五六年查訖

開明青年叢書

# 馬先生談算學

劉薰宇著

天津市人民圖書館
藏書圖記

開明書店

馬先生談算學

民國二十九年十月初版
民國三十六年十月四版
每冊定價國幣二元九角

著作者 劉薰宇
發行者 開明書店 代表人范洗人
印刷者 開明書店

有著作權＊不准翻印

(136P.) K 馬

# 前言

這書居然寫成出版，我感到很大的欣幸！

開始寫牠，遠在一九三六年的冬季。從一九三七年一月起，陸續按月在中學生發表，中間只因為個人的私事，斷過一二期。原來的計畫，內容比較要簡略些，預定一九三七年，在中學生上登載完畢。

啊！在個人，在中國，都不能忘掉的這一九三七年！五月底六月初，妻突然患神經病，終日要人伴着。我於是充當她的看護，同時兼做三個孩子的保姆。七月初她漸漸地好起來了，肩頭上的擔子，也覺輕了一些。然而，抗戰的第一砲，七月七日，在蘆溝橋的天空響了起來。跟着，上海的空氣，一天緊張似一天。一面，我覺到，抗戰快要展開了，而一經展開，期限一定較長。另一面，妻的病雖漸好，要徹底治療，惟有回到故鄉。她和我離開故鄉，都有二十多年，鄉思，多少也是病源之一。——在這種情況中，我決定伴着她和我們的三個孩子，離開住居了十多年的上海，回轉相別二十多年的故鄉，貴陽。

八月十日，在十二分緊張的空氣中，我們上了直開重慶的船。後來，才知道，牠是載客離上海

的最後一隻。從上海到重慶，船行要十多天，原來還想在船上斷續寫這書。但一上船就知道不行了。乘客雖不很擁擠，然而要找一張檯子寫什麼，卻不可能。到漢口，八一三滬戰的消息，已傳到船上。——好！這是中國唯一的出路！然而戰爭總是戰爭，每天都只有注意無線電傳來的消息。

到了重慶，因交通的阻礙，一時不能去貴陽，坐在旅館中，也曾提筆續寫過。但一想到中學生的必然停刊，出版界的必然遭受嚴重的打擊，就把筆放下。

回到貴陽後，一直不曾想到將牠完成。直到一九三八年的冬季，正是武漢陷落的時期，丏尊兄寫信給我，要我將牠寫完，說開明可以勉力出版。這，自然使我很興奮。但，這時，我正準備到昆明，只好暫時放下。

到昆明住定以後，想動筆，卻無從下手了。已發表過的稿子，我沒有保存，牠的內容，已有些模糊。這一來，才寫信給丏尊兄，請他設法寄一份中學生發刊過的稿子來。約定，稿子一到，就動手。稿子寄出的回信，雖不久就收到，而稿子到我的手裏，卻已經是一九三九年的夏季，距暑假已很近了。——決定在暑假中完成牠。

暑假，回到貴陽，長長的三個月的時間，竟不着一字。原來，妻和孩子們，在一九三八年九月二十五日敵機襲貴陽後，已移住鄉下。這時，家人八口，只住兩小間平房；擠，固不必說；蚊蟲、跳蚤，使你不能靜坐到十分鐘。

秋後又到昆明。昆明，很好，天氣就很好。然而、天天想着動手，天天都只是想着而巳。在這期間，曾聽到有的中學生讀者，到開明分店來問，馬先生談算學出版了沒有？有一次，分店的同人，還指着我向顧客說，「這就是馬先生，」惹得閤堂大笑。從此，我感到巳負了一筆債，非趕快償還不可。寒假開始，便下最大的決心，動起筆來。現在算是完成了。然而牠的能夠這樣完成，使我對於開明昆明分店的同人，非常感激！

第一，在這期間，昆明的米價、菜價，一切物價，都漲得驚人，不但漲，有時還買不出。寄食於分店的我，居然不分心在柴米上，坐食現成，於這稿子的完成關係實在不小。

其次，從去年十二月以來，昆明警報頻繁，有十幾次，都是寫着寫着，警報一響，便收在篋裏，提着跑到荒野。提着，提着！不是我自己提，我自己一個笨重的身體，空着手走，巳有點喫力了，還提什麼？提，都是分店的呂元章、韋芝塑和楊炳炎三君幫忙！雖則，事後想起來，還是徒勞，但他們的辛苦，我總覺到極可感謝！

這樣小小的一點東西，經過三年多，而且有過不少的波折，今天居然完成了，我感到很大的欣幸！

關於牠的內容，我還想向讀者很誠懇地說幾句話。

牠有些像什麼難題詳解一類。然而對於這一類的書我一向是反對的。這裏面，固然收集一百幾十個題目，加以解釋。但，我並不希望，有人單是為了找尋某一個題的算法來翻牠。這也許會使人失望的。

我寫這書的動機，是在增進讀算學的人對於算學的趣味。對於學習算學的態度，思索問題的途徑，以及探究題目間的關係和變化，我很用了點心去選擇和計畫表出牠們的方法。我希望，能夠把這沒有生命的算學問題注進一點活力。

用圖解法直接來解決算術問題，這不但便於觀察和思索，而且還可使算術更切近於實用一點。圖解，本來已溝通了代數和幾何，而成為解析算學的骨幹。所以，若從算術起，就充分地運用牠，我想，這不但於進修算學中的其他部門，有着不少的幫助，而對於學習理、工科，乃至於統計等，也是有益的。

我對於算學的態度，已散見於這書中，一面我認為人人應學，然而不是說人人都要做算學專家。一面我認為人人都能學，然而不是說人人都能成算學專家。

科學！科學！科學！現在似乎已沒一個知識分子不承認牠的價值和需要了。然而對於科學，中等程度的算術、代數、幾何、三角、解析幾何以及初等微積分，實在是少不來的基礎。謹以此書獻給於真實愛好科學的青年朋友。

一九四〇年二月十九日於昆明萬松草堂後院

# 目次


一　他是這樣開場的……一
二　怎樣具體地表出數量以及兩個數量間的關係……八
三　解答如何產生——交差原理……一四
四　就講和差算罷……二〇
五　「追趕上前」的話……三一
六　時鐘的兩隻針……五三
七　流水行舟……六一
八　年齡的關係……六五
九　多多少少……七五
十　鳥獸同羣的問題……七七
十一　分工合作……八一
十二　歸一法的問題……九七
十三　截長補短……一〇二
十四　還原算……一〇三
十五　五個指頭四個叉……一〇五

十六　排方陣……一〇六
十七　全部通過……一一二
十八　七零八落……一一六
十九　韓信點兵……一二一
二十　話說分數……一二六
二一　三態之一——幾分之幾……一四二
二二　三態之二——求偏……一四八
二三　三態之三——求全……一五三
二四　顯出原形……一七一
二五　從比到比例……一八九
二六　這要算不可能了……二〇九
二七　大半不可能的複比例……二一五
二八　物物交換……二二三
二九　按比分配……二三九
三十　結束的一課……二四九

# 一　他是這樣開場的

學年成績發表不久的一個下午，初中二年級的兩個學生李大成和王有道在教員休息室的門口立着談話。

李：「眞危險，這次的算學平均只有五十九分半，要不是四捨五入，就不及格，又得補考。你的算學眞好，總有九十幾分一百分。」

王：「我的地理不及格，下學期一開學就得補考，這個暑假玩也玩不痛快了。」

李：「地理很容易」

王：「你自然覺得容易呀，我眞不行，看起地理來，總覺得死板板的，一點趣味沒有，無論勉強看了多少次，總是記不完全。」

李：「你的悟性好，所以記憶力不行，我呆記東西倒還容易，要想算學題，那眞難極了，簡直不曉得從那里想起。」

王：「所以我主張文科和理科一定要分開，性近那一科的就專弄那一科，既能專心，也免得白費氣力去弄些毫無趣味不相干的東西。」

李大成雖沒有回答，但好似默認了這個意見。他們所談的話，坐在教員休息室裏，懶洋洋地看着報紙的算學教師馬先生已聽見了。他們在班上都算是用功的，馬先生對他們也有相當的好感。因此，想對他們的意見加以糾正，便叫他們到休息室裏，帶着微笑向着李大成問：

「你對於王有道的主張有什麼意見？」

李大成因了馬先生這一問，直覺地感到馬先生一定是不贊同王有道的意見，但他並不曾理會得有什麼理由，因而躊躇了一陣回答道；

「我覺得這樣更便當些。」

馬先生微微搖了一搖頭，表示不同意道：

「便當？也許你們這時，年青，在學校裏的時候覺得便當；要是照你們的意見做去，將來就會感到大大地不便當了。你們要知道，初中的課程這樣的規定，是經過若干年的經驗，和若干專家的研究的。各科所教的，都是做一個現代人所不可缺少的常識。不但是人人必需，也是人人能領受的。……」

李大成和王有道雖然平日對於馬先生的學識和熱心領導他們，很是敬仰；但對於這「人人必需」和「人人能領受」很懷疑，不過兩人的懷疑略有不同。王有道以為地理就不是人人必需；而李大成卻以為算學不是人人能領受。當他們聽了馬先生的話，各自的臉上都浮出不以

爲然的神氣。馬先生接着向他們說：

「我知道你們不會相信我的話。王有道，是不是？你一定以爲地理就不是必需的。」

王有道望一望馬先生不回答。

「但是你只要問李大成，他就不這樣想。照你對於地理的看法，李大成就可說算學不是必需的。你試說說爲什麽人人必需要學算學。」

王有道不假思索地回答道：

「一來是我們日常生活，離不開數量的計算。二來，牠可以訓練我們，增加我們的聰明。」

馬先生點頭微笑說：

「這話有一半對，也有一半不對。第一點，你說因爲日常生活離不開數量的計算，所以算學是必需的。這話自然很對，但看法也有深淺不同。從深處說，恐怕不但是對於算學沒有興趣的人不肯承認，就是你，在你這個程度也不能完全認識，我們姑且丟開。就淺處說，自然買油買米都用得到牠。不過中國人靠一架算盤，懂得小九九，就活了幾千年，何必要學代數呢？平日買油買米那里用得到解方程式！我是承認你的話是對的，不過同樣的看法，地理也是人人必需的。從深處說，我們也姑且丟開，就只從淺處說。你總承認做現代的人，讀新聞是每天少不來的吧。倘若你沒有相當的地理知識，你讀了新聞，能夠眞懂得麽？阿比西尼亞在什麽地方？爲什麽意大利一定要征

服牠？為什麼意大利起初打阿比西尼亞的時候，許多國家要對牠施以經濟的制裁，到牠居然征服了阿比西尼亞，大家又把制裁取消？再說，你們對於中國的處境，平日都很關切，但是所謂國難的構成，地理的關係也很不少，所以真要深切地認識中國處境的危迫，沒有地理知識是不行的。

「至於第二點，說算學『可以訓練我們，增加我們的聰明，』這話只有前一半是對的，後一半卻是一種誤解。所謂訓練我們，只是使我們養成一些做學問和事業的良好習慣：如注意力要集中，要始終如一，要不苟且，要能耐煩，要有秩序等等。這些習慣，本來是人人都可以養成的，不過須要有訓練的機會罷了。學算學就是把這種機會給我們。但切不可誤解了，以為只是學算學有這樣的機會。學地理又何嘗沒有這樣的機會呢？各種科學都是建立在科學方法上的，只有探索的對象不同。算學是科學，地理也是科學，只要把牠當一件事做，認認真真地學習，上面所說的各種習慣都可以養成。只有說到增加聰明，一般人確有這樣的誤解，以為只有學算學能夠做到。其實，學算學也不能夠增加人的聰明。一個人初學算學的時候，思索一個題目的解法，非常困難，越學得多，思索起來便越容易，這固然是事實。一般人便以為這是聰明的增加。這只是表面的看法，這不過逐漸熟練的結果，並不是什麼聰明。學地理的人，看地圖和描地圖的次數多了，提起筆來畫一個中國地圖的輪廓，形式總大致可觀，這不是初學地理的人所能夠的，也不是什麼聰明增加了。

「你們總承認在初中也就關什麼文理分科是不妥當的吧！」馬先生用這話來作結束。王有道和李大成雖然對於這些議論不表示反對，但只認為是馬先生鼓勵他們對於各科都去用功的話。因為他們總覺得每一個人都有些科目性質不相近，無法領受，與其白費力氣，不如爽性不學。尤其是李大成認為算學實在不是人人所能領受的，他於是向馬先生提出這樣的質問：

「算學，我也曉得人人必需，只是性質不相近，一個題目往往一兩點鐘弄不出來，所以覺得還是把這種時間去讀別的書好些。」

「這自然是如此，與其費了時間，毫無所得，不如做點別的。在王有道看地理的時候，他一定是覺得毫無興味，看一兩遍，時間費去了仍然記不住，倒不如多演兩個題目。但這都是偏見，弄着沒有趣味，以及弄不出什麼結果，你們應當想，這不一定是科目的關係。至於性質不相近，不過是一種無可奈何的說明，人的腦細胞並沒有分成學算學和學地理的兩種。據我看來是因為學起來不感興趣便不常常去親近牠因此越來越覺得和牠不能相近至於學着不感興趣大概是不得其門而入的緣故這是學習的方法的問題比如就地理說現在是交通極發達整個世界息息相通的時代用新聞紙來作領導我想學起來不但津津有味，也就容易記得了日本和蘇俄以及中國的外蒙不是常常鬧邊界的衝突嗎把地圖地理教科書和這新聞對照起來讀這就是活潑有生趣的了又如中國參加世界運動會的選手的行程不是從上海出發起每到一處都有電報

和通信來嗎？若是一面讀這種電報，一面用地圖和地理教科書做參證，那末從中國到德國的這條路線，你就可以完全明瞭而且容易記牢了。用現時發生的事件來作線索去讀地理，我想這正和讀西遊記一樣，你讀西遊記不會覺得乾燥無趣，讀了以後，就知道從中國到印度在唐時要經過些什麼地方。——這只是舉例的說法。——西遊記中有唐三藏、孫悟空、豬八戒，中國參加世運團中有院長、鐵牛、美人魚，他們的行程記，不是一部最新改良特別西遊記麼？「隨處留心皆學問」這句話用到這裏，再確切沒有了。總之，讀書不要太受教科書的束縛，那就不會乾燥無味，也纔有活鮮鮮的知識可以得到。」

王有道聽了這話，臉上表出心領神會很快活的氣色問道：

「那末，學校裏教地理為什麼要用一本死板板的教科書呢？若是每次用一段新聞來講不是更好嗎？」

「這是理想的辦法，但事實上有許多困難。地理也是一門科學，牠有牠的體系，新聞所記的事件，並不是按照這體系發生的，所以不能用牠做材料來教授。一切課程都是如此，教科書是給我們各科的有體系的基本知識，是經過提鍊和組織的，所以是死板的，就和字典辭書一般。求活知識要以當前所遇見的事象做線索而用教科書做參證。」

李大成原是對地理有興趣而且成績很好的，聽着馮先生的這番議論，不免心花怒發，但同

時他卻起了一個疑問。他所最感困難的算學，照馬先生的說法，自然是人人必需，無可否認的了。但怎樣可以是人人能領受的呢？怎樣可以用活的事象做線索去學習呢？難道碰見一個龜鶴算的題目，硬去捉些烏龜白鶴擺了來看嗎！並且這樣的呆事，他也曾經做過！但是一無所得。他計算「大小二數的和是三十，差是四，求二數」這個題目的時候，曾經用三十個銅板放在桌上來試驗。先將四個銅板放在左手裏，然後兩手同時從桌上把剩的銅板一個一個地拿到手裏。到拿完時，左手是十七個，右手是十三個，因而他知道大數是十七，小數是十三。但他不能從這試驗中寫出算式 $(30-4)\div2=13$ 和 $13+4=17$ 來。他不知道這位同學們稱爲「馬浪蕩」而相當尊敬的馬先生對於學習地理的意見是非常的好，他正教着他們的代數，爲什麼沒有同樣的方法指導他們。他於是向馬先生提出了這個質問：

「地理，這樣學習，自然可以人人領受了；難道算學也可以這樣學習麼？」

「可以，可以，」馬先生毫不躊躇地回答，「不過精神相同，情形各異罷了。我最近正在思索這種方法，已經略有所得。好！就讓我把你們來作第一次的試驗吧。今天我們談話的時間很久了，好在你們和我一樣，暑假中都不到什麼地方去，以後我們每天來談一次。我覺得學算學須從算術弄清楚起，所以我現在注意的全是學習解算術問題的方法。算術的根底打得好，對於算學自然有興趣，進一步去學代數、幾何也就不難了。」

從這次談話的第二天起，王有道和李大成還約了幾個同學每天來聽馬先生的講。以下便是李大成的筆記，經過他和王有道的斟酌而修正過的。

## 二 怎樣具體地表出數量以及兩個數量間的關係

學習一種東西，首先要把學習的態度弄好。現在一般人的學習，只是用耳朵聽先生講，把講的牢牢記住，用眼睛看先生寫，用手照抄下來，也牢牢記住。這正如拿了口袋到米店裏去買米一樣，付了錢讓別人將米倒在口袋裏，自己背回家就完事大吉。把一口袋米放在家裏，肚子就不會餓了麼？買米的目的是在把牠做成飯，喫到肚裏，將飯消化了，吸收生理上所需要的，而將不需要的汚排除去。所以飯得自己煮，自己喫，自己消化；養料得自己吸收，汚得自己撤。就算買的是飯，假是別人喂到嘴裏去的，但進嘴以後的一切工作，總只有靠自己了。學校的先生所能給與學生的只是生米和煮飯的方法，最多是飯喂到嘴裏的事，先生對於學生已難辦到了。所以學習是要把先生所給的米變成飯，自己嚼，自己消化，自己吸收，自己排泄。教科書要成一本教科書，牠有少不來的材料，先生講給學生聽也有少不來的話，正如米要成米有少不來的成分一樣，但對於學生不是全有用場的，所以讀書有些是用不到記，正如喫飯有些要撤出來的一樣。

上面說的是學習態度的基本——自己消化、吸收、排泄。怎樣消化、吸收、排泄呢？學習和研究這兩個詞，大多數人都在亂用。讀一篇小說，就是在研究文學，這是錯的。不過學習和研究的態度應當一樣。研究應當依照科學方法，學習也應當依照科學方法。所謂科學方法，就是從觀察和實驗收集材料再來加以分析綜合整理。學習也應當如此。要明瞭「的」字的用法，必須先留心到許多各式各樣含有「的」字的句子，然後比較分析，……

算學，就初等範圍內說離不開數和量，而數和量都是抽象的，兩條板凳和三枝筆是具體的，兩條、三枝以及兩和三全是抽象的。抽象的，照理無法觀察和實驗。然而為了學習，我們無妨開一個方便法門，將牠具體化。昨天我的四歲的小女兒跑來向我要五個銅板，我忽然想到試驗她認識數量的能力，先只給她三個。她說只有三個，我便問她還差幾個。於是她把左手的五指伸出來，右手將左手的中指無名指和小指捏住，看了一看，說差兩個。這就是數量的具體表出的方便法門。這方便法門，不但是小孩子學習算學的「入德之門」，而且是人類建立全部算學的「初哉首基」，我們所用的不是十進數麼？

用指頭代替銅板，當然可以用指頭代替人，代替馬，代替牛。然而指頭只有十個，而且分屬於兩隻手，所以第一步就由用兩隻手進化到用一隻手而將指頭屈伸着或作種種形象以表數。不過數大了仍舊不便。好在人是喫飯的動物，這點聰明還有。於是更進化用筆塗點子來代替手指。

到這一步自然能表出的數可以更多了。不過點子太多也難一目了然，而且在表示數和數的關係的時候更不便當。爲了這樣，有將牠改良的必要。

既可以用點來作具體地表出數的方便法門，當然可以用線段來代替點：嚴格地說，畫在紙上，點和線段實在是一樣的。用線段來表數量，第一步很容易想到這兩種形式：一，二，三，……和｜，‖，|||，……，這和點一樣地不便當，覺得再加以改良。第二步，何妨將這些線段連結成爲一條長的線段，成爲直的 6 5 4 3 2 1 0 或橫的 0 1 2 3 4 5 6 呢？本來用多少長的線段表出1，這是個人的絕對自由，任何法律也無從禁止的。所以只要在紙上畫一條長線段，再在這線段上隨便作一點算是起點零，再從這起點零起，依次取等長的線段便得1，2，3，4，……。

這是數量的具體表出的方便法門。

有了這方便法門，算學上的四個基本法則，都可以用畫圖來計算了。

(1) 加法——這用不到說明，如圖1，便是5+3=8.

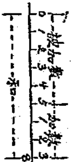



圖 1.

(2) 減法——只要把減數反過向來畫就得了，如圖2，便是8−3=5.

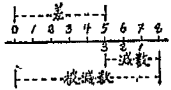



圖 2.

（3）乘法——本來就是加法的簡便方法，所以和加法的畫法相似，只須所取被乘數的段數，和乘數的相同；不過有小數時，須參用除法的畫法纔能將小數部分畫出來。如圖3，便是 5×3＝15.


圖 3.

（4）除法——這要用到幾何畫法中的等分線段的方法。如圖4，便是 15÷3＝5.

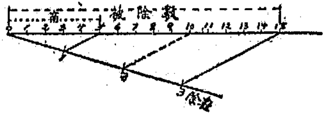



圖 4.

圖中表示除數的線是任意畫的。畫了以後，便從0起在上面取等長的任意三段0 1，1 2，2 3，再將3和15連起來，過1畫一條線和牠平行，這線正好通過5；5就是商數。圖中的2 10一條線是爲了看起來更清爽畫的，實際上卻不必要。

懂得了四基法的畫法麼？現在進一步再來看兩個數的幾種關係的具體表出法。

兩個不同的數量，當然，若是同時畫在一條線段上，是要弄得眉目不清，莫明其「土地堂」的。假如這兩個數量根本沒有什麼瓜葛，那就自立門戶，各占一條路線好了。若是牠們多少有些牽連要同居分炊，怎樣呢？正如學地理的時候，我們要明確地懂得一個城市是在地球上什麼地方，得知道牠的經度和緯度一樣。這兩條線一是南北向，一是東西向，自不相同。但若將這城市所在的地方的經度畫一張圖，緯度又另畫一張，那還成什麼事體呢？畫地球是經緯度併在一張，表示兩個不同而有關連的數。現在正可抄襲這個辦法，好在牠不曾在內政部註過册，不許冒用。

用兩條十字交叉的線，每條表示一個數量，那交點就算是共通的起點0，這樣來源相同，趨向各別的法門，倒也是一件好玩的勾當。

（1）差一定的兩個數量的表出法。

例　兄年十三歲，弟年十歲，兄比弟大幾歲？

用橫的線段表弟的年歲，直的線段表兄的年歲，他倆差三歲，就是說兄三歲的時候弟纔出

訓。

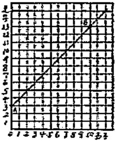


圖 5.

世，因而得A。但兄十三歲的時候弟是十歲，所以直的第十條線和橫的第十三條是相交的，因而得B。由這圖線上的各點橫直一看，便可知道：

(i)兄年幾歲（例如5歲）時，弟年若干歲（2歲）。

(ii)兄弟年紀的差總是3歲。

(iii)兄年6歲時，是弟弟的兩倍。

……………

(2)和一定的兩數量的表出法。

例　張老大、宋阿二分十五塊錢，張老大得九塊，宋阿二得幾塊？

用橫的線段表宋阿二得的，直的線段表張老大得的，張老大一塌括子拿了去，宋阿二便兩手空空，因得A點。反過來，宋阿二一塌括子拿了去，張老大便兩手空空，因得B點。由這線上的各點橫直一看，便知道：

(i)張老大得九塊的時候，宋阿二得六塊。

(ii)張老大得三塊的時候，宋阿二得十二塊。

……………

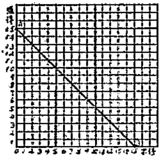


圖 6.

(3)一數量是他一數量的一定倍數的表出法。

例 一個小孩子每小時走二里路，三小時走多少里？

用橫的線段表示里數，直的線段表示時數。第一小時走了2里，因得A點，到第二小時便走了4里，因得B點。由這線上的各點橫直一看，便可知道：

(i) 3小時走了6里。

(ii) 4小時走了8里。

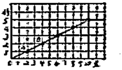


圖 7.

## 三 解答如何產生——交差原理

「昨天講的最後三個例你們總沒有忘掉吧！——若是這樣地健忘，那就連喫飯走路都不能學會了。」馬先生一走進門，還沒立定，笑嬉嬉地就這樣開場。大家自然只是報以微笑。馬先生於是口若懸河地開始他的這一課講演。

昨天的最後三個例，圖上都是一條直線。各條直線都表出了兩個量所保有的一定關係。從直線上的任意一點，往橫看又往下看，馬上就知道了，合於某種條件的甲量是什麼的時候，乙量便是怎樣；如第七圖，合於每小時走二里這條件，4小時便走了8里，5小時便走了10里。

這種圖當然對於我們很有用。比如說你有個弟弟，每點鐘可走六里路，他離開你出門去了。

你若照樣畫一張圖，他離開你後，你坐在屋裏，只要看看錶，他走了多少時間；再看看圖，你就可以知道他已離你多少遠。倘若你還明白這條路沿途的地名，你當然更可以知道他已到了什麼地方，還要多少時候他纔到達目的地。倘若他走後，你陡然想起什麼事，須得關照他，正好有長途電話可利用，只要你沿途有地點可以利用和他通電話，那你不是很容易找到發電話的時間和通話的地點麼？

這是一件很巧妙的事，已落了中國舊小說的無巧不成書的老套。古往今來，有幾個人碰巧會有這樣的事？這算得來什麼用場？你也許要這樣扳差頭。然而這只是一個用來做比方的例，照這樣推想，我們總可相信，能夠製一幅地球和月亮運行的圖吧。從這上面，不是在屋裏就可以看出什麼時候地球和月亮的相互位置嗎？這豈不是有了孟老爹所說的「天之高也，星辰之遠也，千歲之日至可坐而致也」那副神氣麼？算學的野心，就是想把宇宙間的一切法則，統括在幾個式子或幾張圖上。——這就是他的「全體大用。」

在現在說，這似乎是犯了誇大狂的說法，姑且丟開，轉到本題。算術上計算一道題，除了混合比例那一類以外，總只有一個解答，這解答就算昨天所講過的那種圖可以得出來麼？

當然可以，我們不是能夠由圖上看出來，張老大得九塊錢的時候，宋阿二得的是六塊麼？不過，這種辦法，對於這樣簡單的題目雖是可以通得過，遇着較複雜的題目，就很不便當了。

比如將題目改成這樣：

張老大、宋阿二分十五塊錢，怎樣分法，張老大比宋阿二多得三塊？

當然我們可以這樣老老實實地去把解答找出來：張老大拿十五塊的時候，宋阿二一塊都輪不着，相差的是十五塊。張老大拿十四塊的時候，宋阿二可得一塊，相差的是十三塊。……這樣一直看到張老大拿九塊，宋阿二得六塊，相差正好是三塊，這便是解答。

這樣的做法，就是對於這個很簡單的題目，也須做到六次，總得出解答來，較複雜的題目，或是題上數目較大的，那就不勝其繁了。

而且，這樣做法，實在有點和打發財票差不多。從張老大拿十五塊，宋阿二得不着，相差十五塊，不對題；馬上就跳到張老大拿十四塊，宋阿二得一塊，相差十三塊去；實在太膽大。為什麼不看一看，張老大拿十四塊九角，十四塊八角……乃至於十四塊九角九分九九九……的時候怎樣呢？

喔！若是這樣，那還了得！從十五到九中間有無限的數，要依次看去，人壽幾何？而且比十五稍稍小一點的數，誰看見他的面孔是圓的還是方的？

老老實實的辦法，就不是辦法！人是有理性的動物，花樣總要變得省力氣，有把握，總惹得起看客的讚賞呀！你們讀過伊索寓言，裏面不是說人學的猪叫比真的猪叫，更叫人滿意麼？

所以找算術上的解答必須更巧妙一點。

這樣，就來講交差原理。

照昨天的說法，我們無妨假定，兩個量間有一定的關係，說可以用一條線表示出來。——這裏說假定，是虛心的說法，因為我們只講過三個例，不便就冒冒失失地概括一切。其實兩個量的關係，用圖線（不一定是直線）表示，只要這兩個量是實數，總是可能的。——那麼像剛纔舉的這個例題，既包含兩種關係：第一兩個人所得的錢的總和是十五塊；第二兩個人所得的錢的差是三塊；當然每種關係都可畫一條線來表示。

所謂一條線表示兩個數量的一種關係，精密地說，就是：從那條線上的無論那一點，橫看和直看所得的兩個數量都有同一的關係。

假如，表示兩個數量的兩種關係的兩條直線是交叉的，那麼，相交的地方當然是一個點。這個點便是一子鍵挑了，他承繼這一房的產業，同時也承繼另一房的產業。所以，由這一點橫看直看所得出的兩個數量既保有第一條線所表示的關係，同時也就保有第二條線所表示的關係。換句話說，便是這兩個數量同時具有題上的兩個關係。

這樣的兩個數量，不用說，當然是題上所要的解答。

試將前面的例題畫出圖來看，那就非常明白了。

第一個條件，「張老大、宋阿二分十五塊錢。」這是兩人所得的錢的和一定，用線表出來，便是AB。

第二個條件，「張老大比宋阿二多得三塊錢。」這是兩人所得的錢的差一定，用線表出來，便是CD。

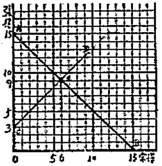


圖 8.

AB和CD相交於E，就是E點在AB上，同時也在CD上；所以兩條線所表示的條件，牠都承受了下來。

由E橫看過去，張老大得的是九塊錢；直看下來，宋阿二得的是六塊錢。

正好，九塊加六塊，十五塊，就是AB線所表示的關係。而九塊比六塊多三塊，就是CD線所表示的關係。

E點，一點不推扳，正是本題的解答。

「兩線的交點同時承受得有兩線所表示的關係，」這就是交差原理。

順水推舟，就這原理再補充幾句。

兩線不止一個交點怎樣？

那就是這題不止一個解答。不過，此是後話，暫且不表，在以後連續的若干次講演中都不會

遇見這種情形。

兩線沒有交點怎樣?

那就是這題沒有解答。

沒有解答還成題麽?

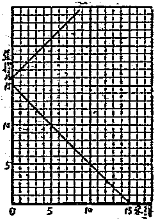


圖 9.

不客氣一點,你就可以說這題不通,客氣一點,你就說,這題不可能。所謂不可能,就是照題上所給的條件,牠所需要的解答是不存在的。

比如前面的例題,第二個條件,換成「張老大比宋阿二多得十六塊錢,」畫出圖來,兩直線便沒有交點。事實上,這非常明白,兩個人分十五塊錢,無論怎樣,不會有一個人比別一個人多得十六塊的。只有兩人暫時將牠放着生利息,到了連本帶利已在十六塊以上再來分,然而,這已超出題目的範圍了。

教科書上的題目,是著書的人爲了學習的人練習起見編造出來的,所以,只要不是排錯,都不至於不可能;至於到了實生活上,那就不定有這樣的幸運。因此,注意題目的是否可能,假如不可能,解釋這不可能的理由,都是學習算學的人所應當做的工作。

# 四 就講和差算罷

例一 大小兩數的和是十七，差是五，求兩數。

馬先生側着身子在黑板上寫了這麼一個題，轉過來對着聽衆，兩眼向大家掃射了一遍。

「周學敏，這個題你會算了麼？」周學敏也是一個對於學習算學感到困難的。

周學敏立起來，回答道：「這和前面的例是一樣的。」

「不錯，是一樣的，你試將圖畫出來看一看。」

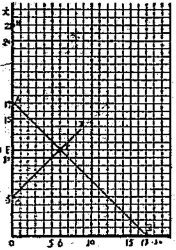


圖 10.

周學敏很規矩地走上講臺，迅速地將圖在黑板上畫了出來。馬先生看了一看，問：

「得數是多少？」

「大數十一，小數六。」

周學敏雖然得出這個不錯的解答。但他好似不很滿意，回到坐位上，兩眼很遲疑地望着馬

先生。

馬先生覺察了，向着他：「你還有點放心不下麼？」

周學敏立刻回答道：「這樣畫法是懂得了，但是，這個題的算法還是不明白。」

馬先生點了一點頭說：

「這個問題，很有意思。不過你們應當知道，這只是算法的一種，因爲牠比較具體而且有一定的法則去對付題目，所以很有價值。由這種方法計算出來以後，再仔細地觀察，推究算術中的計算法，有時便可得出來。」

如圖OA是兩數的和，OC是兩數的差，CA便是兩數的和減去兩數的差，CF恰是小數，又是CA的一半。因此就本題說，便得出：

$$\underbrace{(\underset{\vdots}{\underset{OA}{17}}-\underset{\vdots}{\underset{OC}{5}})}_{CA}\div 2=\underset{\vdots}{\underset{CA}{12}}\div 2=\underset{\vdots}{\underset{CF}{6}}\cdots\cdots\text{小數}$$

$$\underset{\vdots}{\underset{CF}{6}}+\underset{\vdots}{\underset{OC}{5}}=\underset{\vdots}{\underset{OF}{11}}\cdots\cdots\text{大數}$$

ＯＦ既是大數，ＦＡ又等於ＣＦ，若在ＦＡ上加上ＯＣ，就是圖中的ＡＨ，那麼ＦＨ也是大數。所以ＯＨ是大數的二倍。由此又可得下面的算法：

$$(\underbrace{\underset{OA}{17}+\underset{AH}{5}}_{OH})\div 2=\underset{OH}{22}\div 2=\underset{OF}{11}\text{……大數。}$$

$$\underset{OF}{11}-\underset{OC}{5}=\underset{CF}{6}\text{……小數。}$$

記好了ＯＡ是兩數的和，ＯＣ是兩數的差，由這計算，還可得出這類題的一般的公式來：

（和＋差）÷2＝大數，　大數－差＝小數；

或　（和－差）÷2＝小數，　小數＋差＝大數。

例二　大小兩數的和為二十，小數除大數得四，大小兩數各若干？

這題的兩個條件是：(1)兩數的和為二十，這便是和一定的關係。(2)小數除大數得四，換句話說，便是大數是小數的四倍，——倍數一定的關係。由(1)得圖中的ＡＢ，由(2)得圖中的ＯＤ。ＡＢ和ＯＤ交於Ｅ。

由Ｅ橫看得１６，直看得４。大數１６，小數４，就是所求的解答。

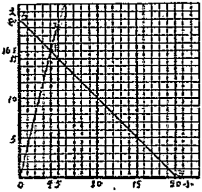



圖 11.

