Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 39

Definitheit von Bilinearformen

Wir möchten die symmetrischen Bilinearformen über den reellen Zahlen klassifizieren.[1] Dabei spielen die Skalarprodukte als Extremfall eine Schlüsselrolle.

Definition 39.1. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -,-\rangle$. Diese Bilinearform heißt

(1) *positiv definit*, wenn $\langle v,v\rangle > 0$ für alle $v \in V$, $v \neq 0$ ist.
(2) *negativ definit*, wenn $\langle v,v\rangle < 0$ für alle $v \in V$, $v \neq 0$ ist.
(3) *positiv semidefinit*, wenn $\langle v,v\rangle \geq 0$ für alle $v \in V$ ist.
(4) *negativ semidefinit*, wenn $\langle v,v\rangle \leq 0$ für alle $v \in V$ ist.
(5) *indefinit*, wenn $\langle -,-\rangle$ weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

Positiv definite symmetrische Bilinearformen sind genau die reellen Skalarprodukte. Eine indefinite Form liegt vor, wenn es Vektoren v und w mit $\langle v,v\rangle > 0$ und $\langle w,w\rangle < 0$ gibt. Die Nullform ist zugleich positiv semidefinit und negativ semidefinit, aber weder positiv definit noch negativ definit. Eine Bilinearform auf V kann man auf einen Untervektorraum $U \subseteq V$ einschränken, wodurch sich eine Bilinearform auf U ergibt. Wenn die ursprüngliche Form positiv definit ist, so überträgt sich dies auf die Einschränkung. Allerdings kann eine beliebige Form eingeschränkt auf gewisse Unterräume positiv definit werden und auf andere negativ definit. Dies führt zu folgender Definition.

Definition 39.2. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -,-\rangle$. Man sagt, dass eine solche Bilinearform den *Typ*

$$(p,q)$$

[1] Unter einer *Klassifikation* versteht man in der Mathematik, eine Menge an mathematischen Objekten vollständig und übersichtlich zu beschreiben, Kriterien anzugeben, wann zwei Objekte im Wesentlichen gleich (oder äquivalent) sind und die verschiedenen Objekte durch numerische Invariante zu erfassen und für die Objekte möglichst einfache Vertreter anzugeben. Beispielsweise werden endlichdimensionale Vektorräume durch ihre Dimension klassifiziert, gleichdimensionale Vektorräume sind zueinander isomorph. Lineare Abbildungen von $\mathbb{C}^n$ in sich werden über die jordansche Normalform klassifiziert. Die entscheidende Frage ist hierbei, welche Jordanblöcke mit welcher Länge und zu welchen Eigenwerten wie oft vorkommen? Hier besprechen wir den Typ einer reell-symmetrischen Bilinearform. Andere Klassifikationsresultate in der linearen Algebra beziehen sich auf quadratische Formen und auf endliche Bewegungsgruppen im Raum.

besitzt, wobei

$$p := \max \left(\dim_{\mathbb{R}} (U), U \subseteq V, \langle -, - \rangle |_U \text{ positiv definit} \right)$$

und

$$q := \max \left(\dim_{\mathbb{R}} (U), U \subseteq V, \langle -, - \rangle |_U \text{ negativ definit} \right)$$

ist.

Bei einem Skalarprodukt auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum ist der Typ $(n, 0)$. Nach Aufgabe 39.1 ist stets

$$p + q \leq \dim (V) .$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist die Gramsche Matrix zu einer symmetrischen Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^3$, sagen wir bezüglich der Standardbasis. Die Einschränkung der Form auf $\mathbb{R}e_1$ ist positiv definit, die Einschränkung auf $\mathbb{R}e_2$ ist negativ definit, die Einschränkung auf $\mathbb{R}e_3$ ist die Nullform. Daher sind $p, q \geq 1$, es ist aber nicht unmittelbar klar, ob es nicht auch zweidimensionale Untervektorräume geben könnte, auf denen die Einschränkung positiv definit ist. Eine Untersuchung „aller“ Untervektorräume, wie es die Definition verlangt, scheint aussichtslos. Es gibt aber mehrere Möglichkeiten, den Typ einer symmetrischen Bilinearform zu bestimmen, ohne alle Untervektorräume von V zu überblicken. Die folgende Aussage nennt man den *Trägheitssatz von Sylvester*.

