Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 57

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 57.1. Man gebe ein Beispiel für einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum (M, P) und Ereignisse $E, F_1, F_2 \subseteq M$ derart, dass E zu F_1 und zu F_2 unabhängig ist, aber nicht zu $F_1 \cap F_2$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 57.2. Die Lieblingseissorten von Lucy Sonnenschein sind Himbeereis, Heidelbeereis und Erdbeereis, die sie stets mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ auswählt. Sie steht am Eisstand und wählt hintereinander und unabhängig voneinander drei Kugeln aus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede ihrer Lieblingssorte in ihrem Becher vertreten ist.

Aufgabe 57.3. Es sei (M, P) ein Laplace-Raum mit n Elementen und seien $E, F \subseteq M$ Ereignisse.

(1) Zeige, dass E und F genau dann unabhängig sind, wenn
$$n \cdot \# (E \cap F) = \# (E) \cdot \# (F)$$
gilt.
(2) Zeige durch ein Beispiel, dass nichtleere Ereignisse unabhängig sein können, ohne dass ihre Anzahlen Teiler von n sind.
(3) Es seien r, s natürliche Zahlen mit $0 \leq r, s \leq n$ und derart, dass n ein Teiler von rs ist. Zeige, dass es unabhängige Ereignisse in M gibt, deren Anzahlen gleich r bzw. s sind.

Aufgabe 57.4. Es seien $E, F \subseteq M$ Ereignisse in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum M mit positiven Wahrscheinlichkeiten und mit
$$E \cap F = \emptyset.$$
Zeige, dass E und F nicht unabhängig sein können.

Aufgabe 57.5. Es seien $M = \{a,b,c\}$ und $N = \{r,s\}$ Laplace-Räume und $M \times N$ der Produktraum. Bestimme, welche der folgenden Ereignisse in $M \times N$ zueinander unabhängig sind.

$$E = \{a,b\} \times \{r\},\ F = \{a,c\} \times N,\ G = \{(b,r)\},\ H = \{(b,r),(c,s)\},$$
$$I = M \times \{r\},\ J = \{(b,r),(b,s)\}.$$

Aufgabe 57.6.*

(1) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei aufeinander folgenden Lottoziehungen die gleichen Zahlen gezogen werden?
(2) Bauer Ernst spielt jede Woche Lotto. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er zweimal hintereinander sechs Richtige hat?

Aufgabe 57.7. Es wird fünfmal eine faire Münze geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse und ob es sich um unabhängige Ereignisse handelt.

A = der dritte Wurf ergibt Kopf,

B = es gibt insgesamt zumindest vier Kopfwürfe,

C = unter den ersten drei Würfen gibt es zumindest zwei Kopfwürfe,

D = der vierte Wurf ergibt Zahl,

E = der erste, der dritte und der fünfte Wurf haben das gleiche Ergebnis.

Aufgabe 57.8. Es wird zwanzig Mal eine faire Münze geworfen. Bei den ersten zehn Würfen lautet das Ergebnis sechsmal Kopf, bei den zweiten zehn Würfen lautet das Ergebnis viermal Kopf. Sind diese Ereignisse unabhängig?

Aufgabe 57.9.*

Lucy Sonnenschein befindet sich im Punkt $(0,0)$. Sie führt hintereinander und unabhängig voneinander drei Sprünge aus, die jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links, nach rechts, nach vorne oder nach hinten gehen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zum Schluss von ihrem Ausgangspunkt einen Abstand von zumindest 3 besitzt?

Aufgabe 57.10.*

Lucy Sonnenschein befindet sich im Punkt $(0,0)$. Sie führt hintereinander und unabhängig voneinander vier Sprünge aus, die jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links, nach rechts, nach vorne oder nach hinten gehen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie zum Schluss von ihrem Ausgangspunkt einen Abstand von zumindest 3 besitzt?

Aufgabe 57.11.*

Lucy Sonnenschein und ihre kleine Schwester Veronika befinden sich auf der Zahlengeraden im Punkt 0. Beide führen unabhängig voneinander fünf Sprünge aus, wobei die Sprünge von Lucy mit gleicher Wahrscheinlichkeit zwei Einheiten nach rechts oder nach links und die Sprünge von Veronika mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Einheit nach links oder nach rechts gehen.

