Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 11

Untervektorräume unter linearen Abbildungen

Eine typische und wohl auch namensgebende Eigenschaft einer linearen Abbildung ist, dass sie Geraden wieder auf Geraden (oder Punkte) abbildet. Allgemeiner ist folgende Aussage.

Lemma 11.1. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild*
$$\varphi(S) = \{\varphi(v) \mid v \in S\}$$
ein Untervektorraum von W.
(2) *Insbesondere ist das Bild* $\operatorname{bild}\varphi = \varphi(V)$ *der Abbildung ein Untervektorraum von W.*
(3) *Für einen Untervektorraum $T \subseteq W$ ist das Urbild*
$$\varphi^{-1}(T) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in W\}$$
ein Untervektorraum von V.
(4) *Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Untervektorraum von V.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.2. □

Definition 11.2. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\operatorname{kern}\varphi := \varphi^{-1}(0) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

den *Kern* von φ.

Der Kern ist also nach der obigen Aussage ein Untervektorraum von V.

Wichtig ist das folgende *Injektivitätskriterium*.

Lemma 11.3. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn $\operatorname{kern}\varphi = 0$ *ist.*

Beweis. Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen anderen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = 0$. Sei umgekehrt $\operatorname{kern} \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) \;=\; \varphi(v_1) - \varphi(v_2) \;=\; 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \operatorname{kern} \varphi$ und damit $v_1 = v_2$. □

Bemerkung 11.4. Zu einer $m \times n$-Matrix M ist der Kern der durch M gegebenen linearen Abbildung

$$K^n \longrightarrow K^m,\; x \longmapsto Mx,$$

einfach der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$Mx \;=\; 0.$$

Die Dimensionsformel

Die folgende Aussage heißt *Dimensionsformel*.

Satz 11.5. *Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und*

$$\varphi\colon\; V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) \;=\; \dim(\operatorname{kern} \varphi) + \dim(\operatorname{bild} \varphi)\,.$$

Beweis. Sei $n = \dim(V)$. Es sei $U = \operatorname{kern} \varphi \subseteq V$ der Kern der Abbildung und $k = \dim(U)$ seine Dimension ($k \leq n$). Es sei

$$u_1, \ldots, u_k$$

eine Basis von U. Aufgrund des Basisergänzungssatzes gibt es Vektoren

$$v_1, \ldots, v_{n-k}$$

derart, dass

$$u_1, \ldots, u_k,\; v_1, \ldots, v_{n-k}$$

eine Basis von V ist.Wir behaupten, dass

$$w_j = \varphi(v_j),\; j = 1, \ldots, n-k\,,$$

eine Basis des Bildes ist. Es sei $w \in W$ ein Element des Bildes $\varphi(V)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Dieses v lässt sich mit der Basis als

$$v = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j$$

schreiben. Dann ist

$$w \;=\; \varphi(v)$$

$$\begin{aligned} &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} s_i \varphi(u_i) + \sum_{j=1}^{n-k} t_j \varphi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j, \end{aligned}$$

so dass sich w als Linearkombination der w_j schreiben lässt. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit der w_j, $j = 1, \ldots, n-k$, sei eine Darstellung der Null gegeben,

$$0 = \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j \,.$$

Dann ist

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n-k} t_j \varphi\left(v_j\right) = 0.$$

Also gehört $\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j$ zum Kern der Abbildung und daher kann man

$$\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i$$

schreiben. Da insgesamt eine Basis von V vorliegt, folgt, dass alle Koeffizienten 0 sein müssen, also sind insbesondere $t_j = 0$. $\square$

Definition 11.6. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\operatorname{rang} \varphi := \dim\left(\operatorname{bild} \varphi\right)$$

den *Rang* von φ.

Die Dimensionsformel kann man auch als

$$\dim\left(V\right) = \dim\left(\operatorname{kern} \varphi\right) + \operatorname{rang} \varphi$$

ausdrücken.

