最新課程標準適用

開明新編

初中算術教本

〔下冊〕

夏承法 葉至善 編

三十六年七月一日教育部審定執照中教字第三號

開明書店印行

編輯要旨

一　編者編輯這部教本，教材的採取和排列完全遵照民國三十年教育部頒布的修正初級中學數學課程標準的算術部分.

二　這部教本的編輯，力求與小學算術相銜接，使學生明白各種計算方法的原理，同時，對於小學算術作適當的複習.

三　這部教本所舉的例題力求詳盡，並且，都應用簡短的算式，逐步將解法說明，使學生養成有條不紊的思考習慣.

四　這部教本對於四則應用問題，分量上特別加多，希望從種種方面養成學生的思考能力.

五　這部教本對於比例問題的運算，不拘泥於形式，間或插入一些理論，使學生更深切的明白為什麼要這樣運算.

六　這部教本對於百分法和利息算，特別加詳，因為這些是算術在商業上應用極繁的部門，一般人日常生活上也經常需用.

七　有一些計算方法的原理，在代數和幾何教本中有很清晰的說明，但用算術方法說明時，往往不易使學生瞭解。這部教本對於這一類的計算方法，就只說明方法而把原理部分略去.

八　這部教本的習題數量適合學生的修習時間，希望學生逐問練習，一題也不要略去.

三十三年十二月，編者.

下册目錄

第九章 省略算法

156. 近似值.

三個人分法幣 10 元，每人所得的是 3 元 3 角 3 分 3 釐 3 毫 3 絲 3 忽．但是在單位上雖有釐，毫，絲，忽等名稱，實際上拿到錢的時候，卻祇有 3 元 3 角 3 分 3 釐，或 3 元 3 角 3 分(或 4 分)．釐位毫位以下，大概都不去算了。3 元 3 角 3 分 (或 4 分)，相近於三個人分法幣 10 元所得的值，因此叫做“近似值”。

157. 省略算法.

省略算法是使計算的結果，能達到相當準確程度的一種簡便算法.

過長的小數，可以保留了一定的有效位數，而把其餘的略去．這略去的方法，普通所用的是“四捨五入法”。例如 8.4637 這個數，若使規定在小數第三位以下用四捨五入法，就是 8.46；若使規定在小數第二位以下用四捨五入法，就是 8.5；若使規定在小數第四位以下用四捨五入法，就是 8.464.

158. 誤差.

省略算法與非省略算法所差的數，叫做“誤差”．誤差不能大於末位數的 1 的$\frac{1}{2}$，這叫做“誤差的界限”．例如 3.14 原是由四

捨五入得到的數．若是由四捨得來的，那末原數最大是3.1449；若是由五入得來的，那末原數最小是3.135。3.14與3.1449的誤差是0.0049，而3.14與3.135的誤差是0.005，這兩種的誤差，都不超出末位小數的1的$\frac{1}{2}$。

159. 省略加法.

相加的數在5個以上的時候，不必把每個數完全計算，祇要把各數寫到所需位數的下一位．譬如求到小數三位，則各數取小數四位，然後照普通方法相加，再將所得和的末一位去掉，在上一位加1，就是所求的答數．

【例】 求2.376126+9.753142+1.972395+0.028817+4.3157602+0.954993+6.079001之和到小數第三位止。

解 因為求到小數第三位止，所以我們把各數寫到小數第四位，再行相加，列式如次：

$$\begin{array}{r} 2.3764 \\ 9.7531 \\ 1.9723 \\ 0.0288 \\ 4.3157 \\ 0.9549 \\ +\ 6.0790 \\ \hline 25.4802 \end{array}$$

答：和是25.481。

〔附註〕 算草中求得的結果是25.4802，因為題中說明只要求到第三位小數為止，所以把小數第四位的2去掉，在第三位加1，因此答數是25.481.

160. 省略減法.

把被減數和減數寫到所需位數的下一位，再行相減；而將所

得之差的末一位，依四捨五入法處置卽可。

【例】 求 3.65247 與 1.28676 的差，到小數第二位止。

解 因爲求到小數第二位，所以我們寫到小數第三位再行相減，列式如次：

$$\begin{array}{r} 3.652 \\ -)\ 1.286 \\ \hline 2.366 \end{array}$$

答：差是 2.37。

或把被減數和減數依四捨五入法寫到所需的位數，而行相減，列式如次：

$$\begin{array}{r} 3.65 \\ -)\ 1.29 \\ \hline 2.36 \end{array}$$

答：差是 2.36。

本題若不用省略算法，所得的差是 2.36571，比 2.37 少 0.00421，而比 2.36 多 0.00571。可知以第二個方法所得的結果，誤差較大。其原因在被減數和減數都依四捨五入法，祇留小數第二位；實際上被減數捨去 0.00247，而減數多收進 0.00324，在結果上等於多減去 0.00571，所以誤差較大，我國通常都採用第一種方法。

習 題 五 十 八

用省略加法求下列各組數字的和：

1. 0.257，0.8365，12.6428，0.0807。（小數一位止）
2. 0.3475，16.2987，18.7206，0.18653。（小數一位止）
3. 5.2542，6.8073，8.3554，18.3582。（小數二位止）

4.　12.804 元，25.037 元，48.915 元，32.52 元。（整數）

5.　63.6482，0.34263，18.21，34.825，48.86。（整數）

6.　32.521，41.854，8.5343，352.4。（小數一位止）

用省略減法求下列各式的差：

7.　15.3836－7.1542（小數二位止）

8.　8.57391－0.534（小數一位止）

9.　7568.34－587.96（整數）

10.　53.462462－18.181818（小數三位止）

11.　235.64－27.532（整數）

12.　3.256256－1.137737（小數二位止）

161. 省略乘法.

兩小數相乘，將被乘數的小數點右移若干位，同時將乘數的小數點左移相等的位數，或者將乘數的小數點右移若干位，同時將被乘數的小數點左移相等的位數，所得的積是不變的.如

$$0.9132\times10.43=9.132\times1.043$$
$$=91.32\times0.1043.$$

根據上面的道理，可以得到下面省略乘法的法則：

（1）把被乘數寫下，截取被乘的部分比所要的準確位數多二位.譬如求到小數二位止，則被乘數只需截取小數以下四位.

（2）把乘數的首尾相顛倒，使乘數原來的個位數字，寫在所截取的被乘數的最末一位小數下面.

（3）將乘數中每一個數字與被乘數乘，每次相乘時，被乘數

中在所乘數字對正一位以右之各數均不必計算。

(4) 每次乘得的積，末一位均與乘數原來的個位數字排在一直行上，照省略加法求得它們的和，就是所求的積。

【例一】 求 4.635785×2.41083 的積到小數第二位.

解　被乘數 4.635785 有六位小數.現在要求到小數第二位，依照上面所說的法則 (1)，只消多取二位到第四位止，即被乘數是 4.6357.依照法則(2)，乘數 2.41083 首尾顚倒就變成 380142，它的個位是 2.就寫在被乘數小數第四位之下，即 4.635785 的 7 的下面.然後照法則(3)(4)計算之，即得其積.

```
 4.635785
 80142
 ──────────
 9.2714··············46357×2
 18540··············  4635×4
   463················463×1
    32··················4×8
──────────
11.1749
```

答：積爲 11.18。

【附註】 算草中求得的結果是 11.1749，依省略加法的法則應爲 11.175，又依四捨五入法取小數二位，故得 11.18.

【例二】 求 8.2362×0.79635 的積到小數第四位.

解　被乘數 8.2362，它的小數位數祇有四位，要求到小數四位止，所以在它的後面加兩個 0，即變爲 8.236200，合到上面所說的多取二位的意思；乘數 0.79635，首尾相顚倒是536970，它的原來個位是 0，恰在被乘數 8.236200 的第二個 0 的下面，然後照下面所寫的算式計算之，即得其積.

```
 8.236200
  536970
---------
 5765340…………823620×7
  741258………… 82362×9
   49416…………8236×6
    2469………… 823×3
     410…………82×5
---------
 6.558893
```

答：積爲 6.5589.

【附註】 又算草中積的小數點應與被乘數的小數點對齊。求得的結果是 6.558893，依省略加法的法則應爲 6.55890，取小數四位，故得 6.5589.

習題五十九

求下面各式的積，到小數第二位止：

1. 9.435×5.25.
2. 50.281×0.317.
3. 0.248264×725.234.
4. $8.19\times 9.43\times 2.519$.

求下面各式的積，到小數第三位止：

5. $(3.1416)^2$.
6. $(3.1416)^3$.
7. 42.37×0.240089.
8. $3.24\times 0.871\times 9.5$.

162. 省略除法.

兩小數相除，將被除數和除數的小數點同時向右移或向左移若干位，所得的商並不改變.如

$$
\begin{aligned}
345.6\div 11.5 &= 34.56\div 1.15 \\
&= 3.456\div 0.115
\end{aligned}
$$

倘若除數祇有一位整數，要求商數到某位止的時候，那末被除數裏同商數有關係的數，也祇有到某位爲止．如 986.5675÷7 到小數第三位止，被除數中祇有 986.567 與商數有關係．

根據上面的道理，可以得到省略除法的法則：

(1) 若除數中首位數不是整數，可將二數的小數點同時右移，使除數的最左一位成爲整數．

(2) 截取被除數，使所截的小數部分，比所要求的準確位數多 2 位，除數只要截取在求商之首位數時夠用的位數．

(3) 照普通的除法相除，得首位商數，在被除數中減去商數與所截取的除數的積，得第一次餘數．

(4) 每得商數一位，即把除數末尾去掉一位，每次的所減的各位商數與除數的積也少一位，如此演算下去，一直到商數的位數成爲需要的小數位數爲止．

【例一】 求 2.4494897427÷1.414213562 到小數第五位．

解 本例要求到小數第五位，因此被除數應取小數點下七位，即爲 2.4494897．除數的位數取在求商的首位數時夠用爲度，所以取 1.414213，然後照普通的除法相除．若被除數不夠減，即在除數末尾去掉一位，然後再除，如此演算到所要求的位數爲止．

```
                1.73205
1.4142135 )2.44494897
           14142135 ............ 14142135×1
           10352762
            9899491 ............ 1414213×7
             453271
             424263 ............ 141421×3
              29008
              28284 ............ 14142×2
                724
                705 ............ 141×5
                 19
```

【例二】 求 3.1415926535÷4.5731 到小數第六位.

解 本例要求到小數第六位，故被除數用 3.14159265，而除數截取的位數，以在求商的首位數時夠用爲度，所以仍舊用 4.5731。

```
             0.686972
4.5731 )3.14159265
         274386 ............ 45731×6
          397732
          365848 ............ 45731×8
           318846
           274386 ............ 45731×6
            444605
            411579 ............ 45731×9
             33026
             32011 ............ 4573×7
              1015
               914 ............ 457×2
               101
```

【例三】 求 28351.4762÷75.438601 到小數第二位.

解 除數的小數點移左一位，即爲 7.5438601；被除數的小

數點也當移左一位，即為 2835.14762。要求到小數第二位，所以被除數用 2835.147，除數用 7.54386，在實際演算時，要求小數第幾位，被除數多取一位也可以，不必一定要多取二位．本例若多取二位，則被除數為 8 位數，除數也須 8 位，那末演算並不便捷，因此只須多取 1 位．

```
                  3 7 5.8 2
7.5 4 3 8 6 )2 8 3 5.1 4 7
              2 2 6 3 1 5 8·····  ······754386×3
              ─────────────
                5 7 1 9 8 9
                5 2 8 0 6 6············ 75438×7
                ───────────
                  4 3 9 2 3
                  3 7 7 1 5 ··············7543×5
                  ─────────
                    6 2 0 8
                    6 0 3 2 ·············· 754×8
                    ───────
                      1 7 6
                      1 5 0··················75×2
                      ─────
                        2 6
```

習題六十

1. 5.47722558÷1.73205081 到小數第五位止。
2. 1.8171206÷1.259921 到小數第三位止。
3. 1÷3.14159265368919 到小數第十位止。
4. 76.437648÷25.36784 到小數第二位止.
5. 637307.71÷128.3104896 到小數第一位止.
6. 7846467.83206÷746.46732 到千位止。
7. 9.0145762÷0.0071283 到小數第三位止.
8. 0.92781393÷0.046827514 到小數第三位止。
9. 3÷0.073219347 到小數第三位止.

第十章　比與比例

一　比

163.　比.

有甲乙二數(或量),甲數(或量)是乙數(或量)的幾倍或幾分之幾,這個倍數或分數,叫做甲數(或量)對於乙數(或量)的"比".

如6是2的3倍,所以6與2的比是3.3是5的五分之三,所以3與5的比是$\frac{3}{5}$.8尺是2尺的4倍,所以8尺與2尺的比是4.3升是7升的七分之三,所以3升與7升的比是$\frac{3}{7}$.

因此我們可以知道a是b的幾倍,或是b的幾分之幾的這種關係,就叫做a對於b的比.

164.　比號與項

比的符號是":",號前的數叫"前項",號後的數叫"後項".如8比9寫作8:9,這裏8是前項,9是後項.

8:9表示8對於9的比,就是$\frac{8}{9}$,或可寫作$8:9=\frac{8}{9}$.

因此　　$a:b=\frac{a}{b}$.

165.　比值.

前項被後項除得的商,叫做"比值".

現在依前項,後項及比值的關係可得下列三式:

(1) 前項÷後項＝比值.

(2) 後項×比值 前項.

(3) 前項÷比值＝後項.

若與除法及分數比較,又可得下列的表.

比	除法	分數
前項÷後項＝比值	被除數÷除數＝商	分子÷分母＝分數
後項×比值＝前項	除數×商＝被除數	分母×分數＝分子
前項÷比值＝後項	被除數÷商＝除數	分子÷分數＝分母

166. 比的性質.

(1) 比值是不名數.比的前後兩項須是同種量,且須是同單位,否則不能相比.

如7尺布與9尺布的比是7:9;4升米與5升米的比是4:5;須種類同是布,單位同是尺,或種類同是米,單位同是升,纔可相比.

【附註】 同量相比,若單位不同,須先化成同單位,纔能求得比值.

(2) 比的前後兩項,以同數乘或以同數除,比值不變. 因爲兩數的比就是一個分數,前項是分子,後項是分母. 分子分母以同數乘或以同數除,分數的值不變.因此比的前後項以同數乘或以同數除,其比值也是不變的.

如 $$5:7=\frac{5}{7}.$$

$$5\times6:7\times6=\frac{5\times6}{7\times6}=\frac{5}{7}.$$

$$5\div3:7\div3=\frac{5}{3}:\frac{7}{3}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{3}}=\frac{5}{3}\div\frac{7}{3}$$

$$=\frac{5}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{5}{7}。$$

(3) 兩比的大小可把他們化做同分母的分數來比較決定。

如　　7:9 與 3:5 哪個大?

$$7:9=\frac{7}{9}=\frac{7\times5}{9\times5}=\frac{35}{45}.$$

$$3:5=\frac{3}{5}=\frac{3\times9}{5\times9}=\frac{27}{45}.$$

因爲　$\frac{35}{45}>\frac{27}{45}$,　　所以　$7:9>3:5$.

167. 優比與劣比.

比值大於 1 的比,叫做"優比",比值小於 1 的比,叫做"劣比".優比的比值是整數,假分數,帶分數.劣比的比值是眞分數。

如　　$3:7=\frac{3}{7}<1$.…………劣比.

$13:6=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}>1$.……優比.

習題六十一

1. 5斗和7尺可相比否? 爲什麼?
2. 4寸和2尺可以相比否? 如何比?比值等於什麼?
3. 布5寸和綢8尺可相比否? 爲什麼?

4. 分別以下各比的優劣:

20:30, 4:2, 305:106, 8:1.

5. 比較下列各比的大小:

5:8 與 6:9;　7:10 與 9:12;　6:12 與 8:14;

13:8 與 22:13 與 105:49;　10 兩:15 兩與 7 元:9 元;

9 畝:6 畝與 5 日:3 日;　$\frac{2}{3}$斤 : $\frac{1}{2}$斤與$\frac{5}{2}$米 : $\frac{3}{8}$米.

6. 求下列諸比值:

$6:\frac{3}{4}$;　$5\frac{1}{3}:3\frac{1}{5}$;　2 里 4 丈:5 里 20 丈。

7. 16 和某數的比是$\frac{2}{7}$,求某數.

8. 某數和 108 的比是$\frac{5}{9}$,求某數.

9. 時針和分針在鐘面上旋轉的比是什麼?

10. 甲爲乙的$\frac{4}{5}$,乙爲丙的$\frac{5}{3}$,問甲比丙爲若干?

11. 甲 2 小時可走到的路,乙以 3 小時可走到,問甲乙速度之比如何?

12 兔行 5 步的距離,犬行 3 步可達;問犬 1 步的距離與兔 5 步的距離之比如何?

13. 地球表面$\frac{1}{4}$爲陸地,陸地的$\frac{3}{4}$在北半球,問北半球的陸地與海面的面積之比如何?

168. 正比與反比.

有甲乙兩數,甲數對於乙數的比,叫做"正比". 甲數的倒數

對於乙數的倒數的比,就叫"反比".

如 $3:5$ 是正比,$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}$是反比。

但 $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{1}=5:3.$

所以甲數對於乙數的正比就是乙數對於甲數的反比.

因此,我們要作一比的反比,只要調換前後兩項就可以了。

如 $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}$的反比就是$\frac{3}{7}:\frac{2}{5}$.

所以 a,b 的正比是 $a:b$; a,b 的反比是 $b:a$; $b:a$ 是 b,a 的正比; 所以 a,b 的反比就是 b,a 的正比.

169. 單比與複比.

比的前後兩項,各是一個數的,叫做"單比".若用幾個比的前項的連乘積做前項,幾個比的後項的連乘積做後項,這樣所成的比,叫做"複比".

如 $3:4$, $5:7$, $6:11$ 都是單比.

而 $3\times5\times6:4\times7\times11$ 就是 $3:4$, $5:7$, $9:11$ 的複比.

通常寫做:

$$\left.\begin{matrix}3:4\\5:7\\6:11\end{matrix}\right\}$$

又 $3\times5\times6:4\times7\times11=\frac{3\times5\times6}{4\times7\times11}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}\times\frac{6}{11}.$

所以一個複比的比值,等於原有各比的比值的連乘積.

因此，複比的前後兩項，如有公約數，可以先約去.

如
$$\left.\begin{array}{r}4:9\\3:2\\15:40\end{array}\right\}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}\times\cancel{3}\times\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{9}}\times\cancel{2}\times\underset{\underset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{40}}}=\frac{1}{4}.$$

170. 連比.

諸數連續的比，叫做“**連比**”.

如甲乙兩數的比是3:5，乙丙兩數的比是5:7；那末甲比乙比丙是3:5:7.

又如甲乙兩數的比是3:5，乙丙兩數的比是7:8，則甲丙兩數不能直接相比.

要求甲丙兩數的比，當先求甲乙丙三數的連比.要求甲乙丙三數的連比，必須使3:5（甲:乙）的後項與7:8（乙:丙）的前項相同.

甲比乙＝3:5＝21:35，

乙比丙＝7:8＝35:40.

∴ 甲比乙比丙＝21:35:40.

甲比丙＝21:40.

習題六十二

1. 求5:2，4:3，21:25的複比.
2. 甲數是5，乙數是2，求甲與乙的正比和反比.
3. 甲數是$\frac{5}{9}$，乙數是$\frac{6}{11}$，求甲與乙的正比和反比.

4. 有兩個長方形一樣長，闊的比是7:9；求二者面積的比。

5. 有兩個正方形邊的比是6:7，求二者面積的比。

6. 有一件工作，甲獨做，5日可成，乙獨做，4日可成，求甲乙二人工率（每日做成的工量）的比。

7. 從東鎮到西鎮，甲行3時可到，乙行5時可到，求甲乙兩人每時速度的比。

8. 甲乙兩數的比是3:4，乙丙兩數的比是6:7，丙丁兩數的比是9:10，求甲乙丙丁四數的連比。

9. 有一件工作，甲做5日可成，乙做7日可成，(*a*)求甲做成此工作所需日數，和乙做成此工作所需日數的比。(*b*)求甲乙兩人工率的比。(*c*)證明'工率的比是日數的比的反比'。

二 比例

171. 比例.

有四個數，第一數與第二數的比，等於第三數與第四數的比，這四個數就叫做成"比例"。

如2與3的比等於6與9的比，那末2,3,6,9四個數就成比例，寫做：

$$2:3::6:9 \text{ 或 } 2:3=6:9.$$

"::"是比例的符號，讀作"如"．若不用"::"，也可以用"="。

172. 比例式中的各項.

如前例中的2,3,6,9四個數，都叫做比例的"項"。從左到

右，依次叫做第一項，第二項，第三項及第四項．第一項與第四項又叫做“外項”，第二項與第三項又叫做“內項”。

如

$$\underbrace{\overset{\text{第一項}}{2} : \underbrace{\overset{\text{第二項}}{3} = \overset{\text{第三項}}{6}}_{\text{內項}} : \overset{\text{第四項}}{9}}_{\text{外項}}$$

若兩內項的數相同，這個數叫做“比例中項”如 $4:6=6:9$，6 就是比例中項．

173. 比例的定理.

(1) 在比例式中，兩外項的相乘積等於兩內項的相乘積．

如 $$2:3=4:6,$$

即 $$2\times 6=3\times 4.$$

因原式可寫作 $$\frac{2}{3}=\frac{4}{6},$$

若兩邊各以 3×6 乘之，

則 $$3\times 6\times\frac{2}{3}=3\times 6\times\frac{4}{6},$$

即 $$2\times 6=3\times 4.$$

由此推知，若 $$a:b=c:d,$$

則 $$a\times d=b\times c.$$

(2) 在比例式中，兩外項的相乘積，用任一內項去除，得其他一內項．

如 $2:3=4:6$,

則. $2\times6=3\times4$,

卽 $\frac{2\times6}{3}=4$。

由此推知,若 $a:b=c:d$,

則 $a\times d=b\times c$,

卽 $\frac{a\times d}{b}=c$.

