

孫悟空想到這一點，於是就又心生一計。他向豬八戒打了一個招呼：

「老豬，咱們回頭見！」

說時遲，那時快，一言未了，他就跑出了車廂，爬上了車頭；不但爬上了車頭，而且還一跳——就跳

上了飛機！

等到豬八戒趕出來的時候，他也想跳，然而膽小，一遲疑，飛機早就飛過去了！
這一次倒是老孫真正得了第一。

第二站 動的話題

在一個動的環境裏靜止着便要使人發生沒落之感。這種心情，跑在車站上就會覺得格外明顯。

呼隆呼隆的火車來了，喘着粗氣；對着這個龐大的怪物，使我們覺得自己渺小。而且車動我們不動，又是精神上的一個壓迫。人人都有個活動的天性，我們就不應當自甘寂寞。那麼爲什麼我們不上車呢？只要我們上了車，車動我們也動，我們和火車變成了一體，這時候心情就暢快得多了！

不但心裏暢快，而且眼界也開展了。原來是車動地不動，現在卻是覺得我們自己不動，地倒動起來了。這又是怎麼一回事呢？

因爲運動是相對的。所謂動和不動，我們要有一個觀點。從一個靜止的觀點去觀察一個運動的物體，我們看着它動；可是要從一個運動的觀點去觀察，那麼靜止的物體反而變成動的了。這是由於觀點的不同。

但是這裏還有一個重要之點，我們從一個動的觀點上去看一個靜止的物體，這個物體不但變成動的，而且還和我們這個運動的方向剛剛相反。我們往南，它往北，我們往東，它往西，我們前進，它後退。

這就是一個很好的教訓：如果我們不能跟着時代走，那麼我們實在就是已經落了伍！所謂爲學如逆水行舟，不進則退，按照相對的說法，「不前進」就無異於「開倒車」。

你不要認爲我又在給你講什麼大道理，不過借着這個機會打算告訴你一點物理的事實。那就是：論動靜還要先確定一個觀點。

譬如說，我們站在月臺上等車的時候，火車慢慢的停了下來，這時候，我們不動，車也不動，我們說「車停了」，這是從一個靜止的觀點去看動靜。等到我們上車以後，車又開了，看着窗外的車站往後溜過去，同時又看到車廂的那邊走過來了一個車僮，這就是從一個運動的觀點去看動靜。

用靜的觀點去看動靜，這件事情很簡單，不用講，誰都明白。可是要從動的觀點去看動靜，這就來了話題。

最好是我們能夠一個人變成兩個人，一個坐在車上，一個站在地下，兩相對照就可以看出

一些道理來。

首先我們說，地上的人看着車往前進，車上的人看着地往後退。究竟誰對誰不對呢，兩個都對！這就是因為運動是相對的。靜的看着動的在動，而動的卻又看着靜的在動。這兩個運動的快慢一樣，方向相反。所以太陽繞着地球往西轉同時也就是地球繞着太陽往東轉，單就太陽和地球來說，這兩個說法實在是一個現象。如果不和別的行星比較觀察，那就分辨不出來，到底是誰轉誰不轉。

可是這種情形只有在速度大的時候纔會感覺出來，速度小的時候就往往不會注意。當着你在地上散步的時候，你曾經注意到地是往後退的嗎？不說你就不會理會的。

現在讓我們在地面上走走！先確定一個目標，譬如走向校門口。如果你能夠忘記了你是往前走，那麼你就會覺得那個校門正是向着你挪過來了。不僅只是這樣，而且你還會看出來，從你到校門的這一段路正在慢慢的縮短，反過來說，也就是你已經走過的那一段路正在慢慢的增長。你不動的時候，這一切都不動；只要你一動，這一切都要發生變化，有的變近，有的變遠。而且，——越說越多了，——你動得快，它們就變得快；你動得慢，它們也就變得慢。這又說明了一件事實，這一切相關的變化，不管是延長或是縮短，然而變化的快慢是一致的。

現在讓我們再在車上走走，還是用着散步的那個步伐，溜溜躑躑的走。你走我也走，咱們誰也不會覺得快。可是站在地下的你和我（我們的化身），他就要對於這個說法提出了抗議。火車已經夠快的了，你們在車上再一走，那豈不是更快了麼？

不錯，這句話有理。因為要是從地面看起來，那麼我們的速度應當是車速加人速，可是我們自己講，卻並沒有把車速算在裏邊。一個是以地面為標準，一個是以車廂為標準，標準不同，所以速度也就不同了。

而且，——又是一個而且，——就是在車廂裏走，往哪邊走，這個情形也各有不同。車往東你也往東，掉回頭來，車往東你也可以往西，只要是一個步伐一個快慢，那麼在車上看起來，僅只是方向的不同，可是速度相等。然而就地面上看起來，那就大不一樣了！車往東你也往東，是車速加人速，如果車往東你往西，那就變成車速減人速了。不但這兩個運動變成一致的（都是往東），而且速度又有一個大小的差別。觀點不同，看到的事實就恰好相反。那就是說：在一個進步的環境裏，如果有人能夠再進一步，雖然並不是一件什麼了不起的事情，可是在一個落伍的人看起來，他就要大驚小怪了！所謂少見多怪，這正是表現自己沒落的醜態。

同時又使我們瞭解了一件事實，所謂動靜和快慢不過是描寫一個相對位置的變化。不論

車動地不動，或是地動車不動，只要車和地的位置有了變化，這纔知道這個動那個不動。假若相對的位置沒有變化，不管兩個人一塊坐着還是一塊走，結果誰也看不出誰動來。現在我們一塊坐在車廂裏，你能看得出車上的東西都是正在往前動嗎？

所謂速度的大小，實在就是說明了這個相對位置變化的快慢。人和人的距離變化得慢，所以我們說人的速度小；車和人的距離變化得快，所以我們說車的速度大。兩輛火車的距離能夠變化，所以我們說車是動的，兩個車站的距離不能夠變化，所以我們說車站是靜的。這雖然是一個很淺顯的道理，卻是一個最重要的關鍵。

不過有時候，雖然相對的位置沒有變，可是如果一個人意識到自己在動，那麼就會覺得別的東西也在動。例如你和你的朋友一同騎着腳踏車，只要兩輛車子的速度相等，那麼相對的位置就沒有變更。你和他談着話，就好像對面坐在屋子裏一樣，絲毫沒有覺得什麼不方便。這時候你根本就沒有感覺到你們同時一塊動。——然而你們倆個如果是在比賽車子，雖然還是速度相等，可是在這個時候，因為你注意到你是正在拚命的往前趕，所以你就會覺得他也在拚命的往前趕了。

而且——再來一個而且——即使有時候相對的位置有了一頂點的差異，卻是還會遇到

同樣的情形。例如在月下散步的時候，在這個很短的時間之內，地球和月亮的相對位置，可以說是保持着一個固定的距離。雖然你在院子裏走來走去，有了一個移動，可是這個移動比起你到月亮的距離，那就很小很小，小到不在話下。換句話說，你們倆個相對的位置是沒有什麼變動的。可是這時候，因為你意識到你是動了，所以你就看着月亮也在動了。你往東，月亮也往東，你往西，月亮也往西，你走它也走，只要你停下來，它就不動了。月亮並不是給你表示好感，實在是因為相對位置變得更得很小很小的緣故。

同樣的，我們走在一條很長的馬路上，望着天邊遠處的浮雲，雖然它是在靜止着，可是我們就會看着它是跟着我們一塊往前移動。這都是同樣的道理。

不過，假如相對位置的變化不是一頂點的話，那就不能這麼說。譬如你現在從火車上去看那天邊的浮雲，它就不再跟着你一塊往前移動了。

好啦，現在就讓我們從窗車裏向外望望吧。看看還有什麼好看的沒有？

首先碰到眼前的，卻是鐵軌兩旁的樹和電線桿，一個一個的往後溜，尤其是經過窗口的時候，溜得那麼快，幾乎使我們不免有點心驚，惟恐怕它對於我們有什麼損害。——其實造成這個景象的乃是火車，因為它們的速度也就是火車的速度，僅只方向相反。看到這個事實，你纔想起

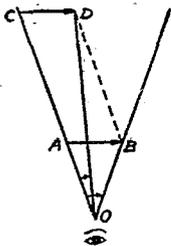
了我們的火車，它是多麼快！

假如我們想要解除這個心理上的壓迫，那就要把眼光放遠些，再往那些遠的地方去看。這就又來了一個奇蹟。車外面的地，雖然都是往後移動，然而近的地方動的快，遠的地方動的慢，整個的看起來卻是在那裏兜圈子，整個的在轉轉，就好像留聲機上的片子，碾米磨麵的那盤磨。——這又是怎麼一回事呢？

這就和我們的視角有關係了。

無論遠的地方或是近的地方，對於我們的火車來說，都是同一個速度往後移動。可是遠的地方和近的地方，在我們視角的移動上，這兩個角卻是大小不同。雖然在同一個時間，無論遠近都是挪了一個相等的距離，然而近的地方這個視角大，遠的地方那個視角小。這就是說，在一個時間之內，兩個角度的變化彼此不等。對於這個角度變化的快慢叫做「角速度」。現在我們所感覺的這個快慢就是由於角速度的不同！

所以速度有兩種，一種是線速度，一種是角速度。在一個單位時間所走的距離，叫做一個線速度的單位；在一個單位時間所移動的角的大小，就叫做一個角速



度的單位。現在這些車窗外的景物都是順着一個直線的方向往後移動，它們角速度的大小和我們的距離成反比，所以越近越覺得快，越遠越覺得慢。整個的看起來，便是在那裏旋轉。這就是說：線速度相等，然而角速度卻未必相等。

反過來說，角速度相等的，線速度也未必相等。譬如留聲機上的唱片轉起來的時候，中間的商標和文字比較還能夠看得清楚，可是越靠邊的就越不容易看得清楚了。那就是：雖然角速度相等（一秒鐘轉幾圈是一定的），可是線速度就不一樣了。在同一個時間之內，轉裏圈的圈小，轉外圈的圈大。也就是距離中心越遠的，線速度越大。

家裏沒有留聲機的，無妨看看車輪子，不論什麼車輪，只要轉起來總是中心慢而四周快。假設有過推磨壓碾的經驗，那就更清楚了，這些事情只是一個道理。

當着瑩澈的明月夜，聽到小弟弟在那裏唱：「月亮走，我也走，一走走到老河口。」我們不但覺得歌詞有趣，而且還領悟了運動的「相對性」。

第三站 火車究竟多麼快

火車已經開了，滿車的客人慢慢的都就了座。大家安定下來，把走道跑路的事交給了火車，於是彼此就聊起天來。

「嗚，這輛車多麼快呀！」一位鄉下的老先生，吸着旱煙，開始爲它讚歎。

「什麼，」旁邊一個比他年青的說：「這輛車快嗎？還有比它快的哩，特別快車，小站不停，坐上去，空空空空空空空，那纔真叫快車呢。」

「二哥，」對面的一個小孩說：「特別快車也不算快，飛機纔算快，嗚——的一聲就飛得沒有影了！」

小孩的媽說：「飛機也不算快，還不如我想的快，千里遙遠，只要我一想就到了。」

你聽着這些話覺得好笑，其實這裏面倒有一個真理。我們曾經說過，快慢也是相對的，論快論慢就需要比較。快的比較慢的快，比起更快的來它就變成慢的；慢的比較快的慢，比起更慢的來它就又變成快的了！

那麼究竟哪個快哪個慢呢？這又需要比較速度。知道了時間和距離，我們就能夠算出個眉目來。反正坐在車上沒有事，我們不妨算算火車的速度。

剛纔在月臺上看到木牌上寫着到下一站的距離是六十五公里，再翻翻火車時間表，兩個到站的時間，一個是一點零五分，一個是兩點零十分。那麼時間除距離，我們就算出了火車的速

$$65 \div \left(2\frac{1}{6} - 1\frac{1}{12}\right) = 65 \div \left(\frac{13}{6} - \frac{13}{12}\right) = 65 \div \frac{13}{12} = 60 \text{ 公里/小時}$$

這不過是一個最簡單的算題。

然而，算是算出來了，想想卻又出了問題。所謂一點鐘走六十公里，這個速度到底是什麼時候的速度呢？——一開車嗎？還是跑到半中間呢？

不錯，這裏邊話裏有話。剛開車的時候當然沒有那麼快，剛剛離開車站的那一剎，就好像一雙船離開了水岸，悠悠的我們覺得有點飄飄然；可是等到火車開出了站，就好像打了一鞭子的馬，昂昂的跑得混身都是勁。車到了半道，這匹馬就要發瘋了，撞撞撞，撞撞撞，撞撞撞，撞撞撞，撞撞撞——恐怕比上面那個速度還要快得多了！

那麼上面那個速度究竟是什麼時候的速度呢？不問還明白，一問就糊塗。

我們先研究一個小學生的算題：張三得了三塊錢，李四得了四塊錢，王五得了八塊錢。那麼一共得了多少錢？

七八一十五。

每一個人合多少錢？

五塊錢。

怎麼得的？

三除十五。

你的本領總算不壞，一點也不錯。——可是這五塊錢，是張三得的？還是李四得的？還是王五得的？

都不是！

那麼這五塊錢是什麼意思呢？

平均數！

對了，平均每一個人五塊錢。這就和我們上面那個算式一樣了！平均一點鐘走六十公里。這

是一個平均速度。

然而這是一筆糊塗賬！和真正的情形對照起來，只是一個大致的概算，並不能夠和實在的情形完全符合。有時候車的速度也許和它一樣，有時候就可能比它還快，也許可能比它還慢。這並不是火車真正的速度。

那麼這個火車究竟多麼快呢？

你覺得這個問題問得滿神氣，其實這個問題問得不明又不白。拿着剛纔的問題反過來再問你：究竟你問的是什麼時候的速度呢？這樣一來，你就會覺得那個問題有點太含糊。

不過你的意思我明白。你要問這個火車真正的速度，真正快慢的狀況。如此說來，我們還是要借重上面那個算法。

固然求平均速度的算法，得出來的只是一個概算。可是你也不能小看它。譬如說，你要問前半路程的速度，那就是前一半的時間去除前一半的距離；你要問後半路程的速度，那就是後半一半的時間去除後半一半的距離。

21
假設問頭一點鐘的速度呢？那就是頭一點鐘的時間去除頭一點鐘的距離了，不過這個速度的表示就要說每一分鐘走多少公里。既然你問得仔細，那麼我們回答的也就仔細一點。其實

不過是又用六十除了一下，把時化爲分。雖然結果還是一個平均速度，可是這樣一段一段的來計算，那就精密正確的多！

不過，像這樣的算法和實際的情形還有一個相當的距離。雖然這一個鐘頭的速度求出來了；但是我們能夠保險前半個鐘頭和後半個鐘頭的快慢是一致的嗎？

有理有理。不但前後兩半個鐘頭的快慢不一致，說不定前半分鐘和後半分鐘的快慢就不一樣，前半秒鐘和後半秒鐘的快慢也不一樣！所以最理想的辦法，乃是能夠求出一剎那一剎那的速度。

然而上邊那個算法依然能夠實用，那不過是：

$$(\text{很小很小的距離}) \div (\text{很小很小的時間}) = (\text{一剎那的速度})$$

——這個一剎那的速度也叫做瞬間速度。這比剛纔那個說法可就更精密了。

然而這裏邊還有個問題。所謂很小很小的時間，到底是多小的時間？所謂很小很小的距離，到底是多小的距離？

這就隨你的便了！而且因爲距離是隨着時間變的，在某一個時間，就走了某一個距離；所以我們先要決定時間。這個時間，你願意它多小就多小。

當然啦，越小越精密，越小越正確，——那麼就索性叫它最小吧！

什麼是最小呢？最小是零。

然而這就不行了！時間要是變成零，距離也就變成零，於是時間除距離就變成零除零。

從一方面講，時間是零的時候，距離也是零，那就是說，根本沒有運動。既然沒有運動，那就更談不到速度了！因此速度也是零。

從另一方面講，除法是乘法的還原。因為任何數乘零結果都是零，

$$\text{任何數} \times 0 = 0$$

所以反過來講，零除零就可以等於任何數，

$$0 \div 0 = \text{任何數}$$

這是一個不定式，商數可以隨便。那就是說，時間是零的時候，距離也是零，然而速度卻是等於什麼都行。說它快就是快，說它慢就是慢，說它有快慢，就有快慢，說它沒有快慢就沒有快慢。原來想要求精密，結果反而更糊塗了！不但不正確，簡直有點胡扯，——這豈不是一件怪事？

可是反過來再想：所謂時間是零的時候，正是火車剛要想開，還沒有真開，——

萬一開起來的時候，這個速度也許是每點鐘六十公里，也許是每點鐘六十五公里，也許是

每點鐘五十八公里，那就沒有準。所以如果按照這個想法，那倒是說什麼速度都可以的。

然而這個答案只是瞎猜，我們不需要。我們不能拿零作為除數，——因此這個議案應當取消。所以我們說，所謂很小很小的時間，無論多麼小都可以，然而不能等於零。

拿着這個要多小就多少小的時間去計算速度，這個瞬間速度也就夠精密的了。

同時在這裏還要有一點聲明，否則就要發生誤會。

剛纔我們所謂很小很小的時間，這個非常之小的時間，你不要認為僅只可以求出剛剛開車的那一剎的速度。即便火車開起來，跑在半路上，我們要想求出某一剎那的速度，依然可以用同樣的辦法把它求出來。

譬如說，火車在剛開的頭半個鐘頭，它是越跑越快的一個加速度運動。這時候，每一剎的速度都是在增加。假如我們想求剛剛5秒的時候那個速度，我們可以先把時間從5秒開始，讓它增加一個很小很小的時間，在這個很小很小的時間，火車就會跑了一個很小很小的距離。只要這個時間小到非常之小，那麼用時間去除距離的那個速度，就是剛剛5秒的速度，——平常我們把它叫做「5秒末速。」

這個5秒末速，當然和5秒內的平均速度並不相同，這是很容易想到的一件事。

因此對於一個運動，不但可以求出一秒鐘，一分鐘，一點鐘的速度，而且還可以求出一秒末，一分末，一點鐘末的速度。一個是在某一個時間之內的平均速度，一個是在某一個時間末了那一剎那的速度。——這個速度就是「瞬間速度」。

不過這個名詞還有點不夠精密，既是「瞬間」——間就是一個間隔，這個瞬間還有一個距離。因為時間既是小到非常之小，那麼我們就不如乾脆把它叫做一個「瞬速」吧。

所謂「瞬速」這就是火車的真正速度了。我們要它多麼正確就能夠多麼正確，只有這樣纔可以表示出火車的真正快慢。

像這樣的算法，把一剎一剎的速度都求出來，那麼整個火車運動快慢的狀況就可以完全知道了，這纔是一個正確的描寫。

也許你會覺得這個想法太麻煩，可是這是沒法避免的一件事，要想正確便須精密，要想精密便不能嫌麻煩。

原理是這樣定了，至於怎樣把這個麻煩的手續想法化簡，那只是一個計算的技術問題。

第四站 數的行列

火車走到了原野，聽着車響的聲音，看着車外邊的閃影，我們曉得它是開足了馬力。

不知道是爲了這聲音的單調呢，還是爲了振動的疲勞，有的客人已經打着哈欠，有的卻已經閉上眼睛就睡了。

可是這正是我們思索的一個好時候。

我們曾經說過，要要求出火車的真正速度，那就要計算那些很小很小的時間和距離。然而這只是對於不規則的運動需要這麼辦，對於規矩矩的運動就根本用不着。假如運動的快慢是一致的話，那就僅只求它隨便一個平均速度好了。這種運動叫做等速運動，速度既是相等，所以平均速度就是它的真正速度。

數 學 列 車

假設這個運動不是等速運動，那就情形很繁雜，越走越快的是加速運動，越走越慢的是減速運動。加速度相等的是等加速運動，減速度相等的是等減速運動。一會快，一會慢，快慢不一定，的就是變速運動了。

把一個皮球扔到天上去，這個皮球由於地心的吸力，每一秒鐘都減少了一個相等的速度，這就是一個等減速運動。回頭等到皮球從天上掉下來的時候，每一秒鐘又增加了一個相等的速度，這就變成一個等加速運動。大家與高彩烈的去旅行，越走越快是一個加速運動，回來帶着兩隻疲乏的腿，越走越懶得走，這就又變成一個減速運動了。

假設一個物體，越跑越快，比等加速運動還快，那是一個超加速運動。平常我們也把它叫做變加速運動。那是一個加速不規則的運動。

無論研究多麼複雜的問題，我們總是先從簡單的狀態開始，這是研究的一個方式。無論多少繁亂的問題，我們應當先歸納出一個抽象的形式，這又是研究的一個方法。例如把火車看成一個點，把鐵軌看成一條線，火車在鐵軌上跑，那就是一個點在一條線上移動，研究起來就方便得多了！

假設這個點，第一秒鐘走了一尺，第二秒鐘又走了一尺，這樣一尺一尺的走下去，那麼它所走的距離就是：

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ……………

27
每一個數目字表示進展一次的結果；整個的把它們排起隊來，這就表示出整個路程變化的全

般狀態。

假設我們只用一個數目字，那只是表示一個固定的距離，——像這樣一個固定的數叫做常數，常數就是一個不變的數，也就是我們平常常常的寫，常常的算的一個數。

然而如果把這些常數寫成一套，一隊，一個行列，這就變成一個變數了，這是一個新的觀念，一個新的認識。

首先我們要訓練自己，能夠從這個數的行列裏看出這個變數的變化的狀況。

這個行列就好像一個上樓的梯子，它是一個臺階接着一個臺階；一個變數，依次從這一個數跳到那一個數，就好像我們一級一級的走了上去或是走了下來。因此這個數的行列也有時叫做級數。

這個行列又好像我們去量布，量過一尺就接着一尺；又好像我們去翻書，掀過一頁又是一頁，照這樣接連不斷的繼續下去，——因此這個行列也叫做變數的接連數值。所以變數的內容就比常數複雜的多。

然而這只是變數的一個形式。

其次我們還要在這個行列裏看出變化的趨勢。——讓我們想想可能有幾種趨勢。

例如從一變到二，從二變到三，這個趨勢是什麼呢？

越變越大！就好像一個正在打氣的皮球，一個正在蒸發的水泡；這個級數叫做發散級數。它所表示的這個變數是一個越變越大的變數。

反過來說：從三變到二，從二變到一，這個趨勢越變越小；就好像用水團泥，用繩打包。這個級數叫做收斂級數，這個變數就是一個越變越小的變數。

那麼有沒有也變大也變小的變數呢？
有。譬如說，一個數的行列是：

1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ………

從一到二變大，從二到一變小。這好像是一個擺動，擺過來又擺回去，擺來擺去還不過是那一道路程。又好像一個人，前走幾步後退幾步，走來走去，彷徨徘徊，彳亍，游移。——因此這個級數便叫游移級數，這個變數便是個游移變數。

