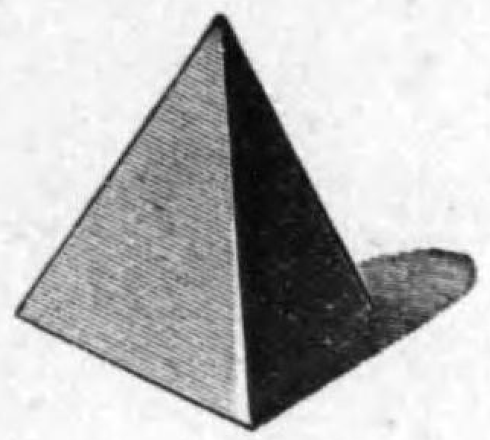
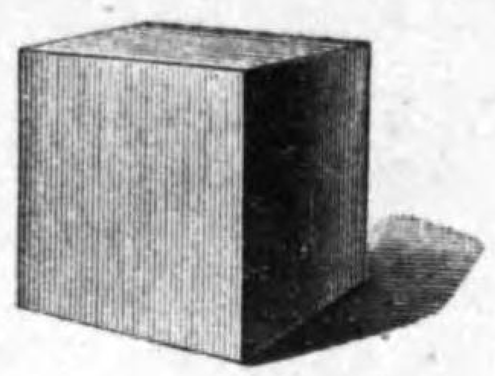
始

立體新幾何學教科書

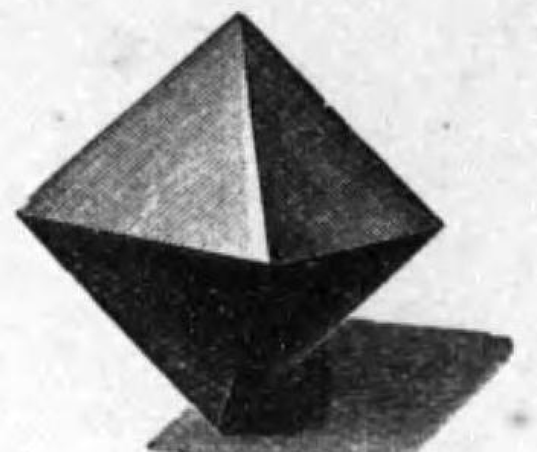
長澤亀之助編



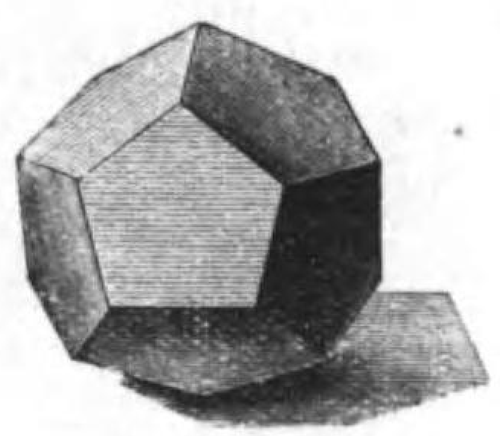
正四面體



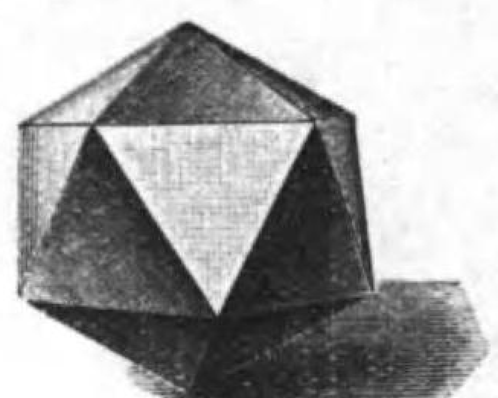
正六面體
[立方體]



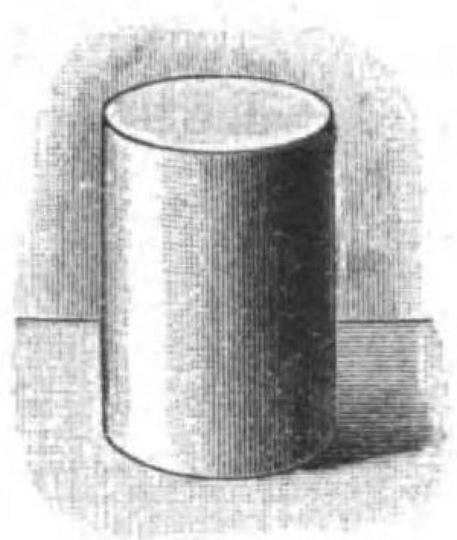
正八面體



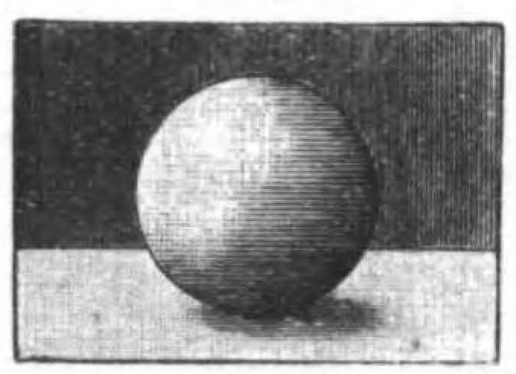
正十二面體



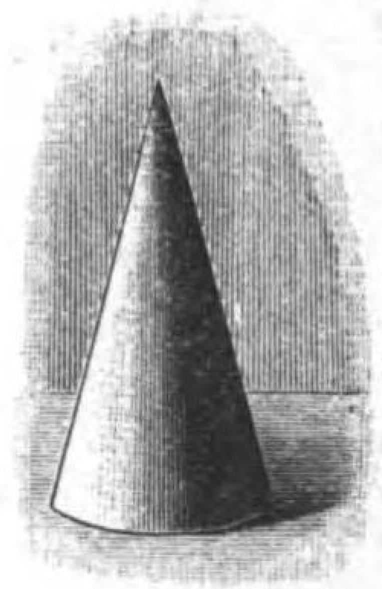
正二十面體



圓壔



球



圓錐

NEW GEOMETRY,
SOLID.

K. NAGASAWA.

長澤龜之助編纂

大正版

# 新幾何學教科書

立體

發行所 株式會社 國定教科書共同販賣所

# 序

本書ハ中學校,其ノ他,中等教育程度ノ學校ノ教科用ニ充テンガ爲ニ,曩ニ編纂シタルモノヲ,明治四十四年七月文部省發布ノ教授要目ニ適スル如ク改訂シ,更ニ採用學校ノ意見ニ基ヅキテ再訂シタルモノナリ. 而シテ其ノ編纂ノ大要ハ平面幾何學ノ序文ニ於テ,既ニ之ヲ詳述シタルヲ以テ,今又ココニ繰返スノ必要ナシト信ズ. 唯平面幾何學ノ序文ニ述ベザリシ一二ノ事項ヲ次ニ陳述ス可シ.

第一編ニ載スル所ノ**空間ニ於ケル直線及ビ平面**ハ,立體幾何學所論ノ基本トナルガ故ニ,稍詳述スルヲ要ス,之ニ反シテ多面體以下ハ,現今ノ中等教育程度ニ於テハ,成ルベク簡單ナルヲ可トス. 本書コノ意見ヲ以テ立案シタリ.

正多面體ノ現存ニ關スル定理ニ二ツアリ.

[第一] **正多面體ハ五種ヨリ多クアル能ハズ.**

[第二] **正多面體ニハ五種アリ.**

コレナリ,而シテ此ノ第一ハ容易ニ證明シ得ルコトナレドモ,第二ノ證明ハ中等教育程度ノ書ニハ,不適

當ナリト信ジ,之ヲ省ケリ.

多面體ノ論中,角臺圓臺角錐圓錐角壔圓壔ハ,**角臺ヲ以テ最モ概濶ナルモノ**トシ,圓臺以下ハ,其ノ特別ノ場合トシテ觀察スルコトヲ示セリ. 此ハ學生ヲシテ,概濶ノ觀念ヲ得シムルノ基礎トナルベケレバナリ.*

本書卷末ニハ,立體幾何學ノ定理公式ノ一覽表ノ外,平面幾何學ノ公理定理等ノ一覽表ヲ附シ,平面幾何學ヲ引用スルノ便ニ供ス.

從來行ハレシ Rectangular parallelopiped, 卽チ直角平行六面體ト云ヘル語ハ,原語モ譯語モ長タラシキ學語ナリ,はいわーど氏ノ卓見ニ依リ,氏ガ之ニ **Cuboid** ナル新名ヲ下セショリ,英米二國トモ近時ノ立體幾何學ハ,多ク此ノ名ヲ用フルニ至レリ,余ハ曾テ氏ノ立體幾何學ヲ譯セシトキ,之ヲ**直角體**ト譯シ,爾來之ヲ用ヒテ極メテ便益ヲ感ゼリ. 本邦ニ於テモ,速ニ直角體ナル命名ノ一般ニ採用セラレンコトヲ希望ス.

本書ニ於テハ,平面幾何學ノ序文ニ述ベタル如ク,

---

* どもるがん氏曰ク "Every study of a generalization or extension gives additional power over the particular form by which the generalization is suggested." DE MORGAN, FORMAL LOGIC.



處々ニ歷史的註釋ヲ加ヘタル外,立體幾何學ニ於テ功アリシ先輩數氏ノ肖像及ビ小話ヲ挿入シ置ケリ.

復習雜題ハ,本文問題ノ不足ヲ補ハンガ爲ニ,前版通リ卷末ニ分類集錄セリ.

試驗問題モ亦最近十五ケ年間[特ニ大正三年マデ]ニ涉リテ,中學卒業生ヲ收容セントスル諸官立學校ノ入學試驗篋ヨリ收錄シタリ,但本文ノ順ニ類別セルユヱ,便宜必要ノ場所ニ挿入シテ敎授スルコトヲ得ベシ.

大正版ニ於テハ,主トシテ實地ノ經驗ニ基ヅキ,採用校ノ意見ヲモ參酌シ,全編ニ涉リテ改訂ヲ加ヘタリ.

**終ニ**本書ヲ敎科ニ採用セラルル諸君ハ,本書ノ爲ニ批評忠言ヲ示サレンコトヲ切望ス.

大正三年十二月　**編者識ス**

## 用語及び記號

1. **定義** トハ用語ノ意義ヲ確定スルコトナリ.
2. **命題** トハ一ノ事項ノ陳述ナリ.
3. **定理** トハ推理ニ依リテ其ノ眞ナルコトヲ證明セントスル命題ナリ.
4. **系** トハ定理ヨリ直チニ推定シ得可キ命題ナリ.
5. **記號**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| + | 加. | − | 減. | = | 等. |
| ≡ | 全等. | > | ヨリ大. | < | ヨリ小. |
| ∧ | 角. | $\hat{R}$ | 直角. | ⊥ | 垂線. |
| ∥ | 平行. | △ | 三角形. | ∴ | 故ニ. |

[本文ノ中ニ,例ヘバ平.45款トアルハ平面幾何學45款ノ義ナリ]

# 目次

# 新幾何學教科書

## 立體

# 第一編　直線及び平面

## 第一節

### 空間に於ける直線及び平面

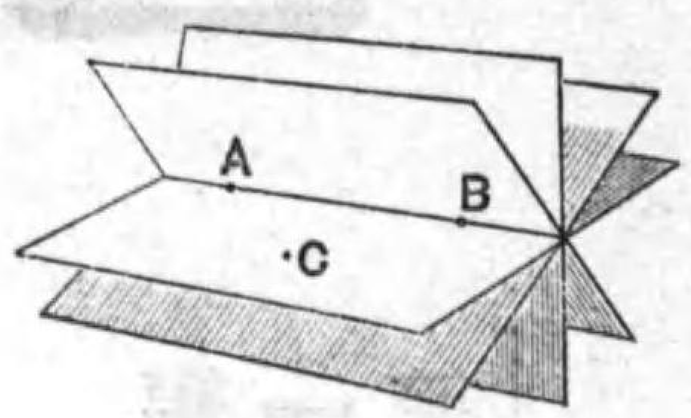
**1. 定義**　**平面**とは,其の面上にある任意の二點を結び付くる直線が,全く其の面上にある如きものを云ふ.

平面ハ四方トモ廣ガリニ制限ナシ.

若干ノ點,或ハ線,又ハ點ト線トヲ含ム平面ガ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ルトキハ,是等ノ點,或ハ線,又ハ點ト線トハ平面ヲ**定ム**ト云フ.

**注意** 平面ニアラザル總テノ面ヲ**曲面**ト云フ.

**2. 定理** 一直線と,其の直線上にあらざる一點とは,一の平面を定む.




AB ヲ一ツノ直線トシ,其ノ上ニアラザル一點ヲ C トスレバ,

直線 AB 及ビ點 C ハ一ノ平面ヲ定ムルコトヲ證セントス.

**證** 直線 AB ヲ含ム一ツノ平面ガ, AB ヲ軸トシテ廻轉スルモノト考フレバ,

其ノ平面ガ,點 C ヲ含ム一ツノ位置アル可シ,

而シテ 點 C ヲ含ム位置ハ唯一ツナリ.

如何トナレバ 平面ガ廻轉スルニ當リ點 C ヲ含ム前後,如何ホド廻轉スルトモ,他ニ點 C ヲ含ム如キ位置アラザレバナリ.

故ニ 一直線 AB ト,一點 C トハ,一ノ平面ヲ定ム.

**3. 系**1. 同一ノ直線上ニアラザル三點,

又ハ 相交ル二直線,

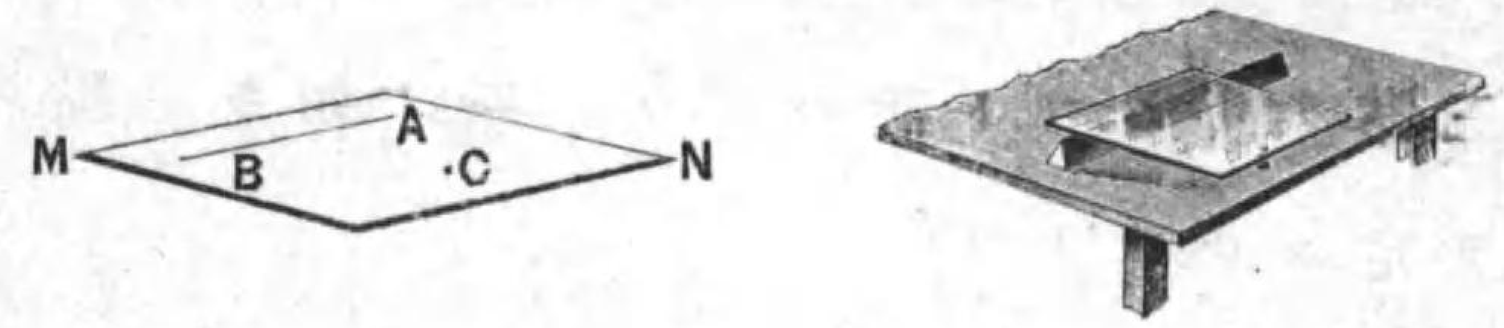


或ハ 相平行スル二直線,

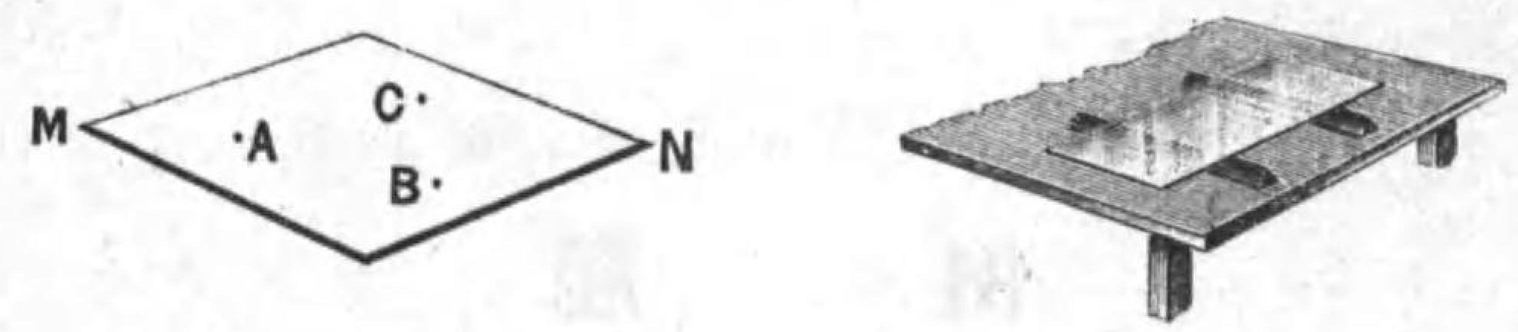
ハ何レモ一ノ平面ヲ定ム.

**注意** 2款ノ定理及ビ此ノ系1ハ,平面ヲ定ムル要件ニシテ,立體幾何學ニ於ケル主要ナルモノナリ.

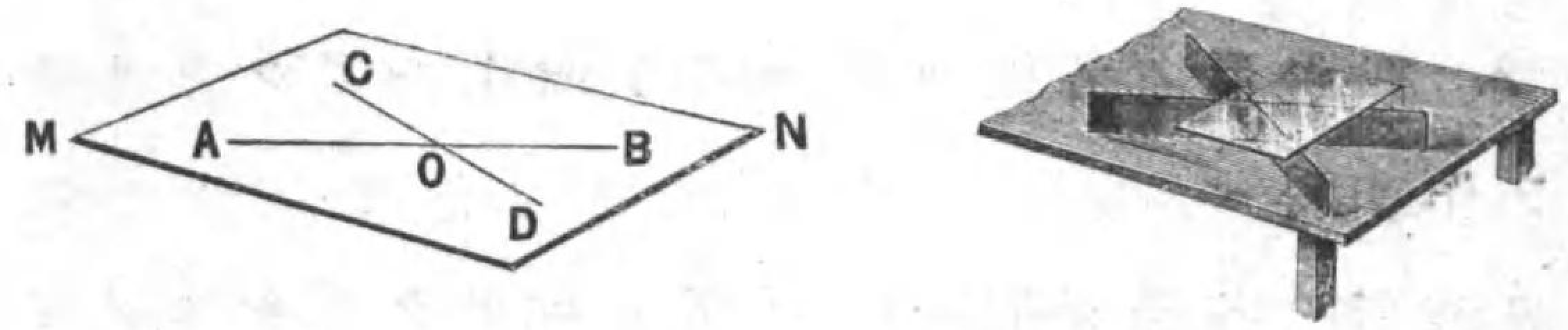
卽チ定理ハ,一直線 AB 及ビ一點 C ニテ,一ノ平面ガ定マルコトヲ云ヒ,之ヲ圖示スレバ次ノ如シ.




又系1ノ第一ハ,三點 A, B, C ニテ,一ノ平面ガ定マルコトヲ云ヒ,之ヲ圖示スレバ次ノ如シ.

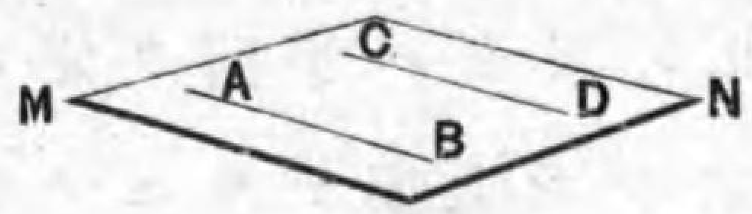


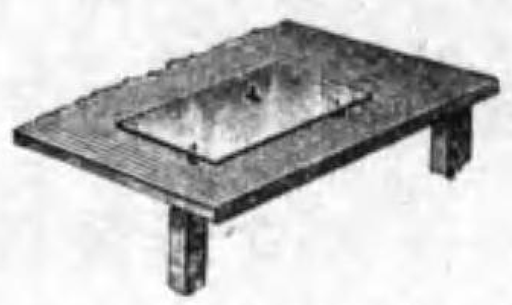

系1ノ第二ハ,相交ル二直線 AOB, COD ニテ,一ノ平面ガ定マルコトヲ云ヒ,之ヲ圖示スレバ次ノ如シ.




系1ノ第三ハ,相平行スル二直線ニテ,一ノ平面ガ

定マルコトヲ云フ,而シテ之ヲ圖示スレバ,次ノ如シ.



**系2.** 二平面ノ交リハ,一直線ナリ.

[如何トナレバ,二平面ノ交リハ,同一ノ直線上ニアラザル三點ヲ含ムコト能ハズ,ソハ斯ノ如キ三點ハ一平面ヲ定ムレバナリ].

**系3.** 一ツノ點ヲ過リ,其ノ點ヲ含ム平面上ノ一ツノ直線ニ平行ニ引ケル直線ハ,全ク其ノ面上ニアリ.

## 例題

1. 二ツヅツ三ツノ點ニ於テ相交ル三ツノ直線ハ,同一ノ平面上ニアリ.

2. 四邊形ノ各邊ガ,同一ノ平面上ニアラザルモノヲ作リ得ベシ.

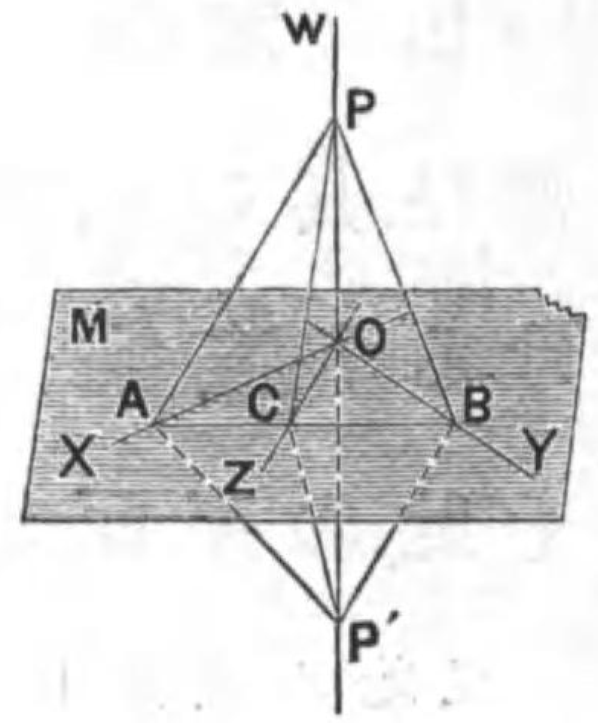
四邊形ノ各邊ガ,同一ノ平面上ニアラザルモノヲ**ごーしゅ四邊形**ト云フ.



3. 三ツノ點ヲ共通ニモツ二ツノ平面ハ,必ズ相合スルヤ否ヤ.

---

**4. 定理** 相交る二直線の各に,其の交點に於ける垂線は,此の二直線の定むる平面上にある其の交點を過る任意の直線に垂直なり.




X, Y ハ O ニ於テ相交ル二ツノ直線トシ, Z ハ X, Y ノ定ムル平面 M 上ニテ O ヲ過ル任意ノ直線トス.

O ヲ過ル直線 $W \perp X$, 及ビ $W \perp Y$ ナルトキハ,

$$W \perp Z$$

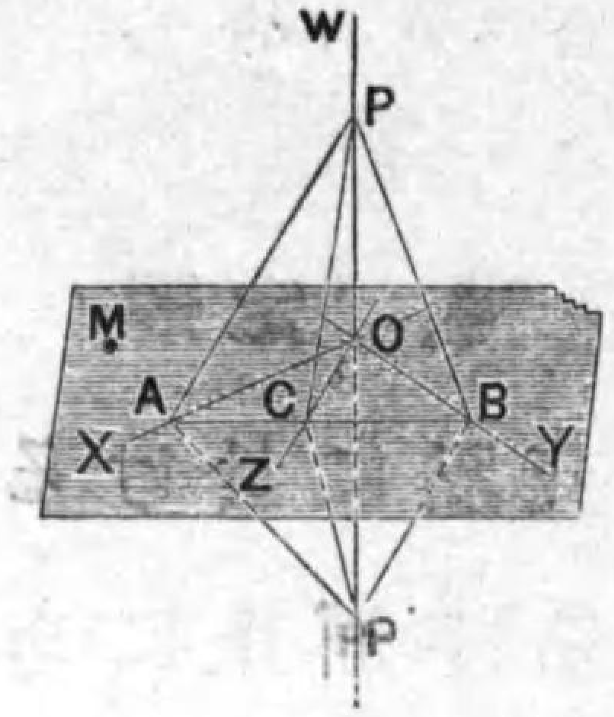
ナルコトヲ證セントス.

**證** 直線 W 上ニ於テ $OP = OP'$ ヲ取リ,又任意ノ横截線ヲシテ X, Y, Z ヲ,ソレゾレ點 A, B, C ニ於テ截ラシメ, P 及ビ P' ヲ A, B, C ニ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ $AP = AP'$, $BP = BP'$, [平, 122 款]

而シテ AB ハ $\triangle ABP$, $\triangle ABP'$ ニ共通ナルヲ以テ

△ABP≡△ABP'. [平. 59 款]




故ニ AB ヲ軸トシテ△ABP ヲ折返シ,△ABP' ニ重ナラシムルトキハ,

CP ハ CP' ト重ナリ,

從ヒテ CP=CP'.

依リテ PP'[W] ハ CO[Z] ニ垂直ナリ. [平. 122 款]

**5. 定義** 一の直線が一の平面に出會ひ,其の交點を過りて其の平面上に引ける各直線に垂線なるときは,此の直線を此の平面の**垂線**なりといふ.

又此ノ直線ト平面トハ,之ヲ**互ニ垂直ナリ**ト云フ.

是ニ依リテ,前款ノ定理ハ,次ノ如ク述ブルコトヲ得ベシ. 即チ

相交ル二直線ノ各ニ,其ノ交點ニ於ケル垂線ハ,此ノ二直線ノ定ムル平面ニ垂直ナリ.

一ノ平面ニ出會ヒテ,垂線ナラザル直線ヲ**斜線**ト稱ス.



垂線又ハ斜線ガ,平面ニ交ル點ヲ其ノ**趾**(アシ)ト云フ.

**6. 系** 二定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,之ヲ結ビ付クル線分ノ中點ヲ過リテ,之ニ垂直ナル平面ナリ.

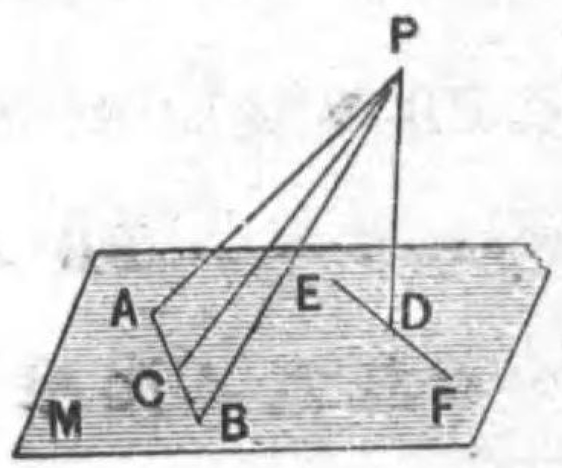
**注意** 此ハ軌跡ナル語ヲ平面ニ擴メタルナリ.

## 例題

4. 一平面外ニアル二定點ヨリ等距離ニシテ,且コノ平面上ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

**7. 定理** 一平面外の一點より,此の平面へ一つの垂線を作ることを得,唯一つに限る,而して此の垂線は,該點より該平面へ引き得る最短線なり.

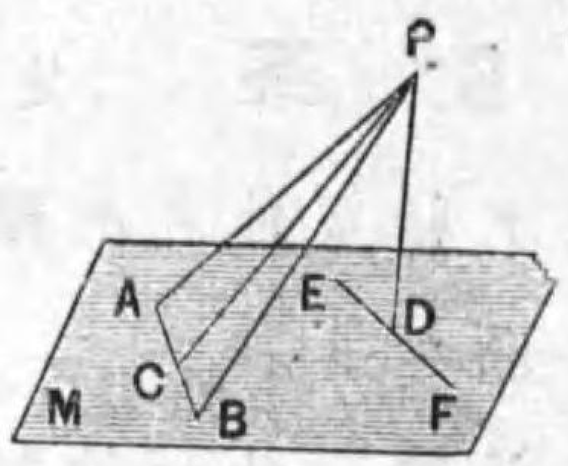
一平面 M ノ外ノ一點ヲ P トスルトキハ




點 P ヨリ M へ一ツノ垂線 PD ヲ引クコトヲ得,唯一ツニ限ル,而シテ PD ハ P ヨリ M ニ至ル最短線

ナルコトヲ證セントス.

**證** Pヨリ平面ヘ引ケル多クノ直線ヲ考フルニ,是等ノ直線ハ悉ク同ジ長サナル能ハズ,故ニ最短ナル直線アルベシ.




而シテ最短ナル直線ハ,二ツ以上アルコト能ハズ,如何トナレバ,若シ最短ナル二ツノ直線PA, PBアリトセバ, PA, PBハPヨリABヘ引ケル等長ノ直線ナルユヱ, ABニ垂直ナル能ハズ. [平. 42 款系 4]

故ニPA, PBハPヨリABヘ引ケル垂線ヨリ長シ. [平. 57 款].

コレPヨリMヘ引ケル最短線ナリト云フ假設ニ戻ル.

故ニ Pヨリ平面Mヘ引ケル最短線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

PDヲ此ノ最短線トセヨ.

然ルトキハPDハ,其ノ趾Dヲ過リテ,平面M上ニ引ケル任意ノ直線EFニ垂線ナリ.

如何トナレバ, PD及ビEFノ平面ニ於テ, PDハPヨリEFヘ引ケル最短線[PDハPヨリ平面Mヘ引



ケル最短線ナルユヱ]ヲ以テ, PDハEFニ垂線ナリ.

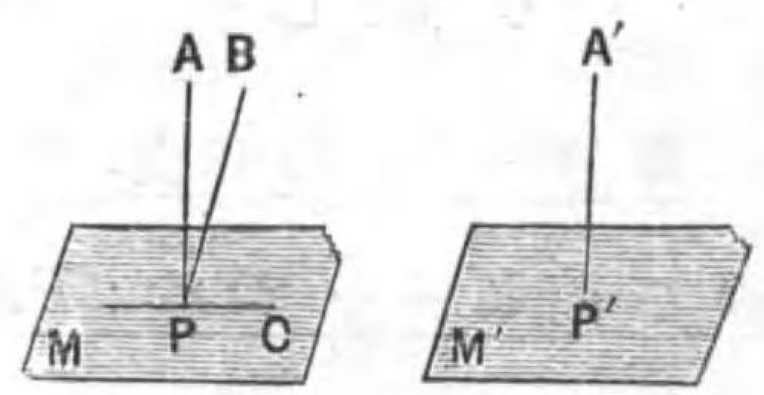
[平. 42 款系 4 及ビ 57 款]

故ニPDハ其ノ趾Dヲ過リテ,平面M上ニアル任意ノ直線ニ垂線ナルユヱ,平面Mニ垂線ナリ. [5 款]

**8. 定義** 一點より一平面に至る距離とは,其の點より其の平面へ引ける垂線の長さを云ふ.

**9. 系** 一平面上ノ一點ニ於テ,之ニ一ツノ垂線ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

平面M上ノ一點ヲPトス. 他ノ任意ノ平面M′ヲ取リ,其ノ外ノ任意ノ點A′ヨリ,之ニ垂線A′P′ヲ作リ,




平面M′ヲ平面Mノ上ニ, P′ガPノ上ニ來ル如ク重ネ, APヲ垂線A′P′ノ位置トスレバ,平面Mニ一ツノ垂線アルベシ. 而シテPニ於テ,平面Mノ垂線ハ唯一ツナリ.

如何トナレバ,若シPニ於テ, AP, BPナル二ツノ垂線アリトセバ, AP及ビBPハ,共ニAP及ビBPノ

定ムル平面ト平面Mトノ交リノ直線PCニ垂直ナルニ至ル,コレ不能ナレバナリ. [平. 20 頁 14 題]

**10. 定理** 一平面外の一點より,此の平面へ垂線及び斜線を引くときは,

(1) 垂線の趾より,相等しき距離に趾をもつ斜線は相等し.

(2) 垂線の趾より,遠き距離に趾をもつ斜線は,近き距離に趾をもつ斜線より長し.

Mヲ一ツノ平面, Pヲ其ノ平面外ノ一點トシ, POヲ平面Mヘノ垂線; PA, PB, PCハ斜線ニシテ,且

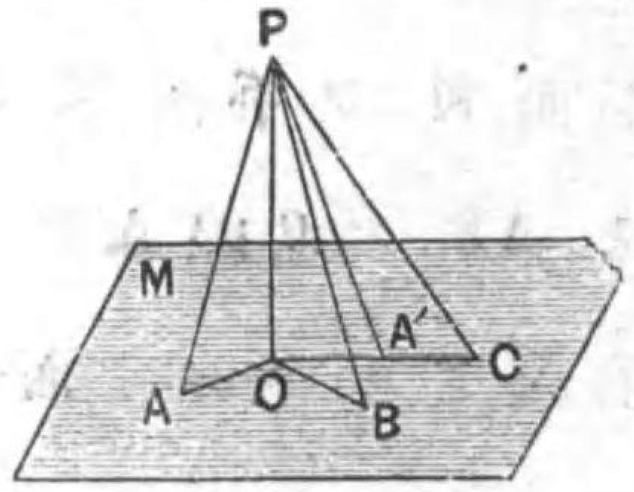
$OA=OB$, $OC>OA$, 或ハ OB

トスルトキハ

(1) $PA=PB$,

(2) $PC>PA$, 或ハ PB

ナルコトヲ證セントス.




**證** (1) $OA=OB$

ナルトキハ,二ツノ直角三角形POA, POBニ於テ,POハ共通ナルユヱ $PA=PB$. [平. 47 款]

(2) $OC>OA$, 或ハ OB

ナルトキハ,直線OC上ニ $OA'=OA$ ニ取リ,

PA′ヲ結ビ付クレバ $PA=PA'$, [平. 47 款]

而シテ $OC>OA$, 卽チ OA′

ナルユヱ $PC>PA'$, 卽チ PA, 或ハ PB. [平. 57 款]



**11. 系 1.** 本定理ノ逆モ亦眞ナリ. 卽チ

一平面外ノ一點ヨリ,此ノ平面ヘ垂線及ビ斜線ヲ引クトキ.

(1) 相等シキ斜線ノ趾ハ,垂線ノ趾ヨリ等距離ニアリ.

(2) 大ナル斜線ノ趾ハ,小ナル斜線ノ趾ヨリ,垂線ノ趾ヲ距ルコト遠シ.

**系 2.** 一平面外ノ一點ヨリ,此ノ平面ヘ引ケル垂線ト相等シキ角ヲナス斜線ハ相等シク,又垂線ト大ナル角ヲナス斜線ハ,小ナル角ヲナス斜線ヨリ長シ.而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

## 例 題

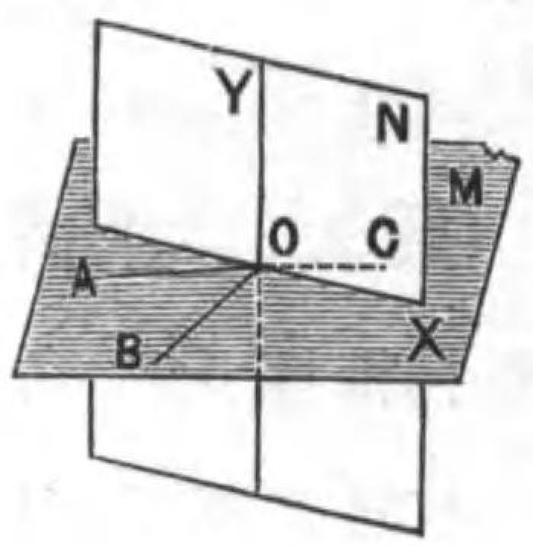
5. 一平面外ノ一點ヨリ,此ノ平面ヘ相等シキ無

數ノ斜線ヲ引クコトヲ得,而シテ是等ノ斜線ノ趾ノ軌跡ハ,其ノ點ヨリ引ケル垂線ノ趾ヲ中心トスル圓周ナリ.

6. 一直線上ニアラザル三點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ,此ノ三點ヲ過ル圓ノ中心ニ於テ,此ノ圓ノ平面ヘ作レル垂線ナリ.

---

**12. 定理** 一直線上の同一の點に於て,之に引ける總ての垂線は,此の直線に垂直なる一の平面上にあり.




$OY \perp OA$, $OY \perp OB$ 及ビ $OY \perp OC$ トスルトキハ,

OA, OB, OC ハ OY ニ垂直ナル一平面上ニアルコト

ヲ證セントス.

證 OA 及ビ OB ノ定ムル平面 M ハ OY ニ垂直ナリ. [4 款]

故ニ 平面 M ガ OC ヲ含ムコトヲ證スレバヨシ.

若シ 平面 M ガ OC ヲ含マザルモノトセバ,

OY 及ビ OC ノ定ムル平面 N ト平面 M トノ交リヲ



OX トセヨ.

然ルトキハ $OY \perp OX$ [5 款]

ニシテ又 $OY \perp OC$, [假設]

卽チ 一平面上ニ於テ,一直線上ノ一點ヨリ,之ニ二ツノ垂線ヲ引キ得ルニ至ル,

而シテ 此ハ背理ナリ. [平. 20 頁 14 題]

故ニ 平面 M ハ OC ヲ含ム.

**13. 系** 1. 一ツノ直線上ノ一ツノ點ヲ過リテ,之ニ垂直ナル一ツノ平面ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

**系** 2. 一ツノ直線外ノ一ツノ點ヲ過リテ,之ニ垂直ナル一ツノ平面ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

## 例題

7. 直角ガ其ノ一邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキハ,他ノ一邊ハ軸ニ垂直ナル平面ヲ畫クコトヲ證セヨ.

8. 床ノ面ヨリ高サ 1 丈ノ天井ノ一點ノ直下ニ當ル一點ヲ,長サ 1 丈 4 尺 5 寸ノ棒ヲ天井ヨリ吊シテ指示セヨ.

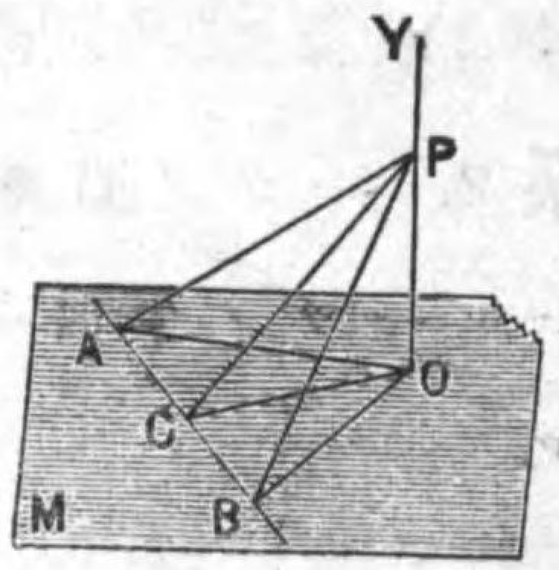
---

**14. 定理** 一平面の垂線上の任意の點を,其の趾より,該平面上の任意の直線へ引ける垂線の趾に結び付くる直線は,該平面上の此の直線に垂直なり.

平面Mノ垂線YO上ノ任意ノ點Pヲ,其ノ趾Oヨリ該平面上ノ任意ノ直線ABヘ引ケル垂線ノ趾Cト結ビ付クルトキハ

PC⊥AB

ナルコトヲ證セントス.




**證** 直線AB上ニ相等シキ長サAC, CBヲ取リ,

AP, BP, AO, BOヲ結ビ付クレバ,

平面M上ニ於テ,OハABノ垂直二等分線上ノ一點

ナルユエ OA=OB. [平.122款]

而シテ PO⊥平面M

ナルユエ PA=PB. [10款]

故ニ PC⊥AB. [平.122款]

**注意** 此ノ定理ヲ**三垂線ノ定理**ト云フ.

**15. 系** 本定理ノ逆モ亦眞ナリ. 卽チ



平面Mノ垂線YO上ノ任意ノ點Pヨリ,平面M上ノ任意ノ直線ABヘ引ケル垂線PCノ趾Cヲ,垂線YOノ趾Oト結ビ付クル直線OCハ,直線ABニ垂直ナリ.

## 例 題

9. 本定理ノ圖ニ於テ, ABハ平面PCOニ垂直ナリ.

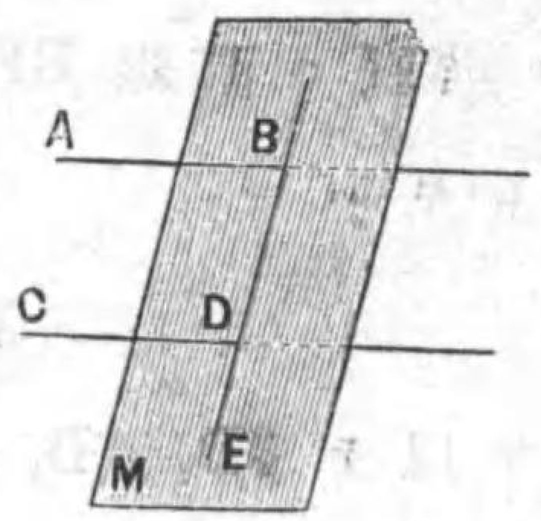
---

**16. 定理** 二直線が相平行するときは,其の一と交る平面は,亦他の一と交る.

平行二直線ヲAB, CDトシ, ABガ平面Mト交ルトキハ,

CDモ亦平面Mト交ル

コトヲ證セントス.




**證** 直線ABガ平面Mニ交ル點ヲBトスレバ,

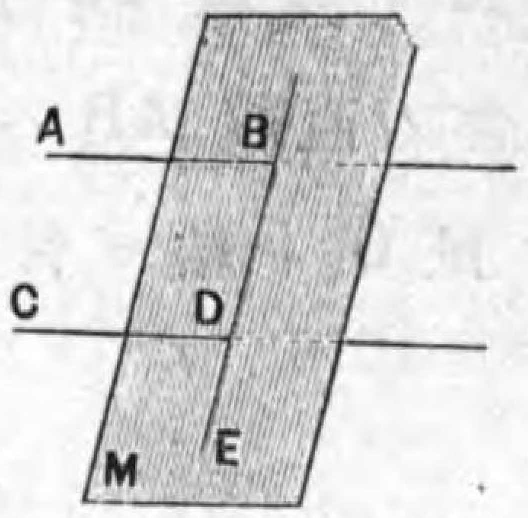
平行線AB, CDノ平面ハ, Bヲ過ル直線ニテ平面Mニ交ルベシ. [3款系2]

此ノ直線ヲBEトス.

直線BEハ二平行線ノ一ABニ交ルユエ,他ノ一CDニ

モ亦交ルベシ.

[平. 30 款 V(1)]



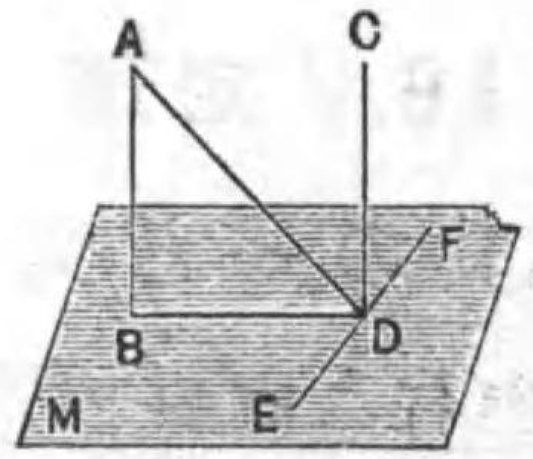

此ノ點ヲ D トス.

故ニ　直線 CD ハ,點 D ニ

於テ平面 M ニ交ル.

**17. 定理**　同一の平面に垂直なる二つの直線は,互に平行す.

AB, CD ハ平面 M ニ垂直ナル二ツノ直線トスルトキハ,




$$AB \parallel CD$$

ナルコトヲ證セントス.

**證**　BD, AD ヲ結ビ付ケ, D ヲ過リ平面 M ノ上ニ, BD ニ垂直ニ直線 EF ヲ引ケ.

然ルトキハ　　$CD \perp EF$,　　[4 款]

$AD \perp EF$,　　[14 款]

ナルヲ以テ CD, AD, BD ハ同一ノ平面上ニアリ.　[12 款]

故ニ　　AB, CD ハ同一ノ平面上ニアリ.

然ルニ　　AB, CD ハ何レモ BD ニ垂直ナルヲ以テ　[5 款]

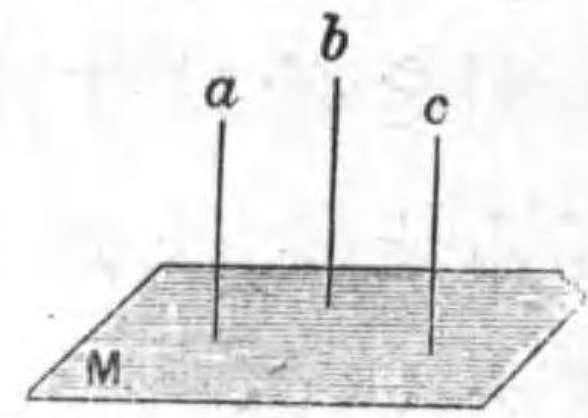


$AB \parallel CD$.　　[平. 29 款系 2]

**18. 系**　二ツノ平行直線ノ一ガ,一ツノ平面ニ垂直ナルトキハ,他モ亦同ジ平面ニ垂直ナリ.

**19. 定理**　同一の直線に平行する二直線は,互に平行す.

同一ノ直線 $a$ ニ平行スル二直線ヲ $b, c$ トスルトキハ




$$b \parallel c$$

ナルコトヲ證セントス.

