

## Grundkurs Mathematik I

### Arbeitsblatt 6

#### Die Pausenaufgabe

AUFGABE 6.1. Auf der linken Tafel ist eine gewisse Anzahl von Äpfeln angemalt. Diese Anzahl soll durch eine Menschenkette in eine Strichfolge auf die rechte Tafel übertragen werden, wobei nur eine Person die Äpfel sehen darf. Es darf nicht gesprochen werden und niemand darf sich von der Stelle bewegen. Ebenso wenig darf auf Zählkenntnisse Bezug genommen werden.

#### Übungsaufgaben

AUFGABE 6.2. Man mache sich klar, in welcher Weise die in der Vorlesung angeführten Diagramme Abbildungen darstellen.

AUFGABE 6.3.\*

- (1) Es sei  $H$  die Menge aller (lebenden oder verstorbenen) Menschen. Untersuche die Abbildung

$$\varphi: H \longrightarrow H,$$

die jedem Menschen seine Mutter zuordnet, auf Injektivität und Surjektivität.

- (2) Welche Bedeutung hat die Hintereinanderschaltung  $\varphi^3$ ?  
(3) Wie sieht es aus, wenn man die gleiche Abbildungsvorschrift nimmt, sie aber auf die Menge  $E$  aller Einzelkinder und auf die Menge  $M$  aller Mütter einschränkt?  
(4) Seien Sie spitzfindig (evolutionsbiologisch oder religiös) und argumentieren Sie, dass die Abbildung in (1) nicht wohldefiniert ist.

AUFGABE 6.4. Wir betrachten die Mengen

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, M = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$\text{und } N = \{R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$$

und die Abbildungen  $\varphi: L \rightarrow M$  und  $\psi: M \rightarrow N$ , die durch die Wertetabellen

2

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	$c$	$e$	$f$	$d$	$e$	$a$	$b$	$a$

und

$y$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
$\psi(y)$	$X$	$Y$	$R$	$R$	$T$	$W$	$U$

gegeben sind.

- (1) Erstelle eine Wertetabelle für  $\psi \circ \varphi$ .
- (2) Sind die Abbildungen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\psi \circ \varphi$  injektiv?
- (3) Sind die Abbildungen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\psi \circ \varphi$  surjektiv?

AUFGABE 6.5. Betrachte auf der Menge  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  die Abbildung

$$\varphi: M \longrightarrow M, x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne  $\varphi^{1003}$ , also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von  $\varphi$  mit sich selbst.

AUFGABE 6.6. Der Pferdepfleger hat einen Korb voller Äpfel und geht auf die Weide, um die Äpfel an die Pferde zu verteilen. Danach geht jedes Pferd in seine Lieblingskuhle und macht dort einen großen Pferdeapfel. Modelliere den Vorgang mit geeigneten Mengen und Abbildungen. Man mache sich die Begriffe injektiv und surjektiv an diesem Beispiel klar. Kann die Gesamtabbildung surjektiv sein, wenn es 10 Äpfel, 6 Pferde und 8 Kuhlen gibt?

AUFGABE 6.7.\*

Es sei  $M$  eine endliche Menge und  $\varphi: M \rightarrow M$  eine Abbildung. Es sei  $\varphi^n$  die  $n$ -fache Hintereinanderschaltung von  $\varphi$  mit sich selbst. Zeige, dass es natürliche Zahlen  $m > n \geq 1$  mit  $\varphi^n = \varphi^m$  gibt.

AUFGABE 6.8. Welche Funktionsvorschriften kennen Sie aus der Schule?

AUFGABE 6.9. Welche bijektiven Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (oder zwischen Teilmengen von  $\mathbb{R}$ ) kennen Sie aus der Schule? Wie heißen die Umkehrabbildungen?

AUFGABE 6.10. Bestimme die Hintereinanderschaltungen  $\varphi \circ \psi$  und  $\psi \circ \varphi$  für die Abbildungen  $\varphi, \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 2x + 1 \text{ und } \psi(x) = x^2 - 5$$

definiert sind.

AUFGABE 6.11.\*

Es seien  $L, M, N$  Mengen und

$$f: L \longrightarrow M \text{ und } g: M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f: L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn  $g \circ f$  injektiv ist, so ist auch  $f$  injektiv.

AUFGABE 6.12. In der Planung für einen Laufwettbewerb wurden die folgenden Bahnen vergeben.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(k)$	$N$	$C$	$Z$	$G$	$R$	$D$	$M$	$S$

Leider wurden  $C$  und  $R$  des Dopings überführt und dürfen nicht teilnehmen. In dieser Situation möchte man auf die Außenbahnen 7 und 8 verzichten. Erstelle aus der Nummerierung  $F$  eine möglichst einfache neue Nummerierung (also eine bijektive Abbildung) für die neue Situation.

AUFGABE 6.13. Nach dem Mittagessen wollen Frau Maier-Sengupta und Herr Referendar Lutz mit den Kindern  $A, B, C, G, H, L, M, R, T$  eine Bootsfahrt machen, wozu jedes Kind eine Nummer zwischen 1 und 9 braucht. Frau Maier-Sengupta ist vor dem Mittagessen mit einem Teil der Kinder auf dem Spielplatz und verteilt dabei schon mal die Nummern

$n$	1	2	3	4	5	6
$\varphi(n)$	$A$	$G$	$R$	$H$	$L$	$B$

Beim Abräumdienst nach dem Mittagessen legt Herr Lutz (ohne Rücksprache) folgende Nummern fest

$n$	1	2	3	4	5
$\psi(n)$	$L$	$C$	$M$	$G$	$T$

Lucy (L) wollte zwar sagen, dass sie schon eine Nummer hat, doch das wurde von Gabi (G) verhindert. Am Boot entscheidet dann Frau Maier-Sengupta, dass die Spielplatzkinder ihre Spielplatznummern behalten und dass die übrigen Kinder die hinteren Nummern 7 – 9 in der von Herrn Lutz vergebenen Reihenfolge bekommen.