有沒有也不變大也不變小的變數呢？

有。例如下面這一個數的行列：

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ………

既不變大又不變小，老是那麼一個勁，常常的保持着一個狀態。——其實，這就是一個常數。所以常數不過是變數的一個特例。當着一個變數無論怎樣變，變來變去還是它自己，這個變數就是一個常數了。

除此以外，還有沒有例外？

有。——奇怪；幹嗎老是有？譬如說，上體操的口令：

一二三四，一二三四，三二三三四，四二三四。

一二一，一二一，一二一，一二一。

一二三三四，二二三三四，三二三三四，四二三三四。

這些是什麼級數？這些是什麼變數呢？

這些是亂七八糟的級數！這些是亂七八糟的變數！

對於這些亂七八糟的變數怎麼辦呢？

也有辦法！把它扯開來，一段一段的看，有時候變大，有時候變小，有時候不變。不就是這三種情形麼？所謂千變萬化，不過如是而已。所以研究這一類的變數，就需要一段一段的來研究了！

再則我們還要看這個變化的方式。

所謂一二三四五六七八九十，這個變數是怎麼變的？

它是走着變的，常步走，正步走，一步一步的走。

假若是一三五七九，或是二四六八十，這也是一步一步的走，可是和上面那個走法就不同了。上面那個是，一個單步一個單步的走，現在這個是，一個複步一個複步的走。左腿一邁是一步，右腿一邁又是一步，這是單步。左腿一邁再加右腿一邁，這也是一步，卻叫做複步。複步的距離比單步的距離長，所以這個變數就比上面那個變數變化得快。

假若是五，十，十五，二十，二十五，三十，這就更快了。假若是十，百，千，萬，十萬，百萬，這就更——更快了！所以變數變化也有快慢，這是變數的速度。

就上面這些變化看來，其實都是一個方式，走着變的。除此以外，還可能有另外的方式。

再讓我們彈鋼琴。我們把手指頭按在白鍵上，按了第一個再按第二個。

do, re, mi, fa, sol, la, si, ………

這就是一個越變越大的變數。反過來，

si, la, sol, fa, mi, re, do, ………

這就是一個越變越小的變數。

do, re, mi, re, do, re, mi, re, do, re, do, re, ………

這就是一個變大又變小的變數。假若按出歌兒來，聽着也許很好聽，可是如果按照變數的觀點看起來，那就是一個亂七八糟的變數了！

然而這裏面還有一個統一的形式。這些都是變完一個數之後，馬上就變成另外的一個數。假如我們是吹號，雖然吹出來的是一個 do，但是能夠從一個輕音，連續不斷的就能夠變成了一個重音。更正確一點說，我們可以把一個弱音連續不斷的變成一個強音！這個變化就和上面那些都不一樣了！

上面那些變化是一步一步的走，一步一步的爬，現在這個變化卻是連續不斷的滾！好像天上的風在刮，河裏的水在流。

因此就變化的方式來說，一個是連續的，一個是不連續的。走路，跑道，是一種變化；划船，溜冰，又是一種變化。

馬拉車，人拉船，馬的蹄和人的腳，與地面接觸的是一個點又一個點，車輪壓過的地面，船底劃過的水面，接觸的卻是一條連續不斷的線。

不連續的變化可以用一系列數去表示，連續的變化卻不好用一系列數去表示了。因為兩點之

間還有數不清的點，兩個數之間還有寫不完的數。所以用數來表示這個變化，就不如畫一根線來表示得更清楚了。

不連續的變化畫出來是些點，不管怎樣密，都是些孤點。連續的變化畫出來卻是一條線，一條連續不斷的線，就好像蠶吐出來的絲，或是機器紡出來的線，富貴不斷頭。

如果用記號來表示，那就要利用一個箭頭。譬如一個變數，從一變到二，再變到三，不連續的時候是：

$$1, 2, 3;$$

連續的時候就應當畫成：

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3.$$

這是兩個不同的變化的方式。

但是一個運動，一個變化，卻不見得完全是單純的連續，也不見得完全是單純的不連續。——就說我們坐的這輛火車吧，從上一站到下一站，這個運動是連續的，但是每到一站停下來，這個運動便停止了。假設用數目字代表車站，那麼火車的運動就應當是：

$$1 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 3; 3 \rightarrow 4; 4 \rightarrow 5; \dots$$

牛頓說：假使沒有外力的話，一個靜止的物體永遠靜止；一個運動的物體永遠運動——永遠向着一個直線的方向運動。這是一個慣性定律。現在，嗚——的一聲火車叫了，司機的人突然把火車的速度減下來。但是車上的客人還是由於慣性的緣故依然往前運動，於是當着車子一停的時候，臉朝前坐的就往前閃了一下，臉朝後坐的就會把腦袋碰在車皮上。因此睡着的就又醒過來，醒着的也想站起來活動活動了。

現在讓我們暫且走下車去，溜溜腿，換換空氣，休息休息腦子。回頭車開的時候再上來吧！

第五站 這個年頭變了

當着我們回到車上來的時候，火車就又開了。這本來是一件很平常的事情，可是想想就覺得怪奇怪的。剛纔我們還在車站上溜躑，如今又走上了征途。剛纔還停留了一會的地方，現在卻漸漸的跑遠了。當着我們把頭伸出了車窗外，回頭再看，那車站已經沒了影。

是動好呢？還是靜好呢？動是一個正常的現象麼？還是靜是一個正常的現象呢？——想着想着，心裏面就好像丟失了一件東西，雖然我們也不知道丟失的是什麼，可是總覺得有點空虛。變了，一切都變了！這是我們的一點感慨。

但是轉而一想：天地間有什麼是不變的呢？有什麼是永恆的呢？

屋子裏擺着的桌椅，窗外面看見的山，它們是在靜止着嗎？教地理的先生告訴我們，不但地球自己轉，而且還圍着太陽轉，不但圍着太陽轉，而且整個的太陽系還一起跟着太陽移動。只要地一動就帶着我們全體動，那麼連桌帶椅，以及地上面的山，山上面的廟，廟裏的人，不都是在那裏動麼？

平常我們認為靜是常態，動是變態；其實動纔是常態，而靜不過是一個例外，當着速度變成零的時候的一個特殊情形。

好像看電影：一個故事在銀幕上發展着，演變下去；只有偶爾在片子斷了的時候，銀幕上的一切纔會停止下來。我們能夠說靜止着是一個常態麼？

而且就是不這樣說；例如一個地上的建築物在那裏孤立着，它雖然沒有腿，不會爬起來走，可是風吹日曬，雨打水淋，久而久之，牆片掉了，棟梁彎了，一天一天的就會蒼老起來。我們能夠說它是永遠不變的麼？

只有看清楚這一點，我們纔能夠說：變纔是常態，而不變是一個例外。如此說來，我們對於一切變動不必感覺什麼驚異，這原本是一件很平常的事情。我們覺得應付一個變動的局而不容易，太困難，那只是證明我們自己的心理不健康，——更具體一點，也就是惰性太深。要想正視現實，那就不能害怕變動。

然而速度的變化卻有兩種，一種是加速度，一種是減速度。加速度的越來越快，減速度的越來越慢。同時動也有兩種，一種是前進的動，一種是後退的動，這也是由於方向的不同。前進的動如果是正動，那麼後退的動就是反動。

而且動又是一個進展，所以也可以說是一種進化。假設由前進的動發展到激動，那就是把速度突然提高了，結果前進變成了激進，在社會的現象上來說，那就是革命。在英語裏，進化是 evolution，革命是 revolution，再沒有比這兩個字表現得更清楚了。反過來說，所謂反動，再一變就會變成了反革命，這在我們的心裏邊應當有一個澈底的了解。

同樣的，變也有正變和反變。——也許可能是一個速度，一個變化的速度，然而就方向來說，卻是剛剛相反！如果不動不變呢？那就要落伍了！

因此所謂速度，它的意義不僅只是表示快慢，而且還表示着方向。假設方向正的是一個加速度的話，那麼方向反的就是一個減速度，——也叫做負速度。如果不論方向但論快慢，那只是「一個速率」。

同樣的，對於變化來說，變化的速度叫做變速，變化的速率叫做變率，也是一個帶有方向，一個不帶方向。這樣一來，就把我們關於速度的觀念擴大了！

例如我們到水邊去釣魚。當着釣魚的鉤子伸到水裏的時候，水面上就會發出了一個圓的波紋，這個波紋慢慢的變大了。圍圈一大，圓的面積就增大，這個面積增大的快慢就是一個變速。又如放風箏。風箏飛起來了，風很穩，而且順，於是這個風箏就要在天空上往前跑。風箏一跑，

就要放線：風箏跑得快，線也放得快；風箏跑得慢，線也放得慢。它們快慢雖一致，然而一個是運動的速度，一個卻是變化的變速，——那就是風箏線長的一個變化的速度。

我們曾經說過，當着你走向校門口的時候，只要你一走，那麼已經走過的路就要增長，還沒有走過的路就要縮短。這兩個快慢當然彼此一樣，然而變化的狀況卻又相反，一個變大，一個變小，一個變長，一個變短。這就是變率相等而變速不等。

照這樣想法，我們可以研究的就太多了。譬如說，現在我們的火車正在走過一個鐵橋，那麼讓我們把手伸在車窗外，丟下去一個石塊。這個石塊正直的掉下去了，而車卻是依然往前跑，那麼那個石塊和我們的手就越來越遠了。我們可以算算這個距離變化的變速，和上面那個走路的問題完全一樣。

假如我們把一滴墨水滴在一張吃墨紙上，這個黑點越滲越大，那麼這個黑點的變速，就又和那個算水紋的問題一樣。同時，當着你看到一個吸煙的人，突然從嘴裏噴出了一個煙圈，這個煙圈越來越大。你不應當僅只驚訝這個好玩的技術，還應當想想這個煙圈的變速的求法。

這並不僅只是一個有趣的觀察，實在是對於一切自然變化的初步了解。例如按照物理上的定律說，物體的體積與溫度和壓力都有關係。溫度不變的時候，壓力越大體積越小；壓力不變

的時候，溫度越高體積越大。如果我們要知道這個體積變化的實況，我們不就應當先求出這個變化的變速嗎？

像這些能夠變化的量都叫做變量。現在我們已經說過三種變量了一種是距離的變化，一種是面積的變化，一種是體積的變化。無論一個線，一個面，或是一個體，只要能變，便應當先求出它的變速。——至於一個點的移動，那就只是一個運動的速度了！

對於這些變速應當怎樣去求呢？這還是和求速度的那個方法完全一樣。先求平均變速，再求真變速。

首先我們要講明一個名詞。只要是一個變量，那麼經過一個時間就要產生出一個變化，這個變化，我們把它叫做變異。——變異當然不能等於零；因為如果等於零，那就是沒有變異，既然沒有變異，那就不必算了。

如果知道了變異，我們就可以求它的平均變速。那就是

變異 ÷ 時間 = 變速

但是要想求出真正的變速，還得用那個老法：

(很小很小的變異) ÷ (很小很小的時間) = (一剎的變速)

只要把一剎一剎的變速求出來，那麼整個變動的狀況就完全明白了。這和求速度還是一個原理。

也許你覺得這些問題有點頭痛，可是這是沒法子的事。要想透澈的了解一個運動或是一個變化，這都是沒法避免的手續。

爲什麼發生這些問題呢？那就是因爲一切都是變的。變就是整個自然現象的一個共同的形式。

就拿時間來說吧，一會天亮了，一會正午了，一會太陽落了，一會天黑了，一會太陽就又從東邊爬出來了。你大概聽過不少關於神話的故事吧？例如一個樵夫跑到山裏去打柴，遇到兩個老頭在下棋。看着下棋就把打柴的事情忘掉了，不過這時候使他奇怪的卻是樹葉黃了黃了又綠了，綠了綠了又黃了。等到他下山回家的時候，已經不曉得經過多少個年代了！所謂「山中方七日，世上幾千年」就是類似的一個詩話。我們別的不管，單就那個樹葉的變色來說，那無非是形容由秋到冬，由冬到春，由春到夏，繞過來又變成了秋天，我們沒法停止這個季節的變化。一天一天的，是這樣，一年一年的也是這樣。

同樣的，一個人沒有幾天的嬰兒變成幼童了，沒有幾天的幼童又變成大人了，大人轉眼就

又變成了老頭。這種變化卻和上面那個季節的變化又有點不同。季節的變化是週期的，繞了一個圈子又繞了回來；可是一個人的變化卻是不循環的，因為從來沒有一個老頭能夠又變成一個嬰兒。——這也就是對於人生最大的一個遺憾。

然而這僅只是對於一個人來說，假設就整個人類的全體來看，這一代雖然過去了，可是接着又來了下一代；老的雖然老了，年青的卻又壯大起來，這實在還是一個週期的變化。就彷彿是演舊劇，一齣戲唱完了，所有的腳色從下場門走進去了，可是接着就是下一齣的開始，不同的腳色又從上場門裏走了出來。人生固然不是演劇，我們不應當抱着玩世的态度逢場作戲，但是單就變幻的情形來說，卻又不妨權作這個看法。

假設一個人的眼光不能看到人類的全體，而僅只注意到個人的演變，那麼或早或晚終歸就要消極悲觀，以致苦悶。而且這種心理越老越利害，因此年紀越大的人就覺得一切都看不慣，不順眼，無論什麼都別扭着心。

這種情形太普遍了，——即便來到這個火車上，我們也不免聽到旁邊的那位老先生又在發出這樣的感慨：

41
「唉，這個年頭什麼都變了！」

其實哪是這個年頭變？無論什麼年頭都在變，根本就沒有不變的時候！——不過也許現在變的稍微快了點，所以老年人便看不慣了。

然而在一位青年人的眼裏就感覺不到那麼深刻，所以又有另外的一個人接着說：

「你老人家歇歇心吧，這個年頭管不了那麼許多了！」

整個的世界就像這輛跑着的火車，一切的萬物又像兩邊的景物，連續不斷的在那兒動，動，——永遠的動變，變，——永遠的變！

第六站 跑到哪裏算一站

撞撞撞撞，撞撞撞撞，撞撞撞撞……

聽着火車響得那麼起勁，我們知道它又恢復了正常的速度。從一開車起，一直到現在，沒有一會不是增加速度；但是等到開足了馬力的時候，它就繼續的保持着一個固定的速度往前跑。這就是說，從一個加速度運動又變成一個常速運動了。

雖然它的聲音那麼大，然而因為太單調的緣故，結果就變成了一隻催眠歌，叫人聽了不耐煩。同時車往前動，人雖然覺不大出來，可是由於上下左右的震動，就又会使人覺得容易疲勞。假設不想法解解悶，豈不就要感覺無聊嗎？

我們應當多想，多想出些問題來！

讓我先開始吧。

「我問你，火車如果像這樣走法，我們結局會跑到什麼地方去呢？」

「那還不是跑到下一站麼？」

「不錯。可是如果永遠不停呢？」

「那就跑到最末一站了！」

「假設鐵軌繼續延長呢？」

「那，也許跑到一個山根。」

「假設連山上也鋪了鐵軌呢？」

「那就跑到山頂了。不，也許就又跑下來。」

「假設再往前跑呢？」

「也許跑到一個河邊。」

「然而河上可以搭橋！」

「那就從這邊跑到那邊了。」

「假設再繼續跑……」

「你怎麼老是有完再跑，就跑到海邊了！再跑就要掉在海裏去了！」

「你放心，海上也有橋……」

「那簡直是豈有此理！」

「不，還是要往前跑！一定要往前跑！」

「再跑？還跑？再跑就要跑回來了！」

「爲什麼？」

「地球不是圓的麼？再跑就跑一圈了。」

「不，假設地面是平的，譬如說把地球壓扁了，而且又壓平了，而且又伸長伸遠伸寬伸大，長的沒有頭，遠的沒有邊，寬的沒有岸，大的沒有個限制。」

「簡直越來越不像話了！」

「不，不，還是要跑，往前跑，一直跑，永遠不停的跑！」

「究竟你的話有完沒有完？」

「有完。乾脆一句話，我要問你……」

「你不要問我，我倒要問你：跑來跑去，究竟跑到哪裏算一站呵？」

「不錯，這就是我要問的那個問題。」

「這倒上了你的圈套了，咱倆變成了一個問題。幹嗎要這樣嘮嘮叨叨的？」

「不，我要告訴你一個新的問題。」

「還是按照我們那個化簡的辦法，把鐵軌看成一條線，火車變成一個點，那麼這個點沿着那條線，永遠向着一個方向跑，結果究竟會跑到什麼地方去呢？」

「那只有天知道吧！」

「不，人也可以知道。」

「那不是越跑越遠麼？」

「對了，老弟。可是到底多麼遠呢？」

「很遠。」

「究竟多遠？」

「遠，遠，遠的利害！」

「利害也不行。究竟多遠？」

「遠，遠，很遠很遠，要多遠就多遠，比什麼都遠！」

「對了，這就說到了正題。」

「這算什麼正題，豈不是和不說一樣嗎？」

「不，說就比不說強。現在我們要想想那個距離了。跑的遠，就是說距離大。遠到要多遠就多。」

遠的時候，那個距離就是要多大就多大，比什麼都大！

「這麼一來，那算個什麼數呢？」

「那就是一個無限大無窮大！」

「無窮大也是個數嗎？」

「是，它是個變數。」

「是不是一個最大的數呢？」

「不！不是一個最大的數！」

「這就奇怪了；那麼最大的數是什麼？」

「根本這個問題就不通，天地間找不到一個最大的數。」

「那麼讓我們數數看！」

.....

「你爲什麼不說話了呢？」

「數不到頭。」

「對了——不是沒頭，而是沒尾。」

「可是我想應該有個最大的數。」

「好，就算承認你這個說法，假設有一個最大的數，要是這個數再加上一個『一』呢？」

「那——那就比它更大了！」

「那麼原來的那個數還能夠算是一個最大的數嗎？」

「那——那就不是最大的數了，不過，別扭，這個問題有點太那個。」

「一點也不那個。這就是說根本沒有一個最大的數。」

「那麼無窮大呢？」

「無窮大也不是一個最大的數，它不過是一個能夠變成要多大就多大的變數，它能夠比什麼數都大，然而卻不能說是一個最大的數。」

「這是什麼意思呢？」

「那就是說它可以大大，大到沒有限制的大，所以是一個無限大。然而大既然是沒有限制的，所以就找不到一個最大的數。」

「究竟這個變數是無限大呢？還是無窮大？」

「既是無限，又是無窮！」

「此話怎講？」

「沒有限制，所以是無限；數不完，所以是無窮。」

「那麼反過來說，就該有無限小無窮小了？」

「不。有無窮小，卻沒有無限小！」

「爲什麼？」

「無論多麼小，小到零就算完了。零不就是一個限制嗎？」

「奇怪，讓我再想想。假如往前跑，越跑越遠，距離越大；那麼——反過來往後跑，越跑越近，距離越小……」

「這樣跑着跑着就跑回來了，那就變成零。」

「不還是跑！」

「再跑？還跑？再跑就要——又跑遠了！」

「然而這兩個方向不一樣，按照你那個說法，如果往前跑是正的，現在就變成負的了！」

「不錯，可是這樣越跑越遠，結果就變成負的無窮大了！」

「爲什麼有兩個無窮大，只有一個無窮小呢？」

「那就好像一根線，可以有兩個頭，然而只有一個中點。你能說它爲什麼嗎？」

「還有，你說『個』也不妥當，你只能說一種兩種，不能說一個兩個。因爲每一種都可以有無限多的無窮大和無窮小。譬如說，你變大，我也變大，咱倆都是無窮大；你可以變成正的無窮大，我可以變成負的無窮大，咱倆越來越遠越別扭；你變小，我也變小，咱倆都是無窮小，越來越接近，末了都變成一個零。」

「這樣一扯又扯遠了，咱們還是想想那個跑到哪裏算一站的問題吧。」

「譬如說，火車往前跑，永遠往前跑，那麼它能夠跑到哪裏去呢？」

「實際上你是說一個點在一條線上跑的問題。現在我能夠答覆你了，它要跑到無限遠，也就是無窮遠。」

「問題是瞭解了，可是答案卻不一定對！」

「爲什麼呢？」

「那還要看它是怎樣跑法？」

「無論怎樣跑，結局不都是無窮遠嗎？」

「且慢，我們還是想想看。」

「假如從這一站到下一站，永遠往前跑；然而先跑一半，再跑一半的一半，再跑一半的一半，這樣一半一半的跑下去，無論跑到什麼時候，結局——你猜怎麼着？結局也不過是跑到下一站。」

「是嗎？有理倒是有理，可是有點莫明其妙。」

「其實一點也不妙，那不過是火車出了毛病，越跑越慢了。因爲……」

「雖然越跑越慢，然而它不是永遠往前跑嗎？」

「雖然永遠往前跑，然而它總不能越過下一站。」

「對是對；可是還有一點想不通。雖然越跑越慢，然而永遠繼續往前跑，結局就不能跑到很遠的地方去麼？只要有充分的時間！」

「其實你想的並不錯，有時候它是可以跑到很遠的地方去的；不過有時候就不行。例如上邊那個跑法就不行！你想的有理是有理，然而不能完全都對。」

「原因是什麼？」

「那就是因爲受了那一半的限制。所謂一半，是僅就這兩站之間來說的，所以無論如何就不能越過下一站了。假設沒有這一類的限制，那倒是可以跑到無限遠，不過很慢很慢就是。」

「這還像句話。」

「要是用變數講，如果一個變數雖然永遠變大，但是終究不能大於一個固定的數，這個變數就要有個限制。」

「像這樣我也會說，如果一個變數雖然永遠變小，但是終究不能小於一個固定的數，這個變數也就會有一個限制。」

「你的腦袋太好了，比剛纔活動的多了！可是我們還要想一想，如果一個變數的限制知道了，那麼這個變數變來變去，是不是就可以和這個限制變得完全一樣呢？」

「當然一樣了！譬如你說的那個火車，走着走着不就是到了下一站了麼？」

「然而在理論上可就不能那麼說。」

「怎麼？你又推翻了你自己的話麼？你簡直是——簡直是一個變數！變過來也是你，變過去還是你，你到底是怎麼一回事？我剛剛想明白了，你就又變了卦！」

「你別急，老弟，咱們好商量。我並不是推翻了我自己的說法，不過爲了精密還要加以補充。你應當注意，我們現在討論的是個變數，要變就永遠變，絕對不停止；假若它變到和那個限制相等，豈不就是不變了麼？」

