$$\triangle'=\frac{1}{x_1}\begin{vmatrix}0 & -2 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ 0 & 0 & -2\ \cdots\cdots & 0\\ 0 & 0 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 2 & 2 & 2\ \cdots\cdots & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}\frac{1}{x_2} & -2 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ \frac{1}{x_3} & 0 & -2\ \cdots\cdots & 0\\ \frac{1}{x_4} & 0 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ \frac{1}{x_{n+1}} & 2 & 2\ \cdots\cdots & 2\end{vmatrix}$$

然ル＝ $$\begin{vmatrix}0 & -2 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ 0 & 0 & -2\ \cdots\cdots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 2 & 2 & 2\ \cdots\cdots & 2\end{vmatrix}=2^n\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ 0 & 0 & -1\ \cdots\cdots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 1 & 1 & 1\ \cdots\cdots & 1\end{vmatrix}=2^n$$

$$\therefore\quad \triangle'=\frac{2^n}{x_1}+2\begin{vmatrix}\frac{1}{x_2} & -2 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ \frac{1}{x_3} & 0 & -2\ \cdots\cdots & 0\\ \frac{1}{x_4} & 0 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ \frac{1}{x_{n+1}} & 2 & 2\ \cdots\cdots & 2\end{vmatrix}$$

同様ニ $$\begin{vmatrix}\frac{1}{x_2} & -2 & 0 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ \frac{1}{x_3} & 0 & -2 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ \frac{1}{x_4} & 0 & 0 & -2\ \cdots\cdots & 0\\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ \frac{1}{x_{n+1}} & 2 & 2 & 2\ \cdots\cdots & 2\end{vmatrix}=\frac{2^{n-1}}{x_2}+2\begin{vmatrix}\frac{1}{x_3} & -2 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ \frac{1}{x_4} & 0 & -2\ \cdots\cdots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ \frac{1}{x_{n+1}} & 2 & 2\ \cdots\cdots & 2\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{x_3} & -2 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ \frac{1}{x_4} & 0 & -2\ \cdots\cdots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ \frac{1}{x_{n+1}} & 2 & 2\ \cdots\cdots & 2\end{vmatrix}=\frac{2^{n-2}}{x_3}+2\begin{vmatrix}\frac{1}{x_4} & -2 & 0\ \cdots\cdots & 0\\ \frac{1}{x_5} & 0 & -2\ \cdots\cdots & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ \frac{1}{x_{n+1}} & 2 & 2\ \cdots\cdots & 2\end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{x_n} & -2\\ \frac{1}{x_{n+1}} & 2\end{vmatrix}=\frac{2}{x_n}+\frac{2}{x_{n+1}}$$

$$\therefore\quad \triangle'=2^n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_{n+1}}\right)$$

$$\therefore\quad \triangle=(-1)^{n+1}2^n x_1x_2\cdots\cdots x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x_{n+1}}\right),$$

60. $$\triangle_n=\begin{vmatrix}1+x^2 & x & 0 & 0\ \cdots\cdots & 0 & 0\\ x & 1+x^2 & x & 0\ \cdots\cdots & 0 & 0\\ 0 & x & 1+x^2 & x\ \cdots\cdots & 0 & 0\\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & 0 & 0\ \cdots\cdots & x & 1+x^2\end{vmatrix}=1+x^2+x^4+\cdots\cdots+x^{2n}$$

ヲ証セヨ，但シ $\triangle_n$ ハ n 次ノ行列式トス。

〔解〕 第一行ニツキ展開スレバ

$$\triangle_n=(1+x^2)\begin{vmatrix}1+x^2 & x & 0 & \cdots\cdots 0 & 0\\ x & 1+x^2 & x & \cdots\cdots 0 & 0\\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots\cdots 0 & 0\\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots x & 1+x^2\end{vmatrix}$$
$$-x^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 & 0\\ 1 & 1+x^2 & x & \cdots\cdots 0 & 0\\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots\cdots 0 & 0\\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots x & 1+x^2\end{vmatrix}$$

故ニ今 $\triangle_n$ ト同ジ形ニテ次數ガ $(n-1)$, $(n-2)$ ナリタル行列式ヲ $\triangle_{n-1}$, $\triangle_{n-2}$ ニテ表ハシ且ツ右邊ノ第二行列式ヲ第一列ニツキ展開スレバ

$$\triangle_n=(1+x^2)\triangle_{n-1}-x^2\triangle_{n-2},$$

$$\therefore\quad \triangle_{n-1}=(1+x^2)\triangle_{n-2}-x^2\triangle_{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\triangle_3=(1+x^2)\triangle_2-x^2\triangle_1$$

$$\therefore\ \triangle_n+\triangle_{n-1}+\ldots\ldots+\triangle_3$$

$$=(1+x^2)(\triangle_{n-1}+\triangle_{n-2}+\ldots\ldots+\triangle_2)-x^2(\triangle_{n-2}+\triangle_{n-3}+\ldots\ldots+\triangle_1),$$

$$\therefore\ \triangle_n=\triangle_2+x^2(\triangle_{n-1}-\triangle_1)$$

然ルニ $\triangle_1=1+x^2,\quad \triangle_2=(1+x^2)^2-x^2=1+x^2+x^4$

$$\therefore\ \triangle_n=x^2\triangle_{n-1}+1,$$

$$\therefore\ \triangle_{n-1}=x^2\triangle_{n-2}+1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\triangle_2=x^2\triangle_1+1$$

各ニ $1,\ x^2,\ x^4,\ \ldots\ldots,\ x^{2n-4}$ ヲ乘ジテ加フレバ

$$\triangle_n=1+x^2+x^4+\ldots\ldots+x^{2n-6}+x^{2n-2}\triangle_1+x^{2n-4}$$

$$=1+x^2+x^4+\ldots\ldots+x^{2n-6}+x^{2n-4}+x^{2n-2}+x^{2n},$$

第 十 二 章

消 去 法、終 結 式

基本定理 **I.** n 個ノ未知數 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ノ間ノ $n+1$ 個ノ一次方程式

$$a_1x_1+b_1x_2+\ldots\ldots+k_1x_n+p_1=0$$
$$a_2x_1+b_2x_2+\ldots\ldots+k_2x_n+p_2=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n+1}x_1+b_{n+1}x_2+\ldots\ldots+k_{n+1}x_n+p_{n+1}=0$$

ガ同時ニ成立スルタメニ必要ナル條件ハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots\ldots & k_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots\ldots & k_2 & p_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1} & b_{n+1} & \ldots\ldots & k_{n+1} & p_{n+1} \end{vmatrix}=0,$$ (前章問. 30 參照)

II. n 個ノ未知數 $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ノ間ノ n 個ノ一次同次方程式

$$a_1x_1+b_1x_2+\ldots\ldots+k_1x_n=0$$
$$a_2x_1+b_2x_2+\ldots\ldots+k_2x_n=0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_nx_1+b_nx_2+\ldots\ldots+k_nx_n=0$$

ガ未知數ノ悉クハ 0 ナラザル値ニテ 同時ニ 成立スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots\ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots\ldots & k_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n & b_n & \ldots\ldots & k_n \end{vmatrix}=0,$$ (前章問. 31 參照)

演習問題

1. $2x+y-1=0,\quad x-2y+1=0,\quad x+3y-2=0,\quad 4x-3y+1=0$

ガ同時ニ成立スルカ否カヲ吟味セヨ。

〔解〕 四ツノ方程式ガ同時ニ成立スルトキハ其中ノ任意ノ三ツハ同時ニ成立セザルベカラズ，然ルニ第一，第二，第三及ビ第二，第三，第四方程式ヨリ

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=8+1-3-2+2-6=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}=3+16-3-12+2-6=0$$

而シテ第二，第三方程式ノ x, y ノ係數ノ行列式ハ 0 ナラズ即チ

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$$

故ニ第一，第二，第三及第二，第三，第四方程式ハ同時ニ成立ス（前章問．30），從ッテ四ツノ方程式ハ同時ニ成立ス。

2. 次ノ聯立方程式ハ k ノ如何ナル値ニ對シテ成立スルカ，

$$4x+3y+z=kx$$
$$3x-4y+7z=ky$$
$$x+7y-6z=kz$$

〔解〕 所題ノ方程式ガ 0 以外ノ値ニテ同時ニ成立スルタメニハ基本定理 II ニヨリ

$$\begin{vmatrix} 4-k & 3 & 1 \\ 3 & -4-k & 7 \\ 1 & 7 & -6-k \end{vmatrix}=0$$

$\therefore\ k^3+6k^2-75k=0 \qquad \therefore\ k=0,\quad -3\pm2\sqrt{21}$

但シ $x=y=z=0$ ナラバ k ノ如何ニ係ラズ成立スルコト勿論ナリ。

3. 次ノ聯立方程式ガ $x=y=z=0$ 以外ノ根ヲ有ルコトヲ証セヨ，

$$(b-c)x+by-cz=0$$

$$(c-a)y+cz-ax=0$$
$$(a-b)z+ax-by=0$$

〔解〕
$$\begin{vmatrix} b-c & b & -c \\ -a & c-a & c \\ a & -b & a-b \end{vmatrix}=(b-c)(c-a)(a-b)+ac(c-a)+ab(a-b)+bc(b-c)$$
$$=0$$

故ニ基本定理 II ニヨリ $x=y=z=0$ 以外ノ根ヲ有ス。

4. x, y, z ノ同ジ値ニ對シテ次ノ方程式ガ同時ニ成立スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ，

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n},\quad \frac{x-a'}{l'}=\frac{y-b'}{m'}=\frac{z-c'}{n'}$$

〔解〕 二組ノ方程式ノ値ヲ夫々 K, K' トスレバ

$$x=a+lK,\qquad y=b+mK,\qquad z=c+nK,$$
$$x=a'+l'K',\qquad y=b'+m'K',\qquad z=c'+n'K',$$
$$\therefore\ a-a'+lK-l'K'=0$$
$$b-b'+mK-m'K'=0$$
$$c-c'+nK-n'K'=0$$

所題ノ方程式ガ x, y, z ノ同ジ値ニテ成立スルトキハ K, K' ノ間ノ此三ツノ方程式ガ同時ニ成立セザルベカラズ，故ニ基本定理 I ニヨリ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a-a' & l & l' \\ b-b' & m & m' \\ c-c' & n & n' \end{vmatrix}=0$$

逆ニ $\triangle=0$ ニシテ且ツ $l:m:n$ ガ $l':m':n'$ ニ等シカラザレバ上ノ三ツノ方程式ヲ滿足セシムベキ K, K' ノ値アリ，從ッテ所題ノ方程式ヲ滿足セシムベキ x, y, z ノ値アリ，依ッテ所要ノ條件ハ l, m, n ノ比ガ l', m', n' ノ比ニ等シカラズシテ且ツ $\triangle=0$ ナルコトナリ。

5. a, b, c, d ハ何レモ -1 ニ等シカラズ，x, y, z, u ハ悉クハ 0 ナラズシテ

$x=by+cz+du,\quad y=ax+cz+du,\quad z=ax+by+du,\quad u=ax+by+cz$

ナルトキハ次ノ關係ヲ証セヨ,

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}=1,$$

〔解〕 x, y, z, u ハ悉クハ 0 ナラズシテ所題ノ四ツノ方程式ガ成立スル故ニ基本定理 II ニヨリ

$$\begin{vmatrix} -1 & b & c & d \\ a & -1 & c & d \\ a & b & -1 & d \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix}=0$$