- (1) Erstelle eine Wertetabelle für die Bootsnummerierung.
- (2) Definiere die Bootsnummerierung als Abbildung  $\vartheta$  durch eine geeignete Fallunterscheidung.

AUFGABE 6.14. Es seien  $L$  und  $M$  Mengen und es sei  $F: L \rightarrow M$  eine bijektive Abbildung. Zeige: Wenn  $L$  endlich mit  $n$  Elementen ist, so ist auch  $M$  endlich mit  $n$  Elementen.

AUFGABE 6.15. Es seien  $S$  und  $T$  endliche Teilmengen einer Menge  $M$ . Zeige, dass dann auch die Vereinigung  $S \cup T$  endlich ist.

AUFGABE 6.16. Mustafa Müller und Heinz Ngolo haben jeweils mit einer Strichliste  $||| \dots |||$  ihre Fußballbildchen gezählt. Sie wollen wissen, wer mehr Bildchen hat, die Listen sind aber ziemlich lang und beim Zählen kommen sie durcheinander. Mustafa macht den Vorschlag, in der Liste immer vier Striche durch einen Querstrich zusammenzufassen und dann diese Blöcke zu zählen. Heinz sagt, dass das nicht geht, da so Fünferblöcke entstehen und dadurch das Ergebnis verfälscht wird. Was sagt Gabi Hochster?

In der folgenden Aufgabe bezeichnet  $\varphi(S)$  die Menge  $\{\varphi(x) \mid x \in S\}$  und  $\varphi^{-1}(T)$  die Menge  $\{x \in L \mid \varphi(x) \in T\}$ . Bestimme diese Mengen für die Hei-nonummierung aus Beispiel 6.7 für die Menge  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  und  $T = \{G, H, L, M\}$ .

AUFGABE 6.17. Es seien  $L$  und  $M$  zwei Mengen und  $\varphi: L \rightarrow M$  eine bijektive Abbildung zwischen diesen Mengen. Zeige, dass für jede Teilmenge  $S \subseteq L$  eine Bijektion  $S \rightarrow \varphi(S)$  vorliegt, und dass ebenso für jede Teilmenge  $T \subseteq M$  eine Bijektion  $\varphi^{-1}(T) \rightarrow T$  vorliegt.

AUFGABE 6.18. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass  $\varphi$  injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass  $\psi$  surjektiv, aber nicht injektiv ist.

## AUFGABE 6.19.\*

Betrachte die Abbildung

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto \begin{cases} -\frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Ist  $f$  injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

### Aufgaben zum Abgeben

## AUFGABE 6.20. (3 (1+1+1) Punkte)

Wir betrachten die Mengen

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

$$\text{und } N = \{R, S, T, U, V, W, X, Y, Z\}$$

und die Abbildungen  $\varphi: L \rightarrow M$  und  $\psi: M \rightarrow N$ , die durch die Wertetabellen

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	$c$	$i$	$a$	$g$	$d$	$e$	$h$	$b$

und

$y$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$
$\psi(y)$	$X$	$Z$	$Y$	$S$	$Z$	$S$	$T$	$W$	$U$

gegeben sind.

- (1) Erstelle eine Wertetabelle für  $\psi \circ \varphi$ .
- (2) Sind die Abbildungen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\psi \circ \varphi$  injektiv?
- (3) Sind die Abbildungen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\psi \circ \varphi$  surjektiv?

## AUFGABE 6.21. (3 (1+1+1) Punkte)

- (1) Kann eine konstante Abbildung bijektiv sein?
- (2) Ist die Hintereinanderschaltung einer konstanten Abbildung mit einer beliebigen Abbildung (also die konstante Abbildung zuerst) konstant?
- (3) Ist die Hintereinanderschaltung einer beliebigen Abbildung mit einer konstanten Abbildung (also die konstante Abbildung zuletzt) konstant?

## AUFGABE 6.22. (2 Punkte)

Es seien  $\mathbb{R}$  die reellen Zahlen und  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  die nichtnegativen reellen Zahlen. Bestimme für die folgenden Abbildungen, ob sie injektiv und ob sie surjektiv sind.

- (1)  $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2.$
- (2)  $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto x^2.$
- (3)  $\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2.$
- (4)  $\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto x^2.$

## AUFGABE 6.23. (3 Punkte)

Es seien  $L, M, N$  Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn  $g \circ f$  surjektiv ist, so ist auch  $g$  surjektiv.

### Die Aufgabe zum Aufgeben

Lösungen zu der folgenden Aufgabe direkt an den Dozenten (Postkasten). Bis Weihnachten. Die Konzepte Tupel, Betrag, Abbildung, Iteration werden bald eingeführt, sind aber vermutlich schon bekannt.

AUFGABE 6.24. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{N}^4 \longrightarrow \mathbb{N}^4,$$

die einem Vierertupel  $(a, b, c, d)$  das Vierertupel

$$(|b - a|, |c - b|, |d - c|, |a - d|)$$

zuordnet. Man gebe ein Beispiel für ein Vierertupel  $(a, b, c, d)$  mit der Eigenschaft an, dass sämtliche Iterationen  $\Psi^n(a, b, c, d)$  für  $n \leq 25$  nicht das Nulltupel liefern.

Überprüfe das Ergebnis auf <http://www.vier-zahlen.bplaced.net/raetsel.php>

## Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7