「那麼，這倒是一點問題。」

「不錯，一頂點相差也就是那麼一頂點。這個一頂點是什麼？」

「無窮小！」

「對了，它是近於零而不等於零。對於這一種限制，我們單給它起個名字，叫做變數的極限。所以我們只能寫成：

距離 $\rightarrow 0$ 而不是：距離 = 0

「因此，照這樣想法，要是那個很小很小的時間近於零的話，那麼一剎的速度就變成真正的速度了，一剎的變速也就變成真正的變速了！這比以前那個說法更精密，更正確。」

「上海的飯舖有個陸稿薦，老陸稿薦，真正老陸稿薦；北平的刀剪舖有個王麻子，老王麻子，真正老王麻子；我們也有個平均速度，瞬間速度，真正速度；平均變速，瞬間變速，和真正變速……」

「別嚷，你聽火車又在叫了；我想大概快要到下一站了。」

「不錯，那就是火車的運動快要到了它的極限值。」

第七站 大和小的賽跑(上)

當着火車又叫第二遍的時候，我們纔發覺並沒有跑到下一站，只是鐵道要拐彎。旁邊有一座塔，很高很好看。我連忙告訴你：

「你瞧，你瞧，那個塔！那個塔轉起來了！」

「是嗎？讓我瞧瞧！不錯，這就是因為我們的火車正在圍着它繞了半個圈。」

「你的悟性不錯，咱們還是坐下再繼續的談。」

「談什麼呀？談來談去不還是那一套嗎？」

「不，換個題目試試看！我已經告訴你了，無窮大和無窮小都不止一個，而且它們都是變的，

那麼現在讓它們湊到一塊變，這不就很好玩嗎？」

「這倒有點意思！」

「那麼我們先看無窮大吧。找幾個無窮大來試試。」

「從前我們曾經說過，每一個變數的形式都是一個數的行列，這個行列就叫做變數的接

連數值。所以兩個不同的行列就是兩個不同的變數；反過來說，兩個不同的變數，它們的接連數值也就不同。現在你要找哪些無窮大呢？

「隨你的便吧，只要好玩！」

「那麼我們就先找幾個簡單的，譬如一個是 x ，一個是 y ，一個是 z 。

x : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ………

y : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ………

z : 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, ………

現在，一，二，三，就讓它們變！看看誰變得快！」

「這不就 and 賽跑一樣麼？」

「是的，如果你願意把它們看成賽跑，那就是賽跑，現在我們看看誰跑得頂快？」

「當然 z 跑得頂快了！ z 第一， y 第二， x 第三。」

「不錯！可是你說的是……」

「怎麼？又有問題麼？」

「不，還沒有這麼快。——現在再來一個 u ，

$u: 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, \dots$]

「這是些什麼玩意？」

「這也是一個無窮大，帶花的無窮大。它的接連數值都是些方數，平方數。」

「帶花的無窮大，這倒很新鮮，可是有點不明白……」

「其實也沒有什麼很簡單的，我們就可以把它們算出來，那不過是：

$u: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots$

把花一去，這就很平常了。

「現在讓 u 也來跑，看看誰跑得快？」

……

「你說呀！」

「別慌，讓我想想看。 u 和 x 比，當然是 u 快； u 和 y 比，當然還是 u 快； u 要是和 z 比呢——

這個……這就是問題了！」

「爲什麼？」

「 z 跑到一百的時候， u 也是一百，似乎一般快。可是再跑呢？讓我算算看。」

「如果再跑， z 應當是：

z : 100, 110, 120, 130, 140, 150, ………

u 應當是：

u : 100, 121, 144, 169, 196, 225, ………

這樣一來，當然是 u 快了！」

「很好，你居然那麼仔細，這就是一個進步。現在又來了兩個無窮大，一個是 v ，一個是 w 。

v : $1 + 5, 2^2 + 5, 3^2 + 5, 4^2 + 5, 5^2 + 5, 6^2 + 5, ………$

w : $10 \times 1, 10 \times 2^2, 10 \times 3^2, 10 \times 4^2, 10 \times 5^2, 10 \times 6^2, ………$

v 和 w 也是些帶花的，然而一個後邊扯着個 5，一個前邊拉着個 10。現在比一比，看誰能跑得最快？」

「還是別慌，讓我比比看。 v 和 u 比，當然是 v 快了，因為每一個數都多了個 5。 u 和 w 比呢？——當然是 w 最快了！」

「 w 第一， v 第二， u 第三， z 第四， y 第五， x 第一——末了。」

「好極！我們還得再想。這些帶花的和不帶花的，跑起來有什麼區別麼？」

「這句話問的我不大明白。」

「那就是從快慢上說，這兩組有沒有不同的地方？」

「什麼不同的地方？我還是不大明白！——你乾脆就說吧！」

「不，一說穿就沒意思了。我們先一組一組的看。就 x 和 y 來說，跑起來的時候，彼此有什麼關係呢？」

「讓我比比看。——我看出來了， y 永遠比 x 多 10。」

「那麼 z 和 x 呢？」

「 z 永遠是 x 的 10 倍！」

「對了，那就是說， y 和 x 的差， z 和 x 的商，永遠相等！」

「這有什麼意思呢？」

「這就是說，跑起來的時候，它們彼此之間的位置老是有一個固定的關係。 y 永遠比 x 多十步， z 的距離永遠是 x 距離的十倍。」

「讓我再想想……那些帶花的也有這麼一種情形。 v 永遠比 u 多五步， w 的距離永遠是 u 的距離的十倍！」

「不錯，那就是說， u v w 跑起來的時候，它們彼此之間也是保持着一個固定的關係。現在再讓我們每一組裏挑出一個來比比看！」

「這倒真像賽跑了！每一組裏選一個第一吧！」

「不爲了我們自己看着方便，還是選那些倒數第一吧。譬如 x 和 u ：

x ：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ………

u ：1², 2², 3², 4², 5², 6², 7², 8², 9², 10², ………

「它們彼此之間也有一個固定的關係，這個永遠是那個的方數。」

「現在我要問你， x 和 u 跑起來應當是個什麼情形？」

「讓我想想看。 x 和 y 是一個差數， x 和 z 是一個倍數， x 和 u 是一個方數，……那麼 u 和 x 越離越遠，這個變化可就大得多了！」

「好極啦，老弟，真有你的。那就是說， u 比 x 快得太多了！同時 u 與 v 就和 x 與 y 一樣，它們彼此之間的快慢比較還差得少，但是帶花的和不帶花的，彼此的快慢就差得太多了！這是一個重要的分類。因爲帶花的和不帶花的簡直不能夠相比！」

「同時，這些變數既然都是些運動員，那麼我們如果打算分班的話，不帶花的應當是低年

級帶花的就應當是高年級。這就是說，無窮大要分級。有高級的無窮大，也有低級的無窮大。」

「如此說來，你不但不是我的老師，而且也是無窮大的老師了！」

「不敢，不敢。」

「那麼這個編級試驗有沒有一個簡單的辦法？」

「有——那還得講分數。」

「爲什麼呢？」

「分數有個性質。假設一個分數，分子不變，分母越大分數之值就越小；分母越小分數之值就越大。」

「不錯，這在講孫悟空坐火車的時候已經提過了！」

「是嗎？你的記性很好。現在我要告訴你一個新的記號，那就是無窮大；無窮大雖然不是一個固定的數，可是我們爲了方便，也給它規定一個記號，這個記號就是一個睡覺的 ∞ ，我們把它寫成 ∞ 。因此，假設分子不變，

如果 分母 $\rightarrow 0$ 則 分數之值 $\rightarrow \infty$

如果 分母 $\rightarrow \infty$ 則 分數之值 $\rightarrow 0$

同時這也就是無窮小和無窮大的一個關係。」

「按照這個說法，它們兩個彼此倒是親戚了！」

「是的，它們兩個是一對寶貝，一對活寶！一個大一個小，一個胖一個瘦。」

「這與無窮大的編級有什麼關係呢？」

「這就要告訴你。假設有兩個無窮大，我們就先讓它們比一比，這一比就變成分數了。譬如

x 和 n ：

$$x: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$$

$$n: 1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, \dots$$

$$x:n = \frac{x}{n}: 1, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{3^2}, \frac{4}{4^2}, \frac{5}{5^2}, \frac{6}{6^2}, \frac{7}{7^2}, \frac{8}{8^2}, \frac{9}{9^2}, \frac{10}{10^2}, \dots$$

$$\text{那就是 } \frac{x}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \dots$$

這個分數之值也是個變數，越變越小，——這是個無窮小。用記號來表示，就是：

$$\frac{x}{n} \rightarrow 0$$

——你能從這個關係上看出誰跑得快麼？

「讓我想想看！如果一個分數之值變成零，那就是 u 比 x 先變成無窮大；所以—— u 比 x 快！
快！
 x 比 u 慢！」

「這真是好極了！那麼誰是高級？誰是低級？」

「 u 是高級， x 是低級！」

「一點也不錯。」

「可是如果 u 比 x 呢？——讓我自己比比看：因為 u 比 x 和 x 比 u ，彼此是一個倒數；分子分母顛倒過來，

$$\text{如果 } \frac{x}{u} \rightarrow 0 \text{ 那麼 } \frac{u}{x} \rightarrow \infty$$

這就是 u 比 x 跑得快；那麼還是 u 是高級， x 是低級，結果一樣！這倒有點意思。

「可是 x 和 y 不也是有個快慢嗎……」

「然而那就不一樣了！因為：

x : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ………

y : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ……………

$\frac{y}{x}$: $\frac{11}{1}, \frac{12}{2}, \frac{13}{3}, \frac{14}{4}, \frac{15}{5}, \frac{16}{6}, \frac{17}{7}, \frac{18}{8}, \frac{19}{9}, \frac{20}{10}, ……………$

或: $1 + \frac{10}{2}, 1 + \frac{10}{3}, 1 + \frac{10}{4}, 1 + \frac{10}{5}, 1 + \frac{10}{6}, 1 + \frac{10}{7}, 1 + \frac{10}{8}, ……………$

這個分數之值永遠是一個 1 再加一個分數，但是這個分數，分子永遠是 10，分母卻是越來越大。當着分母變成無窮大的時候，這個分數就要變成零，那麼 y/x 就要變成 1 了！

「這倒是件怪事。可是如果 x 比 y 呢？」

「 x 比 y 和 y 比 x 彼此還是倒數。因為：

$\frac{y}{x}$: $1 + \frac{10}{10}, 1 + \frac{10}{20}, 1 + \frac{10}{30}, 1 + \frac{10}{40}, 1 + \frac{10}{50}, 1 + \frac{10}{60}, 1 + \frac{10}{70}, 1 + \frac{10}{80}, ……………$

那麼 $\frac{x}{y}$: $\frac{1}{1 + \frac{10}{10}}, \frac{1}{1 + \frac{10}{20}}, \frac{1}{1 + \frac{10}{30}}, \frac{1}{1 + \frac{10}{40}}, \frac{1}{1 + \frac{10}{50}}, \frac{1}{1 + \frac{10}{60}}, \frac{1}{1 + \frac{10}{70}}, \frac{1}{1 + \frac{10}{80}}, ……………$

這樣一來，當着分母變成 1 的時候，這個分數也變成 1，就和上面那個結果完全一樣了。」

「這件事情有點奇怪！讓我想想看：如果一個分數之值變成 1，那不就是分子分母變成 1

樣的了麼？」

「你說的很對！」

「對了我明白了！它的快慢一樣！它們兩個應當是個同班！這真是好玩極了！」

「現在再比較比較 x 和 z ，那就更容易了。」

x : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ……………

z : 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, ……………

z 永遠是 x 的 10 倍，所以無論到什麼時候總是：

$$\frac{z}{x} = 10 \quad \text{或是} \quad \frac{x}{z} = \frac{1}{10}$$

結果變成一個固定的數。

「那麼這時候應當怎麼分法呢？——如果把 z 放在高級裏行不行？」

「 z 比 x 跑得快，應當是高級，可是再和 v 一比呢？——不行，和 v 一比它就不配！」

「反過來說，把 x 放在高級裏行不行呢？」

「那更不行了！本來 z 比 x 跑得快嚟！」

「這也不行，那也不行，那就只好把它們放在同年級了——這些是同級的無窮大！」

「那麼 x 和 y 不也是同級麼？」

「當然是同級呵！可是同級和同班還不一樣！」

「那怎麼講？」

「比值變成常數的時候，是同級；比值變成 1 的時候，是同班。」

「1 不也是個常數嗎？」

「1 雖然是常數，然而常數卻不一定是 1。這就是說：同班就是同年級，然而同年級卻不一定同班！」

「這倒和我們的學校完全符合了！想不到火車一動，就會使我們想出了這麼多的玩意。」

第八站 大和小的賽跑(下)

「我們的火車這一站跑得太遠了，怎麼還不到站呢？——你是不是有點餓了？」

「不；我還在想那些問題。你說無窮大和無窮大比較，有高級的，有低級的，有同級的，還有同班的。然而無窮大到底並不是些人，它們都是些數，能跑能變的數。我們能說高級的變數，低級的變數，同級的變數；可是要說同班的變數，——這個名詞有點不像話！」

「好極，你的提議我附議。論說如果一個分數之值變成1的時候，我們應該說分子分母相等。這就像是數學裏的行話了。」

「是嗎？那麼 x 和 y 就是兩個相等的無窮大了？」

「是的，我們可以說它相等。」

「別慌，我還得想想看。」

x : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ………

y : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ………

可是 x 永遠比 y 少 10，我們能夠說它相等嗎？而且照這樣看來， x 是從 1 開始， y 是從 11 開始， y 不就是 x 的一部分麼？

「你覺得很對，可是你的看法錯了！」

「這是什麼意思呢？」

「你從這些固定的接連數值來看， x 是比 y 少 10， y 也的確只是 x 的一部分。可是你忘記它們都是變數了，它們是在賽跑。你看兩個人賽跑的時候，你不能着重開始，你應當注意結果！現在這些數都要跑到無限遠，當然這個結果看不到，可是你應當注意這個跑的過程。

「 x 和 y 雖然永遠相差是 10，然而當着它們倆都變成無窮大的時候，這點差數就不算什麼了！」

「譬如平常我們到鋪子裏去買東西，掌櫃的把算盤一撥，三三三十一，三下五除二，算得那麼仔細，一共十萬零五百。那麼你付給他多少錢呢？」

「當然給他十萬了，這個年頭三百五百的還算錢麼？」

「是的，你這樣想，我也這樣想，掌櫃的也這樣想。這樣一來，你就省下了五百。

「第二天你又去買東西，這一次卻只買了一千塊錢的東西。那麼你再叫他讓五百他幹不

「那大概就不行了！」

「豈但是大概，那簡直就是不行！如果你不給他這五百，那可就要找麻煩。」

「爲什麼呢？因爲我們對於差誤有兩種看法，簡單一點，看差數的本身；仔細一點，就要比較原數。現在這兩次買賣雖然都是相差五百塊錢，可是如果和原數比較，第一次相差不到十萬分之五百，約合二百分之一；可是第二次相差卻是一半，二分之一。你想，如果不給他這五百，那就不和白送一樣麼？」

「這兩種差數，一個是絕對的差，一個是相對的差——平常所謂『差一差二不算差』，那只是相對的差；如果就絕對的差來說，那就不行了！」

「還有，我們說『差一點』，這句話肯定，應當是一個絕對的差；要是說『差個一星半點』的，『那就有點相對的意味了。這兩個意義彼此不同。』」

「這一扯可就又扯遠了！」

「不；我們還是扯到本題。假如兩個變數都是無窮大，能夠變到要多大就多大，那麼即便差個常數，也算不了什麼，——因爲這個常數，就無窮大看來，那簡直提不到話下。因此，我們就可以

說它們相等。」

「然而這和平常的數不一樣了！」

「當然不一樣！一個變，一個不變，變的能和不變的一樣麼？」

「這不就是說，一個數的一部分能夠等於它的全體嗎？」

「對了！——可是只有無窮的時候纔有這個性質，不是無窮的時候就不行。所以什麼是無窮呢？要是一部分能夠等於全體，這就是無窮；無窮就是數不清的意思，——不是數不清，是數不淨，數不盡，數不到頭，——呵？我又說錯了，是數不到尾！頭是頭，尾是尾，你明白這個意思嗎？」

「明白倒明白，可是我不知研究這個有什麼用？難道你真要辦一個無窮大的學校嗎？」

「不用當然是有用。譬如說，馬爾薩斯的人口論曾經說過：食糧的增加彷彿是這樣的變數：

$n: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$

而人口的增加卻又好像這樣的變數：

$N: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots$

這兩個都是越變越大，都是無窮大，然而相等嗎？」

「當然不等。」

「那麼誰快誰慢？」

「當然是 N 快了！」

「這就是說， N 是高級的無窮大， n 是低級的無窮大，因此將來的食糧就要成問題。不管他的根據對不對，合理不合理，可是在事實上，對於無窮大的分級，並不是沒有用處的。」

「你看，——火車又要拐彎了！」

「是嗎？——那麼我們的話也要拐彎了……怎麼，你笑？」

「我笑你的話也沒頭，——不，不是，我也說錯了，你的話老是沒有尾！所以我說，你——你就是一個變數！」

「不管變不變，反正咱們說的是個理！」

「裏？——什麼裏？有裏就有外，有高就有矮，有長就有短，有大就有小，有無窮大就有無窮小，……」

「得啦得啦，再說你就變成一個變數了！——說曹操就來了曹操，說無窮小就來了無窮小。無窮小來了，我們也要分級。」

「怎麼，無窮小也要分級？」

「是的，我們可不能厚此薄彼，我們要一視同仁。」

「那麼無窮小又是怎麼分法？」

「還是讓它們跑，誰先跑得快，誰就是高級的無窮小，誰要跑得慢，誰就是低級的無窮小。」

「這不是和無窮大的分級一樣了麼？」

「編級試驗是一樣的，可是那個跑法卻不一樣。凡是無窮大都是越跑越有勁，越跑越快；然而所有的無窮小卻是越跑越洩氣，越跑越不動。爲什麼呢？因爲無窮大跑起來，是無窮無限，要多遠就多遠；無窮小跑起來，無窮而有限，跑着跑着就動不動了！」

「那真是太沒出息了！」

「不管有出息沒出息，既然來了我們就得收容。雖然越跑越不動，可是也能夠比較出個快慢來。」

「那麼這些無窮小找誰呢？」

「不必多費事了，因爲我們已經知道，無窮大和無窮小是親戚，一個帶着一個。只要 x 是個無窮大，那麼 $\frac{1}{x}$ 就是一個無窮小；它們兩個互爲倒數。無窮小倒過來就是無窮大，無窮大倒

過來就是無窮小。這是一對難兄難弟。」

「那倒很方便！」

「所以要找無窮小那就不必另外找，只要把上面那些 x, y 倒過來好了。

「可是無窮大和無窮小，兩個跑的方向剛剛相反（以前我已經告訴過你，）所以這兩個甄別試驗的判斷也就要相反了。

「譬如三個無窮小，一個是 a ，一個是 β ，一個是 γ ，

「乖乖，這是些什麼玩意呵？」

「你不認得是不是？一個念 Υ 儿 Υ ，一個念 Υ 去 Υ ，一個念 $\langle \Upsilon \Upsilon \Upsilon \rangle$ 。乍看怪別扭，一熟就順眼啦。現在我們要求 β 和 a 的比值，」

「別慌別慌， a, β, γ 到底是些什麼玩意，我還不大明白。」

「剛纔不是說過了麼？ a 就是 x 的倒數，

因為 $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,$

所以 $a = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10},$

同樣的， β 是 y 的倒數， γ 是 z 的倒數：

$$\beta: \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \dots$$

$$\gamma: \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{60}, \frac{1}{70}, \frac{1}{80}, \frac{1}{90}, \frac{1}{100}, \dots$$

「這不就越來越小了麼？」

「當然啦，要不還是無窮小麼？——現在求 β 與 a 的比值，也是一個分數；那麼只要按照分數除分數的辦法，我們就得到：

$$\frac{\beta}{a}: \frac{1}{11}, \frac{2}{12}, \frac{3}{13}, \frac{4}{14}, \frac{5}{15}, \frac{6}{16}, \frac{7}{17}, \frac{8}{18}, \frac{9}{19}, \frac{10}{20}, \dots$$

那麼這個分數越變越大呢？還是越變越小？」

「讓我比比看……原來是 $\frac{1}{11}$ ，現在變成 $\frac{10}{20}$ ，那就是 $\frac{1}{2}$ 了，——越變越大！」

「它能變成無窮大麼？」

「讓我再想一想：雖然分子和分母同時變大，然而分子總比分母小，所以這些都是真分數；

既然是真分數，那就——不能變成無窮大！」

「不錯。照這樣變下去，至多變成個什麼？」

「至多是個1！」

「那麼和1差多少呢？」

「讓我再比一比，一個一個的比，這個差數是：

$$1 - \frac{\beta}{\alpha} : \frac{10}{11}, \frac{10}{12}, \frac{10}{13}, \frac{10}{14}, \frac{10}{15}, \frac{10}{16}, \frac{10}{17}, \frac{10}{18}, \frac{10}{19}, \frac{10}{20}, \dots$$

分子永遠是10，分母卻是越來越大，所以——相差是個無窮小，越來越小！」

「無窮小的極限是什麼？」

「零。」

「那麼這個差數最後要變成什麼？」

「當然也是零了！」

「那就是說： $\frac{\beta}{\alpha}$ 和1有什麼關係？」

「越來越相等。」

「這就是說：

$$\frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 1$$

所以： α 和 β 應當怎樣分法？

「它們是同年級！」

「對了，這是同級的無窮小，不但同級，而且還——」

「我明白啦，不但同級而且還是同班！」

「那就是說，它們不但同級而且還相等。」

「那麼讓我們再看看 γ 和 α 好麼？」

「好呵！」

$$\alpha: \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{10}, \dots$$

$$\gamma: \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{20}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{40}, \quad \frac{1}{50}, \quad \frac{1}{60}, \quad \frac{1}{70}, \quad \frac{1}{80}, \quad \frac{1}{90}, \quad \frac{1}{100}, \dots$$

$$\alpha: \quad \frac{1}{10}, \dots$$

「這是什麼意思？」

「因為 a 永遠是 y 的 10 倍，所以反過來說， y 就永遠是 a 的 $\frac{1}{10}$ ！」

「這不是它們兩個也是同級麼？」

「同級是同級，然而不同班，——比值不能變成 1！」

「這完全和無窮大的辦法一樣呵！」

「是的，單就同級說，完全一樣。不過關於高級和低級，那就剛剛相反了。」

「假設 x 和 y 都是無窮大， a 和 b 都是無窮小，那麼：

如果 $\frac{y}{x} \rightarrow 0$ ，那就是 x 先變成 ∞ ，所以 x 是高級， y 是低級，

如果 $\frac{y}{x} \rightarrow \infty$ ，那就是 y 先變成 ∞ ，所以 y 是高級， x 是低級；

如果 $\frac{\beta}{\alpha} \rightarrow 0$ ，那就是 β 先變成 0，所以 β 是高級， α 是低級，

如果 $\frac{\beta}{\alpha} \rightarrow \infty$ ，那就是 α 先變成 0，所以 α 是高級， β 是低級。」

「讓我再想想……呵，我明白了！那不過是一個道理：誰能跑得快，誰就是高級！」

「不錯不錯，老弟真有你的。你完全明白了！——可是你知道你是怎麼明白的嗎？」

「怎麼，你又要耍什麼花腔？」

「不是耍花腔，我剛纔偷偷的作了一個小統計，前前後後你已經說了七個『想一想』，五個『比一比』，比了再想，想了再比，想過來比過去，你纔能夠明白了這個道理。」

「是嗎？我可沒有那麼細心。我只記得，你一會『這就是說』，一會『那就是說』，說來說去，一不留心差一點就要把我搞糊塗了！」

現在再看看時間，這可就快要跑到下一站了！

第九站 一個跟着一個變

嗚——嗚——嗚——火車又在叫；伸出頭去望望，這一次可真是要到站了。我們既然不是無窮大，那可就不能老是跑下去沒有完，而且在車上坐得那麼久，也應當下來活動活動。看看錶，乾脆就在這裏下車吧；再有五分鐘還有一班回頭車，回去正好還耽誤不了晚飯。