(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lucy sich zum Schluss in der Position 6 befindet?
(2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Veronika sich zum Schluss in einer Position befindet, die vom Nullpunkt den Abstand 5 besitzt?
(3) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lucy und Veronika sich zum Schluss in der gleichen Position befinden?

Aufgabe 57.12. Es sei ein Kreis mit sechs (äquidistanten) Knoten gegeben, die mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bezeichnet seien. Bei einem Bewegungsprozess seien die Wahrscheinlichkeiten, stehen zu bleiben oder zu dem linken oder rechten Nachbarn zu wechseln, konstant gleich $\frac{1}{3}$.

(1) Der Bewegungsprozess wird zweimal unabhängig voneinander durchgeführt. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, mit denen man zu den verschiedenen Positionen gelangt.
(2) Der Bewegungsprozess wird dreimal unabhängig voneinander durchgeführt. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, mit denen man zu den verschiedenen Positionen gelangt.
(3) Der Bewegungsprozess wird viermal unabhängig voneinander durchgeführt. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten, dass man danach wieder in der Ausgangsposition ist.

Aufgabe 57.13.*

Es werden unabhängig voneinander zwei Zahlen x, y aus $\{1, 2, \ldots, 10\}$ gezogen (mit Zurücklegen). Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass

$$xy \geq 50$$

ist.

Aufgabe 57.14.*

Es werden unabhängig voneinander zwei Zahlen x, y aus $\{1, 2, \ldots, 10\}$ gezogen (mit Zurücklegen). Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass xy eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 57.15. Es werden unabhängig voneinander zwei Zahlen x, y aus $\{1, 2, \ldots, 10\}$ gezogen (mit Zurücklegen). Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass xy eine Primzahl ist.

Aufgabe 57.16. Ein Würfel wird zweimal geworfen. Es sei F_i das Ereignis, dass beim ersten Wurf i geworfen wird, es sei G_j das Ereignis, dass beim zweiten Wurf j geworfen wird, und es sei E das Ereignis, dass das Ergebnis beim zweiten Wurf um eins größer als beim ersten Wurf ist. Welche dieser Ereignisse sind unabhängig, welche nicht?

Aufgabe 57.17. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Es sei E das Ereignis, dass das Ergebnis beim zweiten Wurf um eins größer als beim ersten Wurf ist, und es sei F das Ereignis, dass das Ergebnis beim dritten Wurf um eins größer als beim zweiten Wurf ist. Sind diese Ereignisse unabhängig?

Aufgabe 57.18.*

Es seien $p_1, \ldots, p_k$ verschiedene Primzahlen und n ihr Produkt. Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $M = \{1, \ldots, n\}$ mit der Laplace-Dichte. Es sei E_i das Ereignis, das eine Zahl aus M ein Vielfaches von p_i ist. Zeige, dass die E_i vollständig unabhängig sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 57.19. (4 Punkte)

Es sei G das Ereignis, dass bei einer Lottoziehung mindestens eine gerade Zahl gezogen wird. Es sei U das Ereignis, dass bei einer Lottoziehung mindestens eine ungerade Zahl gezogen wird. Sind diese Ereignisse unabhängig voneinander?

Aufgabe 57.20. (3 Punkte)

Es seien $M = \{a, b, c, d\}$ und $N = \{x, y, z\}$ Laplace-Räume und $M \times N$ der Produktraum. Bestimme, welche der folgenden Ereignisse in $M \times N$ zueinander unabhängig sind.

$$E = \{a, b, d\} \times \{y, z\},\ F = \{a, c\} \times N,\ G = \{(b, y)\},\ H = \{(b, y), (d, z)\}\,,$$

$$I = M \times \{z\},\ J = \{(b, x), (b, y), (b, z)\},\ K = \{a\} \times N,\ L = M \times \{x, y\}\,,$$

Aufgabe 57.21. (5 Punkte)

Lucy Sonnenschein befindet sich im Punkt $(0, 0)$. Sie führt hintereinander und unabhängig voneinander vier Sprünge aus, die jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach links, nach rechts, nach vorne oder nach hinten gehen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich zum Schluss wieder in ihrem Ausgangspunkt befindet?

Aufgabe 57.22. (4 Punkte)

Es werden unabhängig voneinander zwei Zahlen x, y aus $\{1, 2, \ldots, 10\}$ gezogen (mit Zurücklegen). Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass

$$xy \leq 32$$

ist.

Abbildungsverzeichnis