(3) 在比例式中,兩內項的相乘積,用任一外項去除,卽爲其他一外項。

如 $2:3=10:15$,

則 $3\times10=2\times15$,

卽 $\frac{3\times10}{2}=15$.

由此推知,若 $a:b=c:d$,

則 $b\times c=a\times d$,

卽 $\frac{b\times c}{a}=d$.

174. 比例式中各項位置的變換.

在比例式中，各項的位置雖有變換，而比例的關係依然不變,有下列二法.

(1) 顚倒法　就是比例的前後兩項可以同時倒置。

如　$2:5=8:20$,　　　則　$5:2=20:8$。

因原式可寫作 $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$.

凡兩數相等,則其倒數亦相等,故

$$\frac{1}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{\frac{8}{20}},$$

即 $$\frac{5}{2}=\frac{20}{8},\quad 5:2=20:8.$$

由此推知,若 $a:b=c:d$,

則 $b:a=d:c$.

(2) 交錯法 就是兩內項或兩外項可以對換.

如 $2:5=8:20$, 則 $2:8=5:20$, $20:5=8:2$.

因原式可寫作 $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$.

若原式兩邊各乘以$\frac{5}{8}$,

則得 $$\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{8}{20}\times\frac{5}{8},\qquad \frac{2}{8}=\frac{5}{20},$$

即 $$2:8=5:20.$$

若原式兩邊各乘以$\frac{20}{2}$,則得

$$\frac{2}{5}\times\frac{20}{2}=\frac{8}{20}\times\frac{20}{2},\qquad \frac{20}{5}=\frac{8}{2}.$$

即 $$20:5=8:2.$$

由此推知,若 $a:b=c:d$.

則 $a:c=b:d$, 或 $d:b=c:a$.

175. 比例式中未知項的求法。

在比例式中，隨便知道三項，就可以求出其餘的一項。這所求的一項，叫做比例的未知項，通常用 x 代表。求未知項的方法，叫做比例式的解法。

從上述的比例定理，可得一解比例式的方法，即：若未知項在外項中，就用另一外項去除兩內項的相乘積；若未知項在內項中，就用另一內項去除兩外項的相乘積。

【例一】
$$8:36=40:x,$$
$$x=\frac{36\times40}{8}=180.$$

【例二】
$$6:x=7:21,$$
$$x=\frac{6\times21}{7}=18.$$

習 題 六 十 三

1. 從下列各組數中，選出能成比例的寫成比例式：

   5,2,15,6;　　8,9,4,3;　　12,3,9,4;

   10,38,40,5;　　7,9,21,18;　　4,10,25,10.

2. 用顛倒法和交錯法變換以下比例式的各項：

   $2:3=8:12$;　　$11:13=33:39$.

3. 在比例式中，若第一項比第二項小，第三項比第四項將怎樣？又若第一項最小，那一項該是最大？

求下列各式中 x 的值：

4. $3:9=x:27$。
5. $6:7::x:21$。
6. $30:27::40:x$。
7. $8:36=10:x$。
8. $11:12=121:x$。
9. $3:2=x:27$。
10. $8:4=36:x$.
11. $42:x=6:7$.
12. $x:41::24:6$.
13. $x:52::19:4$.
14. $54:36::108:x$。
15. $2\frac{1}{5}:3\frac{1}{2}=10\frac{4}{5}:x$.

三 各種比例及其應用

176. 正比例.

凡同時變化的兩種量，一種量增加幾倍，他種量也增加幾倍；一種量減少幾倍，他種量也減少幾倍。像這樣的，同時增加或同時減少的兩種量所成的比例，叫做“**正比例**”。

如1小時走8里，則2小時走16里，3小時走24里，$\frac{1}{2}$小時走4里，$\frac{1}{4}$小時走2里．由此可知時間增加、所走的路亦增加；時間減少，所走的路亦減少。因此時間與所走的路是成正比例的．

又如書5本價200元，則書10本價400元，書15本價600元，書2本價80元，書1本價40元．由此可知，書多價亦多，書少價亦少；因此書本的多少與書價是成正比例的。

現在就日常遇到的事物，舉幾個成正比例的例如次：

(1) 價格一定，購物所需的銀數與購得的物數成正比例。

(2) 人數一定，工作的多少和做工的時間成正比例．

(3) 工價一定，工錢的多少和工作的時間的多少成正例.

(4) 人數一定，工錢的多少和做工的時間成正比例.

(5) 時間一定，速度的大小和行路的遠近成正比例.

(6) 速度一定，時間的長短和行路的遠近成正比例.

(7) 同種物質，體積和重量成正比例.

(8) 時間一定，食物的多少和食物的人數成正比例.

(9) 長一定的長方形，面積和闊成正比例.

(10) 闊一定的長方形，面積和長成正比例.

177. 正比例問題解法.

【例一】 買布5尺，需銀200元，今有銀800元，可買布幾尺?

解 設800元可買 x 尺，那末前後購布所需之銀數的比是200元:800元，購得布之尺數的比是 $5:x$。從前節的第一個例，得比例式:

$$200\text{元}:800\text{元}=5\text{尺}:x\text{尺},$$

$$\therefore\quad x=\frac{800\times5}{200}=20\,(\text{尺}).$$

【例二】 某工人作工5天，得工資400元，今作工15天，可得工資幾元?

解 設15天的工資是 x 元，那末前後工資之比是400元:x 元，工作日數之比是5:15. 從前節的第三個例，得比例式:

$$5\text{天}:15\text{天}=400\text{元}:x\text{元},$$

$$\therefore\quad x=\frac{15\times400}{5}=1200\,(\text{元}).$$

178. 反比例.

凡同時變化的兩種量，一種量增加幾倍，他種量反減少幾倍，一種量減少幾倍，他種量反增加幾倍。這樣互依反比而變化的兩種量所成的比例，叫做“反比例”.

如有一工程，12人合做1日可成，則6人合做2日可成，4人合做3日可成，2人合做6日可成。

由此可知人數減少，日數反增加，人數增加，日數反減少。

現在就日常事物所遇到的，舉幾個反比例的例子如下：

(1) 金額一定，物價和購得的物數成反比例。

(2) 工程一定，做工的人數和做成所需要的時間成反比例。

(3) 工銀一定，每人所得的工資和做工的人數成反比例.

(4) 糧食一定，吃食的人數和時間成反比例.

(5) 路程一定，速度和到達的時間成反比例.

(6) 同一重量，體積和比重成反比例.

(7) 矩形的面積一定，長和闊成反比例.

179. 反比例問題解法.

【例一】 有一工程18人合做，12天可成，今用54人合做，幾天可成?

解 設54人合做x天可成，那末前後工作人數的比是18人:54人，時間的比是12天:x天，從前節的第二例，得比例式:

$$54人:18人=12天:x天,$$

$$\therefore\quad x=\frac{18\times12}{54}=4\text{(天)}。$$

【例二】 某人每小時行 12 里，10 小時可達某鎮，若每小時少行 2 里，則幾小時可達某鎮？

解　設每小時行 10 里（12 里－2 里），x 小時可達某鎮。那末前後所需時間之比是 10 小時 : x 小時，原來速度與現在速度之比是 12 里 : 10 里. 從前節的第五個例，得比例式：

$$10\text{里}:12\text{里}=10\text{小時}:x\text{小時},$$

$$\therefore\quad x=\frac{10\times12}{10}=12\text{(小時)}。$$

180. 解比例應用問題的應注意各點.

解比例應用問題可依照下列的順序：

（一）先認清題中所要求的是什麼？其次再看出題中不同類的兩個量，是依正比而變，還是依反比而變。

（二）設 x 是所求的數。

（三）列成比例式，把 x 列在第四項，與 x 同類的數列在第三項，其餘二數依正反比排列；若成正比例，把原來的數列在第一項，現在的數列在第二項；若成反比例，把現在的數列在第一項，原來的數列在第二項.

（四）依比例的解法求出 x 的值。

（五）求得的值應加一單位名稱於其後。

【例一】 150 人每日食米 9 斗，問 236 人每日食米幾斗？

解　本題所求的是 236 人每日食米的斗數，而人數與食米

量成正比例，故設 x 爲所求的斗數，得比例式如次：

$$\overset{\text{原來人數}}{150\text{ 人}}:\overset{\text{現在人數}}{236\text{ 人}}=9\text{ 斗}:x\text{ 斗},$$

$$\therefore\quad x=\frac{236\times9}{150}=14.16\,(\text{斗}).$$

【例二】 抄書2頁，需2小時，問5小時可抄書幾頁？

解　本題所求的是5小時能抄書的頁數，而抄書的頁數與時間成正比例．故設 x 爲所求的頁數，得比例式如次：

$$\overset{\text{原來時間}}{2\text{ 小時}}:\overset{\text{現在時間}}{5\text{ 小時}}=2\text{ 頁}:x\text{ 頁},$$

$$\therefore\quad x=\frac{5\times2}{2}=5\,(\text{頁}).$$

【例三】 問15人3日做完的工，9人幾日可做完？

解　本題所求的是完工所需日數，而做一定量的工程，人數和日數成反比例，故設 x 爲所求日數，得比例式如次：

$$\overset{\text{現在人數}}{9\text{ 人}}:\overset{\text{原來人數}}{15\text{ 人}}=3\text{ 日}:x\text{ 日},$$

$$\therefore\quad x=\frac{15\times3}{9}=5\,(\text{日}).$$

習題六十四

1. 今有一事，24人合做，14日可成，問21人合做，幾日可成？

2. 僱工掘井，每日作工9小時，13日可成，若每日作工10小時，幾日可成？

3. 甲一步跨2尺5寸，乙一步跨2尺7寸，問甲跨2480步的距離，乙須跨幾步？

4. 若$\frac{6}{13}$擔米價值1500元，13斤米價值多少？

5. 某要塞本有守兵1200人，其糧足供80日，23日後因故遣散250人，問餘糧足供幾日？

6. 兔走8步的距離，犬僅走6步可達，問犬走72步的距離，兔須走幾步？

7. 每分鐘行$\frac{5}{13}$里的火車，$3\frac{1}{4}$小時可達次站，問每分鐘行$\frac{7}{15}$里的火車，需時若干？

8. 某物品重15斤，價36元，問重50斤的某物品，價若干？

9. 綢料1丈8尺的價3960元，問11丈1尺的價若干？

10. 以運送貨物75斤至120里的運費來運送100斤的貨物，可達幾里？

11. 有守備兵1500人，存糧足支33個月，若增兵700人，問原存的糧足支幾個月？

12. 由一水管注水於一水缸，1時24分注滿這缸的$\frac{14}{27}$.若以此管注於大$3\frac{1}{9}$倍的缸中，需若干時方能注滿？

13. 男子3人的食量等於女子5人的食量．今有男子10人，女子5人，供26日的食糧，問專供女子10人，可支持幾日？

14. 有兩塊長方形的地面，面積相等．一塊地長25丈，闊18丈；另一塊地長45丈，問闊多少？

15. 一個水筒有大小兩管，小管每分鐘放水 4 升，大管每分鐘放水 7 升，若小管 3 時可以放盡筒中的水，問大管須放幾時？

16. 若上題的二管同開，問筒中的水，幾時可以放盡？

17. 一蓄水缸的進水管，每分鐘注水 $7\frac{1}{2}$ 斗，它的出水管每分鐘放水 5 斗；若開進水管，4分15秒鐘可以注滿；問開出水管，多少時間可以放盡？

18. 若上題的二管同開，問注滿蓄水缸需時幾何？

19. 聲音 3 秒能行 1023 公尺，今遙望某兵艦放砲，見光 8 秒後，始聞砲聲，問距兵艦多少公尺？

20. 工兵 35 人築一砲臺，預定 80 天成功，現在要於 56 天內完成，問須添工兵幾人？

181. 單比例同複比例.

由兩個單比相等而成的比例，叫做“單比例”，以前所講的都叫單比例。

凡含有複比的比例，叫做“複比例”，它的解法可以化成單比例來解。

182. 複比例問題的解法.

【例一】 長 50 丈，闊 40 丈的長方形田，價值 100000 元，問同等的長方形田長 32 丈，闊 75 丈，價值若干元？

解 同等的田，價值隨面積大小而定，所以成正比例. 本題所求的是元數，同類量是 100000 元，原有田的面積是 50×40 方丈；現有田的面積是 32×75 方丈，故依單比例的解法得下式：

$$50\times 40 \text{ 方丈} : 32\times 75 \text{ 方丈} = 100000 \text{ 元} : x \text{ 元}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{32\times 75\times 100000}{50\times 40}=120000\ (\text{元}).$$

如上的列式很不便利，故常用下法：

（一）和解單比例一樣，將所求的數設為 x，列在第四項，同類的數列在第三項。

（二）田的長和價值成正比例．所以把原有的長列在第一項，現有的長列在第二項．

（三）田的闊和價值成正比例，所以把原有的闊列在第一項，現有的闊列在第二項．

（四）以各外項的積，除各內項的積，所得的商就是 x 的值。

$$\left.\begin{array}{l} 50 \text{ 丈} : 32 \text{ 丈} \\ 40 \text{ 丈} : 75 \text{ 丈} \end{array}\right\} = 100000 \text{ 元} : x \text{ 元}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{32\times 75\times 100000}{50\times 40}=120000\ (\text{元}).$$

【例二】 5 人每日作工 10 時，6 日可成的工，若 4 人每日作工 15 時，幾日可成？

解　依上例第二法演算。

（一）本題所求的是日數，設為 x，列在第四項，同類數是 6 日，列在第三項．

（二）人數和成工的日期成反比例，故原有人數 5 列在第二項，現有人數 4 列在第一項．

（三）每日作工時數和成工日期成反比例、故原有時數 10 列

在第二項，現在時數15列在第一項。

$$\left.\begin{array}{r}4\text{人}:5\text{人}\\15\text{時}:10\text{時}\end{array}\right\}=6\text{日}:x\text{日}。$$

$$\therefore\quad x=\frac{5\times10\times6}{4\times15}=5(\text{日}).$$

【例三】 4人每日作工14時，5日可耕地15畝，若7人每日作工13時，問幾日可耕地$19\frac{1}{2}$畝?

解 依以上兩題的解法，可以列出複比例式，但在列式之前，如先將題中各數列成下表，再依類列式，則不易錯誤。

種 類	人 數	每日工作時數	所需日數	所耕畝數
原	4	14	5	15
現	7	13	x	$19\frac{1}{2}$
比例的正反	反	反		正

$$\left.\begin{array}{r}7\text{人}:\ 4\text{人}\\13\text{時}:14\text{時}\\15\text{畝}:19\frac{1}{2}\text{畝}\end{array}\right\}=5\text{日}:x\text{日}。$$

$$\therefore\quad x=\frac{4\times14\times19\frac{1}{2}\times5}{7\times13\times15}=\frac{4\times\overset{2}{\cancel{14}}\times\overset{3}{\cancel{39}}\times\cancel{5}}{\cancel{7}\times\cancel{13}\times\cancel{15}\times\cancel{2}}=4(\text{日}).$$

【例四】 工人288名，每日作工11時，5日掘成長66丈，闊5尺，深2尺的濠。今有工人112名，每日作工9時，要掘長105丈，闊8尺，深3尺的濠，問幾日可成?

解 如上題先列一表以免錯誤。

種類	人數	每日作工時數	濠長	濠闊	濠深	所需日數
原	288	11	66	5	2	5
現	112	9	105	8	3	x
比例的正反	反	反	正	正	正	

$$\left.\begin{array}{r}112\text{人}:288\text{人}\\ 9\text{時}:\ 11\text{時}\\ 66\text{尺}:105\text{尺}\\ 5\text{尺}:\ \ 8\text{尺}\\ 2\text{尺}:\ \ 3\text{尺}\end{array}\right\}=5\text{日}:x\text{日}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\overset{\overset{4}{\cancel{32}}}{\cancel{288}}\times\cancel{11}\times\overset{15}{\cancel{105}}\times\overset{2}{\cancel{8}}\times\cancel{3}\times5}{\underset{\underset{7}{\cancel{56}}}{\cancel{112}}\times\cancel{9}\times\underset{\underset{2}{\cancel{22}}}{\cancel{66}}\times\cancel{5}\times\cancel{2}}=60\,(\text{日}).$$

習題六十五

1. 同是一事，24人合作，每日作10時，15日可完．問60人合作，每日少作2時，幾日可完？

2. 有兩鐵條，其一長$3\frac{1}{3}$尺，闊3寸，厚$2\frac{3}{4}$寸；其一長$3\frac{2}{3}$尺，闊4寸，厚$2\frac{1}{2}$寸．若第一條重93斤，求第二條的重量．

3. 有甲乙兩齒輪，互相銜接，甲有齒16個，乙有齒18個；若甲轉45次需3分45秒，問乙於10分30秒間轉幾次？

4. 原有一濠長150尺，闊6尺，深$4\frac{1}{2}$尺，18人於12日內

掘成。今僱16人掘一新濠，長210尺，闊5尺，深4尺，需幾日可成？

5. 一書有310頁，每頁40行，每行60字，若重印時每頁增10行，每行增12字，問頁數可減若干？

6. 金銀每立方寸的重為88:47的比，今有$\frac{3}{4}$寸的方銀條，不知其長，只知與長$6\frac{3}{4}$寸，方$\frac{1}{2}$寸的金條等重．求銀條的長。

7. 甲乙二人，甲每步跨2.85尺，乙每步跨2.1尺；但甲每走7步，乙多走4步．問乙走66丈時，甲走幾丈？

8. 自A處至B處，尋常6時可到；今將路程減四分之一，速率加半，需時若干方可到達？

9. 有兵1500名，每人每日給米5合，所有糧可支60日；今增兵300名，問每人每日給米多少，方可支55日？

10. 牛馬力的比為8:7，速度的比為5:8．前用牛車8輛，馬車20輛，於5日內運米280袋到$1\frac{1}{2}$里的地方；今用牛馬車各10輛，於10日內要運米350袋，問可運到多少遠的地方？

11. 旅客3人，乘頭等火車經752里的路程，須付車費2115元；問旅客5人，乘三等火車經480里的路程，應付車費若干？但頭等車價是三等車價的3倍。

12. 130斤重的物件運送90里的運費是260元；若有運費560元運送720里，問此物應重若干？

13. 用工人100名，每日操作11時，30日內能於長12里108丈，闊9丈的路面，鋪沙礫厚6寸5分．今用工人121名，每

日操作 12 時，24 日內要能於闊 10 丈 8 尺的路面，舖沙礫厚 5 寸 2 分，此路該長多少？

14. 互相銜接的兩個齒輪，大輪 36 齒，小輪 27 齒；大輪 30 分間轉 25 次，小輪 18 分間轉幾次？

15. 齒數 32 的齒輪，12 秒間轉 2 次，與它銜接的另一齒輪，30 秒間轉 10 次，問第二輪齒數多少？

16. 一長方形鉛板，重二十六斤半．另有一鉛板，其厚相等，長為第一板的三倍半，闊為第一板的五分之二，第二板重幾斤？

183. 連鎖比例

若有甲乙丙丁四個量，已知甲乙二量的比，乙丙二量的比，丙丁二量的比，要求甲丁二量的比，叫做“連鎖比例”．

【例一】 雞 3 隻換鵝 2 隻，鵝 5 隻換鴨 9 隻，問雞 10 隻可以換鴨幾隻？

和這例相類的問題，都屬於連鎖比例．它的解法，設 x 代表所求的量，列在左行，和它等價值的量列在右行，等價的都並列，同種的都斜列，都用直線聯結，最後把左行各數的連乘積，除右行各數的連乘積，即可求得 x 的值．

解 設 x 是可換鴨的隻數列在左行，同它等價的是 10 隻雞列在右行，其餘諸數同種斜列，等價並列，即可得式如次：

鴨 x 隻——雞 10 隻

雞 3 隻——鵝 2 隻

鵝 5 隻——鴨 9 隻

$$x\times3\times5=10\times2\times9。$$

$$\therefore\quad x=\frac{10\times2\times9}{3\times5}=12\,(隻)。$$

現在我們把這方法成立的理由來解釋一下。設x是所求鴨的隻數：

$$x\,鴨:10\,雞=1\,鴨:x_1\,雞\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3\,雞:2\,鵝=x_1\,雞:x_2\,鵝\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$5\,鵝:9\,鴨=x_2\,鵝:1\,鴨\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

從上面的三個比例式中，求得 x_2 卽可求得 x_1，求得 x_1 卽可求得 x。不過按照異類項不能相比的道理，用鴨比雞，用雞比鵝是不能成立的，所以把牠們的內項變換一下，得式如次：

$$x\,鴨:1\,鴨=10\,雞:x_1\,雞\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$3\,雞:x_1\,雞=2\,鵝:x_2\,鵝\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$5\,鵝:x_2\,鵝=9\,鴨:1\,鴨\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

若將上面的(4)(5)(6)三式列成分數的形式：

$$\frac{x\,鴨}{1\,鴨}=\frac{10\,雞}{x_1\,雞}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\frac{3\,雞}{x_1\,雞}=\frac{2\,鵝}{x_2\,鵝}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\frac{5\,鵝}{x_2\,鵝}=\frac{9\,鴨}{1\,鴨}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

將上列(7)(8)(9)三式左邊與左邊相乘，當然和右邊與右邊相乘相等。

即 $$\frac{x}{1}\times\frac{3}{x_1}\times\frac{5}{x_2}=\frac{10}{x_1}\times\frac{2}{x_2}\times\frac{9}{1}.$$

$$x\times3\times5=10\times2\times9.$$

$$\therefore\quad x=\frac{10\times2\times9}{3\times5}.$$

因此可以知道，在(4)(5)(6)三式中的1，x_1，x_2都可消去，留下來的只有

x 鴨	10 雞
3 雞	2 鵝
5 鵝	9 鴨.