火車進站了，慢慢的停止下來。車裏邊的客人下來的雖是不少，可是從這裏上車的客人也很多，於是上的上，下的下，馬上這個車站就熱鬧起來。

火車彷彿是跑乏了，雖是停着不動，可是還在那裏不斷的喘着粗氣。也許對於這些客人在它肚子裏爬出爬進，爬得它不耐煩，所以有時候還吁——了一下。

只要這口悶氣一出，火車的心裏就鬆快多了，接着咳嗽了一下，一會又好像是在撒尿，一會——的一聲，又好像混身通過了一股氣兒，於是火車就又有點不大安靜了。

因爲我們並沒有別的事情，而且還打算乘下一班車回去，所以我們就站在月臺上，對着眼
前這一列車，倒是覺得有點留戀。

這時候，從車上來下去的人慢慢的少了，只有站上的小販在車窗外兜生意，這邊喊喊，那邊跑跑，希望能夠多找到一個顧主。除此之外，無論是車上車下，大家都在等候着……有時候彼此狠狠的看了一眼，因為知道車一開就會看不見了。

突然一聲哨響，——同時還有幾個人急急忙忙的爬上爬下，可是馬上都覺得緊張起來。靜候火車一聲叫喊，嗚——的一聲，坐着的坐穩了，站着的也站穩了，大家都以珍惜的眼光彼此告別……

於是車慢慢的又動了。第一輛車一動，第二輛車就動，第二輛車一動，第三輛車就動，一個跟着一個動，馬上就全體都動了！

從月臺上看火車，又好像在碼頭上看船，悠悠的就走開了，——但是接着就聽到那個熟悉的聲音：

撞撞撞撞，撞撞撞撞，撞撞撞撞……火車是越走越快，越走越遠了！

看着這個開車的情況，我又想到了一個話題。所謂這輛車一動，那輛車就跟着動，這就表明兩個變化可以有一個聯繫。——這又像那個分數，分子固定的分數，只要分母一變，分數之值就要跟着變。

像這樣，一個跟着一個變，這是一個很重要的聯繫。從這一點，我們可以找出一個因果來，從這一點，也可以看出一切變化的狀況。

爲了說明的方便，我們先要起幾個名字。

一個領頭變的叫做自變數，它可以要怎麼變就怎麼變，變成什麼都可以。一個跟着人家變的叫做因變數，處處受別人的影響，受別人的牽制。這是兩個不同的變數。一個是獨斷獨行，自己支配自己；一個是服從隨和，叫它怎樣，它便怎樣。

當然它們兩個也不能分家，因爲彼此比較起來，也是一個相對的關係。自變數是因變數的自變數，因變數又是自變數的因變數；這就好像說，哥哥是弟弟的哥哥，弟弟是哥哥的弟弟。

可是這個說法太麻煩，所以因變數也叫做「函數」——當然是自變數的函數。

所以如果 y 跟着 x 變，那麼 y 就是 x 的函數。有人說，女人就是男人的函數，因爲男的是少爺的時候，女的是少奶奶；男的是老爺的時候，女的是太太；男的變成老太爺，女的就變成老太太了。

可是你也不要把它們兩個看得那麼呆板，因爲 y 跟着 x 變的時候，反過來說，也就是 x 跟着 y 變。譬如說：男的當了老師，女的便是師母；要是女的當了老師的時候，男的就叫做什麼呢？論說，

那就應當叫他師爸爸了。可是這個稱呼有點别扭，我們只聽過有人叫乾爹乾爸爸，卻沒有聽過師爹師爸爸。其實這只是一個習慣，事實上不叫師爹也得叫老師，雖然我們並不跟他上學。其實，如果比照師母的稱呼，我們叫他師公，倒也滿好；師公師母不就是公母倆麼？現在我們所稱的公雞母雞，在以前就叫做雞公雞母，可見這也並不是一個新名詞。

假設女的作了縣長，那麼對於這位女縣長的先生應當怎麼稱呼？這可就更麻煩了，叫他縣長老爺不行；縣長先生也不行，縣長跟班的，那更不行了！到底應當叫什麼，我們暫且不管他，可是總不能不稱他一點——縣長的先生麼！如果你覺得應當高看他一眼，那麼男人就又變成女人的函數了。

女人是男人的函數，男人也是女人的函數；然而這兩個函數卻有一點不同，自變數和因變數倒過來了。這個的自變數是那個的因變數，這個的因變數又成了那個的自變數，所以我們說這兩個函數彼此相反。如果 y 是 x 的函數，那麼 x 就是 y 的反函數。

再舉一個例。譬如說，現在這個年頭，物價一天比一天高，因此物價就是一個變數。物價漲了，想不出好辦法，便只好多發票子，所以票子就是物價的函數。——可是票子越發越多，越多越不值錢，越不值錢物價就要更漲，結果物價又成了票子的函數。

物價和票子一賽跑，這一跑可就將我們跑苦了。小報上的標題說：「物價與大票齊飛，人民共小菜一色」——這個例子有點太慘！慘是慘，可是事實，而且論物價就要計算物價指數，說票子就要質問發行額，這完全是個數字的問題，卻沒有越出我們所講的範圍。因為我們講的都是些變數，所以上面那個男女函數，不過是個比喻，這個物價和鈔票的關係纔真正是一個算例。

同時，由於通貨膨脹的結果，不僅刺激物價，而且擾亂社會，影響民生；所以生活指數也是票子的一個函數。要想具體的指出這個因果的關係，那麼我們就需要調查統計，然後列表，畫曲線，找算式。所以關於函數的表示就有三種不同的辦法。

隨便一個數字對照表，隨便一個任意曲線，都可以表示一個函數的關係；然而一個函數卻不一定非要化成算式不可，這倒是一個重要之點。

不過我們爲了說明的方便，還是先從算式開始。例如：

$$y = 10x$$

y 永遠是 x 的 10 倍。 x 是零， y 也是零； x 是 1， y 是 10； x 是 2， y 是 20； x 是 3， y 是 30；……所以 y 是 x 的函數。反過來講，

$$x = \frac{y}{10}$$

y 是零, x 還是零; y 是 1, x 是 $\frac{1}{10}$; y 是 2, x 是 $\frac{2}{10}$; y 是 3, x 是 $\frac{3}{10}$; ... 所以 x 也是 y 的函數, ——然而這就是上面那個函數的反函數。

如果從因果上來講, 自變數就是因, 函數就是果。同一結果不見得只有一個原因, 所以一個函數也可以同時是許多變數的函數。反過來說, 同一原因也不見得只有一個結果, 所以一個變數也可以有許多的函數。

代表一個函數的算式可以是一個代數式, ——這裏面僅有加, 減, 乘, 除, 乘方和開方——這就是一個代數函數; 有時候也許是一個三角算式, 對數算式, 那就是一個超越函數了。

假設把這個函數的變化看成一個運動, 按照我們以前所講的, 有連續的運動和不連續的運動, 所以函數也有連續的函數和不連續的函數。

怎麼, 你又不說話了? 聽着有點煩是不是? 那麼我們一塊到附近去散散步。

我走你也走, 你就是我的函數, 我在前邊, 你在後邊, 我先走了一步。咱倆一個步伐, 一二一, 二二; 這樣一來, 我走了 x 步, 你走了 y 步。因為你比我少走一步, 所以

$$1 - x = y$$

這就是一個代數函數。回頭再來個向後轉——走, 那就變成你在前邊我在後邊, 這時候我跟着

你走，所以我又成了你的函數，而且我落後了一步。如果論距離，以剛纔的出發點為標準，就變成：

$$x = y + 1$$

這還是一個代數函數，卻是上面那個函數的反函數。

現在我就又想起了那個速度。在運動的時候，時間越久，跑的越遠，所以距離就是時間的函數。假設 s 代表距離， t 代表時間， f 後邊帶個括號代表函數，那就是

$$s = f(t)$$

如果 Δ （念勿廿儿去Y）代表「很小很小的」

因為 $s - t = \frac{s}{t}$ = 平均速度，

所以 $\Delta s - \Delta t = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ = 瞬速，

而日當着 $\Delta t \rightarrow 0$ 的時候，

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \text{真正速度，}$$

這就是對於真正速度的一個數學的表示。

然而時間近於零的時候，距離也要近於零，所以 Δs 和 Δt 都是無窮小——不但是無窮小，而

且多半還是同級的無窮小；這個分數的極限，就是那個真正速度的數值。平常我們把這個極限寫成 $\frac{ds}{dt}$ ，所以

$$\text{當着 } \Delta t \rightarrow 0, \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \frac{ds}{dt} = \text{真正速度}$$

這樣一來，我們就完全用記號來表示了，這就是數學研究的一個方法。其實這裏面並沒有什麼新的意義，僅只是把我們說的話，寫的字，統統換了一些記號。假設你把這些記號的意義都搞清楚，那麼看算式就和看書聽演講一樣的方便，一樣的自然。

同樣的，假設用 u 代表變量，一個變化的量（譬如放風箏的線長，水面上圓圈的面積，以及任何物體的體積，那就是變動的線，變動的面，變動的體；以及溫度，壓力，反射，摩擦，聲音的高低，光的強弱，電流的快慢，磁性的大小，振幅的寬窄，密度的厚薄，質量的大小，以及什麼的什麼）只要是時間的函數，我們都可以求出它的 $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ ，而且——

$$\text{當着 } \Delta t \rightarrow 0, \quad \frac{\Delta u}{\Delta t} \rightarrow \frac{du}{dt} = \text{真正變速}$$

現在把上面這兩個算例對照起來，又可以統一成下面這一個形式

$$\text{如果 } y = f(x), \text{ 那麼當着 } \Delta x \rightarrow 0, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx}$$

末了這個記號再翻譯成語言文字，就叫做「微商」，「微係數」，「微紀數」，「微變率」，「微變速」，「誘導函數」，「導來式」，「導來微變速」……：

說到這裏你就忍不住了：「什麼 do re mi fa so，你說的是人話還是鬼話？」

不錯，這是個不中不西的名詞，英文叫做 derivative，有人喜歡譯音，有人喜歡譯義，有人又要音義兼顧，於是譯來譯去，就變成了這麼多的不三不四的名，結果哪一個也沒有確定。

話又說回來了，咱們還要回去是不是？五分鐘到了，咱們還得上車。

第十站 Do Re Mi

當着我們再上火車的時候，可就往回裏跑了。就我們的家鄉來說，原來是越走越遠，現在是越走越近。剛纔我們都是無窮大，現在就又變成無窮小了。

跑着跑着我們就又想起了那個 do re mi, derivative, 微微——微什麼來？
微變速，微係數，導來式，那就是

$$y = f(x) \text{ 的 } \frac{dy}{dx}$$

這是一個極限值，一個極限值的記號。可是也可以看成一個分數，因為

$$\text{當着 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 的時候, } \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx}$$

所以 dy 就是一個很小很小的 Δy , dx 就是一個很小很小的 Δx , 同時 Δx 和 Δy 又叫做 x 和 y 的微分，所以 $\frac{dy}{dx}$ 也可以叫做函數的微分比。

有了這個微分比，我們的本領可就大得多了！有了它，我們就可以算出一切變量的真正變

速，有了它，我們就可以求出一切曲線的正確方向。——你不要小看這兩句話，所謂一切，便包括了各種各類的變量，各式各樣的曲線。這個一，實在就是含有百千萬個的種類在裏邊。

如果你要想知道一點實際的應用，那我也不難隨便指出幾個簡單的問題。

不過首先我們還要對於那個微，微什麼來——微分比，再加一研究。

所謂 y 是 x 的函數的時候， y 對於 x 就有個微分比，要想求這個微分比的時候，當然先要知道這個函數。

y 是跟着 x 變的，說不定， y 的微分比也是跟着 x 變，那就是說 y 是 x 的函數，可能 y 的微分比還是 x 的函數。

如果這樣的時候，那麼我們又可以末出微分比的微分比，以及微分比的微分比的微分比。像這樣，多微分一次，便可以多得一個微分比。因此這些微分比，我們就叫做第一微分比，第二微分比，以及第多少多少微分比。不過照這樣一次一次的微分下去，結果不是一個常數就是零，所以這個微分的手續倒不是無限的。——然而有時候，卻也不一定。

這些微分比也有固定的記號譬如

$$y = f(x) \cdot \frac{dy}{dx} \text{ 是第一微分比。}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \text{第二微分比；}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \text{第三微分比。}$$

我們曾經說過，在運動裏，距離是時間的函數，距離對於時間的微分比就是速度。那麼速度對於時間的微分比是什麼呢？——我們知道：每一個單位時間所增加的距離是速度，那麼每一個單位時間所增加的速度是什麼呢？

那就是加速度用記號來表示：

$$s = f(t), \quad \frac{ds}{dt} = \text{速度,}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \text{加速度；}$$

同樣的 $u = f(t)$, $\frac{du}{dt} = \text{變速,}$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \text{變加速度。}$$

譬如說，我們在太陽底下走路，地下就會有個影，你走影也走，速度當然一樣。假如你是背着

太陽，對着一道牆走，這樣走着走着，你的影子就會先到了牆根；再往前走，影子沒處去了，它就要爬牆。這時候你的影子成了兩半截，一部分在地下，一部分在牆上。人往前走，影子向上爬，這時候兩個速度就不一樣了，可是只要知道人的速度，我們就可以求出影子的速度。

假設我們有一個水車井，套上一匹小驢，在井臺上轉圈。驢一轉，水車上的輪子就要轉，輪子一轉，那一串十五個小水斗子就要七上八下。驢轉得快，水斗子上來的也快，驢轉的慢，水斗子上來的也慢，驢要是提出了抗議，水斗子就要跟着罷工。因此，根據驢的速度又可以求出水桶的速度。不過因為驢轉的是圈，所以這個算題裏就要用着角速度。

像這一類關於速度的算題，我們就得用微分比。

同時微分比又可以表示出一個曲線的方向。所以要知道一個曲線的形狀，哪裏往上，哪裏往下，哪裏彎上去，哪裏彎下來，哪裏彎的利害，哪裏彎的差，哪裏平，哪裏陡，哪裏坡，哪裏轉彎，哪裏拐彎，哪裏平，哪裏尖，哪裏連續，哪裏斷了。

這一切問題都需要微分比纔能解決。還有借重微分比，我們又可以斷定極大和極小的問題。

說到這裏你又該問了。

「極大是不是最大？」

「是最大」

「極小不是最小？」

「是最小」

「然而最大不是沒有麼？最小不就是零麼？」

你的質問的確不錯！可是極大極小卻另外還有個解釋，那就是相對的極大和相對的極小。假設沒有限制的話，當然沒有極大；可是如果有限制的話，那就有極大了！假設沒有限制的話，極小是個零，假設有限制的話，那就不一定還是零了！

譬如就你的同班說：有沒有最高的？有！有沒有最矮的？有！是不是零？不是！單拿一本字帖來說：有沒有頂大的字？有！有沒有頂小的字？有！是不是零？不是！就你手裏的一把線來說：有沒有極長的？有！有沒有極短的？有！是不是零？不是！

好啦，這些最高，頂大，極長，是什麼？是比較着最高，比較着頂大，比較着極長。這些最矮，頂小，極短，是什麼？也是比較着最矮，比較着頂小，比較着極短。所以相對的極大就是比較着極大，相對的極小就是比較着極小。一有限制，就出來了極大極小的問題。

假如我們要搭起一個圓帳篷，那就好像撐起一把紙傘。我們問：什麼時候這個帳篷裏容的

人最多，那就是問什麼時候一個圓錐體的容積最大？就拿紙傘來說吧，沒有撐開的時候，容積是零，最小，撐開以後，容積慢慢的變大了，可是等到把傘撐平了的時候，那就變成一張荷葉了，容積呢，又沒有了，還是零，還是最小。那麼這中間就該有一個容積最大的時候。

這個容積與什麼有關係？和那個傘頂上的角度有關係，容積是那個角度的函數，要解決這個問題，就要先求微分比。

再說一個最簡單的事實。假設我們用繩子圍起一個長方形來，我們問，怎樣圍法纔能夠使它的面積最大？這根繩長當然是一定的，拉得太長，它就太窄，拉得太寬，它就太短，都不是最大。那麼什麼時候最大呢？三拉兩拉就拉出來了，正方形不錯，正方形最大。

你怎麼知道的？想的。有理由嗎？說不大詳細。可是用微分比就能夠正確的計算出來！

再說一個例。我們要按一盞電燈，譬如說在戲院的牆上，爲的要把光線集中在舞臺的中間。舞臺和牆的距離當然是一定的，那麼應當按在哪裏？物理的實驗告訴我們，照明的亮度和光線的斜角有關係，同時和距離也有關係。按的過高了不行，過低了也不行。用微分比就可以求出來，離地的高度應當是和舞臺距離的 $\frac{7}{10}$ 。

以上都是關於極大的問題。

譬如現在我們這輛火車是正東正西的走，另外還有一輛火車是正南正北的走。同時從無限遠來，到無限遠去，一塊開車，卻不是一個速度。假如一樣快慢的話，當然同時走到十字路口，就會碰了車。現在既是快慢不一樣，那就不必顧慮了。原來兩輛車相距無窮遠，結果兩輛車還是無窮遠，這中間就要有個最近的時候，那就是一個求距離最小的問題。

再說一個最簡單的問題，和上面已經講過的那個問題相彷彿，還是用一根繩子圍起一個長方形來。假設這個長方形的面積是一定的，那麼怎樣圍法可以用的繩子最短？讓我們想想看！假設擠得太窄了就要變長，擠得太短了又要變寬。擠來擠去還是擠出一個正方形來——對了，正方形用的繩子最短。不信你就試試看！

再說一個例，譬如我們開個食品店，要做罐頭。你知道罐頭是個什麼形狀？圓的，不錯，可不是個圓圈，那是圓柱。裏面的容積當然是一定的，高矮粗細那就隨你的便。隨便是隨便，可是我們不能不打算盤！要想省錢那就要用的材料最少，要想材料少就得表面積最小！我們想想應該怎樣決定？如果底小了，那就得高，高底越小，罐頭越高，算起來不經濟。那麼讓它矮一點吧，一矮，底可就要大了，也不經濟。那麼怎麼辦？用微分比可以算出來，最經濟的辦法，是高等於底的直徑。

同樣的，你也可以設計一個煤油筒，汽油筒；不論什麼筒，那不過是一個正直的方柱體。假設

這個方柱體的容積也是一定的，那麼什麼樣子作起來最省錢呢？——想不如算，一算就算出來了，應當是一個長寬高都相等的正立方體。

然而常見的煤油筒卻不是這樣的，那是一個近於二倍的正立方體。難道賣油的老板沒有打好算盤麼？其實不然。因為筒皮比煤油便宜的多，所以他樂得把筒作得順眼好看，而且提起來方便。這樣一來，筒的形狀就變成了廣告術。只要煤油推銷得好，還不是情吃坐穿，一樣的發財麼？這叫做「小處不算大處算」，賣油的老板可比我們的心眼活動得多。

說到這裏，我們就要發生感慨了！我們的研究不過是找真理，找出真理來就能夠增加智識，智識增加了就可以利用自然來增進人類的幸福。——然而如果這個智識傳授給那些自私自利的人，他就要借此想法發財，——發財倒不要緊，有時候他還要借刀來殺人！

一顆原子彈可以提早結束反侵略的戰爭，同時一顆原子彈也可以變成侵略者的護身佛！如今研究科學的人也要活動活動心眼，我們應該利用科學的智識來增加大家的幸福，提高大家的生活，我們應該防止違反這個信念的個人操縱以及國家操縱！

一個人不能老是那麼死啃，我們應當四面八方注意得遠一點！——你瞧，你瞧，那座塔！我們的火車又要拐彎了！

第十一站 一切都是時間的函數

剛纔我們看見那個塔，現在又看見那個塔。是不是一個塔呢？當然是一個塔！是不是一個地方呢？當然是一個地方。

可是末了這一句話就有毛病！

果真還是那一個地方嗎？那要看對誰說！以地球為標準，還是那一個地方；以大自然的天空說，那就不是原來的地方了！不但地球轉了一個角度，而且地球還挪了一個位置，那麼我們還能說是原來的地方嗎？

變了，變了，什麼都變了！

這也是一個變數。

那麼這個變數的自變數是什麼呢？

是時間！time 是 t ！

一切都是時間的函數，一切都是 t 的函數！

就宇宙來說，時間變了，一切都變了，宇宙是時間的函數！
就人生說，時間變了，一切都變了，人生也是時間的函數！

整個人類的活動是時間的函數，一個國家，或是一個個人的活動，也是時間的函數。

打開一部歷史來看，人類活動的地域並沒有變，人類活動的事實變了，不同的時間就有不同的活動。

時間進展了，人類進化了，隨着時間的增加而人類的智慧也增加了，這一種函數叫做昇函數。

但是達爾文的進化論說：「物競天擇，適者生存」在這個時間的進展裏，同時又有多少的生物都被淘汰了。這些隨着時間的增加反而減少的現象，這就是一個降函數。

單昇不降，或是單降不昇，那就叫做單調函數。但是平常多半是忽昇忽降，忽降忽昇；於是從昇到降，或是從降到昇，那就必然有一個轉彎點。

現在我們這輛火車要轉彎了，你瞧，你瞧，就是這裏，這裏，這一點——說着說着就拐過來了，那是一個轉彎點。

這一轉，就轉出了一個彎，你看，剛纔我們走過的鐵軌就在那邊呢！要是直着的話，你在車窗

裏就不容易看到了，因為它在我們的後邊。現在，卻是在我們的旁邊。

彎有幾種彎法？讓我們想想！——把它畫在紙上，像一個 \cup ，這就是向上彎；像一個 \cap ，這就是向下彎。

畫曲線也有個規定，按照習慣，我們是自左而右。所以乙，心，都是向上彎；刀，乃，都是向下彎。 v ，都是向上彎； m ， n ，都是向下彎。

但是彎和彎還不一樣！有的彎得圓滑，有的彎得突然。譬如向下彎的人，向上彎的 V ，這些彎都是尖的，那麼彎點就變成一個尖點了。

有時候這個彎點也許跑到無限遠，好像一個几字，於是這個曲線就斷了。斷就是不連續。同時，一個曲線又不見得永遠往上彎，或是永遠往下彎；常常會彎上去再彎下來，彎下來又彎上去。譬如去了點的之字，倒插筆的 s ，一個是先向下彎再向上彎，一個是先向上彎再向下彎。——於是就有一個拐彎點。