**證**　直線 $a$ ニ垂直ナル平面 M ヲ作ルトキハ

$a \parallel b$,　$a \parallel c$

ナルユヱ,此ノ平面ハ又 $b, c$ ト交リ,　[16 款]

且コレニ垂直ナリ.　[18 款]

故ニ　　$b \parallel c$.　[17 款]

## 例題

10. 同一ノ平面上ニアル二ツノ直線ヨリ,等距離ナル點ノ軌跡如何.

11. ごーしゅ四邊形ノ各邊ノ中點ハ,平行四邊形ノ角頂ナリ,從ヒテ相對スル二ツノ邊ノ中點ヲ結ビ付

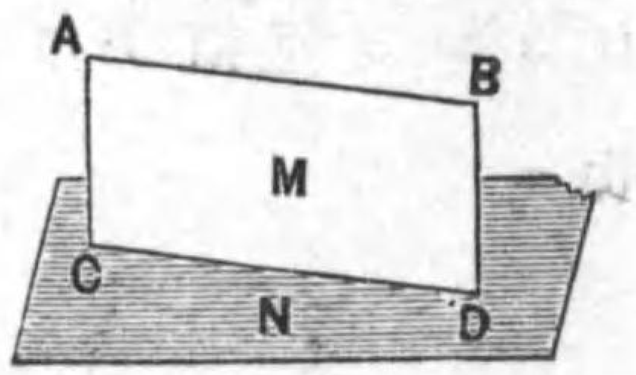
クル二ツノ直線ハ,互ニ二等分セラル.

12. 一ツノ平面ヘ引キタル一ツノ直線ガ,其ノ趾ヲ過ル其ノ平面上ノ三ツノ直線ト等角ヲナストキハ,始ノ直線ハ此ノ平面ニ垂直ナリ.

---

**20. 定義** 一つの直線を雙方へ如何程引き延ばすとも,一つの平面に出會はざるときは,此の直線は,此の平面に**平行**すといふ.

**21. 定理** 二つの平行直線の一は,他を含む平面に平行す.




AB ∥ CD

トスルトキハ,

AB ハ CD ヲ含ム平面 N ニ平行スルコト

ヲ證セントス.

**證** AB 及ビ CD ハ一ノ平面 M ヲ定ム. [3 款系 1]

故ニ AB ガ平面 N ニ出會フナラバ,又必ズ M ト N トノ交リ CD ニ出會ハザル可カラズ.

然ルニ AB ∥ CD. [假 設]



此ハ背理ナリ.

故ニ 直線 AB ハ平面 N ニ平行ス. [20 款]

**22. 系 1.** 一直線ガ,之ヲ含マザル平面上ノ直線ニ平行ナレバ,其ノ平面ニ平行ナリ.

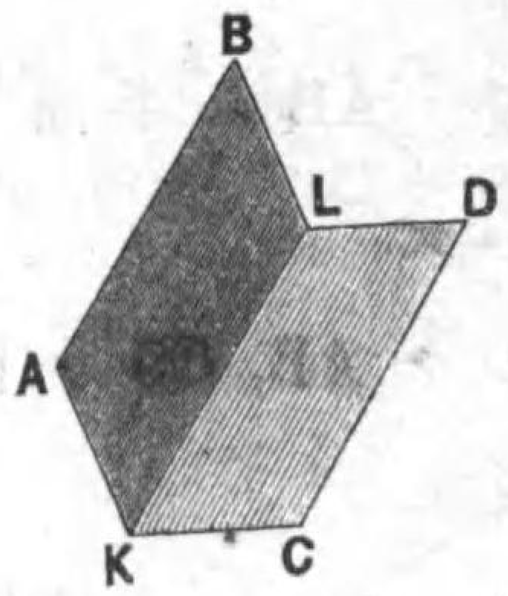
**系 2.** 二平面ノ交リニ平行スル直線ハ,其ノ各平面ニ平行ス.

**23. 定理** 二直線が平行なるときは,其の一つづつを含む二つの平面の交りは,二直線に平行す.

二ツノ平行線ヲ AB, CD トシ, AB ヲ含ム平面ト, CD ヲ含ム平面トノ交リヲ KL トスルトキハ

AB ∥ KL, CD ∥ KL

ナルコトヲ證セントス.




**證** 平面 CL ハ AB ニ平行ナリ. [21 款]

故ニ AB ハ平面 CL ニ出會ハズ.

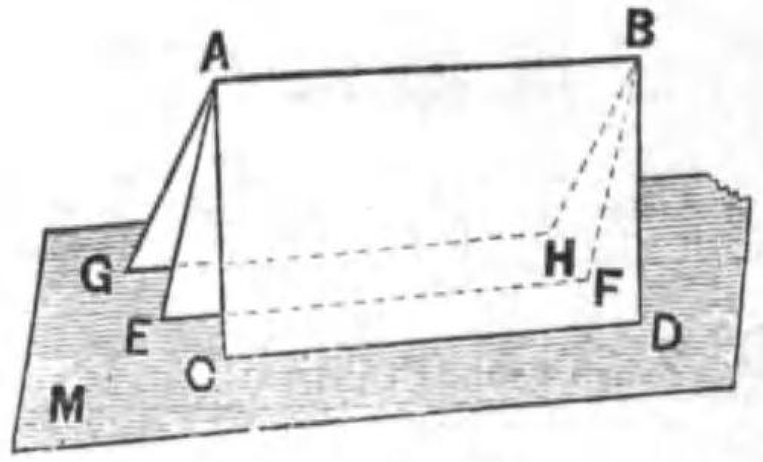
而シテ AB, KL ハ同一ノ平面上ニアリ.

故ニ AB, KL ハ平行ナリ.

同様ニ CD, KL モ亦平行ナリ.

**24. 定理** 一直線が一平面に平行なるときは,其の平面と,其の直線を含む各平面との交りは,其の直線に平行なり.又互に平行なり.

ABヲ平面Mニ平行ナル直線トシ,ABヲ含ム平面AD, AF, AH, 等ヲ平面Mト,ソレゾレ直線CD, EF, GH, 等ニ於テ交ルトスルトキハ




CD, EF, GH, 等ハ何レモAB ニ平行シ,又CD, EF, GH, 等ハ互ニ平行スルコトヲ證セントス.

**證** ABハ平面Mニ出會ハザルヲ以テ, CDニ出會ハズ. [假 設]

而シテAB, CDハ同一ノ平面上ニアリ.

故ニ $CD \parallel AB$.

同様ニ $EF \parallel AB$, $GH \parallel AB$, 等.

又若シCD, EFガ平行ナラザルトキハ,其ノ交點ト直線ABトヲ含ム相異ナル二ツノ平面アルニ至ル. コレ不能ナリ. [2 款]



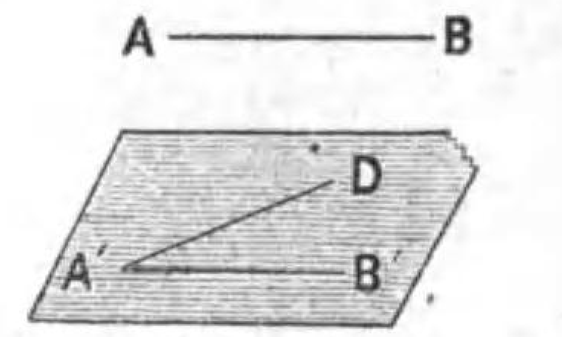
故ニ $CD \parallel EF$.

同様ニ $GH \parallel EF$,

從ヒテ $GH \parallel CD$, 等.

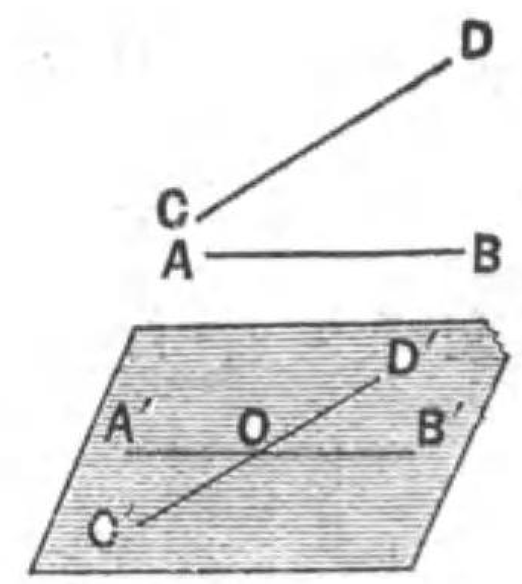
**25. 系1.** 二平面ト,其ノ平面ノ交リニ平行ナル平面トノ交リハ,亦互ニ平行ナリ.

**系2.** 任意ノ一直線ヲ過リテ,之ニ交ラザル他ノ任意ノ直線ニ平行ナル一ツノ平面ヲ作リ得可シ.



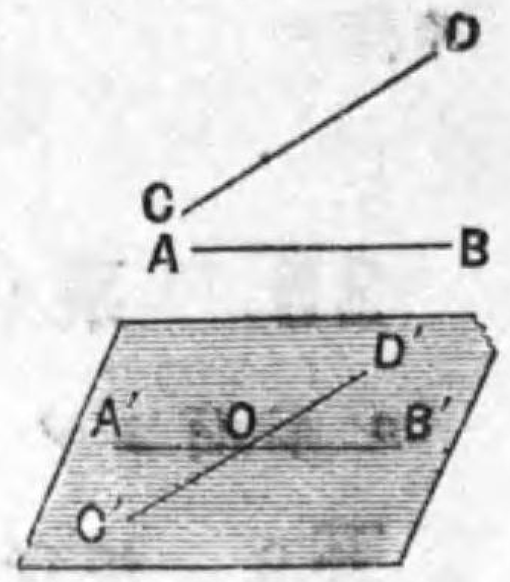

如何トナレバ,後ノ直線AB及ビ前ノ直線$A'D$上ノ一點$A'$ヲ過リテ,一ノ平面ヲ作リ,其ノ平面上ニ,$A'$ヨリABニ平行スル直線$A'B'$ヲ引クトキハ,$A'B'$及ビ$A'D$ノ定ムル平面ハ,ABニ平行スベケレバナリ.

**系3.** 一點ヲ過リテ,同一ノ平面上ニアラザル二直線ニ平行ナル一平面ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.




如何トナレバ, AB及ビCDヲ同一ノ平面上ニアラザル二直線トシ, Oハ之ヲ過リテAB, CDニ平行ナル平面ヲ作ラントスル點ナルトキハ,

O 及ビ AB ノ定ムル平面上ニ於テ,
O ヲ過リテ AB ニ平行スル直線
A′B′ ヲ引キ, 又 O 及ビ CD ノ定
ムル平面上ニ於テ, O ヲ過リ CD
ニ平行ニ直線 C′D′ ヲ引ケバ,
A′B′ 及ビ C′D′ ノ定ムル平面ハ,
AB 及ビ CD ニ平行ナリ.　[21 款]




而シテ　此ノ外ニ, O ヲ過リテ, AB 及ビ CD ニ平行スル平面アルコトナシ.　[3 款系 1]

**注意**　同一ノ平面上ニアラザル二直線ノナス角トハ,一點ヨリ各直線ヘ平行ニ引キタル直線ノナス角ヲ云フ.

## 例　題

13.　一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ平行スルトキハ,此ノ平面上ノ一ツノ點ヲ過リテ,此ノ直線ニ平行スル直線ハ,全ク此ノ平面上ニアリ.

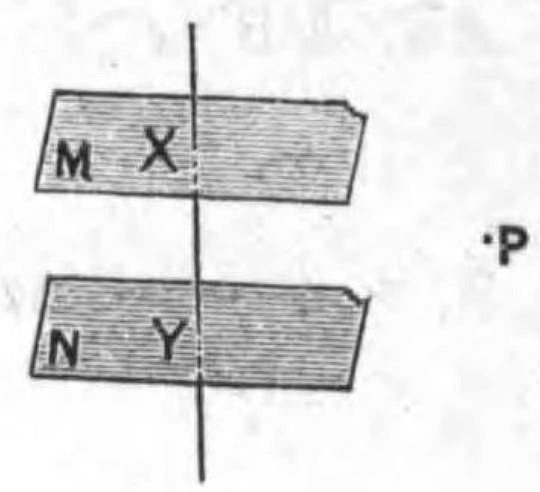
14.　二平面ノ各ニ平行スル直線ハ,其ノ二平面ノ交リニ平行ス.



**26.　定義**　二つの平面が平行なりとは,之を何れの方向に如何程延長するも,出會はざるものを云ふ.

**27.　定理**　同一の直線に垂直なる二つの平面は,互に平行す.

二ツノ平面 M, N ガ直線 XY ニソレゾレ點 X, Y ニ於テ垂直ナルトキハ,




$$M \parallel N$$

ナルコトヲ證セントス.

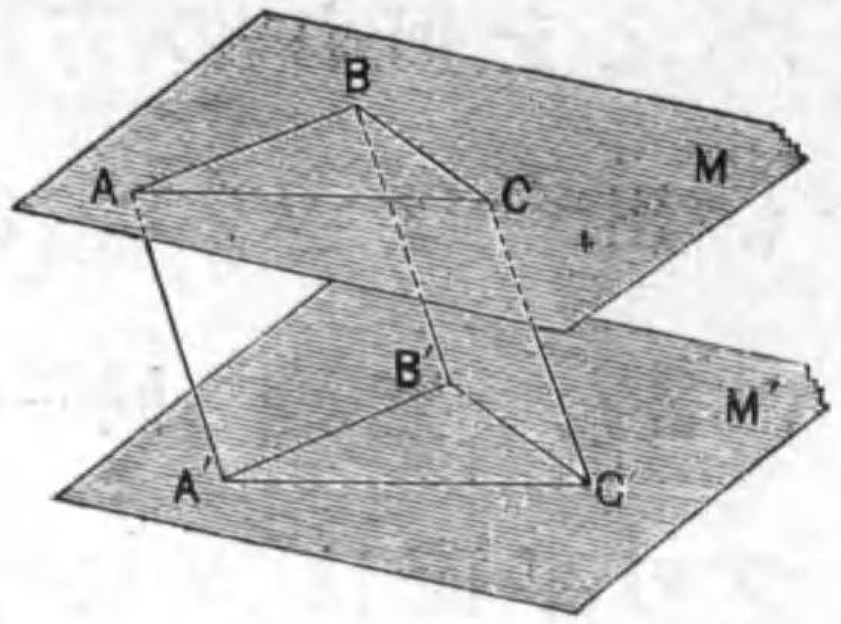
證　若シ M 及ビ N ガ出會フトキハ,其ノ交リノ上ノ一點 P ヲ過リテ XY ニ垂直ナル二ツノ平面アルニ至ラン.

コレ背理ナリ.　[13 款系 2]

故ニ　$M \parallel N.$

**28.　定理**　相交る二直線が,他の相交る二直線に,互に平行なれば,前の二直線間の角は,後の二直線間の角に等し.

相交ル二直線 AB, AC ハ,ソレゾレ相交ル二直線 A'B', A'C' ニ平行ナルトキハ




$$\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$$

ナルコトヲ證セントス.

**證** AA' ヲ結ビ付ケヨ.

AB, A'B' ノ定ムル平面上ニ於テ, BB' ヲ AA' ニ平行ニ引ケ.

然ルトキハ AA'B'B ハ平行四邊形ナリ.

故ニ　$AB=A'B',\quad AA'=BB'.$

同様ニ　AC, A'C' ノ定ムル平面上ニ於テ, CC' ヲ AA' ニ平行ニ引クトキハ

$$AC=A'C',\quad AA'=CC'.$$

BC, B'C' ヲ結ビ付ケヨ.

BB', CC' ハ何レモ AA' ニ等シク,且之ニ平行ナルヲ以テ　$BB'=CC'$, 且 $BB' \parallel CC'$.

故ニ　$BC=B'C'.$

故ニ　$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$　[平. 59 款]

故ニ　$\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}.$

**注意**　本定理ニ於テハ,二組ノ二直線間ノ角ハ,何レモ其ノ邊ガ,同ジ向キニ平行スルモノトセリ. 若シ然ラザルトキハ,二直線間ノ角ハ,相等シキカ,或ハ互ニ補角トナルベシ.



## 例題

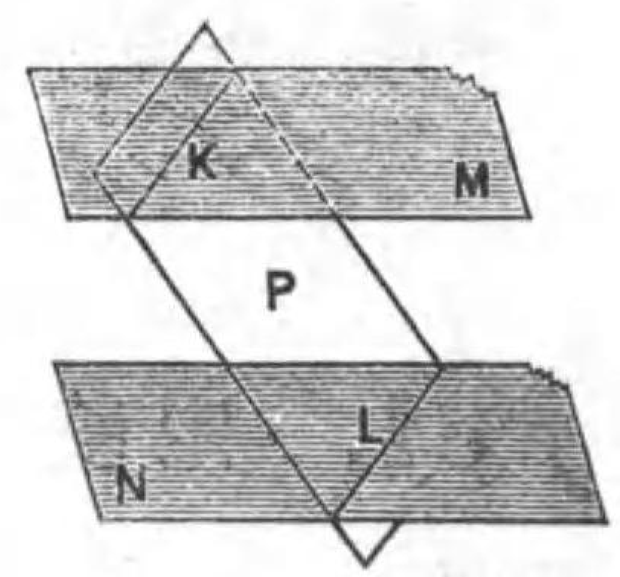
15. 相交ル二ツノ直線ガ,何レモ一ツノ平面ニ平行スルトキハ,是等ノ二ツノ直線ノ定ムル平面ハ,前ノ平面ニ平行スルコトヲ證セヨ.

16. 28款ノ定理ノ圖ニ於テ, AB 及ビ AC ノ定ムル平面 M ト, A'B' 及ビ A'C' ノ定ムル平面 M' トハ,互ニ平行ナルコトヲ證セヨ.

---

**29. 定理**　相平行する二つの平面と,第三の平面との交りは平行直線なり.

相平行スル二ツノ平面 M, N ヲ第三ノ平面 P ニテ截ルトキ,其ノ交リヲ K, L トスレバ

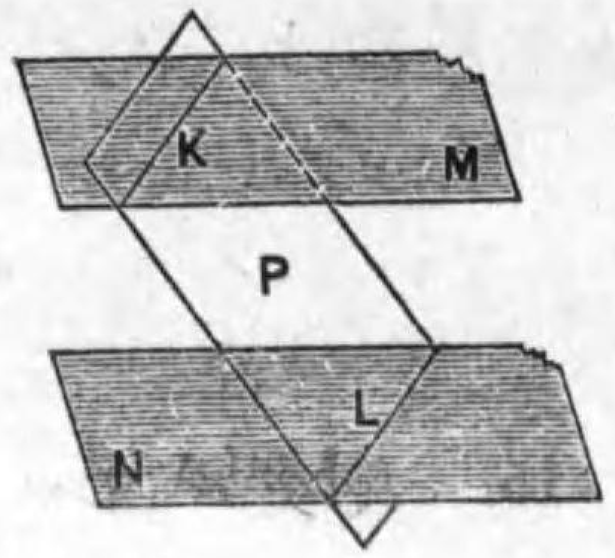



$$K \parallel L$$

ナルコトヲ證セントス.

證　K, L ハ同一ノ平面 P ノ上ニアリ.

而シテ　K, L ハ如何程引キ延バスモ出會フコトナシ.




如何トナレバ K, L ヲ含ム平面 M, N ハ平行ナレバナリ.　　〔假設〕

故ニ　　K ∥ L.　〔平. 27 款〕

**30. 系**　相平行スル二平面ノ間ニ夾マレタル平行直線ハ,長サ相等シ.

## 例　　題

＊17.　一ツノ平面ニ出會フ直線ハ,之ニ平行ナル總テノ平面ニ出會フコトヲ證セヨ.

＊18.　相平行スル二ツノ平面ノ一ニ垂直ナル直線ハ,他ノ一ニモ亦垂直ナリ.

**注意**　本題及ビ30款ヨリ,相平行スル二ツノ平面ノ間ニ夾マレタル共通垂線ノ長サハ,各所相等シ.

---

**31. 定義**　相平行する二つの平面の距離とは,其の間に夾まれたる共通垂線の長さを云ふ.



從テ　相平行スル二ツノ平面ハ,各所等距離ナリ.

## 例　　題

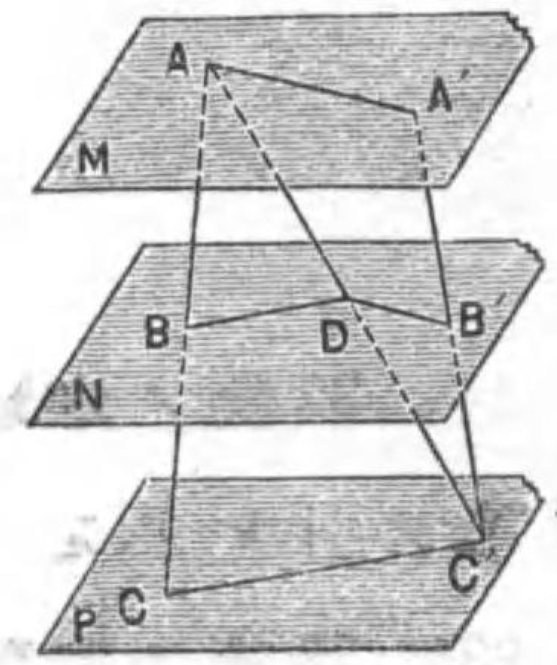
＊19.　一ツノ點ヲ過リテ,一ツノ平面ニ平行スル一ツノ平面ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

20.　相平行スル二ツノ平面ヨリ,等距離ナル點ノ軌跡如何.

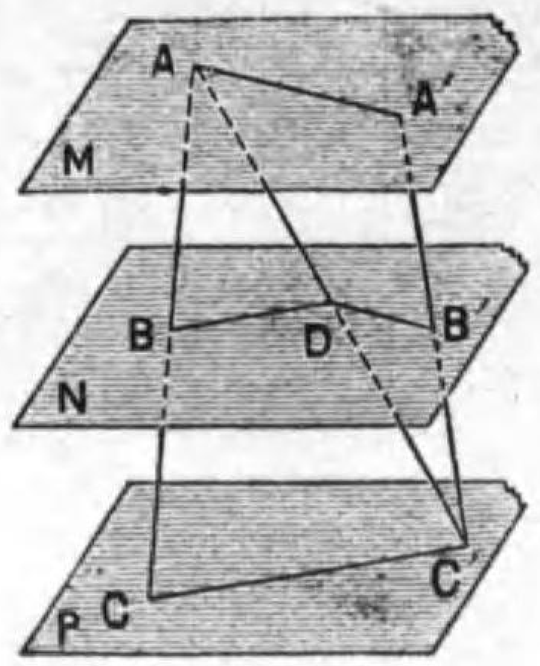
21.　相平行スル二ツノ平面ヨリ等距離ニシテ,又二ツノ點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡如何.

---

**32. 定理**　相平行する三つの平面にて截らるる二つの直線の對應せる線分は比例をなす.




ABC, A′B′C′ ハ相平行スル三ツノ平面 M, N, P ニテ,ソレゾレ A, B, C; A′, B′, C′ ナル點ニ於テ截ラルル二ツノ




直線

トスルトキハ,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

ナルコトヲ證セントス.

**證** AC′ ヲ結ビ付ケ,其ノ平面 N ニ交ル點ヲ D トシ, BD, DB′ ヲ結ビ付クレバ

$BD \parallel CC'$, [29 款]

$DB' \parallel AA'$,

故ニ $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC'}$, [平. 187 款]

$\frac{AD}{DC'}=\frac{A'B'}{B'C'}$,

故ニ $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$.

**33. 系** 相平行セル夥多ノ平面ニテ截ラルル二ツノ直線ノ對應セル線分ハ,比例ヲナス.

## 例　題

22. 32款ノ定理ニ於テ, A′ ヨリ ABC ニ平行スル直線ヲ引キテ,之ヲ證セヨ.

23. 32款ノ定理ノ圖ニ於テ, AB=6寸, BC=8寸 ニシ



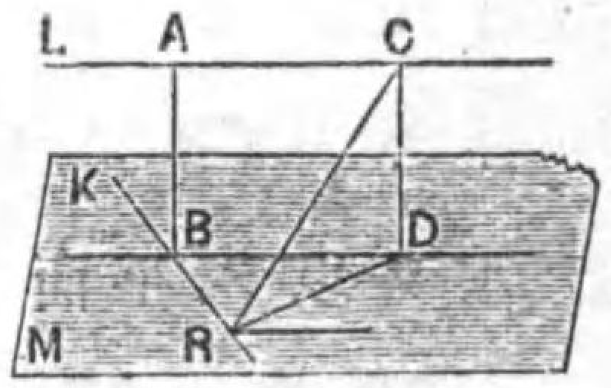
テ, A′B′C′=12寸 ナルトキ, A′B′ 及ビ B′C′ ノ長サヲ求メヨ.

24. 同一ノ點ヨリ發スル夥多ノ直線ガ,相平行セル二ツノ平面ニテ截ラルルトキ,其ノ對應セル線分ハ比例ヲナス.

---

**34. 定理** 同一の平面上にあらざる二つの直線の各に垂直に交る直線は,一つあり,而して唯一つに限る.

K, L ヲ同一ノ平面上ニアラザル二ツノ直線トスレバ,




K, L ノ各ニ垂直ニ交ル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ルコトヲ證セントス.

**證** K ヲ過リテ L ニ平行スル平面 M ヲ作リ, [25 款系 2]

L ノ上ノ任意ノ點 C ヨリ,平面 M ヘ垂線 CD ヲ引キ, L 及ビ DC ノ定ムル平面ガ K ニ交ル點ヲ B トシ, B ヨリ DC ニ平行スル直線 BA ヲ引キ, A ニ於テ L ニ交ラシムレバ, AB ハ平面 M ニ垂直ナリ, [18 款]

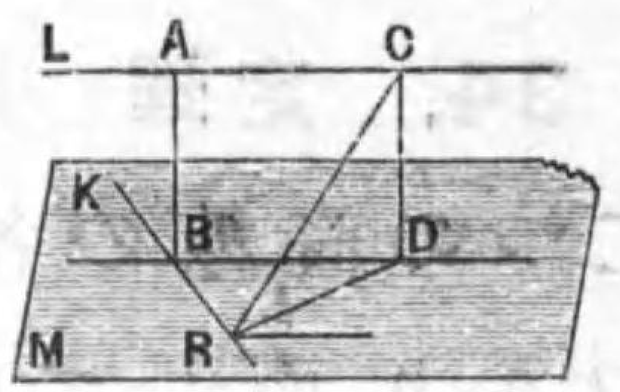
故ニ　$AB \perp K$,　[5 款]

而シテ　$BD \parallel AC$　[24 款]

ニシテ　$BA \parallel DC$　[作 圖]

ナルユヱ　$\hat{A}=\hat{D}$　[平. 66 款系 2]

$=\hat{R}$　[作 圖]




故ニ AB ハ K 及ビ L ニ垂直ナル一ツノ直線ナリ.

次ニ AB ノ外ニ K 及ビ L ニ垂直ニ交ル直線ナキコトヲ證セントス.

若シ AB ノ外ニ K 及ビ L ニ垂直ニ交ル直線 CR アリトセヨ.

然ルトキハ CR ハ R ヲ過リ, L ニ平行スル直線ニ垂直ナルヲ以テ,平面 M ニ垂直ナリ. [4 款]

故ニ CR 及ビ CD ガ同時ニ點 C ヨリ平面 M ヘ垂直ナルニ至ル,而シテ此ハ背理ナリ. [7 款]

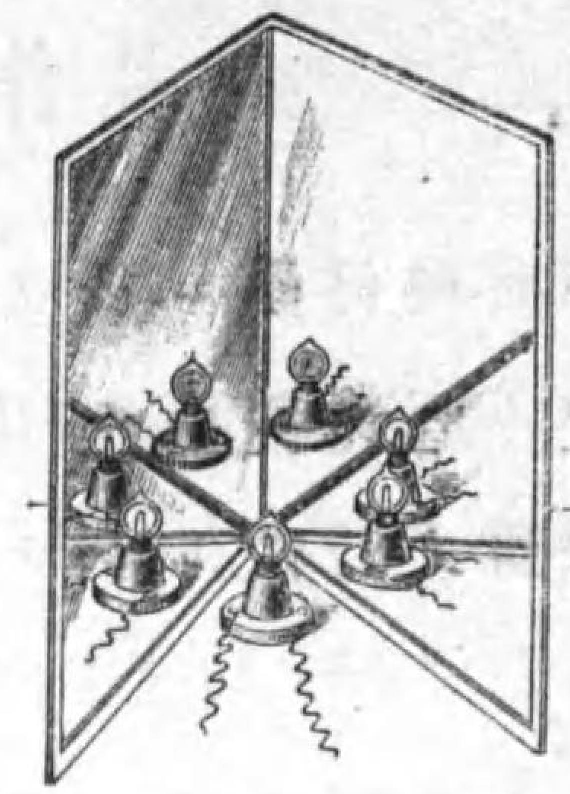
故ニ K 及ビ L ニ垂直ニ交ル直線ハ, AB ノ外ニナシ.

## 例題

*25. 34款ノ定理ニ於テ, AB ハ K 及ビ L ノ間ニ引キ得ル最短線ナルコトヲ證セヨ.



26. 同一ノ平面上ニアラザル二ツノ直線上ノ,點ト點トヲ結ビ付クル直線ノ中點ハ,同一ノ平面上ニアリ.



27. 圖ノ如ク,或角ヲナシテ二枚ノ平面鏡ヲ立テ,其ノ角ノ內ニ一物[小サキ燈光ノ如キ]ヲ置クトキ,鏡面ニ映ズル種々ノ像ハ,一圓周上ニアルコトヲ證セヨ.

28. 二ツノ直線ガ互ニ垂直ニシテ,且同一ノ平面上ニアラザルトキ,此ノ二ツノ直線間ニ定長ノ直線ヲ夾ミ,且コレヲ滑ラストキ,其ノ中點ハ一ツノ圓周上ニアリ.

# 第 二 節

## 作 圖 題

平面幾何學ニ於テハ

一ノ直線ヲ引キ,且コレヲ引キ延バスコト

ヲ**作圖ノ公法**トシテ許容スル如ク,立體幾何學ニ於テハ

一ノ平面ヲ畫キ,且コレヲ其ノ上ニアル一直線ヲ軸トシテ廻轉スルコト

ヲ作圖ノ公法トシテ許容スルモノトス.

又平面幾何學ニ於テ

圓ヲ畫クコト

ヲ作圖ノ公法トシテ許容スル如ク,立體幾何學ニ於テハ,後ニ說ク所ノ

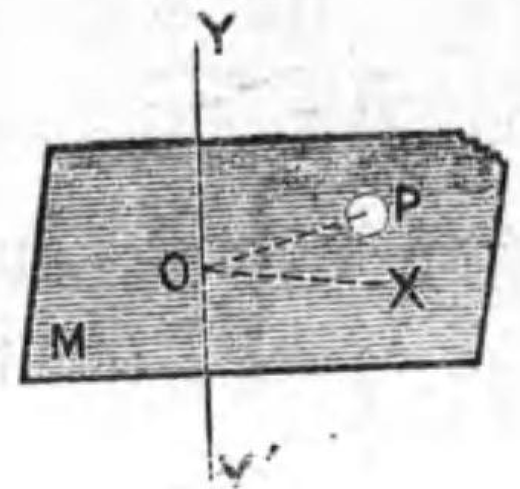
球,圓壔,圓錐ヲ畫クコト

ヲ作圖ノ公法トシテ許容スルモノトス.

**35. 作圖題** 既知一直線外の既知一點を過りて,之に垂直なる平面を作ること.



YY′ヲ既知ノ直線, P ヲ其ノ外ノ既知一點トス.




**作圖法**　P ヨリ YY′ ニ垂線 PO ヲ引キ,　[平. 129 款]

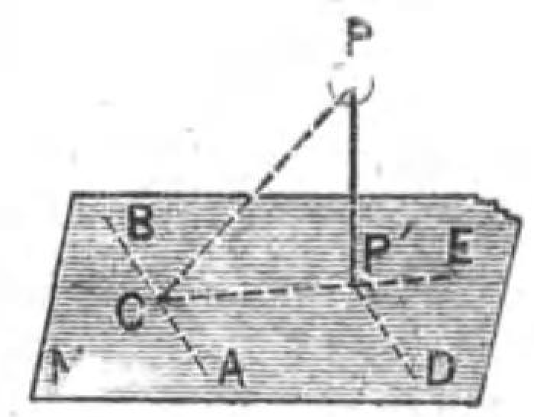
O ヨリ YY′ ニ垂直ナル他ノ直線 OX ヲ引ケ.　[平. 129 款注意]

然ルトキハ　OP, OX ノ定ムル平面 M ハ所要ノ平面ナリ.

**證**　[4 款ヨリ分明ナル可シ].

**36. 作圖題** 既知平面外の既知一點より,之に垂線を作ること.

M ヲ既知ノ平面, P ヲ其ノ外ノ既知一點トス.




**作圖法**　平面 M ノ上ノ任意ノ直線 AB ニ垂線 PC ヲ引キ,

[平. 129 款]

平面 M ノ上ニ於テ, AB ニ垂線 CE ヲ引キ,

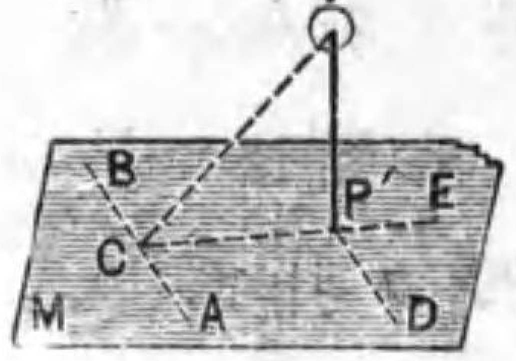
[平. 129 款注意]

CE ニ垂線 PP′ ヲ引ケ.　[平. 129 款]

然ルトキハ PP′ ハ所要ノ垂線ナリ.

**證**　CA ハ平面 PCP′ ニ垂直ナリ,　[4 款]

故ニ CA ニ平行スル P'D ヲ引クトキハ,




P'D ハ平面 PCP' ニ垂直ナリ, [18 款]

故ニ $\widehat{PP'D}$ ハ直角ナリ,

然ルニ P'D ハ平面 M ノ上ニアリ, [3 款 系 3]

而シテ $\widehat{CP'P}$ ハ直角ナリ, [作圖]

故ニ PP' ハ平面 M ニ垂直ナリ. [4 款]

## 例題

29. 既知一直線上ノ既知一點ヲ過リテ,之ニ垂直ナル平面ヲ作レ.

30. 既知平面上ノ既知一點ヨリ之ニ垂線ヲ作レ.

31. 既知一點ヲ過リ,既知一平面ニ平行スル平面ヲ作レ.

32. 既知一點ヲ過リ,既知二直線ニ交ル如キ直線ヲ引ケ.

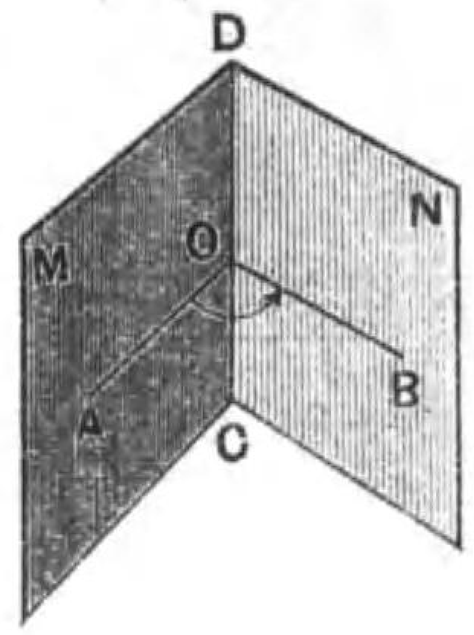
---

# 第三節

## 二面角 及び 多面角

**37. 定義** 一つの直線を過る二つの平面は,**二面角**をなすといふ.

二ツノ平面ノ過ル一ツノ直線ヲ二面角ノ**稜**,其ノ二ツノ平面ヲ二面角ノ**面**ト云フ.




例ヘバ直線 CD ヲ過ル二ツノ平面 M, N ハ二面角ヲナシ,而シテ二面角ノ大小ハ,其ノ稜上ノ一點 O ヨリ,之ニ垂直ニ各面ノ上ニ引ケル二ツノ直線 AO, BO ノ間ノ角ノ大小ニ從フ.

此ノ角 AOB ヲ二面角 $\widehat{M, N}$ ノ**平面角**ト稱ス.

次ノ數條ハ容易ニ了解シ得ベシ.

I. 二面角ノ平面角ノ平面ハ,其ノ二面角ノ稜ニ垂直ナリ.

II. 逆ニ 二面角ノ稜ニ垂直ニ作レル平面ト,其ノ二面角ノ面トノ交リハ,二面角ノ平面角ヲ作ス.

III. 二ツノ二面角ハ全ク相合セシメ得ルトキ,或ハ其ノ平面角ガ相等シキトキ,相等シ.

**38. 定義** 二面角の平面角が,直角なるときは,之を**直二面角**といひ,其の二つの平面は,之を**互に垂直なり**といふ.

鋭角,鈍角,餘角,補角,對頂角ナル語ハ,二面角ニモ亦適用セラル. 而シテ二面角ノ多クノ性質ノ證明ハ平面角ノ對應セル性質ノ證明ト同樣ナリ.

例ヘバ其ノ一二ヲ擧グレバ次ノ如シ.

對頂二面角ハ相等シ.

一平面ガ平行二平面ヲ截リテ生ズル錯二面角ハ相等シ.

二ツノ二面角ノ面ガ,ソレゾレ平行ナルトキハ,是等ノ二面角ハ相等シキカ,又ハ互ニ補角ナリ.

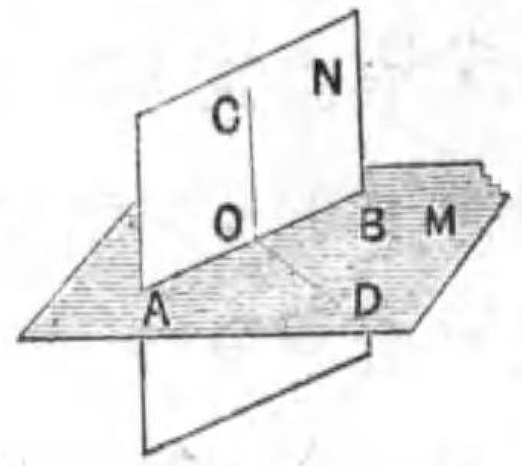
## 例題

33. 二ツノ平面ガ,ソレゾレ他ノ二ツノ平面ニ垂直ニシテ,其ノ交リハ互ニ平行ナルトキハ,前ノ二ツノ平面ノナス二面角ハ,後ノ二ツノ平面ノナス二面角ニ等シキカ,或ハ互ニ補角ヲナス.



**39. 定理** 二平面が,互に垂直なるときは,其の一平面上にありて,二平面の交りに垂直なる直線は,他の一平面に垂直なり.

二平面M, Nガ互ニ垂直ナルトキハ平面N上ニアリテ,其ノ交リABニ垂直ナル直線OCハ,平面Mニ垂直ナルコトヲ證セントス.




**證** 平面M上ニ,ABニ垂直ニ直線ODヲ引クトキハ,$\widehat{COD}$ハ二面角$\widehat{M,N}$ノ平面角ナルヲ以テ,直角ナリ.

故ニ　直線OCハABニ垂直ニシテ,　[作圖]

且　ODニ垂直

ナルユエ,　OCハ平面Mニ垂直

ナリ.　[4款]

**40. 系1.** 二平面ガ互ニ垂直ナルトキハ,其ノ交リノ上ノ任意ノ點ニ於テ,其ノ平面ノ一ニ垂直ナル直線ハ,他ノ一平面上ニアリ.

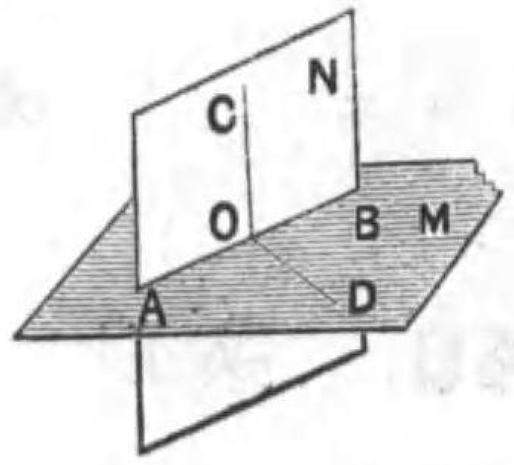
如何トナレバ,平面上ノ一點ニ於テ,之ニ唯一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得, [9 款]
而シテ　OC ハ平面 M ニ垂直ニシテ, [39 款]
且平面 N 上ニアルコトヲ述ベタレバナリ.

**系** 2. 二平面ガ互ニ垂直ナルトキハ,其ノ一平面上ノ任意ノ點ヨリ,他ノ一平面ヘ引ケル垂線ハ,全クノ前ノ平面上ニアリ.

如何トナレバ,一平面外ノ一點ヨリ,之ニ唯一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得, [7 款]
而シテ　OC ハ平面 M ニ垂直ニシテ, [39 款]
且平面 N 上ニアルコトヲ述ベタレバナリ.

## 41. 定理 一つの平面に垂直なる直線を過る總ての平面は,前の平面に垂直なり.

直線 OC ガ平面 M ニ垂直ナルトキハ
OC ヲ過ル任意ノ平面 N ハ M ニ垂直ナルコトヲ證セントス.




**證** 平面 M 及ビ N ノ交リヲ AB トシ,



CO ノ趾 O ヲ過リ,平面 M 上ニ於テ,AB ニ垂線 OD ヲ引クトキハ, CO ハ平面 M ニ垂直ナルユヱ, [假設]
$CO \perp AB$ 及ビ $CO \perp OD$, [5 款]
故ニ　$\widehat{COD}$ ハ二面角 $\widehat{M,N}$ ノ平面角ニシテ, [37 款]
且　$\widehat{COD}$ ハ直角ナリ.
故ニ　二面角 $\widehat{M,N}$ ハ直角ナリ. [38 款]
依リテ　平面 N ハ平面 M ニ垂直ナリ.

**42.** **系** 1. 二面角ノ稜ニ垂直ナル平面ハ,其ノ二ツノ平面ニ垂直ナリ.

**系** 2. 三ツノ直線 OA, OC, OD ガ,同一ノ點 O ニ於テ,二ツヅツ互ニ垂直ナルトキハ,各直線ハ他ノ二ツノ直線ノ定ムル平面ニ垂直ニシテ,三ツノ直線ヲ二ツヅツ取リテ定メラルル三ツノ平面ハ,二ツヅツ互ニ垂直ナリ.

## 例題

34. 相交ル二ツノ平面ガ,何レモ第三ノ平面ニ垂直ナルトキハ,前ノ二ツノ平面ノ交リハ,亦第三ノ平面ニ垂直ナリ.

35. 一ツノ平面 P ガ,互ニ垂直ナル二ツノ平面 M,

Nノ各ニ垂直ナルトキハ,是等ノ平面ノ任意ノ二ツノ交リハ,第三ノ平面ニ垂直ナリ,而シテ三ツノ交リノ各ハ,他ノ二ツノ交リニ垂直ナリ.[42款系2ト比較セヨ]

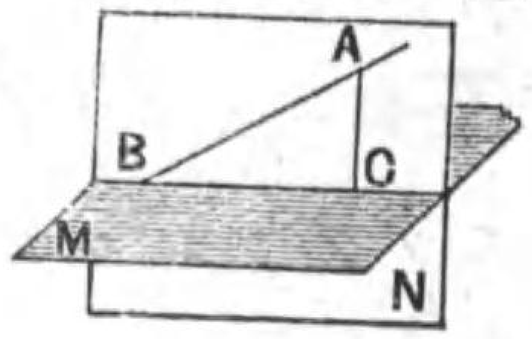
**43. 定理** 一つの平面の斜線を過りて,其の平面に垂直なる一つの平面を作ることを得,而して唯一つに限る.

ABハ平面Mノ斜線

トスルトキハ,

ABヲ過リテMニ垂直ナル平面一ツヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ルコト

ヲ證セントス.




**證** 斜線AB上ノ任意ノ點Aヨリ,平面Mヘ垂線ACヲ引キ,AB及ビACノ定ムル平面ヲNトス.

平面Nハ平面Mニ垂直ナリ. [11款]

又ABヲ過リテMニ垂直ナル平面ハ,垂線ACヲ含ム可シ. [40款系2]

而シテ 相交ル二直線ハ,一ノ平面ヲ定ムルガ故ニ, [3款系1]



NハABヲ過リテMニ垂直ナル唯一ノ平面ナリ.

**44. 定義** 一つの點より,一つの平面へ引ける垂線の趾を,此の平面上に投ずる該點の**正射影**或は略して單に**射影**といふ.

一ツノ平面上ニ投ズル一直線ノ**射影**ハ,該直線上ノ總テノ點ノ射影ノ軌跡ナリ.

**45. 系** 一ツノ平面上ニ投ズル一ツノ直線ノ射影ハ,其ノ上ノ任意ノ二點ノ射影ヲ結ビ付クル一ツノ直線ナリ.

**46. 定義** 一つの直線が,一つの平面となす**角**とは,其の直線が,其の平面上に投ずる其の射影となす角を云ふ.

**47. 定義** 三つ以上の平面が,同一の點に出會ふときは,**多面角**或は**立體角**をなすといふ.

多面角ハ,其ノ面ノ數ニ從ヒ**三面角,四面角,五面角,**等ト命名セラル.