「你們試由圖上觀察，發現本題的計算法，和計算這類題的公式。」馬先生一面畫圖，一面向着大家這樣說。

大家都睜起兩眼盯着黑板，還算周學敏勇敢：

「OA是兩數的和，OF是大數，FA是小數。」

「好！FA是小數。」馬先生好似驚異周學敏的這個發現。「那麼OA裏一共有幾個小數？」

「5個。」周學敏。

「5個？從那裏來的？」馬先生有意地問。

「OF是大數，大數是小數的4倍。FA是小數。OA等於OF加上FA，4加1是5，所以有5個小數，」王有道。

「那麼，本題應當怎樣計算？」馬先生。

「用5去除20得4，是小數，用4去乘4得16，是大數。」我回答。

馬先生靜默了一會提起筆在黑板上一面寫，一面說：「要這樣在理論上纔算完全：」

$20\div(4+1)=4$……小數， $4\times4=16$……大數；

接着又問：「公式呢？」差不多大家一齊說：

和÷(倍數+1)=小數， 小數×倍數=大數。

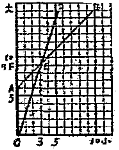



圖 12.

例三 大小兩數的差是六大數是小數的三倍，求兩數。

馬先生將題目寫出以後，一聲不響地隨即將圖畫出，問：

「大數是多少？」

「9，」大家齊聲回答。

「小數呢？」

「3。」也是衆人一齊回答。

「在圖上，OA是什麼？」

「兩數的差。」周學敏。

「OF和AF呢？」

「OF是大數，AF是小數。」我搶着說。

「OA中有幾個小數？」

「3減1個。」王有道表示不甘退讓地爭了回答。

「周學敏，這題的算法怎樣？」

「6÷(3−1)=6÷2=3……小數， 3×3=9……大數。」

「李大成，計算這類題的公式呢？」馬先生表示默許以後。

「差÷(倍數－1)＝小數，　小數×倍數＝大數。」

例四　周敏和李成分三十二個銅板，周敏得的比李成得的三倍少八個，各得幾個？

馬先生在黑板上寫完這題目，他板起臉望着我們，大家不禁哄堂大笑。但不久就靜默下來，望着他。

馬先生：「這回，老文章有點難抄襲了，是不是？第一個條件兩人分三十二個銅板，這是『和一定的關係，』這條線自然容易畫。第二個條件卻是含有倍數和差，困難就在這裏。王有道，表示這第二個條件的線怎樣畫法？」

王有道受窘了，只緊緊地閉了兩眼思索，右手的食指不住地在桌上畫來畫去。

馬先生：「西洋鏡戳穿了，原是不值錢的。只要想想昨天講過的三個例的畫線法，根原上毫無分別。現在無妨先來解決這樣一個問題，『甲數比乙數的二倍多三，』怎樣用線表示出來。」

在昨天我們講末三個例的時候，每題都是先找出A，B兩點來，再連結牠們成一條直線，現在仍舊可以依樣畫葫蘆。

用橫線表乙數，縱線表甲數。

甲比乙的二倍多三，若乙是零，甲就是3，因而得A點。若乙是1，甲就是5，因而得B點。

現在從AB上的任意一點，比如C，橫看去得11，直看來得4，不是正合條件嗎？

若將表示小數的橫線移到3X，對於3X和3Y說，AB不是正好表示兩數指定倍數的關係麼？

「明白了嗎？」馬先生很莊重地問。大家只以默示已經明白作回答。

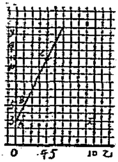


圖 13.

接着，馬先生又問：

「那麼，表示『周敏得的比李成得的三倍少八個，』這條線怎樣畫法，周學敏來畫畫看。」

大家又笑一陣。周學敏在黑板上畫成下圖。

「由這圖上看起來，李成一個錢不得的時候，周敏得多少？」馬先生。

「8個，」周學敏。

「李成得1個呢？」

「11個。」有一個同學回答。

「那豈不是文不對題嗎？」這一來大家又呆住了，畢竟王有道的算學好，他說：

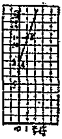


圖 14.

「題目上是『比三倍少八』不能這樣畫。」

「應當怎樣畫，照你的意見？」馬先生向着王有道。

「我不知道怎樣表示『少』。」王有道。

「不錯，這一點須特別注意。現在大家想，李成得三個的時候，周敏得幾個？」

「1個。」

「李成得四個的時候呢？」

「4個。」

「這樣A、B兩點都得出來了。連起AB來，對不對？」

「對——！」大家有點樂得忘形的神氣，拖長了聲音這樣回答，簡直和小學三四年級的學生一般，惹得馬先生也笑了。

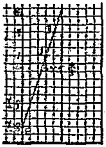


圖 15.

「再來變一變戲法，將AB和OY都往回拉長，得交點E。OE是多少？」

「8。」

「這就是『少』的表出法，現在歸到本題。」馬先生接着畫出了16圖。

「各人得多少？」

「周敏二十二個，李成十個。」周學敏。

「算法呢？」

「$(32+8)\div(3+1)=40\div4=10$……李成得的數。

「$10\times3-8=30-8=22$……周敏得的數。」我說。

「公式怎樣？」好幾個人同答：

(總數＋少數)÷(倍數＋1)

＝小數

小數×倍數－少數＝大數。

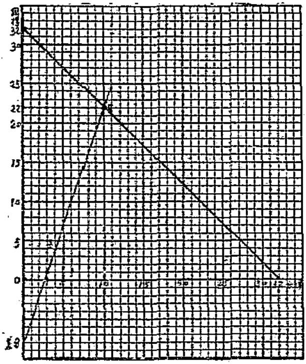


圖 16.

例五　兩數的和是十七，大數的三倍同着小數的五倍的和是六十三，求兩數。

「我用這個題來結束這第四段。你們能用畫圖的方法求出解答來麼？各人都自己算一算看。」馬先生寫完了題這麼說。

跟着，沒有一個人不用鉛筆，三角板在方格紙上畫。——方格紙是馬先生預先關照過，叫大

家準備的。——這是很奇怪的事，沒有一個不比平常上課用心。同樣都是學習，爲什麼有人強迫着，反而不免想偷嬾；沒有人強迫，比較自由了，倒一齊用心起來。這眞是一個謎。

和小學生交文課的稿子給先生看，期望着先生說一聲「好」便回到坐位上整正的一般，先先後後地都畫好了送給馬先生看。這也是奇蹟，八九個人全沒有錯，而且完畢的時間，相差也不過兩分鐘。這使得馬先生感到愉快，從他的臉上的表情就可看出來。不用說，各人的圖，除了綫有粗細而外，全是一樣，簡直好似印板印的一般。

各人回到坐位上坐下來，靜候馬先生講解。他卻不講什麼，突然地向着王有道：

「王有道，這個題，用算術的方法怎樣計算，你來給我代課，講給大家聽。」說完了就走下講臺，讓王有道去做臨時先生。

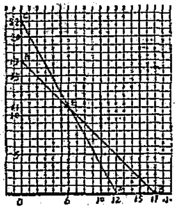


圖 17.

王有道雖則有點靦腆，終於拖着腳上了講臺，拿着粉筆，硬做起先生來。

「兩數的和是十七，換句話說，就是：大數的一倍同着小數的一倍的和是十七。所以用三去乘十七，得出來的，便是：大數的三倍同着小數的三倍的和。

「題目上第二個條件是大數的三倍同着小數的五

倍的和是六十三；所以若從六十三裏面減去三乘十七，剩下來的數裏，只有『五減去三』個小數了。」很神氣地說完這幾句話，王有道便默默地在黑板上寫出下面的式子，寫完低着頭走下講臺。

$(63-17\times3)\div(5-3)=12\div2=6$……小數。

$17-6=11$……大數。

馬先生接着上了講臺：

「這個算法，你們大概都懂得了吧。我想，你們依了前幾個例的樣兒，一定要問『這個算法怎樣從圖上可以觀察得出來呢？』這個問題卻把我難住了。我只好回答你們，這是沒有法子的。你們已學過了一點代數，知道用方程式來解算術中的四則問題。有些題目，也可以由方程式的計算，找出算術上的算法，並且對於那算法加以解釋。但有些題目，要這樣做卻很勉強，而且有些簡直要勉強也很難。各種方法有各自的立場，這裏不能和前幾個例一樣，由圖上找出算術中的計算法，也就爲此。

「不過，這種方法，既比較的具體而且確定，所以用來解決問題比較便當。由牠雖有時不能直接得出算術的計算法來，但一個題，已有了解答總比較易於推敲一點；對於算術方法的思索，這也是牠的一種好處。

「這一課就這樣完結吧。」

# 五　「追趕上前」的話

「講第三段的時候，我曾經說過，倘若你有了一張圖，你坐在屋裏，看看錶，又看看圖，隨時就可知道你的出了門的弟弟離開你已有多少遠。這次我就來講關於走路這一類的問題。」馬先生今天這樣開場。

例一　趙阿毛上午八時由家中動身到城裏去，每小時走三里。上午十一時，他的兒子趙小毛發現他忘了帶上應當帶到城裏去的東西，拿着從後面追去，每小時走五里，什麼時候可以追上？

這題只須用第二段講演中的末一個作基礎便可得出來。用橫線表路程，每一小段一里。用縱線表時間，每二小段一小時。——縱橫線用作單位1的長度，無妨各異，只要表示得明白。

因爲趙阿毛是上午八時由家中動身的，所以時間就用上午八時做起點。趙阿毛每小時走三里，他走的行程和時間是「定倍數」的關係。畫出來就是AB線。

趙小毛是上午十一時動身的，他走的行程和時間對交在C點的縱橫線說，也只是「定倍

數」的關係。畫出來就是CD線。

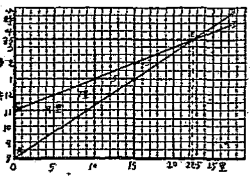


圖 18.

AB和CD交於E，就是趙阿毛和趙小毛父子倆在這兒碰上了。

從E點橫看，得下午三時半，這就是解答。

「你們仔細看這圖，比前次的有趣味。」趣味！今天馬先生從走進課堂直到現在，都是扳着面孔的，我還以爲他心裏有什麼事不高興，或是身體不大爽快呢，聽到這兩個字，知道他將要說什麼趣話了，精神不禁爲之一振。但是，仔細看一看圖，依然和前次的各個例題一樣，只有兩條直線和一個交點，眞不知道馬先生說的特別趣味在那里。大約別人也和我一樣地沒有看出特別的趣味，所以全課堂裏，只有靜默。打破這靜默的，自然只有馬先生：

「看不出麼?!嗜不是眞正的趣味『橫』生麼？」橫字特別說得響，而且同時右手拿了粉筆向着黑板上的圖，橫着一畫。雖是這樣，在我們還猜不透這個謎。

「大家橫了看看兩條直線間的距離！」因了馬先生這末一提示，果然，大家都看那兩條線間的距離。

「看出了什麽？」馬先生靜了一下問。

「越來越短，末了變成零。」周學敏回答。

「不錯！但，這表示什麽意思？」

「兩人越走越近，到後來便碰在一淘了。」王有道答說。

「對的，那末，趙小毛動身的時候，兩人相隔幾里？」

「九里。」

「走了一小時呢？」

「七里。」

「再走一小時呢？」

「五里。」

「每走一小時，趙小毛趕上趙阿毛幾里？」

「二里。」這幾次差不多都是齊聲回答，課堂裏顯得格外熱鬧。

「這二里從那里來的？」

「趙小毛每小時走五里，趙阿毛每小時只走三里，五里減去三里，便是二里。」我搶着回答。

「好！兩人先隔開九里，每小時趙小毛能夠追上二里，那麽幾小時可以追上？用什麽算法計

算?」馬先生這次是向着我問。

「用二去除九得四又小數五。」我答。馬先生又問：

「最初相隔的九里怎樣來的呢?」

「趙阿毛每小時走三里，上午八點鐘動身，走到上午十一點鐘，一共走了三小時，三三得九。」

另一個同學這麼回答。

在這以後，馬先生就寫出了下面的算式。

$$3^{里}\times3\div(5^{里}-3^{里})=9^{里}\div2^{里}=4.5$$……小時，趙小毛走的時間。

$$11^{時}+4.5^{時}-12^{時}=3.5^{時}$$……即下午三時半。

「從這次起，公式不寫了，讓你們去如法泡製罷。從圖上還可以看出來，趙阿毛和趙小毛碰着的地方，距家是二十二里半。若是將AE、CE引長出去，兩線間的距離又越來越長，但AE翻到了CE的上面去。這就表示若他們父子碰着以後，仍繼續各自前進，趙小毛便走在趙阿毛前面，越離越遠。」

試將這個題改成「甲每時行三里，乙每時行五里，甲動身後三小時，乙去追他，幾時可以追上?」這就更一般了，畫出圖來，當然和前面的一樣。不過表示時間的數字須換成0、1、2、3……。

例二　甲每小時行三里，動身後三小時，乙去追他，四小時半追上，乙每小時行幾里?

對於這個題，表示甲走的行程和時間的線，自然誰都會畫了。就是表示乙走的行程和時間的線，經過了馬先生的指示，以及共同的討論，知道：因爲乙是在甲動身後三小時纔動身，而得C點，又因爲乙追了四小時半趕上甲，這時甲正走到E，而得E點；連結C E，就得所求的線。再看每小時間，這條線所經過的橫距離是五，所以知道乙每小時行五里。這眞是馬先生說的趣味橫生了。

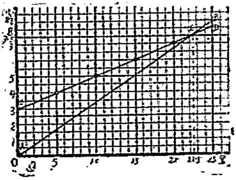


圖 19.

不但如此，圖上明明白白地指示出來甲七小時半走的路程是二十二里半，乙四小時半走的也正是這樣多，所以很容易地使我們想出了這題的算法。

3里×(3＋4.5)÷4.5＝22.5里÷4.5＝5里……乙每小時走的。

但是馬先生的主要目的還不在討論這題的算法，當我們得到了解答和算法後，他又寫出下面的例題。

例三　甲每小時行三里，動身後三小時，乙去追他，追到二十二里半的地方追上，求乙速度。

跟着例二來解這個問題，眞是十分輕鬆，不必費什麼思索，就知道應當這樣算：

22.5里÷(7.5－3)＝22.5里÷4.5＝5里……乙每小時走的。

原來，圖是大家都懂得畫了，而且一連這三個例題的圖，簡直就是一個，只是畫的方法或說明不同。甲走了七小時半而比乙多走三小時，乙走了四小時半，而路程是二十二里半，上面的計算法，由圖上看來，眞是「瞭如指掌」啊！我今天纔深深地感到算學有這麼濃厚的興趣！

馬先生在大家算完這題以後發揮他的議論。

由這三個例看來，一個圖可以表示幾個不同的題，只有着眼點和說明不同。這不是活鮮鮮地，很有趣味嗎？原來例二例三都是從例一轉化來的，面孔雖然不同，根源的關係卻沒有兩樣。這類問題的骨幹只是距離、時間、速度的關係，你們當然已經明白：

速度×時間＝距離

由此演化出來，便得：

速度＝距離÷時間

時間＝距離÷速度

我們說：

「趙阿毛的兒子是趙小毛，老婆是趙大嫂子。

「趙大嫂子的老公是趙阿毛，兒子是趙小毛。

「趙小毛的媽媽是趙大嫂子，爸爸是趙阿毛。」

這三句話，表面自然不一樣，立脚點也不同，文學的地說，所給我們的意味、語感也不同；但所表出的根本的關係卻只一個，畫個圖便是：

趙阿毛 ←夫婦→ 趙大嫂子

趙阿毛 ←父子→ 趙小毛

趙大嫂子 ←母子→ 趙小毛

照這種情形，將例一先分析一下，我們可以得出下面各元素以及元素間的關係：

1. 甲每小時行三里。
2. 甲先走三小時。
3. 甲共走七小時半。
4. 甲乙都共走二十二里半。
5. 乙每小時行五里。
6. 乙共走四小時半。
7. 甲每小時所行的里數（速度）乘以所走的時間，得甲走的距離。
8. 乙每小時所行的里數（速度）乘以所走的時間，得乙走的距離。

9. 甲乙所走的全距離相等。

10. 甲乙每時所行的里數相差二。

11. 甲乙所走的小時數相差三。

由1到6是這題所含的六個元素。一般地說，只要知道其中的三個，便可將其餘的三個求出來。如例一，知道的是1、5、2，而求得的是6，但由2、6便可得3，由5、6就可得4。例二，知道的是1、2、6，而求得5，由2、6當然可得3，由6、5便得4。例三，知道的是1、2、4，而求得5，由1、4可得3，由5、4可得6。

不過有少數的例外，如1、3、4因為4可以由1、3得出來，所以不能成一個題。2、3、6，只有時間而且由2、3就可得6，也不能成題。又4、5、6，由4、5可得6，一樣地不能成題。

從六個元素中取出三個來做題目，照理可成二十個；除了上面所說的不能成題的三個，以及前面已舉出的三個，還有十四個。這十四個的算法，當然很容易推知，而且畫出圖來和前三例的全然一樣。為了便於比較研究，逐一寫在後面。

例四　甲每小時行三里[1]，走了三小時，乙纔動身[2]，他共走了七小時半[3]，被乙趕上，求乙的速度。

$3^{里} \times 7.5 \div (7.5-3) = 5^{里}$……乙每小時所行的里數。

例五　甲每小時行三里[1]，先動身，乙每小時行五里[5]，從後追他，只知甲共走了七小時半[8]，被乙追上；甲先動身幾小時？

$7.5-3\times7.5\div5=3$……甲先動身三小時。

例六　甲每小時行三里[1]，先動身，乙從後面追他，四小時半[6]追上，而甲共走了七小時半，求乙的速度。

$3^{里}\times7.5\div4.5=5^{里}$……乙每小時所行的里數。

例七　甲每小時行三里[1]，先動身，乙每小時行五里[5]，從後面追他，走了二十二里半[4]追上，求甲先走的時間。

$22.5\div3-22.5\div5=7.5-4.5=3$……甲先走三小時。

例八　甲每小時行三里[1]，先動身，乙追四小時半[6]，共走二十二里半[4]追上，求甲先走的時間。

$22.5\div3-4.5=7.5-4.5=3$……甲先走三小時。

例九　甲每小時行三里[1]，先動身，乙從後面追他，每小時行五里[5]，四小時半[6]追上，甲共走了幾小時？

$5\times4.5\div3=22.5\div3=7.5$……甲共走七小時半。

例十　甲先走三小時[2]，乙從後面追他，在距出發二十二里半[4]的地方追上；而甲共走了七小時半[3]，求乙的速度。

$22.5^{\text{里}} \div (7.5-3) = 22.5^{\text{里}} \div 4.5 = 5^{\text{里}}$……乙每小時所行的里數。

例十一　甲先走三小時[2]，乙從後面追他每小時行五里[5]，到甲共走七小時半[3]時追上，求甲的速度。

$5^{\text{里}} \times (7.5-3) \div 7.5 = 22.5^{\text{里}} \div 7.5 = 3^{\text{里}}$……甲每小時所行的里數。

例十二　乙每小時行五里[5]，在甲走了三小時的時候[2]，動身追甲，乙共走二十二里半[4]追上，求甲的速度。

$22.5^{\text{里}} \div (22.5^{\text{里}} \div 5^{\text{里}} + 3) = 22.5^{\text{里}} \div 7.5 = 3^{\text{里}}$……甲每小時所行的里數。

例十三　甲先動身三小時[2]，乙以四小時半[6]，走二十二里半路[4]，追上甲，求甲的速度。

$22.5^{\text{里}} \div (3+4.5) = 22.5^{\text{里}} \div 7.5 = 3^{\text{里}}$……甲每小時所行的里數。

例十四　甲先動身三小時[2]，乙每小時行五里[5]，從後面追他，走四小時半[6]追上，求甲的速度。

$5^{\text{里}} \times 4.5 \div (3+4.5) = 22.5^{\text{里}} \div 7.5 = 3^{\text{里}}$……甲每小時所行的里數。

例十五　甲七小時半[3]走二十二里半[4]；乙每小時行五里[5]，在甲動身後若干小時後動

身，正追上甲；求甲先走的時間。

$7.5-22.5\div5=7.5-4.5=3$……甲先走三小時。

例十六　甲動身後若干時，乙動身追甲，甲共走七小時半[3]，乙共走四小時半[5]，所走的距離爲二十二里半[4]，求各人的速度。

$22.5^{\text{里}}\div7.5=3^{\text{里}}$……甲每小時所行的。

$22.5^{\text{里}}\div4.5=5^{\text{里}}$……乙每小時所行的。

例十七　乙每小時行五里[5]，在甲動身若干時後追他，到追上時，甲共走了七小時半[3]，乙只走四小時半[6]，求甲的速度。

$5^{\text{里}}\times4.5\div7.5=22.5^{\text{里}}\div7.5=3^{\text{里}}$……甲每小時所行的。

十七個題中，第十六題只是應有的文章，嚴格地說，已不成一個題了。將這些題對了圖看，並且比較牠們的算法，可以知道將一個題中的已知元素和所求的元素對調而組成一個新題；這兩題的計算法的更改正有一定法則。大體說來總是這樣，新題的算法，對於被掉的元素說，正是原題算法的還原，加減互變，乘除也互變。

前面每一題都只求一元素，若將各未知的三元素作一題，實際，就成了四十八個。還有，甲每時行三里，先走三小時，就是先走九里，這也可用來代替第二元素，而和其他的二元素組成若干

題。這樣地推究，多末活潑有趣而且對於研究學問，實在是一種很好的訓練。

本來，無論什麼題，都可以下這末一番探究工夫的，但前幾次的例比較簡單，變化也就少一些，所以不曾說到。而舉一反三，正好是一個練習的機會，所以，以後也不再這末不怕麻煩地講了。

把題目這樣地推究，學了一個題的計算法，便可悟到許多關係相同形式各別的題的算法，實不只「舉一反三」簡直要「聞一以知十」；使我覺得無窮的快樂，我現在纔感到算學不是枯燥的。

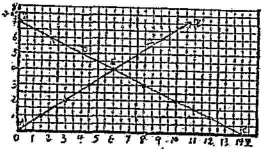


圖 20.

馬先生費許多精神，教給我們這探索題目的方法，時間已去了不少，但他還不感到喫力地繼續講下去。

例十八 甲乙兩人在東西相隔十四里的兩地，同時相向動身，甲每小時行二里，乙每小時行一里半，兩人幾時在途中相遇？

這題差不多算得是我們各人自己做出來的。馬先生只告訴了我們，應當注意兩點：第一，甲和乙走的方向相反，所以甲從C向D，乙就從A向B，A C相隔十四里；第二，因為題上所給的數都不很大，圖上的單位應取得大一些，——都用二小段當一——圖纔好看，但算學也須顧着好看！

由E點横看去得四，自然就是四小時兩人在途中相遇了。

「趣味横生」横了看去甲乙兩人每走一小時近了三里半，就是甲乙速度的和，所以算法也就得出來了：

$$14^{里}\div(2^{里}+1.5^{里})=14^{里}\div3.5^{里}=4$$……所求的小時數。

這算法，沒有一個人不對，算學眞是人人能領受的呵！

馬先生很高興地提出下面的各問題，要我們回答算法，當然這更不是什麼難事。

1. 兩人相遇的地方，距東西各幾里？

$$2^{里}\times4=8^{里}$$……距東的，

$$1.5^{里}\times4=6^{里}$$……距西的。

2. 甲到了西地，乙還距東地幾里？

$$14^{里}-1.5^{里}\times(14\div2)=14^{里}-10.5^{里}=3.5^{里}$$……乙距東的。

下面的推究，是我和王有道、周學敏依照馬先生的前例做的。

例十九　甲乙兩人在東西相隔十四里的兩地，同時相向動身，甲每小時行二里，走了四小時，兩人在途中相遇，求乙的速度。

$$(14^{里}-2^{里}\times4)\div4=6^{里}\div4=1.5^{里}$$……乙每小時行的。

例二十　甲乙兩人在東西相隔十四里的兩地，同時相向動身，乙每小時行一里半，走了四小時，兩人在途中相遇，求甲的速度。

$(14^{\text{里}} - 1.5^{\text{里}} \times 4) \div 4 = 8^{\text{里}} \div 4 = 2^{\text{里}}$……甲每小時行的。

例二一　甲乙兩人在東西兩地，同時相向動身，甲每小時行二里，乙每小時行一里半，走了四小時，兩人在途中相遇，兩地相隔幾里？

$(2^{\text{里}} + 1.5^{\text{里}}) \times 4 = 3.5^{\text{里}} \times 4 = 14^{\text{里}}$……兩地相隔的。

這個例，所含的元素只有四個，所以只能成功四個形式不同的題，自然比馬先生所講的前一個例簡單得多；不過，我們能夠這樣窮搜死追，心中確實感到無限的愉快！

下面又是馬先生所提示的例。

例二二　從宋莊到毛鎮有二十里，何畏四小時走到，蕭紹武五小時走到，兩人同時從宋莊動身，走了三時半，相隔幾里？又走多少時候，相隔三里？

馬先生說，這個題目的要點，只是在正確地指明解答的所在。他將表示甲和乙所走的行程時間的關係的線畫出以後，這樣問：

「走了三時半，相隔的里數，怎樣指示出來？」

「從三時半的那一點畫條橫線和兩直線相交於F H，F H間的距離，三里半，就是所求

的。」

「那末，幾時相隔三里呢？」

由圖上，很明白地可以看出來，走了三小時，就相隔三里。但怎樣由畫法求出來，卻倒使我們呆住了。

馬先生見着沒人回答，便說道：

「你們難道不曾留意過斜方形麼？」隨即在黑板上畫了一個ABCD斜方形，接着說：

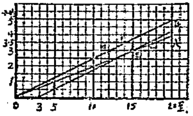


圖 21.

「你們看圖上，AD、BC是平行的，而AB、DC以及AD、BC間的橫線都是平行的，不但平行而且還是一般長。應用這個道理，過距O三里的一點畫一條線和OB平行，牠與OA交於E。在E這點兩線間的距離正好指示三里，而橫了看過去卻是三小時，這便是解答。」

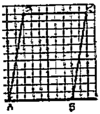


圖 22.

至於這題的算法，不用說，很簡單，馬先生大約因此不曾提起，我補在下面。

$(20^{里}\div 4-20^{里}\div 5)\times 3.5=3.5^{里}$……走了三時半相隔的。

$3^{里}\div(20^{里}\div 4-20^{里}\div 5)=3$……相隔三里所需走的時間。

跟着，馬先生所提出的例題更曲折有趣了。

例二三　甲每十分鐘走一里，乙每十分鐘走一里半。甲動身五十分鐘時，乙從甲動身的地點起行去追甲。甲走到六里路的地方，想着忘帶了東西，馬上回到出發處找尋。找了五十分鐘，找着了東西，加快了速度，每十分鐘走二里去追甲。若甲在乙動身轉回時，休息過三十分鐘，乙在什麼地方追上甲？

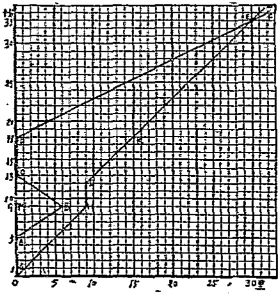


圖 23.

「先來討論表示乙所走的行程和時間的線的畫法。」馬先生說：「還有五點：1，出發的時間比甲遲五十分鐘；2，出發後每十分鐘行一里半；3，走到六里便回頭，速度沒有變；4，在出發地停了五十分鐘纔第二次動身；5，第二次的速度，每十分鐘行二里。」

「依第一點，就時間說，應從五十分鐘的地方畫起，因而得A，從A起依照第二點，每一單位時間——十分鐘——一里半的定倍數，畫直線到6里的地方，得AB。

依第三點，從B折回，照同樣的定倍數畫線，正好到一百三十分鐘的C，得BC。

依第四點，因為時間雖然一分一分地過去，乙卻沒有離開一步，即五十分鐘，都停着不動，所以得CD。

依第五點，從D起，每單位時間，以二里的定倍數，畫直線DF。

至於表示甲所走的行程和時間的線，卻比較簡單。始終是一定的速度前進，只有在乙達到6里B──正是九十分鐘，──甲達到九里時，他休息了──停着不動──三十分鐘，然後繼續前進，因而這條線是GHIJ。

兩線相交於E點。從E點往下看得三十里，就是乙在距出發點三十里的地點追上甲。

「從圖上觀察，能夠得出算法來嗎？」馬先生問。

「當然可以的。」沒有人回答，他自己說，接下去就講這題的計算法。

老實說，這個題，就圖看去，就和乙在D所指的時間，用每十分鐘二里的速度，從後去追甲一般。但甲這時已走到K，所以乙須追上的里數，就是DK所指示的。

倘若知道了GD所表示的時間，那末除掉甲在HI所休息的三十分鐘，便是甲從G到K所走的時間，用牠去乘甲的速度，得出來的，即是DK所表的距離。

在圖上GA是甲先走的時間，五十分鐘。

AM、MC都是乙以每十分鐘行一里半的速度，走了六里所費去的時間，所以都是(6÷1.5)

個十分鐘。

CD是乙找尋東西費去的時間，五十分鐘。

因此，GD所表的時間也就是C第二次動身追甲時，甲已經在路上消費去的，應當是：

$$GD = CA + AM \times 2 + CD = 50^{分} + 10^{分} \times (6 \div 1.5) \times 2 + 50^{分} = 180^{分}。$$

但甲在這段時間內休息過三十分鐘，所以，在路上走的時間只是：

$$180^{分} - 30^{分} = 150^{分}。$$

而甲的速度是每十分鐘一里，因而，DK所表示的距離是：

$$1^{里} \times (150 \div 10) = 15^{里}。$$

乙追上甲從第二次動身所走的時間是：

$15^{里} \div (2^{里} - 1^{里}) = 15$……個10分鐘。

乙所走的距離是：

$$2^{里} \times 15 = 30^{里}。$$

這題眞是曲折，要不是有圖對着看，這個算法，我是很難聽懂的。馬先生說：「我再用一個例題來作這一課的收場。」

例二四　甲乙兩地相隔一萬公尺，每隔五分鐘同時對開電車一部。電車的速度爲每分鐘

五百公尺。馮立人從甲地開電車到乙地，在電車中和對面開來的車兩次相遇，中間隔幾分鐘？又從開車至到乙地中間，和對面開來的車相遇幾次？

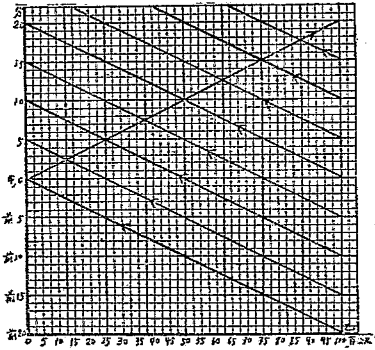



圖 24.

題目寫出後，馬先生和我們作下面的問答。

「兩地相隔一萬公尺，電車每分鐘行五百公尺，幾分鐘可走一趟？」

「二十分鐘。」

「倘若馮立人所乘的電車是對面剛開到的，那末這部車是幾時從乙地開過來的？」

「前二十分鐘。」

「這部車從乙地開出，到回到乙地，共需多少時間？」

「四十分鐘。」

「乙地每五分鐘開來一部電車，

四十分鐘，共開來幾部？」

「八部。」

自然經過這樣一討論，馬先生再將圖畫了出來還有什麼難懂呢？

由圖，一眼就看得出，馮立人在電車中，和對面開來的電車兩次相遇，中間相隔的是兩分半鐘。

而從開車至到乙地，中間和對面開來的車相遇七次。

算法是這樣：

$10000^{\text{公尺}} \div 500^{\text{公尺}} = 20^{\text{分}}$……走一趟的時間。

$20^{\text{分}} \times 2 = 40^{\text{分}}$……來回一趟的時間。

$40^{\text{分}} \div 5^{\text{分}} = 8$……一部車自己來回一趟，中間乙所開的車數。

$20^{\text{分}} \div 8 = 2.5^{\text{分}}$……和對面開來的車兩次相遇，中間相隔的時間。

$8^{\text{次}} - 1^{\text{次}} = 7^{\text{次}}$……和對面開來的車相遇的次數。

「這課到此為止，但我還得拖個尾巴，留個題你們自己去做」馬先生說完寫出下面的題，匆匆地退出課堂，他額上的汗珠已滾到頰上了。

今天足足在堂上坐了兩個半鐘頭，走到寢室裏很覺疲倦，但對於馬先生所給的題，不知為

什麼，還不肯捨去，並且決心獨自一個人來試做。總算「有志竟成，」費了二十分鐘，居然成功了。但願經過這一次暑假，對於算學得到較深的門徑！

例二五　甲乙兩地相隔三英里，電車每時行十八英里，從上午五時起，每十五分鐘，兩地各開車一部。阿土上午五時一分從甲地電車站，順着電車軌道步行，於六時零五分到乙地車站。阿土在路上碰到往來的電車共幾次？第一次在什麼時候和什麼地點？

阿土共碰到往來電車八次。

第一次約在上午五時八分半多。

第一次離甲地百分之三十六英里。

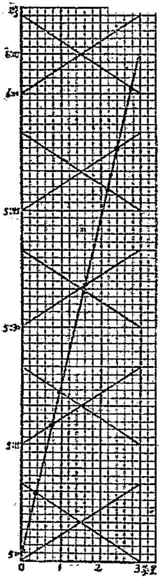



圖 25.