像這些曲線的性質都與微分比有關係。因為曲線也是函數的一種表示，所以知道了函數就可以畫出圖形來。即便不把曲線畫出來，我們也可以用函數的微分比，看出它的形式，並且知道有幾個轉彎點，幾個拐彎點，哪裏向上彎，哪裏向下彎。

平常我們說，一個人好走直線，一個人好走曲線，那就是表示他的生活態度不一樣。

不但每一個人的生活態度不一樣，同時每一個人的生活遭遇也不一樣。

譬如說，一個人的生活，越來越好，這就是一個昇函數；一個人的生活，越來越壞，這就是一個降函數。假設一個人，從好的生活變壞了，或是從壞的生活變好了，這就是一個運氣。從好變壞或是從壞變好，算卦的瞎子叫做轉運，這一轉運——就是我們說的那個轉彎點。

同時運氣也有變化。從好運可以變成壞運，從壞運也可以變成好運——這是什麼？這就是命！

從壞運變成好運，這是好命；從好運變成壞運，這就是壞命。好命壞命，也叫做大命小命；命論大小，那倒真像一個數學名詞了。

命是不是也有變化呢？迷信的說法，命不能變化，所謂命定，就是表示命是一個固定的常數。但是我們認為命也能夠變化，那全看我們自己能不能上進！如果能上進，壞命就可以變成好命；不能上進，好命也可以變成壞命。

數 學 列 車

命既然能夠變化，那麼從好變壞，或是從壞變好，又要經過一個轉命點——這就是那個拐彎點了。

談運，說命，似乎是迷信；其實運就是一個機會，命就是一個遭遇。就一個短時間來說，是運；就一個長時期來說，就是命。一個人的命運不但看四週的環境，而且還要憑自己的支配。假使我們能夠支配環境，我們就能夠變更命運；假使不能夠支配環境，那可只好聽天由命了！這樣解釋起來，一點也不迷信。

爲什麼好好的又忽然講起命運來？這個原因很簡單，那不過是因爲人生也是時間的函數；時間變了，人生也要變了！

同時時間的變化是連續的，人生的變化也是連續的。雖然鐘錶告訴我們，現在是一點，兩點，三點，一分，兩分，三分；可是時間卻不是在那裏跳，從一點跳到兩點，它是在那裏流，從第一分鐘流到第二分鐘。人也不是從嬰兒一蹦就蹦成了兒童，從兒童一蹦就蹦成了大人；他也是在那裏不斷的變，變，兒童變成了大人，大人又變成了老頭。所以不但人生是時間的函數，而且還是一個連續的函數。

但是「時乎時乎，不再來！」時間又永遠是一個昇函數。這對於人生是一個最大的威脅。所謂人生最大的悲劇，也就是因爲時間的變化不循環，滑過去就滑不回來。

也許你對於這個循環的字樣要挑眼，因爲你想到了「一年容易又春風」所謂春夏秋冬，

一年四季，不就是循環的麼？其實這個變化就和我們的地球一樣，雖然是轉圈，然而還往前跑！天的這個地方和今天的這個地方不同，去年的春天和今年的春天也不一樣。所謂週而復始那只是表明季節是週期的，然而時間不循環！

函數也有週期的函數；可是人生和時間，既不是週期的，同時也不循環。或者更正確的說，從形式上膚淺的看，人生也許像是週期的，譬如吃了睡，睡了吃，然而實際上卻不是週期的，譬如以今日之我就可以攻擊昨日之我。爲什麼呢？因爲——變了！

而且時間這個自變數，對於人生的影響又太大，一切文學作品，一大部分都是對於時間的感慨！

曹操的短歌行

對酒當歌，人生幾何？

譬如朝露，去日苦多！

李白的將進酒

君不見黃河之水天上來，奔流到海不復回；

君不見高堂明鏡悲白髮，朝如青絲暮成雪！

春夜晏桃李園序——

夫天地者萬物之逆旅，光陰者百代之過客。而浮生若夢，爲歡幾何？蘇東坡的前赤壁賦——

哀吾生之須臾，

羨長江之無窮。

和尙念的焰口經——

將軍戰馬今何在？

野草閑花遍地愁。

即便在近代，我們也不難找出朱自清先生的一首短詩，僅存的——
髮上依稀的殘香裏，

我看見渺茫的昨日的影子——

遠了，遠了。

但是最沈痛的還是雪萊 P. B. Shelley 的哀歌 Lament: ——

○ World! ○ Life! ○ Time!

Of whose last steps I climb,
Trembling at that where I had stood before;
When will return the glory of your prime?
No more,—oh, never more!

Out of the day and night
A joy has taken flight,
Fresh spring, and summer, and winter hoar,
Move my faint heart with grief, but with delight,
No more,—oh, never more!

這一切，——都不過是說：人生是時間的函數；時間變了，人生也變了！

既然人生是時間的函數，那麼是不是也可以求出它的微分呢？

是的，可以求！如果能夠求出它的微分比，那麼任何時間，任何時刻的變化就都可以求出來了！這倒是真正能夠細批流年，評定終身，吉凶禍福，未卜先知，可以擺個算卦攤了。

可惜，我們不知道這個函數的算式！而且也不可能化爲一個算式，因爲除去時間而外，還有許多許多的自變數，例如個人的環境，經濟的狀況，時事的趨勢，思想的變遷，生理和心理的條件，精神和物質的配合……以及什麼的什麼，還有許多的許多。

我們說，人生是時間的函數，這不過是從形式上取決於這個自變數。而且，如果按照這個看法，那麼不但是人生，即便世間的一切，統統都是時間的函數！

這個時間的變化，時間的流，就好像車窗外邊的那些景物，流，流，流，永遠的流，不斷的流，——那真是「奔流到海不復回」了！

怎麼，你又沈悶起來——走，咱們到飯車上去吃點什麼。

第十二站 用算式來描寫這世界

現在我們坐在飯車裏，這兒有舒服的沙發。

桌子上鋪着白布，擺着一個玻璃花瓶，裏邊插着青枝綠葉的一束鮮花；紅的那麼嬌豔，像是在發光。我們喝着甜牛奶，眼睛望着車窗外的那一幅流動的畫片——於是什麼心事也沒有了！忘掉了你和我，忘掉了這火車。彷彿我們就是火車，火車就是我們；眼睛望着這世界。

可是，就是對於這同一個自然界，人人卻可以有種種不同的看法，和種種不同的印象。在一個畫家的眼裏，看到那些紅的，綠的，黃的，白的，一片片的顏色。一個音樂家的耳朵，卻又辨別出各種不同聲音的高低，因為在他的心裏那只是一隻交響的旋律。

譬如就拿這一系列車來說，在各個車廂裏都坐滿了不同的客人。有人從鐵道的壓榨上引起了對於世間一切不平的憤慨；有人就會爲了眼前的這些變動覺得發暈；又有人顯然是在奔波的道路，表現得異常疲乏。

一個經濟學者，也許正在從火車的週轉上，考慮到物資的交流和供應的狀況；一個詩人正

在推敲如何用那生動的字眼，去描寫這旅途上的寂寞——可是在我們的心裏注意的，卻是動力，速度，加速度，位移，方向，一切形狀和物理的性質。

我們也要描寫這世界，然而不是詞句，不是色彩，也不是音調。我們的作品，乃是一行一行的數目，一列一列的算式。

譬如這桌面，這車窗，那個車門，以及車廂上貼的標語；我們不管它們的作用和意義，我們眼裏注意的卻是一個長方形或是正方形。

這些碟子，盤子，茶杯的口，花瓶的底，不管它的成分，它的用途，它的構造，或是它的年代，——我們只注意一個形式，一個相似的形式，圓或是橢圓。

提到方，也許就有人聯想到方正，規矩，整齊，穩定，四平八穩；提到圓，也許有人想到圓滑，圓滿，團圓，——一個順利的發展和毫無缺陷的結束。

但是在我們感到興趣的，乃是四邊相等，四個角都是直角；以及圓周到圓心的距離處處相等。

然而這僅只是一個靜止的看法，我們另外還有一個運動的觀點。

假設有一個人，站在操場上，現在讓他立定，站好，向前五步走；然後向左轉，五步走；再向左轉，

五步走，再向左轉，五步走——結果就又回到了原來的地方。

像這樣，他走走，走了一個什麼樣的路線呢？

正方形！

假設在地面上按起一個木樁，聯上一根繩子，拴上一匹小驢。讓我們來個鞭打小驢！

驢一被打，當然要跑；照直的跑。——然而繩子拴着它，跑不動；那就只好轉，轉圈。這一轉就又轉出了一個圓。

還是按照我們那個看法，把人，把小驢，都看成一個點，一個動點。那麼這些動點的路線便是方，和圓。——用一個數學的名詞，就叫動點的軌跡。

火車在地面上跑，每一個車輪都是一個動點，然而這些動點只能在車軌上移動。如果不是火車，而是一輛腳踏車，或是一部汽車，那就可以隨便的跑。這些動點的軌跡就不一定還是直的或是圓的了，它可能是一個任意曲線！

數 學 列 車

這就是從圖形的發展到完成的過程上，來看出它們變化的狀況。假設你想到描紅，摹帖，或是更確切一點，描花，縫線，——這都是同一個過程。有時候，也許你可以在銀幕上看到一個白點，在那裏伸長，伸長，轉來轉去就轉成了一個字。這都是軌跡的一些具體的例。

當然這些軌跡，彼此還有一個區別。一種是密集的孤點，一種是接連不斷的連線。我曾經告訴過你，用數學的形容詞，那就是說，一種是連續的，一種是不連續的。同時所謂密集和連續，它們彼此既不同，所以我們也就不能混爲一談。

又如——你看，那邊是一個鄉村，有樹，有屋，有河，有橋，彷彿是一套模型。那麼小，小得怪有趣的！但是我們注意的，卻不是「枯藤，老樹，昏鴉，小橋，流水，人家。」我們眼裏分辨出，那都是一些幾何的圖形。一棵樹，彷彿是一個細長的圓柱上頂着一個正圓錐體；一座屋，就是一個三稜錐體。在一個橫的立方體上；一個橋，從旁看來是一個折線，或是一段圓弧；一道河，那就是一條窄的曲面。

同時，一個體的界限是面，一個面的界限是線，一個線的界限是點，這是一個靜止的看法；反過來說，一個動點的軌跡是線，一個動線的軌跡是體，這就又換成一個運動的觀點了。

所以在我們看起來，這世間的一切，都不過是構成於點——點應該是一個基本原素。同時世間的一切現象，都不過是發源於運動——動，又是一切現象的基本原因。因此一個動點的軌跡，應當是我們最重要的課題。

這個軌跡，當然可以千萬變化，——然而描寫出來，卻不外是一個函數的表式。這個函數可

以表明它的種種形式和種種性質。假設這個函數可以化爲算式，那麼我們看一個算式和看一個曲線，同樣的親切而有趣味。

不僅是一個圖形，即便一個觀念，一個現象，一件事實，我們也可以利用一個算式去描寫。

例如力量就是一個抽象的觀念。要想描寫這個觀念，那就要說明它的具體的現象。爲什麼一個靜止的物體會運動起來？爲什麼一個運動的物體會靜止下去？爲什麼一個動得慢的會變快了？——這不過都是受了一個力量的影響。

一個力量可以引起一個物體的速度變化，所以我們就用物體的質量和它的加速度來規定這個力量的大小。因此一個單位的質量去乘一個單位的加速度，就叫做一個單位的力量。——然後關於力量的大小纔能夠有一個具體的表示。

譬如建築一條公路，要想描寫這條公路效能的大小，那就要看它在每一個單位時間裏可以走過多少車輛。然而車輛經過的多少，又要看車身的長短和車開的速度。車跑得快了，當然走過的車輛多；然而車身過長了，走過的車輛反要減少。假設一列火車，連頭帶尾一共十輛，而每一輛車的身長相當於三部汽車。當着一列火車通過的時候，汽車卻可以走過三十部。所以要想表示這條公路的效能，就不能疏忽這些汽車的長短。

但是一列汽車跑起來，究竟還不能和一系列火車相比，因為一系列火車是一輛一輛的用掛鉤掛起來的；然而一系列汽車卻是一部一部的單跑。所以兩部汽車跑起來的時候，前後必需要保持一個相當的距離，否則就容易發生危險。過遠了固然不經濟，過近了就會——碰車。爲了這個原因，所以計算實在能夠通過的車輛，不僅要顧及車長，而且還要顧及兩車之間的距離，就是從第一輛車尾到第二輛車頭的間隔。

知道了這些事實，我們就可以把這條公路的效能具體的用算式來表示，這個效能叫做公路對於車輛的容量。所以：

$$\text{公路對於車輛的容量} = \frac{\text{車速}}{\text{車長} + \text{車距}}$$

從這個例裏，你同時又看出來，我們還是一貫的應用着那個速度的觀念——現在用來表示一個效能。

這條公路好比是一道河，汽車就是水。我們能夠計算一道河在一個單位時間之內所流過的水量，同樣的，我們也可以算出來一條公路在一個單位時間之內所通過的車輛。照這樣的想法，把車子看作水；所謂「車如流水馬如龍」，一個文學的描寫就變成一個科學的描寫了！

又如：在球場上扔一個籃球，在運動場上擲一個鐵餅或是鐵球，公園裏噴水池裏噴出來的水，戰場上槍斃放出來的子彈；這許多許多的事實，彼此的意義不同，作用不同，方式不同，效果也不同——然而無論怎樣不同，可是我們卻看出一個相同的性質，那不過是把一個物體給了它一個固定的力量，由於這個力量就使它增加了一個速度。但是這個速度同時又受地心的吸引，因此便發生了一個先往上升而後下降的運動。這些運動的因素是一樣的，因此這些運動的軌跡就是一個形式。

任何人都可以看出來，這些軌跡都是一個先昇後降往下彎的曲線，但是我們還可以進一步找出來，這些曲線都是一種，我們把它叫做拋物線。

同時，無論直線，圓，橢圓，拋物線，雙曲線，以及那些像6，像8，像9，像入，像十，像樹葉，像花瓣，像波紋，像下垂的鏈子，像一孔一孔的橋，……在我們的眼裏都是些算式，一個圖形一個算式。

還有一個飯碗，一隻茶杯，一個花瓶，一串糖葫蘆，一隻長喇叭，一個石鼓，一個漏斗，一個魚缸，……都不過是由於一段直線或是一段曲線，繞着一根直線旋轉出來的空間立體，我們不但可以算出它的面積而且可以求出它的體積。——照這樣說來，還不外體是線的軌跡，而線又是點的軌跡。只要這個點是動點，線是動線，那麼我們就可以找出這許多許多的花樣來。

所以，讓我們看這世界的一切，都不過是一行一行的數，一列一列的算式。說到這裏，你應該將車窗外邊的這一切景象，看作好像一本打開了的數學書擺在你的面前。

我們不是文學家，不是畫家，——然而我們能夠利用算式來描寫這世界，更具體，更正確。靜的物體是算式，動的現象依然還是算式。

有人說，把一切自然現象，從性質歸納成數量，這是科學的一個最大的特徵；同時把一切數量，從比較對照上再歸納成綜合的算式，這又是數學的一個任務。從駁到純，從繁到簡，從變化到統一，從零亂的事實到整理出一個系統的說明，這就是我們研究自然，認識自然，了解自然的一條道路。

我們要虛心，要理智，要客觀，要精密，要正確，要有耐性。

現在我們面對着這車窗外的自然景象，——

一切都覺得那麼親切……

同時又好像那麼疏遠……

一切都無所謂，我們在想……

其實什麼也沒有想……

我們在休息，……

好像是在作夢，……

「先生，你還要吃點什麼？」

裏，
——而車，還是正在轟轟的往前衝！
突然聽到這個聲音，一個茶房站在我們的面前，纔把我們驚醒了！我們依然坐在火車

第十三站 化零爲整

現在我們從飯車裏再回到我們原來坐的那一輛車，因爲我們的車在前邊，飯車在後邊，所以現在我們走的方向就和火車進行的方向完全一致，車往前走，我們也往前走。

走過了第一輛車，又走過了第二輛車，我忽然回過頭來問你：

「你說一個人，能夠比火車跑得還快嗎？」

你搖搖頭。你以爲這是不可能的；一個人，拚上命也不會比火車跑得還快，這又是一個幻想。可是這就錯了！我曾經告訴過你，人是可以比火車跑得還快的，——單看從什麼地方來看。譬如現在我們在火車上走，而且是一個方向。假設以飯車爲標準，飯車的速度就是火車的速度；可是我們走着走着就走到飯車的前邊來了！如果從地面看起來，我們實在就比火車還要快呢！

這件事情一點也不出奇。——對於任何一個問題，千萬不要不加考慮就貿然回答。

現在我們走到原來的座位，坐下去；——這一坐，我又想到了另外的一個問題。

剛纔我們是「走過去」，現在是「退回來」；剛纔是「站起來」，現在是「坐下去」。這樣對照比較，兩個動作彼此不同；不但不同，而且相反。——這是兩個相反的運動。

同時，如果把這兩個相反的運動接連起來，譬如說：拉上去，再掉下來，收進來再放出去，放大了再縮小，縮短了再延長，一進一退，一鬆一緊，一左一右，一前一後，一彎一直，一反一覆，……像這樣反來覆去的，結果就還了原。

在數學裏邊，關於運算也有同樣的情形，兩個相反的運算就叫做「彼此互為逆算」；有時候也叫作「彼此還原」。例如加和減，乘和除，乘方和開方，指數和對數，三角函數和反三角函數。以前我們所講的，都是把整體分解成零星的部分，然後再研究這些很小很小的一部分。現在我們把這些零星的部分都搞清楚了，我們就可以把它們再聚集起來，從零星的又恢復了整體。

化整為零，是求微分；反過來說，化零為整，就是求積分。這個零，不是常數的零，而是以零為極限的變數，要多小就多少小，應該是一個無窮小。所謂「化整為零，化零為整」，這是一個最簡潔的說明，——然而這兩種手續恰好相反。所以我們說，求微分和求積分，也是互為逆算，彼此還原。

例如吃水果的時候，我們可以把它切成一片一片；一片，又可以切成一條一條，一條，又可以

切成一段一段。這就是整個的解體。

反過來說，一個米粒一個米粒的就可以擺成一條線，一條線一條線的就可以連成一個面，一片紙一片紙的就可以堆成一個體。一顆珠子看成一個點，一串珠子便是一條線。一根竹子是一條線，一掛竹籬便是一個面。一頁稿紙是一個面，一本稿紙便是一個體。所以我們說：點集成線；線集成面；面集成體。這就是點滴的累集。

這個累集的算法是什麼呢？那太簡單了，——原來不過就是一個加法。譬如我們現在看着車窗外，呼隆呼隆的又在經過那個橋。看着那個橋上面的架子，一根橫着的鐵筋。如果把車窗看成靜止的，那麼那根鐵筋是往後溜；可是如果把鐵筋看成靜止的，那麼這個車窗的框就一點一點的滑過來了。——那就是說，一點一點的加起來便成了一段距離。——火車跑過的距離。

所謂一點一點的，其實就是一個很小很小的距離，也就是從前我告訴過你的那個 Δ_s 。現在我們要求這些 Δ_s 的總和，用一個數學的記號把它寫成 $M\Delta_s$ 。

這個橫着寫的 $\Sigma(\Delta_1 \llcorner \square Y)$ 不過是表示許多許多的 Δ_s 相加。

也許你會覺得，這又是一件庸人自擾的事，分割開，再湊起來，這不是自找麻煩麼？然而這裏邊，卻是大有妙用。

第一，平常我們認識一件東西，並不見得先認識全體。如果認識了全體，當然可以用解析的方法，來研究它的任何一部分。但是現在知道了這個觀念，只要我們能夠認識每一部分，我們也可以反過來把握它的整體。

例如我們知道了一根曲線，我們就可以求出這根曲線的每一點的方向。一根曲線，在平面上，可以看成一個函數，

$$y = f(x).$$

那麼每一點的方向就是這個函數的微分比， $\frac{dy}{dx}$ 。因為線是點的軌跡，是一個動點所走的途徑，那麼曲線的方向，也就是這個點——運動的方向；拿普通的話來講，也就是這個運動的趨勢。反過來說，如果能夠知道這個動點，時時刻刻的趨勢，也就是處處的動向，那麼這個動點整個的途徑也就知道了！一個是從靜的途徑上來研究動的方向，一個是由動的方向來研究靜的途徑。這兩件事情，彼此剛剛相反；但是無論從全體到部分，或是從部分到全體，結局終歸是一個問題，可是在認識上就方便得多了。因因果果，知道了這一個就可以研究出那一個。

第二，——這就說來話長了！

假設一條線是直線，那就是它的方向處處一致；如果現在要想測量這條直線的長短，那麼

我們一段一段的量完了再加起來，似乎是一件迂闊的事情（假設這條線並不太長的話。）可是假設這條線是一個曲線，那麼我們實在就想不出另外有什麼好的方法。因為一個曲線是沒法用直尺去測量的。

也許你覺得這句話有點過分，譬如一個圓圈，一個拋物線，我們不會用尺子沿着它的邊，一點一點的量下去嗎？

是的，可是所謂一點一點的量下去，這就是先量出了它的各個部分，然後再加起來，湊成一個整體，和上面那個說法並沒有兩樣。

你或者還可以想到，我們也可以用一根繩子去測量，譬如說用皮尺。——然而仔細想起來，這還是和上面那個辦法完全一樣，還是一點一點的測量的。其實不僅曲線，即便是一條直線，我們的眼光也是從頭到尾，沿着那個直尺看下去的。這統統是一種手續，一個道理。

而且，用尺量距離或直線的時候沒問題，很簡單；像圓或是拋物線，量起來也沒有什麼麻煩；可是假若是一條任意曲線，那就是說，它的方向處處變更，這就麻煩了。結果我們還是用上面那個辦法比較方便。