多面角ヲナス各平面ノ出會フ所ノ一點ヲ,多面角

ノ**頂點**.各平面ノ二ツヅツノ交リヲ其ノ頂點ニ於テ限ルトキハ,之ヲ多面角ノ**稜**,稜ト稜トノ間ニアル平面ノ部分ヲ多面角ノ**面**,稜ト稜トノ間ノ平面角ヲ多面角ノ**面角**ト云フ.

多面角ガ,全ク其ノ各面ノ一方ニアルトキハ,之ヲ**凸多面角**ト云フ.

**48.** 二ツノ多面角ニ於テ,其ノ各ノ面角,及ビ二面角ガ,ソレゾレ**同ジ順**ニ相等シキトキハ,二ツノ多面角ハ全ク相合セシメ得ルコト明カナリ. 故ニ

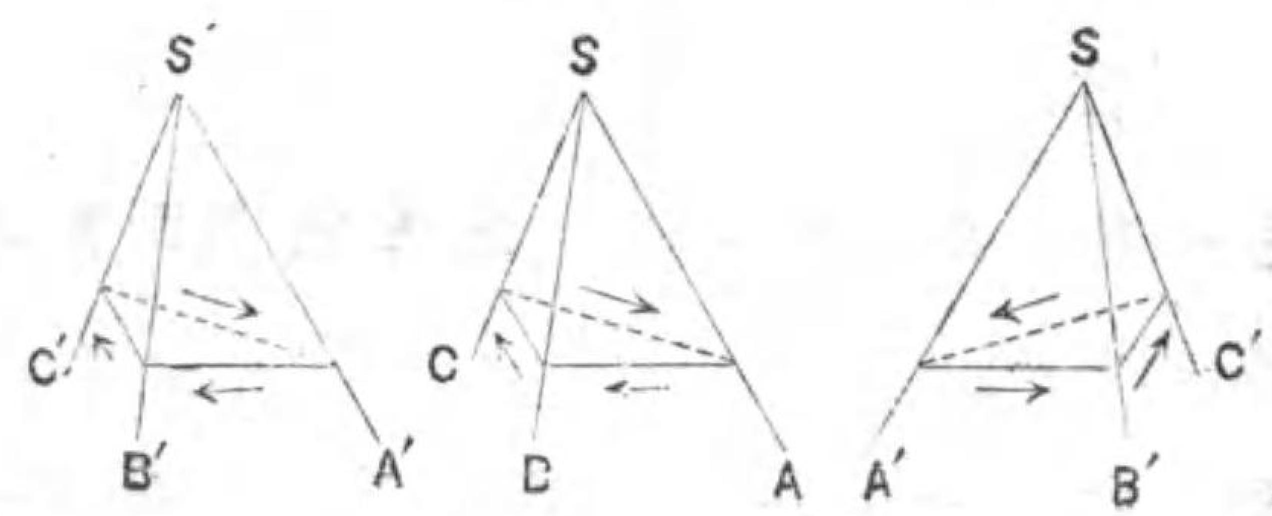
此の二つの多面角は**相等し**.

**49.** 二ツノ多面角ニ於テ,其ノ各ノ面角,及ビ二面角ガ,ソレゾレ**逆ノ順**ニ相等シキトキハ,二ツノ多面角ハ相合セシムルコト能ハズ.

**定義** 斯の如き二つの多面角は,之を互に**對稱**なりといふ.

1圖ト2圖トハ相等シキ三面角, 2圖ト3圖トハ

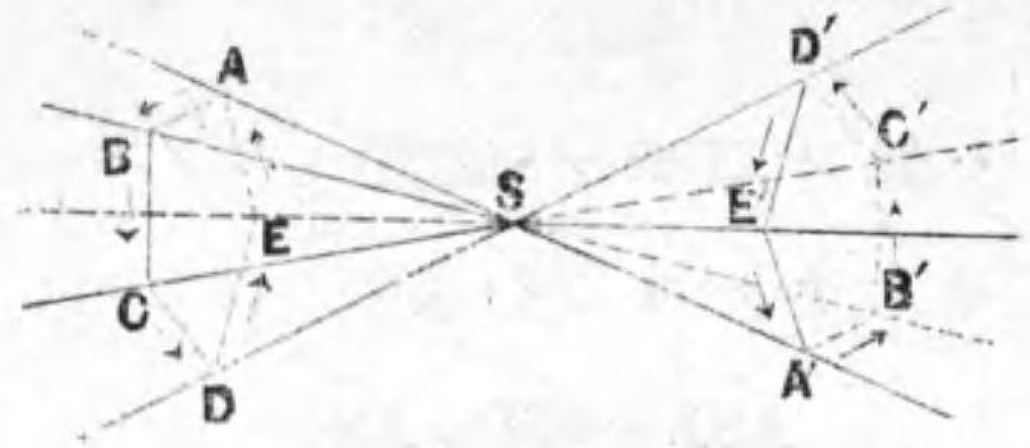
[1圖] [2圖] [3圖]






對稱三面角ナリ.

例ヘバ一ノ多面角 S-ABCDE ノ各ノ稜ヲ,頂點ヲ

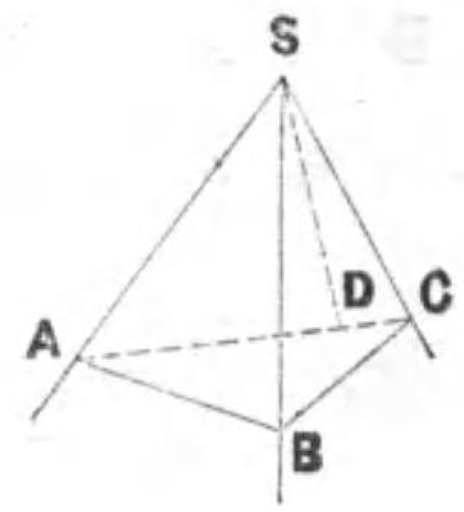



越エテ引キ延バシ,又一ツノ多面角 S-A'B'C'D'E' ヲ作ルトキ,斯ノ如キ二ツノ多面角ヲ**對頂多面角**ト云ヒ,對頂多面角ハ對稱ナルコト明カナリ.

## 例題

36. 三面角ノ二ツノ面角相等シケレバ,之ニ對スル二面角モ亦相等シ. 而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

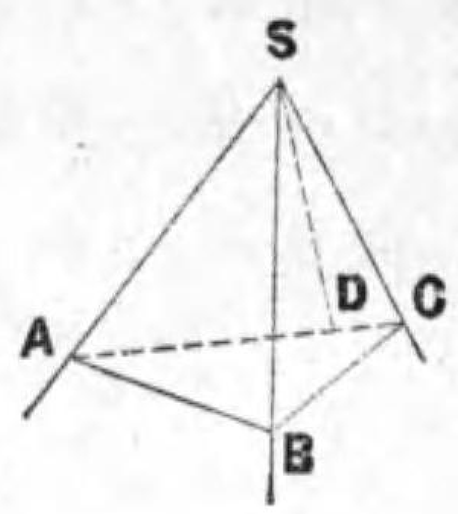
**50. 定理** 三面角に於て,其の面角の任意の二つの和は,他の一つより大なり.




S-ABC ヲ三面角トスレバ,

其ノ面角 $\widehat{ASB}, \widehat{BSC}, \widehat{CSA}$ ノ中,

何レノ二ツノ和モ他ノ一ツヨリ大ナルコトヲ證セントス.




**證** $\widehat{ASC}$ ハ他ノ二ツノ面角ノ何レヨリモ大ナルモノトシ,

$$\widehat{ASB}+\widehat{BSC}>\widehat{ASC}$$

ナルコトヲ證スレバ,其ノ他ノ場合ハ自ラ明カナルユヱ,證明ヲ要セズ.

故ニ $\widehat{ASC}$ ハ他ノ二ツノ面角ノ何レヨリモ大ナルトキ $\widehat{ASB}+\widehat{BSC}>\widehat{ASC}$

ナルコトヲ證明セントス.

平面 ASC ニ於テ,一ツノ直線 SD ヲ引キ,

$$\widehat{ASD}=\widehat{ASB}$$

ナラシメ, SB＝SD

ナル如キ點 B, D ヲ取リ,點 D ヲ過リテ任意ノ直線 ADC ヲ引キ; SA, SC トソレゾレ A,C ニ於テ交ラシメ; AB, BC ヲ結ビ付ケヨ,

然ルトキハ △ASB, △ASD ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l}SB=SD \quad \text{[作圖]}\\ SA \text{ ハ共通}\\ \widehat{ASB}=\widehat{ASD} \quad \text{[作圖]}\end{array}\right\}$$



故ニ AB＝AD, [平. 47 款]

然ルニ AB＋BC＞AD＋DC,

故ニ BC＞DC.

依リテ △CSB, △CSD ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l}SB=SD\\ SC \text{ ハ共通}\\ BC>DC\end{array}\right\}$$

故ニ $\widehat{BSC}>\widehat{CSD}$, [平. 63 款]

故ニ $\widehat{ASB}+\widehat{BSC}>\widehat{ASD}+\widehat{CSD}$

卽チ $>\widehat{ASC}$.

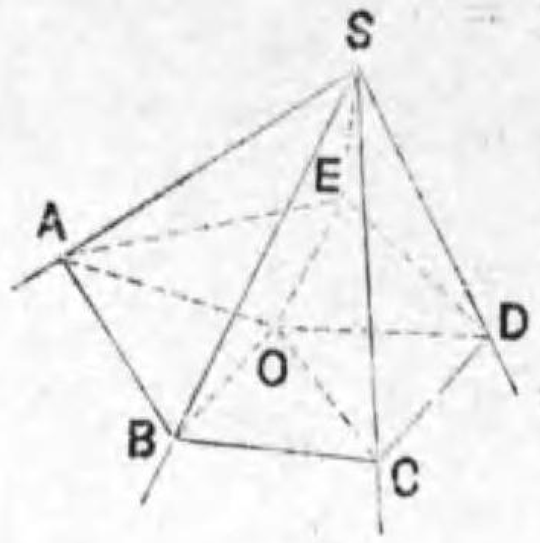
## 例　　題

37. 三面角ニ於テ,其ノ面角ノ任意ノ二ツノ差ハ,他ノ一ツヨリ小ナリ.

38. 三ツノ平面ガ,相交リテ三面角ヲナサザルコトアルカ.

---

**51. 定理** 凸多面角に於て,各の面角の和は四直角より小なり.




S-ABCDE ヲ凸多面角トスレバ,

*$\Sigma\widehat{ASB}<4\hat{R}$

ナルコトヲ證セントス.

**證** 多面角ヲ一ノ平面ニテ截リ,其ノ截口ヲ ABCDE トシ,其ノ多角形內ニ任意ノ一點 O ヲ取リ,之ヲ A, B, C,……… ニ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ

$$\triangle SAB\text{ ノ各角ノ和}=\triangle OAB\text{ ノ各角ノ和},$$

故ニ $\Sigma(\triangle SAB\text{ ノ各角ノ和})=\Sigma(\triangle OAB\text{ ノ各角ノ和}),$

即チ $\Sigma\widehat{ASB}+\Sigma\widehat{SBA}+\widehat{SBC}=\Sigma\widehat{AOB}+\Sigma\widehat{ABC}.$

然ルニ $\widehat{SBA}+\widehat{SBC}>\widehat{ABC},$ [50款]

故ニ $\Sigma(\widehat{SBA}+\widehat{SBC})>\Sigma\widehat{ABC}.$

依リテ $\Sigma\widehat{ASB}<\Sigma\widehat{AOB},$

然ルニ $\Sigma\widehat{AOB}=4\hat{R},$

故ニ $\Sigma\widehat{ASB}<4\hat{R},$

* $\Sigma\widehat{ASB}$ ハ $\widehat{ASB}+\widehat{BSC}+\dots\dots+\widehat{ESA}$ ノ略記ナリ, 餘ハ之ニ倣ヘ.



# 雜題

*1. 二面角ヲ二等分スル平面上ノ各點ハ,二面角ノ二ツノ面ヨリ等距離ニアリ.

2. 一ツノ直線ト一ツノ平面トガ,同一ノ平面ニ垂直ナルトキハ,此ノ直線ト平面トハ相平行ス.

3. 三面角ノ三ツノ稜ヨリ等距離ナル點ノ軌跡如何.

*4. 二ツノ三面角ニ於テ,其ノ三ツノ面角ガ,ソレゾレ**同ジ順**ニ相等シキトキハ,是等ノ三面角ハ相等シ. 若シ**逆ノ順**ニ相等シキトキハ如何.

5. 三面角ノ三ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ,同一ノ直線ニ於テ相交ル.

6. 三面角ノ各面角ノ二等分線ヲ含ミ,且ソノ面ニ垂直ナル三ツノ平面ハ,同一ノ直線ニ於テ相交ル.

7. 三面角ノ各稜ヲ過リ,且ソノ對面ニ垂直ナル三ツノ平面ハ,同一ノ直線ニ於テ相交ル.

# 第二編　多面體

## 第一節

### 多面體

**52.** **定義**　若干の平面にて界せられたる立體を**多面體**といふ.

多面體ハ,其ノ面ノ數ニ從ヒ**四面體**,**五面體**,**六面體**,等ト命名セラル.

多面體ヲ界スル平面ノ交リヲ多面體ノ**稜**,稜ノ交點ヲ多面體ノ**頂點**ト云ヒ,稜ニテ界セラレタル平面ノ部分ヲ多面體ノ**面**ト云フ.

**53.** **定義**　多面體に於て,總ての面が相等しき正多角形にして,總ての多面角が相等しければ,之を**正多面體**と云ふ.

**54.** **定理**　正多面體は,五種より多くあること能はず.



**證**　一ノ多面角ヲ作スニハ,少ナクトモ三ツノ面ガ,一ツノ點ニ於テ出會ハザル可カラズ.

而シテ　多面角ノ各ノ面角ノ和ハ $4\hat{R}$ ヨリ小ナリ.　[51 款]

サテ　正多角形ノ邊數ヲ $n$ トスレバ,

其ノ一角 $\alpha$ ハ $\dfrac{(2n-4)\hat{R}}{n}$.　[平. 44 款, 或ハ 33 頁 32 題]

(1)　$n=3$ ナルトキハ $\alpha=\frac{2}{3}\hat{R}$,

$\therefore\ 3\alpha=2\hat{R},\ 4\alpha=\frac{8}{3}\hat{R},\ 5\alpha=\frac{10}{3}\hat{R},\ 6\alpha=4\hat{R}.$

故ニ　3 個, 4 個, 5 個ノ正三角形ヲ以テ,一ノ多面角ヲ作リ得可シ.　然レドモ 6 個以上ノ正三角形ヲ以テ,一ノ多面角ヲ作ルコト能ハズ.

(2)　$n=4$ ナルトキハ $\alpha=\hat{R}$,

$\therefore\ 3\alpha=3\hat{R},\ 4\alpha=4\hat{R}.$

故ニ　3 個ノ正方形ヲ以テ,一ノ多面角ヲ作リ得可シ.　然レドモ 4 個以上ノ正方形ヲ以テ,一ノ多面角ヲ作ルコト能ハズ.

(3)　$n=5$ ナルトキハ $\alpha=\frac{6}{5}\hat{R}$,

$\therefore\ 3\alpha=\frac{18}{5}\hat{R},\ \ 4\alpha>4\hat{R}.$

故ニ　3 個ノ正五角形ヲ以テ,一ノ多面角ヲ作リ得可シ.　然レドモ 4 個以上ノ正五角形ヲ以テ,一ノ多面角ヲ作ルコト能ハズ.

(4)　$n=6$ ナルトキハ $\alpha=\frac{4}{3}\hat{\mathrm{R}}$,　∴　$3\alpha=4\hat{\mathrm{R}}$.

故ニ　正六角形ヲ以テ,一ノ多面角ヲ作ルコト能ハズ.

サテ　$\frac{(2n-4)\hat{\mathrm{R}}}{n}=\left(2-\frac{4}{n}\right)\hat{\mathrm{R}}$ ナルヲ以テ,此ハ $n$ ガ増スニ從ヒテ増大スルコト明カナリ.

故ニ　七邊以上ノ正多角形ヲ以テ,一ノ多面角ヲ作ル能ハザルコトモ亦明カナリ.

故ニ　正多面體ハ五種[其ノ立體角ガ 3 個, 4 個, 5 個ノ正三角形ヨリ成ルモノ, 3 個ノ正方形ヨリ成ルモノ, 3 個ノ正五角形ヨリ成ルモノ]ヨリ多クアルコトナシ.*

**注意**　五種ノ正多面體ヲ列擧スレバ次ノ如シ.

---

* 果シテ五種ノ正多面體ガ成リ立ツコトノ證明ハ,稍繁雜ナルト,サホド必要ナラザルトノ二ツノ理由ニ依リ,玆ニ之ヲ省ク.五種ノ正多面體ハぷらとんノ立體ト稱セラル,ソハ是等ノ立體ハぴたごらす[Pythagoras, 西暦紀元前580年頃ニ生レ, 501年頃ニ死セリ]一派ノ人ニ知ラレシカドモ,專ラぷらとん[Platon]ノ學校ニテ教授セラレタルヲ以テナリ.　五種ノ正多面體ノ中,簡單ナル三ツ[正四面體,正六面體(立方體)正八面體]ハ多少ノ變形ヲ以テ,屢結晶學中ニ用ヒラル.

五ツノ正多面體ヲ厚紙ニテ作ランニハ,先ヅ次圖ノ如ク截開シ,斷續線ノ所ヲ箆(ヘラ)ニテ筋付ケ,之ニ沿ヒテ各形ヲ折リ曲ゲ,繼目ヲ薄紙ニテ貼レバヨシ.

プラトン氏肖像


PLATON.

(427—347 B. C.)

## プラトン氏小話

ぷらとん氏ハ西暦紀元前427年,即チ大疫病流行ノ年ニあてねノ富豪ノ家ニ生レ,同ジキ347年壽81歳ニテ死セリ. 氏ハ Academy ノ創立者ニシテ, 數學及ビ哲學ノ大家トシテ有名ナリ.
傳說ニ曰ク, 氏ハ其ノ玄關ニ揭グルニ

“幾何學ヲ知ラザル者ハ室内ニ入ルベカラズ” ト

ごー氏ノ希臘數學史ニ

Let none that is ignorant of geometry enter my doors.

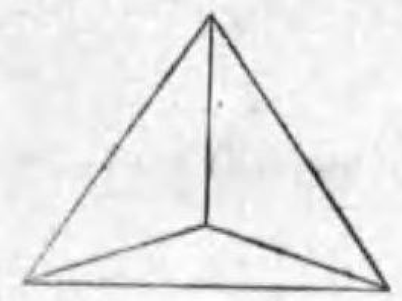
トアルモ, 亦支那徐光啓ノ幾何原本ニ

聞西國古有大學師門生常數百千人來學者先問能通此書乃聽入

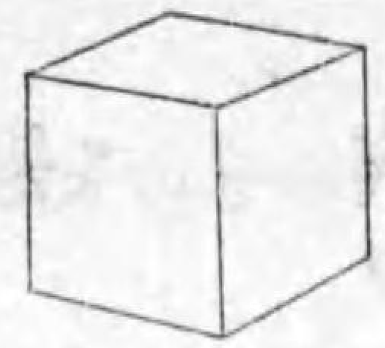
トアルモ同義ナリ.



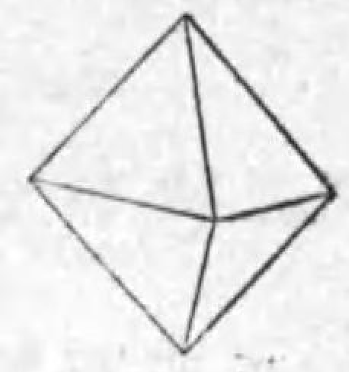
正四面體



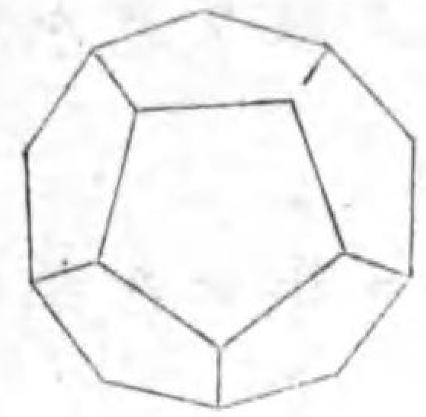
正六面體〔立方體〕



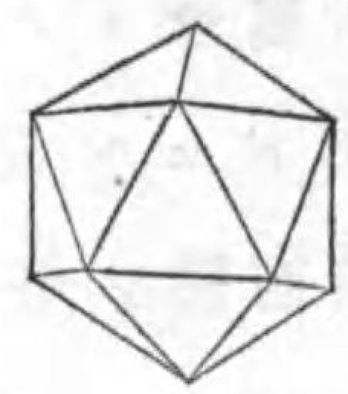
正八面體



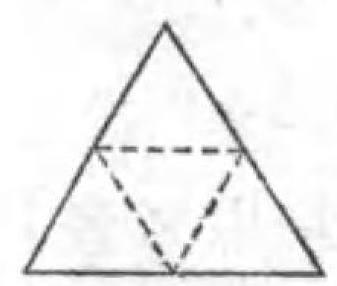
正十二面體



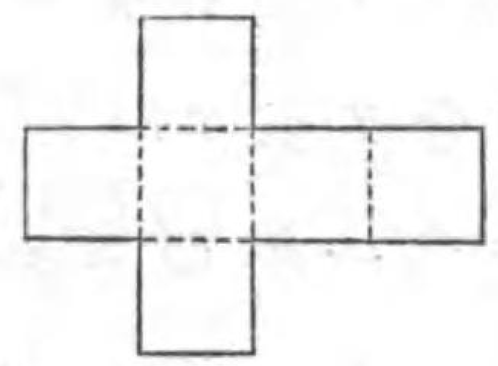
正二十面體



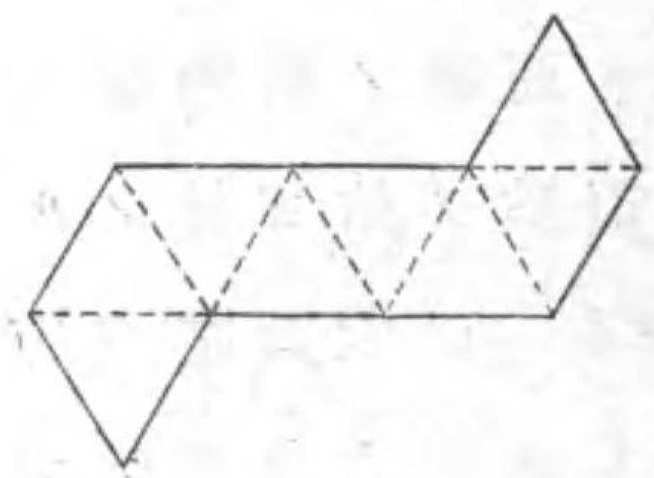
正四面體



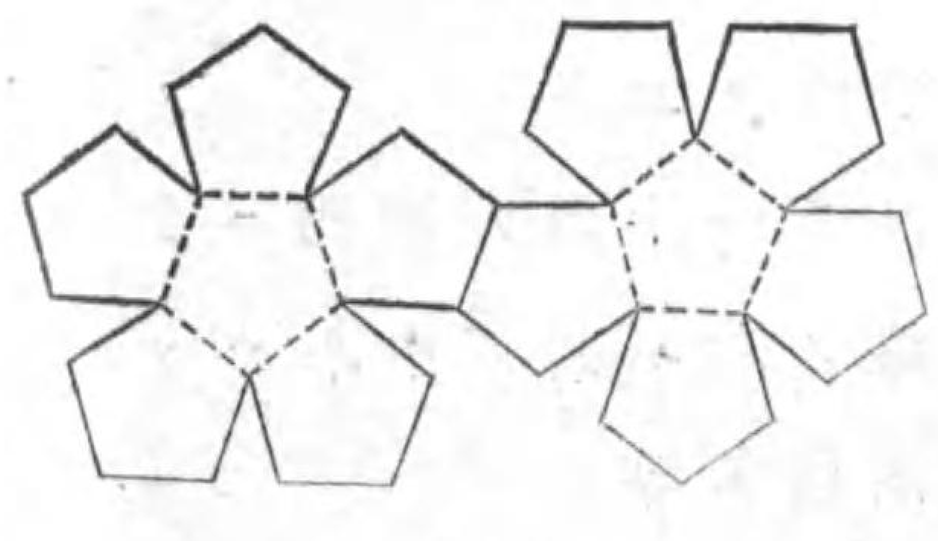
正六面體〔立方體〕



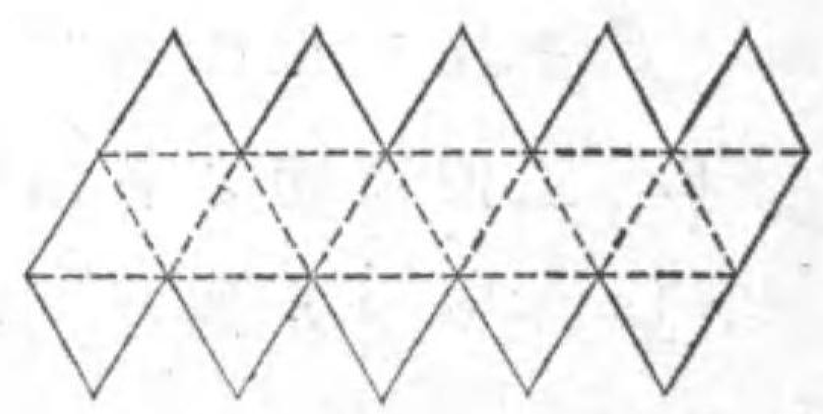
正八面體



正十二面體



正二十面體



## 例　　題

1. 正四面體ノ高サノ上ノ正方形ノ三倍ハ,其ノ稜ノ上ノ正方形ノ二倍ニ等シ.

多面體ノ**高サ**トハ,**底面**トシテ取リタル面ヘ,其ノ最高點ヨリ下セル垂線ヲ云フ.

2. 正四面體ノ各面ノ中心ニ作レル垂線ハ,同一ノ點ニ於テ相交ル.

*3. 正六面體[立方體]ノ四ツノ對角線ハ,同一ノ點ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ.

多面體ノ**對角線**トハ,其ノ同ジ面ニ屬セザル二ツノ頂點ヲ結ビ付クル線分ヲ云フ.

4. 正六面體[立方體]ヲ一平面ニテ截リ,其ノ截口ヲシテ正六角形ヲナサシメヨ.

5. 正四面體ノ各頂點ヨリ,其ノ對面ヘ引ケル四ツノ垂線ハ,同一ノ點ニ於テ相交ル.

斯ノ如キ點ヲ正四面體ノ**中心**ト云フ.

6. 正四面體ノ各頂點ヨリ,一平面[四面體ニ交ラザル]ニ下シタル四ツノ垂線ノ和ハ,其ノ中心ヨリ此ノ平面ニ下シタル垂線ノ四倍ニ等シ.



*7. 正八面體ノ三ツノ對角線ハ,同一ノ點ニ於テ相交ル.

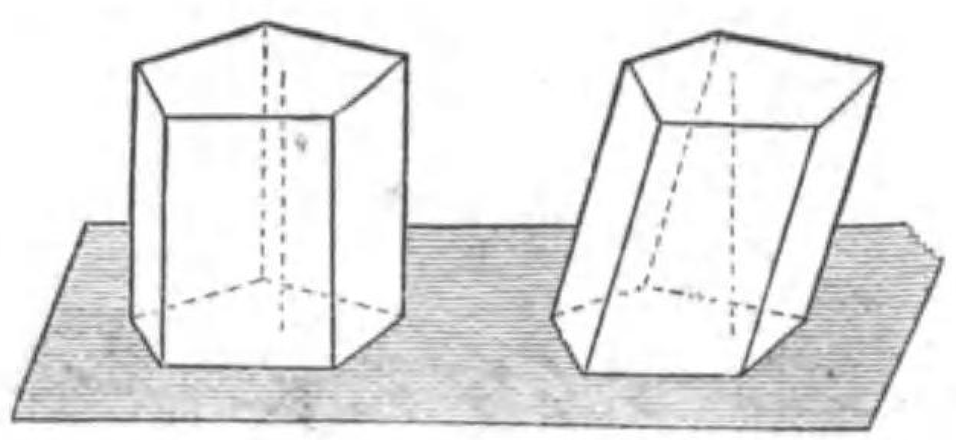
*8. 四面體ノ六ツノ稜ヲ垂直ニ二等分スル六ツノ平面ハ,同一ノ點ニ於テ相交ル.

# 第二節

## 壔及び錐

**55. 定義**　**角壔面**とは,三つ以上の平行直線を,順次に二つづつ過る所の平面より組立てらるる面をいひ,角壔面,及び二つの平行平面にて界せられたる立體を**角壔**といふ.

角壔ニ於テ,平行二平面ノナス多角形ヲ**底面**,兩底面ノ間ニアル角壔面ノ各ヲ**側面**,側面ト側面トノ交リヲ**側稜**ト云フ.



角壔ノ兩底面ハ全ク相等シク,側稜モ亦相等シク,側面ハ平行四邊形ナルコト明カナリ.



角壔ノ兩底面ノ間ノ距離ヲ**高サ**ト云ヒ,高サガ側稜ニ平行ナルモノヲ**直角壔**,然ラザルモノヲ**斜角壔**ト云フ.

角壔ハ,其ノ側面ノ數ニ從ヒ**三角壔**,**四角壔**,**五角壔**,等ト命名セラル.

### 例題

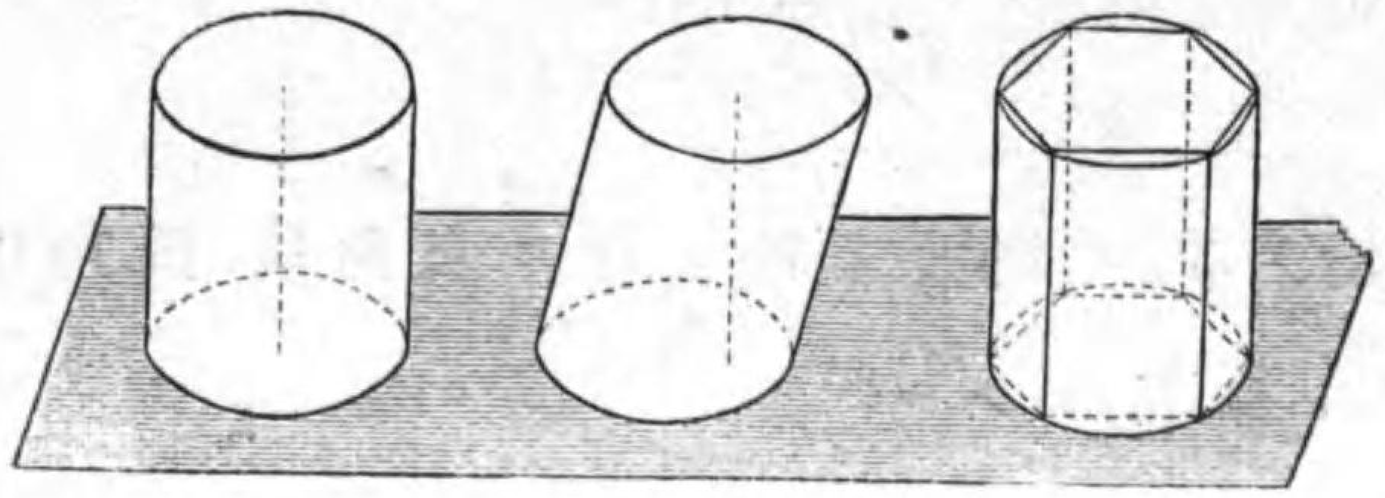
9. 角壔ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,其ノ截口ハ,底面ト全等形ナリ.

10. 角壔ノ平行セザル二ツノ對角面ガ,底面ニ垂直ナルトキハ,此ノ角壔ハ直角壔ナリ.

多面體ノ同一ノ面ニ屬セザル二ツノ稜ヲ過ル平面ヲ,**對角面**ト稱ス.

**56. 定義**　**圓壔面**とは,一直線が,それ自身に平行し,且一の定圓周に沿ひて運動して生ずる面をいひ,定圓周の平面と,之に平行する平面,及び圓壔面にて

界せられたる立體を**圓壔**といふ.



圓壔ニ於テ定圓周ノ平面,及ビ之ニ平行スル平面ヲ**底面**,兩底面ノ間ニアル圓壔面ヲ**側面**ト云ヒ,側面ヲ生ズベク運動セシ直線ヲ**母線**ト云フ.

圓壔ノ兩底面ハ全ク相等シ. 圓壔ノ兩底面ノ間ノ距離ヲ**高サ**,高サガ母線ニ平行ナルモノヲ**直圓壔**,然ラザルモノヲ**斜圓壔**ト云フ.

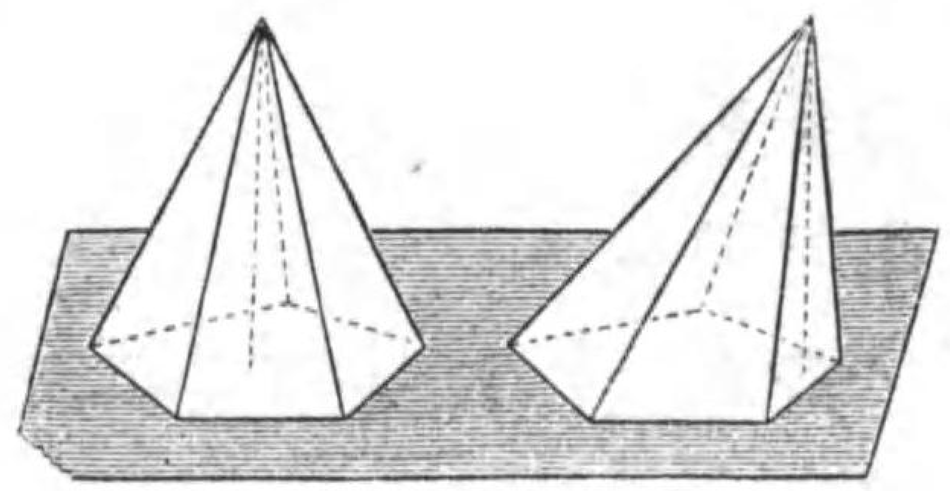
直圓壔ノ側面ヲ,一母線ニ從ヒ截リ離シテ展開スレバ,平行四邊形ナルコト明カナリ.

圓壔ハ,之ニ內接[平面幾何學ニ於ケル內接ノ意義ヲ擴張シタルナリ]シタル角壔ノ底面ノ邊數ガ,限リナク增シタル極限ノ場合ト考フルヲ得ベク,直圓壔ハ,又矩形ガ其ノ一邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキ,生ズル所ノ立體ナリト考フルヲ得可シ.

**57. 定義** **角錐面**とは,一の定點と,



一の定多角形の邊とを過る平面より組立てらるる面を云ひ,その多角形の面,及び角錐面にて界せらるる立體を**角錐**といふ.



角錐ニ於テ,定多角形ノ面ヲ**底面**,定點ヲ**頂點**ト云ヒ,頂點ト底面トノ間ニアル角錐面ノ各ヲ**側面**ト云ヒ,側面ト側面トノ交リヲ**斜稜**ト云フ.

角錐ノ側面ハ,皆三角形ヲナスコト明カナリ.

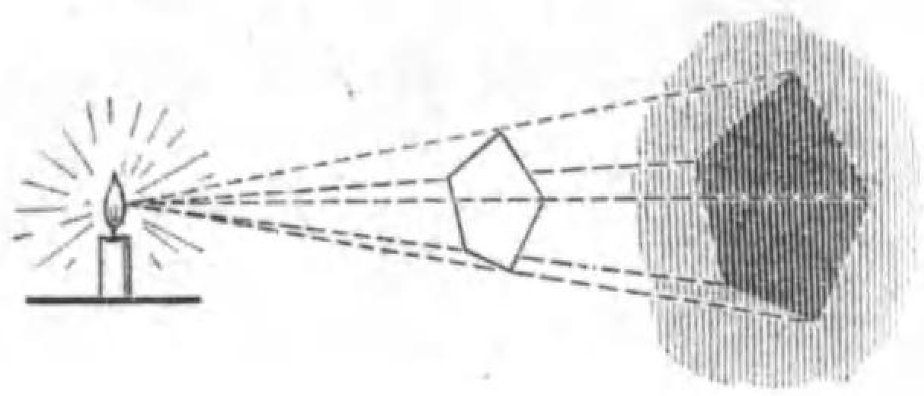
角錐ノ頂點ヨリ底面ヘ引ケル垂線ヲ**高サ**ト云ヒ,底面ガ正多角形ニシテ,高サノ趾ガ底面ノ中心ト合スルモノヲ**正角錐**ト云フ. 正角錐ノ場合ニ,頂點ヨリ底面ノ一邊ヘ引ケル垂線ヲ**斜高**ト云フ.

角錐ハ,其ノ側面ノ數ニ從ヒ**三角錐**,**四角錐**,**五角錐**,等ト命名セラル.

## 例　題

*11. 角錐ヲ,底面ニ平行セル平面ニテ截ルトキハ,斜稜及ビ高サハ,同ジ比ニ分タレ,且ソノ截口ハ,底面ニ相似ナリ.

**注意** 燈光ヲ正多角形ノ板ニテ遮蔽スルトキハ,壁面ニ相似正多角形ノ陰影ヲ生ジ,正多角形ノ板ノ各角頂ヲ過ル光線ハ,一ノ多角錐ヲ形成スベシ.



*12. 相等シキ底面ト,相等シキ高サトヲ有ツ二ツノ角錐ヲ,底面ヨリ等距離ノ所ニテ底面ニ平行セル平面ニテ截リタル截口ハ,等積ナリ.

13. 高サ12寸ナル角錐ノ底面積ガ8平方寸ナルトキ,底面ニ平行スル平面ニテ截リタル截口ガ5平方寸ナルモノハ,頂點ヨリ何寸ノ距離ニアルカ.

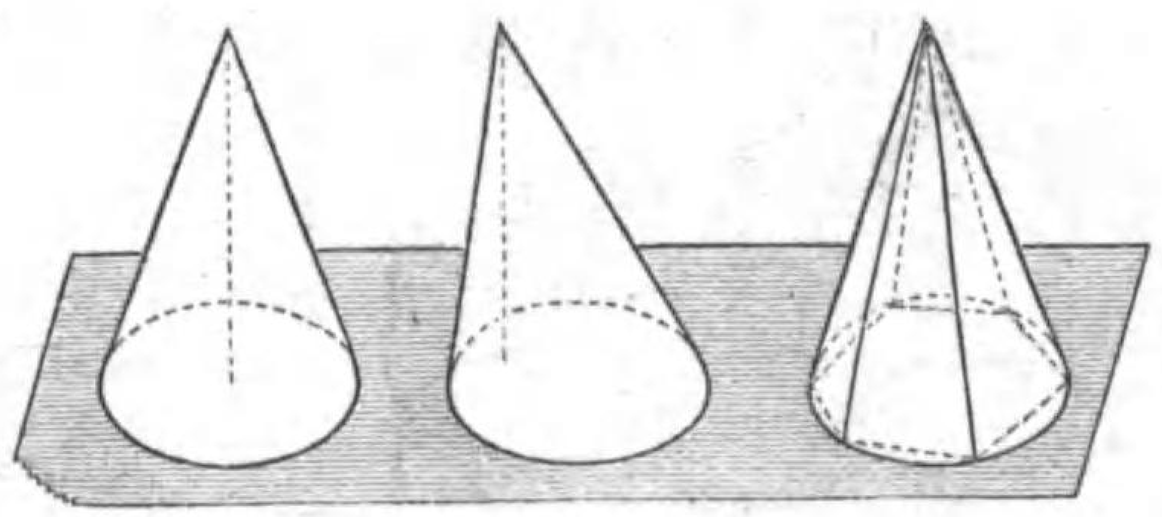
14. 三角錐ノ側面積ノ和ハ,恒ニ底面積ヨリ大ナルコトヲ證セヨ.

---



**58. 定義** **圓錐面**とは,一直線が一つの定點を過り,一つの定圓周に沿ひつつ運動して生ずる面をいひ,其の定圓周の面,及び圓錐面にて界せらるる立體を**圓錐**といふ.

圓錐ニ於テ,定圓周ノ面ヲ**底面**,定點ヲ**頂點**,頂點ト底面トノ間ニアル圓錐面ヲ**側面**ト云ヒ,側面ヲ生ズ可ク運動セシ直線ヲ**母線**ト云フ.



圓錐ノ頂點ヨリ底面ヘ引ケル垂線ヲ**高サ**,高サノ趾ガ底面ノ中心ト合スルモノヲ**正圓錐**,又ハ**直圓錐**ト云ヒ,正圓錐ノ場合ニ頂點ヨリ底圓周ヘ引ケル直線ヲ**斜高**ト云フ.

正圓錐ノ側面ヲ,一母線ニ從ヒ截リ離シテ展開スレバ,圓ノ扇形トナルコト明カナリ.

圓錐ハ,之ニ內接シタル角錐ノ底面ノ邊數ガ限リ

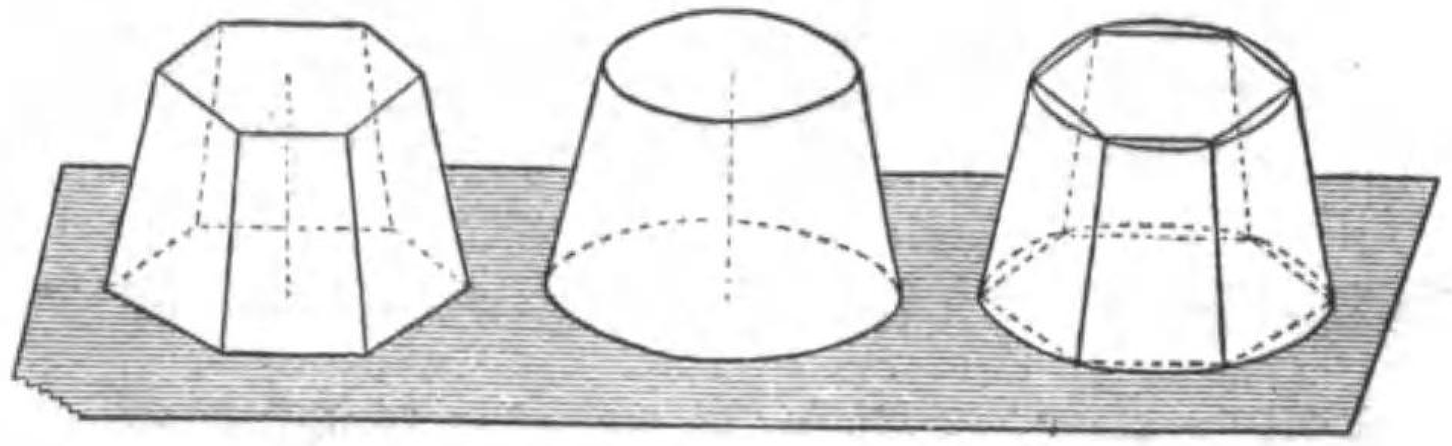
ナク增シタル極限ノ場合ト考フルヲ得可ク,正圓錐ハ,又直角三角形ガ,其ノ直角傍ノ一邊ヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル所ノ立體ナリト考フルヲ得可シ.

## 例　題

※15. 正圓錐ヲ,底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,其ノ截口ハ圓ナリ.

---

**59. 定義** 角臺[圓臺]とは,相平行せる二つの平面と,角錐面[圓錐面]とにて界せられたる立體を云ふ.



角臺及ビ圓臺ニ於テ,平行セル二面ヲ**底面**,兩底面ノ間ノ面ヲ**側面**,兩底面ノ間ノ距離ヲ**高サ**ト云ヒ,正角錐,正圓錐ヲ底面ニ平行シテ截リテ生ジタル角臺,圓臺ヲ,ソレゾレ**正角臺**,**正圓臺**ト云フ. 正角臺,正圓臺ノ場合ニ,兩底面ノ周圍ノ間ノ距離ヲ**斜高**ト云フ.



而シテ角臺ニ於テ,側面ハ皆梯形ナルコト明カナリ.

圓臺ハ,之ニ內接シタル角臺ノ底面ノ邊數ガ,限リナク增シタル極限ノ場合ト考ヘ得可シ.

**60.** 以上述ベタル立體ノ中ニテ,

角臺ヲ最モ概濶ナルモノト考ヘ,

圓臺ハ,前ニ述ベタル如ク,角臺ノ極限ノ場合ニシテ,

(1) 角壔及ビ圓壔ハ,ソレゾレ角臺及ビ圓臺ノ兩底面ノ一ノ大イサガ,漸々他ノ一ニ近寄リ,終ニ全ク相等シクナリタル極限ノ場合.

(2) 角錐及ビ圓錐ハ,ソレゾレ角臺及ビ圓臺ノ兩底面ノ一ガ,漸々小サクナリテ,終ニ一點トナリタル極限ノ場合.

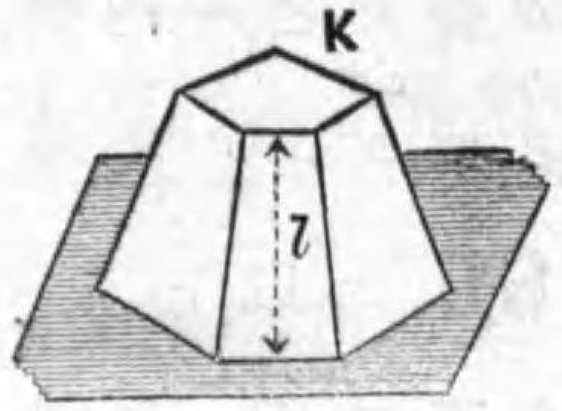
ト考フルコトヲ得可シ.