用線聯結起來，就是

x 鴨	10 雞
3 雞	2 鵝
5 鵝	9 鴨.

現在我們再舉一個例，以說明這方法的便利.

【例二】 有上中下三種米，上米3升的價等於中米3升2合的價；中米4升的價等於下米4升5合的價. 下米2斗5升值375元，問上米7石2斗值多少？

解 設 x 爲所求之值.

值	x 元	720 升	上米
上米	3 升	3.2 升	中米
中米	4 升	4.5 升	下米
下米	25 升	375 元	值.

$$\therefore\quad x=\frac{\overset{60}{\cancel{720}}\times3.2\times4.5\times\overset{15}{\cancel{375}}}{\cancel{3}\times\cancel{4}\times\cancel{25}}=60\times3.2\times4.5\times15=12960(\text{元}).$$

從以上的例看來，解這類題，不必用 1，x_1，x_2……來過渡，可直接列成有橫線和斜線的式子，演算頗覺便利.

【附註】 在連鎖比例式中，同種量須是同單位的。

習題六十六

1. 酒 3 升的價等於茶 4 斤的價，茶 5 斤的價等於糖 8 斤的價，糖 15 斤的價等於米 1 斗 2 升的價，問酒 1 斗 2 升的價與米多少的價相等？

2. 水化為水蒸氣，其體積是原體積的 17000 倍，水結成冰，其體積比原體積增加$\frac{1}{9}$.今有水蒸氣 3400 石，結成冰後其體積幾何？

3. 有甲乙丙三工人，其力的比，甲與乙是 3:4，乙與丙是 3:5，甲一日的工價 75 元，求丙一日的工價.

4. 有甲乙丙三工人，其力的比甲與乙是 3:7，又乙 5 日所成的工作，等於丙 3 日所成的工作。甲 4 日的工價是 360 元，問丙 6 日的工價幾何？

5. 有甲乙丙丁四工人，其力的比甲與乙是 2:3，乙與丙是 4:5；又丙 7 日作成的工，丁 5 日作成，問丁 72 日作成的工，甲需幾日作成？

6. 甲乙丙丁四人所有的田、其面積的比、甲與乙是 9:4，

乙的12倍相當於丙的15倍，丙的$\frac{1}{2}$相當於丁的$\frac{1}{3}$。今丁有田7畝7分，問甲有田若干？

7. 雞4隻換鴨3隻，鴨7隻換鵝2隻，鵝9隻換鶴5隻。若雞每隻價354元，求鶴每隻的價.

8. 甲乙丙三人賽跑，100步內乙負甲20步，180步內乙勝丙3步，問150步內丙負甲若干步？

9. 甲乙丙三人速度的比，甲與乙是3:4，乙與丙是5:6，今丙從東鎮到西鎮，須行20時，問甲行須若干時？

184. 配分比例.

將一個數依照一定的比分成幾部分，這就叫做“**配分比例**”.

【例一】 分5768爲四份，一二三四各份的比是2:3:4:5，求每份各若干？

解 先把5768分成$2+3+4+5=14$等份，那末於其中取2個等份就是第一份，取3個等份就是第二份，取4個等份就是第三份，取5個等份就是第四份.

所以
$$第一份=5768\times\frac{2}{14}=412\times2=824.$$
$$第二份=5768\times\frac{3}{14}=412\times3=1236.$$
$$第三份=5768\times\frac{4}{14}=412\times4=1648.$$
$$第四份=5768\times\frac{5}{14}=412\times5=2060.$$

這樣所成的四份，它們的和是

$$824+1236+1648+2060=5768。$$

而它們互相的比是

$$824:1236:1648:2060=2:3:4:5\ (\text{各除以 }412).$$

這樣把 5768 依照 2:3:4:5 分成四份，似乎只是一種分數乘法，與比例幾無關係，怎樣叫做配分比例呢？但是用 x_1, x_2, x_3, x_4 代表一二三四各份，就可以用單比例式來計算，方法如下：

$$14:2=5768:x_1, \qquad \therefore\ x_1=\frac{5768\times 2}{14}=824.$$

$$14:3=5768:x_2, \qquad \therefore\ x_2=\frac{5768\times 3}{14}=1236.$$

$$14:4=5768:x_3, \qquad \therefore\ x_3=\frac{5768\times 4}{14}=1648.$$

$$14:5=5768:x_4, \qquad \therefore\ x_4=\frac{5768\times 5}{14}=2060。$$

【例二】 將 287 元分給 A, B, C 三人，各人所得的比是 $\frac{3}{7}:\frac{4}{21}:\frac{5}{14}$，問各得幾何？

解 將分數比化爲整數比，得

$$\frac{3}{7}:\frac{4}{21}:\frac{5}{14}=18:8:15.$$

(各乘以 7, 21, 14 的 $L.C.M.$)

$$18+8+15=41$$

$$287\text{ 元}\times\frac{18}{41}=7\times 18=126\text{ 元 }(A\text{ 所得}).$$

$$287\text{ 元}\times\frac{8}{41}=7\times 8=56\text{ 元 }(B\text{ 所得}).$$

$$287\text{ 元}\times\frac{15}{41}=7\times 15=105\text{ 元 }(C\text{ 所得}).$$

【例三】 將 3900 元分給 A,B,C,D 四人,他們所得的比 A 與 B 是 3:4, B 與 C 是 8:9, C 與 D 是 9:16, 問各得幾何?

解 先求 A,B,C,D 所得的錢的連比如下:

A 與 B, 3:4=6:8

B 與 C, 8:9

C 與 D, 9:16.

所以他們所得的錢的連比是:

6:8:9:16, 6+8+9+16=39.

$$3900\text{元}\times\frac{6}{39}=100\times6=600\text{元}\ (A\text{所得}).$$

$$3900\text{元}\times\frac{8}{39}=100\times8=800\text{元}\ (B\text{所得}).$$

$$3900\text{元}\times\frac{9}{39}=100\times9=900\text{元}\ (C\text{所得}).$$

$$3900\text{元}\times\frac{16}{39}=100\times16=1600\text{元}\ (D\text{所得}).$$

從以上三例看來,解關於配分比例的問題,須先求得各份的連比,然後以連比數的和爲分母而以各比數爲分子合成分數,一一與全數相乘,即可求得各份的數.

185. 配分比例的應用.

凡兩人或許多人合股營業所成的團體叫做公司或店, 公司的盈虧例由股東分攤,分攤的方法,以各股東投資的多少和出資的先後來計算.

【例】 甲乙丙三人合股經商, 甲出資本 900 元, 經 8 個月

乙出資本 750 元，經 10 個月；丙出資本 600 元，經 14 個月；後來共得利益 693 元，問各人應分得多少？

解　三人所得利益的比是

$$\left.\begin{matrix}900:750:600\\8:10:14\end{matrix}\right\}=7200:7500:8400=24:25:28.$$

而 $24+25+28=77.$

所以甲得 $693\text{元}\times\frac{24}{77}=216\text{元}.$

乙得 $693\text{元}\times\frac{25}{77}=225\text{元}.$

丙得 $693\text{元}\times\frac{28}{77}=252\text{元}.$

習題六十七

1. 黃銅是銅 2 分，鋅 1 分的合金，問重 1 斤 5 兩的黃銅鼎，內中含銅鋅各多少？

2. 甲乙丙三生假期內溫課時數的比，甲和乙是 4:5，乙和丙是 3:4；若甲共溫課 96 小時，丙共溫幾小時？

3. 甲乙丙丁四校某年派學生參加軍訓，共計 900 名，甲校同乙校的比是 4:3，乙校同丙校的比是 6:5，丙校所派學生的 7 倍，等於丁校所派學生的 10 倍；問四校所派學生各有多少？

4. 甲出資 2400 元，乙出資 4000 元，共同經商，結果獲利益 1600 元．甲因特別勞苦，在利益中拿出 $\frac{1}{16}$ 做報酬，其餘照本攤派，問各得多少？

5. 甲乙丙三人合股開店，甲投資 800 元，3 個月後添加 250 元；乙投資 950 元，2 個月後提去 200 元；丙投資650 元，6 個月後添加 400 元，一年後，共得利 2516 元，問各人分得多少？

6. 一人把 9056 元分給他的三個兒子，各人所得的多少依照各人年齡的大小．長子現年 25 歲，次子現年 22 歲，幼子現年 21 歲．問各得若干元？

7. A B C 三人合買一地，各人所有地的比是 $1\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}:4$．後來 C 賣所有地的 $\frac{1}{3}$ 與 A，A 賣 96 畝與 B，則 A 與 C 所有地相等．問三人原有地各若干？

8. 一個學校的三個教室內共有學生 212 人，各室人數的比，第一與第二是 3:5，第二與第三是 7:10，試決定各室的人數．

9. 分 7872 爲 3 份，第一份是第二份的 4 倍，第二份是第三份的 3 倍，求各份的數．

10. 甲乙二人共用去 14 元 3 角，其中甲所用和乙所用的比是 $1\frac{1}{3}:\frac{1}{2}$，問各用若干？

11. 今有 9000 元分給甲乙丙三人，甲所得與乙所得的比是 2:3，乙的 4 倍等於丙的 5 倍．求各人所得．

12. 今有 1254 元分給甲乙丙三人，甲所得與乙所得的比是 2:3，乙的 4 倍等於丙的 5 倍，求各人所得．

13. 甲乙丙三人各出資本合營商業，甲出 3000 元，已 2 月；乙出 2000 元，已 4 月；丙出 1250 元，已 8 月．今得利金 960 元，依資本和月份的多少分配，問各人得利若干？

14. 甲乙二人合資經商，所出資本的比是4:5。三個月後，甲取去原數的$\frac{1}{2}$，乙取去原數的$\frac{5}{8}$；再過9個月，共獲利351元，求各人分得的利息。

15. 有甲乙二長方地，其面積合計533方步，其長的比是4:3，其闊的比是5:7，求各地的面積。

16. 甲工6日，乙工7日，丙工8日，丁工9日，其工價相等。今甲工3日，乙工5日，丙工12日，丁工7日，共得工資2464元，問各得多少？

17. 今有1040元，分給兄弟二人，弟以其所得買田3畝5分，兄以其所得買同等的田4畝2分，但不足10元，求各人所得。

186. 混合法.

將幾種價值不同的物件各取若干，混合起來。研究混合物中所有各種關係而成立的算法，叫做"混合法"。

187. 混合法的應用問題.

關於混合的問題，大概不外下列四種：

(一)不同價的物品各取若干混合後，求平均價。

(二)取不同價的物品混合成某定價，求在混合量中各物多寡的比，就是(一)的還原。

(三)取不同價的物品混合成某定價和一總量，求各物在總量中所佔數量。

(四)取幾種不同價的物品合成某定價，已知其中一種物品

的實量,求其餘各物的實量。

188. 關於混合的第一種問題算法.

【例】 有酒三種,上等酒 8 升,每升價 60 元,中等酒 1 斗 2 升,每升價 50 元,下等酒 6 升,每升價 40 元,今將三種酒混合,求混合後每升的價。

解 60 元 × 8 = 480 元 (上酒的共價),

50 元 × 12 = 600 元 (中酒的共價),

40 元 × 6 = 240 元 (下酒的共價).

480元 + 600元 + 240元 = 1320 元(三種的共價)。

$\therefore \dfrac{1320\text{元}}{8+12+6}=\dfrac{1320\text{元}}{26}=50\dfrac{10}{13}$元 (混合酒每升的價)。

習題六十八

1. 每斤 140 元的茶 8 斤,與每斤 250 元的茶 3 斤混合,可得每斤幾元的茶?

2. 川茶 5 斤,每斤價 160 元,浙茶 2 斤,每斤價 220 元,粵茶 3 斤,每斤價 140 元,混合後,問每斤價若干?

3. 每升 320 元的酒 3 斗 5 升,每升 360 元的酒 2 斗 5 升,每升 370 元的酒 2 斗,與水 5 升混合,求混合酒每升的價.

4. 有酒甲乙丙三種,每斤的價是甲 330 元,乙 360 元,丙 480 元,它們的混合比是 2:5:8,求每斤的平均價.

189. 關於混合的第二種問題算法.

【例一】 上茶每斤價 120 元，下茶每斤價 80 元，今欲混合成每斤價 95 元的茶，問應依照怎樣的比混合？

解

原價		比平均價的損益	混合比	
上	120 元	* − 25 元	15	3
下	80 元	* + 15 元	25	5

【附註】 * +號表示"益"，−號表示"損"．

上茶的原價比平均價多 25 元，故每斤損失 25 元．下茶的原價比平均價少 15 元，故每斤得利 15 元．兩種混合，須下茶所得的利益恰等於上茶所受的損失，然後損益相抵，仍照原價出售一樣．25 元×15＝15 元×25；故上茶取 15 斤，下茶取 25 斤，便無損益；因此兩種混合的比是 15:25，即 3:5．

【例二】 有酒四種，每斤的價是 50 元，70 元，120 元和 140 元，今欲混合成每斤價 90 元的酒，要怎樣混合？

解 與例一同理，將利益補損失，有七種方法，演算如下：

(1) 平均價 90 元

原價	損益	混合比		
50 元	+ 40 元		5	5
70 元	+ 20 元	3		3
120 元	− 30 元	2		2
140 元	− 50 元		4	

	原價	損益	混合比					
(2) 平均價 90 元	50 元	+ 40 元	3		3			
	70 元	+ 20 元		5	5			
	120 元	− 30 元	4		4			
	140 元	− 50 元		2	2			
(3) 平均價 90 元	50 元	+ 40 元		3	5	8		
	70 元	+ 20 元	3			3		
	120 元	− 30 元	2	4		6		
	140 元	− 50 元			4	4		
(4) 平均價 90 元	50 元	+ 40 元	3	5		8		
	70 元	+ 20 元			5	5		
	120 元	− 30 元	4			4		
	140 元	− 50 元		4	2	6		
(5) 平均價 90 元	50 元	+ 40 元		3	5		8	4
	70 元	+ 20 元	3			5	8	4
	120 元	− 30 元	2	4			6	3
	140 元	− 50 元			4	2	6	3
(6) 平均價 90 元	50 元	+ 40 元		3		3		
	70 元	+ 20 元	3		5	8		
	120 元	− 30 元	2	4		6		
	140 元	− 50 元			2	2		
(7) 平均價 90 元	50 元	+ 40 元			5	5		
	70 元	+ 20 元	3	5		8		
	120 元	− 30 元	2			2		
	140 元	− 50 元		2	4	6		

【附註】 同是一個求混合比的問題，而答案可有幾個，看上例便可明白；但是答案不僅可有幾個，實則多至無窮，即以上例中的(1)而論，其混合比爲：

$$5:3:2:4\begin{cases} 5 \quad :(3\times2):(2\times2):\quad 4 \quad = 5:6:4:4; \\ (5\times2):\quad 3 \quad : \quad 2 \quad :(4\times2)=10:3:2:8; \\ (5\times2):(3\times3):(2\times3):(4\times2)=10:9:6:8; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

習題六十九

1. 每斤 84 元的糖果與每斤 100 元的糖果相混合，欲得每斤 90 元的糖果，應如何混合？

2. 每斤 204 元的茶和每斤 236 元的茶混合，得平均價每斤 216 元，問應如何混合？

3. 甲乙丙丁四種酒，每斤的價，甲 310 元，乙 340 元，丙 380 元，丁 400 元，問如何混合，方可使成每斤 350 元的酒？

4. 今將每升 600 元，500 元，350 元的酒三種，與水混合，使成每升 450 元的酒，問應如何混合？

190. 關於混合的第三種問題算法.

【例】 上中下三種酒，每斤的價是 350 元，300 元，200 元，今欲混合成每斤價 260 元的酒 100 斤，問各需若干斤？

解

原價	損益	混	合	比
350 元	− 90 元	$\cancel{6}\ 2$		2
300 元	− 40 元		$\cancel{6}\ 3$	3
200 元	+ 60 元	$\cancel{9}\ 3$	$\cancel{4}\ 2$	5

$$2+3+5=10.$$

$$100\text{斤}\times\frac{2}{10}=10\times2\text{斤}=20\text{斤}\ (\text{上酒}),$$

$$100\text{斤}\times\frac{3}{10}=10\times3\text{斤}=30\text{斤}\ (\text{中酒}),$$

$$100\text{斤}\times\frac{5}{10}=10\times5\text{斤}=50\text{斤}\ (\text{下酒}).$$

混合比本無定數，故其和亦不一定．若其和能除盡總量，則各物均能得整數量；若其和不能除盡總量，則各物卽不能得整數量．如在本題中，若 6 與 9 的比不以 3 約，6 與 4 的比不以 2 約，那末這三種酒的混合比是 6:6:13，相加得 25，仍能除盡 100，所以各種酒的斤數都是整數，但上酒不是 20 斤而是 24 斤，中酒不是 30 斤而是 24 斤，下酒不是 50 斤而是 52 斤了．若 6 與 9 不約，而 6 與 4 約爲 3 與 2，那末這三種酒的混合比是 6:3:11，相加得 20，仍能除盡 100，所以各種酒的斤數仍是整數．若 6 與 9 約爲 2 與 3，而 6 與 4 不約，那末這三種酒的混合比是 2:6:7，相加得 15，不能除盡 100，所以各種酒的斤數不能都得整數．於是可知要各物都得整數量，須對於混合比，斟酌情形，以同數乘或以同數除，使其和能除盡總量．

習題七十

1. 某銀行有 10 元紙幣共 155 張，要換 1 元、5 元、25 元、50 元四種紙幣，張數仍與前同，求各種紙幣的張數．

2. 某銀行支付 5 元及 10 元鈔票共 150 張，合計 1000 元，

問兩種鈔票各若干張?

3. 每斤 70 元,80 元和 130 元的糖混合,而得每斤 100 元的糖 35 斤,求各種糖的斤數.

4. 有雞犬共 50 隻,足數合計 160,問雞犬各幾隻?

191. 關於混合的第四種問題算法.

【例】 有成色不同的銀四種,每兩的價是 1450 元,1470元,1480 元,1510 元,要混合成每兩 1500 元的銀,已知第一種用 50 兩,問其餘三種應各用若干兩?

解

平均價 1500 元

原價	損益	混合比			
1450 元	+ 50 元			1	1
1470 元	+ 30 元		1		1
1480 元	+ 20 元	1			1
1510 元	− 10 元	2	3	5	10

第一種:第二種:第三種:第四種=1:1:1:10

=50:50:50:500.

答:第二第三兩種應各用 50 兩,第四種應用 500 兩.

習題七十一

1. 有布五種各若干疋,每疋的價是2200 元,1940 元,1600 元,1000 元和 820 元,平均價是 1500 元,已知每疋價 2200 元的布是 30 疋,求其餘各種布的疋數.

2. 將三種酒混合，其中兩種的總價是 3750 元，合佔 1 斗 5 升，第三種的酒每升價 400 元，已知這混合酒每升的價是 320 元，求第三種酒的量.

3. 有甲乙丙三種茶葉，甲種每斤 480 元，乙種每斤 420 元，丙種每斤 320 元. 今取甲種 12 斤，丙種 14 斤，與乙種幾斤混合，可得平均每斤價 400 元的茶葉？

4. 將每升價 80 元，65 元，60 元的酒混合，造成每升價 72 元的酒，若欲使第一第二兩種酒量的比爲 3:2，那末這三種酒應怎樣混合？

第十一章 百分法

一 百分率

192. 百分法與百分率.

兩個數或量的比值，用100作分母的分數來表示，叫做“百分法”。

如 $$1:4=\frac{1}{4}=\frac{1\times25}{4\times25}=\frac{25}{100}$$

$$8\text{寸}:10\text{寸}=\frac{8}{10}=\frac{8\times10}{10\times10}=\frac{80}{100}.$$

$\frac{25}{100}$表示1:4的比值，$\frac{80}{100}$表示8寸:10寸的比值，這些表示兩個數或量的比值而以100作分母的分數，叫做“百分率”。

百分率的單位是$\frac{1}{100}$，常用1%來表示.“%”是表示百分率的單位的符號。$\frac{25}{100}$是$\frac{1}{100}$的25倍，因此可以寫成25%.同樣的，$\frac{80}{100}$可以寫成80%。

193 小數與百分率的互化.

因為$1\%=\frac{1}{100}$，所以小數化成百分率只要將小數加大一百倍，即將其小數點向右移二位，再在數字後面標明單位“%”。

如 $0.28=28\%$。

反過來把百分率化成小數，這小數是百分率數字部分的百分之一，因此只要將數字部分的小數點向左移兩位，而取消單位符號"%"。

如 $75\%=0.75$。

194. 分數與百分率的互化.

眞分數的分子被分母除，得到小數，因此可以化成百分率。

如 $\frac{7}{25}=0.28=28\%$。

百分率原爲分母是 100 的分數，因此百分率卽爲分數.

如 $75\%=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$.

習題七十二

1. 用百分率表示下列各比之比值：

4斤：8斤， 12寸：75寸， 30：50， 9：25。

2. 化 0.8472，0.459，0.02，0.84 爲百分率.

3. 化$\frac{17}{25}$，$\frac{9}{32}$，$\frac{27}{160}$，$\frac{8}{125}$爲百分率.