同時我們又可以看出來，直線也就是曲線。一根線的方向處處變更時就是曲線，方向處處

不變時就是直線；可是不變不就是變的一個特殊情形麼？

因此，研究一個任意曲線的量法，實在是一個更寬廣的問題。

其次我們還要把這個問題想得更普遍一點。

一根線的長短既然可以用一個點一個點的去計量，那麼一個面的寬廣就可以用一根線的去計量，一個體的大小就可以用一個面一個面的去計量。

然而這個分割，解體，還有問題。例如作菜的時候，我們切肉，把肉塊切成肉片，肉片再改成肉絲，肉絲再剝成肉丁，這就是一個分割。一個手藝好的廚司務固然可以把它切的非常整齊，非常均勻，一般厚，一般長，一般小。這樣一來，相加就可以變成相乘。但是一般人卻不見得那麼精細靈巧。我們把一個體解成面，面解成線，線解成段，也未必能夠統統整齊劃一。

其實，這也是一個不必要的規定。我們先應當搞清楚，分解的用意是什麼？我們不是想要量長，量寬，量厚，量大小麼？

就說量一段曲線吧。兩頭有兩個點，中間是一道曲線；同時兩頭兩個點，中間我們也可以聯起一根直線。這個直線好比一張弓的弦，那個曲線就好比弓的背。弓弦是直的，弓背是彎的，當然兩個線段的長短不等。可是如果把這個弓背截成一段一段的，然後每一段再連起一個小的弓。

弦，——弓背變小了，弓弦也變小了，它們的差數也就更小了！

弓背變到非常之小，弓弦也就變成非常之小，它們都是無窮小，兩個無窮小之差更是無窮小了。弓背和弓弦，不但都是無窮小，而且還是同級又同班，——它們兩個比值的極限是1，它們相等。講到這個地方，我們就可以拿着這個無窮小的直線去代替那個無窮小的曲線。於是求曲線之長，就又變成一個直線長的累集的問題。

知道了這件事實，我們纔能夠說，把線分成段，實在並不必需每段一定相等。因為無論怎樣分法，——最後，我們必需把它們都分解成無窮小！

假設把 Δs 再分，分得很小很小，結果就變成了 ds ；那麼這些 ds 的總和就等於全長，用了數學的記號，就是：

$$\int ds = s$$

這個伸長了的 s ，也是表示相加的意思。英語裏的和是sum，這個 s 也就是那個sum的第一個字母。

ds 叫做 s 的微分，反過來說， s 就是 ds 的積分。微分和積分，就是兩個相反運算的結果。一個是從整體裏求部分，一個是從部分求整體，對於我們，實在是同樣的重要。

這個辦法，不僅只求直線可以用，即便求曲線，求任何一個曲線都能用，這是一個最重要之點。

當然這個 ds 不能等於零。如果 ds 等於零，那麼無論多少零相加還是零，那就沒有意義了！

莊子的天下篇裏，曾經說：「集無厚而至千里，」所謂無厚，並不是沒有厚，而是這個厚可以非常之薄，薄到要多薄就多薄，它也是個無窮小。把這些無窮小堆集起來，就可以堆集成千里之厚。如果從字面上呆板的來講，這句話就不通；如果用變動的看法，應用極限的觀念，這句話實在就是講到集面成體的一個問題。

所以薄就是厚的微分，厚就是薄的積分。把微分和積分兩個聯合起來，就叫做「微積分」。這樣一來就把題目指明了，我們現在談的這一套，都是些微積分的問題，微積分也是數學的一種。

現在又要到站了，車上的客人紛紛的走下去，這時候化整為零，回頭車快開的時候，客人又紛紛的爬上來，就又化零為整了！

第十四站 點線面體

再有一站我們就要到家了，現在我們不預備下車去溜躑，還是繼續的談我們的問題。剛纔我們已經說過：從整體求部分，是微分；從部分求整體，是積分；微分和積分是兩個相反的運算。

拿算式來講：微分的問題，是——

已知函數 $y = f(x)$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 或是 dy

積分的問題是——

已知 $\frac{dy}{dx}$ 或是 dy ，求原函數 y

y 是 x 的函數， $\frac{dy}{dx}$ 還是 x 的函數，所以積分的問題又可以寫成，——

已知 dy ，求 $\int dy$

或 已知 $\frac{dy}{dx}$ ，求 $\int \frac{dy}{dx} dx$

所謂 $\frac{dy}{dx}$ 是 y 對於 x 的微分比， $\int \frac{dy}{dx}$ 就是那個微分比對於 x 的積分。前邊一個長 s ，後邊一個 dx ，就好比一個括號，——那就是「對於 x 求積分」的一個符號。

所以關於求積分的問題，又可以寫成，——

$$\text{已知函數 } y = f(x), \text{ 求 } \int y dx$$

這可有點像講書了，在課堂上那樣板起面孔來講。但是這也是沒法避免的事情。

所謂數學，從形式上來講，就是一部研究符號的科學。我們這些符號代表的都是些「量」，把這些量找出一個統一的形式，而作整個的研究，集體的討論，這就是數學的一個特色。

所以這究竟和畫符不一樣。畫符，沒有意義，數學的符號卻有具體的內容，畫符，據說可以捉妖拿邪，那只是一個迷信，一個心理上的欺騙，自欺欺人；研究數學符號，卻能真正分析自然現象，客觀如實的素描，精密正確的把握，這是一種科學。

因此，要研究數學，便沒法避免符號，——其實這就是我們的法寶！
應用這些法寶，我們已經知道，

$$s = \sum \Delta s \quad \text{和} \quad s = \int ds$$

但是這兩個算式還應當再加以說明，所謂 Δ_s 的總和是 s ，這是一段一段加的，所謂 d_s 的總和是 s ，卻是一點一點加的；在直線的時候，兩個算式都對，在曲線的時候，卻是一個是概算，一個是極限值，這兩個算式在精密正確上，就有一個程度上的差別。

上面說的是點集成線。

其次，假若有一個求面積的問題，就說一把小刀吧。如果這把刀子是一個正方形，長方形，三角形，菱形，平行四邊形，……總而言之，一句話，是直線圖形，那麼我們總有辦法，在算術裏差不多都已經講過了。如果是一個多邊形，也就是多角形，譬如八角形吧，那就多少麻煩一點，我們需要先把這個八角形分成七個或八個三角形，分別算出來，然後再相加。

如果這些邊，有一個邊不是直的，那就麻煩極了！譬如現在有一把吃西餐用的刀子，三邊是直的，而盡頭上，一邊是個半圓形的，那麼這個面積應當怎樣求法呢？

還是按着我們那個祖傳妙法，先把它來個解體，把它分成一條一條的。——當然啦，你可以說，無論怎樣分法，反正每一條都還是和原來的那個形狀相似，三邊是直的，一邊是曲的。

不錯，話是有理。——可是如果每一條的寬度很夠分到非常之小，變成一個無限小，那麼這個長條，就差不多可以看成一個長方形了。

不但差不多，而且實在也就只差一點，差一個無限小。因為我們這個分法，可以繼續不斷的接連下去，分，分，分了再分，一直分到你承認這句話的時候為止。

這樣一來，每一個長條的寬，從 Δx 就變成 dx 了，這一個長條幾乎就是一根直線，它的長是 y ，那麼這把刀子的總面積就是：

$$A = \int y dx$$

這就是說的，線——線集成面。

如果現在有個大麵包，我們要求它的體積。我們先把它橫着切成一片一片，非（常之）薄（常之）薄的，然後再把它加起來求總和。每一個薄片的面積是

$$A = \int y dx$$

假若它的厚，——非常之薄的厚，是 dz ，那麼這個麵包的總體積，就是

$$V = \int y dx dz$$

按照上面的解釋，就是先求對於 x 的積分，再求對於 z 的積分，積來積去，就積成了整體。

這就是說，面集成體。

因此，所謂積分，可以有兩個不同的看法，一種是微分的還原，求微分的逆算；一種是總和的極限，求微分相加的極限值。

但是這兩種情形，彼此還有一點差別。

從微分的還原這一方面講，一個積分的微分是真正的還原。例如 y 是 x 的函數， y 對於 x 的積分是 $\int y dx$ ，這個積分再對於 x 求微分，就變成：

$$\frac{d}{dx} \int y dx = y; \quad \text{因為 } d \int y dx = y dx, \quad \text{即 } y dx = y dx$$

但是一個微分的積分，卻是一個更廣泛的還原。例如 y 對於 x 的微分比是 $\frac{dy}{dx}$ ，這個微分比再對於 x 求積分，卻變成：

$$\int \frac{dy}{dx} dx = y + c$$

在這裏， y 是原函數， c 是一個任意常數，——一個不變的數。因為：

$$\frac{d}{dx} \int \frac{dy}{dx} dx = \frac{dy}{dx} \quad \text{而} \quad \frac{d}{dx} (y + c) = \frac{dy}{dx}$$

你有點糊塗是不是？——你聽，嗚——火車又開了！現在我們還是談火車。

假設 y 是表示距離， x 是表示時間，那麼：

$$y = f(x) \text{ 就是: } s = f(t).$$

這是表示一個運動的狀況，因為距離隨着時間變，就是關於運動狀況的一個描寫。

那麼 s 對於 t 的微分是什麼呢？——剎那速度。

不錯；反過來說，這個微分比對於 t 的積分是什麼呢？

$$\frac{dy}{dt} \text{ 是剎那速度,}$$

$$\frac{dy}{dt} dt \text{ 是: 剎那速度} \times \text{剎那時間} = \text{剎那距離。}$$

$$\int \frac{dy}{dt} dt \text{ 是: 剎那距離總和的極限} = \text{整個距離。}$$

——好啦，問題就在這兒啦。我要問你，量距離當然要有個起點，我們從哪裏量起呢？

譬如我們現在量這個火車所走的距離，我們應當從什麼地方開始呢？

當然要從剛纔離開的那個車站量起。

是的，這不過是「一個」辦法。其實我們也可以從前一站量起，或是從再前一站量起。假設前一站到剛纔這一站的距離是 a ，那麼求出積分來就應當再加 a ；假設再前一站的距離是 b ，

那麼求出積分來就應當再加 $a + c$ 。無論 a 或是 $b + c$ ，都不過是一個固定的常數。

再舉一個例。你總還記得運動會上跑長距離的情形，因為裏圈和外圈的長短不一樣，要想終點都在一個地方，一條線上，那麼起點就得有參差，跑外圈的在前，跑裏圈的在後。如果這些運動員的速度一般大，跑起來一般快，當然就會同時到達終點，時間是一致的，距離也是一致的。現在讓我們把這些跑道拉直，我們站在最後一個人的起點上。現在問，這些運動員跑到終點之後，每一個人都距離我們一般遠麼？

當然不一般遠！從裏圈往外圈數，一個比一個遠。他們彼此之間，相差一個常數，這就是由於起點不在一起的緣故。

所以，雖是一個速度，一個微分比，但是它的積分的結果卻不一定相等，因為彼此可以相差，差一個常數，一個任意的常數。

反過來說，對於這些總距離，如果求他們的速度卻是一致的。跑外圈的雖是距離我們遠，可是求速度的時候，這個距離卻只能從起點算起；因為起點以前的這一段路，他並沒有跑，沒跑當然就是沒有運動，沒有運動就談不到速度了。

把這些性質用微積分的行話來講，就是：如果兩個函數相差是一個常數，那麼它們的微分

比是相等的。反過來，如果兩個函數相等，它們的積分卻是可以彼此相差一個常數。

因為這個原因，所以對於一個函數，如果先積分再微分，結果還原等於原函數；如果先微分再積分，結果也許還原成原函數，也許就比原函數還多一個常數。

你覺得有點頭痛有點麻煩，是不是？——可是這正是我們的得意之作。

你應該還知道一點代數。譬如乘方或開方彼此還原，可是這也要看先後的次序。先開方再乘方，是還原，沒有錯；可是先乘方再開方，卻不僅只還原。你沒有聽說過嗎？其實這也很簡單。譬如說， 2 的平方是 4 ， 4 再開平方，卻是 ± 2 。 4 的平方根可能是正 2 ，也可能是負 2 ，一共兩個答數。然而反過來講， 4 的平方根是 ± 2 ，但是無論正 2 或是負 2 ，平方起來總是 4 ，這就和原來的完全一樣了。

按照上面那個說法，我們說：一個數，如果先開平方再平方起來，結果還原等於原數；如果先平方起來再開平方，結果也許還原成原數，也許就和原數相差一個正負號。

難道這還叫做還原嗎？是的，這還是一個還原，一個更廣泛的還原。所謂 ± 2 實在是得到了兩個答數，正 2 或是負 2 ，原來的數不過是其中的一個，而且原數只有這兩個可能。

所謂 y 的微分的積分是 $y + c$ ，如果 c 等於零，那麼 $y + c$ 就是 y ，我們的原函數不過是

點
線
面
體

百分之十的一個特例。所以不但是還原，而且是包括了一切可能的還原，我們這個答案是值得畫一百分的。

你的神情告訴我，你已經有點疲倦了。這也難怪，我們已經來回坐了幾個鐘頭的火車，而且還說了不少的話，用了不少的心思。我們暫且休息一會吧。好在就要到家了。

第十五站 求積的設計

看着你坐在我的對面，那一副瞞的姿態，我忍不住笑了。

「你笑什麼？」你忽然睜開眼睛奇怪的問我。

我更忍不住了：「因為我想起了孫悟空，那個在火車裏睡覺的孫猴子！」

「是嗎？」你也笑了：「小心你說不定就會變成豬八戒！」

「得啦，得啦，咱們彼此說和。」

「說和就說和，還是你說你的，我聽我的。」

是嗎？那麼無論如何，我打算在下車以前，完成一個段落。你且聽着——

我們已經說過，積分是微分的還原，同時又是一個總和的極限。要是從第二方面來講，那就還得加以補充。

所謂研究一個總和的極限，按照這個题目的本身來講，我們總得有個範圍，這纔有意義。譬如現在要求一根曲線的長，實在說就是先要在這個曲線上選擇兩個定點 P 和 Q ，然後

再求 PQ 之長。同時所謂求一個曲線下的面積，就是要求 PQ 這一段曲線下的面積。我們曾經說過求一把刀子的面積。這把刀子三邊是直的，只有頭上那一邊是曲線。如果這個曲線是：

$$c: y = f(x)$$

那麼這個曲線下的面積就是：

$$A: A = \int y dx = \int f(x) dx$$

可是剛纔我們曾經說過，一個函數的積分，它的結果可能還有一個任意常數，所以我們實在應當寫成：

$$A = \int y dx + c = \int f(x) dx + c$$

這樣一來， y 是 x 的函數，它對 x 的積分還是 x 的函數，所以 A 也就是 x 的函數。

假設我們要求 PQ 這一段曲線下的面積，那麼面積是從 P 點下的這一邊量起，一直量到 Q 點下的那一邊為止。同時 P 和 Q 既然都是曲線 c 上的點，所以它們的位置也是由於 x 來決定的。譬如說， x 等於 a 的時候決定 P 點， x 等於 b 的時候決定 Q 點，那麼 x 等於 a 的時候 A 等於零，這就是面積開始的一個條件。把這個條件代入上邊那個結果，我們可以寫成：

$$0 = \left[\int f(x) dx \right]_{x=a} + c, \quad \therefore c = - \left[\int f(x) dx \right]_{x=a}$$

於是這個常數 c 就確定了，因此

$$A = \int f(x) dx - \left[\int f(x) dx \right]_{x=a}$$

A 既是 x 的函數，那麼 x 等於 b 的時候，

$$A = \left[\int f(x) dx \right]_{x=b} - \left[\int f(x) dx \right]_{x=a}$$

因而這個面積也就求出來了。

從另一方面想，我們也曾說過，把它分成一條一條的，譬如說一共分成 n 條，這 n 個長方形，長是 y 寬是 Δx ，總和是：

$$\sum y \Delta x$$

$$\text{而且 } n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \sum y \Delta x \rightarrow A.$$

平常我們把這個極限值寫成下面這樣一個記號：

$$\int_a^b f(x) dx$$

叫做從 a 到 b ， y 對於 x 的積分，這是表示面積另外的一個寫法。現在把這兩個結果聯合起來，就得到一個等式：

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_{x=b} - \left[\int f(x) dx \right]_{x=a}$$

把右邊這個結果再換一個新記號，我們通常把它寫成：

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_{x=a}^{x=b}$$

這就是積分裏最重要最基本的一個定理。

這個定理告訴我們：求積分就是一個求總和的極限的方法；換句話說：積分也就是一個總和的極限值。

上面那個算式，

$$A = \int f(x) dx + c$$

c 可以是一個任意常數，所以這個積分叫做不定積分。現在這個算式：

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]_{x=a}^{x=b}$$

沒有那個任意常數了，——然而另外卻添了兩個限制，所以就叫做有限積分。有了這個有限積分，我們對於一切自然現象的研究，就得到了一個有力的武器。

譬如說，我們把上面那一段曲線繞着一根直線轉一圈，結果就成了一個體，——這種體叫做旋轉體。

怎麼，你又覺得有點太沈悶麼？——你看，那邊來了一個小販；讓我們買點什麼吃。

買什麼？買幾個梨，幾個蘋果，再來瓶汽水，一包糖，——一個用圓紙筒包好的糖，裏邊一片一片的，又圓又甜，頂好吃的糖。

你覺得有點開心。

可是這就是些現成的數學問題。

咱們先吃糖。——別慌，我且問你，這包糖是個什麼形狀？

直圓柱！

不錯；它的體積怎麼求法？

不知道！

讓我們打開看一看，裏邊是一個糖片又一個糖片，累集起來就成了一個圓柱。好啦，這對於

我們是一個很好的啓示。

假如我們把這個圓柱橫着切成一片一片，切到非常之薄，每一個看成一個圓，圓的面積是

π 乘半徑 r 的平方；然後再把它一個一個的累集起來，你可以有多少個圓？

那就看這個圓柱多麼高了！

是的，所以求圓柱的體積就是：

$$V = \pi r^2 h$$

h 就是圓柱的高。當着每一片的厚變成無窮小的時候，那麼圓柱的體積就是這些圓片相加的總和——這也就是包括着一個極限觀念的積分方法。

然後再吃梨。這個梨不是別的，在我們的眼裏就是一個旋轉體。譬如把這個梨從頭到尾一切兩半，這半個梨的邊緣是一段曲線；把這個曲線繞着中分的一條直線轉一圈，結果就成了這個梨，所以它就是一個旋轉體。

好啦，現在讓我們求出這個旋轉體的體積。

怎麼求法呢？還是用那個老法，先把這個梨橫着切成一片一片的。那麼這一片一片的是些什麼形狀呢？

近似糖片。對了，那就是說，它們差不多都是些圓柱體，不過這個圓的半徑太大，而且高度又太矮，不大好看。好看不好看，且不要管它，反正是近於圓柱，這倒是事實。

如果那個曲線是 $y = f(x)$ ，那麼這些圓半徑就是 y ，而高卻是 Δx 。 y 的大小是隨着曲線變的，所以它是一個變數； Δx 是個很小很小的數量，暫且讓它是一個常數。現在把這些體積加起來就應當是：

$$\sum \pi y^2 \Delta x$$

可是這個總和和那個真正的體積還差一點，——不錯；差一點當然就不能算對，這只是一個近似值。

然而我們還有的是辦法！我們現在再繼續的切，再切，那就是讓 Δx 開始變，變，越變越小，變到最後，結果等到

$$\Delta x \rightarrow 0, \quad \sum \pi y^2 \Delta x \rightarrow \int \pi y^2 dx$$

但是 π 是個常數，無論切得怎樣小，它是不變的，所以最後的結果就變成了下面這一個公式：

$$V = \pi \int y^2 dx$$

你覺得這些說法很奇怪，好像是在變戲法，耍魔術。其實這裏面並沒有什麼玄妙，這只是一個新觀點一個變動的新觀點。

再想想，你應該又想出了一些新的問題。我們能夠求出一段曲線下的面積，但是隨便畫一個閉合的曲線，這個面積能夠求得麼？我們能夠求出一個旋轉體的體積，但是如果有一個隨便的體，歪七扭八的體，我們能夠求得它的體積嗎？

是的，這些問題我們還不曾說到。——可是這是沒法子的事情，因為再說就要用到更複雜的算式了，例如畫兩個長 s 的二重積分和畫三個長 s 的三重積分。講數學而不用算式，這是一件費力不討好的事情，說的不容易說得清楚，聽的也不容易聽得明白。現在我們的目的只是要知道一個新的觀念。同時，即便僅僅知道了這麼一點，可是我們已經能夠得到許多許多的應用。譬如這個蘋果，我們一個人一個，這也是一個旋轉體。還有那瓶汽水，那個瓶子也是一個旋轉體。只要知道這些體的截面的曲線是什麼樣的函數，那麼我們就可以按照上面的辦法求出它們的體積來。這些都是關於幾何一方面的應用。

同時這些應用還不僅只限於幾何。譬如關於求曲線下的面積那個問題，如果曲線的函數，自變數 x 代表的是時間 t ，因變數 y 代表的是速度 v ，那麼：

$y = f(x)$ 也就是 $v = f.t$

這時候，這一段曲線 PQ 下的面積 A ，實在表示的就是從 a 到 b 這個時間之內所走的距離 s ，

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \text{也就是} \quad s = \int_a^b f(t) dt$$

因為 $s = \int_a^b v dt$

速度乘時間等於距離， s 是那些 dt 瞬間所走的距離的——總和的極限。

可是在這裏還要加以註解；不然的話，你就又會莫明其妙了。一會我們說，這是曲線下的面積，一會我們又說，這是表示運動的距離。如此說來，豈不是面積就是距離嗎？

是的，這句話實在是說不通的。——但是，表示面積大小的是一個數值，表示距離長短的也是一個數值；我們的意思實在是說這兩個數值相等。如果不論單位，單就數值來說，一個面積的數值是可以等於一個距離的數值的。例如表示兩個平方單位的數值是 2，表示兩個長度單位的也是 2，單就 2 來說它們兩個就能夠相等，這就沒有毛病了，這是暗中交代。

數 學 列 車

其次假如 t 表示時間， v 表示加速度 a ，加速度跟着時間變，不同的時間有不同的加速度。對於這個變加速運動說， A 就是表示的速度 v 。因為：

$$y = f(x) \quad \text{變成} \quad a = f(t)$$

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \text{變成} \quad v = \int_a^b f(t) dt$$

$$\text{也就是} \quad v = \int_a^b a dt$$

加速度乘時間等於速度， v 是那些 dt 瞬間所發生的加速度的——總和的極限。

又如 x 表示距離 s ， y 表示力量 F ，那麼 A 就又變成表示工作的大小了。因為：

$$y = f(x) \quad \text{變成} \quad F = f(s)$$

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad \text{變成} \quad W = \int_a^b f(s) ds$$

$$\text{也就是} \quad W = \int_a^b F ds$$

力量乘距離等於工作。在這裏說的 F ，不是一個固定的力量，它是跟着距離變的一個變量；那是說，在不同的地方就有不同的力量。因此這個工作就得利用積分去求它。

除此之外，我們還可以利用同樣的辦法，去求一個物體重心的位置，一個物體的慣性力矩，

或是一個液體的壓力——這些都是對於物理一方面的應用。

知道了利用積分可以求出一個總和的極限，這實在是解決問題的一個利器。對於這些具體的應用，也許你一時還搞不很清楚；可是你總該能夠瞭解這個設計的手續。只要懂得這個設計，這個思索的方法，那麼將來就會知道，如此這般，就能夠妙用無窮。