**61. 定理** 正角臺の側面積は,其の兩底面の周の和と斜高との積の半分に等し.*

---

* 此ハ正角臺ノ側面積ハ,兩底面ノ周ノ測度ノ和ト斜高ノ測度トノ積ノ半分ヲ測度トストス云ヘル略言ナリ. 以下總テ此ノ略言ノ文體ヲ用フ.

K ヲ正角臺, $S$ ヲ其ノ側面積, $l$ ヲ斜高,兩底面ノ周ヲ $p$ 及ビ $p_1$




トスレバ,

$$S=\frac{1}{2}l(p+p_1)$$

ナルコトヲ證セントス.

**證** 側面ハ皆梯形ヲナスヲ以テ,

一側面ノ面積$=\frac{1}{2}l$(兩底面ノ對應邊ノ和), [平. 150 款]

故ニ 全キ側面積$=\frac{1}{2}l(p+p_1)$.

**62.** **系 1.** 正圓臺ノ側面積ハ,兩底面ノ圓周ノ和ト斜高トノ積ノ半分ニ等シ.

**系 2.** 正角臺及ビ正圓臺ノ側面積ハ,兩底面ヨリ等距離ナル平面ニテ截リタル截口ノ周ト斜高トノ積ニ等シ.

**系 3.** 正角錐及ビ正圓錐ノ側面積ハ,底面ノ周ト斜高トノ積ノ半分ニ等シ.

**系 4.** 直角壔及ビ直圓壔ノ側面積ハ,底面ノ周ト高サトノ積ニ等シ.

## 例　題

16. 角壔ノ側面積,及ビ全面積ヲ計算スル方法如何.



*17. 正圓錐ノ高サヲ $h$, 底面ノ半徑ヲ $r$ トスレバ,其ノ側面積,及ビ全面積ヲ表ハス式如何.

*18. 直圓壔ノ高サヲ $h$, 底面ノ半徑ヲ $r$ トスレバ,其ノ側面積,及ビ全面積如何.

19. 底面ノ半徑ハ,1尺及ビ5寸ナル正圓臺アリ,其ノ斜高ガ8寸ナルトキハ,全面積如何.

---

**63.** **定義** **平行六面體**とは,底面が平行四邊形なる角壔を云ふ.

平行六面體ノ各面ガ矩形ナルモノヲ**直角體**ト云ヒ直角體ノ各面ガ正方形ナルモノヲ**立方體**ト云フ.

**64.** **定義** 立體の**體積**とは,其の體內に含まるる空間の部分の大いさを云ふ.

## 例　題

20. 四角壔ノ四ツノ對角線ガ,同一ノ點ニ於テ相交ルトキハ,此ノ四角壔ハ平行六面體ナリ.

21. 直角體ノ高サハ,側稜ニ平行スルコトヲ證セヨ.

*22. 平行六面體ノ相對スル面ハ,相等シキコトヲ證セヨ.

*23. 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ,同一ノ點ニ於テ相交リ,且互ニ二等分セラルルコトヲ證セヨ.

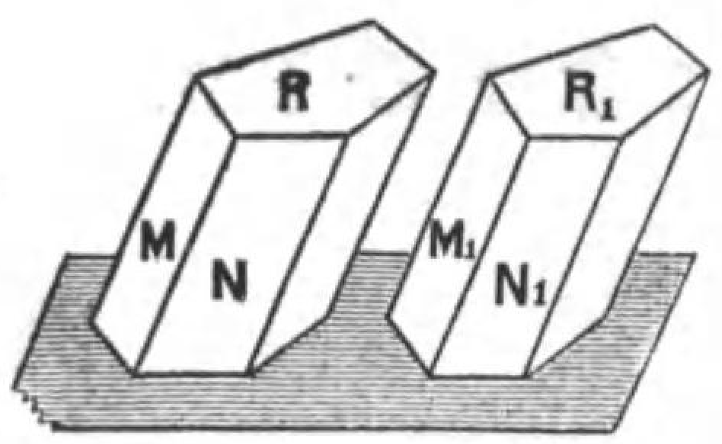
24. 平行六面體ノ四ツノ對角線上ノ正方形ノ和ハ,其ノ十二ノ稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.

---

**65. 定理** 二つの角壔に於て,其の一の三面角の三面が,それぞれ全く相等しく,且相似の位置に列べられたるときは,此の二つの角壔は全く相等し.

二ツノ角壔ニ於テ

三ツノ面M, N, Rガ,ソレゾレ$M_1$, $N_1$, $R_1$ニ全ク等シキトキハ,




此ノ二ツノ角壔ハ全ク相等シキコト

ヲ證セントス.

**證** 三ツノ面M, N, Rハソレゾレ三ツノ面$M_1$, $N_1$, $R_1$ニ等シキユエ,是等ノ面ヲ相似ノ位置ニ取リテ作ル三面角ハ,相等シクシテ相重ネ得可シ.[47頁4題]

然ルトキハRノ各頂點ハ,ソレゾレ$R_1$ノ各頂點ト合シ,他ノ二面ニ於テモ亦同様ナリ.

サテR及ビ$R_1$ノ頂點ハ,ソレゾレ相合スルヲ以テ,是等ノ頂點ヨリ引ケル側稜ハ相合ス可シ.

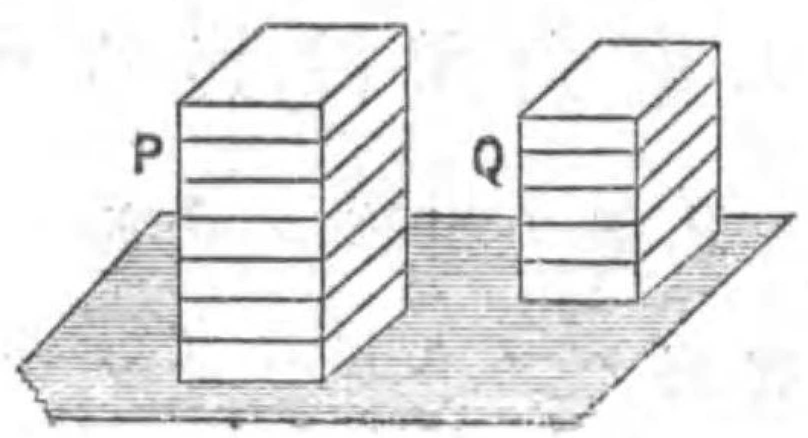
如何トナレバ是等ノ側稜ハ,皆M, Nノ交リノ稜ニ平行シ,且M, Nノ下ノ三ツノ頂點ノ定ムル平面ニテ限ラルルヲ以テナリ.

故ニ二ツノ角壔ハ全ク相合スルヲ以テ全ク相等シ.

**66. 系** 全ク相等シキ底面ト,相等シキ高サトヲ有ツ二ツノ直角壔ハ,全ク相等シ.

**67. 定理** 全く相等しき底面を有つ二つの直角體の體積は,其の高さに比例す.

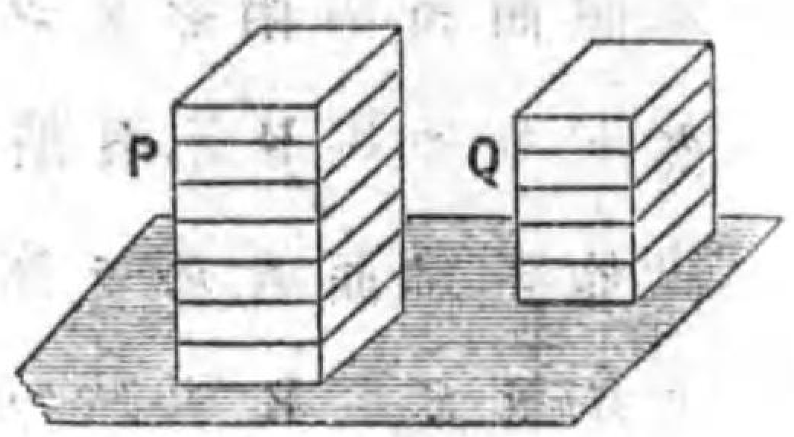
P, Qヲ相等シキ底面ヲ有ツ二ツノ直角體トシ,其ノ高サハ,ソレゾレ$m$, $n$單位ヲ含ムモノ




トスルトキハ

$$\frac{P}{Q}=\frac{m}{n}$$

ナルコトヲ證セントス.




**證** $m$及ビ$n$ハ通約ス可キ數ナリトシ,底面ニ平行スル平面ニテ,Pヲ$m$個,Qヲ$n$個ノ直角體ニ等分スルトキハ,是等ノ小サキ直角體ハ皆相等シ. [66 款]

而シテ P ハ是等ノ小サキ直角體ヲ$m$ダケ, Q ハ$n$ダケ含ムヲ以テ $\frac{P}{Q}=\frac{m}{n}$.

**注意** 本定理ハP,Qノ高サガ通約スベカラザル量ナルトキモ亦眞ナリ.* 而シテ直角體ノ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ヲ**元**ト命名スレバ,本定理ハ次ノ如ク述ブルコトヲ得.

二元ガ相等シキ二ツノ直角體ハ,第三ノ元ニ比例ス.

## 68. 定理 相等しき高さを有つ二つの直角體は,其の底面に比例す.

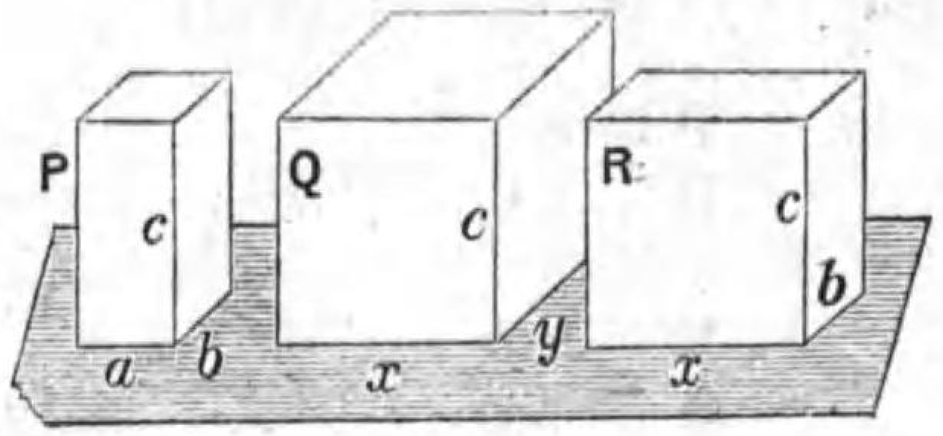
P,Qヲ相等シキ高サ$c$ヲ有ツ二ツノ直角體トシ,底面ノ二邊ヲ,ソレゾレ$a$, $b$及ビ$x$, $y$トスルトキハ

*此ノ證明ハ初等ノ書ニ不適當ナルユヱ之ヲ省ク.



$$\frac{P}{Q}=\frac{ab}{xy}$$

ナルコトヲ證セントス.




**證** 高サ$c$,底面ノ二邊ハ$x$, $b$ナル直角體Rヲ作ルトキハ

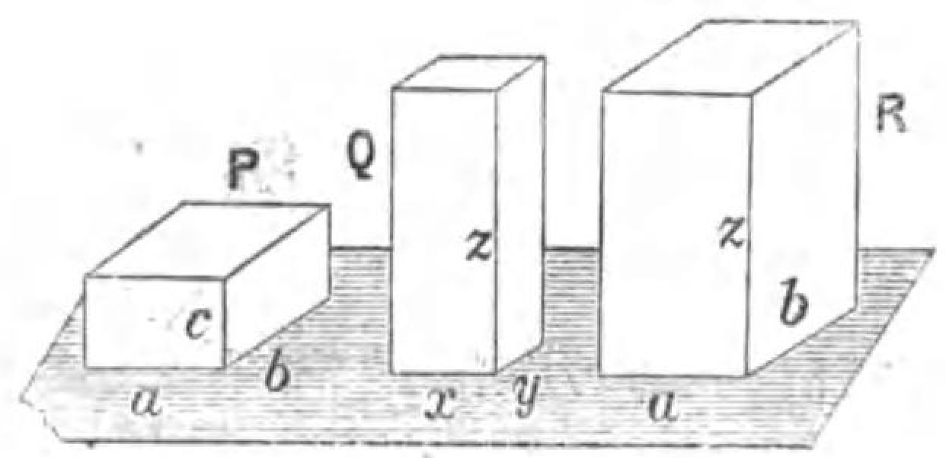
$$\frac{P}{R}=\frac{a}{x},\ 及ビ\ \frac{R}{Q}=\frac{b}{y},$$ [67 款注意]

故ニ $$\frac{P}{Q}=\frac{ab}{xy}.$$ [平. 185 款 XII]

**注意** 一元ガ相等シキ二ツノ直角體ハ,他ノ二元ノ積ニ比例ス.

## 69. 定理 二つの直角體は,其の三元の積に比例す.

P,Qヲ二ツノ直角體トシ,其ノ三元ヲ,ソレゾレ$a$, $b$, $c$及ビ$x$, $y$, $z$トスルトキハ,

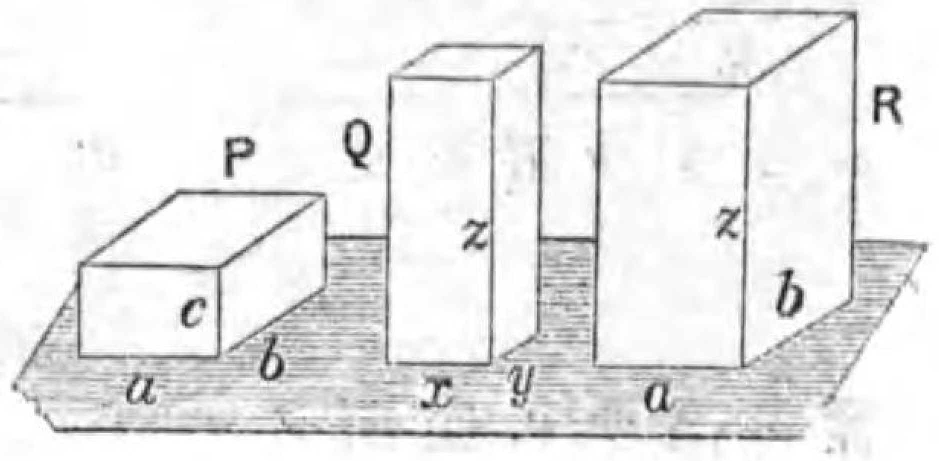



$$\frac{P}{Q}=\frac{abc}{xyz}$$

ナルコトヲ證セントス.

**證** 三ツノ元ヲ$a$, $b$, $z$トスル第三ノ直角體Rヲ

作ルトキハ

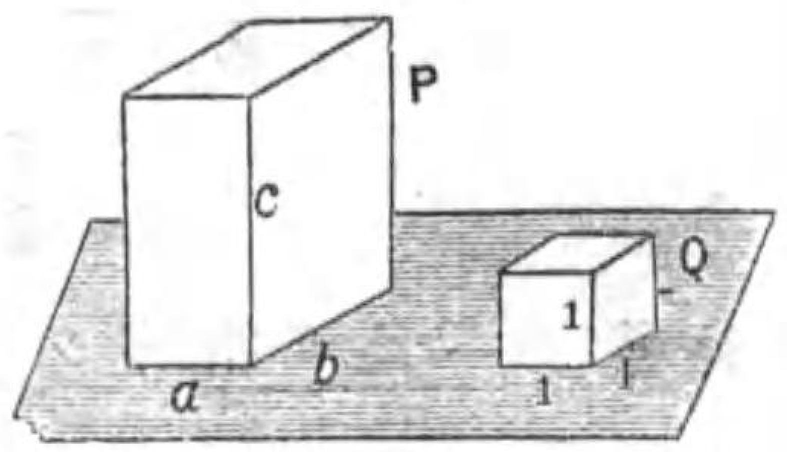



$$\frac{P}{R}=\frac{c}{z},\quad [67款]$$

$$\frac{R}{Q}=\frac{ab}{xy},\quad [68款]$$

故ニ $$\frac{P}{Q}=\frac{abc}{xyz}.\quad [平.185款\ XII]$$

**70. 系** 直角體ノ體積ハ,其ノ三ツノ元ノ積ニ等シ.




如何トナレバQヲ體積單位トスレバ $\frac{P}{Q}=\frac{abc}{1}=abc$ ナレバナリ.

**注意** 直角體ノ體積ハ,其ノ底面積ト高サトノ積ニ等シ.

## 例題

*25. 立方體ノ體積ハ,其ノ一稜ノ立方ニ等シ.

26. 對角線ガ$\sqrt{3}$ナル立方體ノ體積如何.

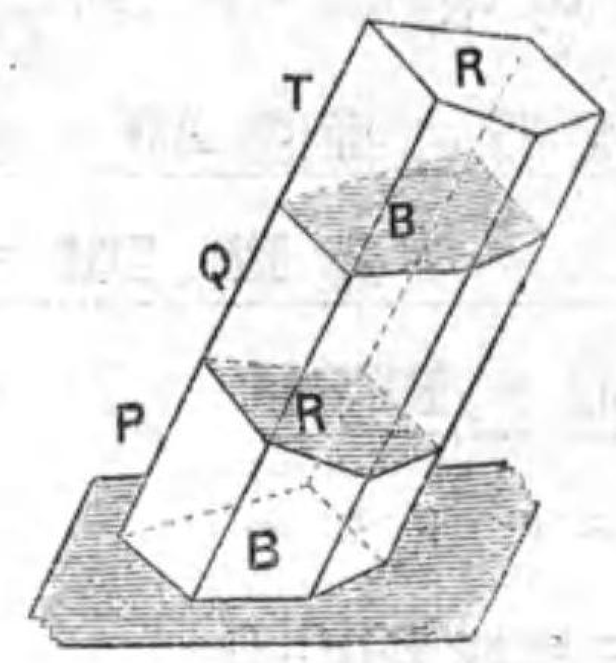
---

**71. 定理** 斜角壔は,其の側稜に垂直なる平面にて截りたる截口を底面とし



側稜を高さとする直角壔と等積なり.

RハBヲ底面トセル斜角壔P+Qヲ,其ノ側稜ニ垂直ナル平面ニテ截リタル截口ニシテ,等シキ側稜ヲ有ツ直角壔Q+Tノ底面ナルトキハ




$$P+Q=Q+T,\ 卽チ\ P=T$$

ナルコトヲ證セントス.

**證** P及ビTハ相等シキ底面Bヲ有ス,

而シテ P+Qノ側稜トQ+Tノ側稜トハ相等シ.

故ニ 相等シキ是等ヨリ,Qノ側稜ヲ取リ去ルトキハ,殘リハ相等シク,

卽チ Pノ側稜ハTノ對應セル側稜ニ等シ.

而シテ 二ツノ底面Bハ平行セル多角形ニシテ,其ノ對應邊ガ相等シキユヱ,

Pノ各面ハソレゾレTノ各面ニ等シク,

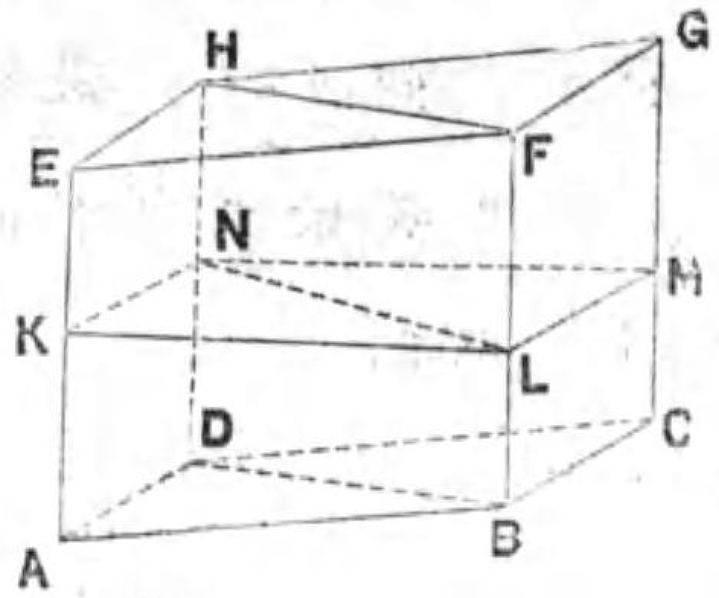
PトTトハ相重ネテ合同セシメ得可シ.

故ニ P=T.

**72. 定理** 平行六面體の相對す二つ

の稜を含む平面は,之を等積なる二つの三角壔に分つ.

平行六面體 AG ノ相對スル二ツノ稜 BF, DH ヲ含ム平面ヲ BFHD トスルトキハ




三角壔 BDC-G

=三角壔 BDA-E

ナルコトヲ證セントス.

**證** 稜 AE, BF, CG, DH ニ垂直ナル平面ニテ截リタル截口ヲ KLMN トスレバ,

平行六面體ノ相對スル面ハ平行スルユヱ, [63 款]

KL ∥ NM, LM ∥ KN, [29 款]

故ニ KLMN ハ平行四邊形ナリ. [平. 64 款]

而シテ 平面 BFHD ト平面 KLMN トノ交リ LN ハ,平行四邊形 KLMN ノ對角線ナルユヱ

△LMN≡△NKL. [平. 66 款系 1]

然ルニ 三角壔 BDC-G ハ △LMN ヲ底面トシ, BF ヲ高サトスル直角壔ニ等シク,又三角壔 BDA-E ハ △NKL ヲ底面トシ, BF ヲ高サトスル直角壔ニ等シ. [71 款]

而シテ 是等ノ二ツノ直角壔ハ等積ナリ. [66 款]



故ニ 三角壔 BDC-G=三角壔 BDA-E.

## 例題

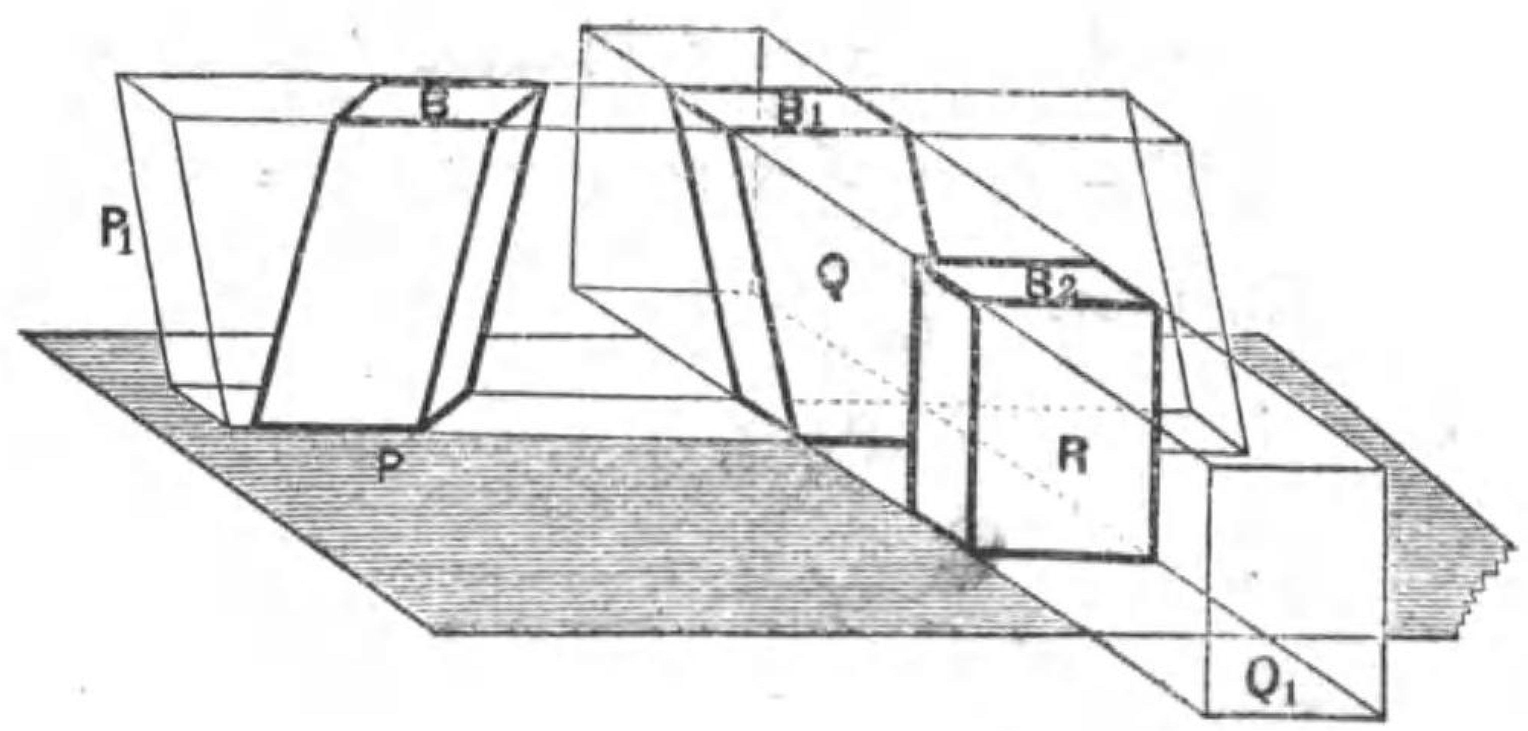
27. 三ツノ平行直線ノ各ノ上ニ,一定ノ長サノ側稜ヲ置キタル三角壔ノ體積ハ,一定ナルコトヲ證セヨ.

---

**73. 定理** 任意の平行六面體の體積は,其の底面積と高さとの積に等し.

P ヲ任意ノ平行六面體トシ,其ノ底面積ヲ B, 高サヲ $h$

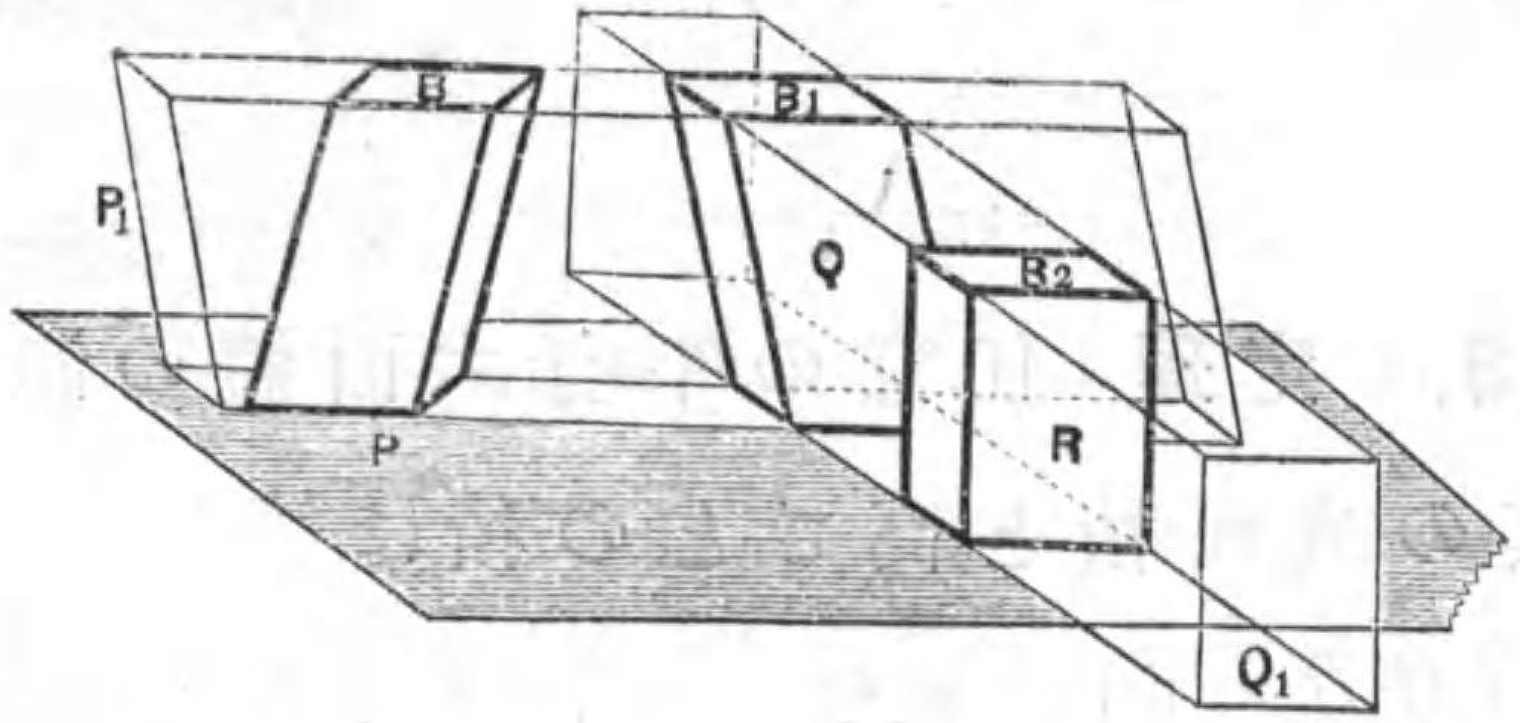
トスルトキハ




$P=Bh$

ナルコトヲ證セントス.

證　Pノ四ツノ平行スル稜ヲ左右ヘ引キ延バシ,長サニキマリナキ角壔$P_1$ヲ作リ,之ヨリ直角壔Qヲ截リ取ル.但ソノ高サハPノ側稜ニ等シク,側面ノ一ツハ$B_1$トス.




次ニQノ四ツノ平行セル稜ヲ前後ニ引キ延バシ,長サニキマリナキ角壔$Q_1$ヲ作リ,之ヨリ直角體Rヲ截リ取ル.但ソノ高サハQノ側稜[此ノ場合ニハ$P_1$ノ前後二面ノ間ニ夾マレタル稜ヲ云フ]ニ等シク,側面ノ一ツハ$B_2$トス.

然ルトキハ　$P=Q$,　[71 款]

同樣ニ　$Q=R$.

$\therefore\ P=R$,

然ルニ　$R=B_2h$,　[70 款注意]

而シテ　$B_2=B_1=B$,　[平. 144 款]



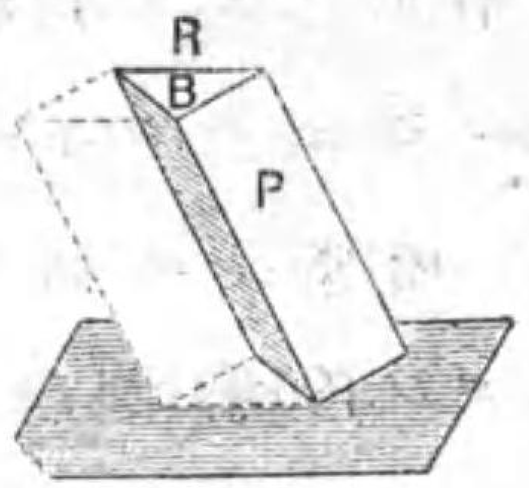
$\therefore\ P=Bh$.

## 74. 定理　三角壔の體積は,其の底面積と高さとの積に等し.

Pハ Bヲ底面トシ,hヲ高サトスル三角壔トスルトキハ,

$P=Bh$

ナルコトヲ證セントス.




證　三角壔ノ底面ナル三角形Bヨリ平行四邊形ヲ完成シ,Bノ2倍ヲ底面トスル平行六面體Rヲ作ルトキハ

$P=\frac{1}{2}R$,　[72 款]

然ルニ　$R=(2B)h=2Bh$,　[73 款]

$\therefore\ P=Bh$.

## 75. 系　任意ノ角壔及ビ圓壔ノ體積ハ,其ノ底面積ト高サトノ積ニ等シ.

圓壔ノ底面ノ半徑ヲrトスレバ,$B=\pi r^2$ナルヲ以テ,其ノ體積ハ$\pi r^2h$トナル.

## 例　　題

*28.　相等シキ面積ノ底面ヲ有ツ二ツノ角壔[圓壔]ノ體積ノ比ハ,其ノ高サノ比ニ等シク,相等シキ高サヲ有ツ二ツノ角壔[圓壔]ノ體積ノ比ハ,其ノ底面ノ比ニ等シキコトヲ證セヨ.

*29.　相等シキ高サト,相等シキ面積ノ底面トヲ有ツ二ツノ角壔[圓壔]ノ體積ハ相等シ.

---

**76.　定理**　相等しき高さと,相等しき面積の底面とを有つ二つの三角錐の體積は相等し,卽ち等積なり.

S-ABC, S′-A′B′C′ ハ相等シキ高サト,相等シキ面積ノ底面トヲ有ツ二ツノ三角錐

トスルトキハ

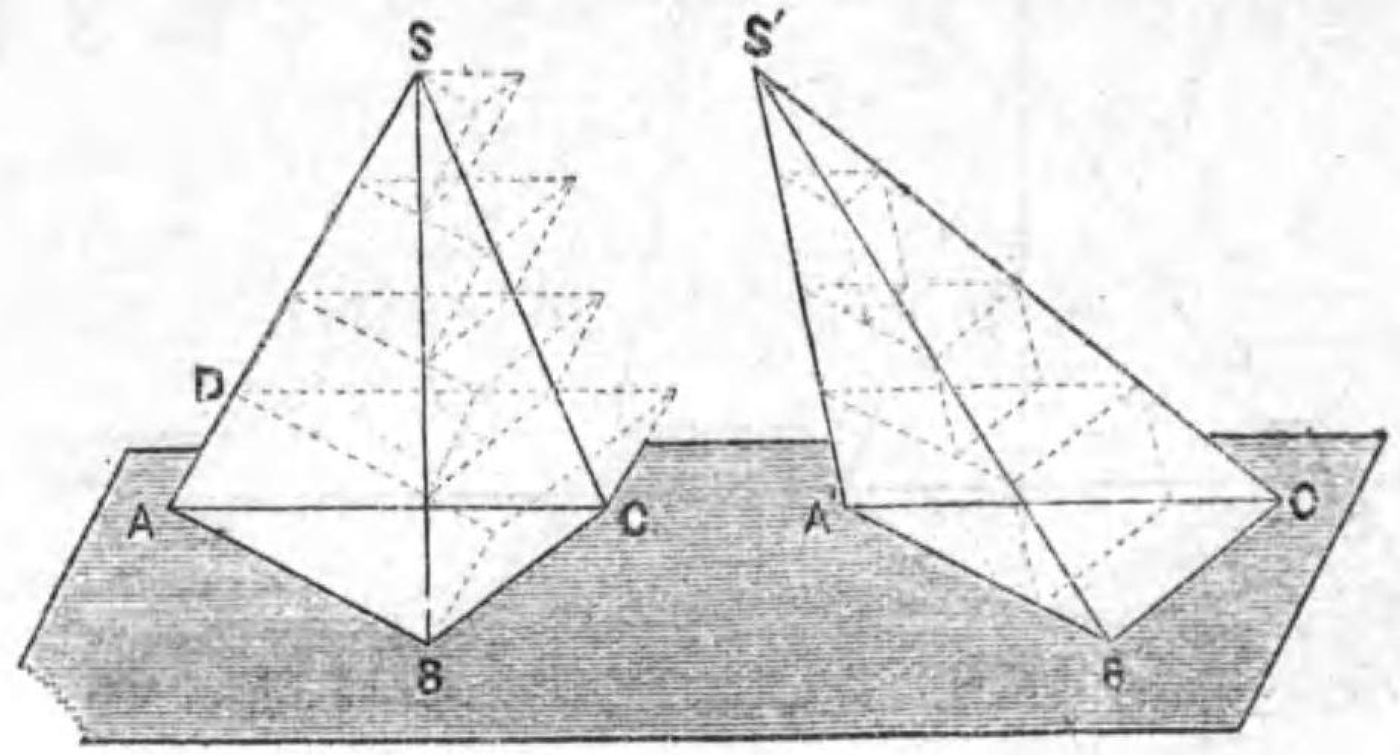
$$S\text{-}ABC = S'\text{-}A'B'C'$$

ナルコトヲ證セントス.

**證**　若シ二ツノ三角錐ノ體積ガ,相等シカラザルトキハ,其ノ一ハ他ノ一ヨリ大ナル可シ.

然ラバ S-ABC ヲ S′-A′B′C′ ヨリ大ナリトセヨ.






サテ　相等シキ高サヲ各$n$等分シ[圖ニ於テハ假リニ四等分セリ],各分點ヲ過リテ底面ニ平行スル平面ヲ作ルトキハ,

二ツノ三角錐ノ對應セル截口ハ等積ナリ.　[58頁12題]

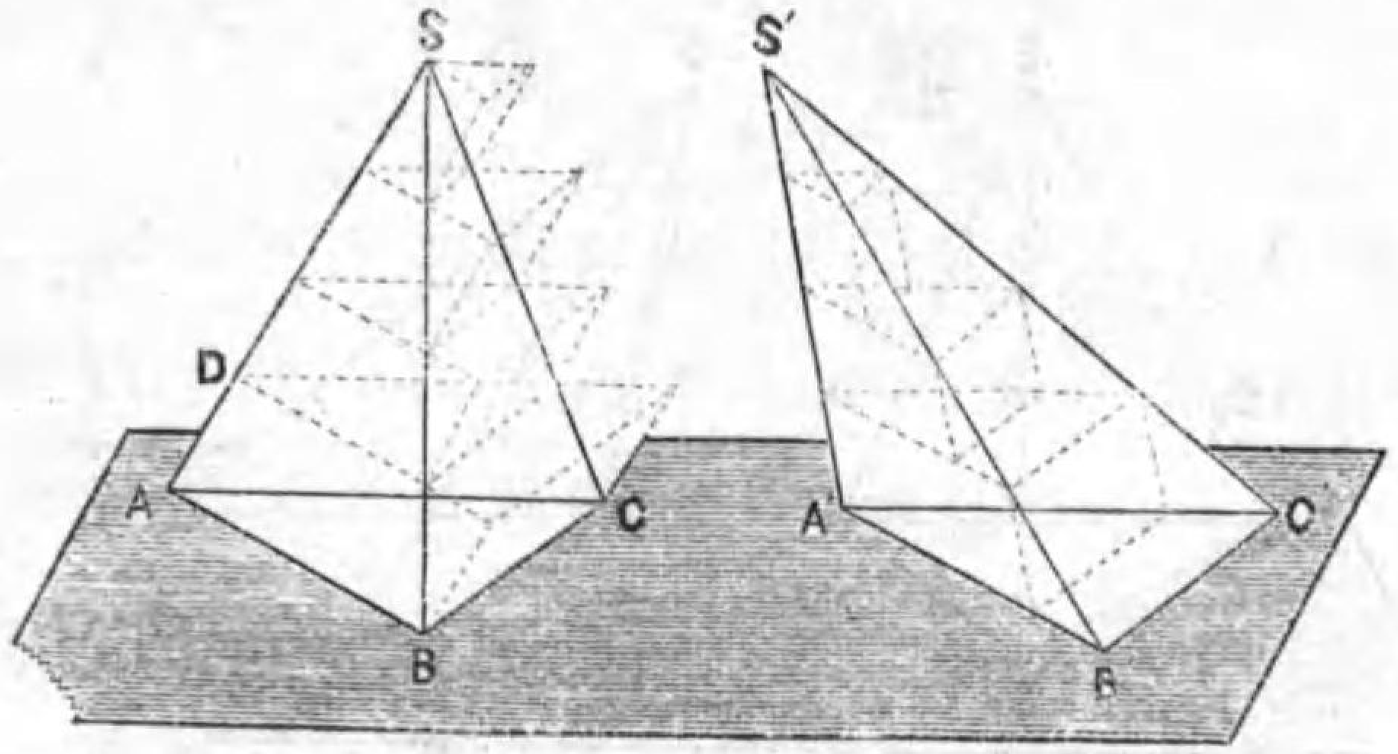
S-ABC ノ底面及ビ各ノ截口ヲ下ノ底面トシテ角壔ヲ作リ,其ノ側稜ハ何レモ AD ニ等シク,且平行ナラシム.　但 AD ハ側稜 AS ノ $n$ 等分ノ一ナリ.

同様ニ　S′-A′B′C′ ノ各ノ截口ヲ上ノ底面トシテ角壔ヲ作レ.

然ルトキハ　第一群ノ角壔ノ和ハ S-ABC ヨリ大ニシテ,第二群ノ角壔ノ和ハ S′-A′B′C′ ヨリ小ナリ.

故ニ　S-ABC 及ビ S′-A′B′C′ ノ差ハ,第一群ノ角壔ノ和ト,第二群ノ角壔ノ和トノ差ヨリ小ナリ.

然ルニ　S′-A′B′C′ ニ於ケル各角壔ハ,ソレゾレ S-ABC




ニ於テ,最下ノ角壔ヲ除キテ他ノ各角壔ニ等シ.

故ニ　角壔ノ第一群ノ和ト,第二群ノ和トノ差ハ,第一群ノ最下ノ角壔 D-ABC ナリ.

然ルニ　此ノ角壔ハ,$n$ヲ限リナク增ストキハ,如何ナル小サキ體積ヨリモ小ナラシメ得可シ.

故ニ　二ツノ三角錐ノ體積ハ,如何ニ小サクトモ,若干ノ體積ヲ以テ差フコト能ハズ.

故ニ　二ツノ角錐ハ等積ナリ.

## 例　題

30. 上ノ定理ニ於テ,一ツガ四角錐ナルトキハ如何.

---

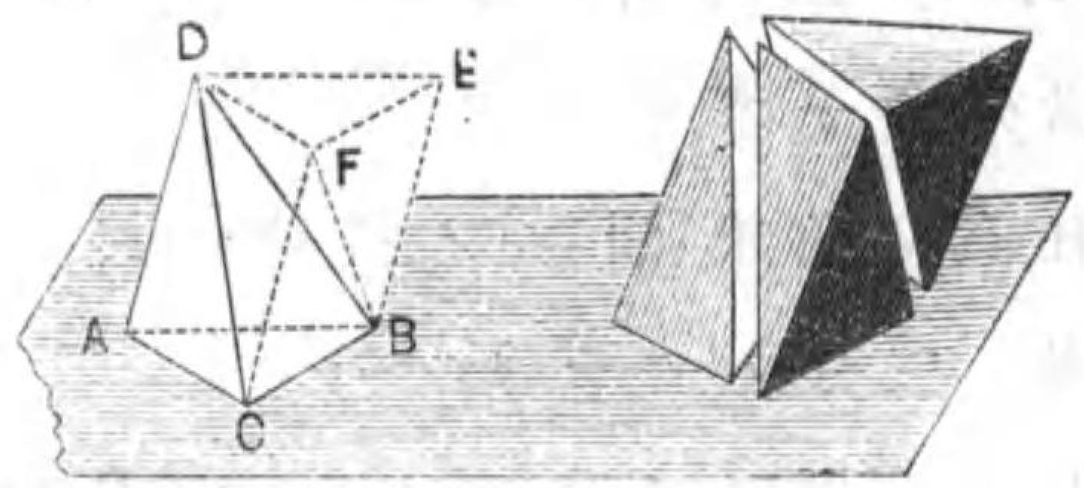
**77. 定理**　三角錐の體積は,同じ底面



と,同じ高さとを有つ三角壔の體積の三分の一なり.

D-ABC ハ ABC [$=B$] ヲ底面トシ, $h$ ヲ高サトスル三角錐

トスルトキハ,




$$\text{D-ABC}=\frac{1}{3}Bh$$

ナルコトヲ證セントス.

**證**　$B$ ヲ底面トシ, $h$ ヲ高サトスル所ノ三角壔 ABC-DEF ヲ完成セヨ.

然ルトキハ　三角壔 ABC-DEF ハ三ツノ三角錐 D-ABC, D-BCF, B-DEF ヨリ成ル.

而シテ　D-ABC 及ビ D-BCF ハ,ソレゾレ △ADC, △FCD ヲ底面トシ, B ヲ共通ノ頂點トスル三角錐ト見ルコトヲ得,且 △ADC=△FCD ナルヲ以テ等積ナリ.

[76 款]

同樣ニ　D-BCF 及ビ B-DEF ハ,ソレゾレ △BCF, △BEF

ヲ底面トシ,Dヲ共通ノ頂點トスル三角錐ト見ルコトヲ得,且△BCF=△BEFナルヲ以テ等積ナリ.

故ニ　此ノ三ツノ三角錐ハ等積ニシテ,何レモ三角壔ABC-DEFノ三分ノ一ナリ.

$$\therefore\ D\text{-}ABC=\frac{1}{3}Bh.$$

**78.** **系1.** 三角錐ノ體積ハ,其ノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ナリ.

**系2.** 任意ノ角錐[圓錐]ノ體積ハ,其ノ底面積ト高サトノ積ノ三分ノ一ナリ.

圓錐ノ底面ノ半徑ヲ$r$トスレバ,$B=\pi r^2$ナルヲ以テ,其ノ體積ハ$\frac{1}{3}\pi r^2 h$トナル.

## 例　　題

*31. 相等シキ面積ノ底面ヲ有ツ二ツノ角錐[圓錐]ノ體積ノ比ハ,其ノ高サノ比ニ等シク,又相等シキ高サヲ有ツ二ツノ角錐[圓錐]ノ比ハ,其ノ底面ノ比ニ等シキコトヲ證セヨ.

*32. 相等シキ高サト,相等シキ面積ノ底面トヲモツ二ツノ角錐[圓錐]ハ等積ナリ.

33. 三角錐ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ガ,



其ノ對稜ヲ分ツ二ツノ部分ノ比ハ,其ノ二面角ノ二ツノ面ノ面積ノ比ニ等シ.