第四列ヲ他ノ三列ヨリ引ケバ

$$\begin{vmatrix} -1-a & 0 & 0 & d+1 \\ 0 & -1-b & 0 & d+1 \\ 0 & 0 & -1-c & d+1 \\ a & b & c & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ -(a+1)\begin{vmatrix} -1-b & 0 & d+1 \\ 0 & -1-c & d+1 \\ b & c & -1 \end{vmatrix}-(d+1)\begin{vmatrix} 0 & -1-b & 0 \\ 0 & 0 & -1-c \\ a & b & c \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ -(a+1)(b+1)(c+1)+(a+1)(d+1)(c+1)b+(a+1)(b+1)(d+1)c$$
$$+(d+1)(b+1)(c+1)a=0$$

a, b, d, d ハ -1 ニ等シカラザル故ニ $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$ ニテ割レバ

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}=\frac{1}{d+1}$$

$$\therefore\ \frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}=1,$$

6. $x+y+z=1,\quad ax+by+cz=d,\quad a^2x+b^2y+c^2z=d^2$ ナルトキ $a^3x+b^3y+c^3z$ ノ値ヲ求ム, 但シ a, b, c ハ皆相異ナルモノトス。

〔解〕 所要ノ値ヲ k トスレバ所題ノ三方程式ト $a^3x+b^3y+c^3z=k$ トハ同時ニ成立スル故ニ基本定理 I ニヨリ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & k \end{vmatrix}=0,\qquad \therefore\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & k-a^3 \end{vmatrix}=0$$

$b-a,\ c-a$ ハ 0 ナラザル故ニ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & d-a \\ b+a & c+a & d^2-a^2 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & k-a^3 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & d^2-a^2-(a+b)(d-a) \\ a^2+ab+b^2 & c^2+ac-b^2-ab & k-a^3-(a^2+ab+b^2)(d-a) \end{vmatrix}=0$$

$c-b\neq0$ ナル故ニ

$$\begin{vmatrix} 1 & (d-a)(d-b) \\ a+b+c & k-a^3-(a^2+ab+b^2)(d-a) \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ k-a^3-(a^2+ab+b^2)(d-a)-(d-a)(d-b)(a+b+c)=0$$

$$\therefore\ k=(a+b+c)d^2-(ab+bc+ca)d+abc,$$

7. $b^2-4ac=0$ 或ハ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$ ナラバ聯立方程式 $ax^2+bx+c=0$

$(a_1x^2+b_1x+c_1)+y(a_2x^2+b_2x+c_2)=0$ ヲ滿足セシムル y ノ二ツノ値ハ相等シキコトヲ証セヨ。

〔解〕 $b^2-4ac=0$ ナラバ x ノ二ツノ値ハ相等シクナル故ニ y ノ二ツノ値モ亦相等シクナルコト明カナリ,

次ニ $ax^2+bx+c=0$ (1), ノ二根ガ α, β ナルトキ y ノ二ツノ値ガ相等シキタメニハ

$$\frac{a_2\alpha^2+b_2\alpha+c_2}{a_1\alpha^2+b_1\alpha+c_1}=\frac{a_2\beta^2+b_2\beta+c_2}{a_1\beta^2+b_1\beta+c_1}=k$$

ナラザルベカラズ, 即チ

$$(a_2-a_1k)\alpha^2+(b_2-b_1k)\alpha+c_2-c_1k=0$$

$$(a_2-a_1k)\beta^2+(b_2-b_1k)\beta+c_2-c_1k=0$$

即チ　$(a_2-a_1k)x^2+(b_2-b_1k)x+c_2-c_1k=0$ (2),　モ亦 α, β ナル二根ヲ有セザルベカラズ，即チ (2) ハ (1) ト同ジ根ヲ有セザルベカラズ，故ニ

$$\frac{a_2-a_1k}{a}=\frac{b_2-b_1k}{b}=\frac{c_2-c_1k}{c} \qquad (3)$$

コノ三ツノ分數ノ値ヲ l トオケバ

$$\begin{matrix} al+a_1k-a_2=0 \\ bl+b_1k-b_2=0 \\ cl+c_1k-c_2=0 \end{matrix} \qquad \therefore \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{(基本定理 I)}$$

逆ニ此關係アラバ (3) ガ成立スル故ニ (1), (2) ハ同ジ二根ヲ有シ，從ツテ y ノ二ツノ値ハ相等シクナルベシ。

8. $(f^2-bc)x+(ch-fg)y+(bg-hf)z=0$

$(ch-fg)x+(g^2-ca)y+(af-gh)z=0$

$(bg-hf)x+(af-gh)y+(h^2-ab)z=0$

ナルトキハ

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 所題ノ方程式ヨリ x, y, z ヲ消去スレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} f^2-bc & ch-fg & bg-hf \\ ch-fg & g^2-ca & af-gh \\ bg-hf & af-gh & h^2-ab \end{vmatrix}=0$$

然ルニ前章問 41 ノ關係ニヨリ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}^2 \qquad \therefore \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ abc+2fgh-cf^2-bg^2-ch^2=0,$$

9. $(x+y)(x+z)=bcyz,$

$(y+z)(y+x)=cazx,$

$(z+x)(z+y)=abxy$

ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ，但シ x, y, z ハ何レモ 0 ナラズトス。

〔解〕 所題ノ三方程式ヲ邊々相乘ジテ平方ニ開ケバ

$$(x+y)(x+z)(y+z)=\pm abc\,xyz,$$

$$\therefore\ y+z=\pm ax, \qquad x+z=\pm by, \qquad x+y=\pm cz,$$

故ニ基本定理 II ニヨリ

$$\begin{vmatrix} \pm a & 1 & 1 \\ 1 & \pm b & 1 \\ 1 & 1 & \pm c \end{vmatrix}=0,$$

10. $ax^2+bx+c=0,\ x^3=1$ **ナルトキハ**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0$$

ナルコトヲ証セヨ。

〔解〕 第一方程式ニ x, x^2, x^3 ヲ乘ズレバ

$$ax^3+bx^2+cx=0, \qquad ax^4+bx^3+cx^2=0, \qquad ax^5+bx^4+cx^3=0$$

第二方程式ヲ代入スレバ

$$a+bx^2+cx=0, \qquad b+cx^2+ax=0, \qquad c+ax^2+bx=0$$

此三式ヨリ x, x^2 ヲ未知數ト見テ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}=0,$$

11. **一ツノ二次方程式ノ二根ノ n 乘ノ和ヲ S_n ニテ表ハセバ其二次方程式ハ次ノ如ク表ハサルヽコトヲ証セヨ，**

$$(s_ns_{n-2}-s_{n-1}{}^2)x^2+(s_ns_{n-1}-s_{n+1}s_{n-2})x+(s_{n+1}s_{n-1}-s_n{}^2)=0,$$

〔解〕 所題ノ二次方程式ヲ $ax^2+bx+c=0$ トシ其二根ヲ α, β トスレバ

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0, \qquad a\beta^2+b\beta+c=0$$

兩式ニ夫々 α^{n-2}, β^{n-2} ヲ乘ズレバ

$$a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}=0, \qquad a\beta^n+b\beta^{n-1}+c\beta^{n-2}=0$$

$$\therefore \quad as_n+bs_{n-1}+cs_{n-2}=0 \qquad (1)$$

此關係ハ 2 以上ノ n ノ總テノ正ノ整數値ニヨツテ成立スル故ニ

$$as_{n+1}+bs_n+cs_{n-1}=0 \qquad (2)$$

(1), (2) ヨリ a, b, c ノ比ヲ求メテ

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (3)$$

ニ代入スレバ所要ノ結果ヲ得ベク，或ハ (1), (2), (3) ヨリ a, b, c ヲ消去スルモ同樣ナリ，即チ

$$\begin{vmatrix} s_n & s_{n-1} & s_{n-2} \\ s_{n+1} & s_n & s_{n-1} \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix}=0$$

第三列ニツキテ展開スレバ

$$(s_ns_{n-2}-s_{n-1}^2)x^2+(s_ns_{n-1}-s_{n+1}s_{n-2})x+(s_{n+1}s_{n-1}-s_n^2)=0.$$

12. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & a \\ x^2 & y^2 & z^2 & a^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & a^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & b \\ x^2 & y^2 & z^2 & b^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & b^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & c \\ x^2 & y^2 & z^2 & c^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & c^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & d \\ x^2 & y^2 & z^2 & d^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & d^3 \end{vmatrix}=0$$

ナラバ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=0$ ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 所題ノ四ツノ行列式ノ第四行ノ各元素ノ餘因數ヲ夫々 $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ トスレバ

$$\triangle_1+a\triangle_2+a^2\triangle_3+a^3\triangle_4=0$$

$$\triangle_1+b\triangle_2+b^2\triangle_3+b^3\triangle_4=0$$

$$\triangle_1+c\triangle_2+c^2\triangle_3+c^3\triangle_4=0$$

$$\triangle_1+d\triangle_2+d^2\triangle_3+d^3\triangle_4=0$$

コレヨリ $\triangle_1$ $\triangle_2$ $\triangle_3$ $\triangle_4$ ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}=0$$

行列ヲ交換スレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=0,$$

13. $a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{2}{3}}$ **ヲ有理化スルタメニ乘ズベキ因數及其有理化シタル結果ハ夫々次ノ行列式ニテ表ハサルヽコトヲ證セヨ，**

$$\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ x^{\frac{1}{3}} & a & b \\ x^{\frac{2}{3}} & cx & a \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ cx & a & b \\ bx & cx & a \end{vmatrix},$$

〔解〕 $P=a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{2}{3}}$ トスレバ

$$x^{\frac{1}{3}}P=ax^{\frac{1}{3}}+bx^{\frac{2}{3}}+cx. \qquad x^{\frac{2}{3}}P=ax^{\frac{2}{3}}+bx+cx^{\frac{1}{3}}$$

故ニ $x^{\frac{1}{3}}=X$, $a^{\frac{2}{3}}=Y$ トオケバ

$$a-P+bX+cY=0$$

$$cx-x^{\frac{1}{3}}P+aX+bY=0$$

$$bx-x^{\frac{2}{3}}P+cxX+aY=0$$

此三ツノ方程式ハ X. Y ノ同ジ値ニテ成立スル故ニ基本定理 I ニヨリ

$$\begin{vmatrix} a-P & b & c \\ cx-x^{\frac{1}{3}}P & a & b \\ bx-x^{\frac{2}{3}}P & cx & a \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} a & b & c \\ cx & a & b \\ bx & cx & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} P & b & c \\ x^{\frac{1}{3}}P & a & b \\ x^{\frac{2}{3}}P & cx & a \end{vmatrix}$$

$$\therefore P\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ x^{\frac{1}{3}} & a & b \\ x^{\frac{2}{3}} & cx & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ cx & a & b \\ bx & cx & a \end{vmatrix}$$