第十六站 開擴了許多的眼界

越是心急，越會覺得時間過得慢，其實這只是心理上的一個錯覺。滿以為就要到家了，可是拿出錶來看一看，我們還要等一個相當的時間。看着車窗外邊，那些頂寬的公路，窄一點的大路，以及那些曲曲折折的人行小道，我的心裏就又想出了一個話題。

從這些道路的發展上，我想到了社會的進化；從社會的進化上，又想到了各種事物的變遷。雖然我們現在覺得鐵路建設是一種交通的便利，可是在不久以前，有些人們卻並不是這樣想法；他們認為火車是一個不能瞭解的怪物，而且修築一條鐵路就會破壞了當地的風水。你認為這是一個笑話嗎？可是在他們的眼裏，卻是充滿了驚異和恐怖。他們認為，自古以來就沒有聽說過這種怪物；他們認為，這個怪物會給他們帶來了可怕的災害。

可是事實勝於雄辯，鐵道修起來了，火車跑起來了，它不但沒有帶來什麼災害，而且它從很遠很遠的地方，帶來了不容易見面的朋友，和不容易運來的貨物。慢慢的社會發達起來了，商人進出了不少的貨物，農人也提高了一些享受，而且還是那一塊老一輩子留下來的地，現在卻不

知不覺的擡高了身價，銅地錫地變成銀地金地。

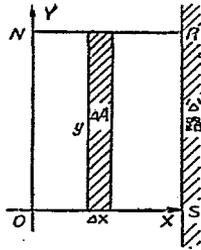
地價增值了，然而這並不是由於地主的加工製造；這是市面繁榮的一個必然的結果，是大家羣策羣力造成的一個事實。那麼這個利潤應當由於地主一個人私有嗎？當然不合理。

因此，我們要擁護國家的一個規定：凡是靠近鐵道車站，公路兩旁，地價既高，收稅也應當加重，這是一件最公平的事情。

事實是公平的，可是計算起來卻是夠麻煩的。——然而這個問題倒有點意思。

現在我們打算把這個問題細心的想一下。當然啦，事先我們也得規定幾個標準。

讓我先畫一個圖。



所以 v 是 x 的函數。這個函數是：

假設 RS 是一個公路的路界，從 RS 往裏邊丈量，五十公尺以外不另加稅，從五十公尺起，距離公路越近的，納稅越重。譬如說：距離二十五尺的地方，每平方尺一律按五十元計算；緊靠公路邊的地方，每平方尺一律按一百元計算。這樣一來，假設從五十尺的地方量起，橫着量向公路邊量，距離 x 尺的地方，稅價是 v 元， v 既是跟着 x 變

$$v = 2x$$

$$x = 0 \text{ 尺的時候：} \quad v = 0 \text{ 元}$$

$$x = 1 \text{ 尺的時候：} \quad v = 2 \text{ 元}$$

$$x = 2 \text{ 尺的時候：} \quad v = 4 \text{ 元}$$

$$x = 25 \text{ 尺的時候：} \quad v = 50 \text{ 元}$$

$$x = 50 \text{ 尺的時候：} \quad v = 100 \text{ 元}$$

假設現在有一塊地，長方形，長是六十尺，寬是五十尺，總面積一共三千平方尺，恰合市畝五分。——那麼應當納稅多少呢？

首先我們要注意的，是納稅的多少是按照距公路的遠近來規定的，即便是一塊地，兩個地邊的擔負就不一樣，這是一個要點，同時也是一個困難。

要想解決這個問題，我們還是用那老法，先把這塊地切成長條，假設每一個長條的長是 y ，等於六十尺，是個常數；寬是 Δx ，面積是 ΔA ，這兩個數量全看我們怎樣分法，所以它們兩個都是變量。按照面積的求法，

$$\Delta A = y \Delta x$$

因而這個長條面積應當納的稅就是：

$$v\Delta A = vy\Delta x$$

現在我們這塊面積，分了再分，一直分到每一條要多窄就多窄，然後再求納稅總和的極限值，這就是我們想要知道的那個稅額，假設是 U 。用算式來表示，就是：

$$\therefore \Sigma v\Delta A = \Sigma vy\Delta x$$

$$\therefore \text{當着 } \Delta x \rightarrow 0, \Sigma vy\Delta x \rightarrow U$$

$$\text{也就是 } U = \int v \cdot l \cdot A = \int vy dx$$

$$\text{但是 } v = 2x, y = 60, x \text{ 從 } 0 \text{ 到 } 50$$

$$\text{所以 } U = 2 \times 60 \int_0^{50} x dx$$

最後這個 x 對於 x 的積分是 $\frac{x^2}{2}$ （現在我們暫且不證明這個結果，）所以從零到五十的積分就應當是：

$$U = 2 \times 60 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{50} = 150000 \text{ 元}$$

納稅：
假設把這塊地順着公路從中分爲兩半，那麼距離公路遠的一半， x 是從零到二十五，應當

$$T_1 = 2 \times 60 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{25} = 37500 \text{ 元}$$

距離公路近的一半， x 是從二十五到五十，應當納稅：

$$T_2 = 2 \times 60 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{25}^{50} = 112500 \text{ 元}$$

雖然兩個面積相等，然而納的稅額並不一樣。

同時，假設 $v = mx$ ， $y = c$ （ c 還是一個常數，）於是這個納稅的公式就是：

$$T = mc \left[\frac{x^2}{2} \right] = (mx) \left[c \frac{x}{2} \right]$$

$$\text{或 } T = v \left[y \frac{x}{2} \right]$$

v 是按照地畝受益的多少來規定的，所以叫做「受益因數」，至於後邊這個因數，卻是容易看出來，那是一個長方形的面積，而 x 是取的平均中值。

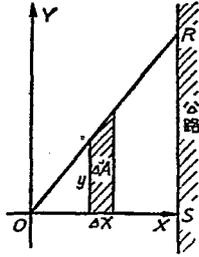
假設 NR 那一邊不和公路垂直，它是一條斜的，那麼這塊地就變成一個三角形了。如果這一個三角形長是寬的 m 倍，那就是 $y = mx$ 。

這時候，總稅額就變成：

$$U = \int ygdx = \int 2cmaxdx = 2m \int x^2 dx$$

x^2 對於 x 的積分是 $\frac{x^3}{3}$ ，所以從零到五十的積分就是：

$$U = 2m \int_0^{50} x^2 dx = 2m \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{50} = \frac{2}{3} \times 125000m \text{ 元}$$



如果 $m = 1$, $U = 83333$ 元

如果 $m = 2$, $U = 166666$ 元

如果 $m = 3$, $U = 250000$ 元

同時，假設 $v = mx$, $y = mx$ ，於是這個地稅的公式就變成：

$$U = mm \left[\frac{x^3}{3} \right] = (mx) \left[\frac{mx}{3} x \right]$$

$$\text{或 } U = v \left[\frac{x}{3} \right] = v \left[\frac{1}{2} v \left(\frac{2}{3} x \right) \right]$$

這個結果，還是受益因數去乘一個三角形的面積，而這個三角形的底邊是 $2\sqrt{3}$ ——這還是取的一個中值。

而且，長方形的時候，

$$T = \frac{1}{2}nax^2$$

三角形的時候，

$$T = \frac{1}{3}nmx^3$$

一個是和 x^2 成正比，一個是和 x^3 成正比。

上面這個算例又可以看作在經濟財政一方面的一個應用。

喂，老兄，你怎麼又不說話了？——譬如說，我們現在有了一筆錢！

「你笑？對了，越是這個年頭，日子越難過人越財迷！我再說一遍，假設我們現在有了一筆錢！那麼我們將要怎麼辦？」

買房子，買地，買東西囤積！——可惜，咱們沒有那個福氣，手裏只有一萬塊錢，那麼怎麼辦呢？對了，還是放到銀行裏去吧，按時候還可以得點利息。

利息有幾種算法呢？按時間說，有日息，月息，年息。按計算說，有單利，有複利。按利率說，也有規定，幾分幾厘。

當然啦，利息越大越好，於是咱們就要複利息，半年算一次，年利八厘；算一次，利滾利，本大利大。這倒是一個頂好的辦法。假如我們存一年，半年算一次複利，那麼一年的本利和一共就是：

$$10000\left(1 + \frac{.08}{2}\right)^2 = 10816 \text{ 元}$$

這個公式當然你還記得，比我還熟。

可是想想，還不合乎理想。既是每算一次，本錢就增加一次，那麼最好是多算幾次，——那就是說，把結算利息的期間讓它越短越好。假設這個期間變成無窮小，那就是無時無刻不結算利息，無時無刻不增加本錢；這樣一來，咱們是一點也不吃虧了。

這個想法太好了，咱們算算看。——別慌，暫且讓我們猜一下：假設按照這個辦法，我們一年下來，大概能夠拿到多少錢？

猜是不大好猜的，可是我們總可以斷定，至少得發個小財。是的，你這樣想我也這樣想。我們算算看！

假設一年算 n 次，年利率既是八厘，所以每期是 n 分之八厘。代公式：本利和，

$$A = 10000 \left(1 + \frac{.08}{n}\right)^n$$

可是這就來到一個難題，週期要是變成無窮小，期數就要變成無窮大；

$$n \rightarrow \infty, \quad \frac{.08}{n} \rightarrow 0, \quad 1 + \frac{.08}{n} \rightarrow 1$$

1 的無論多少次方總是 1，1 乘一萬還是一萬——這簡直是開玩笑！還是原本嗎？這顯然不合理，這裏邊有毛病，咱們還得另外演算演算。

$$A = 10000 \left(1 + \frac{.08}{n}\right)^n = 10000 \left[\left(1 + \frac{.08}{n}\right)^{\frac{n}{.08}}\right]^{.08}$$

這是什麼意思呢？——不錯，在微分裏，我們有一個最重要的變數是

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$

當着 x 變成零的時候，這就是一個「1 的無窮大方」的一個變數。

這個變數有個極限（我們暫且不去證明這句話），這個極限值在 2 與 3 之間，平常把它用 e 來表示，就和用 π 來表示圓周率一樣，這也是一個專用的記號。

$$\text{如果 } x \rightarrow 0, (1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e = 2.71828 \dots$$

然後再看上面那個公式，

$$\text{如果 } n \rightarrow \infty, \frac{.08}{n} = y \rightarrow 0, \left(1 + \frac{.08}{n}\right)^n = (1+y)^{\frac{1}{y}} \rightarrow e.$$

$$\text{所以 } A = 10000e^{.08} = 10832.87 \text{ 元}$$

比單利息纔多三十二元八角七分！

怎麼，你失望了麼？是的，我也覺得有點洩氣。是算錯了嗎？沒有一點也沒有錯！

這裏邊當然有個關鍵，讓我們拋開財迷的心，只要鎮靜一點，馬上就想起來了。固然我們計算利息的期數越多越好，可是期數越多了，期間就越短，期間越短所生的利息就越小——因為事先約定好了年利率八厘，這就限制住了利息增加的一個範圍。

財是發了，可惜太小。這件事情，對於不願用腦子，天天專門打算盤的財迷，是一個頂好的諷刺！

數 學 列 車

e 這個極限值，在高等數學裏是一個重要的數字，這就是我告訴你這個算例的用意。同時，上面這個計息的辦法叫做連續複利計算法。假設你能夠懂得這個算例，也就明白了什麼是連

續，什麼是極限，這一類的觀念。

突然火車停了！原來我們又回到一開頭上車的那個地方。我們的旅行結束了。在這一短小的旅行中，我們討論了不少的新觀念，雖然有點疲倦，然而卻也感到興奮。而且那個新觀點，動的觀點，也着實使我們又開擴了許多的眼界。

當着我們從票房的門口，隨着客人一齊擁擠出來的時候，看着人羣就好像一股決出了堤口的洪流。等着走出來以後，這些人羣漸漸的鬆動了，卻好像水面上那個圓的水紋，慢慢的發展，逐漸的展開，展開——慢慢的都又消失了。馬路上，只有你還沒有離開我。

「你是回學校呢？還是回家？」我問你。

「天不早了，我打算回家。」

「那麼明天見吧！」

「明天見！」

看見你，忽忽的往前跑了幾步，聽的一聲就跳上了電車，不由得又使我想起那個跳上飛機的孫悟空。

附錄 車廂檢查

一般人常有一個誤解，認為數學是最死板最乾燥的東西。同時還有一個誤解，認為微積分就是最高深最難懂的數學。其實，並不是這個樣子——至少並不像一般人所想的那樣可怕。

微積分的研究，是另外一個觀點，運動的觀點。這個觀點，對於任何人都應當知道一點，尤其是對於沒有機會去學的人，更有知道的必要。不然的話，已經學過的數學智識，將要束縛了他的思想，以及思想的運用。

抱着這個信念，我寫成了這一部數學列車。我竭力的避免算式，我盡量着重基本觀念，在體裁的選擇和敘述的方式上，曾經費了不少的考慮。

然而這是一件不容易討好的工作，而且最危險的是，惟恐以詞害意，以致發生誤解。所以在這本書的最後，預備把每一段所提到的觀念，再加以整理，補充和重述。

如果把正文看作列車，那麼這裏便應當是車廂的檢查了。

第一站

首先提到的，有幾個名詞。

每一個單位時間所走的距離叫做速度，——這是對於運動狀況的一個描寫。

每一個單位時間所增加（或減少）的速度叫做加速度（或減速度），——這是對於速度變化的一個描寫。

速度有變化的叫做變速；速度沒有變化的叫做常速。

絕對速度，是表示一個運動的物體，對於一個靜止的標準，發生的「距離的變化」的狀況。相對速度，是表示兩個運動的物體，彼此以對方為標準，發生的「距離的變化」的狀況。

第二站

動是表示一個物體位移的狀態。

靜就是不動的一個狀態。

動和靜，快和慢，同時又是表示兩個物體「相對距離」的變化的狀態。

拿着一個定點為標準，另外一個動點沿着直線或是曲線所發生的速度，叫做線速度。

聯線，和標準線成爲一個角度。動點移動的時候，這個角度發生變化的速度叫做角速度。

第三站

求速度的公式是，時間除距離等於速度，

$$s \div t = v$$

這是一個平均速度，對於速度的一個概算。

假設時間增加了一個 Δt ，這時候，距離增加了一個 Δs ，

$$\Delta s \div \Delta t = \Delta v \quad (\text{時間之內的平均速度})。$$

$$\text{當着 } \Delta t \rightarrow 0, \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \frac{ds}{dt} = \text{瞬間速度,}$$

這是剛剛時間是 t 的那一刹那的眞正速度。這裏邊已經含有一個極限的觀念在內。

第四站

$s \div t = v$ ，表示速度。

$v \div t = a$ ，表示加速度。

$a > 0$ ，表示加速度。

$a < 0$ ，表示減速度。

$a = \text{常數}$ ，是等加速（或等減速）運動。

$a = \text{變數}$ ，是變加速（或變減速）運動。

一個固定的數值叫做常數。

一個不是固定的數值叫做變數。

變數的本身用它的接連數值來表示。

變數的變化沒有限制；不變的時候，就變成了常數。

整數列是孤立的數值，有理數列是密集的數值，實數列是連續的數值。

如果一個變數的接連數值是實數列的一段，就是連續變數，如果不是連續的變數，就是不連續變數。

第五站

兩個相反的方向，如果一個叫做正方向，那麼另外一個就叫做反方向或是負方向。

運動方向是正的叫做法正動，運動方向是負的叫做法反動。延長如果是正的，縮短就是負的。

變化的方向是正的叫做法正變，變化的方向是負的叫做法反變。發展如果是正的，緊縮就是負

的。

速度帶有方向，是個向量。如果只論速度的絕對值，不論方向的正負，就叫做速率。速率是個純量。

變速表示變化的速度，變率表示變化的速率。

如果一個變數的接連數值是循環的，那麼這個變化是週期的。循環是重複的循環，週期是移動的循環，一個車輪在原地不動的旋轉，是循環；假設它在地面上滾動的旋轉，則是週期的。

第六站

假設一個變數的絕對值，能夠大於任何一個預設的大數，就叫做無窮大或是無限大。

無窮大是一個要多大就多大的變數，不是一個常數。

假設一個變數的絕對值能夠小於任何一個預設的小數，就叫做無窮小——但是不能叫做無限小。

無窮小是一個要多小就多小的變數，也不是一個常數。

無窮大和無窮小的接連數值都是無窮的；但是無窮大沒有極限值，無窮小卻有極限值。

無窮小的極限值是零。

如果一個變數 x 和一個常數 l ，其差為無窮小，那麼這個常數 l 就叫做那個變數 x 的極

限值。記爲

$$\text{如 } |x-1| \rightarrow 0 \text{ 則 } x \rightarrow 1$$

要想求一個變數的極限，先要斷定這個變數是不是有一個極限。要想斷定極限是不是，可以按照下列這兩種情形論斷：

(一) 假設一個變數越變越大，但是無論怎樣變大，卻是總比一個固定的數值還小，只有這種情形，這個變數纔能夠有一個極限。

(二) 假設一個變數越變越小，但是無論怎樣變小，卻是總比一個固定的數值還大，只有這種情形，這個變數纔能夠有一個極限。

以上兩種情形，理由只是一個只有能夠適合這種條件，一個變數纔能夠和一個常數相差是一個無限小，——然後，這纔能夠有一個極限。

例如：

$$(1) \quad x = .9 = .999999999 \dots$$

$$\therefore 1-x \rightarrow 0, \quad \therefore x \rightarrow 1$$

$$(2) \quad x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots$$

$$\therefore \text{隨着 } n \rightarrow \infty, 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 0, \quad \therefore x \rightarrow 1$$

第七站

無窮大和無窮小既然都是些變數，所以比較大小只能從極限上着想。而且無窮大和無窮小互爲倒數。

$$\text{如 } x \rightarrow \infty, \text{ 則 } \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$\text{如 } x \rightarrow 0, \text{ 則 } \frac{1}{x} \rightarrow \infty$$

假如 x 和 y 都是無窮大——

$$\text{如 } \frac{x}{y} \rightarrow \infty, \text{ 則 } x \text{ 比 } y \text{ 的級數高；}$$

$$\text{如 } \frac{x}{y} \rightarrow 0, \text{ 則 } x \text{ 比 } y \text{ 的級數低；}$$

$$\text{如 } \frac{x}{y} \rightarrow c \neq 0, \text{ 則 } x \text{ 和 } y \text{ 是同級；}$$

如 $\frac{x}{y} \rightarrow 1$, 則 x 和 y 為等值。

第八節

如 $a - b = c$, c 是 b 對於 a 的絕對的差；
而 $c + a = d$, d 是 b 對於 a 的相對的差。

假如 α 和 β 都是無窮小——

如 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$, 則 α 比 β 的級數高；

如 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \infty$, 則 α 比 β 的級數低；

如 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow c \neq 0$, 則 α 和 β 是同級；

如 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 1$, 則 α 和 β 為等值。

而且, 如果以 α 為標準——

假設 γ 和 x 同級, 則 γ 為第一級無窮大；

假設 γ 和 α 同級, 則 γ 為第二級無窮大；

假設 y 和 x^n 同級，則 y 爲第 n 級無窮大。
也就是：

如 $\frac{y}{x^n} \rightarrow c \neq 0$ ，則 y 爲第 n 級無窮大。

如果以 a 爲標準，——

假設 β 和 a 同級，則 β 爲第一級無窮小；

假設 β 和 a^2 同級，則 β 爲第二級無窮小；

假設 β 和 a^n 同級，則 β 爲第 n 級無窮小。

也就是：

如 $\frac{\beta}{a^n} \rightarrow c \neq 0$ ，則 β 爲第 n 級無窮小。

第九站

如果 y 跟着 x 變，則 y 叫做 x 的函數。 x 是自變數， y 是因變數。記爲：

$$y = f(x)$$

如果 y 是 x 的函數，則 x 是 y 的反函數。記爲：

如 $y = f(x)$, 則 $x = f^{-1}(y)$.

一個自變數的函數未必只有一種，對於不同的函數要用不同的記號。例如 u, v, w 都是 x 的函數，然而彼此不同，記為：

$$u = f(x), \quad v = g(x), \quad w = h(x).$$

或 $u = f(x), \quad v = F(x), \quad w = \phi(x)$.