二 母數與子數

195. 母數，子數與百分率的關係.

一個比的比值是前項被後項除所得的商.在百分法中，比值

用百分率來表示，比的前項叫做“子數”，比的後項叫做“母數”。

前項÷後項＝比值，　∴　子數÷母數＝百分率。

後項×比值＝前項，　∴　母數×百分率＝子數。

前項÷比值＝後項，　∴　子數÷百分率＝母數。

【例一】　某校共有學生 320 人，其中 120 人爲女生，問女生佔全體的百分之幾？

解　某校全體學生 320 人是母數，女生 120 人是子數，所求的是百分率。

$$120\div320=0.375=37.5\%.$$

答：女生佔全體人數的 37.5%。

【例二】　某軍隊共有 4500 人，其中騎兵佔全體的 38%，問騎兵共幾人？

解　某軍隊全體人數 4500 是母數，所求的是子數。

$$4500\times38\%=45\cancel{00}\times\frac{38}{1\cancel{00}}=1710.$$

答：某軍隊有騎兵 1710 人。

【例三】　某軍隊共有自動步槍 126 枝，佔全部所有槍枝之 15%，問該軍隊共有槍幾枝？

解　126 枝自動步槍是所有槍枝中的一部分，所以是子數，所求的是母數。

$$126\div15\%=126\div\frac{15}{100}=\overset{42}{\cancel{126}}\times\frac{\overset{20}{\cancel{100}}}{\underset{3}{\cancel{15}}}=840.$$

答：該軍隊有槍枝 840 枝。

習題七十三

1. 某人以8000元營商，損蝕了2000元，問他的損失的百分率。

2. 碾糙米爲白米，要折減12%；問糙米5斗，碾爲白米，折減若干？

3. 某人以他的月薪的15%作貯蓄，只知他每月貯金90元，問他的月薪是多少？

4. 一人承受遺產四萬元，五年後增至五萬六千元，求他財產加增的百分率。

5. 某人因負債15120元而破產，但他所有財產尙值9828元；問債權人尙可攤得貸予債額的百分之幾？

6. 某校共有學生400人，其中有女生32人，問男生，女生各佔總數百分之幾？又女生佔男生的百分之幾？

7. 某處金沙中含純金0.14%；問金沙50擔，可得純金若干？

8. 某銀礦之礦石含有7%之純銀。問礦石360斤，可提純銀若干？

9. 某人財產的20%爲房產，40%爲田產，20%爲有價證券，餘爲現金，只知他有現金85120元，問他的財產總額。

10. 某人買煤若干噸，每噸獲利1980元，適佔原價的12%，問原價每噸若干？

196. 母子和與母子差.

在實用上,我們有時也用百分率來求母數與子數之和或差。母數與子數的和叫做"母子和",母數與子數之差叫做"母子差"。

因爲 子數＝母數×百分率。

所以 母子和＝母數＋母數×百分率

＝母數×(1＋百分率)。

母子差＝母數－母數×百分率

＝母數×(1－百分率)。

而 母數＝母子和÷(1＋百分率),

母數＝母子差÷(1－百分率).

【例一】 某人買進自行車一輛,價 24000 元, 後加 12% 售出;問售價多少?

解 買進價 24000 元爲母數,所加之價爲子數,售出之價爲買進價加上所加的價,所以所求的是母子和.

$$24000\times(1+12\%)=24000\times\left(1+\frac{12}{100}\right)=24000\times\frac{112}{100}=26880.$$

答: 售價爲 26880 元.

【例二】 某軍隊共 3200 人,作戰後死亡 22%,問生還幾人?

解 某軍隊原有人數是母數,死亡的人數是子數,原有人數減去死亡人數爲生還人數,所以所求的是母子差.

$$3200\times(1-22\%)=3200\times\left(1-\frac{22}{100}\right)=3200\times\frac{78}{100}=2496.$$

答: 生還者爲 2496 人.

【例三】 米價本月每擔 5250 元，比上月漲 5%，問上月米每擔價多少？

解 本月米價每擔 5250 元爲上月米價（母數）和所漲之價（子數）的和數，因此是母子和，所求的上月米價是母數。

$$5250\div(1+5\%)=5250\div\frac{105}{100}=\overset{50}{\cancel{5250}}\times\frac{1000}{\cancel{105}}=5000.$$

答：上月米價爲 5000 元。

【例四】 某次空襲敵方軍火工廠，命中目標的炸彈有 440 噸，未中目標的炸彈爲所投炸彈的 12%，問共投彈多少噸？

解 命中之炸彈 440 噸是從所投之炸彈（母數）中減去未中之炸彈（子數），所以是母子差，而所求的是母數。

$$440\div(1-12\%)=440\div\frac{88}{100}=\overset{5}{\cancel{440}}\times\frac{100}{\cancel{88}}=500.$$

答：共投炸彈 500 噸。

習題七十四

1. 煤價今年每擔 1848 元，比去年漲上 12%，問去年每擔價若干？

2. 貨物 357 元，漲價 11%，應賣若干元？

3. 某公司有資本 1500000 元，一年中用去資本 34%，又提出資本之 7% 作爲紅利分給股東；問尙餘資本若干元？

4. 某人賣書獲利 $33\frac{1}{3}\%$，若每册原價 18 元，問售價若干？

5. 某校入學試驗錄取150人,落第者佔投考人數的25%,問投考人數若干?

6. 一人買書,賣者讓價20%,付出2元4角,求原價.

7. 一人每月收入4650元,第一月用去80%,第二月用去75%,第三月用去62.5%,問三月積存若干?

8. 糙米搗成白米耗去糠粃3斗6升,計佔糙米的18%,問原有糙米多少?搗成白米多少?

三 百分法的應用

197. 折扣.

買賣貨物時,賣方按照定價減少若干收受貨價,叫做"折扣".折扣以後的價格,叫做實價或售價.

外國的習慣以百分率表示減收價和定價的比值,叫做"折扣率".如100元之貨物,減去25元,以75元出售,即扣去25%,讀作二五扣.因此:定價是母數,減收價是子數,售價爲母子差.

我國的習慣,以百分率表示實價與定價的比值,叫做"折扣率".如100元之貨物,減去25元,以75元出售,即實價爲定價的75%,叫做七五折,因此定價是母數,實價是子數,減收價是母子差.若折扣率是90%,85%,70%,……,商業上直接稱做九折,八五折,七折,而不用讀出"0".

【例】 以二元二角九分半買得定價二元七角之書,是打的幾折?

解 $2.295元 \div 2.7元 = 0.85 = 85\%$。

答：打的是八五折。

【附註】 照定價打了一次折扣，再照折扣後的價格再打一次折扣，叫做"連折扣"。如打八折後再打九折，即爲連折扣，商業上稱作"八折九扣"，

$$80\% \times 90\% = \frac{80}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{72}{100} = 72\%.$$

因此八折九扣實際上和七二折是一樣的．

198. 加成．

買賣貨物時賣方照定價加收多少，叫做"加成"。用百分率表示加收的價與定價的比値，叫做"加成率"．加成以後的價格，叫做售價或實價．

如定價100元之商品，實售120元，比定價多收20元，叫做加二成。

商品的定價是母數，所加之價爲子數，現價爲母子和．

【例】 某書定價75元，加運費二成，問售價多少？

解 $75 \times (1+20\%) = 75 \times \frac{120}{100} = 90$.

答：該書應售90元。

習題七十五

1. 現價27.3元，原價35元，求折扣率．
2. 原價打八折出售爲416元，求原價．
3. 雙八五折（即打八五折後再打八五折）與七折，哪一種便宜？

4. 某種商品，兩公司定價均為二百元，甲公司願打八折後再打九折；乙公司只肯七折賣出，哪一方面便宜？便宜多少？

5. 原價 140 元，售價為 189 元，問加多少成？

6. 某物加六成半後售價為 396 元，問原價多少？

7. 某物定價 154 元，加二成半後再打九折出售，問售價多少？

8. 照原價加二成再打八折，和先打八折後再加二成是不是一樣？

199. 賺賠。

營業所得盈餘叫做"賺"，所蒙損失叫做"賠"。用百分率表示賺賠額對於資本或物之原價的比值，叫做"賺率"或"賠率"。

資本或物之原價為母數，賺賠額為子數。賣物而賺，則賣價為母子和；賣物而賠，則賣價為母子差。

【例一】 牛商買牛 24 頭，每頭 40000 元，過了幾日死去 6 頭，餘下的每頭賣得 52500 元，問賠額及賠率各如何？

解　40000 元 $\times 24 = 960000$ 元（原價），

52500 元 $\times (24-6) = 945000$ 元（賣價），

960000 元 $-$ 945000 元 $= 15000$ 元（當時的賠額），

15000 元 $\div 96000 = 0.0156 = 1.56\%$（賠率）。

答：賠額 15000 元，賠率 1.56%。

【例二】 某人用去若干元買進馬一匹，賣出時的賺率 15%，其賣價為 805000 元，原價多少？

解　　$805000 \div (1+15\%) = 700000$。

答：原價爲700000元.

200. 佣金.

受他人之委託，而代人處理貨物之賣買者，叫做"佣客"或"經紀人"。賣主或買主付給佣客的報酬，叫做"佣金"。佣金大都依物價的總數而抽取百分之幾。

物價爲母數，佣金爲子數，用百分率表示佣金對於物價的比值叫做"佣率"。買物者出佣金時，其出款總數爲母子和；賣物者出佣金時，其入款總數爲母子差。

【例一】　賣屋一所，價3560000元，言明佣金2.5%，須付佣金多少？

解　　$3560000 \times 2.5\% = 89000$。

答：佣金爲89000元.

【例二】　某商店託經紀人進貨，言明佣金2釐5毫（2.5%）計算，共付貨價及佣金9225元；問貨價多少？

解　　$9225 \div (1+0.025) = 9000$。

答：貨價爲9000元.

習題七十六

1.　資本3210元，賠率12%，求賠額及現有資本.

2.　賠額45.75元，賠率20%，求原價.

3.　一商家買入棉花一宗，其後賣去九分之五，已收回成本；

所餘照買價計算,商家賺率多少?又照賣價計算呢?

4. 機器二架,原價各42500元,若第一架售50000元,第二架售40000元,分別計算其賺率及賠率。

5. 某人託經紀人出賣物品,除去佣金12.5%後,淨得868元,物品的賣價及佣金各多少?

6. 某店代銷貨值1570元,原主淨得1546.45元;求佣率。

7. 一商人託行家買進貨物值3000元,言明付佣金2.5%;這商人應共付多少?

8. 一商人託行家買進貨物,言明付佣金2%,共付4800元,問貨物的原價?

201. 保險.

保險是一種商業,經營這種商業的公司叫做"保險公司"。

我們的生命財產,都可向保險公司投保;所謂投保便是依約定的時間,付給公司以一定的金額,在約定的期限內若發生意外,則保險公司擔負照約賠償之義務。

保險約可分爲二大類:一是"人壽保險",一是"財產保險"。二者均由保險人與保險公司訂立合同,這合同叫做"保險單";在保險期中,如保險人遇着災害,則保險公司即照合同賠償其損失,其賠償數叫做"保險單額面值",略稱"保險額"。保險人按期所納的費,叫做"保險費";用百分率表示保險費對於保險額的比值,叫做"保險率"。

保險的期間,保險額,保險率,保險費等等,都預先註明於

保險單上，國家對於保險公司之設立營業，立有制裁和保護的法律。

保險額爲母數，保險費爲子數，保險率爲百分率；保險公司因保險人在限期內遭險而賠償，則公司損失之額爲母子差．

【例一】 貨物一宗，投保火險50000元，保險率0.5%．依六折付保險費，問應付多少？

解 $50000\times0.5\%\times60\%=150$．

答：應付保險費150元．

【例二】 某保險公司承保木船12艘在行駛途中之水險，每艘之保險額爲15萬元，保險率2%．途中有一艘失事，打撈結果，船上財產損失百分之四十，問公司照單賠償後，損失若干？

解 150000元×2%×12=36000元(公司所收之保險費)，

150000元×40%=60000元(公司所付之賠償費)，

60000元－36000元=24000元(公司之損失)．

202. 匯兌．

把甲地的款項匯劃到乙地，叫做"匯兌"．錢莊，銀號，銀行，郵局都經營匯兌的業務．匯兌方法可分下面三種．

(一)票匯 甲地的款項交給所在地經營匯兌的機關，購取匯票，由匯款人把匯票寄給乙地的受款人，受款人憑票向乙地同一機關支取這款項．

(二)信匯 甲地的匯款人把所匯的款項交給所在地經營匯兌的機關，由匯兌的機關用信通知乙地的同一機關，再由這機關

通知受款人，受款人得到通知後，憑通知書向乙地同一機關支取這款項。

(三)電匯　電匯與信匯相同．只是甲地經營匯兌的機關收了匯款後，用電報通知乙地同一機關立即支付款項，因此比較迅速．

錢莊與郵局只經營票匯，銀號與銀行三種匯兌的方法都經營．匯款人匯款時，除了繳所匯的款項外，要加若干手續費．這種手續費叫做"匯費"．電匯時除了手續費外還要付電報費．

匯款數額為母數，匯費為子數，用百分率表示匯費對於匯款數額的比值，叫做"匯率"．匯款者所應交的款額為母子和。

【例一】　某甲匯款260元給某乙，向銀行購取匯票，匯率為0.5%，甲應共付多少？

解　$260\times(1+0.5\%)=261.3$

答：甲應付261元3角。

【例二】　某人匯款時，共付1502.25元，其票面匯額為1500元，求匯率。

解　1502.25元－1500元＝2.25元（匯費），

$$\frac{2.25\text{元}}{1500\text{元}}=0.15\%\ (\text{匯率}).$$

答：匯率是0.15%。

203. 國稅.

國家對於人民的財產，依照價值和數量所徵收的款項，而由

中央政府直接徵收者，叫做"國稅"。國稅大體分"關稅"，"鹽稅"，"統稅"，"印花稅"，"所得稅"等

海關對出口貨物徵收的稅叫做"出口稅"，對進口貨物徵收的稅叫做"進口稅" 貨物的價值為母數，所納的稅為子數，用百分率表示所納的稅與貨物的價值的比值，叫做"稅率"。

習題七十六

1. 房屋一所，值600000元，以其三分之二保火險，每年出保險費6000元，求保險率。

2. 某保險公司保房屋一所，保險額是120000元，保險率每年1.5%，保了12年，忽遭火災；保險公司損失多少？

3. 某保險公司承保某所房屋，保險率每年0.7%，五年後遭火災，公司損失5597元；保險額多少？

4. 某人向銀行購一匯票，票面匯款為2864元，匯率0.1%，銀行應向此人收費若干？

5. 某人購銀行匯票時，匯率為0.2%，共付法幣566.13元，票面匯額多少？

6. 某人匯款共付3404.08元，票面匯額為3400元，求匯率。

7. 茶葉400箱，計納稅320400元，已知稅率2.5%，茶葉每箱值多少？

8. 某國運來洋布若干箱，值3500000元。假如某國出口稅率是4%，我國進口稅率是5%，共須納稅多少？

第十二章　利息

一　基礎事項

204. 利息,本金,利率及期數.

某甲向某乙借一注款項，言明每隔一定的期間付給一筆錢作報酬,這報酬叫做"利息",所借的款項叫做"本金",每個一定的期間是一期,所借的時期是這一定期間的多少倍,叫做"期數",每一期的利息對於本金的比例用百分率來表示叫做"利率".

把款項存在銀行裏，銀行裏每隔一定的期間也付給存款人一定的利息,這所存的款項叫做"本金".

205 年利率,月利率與日利率.

時期用一年作單位的利率叫做"年利率",用一月作單位的利率叫做"月利率",用一日作單位的利率叫做"日利率".

利率通常用分,釐,毫來表示:

年利一分是10%，　一釐是1%，　一毫是0.1%.

月利一分是1%，　一釐是0.1%，　一毫是0.01%.

日利一分是0.01%，　一釐是0.001%，　一毫是0.0001%.

利率又有以"角"做單位的,一角就是一分的十倍.

206. 單利與複利.

利息有兩種算法：

(一)前一期的利息不併入本金而計算下一期利息的，叫做"單利法".

(二)將前一期的利息併入本金，再計算下一期利息的，叫做"複利法".

二 單利法

207. 單利利息的計算.

本金是"母數"，每一期的利息是"子數"，利率是"百分率"。

本金×利率＝每一期的利息.

每一期的利息×期數＝若干期利息的總和.

所以　本金×利率×期數＝若干期利息的總和.

【例一】 年利率5釐，本金800元，一年七個月的利息多少？

解　$800\text{元}\times 5\%\times 1\frac{7}{12}=63.33\text{元}$強.

答：利息爲63元3角3分.

【例二】 日利率一分六釐，本金四百五十元，十日的利息多少？

解　$450\text{元}\times 0.016\%\times 10=0.72\text{元}$.

答：利息爲7角2分.

208. 由利息計算本金.

若干期利息的總和÷期數＝每一期的利息.

每一期的利息(子數)÷利率(百分率)＝本金(母數).

所以　　本金＝若干期的利息÷期數÷利率.

【例】 以年利5釐,借得本金若干元,一年三個月共付利息31元5角.所借的本金是多少?

解　　$31.5元 \div 5\% \div 1\frac{1}{4} = 504元$.

答: 本金爲504元.

習題七十七

1. 試說明本金與利息成正比例,與利率成反比例,與期數也成反比例.

2. 年利9釐,4個月生利息230元4角,求本金.

3. 月利1釐5,5個月生利息15元,本金是多少?

4. 年利8釐,2年間共付利息72元,本金是多少?

5. 月利2釐,9個月得利息4元5角,本金是多少?

6. 日利5分,15日生利息1元8角,求本金.

7. 某人借入若干元,共借10日,以日利率1分8釐計算,添加利息6角3分歸還,他原來借得多少元?

8. 某人以若干元存入銀行,日利率1分2釐計,二年半後得利息1440元,問原存入多少?

209. 由利息,期數,本金計算利率.

每一期的利息(子數)÷本金(母數)＝利率(百分率).

所以　　利率＝若干期利息之總和÷期數÷本金.

【例】 借法幣150元，二年間付利息18元，年利率多少?

解　　$18\div2\div150=0.06=6\%$.

答：年利6釐.

210. 由本金，利率，利息計算期數.

若干期利息的總和÷每期利息＝期數.

所以　　期數＝若干期利息的總和÷(本金×利率).

【例】 以年利6釐，貸出1400元，收得利息105元時經過了幾年?

解　　$105\div(1400\times0.06)=1\frac{1}{4}$.

答：一年三個月.

習題七十八

1. 本金450元，貸出2年，得利息135元，年利率是多少?

2. 借得250元，二年半共付利息31元2角5分，求年利率.

3. 本金750元，6個月付利息45元，求月利率.

4. 借本金550元，三星期須付利息2元3角1分，日利率是多少?

5. 貸出705元，20日間得利息3元1角5分，求日利率.

6. 一月五日那天，用日利率2分8釐貸出750元，後來連利息1元3角4分一同收回，收回這日是在何月何日?

7. 以日利率2分8釐借得640元，到一月二十四日連利

息2元4角一同歸還，借來的時候是何月何日？

8. 試說明期數與利息成正比例，與本金和利率成反比例。

211. 年利率，月利率，日利率的相互關係.

一年是12月，所以　　年利率÷12＝月利率.

　　　　　　　　　　月利率×12＝年利率.

一年是365日，所以　　年利率÷365＝日利率.

　　　　　　　　　　日利率×365＝年利率.

一月是30日，所以　　月利率÷30＝日利率.

　　　　　　　　　　日利率×30＝月利率.

【例一】 化日利率2分為年利率.

解　　$0.02\% \times 365 = 7.3\%$.

答：年利率7釐3毫.

【例二】 化月利率1分2釐為日利率.

解　　$1.2\% \div 30 = 0.04\%$.

答：日利率4分.

212. 利息的速算.

計算利息有種種簡便的方法，最普通的叫做"六釐法".這種算法是以年利率六釐為本位而計算的.年利率七釐，八釐的，就在年利率六釐的利息上加上它的六分之一，六分之二；反之，年利率五釐，四釐，則減去它的六分之一，六分之二.

所以用六釐為本位的原因；第一是普通的利率，實際多是六釐，第二是這種利息的計算比較便利.若每年以十二個月計算，

每月以三十日計算，則年利率爲 6% 時，月利率爲 0.5%，而日利率爲 $\frac{6}{100}\times\frac{1}{360}=\frac{1}{6000}$，計算月利，日利都很便當。

$$月利息=本金\times 0.005\times 月數$$

$$=\frac{本金\times 月數}{2}\times\frac{1}{100}.$$

卽求月息是以月數乘本金，折半，將小數點移左兩位（卽縮小百倍）。

$$日利息=本金\times\frac{1}{6000}\times 日數.$$

$$=\frac{本金\times 日數}{6}\times\frac{1}{1000}.$$

卽求日息是以日數乘本金，而以 6 除其所得之積，將小數點移左三位（卽縮小千倍）。

【例一】 本金 2540 元，年利 7.5%，求一年三個月的利息。

解

$$\begin{array}{rrl}
 & 2540 & \\
 & 15 & \cdots\cdots\cdots\cdots 期間的月數 \\
\hline
 & 12700 & \\
 & 254 & \\
\hline
2) & 38100 & \\
\hline
 & 190.50 & \cdots\cdots\cdots\cdots 年利 6\% 的利息 \\
+) & 47.625 & \cdots\cdots\cdots\cdots 190.50\div 4 \\
\hline
 & 238.125 &
\end{array}$$

答：利息爲 238.125 元。

〔附註〕 年利 0.06 的利息，加上它的 $\frac{1}{4}$，便得年利 0.075 的利息.