此右邊ハ有理式ナルコト明カナリ，故ニ P ヲ有理化スルタメニ乘ズベキ因數ハ左邊ノ行列式ニシテ其有理化シタル結果ハ右邊ノ行列式ナリ。

14. $a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{1}{2}}$ ノ有理化因數ヲ求メヨ。

〔解〕 前問ト同樣ニ　$P=a+bx^{\frac{2}{6}}+cx^{\frac{3}{6}}$　トシ　$1,\ x^{\frac{1}{6}},\ x^{\frac{2}{6}},\ x^{\frac{3}{6}},\ x^{\frac{4}{6}},\ x^{\frac{5}{6}}$　ヲ乘ズレバ

$$\begin{aligned}
P&=a+bx^{\frac{2}{6}}+cx^{\frac{3}{6}}\\
x^{\frac{1}{6}}P&=ax^{\frac{1}{6}}+bx^{\frac{3}{6}}+cx^{\frac{4}{6}}\\
x^{\frac{2}{6}}P&=ax^{\frac{2}{6}}+bx^{\frac{4}{6}}+cx^{\frac{5}{6}}\\
x^{\frac{3}{6}}P&=cx+ax^{\frac{3}{6}}+bx^{\frac{5}{6}}\\
x^{\frac{4}{6}}P&=bx+cxx^{\frac{1}{6}}+ax^{\frac{4}{6}}\\
x^{\frac{5}{6}}P&=bxx^{\frac{1}{6}}+cxx^{\frac{2}{6}}+ax^{\frac{5}{6}}
\end{aligned}$$

此六ツノ方程式ヨリ　$x^{\frac{1}{6}},\ x^{\frac{2}{6}},\ x^{\frac{3}{6}},\ x^{\frac{4}{6}},\ x^{\frac{5}{6}}$　ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} P-a & 0 & b & c & 0 & 0 \\ x^{\frac{1}{6}}P & a & 0 & b & c & 0 \\ x^{\frac{2}{6}}P & 0 & a & 0 & b & c \\ x^{\frac{3}{6}}P-cx & 0 & 0 & a & 0 & b \\ x^{\frac{4}{6}}P-bx & cx & 0 & 0 & a & 0 \\ x^{\frac{5}{6}}P & bx & cx & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore P\begin{vmatrix} 1 & 0 & b & c & 0 & 0 \\ x^{\frac{1}{6}} & a & 0 & b & c & 0 \\ x^{\frac{2}{6}} & 0 & a & 0 & b & c \\ x^{\frac{3}{6}} & 0 & 0 & a & 0 & b \\ x^{\frac{4}{6}} & cx & 0 & 0 & a & 0 \\ x^{\frac{5}{6}} & bx & cx & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & b & c \\ cx & 0 & 0 & a & 0 & b \\ bx & cx & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & bx & cx & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

右邊ハ明カニ有理式ナル故ニ左邊ノ行列式ガ所要ノ有理化因數ナリ。

15. $x+y+z=0,\ \ x^2=a,\ \ y^2=b,\ \ z^2=c$ ヨリ $x,\ y,\ z$ ヲ消去スルコトニ由ツテ $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}=0$ ヲ證セヨ。

〔解〕 先ヅ　$x+y+z=0$　ニ　$xyz,\ x,\ y,\ z$　ヲ乘ジテ　$x^2=a,\ y^2=b,\ z^2=c$　ヲ代入スレバ

$$\begin{aligned}
a\,yz+b\,zx+c\,xy&=0\\
a+zx+xy&=0\\
b+yz+xy&=0\\
c+yz+zx&=0
\end{aligned}$$

$yz,\ zx,\ xy$　ヲ三ツノ未知數ト見做シテ消去スレバ所題ノ四ツノ方程式ガ同時ニ成立スルタメニ必要ナル條件ヲ得，即チ

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

次ニ　$x+y+z=0$　ニ　$yz,\ zx,\ xy$　ヲ乘ジテ　$x^2=a,\ y^2=b,\ z^2=c$　ヲ代入スレバ

$$\begin{aligned}
x+y+z&=0\\
xyz+cy+bz&=0\\
xyz+cx+az&=0\\
xyz+bx+ay&=0
\end{aligned}$$

xyz, x, y, z ヲ消去スレバ前ト同ジ條件ヲ得, 即チ

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad \therefore \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}=0$$

16. $x+y+z=0$, $x^3=a$, $y^3=b$, $z^3=c$ ヨリ x, y, z ヲ消去スルコトニヨツテ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

ヲ證セヨ。

〔解〕 $x+y+z=0$ ニ順次 x, y, z, y^2z^2, z^2x^2, x^2y^2, x^2yz, xy^2z, xyz^2 ヲ乘ジ $x^3=a$, $y^3=b$, $z^3=c$ ヲ代入シテ得ベキ 9 個ノ方程式ヨリ x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy, xy^2z^2, x^2yz^2, x^2y^2z ヲ消去スレバ所要ノ結果ヲ得ベシ。

17. 次ノ四式ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ,

$$x+y+z=0,\quad x^3+y^3+z^3=a,\quad x^5+y^5+z^5=b,\quad x^7+y^7+z^7=c,$$

〔解〕 所題ノ x, y, z ヲ三根トスル三次方程式ヲ $X^3+\lambda X+\mu=0$ トシ $x^n+y^n+z^n=s_n$ トスレバ

$$s_3+\lambda s_1+3\mu=0$$
$$s_4+\lambda s_2+\mu s_1=0$$
$$s_5+\lambda s_3+\mu s_2=0$$
$$s_7+\lambda s_5+\mu s_4=0$$

然ルニ $s_1=0$, $s_3=a$, $s_5=b$, $s_7=c$

$$\therefore\ a+3\mu=0,\qquad s_4+\lambda s_2=0,\qquad b+a\lambda+\mu s_2=0,\qquad c+b\lambda+\mu s_4=0$$

又 $x+y+z=0$ ヨリ $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=0$, $\therefore\ s_2+2\lambda=0$

以上五式ヨリ λ, μ, s_2, s_4 ヲ消去センニ第一式ヨリ $\mu=-\frac{a}{3}$, 最後ノ式ヨリ $\lambda=-\frac{s_2}{2}$, 他ノ四式ニ代入スレバ

$$s_4-\frac{1}{2}s_2^2=0,\quad b-\frac{a}{2}s_2-\frac{a}{3}s_2=0,\quad c-\frac{b}{2}s_2-\frac{a}{3}s_4=0$$

此第二式及ビ第一式ヨリ

$$s_2=\frac{6b}{5a},\qquad s_4=\frac{18b^2}{25a^2},$$

第三式ニ代入シテ $25ac-21b^2=0$,

18. 次ノ四式ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ,

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\quad yz+zx+xy=b^2,\quad y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=c^4,\quad x^3+y^3+z^3=d^3,$$

〔解〕 前問ト同様ニ x, y, z ヲ根トスル方程式ヲ $X^3+\lambda X^2+b^2X+\mu=0$ トシ $x^n+y^n+z^n=s_n$ トスレバ

$$s_3+\lambda s_2+b^2s_1+3\mu=0,\qquad s_4+\lambda s_3+b^2s_2+\mu s_1=0.$$

然ルニ $s_1=-\lambda$, $s_2=a^2$, $s_3=d^3$ 又 $yz+zx+xy=b^2$ ヲ二乘スレバ

$$c^4+2xyz(x+y+z)=b^4 \qquad \therefore\ c^4+2\lambda\mu=b^4$$

又 $s_2=a^2$ ヲ二乘スレバ $a^4=s_4+2c^4$

以上七式ヨリ λ, μ, s_1, s_2, s_3, s_4 ヲ消去センニ先ヅ s_1 s_2 s_3 s_4 ヲ消去スレバ

$$d^3+(a^2-b^2)\lambda+3\mu=0,\qquad a^4-2c^4+d^3\lambda+a^2b^2-\lambda\mu=0$$

然ルニ $2\lambda\mu=b^4-c^4$

$$\therefore\ \lambda=\frac{3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2}{2d^3}$$

$$\mu=\frac{(3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2)(b^2-a^2)}{6d^3}-\frac{d^3}{3}$$

コレヲ $2\lambda\mu=b^4-c^4$ ニ代入スレバ

$$2\frac{3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2}{2d^3}\left[\frac{(3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2)(b^2-a^2)}{6d^3}-\frac{d^3}{3}\right]=b^4-c^4$$

$$\therefore\ (3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2)^2(b^2-a^2)-2d^6(3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2)\ 6d^6(b^4-c^4)$$

$$\therefore\ (3c^4-2a^4+b^4-2a^2b^2)^2(b^2-a^2)=2d^6(4b^4-2a^4-2a^2b^2),$$

19. $a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3=p_1(x-\alpha_1y)^3+p_2(x-\alpha_2y)^3$ **ナル如キ** α_1, α_2 **ハ二次方程式** $(3a_0a_2-a_1^2)x^2+(9a_0a_3-a_1a_2)x+3a_1a_3-a_2^2=0$ **ノ根ナルコトヲ証セヨ。**

〔解〕 所題ノ等式ノ兩邊ノ係數ヲ比較シテ

$$p_1+p_2=a_0 \qquad (1)$$

$$\alpha_1p_1+\alpha_2p_2=-\frac{a_1}{3} \qquad (2)$$

$$\alpha_1^2p_1+\alpha_2^2p_2=\frac{a_2}{3} \qquad (3)$$

$$\alpha_1^3p_1+\alpha_2^3p_2=-a_3 \qquad (4)$$

(1), (2), (3) 及ビ (2), (3), (4) ヨリ p_1, p_2 ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a_0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\frac{a_1}{3} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \frac{a_2}{3} \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{a_1}{3} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \frac{a_2}{3} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & -a_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (4)$$

然ルニ α_1, α_2 ヲ二根トスル二次方程式ハ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & x \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & x^2 \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

(4), (5) ヨリ α_1, α_2 ヲ消去スレバ α_1, α_2 ヲ二根トスル二次方程式ヲ得ベシ

然ルニ $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{vmatrix}=\triangle_1$, $-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \end{vmatrix}=\triangle_2$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}=\triangle_3$ トスレバ

(4), (5) ハ次ノ如クナル

$$a_0\triangle_1-\frac{a_1}{3}\triangle_2+\frac{a_2}{3}\triangle_3=0$$

$$-\frac{a_1}{3}\triangle_1+\frac{a_2}{3}\triangle_2-a_3\triangle_3=0 \qquad (6)$$

$$\triangle_1+x\triangle_2+x^2\triangle_3=0$$

(4), (5) ヨリ α_1, α_2 ヲ消去スルコトハ (6) ヨリ $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ ヲ消去スルコトナリ, 故ニ (4), (5) ヨリ α_1, α_2 ヲ消去シタル結果ハ次ノ如シ

$$\begin{vmatrix} a_0 & -\frac{a_1}{3} & \frac{a_2}{3} \\ -\frac{a_1}{3} & \frac{a_2}{3} & -a_3 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}=0 \quad 即チ \quad \begin{vmatrix} 3a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & 3a_3 \\ 1 & -x & x^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ (3a_0a_2-a_1^2)x^2+(9a_0a_3-a_1a_2)x+3a_1a_3-a_2^2=0,$$

20. $ax^3+bx^2+cx+d=0,\ px^2+qx+r=0$ **ヨリ** x **ヲ消去セヨ。**

〔解〕 第一ノ方程式ニ x, 1, 第二ノ方程式ニ x^2, x, 1 ヲ乘ズレバ

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx \quad =0$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

$$px^4+qx^3+rx^2 \quad =0$$

$$px^3+qx^2+rx \quad =0$$

$$px^2+qx+r=0$$

此五ツノ方程式ヨリ x^4, x^3, x^2, x ヲ四ツノ未知數ト見テ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}=0.$$

(注意) 一般ニ x ノ n 次方程式ト m 次方程式トヨリ x ヲ消去スルニハ前者ニ x^{m-1}, x^{m-2}, ...x, 1 後者ニ x^{n-1}, x^{n-2}, ...x, 1 ヲ乘ジテ得ベキ $m+n$ 個ノ方程式ヨリ x^{n+m-1}, x^{n+m-2}, ..., x ヲ消去ス, 從ツテ消去シタル結果ノ行列式ハ $(m+n)$ 次ナリ之ヲ兩方程式ノ**終結式**トイフ。