# 六 時鐘的兩隻針

「這次講一個許多人碰着有點莫名其妙的題目。」馬先生說完了，在黑板上寫出：

例一 時鐘的長針和短針，在二時三時間，什麽時候碰在一淘？

這個題，我知道，王有道確實是會算的。但是，奇怪得很，馬先生寫完題目以後，他卻一聲不響，後來，下了課，我問他，他的回答是，「會算是會算的，但聽聽馬先生有什麽別的講法，不是更有益處麽？」我聽了他的這番話，不免有些兒慚愧，我自己覺得已經懂得的東西，往往不喜歡再聽先生的講，這着實是缺點。

「這題的難點在那里？」馬先生問。

「兩隻針都是在鐘面上轉，長針轉的快，短針轉的慢，」我大膽地回答。

「不錯！不過，仔細想一想，便一點兒沒有什麽困難了。」馬先生這樣回答，並且接着說。

「無論是跑圓圈，或是跑直路，總是在一定的時間裏面，走過了一定的距離。而且，時鐘的這兩隻針，好似受過嚴格訓練的一般，在相同的時間內，各自所走的距離總是一定的。——在物理學上，這叫做等速運動。一切的運動法則，都可用速度、時間和距離這三項的關係表示出來。在算

速運動中，牠們的關係是：

距離＝速度×時間。

現在便就這一點，將本題來探究一番。

「李大成，你說長針轉的快，短針轉的慢，怎樣知道的？」馬先生向我提出這樣的問題，惹得大家都笑了起來。當然，這是凡看見過時鐘走動的人都知道的，還成什麼問題。不過馬先生既特特兒地提出來，我倒不免有點兒發呆了。怎樣回答好呢？終於更大膽地答道：

「看出來的！」

「當然，不是摸出來的，而是看出來的了！不過，我的意思，單說快慢，未免太儱侗些兒，我要問你，這快慢怎樣比較出來的。」

「長針一小時轉六十分鐘的地位，短針卻只轉五分鐘的地位，長針不是比短針轉得快嗎？」

「這就對了！但，我們現在知道的是長針和短針在六十分鐘的時間所走的距離，牠們的速度怎樣呢？」馬先生望着周學敏。

「用時間去除距離，就得速度。長針每分鐘轉一分鐘的地位；短針每分鐘只轉十二分之一分鐘的地位。」周學敏。

「現在，兩隻針的速度都已知道了，姑且放下，再來看題上的另一個條件。正正兩點鐘的辰光，長針在短針的後面多少距離？」

「十分鐘的地位。」──四五八一同回答。

「那末，這題目和

──趙阿毛在趙小毛的前面十里，趙小毛從後面趕他，每時趙小毛走一里，趙阿毛走十二分之一里，幾時可以趕上？──

有什麼區別？」

「一樣！」眞正地是衆口一詞。

這樣推究的結果，我們不但能夠將圖畫出來，而且算法，也就非常明晰了：

$$10^{分}\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=10^{分}\div\frac{11分}{12}$$

$$=\frac{120}{11}^{分}=10\frac{10}{11}^{分}$$

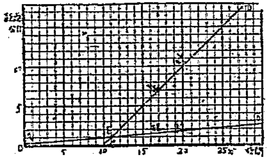


圖 26.

馬先生說，這類題的變化並不十分多，要我們各自作一張圖。

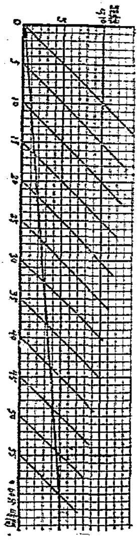


圖 27.

表出：從零時起，到十二時止兩隻針各次相重的時間自然，這只是將前一圖擴充一下就得了。但，在我將圖畫完，仔細玩賞一番以後，覺得算學眞是有趣味的科目。

馬先生提出的第二例是：

例二　時鐘的兩針在二時三時間，什麼時候成一個直角？

馬先生叫我們大家將這題和前一題比較，提出他的要點來，我們都只知道一個要點是：

——兩針成一直角的時候，牠們的距離是十五分鐘的地位。

後來經過馬先生的種種提示，又得出第二個要點：

——在二時和三時間，兩針要成直角，長針得趕上短針同牠相重，——這是前一題——再超過牠十五分鐘。

這一來，不用說，我們都明白了。作圖的方法，只是在例一的圖上增加一條和AB平行的線FG，軸和CD的交點H，便指示出我們所要的解答。這理由也很明白，FG和AB平行，AF相隔十五分鐘的地位，所以FG上面的各點垂直畫線下來和AB相交，則FG和AB間的各線段都是一般長，表示十五分鐘的地位，所以FG便是表距長針十五分鐘的地位的線。

至於這題的算法，那更是容易明白了。長針對於短針先趕上十分鐘，再超過十五分鐘，一共，自然是長針須比短針多走了10+15 分鐘，所以

$$\left(10^{分}+15^{分}\right)\div\left(1-\frac{1}{12}\right)=25^{分}\div\frac{11}{12}$$
$$=25^{分}\times\frac{12}{11}$$
$$=\frac{300^{分}}{11}$$
$$=27\frac{3}{11}^{分}$$

便是回答。

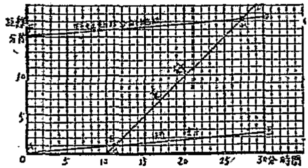



圖 23.

這些，在馬先生問我們的時候，我們都回答得上來了。雖則是這樣，但在我，——最少，我得承認——實在是一個謎。為什麼，平時，遇着一個題目我們不能這樣去思索呢？我這幾天，心裏都懷着。這個疑問，得不到回答。不是麼？倘若我們會這樣尋根究底地推想，還有什麼題目做不上來呢？我也會將這個疑問去問過王有道，但他的回答，很使我不滿意。不，簡直使我生氣。他只是輕描淡寫地回說：

——這叫做：難者不會，會者不難。

若實說，我要不是平時和王有道很好，知道他並不會「恃才傲物」我真會生氣，說不定要翻了臉罵他一頓。——王有道看到這裏，伸伸舌頭說，喂！謝謝你！刀下留情！我沒有自居會者，只是羡慕會者的不難罷了！——他的回答，不是等於不回答麼？難道，世界上的人生來就有兩類：一類，是對於算學題目，簡直不會思索的「難者，」一類是對於算學題目不十分費思索，就解答得出來的「會者」麼！真是這樣，學校裏設算學這一科目，對於前者，便是白費力氣；對於後者，便是多此一舉！這和馬先生的議論也未免矛盾了！懷着這疑問，有好幾天了！原來，從前，我也是用性質相近不相近來解釋的，而我自己，當然自居於性質不相近之列。但馬先生對於這種說法是一個否定論者，而且自從聽了馬先生這幾次的講解以後我雖不敢就成為否定論者；至少也是懷疑論者了。懷疑！懷疑！懷疑只是過程！最後總應當有個不容懷疑的結論呀！這結論是什麼？

被我們尊為「馬浪蕩」的馬先生，我想他一定可以給我們一個確切的回答的。我懷着這樣的期望，屢次想將這個問題提出來，靜候他的回答，但終於因為缺乏勇氣的緣故，不敢提出。今天，到了這個時候，我真忍無可忍了。題目的解答法，一經道破，真是「會者不難」，為什麼別人會這樣想，我們不能呢？我斗膽地向馬先生問：

——為什麼別人會這樣想，我們卻不能夠呢！

馬先生真是形容不出的高興似地說：

「好！你這個問題很有意思！現在我來跑一次野馬。」馬先生跑野馬！真是使得閧堂大笑！

「你們知道小孩子的走路麼？」這話問得太不着邊際了，大家只好報之以默然。他接着說：

「小孩子不是一生下來就會走的，他先是自己不能移動，隨後再練習着直立了走。只要不是過分嬌養或有殘廢的小孩子，兩歲總會無所倚傍地直立步行了。但是，你們要知道，直立步行，是人類的大特點，現在的小孩子只要兩歲就能夠的，我們的很早很早的祖先，卻費了不少的力氣纔能夠呀。自然，我們可以這樣解釋，古人不如今人，但這並不能使人佩服。現在的小孩子能夠走得這末早，一半是遺傳的力量，而一半卻是有一個學習的環境，一切他所見到的比他大的人的動作，都是他的模做的樣品。

「一切文化的進展，正和小孩子學步相同。明白這個道理，那末這疑問，就可以解答了。一種

題目的解決，就是一個發明。發明這件事，說牠難麼，眞難，一定要發明點什麼，這是誰也沒有把握能夠做到的。但，說牠不難，眞也不難！有一定的學力和一定的環境，繼續不斷地努力，總不至於一無成就。

「學算學，以及學別的功課都是一樣，一面先求懂得別人已經發明的，而且注意他們研究的經過和方法，一面就應用這種態度和方法去解決自己所遇到的新的問題。廣泛地說，你們學了些題目的解法，自己也就會解別的問題，這也是一種發明。不過這種發明是別人早已得出來的罷了。」

「總之，學別人的算法是一件事，學思索這種算法的方法，又是一件事，而後一種更重要。」

馬先生的議論，我還是不能無疑，總有些人比較會思索些。但是，馬先生卻說不可以忘掉了一切的發展都是歷史的，都是許多人的努力的結晶。他的意思是說「會想」並不是憑空會的，要我們去努力學習。這話，雖然我還不免懷疑，但努力學習總是應當的，我的疑問，只好暫時放下了。

馬先生發完了議論，就轉到本題：「現在你們自己去研究在各小時以後兩針成直角的時間。你們要注意，有幾小時內是可以有兩次的。」

課後，我們集在一淘研究的結果，便構成了29圖。我們並且將一隻表從正十二點旋到正

十二點來觀察過，眞是不爽分毫。我感到愉快，同時也覺得算學眞是活生生的一個科目。

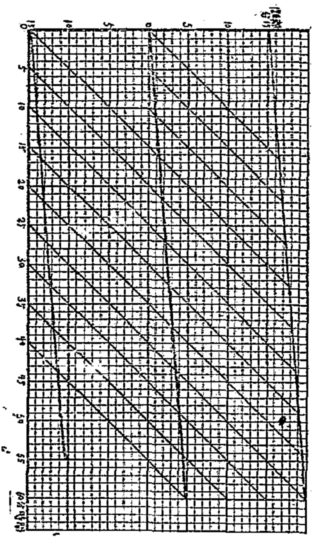


圖 29.

關於時鐘兩針的問題，一般的書上，還有「兩針成一直線」的，馬先生說，這再也沒有什麼難處，要我們自己去「發明」其實比照了前兩個例題，眞一點兒也不難啊！

# 七　流水行舟

「這次，我們先來探究這種運動的事實。」馬先生說。

「運動是力的作用，這是學物理的人都應當知道的常識。在流水中行舟，這種運動，受有幾個力的影響？」

「兩個：一.水流的，二.人划的。」這我們都可以想到。

「我們叫水流的速度是流速，人划使船前進的速度，叫漕速；那麼，在流水上行舟，這兩種速度的關係怎樣？」

"下行速度＝漕速＋流速
上行速度＝漕速－流速"

這是王有道的回答。

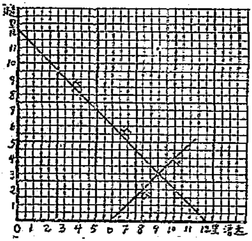



圖 30.

例一　水程六十里，順流划行五時可到，逆流

划行十時可到。每時水的流速和船的漕速怎樣?

經過前面的探究,我們已知道,這簡直和「和差問題」沒有什麼兩樣。

水程六十里,順流划行五時可到,所以下行的速,就是漕速和流速的「和」是每小時十二里。

逆流划行十小時可到,所以上行的速,就是漕速和流速的「差」是每小時六里。

上面的圖極易畫出,計算法也很明白:

$(60^{里}\div5+60^{里}\div12)\div2=(12^{里}+6^{里})\div2=9^{里}$……漕速

$(60^{里}\div5-60^{里}\div12)\div2=(12^{里}-6^{里})\div2=3^{里}$……流速

例二 王老七的船,從宋莊下行到王鎮,漕速每時7里,水流每時3里,6時可到;回來須幾時?

馬先生寫完了題問:「運動問題總是由速度、時間和距離三項中的兩項求其他一項,本題所求的是那一項?」

「時間!」又是一羣小孩子似地回答。

「那末,應當知道些什麼?」

「速度和距離。」有三個人說。

「速度怎樣?」

「潮速和流速的差,每小時4里,」周學敏。

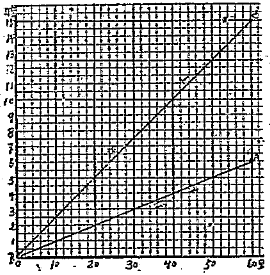


圖 31.

「距離呢?」

「下行的速度是潮速同流速的和每時10里,共行6時,所以是60里。」王有道。

「對的,不過若是畫圖,只要照一定倍數的關係,畫AB線就行了。王老七要從B回到A,每時走3里,他的行程也是一條表一定倍數關係的直線BC。至於計算法,這一分析就容易了。」馬先生不曾說出計算法,也沒有要我們各自做,我將牠補在這裏:

$(7^{\text{里}}+3^{\text{里}})\times 6\div(7^{\text{里}}-3^{\text{里}})=60^{\text{里}}\div 4^{\text{里}}=15$……時。

例三 水流每時2里,順水5時可行35里的船,回來需幾時?

這題,在形式上好似比前一題屈折,但馬先生叫我們抓住了速度、時間和距離三項的關係去想,真是「會者不難!」

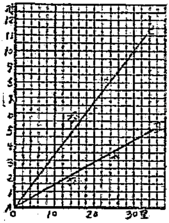



圖 32.

AB線表示船下行的速度、時間和距離的關係。潛速和流速的和是每時7里，而流速是每時2里；所以牠們的差每小時3里，便是上行的速度。依定倍數的關係作AC，這圖就完成了。

算法也很容易懂得：

$$35里 \div \{(35里 \div 5 - 2里) - 2里\}$$

$$= 35里 \div 3里 = 11\frac{2}{3} \cdots\cdots 時。$$

例四　上行每時2里，下行每時3里，這船來回某某兩地，上行比下行多需2時，二地相距幾里？

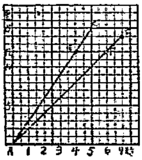



圖 33.

依照表示定倍數關係的方法，我們畫出表上行和下行的行程線AC和ABEF正好表示相差二時，因而得所求的距離是12里，正與題相合。我們都很得意。但馬先生卻不滿足。他說：

「對是對的，但不好。」

「爲什麼對了，這不好?」我們有點不服。

馬先生說：「EF這條線，是先看好了距離湊巧總對的。自然也是一種辦法。不過，若有別的更正確可靠的方法，那豈不是更好些?」

「……」大家默然。

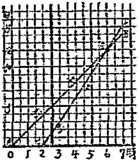



圖 34.

「題上已說明相差二時，那麼表示下行的AC線，若從二時那點畫起，則得交點E，豈不比較正確明白麼?」

眞的！這一來是更好一點！由此可以知道「學習」眞不是容易，古人說「開卷有益，」我感到「聽講有益，」就是自己已經知道了，有機會也得多多聽取別人的意見。

## 八 年齡的關係

「你們會猜謎麼?」馬先生出乎大家意外地提出這末一個問題。大約問題來得突兀的緣故，大家都默然。

「據說從前有個人出了一個謎給人猜，那謎面是一個『日』字，猜杜詩一句。你們猜是什

麼句子？」馬先生這樣說了，便呆立着向大家望。

沒有一個人囘答。

「無邊落木蕭蕭下，」馬先生說。「怎樣解釋呢？這就說來話長了。中國在晉以後分成南北朝，南朝最初是宋，宋以後是蕭道成所創的齊，齊以後是蕭衍所創的梁，梁以後是陳霸先所創的陳。『蕭蕭下』就是說，兩朝姓蕭的皇帝之後，當然是『陳，』陳字去了左邊是『東』字，東字去了木字便只剩『日』字了。這樣一解釋，好似這謎眞不錯，但是出的人可以『妙手偶得之，』而猜的人卻只好暗中摸索了。」

這雖然是一件有趣的故事，但我，也許不只我，始終不明白馬先生在講算學時突然提到牠有什麼用意，只得靜靜地等待他的講解了。

「你們覺得，我提出這故事有點不倫不類麼？其實，一般教科書上的習題，特別是四則應用問題一類，倘若沒有例題，沒有人講解指導，對於學習的人，也正和謎面一樣，不過要你摸索的程度不同罷了。摸索本來不是正當辦法，所以處理一個問題，須得有一定的步驟。第一，就是要理解問題中所包含而沒有提出的事實或算理的條件。

「例如這次要講的年齡的關係的題目，大體可分兩種，即每題中或是說到兩個以上的人的年齡，要求牠們的或種關係成立的時間，或是說到他們的年齡的或種關係而求得他們的年

齡。

「但這類目題包含着兩個事實上的條件，題目上總不曾提到的：其一，兩人年齡的差是從他們有生之初起就一定不變的。其二，每多一年或少一年，兩人便各長一歲或小一歲。不懂得這個事實，這類的題目便難於摸索了。這正如上面所說的謎語，別人難於索解的原因，就在不曾把兩個蕭，看成蕭道成和蕭衍。話雖如此，畢竟算學不是猜謎，只要留意題上所沒有明白提出，而事實上存在的條件，就不至於暗中摸索了。閒言表過，且提正文。」

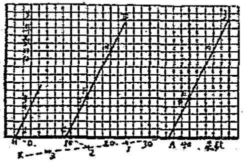


圖 35.

例一 現時，父年三十五歲，子年九歲，幾年後父年是子年的三倍？

寫好題目，馬先生說：「不管三七二十一，我們且把表示父和子的年歲的兩條線先畫出來。在圖上橫的數目是歲數，直的數目是年數。父現在年三十五歲，以後每過一年增加一歲，用AB線表示。子現在年九歲，以後也是每過一年增加一歲，用CD線表示。

「過五年，父年幾歲？子年幾歲？」

「父年四十歲，子年十四歲。」這是誰也回答得上來的。

「過十二年呢?」

「父年四十六歲,子年二十歲。」還不是誰也會囘答的麽?

「怎樣看出來的?」馬先生問。

「從OY線上記有5的那點橫看到AB線得E點,再往下看,就得四十,這是五年後父的年歲,又看到CD線得F點,再往下看得十四,就是五年後子的年歲。」我囘答。

「從OY線上記有11的那點橫看到AB線得G點,再往下看,就得四十六。這是十一年後父的年歲。又看到CD線得H點,再往下看得二十,就是十一年後子的年歲。」周學敏搶着,而且故意學着我的語調囘答。

「對了!」馬先生高叫一句,但突然頓住。

「5E是5F的3倍麽?」馬先生問後,大家搖搖頭。

「11G是11H的3倍麽?」仍是一陣搖頭,只有周學敏今天不知爲什麽這般高興,扯長了聲音囘答:「不——是——。」

「現在就是要找在OY上的哪一點到AB的距離是到CD的距離的3倍了。當然我們還是應當用畫圖的方法,不可硬用眼睛看。等分線段的方法,還記得麽?在講除法的時候講過的。」

王有道說了一段等分線段的方法。接着馬先生說：

「先隨意畫一條線AK，從A起在上面取A1、12、23相等的三段。連C2，過3作線平行於C2與CA交於M。過M作線平行於CD與OY交於4。這就得了。」

四年後，父年三十九歲，子年十三歲，正是父年三倍於子年而圖上的4P也恰好3倍於4Q，真是神妙！然而爲什麼這樣畫就行了，我卻不大理會。

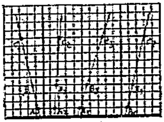


圖 36.

馬先生好似知道我的心事的一般：「現在，我們應當考求這個畫法的來源。」隨手在黑板上畫出上面的圖，要我們看了回答$B_1C_1$，$B_2C_2$，$B_3C_3$，$B_4C_4$，各對於$A_1B_1$，$A_2B_2$，$A_3B_3$，$A_4B_4$的倍數是不是相等的。當然誰也可以看得出來，這倍數都是2。

大家回答了馬先生以後，他說：「這就是說，一條線被平行線分成若干段，這些段數的倍數關係，無論這條線怎樣畫法，都是相同的。所以4P對於4Q，和MA對於MC，也就和3A對於32的倍數關係是一樣的。」

這我就明白了。

「假如題上問的是6倍，怎樣畫法？」馬先生問。

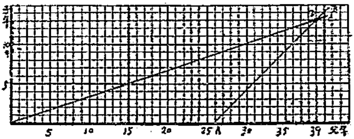



圖 37.

「在AK上取相等的6段，連C5，並6M平行於C5。」王有道回答。這，現在我也明白了，因為OY到AB的距離，無論是OY到CD的距離的多少倍，但OY到CD，總是這距離的一倍，因而總是將AK上的倒數第二點和C相連，而過末一點作線和軸平行。

至於這題的算法，馬先生教我們由圖上加以探究，我們看出CA是父子年歲的差，和QP，FE，HG全一樣。而當4P是4Q的3倍時，MA也是MC的3倍。並且在這地方4Q，MC都是所求的若干年後的子年。因此得下面的算法：

$$(\underset{OA}{35}-\underset{OC}{9})\div(\underset{A3}{3}-\underset{32}{1})-\underset{OC}{9}=\underset{MO(C4)}{4}$$

(父年－子年)÷(倍數－1)－子年＝年數(所求)。

討論完畢以後，馬先生一句話不說，將37圖畫了出來，指定周學敏去解釋。我到有點幸災樂禍的心情，因了他學過我的緣故，但畢後一想，這實在無聊。他的算學雖不及王有道，這次卻講得很有條理而且真是簡單明白。下面的一段，就是周學敏講的，我一

字不改地，記在這裏以表我的懺悔！

（別解）「父年三十五歲，子年九歲，他們相差二十六歲，就是這個人二十六歲時生這兒子。所以他二十六歲時，他的兒子是零歲，以後，每過一年，他大一歲，他的兒子也大一歲。依差一定的表示法，得AB線。題上要求的是父年3倍於子年的時間，依倍數一定的表示法得OC線，兩線相交於D。依交叉原理，D點所示的，便是合於題上的條件時，父子各人的年歲，父年三十九，子年十三。從三十五到三十九和從九到十四都是四，就是四年後父年正好是子年的三倍。」

對於周學敏的解說，馬先生也非常滿意，他批評了一句：「不錯！」就寫出例二。

例二　現時，父年三十六歲，子年十八歲，幾年後父年是子年的三倍。

這題，看去自然和例一完全相同。馬先生由我們各自依樣葫蘆地畫圖。但一動手，結果便碰了釘子，過M所畫的和CD平行的線與OY卻交在下面9的地方。這是什麼一回事呢？

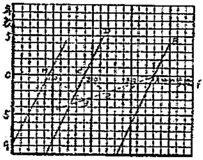


圖 38.

馬先生始終讓我們各自去做，一聲也不響。後來我從這9的地方橫看到AB，再直看上去，得父年二十七歲；而看到CD，再直看上去，得子年九歲正好父年

是子年的三倍。到此我纔領悟過來，這在下面的九，表示的是九年以前。而這個例題完全是馬先生有意弄出來的。這末一來，我還知道幾年前或幾年後，算法全是一樣，只是減的時候，被減數和減數不同罷了。本題的計算應當是：

18 − (36 − 18) ÷ (3 − 1) = 9
OC … OA … OC … AB … 32 … OM
子年 − (父年 − 子年) ÷ (倍數 − 1) = 年數(已過去)。

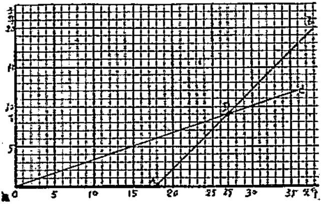


圖 39.

我試用別解法做，得39圖AB和OC的交點D表明父年二十七歲時，子年九歲，正是三倍，而從三十六回到二十七恰好九年，所以本題的解答是九年以前。

例三　現時，父年三十二歲，一子年六歲，一女年四歲，幾年後，父的年歲與子女二人年歲的和相等？

馬先生問我們這個題和前兩題不同之點，這是路一——我現也敢說「路一」了，真是十二分欣幸！——思索就知道的，父的年歲每過一年只增加一歲，而子女年歲的和每過一年卻增

加兩歲。所以從現在起，父的年歲用AB線表示，而子女二人年歲的和用CD表示。

AB和CD的交點E，直看是五十四，橫看是二十二。從現在起，二十二年後，父年五十四歲；子年二十八歲，女年二十六歲，相加也是五十四歲。

至於本題的算法，圖上顯示得很明白。CA表示現時父的年歲同子女倆的年歲的差，往後去每過一年這差減少一歲，少到了零，便是所求的時候。所以：

$$\{32-(6+4)\}\div(2-1)=22$$

OA　OC　O-22

$$\{父年-(子年+女年)\}\div(子女數-1)=所求的年數$$

這題有沒有別解，馬先生不曾說，我也沒有想過，而是王有道將

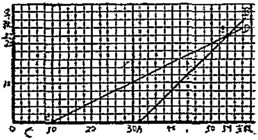


圖 40.

牠補出來的。

AB線表示從現在父的年歲同着子女倆的年歲，以後一面逐年增加一歲，而另一面增加二歲。OC表示兩面相等即一倍的關係。這都容易想出。只有AB線的A不在最末一條橫線上，這是王有道的巧思，我只好佩服了。據王有道說，他第一次也把A點放在三十二的地方結果不

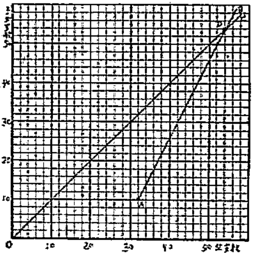


圖 41.

合。仔細一想，幾知道錯得十分可笑。原來那樣想法，是表示父年三十二歲時，子女倆年歲的和是零。由此他因爲想到子女倆的年歲的和是十，就想到A點應當在第五條橫線上。雖是如此，我依然佩服。

例四 現時，祖父在八十五歲，長孫十二歲，次孫三歲，幾年後祖父的年歲是兩孫的三倍。

這例馬先生是留給我們作的，照着了王有道的補充前題的別解，我也就照這別解得出解牠的圖來。因爲祖父年八

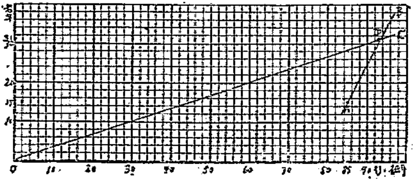


圖 42.

十五歲時，兩孫共年十五歲，所以得A點，以後祖父加一歲，兩孫共加兩歲。所以得AB線。OC是表示定倍數的兩線的交點D，直看得九十三，是祖父的年歲；橫看得三十一，是兩孫年歲的和。從八十五到九十三有八年，所以知道八年後祖年是兩孫年的三倍。

本題的算法，我從前曾經從一本什麼算學教科書上見到的：

$$\{85-(12+3)\times 3\}\div(2\times 3-1)=(85-45)\div 5=8。$$

牠的解釋是這樣：就現時說，兩孫共年 $(12+3)$ 歲，牠的三倍便是 $(12+3)\times 3$，比較祖父的年歲還少 $\{85-(12+3)\times 3\}$，這差出來的歲數，就須由兩孫每年比祖父所多加的歲數來填足。兩孫每年共加兩歲，就三倍計算，共增加 $2\times 3$ 歲，減去祖父增加的一歲，就是每年多加 $(2\times 3-1)$ 歲，由此便得上面的計算法。

這算法能否由圖上得出來，以及本題照前幾例的第一法是否可解，我們全沒有去想，也不好意思去問馬先生，因爲這好似我們應當用點心自己回答的，只得留待將來了。

## 九 多多少少

「今天有詩一首。」馬先生劈頭說。隨卽唸了出來：

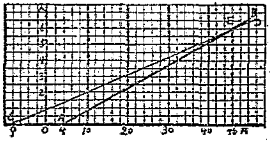


圖 43.

例一　隔牆聽得客分銀　不知人數不知銀

七兩分之多四兩　九兩分之少半斤

「直線用兩小段表一個人，橫線用一小段表二兩銀子；這樣一來，『七兩分之多四兩』怎樣畫法?」

「先除去四兩，便是『定倍數』的關係。所以從四兩的一點起，照『直一橫七』畫AB線，」王有道。

「那麼，九兩分之少半斤呢?」少字特別說得響。這給了我一個暗示，「多四兩」在O的左邊取四兩，「少半斤」就得在O的右邊取八兩了，我於是回答。

「從O的右邊八兩那點起，依『直一橫九』畫CD線。」

AB和CD相交於E，從E橫看得六人，直看得四十六兩銀子，正合題目。

由圖上CD表多的和少的兩數的和，正是(4+8)，而每多一人所少差的是2兩，即(9－7)因此得算法：

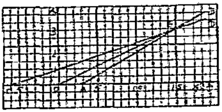


圖 44.

$$(4+8)\div(9-7)=6\text{……人數。}$$

$$7\times6+4=46\text{……鉛筆數。}$$

例二　兒童若干人，分鉛筆若干枝。每人取四枝，剩三枝；每人取七枝，差六枝；平均每人可得幾枝？

馬先生命各人先將求兒童人數和鉛筆枝數的關係畫出來。這只是照前面畫樣兒的勾當，自然手到即成。大家畫好以後，他說：「將O和交點E連起來。」接了又問：

「由這條線上看去，一個兒童得的是多少？」

啊！多麼容易呀！三個兒童十五枝鉛筆。每人四枝，自然剩三枝；每人七枝，相差六枝，而平均正好每人五枝。

## 十　鳥獸同籠的問題

一聽到馬先生說「這次來講鳥獸同籠的問題，」我便知道是雞兔同籠這一類了。

例一　雞兔同一籠，共十九個頭，五十二隻腳，各有幾隻？

不用說，這題目包含有一個事實上的條件，雞是兩隻腳的，而兔是四隻腳的。

「依頭數說，這是『和一定』的關係。」馬先生一面說，一面畫AB線。

「但若就腳來說，兩隻雞的總等於一隻兔的，這又是『定倍數』的關係。假定通是兔，只應當有十三隻；假定通是雞，就應當有二十六隻。由此得CD線。兩線交於E。直看得七隻兔，橫看得十二隻雞。這就對了。」

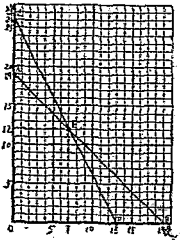


圖 45.

七隻兔二十八隻腳，十二隻雞，二十四隻腳，一共正好五十二隻腳。

馬先生說：「這個想法和通常的算法正好相反。平常都是假定頭數全是兔或雞，是這樣算的：

$(4\times19-52)\div(4-2)=12$……雞。

$(52-2\times19)\div(4-2)=7$……兔。

這里卻假定腳數全是兔或雞而得CD線。但試就下面的表一看，便沒有什麼想不通了。圖中E點所示的一對數，正是兩表中所共有的。

「就頭說，總數是19——AB線上的各點所表示的：

| 雞 | 兔 |
|---|---|
| 0 | 19 |
| 1 | 18 |
| 2 | 17 |
| 3 | 16 |
| 4 | 15 |
| 5 | 14 |
| 6 | 13 |
| 7 | 12 |
| 8 | 11 |
| 9 | 10 |
| 10 | 9 |
| 11 | 8 |
| $\boxed{12}$ | $\boxed{7}$ |
| 13 | 6 |
| 14 | 5 |
| 15 | 4 |
| 16 | 3 |
| 17 | 2 |
| 18 | 1 |
| 19 | 0 |

「就腳說，總數是52，——CD線上各點所表示的：

| 雞 | 兔 |
|---|---|
| 0 | 13 |
| 2 | 12 |
| 4 | 11 |
| 6 | 10 |
| 8 | 9 |
| 10 | 8 |
| $\boxed{12}$ | $\boxed{7}$ |
| 14 | 6 |
| 16 | 5 |
| 18 | 4 |
| 20 | 3 |
| 22 | 2 |
| 24 | 1 |
| 26 | 0 |

「一般的算法，自然不能由這圖上推想出來，但中國的一種老算法，卻從這圖上看得很明白，那算法是這樣的：

將足數折半，OC所表的，減去頭數，OA所表的，便得兔的數目，AC所表的。」

這類題，馬先生說還可歸到混合比例去算，以後就兩種算法來比較，更有趣味，所以不多講。

例二　雞兔共二十一隻，腳的總數正相等，求各幾隻。

照前例用AB線表「和一定」總頭數二十一的關係。

因了雞和兔腳的總數相等，不用說，雞的隻數是兔的隻數的二倍了。依「定倍數」的表示法作OC線。

由OC和AB的交點D得知兔是七隻，雞是十四隻。

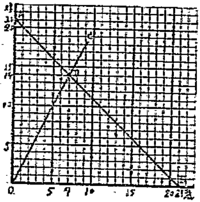


圖 46.

例三　小三子替別人買郵票。要四分和二分的各若干張，他將數目說反了，二塊八角錢找回二角，原來要買的數目怎樣？

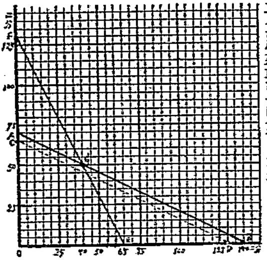


圖 47.