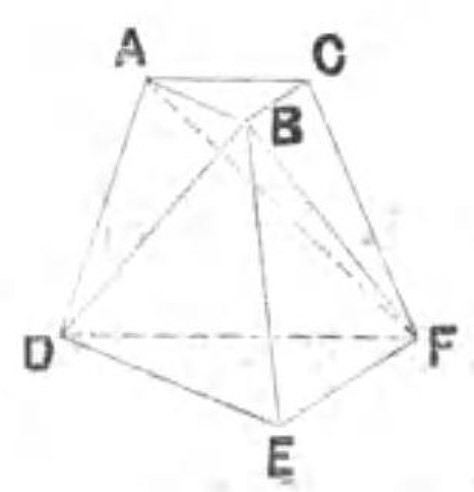
34. 角錐[圓錐]ヲ,底面ニ平行セル二ツノ平面ニテ截ルトキ,其ノ截口ノ面積ノ比ハ,頂點ヨリソレ等ノ平面マデノ距離ノ平方ノ比ニ等シ.

35. 角錐ノ高サヲ,底面ニ平行セル平面ニテ五ツニ等分スルトキ,生ズル所ノ角臺,及ビ全キ角錐ノ體積ノ連比如何.

---

**79.** **定理**　三角臺の體積は,其の上底面,下底面,及び上下兩底面の比例中項を底面とし,元の三角臺の高さを共通の高さとする三つの角錐の體積の和に等し.

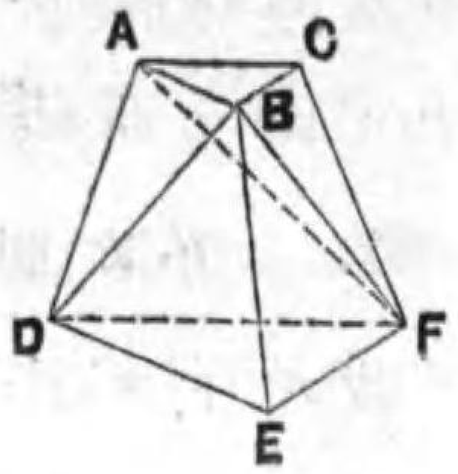
ABC-DEFヲ三角臺トシ,其ノ上下兩底面ノ面積ヲ,ソレゾレ$B$, $B'$, 高サヲ$h$トスルトキハ,




$$體積=\frac{1}{3}h\{B+\sqrt{BB'}+B'\}$$

ナルコトヲ證セントス.

證　三角臺ヲ二ツノ平面 BDF, ABF ニテ截ルトキハ,三ツノ三角錐 B-DEF, F-ABC, B-ADF ヲ得.




而シテ　　三角錐 B-DEF$=\frac{1}{3}B'h$,

[77 款]

及ビ　　三角錐 F-ABC$=\frac{1}{3}Bh$.

然ラバ　三角臺ノ體積ヲ得ンニハ,三角錐 B-ADF ノ體積ヲ求ムレバヨシ.

サテ　$$\frac{\text{三角錐 B-ADF}}{\text{三角錐 B-ACF}}=\frac{\text{底面 ADF}}{\text{底面 ACF}},$$ [78 頁 31 題]

即チ　$$\frac{\text{三角錐 B-ADF}}{\text{三角錐 F-ABC}}=\frac{\text{DF}}{\text{AC}}$$ [平. 211 款系 2]

$$=\frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{B}}.$$ [平. 215 款]

故ニ　$$\text{三角錐 B-ADF}=\frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{B}}\times\text{三角錐 F-ABC}$$

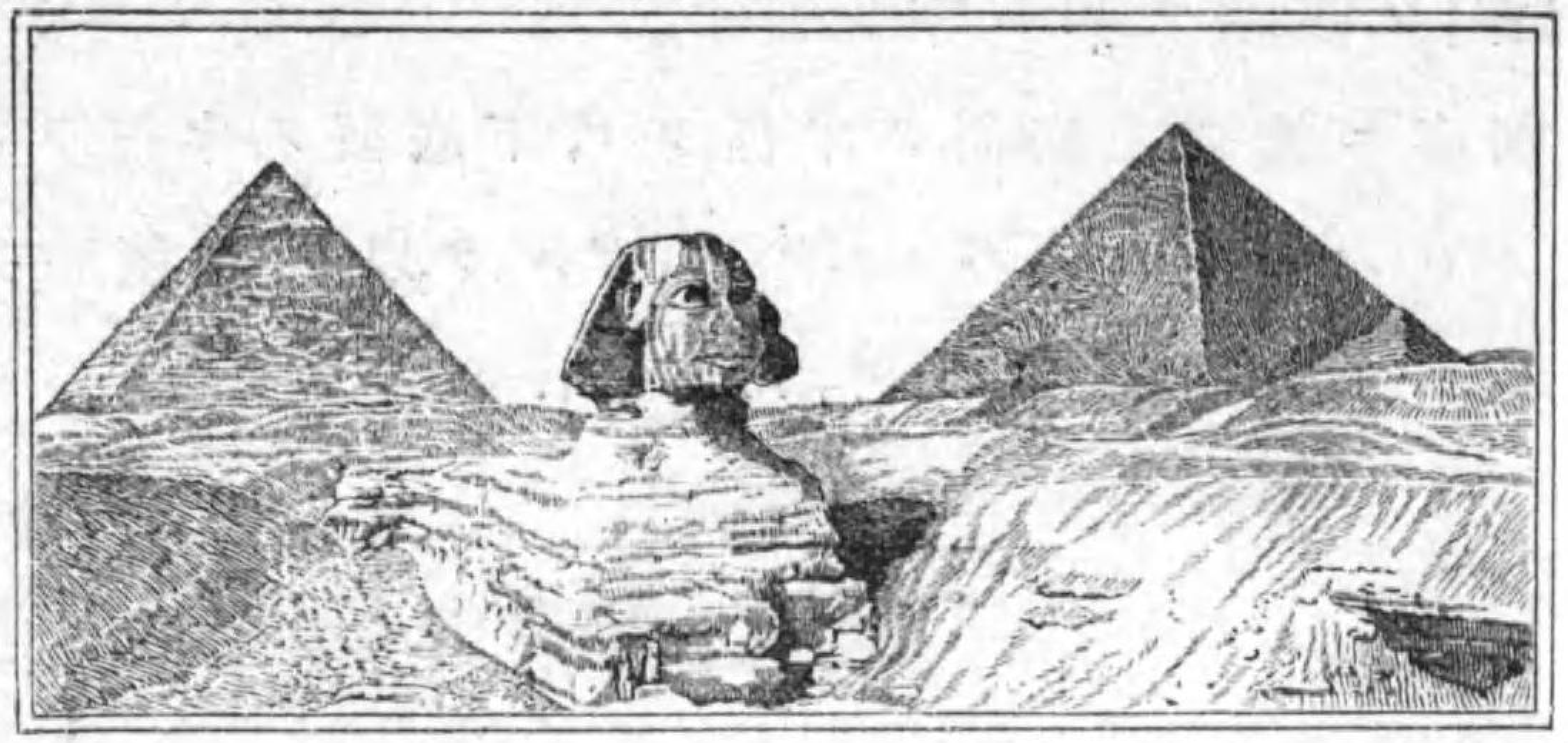
$$=\frac{\sqrt{B'}}{\sqrt{B}}\times\frac{1}{3}Bh$$

$$=\frac{1}{3}h\sqrt{BB'}.$$

故ニ　$$\text{三角臺ノ體積}=\frac{1}{3}h\{B+\sqrt{BB'}+B'\}.$$

**80.** **系**　任意ノ角臺[圓臺]ノ體積ハ,其ノ上底面,下底面,及ビ上下兩底面ノ比例中項ヲ底面トシ,元ノ角臺[圓臺]ノ高サヲ,共通ノ高サトスル三ツノ角錐[圓錐]ノ體積ノ和ニ等シ.

圓臺ニ於テ,上底面ノ半徑ヲ $r$, 下底面ノ半徑ヲ $r'$ トスレバ $B=\pi r^2$, $B'=\pi r'^2$ トナルヲ以テ,體積ハ次ノ如シ.　$$\frac{1}{3}\pi h\{r^2+rr'+r'^2\}.$$



# 雜　題

1. きぃをぷす*ノ築キシぎぜー[Gizeh]ノぴらみっど[四角錐]ハ,高サ $480\frac{3}{4}$ 呎,底面ハ正方形ニシテ,其ノ一邊ハ764呎ナリト云フ,然ラバ體積如何.

2. 直角體ノ三ツノ稜ガ1寸,4寸,及ビ8寸ナルトキ,其ノ對角線ノ長サ如何.

3. 角壔ヲ,其ノ側稜ニ平行セル平面ニテ截ルトキハ,其ノ截口ハ平行四邊形ナルコトヲ證セヨ.

4. 直角體ノ不等ナル三ツノ面ノ對角線ヲ知リテ,各ノ稜ノ長サヲ計算スル法如何.

5. 底面ハ正 $n$ 角形ニシテ,側面ハ皆正三角形ナル角錐アリ,其ノ $n$ ノ値如何.

* きぃをぷす [Cheops] ハ埃及國第四朝ノ王ニシテ,大約西暦紀元前2800年乃至2700年代ノ人ナリ.



6. 四面體ヲ,其ノ相對スル二ツノ稜ニ平行スル平面ニテ截ルトキ,其ノ截口ハ如何ナル形ヲナスカ.又コノ截口ガ最大ナル位置ヲ問フ.

7. 既知ノ角錐ヲ,其ノ底面ニ平行セル平面ニテ截リ,其ノ截口ヲ底面ノ半分ニ等シカラシメヨ.

8. 二ツノ相似多面體ハ,互ニ相似ニシテ,且相似ノ位置ニアル同數ノ四面體ニ分タル可シ.

二ツノ多面體ニ於テ,

(1) 相似ノ位置ニアル面ガ相似形ニシテ,

(2) 相似ノ位置ニアル二面角ガ,ソレゾレ相等シキトキハ,

(3) 相似ノ位置ニアル立體角ハ,ソレゾレ相等シ.

斯ノ如キ二ツノ多面體ヲ互ニ**相似**ナリト云フ.

9. 一ノ三面角ガ相等シキ二ツノ四面體ノ體積ノ比ハ,此ノ三面角ノ頂點ニテ出會フ三ツノ稜ノ連乘積ノ比ニ等シ.　從ヒテ又

二ツノ相似四面體[相似多面體]ノ體積ノ比ハ,其ノ相當セル稜ノ立方ノ比ニ等シ.

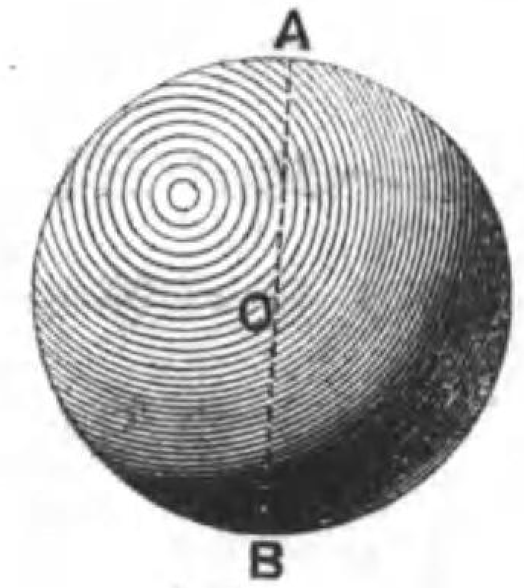
# 第三編　球

## 第一節

## 球及び球面三角形

**81.** **定義**　球とは,**球面**と稱する曲面にて圍繞せらるる立體にして,形内の一定點より球面まで引ける直線は,皆相等しき如きものを云ふ.

此ノ定點[O]ヲ球ノ**中心**,中心ヨリ球面マデ引ケル直線[OA]ヲ**半徑**ト云ヒ,中心ヲ過リ球面ニ夾マルル直線[AB]ヲ**徑**ト云フ.




球ハ又半圓ガ其ノ徑ヲ軸トシ廻轉シテ生ズル立體ナリト云フコトヲ得可シ.



## 例題

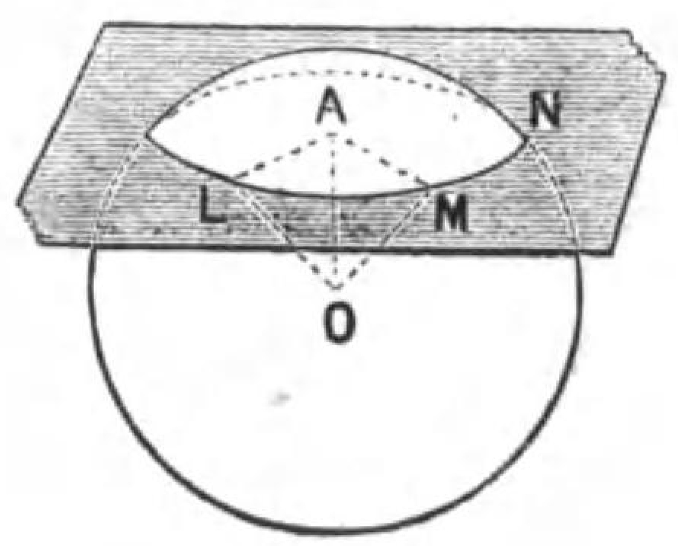
*1. 球ノ中心ト一ツノ點トノ距離ハ,其ノ點ガ球ノ内ニアルカ,或ハ球面上ニアルカ,又ハ球ノ外ニアルカニ從ヒテ,半徑ヨリ小ナルカ,或ハ半徑ニ等シク,又ハ半徑ヨリ大ナリ. 而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

**82.** **定理**　球を平面にて截るとき,其の截口は圓なり.

LMN ハ O ヲ中心トスル球ノ,平面ニテノ截口トスルトキハ,

LMN ハ圓

ナルコトヲ證セントス.




**證**　O ヨリ截口ノ平面ニ垂線 OA ヲ引キ,

截口ノ周上ノ任意ノ二點ニ直線 OL, OM ヲ引ケ.

然ルトキハ　　OL=OM,　　[81 款]

故ニ　　AL=AM.　　[11 款系 1]

然ルニ　L 及ビ M ハ截口ノ周上ノ任意ノ二點ナルヲ以テ　　LMN ハ A ヲ中心トスル圓ナリ.

**83. 定義** **球の平面にての截口を球の圓と稱す.**

若シ平面ガ球ノ中心ヲ過ルトキハ**大圓**,然ラザルトキハ**小圓**ト云フ.

球ノ圓ノ平面ニ垂直ナル球ノ徑ヲ,其ノ圓ノ軸ト稱シ,其ノ兩端ヲ圓ノ**極**ト稱ス.

**84. 系 1.** 球ノ圓ノ平面ニ垂直ナル球ノ徑ハ,其ノ中心ヲ過ル. 故ニ

球ノ圓ノ軸ハ其ノ中心ヲ過リ,而シテ總テノ平行セル圓ハ,同ジ軸ト同ジ極トヲ有ス.

**系 2.** 球ノ總テノ大圓ハ相等シク,且何レモ球,及ビ球面ヲ二等分ス.

**系 3.** 球面上ノ任意ノ二點ヲ過リテ,大圓ノ弧ヲ畫キ得ベシ.

## 例題

*2. 球ノ中心ヨリ等距離ニアル總テノ小圓ハ,相等シ,而シテ中心ヨリ不等ノ距離ニアル二ツノ小圓ニ就キテ,中心ニ近キモノハ,遠キモノヨリ大ナリ.



3. 球ノ任意ノ二ツノ大圓ハ,互ニ二等分セラルルコトヲ證セヨ.

*4. 球面上ノ任意ノ三點ヲ過リテ,小圓ノ弧ヲ畫キ得可シ.

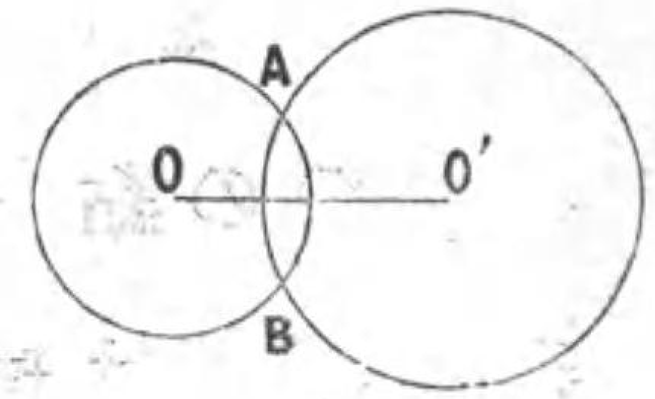
*5. 同ジ平面上ニアラザル四ツノ點ヲ過リテ,一ツノ球ヲ作ルコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル,其ノ證如何.

6. 任意ノ四面體ニ**外接***スル球ヲ作ルコトヲ得可シ.

---

**85. 定理** **球面と球面との交りは,圓なり.**

O, O′ヲA及ビBニ於テ交ル二ツノ圓ノ中心トシ,此ノ二ツノ圓ガOO′ヲ軸トシテ廻轉スルトキ,點Aニテ生ズル線



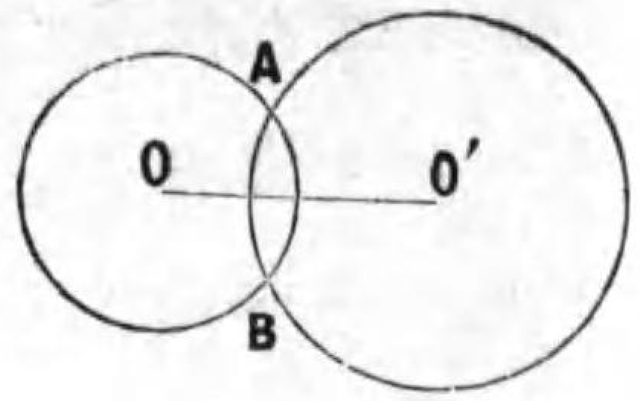

ハ

圓

ナルコトヲ證セントス.

* 平面幾何學ニ於ケル外接ノ意義ヲ擴張シテ用セタルナリ

**證** OO′ ハ二ツノ圓ノ共通弦 AB ノ垂直二等分線ナルヲ以テ,二ツノ圓ガ OO′ ヲ軸トシテ廻轉スル間モ,點 A ハ恒ニ OO′ ニ垂直ナル平面上ニ於テ,之ヨリ一定ノ距離ニアリ.




故ニ　點 A ハ圓ヲ生ズ,而シテコレ二ツノ圓 O, O′ ニテ生ズル二ツノ球ノ交リノ線ナリ.

**86.** **定義**　二つの球が,唯一點にて出會ふときは,之を**相切す**といふ.

一ノ球ガ全ク他ノ內ニアレバ,之ヲ**內切ス**ト云ヒ,二ツノ球ガ互ニ他ノ外ニアレバ,之ヲ**外切ス**ト云フ.

**87.** **定義**　一の線,或は面が,球面と唯一つの點を共通に有するときは,此の線,或は面は球に**切す**といふ.

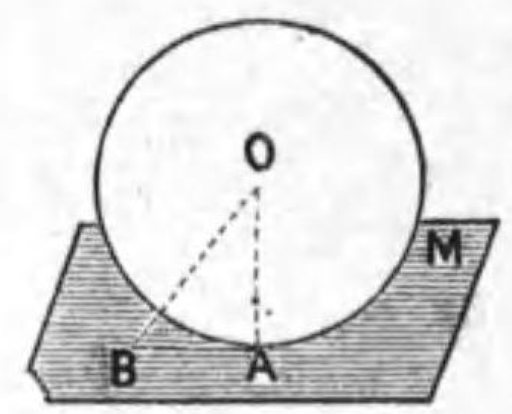
此ノ共通ノ點ヲ**切點**ト稱ス.

**88.** **定理**　球の半徑の端に於て,之に垂直なる平面は球に切す.　而して此



の逆も亦眞なり.

O ハ球ノ中心, M ハ半徑 OA ノ端 A ニ於テ,之ニ垂直ナル平面トスルトキハ,




M ハ球ニ切スルコト

ヲ證セントス.

**證**　O ヨリ平面 M ヘ任意ノ直線 OB ヲ引ケ.

然ルトキハ　　OB>OA,　　[7 款]

故ニ　　B ハ球ノ外ニアリ.

而シテ　　B ハ A ノ外ノ任意ノ點ナリ.

故ニ　　M ハ球ニ切ス.

本定理ノ逆ハ,學生ヲシテ自ラ之ヲ證セシメヨ.

**89.** **系 1.** 球ノ半徑ノ端ニ於テ,之ニ垂直ナル各直線ハ球ニ切ス.　而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

**系 2.** 球ノ圓ニ切スル直線ハ,切點ヲ過リテ球ニ切スル平面上ニアリ.

**系 3.** 球ニ切スル平面上ニ,切點ヲ過リテ引ケル任意ノ直線ハ,球ニ切ス.

**系 4.** 球ノ外ノ一點ヨリ,之ニ切スル總テノ直線ハ相等シク,且是等ノ直線ハ,圓ニ於テ球ニ切ス.

## 例題

*7. 任意ノ四面體ニ**內切***スル球ヲ作ルコトヲ得可シ.

8. 同一ノ點ニ於テ球ニ切スル任意ノ二直線ハ其ノ點ニ於テ球ニ切スル平面ヲ定ム.

---

**90. 定義** 球面上の二つの點の間の距離とは,之を結び付くる大圓の二つの弧の中,短きものを云ふ.

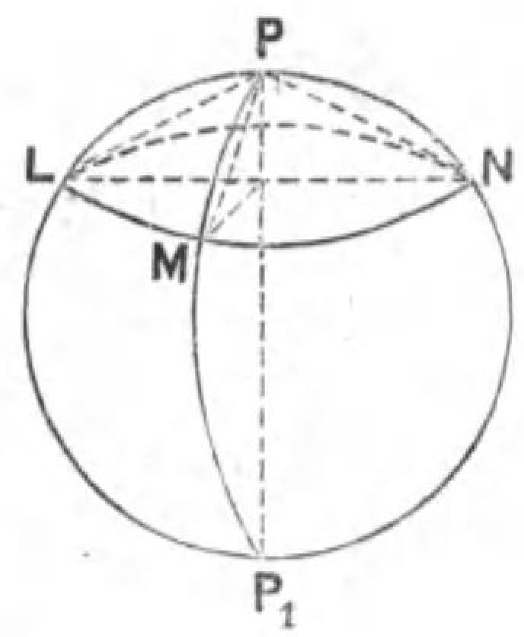
**91. 定理** 球の圓の周上に於ける總ての點は,其の極[何れにても]より等距離にあり.

P及ビ$P_1$ヲ球ノ圓LMNノ極トスルトキハ,

弧PL=弧PM=弧PN

及ビ 弧$P_1$L=弧$P_1$M=弧$P_1$N

ナルコトヲ證セントス.




* 平面幾何學ニ於ケル內切ノ意義ヲ擴張シテ用ヒタルナリ.



證 $PP_1$ハ圓LMNノ平面ニ垂直ナルヲ以テ, [83 款]

$PP_1$ハ圓LMNノ中心ヲ過ル, [84 款系 1]

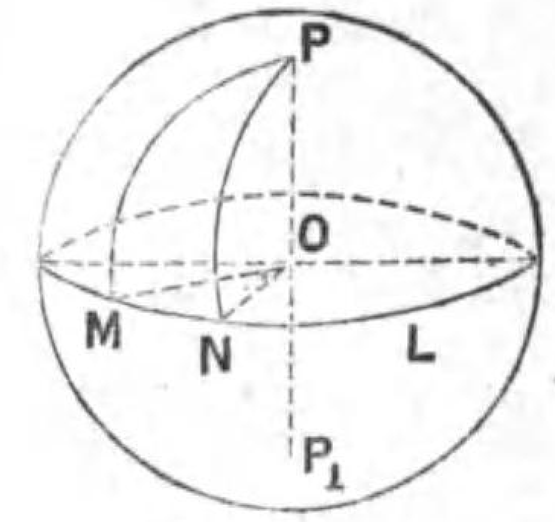
故ニ 弦PL=弦PM=弦PN. [10 款]

故ニ 弧PL=弧PM=弧PN.

同樣ニ 弧$P_1$L=弧$P_1$M=弧$P_1$N.

**92. 定義** 球の圓の**極距離**とは,近き極より,此の圓周までの距離を云ふ.

**93. 系** 球ノ大圓ノ極距離ハ象限弧ナリ. 從ヒテ一ノ徑ノ兩端ニアラザル二ツノ點ヨリ象限弧ノ距離ニアル點ハ,其ノ二ツノ點ヲ過ル大圓ノ極ナリ.

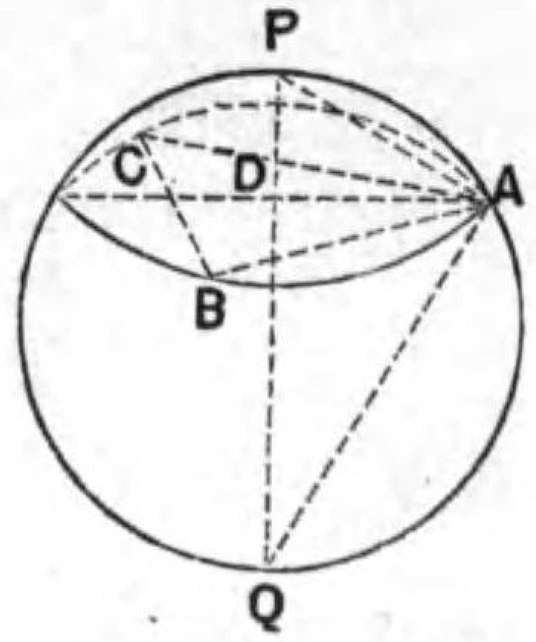



例ヘバ二點M, Nヨリ象限弧ノ距離ニアル點Pハ,大圓MNLノ極ナルガ如シ.

**注意** 極ノ性質ハ球面上ニ圓ヲ畫クコトヲ,恰モ平面上ニ圓ヲ畫クト同一ナラシムルモノトス.

こむぱすノ一脚尖ヲ極ニ當ツレバ,他ノ一脚尖ハ所要ノ圓ヲ畫ク可シ,但球面ノ凸出セルモノヲ越エテ圓ヲ畫クニハ,器械學家ノ用フルかりぱー規ヲ用フルヲ可ナリトス.

**94. 作圖題** 既知の球の徑の長さを求むること.




P ヲ既知ノ球面上ノ任意ノ點トシ,P ヲ過ル未知ノ徑ノ他ノ端ヲ Q トス.

**解析法** P ヲ極トシ,かりばノ規ヲ以テ小圓 ABC ヲ畫キ,三ツノ弦 AB, BC, CA ヲ三邊トシテ,一ノ平面上ニ △ABC ヲ作リ,之ニ外接スル圓ヲ畫ク.

然ルトキハ此ノ圓ハ小圓 ABC ニ等シカルベシ.

依リテ其ノ半徑 AD ヲ知ル.

而シテ相似直角三角形 ADP, QAP ニ於テ, AD 及ビ AP ヲ知ルヲ以テ,是等ノ三角形ヲ作リ得可ク,是ヨリ球ノ徑 PQ ヲ得可シ.

## 例　　題

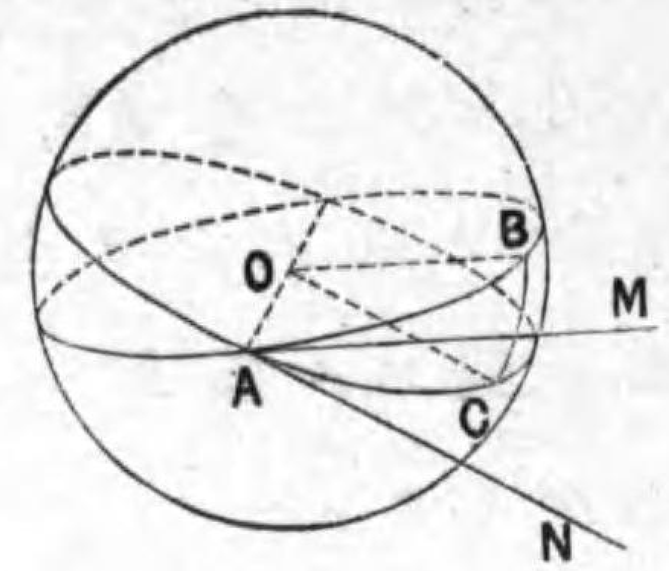
9. 球面上ノ既知ノ二點ヲ過リテ,大圓ノ弧ヲ畫ケ.

---

**95. 定義** **球面角**とは,二つの大圓の共通の徑の一端に於ける切線の間の



角を云ふ.




是等ノ切線 AM, AN ハ二ツノ大圓ノ共通ノ徑ニ垂直ナルヲ以テ,二ツノ大圓ノ面ノ間ノ二面角ノ平面角ナル可シ.

又 A ヲ極トスル大圓ノ二ツノ大圓弧ノ間ニ夾マルル弧ヲ BC トシ; B 及ビ C ヲ過ル半徑 OB, OC ヲ引ケバ; OB, OC ハソレゾレ AM, AN ニ平行ナルユヱ,弧 BC ノ中心ニ於ケル角ハ,二ツノ大圓ノ球面角ニ等シ. 故ニ球面角 BAC ハ此ノ弧 BC ニテ測度セラル.

**96. 定義** **球面多角形**とは,三つ以上の大圓の弧にて圍まれたる球面の一部を云ふ.

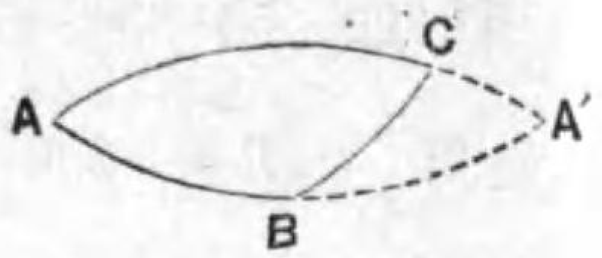
球面多角形ヲ界スル弧ハ,球面多角形ノ**邊**,邊ト邊トノ間ノ球面角ハ,球面多角形ノ**角**,隣接セル二邊ノ交點ハ,球面多角形ノ**頂點**ナリ.

三邊ヨリ成ル多角形ハ,卽チ**球面三角形**ナリ.

通例球面多角形ト云ヘバ,其ノ邊ハ劣弧ナリ.

故ニ 球面三角形ノ角ハ,皆劣角ナリ.

如何トナレバ　球面三角形ABCニ於テ邊AB, ACハ劣弧ナルヲ以テ,之ヲ引キ延バシ,Aニ對スル極A′ニ於テ出會ハシメヨ.




然ルトキハ　$\widehat{ABC}+\widehat{A'BC}=2\hat{R}$,

故ニ　$\widehat{ABC}$ハ劣角ナリ.

同様ニ　他ノ二角モ亦劣角ナリ.

**97.** 二ツノ球面三角形ニ於テ,其ノ各ノ邊ガ,ソレゾレ**同ジ順**ニ相等シキトキハ,二ツノ三角形ハ相重ネテ合同セシメ得ルユヱ, [47頁4題ヲ參考セヨ]

此の二つの球面三角形は相等し.

**98.** 二ツノ球面三角形ニ於テ,其ノ各ノ邊ガ,ソレゾレ**逆ノ順**ニ相等シキトキハ,二ツノ三角形ハ相重ネテ合同セシムルコト能ハズ.

斯の如き二つの球面三角形を,互に**對稱**なりといふ.

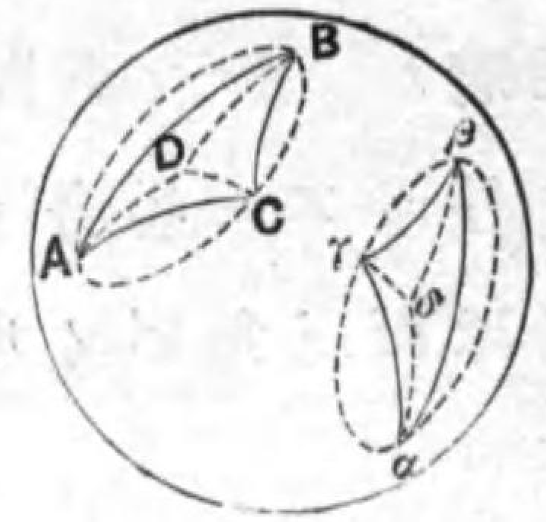
對稱球面三角形ガ二等邊トナルトキハ,相重ネテ合同セシメ得ベク,而シテ此ノ兩形ハ相等シ.

球ノ中心ニ於ケル對頂多面角ニ對應スル球面多角形ハ,互ニ對稱ナルコト明カナリ. [49款ヲ參考セヨ]



**99. 定理**　二つの對稱球面三角形は等積なり.

ABC及ビ$\alpha\beta\gamma$ヲ二ツノ對稱球面三角形トシ,D及ビ$\delta$ヲ,ソレゾレ小圓ABC, $\alpha\beta\gamma$ノ極トスルトキハ,




$$\text{球面}\triangle ABC=\text{球面}\triangle\alpha\beta\gamma$$

ナルコトヲ證セントス.

**證**　各球面三角形ノ極D及ビ$\delta$ヲ,大圓ノ弧ニテ三角形ノ各角頂ニ結ビ付ケヨ.

然ラバ　二ツノ球面三角形ノ弧[邊]ハ,ソレゾレ相等シキユヱ,是等ノ弧ノ弦モ亦ソレゾレ相等シク,

即チ　平面三角形ABC, $\alpha\beta\gamma$ハ三邊ガ,ソレゾレ相等シキユヱ,全ク相等シク.

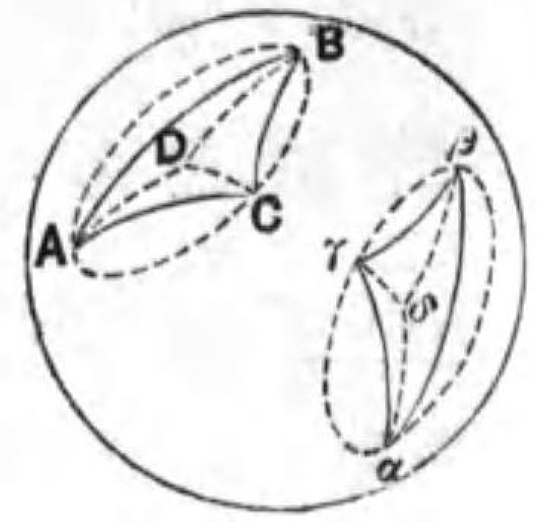
從ヒテ　其ノ外接圓モ亦相等シ.

故ニ　弦AD, BD, CDハ,ソレゾレ弦$\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ニ等シク,從ヒテ　弧AD, BD, CDハ,ソレゾレ弧$\alpha\delta$, $\beta\delta$, $\gamma\delta$ニ等シ.　而シテ此ノ六ツノ弧ハ皆相等シ.

故ニ　球面三角形ADB, BDC, CDAハ,ソレゾレ球面

三角形 $\alpha\delta\beta$, $\beta\delta\gamma$, $\gamma\delta\alpha$ ニ等シ.

[98 款ヲ參考セヨ]




故ニ　球面△ABC＝球面△$\alpha\beta\gamma$.

**注意1.** 若シ小圓ノ極ガ,三角形ノ外ニアル場合ニハ,三ツノ二等邊球面三角形ノ中,二ツノ和ヨリ一ツヲ引キ去レバ可ナリ.

**注意2.** 球面多角形ノ各角ハ,其ノ各邊ノ平面ノ間ノ二面角ニテ測度セラル.

**注意3.** 球面多角形ノ邊及ビ角ハ,ソレゾレ球ノ中心ニ於テ,之ニ對應セル多面角ノ面角,及ビ二面角ニテ測度セラルルヲ以テ,

多面角ノ性質ヨリ,球面多角形ノ類似ノ性質ヲ知リ得可シ.

## 例　　題

*10. 球面三角形ノ各邊ハ,他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ.

11. 球面多角形ノ任意ノ一邊ハ,他ノ各邊ノ和ヨリ小ナリ.

12. 球面多角形ノ各邊ノ和ハ,一ツノ大圓周ヨリ小ナリ.



**100. 定義** 一の球面三角形の各邊の二つの極の中にて,其の邊に對する頂點と同じ傍にあるものを頂點とする三角形を,前の三角形の**極三角形**といふ.

## 例　　題

*13. 一ノ球面三角形ガ他ノ球面三角形ノ極三角形ナルトキハ,後ノ三角形ハ又前ノ三角形ノ極三角形ナリ.

*14. 二ツノ球面三角形ガ互ニ他ノ極三角形ナルトキ,其ノ一ノ各角ハ他ノ一ノ之ニ對スル邊[邊ニ對スル中心角]ト互ニ補角ヲナス.

*15. 球面三角形ノ各角ノ和ハ,二直角ヨリ大ニシテ,六直角ヨリ小ナリ.

*16. 球面三角形ノ二邊ガ相等シケレバ,之ニ對スル角モ亦相等シ.

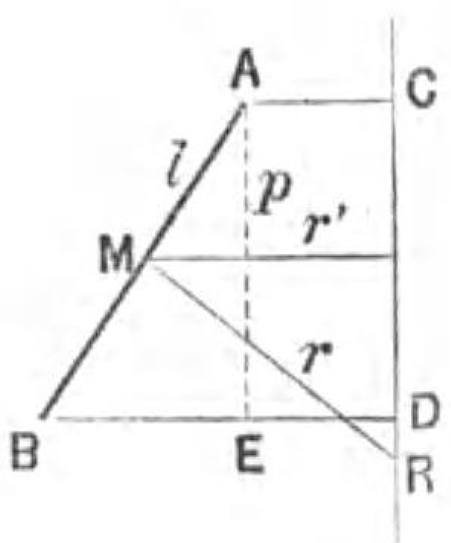
*17. 前題ノ逆ヲ證セヨ.

## 第二節

## 面積 及び 體積

**101. 定理** 一直線が,其の平面上の一直線を軸とし廻轉して生ずる曲面の面積は,此の直線の中點に作れる垂線が,此の直線,及び軸の間に夾まるる部分を半徑とする圓周と,此の直線の軸に於ける射影との積に等し.

曲面ヲ生ズル直線 AB ノ長サヲ $l$, 軸上ノ其ノ射影ヲ CD$=p$, AB ノ中點 M ノ畫ク圓周ノ半徑ヲ $r'$, AB ノ中點 M ニ於ケル垂線 MR ノ長サヲ $r$




トスルトキハ,

AB ニテ生ズル面積$=p.2\pi r$

ナルコトヲ證セントス.



**證** CD ニ平行ニ AE ヲ引キ, BD ト E ニ於テ交ラシム.

サテ　AB ニテ生ズル面積$=l.2\pi r'$,　[62 款系 2]

相似三角形ニ依リ, $\dfrac{r'}{p}=\dfrac{r}{l}$,

$$\therefore\ pr=r'l.$$

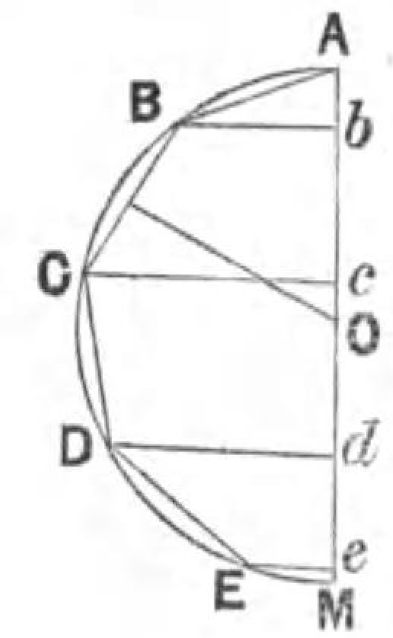
依リテ　AB ニテ生ズル面積$=p.2\pi r$.

**102. 定義** 球帶とは,二つの平行平面の間に夾まるる球面の一部をいふ.

此ノ二ツノ平面ノ距離ヲ球帶ノ**高サ**ト云フ.

**103. 定理** 球帶の面積は,其の高さと,大圓周との積に等し.

ABCDEM ハ廻轉シテ球ヲ生ズル半圓, 其ノ半徑ヲ $r$ トシ; AB, BC, CD, ......... ハ半圓周ヲ若干等分シタル弦; B$b$, C$c$, D$d$, ...... ハ徑 AM ヘノ垂線 $bc=h$




ナリトセバ

弧 BC ニテ生ズル球帶ノ面積$=2\pi rh$

ナルコトヲ證セントス.

**證** [101 款ノ定理ヨリ證セシメヨ].

**104.** **系** 球ノ面積ハ $4\pi r^2$ ニ等シ.

如何トナレバ,半圓 ABCDEM ガ廻轉シテ生ジタル球ノ面積ハ,其ノ半圓ノ弧 AB, BC, CD, ……ガ廻轉シテ生ジタル球帶ノ面積ノ和ニ等シク,而シテ是等ハソレゾレ　$2\pi r.Ab$, $2\pi r.bc$, $2\pi r.cd$, ……

ニ等シキユヱ,其ノ和ハ,

$$2\pi r(Ab+bc+cd+\ldots\ldots)=2\pi r.2r,$$

卽チ $4\pi r^2$ ニ等シケレバナリ.

## 例　題

18. 相等シキ球ニ於ケル二ツノ球帶ノ面積ノ比ハ,其ノ高サノ比ニ等シ.

19. 球ノ面積ガ 9856 平方寸ナルトキ,其ノ半徑ノ長サ如何.

---

**105.** **定義** **月形とは,二つの大圓の半周を以て圍みたる球面の一部をいふ.**

月形ノ兩端ニ於ケル角ハ相等シ. 其ノ角ヲ月形ノ角ト云フ.



## 例　題

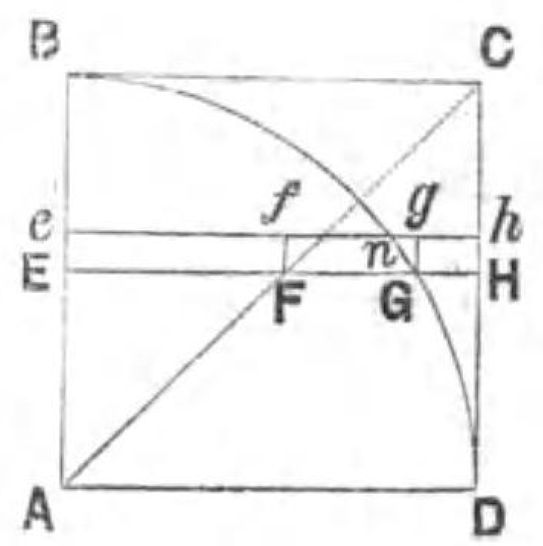
*20. 同ジ球,或ハ相等シキ球ニ於テ,二ツノ月形ノ角ガ相等シキトキハ,其ノ二ツノ月形ハ相等シ.

*21. 月形ト全球面トノ比ハ,其ノ月形ノ角ト四直角トノ比ニ等シ.

22. 球ノ面積ガ 6 平方寸ナルトキ,37°.5 ノ角ヲ有ツ月形ノ面積如何.

---

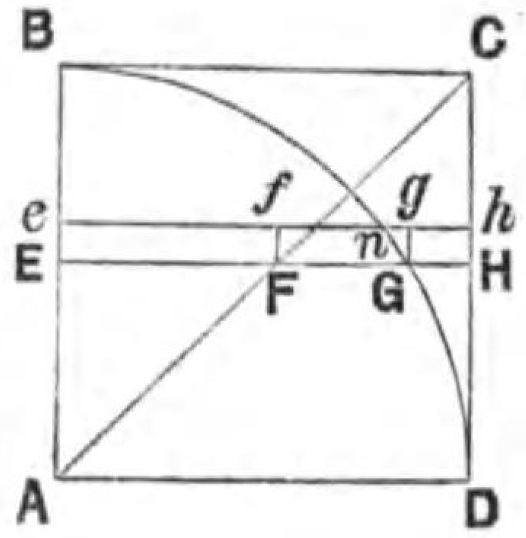
**106.** **定理** **球の體積は,之に外切する圓壔の體積の三分の二に等し.**




ABD ハ A ヲ中心トスル圓ノ象限; BC, DC ハ B 及ビ D ニ於ケル切線トス. 然ルトキハ此ノ圖形ガ AB ヲ軸トシテ廻轉スレバ,象限 ABD ハ半球ヲ生ジ,正方形 ABCD ハ此ノ半球ニ外切スル圓壔ヲ生ズベシ.

今此ノ ABD ニテ生ゼル半球ノ體積ガ,之ニ外切スル圓壔,卽チ正方形 ABCD ニテ生ゼル圓壔ノ體積ノ三分ノ二

ナルコトヲ證スレバ




従ヒテ全球ノ體積ハ,之ニ外切スル圓壔ノ體積ノ三分ノ二ナルコト明カナリ. 故ニ

ABDニテ生ゼル半球ノ體積ハ, ABCDニテ生ゼル圓壔ノ體積ノ三分ノ二

ナルコトヲ證セントス.

**證** ABヲ任意ノ數ニ等分シ, $Ee$ヲ其ノ一部トセヨ.

E, $e$ヲ過リ, ADニ平行ニ EH, $eh$ヲ引キ,

EHト弧BDトノ交點Gヨリ$eh$ニ垂線$Gg$ヲ引ケ.

又ACヲ結ビ付ケ,其ノEHニ交ル點Fヨリ$eh$ニ垂線$Ff$ヲ引ケ.

其ノ他, ABノ總テノ部分ニ就キテ同様ノ作圖ヲナスベシ.

今ABヲ軸トシテ,此ノ圖形ヲ全一廻轉スルトキハ,象限ABDハ半球ヲ生ジ,正方形ABCDハ此ノ半球ニ外切スル圓壔ヲ生ジ; $EehH$, $EegG$, $EefF$ハ何レモ圓壔ヲ生ジ,其ノ他, ABノ各部ニ就キテ同様ニ作リタル矩形ハ各圓壔ヲ生ズ.