【例二】 本金 1345 元，年利 5.4%，求 74 日的利息，但一年

作 360 日計算。

解

$$
\begin{array}{rl}
1345 & \\
\underline{\times\ \ 74} & \\
5380 & \\
\underline{9415\ } & \\
6\overline{)99530} & \\
16.5883 & \cdots\cdots\text{年利 0.06 的利息。} \\
\underline{-)\ 1.65883} & \cdots\cdots 16.5883\div 10 \\
14.93 &
\end{array}
$$

答：利息爲 14.93 元。

〔附註〕 年利 0.06 的利息內減去它的$\frac{1}{10}$，便得年利 0.054 的利息。

一年作 360 日計算的利息內減去它的$\frac{1}{73}$，便得一年作 365 日計算的利息。

習題七十九

1. 化日利率 1 分 8 釐爲年利率.
2. 日利率 3 分相當於月利率多少?
3. 本金 2365 元，年利 0.075，求二年五個月的利息.
4. 本金 3058 元，年利 0.09，求 84 日的利息.
5. 本金 46.32 元，年利 0.04，求 90 日的利息.
6. 本金 1424 元，年利 0.048，求 67 日的利息.

213. 活期存款利息的算法.

活期存款是一種隨時可以存入或支取的存款辦法. 利率常用年利率或月利率表示，實際上卻以日利率計算利息. 這果然可

以將年利率或月利率換算成日利率,但是這樣計算很麻煩.因此結算利息時將日數作爲期數,若以月利率計,將計算所得之結果再除以30,若以年利率計,將計算所得之結果再除以365.至於支出之款多少,與存入之款同樣計算利息,而再在存入之款中扣除.而銀行的習慣,存入以次一日起計息,支出以當日起計息.

【例】 活期存款之利息以月利率7釐計.1月26日存入5000元,3月1日取出3000元,4月15日存入2000元,到6月20日結算,利息該是多少?

解 存入5000元自1月25日存入至6月20日共145日,應得利息爲$(5000\times0.7\%\times145\div30)$元.

存入2000元自4月15日存入至6月20日共66日,應得利息爲$(2000\times0.7\%\times66\div30)$元.

支取3000元自3月1日支出至6月20日共112日,應扣除利息爲$(3000\times0.7\%\times112\div30)$元.

因此總共之利息爲

$$
\begin{aligned}
&(5000\times0.7\%\times145\div30)+(2000\times0.7\%\times66\div30)\\
&\qquad-(3000\times0.7\%\times112\div30)\\
&=(5000\times145+2000\times66-3000\times112)\times0.7\%\div30\\
&=521000\times0.7\%\div30\\
&=121.56.
\end{aligned}
$$

答: 應得利息121.56元.

習題八十

某銀行之活期存款以年利率七釐半計，某人的存支款項爲

民國34年7月1日存	6000元，
7月20日存	750元，
9月6日支	1200元，
12月7日存	600元，
12月20日支	650元，
35年1月9日存	2000元，
2月28日支	2400元．

該銀行每年結算兩次，每次的利息歸入本金，一次爲6月20日，一次爲12月20日，問到35年6月20日共得利息若干？

214. 本利和的計算法．

本金＋利息＝本利和。

本利和＝本金＋利息

＝本金＋本金×利率×期數

＝本金×(1＋利率×期數)。

本金＝本利和÷(1＋利率×期數)。

【例一】 求本金400元，年利八釐，二年間的本利和．

解　　400元×(1＋8%×2)＝464元．

答：本利和464元．

【例二】 以年利九釐，貸出法幣若干元，一年半可得本利和共二百二十七元，問貸出本金多少？

解　　227元÷(1＋9%×1.5)＝200元．

答：本金200元．

三 複利法

215. 複利法本利和之計算法.

利息若以複利計算：

第一期之本利和＝本金×(1＋利率)．

第二期之本利和＝第一期之本利和×(1＋利率)

＝本金×(1＋利率)×(1＋利率)

＝本金×(1＋利率)^2。

第三期之本利和＝第二期之本利和×(1＋利率)

＝第一期之本利和×(1＋利率)^2

＝本金×(1＋利率)^3．

因此　　複利之本利和＝本金×(1＋利率)$^{\text{期數}}$．

【例】 本金250元，年利8釐，一年一期，依複利計算，三年後的本利和是多少？

解　$250\text{元}\times(1+0.08)^3=314.94\text{元}$．

答：第三年的本利和是314元9角2分．

216. 複利表.

複利法之本利和，固然可以用上面的公式來求，但期數過大時，計算很不方便，因此預先就種種利率和期數，計算出本利和對於本金之倍數來列成一表，叫做"複利表"．計算的時候只要按照利率及期數，就表中查出本利和是本金的若干倍，將查到的數

複 利 表

本 銀 一 的 本 利 和

利率 期數	2 厘	2 厘 5 毫	3 厘	3 厘 5 毫	4 厘	4 厘 5 毫
1	1.02	1.025	1.03	1.035	1.04	1.045
2	1.0404	1.05063	1.0609	1.07123	1.0816	1.09203
3	1.06121	1.07689	1.09272	1.10872	1.12486	1.14117
4	1.08243	1.10381	1.12551	1.14752	1.16986	1.19252
5	1.10408	1.13141	1.15927	1.18769	1.21665	1.24618
6	1.12616	1.15969	1.19405	1.22926	1.26532	1.30226
7	1.14869	1.18869	1.22987	1.27228	1.31593	1.36086
8	1.17166	1.21840	1.26677	1.31681	1.36857	1.42210
9	1.19509	1.24886	1.30477	1.36290	1.42331	1.48610
10	1.21899	1.28008	1.34392	1.41060	1.48024	1.55297
11	1.24337	1.31209	1.38423	1.45997	1.53945	1.62285
12	1.26824	1.34489	1.42576	1.51107	1.60103	1.69588
13	1.29361	1.37851	1.46853	1.56396	1.66507	1.77220
14	1.31948	1.41297	1.51259	1.61869	1.73168	1.85194
15	1.34587	1.44830	1.55797	1.67535	1.80094	1.93528
利率 期數	5 厘	6 厘	7 厘	8 厘	9 厘	1 分
1	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.1
2	1.1025	1.1236	1.1449	1.1664	1.1881	1.21
3	1.15763	1.19102	1.22504	1.25971	1.29503	1.331
4	1.21551	1.26248	1.31080	1.36049	1.41158	1.4641
5	1.27628	1.33823	1.40255	1.46933	1.53862	1.61051
6	1.34010	1.41852	1.50073	1.58687	1.67710	1.77156
7	1.40710	1.50363	1.60578	1.71382	1.82804	1.94872
8	1.47746	1.59385	1.71819	1.85093	1.99256	2.14359
9	1.55133	1.68948	1.83846	1.99900	2.17189	2.35795
10	1.62889	1.79085	1.96715	2.15893	2.36736	2.59374
11	1.71034	1.89830	2.10485	2.33164	2.58043	2.85312
12	1.79586	2.01220	2.25219	2.51817	2.81266	3.13843
13	1.88565	2.13293	2.40985	2.71962	3.06580	3.45227
14	1.97993	2.26090	2.57853	2.93719	3.34173	3.79750
15	2.07893	2.39656	2.75903	3.17217	3.64248	4.17725

目乘本金就得到本利和.

【例一】 本金 700 元，年利率 6 釐，依複利每年一結算，15 年的本利和是多少？

解　年利率 6 釐為 6%，期數為 15，由表上查出本利和為本金之 2.49656 倍，今本金為 700 元，所以得本利和為

700 元×2.49656＝1747.59 元.

答：15 年後的本利和為 1747.59 元.

【例二】 本金 500 元，年利率 8 釐，以複利計算，20 年後的本利和是多少？

解　年利率 8 釐為 8%，共 20 期，表上只有 15 期，因此先將 15 期之本利和求出作為本金，再求 5 期後之本利和.

15 期之本利和＝500 元×3.17217.

20 期之本利和＝15期之本利和×1.46933.

因此得　　500 元×3.17217×1.46933＝2368.5 元.

答：20 年後的本利和為 2368.5 元.

習題八十一

1. 試檢查複利表，計算下表各項的本利和（分以下棄掉）.

本金	150 元	450 元	1250 元	2500 元	3000 元	5000 元
利率	$3\frac{1}{2}$ 釐	7 釐	8%	5%	4.5%	2 釐
期數	13	30	12	18	30	40
本利和						

2. 月利率10分，以複利計，一年所得的利息，比月利率1分2釐，以單利計的利息，哪個較多？

3. 本金1500元，月利率1分2釐，以複利計，半年之本利和多少？

4. 本金6000元，年利率1分2釐，以複利計，5年後得多少利息？比月利率1分2釐，以單利計，哪個利息多，多若干？

217. 期數與利率的關係.

用複利法計算利息，所定利率的時限，必須與每一期的時限一致．如以一月為一期，利率必須為月利率；以一年為一期，利率必須為年利率．利率的時限若與每一期的時限不一致時，則在計算之前，必須先將利率換成與每一期的時限相同之利率.

【例一】 年利率4釐，以半年為一期，依複利計算，求本金每百元二年後之本利和.

解 今以半年為一期，二年共有四期，利率為年利率4釐，半年利率應為2釐.

因此 $100元\times(1+0.02)^4=100元\times1.08243$

$=108.24元.$

答：本利和為108.24元.

【例二】 月利率一分，三月為一期，本金150元，依複利計算，二年的本利和是多少？

解 今以三月為一期，2年共有八期，利率為月利率一分，三月利率應為3分.

因此　$150元\times(1+0.03)^8=150元\times1.2667$

$=191.11元.$

答：本利和 191.11 元。

218. 複利息之計算.

因爲　本金＋利息＝本利和.

所以　利息＝本利和－本金

$=本金\times(1+利率)^{期數}-本金$

$=本金\times[(1+利率)^{期數}-1].$

【附註】 $(1+利率)^{期數}$的值可以從複利表上查出.

【例】 年利率 9 釐，每半年一期，本金 1000 元，三年的複利息是多少？

解　$1000元\times[(1+0.045)^6-1]$

$=1000元\times[1.302260-1]$

$=1000元\times0.302260$

$=302.26元.$

答：複利息爲 302.26 元.

219. 本金之計算.

因爲　$本利和=本金\times(1+利率)^{期數}.$

所以　$本金=本利和\div(1+利率)^{期數}.$

又因爲　$利息=本金\times[(1+利率)^{期數}-1].$

所以　$本金=利息\div[(1+利率)^{期數}-1].$

【例一】 年利率四釐，每年一期，共貸四年，依複利法計算，

得本利和 148.68 元。求本金。

解　本金 $=148.68$ 元 $\div(1+0.04)^{4}=127.09$ 元。

答：本金爲 127 元 1 角。

【例二】 月利率一分，每期三月，一年的複利息爲 2.76 元，本金是多少？

解　本金 $=2.76$ 元 $\div[(1+0.03)^{4}-1]=21.99$ 元。

答：本金爲 22 元。

習題八十二

下列各題均以複利計算：

1. 本金 500 元，年利 1 分 2 釐，半年一期，3 年的本利和是多少？

2. 年利 1 分 6 釐，三個月一期，本金 1000 元，2 年的本利和是多少？

3. 月利 1 釐 2 毫，五個月一期，本金 450 元，二年半的本利和是多少？

4. 本金 360 元，三個月一期，月利 1 釐 5 毫，九個月的本利和是多少？

5. 年利率 5 釐，半年一期，5 年間共得本利和 192 元，本金是多少？

6. 月利率 2 釐，四個月一期，2 年間共得本利和 1850 元 9 角 3 分，本金是多少？

7. 年利率4釐,半年爲一期,2年的利息爲8元2角4分,求本金。

8. 月利率1釐5,半年一期,3年的利息爲216元6角9分,求本金.

四 利息算法之其他應用

220. 期票與貼現.

交付款項不用現金,而授與支取款項的憑單,限期向交付處,或其指定之銀行錢莊取款,這種憑單叫做"期票".票面所記的款額叫做"票面額"。

期票就支付的日期說,分爲"即期","定期","一覽定期"等,即期就是任何時可以支付的,定期就是從出期票之日起經過若干日(或記明在某月某日).始可支付的;一覽定期就是受款者把期票交給付款者閱覽後,經過一定時日,始可支付的。

執有期票的人,於支付日期之前欲先得現金應用,可將此票轉讓於他人(通例爲銀行及經記人),但所得之數常比票面額稍低,因爲須扣去自付款日起至期票到期日的利息.這所扣去的利息叫做"貼現".

由票面額減去貼現所餘之數,叫做"現價";計算貼現時所用的利率叫做"折扣率".

貼現的計算方法有銀行貼現與眞貼現兩種:

銀行貼現以票面額作本金來計算自付款日起到期票到期日

應付利息作爲貼現.因此

$$貼現=票面額\times折扣率\times期數.$$

$$\begin{aligned}現價&=票面額-貼現\\&=票面額\times(1-折扣率\times期數).\end{aligned}$$

實際上，現價比票面額小，因此，由這方法計算的貼現比所收現價應付之利息大，但銀行中因計算之方便，常用此法.

眞貼現以票面額作本利和，按照折扣率與時期來計算本金，作爲現價.

$$現價=\frac{票面額}{1+折扣率\times期數}.$$

$$\begin{aligned}貼現&=票面額-現價\\&=\frac{票面額\times折扣率\times期數}{1+折扣率\times期數}.\end{aligned}$$

用此方法計算，票面額與現價之差，卽本利和與本金之差，因爲貼現實際上應付以利息.

〖例〗 折扣率年利率6釐，兩個月後支付的期票，其票面額爲2500元，求銀行貼現及眞貼現之方法，分別求其現價.

解　以銀行貼現計算所得之現價：

$$2500元\times\left(1-6\%\times\frac{2}{12}\right)=2475元.$$

以眞貼現計算所得之現價：

$$2500元\div\left(1+6\%\times\frac{2}{12}\right)=2475.24元.$$

221. 公債及股票.

中央，省，縣政府或公共團體及公司等因經營某事業需要鉅額的費用，向公衆募集的借款叫做"公債"，政府或公共團體對於應募者，給付一種證券，這叫做"公債票"。

公債票面所記的款額，叫做"票面額"。

公債的利息依票面額及一定的利率計算，另有支息的小券附在票上，到了付息日期，可以憑票支取。公債的利息是單利，付息時期大都是每年二次。

經營事業，設立公司，分資本爲若干股，招人分認，出資者叫做"股東"。公司收到了股款，便給股東以"股票"。

無論營業的狀況怎樣，公司每年按一定利率發給股東的利息，叫做"官利"。視營業的盈虧，公司將盈餘分配給股東，此項按股所得的額外利息叫做"紅利"。所以官利的利率，各期相等；紅利的利率，則視公司本期營業決算之狀況而定。

債票和股票都可以抵押賣買，賣買的價值，往往因事業之盛衰，時局金融之緊弛及發行人之信用，時有變動，常與票面額不相同，這叫做"時價"或"市價"。

【例一】 票面額百元的五釐公債票，以九十五元買進，每年算息一次，合利率多少？

解　100元×5%＝5元(每年所得的利息)。

5元÷95元＝5.26%(利率)。

答：年利五釐二毫六絲。

習題八十三

1. 1個月期，1000元的期票，向銀行兌現，其折扣率爲月利1分2釐，求現價.

2. 31日期，500元的期票，兌現時的折扣率是2分5釐，現價是多少?

3. 支付日爲一月三十一日的期票，在折扣率爲月利率3分時，於一月十一日兌現，貼現及現價各多少?

4. 票面額百元，年利六釐的公債票，今以時價92元8角買進，合利率多少?

5. 官利1分2釐的某公司的股票，其已繳200元的舊股值650元，已繳50元的新股值320元.求兩種利率各多少?

第十三章 開方及其應用

一 開平方

222. 乘方與開方.

求幾個同一數連乘的積的方法，叫做"乘方"。反過來，知道了幾個同一數連乘所得的積而求原數的方法，叫做"開方"。已知二個同一數連乘所得的積而求原數的方法，叫做"開平方"。已知三個同一數連乘所得的積而求原數的方法，叫做"開立方"。

一數開方，常把這數寫在符號"$\sqrt{\ }$"內，而在這符號的左上角寫一小數字，表示這數開幾次方。如 $\sqrt[2]{4}$ 表示 4 開平方，$\sqrt[3]{27}$ 表示 27 開立方。"$\sqrt{\ }$"叫做"根號"，寫在根號左上角的小數字叫做"根指數"。根指數表示根號內的數開幾次方。根指數是 2 的時候常略去不寫，因此 4 開平方就寫成 $\sqrt{4}$。

如 $4\times4=16$，16 開平方就是 4。

又如 $5\times5\times5=125$，125 開立方就是 5。

223. 九個基本數字的平方.

要開平方，先要熟練九個基本數字的平方。

$1^2=1$，　$\therefore\ \sqrt{1}=1$；　$2^2=4$，　$\therefore\ \sqrt{4}=2$；

$3^2=9$，　$\therefore\ \sqrt{9}=3$；　$4^2=16$，　$\therefore\ \sqrt{16}=4$；

$5^2=25$, $\therefore$ $\sqrt{25}=5$; $6^2=36$, $\therefore$ $\sqrt{36}=6$;

$7^2=49$, $\therefore$ $\sqrt{49}=7$; $8^2=64$, $\therefore$ $\sqrt{64}=8$;

$9^2=81$, $\therefore$ $\sqrt{81}=9$.

上面九個平方根的求法是多位數開平方的基礎,應該牢記。

由此可知任何一數的末位數是 2, 3, 7 或 8 時,決不是一個平方數。

224. 二數和的平方。

二數和的平方,等於二數各自的平方和,加上二數相乘積的二倍。

【例】 求 5 與 3 二數和的平方。

解
$$\begin{aligned}(5+3)^2&=(5+3)\times(5+3)\\&=5\times(5+3)+3\times(5+3)\\&=5^2+5\times3+3\times5+3^2\\&=5^2+2\times5\times3+3^2\\&=64.\end{aligned}$$

因此設 a, b 代表任意兩個數,就可得下列的公式:

$$(a+b)^2=a^2+2\times a\times b+b^2.$$

式中的乘號可以省去,因此:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

應用這個公式,可以很簡便的求得兩位數的平方。

如 $36^2=(30+6)^2$

$$=30^2+2\times30\times6+6^2$$
$$=900+360+36$$
$$=1296。$$

225. 二數差的平方.

二數差的平方,等於二數各自的平方和,減去二數相乘積的二倍.

【例】 求5與3二數差的平方。

解 $(5-3)^2=(5-3)\times(5-3)$
$$=5\times(5-3)-3\times(5-3)$$
$$=5^2-5\times3-3\times5+3^2$$
$$=5^2-2\times5\times3+3^2$$
$$=4。$$

因此設 a, b 代表任意二數,就可得下列的公式:

$$(a-b)^2=a^2-2\times a\times b+b^2。$$

式中之乘號可以省去,因此:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

應用這個公式,可以很簡便的求得兩位數的平方。

如 $99^2=(100-1)^2$
$$=100^2-2\times100\times1+1^2$$
$$=10000-200+1$$
$$=9801。$$

習題八十四

1. 求以下各數的平方:

   1, 4, 6, 7, 11, 24, 32, 45.

2. 求以下各數的立方:

   1, 2, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17.

3. 用二數和或二數差的公式,求以下各數的平方:

   12, 14, 16, 19, 61, 75, 102, 249.

4. 求以下各數的平方根:

   $2^2\times3^2$, $2^4\times3^4$, $2^6\times3^2\times5^4$, 15625, 784, 194481.

5. 求以下各數的立方根:

   $2^3\times3^3$, $2^6\times3^6$, $2^6\times3^3\times5^9$, 5832, 2299968.

226. 平方根的位數.

在沒有開方以前,先要知道九個基本數字的平方.如 223 節所說過的.

再從　$1^2=1$,　　　$9^2=81$;

$10^2=100$,　　　$99^2=9801$;

$100^2=10000$,　　　$999^2=998001$;

$1000^2=1000000$,　　　$9999^2=99980001$;

可以知道一位數與二位數的平方根是一位數,三位數與四位數的平方根是二位數,餘類推.因此可以列一個表:

原數的位數	平方根的位數
1至2	1
3至4	2
5至6	3
7至8	4
…………	…………

從一數的個位起，向左，每二位用一鈎點（，）分作一段，所分的段數，就是原數平方根的位數。

如 99980001 這數，從它的個位起，向左每二位用一鈎點分之，可得四段，這就是說這數的平方根是四位數。

227. 整數開平方法。

既已知道 $25^2=625$

$$25^2=(20+5)^2$$
$$=20^2+2\times20\times5+5^2$$
$$=20^2+(2\times20+5)\times5.$$

因此推演出開平方的方法：

$$\begin{array}{r|l}
 & 6'25 \quad |20+5=25 \\
 & \underline{400} \cdots\cdots\cdots 20^2 \\
2\times20=40 & 225 \\
+5 & \\
\hline
2\times20+5=45 & \underline{225} \cdots\cdots\cdots (2\times20+5)\times5. \\
 & 0
\end{array}$$

以上方法可說明如下：

(一)因 625 小於 900 大於 400，所以 625 之平方根一定在 20 與 30 之間，所以根的十位數字一定是 2，2 是根的首位數字，叫做“初商”..

(二)從 625 中減去 20 的平方，餘數是 225.

(三)因 $625=(20+個位數)^2$

$$=(20+個位數)\times(20+個位數)$$

$$=20^2+2\times20\times個位數+個位數^2$$

$$=20^2+(2\times20+個位數)\times個位數.$$

$$\therefore\ 225=(2\times20+個位數)\times個位數.$$

(四)將 2×20 做試除數. 餘數 225 被試除數除，得商 5，假定 5 是根的個位數.