「比照起例一來，這個題怎樣？」馬先生問。

「只有腳沒有頭。」王有道很滑稽地。

「不錯！」馬先生笑說：「只能照腳數，表兩種張數的倍數關係。第一次的線怎樣畫法？」

「通買四分的，共七十張；通買二分的，共一百四十張，得AB線，」王有道。

「第二次的呢？」

「通買四分的，共六十五張，通買二分的，共一百三十張，得CD線，」周學敏但是AB、CD沒有交點。大家都呆了臉望着馬先生。

馬先生說：「照幾何上的講法，兩條線平行，牠們的交點在無窮遠，這次真是『差之毫厘，失之千里』了。小三子把別人的數弄掉了頭，你們卻把小三子的數弄倒了頭了。」他將CD線掉畫成EF，得交點G。橫看，四分的五十張，直看二分的四十張。兩共恰是二元八角。

馬先生要我們離開了圖來想算法，給我們這樣提示：「假如別人另給二元六角錢要小三子重去買過，這次他總算不會弄差；那末，這人得的郵票怎樣？」

不用說，前一次的差是么和二，這一次的便是二和么；前次的差是三和五，這次的便是五和三；這人的兩種郵票的張數便一樣了。

但是一總去了 $(2.8^{\text{元}}+2.6^{\text{元}})$ 錢，這是周學敏想到的。

每種一張共值 $(4^{\text{分}}+2^{\text{分}})$，我提出這個意見。

跟着，算法就明白了。

$(2.8^{\text{元}}+2.6^{\text{元}})\div(4^{\text{分}}+2^{\text{分}})=90$……總張數

$(4\times90-280)\div(4-2)=40$……二分的張數

$90-40=50$……四分的張數

## 十一　分工合作

關於計算工作的題目，一向我是有點神祕之感的。今天馬先生一寫出這個標題，我便很興奮。

「我們先講原理罷」馬先生說。「其實拆穿西洋鏡也平凡得很。工作，只是勞力、時間和效果三項的關聯。費了多少力氣，經過若干時間，得到幾何效果，所謂工作的問題，不過如此。想穿了，和運動的問題毫沒有兩樣，速度就是所費力氣的表現，時間不用說就是時間，而所走的距離，正是所得到的效果。」

眞奇怪！一經說明，我也覺得運動和工作是同一件事了，然而平時，爲什麼想不到呢？

馬先生繼續說道：「在等速運動中，基本的關係，是：

距離＝速度×時間。

而在均一的工作中——所謂均一的工作，就是經過相同的時間，所作的工相等——基本的關係，便是：

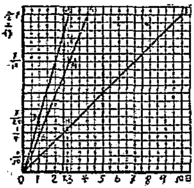


圖 43.

工作＝勞力×時間。

現在還是轉到問題上去吧。」

例一　甲四日可成的事，乙須十日纔能成就。若兩人合作，一天可成就多少？幾天可以作完？

這題的作圖，不用說和關於行路的，骨子裏沒有兩樣了。我們所躊躇的，就是行路的問題中全距離總有數目表示出來，這

裏卻沒有，應當怎樣處理呢？但這困難馬上就解決了。馬先生說：

「全部工作就算1，無論用多少長表示都可以，不過爲了易於觀察，無妨用一小段作1而以甲乙二人作工的日數4和10的最小公倍數20作全部工作。試用直的表工作，橫的表日數——兩小段1日——甲、乙各自的工作線怎樣畫法？」

到了這一步，我們沒有一個人不會畫了。OA是甲的工作線，OB是乙的工作線。各人畫好爭着交給馬先生看，其實他已知道我們都會畫了，眼睛並不曾看到各人的畫上，儘管口裏說「對的，對的。」大家歸到坐位上後，馬先生便問：

「那末，甲、乙每人一日作多少工作？」

圖上表示得很明白，1E是四分之一，1F是十分之一。「甲一天作四分之一，乙一天作十分之一。」差不多是全體同聲回答。

「現在就來回答題上所問的了，兩人合作一日，成就多少？」馬先生問。

「二十分之七。」王有道回答。

「怎樣知道的？」馬先生望着他。

「四分之一加上十分之一，就是二十分之七。」王有道。

「這是算出來的，不行。」馬先生。

這可把我們難住了。

馬先生笑着說，「人的事，往往如此，極容易的，常常使人發呆，感到不知怎樣地困難。——1E是甲一日所成就的，1F是乙一日所成就的，把1F接在1E上，得D點，1D不是兩人合作一日所成就的麼？」

不錯，從D點橫看，正是二十分之七。

「那末，試把OD連起來，並且引長到C和OA OB相齊。兩人合作二日成就多少？」馬先生問。

「二十分之十四。」我回答。

「就是十分之七。」周學敏加以修正。

「半斤自然是八兩，現在我們倒不必管這個。」馬先生說得周學敏有點難為情了。「幾天可以成就？」

「三天不到一點。」王有道。

「為什麼？」馬先生。

「從C看下來是二又十分之八的樣子。」王有道。

「為什麼從C看下來就是的呢？周學敏」馬先生指定他回答。我倒有點替他着急。然而出

於意料之外，他立刻回答道：

「均一的工作，逐日的成就是一樣的，所以作了若干天的成就，和作一天的成就，只是『定倍數』的關係，OC線正表示這關係，C點又在表示全工作的橫線上，所以OK便是所求的日數。」

「不錯！講得很明白」馬先生非常滿意。周學敏眞進步得快！下課以後，我不自覺地，因爲欽敬他的進步，便找起他一淘散步。邊散步，邊談，不幾句話，就談到算學上去了。他說，我這幾天害的是「算學迷」，這樣下去會成「算學瘋子」的，不知道他是不是在和我開玩笑，不過一直這十來天，我對於算學很感到丟不下，卻是眞情。我問他，爲什麼進步得這樣快。他卻不承認有什麼大的進步，我便說：

「不是有好幾次，你回答馬先生的問話，都很清楚，就是馬先生也很滿意嗎？」

「這不過是，聽了幾次講以後，我就找出馬先生的法門來了。說去說來，不外三種關係：一，和一定；二，差一定；三，倍數一定；所以我就只從這三點上去想。」周學敏這樣回答。我對於這回答，非常高興，但不免有點慚愧，爲什麼一樣地聽，我卻不會捉住這法門呢？而且我也有點懷疑，「這法門一定靈麼？」我便這樣問他，他想了一想：「這我不敢說。不過，過去都靈就是了。幾時我們在課外去問問馬先生。」

我眞是害「算學迷」了，立刻就拉了他一同去。走到馬先生的房裏，他正躺在籐椅上冥想，手裏拿着一把蒲扇，不住地搖。一見我們便笑着問道：

「有什麼難題了！是不是？」

我看了周學敏一眼。周學敏說：

「聽了先先這十來次的講，覺得說去說來，總是『和一定』『差一定』『倍數一定，』是不是所有的問題都逃不出這三種關係呢？」

馬先生想了一想：「就問題的變化上說，自然是如此。」這話我們不很明白，他似乎看出來了，接着說「比如說，兩人年歲的差一定，這是從他們一生下來，一直活下去當中看出來的。又比如，走的路程和速度是定倍數的關係，這也是從時間的連續中看出來的。所以就問題的變化上說，逃不出這三種關係？」

「爲什麼逃不出？」我大膽地發了這末一個呆問，心裏有些忐忑。

「不是爲什麼逃不出，是我們不許他逃出。因爲我們對於數量的處理，在算學中，只有加、減、乘、除四種方法。加法產生和，減法產生差，乘除法產生倍數。」

這我們總明白了。後來又聽了馬先生談些別的問題，我們就退出來。因爲這段話更是理解算學的基本，所以我補插在這裏。現在回到本題的算法上去，這是沒有經馬先生講，我們都曉得

了的。

$$1 \div \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\right) = 2\frac{6}{7}。$$

全工作……甲一日工作……乙一日工作……時間

馬先生提示一個別解法，更是妙，「真把工作當成行路一般地看待；那末，這問題便可看成甲從一端動身，乙從另一端動身，兩人幾時相遇一樣。」

當然一樣呀！我們不是可以把全部工作看成一長條，而甲乙各從一端相向進行工作，如捲布一樣麼？

這一來，圖解和算法更是容易思索了。圖中OA是甲的工作線，CD是乙的，OA和CD交於E。從E看下來仍是二又十分之八多一點。

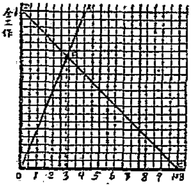



圖 49.

例二 一水槽裝有進水管和出水管各一支，進水管八點鐘可流滿，出水管十二點鐘可流盡；若兩管同時打開，幾點鐘可流滿？

這題和例一的不同，就事實上一想便明白的，每點鐘槽裏儲蓄的水量，是兩水管流水量的

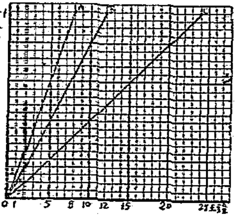


圖 50.

差。而例一作圖時，將1F接在1E上得D，1D表示甲、乙工作的和；這里自然要從1E截下1F得1D表示兩水管流水的差了。流水就是水管在工作呀！所以OA是進水管的工作線，OB是出水管的工作線，OC便是牠們倆的工作差，而表示定倍數的關係。由C點看下來得二十四點鐘。算法如下：

$$1 \div \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) = 24。$$

全工作……進水……出水……時間

當然，這題也可以有一個別解。我們可以想像為出水管距入水管一個全路程，兩人同時動身，進水管是從後面追出水管，看要什麼時候追上。OA是出水管的工作線，O

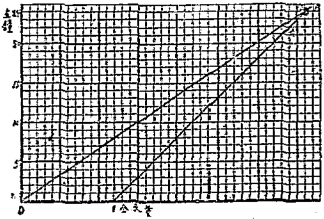


圖 51.

C是進水管的工作線，牠們相交於E，橫看過去正是二十四小時。

例三　甲乙二人合作十五日完工，甲一人作二十日完工，乙一人作幾日完工？

「這只是就題1.推衍的玩意兒，你們應當會做了。」結果馬先生指定我畫圖和解釋。

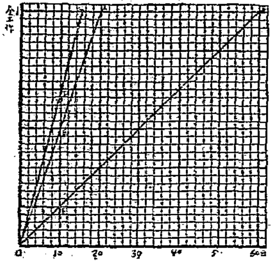



圖 52.

本來不過是例一的圖中先有了OA、OC兩條線而求畫OB線，照前例，所取的ED應在1日的縱線上且應等於1F，依ED取1 0F便可得F點。連OF引長便得OB。在我畫圖的時候，本是照這樣在1日的縱線上取1F的。但馬先生說，那裏太狹了，不易正確，因爲OA和OC間的縱線距離和同一縱線上OB到橫線的距離總是相等的，所以無妨在別地方去取F。就圖看去，在1 0這點，直上OA、OC，相隔正是五小段，我就從1 0直上五小段取F，連OF引長到和CA相齊，直看下來是6 0。乙要作六十日纔完。對於這樣大的答數，我有點放心不下，好在馬先生沒有說什麼，我就認爲對了。後來計算的結果，確實是要六十日纔完。

$$\underset{\text{全工作}}{1} \div \Big(\underset{\text{合作}}{\tfrac{1}{15}} - \underset{\text{甲獨作}}{\tfrac{1}{20}}\Big) = \underset{\text{乙獨作日數}}{60}$$

本題照別解法做，那就合這樣的題相同：

——甲乙二人由兩地同時動身，相向而行，十五小時在途中相遇，甲走完全路須二十小時，乙走完全路須幾小時？

所以，先作OA表示甲的工作，次從十五時這點畫縱線和OA交於E點。連DE引長到C，便得六十日。

例四 甲乙二人合作一工，五日成就三分之一，其餘由乙獨作，又十六日成就。甲、乙獨作全工各須幾日？

「這題難不難？」馬先生寫完了題，這樣問。

「難者不會，會者不難？」周學敏很頑皮地回答。

「你是難者還是會者？」馬先生跟着問周學敏。

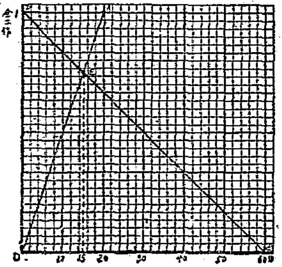



圖 53.

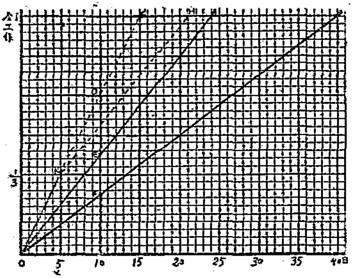



圖 54.

「二人合作，五日成就三分之一，五日和工作三分之一的兩條線交於K。連OK引長得OC，這是兩人合作的工作線，所以兩人合作共須十五日。」周學敏。

「末了一句是不必要的。」馬先生加以糾正。

「從五日後十六日共是二十一日，二十一日這點的縱線和全工作這點的橫線交於H，連KH，便是乙接着獨作十六日的工作線。」

「對的！」馬先生很讚賞地。

「過O作OA和KH平行，這是乙一人獨作全工作的工作線。他二十四日作完。」周學敏說完，停住了。

「還有呢？」馬先生催促他。

「在十日這點的縱線上量OC和OA的距離ED，從10這點起量10F等於ED，得F點。連OF並且引長得OB，這是甲的工作線。他一人獨作須四十日。」周學敏眞是有了可熟

的進步，他的算學從來不及王有道的呀。馬先生誇獎他說：

「周學敏，你已把握住解決問題的鎖鑰了。」

這題當然也可用別解法做，不過和前面幾題的大同小異，所以略去，至於他的算法，那就是：

$$\underset{\text{全工作}}{1}\div\left(\underset{\text{乙獨作的}}{\frac{2}{3}\div16}\right)=\underset{\text{乙獨作全工的日數}}{24}$$

$$\underset{\text{全工作}}{1}\div\left(\underset{\text{合作}}{\frac{1}{5\times3}}-\underset{\text{乙作}}{\frac{1}{24}}\right)=\underset{\text{甲獨作全工的日數}}{40}$$

例五　甲、乙、丙三人合作一工程，八日做去一半，由甲乙二人繼續，又是八日，成就幾工的五分之三。再由甲一人獨作，十二日成就。甲、乙、丙獨作全工，各須幾日？

馬先生寫完了題時，王有道隨口說：「越來越複雜。」馬先生聽了含笑說道：

「應當說越來越簡單呀」大家都不說話，題目明明白白地比較複雜起來，馬先生反說應當說越來越簡單，豈非奇事。然而他的解說是：

「前面的幾個例題的解法，如果都已徹底明瞭了，這個題，不就只是照抄老文章便可解決了麼？有什麼複雜呢？」

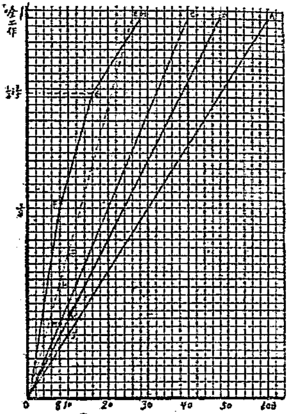


圖 55.

這自然是不錯的，不過抄老文章罷了！

（1）先依八日做去一半這條件畫OF，是三人合作八日的工作線；也是三人合作的工作線的方向。

（2）由F起，依八日成就殘餘工作的五分之三這條件，作FG，這便表示甲乙二人合作的工作線的「方向。」

（3）由G起，依十二日成就這條件，作GH，這便表示甲一人獨作的工作線的「方向。」

（4）過O作OA平行於GH，得甲一人獨作的工作線。他要六十日纔作完。

（5）過O作OE平行於FG，這是甲乙二人合作的工作線。

（6）在10這點的縱線和OA交於J，和OE交於I。照IOJ的長，由I截下來得K。連

OK並且引長得OB，就是乙一人獨作的工作線。他要四十八日完成全工。

(7)在8這點的縱線和甲乙合作的工作線OE交於L，和三人合作的工作線交於F。從8起在這縱線上截8M等於LF的長，得M點。連OM並且引長得OC，便是丙一人獨作的工作線。他四十日就可完成全部工作了。

作圖如此，算法也易於明白。

甲獨作：$1\div\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\right)\div 12\right\}=60$

全工作　$\underbrace{\text{殘餘工作　甲乙合作的}}_{\text{甲一人一日的工作}}$　日數

乙獨作：$1\div\left(\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\div 8-\frac{1}{60}\right)=48$

全工作　甲乙合作一日　甲作一日　日數

丙獨作：$1\div\left(\frac{1}{2}\div 8-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\div 8\right)=40$

全工作　三人合作一日　甲乙合作　日　日數

例六　一工程：甲乙合作三分之八日成就，乙丙合作三分之十六日成就，甲丙合作五分之十六日成就；一人獨作各幾日成就？

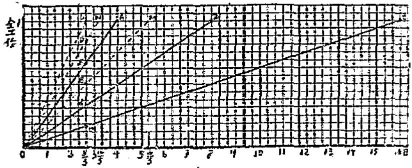


圖 55.

「這倒是眞正地越來越複雜，老文章不好直抄了。」馬先生說。

「不管三七二十一，先把每二人合作的工作線畫出來。」沒有人回答，馬先生接着說。這自然是抄老文章，OL是甲乙的工作線，OM是乙丙的工作線，ON是甲丙的工作線，馬先生叫王有道在黑板上畫了出來。隨手他將在L點的縱線和ON，OM的交點塗了一塗，寫上D和E。

「LD表示什麼？」

「乙丙的工作差。」王有道

「好，那末從E在這縱線上截去LD得G，$\frac{8}{3}$ 到G是什麼？」

「乙的工作。」周學敏。

「所以連OG並且引長到B，就是乙一人獨作的工作線。他要八天成就。

「再從G起，截去一個LD得H，$\frac{8}{3}$ 到H是什麼？」

「丙的工作。」我回答。

「連OH，引長到C，OC就是丙獨自一人作的工作線，他成就全工作是要十六天。」

「從D起截去 8|3 H得F，8|3 F，不用說是甲的工作。連結OF，引長得OA，這是甲一人獨作的工作線。他要幾天纔作完全部工程？」

「四天，」大家很高興地回答。

這題的算法是如此：

甲獨作：

$$1\div\Big\{\underbrace{\Big(\underbrace{\tfrac{3}{8}}_{\text{甲乙一日的工作}}+\underbrace{\tfrac{3}{16}}_{\text{甲丙一日作}}+\underbrace{\tfrac{5}{16}}_{\text{乙丙一日作}}\Big)\div 2}_{\text{甲乙丙一日作}}-\underbrace{\tfrac{3}{16}}_{\text{乙丙一日作}}\Big\}=\underbrace{4}_{\text{日數}}$$

乙獨作：

$$1\div\Big(\underbrace{\tfrac{3}{8}}_{\text{甲乙一日作}}-\underbrace{\tfrac{1}{4}}_{\text{甲一日作}}\Big)=\underbrace{8}_{\text{日數}}$$

丙獨作：

$$1\div\Big(\underbrace{\tfrac{5}{16}}_{\text{甲丙一日作}}-\underbrace{\tfrac{1}{4}}_{\text{甲一日作}}\Big)=\underbrace{16}_{\text{日數}}$$

馬先生結束這一課說：

「這課到此爲止。下課想把四則問題作個總結束，就是將沒有講到的還常見的題都講個大概。你們也可提出覺到困難的問題來。其實四則問題，這個名詞本不大妥當，全部算術，所用的方法除了加、減、乘、除還有什麽？所以全部算術的問題，都是四則問題。」

## 十二 歸一法的問題

上次馬先生已說過，這次把「四則問題」作一個結束，而且要我們提出覺得困難的問題來。昨天一整下午，便消磨在搜尋問題上。我約了周學敏一同工作，發現很有許多計算法，馬先生都不曾講到過，而已講過的方法中，也還遺漏了我覺得難解的問題；清算起來一共差不多二三十題，不知道怎樣提出來的好，躊躇了半夜！

眞奇怪！馬先生好似已明白了我的心理，一走上講臺，便說：「今天來結束所謂四則問題，先讓你們把想要解決的問題都提出，我們再順序討論下去。」這自然是給我的一個盡量提出問題的機會了。我因爲心裏想提的問題太多的緣故，決心先讓別人開口，後來再行補足。結果有的說到歸一法的問題，有的說到全部通過算的問題，……我所想到的已提出了十分的八九，只剩了十分的一二。

因了問題太多的緣故，這次馬先生費去時間確實不少。從「歸一法的問題」到「七零八落」這分節，是我自己的意見，為的是便於檢查。

依着我們提出的順序，馬先生以歸一法開始，逐一講下去。

對於這歸一法的問題，馬先生提出一個原理。

「這類題，本來只是比例的問題。但也可以反轉來說，比例的問題本不過是四則問題。這是大家都知道的。王老大三十歲，王老五二十歲，我們就說他兩弟兄年歲的比是三比二或二分之三。其實這和王老大有法幣十元，王老五只有二元，我們就說王老大的法幣是王老五的五倍一樣。王老大的年歲是王老五的二分之三倍，和王老大同王老五的年歲的比是二分之三，正是半斤和八兩，只不過容貌不同罷了。」

「那末，歸一法的問題當中，只是『倍數一定』的關係了！」我好像有了一個大發明似地問。自然，這是昨天得到了周學敏和馬先生指示的結果。

「一點不錯！既抓住了這個要點，我們就來解問題吧！」馬先生說。

例一　工人6名，4日食米1斗2升，今有工人10名作工10日，食米若干？

要點雖已懂得，下手卻仍困難。馬先生寫好了題，要我們畫圖時，大家都茫然了。一直以前的例題，每個都只含三個量，而且其中的一個量，總是由其他的兩個依一定的關係產生的，所以是

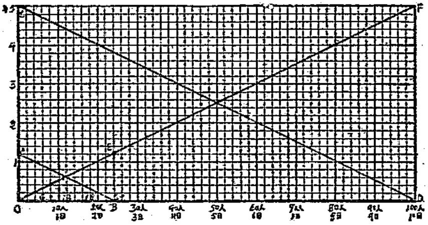


圖 57.

用橫線和縱線各表一個，而依牠們的關係畫線，本題卻有入數、日數、米數三個量，題目看去容易，實在眞無所措手足，只好呆呆地望着馬先生了。

馬先生看見大家的呆相，禁不住笑了起來：

「從前有個先生給學生批文章，因爲這學生是個公子哥兒，批語要好看，但文章卻做的太壞，他於是只好批四個字『六竅皆通。』這個學生非常得意，同學的卻不服，跑去質問先生。他回答說，『人是有七竅的呀，六竅皆通，便是「一竅不通」了。』」

這一來惹得鬨堂大笑，但馬先生反而行若無事地繼續說道：

「你們今天卻眞是『六竅皆通』的『一竅不通』了。要點旣抓住，還有什麼難呢？」

……仍是沒有人回答。

「我知道了，平常你們慣用橫直兩線每一條表一種量，現在碰上了三種量，這一致卻通不過來，是不是？其實拆穿西洋鏡，一點兒不稀罕！題目上雖有三個量，何嘗不可以只用兩條線，而將一條來兼差呢？工人數是一個量，米數又是一個量，米是工人喫掉的。至於日數不過表示每人多喫幾餐罷了。這麼一想，比如用橫線兼表人數和日數，每6人一段，取4段，不就行了麼？這一來縱線自然表米數了。」

「由6人4日得B點。1斗2升在A點，連AB就得一條線，再由10人10日得D點。過D點畫線平行於AB，交縱線於C。」

「食米多少？」馬先生畫出了圖問。

「五斗！」大家高興了爭着回答。

馬先生在圖上6人4日那點的縱線和1斗2升那點的橫線相交的地方，作了一個E點。又連OE引長到10人10日的縱線，寫上一F，又問：

「食米若干？」

大家都笑了起來。原來一條線也就行了。

至於這題的算法，就是先求出一人一日食多少米來，所以叫做「歸一法。」

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\underbrace{1.2斗}_{6人4日要的} \div 4}_{6人1日要的} \div 6)}_{1人1日要的} \times 10}_{10人1日要的} \times 10}_{10人10日要的} = 5斗$$

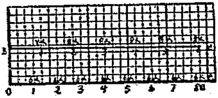


圖 58.

例二　6人8日可作成的工事，8人幾日可成？

算學的困難在這裏，牠的有趣也在這點。這題，馬先生仍是要我們畫圖，我們仍是「六竅皆通！」依樣畫葫蘆，6人8日的一條OA線，我們都能找到着落了。但另一條線呢？馬先生！依然是靠着馬先生！他叫我們隨意另畫一條BC橫線——其實就紙上的橫線用也就行了——兩頭和OA在同一縱線上，於是從B起，每8八一段截到C為止，共是6段，便是6天可以作成。

馬先生說：「這題倒不怪你們作不出，這個只是一種變通的作法，正規的畫法留到講比例時再說，因為這本是一個反比例的題目，和例一正比例的不同。所以就算法上說也就顯然相反。」

$$\underbrace{8\text{日}\times 6}_{10\text{人作 }6}\div 8 = \underset{8\text{人作}}{6\text{日}}$$

## 十三　截長補短

說得文氣一點，就是平均算。這是我們很容易明白的，根本上只是一加一除的問題，我本來不曾想到提出這類問題。但既有人提出，而且馬先生也一樣拋解答，姑且存一個例在這裏。

例　上等酒二斤，每斤三角五分；中等酒三斤，每斤三角；下等酒五斤，每斤二角。三種相混，每斤值多少?

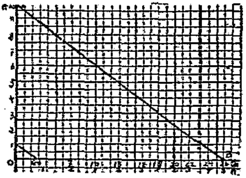


圖 59.

橫線表價錢，縱線表斤數。

AB線指出十斤酒一共的價錢，過指示一斤的這一點，作1C平行於AB得C，指示出一斤的價錢是二角六分。

至於算法，更是明白!

$$(\underbrace{\underset{\text{上酒}}{3.5\text{角}\times 2}+\underset{\text{中酒}}{3\text{角}\times 3}+\underset{\text{下酒}}{2\text{角}\times 5}}_{\text{總價}})\div(\underset{\text{總斤數}}{2+3+5})=2.6\text{角}$$

## 十四 還原算

「因為三加五得八，所以八減去五剩三，而八減去三剩五。又因為三乘五得十五，所以三除十五得五，五除十五得三；這是小學生都已知道的了。說得神氣活現些，那便是，加減法互相還原，乘除法也互相還原，這就是還原算的靠山。」馬先生這樣提出要點來以後，就寫下面的例。

例一　某數除以2，自其商減去5，再3倍，更加上8，則得20。求某數。

馬先生說「這只要一條線就夠了，至於步法，正和算法一樣，不過是「倒行逆施。」」

自然，我們已能夠想出來了。

(1)取OA表20。

(2)從A「反」向截去8得B。

(3)過O任畫一直線OL。從O起，在上面連續取相等的3段得O1、

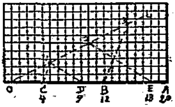



圖 60.

12、23。

(4)連3B，又作1C平行於3B。

(5)從C起「順」向加上5得OD。

(6)連1D，又作2E平行於1D，得E點，牠指示的是18。

這情形和計算時完全相同。

$$\underbrace{\{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(20-8)}_{OA}\div 3}_{OB}}_{OC}+5\}}_{OD}\underbrace{\times 2}_{OE}=18.$$

例二　某人有桃若干枚，以其半又1枚給甲，以餘數之半又2枚給乙，還剩3枚，求原有桃數。

這和前題本質上沒有兩樣，所以只將作法和算法相對應地寫出來：

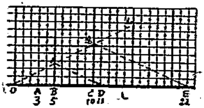



圖 61.

$$\{(3+2)\times 2+1\}\times 2=22.$$

OA 除 AB

OB 除的一半

OC 先除的

OD 原數的一半

OE 原數

## 十五　五個指頭四個叉

回答栽植算的問題，馬先生就只說：「五個指頭四個叉，」你們去想吧！其實呢，——馬先生也這樣說——割雞用不到牛刀，這類題，只要照題意畫一草圖就可明白，不必像前面一般地大動干戈了！

例一　在60丈長的路上，從頭到末，每隔2丈種樹一株，共種多少？

圖 62

$60 \div 2 + 1 = 31$

例二　在10丈長的池周，每隔2丈立一根柱，共有幾根柱？

$10 \div 2 = 5.$

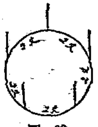


圖 63.

例二的路是首尾相接的，所以起首一根柱，也就是最末一根。

例三　一丈二尺長的梯子，每段僅相隔一尺二寸，有幾根橫木？（兩端用不到橫的。）

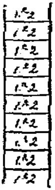


圖 64.

$12 \div 1.2 - 1 = 9.$

## 十六　排方陣

這類題，也是可照題畫圖來實際觀察的。馬先生說為了澈底地明白牠的要點，各人先畫一個圖來觀察下面的各項：

(1)外層每邊多少人?(7)

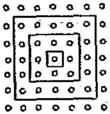


圖 65.

(2)總數多少人?(7×7)

(3)從外向裏第二層每邊多少人?(5)

(4)從外向裏第三層每邊多少人?(3)

(5)中央多少人?(1)

(6)每相鄰的兩層每邊次第少多少人?(2)

「這些就是方陣的秘訣，」馬先生含笑說。

例一　三層中空方層，外層每邊十一人，共有多少人?

除了上面的秘訣，馬先生又說：「這正用得着兵書上的話，『虛者實之，實者虛之』了。」

「先來『虛者實之，』看共有多少人?」馬先生問。

「十一乘十一，一百二十一人。」周學敏回答。

「好！那末，再來『實者虛之。』外面三層，裏面剩的頂外層是全方陣的第幾層?」

「第四層，」也是周學敏回答。

「第四層每邊是多少人?」

「第二層少2人，第三層少4人，第四層少6人，是5人。」王有道。

「算計各層每邊的人數有一般的法則麼?」

「二層少一個2人，三層少兩個2人，四層少三個2人，所以從外層數起的第某層每邊的人數是：

$$\text{外層每邊的人數} - 2\text{人} \times (\text{層數} - 1)$$

「本題照實心的算，除去外邊的三層，還有多少人?」

「五五念五，」我回答。

這樣一來，誰也會算了。

$$\underbrace{11\times11}_{\text{實心人數}}-\underbrace{\{11-2\times(4-1)\}\times\{11-2\times(4-1)\}}_{\text{中心方陣人數}}=121-25=\underbrace{96}_{\text{實在人數}}$$

例二　兵一隊，排成方陣，多49人，若縱橫各加一行，又差38人，原有兵多少?

馬先生首先提出這樣一個問題：

「縱橫各加一行，照原來外層每邊的人數說，應當加多少人?」

「兩倍外層的人數，」某君回答。

「你這是空想的，不是實際觀察得來的。」馬先生加以批評。

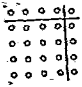


圖66.

對於這批評，某君不服氣，他用鉛筆在紙上畫來看，纔明白了「還須加上一個人。」

「本題，每邊加一行共加多少人上去？」馬先生問。

「原來多的49人加上後來差的38人，共87人，」周學敏。

「那末，原來的方陣外層每邊幾個人？」

「87減去1——角落上的，再折半，得43人，」周學敏。

馬先生指定我將式子列出，我只好在黑板上去寫，還好，沒有錯。

$$\{(49+38-1)\div2\}\times\{(49+38-1)\div2\}+49=1898$$

例三 1296人排成12層的中空方陣，外層每邊有幾人？

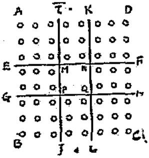



圖 67.

觀察！觀察！馬先生又指導我們觀察了！所要觀察的是，每邊各層都照外層的人數算，是怎樣一回事！

明明白白地，AEFD，BCHG，橫看每排的人數都和外層每邊的人數相同。換句話說，一總的人數，便是層數乘外層每邊的人數。而直了看，ABJI，和CDKL也是一樣。這和本題有什麼關係呢？我想了許久，看了又看，還是莫明其妙！

後來，馬先生纔問：「照這種情形，我們算成一總的人數是四個AEFD的人數行不行？」

自然不行，算了兩個AEFD已只剩兩個EGPM了。所以若要算成四個，必須加上四個

ＡＥＭＩ去，這是大家討論的結果。至於ＡＥＭＩ的人數，就是層數乘層數；這一來，算法也就明白了。

$$\underbrace{(\underbrace{1296}_{\text{原人數}}+\underbrace{12\times12\times4}_{\text{AEMI人數}})}_{\text{AEFD人數}}\div4\div\underbrace{12}_{\text{層數}}=39$$……外層每邊人數。

例四　有兵一隊，正好排成方陣。後來減少十二排，每排正好添上30人；這隊兵是多少人？

越來越糟，我簡直是墮入迷魂陣了！

馬先生在黑板上畫出這一個圖來，便一句話也不說，只是靜悄悄地看着我們。自然，這是讓我們自己思索的表示，但是從那兒下手呢！

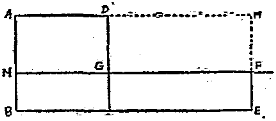



圖 68.

看了又看，想了又想，我只得到了這幾點：

(1) ＡＢＣＤ，是原來的人數。

(2) ＭＢＥＦ也是原來的人數。

(3) ＡＭＧＤ是原來十二排的人數。

(4) ＧＣＥＦ也是原來十二排的人數。這可以看成是三十乘「原來每排人數減去十二」的人數。

(5)DGFH的人數是十二乘三十。

完了，我所能想到的，就只有這幾點，但是牠們有什麼關係呢？

無論怎樣我也想不出什麼了！

畢竟周學敏可佩服，他在我這苦思不得其解的時候，已算了出來。馬先生就叫他講給我們聽。最初他所講的，原只是我已想到的五點。接着他便說明下去。

(6)因爲AMGD和GCEF的人數是一樣，所以各加上DGFH，人數也是一樣，就是AMFH和DCEH的人數相等。

(7)AMFH的人數是12倍「原來每排的人數加30，」也就是原來每排的人數的12倍加上12乘30人。

(8)DCEH的人數，卻是30乘原來每排的人數，也就是原來每排人數的30倍。

(9)可見得原來每排人數的30倍，與牠的12倍相差的是12乘30人。

(10)所以，原來每排的人數是 $30\times12\div(30-12)$ 而「總的人數是：

$$\{30\times12\div(30-12)\}\times\{30\times12\div(30-12)\}=400.$$

可不是麼？400人排成方陣，恰好每排20人，一共20排，減少12排，便只剩8排，而減下的人數一共是240。平均添在8排上，每排正好加30人。爲什麼他會轉這麼一個彎子，我

卻不會呢?