21. $lx^2y+mxy^2=0,\ px^3y+qxy^3+ry^4=0$ **ヨリ** x, y **ヲ消去セヨ。**

〔解〕 兩方程式ヲ夫々 y^3, 及ビ y^4 ニテ割レバ

$$l\frac{x^2}{y^2}+m\frac{x}{y}=0, \qquad p\frac{x^3}{y^3}+q\frac{x}{y}+r=0$$

前者ニ $\frac{y^2}{y^2}$, $\frac{x}{y}$, 1 後者ニ $\frac{x}{y}$, 1 ヲ乘ズレバ

$$\begin{array}{lllll}
l\dfrac{x^4}{y^4}+m\dfrac{x^3}{y^3} & & & & =0 \\
 & l\dfrac{x^3}{y^3}+m\dfrac{x^2}{y^2} & & & =0 \\
 & & l\dfrac{x^2}{y^2}+m\dfrac{x}{y} & & =0 \\
p\dfrac{x^4}{y^4} & & +q\dfrac{x^2}{y^2}+r\dfrac{x}{y} & & =0 \\
 & p\dfrac{x^3}{y^3} & & +q\dfrac{x}{y}+r & =0
\end{array}$$

之レヨリ $\dfrac{x^4}{y^4}$, $\dfrac{x^3}{y^3}$, $\dfrac{x^2}{y^2}$, $\dfrac{x}{y}$ ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m & 0 \\ p & 0 & q & r & 0 \\ 0 & p & 0 & q & r \end{vmatrix}=0$$

22. **ニツノ方程式**

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \qquad px^2+qx+r=0$$

ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

〔解〕 共通根ヲ有スルトキハ兩方程式ハ x ノ其値ノトキ同時ニ成立ス，從ツテ兩方程式ヨリ其 x ヲ消去スルコトヲ得，依ツテ前々問ヨリ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}=0$$

即チ兩方程式ノ終結式ハ 0 ニ等シ，コレ即チ必要ナル條件ナリ，次ニ兩方程式ノ左邊ヲ夫々 $f(x)$, $\varphi(x)$ トシ，終結式 $\triangle$ ノ第一行ニ x^4, 第二行ニ x^3, 第三行ニ x^2, 第四行ニ x ヲ乘ジテ第五行ニ加フレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & b & c & d & xf(x) \\ 0 & a & b & c & f(x) \\ p & q & r & 0 & x^2\varphi(x) \\ 0 & p & q & r & x\varphi(x) \\ 0 & 0 & p & q & \varphi(x) \end{vmatrix}=0$$

第五行ニツイテ展開スレバ

$$(Ax+B)f(x)-(Px^2+Qz+R)\varphi(x)=0,$$

但シ A, B, P, Q, R ハ夫々 a, b, c, d, p, q, r ノ整式ナリ，又此關係ハ x ノ値ノ如何ニ係ラザルモノナリ，然ルニ此關係ヨリ

$$\frac{(Ax+B)'(x)}{\varphi(x)}=Px^2+Qz+R,$$

即チ $(Ax+B)f(x)$ ハ $\varphi(x)$ ニテ整除セラル，然ルニ $Ax+B$ ハ $\varphi(x)$ ヨリ少クトモ一次低シ，故ニ $f(x)$ ト $\varphi(x)$ トハ少クトモ一次ノ共通因數ヲ有セザルベカラズ，即チ $\triangle=0$ ナルトキハ $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ハ少クトモ一ツノ共通根ヲ有ス，故ニ所題ノ二ツノ方程式ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ其終結式 $\triangle$ ガ 0 ナルコトナリ。

〔注意〕 一般ニ任意ノ次數ノ二ツノ方程式ニツイテモ同ジ結果ヲ同樣ニ證明スルコトヲ得。

23. **k ガ如何ナル値ノトキ次ノ二ツノ方程式ハ共通根ヲ有スルカ，又其共通根ヲ求メヨ，**

$$x^3+kx+2=0, \qquad x^2+2x+k=0,$$

〔解〕 共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ前問ニヨリ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k & 2 \\ 1 & 2 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & k \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore -2\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix}$$

$\therefore\ k^2+2k-3=0$　　　$\therefore\ k=1$ 又ハ -3

$k=1$ ナラバ　$x^3+kx+2=x^3+x+2=(x+1)(x^2-x+2)$

$x^2+2x+k=x^2+2x+1=(x+1)^2$

故ニ此場合ノ共通根ハ -1,

$k=-3$ ナラバ　$x^3+kx+2=x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$

$x^2+2x+k=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$

故ニ此場合ノ共通根ハ 1,

24. $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$, $\boldsymbol{cx^2+bx+a}$ **ガ共通因數ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ**

$$\boldsymbol{(a-c)^2(a+b+c)(a-b+c)=0}$$

ナルコトヲ證セヨ。

〔解〕 所題ノ二式ガ共通因數ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ二ツノ方程式 $ax^2+bx+c=0$, $cx^2+bx+a=0$ ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ，然ルニコノ後ノ條件ハ前々問ニヨリ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ c & b & a & 0 \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix}=0$$

第一行ニ他ノ行ヲ加ヘ第一行ヨリ $a+b+c$ ヲ括リ出シ然ル後第一列ヨリ第三列ヲ引ケバ

$$\triangle=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & 0 \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & c-a & 0 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & 0 \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & 0 \\ 1 & c & a \end{vmatrix}=(a+b+c)(c-a)(ab+c^2-bc-a^2)$$
$$=(a+b+c)(c-a)^2(c+a-b),$$

故ニ所要ノ條件ハ　$(a-c)^2(a+b+c)(a-b+c)=0$,

25. 次ノ三ツノ方程式ガ共通ノ一根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム，

$$\boldsymbol{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0}$$
$$\boldsymbol{b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0}$$
$$\boldsymbol{c_0x^3+c_1x^2+c_2x+c_3=0,}$$

〔解〕 $x^3=u$, $x^2=v$, $x=w$ トオケバ三ツノ方程式

$$a_0u+a_1v+a_2w+a_3=0$$
$$b_0u+b_1v+b_2w+b_3=0$$
$$c_0u+c_1v+c_2w+c_3=0$$

ヲ滿足セシムル u, v, w ノ只一組ノ値ガ存在セザルベカラズコレガタメニハ

(前章問. 28)

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (1)$$

然ルトキハ

$$u=\frac{-1}{\triangle}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix},\qquad v=\frac{-1}{\triangle}\begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_2 \\ b_0 & b_3 & b_2 \\ c_0 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$w=\frac{-1}{\triangle}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

而シテ $v=w^2$, $u=w^3$ ナルヲ要スル故ニ

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \triangle \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_2 \\ b_0 & b_3 & b_2 \\ c_0 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}^3 - \triangle^2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

逆ニ (1), (2), (3) ガ成立スルトキハ所題ノ三方程式ハ一根ヲ共有スルコト明カナリ，依ツテ所要ノ條件ハ (1), (2), (3) ナリ。

26. 次ノ四ツノ方程式ガ共通ノ一根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム， $\boldsymbol{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0}$　$\boldsymbol{b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0}$

$$\boldsymbol{c_0x^3+c_1x^2+c_2x+c_3=0} \qquad \boldsymbol{d_0x^3+d_1x^2+d_2x+d_3=0},$$

〔解〕 前問ノ如ク $x^3=u$, $x^2=v$, $x=w$ トオケバ四ツノ方程式

$$a_0u+a_1v+a_2w+a_3=0, \qquad b_0u+b_1v+b_2w+b_3=0$$

$$c_0u+c_1v+c_2w+c_3=0, \qquad d_0u+d_1v+d_2w+d_3=0$$

ヲ滿足セシムル u, v, w ノ只一組ノ値ガ存在セザルベカラズ，コレガタメニハ

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \triangle' = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

ナラザルベカラズ，然ルトキハ前問ト同様ニ更ニ

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & a_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \triangle' \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_2 \\ b_0 & b_3 & b_2 \\ c_0 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}^3 - \triangle'^2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

ナルヲ要ス，即チ所要ノ條件ハ (1), (2), (3) ナリ。

27. 三ツノ方程式 $\boldsymbol{x^2-px+q=0}$, $\boldsymbol{x^2+px-5=0}$, $\boldsymbol{x^2+2x-q=0}$ **ガ共通根ヲ有スルヤウニ p, q ノ値ヲ定メヨ。**

〔解〕 第二，第三方程式ヨリ第一方程式ヲ引ケバ

$$2px-q-5=0 \qquad (1)$$

$$(2+p)x-2q=0 \qquad (2)$$

故ニ所題ノ三方程式ガ共通根ヲ有スレバ (1), (2), 及ビ

$$x^2+2x-q=0 \qquad (3)$$

ハ共通根ヲ有シ，逆ニ (1), (2), (3) ガ共通根ヲ有スレバ所題ノ三方程式ハ共通根ヲ有ス．然ルニ (1), (2) ハ x ノ一次方程式ナル故ニ (1), (2), (3) ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ (1), (2), 及ビ (1), (3) ノ結終式ガ 0 ナルコトナリ，即チ

$$\begin{vmatrix} 2p & -q-5 \\ 2+p & -2q \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2p & -q-5 & 0 \\ 0 & 2p & -q-5 \\ 1 & 2 & -q \end{vmatrix} = 0$$

即チ　$4pq-(p+2)(q+5)=0$　(4)

$$4p^2q-(q+5)^2-4p(q+5)=0 \qquad (5)$$

(4) ニ p ヲカケテ (5) ヲ引ケバ

$$(q+5)^2+4p(q+5)-p(p+2)(q+5)=0$$

$$\therefore\ q=-5, \qquad q=p^2-2p-5$$

$q=-5$ トスレバ (4) ヨリ $p=0$, 然ルトキハ第一第二方程式ハ一致シ第三ト共通根ヲ有シ得ザルコトナル故ニ此値ハ採用スルヲ得ズ

$q=p^2-2p-5$ トスレバ (4) ヨリ $p=0,\ 4,\ -\frac{4}{3}$, 從ツテ $q=-5,\ 3,\ -\frac{5}{9}$,

然ルニ $p=0$, $q=-5$ ハ前述ノ如ク採用スルコト能ハズ，依ツテ所要ノ値ハ

$$\left.\begin{matrix} p=4 \\ q=3 \end{matrix}\right) \qquad \left.\begin{matrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{9} \end{matrix}\right)$$

或ハ前問ノ如ク

$$\begin{vmatrix} 1 & -p & q \\ 1 & p & -5 \\ 1 & 2 & -q \end{vmatrix}=0, \qquad x^2=\frac{5p-pq}{2p}=\left(\frac{q+5}{2p}\right)^2$$

ヨリ p, q ヲ求ムルモ可ナリ。

28. $\boldsymbol{f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0}$ **ノ三根ヲ** $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ **トシ**

$\boldsymbol{\varphi(x)=px^2+qx+r=0}$ **ノ二根ヲ** $\beta_1\ \beta_2$ **トスレバ**

$$\triangle=p^3f(\beta_1)f(\beta_2)=a^2\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\varphi(\alpha_3)$$

ナルコトヲ証セヨ，但シ △ ハ $f(x)=0,\ \varphi(x)=0$ ノ終結式トス。

〔解〕 $f(x)-u=ax^3+bx^2+cx+d-u=0$ (1)