サテ $$\overline{EF}^2+\overline{EG}^2=\overline{EA}^2+\overline{EG}^2$$
$$=\overline{AG}^2=\overline{AD}^2=\overline{EH}^2.$$

故ニ $$Ee=Ff=Gg=Hh=k$$

トスレバ $$\pi\overline{EF}^2.k+\pi\overline{EG}^2.k=\pi\overline{EH}^2.k,$$

即チ $EehH$ガ廻轉シテ生ズル圓壔ノ體積ハ, $EefF$及ビ$EegG$ガ廻轉シテ生ズル圓壔ノ體積ノ和ニ等シ.

而シテ ABノ總テノ部分ニ就キテ作リタル矩形[$EehH$, $EegG$, $EefF$ノ如キ]ガ生ズル圓壔ニ就キテモ亦同様ノ關係ヲ得.

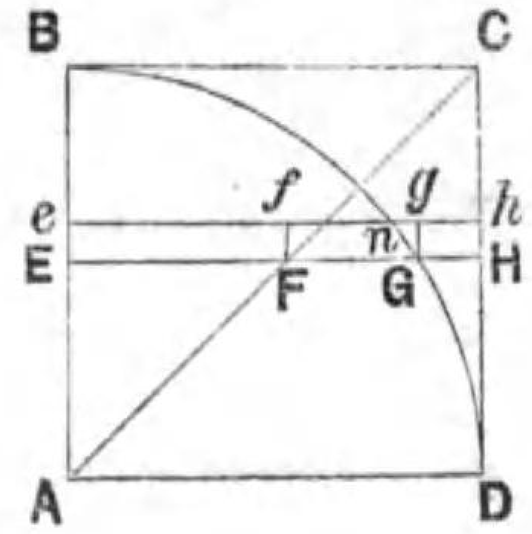
故ニ $EehH$ノ如キ矩形ガ生ズル圓壔ノ體積ノ和ハ,

$EegG$及ビ$EefF$ノ如キ矩形ガ生ズル二組ノ圓壔ノ體積ノ和ニ等シ.

然ルニ $EehH$ノ如キ矩形ガ生ズル圓壔ノ和ハ,即チ正方形ABCDガ生ズル所ノ圓壔ニシテ,

$EegG$ノ如キ矩形ガ生ズル圓壔ノ和ハ,象限ABDガ生ズル半球ヨリ$Ggn$ノ如キ形ガ廻轉シテ生ズル體ノ和ダケ大ナリ. 若シABヲ等分スル數ガ,多ケレバ多キホド, $Ee$ハ如何程ニテモ小サクスルコトヲ得,従ヒテ$Ggn$モ,亦ソガ廻轉シテ生ズル體モ,亦總テ斯ノ如キ體ノ和モ,如何程ニテモ小サクスルコト

ヲ得. 故ニ AB ヲ分チタル數ガ,限リナク多ケレバ, EegG ノ如キ矩形ガ生ズル圓壔ノ體積ノ和ノ極限ハ,ABD ガ生ズル半球ノ體積ナリ.




同様ニ EefF ノ如キ矩形ガ生ズル圓壔ノ體積ノ和ノ極限ハ, ABC ガ生ズル圓錐ノ體積ナリ.

然ルニ ABC ガ生ズル圓錐ノ體積ハ, ABCD ガ生ズル圓壔ノ體積ノ三分ノ一ナリ. [75 款系, 78 款系 2]

故ニ ABD ガ生ズル半球ノ體積ハ, ABCD ガ生ズル圓壔ノ體積ノ三分ノ二ナリ.

**107. 系** 球ノ體積ハ,其ノ半徑ノ立方ニ $\frac{4}{3}\pi$ ヲ乗ジタルモノニ等シ.

如何トナレバ,球ノ半徑ヲ $r$ トスレバ,其ノ外切圓壔ノ體積ハ $\pi r^2.2r$, 故ニ $\frac{2}{3}\pi r^2.2r=\frac{4}{3}\pi r^3$ ナレバナリ.

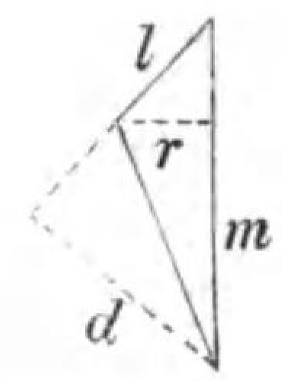
**注意** 球ノ體積ハ,其ノ徑ノ立方ニ $\frac{1}{6}\pi$ ヲ乗ジタルモノニ等シク,或ハ又其ノ面積ニ,半徑ノ三分ノ一ヲ乗ジタルモノニ等シ.



## 例題

23. 地球ノ半徑ヲ 3960 哩トセバ,其ノ體積ハ幾立方哩ナルカ, $\pi=3.1416$ トシ,一ノ位マデ最モ精密ニ求メヨ.

24. 三角形ガ其ノ一邊 $m$ ヲ軸トシ,廻轉シテ生ズル所ノ體ノ體積ハ,其ノ底邊 $l$ ノ廻轉ニ依リテ生ズル面積ニ,高サ $d$ ヲ乗ジタルモノノ三分ノ一ニ等シキコトヲ證セヨ.



## 雜　題

1. 球面三角形ノ各角ノ和ヨリ,二直角ヲ減ジタル殘リヲ**球面過剩**ト云フ. 而シテ球面三角形ノ面積ト,半球ノ面積トノ比ハ,球面過剩ト四直角トノ比ニ等シ.

2. 四面體ノ各面ノ外接圓ノ中心ニ於テ,其ノ面ニ作レル垂線ハ,同一ノ點ニ於テ交ル.

3. 一定點ヨリ,他ノ一定點ヲ過ル直線ヘ引ケル垂線ノ趾ノ軌跡如何.

4. 相交ル三ツノ球ノ截口ノ平面ハ,同一ノ直線ニ於テ交ル.

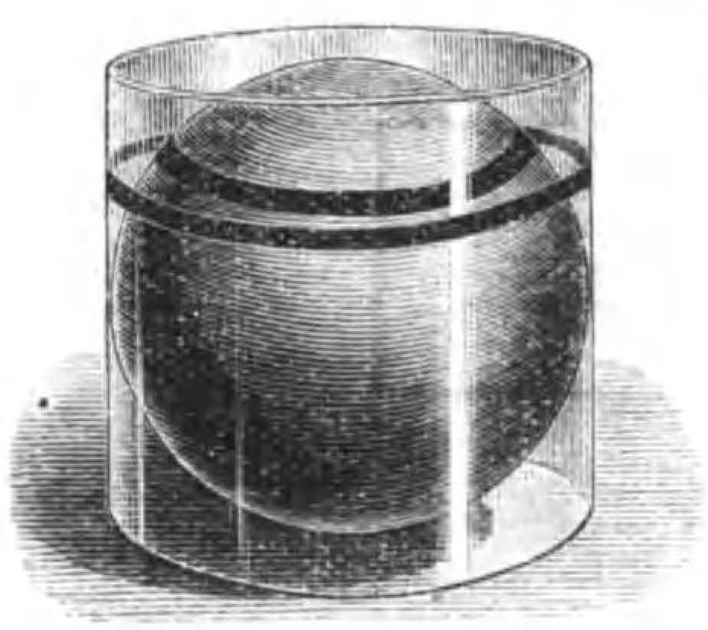
5. 地球ヲ眞ノ球ナリト假定シ,海面上,徑ダケノ高サニ昇ルトキハ,地球ノ面ノ幾分ヲ見得可キカ.

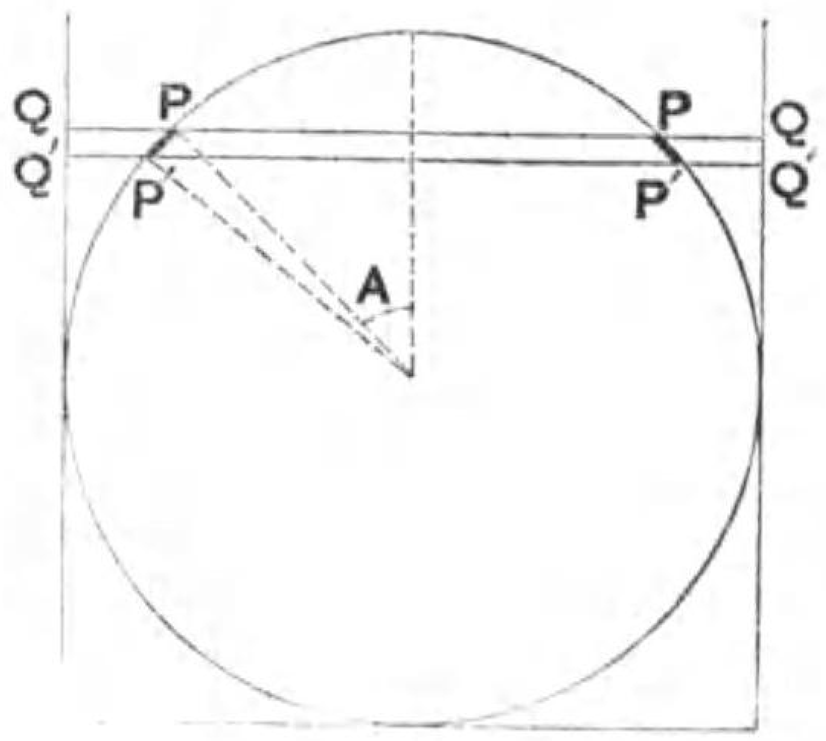
---

# 附　錄

# I. 球の面積に就きて

球ノ面積ニ就キテハ,既ニ本文ニ述ベタレドモ,次ノ如クシテ説明スルモ可ナリ.






左方ノ圖ハ圓壔桶ノ内ニ球ヲ容レタル圖ニシテ,球ハ丁度一杯ニ入リタルモノトス,卽チ圓壔ハ球ニ外切スルモノトス.

右方ノ圖ハ圓壔ノ軸ヲ含ミタル平面ニテ,左方ノ圖ヲ截リタル截面ヲ稍擴大シタルモノヲ示ス.

QQ′ ガ圓壔ノ軸ヲ全一廻轉スレバ,圓壔面ニ於ケル帶[調革ノ如キモノニシテ,左方ノ圖ニ圓壔面ニ沿ヒテ黒ク表ハセルモノ]ヲ生ジ,又 PP′ ガ圓壔ノ軸ヲ全一廻轉スレバ,球面ニ於ケル帶[左方ノ圖ニ球面ニ



黒ク表ハセルモノ]ヲ生ズ.

而シテ圓壔ノ帶ハ球ノ帶ヨリ,長サニ於テ大ナレドモ幅ニ於テ小ナリ. 而シテ PP′ ハ,P′ ガ P ニ極メテ近キトキハ,直線ト見做シ得ルユヱ,次ノ比例式ガ成リ立ツ.

$$\frac{\text{球ノ帶ノ長サ}}{\text{圓壔ノ帶ノ長サ}}=\frac{\text{圓壔ノ帶ノ幅}}{\text{球ノ帶ノ幅}}$$

如何トナレバ,PP′ ガ極メテ小ナレバ,此ノ各比ハ,何レモ角 A ノ正弦ニ等シケレバナリ.

サテ PP′ ガ極メテ小ナレバ,各帶ノ面積ハ長サト幅トノ積ニ等シキユヱ,PP′ ガ極メテ小ナルトキ,各帶ノ面積ハ相等シ.

而シテ此ノ理ハ,圓壔ト球トノ相對應セル帶ニ就キ總テ眞ナルユヱ,各曲面ニ於テ帶ヲ悉ク相加フルコトニ依リテ,球ノ面積ハ其ノ外切圓壔ノ曲面積ニ等シキコトヲ見ルベシ.

サテ圓壔ノ曲面積ハ,其ノ底面ノ半徑ヲ $r$ トスレバ高サハ $2r$ ナルユヱ,

$$2r.2\pi r=4\pi r^2$$

ニ等シ.

然ルニ球ノ半徑ハ,外切圓壔ノ底面ノ半徑ニ等シ

ク,卽チ $r$ ナルユヱ,球ノ面積ハ $4\pi r^2$ ニ等シ. 卽チ球ノ面積ハ其ノ大圓ノ面積ノ四倍ニ等シ.

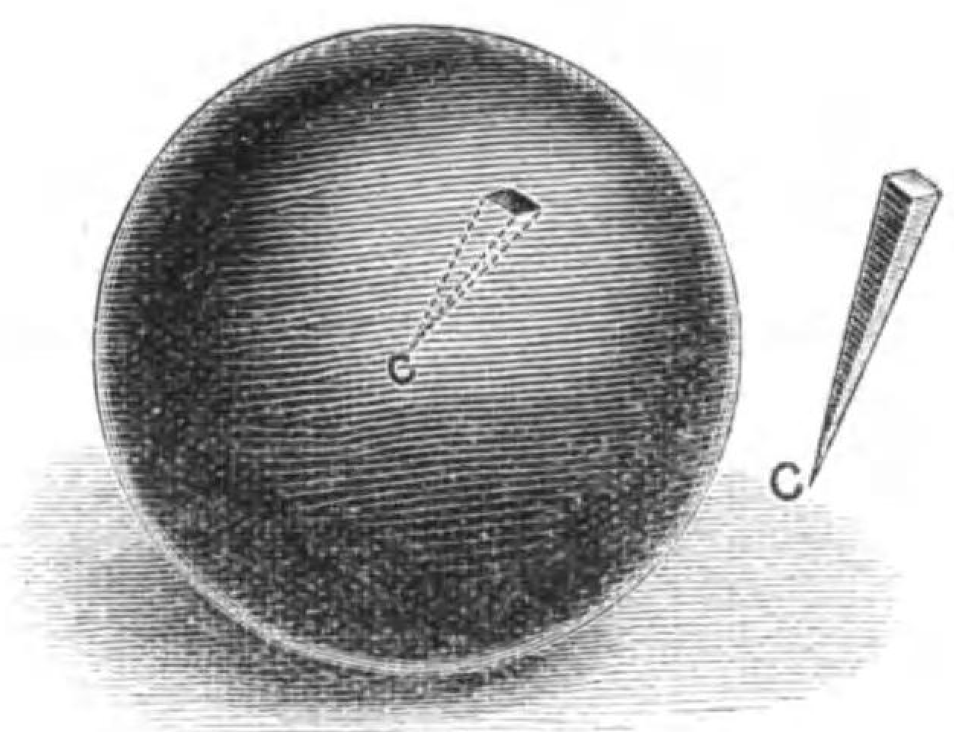
**注意** 球ノ體積ト其ノ外切圓壔ノ體積トノ比ハ, 2:3 ニ等シ.

又二ツノ球ノ面積ノ比ハ,其ノ半徑又ハ徑ノ平方ノ比ニ等シ.



## II. 球の體積に就きて

球ノ體積ニ就キテモ,既ニ本文ニ述ベタレドモ,次ノ如クシテ說明スルモ可ナリ.




球面ヲ,圖ニ示シタル如キ小サキ多角形ノ面積原子ニ分ツトキ,是等ノ面積原子ハ,球面ヲ分ツ數ガ多ケレバ多キホド,益々小サクナリテ,終ニハ平面多角形ト見ルコトヲ得,而シテ是等ヲバ中心 C ヲ頂點トスル角錐ノ底面ト見ルトキハ,其ノ高サハ終ニ球ノ半徑 $r$ ナリ.

サテ　斯ノ如キ一角錐ノ體積$=\frac{1}{3}$(面積原子)$\times r$,

然ルニ總テノ面積原子ノ和ハ,極限ニ於テ,球ノ面積ニシテ,從ヒテ總テノ對應セル角錐ノ體積ノ和ハ,極限ニ於テ球ノ體積ナリ.

故ニ　球ノ體積$=\frac{1}{3}$(球ノ面積)$\times r$

$$=\frac{1}{3}(4\pi r^2)\times r$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

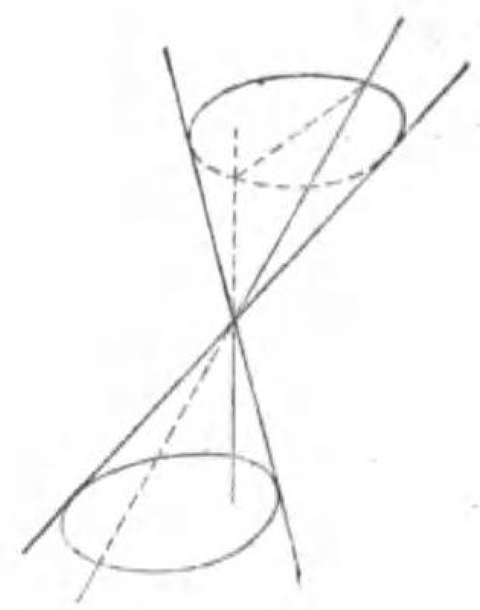
**注意** 二ツノ球ノ體積ノ比ハ,其ノ半徑又ハ徑ノ立方ノ比ニ等シ.

---



# III. 圓錐の截面に就きて

正圓錐ノ母線ハ限リナク兩方へ延バサルルガ故ニ,全キ圓錐曲面ハ二ツノ圓錐ヨリ成ル,其ノ二ツハ頂點ヲ共ニシテ相對スルモノナルコトヲ注意ス可シ.



**圓錐曲線** [Conics] トハ,一ノ平面ト此ノ圓錐曲面トノ交リヲ云フ.

而シテ其ノ平面ノ種々ノ位置ニ從ヒテ,圓錐曲線ハ次ノ如シ.

(1) 平面ガ圓錐ノ頂點ヲ通過シ,其ノ他ニ於テ曲面ニ交ラザルトキハ,圓錐曲線ハ唯一ツノ點ナリ.

(2) 平面ガ圓錐ノ頂點ヲ通過シ,且圓錐ヲ截ルトキハ,圓錐曲線ハ頂點ヲ通過スル二ツノ直線ナリ.

(3) 平面ガ圓錐ノ頂點ヲ通過シ,且母線ノ一ニ沿ヒテ圓錐ニ切スルトキハ,圓錐曲線ハ一ツノ直線ニシテ,コレ前ノ場合ノ二ツノ直線ガ相合シタルモノト考フルコトヲ得ベシ.

(4) 平面ガ圓錐ノ頂點ヲ通過セズシテ,軸ニ直角

ナルトキハ,圓錐曲線ハ圓ナリ.

(5) 平面ガ圓錐ノ頂ノ同ジ傍ニ於テ總テノ母線ヲ截ルトキハ,圓錐曲線ハ**橢圓** [Ellipse] ト稱スル曲線ナリ.

(6) 平面ガ圓錐ノ頂點ヲ通過セズシテ,母線ノ一,及ビソレヲ含ム切面ニ平行スルトキハ,圓錐曲線ハ**抛物線** [Parabola] ト稱スル限リナク廣ガル一枝ノ曲線ナリ.

(7) 平面ガ圓錐ヲ其ノ頂ノ兩傍ニ於テ截ルトキハ,圓錐曲線ハ**雙曲線** [Hyperbola] ト稱スル限リナク廣ガル二枝ノ曲線ナリ.

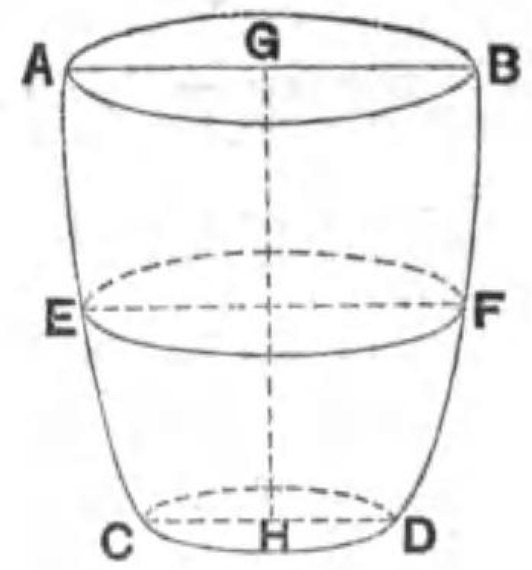
---



# IV. 桶の容量に就きて

**1.** 酒造桶類ノ丈量法ハ全ク圓臺ノ體積ヲ求ムル公式ニ基ヅクモノナリ.

圖ニ於テ AB ヲ**口徑**, CD ヲ**底徑**, EF ヲ**胴徑**ト云ヒ, GH ハ**深サ**ト云フ,而シテ此ノ桶ノ胴徑ヨリ上,及ビ下ノ部分ハ何レモ殆ンド圓臺ヲ爲スガ故ニ




$$AB = d,\ CD = d_1,$$
$$EF = d_2,\ GH = h$$

トスルトキハ,

$$\text{桶ノ體積} = \frac{\pi}{3} \times \frac{h}{2} \times \frac{d^2 + dd_2 + d_2^2}{4} + \frac{\pi}{3} \times \frac{h}{2} \times \frac{d_1^2 + d_1 d_2 + d_2^2}{4}$$
$$= \frac{h}{2}\{(d+d_2)^2 + (d_1+d_2)^2 - (d+d_1)d_2\}\frac{\pi}{12}.$$

然ルニ 1 尺ヲ單位トスルトキハ, 1 升ハ 64827 立方分ナルガ故ニ, 1 石ハ立方尺ヲ單位トシテ 6.4827 ナリ.

依リテ桶ノ容量ハ石ヲ單位トシテ

$$\frac{h}{2}\{(d+d_2)^2 + (d_1+d_2)^2 - (d+d_1)d_2\} \times \frac{\pi}{12 \times 6.4827}$$

ナリ.

然ルニ $\pi=3.1416$ トスレバ $\dfrac{\pi}{12\times 6.4827}$ ハ 0.0403844 トナルガ故ニ次ノ算則アリ.

**算則** 口徑ト胴徑トノ和ノ二乘冪ヲ甲トス.
胴徑ト底徑トノ和ノ二乘冪ヲ乙トス.
口徑ト底徑トノ和ヘ胴徑ヲ乘ジ丙トス.
甲乙ノ和ヨリ丙ヲ減ジタル殘リニ,深サ及ビ 0.0403844 [乘率ノ一位ヲ石位トシ,丈量尺度ハ分位ニ止メ,尺位ヲ一位トス]ヲ乘ジ之ヲ 2 ニテ除シ,其ノ容量ヲ得.

但石數ハ合位ニ止メ,以下切リ棄ツ可シ.

以上ハ明治17年8月30日大藏省達第14號酒造桶類丈量法ニ依レリ,而シテ口徑胴徑等ノ度リ方ハ次ノ如シ.

口徑[口頭ヨリ1寸下リタル個所],胴徑[口徑ト底徑トノ中央],底徑[底板面ノ個所]ハ何レモ內測リニテ縱橫⊕圖ノ如ク度リ,此ノ縱橫徑ヲ和シ,之ヲ 2 ニテ除シテ定ム,深サハ其ノ酒桶ノ前後,左右,中心何レモ底面ヨリ口徑マデノ間ヲ丈量シ,之ヲ和シ,5 ニテ除シテ定ム可シ. 但尺度ハ分位ニ止メ,以下切リ棄ツ可シ.



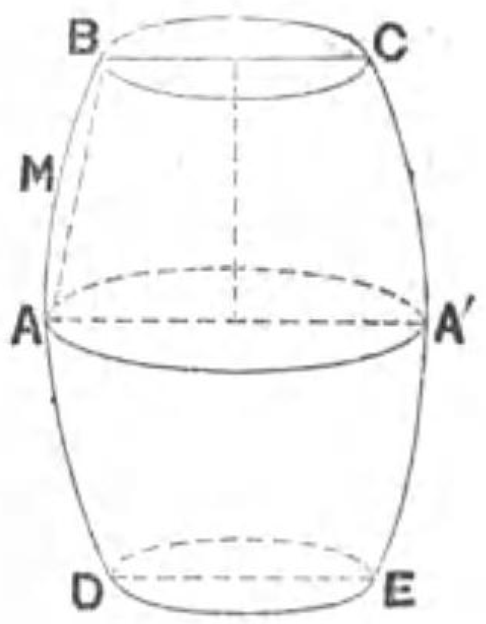
**例** 酒造桶アリ,其ノ口徑 7 尺,胴徑 6 尺 4 寸,底徑 5 尺,深サ 8 尺ナルトキハ其ノ容量幾何ナルカ.

茲ニ
$$\text{甲}=(7+6.4)^2=179.56,$$
$$\text{乙}=(6.4+5)^2=129.96,$$
$$\text{丙}=(7+5)\times 6.4=76.8,$$
$$\text{甲}+\text{乙}-\text{丙}=179.56+129.96-76.8$$
$$=232.72.$$

依リテ
$$\text{容量}=\frac{232.72\times 8\times .0403844}{2}$$
$$=37.593\ldots\ldots$$

即チ此ノ容量ハ37石5斗9升3合ナリ.

2. 西洋形桶ノ體積ヲ求ムル法モ亦圓臺ノ公式ニ基ヅク.




圖ノ最大截面ノ徑 AA' ヲ $2R$ トシ,其ノ兩端ノ徑 BC, DE ヲ何レモ $2r$ トシ,高サヲ $h$ トスレバ,

桶ノ體積ハ殆ンド圓臺 AA'CB ノ二倍ニ等シ.

依リテ此ノ體積ハ殆ンド
$$\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$
ナリ,但コハ AMB ニテ生ジタル體積ノ一小部分ヲ棄テタルモノナルユエ,實際ノ體積ヨリ少シ小サシ.

若シ上ノ公式ニ於テ $Rr$ ノ代リニ $R^2$ ト記スルトキハ

$$\frac{1}{3}\pi h(2R^2+r^2) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

トナル,而シテ此ノ公式ニ依リテ求メタル體積ハ實際ノ體積ヨリ少シ大イナリ.

**例** 西洋形桶アリ,深サ3呎,其ノ最大截面ノ圓周ハ10呎,兩端ノ周ハ8呎ニシテ,一听ハ立方吋ノ277.274ヲ含ムト云フ,然ラバ此ノ桶ノ容量如何.

此ノ容量ヲ公式(1)ニ依リテ求ムレバ121听强トナリ,又(2)ニ依リテ求ムレバ131听弱トナル.

多クノ場合ニ於テハ

$$V=\frac{1}{3}\pi h\{2R^2+r^2-\frac{1}{3}(R^2-r^2)\}$$

ナル公式ニ依ル,此ノ公式ニ依レバ,容量ハ125听トナリ,前ノ二ツノ公式ニ依リテ求メタルモノヨリ一層精密ナリ.

# 復習雜題

# 復　習　雜　題

## 直線及び平面

1. 與ヘラレタル直線上ノ各ノ點ヨリ,他ノ與ヘラレタル直線ニ平行ニ引キタル直線ハ,同一ノ平面上ニアリ.

2. 三ツノ直線ガ二ツヅツ相交ルトキハ,此ノ三ツノ直線ハ同一ノ點ニ於テ相交ルカ,然ラザレバ同一ノ平面上ニアリ.

3. 一ツノ平面ガ,平行四邊形ノ一ツノ對角線ヲ過ルトキハ,他ノ對角線ノ兩端ヨリ,此ノ平面ヘ引ケル二ツノ垂線ノ長サハ相等シ.

4. ごーしゅ四邊形ノ各角ノ和ハ,四直角ヨリ小ナルコトヲ證セヨ.

5. ごーしゅ四邊形ノ二邊ニ平行ナル平面ハ,他ノ二邊ヲ比例ニ分ツ.

6. 直角三角形ノ三ツノ角頂ヨリ等距離ニアル點ヲ,斜邊ノ中點ニ結ビ付クルトキ,此ノ直線ハ此ノ



三角形ノ平面ニ垂直ナリ.

7. AB, AC, AD ハ同一ノ點ヨリ發シ,同一ノ平面上ニアラザル等長ノ三ツノ直線ナルトキ,A ヨリ平面 BCD ヘ引ケル垂線ノ趾ハ,三角形 BCD ノ外接圓ノ中心ナリ.

8. A, B ヲ二ツノ點トシ; P, Q ヲ二ツノ平面トス. A ヨリ P, Q ニ至ル距離ノ和ガ, B ヨリ P, Q ニ至ル距離ノ和ニ等シケレバ,直線 AB 上ノ任意ノ點ヨリ P, Q ニ至ル距離ノ和モ亦ソノ和ニ等シ.

9. 邊ノ數ガ四ツニシテ,其ノ首尾相結合スル折線ニテ圍マルル圖形ノ四ツノ角ガ,何レモ直角ナルトキハ,此ノ圖形ハ矩形ナリ.

10. 32款ノ定理ノ圖ニ於テ; AC, A′C′ ガ同一ノ平面上ニアラザルトキ, A′C ヲ結ビ付ケ,其ノ平面 N ニ交ル點ヲ D′ トスレバ, BDB′D′ ハ平行四邊形ナルコトヲ證セヨ.

11. 前題ニ於テ, AA′ ノ中點ト CC′ ノ中點トヲ結ビ付クル直線ハ,平行四邊形 BDB′D′ ノ兩對角線ノ交點ヲ過ルコトヲ證セヨ.

12. M 及ビ N ハ一點 P ヨリ二ツノ平面ヘ引ケル垂線ノ趾ナルトキ,此ノ二ツノ平面ノ交リノ線ハ

平面 MNP ニ垂直ナリ.

13. 互ニ平行ナル二ツノ直線ガ,一ツノ平面トナス角ハ相等シ.

14. 同一ノ平面上ニアル二ツノ直線ガ,他ノ一ツノ平面トナス角ガ相等シキトキハ,此ノ二ツノ直線ガ此ノ二ツノ平面ノ交リトナス角ハ相等シ.

15. 二ツノ平面 P, Q ノ交リヲ LM トスレバ,平面 P ニ垂直ナル直線ガ平面 Q 上ニ投ズル正射影ハ LM ニ垂直ナリ.

16. 一直線ト,之ニ平行ナル平面上ノ諸直線トノ最短距離ハ相等シ. 此ノ定理ノ例外ノ場合ヲ發見セヨ.

17. 平行セル二ツノ線分ノ比ハ,任意ノ平面上ニ投ズル其ノ射影ノ比ニ等シ.

18. 二面角ノ稜ノ上ノ一點ヨリ,之ト相等シキ角ヲナス二ツノ斜線ヲ引キ,一ツヅツ各面上ニアラシムルトキハ,其ノ間ノ角ハ二面角ノ平面角ヨリ大ナルカ,又小ナルカ. 又此ノ角ノ大イサハ如何ナル界限ノ間ニアルカ.

19. 三面角 O-ABC 内ニ直線 OD ヲ引ケバ

(1) $\widehat{AOD}+\widehat{BOD}+\widehat{COD}>\frac{1}{2}(\widehat{BOC}+\widehat{COA}+\widehat{AOB})$.



(2) $\widehat{AOD}+\widehat{BOD}<\widehat{AOC}+\widehat{BOC}$.

(3) $\widehat{AOD}+\widehat{BOD}+\widehat{COD}<\widehat{BOC}+\widehat{COA}+\widehat{AOB}$.

20. 對頂多面角ニ於テ,相等シキモノアルカ.

21. 與ヘラレタル圓ノ平面外ノ與ヘラレタル一ツノ點ト,圓周上ノ各點トヲ結ビ付クル直線ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

22. 同一ノ直線ヲ過ル無數ノ平面アリ,一ツノ點 X ヨリ此ノ直線ヘ垂線 XY ヲ引クトキ, X ヨリ諸平面ヘ引ケル垂線ノ趾ノ軌跡ハ, XY ヲ徑トシタル圓周ナリ.

23. 水平面上ニ垂直ニ立テル二本ノ棒アリ,其ノ高サハ相等シカラズ,此ノ平面上ニ於テ各ノ棒ヲ等角ニ視ル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

24. 相交ル二ツノ平面 M, N ノ各ニ,一ツヅツ二點 A, B ヲ與ヘテ M, N ノ交リニ一點 P ヲ求メ, AP+PB ヲ最小ナラシメヨ.

25. 四面角ヲ一ノ平面ニテ截リ,其ノ截口ヲ平行四邊形ナラシメヨ.

26. 既知ノ長サノ直線ヲ,既知ノ平面ニ平行シテ,其ノ兩端ガ空間ノ既知ノ二ツノ直線上ニアル如ク引クコト.

27. 平面ヘノ斜線ノ趾ヲ過リ,其ノ面上ニ斜線ト與ヘラレタル角ヲ成ス直線ヲ引クコト.



# 多面體壔錐

1. 四面體ノ各角頂ヲ,其ノ對面ノ**重心**ニ結ビ付クル直線ハ,同一ノ點ニ於テ相交ル.
而シテ各直線ハ此ノ點ニ於テ比 3:1 ニ分タル.
此ノ點ヲ四面體ノ**重心**ト云フ.

2. 四面體ノ一ノ稜ヲ含ミ,之ニ對スル稜ノ中點ヲ過ル平面ハ,同一ノ點ニ於テ相交ル.

3. 四面體ノ各稜ノ中點ニ於テ,之ニ垂直ナル平面ハ同一ノ點ニ於テ相交ル.

4. 四面體ノ各角頂ニ於テ,其ノ三面ト等角ヲナス直線ヲ引ケバ,其ノ四ツノ直線ハ同一ノ點ヲ過ル.

5. (1) 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ビ付クル三ツノ直線ハ,同一ノ點ヲ過ル.

(2) 若シ其ノ直線ガ互ニ垂直ナルトキハ,相對スル稜ハ相等シク,四ツノ面ハ全ク相等シ.

(3) 若シ此ノ三ツノ直線ガ相等シケレバ,相對スル稜ハ互ニ垂直ナリ.

6. 四面體ノ二組ノ相對スル稜ガ互ニ垂直ナレバ,殘リノ一組ノ相對スル稜モ亦互ニ垂直ナリ. 而

シテ斯ノ如キ四面體ニ於テハ

(1) 一ツノ角頂ヨリ之ニ對スル面ヘ引キタル垂線ノ趾ハ,其ノ面ノ垂心ナリ.

(2) 此ノ四ツノ垂線ハ,同一ノ點ヲ過ル.

(3) 相對スル稜ノ上ノ正方形ノ和ハ相等シ.

7. 四面體ノ二ツノ相對スル稜 AB, CD ノ中點ヲソレゾレ E, F トシ,此ノ二點ヲ過ル平面ト,他ノ二ツノ對稜 AC, BD トノ交點ヲソレゾレ G, H トスレバ,直線 EF ハ GH ヲ二等分ス.

8. 四面體ノ三組ノ相對スル稜ガ各互ニ相等シキトキハ,四ツノ面ハ何レモ鋭角三角形ナリ.

9. 正四面體ノ高サハ,其ノ趾ヨリ一ノ面ヘ引ケル垂線ノ三倍ニ等シ.

10. 正四面體ノ相對スル稜ノ間ノ最短距離ハ,其ノ一ノ稜ノ上ノ正方形ノ對角線ノ半分ニ等シ.

11. 立方體ノ各ノ稜ヲ,一ツノ對角線ニ垂直ナル平面ニ射影スルトキハ,如何ナル多角形ヲ生ズルカ.

12. 立方體 ABCD-EFGH ニ於テ,三ツノ角頂 B, E, G ヲ含ム平面ハ,對角線 DF ニ垂直ナリ.

13. 二ツノ相似多面體ノ小ナルモノヲ,大ナルモノノ內ニ入レ,相對應スル稜ガ平行ナル樣ニ置クトキハ,相對應スル角頂ヲ結ビ付クル直線ハ,同一ノ點ヲ過ル.



14. 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ同一ノ點ニ於テ交ル. 此ノ點ヲ過リテ平行六面體ノ相對スル面ノ間ニ引ケル直線ハ,此ノ點ニテ二等分トナル.

**點對稱**[平面幾何學57頁]ト云ヘル語ヲ擴張シテ,此ノ場合ニモ用ヒラル. 卽チ平行六面體ハ**點對稱**ヲ有チ,其ノ對角線ノ交點ハ**對稱ノ中心**ナリ.

15. 直圓錐ヲ,其ノ軸ヲ含ム任意ノ平面ニテ截ルトキ,其ノ截口ハ軸ニ關シテ**線對稱**[平面幾何學58頁]ヲ有ツ.

一ノ圖形[立體]ヲ,一定ノ直線ヲ含ム任意ノ平面ニテ截ルトキ,其ノ截口ガ此ノ一定ノ直線ニ關シテ對稱ナレバ,此ノ圖形ハ此ノ定直線ニ關シテ**線對稱**ヲ有チ,此ノ定直線ヲ**對稱ノ軸**ト云フ.

一ノ平面ノ兩側ニ於テ,之ニ垂直ナル直線上ニアリテ,且等距離ナル二點ハ,此ノ平面ニ關シテ**對稱ナリ**ト云ヒ,若シ一ノ圖形[立體]ヲ,一ノ平面ニテ截ルトキ,其ノ一方ニアル部分ノ各點ニ對シテ他ノ一方ノ部分ニ對稱點アルトキハ,此ノ圖形ヲ此ノ平面ニ關シテ**對稱ナリ**ト云フ. 卽チ此ノ圖形ハ**平面對稱**ヲ

有ツト云ヒ,此ノ平面ヲ**對稱ノ面**ト云フ.

16. 二ツノ點ヲ結ビ付クル直線ヲ直角ニ二等分スル平面ノ上ニ畫キタル平面圖形ノ各點ヲ,其ノ二ツノ點ニ結ビ付クルトキハ,其ノ平面ニ就キテ對稱ナル二ツノ圖形ヲ得.

17. 多面體ヲ平面ニテ如何樣ニ截ルモ,其ノ截口ガ恒ニ凸多角形ナルトキハ,之ヲ**凸多面體**ト云フ.

凸多面體ニ於テ,稜ノ數ヲ $E$, 面ノ數ヲ $F$, 角頂ノ數ヲ $V$ トスルトキハ, $E+2=F+V$ ナルコトヲ證セヨ.

之ヲおいれるノ定理ト云フ.*

18. 任意ノ多面體ノ面角ノ和ハ,角頂ノ數ヨリ2ヲ減ジタルダケ四直角ヲ倍セルモノニ等シ.

19. 六ツヨリ少ナキ數ノ稜ニテハ,多面體ヲ作ルコト能ハズ.

20. 平行六面體ノ對角線ノ交點ヲ過ル任意ノ平面ハ,其ノ六面體ヲ二等分ス.

21. 三角臺ノ兩底面ノ平行セザル二ツノ邊ヲ取

* 此ノ定理ハでかると [Descartes] ガ之ヲ知リ,且コレヲ用ヒシニ拘ハラズ,おいれる [Euler] ノ定理ト云フ.

此ノ定理ハ結晶學ニ於テ極メテ必要ナリ.

デカルト氏肖像

RENE DESCARTES.

(1596—1650 A. D.)

## デカルト氏小話

近世ニ於テ，最モ卓越セル哲學者，物理學者，數學者ノ一人ニシテ，西曆 1596 年 3 月ら1へぃい＝生レ，1650 年 2 月すとっくほるむ＝死セリ．　哲學者トシテ氏ハ"近世哲學ノ祖"ト云ハルルホド有名ナリキ．　數學＝於テハ，氏ノ名ハ解析幾何學ノ發見＝依リテ有名ナリ．　特＝氏ノ拉甸名 [Renatus Cartesius] ヨリシテ，かると座標 [Cartesian co-ordinates] ナル名目ハ，一般＝採用セラルル＝至レリ．　氏ハモト方程式ノ理論＝於テ，根ノ幾何學的表示ヲナサントシテ，終＝解析幾何學ノ端緒ヲ發見セリ，此ノ書ハ僅＝ 100 頁＝過ギザル小册子ナレドモ，數學ノ研究上革命ヲ惹起スル＝十分ノ價値アリキ．　氏ハ又ゔぃえたノ代數記法ヲ廢棄シテ，今日一般＝用ヒラルル記號方式ヲ確定セリ．

## オイレル氏肖像

LEONHARD EULER.

(1707—1783 A. D.)

## オイレル氏小話

瑞西國ノ數學家ニシテ，第十八世紀中世界ニ於テ著名ナル學者ノ一人ナリキ． 氏ハばーぜるニ生レ，同地ノ大學ニ入リ，十六歳ニシテ學位ヲ得タルホドノ俊才ナリキ．氏ハ數學ヲ彼ノ有名ナルよはん.べるぬうゐーニ學ビ，又東洋語，神學，及ビ醫學ヲ修メタリ．氏ハ 1727 年ニ'船ノ帆走ニ就キテ'ノ論文ヲ提出シテ佛國大學ノ賞牌ヲ得，其ノ年かざりーん一世ノ招聘ニ應ジテ，聖彼得堡[今ノぺとろぐらーど]ニ行キ，物理學及ビ高等數學ノ敎授トナリ，1740 年ニハ地理局長トナリ，其ノ年ふれでりっく二世ノ招聘ニ應ジテ伯林ニ行キ，理科大學ノ數學敎授ノ椅子ニ就キ，又 1766 年ニハ聖彼得堡ニ呼戻サレ，死ニ至ルマデ同地ニ就職セリ． 氏ハ 1735 年ニ重キ眼病ニ罹リ，一眼ヲ盲シ，露國ニ復リテ間モナク 1766 年ニハ，他ノ一眼ヲ失ヒ，全ク盲目トナリシモ，其ノ頭腦ノ働キハ，毫モ損傷ヲ受クルコトナク，死ニ至ルマデ數學ヲ研究シ，斯學ニ貢獻スル處尠ナカラザリキ．



リテ相對スル稜トスル四面體ハ,何レモ等積ナリ.

**22.** 四面體ノ相對スル二ツノ稜ガ,與ヘラレタル二ツノ直線上ニアリテ,且ソノ長サガ一定ナルトキハ,是等ノ稜ノ位置ニ拘ハラズ,四面體ノ體積ハ恒ニ一定不易ナリ.

**23.** 正多面體內ノ一點ヨリ,總テノ面ニ引ケル垂線ノ和ハ,點ノ位置ニ拘ラズ恒ニ一定ナリ.

**24.** 斜截頭三角壔ノ體積ハ,其ノ底面ヲ共通ノ底面トシ,其ノ斜截面ノ三ツノ角頂ヲ其ノ各ノ頂點トシタル三ツノ錐體ノ和ト等積ナリ.

**注意** 角壔ヲ底面ニ平行ナラザル平面ニテ截リタル殘リヲ**斜截頭角壔**ト云フ.

**25.** 斜截頭三角壔ノ體積ハ,一ノ底面ト此ノ底面ニ他ノ底面ノ重心ヨリ下セル垂線トノ積ニ等シキコトヲ證セヨ.

**26.** 直圓錐ノ頂點ヲ過ル平面ニテノ截口ハ二等邊三角形ナリ.

**27.** 直圓壔ノ軸ニ平行ナル平面ニテノ截口ハ矩形ナリ.

**28.** 三ツノ稜ガ,ソレゾレ與ヘラレタル三ツノ直

線上ニアル様ナル平行六面體ヲ作ルコト.

29. 直圓錐ノ側面ヲ,底面ニ平行ナル平面ニテ二等分スルコト.



# 球及び球面形

1. 球ノ小圓ヨリ,其ノ極ニ至ル大圓弧ノ長サガ象限ノ三分ノ一ナルトキ,其ノ小圓ノ半徑ハ球ノ半徑ノ二分ノ一ニ等シ.

2. 與ヘラレタル圓周上ノ三ツノ點ヲ含ム球面ハ圓周全部ヲ含ム.

3. 同一ノ平面上ニアラザル二ツノ圓周ガ,二點ニ於テ相交ルトキハ,此ノ二ツノ圓周ヲ含ム球面ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

4. 一ツノ定直線ヲ含ミ,定マレル球ニ切スル二ツノ平面ヲ作ルトキ,其ノ切點ヲ結ビ付クル直線ハ此ノ二ツノ平面ノ交リ,即チ此ノ定直線ニ垂直ナリ.

5. 球帶ノ底面ノ一ツガ零トナリタル極限ノ場合ニ於ケル面積,即チ103款ノ圖ニ於テ,弧ABガAbヲ軸トシ廻轉シテ生ズル面積ハ,ABヲ半徑トスル圓ノ面積ニ等シ.

6. 與ヘラレタル球面ガ,其ト中心ヲ過ル他ノ球面ヨリ截リ取ル球帶ノ面積ハ一定不易ナリ.

7. 等邊球面三角形ノ三ツノ角ハ,相等シキコト

ヲ證セヨ.

8. 二等邊球面三角形ノ頂點ヨリ,底邊ノ中點ヘ引ケル大圓ノ弧ハ,

(1) 頂角ヲ二等分シ,

(2) 底邊ニ垂直ニシテ,

(3) 本形ヲ二ツノ對稱球面三角形ニ分ツ.

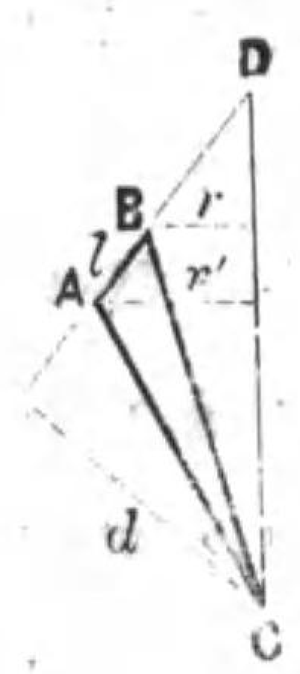
9. 球面四邊形ニ於テ

(1) 二雙ノ相對スル邊ガ各相等シキトキハ,兩對角線ハ互ニ二等分セラル.

(2) 四ツノ邊ガ相等シキトキハ,兩對角線ハ互ニ垂直ナリ.

10. 球面五角形ノ各角ノ和ハ,六直角ヨリ大ニシテ,十直角ヨリ小ナルコトヲ證セヨ.

11. 任意ノ三角形 ABC ガ,其ノ一角頂 C ヲ過ル直線ヲ軸トシ廻轉シテ生ズル體ノ體積ハ,邊 AB ニテ生ズル面積ニ, C ヨリ引ケル高サノ三分ノ一ヲ乘ジタルモノニ等シ.