我眞是又羨慕,又嫉妒啊!

## 十七 全部通過

這是某君提出的問題。馬先生對於我們有這樣的問題提出,好似非常詫異。他說:

「這不過行程算的問題,止須注意一個要點就行了。從前,學校開運動會的時候,有一種運動,叫做什麼障礙物競走,比現在的跳欄要費事得多;除了跳一兩次欄,還有撐桿跳高,跳浜,鑽圈,鑽桶等等。鑽桶,便是全部通過。桶的大小只能容一個人直着身子爬過,桶的長短卻比一個人長一點。我且問你們,一個人,從他的頭進桶口起,到全身爬出桶止,他爬過的距離是多少?」

「桶長加身長。」周學敏回答。

「好!」馬先生很斬截地,「這就是『全部通過』這類題的要點。」

例一 長六十丈的火車,每秒進行六十六丈,經過長四百零二丈的橋,自車頭進橋,到車尾出橋,需時間幾何?

馬先生將題寫出後,便一邊畫圖,一邊口講:

「用橫線表距離，AB是橋長，BC是車長，AC就是全部通過所需走的路。」

「用縱線表時間。」

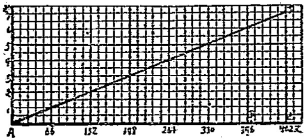


圖 69.

「照I和66『定倍數』的關係從AD，從D橫看過去，得7，就是要走七秒鐘。」

我且將算法補在這里：

(402尺 + 60尺) ÷ 66尺 = 7秒

AB……BC……速度……時間
橋長　車長　速度　時間

例二　長四十尺的列車，全部通過二百尺的橋，費時4秒，列車的速度怎樣？

將前一個例題做藍本，這只是知道距離和時間求速度的問題。牠的算法，我也明白了：

(200尺 + 40尺) ÷ 4秒 = 60尺

AB……BC……時間……每秒的速度
橋長　車長　時間　每秒的速度

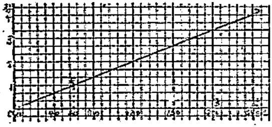


圖 70.

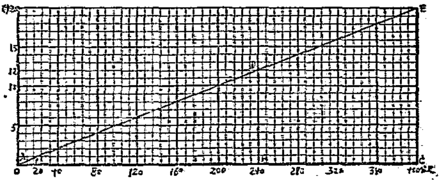



圖 71.

畫圖的方法，第一二步全是相同的，不過第三步是連AD得交點E，由E直看下來，得六十尺，便是列車每秒的速度。

例三　有人見一列車入二百四十公尺長的山洞。車頭入洞後八秒，車身全部入內。共經二十秒鐘，車完全出洞，求車的速度和車長。

這題，最初我也想不透，但一經馬先生提示，便恍然了。

「列車全部入洞要八秒鐘，不用說，從車頭出洞到全部出洞也是要八秒鐘了。」

明白這一個關鍵，畫圖眞易如反掌啊！先以AB表洞長。二十秒鐘少去八秒，正是十二秒，這就是車頭從入洞到出洞所經過的時間十二秒鐘，因得D點，連AD，——就是列車的進行線。——引長到二十秒鐘那點得E。由此可知，列車每秒鐘行二十公尺，車長BC是一百六十公尺。

算法是這樣：

240公尺÷(20秒－8秒)＝20公尺……每秒的速度。

20公尺×8＝160公尺……列車的長。

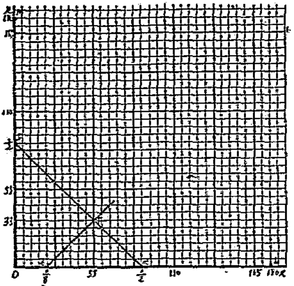


圖 72.

例四　A、B兩列車，A長九十二尺，B長八十四尺，相向而行，從相遇到相離，經過二秒鐘；若B車追A車從追上到超過經八秒鐘，求各車的速度。

因了馬先生的指定，周學敏將這問題解釋如下：

「第一，依『全部通過』的要點，兩車所行的距離，總是兩車長的和，因得OL和OM。

「第二，兩車相向行，每秒鐘所共經的距離是牠們速度的和。因兩秒鐘相離開，所以這速度的和等於兩車長的和的二分之一，因得CD表『和一定』的線。

「第三，兩車同向相追，每秒鐘所追上的距離，是牠們速度的差。因八秒鐘追過，所以這速度的差等於兩車長的和的八分之一，因得EF表『差一定』的線。

「從F直看得55尺，是B每秒鐘的速度，橫看得33尺，是A每秒鐘的速度。」

經過這樣的說明，算法自然容易明白了：

$$\Big\{\underbrace{\underbrace{(92\text{尺}+84\text{尺})}_{\text{距離}}\div 2}_{\text{速度和}}+\underbrace{(92\text{尺}+84\text{尺})\div 8}_{\text{速度差}}\Big\}\div 2=55\text{尺}.$$

B每秒的速度。

$$\{(92\text{尺}+84\text{尺})\div 2-(92\text{尺}+84\text{尺})\div 8\}\div 2=33\text{尺}.$$

A每秒的速度。

## 十八 七零八落

安得上類名的問題，業已完結，大家所提到的，只剩下面的三個面目各別的題了。

例一 有人自日出至午前十時行十九里一百二十五丈；自日沒至午後九時，行七里一百四十丈；晝長若干？

素來不皺眉頭的馬先生，聽到這題時卻皺眉頭了。——這題真難麼！

似乎真是「眉頭一皺，計上心來」一般，馬先生對於他的皺眉頭加以這樣的解釋：

「這題的數目太嚕囌，什麼里咧，丈咧，『紙上談兵』真是有點擺佈不開。我來把題目改一

下吧！——有人自日出至午前十時行十里；自日沒至午後九時行四里，晝長若干？

「這個題的要點，便是照習慣說『從日出到正午，和自正午到日沒，時間相等。』因此，用縱線表時間，我們無妨畫十八小時，從午前三時到午後九時，那末，正午前後都是九小時。既是從正午到日出、日沒的時間一樣，我們就可以想成這人是從午前三時走到午前十時，共走十四里，所以得表示行程的OA線。」

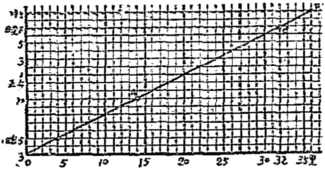


圖 73.

這自然很明白了，將OA引長到B，所指示的，就是假如這人從午前三時一直走到午後九時，便是十八小時共走三十六里。他的速度，由AB線所表的「定倍數」的關係，就可知是每小時二里了。（這是題外的文章。）

「午後九時走到三十六里，從日沒到午後九時走的是四里，回到三十二里的地方，往上看，得C點；橫看，得午後七時，可知日沒是在午後七時，隔正午七小時；所以晝長是十四小時。」

由此也就得出了計算法：

(10里 ＋ 4里) ÷ (9 － 2) ＝ 2里……每小時的速度。

（9：正午到午後九時的小時數；2：午前十時到正午的小時數）

4里 ÷ 2里 = 2……日沒到午後九時的小時數。

$(9-2)^{\text{小時}} \times 2 = 14^{\text{小時}}$

正午到日沒的小時數　　晝長

依樣畫葫蘆，本題的計算如下：

9 － 2……從午前三時到十時的小時數。

(19里 125丈 + 7里 140丈) ÷ (9 － 2) = 3里 145丈……每小時的速度。

7里 140丈 ÷ 3里 145丈 = 2……從日沒到午後九時的小時數。

$(9-2)^{\text{小時}} \times 2 = 14^{\text{小時}}$……晝長。

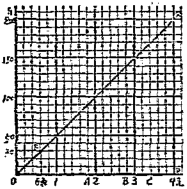


圖 74

例二　有甲乙兩旅人，乘三等火車，所帶行李共二百斤，除二人三等車行李無運費的重量外，甲應付加磅費一元八角，乙應付一元。若把行李屬於一人，則加磅費爲三元四角。三等車每人所帶行李不加磅費的重量幾何？

我也居然找到了這題的要點，三元四角比一元八角同着一元的和所多的，便是不加磅費的行李變成加磅費的行李，應當加上的磅費。但圖還是由王有道做出來的，馬先生對

於這題一點兒意見不曾發表。

用橫線表錢數，三元四角（OC）去了一元八角（OA，）又去了一元（AB，）只剩六角（BC，）將這剩的加到三元口角上去便得四元（OD。）

這就是表明若二百斤行李都加磅，便要磅費四元，因得OE線。往六角的一點向上看得F，再橫看得三十斤，就是所求的重量。

(34角－18角－10角)＋{(34角＋34角－18角－10角)＋200}＝30……所求的斤數。

例三　有一個二位數，其十位數字與個位數字交換位置後與原數的和爲一百四十三，而原數減其倒轉數則爲二十七。求原數。

「用這個題來結束所謂四則問題，倒很好！」馬先生在疲勞中顯着興奮。「我們且暫時丟開了本題，來觀察一下二位數的性質。這也可以勉強算是一個科學方法的小演習，同時也是尋求解決問題——算學的問題自然也在內——的門檻。」說完了，他就寫出下面照抄的兩行。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 原數 | 12 | 23 | 34 | 47 | 56 |
| 倒轉數 | 21 | 32 | 43 | 74 | 65 |

「現在我們來觀察，說是實驗也無妨，」馬先生說。

「原數和倒轉數的和是什麼？」

「33，55，77，121，121。」

「在這幾個數中間你們看得出什麼關係麼？」

「都是11的倍數。」

「我們可以說，凡是二位數同牠的倒轉數的和都是11的倍數麼？」

「……」沒有人回答。

「再來看各是11的幾倍？」

「3倍，5倍，7倍，11倍，11倍。」

「這各個倍數和原數有什麼關係沒有？」

我們大家靜靜地看了一陣，四五個人一同回答：

「原數數字的和是3、5、7、11、11。」

「你們能找出其中的理由來麼？」

「12是幾個1幾個2合成的？」

「十個1，一個2。」王有道。

「牠的倒轉數呢？」

「一個1，十個2，」周學敏。

「那麼，牠倆的和中有幾個11同着幾個2？」

「11個。」我也曉得了。

「十一個1同着十一個2，共有幾個11？」

「3個。」許多人回答。

「我們可以說，凡是二位數同着牠的倒轉數的和，都是11的倍數麼？」

「可——以——」我們眞快活極了。

「我們可以說，凡是二位數同着牠的倒轉數的和，都是牠的數字和的11倍麼？」

「當然可以！」一齊回答。

「這是這類問題的一個要點，還有一個要點，是從差方面看出來的。你們去『發明』去吧！」

當然，按步就班地我們很容易地就得到了！

「凡是二位數同着牠的倒轉數的差，都是牠的兩數字差的九倍。」

有了這兩個要點，本題自然迎刃而解了！

$$\{\underbrace{(143 \div 11)}_{\text{二數字和}} + \underbrace{(27 \div 9)}_{\text{二數字差}}\} \div 2 = 8$$ ……大數字。

$$\{(143 \div 11) - (27 \div 9)\} \div 2 = 5$$ ……小數字。

因爲題上說的是原數減其倒轉數，原數中的十位數字應當大一些，所以原數是八十五。
八十五加五十八得一百四十三，而八十五減去五十八正是二十七，眞巧！

## 十九　韓信點兵

昨天馬先生結束了四則問題以後，曾經叫我們複習關於質數、最大公約數和最小公倍數的問題。夜晚很好，天氣不十分熱，我取了開明算術教本上冊，閱讀關於這些事項的第七章。從前學習牠的時候，是否感到困難，印像已很模糊了；現在要說「一點困難沒有」我不敢這樣自信；不過，和從前遇見四則問題那樣地「丈二和尙」摸不着頭腦，確實沒有。也許其中的難點，我不會發覺吧！懷着這樣的心情，今天，到課堂去聽馬先生的講。

「我叫你們複習的，都複習過了麼？」馬先生一走上講臺就問。

「複習過了！」兩三個人齊聲回答。

「那末，有什麼問題？」

各人都是豎起兩眼，望着馬先生，沒有一個問題提出來。馬先生在這靜默中，看了全體一遍：

「學算學的人，大半在這一部份不會感到什麼困難的；大約你們也不會有什麼問題了。」

我不曾發覺什麼困難，照這樣說，自然是由於這部份材料，比較容易的緣故。心裏這末一想，就期待着馬先生的下文。

「既然大家都沒有問題，我且提出一個來問你們：——這部份材料，我們也用得着畫圖來處理牠麼？」

「那似乎可以不必了！」周學敏回答。

「似乎？可以就可以，不必就不必。何必似乎！」馬先生笑着說。

「不必！」周學敏斬釘截鐵地。

「問題不在必和不必。既有了這樣一種法門，正可拿牠來試試，看變得出什麼花樣錦來，不是也有趣麼？」馬先生說完停了一停，再問：

「這一部份所處理的材料，是些什麼？」

當然，這是誰也回答得上來的，大家搶着說：

「找質數。」

「分質因數。」

「求最大公約數和最小公倍數。」

「歸根結蒂，不過是判定質數，和計算倍數同約數，——這只是一種關係的兩面，12是6、

4、3、2的倍數；反過來看，6、4、3、2便是12的約數了。」馬先生這樣結束了大家的話，而掉轉話頭：

「閒言少說，書歸正傳。你們將橫線每一大段當1表示倍數，縱線每一小段當1表數目，畫表2的倍數和3的倍數的兩條線。」

這只是「定倍數」的問題，也沒有一個人不會畫了。馬先生在黑板上也畫了一個——圖75。

「由這圖上，可以看出些什麼來？」馬先生問。

「2的倍數是2、4、6、8、10、12.」我答。

「3的倍數是3、6、9、12、15、18。」周學敏。

「還有呢？」

「5、7、11、13、17都是質數。」王有道。

「怎樣看出來的？」這幾個數都是質數，我原是曉得的，但由圖上，怎樣看得出來，我卻茫然。馬先生的這一追問，眞是「實獲我心了。」

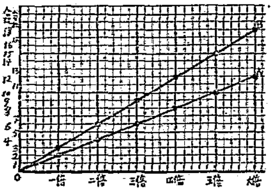


圖 75.

「OA和OB兩條線都沒有經過牠們；所以牠們既不是2的倍數，也不是3的倍數，……」

王有道說到這里，突然停住了。

「怎樣？」馬先生問道。

「牠們總是質數呀！」王有道很不自然地。這一來大家都已覺到，這裏面一定有了漏洞，王有道大約已明白了。不期然而然地，一齊笑起來。笑，我也是跟着笑的，不過我並不曾將這漏洞覺到。

「這沒有什麼可笑。」馬先生很鄭重地說。「王有道，你回答的時候，也有點遲疑了，爲什麼呢？」

「由圖上看來，牠們都不是2和3的倍數，而且我知道牠們都是質數，所以我那樣說。但突然想到，25既不是2和3的倍數，也不是質數，便疑惑起來了。」王有道這末一解釋，我才恍然大悟，漏洞原是在這里。馬先生露出很滿意的神氣，接着說：

「其實這個判定法，本是對的，不過欠精密一點，你是上了圖的當。假如圖畫得詳細些，你就不會這樣說了。」馬先生叫我們另畫一個較詳細些的圖，——圖76——將表示2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47，各倍數的線都畫出來。（這里的圖，右邊截去了一部份）不用說，這些數都是質數，由圖上，50以內的合數當然很明白地可以看出來。

不過，我很有點兒懷疑。——馬先生原來是要我們從圖上找質數，既然把表示質數的倍數的線

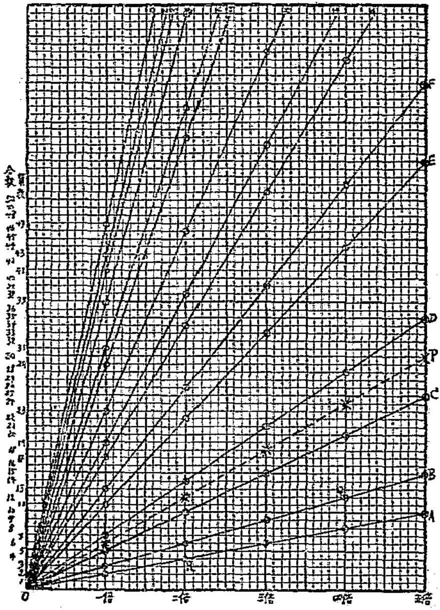



圖 76.

都盡了出來，還用得找什麼質數呢？

馬先生還叫畫一條表示6的倍數的線，OP。他說：「由這張圖看，當然，再不會說，不是2和3的倍數的，便是質數了。你們再用表示6的倍數的一條線OP做標準，仔細看一看。」

經過十來分鐘的觀察，我發現了：

「質數都比6的倍數差1。」

「不錯，」馬先生說，「但是應得補充一句，——除了2和3。」這確實是我所不曾注意到的。

「爲什麼5以上的質數都比6的倍數差1呢？」周學敏提出了這樣一個問題。

馬先生叫我們回答，但沒有人答得上來，他說：

「這只是事實問題，不是爲什麼的問題。換句話說，便是整數的性質本來如此，並不爲點什麼。」對於這個解釋，大家都好像有點莫名其妙，沒有一個人說話。馬先生接着說：

「一點也不稀罕！你們想一想，隨便一個數，用6去除，結果怎樣？」

「有的除得盡，有的除不盡。」周學敏。

「除得盡的，就是6的倍數，當然不是質數。除不盡的呢？」

沒有人回答，我也想得到有的是質數如2，3，有的不是質數，如25。馬先生見沒有人回答，

便這樣說：

「你們想想看，一個數，用6去除，若除不盡，牠的餘數是什麼？」

「1，例如7。」周學敏。

「5，例如17。」另一個同學。

「2，例如14。」又是一個同學。

「4，例如10。」別的兩個同學同時說。

「3，例如21。」我也想到了。

「沒有了。」王有道來一個結束。

「很好！」馬先生。「用6除剩2的數，有什麼數可把牠除得盡麼？」

「2。」我想牠用6除了剩2，當然是個偶數，可用2除得盡。

「那麼，除了剩4的呢？」

「一樣！」我很高興地。

「除了剩3的呢？」

「3！」周學敏很快地。

「用6除了剩1或5的呢？」

這我也明白了。5以上的質數既不能用2和3除得盡，當然也不能用6除得盡。用6去除不是剩1便是剩5；都和6的倍數差1。不過馬先生又另外提出一個問題：

「5以上的質數都比6的倍數差1，掉轉頭來，可不可以這樣說呢？——比6的倍數差1的都是質數。」

「不！」王有道，「例如25是6的4倍多1，35是6的6倍少1，都不是質數。」

「這就對了！」馬先生說。「所以你剛才用不是2和3的倍數來判定一個數是質數，是不精密的。」

「馬先生！」我的疑問，始終不能解釋，乘他沒有說下去，我便問：「由作圖的方法，怎樣可以判定一個數是不是質數呢？」

「這是應當有的問題，剛才，畫的線都是表示質數的倍數的，你們會想到，這不能用來判定質數。但是若果從畫圖的過程看，就可明白了。首先畫的是表2的倍數的線OA，由牠，你們可以看出那些數不是質數？」

「4、6、8……一切的偶數。」我答道。

「接着畫表3的倍數的線OB呢？」

「6、9、12……。」一個同學。

「4既不是質數，上面一個是5，第三就該表5的倍數的線OC。」這一來又得出牠的倍數10、15……等等。再依次上去6已是合數，所以只好表示7的倍數的線OD。接着8、9、10都是合數，只好畫表示11的倍數的線OE。照這樣做下去，把合數漸漸地淘汰了去，所畫的線所表示的不是全都是質數的倍數麼？——這個圖，我們無妨叫牠質數圖。」

「我還是不明白，用這張質數圖，怎樣判定一個數是否質數。」我跟着發問。

「這眞叫做百尺竿頭，只差一步了！」馬先生很誠懇地。「你試舉一個合數同着一個質數出來。」

「15同着37。」

「從15横看過去，有些什麼數的倍數？」

「3的和5的。」

「從37横着看過去呢？」

「沒有！」我已懂得了，在質數圖上，由一個數横看過去，若有別的數的倍數，牠自然是合數；一個也沒有的時候，牠就是質數。不只這樣，例如15，還可知道牠的質因數是3和5。最簡單的，6含的質因數是2和3。馬先生還說，用這個質數圖來把一個合數分成質因數，也是容易的。這法則是如此：

例一　將35分成質因數的積。

由35橫看到D得牠的質因數有一個是7，往下看是5，牠已是質數，所以

35＝7×5

本來，若是這圖的右邊沒有截去，7和5都可由圖上直接看出來的。

例二　將12分成質因數的積。

由12橫看得P，表示3的4倍。4還是合數，由4橫看得R，表示2的2倍，2已是質數；所以

12＝3×2×2＝3×2²

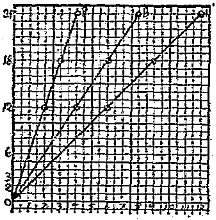


圖 77.

關於質數圖的作法，以及用牠來判定一個數是否質數，用牠來將一個合數析成質因數的積，我們都已明白了。馬先生提出求最大公約數的問題。前面所說過的既明瞭，這自然是迎刃而解的了。

例三　求12、18和24的最大公約數。

從質數圖上，——如圖77——我們可以看出24、18和12都有約數2、3和6。牠們都是24、18、12

的公約數，而6就是所求的最大公約數。

「假如不用質數圖，怎樣由畫圖法，找這最大公約數？」馬先生問王有道。他一面思索，一面用手指在棹上畫來畫去，後來他這樣回答：

「把最小一個數以下的質數找出來，再畫出表示這些質數的倍數的線。由這些線上，就可看出各數所含的公共質因素。牠們的乘積，就是所求的最大公約數。」

例四　求6、10和15的最小公倍數。

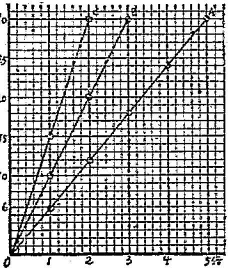


圖 78.

依照前面各題的解法，本題是再容易沒有了。OA、OB、OC相應地各表示6、10和15的倍數。A、B和C同在30的一條橫線上，30便是所求的最小公倍數。

例五　某數，三個三個地數，剩一個；五個五個地數，剩兩個；七個七個地數，也剩一個，求某數。

馬先生寫好了這個題，叫我們討論畫圖的方法。自然，這不是很難的，經過一番討論，我們就得出圖79來。1A、2B、1C各線便分別表出3的倍數多1，5的倍數多2，和7的倍數多1來。而

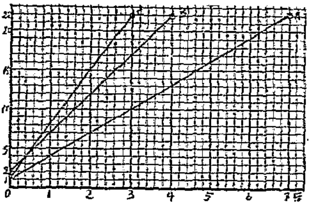


圖 79.

這三條線都經過22的線上，22即是所求的。」——馬先生說，這是最小的一個，加上3，5，7的公倍數，都合題。」——「不是麼？22正是3的7倍多1，5的4倍多2，7的5倍多1。

「你們由畫圖的方法，總算把解答求出來了，但是怎樣算法呢？」馬先生這一問，卻把我們難住了。最先有的人說是求牠們的最小公倍數，這當然不對，3、5、7的最小公倍數是105呀。後來又有人說，從牠們的最小公倍數中減去，3除所餘1，也有人說減去5除所餘的2，自然都不是。從圖上仔細去看，也毫無結果。終於只好求教馬先生了。他見着大家都束手無策，便開口道：

「這本來是咱們中國的一個老題目，他還有一個別致名稱，韓信點兵。牠的算法，有詩一首：

三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝，
七子團圓正月半，除百零五便得知。

你們懂得這詩的意思嗎？」

「不懂！不懂！」許多人都說。於是馬先生加以解釋：

「這也是和無邊落木蕭蕭下的謎一樣。三人同行七十稀，是說3除所得的餘數用70去乘牠。五樹梅花廿一枝，是說5除所得的餘數用21去乘。七子團圓正月半，是說7除所得的餘數用15去乘。除百零五便得知，是說把上面所得的三個數相加，加得的和若大過105便把105的倍數減去。因此得出來的，就是最小的一個數。好！你們依照這個方法，將本題計算一下看。」下面就是計算的式子：

$$1\times70+2\times21+1\times15=70+42+15=127。$$

$$127-105=22。$$

奇怪！對是對了；但爲什麼呢？周學敏還掉了一個題，「三三數剩二，五五數剩三，七七數剩四」來試，

$$2\times70+3\times21+4\times15=140+63+60=263。$$

$$263-105\times2=263-210=53。$$

53正是3的17倍多2，5的10倍多3，7的7倍多4。眞奇怪！但是爲什麼？

對於這個疑問，馬先生說，把上面的式子改成下面的形式，就可以明白了。

(1) $2\times70+3\times21+4\times15=2\times(69+1)+3\times21+4\times15$

$$=2\times23\times3+2\times1+3\times7\times3+4\times5\times3$$
$$=(2\times23+3\times7+4\times5)\times3+2\times1。$$

(2) $$2\times70+3\times21+4\times15=2\times70+3\times(20+1)+4\times15$$
$$=2\times14\times5+3\times4\times5+3\times1+4\times3\times5$$
$$=(2\times14+3\times4+4\times3)\times5+3\times1。$$

(3) $$2\times70+3\times21+4\times15=2\times70+3\times21+4\times(14+1)$$
$$=2\times10\times7+3\times3\times7+4\times2\times7+4\times1$$
$$=(2\times10+3\times3+4\times2)\times7+4\times1。$$

「這三個式子，可以說是同一個數的三種解釋：(1)表明牠是3的倍數多2，(2)表明牠是5的倍數多3，(3)表明牠是7的倍數多4，這不是正同題目所給的條件相合嗎？」馬先生說完了，王有道似乎已經懂得，但又有點懷疑的樣子。他躊躇了一陣，向馬先生提出這末一個問題：

「用70去乘3除所得的餘數，是因為70是5和7的公倍數，又是3的倍數多1。用21去乘5除所得的餘數，是因為21是3和7的公倍數，又是5的倍數多1。用15去乘7除所得的餘數，是因為15是5和3的公倍數，又是7的倍數多1。這些我都明白了。但這70、21和15怎樣找出來的呢？」

「這個問題，提得很合式！」馬先生說。「這類題的要點，就在這里。但，這些數的求法，說來話

長，你們可以去看開明書店出版的數學趣味，裏面就有一篇專講韓信點兵的。——不過，像本題，三個除數都很簡單。70、21、15都容易推出來。5和7的最小公倍是什麼？」

「35」一個同學回答。

「3除35，剩多少？」

「2——」另一個同學。

「注意！我們所要的是5和7的公倍數，同時又是3的倍數多1的一個數。35當然不合用。將2去乘牠，得70，既是5和7的公倍數，又是3的倍數多1。至於21和15情形也相同。不過21已是3和7的公倍數，又是5的倍數多1；15已是5和3的公倍數，又是7的倍數多1；所以都用不到再把什麼數去乘牠了。」

最後，他還補充一句：

「我提出這個題的原意，是要你們知道，牠的形式雖和求最小公倍數的題相同，實質上卻是兩件事，必須加以注意。」

## 二十 話說分數

「分數是什麼?」馬先生今天的第一句話。

「是許多個小單位聚合成的數。」周學敏。

「你還可以更說得明白點麼?」馬先生。

「例如5分之3，就是3個5分之1聚合成的，5分之1對於1做單位說，是一個小單位。」周學敏。

「好！這也是一種說法，而且是比較實用的。照這種說法，怎樣用線段表示分數呢?」馬先生問。

「和表示整數那樣，不過用表示1的線段的若干分之1做單位罷了。」王有道這般地回答以後，馬先生叫他在黑板上作出圖80來，其實，這是以前已無形中用過的了。

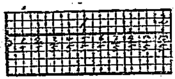


圖 80.

「分數是什麼?還有另外的說法沒有?」馬先生等王有道回到座位，坐好以後，問。經過好幾分鐘，還沒有人回答，他又問：

「2分之4是多少?」

「2！」誰都曉得。

「3分之18呢?」

「6。」大家一同回答，心裏都好似以為這只是不成問題的問題。

「2分之1呢?」

「小數點5。」周學敏。

「4分之1呢?」

「小數點25。」還是他。

「你們回答的這些數，分數的值，怎樣來的?」

「自然是除得來的啦。」依然是周學敏。

「自然！自然！」馬先生。「就順了這個自然，我說，分數是表示兩個數相除而未除，所成的數。可不可以?」

「……」想着，當然是可以的，但沒有一個人回答；大約他們也和我一樣，自己覺到有點兒拿不穩吧。只好由馬先生自己回答了。

「自然可以，而且在理論上，更合式。——分子是被除數，分母便是除數。本來，我們也就是因為兩個整數相除，不一定除得一乾二淨；在除不盡的場合，如 $13÷5=2$……餘3，不但說起來囉嗦，用起來，更大大地不方便，窮極智生，才造出這個什麼分數5分之13來。」

這樣一來，變成用兩個數連合起來表示一個數了。馬先生說，就因為這樣，分數又有一種用線段表示的方法。他說用橫線表分母，用縱線表分子，叫我們找 $\frac{1}{2}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{6}$ 各點。我們得出

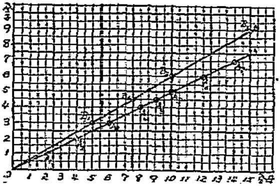


圖 81.

了$A_1$、$A_2$和$A_3$，連起來就得直線OA。他又叫我們找$\frac{3}{5}$、$\frac{6}{10}$兩點，連起來得直線OB——圖81。

「$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{4}$和$\frac{3}{6}$的值是一樣的麼？」馬先生問。

「一樣的！」我們回答。

「表$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{6}$的各點$A_1$、$A_2$、$A_3$，都在一條直線上，由這線上，還找得出一些什麼分數來？」大家爭着，你一句我一句地回答：

「8分之4。」

「10分之5。」

「12分之6。」

「14分之7。」

「這些分數的值怎樣？」

「都和2分之1的相等。」周學敏很快地答，我也是明白的。

「再就OB線看，有幾個同值的分數？」

「三個，——5分之3，10分之6，同着15分之9，」幾乎是全體同時回答。

「不錯！這樣看來，表同值分數的點，都在一條直線上。反過來，一條直線上的各點所指示的分數是不是都同值的呢？」

「？」我想回答一個是字，但找不出理由來，終於不敢回答，別的人，也只是低着頭想。

「你們試在線上隨便指出一點來試試看。」

「$A_B$，」我。

「$B_1$，」周學敏。

「$A_B$指示的分數是什麼？」

「9分之4又2分之1。」王有道。馬先生說，這是一個繁分數，叫我們將牠化簡來看。

$$\frac{4\frac{1}{2}}{9}=\frac{\frac{9}{2}}{9}=\frac{9}{2}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{2}.$$

$B_1$所指示的分數，依樣畫葫蘆，我們得出：

$$\frac{4\frac{1}{2}}{7\frac{1}{2}}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

「由這樣看來，對於前面的問題，我們可不可以回答一個是字呢？」馬先生很鄭重地問。就

因為他問得很鄭重，所以沒有人回答。

「我來一個自問自答吧！」馬先生。「可以，也不可以。」惹得大家鬨堂大笑。

「不要笑，真是這樣。實際上說，本來是如此的，所以你回答一個是字，別人絕不能提出反證來。不過，在理論上，你現在卻沒有給牠一個充分的證明，所以你回答一個不可以，也是你虛心把穩。——我得結束一句，再過一年，你們學完了平面幾何，就會給牠一個證明了。」

接着，馬先生又提醒我們，將這圖從左看到右，又從右看到左。先是：$\frac{1}{2}$變成$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{6}$、$\frac{4}{8}$、$\frac{5}{10}$、$\frac{6}{12}$、$\frac{7}{14}$；而$\frac{1}{5}$變成$\frac{2}{10}$、$\frac{3}{15}$，牠們正好表示擴分的變化。——用同數乘分子和分母。——後來是，正相反，$\frac{7}{14}$、$\frac{6}{12}$、$\frac{5}{10}$、$\frac{4}{8}$、$\frac{2}{4}$都變成$\frac{1}{2}$；而$\frac{3}{15}$、$\frac{2}{10}$都變成$\frac{1}{5}$。牠們恰好表示約分的變化。——用同數除分子和分母。——啊！多麼簡單，明瞭，而趣味豐富啊！誰說算學是呆板、枯燥、沒生趣的呀！

用這種方法表出分數，牠的效用，就此可歎觀止了嗎？不！還有更濃厚的趣味跟着來哩。

第一，是通分。馬先生提出下面的例題。

例一　化$\frac{3}{4}$、$\frac{5}{6}$和$\frac{3}{8}$為同分母的分數。

這個問題的解決，真是再輕鬆不過了。我們只依照馬先生的吩咐，措出表示這三個分數$\frac{3}{4}$、$\frac{5}{6}$和$\frac{3}{8}$的三條線，——OA、OB和OC，馬上就看出了來$\frac{3}{4}$擴分可成$\frac{18}{24}$；

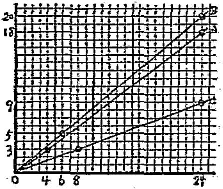



圖 82.