(五)$(2\times20+5)\times5=225$，因此 5 確為根的個位數，亦卽根之第二位數，叫做“次商”. $(2\times20+5)$ 叫做“全除數”.

實際演算時，可以寫成下列簡式：

$$\begin{array}{lrl|ll}
 & & & \text{初商} & \text{次商} \\
 & & 6'25 & 2 & 5 \\
 & & 4 \cdots\cdots\cdots\cdots & 2^2 & \\
\text{試除式：} & 2\times20=40 & 225 \cdots\cdots\cdots\cdots & \text{餘數} & \\
 & +5 & & & \\
\text{全除數：} & 45 & 225 \cdots\cdots\cdots\cdots & 45\times5 & \\
 & & 0 & &
\end{array}$$

$$\therefore\ \sqrt{625}=25.$$

【例】 將 140625 開平方.

解

		初商 次商 三商
	14'06'25	3　7　5
	9	
試除數：$2\times 30=60$	506………	第一餘數
$+\ 7$		
全除數：67	469………	67×7
試除數：$2\times 370=740$	3725……	第二餘數
$+\ 5$		
全除數：745	3725……	745×5
	0	

$$\therefore\ \sqrt{140625}=375.$$

整數開方的步驟如下：

（一）自右至左每隔兩位用鈎點分成一段，段數表示平方根整數部分的位數.

（二）求第一段最大整數平方根，得初商.

（三）由第一段減去初商的平方，接抄第二段，叫第一餘數.

（四）將初商進位乘2，做試除數.

（五）第一餘數被試除數除，得次商.

（六）以試除數與次商相加為全除數.

（七）從第一餘數中減去全除數與次商之積，接抄第三段，叫做第二餘數.

（八）把根之首二位數字作為初商，進位乘2做試除數.

（九）第二餘數被試除數除，得三商.

（十）……依照（六）（七）（八）循環進行，到最右一段為止.

［附註］（1）試除時所得的商如過大，可減1再試.如大於10，即從9試起，

(2) 試除時，所得的商若小於1，須在原數內再取下一段數，這就表示根內有一位數字是零。若取下一段，所得的商仍小於1，則再從原數內取下一段，這就表示根內有二位數字是零。

如將 4020025 開平方：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4'02'00'25 \;\big|\; \underline{2005} \\
 & 4 \\
\hline
2\times2000=4000 & 20025 \\
+\quad 5 & \\
\hline
4005 & 20025 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \sqrt{4020025}=2005.$$

上列算式係從原式中取下三段，故根內有二位是零。

228. 小數開平方.

小數開平方與整數開平方一樣，祗有分段法略有不同；小數開平方時，從小數點起，向右，每隔兩位加一鈎點分作一段，最後一段若只有一位，須在後面添一個 0，使末一段補足成二位。帶小數開平方時，就以小數點爲起點，整數部分自小數點起用整數的分段法分段，小數部分以小數的分段法分段，整數的段數是平方根整數的位數，小數的段數，就是平方根小數的位數。

【例一】 求 0.0225 的平方根。

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.02'25 \;\big|\; 0.15 \\
 & 1 \\
\hline
2\times10=20 & 125 \\
+\ 5 & \\
\hline
25 & 125 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt{0.0225}=0.15.$$

【例二】 求 0.019321 的平方根.

解

$$
\begin{array}{r|r}
 & 0.0\,1'9\,3'2\,1 \mid \underline{0.1\,3\,9} \\
 & 1 \\ \hline
2\times10=20 & 9\,3 \\
+\ 3 & \\
23 & 6\,9 \\ \hline
2\times130=260 & 2\,4\,2\,1 \\
9 & \\
269 & 2\,4\,2\,1 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt{0.019321}=0.139.$$

【例三】 求 153.140625 的平方根.

解 此係帶小數，故須注意其分段。將段分好，就可以照普通方法開方。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1'5\,3.1\,4'0\,6'2\,5 \mid \underline{1\,2.3\,7\,5} \\
 & 1 \\ \hline
2\times10=20 & 5\,3 \\
+\ 2 & \\
22 & 4\,4 \\ \hline
2\times120=240 & 9\,1\,4 \\
+\ 3 & \\
243 & 7\,2\,9 \\ \hline
2\times1230=2460 & 1\,8\,5\,0\,6 \\
+\ 7 & \\
2467 & 1\,7\,2\,6\,9 \\ \hline
2\times12370=24740 & 1\,2\,3\,7\,2\,5 \\
+\ 5 & \\
24745 & 1\,2\,3\,7\,2\,5 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

$$\therefore \sqrt{153.140625}=12.375.$$

229. 不盡平方根.

非完全平方數的平方根,叫做"**不盡平方根**". 如 2,7,10 等都是不完全平方、所以這些數的平方根都是不盡平方根.

求不盡平方根的方法,與以前一樣,可任意求到幾位小數為止。如原數不夠,可在後面每段添二個 0 去補足它.

〖例〗 要求 31 的平方根,到小數第三位止。

解 要求到小數第三位止,所以在原數 31 的後面應加六個零去補足它.

	31.00'00'00	5.567………
	25	
2×50=100	600	
+ 5		
105	525	
2×550=1100	7500	
+ 6		
1106	6636	
2×5560=11120	86400	
+ 7		
11127	77889	
	8511	

$$\therefore \sqrt{31}=5.567\cdots\cdots$$

230. 完全平方數.

某數開平方,照前面的方法演算,結果沒有餘數,這數就叫做"**完全平方數**". 如 625,729 等.

231. 分數開平方。

分數的分子分母若是完全平方數，可各自開方。若不是完全平方數，可化成小數後，再行開方。

【例一】 求$\frac{169}{225}$的平方根。

解 $\sqrt{169}=13$, $\sqrt{225}=15$。

$$\therefore \sqrt{\frac{169}{225}}=\frac{13}{15}.$$

【例二】 求$\frac{3}{5}$的平方根。

解 $\frac{3}{5}=0.6$, $\therefore \sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{0.6}$。

但 $\sqrt{0.6}=0.774$, $\therefore \sqrt{\frac{3}{5}}=0.774$。

【附註】 $\sqrt{0.6}$ 可照小數開方法求得它的方根。

習題八十五

求下列各數的平方根（開不盡的，開至小數三位止）。

1. 2209。	2. 2800。	3. 5329。
4. 7921。	5. 720。	6. .169。
7. 12.25。	8. 0.0576。	9. 651249。
10. 262144。	11. 56196。	12. 370881。
13. 42.6409。	14. 49126081。	15. 26625600。
16. 84750436。	17. 0.68。	18. 0.835。

19. 0.7456. 20. 13. 21. 3915380329.
22. 657836167041. 23. 196540602241.
24. 0.0001. 25. 0.000625.
26. 363.201. 27. 197.96492.
28. 0.00005477. 29. $\frac{16}{25}$. 30. $\frac{2304}{18225}$.

二 開立方

232. 九個基本數字的立方根.

要開立方,先要熟練九個基本數字的立方.

$1^3=1$, $\therefore$ $\sqrt[3]{1}=1$; $2^3=8$, $\therefore$ $\sqrt[3]{8}=2$;
$3^3=27$, $\therefore$ $\sqrt[3]{27}=3$; $4^3=64$, $\therefore$ $\sqrt[3]{64}=4$;
$5^3=125$, $\therefore$ $\sqrt[3]{125}=5$; $6^3=216$, $\therefore$ $\sqrt[3]{216}=6$;
$7^3=343$, $\therefore$ $\sqrt[3]{343}=7$; $8^3=512$, $\therefore$ $\sqrt[3]{512}=8$;
$9^3=729$, $\therefore$ $\sqrt[3]{729}=9$.

上面九個立方根的求法,是多位數開立方的基礎,應該記牢.

233. 立方根的位數.

從上面的基本數字的立方,知道凡是立方根的位數是一位時,它的立方數是一位到三位.

再從 $1^3=1$, $9^3=729$;
$10^3=1000$, $99^3=970299$;
$100^3=1000000$, $999^3=997002999$;
……………………, ……………………;

可以知道一位數到三位數的立方根是一位數，四位數到六位數的立方根是二位數，餘類推。因此可列一表如次

原數的位數	立方根的位數
1——3	1
4——6	2
7——9	3
10——12	4
…………	…………

從一數的個位起，向左每三位用一鈎點（，）分作一段，所分的段數，就是原數立方根的位數。

如 97781036543 這數，從它的個位起，向左每三位用一鈎點分之，可得四段，這就是說這數的立方根是四位數。

234. 整數開立方法.

既已知道 $25^3=15625$

$$\begin{aligned}25^3&=(20+5)^3\\&=(20+5)^2\times(20+5)\\&=(20^2+2\times20\times5+5^2)\times(20+5)\\&=20^3+3\times20^2\times5+3\times20\times5^2+5^3\\&=20^3+(3\times20^2+3\times20\times5+5^2)\times5.\end{aligned}$$

因此推演出開立方的方法如下：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 15'625 \mid 20+5=25 \\
 & 8000 \cdots\cdots\cdots\cdots 20^3 \\
3\times20^2=1200 & 7625 \\
3\times20\times5=300 & \\
5^2=\ \ 25 & \\
3\times20^2+3\times20\times5+5^2=1525 & 7625\cdots(3\times20^2+3\times20\times5+5^2)\times5 \\
 & 0
\end{array}
$$

以上方法可說明如下：

(一)因 15625 小於 27000 大於 8000，所以 15625 之立方根一定在 20 與 30 之間，十位數字定爲 2，2 是根的首位數字，叫做“初商”。

(二)從 15625 中減去 20 的立方，餘數是 7625。

(三)因 $15625=(20+\text{個位數})^3$

$$
\begin{aligned}
&=(20+\text{個位數})^2\times(20+\text{個位數})\\
&=(20^2+2\times20\times\text{個位數}+\text{個位數}^2)\times(20+\text{個位數})\\
&=20^3+3\times20^2\times\text{個位數}+3\times20\times\text{個位數}^2+\text{個位數}^3\\
&=20^3+(3\times20^2+3\times20\times\text{個位數}+\text{個位數}^2)\times\text{個位數}.
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad 7625=(3\times20^2+3\times20\times\text{個位數}+\text{個位數}^2)\times\text{個位數}.$

(四)將 3×20^2 做試除數。餘數 7625 被試除數除，得商 6。

(五)假定次商爲 6，則 $(3\times20^2+3\times20\times6+6^2)6=9576$，並非 7625；所以次商一定比 6 小。

假定爲 5，則 $(3\times20^2+3\times20\times5+5^2)5=7625$，因此 5 爲根的第二位數，叫做“次商”。$(3\times20^2+3\times20\times5+5^2)$ 叫做“全除數”。

實際演算時，可以寫成下列簡式：

			初商 次商
		15'625	2 5
		8	
試除數：	$3\times20^2=1200$	7625	……餘數
	$3\times20\times5=\ 300$		
	$5^2=\ 25$		
全除數：	1525	7625	……1525×5
		0	

$$\therefore\ \sqrt[3]{15625}=25。$$

【例】 將31255875開立方。

解

			初商 次商 三商
		31'255'875	3 1 5
		27	……3^3
試除數：	$3\times30^2=2700$	4255	……第一餘數
	$3\times30\times1=\ 90$		
全除數：	$1^2=\ 1$		
	2791	2791	……2791×1
試除數：	$3\times310^2=288300$	1464875	……第二餘數
	$3\times310\times5=\ 4650$		
	$5^2=\ 25$		
全除數：	292975	1464875	……292975×5
		0	

$$\therefore\ \sqrt[3]{31255875}=315。$$

整數開立方的步驟如下：

（一）自右至左每隔三位用一鈎點分成一段，段數表示立方根整數部分的位數。

（二）求左邊一段最大整數立方根，得初商。

(三)由左邊一段減去初商的立方,接抄第二段,得第一餘數。

(四)將初商進位平方乘3,做試除數.

(五)第一餘數被試除數除,得次商.

(六)試除數加上三倍初商進位與次商之積,再加上次商之平方,作全除數。

(七)從第一餘數中減去全除數與次商之積,接抄第三段,叫做第二餘數.

(八)把所求得之首二位數字作爲初商,進位平方乘3,做試除數.

(九)第二餘數被試除數除,得三商.

(十)………依照(六)(七)(八)(九)循環進行,至最右一段爲止.

〔附註〕(1) 試除時,所得的商如嫌過大,可累次減1再試。如大於10即從9試起.

(2) 試除時,所得的商若小於1,須在原數內再取下一段,這就表示根內有一位數字是零.若取下二段,所得的商仍小於1,則再從原數內取下一段,這就表示根內有二位數字是零.

如將1006012008開立方.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & 1'006'012'008 \,|\, 1002 \\
 & & 1 \\
\hline
3\times1000^2= & 3000000 & 6012008 \\
3\times1000\times2= & 6000 & \\
2^2= & 4 & \\
\hline
 & 3006004 & 6012008 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{1006012008}=1002.$$

235. 小數開立方.

小數開立方，與整數一樣，祗是分段法略有不同；小數開立方時，從小數點，向右每隔三位加一鈎點分作一段，最後一段若只有一位，須在後面添兩個 0 補足成三位．若只有兩位，須在後面添一個 0 補足成三位．若是帶小數，就以小數點爲起點．整數的部分用整數的分段法分段，小數的部分用小數的分段法分段．整數的段數是立方根整數的位數，小數的段數是立方根小數的位數。

【例一】 求 0.001771561 的立方根.

解

$$\begin{array}{r|r|l}
 & 0.001'771'561 & 0.121 \\
 & 1 & \\ \hline
3\times10^2=300 & 771 & \\
3\times10\times2=\ \ 60 & & \\
2^2=\ \ \ \ 4 & & \\ \hline
364 & 728 & \\ \hline
3\times120^2=43200 & 43561 & \\
3\times120\times1=\ \ \ 360 & & \\
1^2=\ \ \ \ \ 1 & & \\ \hline
43561 & 43561 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{0.001771561}=0.121.$$

【例二】 求 564380.471 的立方根，求到小數第二位止.

解 本題先注意整數部分與小數部分的分段法，然後再照

開立方法，實行演算.

$$\begin{array}{r|l}
 & 564'380.471'000 \mid \underline{82.64}\cdots\cdots \\
 & 512 \\ \hline
3\times 80^2=19200 & 52380 \\
3\times 80\times 2=\quad 480 & \\
2^2=\quad 4 & \\ \cline{1-1}
19684 & 39368 \\ \hline
3\times 820^2=2017200 & 13012471 \\
3\times 820\times 6=\quad 14760 & \\
6^2=\quad 36 & \\ \cline{1-1}
2031996 & 12191976 \\ \hline
3\times 8260^2=204682800 & \quad 820495000 \\
3\times 8260\times 4=\quad 99120 & \\
4^2=\quad 16 & \\ \cline{1-1}
204781936 & \quad 819127744 \\ \hline
 & \quad\quad 1367256
\end{array}$$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{564380.471}=82.64\cdots\cdots$$

236. 不盡立方根.

非完全立方數的立方根卽爲"不盡立方根".如 9,16,25,39 等都不是完全立方，所以這些數的立方根都是不盡立方根。

求不盡立方根的方法，與以前的方法一樣，可任意求到小數第幾位爲止，如原數不夠三位分段時，可加 0 去補足它。

【例】 求 25 的立方根到小數第三位止。

解 欲求到小數第三位止，須在它的後面加九個 0 去補足它。

	25.000'000'000 $\lvert$ 2.924……
	8
$3\times20^2=1200$	17000
$3\times20\times9=\ \ 540$	
$9^2=\ \ \ 81$	
1821	16389
$3\times290^2=252300$	611000
$3\times290\times2=\ \ 1740$	
$2^2=\ \ \ 4$	
254044	508088
$3\times2900^2=25579200$	102912000
$3\times2900\times4=\ \ 35040$	
$4^2=\ \ \ 16$	
25614256	102457024
	454976……

$$\therefore\quad \sqrt[3]{25}=2.924\cdots\cdots$$

237. 完全立方數.

某數開立方,依照前面所說的方法,到最後沒有餘數,卽能開盡立方時,這樣的數,叫做"完全立方數".如1728,32768等.

238. 分數開立方.

與分數開平方一樣,若分數是完全立方數時,可將分子分母各自開立方。若不是完全立方數時,可化成小數開立方。若遇有公約數時,先行約分。

【例一】 求$\frac{27}{512}$的立方根。

解 $$\sqrt[3]{\frac{27}{512}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{512}}=\frac{3}{8}.$$

【例二】 求$\frac{355}{113}$的立方根。

解 $$\frac{355}{113}=3.141592\cdots\cdots\cdots$$

$$\sqrt[3]{\frac{355}{113}}=\sqrt[3]{3.141592}=1.46.$$

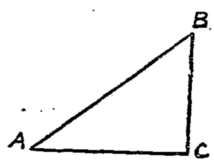
習題八十六

1. 66430125。 2. 16.974593. 3. 87.
4. 8869743. 5. 219256227。 6. 226.
7. 83568086848。 8. 10546683057. 9. 941192.
10. 207995.797125. 11. 0.00001. 12. 0.00415.
13 $\frac{343}{729}$. 14 $\frac{13824}{42875}$. 15. $\frac{5}{8}$. 16. $7\frac{2}{8}$.

239. 勾股弦.

聯結不在一直線上的三點,成一三角形.三角形內有一角是直角的,叫做直角三角形.直角所對的邊叫做弦,夾直角的二邊,叫做勾與股.

如圖: ABC是直角三角形, C角是直角, AB是弦, AC是勾, BC是股。



240. 勾股弦定理.

弦的平方等於勾平方加股平方的和.就是

$$弦^2=勾^2+股^2.$$

從上面的公式,可得下面的三個公式:

$$弦=\sqrt{勾^2+股^2}。$$

$$勾=\sqrt{弦^2-股^2}。$$

$$股=\sqrt{弦^2-勾^2}.$$

這個定理是希臘人畢他哥拉斯發明的,所以叫做畢他哥拉斯定理.但是在他發明這定理的一千多年前,我國古代算學家商高早已發明這定理,所以我們應該叫它做商高定理.

設 c 代表弦, a 代表勾, b 代表股,那末前面三個式子可以寫成:

$$c=\sqrt{a^2+b^2}。$$

$$a=\sqrt{c^2-b^2}.$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2}。$$

241. 開方法的應用問題.

有許多應用問題須用開平方法或開立方法纔能解答,現在示例如下:

【例一】 設有直角三角形,勾$=12$,股$=5$,求弦爲若干? 又若弦$=8$,勾$=5$,求股爲若干?

解 已知 勾$=12$, 股$=5$,

$\therefore$ 弦$=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=13.$

又已知 弦$=8$, 勾$=5$,

$\therefore$ 股$=\sqrt{8^2-5^2}=\sqrt{39}=6.24.$

【例二】 有兵 529 人排成一個正方形,求每排人數.

解 因爲每排人數的平方就是兵的總數,所以 529 的平方

根就是每排人數。

$$\therefore \quad 每排人數=\sqrt{529}=23。$$

【例三】 某數和它的$\frac{1}{3}$相乘得 2187，求某數。

解 某數和它的$\frac{1}{3}$相乘，就成了某數平方的$\frac{1}{3}$；

$$某數的平方=2187\div\frac{1}{3}=6561。$$

$$\therefore \quad 某數=\sqrt{6561}=81。$$

【例四】 有長闊厚相等的石頭6859塊，堆成一個正立方體，求每邊石頭塊數。

解 因為每邊塊數的立方就是 6859，所以 6859 的立方根就是每邊的塊數。

$$\therefore \quad 每邊塊數=\sqrt[3]{6859}=19。$$

習題八十七

1. 一直角三角形夾直角之兩邊為 8 尺及 6 尺，求斜邊之長。

2. 一直角三角形之斜邊長 51 寸，另一邊長 18 寸，求第三邊之長。

3. 一數的$\frac{1}{6}$和該數的$\frac{1}{8}$的積是 195075。問這數是多少？

4. 一數和它的$\frac{1}{3}$，又和它的$\frac{1}{2}$相乘，得 147456，求這數。

5. 有棋子 361 顆列成正方形，求每列的顆數。

6. 把棋子 362 顆列成長方形，縱列數是橫列數的 3 倍，求

縱橫每列的棋子數.

7. 河邊有一燈塔,高55尺,它的尖頂距對岸78尺,問這河闊幾尺?

8. 有兵一隊,排成一空心方陣,外層每邊970人,共9層.若排成一實心方陣,外層每邊應該是幾人?

第十四章　求積法

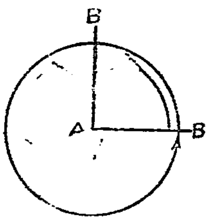
一　面積和體積

242. 面積,體積,求積法.

凡是物體都佔有一部分空間，這部分空間的大小叫做“體積”. 物體所佔有的空間和物體以外的空間的界限叫做面. 面的大小叫做“面積”. 計算面積和體積的方法叫做“求積法”.

日常所見到的物體,其形態大多是不規則的,不能立出一定的公式來計算. 其有方法計算的,限於有規則的幾種形體. 至於各種求積法的理論,有一部分要學了幾何才能徹底明瞭,因此只把這些公式提出來,希望學者能牢牢記住,並且運用得很純熟,以便應用.

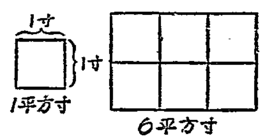
243. 面積和體積的單位.