12. 正六角形ノ相對スル二ツノ角頂ヲ過ル直線ヲ引キテ之ヲ二等分スルトキ,其ノ半分ガ此ノ直線ヲ軸トシテ一廻轉スレバ,中央ノ邊ノ生



ズル面積ハ兩端ノ邊ノ生ズル面積ノ和ニ等シ.

13. 半圓周ヲ三等分シ,其ノ徑ヲ軸トシテ之ヲ一廻轉スレバ,中央ノ弧ノ生ズル球帶ノ面積ハ,他ノ二ツノ部分ガ生ズル球帶ノ面積ノ和ニ等シ.

14. 二ツノ平行平面ノ間ニ夾マレタル球ノ一部ヲ**球盤**或ハ**球缺**ト云フ. 今球盤ノ二ツノ**底面**[卽チ截口]ノ半徑ヲ $r'$, $r''$ トシ,**高サ**[平行二平面間ノ距離]ヲ $h$ トセバ,其ノ體積 $V$ ハ次ノ如シ.

$$V=\pi r'^2\frac{h}{2}+\pi r''^2\frac{h}{2}+\frac{1}{6}\pi h^3.$$

15. 球ニ外切スル等邊圓壔ノ全面積ハ,球ノ面積ト,外切等邊圓錐ノ全面積トノ比例中項ナリ. 而シテ體積ニ就キテモ亦同樣ナリ. 內接スル體ニ就キテモ亦同樣ノ定理アリ.

**注意** 直圓壔ヲ其ノ軸ヲ含ム平面ニテ截ルトキ,其ノ截口ガ正方形ナルトキハ,之ヲ**等邊圓壔**ト云フ. 又直圓錐ヲ其ノ軸ヲ含ム平面ニテ截ルトキ,其ノ截口ガ正三角形ナルトキハ,之ヲ**等邊圓錐**ト云フ.

16. 弓形ガ之ヲ截ラザル徑ヲ,軸トシテ廻轉スルトキ生ズル所ノ體ノ體積ハ,弓形ノ弦ニ等シキ半徑ヲ有ツ圓ヲ底面トシ,軸ニ於ケル此ノ弧ノ射影ノ高サトスル直圓壔ノ體積ノ六分ノ一ニ等シ.

17. 扇形ガソレヲ截ラザル一ツノ徑ヲ軸トシテ廻轉スルトキ生ズル立體ノ體積ハ,其ノ弧ガ生ズル球帶ノ面積ト,其ノ半徑トノ積ノ三分ノ一ニ等シ.

18. 球面上ノ一ツノ定點ヨリ,一定ノ距離ニ在ルベキ此ノ球面上ノ點ノ軌跡ハ,此ノ定點ヲ極トスル圓周ナリ.

19. 定點 O ヨリ定平面ヘ直線 OA ヲ引キ,之ヲ點 B ニテ矩形 OA.OB ガ與ヘラレタル面積ニ等シキ如ク分ツトキ,點 B ノ軌跡ヲ求メヨ.

20. 與ヘラレタル一ツノ直線ヲ含ム平面ヲ以テ與ヘラレタル球ヲ截リテ生ズル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ.

21. 與ヘラレタル二ツノ點ヨリノ距離ノ比ガ,與ヘラレタル長サノ比ニ等シキ如キ點ノ軌跡ヲ求メヨ.

22. 二ツノ球面ヲ大圓周ニテ截ルベキ球ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ.

23. 與ヘラレタル球面上ニ於テ,一ツノ直線,又ハ一ツノ平面ニ至ル距離ノ最小ナル如キ點ヲ求ムルコト.

24. 直圓錐ノ側面上ノ一點ニ於テ,之ニ切スル平面ヲ作ル法如何.



25. 一ツノ定點ヲ過リ,與ヘラレタル二ツノ球面ノ各ニ切スル平面ヲ作ルコト.

26. 半徑ノ長サガ r ナル球ニ直圓壔ヲ內接シ,兩底面ノ面積ノ和ヲ曲面ノ面積ニ等シカラシムルコト.

# 計算問題

1. 縱4間,橫3間,高サ1間半ノ室内ノ床ノ一隅ヨリ,相對スル天井ノ一隅へ引ケル直線ノ長サハ,幾尺ナルカ.

2. 正十二面體ト正二十面體トハ,各幾何ノ稜ヲ有ツカ.

3. $n$角壔ノ稜ノ總數,各面角ノ和,及ビ各二面角ノ和各如何.

4. 一升枡ハ方4寸9分,深サ2寸7分ナリ,今コレト同ジ恰好ニシテ,一升五合入ノ枡ヲ造ランニハ,其ノ方邊,及ビ深サノ寸法如何. 但尺度ノ毛位マデ答ヲ出セ.

5. 直角體アリ,其ノ體積$V$ニシテ,其ノ三ツノ稜ハ三ツノ數$a$, $b$, $c$ニ比例スルトキ,其ノ三ツノ稜ノ長サヲ求メヨ.

6. 水一斗入ノ箱ヲ造ルニ,其ノ長サ,幅,及ビ深サノ比ヲ3:2:5ナラシメントス. 各幾尺ニスベキカ.

7. 底面ハ正三角形ナル直角壔アリ,其ノ底面ノ各邊ハ16寸ニシテ,高サハ25寸ナルトキ,側面積如何.



8. 直圓錐ノ側面積ハ,其ノ底面積ノ二倍ニシテ,其ノ高サガ4寸ナルトキ,底面ノ半徑如何.

9. 底面ノ半徑8糎,高サ20糎ナル直圓錐ノ底面ニ平行ナル截面ヲ作リ,其ノ側面積ヲ二等分スルトキ截面ト底面トノ距離ヲ求メヨ.

10. 正八面體ノ一邊ヲ知リテ,其ノ對角線ノ長サヲ求ムルコト. 又面積及ビ體積ヲ求メヨ.

11. 底面ハ一邊5寸ノ正方形ナル直角壔ノ高サガ8寸ナルトキ,其ノ側面積,全面積,體積ヲ問フ.

12. 角壔アリ,各邊ガ$a$尺ナル正六邊形ヲ底面ニ有シ,側稜ト底面トノナス角ガ$60°$ニシテ,側稜ノ長サガ$b$尺ナルトキ,其ノ體積如何.

13. 底面ハ正三角形ナル角錐ノ高サハ12寸,底面ノ各邊ハ6寸ナルトキ,其ノ體積如何.

14. 角錐ノ頂點ト底面トノ中央ニ於テ,底面ニ平行セル平面ニテ之ヲ截ルトキ,各部ノ體積ノ比如何.

15. 直圓壔狀ノ水桶アリ,其ノ徑ハ2尺,深サハ7尺5寸ナルトキ,容量如何.

16. 圓壔ノ底面ノ徑モ高サモ1尺ナルトキ,其ノ體積幾立方寸ナルカ.

17. 直圓壔ノ高サハ25寸,底面ノ半徑ハ5寸ナル

トキ側面積,全面積,及ビ體積ヲ問フ.

18. 直圓錐ノ高サ24寸,底面ノ半徑ハ7寸ナルトキ,其ノ側面積,全面積,及ビ體積ヲ問フ.

19. 直圓錐狀ノこっぷアリ,口徑8糎,側面ニ沿ヒタル深サハ93粍ナルトキ,其ノ容積如何.

20. 徑48糎ナル直圓壔ノ容器ニ水ヲ入レタルアリ,或物體ヲ其ノ中ニ沈メタルニ,水ノ上昇スルコト57粍ナルヲ見タリ,此ノ物體ノ體積ヲ求メヨ.

若シ此ノ水中ニ,黃銅製ノ小彫刻物ヲ投入シ,水ノ上昇スルコト26粍ナレバ,此ノ物ノ目方如何. 但黃銅ノ比重ハ8.4ナリ.

21. 兩底面ハ7寸及ビ17寸ナル邊ヲ有ツ正方形ノ正角臺アリ,其ノ高サガ12寸ナルトキ,側面積,全面積,及ビ體積ヲ求メヨ.

22. 堤防ノ上ノ幅3間,下ノ幅7間,高サ5間ナルモノヲ,長サ120間ダケ築造スルニ要スル土積幾何ナルカ.

23. 正圓臺アリ,兩底面ノ半徑ハ8寸,及ビ19寸ニシテ,斜高ハ61寸ナルトキ,其ノ側面積,全面積,及ビ體積ヲ問フ.

24. 半徑15寸ナル球ノ面積如何.



25. $\pi$ ノ近似値ヲ $\frac{355}{113}$ トシテ,半徑 $\frac{452}{71}$ ナル球ニ於ケル高サ $\frac{13}{5}$ ナル球帶ノ面積ヲ求メヨ.

26. 球ノ半徑ヲ直角ニ二等分スル平面ニ分タレタル,球面ノ二ツノ部分ノ比ヲ求メヨ.

27. 半徑 $r$ ナル球ヲ一ツノ平面ニテ截リ,其ノ球帶ノ大ナル部分ガ,小ナル部分ト全球面トノ比例中項ナルトキ,球ノ中心ヨリ截面ニ至ル距離ヲ求メヨ.

28. 各稜ノ長サ $a$ 尺ナル正四面體ノ內切球,及ビ外接球ノ半徑ヲ求メヨ.

29. 徑4寸ノ球ヲ一邊6寸ノ正三角形ノ三ツノ邊ニテ支フルトキハ,正三角形ノ面ヨリ球ノ最高點マデノ距離如何.

30. 徑6寸ナル球ノ體積ヲ問フ.

31. 半徑3寸及ビ6寸ナル二ツノ球ノ體積ノ和ニ等シキ體積ヲ有ツ球ノ半徑ヲ求メヨ.

32. 徑5尺ノ鉛球ヲ造ランニハ,徑2寸ノ鉛球幾ツヲ用フベキカ.

33. 地球ノ半徑,面積及ビ體積ヲ概算セヨ.

34. 一ツノ底ヲ有スル球缺狀ノ鍋アリ,口徑2尺4寸,深サ9寸ナルトキ,其ノ容量ヲ勺マデ算出セヨ.

35. 高サモ底面ノ半徑モ共ニ $a$ ナル直圓壔ノ一

方ノ底面ニハ,半徑 $a$ ナル半球ヲ接ギ合セ,他ノ底面ニハ,高サモ底面ノ半徑モ共ニ $a$ ナル直圓錐ヲ接ギ合セタル一ツノ立體アリ,其ノ體積及ビ面積ヲ求メヨ.

**36.** 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付ケテ,之ヲ二ツノ部分ニ分チ,第三邊ヲ軸トシテ之ヲ廻轉スルトキ二ツノ部分ノ生ズル體ノ體積ノ比ヲ求メヨ.

**37.** 一邊ノ長サ $a$ 尺ナル正方形ガ,其ノ一ツノ角頂ヲ過リテ,此ノ角頂ヲ過ラザル對角線ニ平行ナル直線ノ周リニ廻轉シテ生ズル體ノ全表面積,及ビ其ノ體積ヲ求メヨ.

**38.** $AB=3^{尺}$, $BC=5^{尺}$ ナル矩形 ABCD ヲ,其ノ邊 AB ヲ軸トシ廻轉シテ生ズル體ノ體積ト,對角線 AC ヲ軸トシ三角形 ABC ヲ廻轉シテ生ズル體ノ體積トノ比ヲ求メヨ.

**39.** 一邊ノ長サ $2a$ ナル正三角形ノ一邊ヲ $2a$ ダケ引キ延バシ,其ノ端ニ於テ之ニ垂直ニシテ,且コノ三角形ノ平面上ニアル直線ヲ軸トシテ此ノ圖形ヲ廻轉スルトキ三角形ガ生ズル體ノ體積ヲ求メヨ.

**40.** 直角二等邊三角形 ABC アリ,其ノ直角ノ頂點 C ヲ中心トシ, CA ヲ半徑トシテ弧 AMB ヲ畫キ, AC



ヲ軸トシテ之ヲ廻轉スルトキ,弓形 AMB ノ畫ク所ノ體ノ體積ヲ求メヨ.

**41.** 球面三角形ノ各邊ガ $80°$, $105°$, $110°$ ナルトキ,其ノ極三角形ノ各角如何.

**42.** 半徑 1 尺ナル球面上ニ三ツノ角ノ大イサ $100°$, $120°$, $110°$ ナル球面三角形アリ,其ノ面積如何.

**43.** 立方體ノ體積ヲ 10 トスレバ,其ノ稜ニ等シキ高サト徑トヲ有スル圓壔ノ體積,及ビ其ノ稜ニ等シキ徑ヲ有スル球ノ體積ハ,各如何ナル數ニテ表ハサルルカ.

**44.** 平地 1000 坪ノ中ニ徑 20 間ノ圓壔形ノ池ヲ掘リ,掘リ出シタル土ヲ敷地內ニ均シタル後,池ノ深サヲ測リタルニ 8 間アリシト云フ,此ノ地面ノ地盤ハ何程上リタルカ.

**45.** 上部ハ圓壔ニシテ,底ハ半球ナル硝子器アリ,其ノ寸法ハ內法ニテ,圓壔ノ徑 7 糎半,圓壔部ノ深サ 15 糎ナルトキ,其ノ中ニ幾立ノ水ヲ容ルベキカ. 但 $\pi=3.1416$ トセヨ.

**46.** 河アリ,其ノ流速ハ一時間ニ 1 里ニシテ,河水ノ橫斷面積ハ 25 平方尺ナリト云フ,然ラバ一晝夜ニ此ノ斷面ヲ流過スル水ノ量ハ,幾立方尺ナルカ.

47. 西洋樽アリ,口徑1呎7吋,胴徑2呎,高サ4呎半ナルトキ,其ノ容積如何.

# 試驗問題

# 試驗問題

## 略語

| | | | |
|---|---|---|---|
| 各高等. | [各高等學校] | 熊. 高. 工. | [熊本高等工業學校] |
| 二高. | [第二高等學校] | 米. 高. 工. | [米澤高等工業學校] |
| 三高. | [第三高等學校] | 鹿. 高. 農. | [鹿兒島高等農林學校] |
| 七高. | [第七高等學校造士館] | 各醫專. | [各醫學專門學校] |
| 東. 高. 師. | [東京高等師範學校] | 金. 醫. 專. | [金澤醫學專門學校] |
| 農. 大. 實. | [東京農科大學實科] | 京. 醫. 專. | [京都醫學專門學校] |
| 東北農. 大. | [東北農科大學] | 仙. 醫. 專. | [仙臺醫學專門學校] |
| 東北大. 工. | [東北大學工學專門部] | 水. 講. | [水產講習所] |
| 東. 高. 商. | [東京高等商業學校] | 上. 蠶. 專. | [上田蠶絲專門學校] |
| 長. 高. 商. | [長崎高等商業學校] | 商船. | [商船學校] |
| 山. 高. 商. | [山口高等商業學校] | 專. 入. 檢. | [專門學校入學檢定] |
| 小. 高. 商. | [小樽高等商業學校] | 陸. 士. | [陸軍士官候補生] |
| 東. 高. 工. | [東京高等工業學校] | 陸. 經. | [陸軍經理學校] |
| 大. 高. 工. | [大阪高等工業學校] | 海. 兵. | [海軍兵學校] |
| 名. 高. 工. | [名古屋高等工業學校] | 海. 機. | [海軍機關學校] |
| 仙. 高. 工. | [仙臺高等工業學校] | 海. 經. | [海軍經理學校] |

[校名ノ前ニ記シタル亞刺比亞數字ハ明治ノ年數ニシテ，羅馬數字ハ大正ノ年數チ表ハスモノトス.]



## 直線 平面

1. 空間ニ於ケル二直線ノ位置ノ關係ヲ列擧セヨ. [36年. 東. 高. 師.]

2. 三角形ABCノ垂心Oヨリ,其ノ平面ニ垂線OPヲ引ケバ,直線PAハAヲ過リテBCニ平行ナル直線ニ垂直ナリ. [35年. 大. 高. 工., 42年. 山. 高. 商.]

3. LMハ平面P上ノ直線ニシテ,Aハ此ノ平面外ノ一點ナリ. Aヨリ平面P及ビ直線LMへ垂線AC, AOヲ引クトキ,COハLMニ垂直ナリ. [39年. 名. 高. 工.]

4. 徑ABナル半圓周上ノ一點ヲCトシ,Aヨリ圓ノ平面へ垂線APヲ立テ,之ヲ弦BCニ等シク取レバ, $\triangle PCB = \triangle PAB$ ナルコトヲ證セヨ. [42年. 專. 入. 檢.]

5. 空間ニ三ツノ直線OX, OY, OZアリテ,一點Oニ於テ相交ル,又二ツノ三角形ABC, $abc$ アリテ,其ノ角頂A及ビ$a$ハOX上ニ,B及ビ$b$ハOY上ニ,C及ビ$c$ハOZ上ニアリ, BC及ビ$bc$, CA及ビ$ca$, AB及ビ$ab$ノ交點,或ハ是等ノ邊ノ延線ノ交點ハ,同一ノ直線上ニアリ. [40年. 東. 高. 工.]

6. 二點A, Bヨリ平面Sへ垂線AP, BQヲ引キ,又

直線ABニ垂直ナル平面Tヲ作リ,平面Sト直線MNニ於テ交ラシム,然ルトキハMNハPQニ垂直ナリ.

[42年. 七高.]

7. 直角三角形ノ直角ノ一邊ヲ含ム平面上ニ於ケル,此ノ直角三角形ノ正射影ハ直角三角形ナリ.

[34年. 東. 高. 工.]

8. 或線ノ相交ル二ツノ平面上ヘノ正射影ガ,何レモ直線ナルトキハ,其ノ線ハ一般ニ直線ナルコトヲ證シ,且ソノ除外例ヲ示セ.

[I年. 東. 高. 師.]

9. 與ヘラレタル點ノ相交ル二ツノ平面上ニ於ケル正射影ヨリ,其ノ二ツノ平面ノ交リヘ垂線ヲ引クトキハ,二ツノ垂線ハ二ツノ平面ノ交リト同ジ點ニ於テ出會フ.

[32年. 東. 高. 師.]

10. 平面ニ斜交スル一直線ガ,此ノ面上ニアリテ其ノ趾ヲ過ル諸直線トナス角ノ中,其ノ正射影トナス鋭角ガ最小ナリ.

[42年. III年. 海. 兵.]

11. 直線ABノ平面S上ニ投ズル正射影ト直角ヲナシ,且ソノ平面S上ニアル任意ノ直線ハ直線ABト直角ヲナス.

[40年. 東. 高. 師.]

12. 互ニ平行ナル二直線ノ各ヲ過ル二平面ノ交リハ其ノ二直線ノ各ニ平行ナリ.

[43年. 長. 高. 商.]



13. 互ニ垂直ナル二ツノ平面ノ交リ上ノ一點ヲ過リテ,其ノ交リト半直角ヲナス所ノ直線ヲ各ノ平面上ニ引ケバ,此ノ二直線ノナス角ハ直角ノ三分ノ二ニ等シキカ,或ハ其ノ補角ニ等シ.

[44年. 海. 機.]

14. 相異ナレル平面上ニアル角AOB, AOCガ相等シキトキハ,其ノ平面ニテナス二面角ヲ二等分スル平面ハ,平面BOCニ垂直ナリ.

[44年. 東北農. 大.]

15. 三面角ノ一ツノ二面角ガ直角ナルトキ,任意ノ稜ニ垂直ナル平面ニテ此ノ三面角ヲ截レバ,其ノ截口ハ直角三角形ナリ.

[34年. 大. 高. 工., 44年. 東. 高. 工.]

16. Oヲ頂點トスル三面角ノ三ツノ平面角ガ皆直角ナルトキハ,任意ノ一點XヨリミツノS稜ニ垂線XP, XQ, XRヲ引クトキハ

$$\overline{OX}^2=\overline{OP}^2+\overline{OQ}^2+\overline{OR}^2.$$

[41年. 海. 機.]

# 多面體

1. 正四面體ノ一ツノ頂點ヨリ底面ヘ引ケル垂線ノ趾ハ,底面ノ重心ト一致スルコトヲ證セヨ.

[45年. 專. 入. 檢.]

2. 正四面體ノ相交ラザル稜ハ,互ニ直角ナルコトヲ證セヨ. [III年. 米. 高. 工.]

3. 四面體 ABCD ノ底面 ABC ニ平行ナル截面ヲ作リ,此ノ截面ノ邊ノ中點 G, H, K ト,ソレゾレ底面ノ對角頂 C, A, B トヲ結ビ付クル三ツノ直線 GC, HA, KB ハ,同一ノ點ニ於テ相交ル. [38年. 專. 入. 檢.]

4. 一ノ四面體ニ於テ,相對スル二稜ガ相等シキトキハ,其ノ二邊ニ平行ナル平面ニテノ截口ハ,周ノ一定ナル平行四邊形ナリ. [40年. 長. 高. 商.]

5. 四面體ノ各二面角ヲ二等分スル平面ハ,同一ノ點ヲ過ル. [33年. 三高.]

6. 四面體ノ六ツノ稜ノ上ノ正方形ノ和ハ,相對スル稜ノ中點ヲ結ビ付クル三ツノ直線上ノ正方形ノ和ノ四倍ニ等シ. [III年. 各高等.]

7. 四面體ノ底面ガ等邊三角形ニシテ,其ノ頂ニ



於ケル各角ガ直角ナルトキハ,其ノ高サノ上ノ正方形ト,頂點ニ於テ止マル一稜ノ上ノ正方形トハ,恒ニ一定ノ關係ヲ有スルコトヲ證セヨ. [II年. 海. 經.]

# 旋轉體

1. 相似直圓壔ノ側面積ハ,底面ノ半徑ノ平方ニ比例シ,又體積ハ底面ノ半徑ノ立方ニ比例ス.

[41年. 陸. 士.]

2. 相似直圓錐ノ體積ハ,底面ノ徑ノ立方ニ比例ス.

[44年. 農. 大. 實.]

3. 一ツノ直線ハ一ツノ球面ト,二ツヨリ多クノ點ニ於テ出會フコト能ハズ.

[42年. 仙. 高. 工.]

4. 球ニ外切スル直圓錐ノ高サガ,其ノ球ノ徑ノ二倍ナルトキハ,直圓錐ノ全面積ハ球ノ面積ノ二倍ニ等シ.

[40年. 陸. 士.]

5. 球ノ體積ヲ $V$ トシ,內接正六面體ノ稜ヲ $a$ トスレバ $V=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$ ナルコトヲ證セヨ.

[32年. 陸. 士.]



# 軌跡

1. 平面外ノ一定點ヨリ,此ノ平面上ノ一定點ヲ過リテ此ノ平面上ニアル直線ニ下セル垂線ノ趾ノ軌跡ヲ求メヨ.

[39年. 東. 高. 商., 42年. 各高等.]

2. 二定點 A, B ヨリ,一點 P ニ至ル距離ノ平方ノ差ガ一定不易ナルトキ,點 P ノ軌跡ヲ求メヨ.

[II年. 商船.]

3. 與ヘラレタル球面上ノ一ツノ定點 O ヲ過ル任意ノ直線ヲ引キ,球面ト點 A ニ於テ出會ハシメ,此ノ直線上ニ一點 A′ ヲ取リ,矩形 OA.OA′ ヲ一定ナラシムルトキ,點 A′ ノ軌跡ヲ求メヨ.

[42年. 海. 機.]

# 作圖題

1. 一ツノ平面ノ兩側ニアル二ツノ點A,Bヨリ,平面上ノ一ツノ點Pマデノ距離AP,BPノ差ガ最大ナル如キ點Pノ位置ヲ求メヨ. [33年.二高.]

2. 一ツノ圓アリ,其ノ平面外ノ一點ヨリ,此ノ圓周ニ至ル最長及ビ最短ナル直線ヲ作ルコトヲ求ム. [45年.各醫.專.]

3. 空間ニ三ツノ直線X, Y, Zアリ, Xニ平行シテY, Zニ交ルベキ直線ヲ引ケ. [II年.水.講.]

4. 二ツノ平面M及ビNヲ與ヘ,與ヘラレタル點Aヲ過リテ平面Nニ平行ニシテ,平面Mト與ヘラレタル角ヲナス直線ヲ引クコト. [42年.名.高.工.]

5. 四面體ノ各角頂ヨリ等距離ナル點ヲ求メヨ. [40年.東.高.商.]

6. 與ヘラレタル三ツノ點ヲ過リ,且與ヘラレタル半徑ノ球ヲ畫クコト. [33年.陸.士.]

---



# 計算問題

1. 矩形ノ紙ABCDアリ, ABハ4尺, BCハ3尺ナリ,之ヲ對角線ACニ沿ヒテ折リ,平面ABCトCDAトヲシテ互ニ垂直ナラシムルトキ, BDノ距離ヲ求メヨ. [39年.東.高.工., 45年.鹿.高.農.]

2. 各邊ノ長サガ$a$ナル正三角形ABCヲ, AヨリBCヘ引ケル垂線ニ沿ヒテ折リ, 60度ノ二面角ヲ作ルトキ,直線BCト頂點Aトノ距離ハ$a$ノ幾倍ナルカ. [44年.東.高.師.]

3. 直角體ノ一ツノ角頂ニ於テ出會フ三ツノ面ノ面積ヲ,ソレゾレ3510平方寸, 3942平方寸, 4745平方寸ナリトシ,各稜ノ長サヲ求メヨ. [38年.陸.士.]

4. 各稜ノ長サ1尺ナル正四面體ノ表面積,及ビ體積ヲ求メヨ. 又各稜ノ長サ2尺ナルトキハ如何. [35年.東.高.工.]

5. 高サ6寸ノ正四面體ノ體積ヲ求メヨ. [44年.熊.高.工.]

6. 立方體ノ全面積937平方寸.5ナルトキ,其ノ體積ハ幾何ナルカ. [39年.陸.士.]

7. 平地一坪ヲ4[illegible].5ノ深サニ覆ヘル降雨ノ量ハ幾升ナルカ. 但一升枡ノ寸法ハ內法ニテ底面ハ4寸9分平方ニシテ,深サハ2寸7分トス. [43年. 陸. 士.]

8. 廣サ5尺平方ノ水槽ニ深サ4尺ノ水アリ.

(1) 此ノ容積幾何ナルカ.

(2) 砂ヲ入レテ此ノ水ノ表面ヲ一尺高ムルニハ,幾何ノ砂ヲ要スルカ. 但コノ砂一立方尺中ニ滲入スベキ水ノ量ハ200立方寸ナリトス.

[39年. 海. 兵.]

9. 厚サ$\frac{3}{8}$吋ノ鐵板ニテ作ラレタル直角壔狀ノ無蓋ノ水溜アリ,其ノ底面ハ內法ニテ3呎4吋ト2呎6吋トノ矩形ニシテ,其ノ深サ4呎8吋ナリ,水ヲ滿タセルトキ,及ビ空虛ナルトキ,此ノ水溜ノ重量ヲ計算セヨ. 但鐵ノ比重ヲ7.2トシ,水一立方呎ノ重サヲ62封度.3トス. [43年. 大. 高. 工.]

10. 東西ニ傾斜ナク,北ヨリ南ニ向ヒ,地面ニ沿ヒテ,$m$尺ニ付キ$n$尺低下セル地面アリ,此ノ地面中,東西$a$尺,南北$b$尺ノ矩形ノ地所ヲ,北ノ境界線ヨリ地面ニ沿ヒテ$\frac{b}{4}$尺南ノ處ト同ジ高サニ地均セントス,幾何ノ土ヲ補フベキカ. [II年. 海. 兵.]

11. 底面ガ正三角形ナル角壔アリ,其ノ體積1立方米,其ノ高サ0米.8ナリ. 底面ノ一邊ヲ糎ノ位マデ正シク算出セヨ. [43年. 陸. 經.]



12. 高サ2寸5分ナル直角壔アリ,其ノ底面ハ正六角形ニシテ底面ノ一邊ハ1寸2分ナリト云フ,然ラバ此ノ角壔ノ全面積,及ビ體積ハ各幾何ナルカ.

[42年. 陸. 士.]

13. 正六角錐ノ高サ$a$吋,底面ノ一邊ノ長サ$b$吋ナルトキ,其ノ表面積ヲ求メヨ. [41年. 土. 釐. 專.]

14. 底面ノ一邊ノ長サ4尺,斜稜ノ長サ10尺ナル正四角錐ノ全面積,及ビ體積ヲ求メヨ.

[44年. 專. 入. 檢.]

15. 對角線ノ長サ$a$寸ナル正方形ヲ底面トスル直角錐ノ斜稜,及ビ底面ノ一邊ノ長サノ比3:2ナルトキ,體積及ビ斜面ノ面積ヲ求メヨ. [II年. 東北大. 工.]

16. 體積1立方寸ナル角錐アリ,底面ハ平行四邊形ニシテ,其ノ二邊及ビ對角線ガソレゾレ1寸,2寸,$\sqrt{7}$寸ナルトキハ,高サ何寸ナルカ. [39年. 名. 高. 工.]

17. 底面積9平方寸,高サ5寸ノ角錐アリ,之ヲ高サ3寸ノ處ニテ,底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,此ノ二ツノ部分ノ體積各幾何ナルカ. [II年. 海. 兵.]

18. 半徑R ナル水槽アリ,今活塞ノ通路ノ長サ

$l$ ニシテ,其ノ内半徑 $r$ ナルぽんぷヲ使用シテ,此ノ水ノ深サヲ $l$ ダケ減ゼントス. 幾回活塞ヲ上下スベキカ. [42年.海.兵.]

19. 直圓壔ノ高サ1米ニシテ,其ノ全面積ハ半徑2米ナル圓ノ面積ニ等シト云フ,圓壔ノ半徑,及ビ其ノ體積如何. [38年.陸.士.]

20. 底面ノ半徑3寸,斜高9寸ノ直圓錐ヲ,底面ニ平行ナル一平面ニテ截リテ生ズル圓錐ト圓臺トノ體積ノ比ヲ1:7ナラシメンニハ,頂點ヨリ斜高ニ沿ヒ幾何ノ處ニテ截ルベキカ. [III年.海.兵.]

21. 斜高 $a$ 寸,上口徑 $2b$ 寸[下口徑ハ甚ダ小ナルユエ無キモノト見做ス]ノ漏斗アリ,斜高ニ沿ヒ $n$ 個ノ刻ミヲ附シ,相隣レル刻ミ間ニ於ケル漏斗ノ容量ヲ相等シカラシメンニハ,如何ナル間隔ニ刻ミヲ附スベキカ. [40年.金.醫.專.]

22. 底面ノ半徑20寸,及ビ10寸ニシテ,高サ16寸ナル截頭直圓錐アリ,今高サノ中點ニ於テ底面ニ平行ナル平面ニテ之ヲ二分シ,各部ノ體積ヲ計算セヨ. [II年.大.高.工.]

23. 雨天ニ屋外ニ置キタル口徑1尺,底徑6寸,深サ8寸ナルばけつニ,水ノ溜レルコトばけつノ深サ



ノ半分ニ至リシト云フ,一坪ノ面積ニ降レル雨ノ量幾斗幾升ナルカ. 但1升ヲ64立方寸.8トス. [43年.海.兵.]

24. 直圓錐ノ底面ノ周ハ32尺ニシテ,其ノ體積ハ半徑5尺ノ球ノ體積ニ等シ,此ノ圓錐ノ高サヲ求メヨ. [42年.海.機.,44年.海.兵.]

25. 徑6糎,高サ28糎ノ直圓壔ノ兩端ニ同ジ徑ノ半球ヲ附シタル立體アリ,之ト同體積ヲ有スル球ノ徑ヲ求メヨ. [44年.小.高.商.]

26. 直角三角形アリ,直角ヲ夾ム二邊ノ長サハ3寸及ビ4寸ナリトス. 今ソノ直角頂ヲ過リ,斜邊ニ平行ナル直線ヲ軸トシテ,此ノ三角形ヲ全一廻轉セシムルトキ,生ズル所ノ立體ノ體積及ビ全面積ヲ求メヨ. [III年.熊.高.工.]

27. 正三角形ABCノ高サヲADトシ,ADヲ軸トシテ,此ノ三角形ヲ廻轉シテ,生ズル所ノ直圓錐ノ全面積ヲ求メヨ. 但一邊ノ長サヲ3尺トス. [45年.陸.經.]

28. 三角形ABCニ於テ AB=10寸, BC=21寸, CA=17寸トシ, Aヲ過リBCニ平行ナル直線XAX'ヲ軸トシテ,此ノ三角形ヲ廻轉スルトキ,

(1) 三角形ABCノ作ル廻轉體ノ體積.

(2) 三角形ABCノ重心ノ畫ク徑路ト三角形ABCノ面積トノ相乘積ヲ計算セヨ. [44年. 大. 高. 工.]

29. 三邊ノ比3:4:5ナル直角三角形ノ各邊ヲ,ソレゾレ軸トシテ廻轉セシメ,依リテ生ズル立體ノ體積ヲ比較セヨ. [41年. 仙. 高. 工.]

30. 三角形ABCニ於テBCハ18寸, CAハ15寸, ABハ12寸ナルトキ,邊BC上ニ中心ヲ有シ,且他ノ二邊ニ切スル様ニ,半圓ヲ內切セシメ, BCヲ軸トシテ,此ノ半圓ヲ全一廻轉セシムルトキ,生ズル所ノ立體ノ面積及ビ體積ヲ求メヨ. 而シテ此ノ體積ニ等シキ容量ヲ升ニテ表ハセ. [II年. 陸. 士.]

31. 徑24間,深サ2間4尺ノ圓形ノ池ヲ掘リテ出シタル土ヲ殘ラズ使用シテ,池ノ周圍ニ一定ノ幅ノ道ヲ盛リ上ゲントス,道路ノ高サヲ一間半トスレバ道路ノ幅ヲ何程トスベキカ. [43年. 各醫. 專.]

32. 直圓壔ノ水槽アリ,其ノ底面ノ半徑2尺,高サ12尺.9654ナリ,此ノ水槽ニハ何程ノ水ヲ容レ得ベキカ. 但64立寸方.827ヲ以テ一升トシ, $\pi$ ハ3.1416ナリトシテ計算スベシ. [43年. 商船.]

33. 徑1尺2寸ノ球ノ全面ニ, 4寸平方ノ金箔ヲ



張リ詰メントス,約ソ何枚程ノ金箔ヲ要スルカ. [40年. 京. 醫. 專.]

34. 二ツノ金屬ノ空球アリ,內部空所ノ半徑ソレゾレ1吋及ビ2吋ニシテ,其ノ厚サ何レモ $\frac{1}{2}$ 吋ナリ. 之ヲ鑄潰シテ一ツノ實球ヲ造ラントス,實球ノ半徑幾何ナルベキカ. [30年. 東. 高. 工.]

35. 高サ3尺4寸,底面ノ半徑1尺5寸ナル直圓錐ノ全面積ヲ平方寸ノ位マデ正シク計算セヨ. [42年. 東. 高. 工.]

36. 底面ノ半徑5寸,高サ1尺2寸ノ直圓錐ニ內切スル球ノ面積及ビ體積ヲ求メヨ. [II年. 熊. 高. 工.]

37. 底面ノ半徑1呎4吋,高サ5呎ナル直圓壔形ノ水槽ニ滿タセル水ノ重量幾何ナルカ. 但清水一立方呎ノ重量ハ64封度ナリ. [30年. 商船.]

38. 直圓壔ノ側面積ガ169平方米.56ニシテ,其ノ高サト徑トノ比ハ2:3ナリ,其ノ體積如何. 但 $\pi$ ヲ3.14トシテ計算セヨ. [38年. 仙. 醫. 專.]

39. 長サ5尺7寸,幅4尺ノ銅板7枚ヨリ底面ノ半徑3寸,高サ4尺ノ直圓壔ノ筒[兩底ナシ]18個ト半徑4寸ノ圓板35枚トヲ造リ,其ノ殘餘ノ銅片ノ目方ヲ量リシニ157匁5分アリタリトセバ,銅板一枚

ノ目方幾何ナルカ. 但銅板ハ厚サ一樣ナル薄キ板トス.

[44年. 陸. 士.]

**40.** 面積$a^2$ナル一ツノ矩形アリ,此ノ矩形ノ相隣レル二邊ヲ軸トシテ,ソレゾレ之ヲ全一廻轉セシメテ生ズル二ツノ圓壔ノ體積ノ差ハ半徑$\frac{a}{2}$ナル球ノ體積ノ3倍ニ等シ. 矩形ノ二邊各幾何ナルカ.

[43年. 海. 機.]

---

# 答

**第二編** **13.** 約9寸4分3厘. **19.** 376平方寸.99.

(雜題) **1.** 93537284立方呎. **5.** 3,或ハ4,又ハ5.

**第三編** **19.** 約2尺8寸0分. **22.** 0平方寸.625.

**23.** 6917463907立方哩.

**復習雜題** (計算問題) **1.** 31尺.32. **2.** 30, 30.

**3.** $3n$, $8(n-1)\hat{R}$, $4(n-1)\hat{R}$. **4.** 5寸.609, 3寸.090.

**5.** $\sqrt[3]{\frac{a^2V}{bc}}$, $\sqrt[3]{\frac{b^2V}{ca}}$, $\sqrt[3]{\frac{c^2V}{ab}}$.

**6.** 約8寸3分6厘, 5寸5分7厘, 1尺3寸9分3厘.

**7.** 1200平方寸. **8.** 2寸.309. **9.** $10(2-\sqrt{2})$糎.

**10.** 對角線$\sqrt{2}a$, 全面積$2\sqrt{3}a^2$, 體積$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

**11.** 側面積160平方寸, 全面積210平方寸, 體積200立方寸. **12.** $\frac{9}{4}a^2b$立方尺.

**13.** $36\sqrt{3}$, 卽チ62立方寸.35. **14.** 1:7.

**15.** 約363升.46. **16.** 785立方寸.4

**17.** 側面積785平方寸.4, 全面積942平方寸.48, 體積1963立方寸.5.

**18.** 側面積549平方寸.78, 全面積703平方寸.72, 體積1231立方寸.50.

**19.** 約140立方糎.7. **20.** 約10314立方糎.5, 39521瓦.

**21.** 側面積624平方寸, 全面積962平方寸, 體積1828立方寸.

**22.** 3000立坪. **23.** 側面積5174平方寸.21, 全面積6509平方寸.39, 體積36253立方寸.98.

**24.** 2827平方寸.4. **25.** 104. **26.** 3:1.

**27.** $(\sqrt{5}-2)r$. **28.** $\frac{\sqrt{6}}{12}a$尺, $\frac{\sqrt{6}}{4}a$尺.

**29.** 3寸. **30.** 113立方寸.10.

31. $\sqrt[3]{243}$, 卽チ 6寸.240. 32. 15625 個.

33. 約 6366 粁, 約 50928 萬平方粁, 約 $108\times10^{10}$ 立方粁.

34. 約 3 斗 7 升 2 合 9 勺. 35. $2\pi a^3$, $(4+\sqrt{2})\pi a^2$.

36. 1. 37. $4\sqrt{2}\pi a^2$ 平方尺, $\sqrt{2}\pi a^3$ 立方尺.

38. $\sqrt{34}:1$. 39. $6\sqrt{3}\pi a^3$. 40. $\frac{1}{3}\pi a^3$. 41. 100°, 75°, 70°.

42. $\frac{5}{6}\pi$ 平方尺. 43. 7.854 强, 5.236 强.

44. 約 2 間半. 45. 0立.773 强.

46. 7776030 立方尺. 47. 11立方呎.792 弱.

## 試驗問題 (計算問題)

1. 約 3 尺 6 寸 7 分.

2. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ 倍. 3. 65 寸, 54 寸, 73 寸.

4. 1平方尺.732, 0立方尺.118; 6平方尺.928, 0立方尺.943.

5. 約 46立方寸.77. 6. 1953立方寸.125. 7. 82升.466.

8. 100 立方尺, 31立方尺.25. 9. 12568 封度弱, 14991 封度弱.

10. $\frac{ab^2n}{4m^2}\sqrt{m^2-n^2}$ 立方尺. 11. 1米.69.

12. 約 2548 平方分, 約 9353 立方分.

13. $\frac{3}{2}b(\sqrt{3}b+\sqrt{4a^2+3b^2})$ 平方吋.

14. 94平方尺.383, 51立方尺.155. 15. $\frac{\sqrt{14}}{24}a^3$ 立方寸, $\sqrt{2}a^2$ 平方寸.

16. 約 1寸.732. 17. 0立方寸.96, 14立方寸.04.

18. $\frac{R^2}{r^2}$. 19. 1 米, $\pi$ 立方米. 20. 4 寸 5 分.

21. 下端ヨリ斜高ニ沿ヒテ順次ニ

$$a\sqrt[3]{\frac{1}{n+1}}\text{寸},\ a\sqrt[3]{\frac{2}{n+1}}\text{寸},\ldots\ldots,\ a\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}}\text{寸}.$$

22. 上部 3979 立方寸强, 下部 7749 立方寸强.

23. 約 1 石 1 斗 0 升. 24. 約 19尺.27. 25. 12 輛.

26. 60立方寸.32, 128平方寸.18. 27. 約 21平方尺.2057.

28. (1) 2815 立方寸弱. (2) 前同樣.



29. 20 : 15 : 12. 30. 549平方寸.77..., 1212立方寸.1..., 18升.69.... 31. 8 間.

32. 25 石 1 斗 3 升 2 合 8 勺. 33. 28 枚餘.

34. 2吋.154 强. 35. 2458 平方寸.

36. 139平方寸.626..., 155立方寸.14.... 37. 約 1787 封度.

38. 381立方米.51. 39. 570 匁强.

40. $\frac{\sqrt{145}-1}{12}a$, $\frac{\sqrt{145}+1}{12}a$.

# 圓周率

## 及び其の逆數の冪及び根

$\pi = 3.14159265358979323846264 3\ldots\ldots$

略シテ $\pi = 3.1416.$

| | $\pi$ | | $\pi^2$ | | $\pi^3$ | | $\sqrt{\pi}$ | | $\sqrt[3]{\pi}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.1415927 | 1 | 9.8696044 | 1 | 31.0062767 | 1 | 1.7724539 | 1 | 1.4645919 |
| 2 | 6.2831853 | 2 | 19.7392088 | 2 | 62.0125534 | 2 | 3.5449077 | 2 | 2.9291838 |
| 3 | 9.4247780 | 3 | 29.6088132 | 3 | 93.0188300 | 3 | 5.3173616 | 3 | 4.3937756 |
| 4 | 12.5663706 | 4 | 39.4784176 | 4 | 124.0251067 | 4 | 7.0898154 | 4 | 5.8583675 |
| 5 | 15.7079633 | 5 | 49.3480220 | 5 | 155.0313834 | 5 | 8.8622693 | 5 | 7.3229594 |
| 6 | 18.8495559 | 6 | 59.2176264 | 6 | 186.0376601 | 6 | 10.6347231 | 6 | 8.7875513 |
| 7 | 21.9911486 | 7 | 69.0872308 | 7 | 217.0439368 | 7 | 12.4071770 | 7 | 10.2521432 |
| 8 | 25.1327412 | 8 | 78.9568352 | 8 | 248.0502134 | 8 | 14.1796308 | 8 | 11.7167351 |
| 9 | 28.2743339 | 9 | 88.8264396 | 9 | 279.0564901 | 9 | 15.9520847 | 9 | 13.1813269 |

| | $\frac{1}{\pi}$ | | $\frac{1}{\pi^2}$ | | $\frac{1}{\pi^3}$ | | $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ | | $\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.3183099 | 1 | 0.1013210 | 1 | 0.0322515 | 1 | 0.5641896 | 1 | 0.6827841 |
| 2 | 0.6366198 | 2 | 0.2026420 | 2 | 0.0645030 | 2 | 1.1283792 | 2 | 1.3655681 |
| 3 | 0.9549297 | 3 | 0.3039631 | 3 | 0.0967545 | 3 | 1.6925688 | 3 | 2.0483522 |
| 4 | 1.2732395 | 4 | 0.4052841 | 4 | 0.1290060 | 4 | 2.2567583 | 4 | 2.7311363 |
| 5 | 1.5915494 | 5 | 0.5066051 | 5 | 0.1612575 | 5 | 2.8209479 | 5 | 3.4139203 |
| 6 | 1.9098593 | 6 | 0.6079261 | 6 | 0.1935090 | 6 | 3.3851375 | 6 | 4.0967044 |
| 7 | 2.2281692 | 7 | 0.7092471 | 7 | 0.2257605 | 7 | 3.9493271 | 7 | 4.7794885 |
| 8 | 2.5464791 | 8 | 0.8105682 | 8 | 0.2580120 | 8 | 4.5135167 | 8 | 5.4622725 |
| 9 | 2.8647890 | 9 | 0.9118892 | 9 | 0.2902635 | 9 | 5.0777063 | 9 | 6.1450566 |

$\log\pi = 0.4971499$, $\log\pi^2 = 0.9942997$, $\log\pi^3 = 1.4914496$, $\log\sqrt{\pi} = 0.2485749$,

$\log\sqrt[3]{\pi} = 0.1657166$, $\log\frac{1}{\pi} = \bar{1}.5028501$, $\log\frac{1}{\pi^2} = \bar{1}.0057003$, $\log\frac{1}{\pi^3} = \bar{2}.5085504$,

$\log\sqrt{\frac{1}{\pi}} = \bar{1}.7514251$, $\log\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = \bar{1}.8342834$.