$\frac{5}{6}$可成$\frac{20}{24}$，而$\frac{3}{8}$可成$\frac{9}{24}$；正好分母都是24。真是簡單極了。

第二，是比較分數的大小。

就用上面的例和圖，便可說明白。把三個分數，化成了同分母的；因爲，

$$\frac{20}{24}>\frac{18}{24}>\frac{9}{24}$$

所以知道，

$$\frac{5}{6}>\frac{3}{4}>\frac{3}{8}。$$

這個結果，圖上顯示得非常明白，OB線高於OA線，OA線高於OC線，無論這三個分數的分母是否相同，這個事實絕不改變，還用得着什麼通分？

照分數的性質說，分子相同的分數，分母越大的值越小。這一點，圖上顯示得更明白了。

第三，這是普通算術書上，所不常見到的，就是求兩個分數間，有一定分母的分數。

例二　求$\frac{5}{8}$和$\frac{7}{18}$中間，分母爲14的分數。

先畫表示$\frac{5}{8}$和$\frac{7}{18}$的兩條直線OA和OB，由分母14這一點往上看，界在OA和

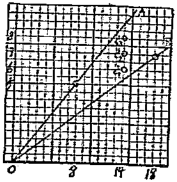


圖 83.

OB間的，分子的數是6（$C_1$、）7（$C_2$）和8（$C_3$。）這三點所表的分數是$\frac{6}{14}$、$\frac{7}{14}$、$\frac{8}{14}$，便是所求的。

不是麼？這多末簡捷了當啊！馬先生叫我們用算術的計算法來解這個問題，以相比較。我們共同討論一下，得出一個要點，1先通分。因爲這一來好從分子的大小，決定各分數。通分的結果，8、14和18的最小公倍數是504，而$\frac{5}{8}$變成$\frac{315}{504}$，$\frac{7}{18}$變成$\frac{196}{504}$，所求的分數就在$\frac{315}{504}$和$\frac{196}{504}$中間，分母是504，分子比196大，比315小。

「這還不夠，」王有道的意見，「因爲題上所要求的，限於14做分母的分數。公分母504是14的36倍，分子必須是36的倍數，才約得成14做分母的分數。」這個意見當然很對，而且也是本題要點之一。依照這個意見，我們找出在196和315中間，36的倍數，只有216（6倍）252（7倍）和288（8倍）三個。而：

$$\frac{216}{504}=\frac{6}{14},\quad \frac{252}{504}=\frac{7}{14},\quad \frac{288}{504}=\frac{8}{14},$$

同着前面所得的結果完全相同，但手續卻繁重得多了。

馬先生還提出一個計算起來比這樣更緊重的題，但由作圖法解決，眞不過是「一舉手之勞。」

例三 求分母是10和15中間各整數的分數，分數的值限於在0.6和0.7中間。

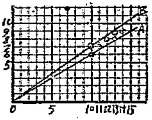


圖 84.

圖中OA和OB兩條直線，分別表示$\frac{6}{10}$、和$\frac{7}{10}$。因此所求的各分數，就在牠們的中間。又分母限於11、12、13和14四個數。由圖上，一眼就可以看出來，所求的分數，只有下面的五個：

$\frac{7}{11}$，$\frac{8}{12}$，$\frac{8}{13}$，$\frac{9}{13}$，$\frac{9}{14}$。

第四，分數怎樣相加減？

例四 求$\frac{3}{4}$和$\frac{5}{12}$的和同差。

總是要畫圖的，馬先生寫完題以後，我就將表示$\frac{3}{4}$和$\frac{5}{12}$的兩條直線OA和OB畫好，——圖85。

馬先生。「異分母分數的加減法，你們都已知道了吧！」

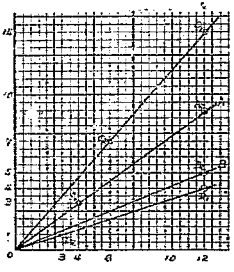


圖 85.

「先通分!」周學敏。

「爲什麼要通分呢?」

「因爲,把分數看成許多小單位集合成的,單位不同的數,不能相加減。」周學敏加以說明。

「對的!那末,現在我們怎樣,在圖上將這兩個分數相加減呢?」

「兩個分數的最小公分母是12,通分以後,3/4變成9/12,$A_2$所表示的;5/12還是5/12,$B_1$所表示的。在12這條縱線上,從$A_2$起加上5,得$C_1$($A_2C_1$等於12$B_1$)O$C_1$這條直線,就表示所求的和12分之14。」王有道。

同着「和」的作法相反,「差」的作法我也明白了。從$A_2$起向下截去5,得$D_1$;O$D_1$這條直線,就表示所求的差,12分之4。

「O$C_1$和O$D_1$這兩條直線所表示的分數,最左的一個各是什麼?」馬先生問。

一個是6分之7,$C_2$所表示的。一個是3分之1,$D_2$所表示的。這個說明了什麼呢?馬先生指示我們,就是在算術中,加得的和,如12分之14;同着減得的差,如12分之4;可約分的時候,都要約分;而在這里,只要看最左的一個分數就得了。眞便當!

## 二一 三態之一——幾分之幾

馬先生說，分數的應用問題，大體看來，可分成三大類：

第一，和整數的四則問題一樣，不過夾雜得有些數目是分數罷了；——以前的例子中已有過——即如「大小兩數的和是1又10分之1，差是5分之2，求兩數。」——當然，這類題目，用不到再講了。

第二，和分數性質有關係的。這樣題目，「萬變不離其宗，」歸根到底，不過三種形態：

(1)知道兩個數，求一個數是他一個數的幾分之幾。

(2)知道一個數，求牠的幾分之幾是什麼。

(3)知道一個數的幾分之幾，求牠是什麼。

若用a表一個分數的分母，b表分子，m表牠的值，那末：

$$m=\frac{b}{a}$$

(1)是知道a和b求m。

(2)是求一個數n的a分之b是多少。

(3)是一個數的a分之b是n，求這個數。

第三，單純是分數自身的變化，如「有一分數，其分母加1，可約為$\frac{3}{4}$；分母加2，可約為

$\frac{2}{3}$求原數。」

這次，馬先生所講的，就是第二類中的(1)。

例一 把一顆骰子連擲三十六次，正好出現六次紅，再擲一次，出現紅的機會是多少？

「這個題的意思，是就三十六次中出現六次說，看牠占幾分之幾。就用這個數來預測下次的機會。——這種計算，叫或然率。」馬先生說。

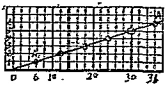


圖 86.

縱線36外橫線6的交點是A，連OA，這直線就表示所求的分數，36分之6。牠可被約成18分之3，12分之2，6分之1，而和24分之4，30分之5都等值，最簡的一個就是6分之1。

例二 酒精三升半同水五升混合成的酒，酒精占多少？

骨子裏，本題和前一題，沒有什麼兩樣，只分母——橫線上——須取3.5+5=8.5這一點。這一點的縱線和3.5這點的橫線相交於A。連OA，得表示所求的分數的直線。但直線上，從A向左，找不出簡單分數來。若將牠適當地引長到$A_1$，則得最簡分數17分之7。用算術上的方法計算，便是：

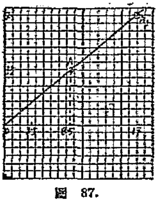


圖 87.

$$\frac{3\cdot5}{3\cdot5+5}=\frac{3\cdot5}{8\cdot5}=\frac{35}{85}=\frac{7}{17}。$$

## 二三　三態之二——求偏

例一　求35元的7分之1、7分之3各是多少。

「你們覺得這個問題，有什麼困難麼?」馬先生問。

「分母是一個數，分子是一個數，35元又是一個數，一共三個數，怎樣畫法呢?」我感到的困難就在這一點。

「那麼，把分數就看成一個數，不是只有兩個數了嗎?」馬先生說。「其實在這里，還可簡捷了當地，看成一個簡單的除法和乘法的問題。你們還記得我所講過的除法的畫法麼?」

「記得的，任意畫一條OA線，從O起，在外面取等長的若干段……(參看圖4和牠的說明。)」我回答的話還沒有完，馬先生就接了下去：

「在這裏，假如我們用橫線(或縱線)表元數，就可以用縱線(或橫線)當任意直線OA。就本題說，任取一小段作$\frac{1}{7}$，依次取$\frac{2}{7}$，$\frac{3}{7}$，直到$\frac{7}{7}$就是1。——也可以先取一長段作1，就是$\frac{7}{7}$，而把牠分成7個等分。——怎樣一來，要求35元的7分之1，怎樣作法?」

「先進1和35。再過$\frac{1}{7}$畫牠的平行線，牠和表元數的線交於5；就是表明35元的7分之1是5元。」周學敏。

不用說，過$\frac{3}{7}$這一點照樣作平行線，就得35元的7分之3是15元。若我們過$\frac{2}{7}$、$\frac{4}{7}$……各分線也作同樣的平行線，則35元的$\frac{1}{7}$、$\frac{2}{7}$、$\frac{3}{7}$……都能一目了然了。

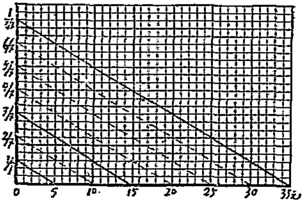


圖 88.

馬先生進一步地指示給我們：由本題看來，$\frac{1}{7}$是5元，$\frac{2}{7}$是10元，$\frac{3}{7}$是15元，$\frac{4}{7}$是20元……以至於$\frac{7}{7}$（全數）是35元；可知若把$\frac{1}{7}$作單位，$\frac{2}{7}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{4}{7}$……相應地就是牠的2倍、3倍、4倍……。所以我們若把倍數的意義看得寬一些，分數的問題，本源上，和倍數的問題，沒有什麼差別。——真的！求35元的2倍、3倍……和求牠的$\frac{2}{7}$、$\frac{3}{7}$……都同樣地用乘法：

$$\left.\begin{array}{l} 35^{\text{元}} \times 2 = 70^{\text{元}},\ 35^{\text{元}} \times 3 = 105^{\text{元}},\ \cdots\cdots\text{倍數} \\ 35^{\text{元}} \times \frac{2}{7} = 10^{\text{元}},\ 35^{\text{元}} \times \frac{3}{7} = 15^{\text{元}},\ \cdots\cdots\text{分數} \end{array}\right\}\text{廣義的倍數。}$$

歸結一句：知道一個數，要求牠的幾分之幾，和求牠的多少倍一般，都是用乘法。

例二　華民有洋48元，將4分之1給他的弟弟；他的弟弟將所得的3分之1給小妹妹；各人有洋多少？各人所有的是華民原有的幾分之幾？

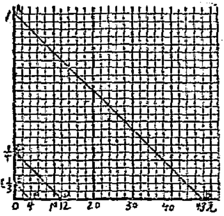


圖 89.

本題的面目雖然和前一題的略有不同，但也不過面目不同而已；推本尋源，卻沒有什麼差別。OA表全數，（或說整個，或說1，都是一樣。）OB表洋48元。OC表$\frac{1}{4}$。CD平行於AB。OE表OC的$\frac{1}{3}$，EF平行於CD，自然也就平行於AB。——這是圖89的作法。

D指12元，是華民給弟弟的。OB減去OD剩36元，是華民分給弟弟後所有的。

F指4元，是華民的弟弟給小妹妹的。OD減去OF，剩8元，是華民的弟弟所有的。

他們所有的，依次是：36元，8元，4元，合起來正好48元。

至於各人所有的對於華民原有的說，依次是$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{12}$——$\frac{1}{6}$，和$\frac{1}{12}$。

這題的算法是：

$48^{元} \times \frac{1}{4} = 12^{元}$……華民給弟弟的。

$48^{元} - 12^{元} = 36^{元}$……華民給弟弟後所有的。

$12^{元} \times \frac{1}{3} = 4^{元}$……弟弟給小妹妹的。

$12^{元} - 4^{元} = 8^{元}$……弟弟所有的。

$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$…………華民的。

$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$…………小妹妹的。

$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$……弟弟的。

例三　甲、乙、丙三人分洋60元，甲得$\frac{2}{5}$，乙得的等於甲的$\frac{2}{3}$；各得多少？

「這個題和前面的兩個，有什麼不同？」馬先生問。

「一樣的，不過多轉了一個彎。」王有道。

「這種看法是對的。」馬先生就叫王有道，將圖畫出來，並且

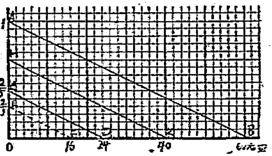



圖 90.

加以說明。

「A B、C D、E F三條線的畫法，和以前的一樣。」他一面畫一面說。「從C向上取C H，等於O E。畫H K平行於A B。O D指甲得24元，O F指乙得16元。O K指甲乙共得去40。K B就指丙得20元。」

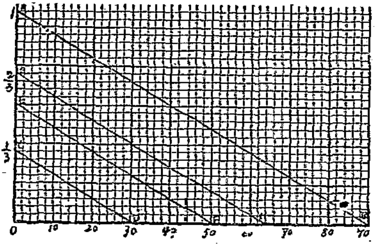


圖 91.

王有道已說得很明白了，馬先生叫我將計算法寫出來，這還有什麼難呢。

$60元\times\frac{2}{5}=24元(OD)$……甲得的。

$24元\times\frac{2}{3}=16元(OF)$……乙得的。

$60元-(24元+16元)=60元-40元=20元$……丙得的。

OB　OD　DK　OB　OK　KB

例四　某人存洋90，每次取餘存的$\frac{1}{3}$，連取3次，每次取出多少，還剩多少？

這個問題，跟著前面的來，當然很簡單。大約也是

爲了這樣，馬先生纔留給我們自己做。我只將圖畫在這里，作爲參考；其實只是一個連分數的問題。——D指示第一次取30元，F指示第二次取20元，H指示第三次取13又3分之1元。所剩的是HB，26又3分之2元。

## 二三 三態之三——求全

例一 什麼數的4分之3是12？

「這是知道了某數的部份，而要求牠的整個；和前一種正相反。所以牠的畫法，不用說，只是將前一種的方法反其道而行了。」馬先生說。

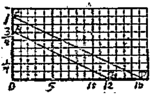


圖92.

「橫線表數，這用不到說；縱線表分數，4分之3怎樣畫法？」

「先任意取一長段作1，再將牠4等分，就可得$\frac{1}{4}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{4}$、各點」，

一個同學說。

「這樣的辦法，對是對的，不過不很便捷。」馬先生批評道。

「先任取一小段作$\frac{1}{4}$，再連續次第取相同的長，表$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{4}$……。」

周學敏。

「這就比較便當了。」馬先生說完，在$\frac{3}{4}$的那一點標一個A，12那點標一個B；又在1那點表一個C。「這樣一來，怎樣畫法？」

「先連結AB，再過C作牠的平行線CD。D點指示的16——牠的$\frac{1}{4}$是4，牠的$\frac{3}{4}$正好是12。——就是所求的數。

依照求偏的樣兒，把「倍數」的意義，看得廣泛一點；這類題的計算法，正和知道某數的倍數，求某數一般無二，都應當用除法。例如，某數的5倍是105；則：

$$某數=105\div5=21。$$

而本題，某數的$\frac{3}{4}$是12，所以：

$$某數=12\div\frac{3}{4}=12\times\frac{4}{3}=16。$$

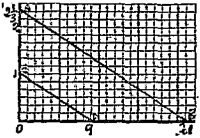


圖 93.

例二　某數的2又3分之1是21，某數是多少？

本題和前一題，可以說全然相同，由牠更可看出「知偏求全」同着知道倍數求原數一樣。

圖中AB和CD兩條直線的作法，和前題的相同，D指示某數是9。——牠的2倍是18，牠的$\frac{1}{3}$是3，牠的2又3分之1，正好是

2 1。這題的計算法，是這樣：

$$21\div2\frac{1}{3}=21\div\frac{7}{3}=21\times\frac{3}{7}=9。$$

例三　何數的$\frac{1}{2}$與$\frac{1}{3}$的和是15？

「本題的要點是什麼？」馬先生問。

「先看某數的$\frac{1}{2}$同着牠的$\frac{1}{3}$的和，是牠的幾分之幾。」王有道回答。

這圖94是周學敏作的。先取OA作1，次取牠的$\frac{1}{2}$ OB，和$\frac{1}{3}$ OC。再把OC加到OB上得OD，BD自然是OA的$\frac{1}{3}$。所以OD就是OA的$\frac{1}{2}$同着$\frac{1}{3}$的和。

連DE，作AF平行於DE；F指明某數是18。

計算法是：

$$\underset{\text{OE}}{15}\div\left(\underset{\text{OB}}{\frac{1}{2}}+\underset{\text{OC(BD)}}{\frac{1}{3}}\right)=15\div\underset{\text{OD}}{\frac{5}{6}}=15\times\frac{6}{5}=\underset{\text{OF}}{18}。$$

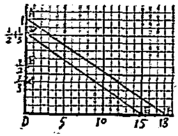


圖94.

例四　何數的$\frac{2}{7}$與$\frac{1}{5}$的差是6？

和前題相比較，只是「和」換成「差」這一點不同。所以牠的作法也只有從OB減去OC，得OD，表$\frac{2}{7}$和$\frac{1}{5}$的差，這一點不同。D指明所求的數是70。

計算法是這樣：

$$6\div\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{5}\right)=6\div\frac{3}{35}=6\times\frac{35}{3}=70.$$

…OE　…OB　…OC,BD)　…OD　…OF

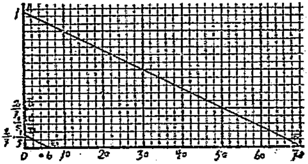



圖 95.

例五　大小兩數的和是21，小數是大數的4分之3，求兩數。

就廣義的倍數說，這個題

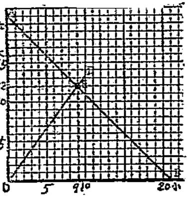



圖 96.

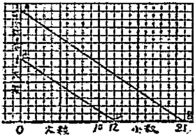



圖 97.

和第四節的例二，全然一樣，照圖11的作法，可得圖96。若照前例的作法，把大數看成1，小數就是4分之3，可得圖97。兩相比較，眞是殊途同歸了。

至於計算法，更不用說，只有一個了。

$$\underset{\text{和 OB}}{21}\div\underbrace{\left(\underset{\text{大數 OC}}{1}+\underset{\text{小數 CA}}{\frac{3}{4}}\right)}_{\text{OA}\;\cdots\;\text{大數的 }1\frac{3}{4}\text{ 倍}}=21\div\frac{7}{4}=21\times\frac{4}{7}=\underset{\text{大數 OD}}{12}。$$

$$\underset{\text{和 OB}}{21}-\underset{\text{大數 OD}}{12}=\underset{\text{小數 DB}}{9}。$$

例六　大小兩數的差是4，大數恰是小數的3分之4；求兩數。

這題和第四節的例二內容完全相同。圖98就是依圖12作的。圖99的作法和圖97的相仿，不過是將小數看成1，得OA。取OA的$\frac{1}{3}$，得OB。將OB的長加到OA上，得OC。

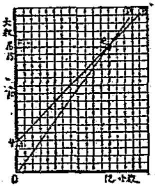



圖 93.

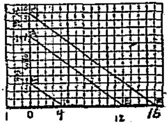



圖 99.

牠是OA的$\frac{4}{3}$，即大數。D點表4，連BD。作AE，CF和BD平行。E指小數是12，F指大數是16。

計算法是這樣：

$$4\div\left(\frac{4}{3}-1\right)=4\div\frac{1}{3}=12,$$

差OD　大數OC　小數OA(CB)　OB　小數OE

$$12+4=16。$$

差OD(EF)　大數OF

例七　某人費去存款的$\frac{1}{3}$，後又費去所餘的$\frac{1}{5}$，還存16元。他原來的存款是多少？

「這題的作法，第一步，可先取一長段OA作1。然後減去牠的$\frac{1}{3}$，怎樣減法？」馬先生。

「把OA三等分，從A向下取AB等於OA的$\frac{1}{3}$，OB就是表示所剩的。」我回答。

「不錯！第二步呢？」

「從B向下取BC等於OB的$\frac{1}{5}$，OC就是表示第二次取後所剩的。」周學敏。

「對！OC就和OD所表的16元相當了。你們各人自己把圖作完吧！」馬先生吩咐。

自然，這又是老法子：連CD，作BEAF和牠平行。OF所表的30元，就是原來的存款。由這圖上，還可看出第一次所取的是10元，第二次是4元。看了圖很明白地，計算法是：

$$16元\div\left\{1-\frac{1}{3}-\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{5}\right\}=16元\div\frac{8}{15}=30元。$$

OD … OA … AB … OB … BO … OC … OF …

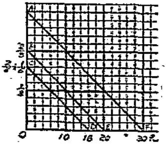


圖 100.

例八 有水一桶，漏去$\frac{1}{3}$，汲出2斗，還剩半桶。這桶水原來是多少？

「這個題，對於畫圖，不很順錫，你們能把牠的順序更改一下麼？」馬先生問。

「題上說，最後剩的是半桶，可見得漏去和汲出的也是半桶，先就這半桶來畫圖好了。」王有道。

「這辦法很不錯，精神上雖已把題目改變，實質上卻是一樣。」馬先生說。「那麼，作法呢？」

「先任取OA作1。截去一半AB，得OB，也是一半。三等分AO得AC。從BO截去AC得D，OD相當於汲出的水2斗。……」王有道說到這里，我已

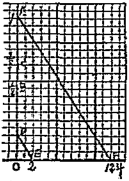


圖 101.

知道，以下自然又是老法門，連DE，作AF和軸平行。F指出這桶水原來是12斗。——先消去$\frac{1}{3}$是4斗，後汲去2斗，只剩6斗，恰好半桶。

算法是：

$$2斗\div\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=2斗\div\frac{1}{6}=12斗。$$

$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$

OE　OA　BA　BD(AC)　OD　OF

例九　有繩一段，剪去9尺，餘下的部份，比全長的$\frac{3}{4}$還短3尺。這繩原長多少？

這個題，不過有點小彎子在裏面，一經馬先生這樣提示，「少剪去3尺，怎樣？」我便明白作法了。

圖102，OB表剪去的9尺。BC是3尺。若少剪3尺，則剪去的，便只是OC。從C往右正是全長的$\frac{3}{4}$。OA表1，AD是OA的$\frac{3}{4}$。OD和OC相當。連DC，作AE和軸平行。E指明這繩原來長24尺。軸的$\frac{3}{4}$是18尺。軸被剪去了9尺只剩15尺，比18尺恰好差3尺。

圖 102.

經過這番作法，算法也就很明白了：

$$\underset{OB}{(9尺}-\underset{CB}{3尺)}\div\left(\underset{OA}{1}-\underset{DA}{\frac{3}{4}}\right)=\underset{OC}{6尺}\div\underset{OD}{\frac{1}{4}}=24尺。$$

例十　夏竹君提去存款的$\frac{2}{5}$，後又存入200元，恰合成是原存款的$\frac{2}{3}$。求原來的存款。

從講分數的應用問題起，直到前一個例題，我都不很感到困難，這個題，我卻有點對付不下了。馬先生似乎已曉得，我們有大半人拿着牠沒有下手處，他說：

「你們先不要對着題去悶想，還是動手的好。」但是怎樣動手呢？題目所說的，都不曾得出一些關連來。

「先作表示1的OA。——再作表示$\frac{2}{5}$的AB。——又作表示$\frac{2}{3}$的OC。」馬先生好似體育教師喊口令的一般。

「夏竹君提去存款的$\frac{2}{5}$，剩的是什麼？」他問。

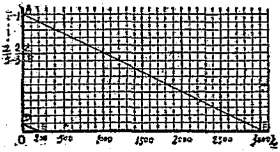


圖 103

「5分之3。」周學敏。

「不，我問的是圖上的線段。」馬先生。

「OB。」周學敏不回答，我就說。

「存入200元後，存的有多少?」

「OC。」我回答。

「那末，和這存入的200元相當的是什麼?」

「BC。」周學敏指着說。

「這樣一來，圖會畫了吧!」

我仔細想了一陣，又看看前面的幾個圖，都是拿和實在的數目相當的分數放在頂下面——這大約是一點小小的祕訣——我就取OD等於BC。連DE，作AF平行於牠。F指的是3000元。這個數，使我有點懷疑，好像太大了一些。我就給牠證驗一下。3000元的$\frac{2}{5}$是1200元，提去後還剩1800元。加入200元，是2000元，不是3000元的$\frac{2}{3}$是什麼?——方法對了，做得仔細，結果總是對的，爲什麼要懷疑?!

這個作法，已把計算法明明白白地告訴我們了：

$$\underset{OE}{200元}\div\left\{\underset{OC}{\frac{2}{3}}-\left(\underset{OA}{1}-\underset{BA}{\frac{2}{5}}\right)\right\}=200元\div\left\{\frac{2}{3}-\underset{OB}{\frac{3}{5}}\right\}=200元\div\underset{OD(BC)}{\frac{1}{15}}=\underset{OF}{3000元}。$$

例十一　分36成甲、乙、丙三部分，甲的$\frac{1}{2}$，和乙的$\frac{1}{3}$，和丙的$\frac{1}{4}$都相等；求各數。

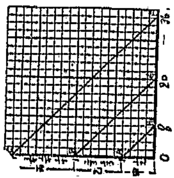


圖 164

對於馬先生的指導，我眞要銘感五腑了。這個題，在平常，我一定沒有辦法的，現在遵照馬先生在前一題的提示，「先不要對着題悶想，還是動手的好，」動起手來。

先取一小段作甲的$\frac{1}{2}$，取兩段得OA，這就是甲的1。題目上說乙的$\frac{1}{3}$和甲的$\frac{1}{2}$相等，我就連續取同樣的3小段，每一段作乙的$\frac{1}{3}$，得AB，這就是乙的1。再取同樣的4小段，每一段作丙的$\frac{1}{4}$，得BC，這就是丙的1。

連CF，又作牠的平行線BG、和AH。OH、HG和GF各表8、12、16，就是所求的甲、乙、丙三個數。8的$\frac{1}{2}$，12的$\frac{1}{3}$，和16的$\frac{1}{4}$全都等於4。

至於算法我倒想着無妨別致一點：

$$\underset{OF}{36}\div\left(\frac{1}{2}\times\underset{OA}{2}+\frac{1}{2}\times\underset{AB}{3}+\frac{1}{2}\times\underset{BC}{4}\right)=\underset{OC}{36}\div\frac{9}{2}=\underset{OH(\text{甲})}{8}。$$

$$\underbrace{8\times\frac{1}{2}}_{\text{甲的}\frac{1}{2}}\times 3=\underset{HG(\text{乙})}{12}，\quad \text{乙的}\frac{1}{3}$$

$$\underbrace{8\times\frac{1}{2}}_{\text{甲的}\frac{1}{2}}\times 4=\underset{GF(\text{丙})}{16}。\quad \text{丙的}\frac{1}{4}$$

例十二　分490元，給趙錢孫李四個人；趙比錢的$\frac{2}{3}$少30元，孫等於趙錢的和，李比孫的$\frac{2}{3}$少30元。各人得多少？

「這個題有點兒麻煩了，是不是？人有四個，條件又囉嗦。你們坐了這一陣，也有點兒疲倦了。我來說個故事，給你們解解悶，好不好？」聽到馬先生要說故事，誰都精神為之一振。

「話說——」馬先生一開口，惹得大家都笑了起來。「從前有一個老頭子。他有三個兒子和十七條牛。有一天，他病了，自己覺得大限快要到來，因為他已經九十多歲；就叫他的三個兒子到面前來，吩咐他們：

——我的牛，你們三弟兄分，照我的說法去分，不許爭吵：老大要$\frac{1}{2}$，老二要$\frac{1}{3}$，老三要$\frac{1}{9}$。

老頭子不久果然死了。他的三個兒子把事情料理清楚以後，就牽出十七條牛來，依照他的說法分。老大要$\frac{1}{2}$，就只能得八條活的牛條死的。老二要$\frac{1}{3}$，就只能得五條活的，三分之二條死的。老三要九分之一，只能得一條活的，九分之八條死的。他們雖是不爭吵，卻不知道怎樣分法纔會合式。誰都不願要死牛。

後來他們一同去請教隔壁家的李太公，他是向來很公平，他們很佩服的。他們把一切情形，告訴了李太公。李太公笑迷迷地牽了自己的一條牛，跟他們去。他說：

——你們分不開，我送你們一條，再分好了。

他們三弟兄有了十八條牛：老大分二分之一，牽去九條；老二分三分之一，牽去六條；老三分九分之一，牽去兩條；各人都高高興興地走開。李太公的一條牛，他仍舊牽了回去。」

「這叫李太公分牛。」馬先生說完，大家又用笑聲來回答他。他接着說：

「你們聽了這個故事，學到點什麼沒有？」

「……」沒有人回答。

「你們無妨學學李太公，做個空頭人情，來替趙錢孫李這四家頭分這筆糊夾賬呀！」原來，他說李太公分牛的故事，是提示我們，解決這個題，須得虛加些錢進去。這錢怎樣加進去呢？

第一步，我想着了，趙比錢的$\frac{2}{3}$少30元；若加30元去給趙，則他得的就是錢的$\frac{2}{3}$。

不過，這樣一來，孫比趙錢的和又差了30元。好，又加30元去給孫，使他所得的還是等於趙錢的和。

再往下看去，又來了，李比孫的$\frac{2}{3}$已不只少30元。孫既多得了30元，他的$\frac{2}{3}$就得多了20元。李比他所得的$\frac{2}{3}$，先少30元，現在又少20元。這兩筆錢，不用說也得加進去。虛加進這幾筆數，則各人所得的，趙是錢的$\frac{2}{3}$，孫是趙錢的和，而李是孫的$\frac{2}{3}$，他們彼此間的關係，就比較簡明得多了。

跟着這一堆說明，畫圖已成很機械的工作。

先取$OA_1$作錢的1。次取$A_1A_2$等於$OA_1$的$\frac{2}{3}$，作爲趙的。再取$A_2A_3$等於$OA_2$，作爲孫的。又取$A_3A_4$等於$A_2A_3$的$\frac{2}{3}$，作爲李的。

在橫線上，取$OB_1$表490元。$B_1B_2$，表添給趙的30元。$B_2B_3$，表添給孫的30元。$B_3B_4$和$B_4B_5$表添給李的30元和20元。

連$A_4B_5$作$A_1C$和牠平行；C指135元，是錢所得的。

作$A_2D$平行於$A_1C$，由D減去30元，得E。CE表60元，是趙所得的。

作$A_3F$平行於$A_2E$，EF表195元，是孫所得的。

作$A_4B_2$平行於$A_3F$，由$B_2$減去30元，正好得指490元的$B_1$。$FB_1$表100元，是李所得

的。

至於計算的方法，由作圖法，已顯示得非常明白：

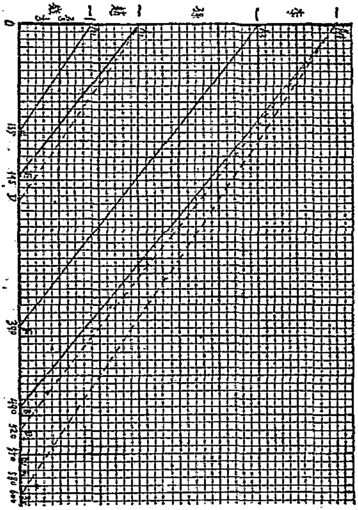


圖 105

$$\{\underset{OB_1}{490元}+\underset{B_1B_2}{30元}+\underset{B_2B_3}{30元}+(\underset{B_3B_4}{30元}+\underset{B_4B_5}{20元})\}\div\left\{\underset{OA_1}{1}+\underset{A_1A_2}{\frac{2}{3}}+\underset{A_2A_3}{\left(1+\frac{2}{3}\right)}+\underset{A_3A_4}{\left(1+\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}}\right\}$$

$$=\underset{OB_5}{600元}\div\underset{OA_4}{\frac{40}{9}}=\underset{CO}{135元}\text{……錢所得的。}$$

$$\underset{CD}{135元\times\frac{2}{3}}-\underset{ED}{30元}=90元-30元=\underset{CE}{60元}\text{……趙所得的。}$$

$$\underset{CO}{135元}+\underset{CE}{60元}=\underset{OE(EF)}{195元}\text{……孫所得的。}$$

$$\underset{FB_2}{195元\times\frac{2}{3}}-\underset{B_1B_2}{30元}=\underset{FB_1}{100元}\text{……李所得的。}$$

**例十三** 某人將他所有的存款分給他的三個兒子，幼子得$\frac{1}{9}$，次子得$\frac{1}{4}$，餘下的歸長子所得。長子比幼子多得38元。這人的存款是多少？三子各得多少？

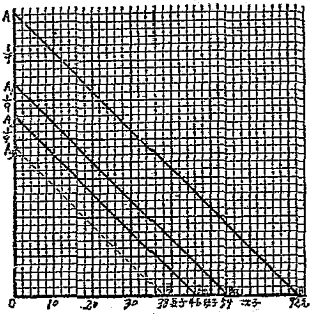



圖 106.