James Joseph Sylvester (1814-1897)

Satz 39.3. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ vom Typ (p, q). Dann ist die Gramsche Matrix von $\langle -, - \rangle$ bezüglich einer jeden Orthogonalbasis eine Diagonalmatrix mit p positiven und q negativen Einträgen.*

Beweis. Bezüglich einer Orthogonalbasis $u_1, \ldots, u_n$ von V (die es nach Satz 38.15 gibt) hat die Gramsche Matrix natürlich Diagonalgestalt. Es sei p' die Anzahl der positiven Diagonaleinträge und q' die Anzahl der negativen Diagonaleinträge. Die Basis sei so geordnet, dass die ersten p' Diagonaleinträge positiv, die folgenden q' Diagonaleinträge negativ und die übrigen 0 seien. Auf dem p'-dimensionalen Unterraum $U = \langle u_1, \ldots, u_{p'} \rangle$ ist die eingeschränkte Bilinearform positiv definit, so dass $p' \leq p$ gilt. Sei $W = \langle u_{p'+1}, \ldots, u_n \rangle$, auf diesem Unterraum ist die Bilinearform negativ semidefinit. Dabei ist $V = U \oplus W$, und diese beiden Räume sind orthogonal zueinander.

Angenommen, es gebe einen Unterraum U', auf dem die Bilinearform positiv definit ist, und dessen Dimension p größer als p' ist. Die Dimension von W ist $n - p'$ und daher ist $W \cap U' \neq 0$. Für einen Vektor $w \in W \cap U'$, $w \neq 0$, ergibt sich aber direkt der Widerspruch $\langle w, w \rangle > 0$ und $\langle w, w \rangle \leq 0$. $\square$

Indem man die Orthogonalvektoren umskaliert, kann man erreichen, dass in der Diagonalen nur die Werte $1, -1, 0$ vorkommen. Die auf dem $\mathbb{R}^n$ durch die Diagonalmatrix mit p Einsen, q Minuseinsen und $-p - q$ Nullen gegebene Form zeigt, dass jeder Typ, der

$$p + q \leq n$$

erfüllt, realisiert werden kann. Man spricht von der *Standardform zum Typ* (p, q) auf dem $\mathbb{R}^n$.

Typkriterien für symmetrische Bilinearformen

Es gibt mehrere Methoden, den Typ einer symmetrischen Bilinearform zu bestimmen, wobei der Sylvestersche Trägheitssatz eine erste Möglichkeit ist, die aber den Nachteil hat, dass man eine Orthogonalbasis bestimmen muss. Wir besprechen das *Minorenkriterium* und das *Eigenwertkriterium*. Unter einem *Minor* versteht man die Determinante einer quadratischen Untermatrix einer Matrix. Man könnte also bei dem folgenden Kriterium genauso gut von einem Determinantenkriterium sprechen.

Satz 39.4. *Sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis. Die Determinanten D_k der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq k}$$

seien alle von 0 verschieden für $k = 1, \dots, n$. *Es sei* a *die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge*

$$D_0 = 1,\ D_1 = \det\ M_1,\ D_2 = \det\ M_2, \dots, D_n = \det\ M_n = \det\ G\,.$$

Dann ist $\langle -, - \rangle$ *vom Typ* $(n - a, a)$.

Beweis. Da nach Voraussetzung insbesondere die Determinante der Gramschen Matrix nicht 0 ist, ist nach Aufgabe 39.8 die Bilinearform nicht ausgeartet und daher hat der Typ die Form $(n - q, q)$. Wir müssen zeigen, dass $q = a$ ist. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Dimension von V, wobei der Induktionsanfang trivial ist. Die Aussage sei bis zur Dimension $n - 1$ bewiesen und es liege ein n-dimensionaler Raum mit einer Basis $v_1, \dots, v_n$ mit den angegebenen Eigenschaften vor. Der Untervektorraum

$$U = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$$

hat die Dimension $n-1$ und die Folge der Determinanten der Untermatrizen der Gramschen Matrix zur eingeschränkten Form $\langle -, - \rangle |_U$ stimmt mit der vorgegebenen Folge überein, wobei lediglich das letzte Glied

$$D_n = \det\ M_n = \det\ G$$

weggelassen wird. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $\langle -, - \rangle |_U$ den Typ $(n - 1 - b, b)$, wobei b die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$D_0 = 1,\ D_1, \dots, D_{n-1}$$

ist. Aufgrund der Definition des Typs ist

$$b \leq q \leq b + 1,$$

da ein q-dimensionaler Untervektorraum $W \subseteq V$, auf dem die Bilinearform negativ definit ist, zu einem Untervektorraum $W' = U \cap W \subseteq U$ führt, der die Dimension q oder $q-1$ besitzt und auf dem die eingeschränkte Form ebenfalls negativ definit ist. Nach Aufgabe 39.18 ist das Vorzeichen von D_{n-1} gleich $(-1)^b$ und das Vorzeichen von D_n gleich $(-1)^q$. Das bedeutet, dass zwischen D_{n-1} und D_n ein zusätzlicher Vorzeichenwechsel (und somit $a = b+1$) genau dann vorliegt, wenn