$\varphi(x) \quad =px^2+qx+r \qquad =0$ (2)

ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ 問. 22 ニヨリ

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d-u & 0 \\ 0 & a & b & c & d-u \\ p & q & r & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & p & q & r \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

(3) ヲ u ノ羃ノ順ニ整頓スルタメニ第五行ニツイテ展開スレバ

$$r\begin{vmatrix} a & b & c & d-u \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix}+(u-d)\begin{vmatrix} a & b & c & d-u \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & p & q \end{vmatrix}=0$$

各行列式ヲ二ツヅヽニ分割スレバ

$$r\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix}-r\begin{vmatrix} a & b & c & u \\ 0 & a & b & 0 \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & 0 \end{vmatrix}+(u-d)\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & p & q \end{vmatrix}$$

$$-(u-d)\begin{vmatrix} a & b & c & u \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ r\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & p & q \end{vmatrix}$$

$$+\left\{r\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ p & q & r \\ 0 & p & q \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & p & q \end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}\right\}u+\begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}u^2=0$$

然ルニ $\triangle=r\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \\ 0 & 0 & p & q \end{vmatrix}$, 又 $\begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}=p^3$,

故ニ u ノ係數ヲ A トオケバ (3) ハ次ノ如クナル

$$\triangle+Au+p^3u^2=0 \qquad (4)$$

(3) 即チ (4) ハ (1), (2) ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナル故ニ (4) ヲ満足セシムル u ノ値ノトキニ限リ (1), (2) ハ共通根ヲ有ス，然ルニ $u=f(\beta_1)$, $u=f(\beta_2)$ ノトキ (1), (2) ハ明カニ共通根 β_1, β_2 ヲ有ス。故ニ (4) ノ二根ハ $f(\beta_1), f(\beta_2)$ ナリ，故ニ

$$\frac{\triangle}{p^3}=f(\beta_1)\cdot f(\beta_2) \qquad \therefore\ \triangle=p^3f(\beta_1)f(\beta_2),$$

同様ニ $\triangle=a^2\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\varphi(\alpha_3)$,

〔注意〕 一般ニ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$ ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$

$\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m=0$ ノ根ヲ $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_m$ トシ

$f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ノ終結式ヲ △ トスレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=(-1)^{mn}b_0^nf(\beta_1)\cdot f(\beta_2)\cdots\cdots f(\beta_m)$$

$$=a_0^m\varphi(\alpha_1)\cdot f(\alpha_2)\cdots\cdots\varphi(\alpha_n),$$

ナルコトハ同様ニ証明スルコトヲ得。

29. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0,\ \varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots\ldots+b_m=0$ ガ共通根ヲ有セザルトキハ

$$f(x)F(x)+\varphi(x)\phi(x)=1$$

ナル如キ二ツノ整式 $F(x)$, $\phi(x)$ ガ常ニ存在スルコトヲ証セヨ，但シ $F(x)$, $\phi(x)$ ハ夫々 x ニツキ $(m-1)$ 次及 $(n-1)$ 次以下トス。

〔解〕 $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ガ共通根ヲ有セザル故ニ前者ニ x^{m-1}, x^{m-2}, …… x, 1 ヲ乘ジ後者ニ x^{n-1}, x^{n-2}, …… x, 1 ヲ乘ジテ得ベキ $(m+n)$ 個ノ方程式ヨリ x^{n+m-1}, x^{n+m-2}, …… x ヲ消去シテ得ベキ次ノ行列式 $\triangle$ ハ 0 ナラズ（問 22）

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_0 \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots b_0 \ldots & b_m \end{vmatrix}\neq 0$$

$\triangle$ ノ第一行以下ニ順次 x^{n+m-1}, x^{n+m-2}, …… x, 1 ヲ乘ジテ最後ノ行ニ加フレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & x^{m-1}f(x) \\ 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & x^{m-2}f(x) \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots a_0 \ldots\ldots & f(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & x^{n-1}\varphi(x) \\ 0 & b_0 & b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & x^{n-2}\varphi(x) \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots b_0 \ldots\ldots & \varphi(x) \end{vmatrix}\neq 0,$$

最後ノ行ニツキ展開スレバ

$$f(x)(A_0x^{m-1}+A_1x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1})+\varphi(x)(B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\ldots\ldots+B_{n-1})$$
$$=\triangle,$$

但シ $A_0, A_1, \ldots\ldots A_{m-1}, B_0, B_1, \ldots\ldots B_{n-1}$ ハ x ヲ含マズ，故ニ

$$F(x)=\frac{1}{\triangle}(A_0x^{m-1}+A_1x^{m-2}+\ldots\ldots+A_{m-1})$$

$$\phi(x)=\frac{1}{\triangle}(B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\ldots\ldots+B_{n-1})$$

トオケバ　$f(x)F(x)+\varphi(x)\phi(x)=1$,

30. $f(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0,\ \varphi(x)=b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0$ ガ共通ノ二根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

〔解〕 $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ ガ二根ヲ共有スルタメニハ $f(x)$, $\varphi(x)$ ハ二次ノ共通因數ヲ有セザルベカラズ，今其共通因數ヲ $x^2+c_1x+c_2$ トシ

$$f(x)=(x^2+c_1x+c_2)(a_0'x^2+a_1'x+a_2')$$

$$\varphi(x)=(x^2+c_1x+c_2)(b_0'x+b_1')$$

トオケバ

$$\begin{aligned} &a_0=a_0' && b_0=b_0' \\ &a_1=a_1'+a_0'c_1 && b_1=b_1'+b_0'c_1 \\ &a_2=a_2'+a_1'c_1+a_0'c_2 && b_2=b_1'c_1+b_0'c_2 \\ &a_3=a_2'c_1+a_1'c_2 && b_3=b_1'c_2 \\ &a_4=a_2'c_2 && \end{aligned}$$

故ニ兩方程式ノ終結式ヲ $\triangle$ トスレバ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_0' & a_1'+a_0'c_1 & a_2'+a_1'c_1+a_0'c_2 & a_2'c_1+a_1'c_2 & a_2'c_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0' & a_1'+a_0'c_1 & a_2'+a_1'c_1+a_0'c_2 & a_2'c_1+a_1'c_2 & a_2'c_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0' & a_1'+a_0'c_1 & a_2'+a_1'c_1+a_0'c_2 & a_2'c_1+a_1'c_2 & a_2'c_2 \\ b_0' & b_1'+b_0'c_1 & b_1'c_1+b_0'c_2 & b_1'c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0' & b_1'+b_0'c_1 & b_1'c_1+b_0'c_2 & b_1'c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0' & b_1'+b_0'c_1 & b_1'c_1+b_0'c_2 & b_1'c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0' & b_1'+b_0'c_1 & b_1'c_1+b_0'c_2 & b_1'c_2 \end{vmatrix}$$

第一行ニ $-c_1$ ヲカケテ第二行ニ加ヘ，次ニ第一行ニ $-c_2$

第二行ニ $-c_1$ ヲカケテ第三行ニ加ヘ，次ニ第二行ニ $-c_2$

第三行ニ $-c_1$ ヲカケテ第四行ニ加ヘ，次ニ第三行ニ $-c_2$

第四行ニ $-c_1$ ヲカケテ第五行ニ加ヘ，次ニ第四行ニ $-c_2$

第五行ニ $-c_1$ ヲカケテ第五行ニ加ヘ，次ニ第五行ニ $-c_2$

ヲカケテ第七行ニ加フレバ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0' & a_1' & a_2' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0' & a_1' & a_2' & 0 & 0 \\ b_0' & b_1' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0' & b_1' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0' & b_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0' & b_1' & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

Δ ノ終リノ二行及ビ第三列，第七列ヲ消シタルモノ即チ a 列，b 列ヨリ終リノ各一列ヲ消シタルモノヲ Δ_1 トスレバ上ト同様ニ

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & 0 & 0 \\ 0 & a_0' & a_1' & a_2' & 0 \\ b_0' & b_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0' & b_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0' & b_1' & 0 \end{vmatrix}=0,$$

同樣ニ a 列，b 列ヨリ終リノ各二列ヲ消シタルモノヲ Δ_2 トスレバ

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_0' & a_1' & a_2' \\ b_0' & b_1' & 0 \\ 0 & b_0' & b_1' \end{vmatrix}$$

Δ_2 ハ $a_0'x^2+a_1'x+a_2'=0$，$b_0'x+b_1'=0$ ノ終結式ニシテ此兩方程式ハ共通根ヲ有セザル故ニ $\Delta_2\neq0$.

之ニ由ツテ $f(x)=0$，$\varphi(x)=0$ ガ共通ノ二根ヲ有スルタメニ必要ナル條件ハ

$$\Delta=\Delta_1=0,\qquad \Delta_2\neq0,$$

逆ニ $\Delta=0$ ナラバ $f(x)=0$，$\varphi(x)=0$ ハ共通根ヲ有ス，今其共通根ガ只一ツナリトスレバ上ト同樣ニ $\Delta_1\neq0$，故ニ $\Delta_1=0$ ナラバ共通根ハ一ツナラズ，若シ又三ツ以上ナリトスレバ上ト同樣ニ $\Delta_2=0$ ナラザルベカラズ，故ニ $\Delta_2\neq0$ ナラバ三ツ以上ナラズ故ニ $\Delta=\Delta_1=0$，$\Delta_2\neq0$ ナラバ共通根ハ二ツナリ，故ニ $f(x)=0$，$\varphi(x)=0$ ガ共通ノ二根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ $\Delta=\Delta_1=0$，$\Delta_2\neq0$ ナリ。

（注意） 一般ニ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_n=0$

$\varphi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots\ldots+b_m=0$

ガ k 個ノ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ

$$\Delta=\Delta_1=\ldots\ldots=\Delta_{k-1}=0,\qquad \Delta_k\neq0,$$

ナルコトヲ同樣ニ證明スルコトヲ得，但シ Δ ハ $f(x)=0$，$\varphi(x)=0$ ノ終結式ニシテ Δ_r ハ Δ ノ a 列及 b 列ノ終リヨリ各 r 列ヲ消シ去リ且ツ終リヨリ $2r$ 行ヲ消シ去リタル行列式ヲ表ハス。

31. $x^3+px^2+ax+b=0$，$x^3+qx^2+ax+c=0$ **ガ二根ヲ共有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ** $b=ap$，$c=aq$ **ナルコトヲ證セヨ，但シ** $p\neq q$，$b\neq c$ **トス。**

〔解〕 所題ノ三次方程式ガ二根ヲ共有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ前問ニヨリ

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & p & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p & a & b \\ 1 & q & a & c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q & a & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q & a & c \end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & p & a & b \\ 0 & 1 & p & a \\ 1 & q & a & c \\ 0 & 1 & q & a \end{vmatrix}=0,\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{vmatrix}\neq0$$

△ ノ第三列ヲ第五列ニ移シ第六行ニツキ展開スレバ

$$\Delta=-b\begin{vmatrix} & & & & 0\\ & \Delta_1 & & & b\\ & & & & 0\\ & & & & c\\ 0 & 0 & 1 & q & a\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} & & & & 0\\ & \Delta_1 & & & b\\ & & & & 0\\ & & & & c\\ 0 & 0 & 1 & p & a\end{vmatrix}$$