這題是一個同學提出來的，其實和例九只是面目不同罷了。馬先生雖也很仔細地給他解釋，我只將圖的作法記在這里。

取OA表某人的存款1。從A起截去OA的$\frac{1}{4}$得$A_1$，$AA_1$表次子得的。從$A_1$起截去OA的$\frac{1}{9}$得$A_2$，$A_1A_2$表幼子得的。自然$A_2O$就是長子所得的了。從$A_2$截去$A_1A_2$$(\frac{1}{9})$得$A_3$，$A_3O$表長子比幼子多得的，相當於38元($OB_1$)。

連$A_3B_1$，作$A_2B_2$，$A_1B_3$和AB平行於$A_3B_1$。——某人的存款是72元；長子得46元，次子得18元，幼子得8元。

例十四　弟弟的年紀比哥哥的小3歲，而是哥哥的$\frac{5}{6}$；求各人的年紀。

這題和例六在算理上完全一樣。我只把圖畫在這里，並且將算式寫出來。

$$3\text{歲}\div\left(1-\frac{5}{6}\right)=3\text{歲}\div\frac{1}{6}=18\text{歲}\text{……哥哥的。}$$

$\vdots\ OB_1\quad \vdots\ OA\quad \vdots\ A_1A\qquad \vdots\ OA_1\quad \vdots\ OB$

$$18\text{歲}-3\text{歲}=15\text{歲}\text{……弟弟的。}$$

$\vdots\ OB\quad \vdots\ OB_1(B_2B)\quad \vdots\ OB_2$

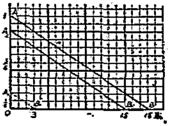


圖 107.

例十五　某人4年前的年紀，是8年後的年紀的$\frac{3}{7}$。求此人的現年。

要點！要點！馬先生寫好了題，就叫我們找軸的要點。我仔細揣摩一番，覺得題上所給的是某人4年前和8年後兩個年紀的關係。先從這點下手，自然直接一些。周學敏和我的意見相同，他向馬先生陳述，馬先生也認爲對。由這要點，我得出下面的作圖法。

取OA表某人8年後的年紀1。從A截去軸的$\frac{3}{7}$ $AA_1$，則$OA_1$就是某人8年後和4年前，兩個年紀的差，相當於4歲（$OB_1$）加上8歲，（$B_1B_2$）得$B_2$。

連$A_1B_2$。作AB平行於$A_1B_2$。B指的21歲，便是某人8年後

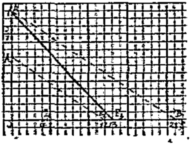


圖 108.

的年紀。

從B退回8年，得$B_3$。牠指的是13歲，就是某人的現年。——4年前，他是9歲，正好是他8年後21歲的$\frac{3}{7}$。

這一來，算法自然有了：

$$\underset{OB_1}{(4\text{歲}}+\underset{B_1B_3}{8\text{歲})}\div\Big(\underset{OA}{1}-\underset{A_1A}{\frac{3}{7}}\Big)-\underset{B_3B}{8\text{歲}}=\underset{OB_3}{12\text{歲}}\div\underset{OA_1}{\frac{4}{7}}-\underset{B_3B}{8\text{歲}}=\underset{OB}{21\text{歲}}-\underset{B_3B}{8\text{歲}}=\underset{OB_3}{13\text{歲}}。$$

例十六　兄比弟大8歲，12年後，兄年比弟年的1又5分之3倍少10歲。求各人的現年。

「又要來一次李太公分牛了。」馬先生這一說，我就想到，解決本題，得虛加一個數進去。從另一方面設想，兄比弟大8歲，這個差，是「一成不變」的。題目上所給的是兩弟兄12年後的年紀的關係；爲了直接一點，自然應當從12年後，他們的年紀着手。——這一來，好了，假如兄比弟多大10歲，——這就是要虛加進去的，——那末在12年後，他的年紀，正是弟的年紀的1又5分之3倍。不過他比弟大的卻是18歲了。

作圖法是這樣：

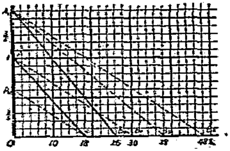


圖 109.

取 O A 作 1 2 年後弟年的 1。取 $AA_1$ 等於 O A 的 $\frac{3}{5}$，則 $OA_1$ 便是 1 2 年後，又加上 1 0 歲的兄年。取 $OA_2$ 等於 $AA_1$，牠便是 1 2 年後，——當然也就是現在——兄加上 1 0 歲時，兩人年紀的差，相當於 1 8 歲（O B。）

連 $A_2B$。作 $AB_1$ 和牠平行。$B_1$ 指 3 0 歲，是弟 1 2 年後的年紀。從牠減去 1 2 歲，得 B；就是弟現年 1 8 歲。

作 $A_1B_2$ 平行於 $A_2B$。$B_2$ 指 4 8 歲，是兄 1 2 年後，又加上 1 0 歲的年紀。減去這 1 0 歲，得 $B_3$，指 3 8 歲，是兄 1 2 年後的年紀。再減去 1 2 歲，得 $B_4$，指 2 6 歲，是兄的現年——正和弟的現年 1 8 歲加上 8 歲相同；眞巧極了。

算法是這樣：

$$\underset{OB}{(8\text{歲}}+\underset{OA_1}{10\text{歲})}\div\left(\underset{A_1A(OA)}{1\frac{3}{5}}-\underset{}{1}\right)-\underset{BB_1}{12\text{歲}}=18\text{歲}\div\frac{3}{5}-12\text{歲}=\underset{OB_1}{30\text{歲}}-\underset{BB_1}{12\text{歲}}=\underset{OB}{18\text{歲}}\text{……弟年。}$$

$18歲+8歲=26歲$……兄年。

$OB \quad BB_1 \quad OB_1$

例十七　甲乙兩校學生，共有372人，其中男生是女生的27分之35。甲校女生是男生的$\frac{4}{5}$，乙校女生是男生的$\frac{7}{10}$。求兩校學生的數目。

王有道提出這個題，請求馬先生指示他畫圖的方法。馬先生躊躇一下，這樣說：

「要用一個簡單的圖，表出這題中的關係和結果，這是很困難的。因爲這個題，本可分成兩段看：前一段，是男女生總人數的關係；後一段只說各校中男女生人數的關係。旣不好用一個圖表示，就爽性不用圖吧！——現在，我們無妨化大事爲小事再化小事爲無事。第一步，先了結題目的前一段。兩校的女生共是多少人？」

這當然是很容易的：

$$372人\div\left(1+\frac{35}{27}\right)=372人\div\frac{62}{27}=162人。$$

「男生共是多少？」馬先生見我們得出女生的人數以後。

不用說，這更容易了：

$$372人-162人=210人。$$

「好！現在題目已化得簡單一點了。我們來做第二步。爲了想起來便當一些，我們說甲校學生的數目是甲，乙校學生的數目是乙。——再把題目更改一下。甲校女生是男生的$\frac{4}{5}$，那麼，女生和男生各占全校的幾分之幾？」

「把全校的學生看成1，裏面有1倍男生和1倍女生，——等於$\frac{4}{5}$倍男生，——所以男生所占的分數是：

$$1\div\left(1+\frac{4}{5}\right)=1\div\frac{9}{5}=\frac{5}{9}。$$

女生所占的分數是：

$$1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}。$$

王有道回答完以後，馬先生說：

「其實用不到這樣地小題大做。題目上說，女生是男生的$\frac{4}{5}$；那末甲校若有5個男生，應當有幾個女生？」

「4個。」周學敏。

「好，一共是幾個學生？」

「9個。」周學敏又回答。

「這不是男生占$\frac{5}{9}$，女生占$\frac{4}{9}$了嗎？——乙校的呢？」

「男生17分之10，女生占17分之7。」我不等周學敏說，就回答。

「這麼一來，」馬先生說，「我們可以把題目改成這樣了：

——甲的$\frac{5}{9}$同乙的$\frac{10}{17}$，共是210（1）；甲的$\frac{4}{9}$和乙的$\frac{7}{17}$，共是162（2）；甲乙各是多少？」

到這一步，題目自然比較簡單了，但是算法，我還是想不淸楚。

「再單就（1）來想想看。」馬先生說。「化大事爲小事，$\frac{5}{9}$的分子5，$\frac{10}{17}$的分子10，同着210，都可用什麽數除盡？」

「5！」兩三個人高聲回答。

「就拿這個5去把牠們都除一下，結果怎樣？」

「變成甲的$\frac{1}{9}$，同乙的$\frac{2}{17}$，共是42。」王有道。

「你們又把4去將牠們都乘一下看。」

「變成甲的$\frac{4}{9}$，同乙的$\frac{8}{17}$，共是168。」周學敏。

「把這結果和上面的（2）比較一下，你們應當可以得出計算的方法來了。今天費去的時間很久，你們自己去把結果算出來吧！」馬先生帶着疲倦走出課堂。

對於(1)爲什麼先要用5去除，又爲什麼再用4去乘，我原不很明白。後來，把這最後的結果和(2)比較一看，這纔恍然大悟。原來兩個當中的甲都是$\frac{4}{9}$了。先用5除，是找含有甲的$\frac{1}{9}$的數，再用4乘，便是使這結果所含的甲和(2)所含的相同。相同！相同！甲的是相同了，但乙的還不相同。

轉個念頭，我就想到：

168當中，含有$\frac{4}{9}$個甲，$\frac{8}{17}$個乙；

162當中，含有$\frac{4}{9}$個甲，$\frac{7}{17}$個乙。

若把牠們一個對一個地來相減，那就得：

$$168-162=6。$$

$\frac{4}{9}$個甲減去$\frac{4}{9}$個甲，結果沒有甲了。

$\frac{8}{17}$個乙減去$\frac{7}{17}$個乙，還剩$\frac{1}{17}$個乙。——牠正和人數相當。所以：

$$6人\div\frac{1}{17}=102人……乙校的學生數。$$

$$372人-102人=270人……甲校的學生數。$$

這結果是否可靠，我有點不敢判斷。我只好檢查一下：

$270人\times\frac{5}{9}=150人$……甲校的男生，　$270人\times\frac{4}{9}=120人$……甲校的女生；

$102人\times\frac{10}{17}=60人$……乙校的男生，　$102人\times\frac{7}{17}=42人$……乙校的女生。

$150人+60人=210人$……兩校的男生，　$120人+42人=162人$……兩校的女生。

最後的結果，和前面第一步所得出來的完全一樣，我用不到懷疑了！

## 二四　顯出原形

今天所講的是前面所說的第三類，單純關於分數自身變化的問題，大都是在某一些條件底下，找出原分數來，所以，我就給牠這末一個標題——顯出原形。

「先從前面舉出來過的例說起。」馬先生說了這麼一句，就在黑板上寫出：

例一　有一分數，其分母加1，則可約爲$\frac{3}{4}$，其分母加2，則可約爲$\frac{2}{3}$，求原分數。

「有理無理，從畫線起。」馬先生這樣說，就叫各人把表$\frac{3}{4}$和$\frac{2}{3}$的線畫出來。我們只好遵命照辦，畫OA表$\frac{3}{4}$，OB表$\frac{2}{3}$。完了，再就無所措手足了。

「很簡單的事情，往往會向繁難的路上去想，弄得此路不通。」馬先生微笑着說。「OA表

$\frac{3}{4}$，不錯，但$\frac{3}{4}$是那兒來的呢？我替你們回答吧，原分數的分母加上1來的。假使原分母不加上1，畫出來當然不是OA了。現在，我們來畫一條橫裏和OA相距1的平行線CD。CD若是表分數的，那末，牠和OA上所表的分子相同的分數，如$D_1$和$A_1$，（分子都是3）牠們倆的分母有怎樣的關係？」

「相差1。」我回答。

「這兩直線上所有的同分子分數，牠們倆的分母間的關係都一樣嗎？」

「都一樣！」周學敏。

「可見得我們要求的分數，總在CD線上。對於OB說又應當怎樣？」

「作ED和OB平行，橫裏相距2。」王有道。

「對的！原分數是什麼？」

「7分之6，就是D點所指示的。」大家都非常高興。

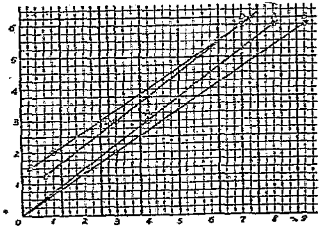


圖 110.

「和牠分子相同，OA線所表的分數是什麼？」

「$\frac{6}{8}$就是$\frac{3}{4}$。」周學敏。

「OB線所表示的同分子的分數呢？」

「$\frac{6}{9}$，就是$\frac{2}{3}$。」我說。

「這兩個分數的的分母比較原分數的分母怎樣？」

「一個多1，一個多2。」由此可以見得，所求出的結果，是不容懷疑的了。

這個題的計算法，周先生叫我們這樣想：

「分母加上1，分數變成了$\frac{3}{4}$，分母是分子的多少倍？」

我想，假如分母不須加1，分數就是$\frac{3}{4}$，那末，分母當然是分子的$\frac{4}{3}$倍。由此可知分母是比分子的$\frac{4}{3}$差1。對了，由第二個條件說，分母就比分子的$\frac{3}{2}$少2。

兩個條件湊合起來，便得分子的$\frac{4}{3}$和$\frac{3}{2}$相差的是2和1的差。所以：

$$\underset{DB}{2}-\underset{DA}{1})\div\left(\underset{O9}{\frac{3}{2}}-\underset{O8}{\frac{4}{3}}\right)=\underset{AB}{1}\div\underset{8-9}{\frac{1}{6}}=6\cdots\cdots\text{分子。}$$

$$6\times\frac{4}{3}-1=8-1=7\cdots\cdots\text{分母。}$$

例二 有一分數；分子加1，則可約成$\frac{2}{3}$；分母加1，則可約成$\frac{1}{2}$；求原分數。

這次，又用得着依樣畫葫蘆了。

先作OA和OB分別表示$\frac{2}{3}$和$\frac{1}{2}$。再在縱線OA的下面，和軸距1，作平線CD。又在OB的右邊，和軸距1，作平行線ED，同CD交於D。

D指出原分數是$\frac{5}{9}$——分子加1，成$\frac{6}{9}$，即$\frac{2}{3}$，分母加1成$\frac{5}{10}$，即$\frac{1}{2}$。

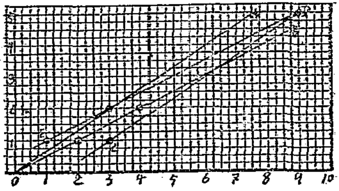


圖 111.

由第一個條件，知道分母比分子的$\frac{3}{2}$倍「多」$\frac{3}{2}$。

由第二個條件，知道分母比分子的2倍「少」1。

所以：$\left(\frac{3}{2}+1\right)\div\left(2-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}\div\frac{1}{2}=5$……分子。

$5\times\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}+\frac{3}{2}=\frac{18}{2}=9$……分母。

例三 某分數，分子減去1，或分母加上2，都可約成$\frac{1}{2}$；原分數是什麼？

這個題目，眞有些妙！就作法說：因為分子減去1和分母加上1，都可約成$\frac{1}{2}$，和前兩題比

較，表分數的兩條線ＯＡ同ＯＢ，當然併成了一條ＯＡ。又分子是「減去」１，作ＯＡ的平行線ＣＤ時，就得和前題的相反，須畫在ＯＡ的上面。然而這一來，卻有些使我迷糊了。依第二個條件所作的線，也就是ＣＤ。方法是沒有錯，但結果呢？

馬先生看我們作好圖以後，這樣問：「你們求出來的原分數是什麼？」

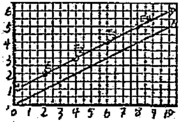


圖 112.

我真不知道怎樣回答，周學敏卻回答是 $\frac{3}{4}$。這個答數當然是對的，圖中的$E_2$，就指示 $\frac{3}{4}$；並且分子減去１，得 $\frac{2}{4}$，分母加上２，得 $\frac{3}{6}$，約分後都是 $\frac{1}{2}$。但$E_1$所指的 $\frac{2}{2}$，分子減去１得 $\frac{1}{2}$，分母加上２得 $\frac{2}{4}$，約分後一樣地是 $\frac{1}{2}$。還有$E_3$所指的 $\frac{4}{6}$，$E_4$所指的 $\frac{5}{8}$，都是合於題中的條件的。爲什麼這個題會有這許許多多的答數呢？

馬先生聽了周學敏的回答，他便問，還有別的答數沒有。我們你說一個，他說一個地，把 $\frac{2}{2}$、$\frac{4}{6}$ 和 $\frac{5}{8}$ 都說了出來。最奇怪的，是王有道回答一個２０分之１１。不錯，分子減去１得２０分之１０，分母加上２得２２分之１１，約分以後，都是 $\frac{1}{2}$。我的圖，畫得小了一點，在上面找不出來，不過王有道的圖，比我的也大不多，上面也沒有指示２０分之１１的這一點。他從什麼地方得出來的呢？

馬先生也似乎覺得奇怪，問王有道：

「這20分之11，你從什麼地方得出來的？」

「偶然想到的。」他這樣回答。在他也許是眞情，在我卻感到失望。馬先生！馬先生！只好靜候他來解釋這個謎了。

「這個題，你們已說了五個答數，」馬先生說，「其實你們要多少個都有，比如說，10分之6，12分之7，14分之8，16分之9，18分之10……都是的。你們以前沒有碰到這樣的事過，你們會覺得奇怪。是不是？但有這樣的事，當然就應當有這樣的理。這點，倒用得着『見怪不怪，其怪自敗』這句老話了。一切的怪事都不怪，所怪的只是我們還不曾知道牠。無論怎樣怪的事，我們把牠弄明白以後，牠就變得極平常了。現在，你們先不要『大驚小怪』的。試把你們和我說過的答數，依着分母的大小，順次排起來。」

遵照馬先生的話，我把這些分數排起來，得這樣一串：

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{10},\ \frac{7}{12},\ \frac{8}{14},\ \frac{9}{16},\ \frac{10}{18},\ \frac{11}{20}.$$

這一串分數。我馬上就看出來：

第一，分母是一串連續的偶數。

第二，分子是一串連續的整數。

照這樣推下去，當然22分之12，24分之13，26分之14……都對，眞是馬先生所說的，「要多少個都有。」我所看出來的情形，大家都一樣地看了出來。馬先生問明白大家以後，這樣說：

「現在你們可算得已看到『有這樣的事』了，我們應當進一步，來找所以『有這樣的事』的『理』。不過你們姑且把這問題『按下不表，』先講本題的計算法。」

跟着前兩個題下來，這是很容易的。

由第一個條件，分子減去1，可約成$\frac{1}{2}$，可見得分母等於分子的2倍少2。

由第二個條件，分母加上2，也可約成$\frac{1}{2}$，可見得分母加上2等於分子的2倍。

呵！到這一步，我纔恍然大悟，眞有如「撥雲霧見青天」的快樂！原來半斤和八兩，」沒有兩樣。這兩個條件，「分母等於分子的2倍少2」和「分母加上2，等於分子的2倍」只是一個，「分子等於分母的一半加上1。」前面所舉出的一串分數，都合於這個條件。也就為了這樣，所以那一串分數的分母都是「偶數，」而分子是一串連續整數。這樣一來，隨便用一個「偶數」做分母，都可以找出一個合題的分數來。例如用100做分母，牠的一半是50，加上1，是51。100分之51；分子減去1得100分之50；分母加上2，得102分之51；約分下來，牠

們都是2分之1。這是多末簡單明白的道理！

假如，我們用「整數的2倍」表示「偶數，」這個題的答數就是這樣一個形式的分數：

$$\frac{\text{某整數}+1}{2\times\text{某整數}}。$$

這個情形，由圖上怎樣解釋呢？我想起了！在交差原理中有這樣的話：

「兩線不止一個交點怎樣？」

「那就是這題不止一個解答。……」

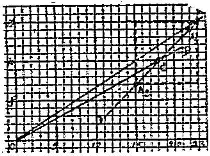


圖 113.

這里，兩線合成了一條，自然可說有無窮的交點，而解答也是無數的了。

真的！「把牠弄明白以後，牠就變得極平常了。」

例四　從23分之15的分母和分子減去同一個數，則可約成9分之5；求所減去的數。

因為題上說得有兩個分數，我們首先就把表示牠們的兩條直線OA和OB畫出來。A點所指的就是23分之15。題目上說的是從分母和分子減去同一個數得出9分之5；我就想到在

OA的上、下都要畫一條平行線，並且牠們距OA相等。——呵！我又走入迷魂陣了！減去的是什麼數還不知道，這平行線，怎樣畫法呢？這個困難，大家都感到，終於還是馬先生來解決。

「這回不能依葫蘆畫樣了。」馬先生說。「假如你們已經知道了減去的數，照鈔老文章，怎樣畫法？」

我把我所想到的說了出來。馬先生接着說：

「這條路走錯了，要越走越黑的。現在你來實驗一下。實驗和觀察，是研究一切科學的初步工作，許多發明都是從牠產生的。假如從分母和分子各減去1，得什麼？」

「22分之14。」我回答。

「各減去8呢？」

「15分之7。」我再答道。

「你把這兩個分數在圖上記出來，看牠們和指示23分之15的A點，有什麼關係。」

我點出$A_1$和$A_2$，一看，牠們都在經過小方格的對角線AD上。我就把牠們連起來，這條直線和OB交在C點。C所指的分數是18分之10，分母和分子比23分之15的都差5，而約分以後正是9分之5。原來所減去的數，當然是5。結果，是得出來了；但是，為什麼這樣一畫，就可得出來呢？

對於這一點，馬先生的說明是這樣：

「從原分數的分母和分子『減去』同一的數，所得的數用點表出來，如$A_1$和$A_2$；就分母說，當然要在經過A這條縱線的『右』邊；就分子說，便要在經過A這條橫線的『下』面。並且，因為減去的是『同一』的數，所以這些點到這縱線和橫線的距離相等。這兩條線可以看成是正方形的兩邊。正方形的對角線，無論那一點到兩邊的距離都一樣長。反過來，到正方形的兩邊距離一樣長的點，也都在這對角線上。所以我們只要畫AD這條對角線就行了。牠上面的點到經過A的縱線和橫線距離既相等，則這點所表的分數的分母和分子同着A點所表的分數的分母和分子，所差的當然相等了。」

現在轉到本題的算法。分母和分子所減去的數相同，換句話說，便是牠們的差是一定的。這一來，就和第八節中所講的年齡的關係相同了。我們可以設想為：

——兄年23歲，弟年15歲，若干年前兄年是弟年的$\frac{9}{5}$（因弟年是兄年的$\frac{5}{9}$？）

牠的算法便是：

$$15-(23-15)\div\left(\frac{9}{5}-1\right)=15-8\div\frac{4}{5}=15-10=5.$$

例五　有大小兩數，小數是大數的$\frac{2}{3}$，若兩數各加10，則小數為大數的$\frac{9}{11}$；求各數。

「我把這個容易的題目來結束分數四則問題，你們自己先畫個圖看。」馬先生說。

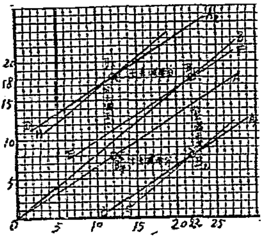



圖 114.

容易!」聽了這容易兩個字，反使我弄得莫名其妙了。

我先畫OA表$\frac{2}{3}$，又畫OB表$\frac{9}{11}$。——因爲我照題目所說的小數是大數的$\frac{2}{3}$，我就把小數看成分子，大數看成分母，這個分數可約成$\frac{2}{3}$。兩數各加上10，則小數爲大數的$\frac{9}{11}$；那就是說，原分數的分子和分母各加上10，則可約成$\frac{9}{11}$。——再在OA的左邊，相隔10作$CA_1$和牠平行，又在OA的上面，相隔10作$DA_2$和牠平行。我想着，$CA_1$表示分母加了10，$DA_2$表示分子加了10，牠們和OB一定有什麼關係。可以用這關係來決定所找的解答。哪里知道，三條直線各不相干!容易我卻失敗了!」

我硬着頭皮，去請教馬先生。他就說：

「這又是『六竅皆通』了。$CA_1$既表示分母加了10的分數，再把這分數的分子也加上10，不是應和OB所表的分數相同了嗎?」

自然，我聽了，還是有點摸不着頭腦。只知道，我的$DA_2$這條線，是不必畫的。另外，應當在$CA_1$的上邊相隔10作一條平行線。我將這條線EF作出來，就和OB有了一個交點$B_1$。牠指的分

數是22分之18。從牠的分子減去10，得$CA_1$上的$B_2$點，牠指的分數是22分之8。所以，不作$EF$，而作$GB_2$平行於$OB_1$，表示從$OB$所表的分數的分子減去10，也是一樣。$GB_2$和$CA_1$交於$B_2$。又從這分數的分母減去10，得$OA$上的$B_4$點，牠指的分數是12分之8。這個分數約下來正好是$\frac{2}{3}$。——小數8，大數12，就是所求的了。

其實，就圖看一下，$DA_2$這條線也未嘗不可用。$EF$也和牠平行，在$EF$的左邊相隔10。$DA_2$表示原分數的分子加上10的分數，$EB$就表示這個分數的分母也加上10的分數。自然，這也就是$B_1$點所指的分數22分之18了。由$B_1$的分母減去10得$DA_2$上的$B_3$，牠指的分數是12分之18。由$B_3$指的分數的分子減去10，還是得$B_1$。本來若不作$EF$，而在$OB$的右邊相距10，作$HB_3$和$OB$平行，交$DA_2$於$B_3$也可以的。這可眞算得左右逢源了。

計算法，倒是容易的：

「兩數各加上10，則小數爲大數的$\frac{9}{11}$，」換句話說，便是小數加上10等於大數的$\frac{9}{11}$加上10的$\frac{9}{11}$。而小數等於大數的$\frac{9}{11}$，加上10的$\frac{9}{11}$，減去10。但由第一個條件說，小數只是大數的$\frac{2}{3}$。可知，大數的$\frac{9}{11}$和牠的$\frac{2}{3}$的差，是10和10的$\frac{9}{11}$的差。所以：

$$\left(10-10\times\frac{9}{11}\right)\div\left(\frac{9}{11}-\frac{2}{3}\right)=\left(10-\frac{90}{11}\right)\div\left(\frac{9}{11}-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{20}{11}\div\frac{5}{33}=12\cdots\cdots\text{大數。}$$

$$12\times\frac{2}{3}=8\cdots\cdots\text{小數。}$$

## 二五 從比到比例

「這次我們又要掉換一個項目了。」馬先生進了課室就說。「我先問你們，什麼叫做比。」

「比就是比較。」周學敏。

「那末王有道比你高，李大成比你胖，我比你年紀大，這些都是比較，也就都是你所說的比了。」馬先生說。

「不是的，」王有道說，「比是說一個數或量是另一個數或量的多少倍或幾分之幾。」

「對的，這種說法是對的。不過照前面我們所說過的，若把倍數的意義放寬些，一個數的幾分之幾，和一個數的多少倍，實在沒有什麼根源上的差別。依照這種說法，我們當然可以說，一個數或量是另一個數或量的多少倍，這就稱為牠們的比。求倍數用的是除法，現在我們將除法、分數和比，這三項作一個比較，可得下表：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 除法 | 被除數 | 除數 | 商數 |
| 分數 | 分子 | 分母 | 分數的值 |
| 比 | 前項 | 後項 | 比值 |

這樣一來，比的許多性質和牠的計算法，都可以從除法和分數推出來了。

「比例是什麼？」馬先生講明了比的意義，略一停頓，看看大家都沒有什麼疑問，接着提出這個問題。

「四個數或量，若兩個兩個所成的比相等，就說這四個數或量成比例。」王有道。

「那末，成比例的四個數，用圖線表示，是什麼情形？」馬先生對於王有道的回答，大約是默許了。

「一條直線。」我想着，比和分數相同，兩個比相等，自然和兩個分數相等一樣，牠們應當在一條直線上。

「不錯！」馬先生說。「我們還可以說，一條直線的任意二點；到縱線和橫線的長總是成比例的。這雖然我們現在還沒有加以普遍的證明，由前面分數中的說明，無妨在事實上承認牠。」

接着他又說：

「四個數或量所成的比例，我們叫牠做簡比例。簡比例有幾種？」

「兩種：正比例和反比例。」周學敏回答。

「正比例和反比例有什麼不同？」馬先生問。

「四個數或量所成的兩個比相等的，叫牠們成正比例。一個比和另外一個比的倒數相等的，叫牠們成反比例。」周學敏再答。

「反比例，我們暫時放下，單看正比例，你們舉一個例出來看。」馬先生。

「如一個人，每小時走六里路，兩小時就走十二里，三小時就走十八里；時間和距離同時變大、變小，牠們就成正比例。」王有道說。

「對不對？」馬先生問。

「對！——」好幾個人回答。我也覺得是對的，不過因爲馬先生既然提出來問，我想着，一定有什麼不妥當了，所以沒有說話。

「對是對的，不過欠精密一點。」馬先生批評說。「譬如，一個數和牠的平方數，1和1，2和4，3和9，4和16……都是同時變大、變小，牠們成正比例麼？」

「不！」周學敏，「因爲1比1是1，2比4是$\frac{1}{2}$，3比9是$\frac{1}{3}$，4比16是$\frac{1}{4}$……全不相等。」

「可見得，四個數或量成正比例，不單是成比的兩個數或量同時變大、變小；還要所變大或

變小的倍數相同。這一點是一般人常常忽略了去的，所以他們常常會亂用『成正比例』這個辭。比如說，圓周和圓面積都是隨了圓的半徑一同變大、變小的；但圓周和圓半徑成正比例，而圓面積和圓半徑就不成正比例。」

關於正比例的計算，馬先生說，因爲都很簡單，不再舉例，他只把可以看出正比例的應用的計算法提出來。

第一，關於寒暑表的計算。

例一　攝氏寒暑表上的20度，是華氏寒暑表上的幾度。

「這題的要點是什麼？」馬先生問。

「兩種表上的度數成正比例。」周學敏。

「還有呢？」馬先生。

「攝氏表的冰點是零度，沸點是100度；華氏表的冰點是32度，沸點是212度。」一個同學回答。

「那末，牠們兩個的關係怎樣用圖線表示呢？」馬先生問。

這本來沒有什麼困難，我們想一下子，就都會畫了。縱線表華氏的度數，橫線表攝氏的度數。

因爲從冰點到沸點，牠們度數的比是：

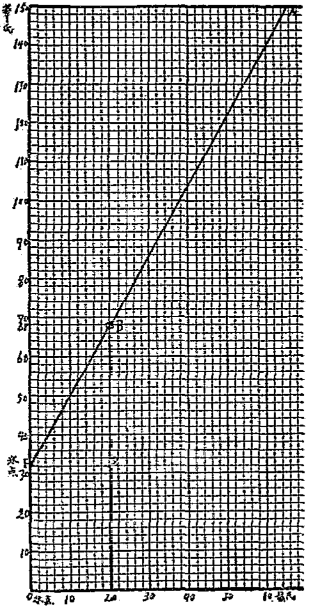



圖 115。

$(212-32):100=180:100=9:5$。

所以，從華氏的冰點F起，依照縱9橫5的比畫FA線，牠就表明牠們的關係。

從攝氏20度，往上看得B點，由B橫看得華氏的68度，這就是所求度數。

用比例計算，是：

$$\underbrace{(212-32)}_{OF}:100=\underbrace{x}_{FC}:\underbrace{20}_{FD_1(OD)}$$

$$\therefore\quad x=\frac{212-32}{100}\times 20=\frac{180}{5}=36,$$

$$\underbrace{36}_{FC}+\underbrace{32}_{OF}=\underbrace{68}_{OC}$$

照四則問題的算法，一般的式子是：

$$\text{華氏度數}=\text{攝氏度數}\times\frac{9}{5}+32°。$$

要由華氏度數變成攝氏度數，自然是相似的了：

$$\text{攝氏度數}=（\text{華氏度數}-32°）\times\frac{5}{9}。$$

第二，複名數的問題。

對於複名數，馬先生說，不同的制度互化，也只是正比例的問題。例如公尺、市尺和英尺的關係，若用圖116表示出來，那眞是一目了然的。——圖中的OA表公尺，OB表市尺，OC表英

尺。市尺3尺等於1公尺，而英尺3尺——1碼——比1公尺還差一些。

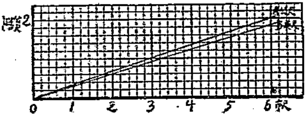


圖 116.

第三，百分法。

例一　通常的火藥20磅中，有硝石15磅，硫黃2磅，木炭3磅；這三種原料各占火藥的百分之幾？

馬先生叫我們先把這三種原料各占火藥的幾分之幾計算出來，並且畫圖表明。這自然是很容易的：

硝石：$\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$，　硫黃：$\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$，　木炭：$\frac{3}{20}$。

在圖117上，OA表示硝石和火藥的比，OB表示硫黃和火藥的比，OC表示木炭和火藥的比。

「將這三個分數的分母都化成一百，各分數怎樣？」我們將圖畫好以後，馬先生問。

這也是很容易的：

硝石：$\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$，　硫黃：$\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$，　木炭：$\frac{3}{20}=\frac{15}{100}$。

這三個分數，就是A、B、C三點所指示出來的。

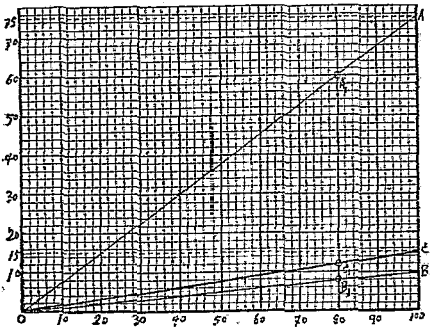



圖 117.