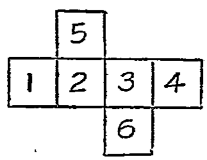
將直線 AB 之一端 A 固定,移動另一端 B,使繞 A 點轉過 $\frac{1}{4}$ 週,則所轉過的角,叫做“直角”. 兩根直線相交時,所成之角若是直角,這兩根直線叫做“互相垂直”,每一線是另一線的“垂直線”.

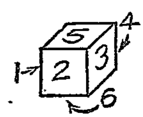
四邊的長相等,並且四個角都是直角的四邊形,叫做“正方

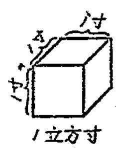
形”.計算面積，一定要用每邊單位相同的正方形做單位.每邊長1寸的正方形，叫做“**一平方寸**”，每邊長1尺的正方形叫做“**一平方尺**”…….如以一平方寸做單位，右面這圖形可以分割成六個1平方寸的小正方形，因此它的面積是6平方寸.

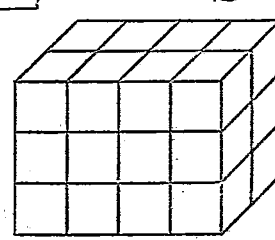


由六個相等的正方形所圍成的空間，叫做“**正立方體**”，計算體積一定要用每邊相同的正立方體做單位.每邊長1寸的正立方體，叫做“**一立方寸**”，每邊長1尺的正立方體，叫做“**一立方尺**”…….如以一立方寸作單位，右面的立方體可以割成24個一立方寸的正立方體，因此它的體積是24立方寸.





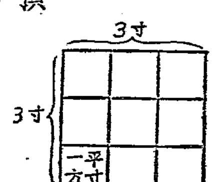




二　幾何圖形的面積

244. 正方形的面積.

每邊長3寸的正方形可以分割成9個每邊長1寸的小正方形.這每邊一寸的小正方形的面積爲1平方寸.若以一平方寸



作單位,這整個的正方形之面積爲 9 平方寸.因此:

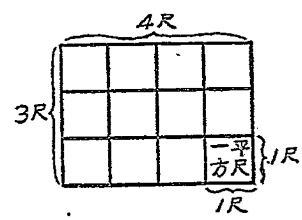
$$正方形的面積=(一邊的長)^2.$$

若以 S 表示正方形的面積,a 表示正方形每邊的長,則

$$S=a^2.$$

245. 長方形的面積.

兩雙對邊的長相等,(但一雙邊和另一雙邊的長並不相等),並且四個角都是直角的四邊形叫做"長方形".



一邊長 3 尺,另一邊長 4 尺之長方形,可以分割成 12 個每邊長 1 尺的小正方形.這每邊長 1 尺的小正方形的面積爲 1 平方尺.若以 1 平方尺作單位,這整個的長方形的面積爲 12 平方尺.因此:

$$長方形的面積=長\times闊.$$

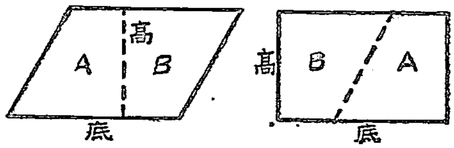
若以 S 表示長方形的面積,a 表示長方形的長,b 表示長方形的闊,則:

$$S=a\times b.$$

246. 長斜方形的面積.

四邊形的四條邊中,兩雙相對邊各相等,四角不是直角而兩雙對角各相等的,叫做"長斜方形".長斜方形的任何一邊都可以作"底",從底的對邊到底所作垂直線的長叫做"高".

圖(1)爲一斜長方形,若依高線剪開,拼成圖(2)的長方形.



(1)　　　　(2)

則這長方形的面積與原來長斜方形的面積相同．因此:

長斜方形的面積＝底×高．

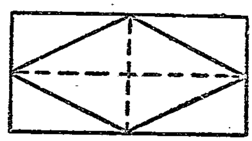
若以 S 表示長斜方形的面積，b 表示長斜方形的底，h 表示長斜方形的高，則:

$$S=b\times h.$$

247. 斜方形的面積．

四邊形的四邊的長相等，四角不是直角而相對角相等的，叫做“斜方形”．斜方形和長斜方形一樣，下面的一邊叫做“底”，從底到頂的垂直線的長叫做“高”．面積的求法也和長斜方形相同:

斜方形的面積＝底×高．



右圖爲一長方形，把長方形每一邊的中點挨次用直線相連，中間卽繪成一個斜方形．又把斜方形相對角相連，這兩直線叫做斜方形的“對角線”．這斜方形的面積恰爲原長方形的一半，而原長方形的面積是它的長與闊的積．長方形的長卽爲斜方形長對角線的長，長方形的闊卽爲斜方形短對角線的長．因此:

斜方形的面積$=\frac{1}{2}$(長對角線的長×短對角線的長)。

若以 S 表示斜方形的面積，b 表示斜方形一邊的長，h 表示斜方形的高，則：

$$S=b\times h.$$

又以 d 與 e 表示斜方形兩對角線的長，則：

$$S=\frac{d\times e}{2}.$$

248. 平形四邊形的面積.

在一個平面上的兩條直線，若儘量向兩端延長，而永不相交的，叫做互相平行。

正方形，長方形，長斜方形，斜方形的兩雙對邊都是互相平行的，統稱爲"平行四邊形".長方形的兩條相鄰邊，互爲底和高。正方形的底和高相等，卽爲一邊的長度，歸納起來：

平行四邊形的面積＝底×高.

若以 S 表示平行四邊形的面積，b 表示其底，h 表示其高，則：

$$S=b\times h.$$

習題八十八

1. 有一正方形的地周圍 24 丈，求這地的面積.

2. 有一長方形的地周圍 37 丈，長邊比短邊多 2.5 丈，求這地的面積.

3. 有兩畝田面積相等，一是長方形，一是正方形；長方田

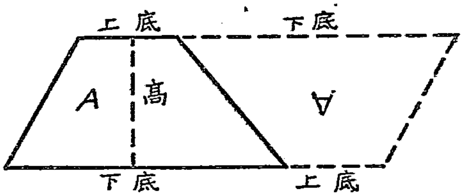
長 192 丈，闊 48 丈，問正方田每邊長多少?

4. 一間正方的房子，周圍 4100 尺，地上滿舖方磚，每塊大 25 方寸，問共有方磚幾塊?

5. 有底邊 6 寸，高 4 寸的長斜方形一個，求它的面積.

249. 梯形的面積.

只有一雙對邊平行，而此平行邊長短並不相等的四邊形叫做"梯形". 兩條平行邊中，長的一邊的長叫做"下底"，短的一邊的長叫做"上底". 從長的一邊到短的一邊所繪的垂直線的長叫做"高"。



將兩個相同的梯形一正一倒相拼，即成一個長斜方形，而這長斜方形之底是梯形上底與下底之和，因此:

$$\text{梯形的面積}=\frac{1}{2}\times\text{高}\times(\text{上底}+\text{下底})。$$

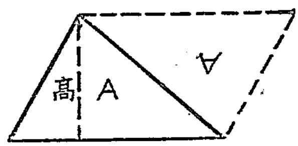
若以 S 表示梯形的面積，b 和 c 表示梯形的上底與下底，h 表示梯形的高，則:

$$S=\frac{h\times(b+c)}{2}.$$

250. 三角形的面積.

三條直線所圍成的圖形叫做"三角形". 從三角的一角畫到

對邊的垂線的長，叫做“高”，那角的對邊的長就叫做“底”。



將兩個相同的三角形一正一倒相拼即成一個長斜方形。因此：

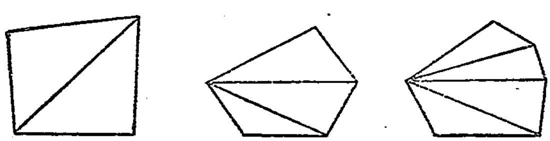
$$三角形的面積=\frac{1}{2}\times高\times底.$$

若以 S 表示三角形的面積，b 表示三角形的底，h 表示三角形的高，則：

$$S=\frac{h\times b}{2}.$$

251. 多邊形的面積.

不規則的四邊形，五邊形，六邊形……等，都可以分割成若干個三角形，逐一計算各個三角形的面積，再計算各個三角形面積的總和，即為此圖形的面積。

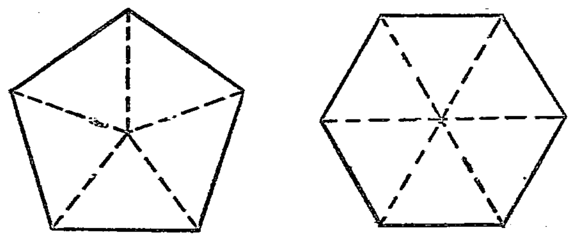


四邊形　　五邊形　　六邊形

252. 正多邊形的面積.

多邊形之各條邊都相等，各個角也相等的，叫做“**正多邊形**”。正多邊形中有一點，與各角相連之直線均相等，這一點叫做“**中心**”。正多邊形與多邊形一樣，可以分割成若干個三角形，再

行計算它的面積；也可以從正多邊形的中心到各角劃直線分成與邊數相等個數的三角形，如下圖.



這若干個相等的三角形的高，即為中心到每邊的垂線的長。每個三角形之面積為正多邊形一邊的長與中心到每邊的距離的積的一半。因此：

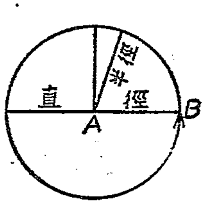
正多邊形的面積

$$=\frac{1}{2}\times\text{邊數}\times\text{每邊長}\times\text{中心到每邊垂直線的長}.$$

若以 S 表示正多邊形的面積，n 為其邊數，b 表示其每邊的長，h 表示中心到每邊垂線的長，則

$$S=\frac{nbh}{2}.$$

253. 圓周率和圓周的長.



將直線 AB 的一端 A 固定，移動 B 端，使繞 A 點轉過一周，則 B 點所劃的痕跡，叫做"圓"。而 A 點叫做"圓心"。圍成圓的曲線，叫做"圓周"。從圓心到圓周所繪之直線的長，叫做"半徑"。經過圓心，兩端與圓周

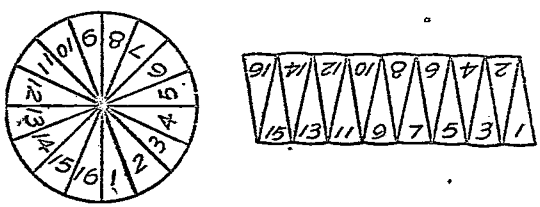
相接的直線的長，叫做"直徑"．直徑是半徑的兩倍，圓周的長是直徑的 3.14159……倍．因此：

$$\begin{aligned}\text{圓周的長}&=\text{直徑}\times 3.14159\cdots\cdots\\&=2\times\text{半徑}\times 3.14159\cdots\cdots\end{aligned}$$

通常用 π 表示 3.14159……這無限小數，若以 C 表示圓周之長，r 表示圓之半徑，則：

$$C=2\pi r.$$

254. 圓的面積.



將圓如上圖分割成 16 部分，再行拼成右圖的形式．右圖的形式已近乎是一個斜方形．若把圓分割成更多部分，所拼成的圖愈近乎斜方形，此斜方形的底與圓周的一半相等，而高卽爲圓的半徑．因此：

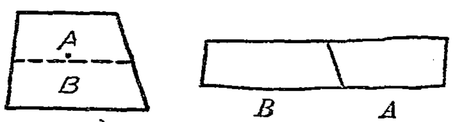
$$\begin{aligned}\text{圓的面積}&=\frac{1}{2}\times\text{半徑}\times\text{圓周}\\&=\frac{1}{2}\times\text{半徑}\times 2\times\text{半徑}\times\pi\\&=(\text{半徑})^2\times\pi.\end{aligned}$$

若以 S 表示圓的面積，c 表示圓周的長，r 表示圓的半徑，

則：
$$S=\frac{c\times r}{2}=\pi r^2。$$

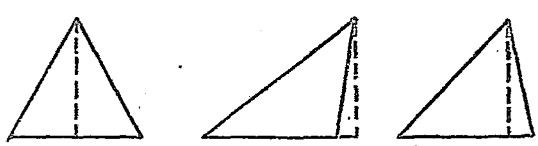
習題八十九

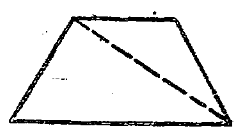
1. 下面左邊的一個圖是一個梯形，聯結梯形兩邊中點的直線如圖中的虛線，叫做梯形的中線。若依中線把梯形分割成A,B兩部分，可以拼成右邊的圖那樣一個長斜方形，若是知道了中線的長和梯形的高，用什麼公式可以求梯形的面積？



2. 從上面的圖怎樣證明第249節梯形面積的公式？

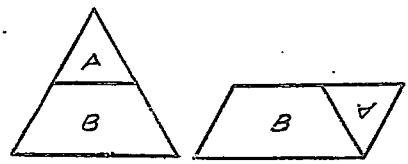
3. 下面三個三角形的底邊是一樣長的，圖中的虛線是高，也是一樣長的，它們的面積有沒有不同呢？





4. 梯形和三角形的求面積公式有什麼關係？

5. 把三角形如下面的方法分割，可以拼成一個長斜方形，從這種關係可不可以找出求三角形面積的公式？



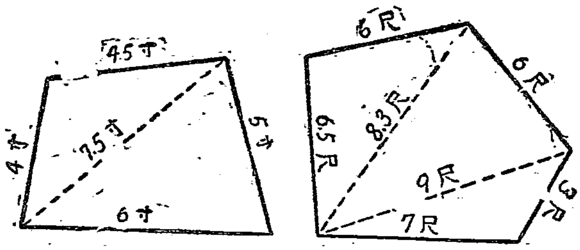
6. 有一梯形,上底18寸,下底24寸,高9寸.求其面積.

7. 一個梯形的面積是2方尺,高5寸,下底5尺6寸.求它的上底.

8. 有一個三角形,高8尺,底11尺.它的面積是多少?

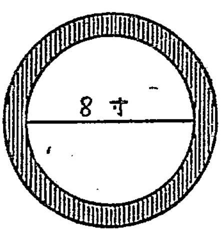
9. 一個三角形的面積是436方尺,底是18尺.求高.

10. 求下圖(1)四邊形的面積,(2)五邊形的面積.

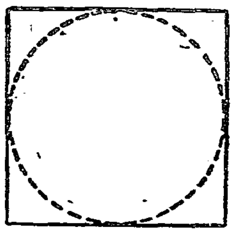


11. 有圓兩個,一個的半徑是10寸,一個的半徑是8寸.大圓比小圓大多少?

12. 直徑8寸的圓,外鑲1寸闊的木邊,如右圖,求木邊的面積.



13. 正方紙一張,每邊長7寸,把它剪成最大的圓.直徑多少長,剪去的紙佔多少面積?(參看下圖)



三　立體的面積和體積

255. 正立方體的全面積和體積.

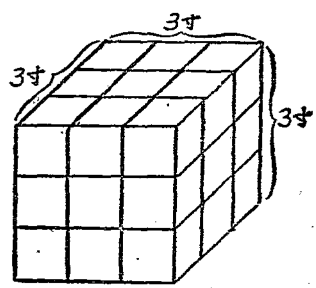
正立方體各個面的面積之和，叫做"全面積"。正立方體每一面的面積等於一邊的長的自乘.因此:

正立方體的全面積$=6\times$(一邊的長)^2.

若以S表示正立方體的全面積，a表示其一邊之長，則:

$$S=6\times a^2.$$

每邊長3寸的正立方體，可以分割成27個每邊長1寸的小正立方體。這每邊長1寸的小正立方體的體積是一立方寸，若以一立方寸作單位，這整個的正立方體的體積爲27立方寸，因此:



正立方體的體積$=$(一邊的長)^3.

若以V表示正立方體的體積，a表示正立方體一邊的長，

則: $V=a^3$.

256. 長立方體的全面積和體積。

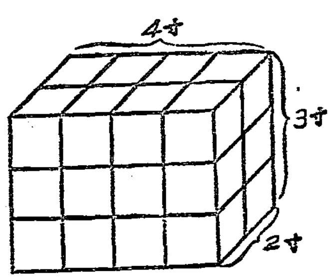
圍成一個立方體的六個方形，若其中有四個相對的面是長方形，或全是長方形，這立方體就叫做"長立方體"．長立方體的一個角到相鄰三角三線之長，分別叫做"長"，"闊"，"高"．長立方體各個面積的總和，叫做"全面積"。

長立方體兩個相對面的面積是"長"與"闊"的積，兩個相對面的面積是"闊"與"高"的積，兩個相對面的面積是"高"與"長"的積．因此：

長立方體的全面積$=2\times$(長$\times$闊$+$闊$\times$高$+$高$\times$長)。

若以 S 表示長立方體的全面積，a, b, c 分別表示長立方體的長，闊，高，則：

$$S=2\times(a\times b+b\times c+a\times c).$$



一個長4尺，闊2尺，高3尺的長立方體，可以分割成24個每邊長1尺的小正立方體．這每邊長1尺的小正立方體的體積是1立方尺，若以1立方尺作單位，這整個的長立方體的體積爲24立方尺．因此：

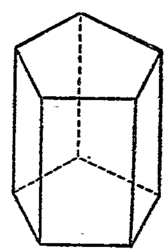
長立方體的體積$=$長$\times$闊$\times$高。

若以 V 表示長立方體之體積，a, b, c 分別表示長立方體的

長，闊，高，則：　　　　$V=a\times b\times c.$

257. 正角柱體的面積和體積.

上下是兩個正多邊形，側面有若干個長方形圍成的立體叫做"正角柱體".上下兩個正多邊形叫做"底".除了兩個底，各面的面積之和，叫做"側面積"，側面積與兩"底面積"的總和，叫做"全面積".側面長方形的數目與底的邊數相等.而各個長方形有一對邊的長與底的一邊的長相等，另一對邊的長叫做"高".



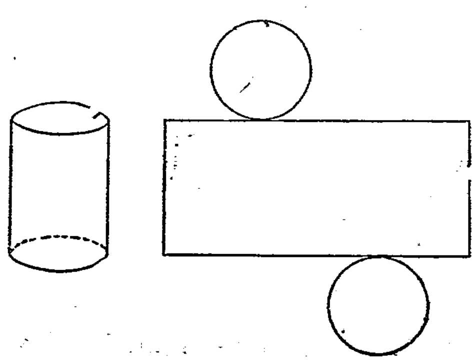
正角柱體的側面積＝高×底的周圍的長.

正角柱體的全面積＝側面積＋兩底面積.

正角柱體的體積＝高×底面積.

258. 圓柱體的面積和體積.

上下是兩個圓，側面由一個長方形圍成的立體，叫做"圓柱體".上下兩圓都叫做"底".側面的長方形有一對邊的長與底的



圓周相等，這長方形的面積是圓柱的側面積，側面積與上下兩底面積之和，是圓柱的全面積。由上底任何一點到下底的垂直線的長，叫做"高"。

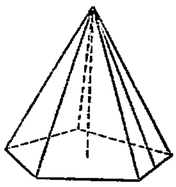
圓柱體的側面積＝高×底面的圓周。

圓柱體的全面積＝側面積＋兩底面積。

圓柱體的體積＝高×底面積。

259. 正角錐體的面積和體積.

由一個正多邊形和若干個二等邊三角形所圍成的立體叫做"**正角錐體**"，那正多邊形叫做"底"。各個二等邊三角形的底邊的長和底的一邊的長相等，而它們的高叫做正角錐體的"斜高"，各個二等邊三角形的等邊所夾的角聚合之一點叫做"錐頂"。從錐頂到底的垂直線的長叫做"高"。



圍成正角錐體的各個二等邊三角形之面積的和叫做"側面積"。側面積與作為底之正多邊形的面積之總和，叫做"全面積"。

正角錐體的側面積＝$\frac{1}{2}$×斜高×底面的周圍。

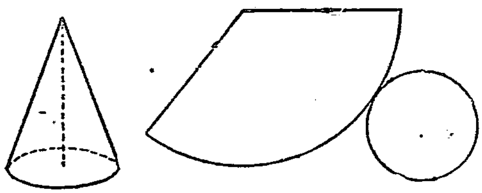
正角錐體的全面積＝側面積＋底面積。

正角錐體的體積＝$\frac{1}{3}$×高×底面積。

260. 正圓錐體的面積和體積.

由一個圓和一個扇形所圍成的立體叫做"**正圓錐體**"，這圓

叫做"底"，由扇形捲成之尖頂叫做"錐頂"；從錐頂到底的垂線的長叫做"高"，而從錐頂到底的邊緣的直線的長叫做"斜高"。



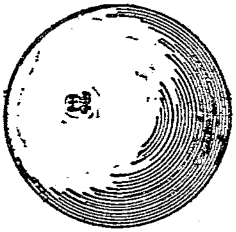
圍成圓錐體之扇形的面積，叫做"側面積"，側面積與作爲底之圓的面積的總和，叫做"全面積"。

$$正圓錐體的側面積=\frac{1}{2}\times 斜高\times 底面的圓周。$$

$$正圓錐體的全面積=側面積+底面積.$$

$$正圓錐體的體積=\frac{1}{3}\times 高\times 底面積.$$

261. 球的面積和體積.