第五列ニツイテ展開スレバ $\Delta_1=0$ ナル故ニ

$$\Delta=(c-b)\begin{vmatrix}1 & p & b & 0\\ 0 & 1 & a & b\\ 1 & q & c & 0\\ 0 & 1 & a & c\end{vmatrix}+(bq-cp)\begin{vmatrix}1 & p & a & 0\\ 0 & 1 & p & b\\ 1 & q & a & 0\\ 0 & 1 & q & c\end{vmatrix}$$

$$=(c-b)\begin{vmatrix}1 & a & b\\ q-p & c-b & 0\\ 1 & a & c\end{vmatrix}+(bq-cp)\begin{vmatrix}1 & p & b\\ q-p & 0 & 0\\ 1 & q & c\end{vmatrix}$$

$$=(c-b)^2\{c-b+a(p-q)\}+(bq-cp)^2(q-p)=0 \qquad (1)$$

次ニ $\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}1 & p & a\\ q-p & 0 & c-b\\ 1 & q & a\end{vmatrix}=(p-q)\{c-b+a(p-q)\}=0$

$$\therefore\ c-b+a(p-q)=0 \qquad (2)$$

故ニ (1) ヨリ $\quad bq=cp \qquad (3)$

(2), (3) ヨリ $\quad b=ap,\quad c=aq,$

或ハ $\quad x^3+px^2+ax+b=(x^2+Ax+B)(x+C)$

$\quad x^3+qx^2+ax+c=(x^2+Ax+B)(x+D)$

トオキ係數ヲ比較スルモ可ナリ。

32. 次ノ二ツノ方程式ガ只一根ヲ共有スルヤウニ m ノ値ヲ定メヨ,

$$mx-m^2x^2+x=1,$$

$$2m^3x^2+m^2x-x=2,$$

〔解〕 只一根ヲ共有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ前々問ニヨリ

$$\Delta=\begin{vmatrix}m^2 & -(m+1) & 1 & 0\\ 0 & m^2 & -(m+1) & 1\\ 2m^3 & m^2-1 & -2 & 0\\ 0 & 2m^3 & m^2-1 & -2\end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}m^2 & -(m+1)\\ 2m^3 & m^2-1\end{vmatrix}\neq 0,$$

然ルニ $\quad \Delta_1=m^2(m+1)(3m-1) \qquad \therefore\ m\neq 0,\quad -1,\quad \dfrac{1}{3}$

故ニ $\Delta=0$ ヨリ

$$\begin{vmatrix}1 & -(m+1) & 1 & 0\\ 0 & m^2 & -(m+1) & 1\\ 2m & m^2-1 & -2 & 0\\ 0 & 2m^3 & m^2-1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}m^2 & -(m+1) & 1\\ 3m^2+2m-1 & -2(m+1) & 0\\ 2m^3 & m^2-1 & -2\end{vmatrix}=0,$$

$$\therefore\ \begin{vmatrix}m^2 & 1 & 1\\ 3m^2+2m-1 & 2 & 0\\ 2m^3 & 1-m & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3m^2+2m-1 & 2\\ 2m^3+2m^2 & 3-m\end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\ (3m^2+2m-1)(3-m)-4m^2(m+1)=0$$

$$\therefore\ (3m-1)(3-m)-4m^2=0$$

$$\therefore\ 7m^2-10m+3=0 \qquad \therefore\ m=1 \text{ 又ハ } \frac{3}{7},$$

或ハ共通根ヲ α トシ

$$m^2x^2-(m+1)x+1=m^2(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$2m^3x^2+(m^2-1)x-2=2m^3(x-\alpha)(x-\gamma)$$

トオキ $\beta\neq\gamma$ トシテ係數ヲ比較スルモ可ナリ, 或ハ又 問. 25 ノ如ク $\Delta=0$ ニ代フルニ

$$x^2=\frac{2(m+1)-(m^2-1)}{m^2(m^2-1)+2m^3(m+1)}=\left(\frac{2m^3+2m^2}{m^2(m^2-1)+2m^3(m+1)}\right)^2$$

ヲ以テスルモ可ナリ。

33. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ガ等根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求メヨ。

〔解〕 所要ノ條件ハ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$$

ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ナリ（第十章 基本定理 II),

故ニ問 22 ニヨリ $f(x)=0, f'(x)=0$ ノ終結式ガ 0 ニ等シキコトガ所要ノ條件ナリ,

即チ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ 3a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 2b & c \end{vmatrix}=0,$$

（注意） 一般ニ任意次數ノ方程式ニツイテモ同様ナルコト明カナリ。

34. 前問ニ於ケル行列式 $\triangle$ ト原方程式ノ判別式 D トノ關係ヲ求ム。

〔解〕 原方程式ノ三根ヲ α, β, γ トスレバ 問. 28 ニヨリ

$$\triangle=a^2f'(\alpha)\cdot f'(\beta)\cdot f'(\gamma)$$

又 $$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

$$f'(x)=a\{(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)\},$$

$$\therefore\ f'(\alpha)=a(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma),\quad f'(\beta)=a(\beta-\alpha)(\beta-\gamma),\quad f'(\gamma)=a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta),$$

$$\therefore\ \triangle=-a^5(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$$

然ルニ $$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2 \qquad \therefore\ \triangle=-a^5D,$$

（注意） 一般ニ $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_n=0$ ノ判別式(根ノ差ノ平方ノ積)ヲ D トシ $f(x)=0,\ f'(x)=0$ ノ終結式ヲ $\triangle$ トスレバ

$$\triangle=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{2n-1}D$$

ナルコトヲ同様ニ證明スルコトヲ得。

35. 方程式 $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ ノ判別式ヲ求ム。

〔解〕 $f(x)=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ ト $f'(x)=3(a_0x^2+2a_1x+a_2)=0$ トノ終結式ヲ $\triangle$ トシ $f(x)=0$ ノアラユル二根ノ差ノ平方ノ積ヲ判別式 D トスレバ前問ニヨリ $\triangle=-a_0^5D$

$$\therefore\ D=-\frac{1}{a_0^5}\begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{a_0^5}\begin{vmatrix} 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \\ a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{a_0^4}\begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & a_3 \\ a_0 & 2a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & 2a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

或ハ最初ヨリ

$$f'(x)=3(a_0x^2+2a_1x+a_2)=0 \quad ト \quad f(x)-\frac{xf'(x)}{3}=a_1x^2+2a_2x+a_3=0$$

トヨリ x ヲ消去スルモ可ナリ。

36. 方程式 $f(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ ノ判別式ヲ求ム。

〔解〕 前問ト同様ニ

$$\frac{1}{4}f'(x)=a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$$

$$f(x)-\frac{x}{4}f'(x)=a_1x^3+3a_2x^2+3a_3x+a_4=0$$

ヨリ x ヲ消去スレバ

$$D=\frac{1}{a_0^6}\begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

37. $f(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ ガ三重根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ム。

〔解〕 $f(x)=0$ ノ三重根ハ $f'(x)=0$ ノ二重根ニシテ從ツテ又 $f''(x)=0$ ノ根ナリ，故ニ $f(x)=0$ ガ三重根ヲ有スルトキハ $f(x)=0$, $f'(x)=0$, $f''(x)=0$ ガ共通ノ一根ヲ有セザルベカラズ，即チ

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0 \qquad (1)$$

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0 \qquad (2)$$

$$a_0x^2+2a_1x+a_2=0 \qquad (3)$$

ガ共通根ヲ有セザルベカラズ，然ルニ

$$(1)-(2)\times x, \quad a_1x^3+3a_2x^2+3a_3x+a_4=0 \qquad (4)$$

$$(2)-(3)\times x, \quad a_1x^2+2a_2x+a_3=0 \qquad (5)$$

$$(4)-(5)\times x, \quad a_2x^2+2a_3x+a_4=0 \qquad (6)$$

故ニ (1), (2), (3) ガ共通ノ一根ヲ有スルトキハ (3), (5), (6) ハ又共通根ヲ有セザルベカラズ，逆ニ (3), (5), (6) ガ共通一根ヲ有スルトキハ (1), (2), (6) ハ共通根ヲ有シ從ツテ其共通根ハ (1) ノ三重根トナル，故ニ (3), (5), (6) ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ即チ所要ノ條件ナリ，

然ルニ (3), (5) ヨリ

$$x^2=\frac{a_1a_3-a_2^2}{a_0a_2-a_1^2}, \qquad x=\frac{a_1a_2-a_0a_3}{2(a_0a_2-a_1^2)}$$

故ニ (3), (5), (6) ガ共通根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ハ

$$\frac{a_1a_3-a_2^2}{a_0a_2-a_1^2}=\frac{(a_1a_2-a_0a_3)^2}{4(a_0a_2-a_1^2)^2} \qquad (A)$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=0 \qquad (B)$$

コレ即チ所要ノ條件ナリ，尙コレヲ變形スレバ (B) ヨリ

$$a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3-a_1^2a_4-a_0a_3^2=0$$

(A) ヨリ

$$a_0(2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_2^3)+4a_0a_1a_2a_3+3a_1^2a_2^2-3a_0a_2^3-4a_1^3a_3=0$$

$$\therefore\ a_0(a_1^2a_4-a_0a_2a_4)+4a_0a_1a_2a_3+3a_1^2a_2^2-3a_0a_2^3-4a_1^3a_3=0.$$

$$\therefore\ (a_0a_4-4a_1a_3+3a_1^2)(a_1^2-a_0a_2)=0$$

然ルニ (1) ハ四重根ヲ有セザル故ニ (3) ハ二重根ヲ有セズ故ニ其判別式 $a_1^2-a_0a_2$ ハ 0 ナラズ，依ツテ所要ノ條件 (A), (B) ノ代リニ次ノ (C), (D) ヲ以テスルコトヲ得，

$$a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3=0 \qquad (C)$$

$$a_0a_4-4a_1a_3+3a_1^2=0 \qquad (D)$$

但シ (C) ハ (B) ソノモノナリ。

或ハ (1), (2) ガ二ツノ共通根ヲ有スル條件ヲ問. 30 ニヨリ次ノ如ク書キ下スモ可ナリ，即チ

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 & a_4 \\ a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0,$$

$$\triangle_1=\begin{vmatrix} a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & 4a_1 & 6a_2 & 4a_3 \\ a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_0 & 3a_1 & 3a_2 \end{vmatrix}=0, \qquad \triangle_2=\begin{vmatrix} a_0 & 4a_1 & 6a_2 \\ a_0 & 3a_1 & 3a_2 \\ 0 & a_0 & 3a_1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