# 數

## の冪及び根並に逆數

| 數 | 平方 | 立方 | 平方根 | 立方根 | 平方ノ立方根 | 逆數 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.0000000 | 1.000000000 |
| 2 | 4 | 8 | 1.4142136 | 1.2599210 | 1.5874011 | 0.500000000 |
| 3 | 9 | 27 | 1.7320508 | 1.4422496 | 2.0800837 | 0.333333333 |
| 4 | 16 | 64 | 2.0000000 | 1.5874011 | 2.5198421 | 0.250000000 |
| 5 | 25 | 125 | 2.2360680 | 1.7099759 | 2.9240177 | 0.200000000 |
| 6 | 36 | 216 | 2.4494897 | 1.8171206 | 3.3019272 | 0.166666667 |
| 7 | 49 | 343 | 2.6457513 | 1.9129312 | 3.6593057 | 0.142857143 |
| 8 | 64 | 512 | 2.8284271 | 2.0000000 | 4.0000000 | 0.125000000 |
| 9 | 81 | 729 | 3.0000000 | 2.0800837 | 4.3267487 | 0.111111111 |
| 10 | 100 | 1000 | 3.1622777 | 2.1544347 | 4.6415888 | 0.100000000 |
| 11 | 121 | 1331 | 3.3166248 | 2.2239801 | 4.9460874 | 0.090909091 |
| 12 | 144 | 1728 | 3.4641016 | 2.2894286 | 5.2414828 | 0.083333333 |
| 13 | 169 | 2197 | 3.6055513 | 2.3513347 | 5.5287748 | 0.076923077 |
| 14 | 196 | 2744 | 3.7416574 | 2.4101422 | 5.8087857 | 0.071428571 |
| 15 | 225 | 3375 | 3.8729833 | 2.4662121 | 6.0822020 | 0.066666667 |
| 16 | 256 | 4096 | 4.0000000 | 2.5198421 | 6.3496042 | 0.062500000 |
| 17 | 289 | 4913 | 4.1231056 | 2.5712816 | 6.6114890 | 0.058823529 |
| 18 | 324 | 5832 | 4.2426407 | 2.6207414 | 6.8682855 | 0.055555556 |
| 19 | 361 | 6859 | 4.3588989 | 2.6684016 | 7.1203674 | 0.052631579 |
| 20 | 400 | 8000 | 4.4721360 | 2.7144177 | 7.3680630 | 0.050000000 |
| 21 | 441 | 9261 | 4.5825757 | 2.7589243 | 7.6116626 | 0.047619048 |
| 22 | 484 | 10648 | 4.6904158 | 2.8020393 | 7.8514244 | 0.045454545 |
| 23 | 529 | 12167 | 4.7958315 | 2.8438670 | 8.0875794 | 0.043478261 |
| 24 | 576 | 13824 | 4.8989795 | 2.8844991 | 8.3203353 | 0.041666667 |
| 25 | 625 | 15625 | 5.0000000 | 2.9240177 | 8.5498797 | 0.040000000 |
| 26 | 676 | 17576 | 5.0990195 | 2.9624960 | 8.7763830 | 0.038461538 |
| 27 | 729 | 19683 | 5.1961524 | 3.0000000 | 9.0000000 | 0.037037037 |
| 28 | 784 | 21952 | 5.2915026 | 3.0365889 | 9.2208726 | 0.035714286 |
| 29 | 841 | 24389 | 5.3851648 | 3.0723168 | 9.4391307 | 0.034482759 |
| 30 | 900 | 27000 | 5.4772256 | 3.1072325 | 9.6548938 | 0.033333333 |
| 31 | 961 | 29791 | 5.5677644 | 3.1413806 | 9.8682724 | 0.032258065 |
| 32 | 1024 | 32768 | 5.6568542 | 3.1748021 | 10.0793684 | 0.031250000 |
| 33 | 1089 | 35937 | 5.7445626 | 3.2075343 | 10.2882765 | 0.030303030 |
| 34 | 1156 | 39304 | 5.8309519 | 3.2396118 | 10.4950847 | 0.029411765 |
| 35 | 1225 | 42875 | 5.9160798 | 3.2710663 | 10.6998748 | 0.028571429 |
| 36 | 1296 | 46656 | 6.0000000 | 3.3019272 | 10.9027235 | 0.027777778 |
| 37 | 1369 | 50653 | 6.0827625 | 3.3322218 | 11.1037025 | 0.027027027 |
| 38 | 1444 | 54872 | 6.1644140 | 3.3619754 | 11.3028786 | 0.026315789 |
| 39 | 1521 | 59319 | 6.2449980 | 3.3912114 | 11.5003151 | 0.025641026 |
| 40 | 1600 | 64000 | 6.3245553 | 3.4199519 | 11.6960709 | 0.025000000 |
| 41 | 1681 | 68921 | 6.4031242 | 3.4482172 | 11.8902022 | 0.024390244 |
| 42 | 1764 | 74088 | 6.4807407 | 3.4760266 | 12.0827612 | 0.023809524 |
| 43 | 1849 | 79507 | 6.5574385 | 3.5033981 | 12.2737980 | 0.023255814 |
| 44 | 1936 | 85184 | 6.6332496 | 3.5303483 | 12.4633594 | 0.022727273 |
| 45 | 2025 | 91125 | 6.7082039 | 3.5568933 | 12.6514900 | 0.022222222 |

| 數 | 平方 | 立方 | 平方根 | 立方根 | 平方ノ立方根 | 逆數 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 2116 | 97336 | 6.7823300 | 3.5830479 | 12.8382321 | 0.021739130 |
| 47 | 2209 | 103823 | 6.8556546 | 3.6088261 | 13.0236256 | 0.021276600 |
| 48 | 2304 | 110592 | 6.9282032 | 3.6342411 | 13.2077090 | 0.020833333 |
| 49 | 2401 | 117649 | 7.0000000 | 3.6593057 | 13 3905183 | 0.020408163 |
| 50 | 2500 | 125000 | 7.0710678 | 3.6840314 | 13.5720880 | 0.020000000 |
| 51 | 2601 | 132651 | 7.1414284 | 3 7084298 | 13.7524514 | 0.019607843 |
| 52 | 2704 | 140608 | 7.2111026 | 3.7325111 | 13 9316395 | 0.019230769 |
| 53 | 2809 | 148877 | 7.2801099 | 3.7562858 | 14.1096827 | 0.018867925 |
| 54 | 2916 | 157464 | 7.3484692 | 3.7797631 | 14.2866095 | 0.018518519 |
| 55 | 3025 | 166375 | 7.4161985 | 3 8029525 | 14.4624474 | 0.018181818 |
| 56 | 3136 | 175616 | 7 4833148 | 3.8258624 | 14 6372228 | 0.017857143 |
| 57 | 3249 | 185193 | 7.5498344 | 3.8485011 | 14.8109610 | 0 017543860 |
| 58 | 3364 | 195112 | 7.6157731 | 3.8708766 | 14.9836859 | 0.017241379 |
| 59 | 3481 | 205379 | 7.6811457 | 3.8929965 | 15.1554212 | 0.016949153 |
| 60 | 3600 | 216000 | 7.7459667 | 3 9148676 | 15.3261887 | 0.016666667 |
| 61 | 3721 | 226981 | 7.8102497 | 3.9364972 | 15.4960101 | 0.016393443 |
| 62 | 3844 | 238328 | 7.8740079 | 3.9578915 | 15.6649060 | 0.016129032 |
| 63 | 3969 | 250047 | 7.9372539 | 3.9790571 | 15.8328962 | 0.015873016 |
| 64 | 4096 | 262144 | 8.0000000 | 4 0000000 | 16.0000000 | 0.015625000 |
| 65 | 4225 | 274625 | 8.0622577 | 4 0207256 | 16.1662356 | 0.015384615 |
| 66 | 4356 | 287496 | 8.1240384 | 4.0412401 | 16.3316209 | 0 015151515 |
| 67 | 4489 | 300763 | 8.1853528 | 4.0615480 | 16.4961730 | 0.014925373 |
| 68 | 4624 | 314432 | 8.2462113 | 4.0816551 | 16 6599083 | 0.014705882 |
| 69 | 4761 | 328509 | 8 3066239 | 4.1015661 | 16.8228430 | 0.014492754 |
| 70 | 4900 | 343000 | 8 3666003 | 4.1212853 | 16.9849925 | 0.014285714 |
| 71 | 5041 | 357911 | 8.4261498 | 4 1408178 | 17.1463716 | 0.014084507 |
| 72 | 5184 | 373248 | 8.4852814 | 4.1601676 | 17.3069948 | 0 013888889 |
| 73 | 5329 | 389017 | 8.5440037 | 4.1793392 | 17 4668762 | 0.013698630 |
| 74 | 5476 | 405224 | 8.6023253 | 4.1983364 | 17.6260290 | 0.013513514 |
| 75 | 5625 | 421875 | 8.6602540 | 4.2171633 | 17.7844665 | 0 013333333 |
| 76 | 5776 | 438976 | 8.7177979 | 4.2358236 | 17.9422014 | 0.013157895 |
| 77 | 5929 | 456533 | 8.7749644 | 4.2543210 | 18.0992460 | 0.012987013 |
| 78 | 6084 | 474552 | 8.8317609 | 4.2726586 | 18.2556122 | 0.012820513 |
| 79 | 6241 | 493039 | 8.8881944 | 4.2908404 | 18.4113116 | 0.012658228 |
| 80 | 6400 | 512000 | 8.9442719 | 4.3088695 | 18.5663553 | 0.01250000[illegible] |
| 81 | 6561 | 531441 | 9.0000000 | 4.3267487 | 18 7207544 | 0.012345679 |
| 82 | 6724 | 551368 | 9.0553851 | 4 3444815 | 18.8745194 | 0.012195122 |
| 83 | 6889 | 571787 | 9.1104336 | 4.3620707 | 19 0276606 | 0.012048193 |
| 84 | 7056 | 592704 | 9.1651514 | 4.3795191 | 19.1801879 | 0.011904762 |
| 85 | 7225 | 614125 | 9.2195445 | 4.3968296 | 19.3321111 | 0.011764706 |
| 86 | 7396 | 636056 | 9.2736185 | 4.4140049 | 19.4834398 | 0 011627907 |
| 87 | 7569 | 658503 | 9.3273791 | 4.4310476 | 19.6341830 | 0.011494253 |
| 88 | 7744 | 681472 | 9.3808315 | 4.4479602 | 19.7843498 | 0.0113636 6 |
| 89 | 7921 | 704969 | 9.4339811 | 4.4647451 | 19.9339487 | 0.011235955 |
| 90 | 8100 | 729000 | 9.4868330 | 4.4814047 | 20.0829885 | 0.011111111 |
| 91 | 8281 | 753571 | 9 5393920 | 4.4979414 | 20.2314773 | 0.010989011 |
| 92 | 8464 | 778688 | 9.5916630 | 4.5143574 | 20.3794231 | 0.010869565 |
| 93 | 8649 | 804357 | 9.6436508 | 4.5306549 | 20.5268337 | 0.010752688 |
| 94 | 8836 | 830584 | 9.6953597 | 4.5468359 | 20 6737171 | 0.010638298 |
| 95 | 9025 | 857375 | 9.7467943 | 4.5629026 | 20.82[illegible]0805 | 0.010526316 |
| 96 | 9216 | 884736 | 9.7979590 | 4.5788570 | 20.9659311 | 0.010416667 |
| 97 | 9409 | 912673 | 9.8488578 | 4.5947009 | 21.1112763 | 0.010309278 |

# 平面幾何學

# 公理定理等一覽

## 普通公理 [12款]

I. 全量ハ其ノ各部分ノ和ニ等シ.

故ニ　全量ハ其ノ部分ヨリ大ナリ.

II. 同ジ量或ハ相等シキ量ニ等シキ量ハ相等シ.

III. 相等シキ量ニ相等シキ量ヲ加フレバ,其ノ和ハ相等シ.

IV. 相等シキ量ヨリ相等シキ量ヲ減ズレバ,其ノ殘リハ相等シ.

V. 相等シキ量ト不等ノ量トノ和ハ,相等シカラズ.　大ナル量ニ加ヘタル和ガ,他ヨリ大ナリ.

VI. 相等シキ量ヲ不等ノ量ヨリ減ズレバ,其ノ殘リハ相等シカラズ.　大ナル量ヨリ減ジタル殘リガ,他ヨリ大ナリ.

VII. 相等シキ量ヨリ不等ノ量ヲ減ズレバ,其ノ殘リハ相等シカラズ.　大ナル量ヲ減ジタル殘リガ他ヨリ小ナリ.

VIII. 相等シキ量ノ同ジ倍數ノ量ハ相等シ.　又相等シキ量ノ同ジ分數ノ量モ相等シ.

## 幾何學公理 [13款]

I. 圖形ハ其ノ形狀及ビ大イサヲ變ズルコトナクシテ其ノ位置ヲ變ジ得可シ.

II. 全ク相合セシメ得ル大イサハ相等シ.

III. 一點ヲ過リテ一ツノ方向ニ一ツノ直線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

換言スレバ　一點ト一ノ方向トハ　一直線ヲ決定ス.

此ノ公理ヨリ次ノ二件ヲ知ル.

(1) 二點ハ一直線ヲ決定ス. 換言スレバ　二點ヲ通有スル二直線ハ全ク相合シテ一直線トナル.

(2) 相異ナル二直線ハ唯一點ニ於テ相交リ得ルノミ.

**IV.** 二點間ノ最短徑ハ其ノ間ノ直線ナリ.

**V.** 一點ヲ過リ一直線ニ平行スル一ツノ直線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル. [30款]

此ノ公理ヨリ次ノ二件ヲ知ル.

(1) 平行線ノ一ニ交ル直線ハ必ズ他ノ直線ニモ亦交ル.

(2) 二平行線ノ一ニ平行スル直線ハ,必ズ他ノ直線ニ平行ス.

此ハ次ノ如ク換言スルコトヲ得ベシ.

同ジ直線ニ平行スル二直線ハ必ズ互ニ平行ス.

## 直　線

**I.** 有限直線 AB ノ中點ヲ M, AB 上ノ任意ノ點ヲ M′ トセバ

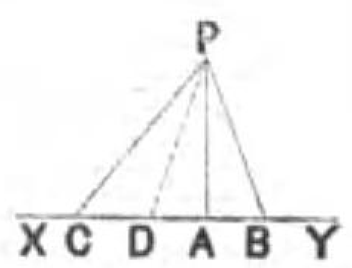

$AM'+BM'=2AM$,

$AM'\sim BM'=2MM'$. [13頁3題]

**II.** 一直線上ノ一點ヨリ之ニ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル. [20頁14題]

**III.** 一直線外ノ一點ヨリ之ニ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル. [42款系4]

**IV.** 一直線 XY 外ノ一點 P ヨリ之ニ引ケル總テノ線分ニ就キテ.




(1) 垂線 PA ハ最短ナリ.

(2) $AD=AB$ ナルトキハ $PD=PB$.

(3) $AC>AB$ ナルトキハ $PC>PB$. [57款]

**V.** IV ノ逆.

**VI.** 一直線外ノ一點ヨリ之ニ



相等シキ二ツノ線分ヲ引クコトヲ得,唯二ツニ限ル. 而シテ是等ノ線分ノ間ノ角ハ其ノ點ヨリ引ケル垂線ニテ二等分セラル. [58款系2]

**VII.** **IV** ニ於テ

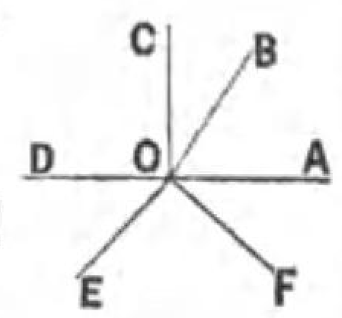
$\widehat{APB}=\widehat{APD}$ ナルトキハ $PB=PD$.

$\widehat{APB}<\widehat{CPA}$ ナルトキハ $PB<PC$. [58款系1]

**VIII.** 四ツノ線分ガ比例ヲナストキハ,其ノ外項ノ包ム矩形ハ,内項ノ包ム矩形ニ等シ. [212款]

## 角

**I.** $\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\cdot\cdot+\widehat{FOA}=4\hat{R}$ [18款]




**II.** AOD ガ一直線ナルトキハ

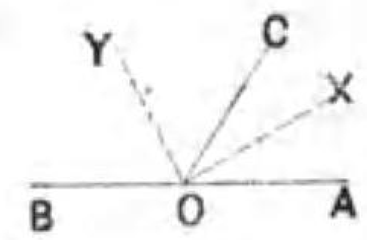
$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COD}=\widehat{AOB}+\widehat{BOD}=2\hat{R}$. [19款]

**III.** II ノ逆. [25款]

**IV.** 二直線 AB, CD ガ相交ルトキハ $\hat{a}=\hat{a}'$, $\hat{b}=\hat{b}'$. [23款]

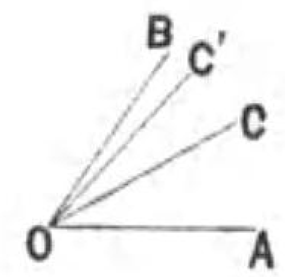

**V.** AOB ハ一直線ニシテ $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$ ナルトキハ COD ハ一直線ナリ. [20頁13題]

**VI.** $\widehat{AOC}+\widehat{COB}=2\hat{R}$ ニシテ OX, OY ハ $\widehat{AOC}$ ノ内外二等分線ナルトキハ




$\widehat{XOY}=\hat{R}$. [18頁10題]

**VII.** $\widehat{AOB}$ ノ二等分線ヲ OC, $\widehat{AOB}$ 内ニ引キタル任意ノ直線ヲ OC′ トスレバ

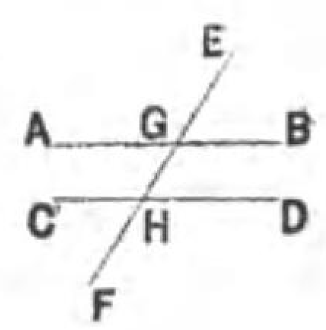



$\widehat{AOC'}+\widehat{BOC'}=2\widehat{AOC}$,

$\widehat{AOC'}\sim\widehat{BOC'}=2\widehat{COC'}$. [14頁4題]

## 平行直線

**I.** $\widehat{AGH}=\widehat{GHD}$ ナルトキハ $AB \parallel CD$. [28款]




**II.** $\widehat{AGH}+\widehat{GHC}=2\hat{R}$ ナルトキハ $AB \parallel CD$. [29款系1]

**III.** $\widehat{EGA}=\widehat{GHC}$ ナルトキハ

$AB \parallel CD$. [29款系1]

**IV.** I ノ逆. [31款]

**V.** II ノ逆 [32款系1(1)]

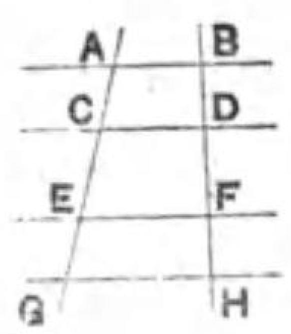
**VI.** III ノ逆. [32款系1(2)]

**VII.** 同ジ直線ニ垂直ナル二直線ハ平行ス. [29款系2]

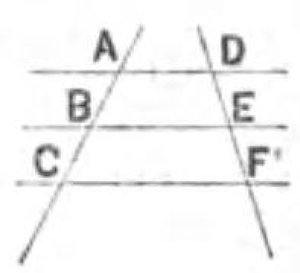
**VIII.** 平行直線ハ共通ノ垂線ヲ有ス. [32款系2]

**IX.** 同ジ直線ニ平行スル二直線ハ互ニ平行ス. [30款]

**X.** $AB \parallel CD$, $\parallel EF \parallel GH$ ナルトキハ $AC=EG$ $BD=FH$. [69款]




**XI.** $AD \parallel BE \parallel CF$ ニシテ, $AB=BC$ ナルトキハ $DE=EF$. [70款1]




**XII.** $AD \parallel BE \parallel CF$ ナルトキハ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$. [188款]

**XIII.** XII ノ逆. [202頁20題]

## 多角形

**I.** $n$ 邊ノ多角形ノ各角ノ和 $=(2n-4)\hat{R}$. [44款]

**II.** $n$ 邊ノ多角形ノ外角ノ和 $=4\hat{R}$. [45款]

**III.** 正多角形ハ圓ニ内接又ハ外切シ得可シ. [101頁51題, 103頁55題]

**IV.** 等角多角形ハ一ツオキノ邊ガ相等シケレバ,圓ニ内接シ得ベシ. [101頁52題]

**V.** 等邊多角形ハ一ツオキノ角ガ相等シケレバ,圓ニ外切シ得ベシ. [103頁56題]

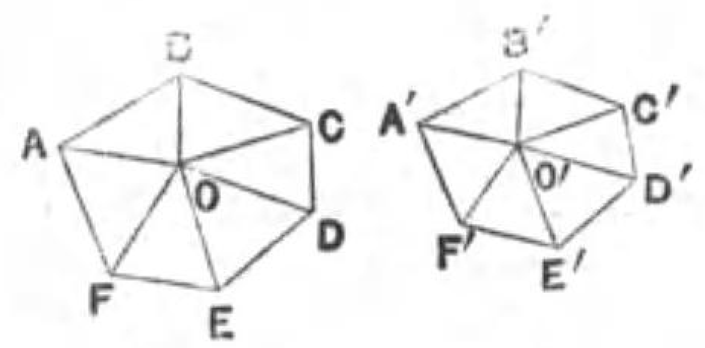
**VI.** 正多角形ノ面積 $=\frac{1}{2}\overline{\text{邊心距}}.\overline{\text{周}}$. [152款]

**VII.** 同邊數ノ正多角形ハ相似形ナリ. [208款]

對應邊ヲ $a, b, c, \ldots; a', b', c', \ldots$, 外接圓ノ半徑ヲ $r, r'$ トスレバ $\frac{r}{r'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\ldots=\frac{a+b+c+\ldots}{a'+b'+c'+\ldots}$ [209款系1]

**VIII.** 相似多角形ノ比ハ,其ノ對應邊ノ二乘比ニ等シ. [215款]

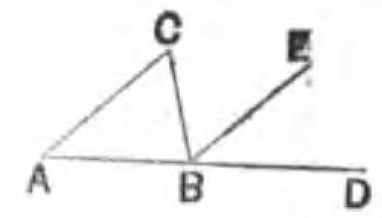
**IX.** 互ニ相似ニシテ相似ニ置カレタル同數ノ三角形ヨリ成ル二ツノ多角形ハ相似ナリ. [206款]






## 三角形

**I.** $\triangle ABC$ ニ於テ $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2\hat{R}$. [41款]




**II.** $\widehat{CBD}=\hat{A}+\hat{C}$. [42款系1]

**III.** 二ツノ三角形ノ全等ノ場合.

(1) $c=c'$, $a=a'$, $\hat{B}=\hat{B}'$ ナルトキ. [47款]

(2) $c=c'$, $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$ ナルトキ. [48款]

[二角ト一對應邊トガ相等シキトキハ此ノ場合ニ歸ス]

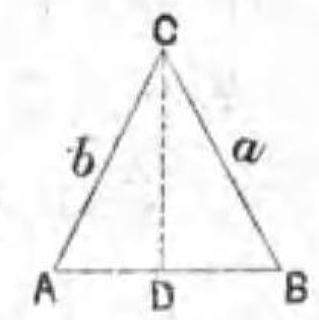
(3) $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$ ナルトキ. [59款]

(4) $\hat{A}=\hat{A}'$, $b=b'$, $a=a'$, $a>b$ ナルトキ. [60款(1)]

**IV.** 二ツノ三角形ノ兩意ノ場合.

$\hat{A}=\hat{A}'$, $b=b'$, $a=a'$, $a<b$ ナルトキハ $\hat{B}=\hat{B}'$, 或ハ $\hat{B}+\hat{B}'=2\hat{R}$. [60款(2)]

**V.** $a=b$ ナルトキハ $\hat{A}=\hat{B}$. [50款]



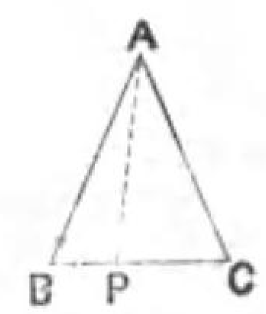

**VI.** V ノ逆. [52款]

**VII.** 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ直角ニ二等分ス.

幷ニ其ノ逆. [51款系1]

**VIII.** 二等邊三角形ノ底邊ヘ引ケル中線ハ,底邊ノ垂直二等分線ニシテ,又頂角ノ内二等分線ナリ. [49頁51題]

**IX.** 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ任意ノ點ヲ P トスルトキハ



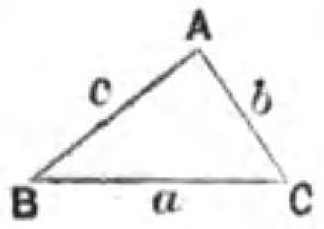

$\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=BP.CP$.

若シ P ガ BC ノ延線上ニアレバ

$\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=BP.CP$

[171款]

**X.** △ABC ニ於テ

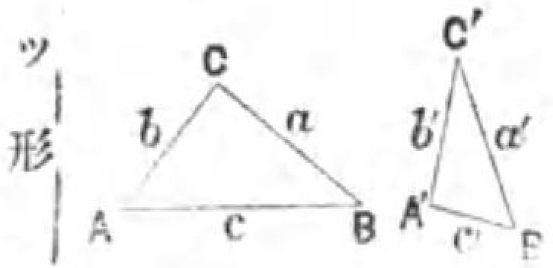



(1) $c>b$ ナルトキハ

$\hat{C}>\hat{B}$. [55 款]

(2) $\hat{C}>\hat{B}$ ナルトキハ $c>b$. [56 款]

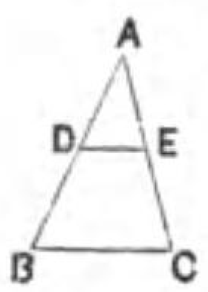
**XI.** 二ツノ三角形ニ於テ




$a=a'$, $b=b'$, $\hat{C}>\hat{C'}$ ナルトキハ $c>c'$. [62 款]

**XII.** XI ノ逆. [63 款]

**XIII.** △ABC ニ於テ AD=DB, DE∥BC ナルトキハ AE=EC.




[70 款系 2]

**XIV.** XIII ノ逆. [70 款系 3]

**XV.** 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點[重心]ニ於テ交ル [63 頁 8 題]

**XVI.** 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ,同一ノ點[外心]ニ於テ交ル. [63 頁 9 題]

**XVII.** 三角形ノ各角ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ハ,同一ノ點[垂心]ニ於テ交ル. [63 頁 10 題]

**XVIII.** 三角形ノ各角ノ内二等分線ハ,同一ノ點[内心]ニ於テ交ル. [64 頁 14 題]

**XIX.** 三角形ノ一角ノ内二等分線ト,他ノ二角ノ外二等分線トハ,同一ノ點[傍心]ニ於テ交ル. [64 頁 15 題]

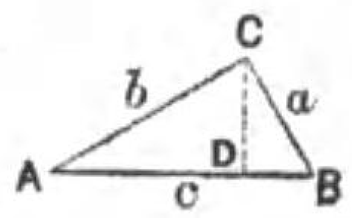
**XX.** $\Delta=\frac{1}{2}$ 底邊.高サ. [147 款系 1]

$\Delta=\frac{1}{2}$(等底等高ノ▱) [146 款]

$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. [159 頁 37 題]

**XXI.** ピタゴラスノ定理.




C ヲ $\hat{R}$ トセル三角形ニ於テ $c^2=a^2+b^2$. [162 款]

**XXII.** $\overline{AC}^2=AB.AD$. [163 款]

**XXIII.** $\overline{CD}^2=AD.BD$. [154 頁 26 題]

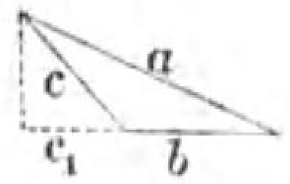
**XXIV.** △ACD∽△CBD∽△ABC. [201 款]



**XXV.** $a^2=b^2+c^2-2bc_1$. [164 款]


**XXVI.** $a^2=b^2+c^2+2bc_1$. [166 款]

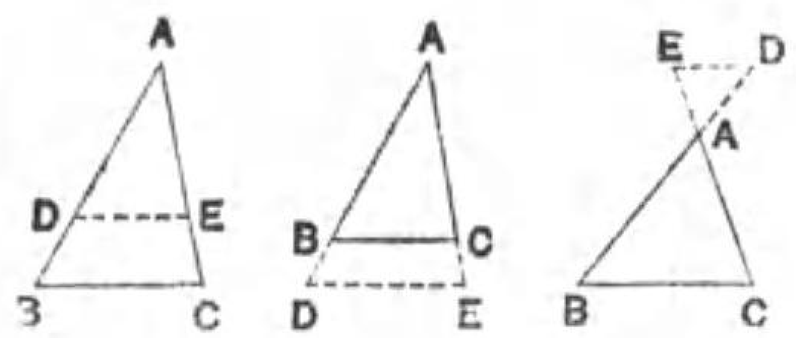
**XXVII.** △A C ニ於テ




$a^2<b^2+c^2$ ナレバ $\hat{A}<\hat{R}$
$a^2=b^2+c^2$ ナレバ $\hat{A}=\hat{R}$
$a^2>b^2+c^2$ ナレバ $\hat{A}>\hat{R}$

[167 款]

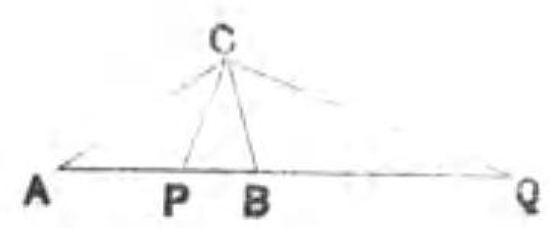
**XXVIII.** △ABC ニ於テ DE∥BC ナルトキハ $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. [187 款]




**XXIX.** XXVIII ノ逆. [192 款]

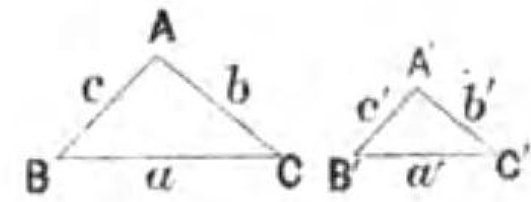
**XXX.** △ABC ノ頂角 C ノ二等分線ヲ CP, $\hat{C}$ ノ外角ノ二等分線ヲ CQ トスレバ

$\frac{AP}{PB}=\frac{AC}{CB}$, $\frac{AQ}{QB}=\frac{AC}{CB}$. [195 款]




**XXXI.** 二ツノ三角形ノ相似ノ場合.

(1) $\hat{A}=\hat{A'}$, $\hat{B}=\hat{B'}$, $\hat{C}=\hat{C'}$




ナルトキ. [199 款]

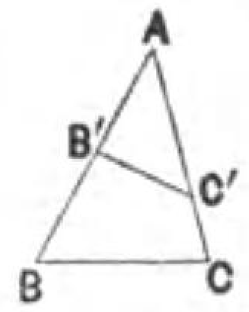
(2) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ ナルトキ. [202 款]

(3) $\hat{A}=\hat{A'}$, $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$ ナルトキ. [203 款]

(4) $\hat{B}=\hat{B'}$, $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$, $b>c$ ナルトキ. [204 款(1)]

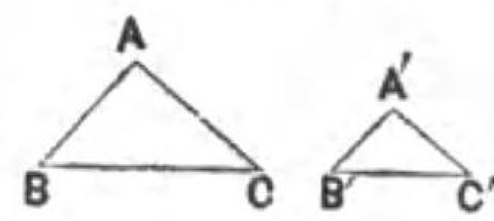
**XXXII.** 二ツノ三角形ニ於テ $\hat{B}=\hat{B'}$, $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$, $b<c$ ナルトキハ $\hat{C}=\hat{C'}$, 或ハ $\hat{C}+\hat{C'}=2\hat{R}$. [204 款 (2)]

**XXXIII.** △ABC, 及ビ △AB′C′ ニ於テ,兩形ノ $\hat{A}$ ガ相等シキトキハ




$\frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C'}=\frac{AB.AC}{AB'.AC'}$. [213 款]

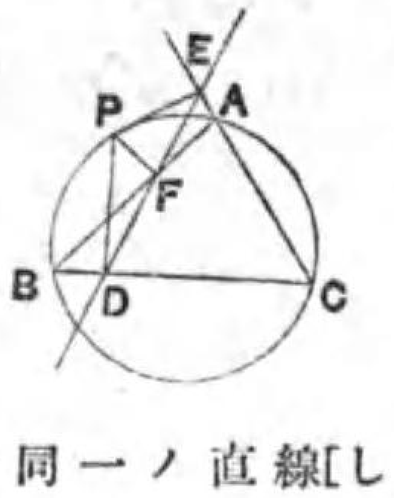
**XXXIV.** △ABC∽△A′B′C′ ナルトキハ




$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$. [214 款系 1]

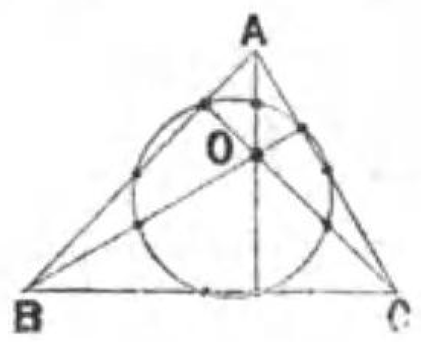
**XXXV.** しむそんノ定理.

△ABC ノ外接圓周上ノ任意ノ點 P ヨリ三邊へ引ケル垂線ノ趾 D, E, F ハ同一ノ直線[しむそん線, 又垂趾線]上ニアリ. [104 頁 4 題]



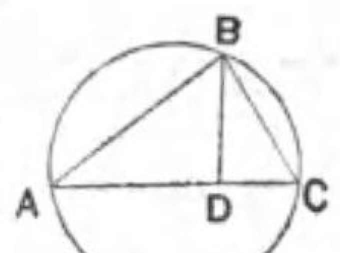

**XXXVI.** ぽんすれーノ定理.

△ABC ノ垂心ヲ O トスレバ AO, BO, CO ノ中點, 三垂線ノ趾, 三邊ノ中點ハ同一ノ圓周[九點圓]上ニアリ. [105 頁 6 題]




**XXXVII.** △ABC ノ外接圓ノ半徑ヲ R, BD ヲ AC ニ垂線ナリトスレバ AB.BC=2R.BD,

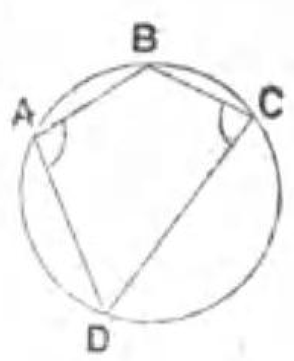
$R=\dfrac{abc}{4\Delta}$. [217, 218 款]




## 四邊形

**I.** 圓ニ内接スル四邊形ニ於テ $\hat{A}+\hat{C}=2\hat{R}$,

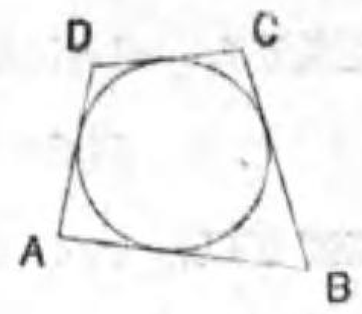
$\hat{B}+\hat{D}=2\hat{R}$. [116 款]




**II.** I ノ逆. [118 款]

**III.** 圓ニ外切スル四邊形ニ於テ

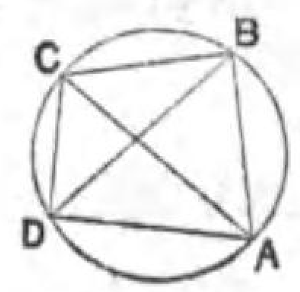
AB+CD=AD+BC. [120 款]



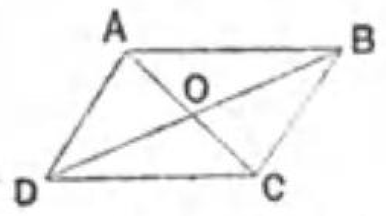

**IV.** III ノ逆. [121 款]

**V.** ぷとれみーノ定理.

圓ニ内接スル四邊形ニ於テ AB.CD+AD.BC =AC.BD. [219 款]




**VI.** ▱ABCD ニ於テ



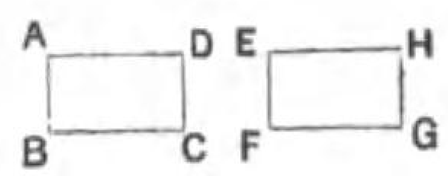

(1) AB=CD, BC=AD. [65 款]

(2) $\hat{A}=\hat{C}$, $\hat{B}=\hat{D}$. [66 款系 2]

(3) AO=OC, BO=OD. [66 款系 3]

(4) ▱ABCD ノ面積ハ底邊ト高サトノ包ム矩形ニ等シ. [144 款]

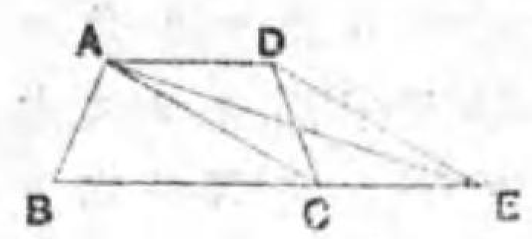
**VII.** AB=EF, BC=FG ナルトキハ




□ABCD=□EFGH. [142 款]



**VIII.** 梯形 ABCD ニ於テ CE=AD




トスレバ ABCD=△ABE. [149 款]

**IX.** □ABCD=$\overline{底邊}\times\overline{高サ}$. [157 款]

**X.** 等高ノ矩形ハ底邊ニ比例ス. [210 款]

等底ノ矩形ハ高サニ比例ス. [211 款系 1]

**XI.** X, Y, .. ハ線分, XY, XZ,... ハ矩形, $X^2$, $Y^2$, ハ正方形トスレバ

(1) X(Y+Z)=XY+XZ. [159 款 1]

(2) $(X+Y)^2=X^2+Y^2+2XY$. [159 款 2]

(3) $X^2=4\left(\dfrac{X}{2}\right)^2$. [159 款 3]

(4) $(X-Y)^2=X^2+Y^2-2XY$. [159 款 4]

(5) $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$. [159 款 5]

## 圓

**I.** 圓ハ中心ニ關シテ對稱ナリ. [73 款系 2]

**II.** 圓ハ其ノ任意ノ徑ニ關シテ對稱ナリ. [77 款系 1]

**III.** 中心ヨリ一點マデノ距離ヲ $d$, 圓ノ半徑ヲ $r$ トスレバ

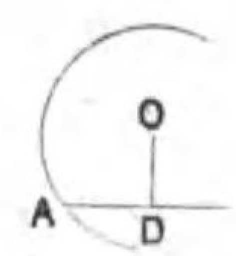
點ガ圓内ニアレバ $d<r$,

點ガ圓周上ニアレバ $d=r$,

點ガ圓外ニアレバ $d>r$. [72 款]

**IV.** III ノ逆. [72 款]

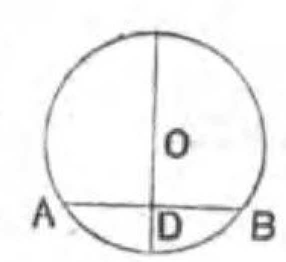
**V.** 中心ヲ O トシ OD⊥AB ナルトキハ AD=BD. [79 款]




**VI.** V ノ逆. [80 款系 1]

**VII.** 弦 AB ノ垂直二等分線ハ中心ヲ過ル. [80 款系 2]

**VIII.** OD ヲ兩方へ引キ延バストキハ, 弦 AB ニテ分ツ共軛弧ヲ二等分ス. [80 款系 2]




**IX.** 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ, 相等シキ弦ハ中心ヨリ等距離ニアリ. [81 款]

**X.** IX ノ逆. [82 款]

**XI.** 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ,不等ノ二弦ニ就キテ,其ノ大ナル方ハ中心ニ近ク,小ナル方ハ遠シ. [88 款]

**XII.** XI ノ逆. [88 款]

**XIII.** 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ中心角ハ相等シキ弧ノ上ニ立ツ. [84 款]

**XIV.** 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ,中心角ガ不等ナレバ,大ナル中心角ハ,大ナル弧ノ上ニ立ツ. [86 款]

**XV.** XIII, XIV ノ逆. [85 款系 1, 87 款系 1]

**XVI.** 圓周角ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ. [92 款]

**XVII.** 圓ノ同ジ弓形ニ於ケル角ハ相等シ. [94 款系 1]

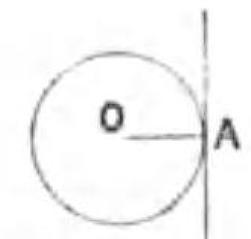
**XVIII.** XVII ノ逆. [81 頁 21 題]

**XIX.** 圓內[或ハ外]ニテ相交ル二弦ノ間ノ角ハ,其ノ夾ム弧ノ和[或ハ差]ノ半分ニテ測度セラル. [82 頁 24 題]

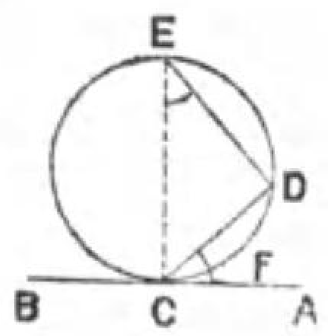
**XX.** 弓形ニ於ケル角ハ,其ノ弓形ガ半圓ヨリモ大,或ハ之ニ等シク,又ハ之ヨリ小ナルニ從ヒ;銳角,或ハ直角,又ハ鈍角ナリ. [95 款]

**XXI.** XX ノ逆. [96 款]

**XXII.** 圓ノ切線ハ,其ノ切點ヘ引ケル半徑ニ垂直ナリ. 并ニ其ノ逆. [99 款系 3]



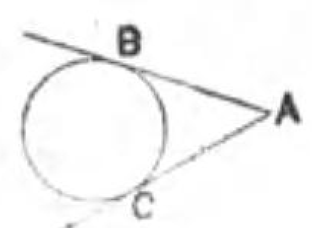

**XXIII.** 切點ヲ過リテ切線ヘ引ケル垂線ハ,中心ヲ過ル. [99 款系 4]




**XXIV.** AB ハ C ニ於ケル切線トシ, CD ハ任意ノ弦トスレバ

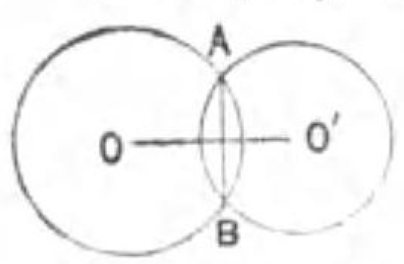
$\overset{\frown}{ACD}=\overset{\frown}{CED}$. [100 款]

**XXV.** AB, AC ハ切線ナルトキハ AB=AC. [101 款系 2]



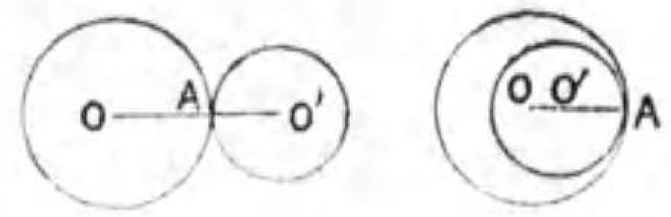

**XXVI.** O, O′ ヲ二圓ノ中心トスレバ

OO′⊥AB. [106 款系 1]






**XXVII.** 二圓ガ A ニ於テ相切スレバ O, O′, A ハ同一ノ直線上ニアリ. [106 款系 2]




**XXVIII.** 二圓ノ半徑ヲ $r, r'$ トシ,其ノ中心間ノ距離ヲ $d$ トスルトキハ

(1) 二圓ガ全ク相離レテ,互ニ他ノ外ニアレバ $d>r+r'$.

(2) 二圓ガ外切スルトキハ $d=r+r'$.

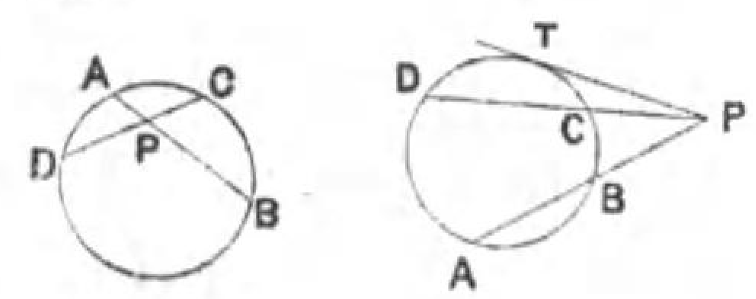
(3) 二圓ガ相交ルトキハ $r+r'>d>r\sim r'$.

(4) 二圓ガ內切スルトキハ $d=r\sim r'$.

(5) 二圓ガ全ク相離レテ,其ノ一ガ他ノ一ノ內ニアレバ $d<r\sim r'$. [107 款]

**XXIX.** XXVIII ノ逆. [108 款]

**XXX.**




(1) AP.PB=CP.PD. [173 款]

(2) $\overline{PT}^2$=AP.BP. [174 款系 1]

**XXXI.** XXIX ノ逆. [174 款系 3, 4]

**XXXII.** 圓ノ半徑ヲ $r$, 周ヲ $c$ トスレバ $c=2\pi r$. [209 款系 2]

**XXXIII.** 圓ノ面積$=\pi r^2$. [209 款系 3]

## 比　例 [185 款]

**I.** $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$, $\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$ ナルトキハ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

**II.** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. [反轉ノ理]

**III.** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. [更迭ノ理]

**IV.** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $ad=bc$.

**V.** $ad=bc$ ナルトキハ,次ノ比例ガ成リ立ツ.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \frac{b}{a}=\frac{d}{c}, \frac{a}{c}=\frac{b}{d}, \frac{c}{a}=\frac{d}{b}$.