以圓的直徑作軸，把圓旋轉半圈，圓周所圍成的空間叫做"球"。原來的圓心叫做"球心"，球的半徑和直徑與圓的半徑和直徑相同.

$$球的面積=4\times\pi\times 半徑^2$$
$$=\pi\times 直徑^2.$$

$$球的體積=\frac{4}{3}\times\pi\times 半徑^3.$$

若以 S 表示球的面積，V 表示球的體積，r 表示球的半徑，

則：

$$S=4\times\pi\times r^2.$$

$$V=\frac{4\times\pi\times r^3}{3}.$$

習題九十

1. 一個長立方體，長1尺，闊8寸，高6寸．求它的全面積和體積。

2. 一個正立方體的體積是19683立方寸，求它的邊長和全面積。

3. 一個正角柱體，它的底是一個每邊4寸的等邊三角形，它的高是10寸。求它的側面積，全面積和體積．

4. 一個正角柱體，底是一個每邊3寸的正方形，高是9寸．求它的側面積，全面積和體積．

5. 掘一溝長147尺，闊28尺，深18尺．將掘起的土堆成一個立方體，求這立方體每邊的長．

6. 一個正圓柱體，底的半徑是2寸，高2寸．求它的全面積和體積．

7. 地球表面包滿空氣，厚約60公里．求空氣的體積．

8. 一個正角錐體的底是每邊6寸的等邊三角形，高8寸。求體積．

9. 一個正角錐體的底是每邊4寸的正方形，斜高是6寸。求全面積。

10. 一個正圓錐體，底的半徑是5寸，斜高是8寸．求它的體積．

11. 一個空心橡皮球，直徑3寸．面積多少？若球壁厚2寸，要用多少立方寸的橡皮才能做成？

12. 一個直徑5尺，高10尺的圓柱形木桶，中盛清水半桶，投入一直徑4尺半的鐵球，水面上升多少？

13. 一根長25尺，寬3尺的正角柱體，改成圓柱體，至少要刨去多少立方尺的木材？

14. 用鑌鐵做一個口徑5寸的漏斗，漏斗壁的斜高是6寸．要用多少鑌鐵？這漏斗可以容多少水？

第十五章 統計圖表

262. 統計

把日常所遇到的性質相同，或種類相同的各個量，經過一番整理，按照一定的次序記錄下來，作爲研究的材料和根據，就叫"統計". 如某校初中部各班學生人數之統計：初一上 45 人，初一下 48 人，初二上 39 人，初二下 41 人，初三上 37 人，初三下 35 人.

263. 統計表.

統計所得之結果，爲了便於查考起見，常列成表格的形式. 這表格叫做"統計表". 列表的方法，把不同的各項名稱寫成一列，再把各項統計所得的數字，按各項的次序另寫成一列，如將上列某校初中部各班之學生人數統計列成一統計表，則把班別寫成一列，各班人數塡寫在班別下方，另成一列：

班　　別	初一上	初一下	初二上	初二下	初三上	初三下
人　　數	45	48	39	41	37	35

有些統計表，除了表明各個量外，還表明各個量和總量的百分比. 要在統計表上表明百分比，在統計表上應添加合計一項，

把各量之總和填入此項，以合計項下的量為100，再求各量佔全量的百分之幾，填於各項下面。如二十五年重慶市發電廠之用途統計表：

類別	電燈	電力	電熱	合計
用電度數	1,318,000	651,000	17,000	1,986,000
百分比	66.4	22.8	0.8	100

幾個統計表的性質類似，項目相同，可以合併起來，列成一個統計表，使便於考查，如下列三個表：

三十年度四川省大學統計表

類別	國立	省立	私立	合計
校數	5	1	5	11

三十年度四川省學院統計表

類別	國立	省立	私立	合計
校數	4	1	4	9

三十年度四川省專科學校統計表

類別	國立	省立	私立	合計
校數	8	3	3	14

此三表性質類似，項目相同，因此可合併成為下列之統計表：

三十年度四川省專科以上學校統計表

校數　類別 等級	國立	省立	私立	合計
大學	5	1	5	11
學院	4	1	4	9
專科學校	8	3	3	14

有些統計表爲了目的或需要的不同，使格式簡明，只列出各量的總量的百分比，如：

四川省紡織工業概況統計表
（表內各數字表示百分比）

類別	廠數	資本	工人	動力設備
棉紡廠	11.79	58.92	20.56	70.38
棉織廠	62.74	15.04	38.80	12.89
繅絲廠	10.27	14.77	29.63	1.61
絲織廠	4.56	2.11	2.43	2.15
毛紡織廠	3.04	4.95	5.11	6.32
麻紡織廠	1.52	1.96	1.14	3.72
漂染廠	2.66	1.62	0.80	2.43
藥棉紗布廠	1.90	0.50	0.77	0.39
軋棉彈花廠	1.52	0.13	0.76	0.11
合計	100.00	100.00	100.00	100.00

有些量是依着時間而變化的,也可以用統計表來表示,如:

民國十六年至二十五年間四川省主要
出口貨物輸出量表(單位是元)

年別	山貨	桐油	生絲	藥材	夏布
十六	4,062,557	4,096,118	7,622,225	4,061,070	6,073,323
十七	4,003,808	6,530,251	8,541,965	4,845,632	4,425,189
十八	4,308,411	8,916,500	11,425,658	5,025,648	4,621,130
十九	5,076,713	7,745,014	12,503,519	5,593,884	5,569,293
二十	4,458,397	4,650,706	9,102,861	5,937,370	3,216,654
二十一	3,110,740	5,242,996	5,926,861	3,757,261	584,101
二十二	4,535,931	7,626,143	4,443,987	3,343,731	184,308
二十三	5,299,797	3,963,942	1,712,547	3,720,832	183,257
二十四	5,309,253	8,747,128	551,245	2,844,583	105,328
二十五	8,848,020	29,016,730	1,121,124	3,630,505	525,603

264. 物價和物價指數.

貨物的價格常因爲時間的變遷而有漲落,這漲落的情形可以用統計表表明出來.爲了比較時的方便,常定某一個時間的價格爲 100 作爲基準,而以別的時間的價格和這一定價格的比值來表示物價的漲落.這比值叫做"**物價指數**".而作爲基準的價格叫做"**基價**".如:

成都市三十二年度逐月米價表

月份	每石價(元)	指數
一	452.67	100.00
二	525.96	116.18
三	605.65	133.79
四	788.67	147.23
五	1,121.67	247.92
六	1,135.00	299.56
七	2,006.31	443.19
八	1,747.42	386.03
九	1,493.00	329.82
十	1,338.71	295.73
十一	1,457.50	321.97
十二	1,726.61	381.43

貨物的價格又常因地域不同而有高低，這也可以用統計表來表示.爲了比較時的方便,常定某一地方的價格爲 100 作爲基準,而以別地方的價格和這一定價格的比值來表示價格的高低,這比值也叫做"物價指數".作爲基準的價格也叫做"基價". 如:

三十二年六月四川省各地米價比較表

地域	每石價(元)	指數
成都	1,356.00	100.00
樂山	901.57	73.08
內江	1,136.00	83.77
南充	980.63	72.32
合川	937.05	63.93
萬縣	1,198.00	88.35
瀘州	1,413.00	104.20

習題九十一

1. 將本校各班同學人數列成一統計表.

2. 將本校五年以來每期學生人數列成一統計表.

3. 將本班同學之籍貫列成一統計表.

4. 將每週各種課程所授之時數列成一統計表，並註明其百分率。

5 調查一年內某幾種日用品價格逐月漲落的狀況列成一統計表。

6. 成都市某中學三十三年春季，第一週至第二十週學生之伙食費如下:

第 一 週 238.34 元，	第 二 週 245.30 元，
第 三 週 254.40 元，	第 四 週 248.00 元，
第 五 週 259.25 元，	第 六 週 260.00 元，
第 七 週 271.20 元，	第 八 週 248.00 元，
第 九 週 301.20 元，	第 十 週 320.48 元.
第十一週 315.50 元，	第十二週 310.00 元，
第十三週 305.20 元，	第十四週 290.80 元，
第十五週 312.95 元，	第十六週 328.20 元，
第十七週 350.10 元，	第十八週 332.70 元，
第十九週 347.30 元，	第二十週 324.72 元，

今以第一週之伙食費爲基價，求各週伙食費之物價指數.

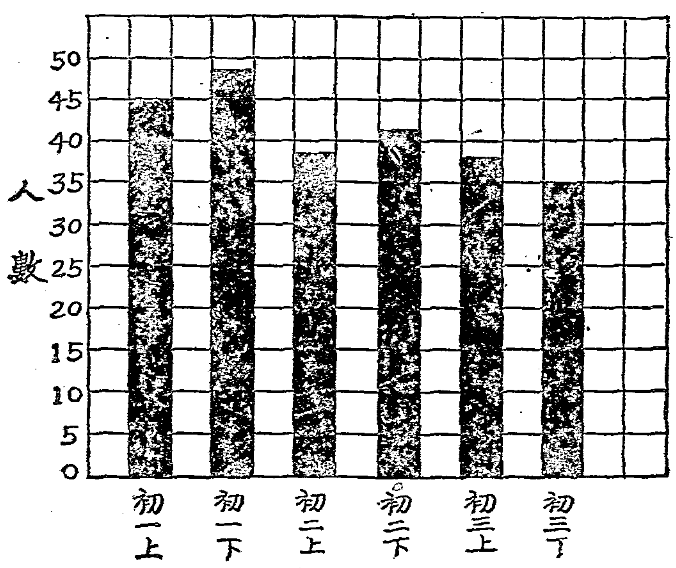
265. 統計圖.

爲了使統計的結果很明顯的表示出來，常用線條的長短，圖形的大小，色彩的不同和深淺，圖案的不同等種種方法來表示統計的結果. 其中利用色彩和圖案的，常爲地理學上的統計所採用，例子可以在各種地圖上找到，如地勢高低圖. 其餘的可分直線圖，曲線圖，折線圖，圓形圖等類.

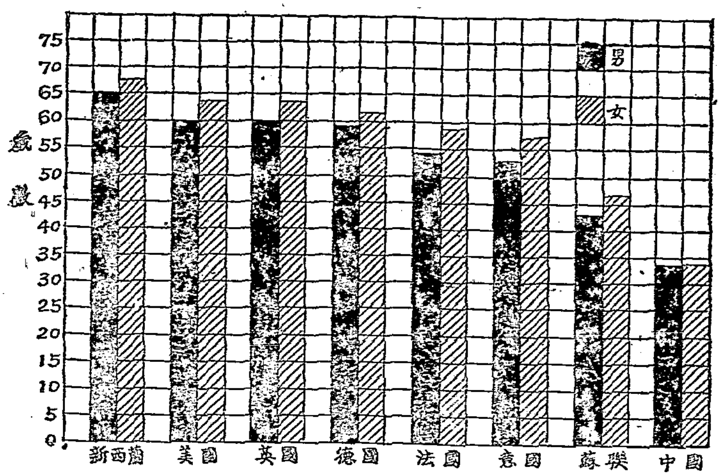
266. 直線圖.

假如所統計的各個量並沒有連續性而是各自獨立的，常用直線的長短來表示量的多少，這樣的統計圖叫做“直線圖”. 繪直線圖的方法先將圖的一邊(橫邊和豎邊都可以)繪成相等的分

度，決定一分度表示多少量，填定從一端起到各分度的長度所表示的量（橫邊自左端起，豎邊自下端起）。在圖的另一邊以相等的距離，挨次填定各項的位置，再依各項的量的多少按照另一邊的分度繪成長短不同的直線。如將 262 節之統計表繪成直線圖如下：



幾項性質相同的統計結果，可以用同一張直線圖來表示，而用不同之顏色或線段來區別各個項目。如將各國男女之平均壽命之統計，在同一張直線圖中表示出來：

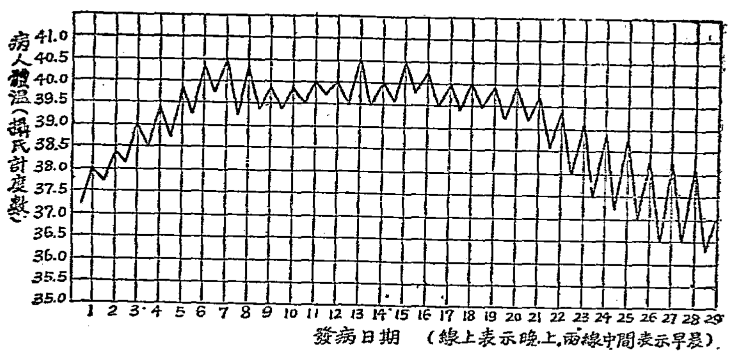


267. 折線圖和曲線圖.

所統計的各個量若有連續性的，如各個量是隨着時間而變化的，用直線圖表示即不甚妥當，因此常用折線圖或曲線圖來表示。

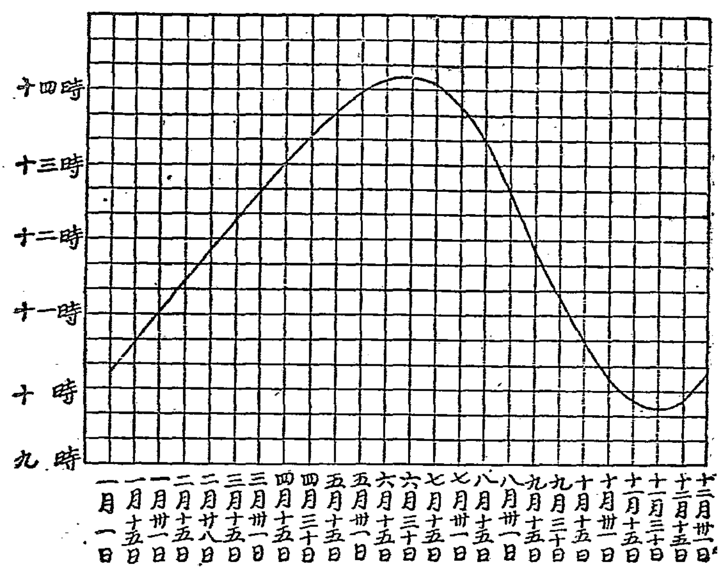
為方便起見，折線圖常繪於印有方格之紙上，以任意兩條相交的直線作為圖的兩邊，與繪直線圖相同，在豎邊上，決定每一格表示多少量，在每一條橫線上自下至上挨次填定各線所表示之量，但不必定以"0"為起點，起點只要比最小之量較小即可。在橫邊上，決定每一格表示相隔多少時間，再自左至右在每條豎線下面填定各豎線所表示的時間。

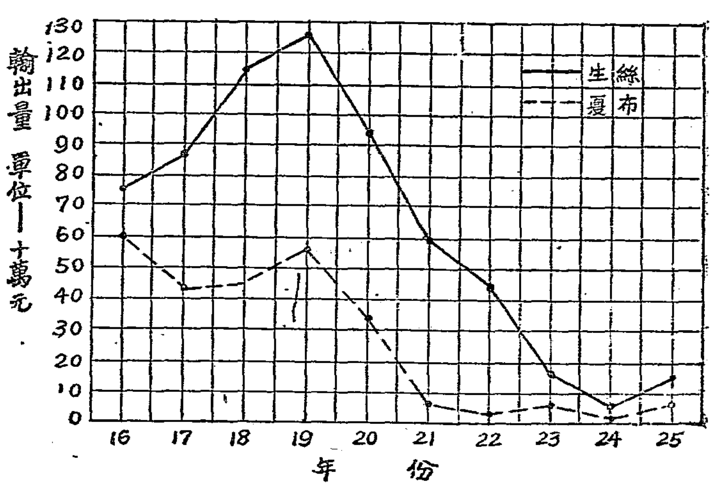
圖中的任意一點,依橫的方向來看,就表示某一定的時間,依竪的方向來看,就表示某一定的量.依據這方法把統計所得之各個量,用圓點繪在圖上.再用直線將各個圓點連結起來,就成爲折線圖了.如將傷寒病人的體温變化,依照一定的時間記錄下來,繪成折線圖如下:



若所統計的各個量雖隨時間變化,但並非驟增驟減,而有自然的規律的,用折線圖表示即不妥當,應該用曲線圖表示.曲線圖之作法與折線圖相同,只是各點間用平滑之曲線相連結.如將每年晝長的變化繪成曲線圖,則如下頁上圖所示.

幾項性質相同的統計結果可以用同一張折線圖或曲線圖來表示,而用不同之顏色或線段來區別各個項目.如將民國十六年四川省輸出之生絲及夏布的數量,表示在同一張折線圖中,則如下頁下圖所示.

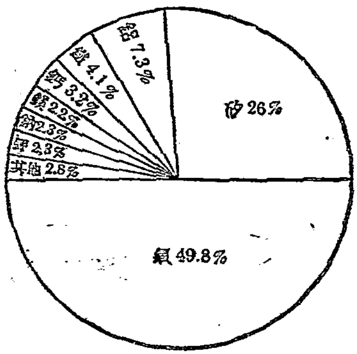

十四時
十三時
十二時
十一時
十時
九時
一月一日
一月十五日
一月卅一日
二月十五日
二月廿八日
三月十五日
三月卅一日
四月十五日
四月三十日
五月十五日
五月卅一日
六月十五日
六月三十日
七月十五日
七月卅一日
八月十五日
八月卅一日
九月十五日
九月三十日
十月十五日
十月卅一日
十一月十五日
十一月三十日
十二月十五日
十二月卅一日


輸出量 單位—十萬元
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
生絲
夏布
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
年份

268. 圓形圖.

要表示所統計之各個量與總量的百分比，常用“圓形圖”．作圓形圖須先依照第 262 節的方法求出各量與總量之百分比．以任意長作半徑繪一個圓，將此圓作爲總量，以圓周的某一點作起點，將圓周分成一百等分，挨次按各個量之百分比在圓周上截取若干等分，再將所截線段之兩端與圓心相聯結，即成圓形圖．圖上各個扇形之面積和圓面積之比，適與各個量與總量之比相等．

通常於各扇形上塗不同之顏色，或繪不同之圖案，以使其易於區別．如將地球及大氣中所含各元素量之比較繪成圓形圖如下：



圖內各數字爲百分率

習題九十二

1. 將民國十六年至二十五年四川省山貨藥材輸出量繪成一折線圖表．

2. 將民國三十二年四川省各地米價繪成一直線圖表.

3. 在四川省紡織工業概況統計表中，將廠數及資本兩項各繪成圓形圖表。

4. 下表爲十四歲至十八歲之我國人平均身長體重表，試根據它繪成曲線圖。

歲數	身長(公尺)	體重(公斤)
14	1.606	47.4
15	1.632	49.9
16	1.658	51.9
17	1.666	53.3
18	1.674	54.1

5. 將四川省的大學，學院及專科學校的數目繪成一直線圖，並分別標出國立，省立及私立的類別。

中西名詞對照表

三角形 Triangle
上底 Upper base
下底 Lower base
中心 Center
不盡平方根 Square surd
不盡立方根 Cubic surd
內項 Means
日利率 Rate of interest per day
月利率 Rate of interest per month
反比 Inverse ratio
反比例 Inverse proportion
比 Ratio
比例 proportion
比值 Value of ratio
公債票 Bond
勾 Leg of a right triangle
正方形 Square
正比 Direct ratio
正比例 Direct proportion
正立方體 Regular cube
正多邊形 Regular polygon
正角柱體 Right prism
正圓錐體 Right circular cone
立方 Cube
平行四邊形 Parallelogram
半徑 Radius
本金 Principal
市價 Market price
加成 Additional Price
加成率 Rate of additional price
出口稅 Export tax
外項 Extreme
百分法 Percentage
百分率 Rate
全面積 Total area
年利率 Rate of interest per annum
劣比 Ratio of less inequality
佣金 Commission
佣率 Rate of commission
利息 Interest
利率 Rate of interest
折扣 Discount
折扣率 Rate of discount
求積法 Mensuration
直徑 Diameter
弦 Hypotenuse
股 Leg of a right triangle
股票 Stock
物價指數 Index number of prices
近似值 Approximate value
底 Base
長 Length
長方形 Rectangle
長斜方形 Rhomboid

前項 Antecedent
面積 Area
垂直線 Perpendicular
保險公司 Insurance company
保險單 Policy
保險費 Premium
保險率 Rate of insurance
保險額 Face of policy
紅利 Bonus
後項 Consequent
高 Height
傭客 Broker
乘方 Power
配分比例 proportional division
根號 Radical sign
根指數 Index of the radical
現價 Present value
票面額 Face value
梯形 Trapezoid
斜方形 Rhombus
連比 Continued ratio
連鎖比例 Chain proportion
混合法 Alligation
側面積 Lateral area
基價 principal price
開方 Extraction of square root
開立方 Extraction of cubic root
斜高 Slant height
項 Term
單比 Simple ratio
單比例 Simple proportion
單利法 Simple interest
期數 Period
期票 Promissory notes
稅率 Rate of tax
貼現 Bank discount
進口稅 Import tax
國稅 National tax
匯兌 Exchange
匯費 Remittance fee
匯率 Rate of exchange
圓 Circle
圓心 Center of circle
圓柱體 Circular cylinder
圓周 Circumference
對角線 Diagonal
誤差 Error
誤差的界限 Limit of error
複比 Compound ratio
複比例 Compound proportion
複利法 Compound interest
複利表 List of compound interest
賠 Loss
賠率 Rate of loss
錐頂 Vertex of pyramid
賺 Gain
賺率 Rate of gain
優比 Ratio of greater inequality
闊 Breadth

教育部教科圖書審定執照

茲據開明書店呈送[illegible]書編初

中算術教本共二冊經本部審定合於

初級中學之用其有效期限三學年自

卅六年七月一日起至卅九年

六月卅日止合行發給執照

右給開明書店收執

部長[illegible]

中華民國卅[illegible]年[illegible]月一日

[illegible]字第[illegible]號

開明新編初中算術教本　下冊

三十五年十二月初版　三十七年五月三版

每冊定價國幣九角

編著者　夏承法　葉至善

上海福州路

發行者　開明書店

代表人范洗人

印刷者　開明書店

(71 P.) Y　泛