$$q = b + 1$$

ist. □

Korollar 39.5. *Sei* $\langle -, - \rangle$ *eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei* $v_1, \dots, v_n$ *eine Basis von* V. *Es sei* G *die Gramsche Matrix zu* $\langle -, - \rangle$ *bezüglich dieser Basis und es seien* D_k *die Determinanten der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq k},\ k = 1, \dots, n\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Genau dann ist* $\langle -, - \rangle$ *positiv definit, wenn alle* D_k *positiv sind.*

(2) *Genau dann ist* $\langle -, - \rangle$ *negativ definit, wenn das Vorzeichen in der Folge* $D_0 = 1, D_1, D_2, \ldots, D_n$ *an jeder Stelle wechselt.*

Beweis. (1). Wenn die Bilinearform positiv definit ist, so ist nach Aufgabe 39.2 das Vorzeichen der Determinante der Gramschen Matrix gleich $(-1)^0 = 1$, also positiv. Da die Einschränkung der Form auf die Unterräume $U_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ ebenfalls positiv definit ist, sind auch die Determinanten zu den Untermatrizen positiv. Wenn umgekehrt die Determinanten alle positiv sind, so folgt aus Satz 39.4, dass die Bilinearform positiv definit ist. (2) folgt aus (1), indem man die negative Bilinearform, also $- \langle -, - \rangle$, betrachtet. □

Das folgende Kriterium werden wir in der Vorlesung 42 beweisen.

Satz 39.6. *Sei* $\langle -, - \rangle$ *eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei* $v_1, \ldots, v_n$ *eine Basis von* V. *Es sei* G *die Gramsche Matrix zu* $\langle -, - \rangle$ *bezüglich dieser Basis. Dann besitzt der Typ* (p, q) *der Form folgende Interpretation:* p *ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume zu* G *zu positiven Eigenwerten und* q *ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume zu* G *zu negativen Eigenwerten.*

Beweis. Dies werden wir später als Korollar aus Satz 42.11 erhalten. □

Bemerkung 39.7. Zu einer Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

interessiert man sich, wie schon im Fall $n = 1$, für die lokalen Extrema der Funktion, zum Beispiel Maxima, also Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, dass in einer kleinen Umgebung davon alle Funktionswerte kleiner/gleich $f(P)$ sind. Bei $n = 2$ handelt es sich um Gipfel des durch f beschriebenen Gebirges über der Grundebene. Wenn die Funktion zweimal stetig differenzierbar ist, so gibt es wie im eindimensionalen notwendige und hinreichende differentielle Kriterien für die Existenz von lokalen Maxima und Minima. Das notwendige Kriterium ist, dass P ein kritischer Punkt ist, was bedeutet, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$ für $i = 1, \ldots, n$ gleich 0 sind. In diesem Fall betrachet man die zweiten partiellen Ableitungen und fasst sie in der sogenannten *Hesse-Matrix*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(P) \right)_{ij}$$

zusammen. Die zugehörige symmetrische Bilinearform entscheidet darüber, ob ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum vorliegt. Wenn sie positiv definit ist, so liegt ein isoliertes lokales Minimum vor, wenn sie negativ definit ist, so liegt ein isoliertes lokales Maximum vor, wenn sie indefinit ist, so liegt kein lokales Extremum vor. In den verbleibenden Fällen, also beispielsweise bei der Nullmatrix, braucht man weitere Überlegungen.

Vollständige Dualität

Bilinearformen werden auch für zwei verschiedene Vektorräume definiert. Die folgende Eigenschaft ist eine Variante für die Eigenschaft, nicht ausgeartet zu sein.

Definition 39.8. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume über K und

$$\Psi\colon V \times W \longrightarrow K$$

sei eine Bilinearform. Man sagt, dass Ψ eine vollständige Dualität definiert, wenn die Abbildung

$$V \longrightarrow W^*,\ v \longmapsto (w \mapsto \Psi(v,w))\,,$$

bijektiv ist.

Wenn die Räume endlichdimensional sind, so kann eine vollständige Dualität nur bei gleichdimensionalen Räumen vorliegen. Bei einem endlichdimensionalen Vektorraum liegt stets eine vollständige Dualität zu seinem Dualraum vor, die einfach durch die Auswertung gegeben ist, siehe Aufgabe 39.20.

Abbildungsverzeichnis