或ハ又

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=a_0(x-\alpha)^3(x-\beta)$$

トオキ係數ヲ比較シテ α, β ヲ消去スルモ可ナリ。

——〔完〕——

附　　錄

問題對照表

I. 渡邊孫一郎氏、新編高等代數學(改訂版)。

II. 大石喬一氏、高等教育數學、代數學。

III. ダビソン氏、Higher Algebra.

(注意)　* 印ヲ付セルハ類題又ハ主要點ノ一致セル問題ヲ示ス。

I. 渡邊氏　新編高等代數學

渡邊氏		本書		渡邊氏		本書		渡邊氏		本書		渡邊氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
8	7	5	9	33	6	309	4	51	25	54	49	64	29	107	28*
9	1	165	3	〃	7	〃	5	〃	29	63	63	〃	30	96	基V.
〃	2	168	12	34	9	310	6*	〃	30	〃	〃	〃	31	123	48
〃	3(*a*)	〃	〃	〃	10	〃	7	〃	31	41	21	65	32	122	47
〃	3(*b*)	〃	14	〃	11	311	8	〃	32	〃	23	79	5	126	1
〃	4	173	20	50	1	33	4*	62	3	117	42	〃	6	141	23
〃	5	178	27	〃	2	〃	〃	〃	5	98	4	〃	7	〃	25
〃	6	〃	28	〃	4(*a*)	40 313	20 10	〃	6	116	25	〃	8(1)	129	7
〃	7	174	22	〃	4(*b*)	313	10	〃	7	100	11	〃	〃(3)	〃	8
10	8	〃	〃	〃	5	43	27	63	10	98	5	〃	〃(5)	130	9
〃	10	181	33	〃	6	312	9	〃	13	106	26*	〃	〃(6)	131	10
22	3	1	基II.	〃	7	42	24	〃	14	100	10	〃	〃(7)	132	11
〃	4	〃	〃	〃	8	44	29	〃	17	102	16*	〃	9	149	38
〃	5	11	17	〃	9	〃	28	〃	18	105	24	80	10	145	28
〃	6	9	14	〃	10	45	30	64	20	102	17	〃	13(2)	147	32
〃	8	11	18	〃	12	34	7	〃	21	103	18	〃	〃(3)	〃	33
23	9	12	19	〃	17	50	37	〃	22	101	13	〃	14(1)	155	48
〃	10	〃	21	〃	19	〃	38	〃	24	104	22	〃	〃(2)	156	50
〃	13	4	7	51	21	53	45	〃	25	〃	21	〃	〃(3)	〃	49
33	2	308	2*	〃	23	54	48	〃	26	109 110	32 34	〃	15(2)	159	53
〃	3	〃	〃	〃	24	52	44	〃	27	109	33*	〃	〃(3)	160	55

渡邊氏		本書		渡邊氏		本書		渡邊氏		本書		渡邊氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
80	16	128	5	112	32	221	48	143	1	272	13	177	1	264	基III.
109	2	195	6	113	33	″	49	″	2	″	″	″	3	315	13
110	3	″	7*	″	34	223	52	″	3	″	″	″	5	″	14
″	4	194	4	″	35	228	60	144	7(2)	″	14	″	6	317	17
″	5	″	4*	″	36	229	61	″	9(2)	274	16	″	8	318	18
″	6	99	7	132	1	280	25	″	10	275	17	178	11	″	19
″	7	202	21*	″	2	″	24	″	11	295	47	″	12	290	39
″	8	203	22	″	4	294	46	″	12	294	46	″	13	291	40
″	9	208	29	133	5	280	25	162	1	239	7*	185	1	342	50*
″	10	″	″	″	6	282	28	″	2	″	8	186	9	343	51
″	12	207	27	″	8	267	7*	″	4	243	15	211	2	346	7
″	13	200	18*	″	9	284	32	″	5	242	13	″	4	349	11
″	14	209	30*	″	10	264	1	″	10	255	35	″	6	356	22
111	15	″	″	″	12	265	3	″	11	″	34	212	11	351	16
″	17	210	33	″	13(1)	15	26	″	13	252	29	″	13	353	18
″	18	″	34	″	″(3)	16	30	163	14	247	21	″	14	354	20
″	20	215	41	″	″(5)	17	31	″	15	″	″	″	15	353	19
″	21	209	31	134	14(1)	14	23	″	16	249	24	″	16	357	24
″	24	196	8	″	″(3)	18	35	″	17	248	23	213	19	366	33
112	25	214	39	″	″(4)	″	34	″	18	253	31	″	20	365	31
″	26	215	40	″	15(1)	267	6	″	19	252	30	″	21	″	″
″	29	218	44	″	″(2)	266	4	″	20	254	32	″	22	366	32
″	31	″	45	″	16	273 299	15 52	169	7	298	51	″	23	372	41

渡邊氏		本書		渡邊氏		本書		渡邊氏		本書		渡邊氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
214	26	371	39	238	4	323	26	239	10	332	42				
″	27	370	37	″	5(1)	319	20	″	11	″	41				
″	28	″	38	″	″(4)	″	21	″	12	316	15				
238	2	325	30	239	7	331	39	″	14	337	46				
″	3(1)	322	25	″	8	″	40								

II. 大石氏、高等教育代數學

大石氏		本書		大石氏		本書		大石氏		本書		大石氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
22	1	167	8	22	12	168	10	34	17	109	33*	72	6	99	7
″	3	168	12	″	13	164	1	″	18	104	22	″	7	202	21*
″	4	179	30	23	14	175	24*	48	5	128	5*	″	8	205	24
″	5	178	27*	33	3	96	基I.	″	6	149	38	″	10	202	21
″	6	174	22	″	4	107	27	″	7	161	56	73	12	209	30*
″	7	173	20	″	5	96	1	″	11	151	41	″	13	218	44
″	8	174	22	34	8	″	基I.	″	15	27	49	″	15	″	45
″	9	173	20	″	9	97	2*	″	16	133	12	″	16	223	52
″	10	16	13	″	13	101	13	71	1	195	6	″	17	218	44
″	11	179	29	″	16	181	33	72	3	200	18	″	18	228	60

大石氏		本書		大石氏		本書		大石氏		本書		大石氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
73	19	{103 228	18 59	107	17	249	24	155	6	329	36	附錄 5	6	179	30
〃	20	213	37	108	18	248	23	〃	7	317	17	〃	7	〃	29
74	21	214	39	127	3	1	基I.	〃	8	320	22	〃	9	171	
〃	22	204	23	〃	4	〃	〃	〃	15	340	48	〃	10	179	
〃	23	208	29	〃	8	3	5	〃	16	341	49*	〃	11	173	
〃	24	215	40	〃	9	314	12	〃	18	343	51	〃	12	〃	
97	7	51	39	〃	10	315	14	187	4	349	12	〃	13	175	23
〃	9	55	50	〃	11	〃	13*	〃	6	351	16	〃	14	168	12*
〃	10	53	47	〃	13	286	35	〃	8	353	18	附錄 6	15	〃	11
98	16	44	29	128	14	〃	〃	188	15	373	42	〃	22	188	44*
〃	18	43	26	〃	15	〃	36	〃	17	374	43	〃	23	187	42
〃	19	33	5	〃	16	294	45	189	19	〃	45	〃	24	〃	〃
〃	20	42	25	〃	17	319	20*	〃	21	378	49	〃	26	164	基IV
〃	21	33	4	〃	18	330	38	〃	22	366	33	附錄 7	33	185	39
〃	24	141	23	138	3	16	29*	190	29	356	22	〃	34	179	29
〃	27	33	3*	〃	8	267	6	附錄 2	13	18	34	〃	1	96	基III
〃	28	142	26	〃	9	266	4*	〃 3	14	1	基II.	〃	2	96	1
106	5	241	11	139	12	274	16*	〃	17	49	35	〃	3	97	3
107	6	242	13	〃	14	277	19	附錄 4	28	25	45*	〃	4	102	15
〃	8	〃	14	〃	16	297	49	〃 5	30	181	32	〃	5	〃	17
〃	11	39	7	154	1	282	30	〃	1	169	13*	附錄 8	11	117	42
〃	14	251	27	〃	2	272	13	〃	2	166	5	〃	15	106	25*
〃	16	249	25	155	4	276	18	〃	3	175	23*	〃	18	108	30*

大石氏		本書		大石氏		本書		大石氏		本書		大石氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
附錄 9	19	98	4*	附錄 14	8	135	14	附錄 20	13	202	21	附錄 26	51	220	47
〃	20	107	27	〃	10	129	7	〃	14	207	28	〃	52	198	基IV.
〃	21	104	21	〃	11	〃	8	附錄 21	15	193	1	〃	4	53	46
〃	22	103	18	〃	13	134	13	〃	16	214	39	〃	5	57	55
〃	23	116	41*	〃	14	127	3	〃	17	201	19*	〃	10	58	56
〃	24	103	18	附錄 15	20	103	18	〃	18	215	40	〃	11	61	60
〃	25	107	27	〃	22	96	基V.	〃	21	222	50	附錄 28	32	44	28
附錄 10	32	96	基I.	附錄 16	26	149	38	附錄 22	26	206	26	〃	33	〃	29
〃	33	102	17	〃	29	128	5	〃	27	204	23	〃	35	41	21
〃	35	108	30	〃	30	133	12	〃	28	232	65	〃	39	34	7
〃	36	96	基III.	〃	32	{166 129	5 8	23	31	212	35	附錄 29	46	140	22
附錄 12	45	97	2*	附錄 17	38	137	17	〃	32	107	27	〃	47	159	53
〃	48	104	22	〃	39	〃	〃	〃	33	206	25	〃	50	322	24
〃	49	〃	〃	〃	47	118	43	〃	34	232	65	〃	51	142	26
〃	50	〃	〃	附錄 18	48	136	16	〃	35	209	31	附錄 30	54	49	34
附錄 13	53	103	18	〃	49	160	55	附錄 24	40	210	24	〃	56	35	10
〃	54	〃	〃	〃	50	258	39	〃	42	198	13	〃	58	36	11
〃	55	96	基I.	〃	52	190	46	〃	43	230	62	〃	60	48	33
〃	2	126	1	〃	53	161	56	附附 25	44	200	16	附錄 32	10	241	11
〃	4	156	50	附錄 19	4	206	26	〃	46	209	30	〃	12	244	16
附錄 14	5	128	5	附錄 20	9	99	7	〃	47	225	54	〃	14	247	21
〃	6	129	8*	〃	11	199	15*	〃	49	200	16	〃	15	〃	〃
〃	7	136	15	〃	12	213	37	〃	50	221	48	附錄 33	21	161	1

大石氏		本書		大石氏		本書		大石氏		本書		大石氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
附錄 33	22	247	21	附錄 39	42	317	17	附錄 43	36	280	23	附錄 56	44	394	2
〃	23	246	20	〃	43	〃	〃	〃	37	323	26	〃	45	408	22
〃	24	251	27	〃	45	327	34	〃	38	〃	〃	〃	46	399	9
〃	26	235	基IV.	〃	47	318	18	附錄 44	49	270	11	〃 〃	47 48	408 420	22 32
附錄 34	30	245	18	〃	48	{〃 {264	〃 基III	〃	50	〃	〃	附錄 57	50	391	60
〃	38	254	33	〃	49	{164 {327	基II 34	〃 45	52	269	10	〃	51	383	54
附錄 35	42	{128 {160	5 55	附錄 40	50	{164 {327	1 34	〃	53	〃	〃	〃	52	〃	55
〃	9	408	22	〃	51	327	34	〃	54	316	15	〃	53	398	8
附錄 36	10	2	3	〃	52	329	36	〃	55	322	25*	附錄 58	55	385	56
〃	11	〃	〃	〃	2	15	28	〃	1	272	13(3)	〃	56	388	59
〃	12	〃	〃	附錄 41	5	16	30	〃	2	〃	〃	附錄 59	58	381	52
〃	14	6	14	〃	7	15	26	附錄 46	7	276	18				
〃	15	26	48	〃	10	255	34	〃	11	277	19*				
〃	16	292	41	〃	11	〃	35	〃	15	273	51				
〃	18	7	12	〃	13	257	38	附錄 47	17	276	13				
〃	19	8	13	〃	14	21	38	〃	22	343	51				
〃	20	〃	〃	附錄 42	18	〃	39	〃	25	341	49				
附錄 37	23	279	21	〃 43	28	325	30	〃	26	340	48				
〃	25	2	4	〃	29	〃	〃	附錄 50	10	346	7*				
〃	26	279	21	〃	30	〃	〃	〃 52	19	355	21				
〃	27	〃	〃	〃	33	323	27	〃 53	30	369	36				
附錄 38	32	270	12	〃	34	267	6*	〃 55	37	375	46				
〃	53	292	42	〃	35	282	29		38	359	27				