一個函數的自變數未必只有一個。譬如能夠叫 u 變的同時有 x, y, z ，則 u 的自變數有三個，記為：

$$u = f(x, y, z)$$

假設 $y = f(x)$ ， x 的數值可以決定 y ， y 的數值叫做 x 的對應值。例如：

$$y = x + 2, \quad x = 0, \quad y = 2;$$

$$x = 1, \quad y = 3;$$

$$x = 2, \quad y = 4.$$

y 2, 3, 4 就是 x 0, 1, 2 的對應值。

即便同一個函數，一個 x 卻不見得只有一個對應值。例如：

$$y = x^{\frac{1}{2}},$$

$$x = 1, y = \pm 1, 0.$$

$$x = 4, y = \pm 2.$$

$$y = \sin^{-1}x, \quad x = 0, y = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$$

$$x = 1, y = \frac{\pi}{2}, \pm 2\pi + \frac{\pi}{2}, \pm 4\pi + \frac{\pi}{2}, \dots$$

一個 x 的對應值只有一個的時候，叫做單值函數；有兩個的時候，叫做二值函數；有 n 個的時候，叫做 n 值函數。——只要 n 大於 1，統統是複值函數。

任何一個函數，不見得都能夠用算式去表示。雖然不能用算式去表示，卻無妨礙於函數的成立。函數的定義是相當的廣泛的。

函數的表示有三種：一種是自變數和因變數的「數值對照表」，一種是「坐標曲線」，例如統計圖表，最末一種纔是「算式」。

假設 $y = f(x)$ ，而且這個函數是可以由算式去表示的，那麼按照算式的性質又有下列各種區別。

如果 y 可以用 x 的代數式去表示，則 y 是 x 的代數函數。例如：

$$y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + mx + n$$

如果用三角算式表示，則 y 是 x 的三角函數，例如：

$$y = \sin x$$

如果用指數算式表示，則 y 是 x 的指數函數，例如：

$$y = a^x$$

如果用對數算式表示，則 y 是 x 的對數函數，例如：

$$y = \log_{10} x$$

如果用反三角算式表示，則 y 是 x 的反三角函數，例如：

$$y = \sin^{-1} x$$

凡不是代數函數的，叫做非代數函數，或是超越函數。

如 y 是 x 的函數， x 增加（或減少） Δx 的時候， y 增加（或減少） Δy ， Δx 和 Δy 叫做 x 的增分和 y 的增分。（增分可正可負，所以減少的情形也可以包括在裏邊。）

y 的增分和 x 增分的比值的極限值，叫做 y 對於 x 的微分比。——也就是：

$$\text{如 } y = f(x), \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

當着 $\Delta x \rightarrow 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{dy}{dx}$, y 對於 x 的微分比。

但是當着 Δx 近於零的時候, Δy 也近於零, 所以 Δx 和 Δy 都是些無窮小。同時微分比就是它們兩個比值的極限值, 這個極限值卻不一定都是零。

因此, $\frac{dy}{dx}$ 所表示的並不是一個分數, d 實在是在表示一個運算的記號, 和 $+$ $-$ \times \div 是同樣的情形。

但是 $\frac{dy}{dx}$ 「也可以」看作一個分數, 那就是 dy 和 dx 的比值, dx 就是很小很小的 Δx , dy 就是很小很小的 Δy ; y 的微分, dx 是 x 的微分, 所以這個極限值也可以叫做微分比。

y 對於 x 的微分比又有下列種種不同的記號, ——但是都表示一個意義。

$$\frac{dy}{dx} \equiv D_x y \equiv y' \quad (\text{或是 } y, \text{ 當着自變數是時間 } t \text{ 的時候。})$$

憑了這個微分比, 我們就可以研究出: 當着 x 變的時候, y 究竟是怎樣的變法。——這是一

個最重要的基本關鍵；同時這個問題也就是一個最重要的基本課題。

第十站

如果 y 是 x 的函數，則 y 對於 x 的微分比叫做第一次微分比。

第一次微分比可能還是 x 的函數，所以我們可以再求它對於 x 的微分比，——就叫做第二次微分比。

第二次微分比，再求對於 x 的微分比，就叫做第三次微分比。

照這樣一次一次的求下去，我們可以求出第 n 次的微分比。

像這樣求微分比的手續叫做求微分；簡單一點，也叫做微分，——不過這是一個動詞。

上面曾經說過， $\frac{dy}{dx}$ 有兩個意義，一個是把它看成一個極限值，用微分的方法去求，所以應當記為 $d\frac{y}{dx}$ ；一個是把它看成一個分數，這纔能夠記為 $\frac{dy}{dx}$ ——這也就是叫做微分比的一個原因。

但是第二種看法，只有在「第一次微分比」的時候是對的，二次以上的微分比，這個看法就不一定都對了。所以這個名詞實在考究起來也是有問題的。我們用這個名詞的用意，不過是因為看起來容易熟悉一點。

同時，也就是因為這個原因，二次以上的微分比的記號就變了：

$$\text{一次微分記爲 } \frac{d}{dx}y \equiv \frac{dy}{dx},$$

$$\text{二次微分記爲 } \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \equiv \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\text{三次微分記爲 } \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) \equiv \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$n \text{ 次微分記爲 } \frac{d^n y}{dx^n}.$$

n 次微分也有下列種種不同的記號，但是意義是一致的。

$$\frac{dy}{dx} \equiv D_x y \equiv y',$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \equiv D_x^2 y \equiv y'',$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} \equiv D_x^3 y \equiv y''',$$

例如：——

$$(1) \quad y = x^2, \quad \text{則 } y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2,$$

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x,$$

當着 $\Delta x \rightarrow 0$, $\frac{dy}{dx} = 2x$, 或 $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$.

(2) $y = x^3$, 則 $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$,

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2,$$

當着 $\Delta x \rightarrow 0$, $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, 或 $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$.

(3) $y = nx^n$, 則 $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, 或 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

(4) $y = c$, $c =$ 常數.

則 $y + \Delta y = c$, $\Delta y = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$,

當着 $\Delta x \rightarrow 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, 或 $\frac{d}{dx}c = 0$.

$$(5) \quad y = x, \quad \text{則} \quad \Delta y = \Delta x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

$$\text{當着} \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad \frac{dy}{dx} = 1, \quad \text{或} \quad \frac{d}{dx} x = 1.$$

上面這幾個例，(3)(4)(5)同時也就是求微分的三個基本公式。

下邊這個例，就是上面那些公式的應用。

例：設 $y = x^5$

$$\text{則} \quad \frac{dy}{dx} = 5x^4,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 120x,$$

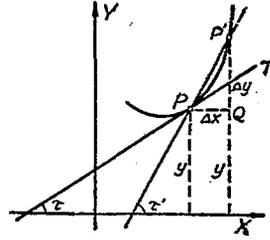
$$\frac{d^5y}{dx^5} = 120,$$

$$\frac{d^6y}{dx^6} = 0.$$

在幾何方面， $y = f(x)$ 表示平面上，一根曲線。 $\frac{dy}{dx}$ 表示曲線上任何一點的線坡。

設 $P: (x, y); \quad P': (x + \Delta x, y + \Delta y).$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \angle P'PQ = \tan \tau'$$



當着 $\Delta x \rightarrow 0$, $P' \rightarrow P$,

割線 $P'P' \rightarrow$ 切線 PT ,

$$\alpha \rightarrow \tau,$$

所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \tan \tau$,

也就是： $\frac{dy}{dx} = \tan \tau$.

根據這個幾何的性質，我們就可以研究曲線的方向，以及其他的性質。

如果 $y = f(x)$, x 的數值有限的話， y 的對應數值也可能有個限制。假設在這些 y 的數值裏以 $y = A$ 最大，則 A 叫做 y 的極大值。

假設在這些 y 的數值裏以 $y = a$ 最小，則 a 叫做 y 的極小值。

以上是 y 的絕對極大值和 y 的絕對極小值。

假設 $y = B$ 比左右鄰近的 y 的數值都大，則 B 叫做 y 的相對極大值。

假設 $y = b$ 比左右鄰近的 y 的數值都小，則 b 叫做 y 的相對極小值。

y 的極大值或是極小值，絕對的或是相對的，都和微分比有關係，所以可以利用微分比去解決極大或是極小的問題。

第十一節

假設 x 增大了 y 也增大， y 是 x 的昇函數。假設 x 增大了 y 反而減小， y 是 x 的降函數。在幾何上，畫曲線的次序是「自左而右」。 y 是 x 的昇函數時，曲線越畫越高； y 是 x 的降函數時，曲線越畫越低。

一個函數，假設從降函數變成昇函數，它的曲線是先下來再上去，這樣的曲線叫做向上彎。一個函數，假設從昇函數變成降函數，它的曲線是先上去再下來，這樣的曲線叫做向下彎。一個單昇不降，或是單降不昇的函數，叫做單調函數。

一根曲線，往下變成往上的地方，或是往上變成往下的地方，叫做轉彎點。一根曲線從向下彎變成向上彎的地方，或是從向上彎變成向下彎的地方，叫做拐彎點。

這些性質都和一二三次微分比有關係，所以知道了一個函數的一二三次微分比就可以研究曲線的這些性質。

第十二節

一個動點 P 所走的路線,叫做 P 點的軌跡。畫出這個軌跡,叫做描跡。如果一個 P 點的坐標 x, y 能夠適合 $y = f(x)$ 這個關係,那麼這個函數的圖形也就是 P 點的軌跡。

假設 $y = f(x)$ 能夠適合於下列這個事實,

當着 $x \rightarrow a$ 的時候, $f(x) \rightarrow f(a)$.

我們說: $y = f(x)$ 在 $x = a$ 的地方是連續的。如果不能適合這個事實,我們說: $y = f(x)$ 在 $x = a$ 的地方是不連續的。

連續或是不連續,對於圖形的解釋,是和普通的說法完全一致的。

應用垂直坐標:直線是二元一次方程式;圓,橢圓,拋物線,雙曲線,都是二元二次方程式。應用極坐標,那些像6,像8的各種曲線方程式,可以參考解析幾何學。

第十三站

因為: 所以:

$$x + y - y = x,$$

加減互為逆算。

$$x \times y \div y = x,$$

乘除互為逆算。

$$(\sqrt{x})^y = x,$$

乘方開方互為逆算。

$$a \log_a x = x,$$

指數對數互為逆算。

$$\sin(\sin^{-1}x) = x,$$

三角函數和反三角函數互為逆算。

求微分是化整為零，求積分是化零為整。一個是知道全體求部分，一個是知道部分求全體。關於表示總和的記號，可以按照下列方式縮簡：

$$S = a + b + c + d + \dots + n,$$

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n,$$

$$S = \sum_{i=1}^n a_i$$

如果 i 的開始數和終止數是已知的，假設不致發生誤會，我們還可以簡縮為：

$$S = \sum_{i=a}^b a_i = \sum a$$

如果曲線上有兩個鄰近的點 P 和 P' ，則：

$$\text{當 } P' \rightarrow P, \quad PP'/PP \rightarrow 1$$

P' 近於 P 的時候， PP' 弧和 PP' 弦是兩個等值的無窮小——這是可以證明的一個定理，這個

定理非常重要。

如果 Y 是 x 的函數，而且

$$\frac{d}{dx} Y = y, \quad y \text{ 是 } Y \text{ 對於 } x \text{ 的微分比；}$$

那麼反過來說，

$$\int y dx = Y, \quad Y \text{ 就是 } y \text{ 對於 } x \text{ 的積分。}$$

因為：

所以：

$$\frac{d}{dx} \left[\int y dx \right] = y,$$

微分和積分互為逆算。

例如：

$$(1) \quad \text{因為 } \frac{d}{dx} x^2 = 2x,$$

$$\text{所以 } \int 2x dx = x^2,$$

$$2 \int x dx = x^2,$$

$$\therefore \int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

$$(2) \quad \text{因為 } \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2,$$

$$\text{所以 } \int 3x^2 dx = x^3,$$

$$3 \int x^2 dx = x^3,$$

$$\therefore \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}.$$

$$(3) \text{ 因為 } \frac{d}{dx}x^{n+1} = (n+1)x^n, \quad \text{所以 } \int (n+1)x^n dx = x^{n+1},$$

$$(n+1) \int x^n dx = x^{n+1}, \quad \therefore \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

$$(4) \text{ 因為 } \frac{d}{dx}c = 0, \quad \text{所以 } \int 0 \cdot x = c, \quad (c \text{ 是任意常數}).$$

$$(5) \text{ 因為 } \frac{d}{dx}x = 1, \quad \text{所以 } \int 1 \cdot dx = x, \\ \text{或 } \int dx = x.$$

$\frac{d}{dx}$ 和 \int 可以對消, $\frac{d}{dx}$ 和 $\int \dots dx$ 也可以對消, 就和 $+$, $-$, \times , \div , 等次的乘方和開方一樣。上面這幾個例, (3) (4) (5) 也就是求積分的三個基本公式。下面這個例, 就是那些公式的應用。

例: 設 $y = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

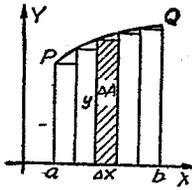
$$\text{則 } \int y dx = \int (5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1) dx, \\ = \int 5x^4 dx + \int 4x^3 dx - \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int dx,$$

$$\begin{aligned}
 &= 5 \int x^4 dx + 4 \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + \int dx, \\
 &= x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + x + c, \quad (c \text{ 是個任意常數}).
 \end{aligned}$$

因此 $\frac{d}{dx}(x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + x + c) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

第十四節

繪曲線之限 $y = f(x)$ 。



因為 $\Delta A = y \Delta x$,

所以 $\Sigma \Delta A = \Sigma y \Delta x$;

當着 $\Delta x \rightarrow 0$, $\Sigma y \Delta x \rightarrow \text{PabQ}$,

所以 $A = \int dA = \int y dx$.

但是因緣——

$$\frac{d}{dx}(y + c) = \frac{dy}{dx} + \frac{dc}{dx} = \frac{dy}{dx}; \quad \frac{dc}{dx} = 0,$$

$$\dots \int \frac{dy}{dx} dx = y + c$$

c 是任意常數， $y + c$ 是不定值，所以這個積分叫做不定積分。

因為 $\sqrt[n]{a^x}$ 可能有 n 個根，所以開方是乘方的一個更廣泛的還原。

因為 $\sin^{-1}(\sin x)$ 可能等於 $x + 2n\pi$ ，所以反三角函數是三角函數的一個更廣泛的還原。

因為 $\int \frac{dy}{dx} dx = y + c$ ，所以積分也是微分的一個更廣泛的還原。

因此， $\frac{d}{dx} \int y dx = y$ ， $\int \frac{dy}{dx} dx = y + c$ ，微分和積分先後的次序不同，則結果也不同，只有

$c = 0$ 的時候，纔是一個單純的還原。

第十五站

設曲線 c 是 $y = f(x)$ ，則可能

$$A = \int y dx + c$$

但 $x = a$ 的時候， $A = 0$ ，所以 $c = - \left[\int y dx \right]_{x=a}$

$$\text{因而 } A = \int y dx - \left[\int y dx \right]_{x=a}^x$$

所以 $x = b$ 的時候，

$$A = \left[\int y dx \right]_{x=b} - \left[\int y dx \right]_{x=a} = \left[\int y dx \right]_{x=a}^{x=b}$$

同時又因為——

$$\Delta A = y \Delta x, \quad \Sigma \Delta A = \Sigma y \Delta x,$$

$$\text{當着 } \Delta x \rightarrow 0, \quad \Sigma y \Delta x \rightarrow \int_a^b y dx,$$

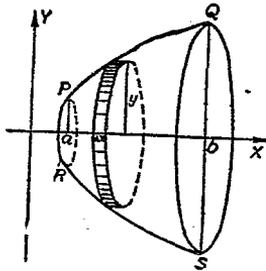
$$\text{所以: } \int_a^b y dx = \left[\int y dx \right]_{x=a}^{x=b}$$

這就是利用積分求總和的一個基本定理。由於這個定理，於是積分的應用就更加推廣。

設曲線 c 是 $y = f(x)$ 。如 c 圍繞 x 軸旋轉一週，則成爲旋轉體 PQR 。

把這個旋轉體切成 n 片，每片近似一個圓柱體半徑是 y ，厚是 Δx ；那麼體積就是

$$\pi y^2 \Delta x$$



然後把這些圓柱加起來，總和是：

$$\sum \pi y^2 \Delta x = \pi \sum y^2 \Delta x$$

$$\text{當着 } \Delta x \rightarrow 0, \quad \pi \sum y^2 \Delta x \rightarrow \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \left[\int_a^b y^2 dx \right]_{x=a}^{x=b}$$

因此，由於 $y = f(x)$ 而成的旋轉體，它的體積 V 就應當是下面這個公式：

$$V = \pi \int y^2 dx$$

例如：

(1) $c: y = \frac{r}{h}x$ ，是一條直線。

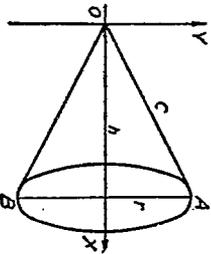
A 是 c 上一點： $x = h$ ， $y = r$ 。

從 $x = 0$ 到 $x = h$ ，這個旋轉圓錐體的體積是：

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{3h^2} \left[x^3 \right]_0^h$$

$$\therefore V = \frac{\pi r^2}{3h^2} h^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

(2) $c: y^2 = x$ ，是一個拋物線。



A 是 c 上一點 $x = h$ $y = r = \sqrt{h}$

從 $x = 0$ 到 $x = h$, 這個旋轉拋物線體的體積是。

$$V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \int_0^h x dx = \frac{\pi}{2} [x^2]_0^h$$

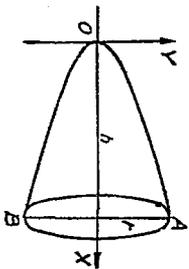
$$\therefore V = \frac{\pi}{2} h^2, \text{ 或 } V = \frac{1}{2} \pi r^2.$$

(3) c $x^2 + y^2 = r^2$, 或 $y^2 = r^2 - x^2$, 是一個圓。

A, B 是 C 上兩個點——

A $x = -r, y = 0,$

B $x = +r, y = 0$

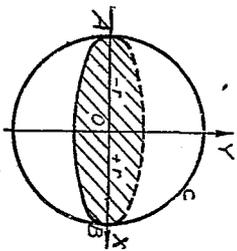


從 $x = -r$ 到 $x = +r$, 這個旋轉球的體積是。

$$V = \pi \int_{-r}^{+r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{+r} = \pi \left(\frac{2}{3} r^3 + \frac{2}{3} r^3 \right)$$

$$\therefore V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

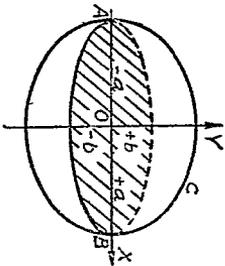


(4) $c = \frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1$, 或 $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, 是一個橢圓。

A, B 是 C 上的個點——

$$A \quad x = -a, \quad y = 0,$$

$$B \quad x = +a, \quad y = 0$$



從 $x = -a$ 到 $x = +a$, 這個旋轉橢圓球的體積是:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{+a} \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx \\ &= \frac{\pi b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a} = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(\frac{2}{3} a^3 + \frac{2}{3} a^3 \right) \end{aligned}$$

$$\therefore V = \frac{4}{3} \pi a b^2$$

假設 $z = f(x, y)$, 分別對於 x 和 y 求出的積分叫做二重積分, 例如:

$$\iint z dx dy$$

假設 $u = f(x, y, z)$, 分別對於 x, y 和 z 求出的積分叫做三重積分, 例如:

$$\iiint u dx dy dz$$

這些可以用來求任意面積或是任意體積。

二重積分和三重積分雖然也可以看作微分比的還原，但是因為 z 和 u 的自變數不止一個 x ，所以它們的微分比也就複雜得多了。

研究這一類的微分比和積分，這已經是進入高等微積分的範圍。

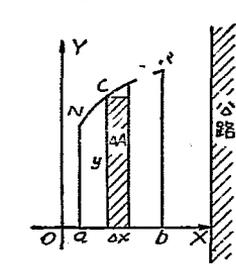
第十六站

設 c 是 $y = f(x)$ 一個曲線的地界， N, R 是 c 上的兩個點，——

$$N \quad x = a, y = 0,$$

$$R \quad x = b, y = 0$$

$$\text{則} \quad \Delta A = y \Delta x = f(x) \Delta x$$



設受益因數的規定：每單位面積應納稅 v 元，而 v 的大小按照距離公路的遠近來定，因此也就可以看成與 Y 軸的遠近來定。——

Y 軸的選定是 $z = 0$ 的地方。設

$$v = F'(x)$$

則 ΔA 應當納的稅是：

$$v\Delta A = vy\Delta x = F(x) \cdot f(x)\Delta x$$

$$\therefore \Sigma v\Delta A = \Sigma F(x) \cdot f(x)\Delta x$$

$$\text{當着 } \Delta x \rightarrow 0, \quad \Sigma F(x) \cdot f(x)\Delta x \rightarrow \int_a^b F(x) \cdot f(x)dx,$$

$$\text{即 } U = \int_a^b F(x) \cdot f(x)dx,$$

$$\text{或 } U = \int_a^b vydx$$

一塊地應納的稅，與面積大小有關，同時又和公路的遠近有關，這是積分應用的一個算例。設本銀為 P ，利率率為 r ， n 為一年內結算的期數。按照複利計算，一年的本利和是：

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

如果按照連續複利計算，則一年的本利和是：

$$n \rightarrow \infty, \quad A = P\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n\right]^r \rightarrow Pe^r$$

$$\text{因為 } n \rightarrow \infty, \quad \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \rightarrow e$$

同理，設 m 為年數，則按照複利計算， m 年的本利和是：

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nm}$$

如果按照連續複利計算，則 m 年的本利和是

$$n \rightarrow \infty, \quad A = P \left[\left(1 + \frac{r}{n} \right)^n \right]^{mr} \rightarrow P e^{mr}$$

要想斷定 e 的數值，應當分兩部來討論。

第一，先要證明這個極限是存在的。

問題是，設 $x \rightarrow \infty$ ，求證 $\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ 有一個極限值。

$$\begin{aligned} \text{證：} \quad \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{x(x-1)}{2!} \frac{1}{x^2} + \frac{x(x-1)(x-2)\cdots \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{x!} \frac{1}{x^3} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{2}{x} \right) + \cdots \cdots \\ &\quad + \frac{1}{x!} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{2}{x} \right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{x} \right) \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \cdots + \frac{1}{2!} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots} + \frac{1}{2^x}$$

$$\text{因為當着 } x \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^x} \rightarrow 1$$

$$\text{所以當着 } x \rightarrow \infty, \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)^x < 2 + 1 = 3$$

因為 x 增加的時候, $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^x$ 也增加, 這是一個越變越大的昇函數, ——但是無論怎樣變大, 卻是總比一個固定的數值 3 還小, 所以按照上面講過的情形, 可以論斷這個極限 e 是存在的; 而且 e 在 2 與 3 之間, 那就是:

$$2 < e < 3$$

第二, 再計算 e 的數值。

$$\text{設 } y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right) + \frac{1}{4!} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right) \left(1 - \frac{3}{x}\right) + \dots$$

$$\text{當着 } x \rightarrow \infty \quad \frac{1}{x}, \frac{2}{x}, \frac{3}{x}, \dots \rightarrow 0 \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e$$

$$\text{所以 } e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

1.		= 1
2	1.0000000000	= 1
3	0.5000000000	= 1 ÷ 2!
4	0.1666666666	= 1 ÷ 3!
5	0.0416666666	= 1 ÷ 4!
6	0.0083333333	= 1 ÷ 5!
7	0.0013888888	= 1 ÷ 6!
8	0.0001984126	= 1 ÷ 7!
9	0.0000248015	= 1 ÷ 8!
10	0.0000027557	= 1 ÷ 9!
	0.0000002755	= 1 ÷ 10!
	2.7182818007	

$$\therefore e = 2.7182818\dots$$

這是個無理數，——算到三十位小數，應當是：

$e = 2.71828\ 18284\ 590\ 5\ 23536\ 02874\ 71352\dots\dots$

但是最後還有一點聲明。我們證明極限值 e 存在的時候，無形中還有一個假定，就是假設 x 是一個正整數，——然後纔可以用二項式定理來展開。

然而，不但 x 是正整數，即便是正負有理數，或是正負實數，這個極限值還是存在的，而且結果還是一個 e ，一個極限值。我們現在雖然不再證明，可是這個事實是應當知道的。

微積分的內容，當然還不僅止於此。現在所說的，連個粗枝大葉也不夠，而且要想學習微積分，至少關於代數和解析幾何都得知道一點。——但是，就拿這個粗淺的介紹來說，我們已經可以看出來，它的內容是多麼豐富，而且它的應用又是多麼寬廣。只要有機會，我們都應當好好的學習一下！

#3
10/002



0:11