Beispiel 11.7. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Kerns müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Der Lösungsraum ist

$$L = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$$

und dies ist der Kern von φ. Der Kern ist also eindimensional und daher ist die Dimension des Bildes nach der Dimensionsformel gleich 2.

Korollar 11.8. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der gleichen Dimension n. Es sei*

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.

Beweis. Dies folgt aus Satz 11.5 und Lemma 11.3. $\square$

Verknüpfung von linearen Abbildungen und Matrizen

Lemma 11.9. *Bei der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen entsprechen sich die Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen und die Matrizenmultiplikation. Damit ist folgendes gemeint: es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K mit Basen*

$$\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_p,\ \mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m\,.$$

Es seien

$$\psi : U \longrightarrow V \text{ und } \varphi : V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann gilt für die beschreibenden Matrizen von ψ, φ und der Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ die Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) = \left(M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)\right) \circ \left(M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi)\right).$$

Beweis. Wir verwenden die Beziehung

$$\varphi \circ \psi_{\mathfrak{v}} = \psi_{\mathfrak{w}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$$

aus Lemma 10.13, wobei die Koordinatenabbildung $\psi_{\mathfrak{v}}$ jeweils bijektiv sind. Daher ist

$$\begin{aligned} M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) &= \psi_{\mathfrak{w}}^{-1} \circ (\varphi \circ \psi) \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\ &= \left(\psi_{\mathfrak{w}}^{-1} \circ \varphi\right) \circ \left(\psi_{\mathfrak{v}} \circ \psi_{\mathfrak{v}}^{-1}\right) \circ (\psi \circ \psi_{\mathfrak{u}}) \\ &= \left(\psi_{\mathfrak{w}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{v}}\right) \circ \left(\psi_{\mathfrak{v}}^{-1} \circ \psi \circ \psi_{\mathfrak{u}}\right) \\ &= M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi), \end{aligned}$$

wobei hier überall die Abbildungsverknüpfung steht. Nach Aufgabe 10.19 stimmte die letzte Verknüpfung mit dem Matrixprodukt überein. □

Daraus folgt beispielsweise, dass das Produkt von Matrizen assoziativ ist.

Lineare Abbildungen und Basiswechsel

LEMMA 11.10. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ Basen von W. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich der Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ durch die Matrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$ beschrieben werde. Dann wird φ bezüglich den Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{z}$ durch die Matrix

$$M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}$$

beschrieben, wobei $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}$ und $M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}}$ die Übergangsmatrizen sind, die die Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{w}$ nach $\mathfrak{z}$ beschreiben.

Beweis. Die linearen Standardabbildungen $K^n \to V$ bzw. $K^m \to W$ zu den Basen seien mit $\psi_{\mathfrak{v}}$, $\psi_{\mathfrak{u}}$, $\psi_{\mathfrak{w}}$, $\psi_{\mathfrak{z}}$ bezeichnet. Wenn man die beschreibende Matrix als lineare Abbildung zwischen den Standardräumen auffasst, so ergibt sich die Beziehung

$$M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) = \psi_{\mathfrak{w}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{v}}\,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{z}}(\varphi) &= \psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \varphi \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\ &= \psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ (\psi_{\mathfrak{w}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ \psi_{\mathfrak{v}}^{-1}) \circ \psi_{\mathfrak{u}} \\ &= (\psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{w}}) \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (\psi_{\mathfrak{v}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{u}}) \\ &= (\psi_{\mathfrak{z}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{w}}) \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (\psi_{\mathfrak{u}}^{-1} \circ \psi_{\mathfrak{v}})^{-1} \\ &= M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}. \end{aligned}$$

□

Korollar 11.11. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Basen von V. Dann besteht zwischen den Matrizen, die die lineare Abbildung bezüglich $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ (beidseitig) beschreiben, die Beziehung

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}(\varphi) = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \circ M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}})^{-1}\,.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 11.10. □