III. ダビソン氏、Higher Algebra.

ダ氏		本書		ダ氏		本書		ダ氏		本書		ダ氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
9	1	141	24	18	6	160	55	87	3	165	3	113	32	180	31*
〃	5	〃	23	2	6	136	16	〃	4	〃	4	〃	33	182	34
〃	7	126	基I.	36	8	128	5	〃	5	167	7	〃	35	170	16
〃	8	129	7	37	10	246	20	92	8	168	9	124	12	51	39*
〃	13	130	9	〃	11	254	33	〃	12	〃	11	〃	15	62	62
〃	14	129	8	〃	12	258	39	〃	15	169	15	〃	17	52	44
〃	15	〃	〃	58	12	146	30	94	7	〃	14	〃	18	54	49
11	1	128	5	63	4	150	39	95	3	181	33	127	4	73	9
〃	3	127	3	〃	5	155	47	95	6	182	34	〃	5	83	27*
〃	4	〃	4	〃	6	149	38	99	7	178	27	〃	7	〃	〃
12	6	137	17	〃	8	117	42	〃	9	〃	28	129	1	50	37
〃	11	141	25	〃	1	133	12	〃	11	179	29	130	3	63	63
〃	12	135	14	〃	2	147	34	〃	15	175	24	131	11	54	48
〃	13	134	13	64	8	186	40	103	1	184	38	132	19	53	47
〃	15	132	11	〃	10	148	35*	〃	7	185	39*	154	5	265	2
16	1	155	48	〃	12	148	35	〃	8	186	40	〃	6	〃	〃
〃	7	156	49	65	18	118	43	〃	9	〃	41	〃	8	280	24
〃	9	9	50	65	21	181	38	108	1	258	39	〃	10	〃	25
17	1	{96 {126	基V 基III	66	16	154	45	111	7	189	45	〃	12	〃	26
〃	2	164	1	87	1	164	1	〃	8	179	30	〃	13	〃	23
〃	4	267	6	〃	2	165	2	112	20	166	5	155	17	272	14

ダ氏		本書		ダ氏		本書		ダ氏		本書		ダ氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
158	3	326	31	184	9	286	36	〃	6	133	12				
〃	4	325	30	187	1	322	25*	282	8	117	42				
160	3	281	27	188	1	292	42*	283	10	172	19				
〃	5	284	32	189	1	322	25	285	15	58	56				
〃	9	274	16	〃	3	324	28	286	17	296	48				
〃	11	246	19	〃	5	〃	29	〃	18	327	34				
161	16	276	18	201	2	339	47	293	6	21	38				
〃	17	297	49	〃	7	〃	〃	〃	2	181	33				
166	1	272	13	208	1	340	48	295	9	258	38				
〃	2	〃	〃	〃	4	341	49	299	〃	401	13				
171	1	282	30	〃	9	343	51	〃	10	397	7				
〃	2	273	15	218	14	356	23	300	5	2	4				
〃	3	〃	〃	〃	15	〃	〃	301	4	104	22				
178	3	314	12	225	6	351	16	〃	5	163	60				
179	6	〃	〃	〃	10	353	18								
181	1	327	34	〃	13	371	39								
〃	2	329	36	226	15	369	36								
〃	3	〃	〃	〃	16	353	19								
〃	4	315	13	227	20	350	15								
〃	9	329	36	〃	21	354	20								
183	5	286	35	〃	23	355	21								
184	7	321	23	〃	24	378	49								
〃	8	330	38	281	5	376	47								

IV. 園氏、高等教育代數學。

園氏		本書		園氏		本書		園氏		本書		園氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
8	1	96	1	47	1	129	7	76	1	210	32	102	1	34	7
〃	2	99	7	〃	2	130	9	〃	2	209	31	〃	3	〃	6
〃	3	〃	8	〃	3	136	16	〃	3	194	4*	〃	5	42	24
〃	4	98	6*	〃	5	129	8*	81	1	215	40	103	3	51	39
14	3	102	17	〃	6	〃	8	82	3	〃	41	〃	6	312	9
〃	5	101	13	53	3	133	12	85	1	218	44	125	3	350	13
18	3	104	22*	〃	5 i)	132	11	86	2	220	47	〃	4	348	9
20	1	109	32	〃	6	149	38*	〃	3	〃	〃	〃	8	351	16*
〃	2	108	31	〃	7(i)	171	18	〃(演)	1	100	10*	129	5	366	33
25	1	106	25	〃	〃(ii)	168	11	87	3	206	25*	134	5	363	30
〃	2	107	27	54	〃(iii)	〃	9	〃	5	204	23	137	1	407	20
〃	3	〃	〃	〃	8	〃	10*	〃	6	207	27	〃	3	408	22
〃	(演)1	108	31*	〃	9	181	33	〃	7	202	21	〃	4	399	10
〃	〃2	106	25	66	1	194	2	88	8	201	19	143	2	369	36
〃	〃3	103	18	〃	2	〃	3	〃	9	223	52	144	9	395	4
26	4	108	31*	〃	4	99	7	〃	10	221	49*	158	1	2	3
〃	5	103	18	69	1	200	18	〃	11	〃	〃	〃	3	3	5
〃	8	106	26	〃	2	201	19	97	1	50	37	〃	4(i)	15	26
〃	9	123	48	70	3	222	50*	〃	2	63	63	〃	〃(ii)	16	30
〃	10	122	47	〃	4	202	21	〃	3	139	21	〃	5(ii)	255	34

園氏		本書		園氏		本書		園氏		本書		園氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
163	1	292	42	190	12	387	58	283	16	126	基III	290	42	164	1
169	3	279	21*	〃	13	1	基V.	〃	17	155	47*	〃	43	〃	〃
173	2	267	7	255	7	331	39	284	19	208	29*	〃	48	171	18
〃	3	280	24	〃	8	332	41	〃	20	194	3*	〃	49	172	19
〃	4	〃	23	256	2	299	52	〃	22	224	53	〃	50	185	39
178	1	264	1	〃	3	〃	〃	〃	23	232	66	〃	52	173	20
〃	2	〃	〃	256	5	286	35	〃	24	194	4	〃	54	〃	21
183	1	349	12	257	7	314	12	〃	25	〃	〃	291	55	178	27
〃	4	15	28	271	5	389	47	285	27	195	5	292	67	175	23
189	(演)1	252	30	82	6	150	39	〃	28	207	28*	〃	73	51	39
〃	〃2	245	18	〃	7(i)	107	27	〃	29	213	38	293	82	53	47
〃	〃3	3	5	〃	〃(ii)	150	39	〃	30	205	24*	294	91	58	56
〃	〃4	294	45	〃	8	107	27	286	32	225	54	〃	93	59	58
〃	〃5	1	基II	〃	9	152	42	287	33	129	8	〃	95	52	42
190	7	268	8*	〃	10	108	30	〃	34	〃	〃*	〃	97	30	53
〃	8	269	9	283	11	{128 150	6 39	〃	35	〃	〃	295	98	33	2*
〃	9	380	51	〃	12	100	11*	〃	36	〃	7*	298	131	49	35
〃	10	329	37	〃	14	155	47	〃	38	168	10*	300	137	382	53*
〃	11	297	49	〃	15	〃	〃	288	39	〃	〃				

相原 山崎 兩氏, 新撰高等代數學

相原氏		本書		相原氏		本書		相原氏		本書		相原氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	題問	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
16	3	1	1	29	17	100	11*	76	9	15	26*	107	11	363	30
〃	4	3	5	〃	18	96	基III	〃	10	19	36	121	此ノハ總演習ト	頁ノテ微參照	問題分學ノコ
〃	5	〃	〃*	30	19	108	30	94	3	345	2				
〃	7	1	基II	〃	20	96	基III	〃	5	350	13	131	1	51	39
〃	8	10	15	〃	21	104	22	95	7	349	12	〃	2	53	45*
17	13	4	7*	42	4	128	5	〃	9	356	23	〃	3	54	48
28	1	96	基IV	〃	6	〃	6	〃	10	375	46	〃	4	61	60*
〃	2	〃	基I	〃	7	149	38	〃	12	354	20	132	6(4)	50	37
〃	3	99	7	43	8	129	8	〃	13	353	18	〃	8(1)	57	55
〃	4	〃	〃*	〃	9	〃	7	96	15	367	34*	〃	〃(2)	54	49
〃	6	100	12	〃	10	〃	8	〃	16	〃	〃	〃	9	81	23
29	7	102	15*	〃	12	130	9	〃	17	370	37	〃	10	70	基III
〃	8	96	基II	〃	14	132	11	〃	18	372	41	〃	11	81	21
〃	9	1(2	15	〃	18	156	50	106	2	366	33	〃	12(2)	34	6*
〃	11	〃	17	51	此ノハス學演コト	頁ノベテ習參	問題微分照ノ	〃	3	360	28	〃	〃(4)	33	4
〃	12	103	18					〃	4	394	2	〃	13(1)	312	9
〃	14	117	42	55	同	上		〃	7	370	38	〃	〃(2)	42	25*
〃	15	〃	〃	76	7	16	30	107	8	363	30	133	14	37	13
〃	16	〃	〃	〃	8	15	28	〃	10	395	4	148	此ノハ總演習	頁ノテ微參照	問題分學ノ事

相原氏		本書		相原氏		本書		相原氏		本書		相原氏		本書	
頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題	頁	問題
165	5	247	21	166	18	252	29	189	5	265	2*	224	10	169	15
〃	6	241	11	181	3	255	35	〃	9	272	14	22	11(ii)	168	12
〃	10	247	22	〃	4	252	29	208	4	317	17	〃	14(i)	165	3
〃	11	〃	〃	〃	6	264	基II, III.	〃	5	318	18	227	20(i)	173	20
〃	12	249	24*	〃	8	294	46	〃	8	337	46	〃	〃(ii)	〃	21
〃	13	251	27	〃	9	267	6	〃	9	315	13*	236	37	204	23
166	16(ii)	242	14*	〃	10	322	25	209	10	319	20*	237	43	210	34
〃	〃(iii)	〃	13	〃	12	323	26	〃	13	310	6	238	49	213	37*
〃	17	244	17	188	1	272	13	〃	17	332	42	239	51	215	41

昭和六年四月十日印刷
昭和六年四月二十日發行
昭和七年三月五日三版發行
昭和八年四月十日五版發行
昭和九年十月五日七版發行
昭和十年四月五日九版發行
昭和十年十一月十五日十版發行
昭和十一年三月三日十一版發行
昭和十一年十月十日十三版發行
昭和十二年四月十五日十五版發行
昭和十二年十月十五日十七版發行
昭和十三年五月十日十九版發行
昭和十三年十一月五日二十一版發行
昭和十四年三月五日二十三版發行
昭和十四年八月一日二十五版發行
昭和十五年七月一日訂正廿八版發行

代數學演習

定價四圓參拾錢

著者 檢印

著作者 大上茂喬
發行者 楠間龜楠
東京市小石川區水道端二ノ一〇
印刷者 横山喜助
東京市神田區美土代町二十二番地

發行所
文明社
東京市小石川區水道端二ノ一〇
振替東京一七〇一六番 電話大塚五三五九番

活文舍印刷所印行

終