「百分數，就是分母固定是100的分數，所以關於百分數的計算，和分數的以及比的計算也沒有什麼不同。子數就是比的前項，母數就是比的後項，百分率不過是用100做分母時的比值。」馬先生把百分法和比這樣比較，自然百分法只是比例的應用了。

例二　硫黃80磅可造多少火藥？要攙多少硝石和木炭？

這是極容易的題目，只要由圖上一看就知道了。在OB上，$B_1$表示8磅硫黃，從牠往下看，相當於80磅火藥；往上看，$A_1$指示60磅硝石，$C_1$指示12磅木炭。各數變大十倍，便是80磅硫黃可造800磅火藥；要攙600磅硝石，120

磅木炭。

用比例計算，是這樣：

火藥：$2:80=20$磅$:x$磅，　$x$磅$=800$磅，

硝石：$2:80::15$磅$:x$磅，　$x$磅$=600$磅，

木炭：$2:80::3:x$磅，　$x$磅$=120$磅。

若用百分法，便是：

火藥：$80$磅$\div 10\%=80$磅$\div\frac{10}{100}=80$磅$\times\frac{100}{10}=800$磅。

這是求母數。

硝石：$800$磅$\times 75\%=800$磅$\times\frac{75}{100}=600$磅，

木炭：$800$磅$\times 15\%=800$磅$\times\frac{15}{100}=120$磅。

這都是求子數。

用比例和用百分法計算，實在沒有什麼兩樣；不過習慣了的時候，用百分法比較簡單一點罷了。

例三　定價4元的書，若抽4成賣，賣價多少？

這題的作圖法，我起先以爲很容易，但一動手，就感到了困難。OA線表示100分之40，道，我是會作的。但是，由牠只能看出賣價是1元加4角（$A_1$，）2元加8角（$A_2$，）3元加1元2角（$A_3$，）和4元加1元6角（$A_4$）固然，由此可以知道1元要賣1元4角，2元要賣2元8角，3元要賣4元2角，4元要賣5元6角。但這是算出來的，圖上卻找不出。

我照這些賣價，作成$C_1$、$C_2$、$C_3$和C各點，把牠們連起來，得直線OC。由OC上的$C_1$看，賣價是3元5角。往下看到OA上的$A_1$，加的是1元。再往下看，原價是2元5角。這些都是合題的。線，大約是作對了，不過對於作法，我總覺得不可靠。

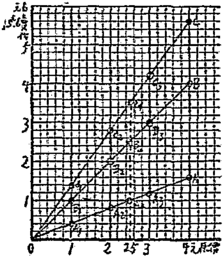


圖 118.

周學敏和兩個同學都和我犯同樣的毛病，王有道怎樣我不知道。他們把這問題去問馬先生。他的回答是：

「你們是想把原價加到所加的價上面去，弄得沒有辦法了。何妨反過來，先將原價表出，再把所加的價加上去呢。」

原價本來已很明白地，在橫線上表示得很明白，怎樣再來表示呢？原價！原價！我困了頭儘管想。忽

然我想到了，要另外表示的，是照原價賣的賣價。這便成爲1就是1，2就是2；我就作成了OB線。再把OA所表示的往上一加，就成了OC。OC仍舊是OC，這作法卻有了根了。

至於計算法，本題求的是母子和。由圖上看得很明白，$B_1$、$B_2$、$B_3$……指的是母數；$B_1C_1$、$B_2C_2$、$B_3C_3$……指的是相應的子數；$C_1$、$C_2$、$C_3$……指的便是相應的母子和。即：

母子和＝母數＋子數

＝母數＋母數×百分率

＝母數（1＋百分率）

一加百分率，就是$C_1$所表的。在本題，賣價是：

4元×(1＋0.40)＝4元×1.40＝5.6元。

例四　上海某公司貨物，照定價加二出賣。運到某地須加運費五成。某地商店照成本再加二成出賣。上海定價五十元的貨，某地的賣價多少？

本題只是前題中的條件多重複兩次，可以說不很難。但我動手作圖的時候，就碰了一次釘子。我先作OA表百分之二十的百分率，OB表母數1，OC表上海的賣價，這些和前題的完全相同，當然一點兒不費力。運費是照賣價加五成的，我作OD表百分之五十的百分率以後，卻迷住了，不知怎樣將這五成運費加到賣價OC上去。要是去請教馬先生，他一定要說我「六竅皆

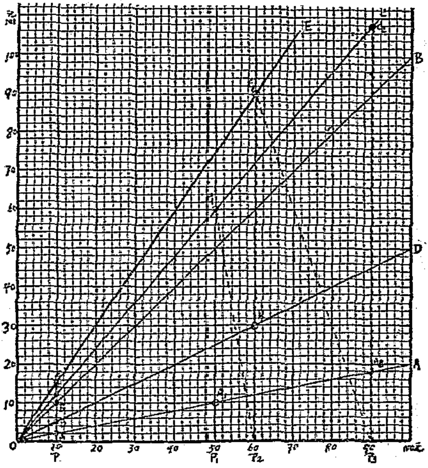



圖 119.

通」了。不只我一個人，大家都一樣，一面用鉛筆在紙上畫，一面低着頭想。

母數！母數！對於運費說，上海的貨價不是就成了母數麽？「天下無難事，只怕想不通」這一想通了，眞是再便當不過。將OD所表的百分率，加到OB所表的母數上去，得OE線，牠所表的便是成本。

把成本又作母

數，再加二成，仍然由OC線表示，這就成了某地的賣價。

是的！50元，$OP_1$，加二成，10元，$P_1A_1$，上海的賣價是60元，$P_1C_1$。

60元作母數，$OP_2$，加運費五成，（30元，$P_2D_1$，）成本是90元，$P_2E_1$。

90元作母數，$OP_3$加二成（18元，$P_3A_2$，）某地的賣價是108元，$P_3C_2$。

算法，不用說是很容易的。將牠和圖對照起來，眞是有趣味極了。

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underset{OP_1}{50元}\times\underbrace{(1+0.20)}_{\underbrace{PB\ PA}_{PO}}}_{P_1C_1(OP_2)}\times\underbrace{(1+0.50)}_{\underbrace{PB\ PD}_{PE}}}_{P_2E_1(OP_3)}\times\underbrace{(1\times0.20)}_{\underbrace{PB\ PA}_{PO}}}_{P_3C_2}=108元。$$

例五　某市用十年前的物價做標準，物價指數是150％；現在定價30元的物品，十年前的定價是多少？

「物價指數」這是一個新鮮名詞，馬先生解釋道：

「簡單地說，一個時期的物價對於某一定時期的物價的比，叫做物價指數。不過爲了方便，作爲標準的某一定時期的物價，總算是一百。所以，將物價指數和百分數對照：一定時期的物價，便

是母數，物價指數便是加百分率，現時的物價便是母子和。」

經過這樣一解釋，我們已懂得本題是知道了母子和，同着1加百分率，求母數。

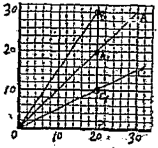



圖 120.

先作ＯＢ表1加百分率，150%。再作ＯＡ表1，即100%。從縱線30那一點，橫看到ＯＢ線得Ｂ點。由Ｂ往下看得20元，就是十年前的物價。

算法是這樣：

30元÷150%＝20元。

這是由例三的公式可推出來的：

母數＝母子和÷(1＋百分率)。

例六 前題，現在的物價比十年前的漲了多少?

這自然只是求子數的問題了。在圖中（圖120）ＯＡ線既表的是100%，就是十年前的物價。所以，$A_1$Ｂ表示的10元，就是所漲的價。因為：ＰＢ是母子和，Ｐ$A_1$是母數，ＰＢ減去Ｐ$A_1$就是子數。求子數的公式很明白地是：

子數＝母子和－母子和÷（1＋百分率）

例七　十年前定價20元的物品，現在定價30元，求所漲的百分率和物價指數。

這個題目，是從例五題變化出來的。作圖（圖120）的方法當然相同，不過順序變換一點。先作表現價的OB，次作表十年前定價的OA。從$A_1$向下截去$A_1B$的長得$C_1$。連$OC_1$，得直線OC，牠表的便是百分率：

$$PC_1 : OP = 10 : 20 = 50\%。$$

至於物價指數，就是100%加上50%，等於150%。

計算的公式是：

$$百分率 = \frac{新數 - 舊數}{舊數} \times 100\%。$$

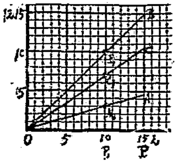


圖 121.

例八　定價十五元的貨物，作七折出賣，賣價多少？減去多少？

大約是這些例目比較簡單的緣故，我們沒有一個人感到什麼困難。一方面，不能不說是由於馬先生的詳加指導，使我們見着題目，已知道找尋牠的要點了。一連這幾題，差不多都是我們自己作的，很少倚賴馬先生。

本題和例三，只這裏是減，那裏是加，這一點不同。先作表百

分率（30%）的線OA。又作表原價1的線OB。由PB減去PA得PC，連結OC，牠所表示的就是賣價。CB和PA相等，都表減去的數量。

圖上表示得很明白，賣價是10元5角（PC，）減去的是4元5角（PA或CB。）在百分法中，這是求母子差的問題；由前面的說明，公式很容易得出：

$$\underset{PC}{\text{母子差}} = \underset{OP}{\text{母數}} \times (\underset{P_1B_1}{1} - \underset{P_1A_1(C_1B_1)}{\text{百分率}})$$

在本題，就是：

$$15\text{元} \times (1-30\%) = 15\text{元} \times 0.70 = 10.5\text{元}。$$

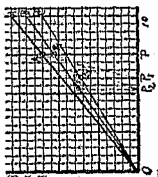


圖 122.

例九　八折後再六折和雙七折那一種折去的多？

圖中的OP表定價。OA表八折，OB表七折，OC表六折。OP八折成PA₁。將牠作母數，就是OP₁。OP₁六折，爲P₁C₁。OP七折爲PB₁。將牠作母數，就是OP₂。OP₂再七折爲P₂B₂。P₁C₁較P₂B₂短，所以八折後再六折比雙七折所折去的較多。

例十　王成之照定價扣去二成買進的腳踏車，一年後折舊五成賣出，得三十二元；原定價是多少？

這也不過是多繞一個彎的問題。

$OS_1$表第二次賣價32元。OA表折去五成。$OP_1$ 64元，就是王成之的買價。用牠作子數，卽$OS_2$，原主的賣價。

OB表折去二成。OP，80元，就是原定價。

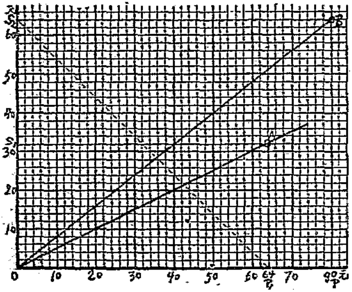


圖 123.

因為求母數的公式是：

母數＝母子數÷(1－百分率)。

所以算法是：

$$32元 \div (1-50\%) \div (1-20\%)$$
$$=32元 \div \frac{50}{100} \div \frac{80}{100}$$
$$=32元 \times 2 \times \frac{5}{4}=80元。$$

第四，單利息。

「一百元，一年付十元的利息，利息占本金的百分之幾？」馬先生寫完了標題問。

「百分之十。」我們一起回答。

「這百分之十，叫做年利率。所謂單利息，是利息不再生利的計算法。兩年的利息是多少？」馬先生。

「二十元。」一個同學。

「三年的呢？」

「三十元。」周學敏。

「十年的呢？」

「一百元。」仍是周學敏。

「付利息的次數，叫做期數。你們知道求單利息的公式麼？」

「利息等於本金乘以利率再乘以期數。」王有道。

「好！這就是單利息算法的基礎。牠和百分法有什麼不同？」

「多一個乘數——期數。」我回答。我也想到牠和百分法沒有什麼本質的差別；本金就是母數，利率就是百分率，利息就是子數。

「所以，對於單利息，我們用不到多講，只畫一個圖就算了。」馬先生。

圖也一點不難畫。因為無論從本金或期數說，利息對牠們都是定倍數（利率）的關係。

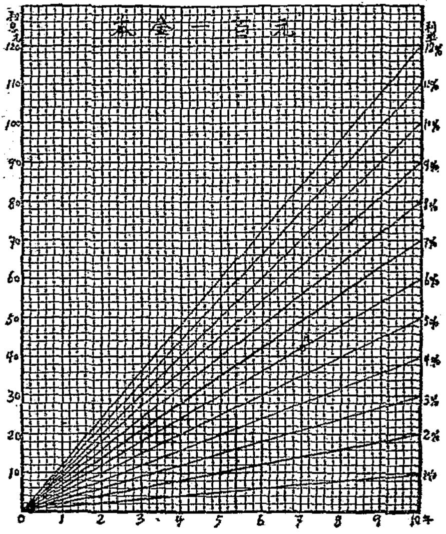

本金一百元
利息元
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10年
利率
12%
11%
10%
9%
8%
7%
6%
5%
4%
3%
2%
1%

圖 154.

圖中，橫線表示年數，從1到10。
縱線表利息，從0到120元。
本金都是100元。
表利率的線共十二條，依次是從年利1厘、2厘、3厘……到一分、一分一和一分二厘的。
這表的用法，馬先生說，並不只限於檢查本金100元十年間各年，照所標利率的利息。
本金不是100元的，可由牠推算出來。

例一　求本金350元，年利6%，7年間的利息。

本金100元，年利6%，7年間的利息是42元，(A)。本金350元的利息便是：

$$42元\times\frac{350}{100}=147元。$$

年數不只十年的，也可由牠推算出來。並且把年數看成期數，則各種單利都可由牠推算。

例二　求本金400元，月利2%，三年的利息。

本金100元，利率2%，十期的利息是20元，六期的利息是12元，三十期的是60元；
所以三年共三十六期的利息是72元。
本金400元的利息是：

$$72元 \times \frac{400}{100} = 288元。$$

利率是圖上沒有的，仍然可由牠推算。

例三　本金360元，半年一期，利率14%，四年的利息怎樣?

利率14%可看成12%加2%。半年一期，四年共八期。本金100元，利率12%，八期的利息是96元，利率2%的是16元。所以利率14%的利息是112元。

本金360元的利息是：

$$112元 \times \frac{360}{100} = 403.20元。$$

這些例都是很簡明的，眞是「運用之妙，存乎其人」了!

## 二六　這要算不可能了

「從來沒有碰過釘子，今天卻要大碰而特碰了。」馬先生這一課這樣開始。「在前次講正比例時，我們曾經說過這樣的例；一個數和牠的平方數，1和1，2和4，3和9，4和16……都是同時變大、變小；但牠們不成正比例。你們試把牠畫出來看看。」

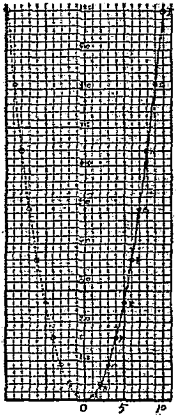



圖 125.

眞是碰釘子！我把橫線表數，縱線表平方數；先得A、B、C、D四點，依次表1和1，2和4，3和9，4和16，牠們不在一條直線上。這還有什麼辦法呢？我爽性把表5和25，6和36，7和49，8和64，9和81同着10和100的點E、F、G、H、I、J，都畫了出來。眞糟！簡直看不出牠們是在一條什麼線上！

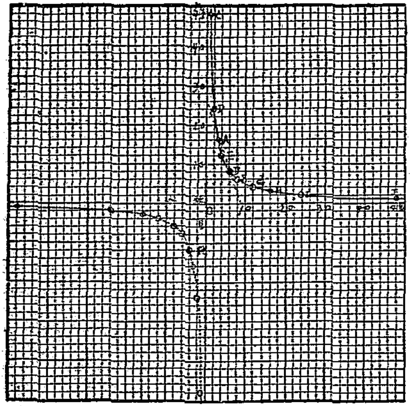
問題本來很簡單，只是這些點好像是在一條彎曲的線上。是不是成正比例的數量，用點表示，這些點就在一條直線上；不成正比例的數量，用點表示，這些點就不在一條直線上呢？

馬先生對於這個問題，他說，這種說法，是對的。他又說，本題的曲線，叫做拋物線。本來左邊還有和牠成線對稱的一半，但在算術上用不到牠。

「現在，我們談到反比例的問題了。且來舉一個例看。」馬先生。

這個例是周學敏提出的：

三個人十六天做完的工程，六個人幾天做完？



不用說，單憑心算，我也曉得只要八天了？

圖 126.

馬先生叫我們畫圖。我用縱線表日數，橫線表人數，得A和B兩點。把牠們連成一條直線。奇怪！這條直線和橫線交在9，明明是表示9個人作這工程，就不要時候了！這成什麼話?!那怕是很小的工程，由十萬人去做，也不能不費去一點時間的呀！又碰釘子了！我正在這樣想，馬先生似乎已經覺到我們正在受窘，向我這樣警告：

「小心呀！多畫出幾個點來看。」

我就老老實實地，先算出下面的表，再把各個點都記出來：

| 點 | 日數 | 人數 |
|---|---|---|
| C | 48 | 1 |
| D | 24 | 2 |
| A | 16 | 3 |
| E | 12 | 4 |
| B | 8 | 6 |
| F | 6 | 8 |
| G | 4 | 12 |
| H | 3 | 16 |
| I | 2 | 24 |
| J | 1 | 48 |

還有什麼可說呢？C、D、E、F、G、H、I、J這八個點，就沒有一個點在直線AB上。——牠們又成一條拋物線了；我想。

但是，馬先生說，這和拋物線不一樣，牠叫雙曲線。他還說，假如我們用來畫圖的紙，成功一個方方正正的田字形。縱線是田字中間的一豎，橫線是田字中間的一橫，這條曲線只在田字的左上一個方塊裏，在田字右下的一個方塊裏，還有和牠成點對稱的一條。原來拋物線只有一條，雙曲線卻有兩條，田字右下方塊裏一條，也是算術裏用不到的。

雖然碰了兩次釘子，也多知道了兩種線，倒也合算啊！

「無論是拋物線或雙曲線，都不是單靠一根尺和一雙兩腳規，所能夠畫出來的；關於這一類的問題，現在要用畫圖法來解決，我們只好宣告無能力了！」馬先生說。

停了兩分鐘，馬先生又提出下面的一個題，叫我們畫：

2的平方是4，立方是8，四方是16，……用線表示出來。

今天大約馬先生是有心來捉弄我們，這個題的線，我已預定牠不是直線了。我畫了A、B、C、D、E、F六點，依次表示2的一方2，平方4，立方8，四方16，五方32，六方64。果然牠們不在一條直線上。但連結牠們所成的曲線，既不像拋物線，更不像雙曲線，不知道又是一種什麼寶貝了！

我們原來都只畫OY這條線，右邊的一段，左邊拖的一節尾巴，是馬先生加上去的。馬先生說，這條尾巴可以儘管拖長去，越長越和橫線相近，但無論怎樣，永不會和牠相交。在算術中，這條尾巴也是用不到的。

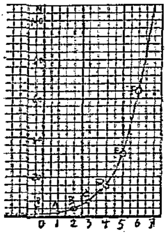


圖 127.

這種曲線叫指數曲線。

「要表示複利息，就用得到這種指數曲線。」馬先生說。「所以，要用老方法來處理複利息的問題，也只有碰釘子的。」馬先生還畫了一張表示複利息的圖給我們看。牠表出本金100元，一年一期，10年中，年利率2厘、3厘、4厘、5厘、6厘、7厘、8厘、9厘和1分的各種利息。

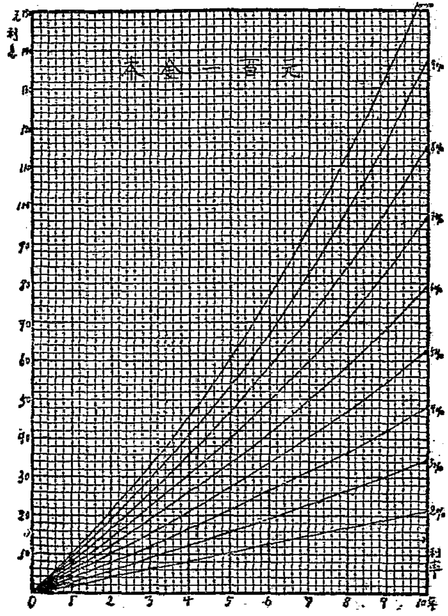

本金一百元
元
利息
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10年
9%
8%
7%
6%
5%
4%
3%
2%
1%
利率

圖 128.

## 二七 大半不可能的複比例

對於這個項目，馬先生說，有大半是不能用作圖法解決的。這當然毫無疑問；反比例的題，既已不免碰釘子，複比例中，含有反比例的，自然此路不通了。再說，這也是很明白的，就是不含有反比例，但複比例總含有三個以上的量，倘若不能像第十二節中歸一法的例化繁爲簡，那也就無所措手足了。

不過複比例中的題目，有時，我們不大想得通，所以我們要求馬先生就不用作圖法解也好，給我們一些指示。馬先生答應了我們，叫我們提出問題來。以下的問題，全是我們提出的。

例一 同一事，24人合作，每日作10時，15日可完；60人合作，每日少作2時，幾日可完？

一個同學提出這個題來的時候，馬先生想了一下說：

「我知道，你感到困難的原因了。這個題目，轉了一個小彎。你試將題目所給的條件，同類的一一對列起來看。」

他依馬先生的話，列成下表：

| 人數 | 每日作的時數 | 日數 |
| --- | --- | --- |
| 24 | 10 | 15 |
| 60 | 少2 | ? |

「由這個表看來，有多少數還不知道？」馬先生問。

「兩個，第二次每日作的時數和日數。」他答道。

「問題的關鍵就在這一點，」馬先生：「一般的比例題，都是只含有一個不知道的數的。但你們要注意，比例所處理的，都是和兩個數量的比有關的事項，複比例，不過有關的比，多幾個。所以題目中若含有和比無關的條件，這就超出了範圍，應當先將牠處理好。卽如本題，第二次每日作的時數，題上說的是少2時，就和比沒有相干。第一次每日作10時，第二次每日少作2時，作的是幾時？」

「10時少2時，8時。」周學敏。

這樣一來，當然毫無問題了。

$$\left.\begin{array}{l}反\ 60人:24人\\ 反\ 8時:10時\end{array}\right\}=15日:\#日$$

$$\therefore\ x\text{日}=\frac{15\text{日}\times24\times10}{60\times8}=7\frac{1}{2}\text{日}。$$

例二　一書原有810頁，每頁40行，每行60字；若重印時，每頁增10行，每行增12字，頁數可減多少？

這個問題，表面上雖是複雜一點，但和前例，實在是相類的。莫怪馬先生聽着另一個同學說完以後，露出一點輕微的不愉快了。馬先生叫他，先找出第二次每頁的行數，——40加10，是50，——和每行的字數，——60加12，是72——再求第二次的頁數。

$$\left.\begin{array}{l}\text{反}\ 50\text{行}:40\text{行}\\ \text{反}\ 72\text{字}:60\text{字}\end{array}\right\}=810\text{頁}:x\text{頁}$$

$$\therefore\ x\text{頁}=\frac{810\text{頁}\times40\times60}{50\times72}=540\text{頁}。$$

要求可減少的頁數，這當然不是比例的問題，810頁改成540頁，可減少的是270頁。

例三　自A處到B處，尋常6時可到，今將路程減四分之一，速率加半，需時若干方可達到？

這個題，我從前不知怎樣下手，現在跟着前兩個例來，我已懂得了。所以我雖然沒有向馬先

生提出，也附記在這裏。

原來的路程，就算牠是1，後來減四分之一，當然是$\frac{3}{4}$。

原來的速率也算牠是1，後來加半，便是1又2分之1。

$$\because \left.\begin{array}{l}\text{正}\quad 1 : \frac{3}{4}\\ \text{反}\quad 1\frac{1}{2} : 1\end{array}\right\} = 6\text{時} : x\text{時}$$

$$\therefore x\text{時} = 3\text{時。}$$

例四　狗走2步的時間，兔可走3步；狗走3步的長，兔須走5步。狗30分鐘所走的路，兔須走多少時間？

「這題的難點，」馬先生說，「只在包含時間，——步子的快慢——和空間，——步子和路的長短。——但只要注意判定正反比例就行了。第一，狗走2步的『時間，』兔可走3步，哪一個快？」

「兔快。」一個同學說。

「那麼，狗走30分鐘的步數，讓兔來走所要的時間怎樣？」

「少些！」周學敏。

「這是正比還是反比？」

「反比！步數一定，走的快慢和時間成反比例。」王有道。

「再來看，狗走3步的長兔要走5步；狗走30分鐘的步數，一共的長，兔走起來時間怎樣？」

「要多些？」我回答。

「還是正比還是反比？」

「反比！距離一定，步子的長短和步數成反例，也就同時間成反例。」還是王有道。

這樣就可得：

$$\left.\begin{array}{l}\text{反}\quad 3:2\\ \text{反}\quad 3:5\end{array}\right\}=30\text{分}:x\text{分};$$

$$x\text{分}=\frac{30\text{分}\times 2\times 5}{3\times 3}=33\frac{1}{3}\text{分}。$$

例五 牛馬力的比如8比7，速度的比如5比8；前用牛車8輛，馬車20輛，於5日內運米280袋到1里半的地方。今用牛馬車各10輛，於10日內要運米350袋求能運的距

鬆。

這題是周學敏提出的，馬先生問他道：

「你覺到的難點在什麼地方？」

「有牛又有馬，有從前運輸的情形，又有現在運輸的情形，關係比較複雜了。」周學敏回答。

「這又太執着了，你為什麼不分開來看呢？」馬先生不等有什麼回答，接着又說：「你們要記好兩個基本定則：一個是不相同的量不能相加減，還有一個是不相同的量，不能相比。本題就運輸的力量說有牛車又有馬車，牠們既不能併成一個力量，也就不能相比了。」停了一陣，他又說：

「所以這個題，我們應當把牠分成兩段看：『牛馬力的比如8比7，速度的比如5比8；前用牛車8輛，馬車20輛；今用牛馬車各10輛。』這算一段。又從『前用牛車8輛』到末了這又算一段。現在先了結第一段，變成都用牛車或馬車，我們就都用牛車吧。馬車20輛和10輛各合多少輛牛車？」

這比較地簡單，力量的大小同着速度的快慢對於所用的車輛都是成反比例的。

$$\left.\begin{matrix}8:7\\5:8\end{matrix}\right\}=20\text{輛}:x\text{輛},$$

$$\therefore\quad 20\text{輛馬車的運輸力}=\frac{20\times 7\times 8}{8\times 5}=28\text{輛牛車的運輸力；}$$

$$10\text{輛馬車的運輸力}=14\text{輛牛車的運輸力。}$$

我們得出這個答數後，馬先生說：「現在題目的後一段可以改個樣——前用牛車8輛和24輛，……；今用牛車10輛又14輛，……。」當然到這一步，又是呆法子了。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{正} & (8+28)\text{輛}:(10+14)\text{輛}\\ \text{正} & 5\text{日}:10\text{日}\\ \text{反} & 350\text{袋}:280\text{袋}\end{array}\right\}=1\frac{1}{2}\text{里}:x\text{里，}$$

$$\therefore\quad x\text{里}=\frac{1\frac{1}{2}\text{里}\times(10+14)\times 10\times 280}{(8+28)\times 5\times 350}=\frac{\frac{3}{2}\text{里}\times 24\times 10\times 280}{36\times 5\times 350}$$

$$=\frac{3\text{里}\times 12\times 10\times 280}{36\times 5\times 350}=1\frac{3}{5}\text{里。}$$

例六　大工4人，童工6人，工作5日，工資共51元2角。後來有童工2人休息，用大工一

人相代，工作6日，工資共多少？——大工一人2日的工資和童工一人5日的工資相等。

這個題的情形和前題的相同，是馬先生出給我們算的，大約是要我們重複一次前題的算法吧！

先就工資，將童工化成大工，這只是一個正比例：

$$5日:2日=6人:x人,\qquad x人=\frac{12}{5}人。$$

這就是說6個童工，1日的工資和5分之12個大工1日的工資相等。後來少去2個童工只剩4個童工，他們的工資和5分之8個大工的相等。由此得：

$$\left.\begin{array}{ll}正 & \left(4+\frac{12}{5}\right)^{大工}:\left(4+\frac{8}{5}+1\right)^{大工} \\ 正 & \qquad\qquad 5:6\end{array}\right\}=51.2元:x元;$$

$$\therefore\quad x=\frac{51.2元\times\left(4+\frac{8}{5}+1\right)\times 6}{\left(4+\frac{12}{5}\right)\times 5}=\frac{51.2元\times\frac{33}{5}\times 6}{\frac{32}{5}\times 5}$$

$$=\frac{51.2元\times 33\times 6}{32\times 5}=63.36元。$$

複比例一課，就這樣完結，我已知道好幾件應注意的事項。

## 二八　物物交換

例一　酒4升可換茶3斤；茶5斤可換米12升；米9升可換酒多少？

馬先生寫好了題，問道：

「這樣的題在算術中，屬於那一部分？」

「連比例。」王有道回答。

「連比例，是怎樣的一回事，你能簡單地說明嗎？」

「許多簡比例，連合起來的。」王有道。

「這也是一種說法，就照這種說法，你把這個題來做個樣兒看。」

下面就是王有道做的：

(1) 簡比例的算法：

$$12\text{升米} : 9\text{升米} = 5\text{斤茶} : x\text{斤茶},\quad x\text{斤茶} = \frac{5\text{斤茶} \times 9}{12} = \frac{15\text{斤茶}}{4},$$

$$3\text{斤茶} : \frac{15\text{斤茶}}{4} = 4\text{升酒} : x\text{升酒}.$$

(2) 連比例的算法：

4升酒——3斤米
5斤米——12升米
9升米——$x$升酒

$$x\text{升酒}=\frac{4\text{升酒}\times\frac{15}{4}}{3}=5\text{升酒。}$$

$$x\text{升酒}=\frac{4\text{升酒}\times5\times9}{3\times12}=5\text{升酒。}$$

這兩種算法，其實只有繁簡和順序不同，根本毫無分別。王有道為了說明牠們的相同，還把(1)中的第四式這樣寫：

$$x\text{升酒}=\frac{4\text{升酒}\frac{5\times9}{12}\left(\text{即}\frac{15}{4}\right)}{3}=\frac{4\text{升酒}\times5\times9}{3\times12}=5\text{升酒，}$$

牠和(2)中的第二式完全一樣。

馬先生對於王有道的做法很滿意，但他說：「連比例我們也可以說是兩個以上的量，相連續而成的比例，不過這和算法沒有什麼關係。」

「連比例的題，能用圖法來解不能呢？」我想着，因為牠是些簡比例合成的，大約可以；但一方面又想到，牠所含的量在三個以上，恐怕未必行。因而不能斷定。我爽爽快快地向馬先生請教。

「可以！」馬先生斬金切鐵地回答。「而且並不困難。你就用這個例題來畫畫看吧。」

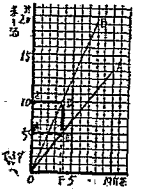


圖 129.

可先依照酒4升茶3斤這個比，用縱線表酒，橫線表茶，畫出OA線。再……我就畫不下去了。米用哪條線表呢？其實，每個人都沒有下手處。馬先生看看這個，又看看那個：

「怎麼又着難了！買醋的錢，買不得醬油嗎？你們個個人都可以成牛頓了，大貓走大洞，小貓一定要走小洞，是嗎？——縱線上，現在你們的單位是升，一只升子量了酒就不能量米麼？」

這明明是在告訴我們，又用縱線表示米，依照茶5斤可換米12升的比，我畫出了OB線。

我們畫完以後，馬先生巡視了一周，他才說：

「問題的要點倒在後面，我們怎樣找出答數來呢？——說破了，也不難。9升米可換多少茶？」

我們從縱線上的C（表9升米）橫看到OB上的D（茶米的比），往下看到OA上的E，（茶酒的比）再往下看到F。（茶4分之15斤。）

「茶的斤數，就題目說，是沒用處的，」馬先生說。「你們由茶和酒的關係，再看『過』去。」

「過」字說得特別響。我就由E橫看到G，牠指着5升，這就是所求酒的升數了。

例二　酒3升的價等於茶2斤的價；茶3斤的價等於糖4斤的價；糖5斤的價，等於米9

升的價：酒1斗可換米多少？

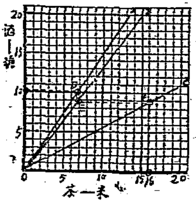



圖 130.

「舉一反三」馬先生寫了題說，「這個題，不過比前一題多一個彎，你們自己做吧！」

我先取縱線表酒，橫線表茶，依酒3茶2的比，畫OA線。次又取縱線表糖，依茶3糖4的比，畫OB線。再取橫線表米，依糖5米9的比，畫OC線。

末了，從縱線10，——1斗酒——橫着看到OA上的D，酒就換了茶。由D往下看到OB上的E，茶就換了糖。由E橫看到OC上的F，糖依然一樣多，但由F往下看到橫線上的16，糖已換了米。——酒1斗換米1斗6升。

照連比例的算法：

3升酒——2斤茶
3斤茶——4斤糖
5斤糖——9升米
x升米——10升酒

$$x\text{升米}=\frac{9\text{升米}\times10\times4\times2}{5\times3\times3}=16\text{升米。}$$

結果當然完全相同。

例三　甲乙丙三人賽跑；100步內，乙負甲20步；180步內；乙勝丙15步；150步內，丙負甲若干步？

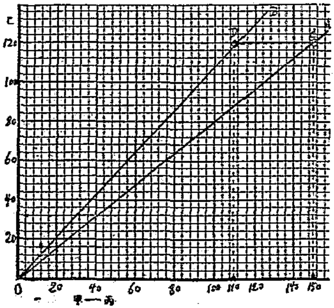



圖 131.

本題，也合有不是比例的條件，所以應當先將軸改變一下。「100步內，乙負甲20步；」就是甲跑100步時，乙只跑80步。「180步內，乙勝丙15步；」就是乙跑180步時，丙只跑165步。照這兩個比，取橫線表甲和丙所跑的步數，縱線表乙所跑的步數，我畫出OA和OB兩條線來。

由橫線上150，——甲跑的步數——往上看到OA線上的C；——軸指明，甲跑150步時，乙跑120步。——再由C橫看到OB線上的D；由D往下

看，橫線上110，就是丙所跑的步數。從110到150相差40，便是丙負甲的步數。

計算是這樣：

$$\begin{array}{l} 100\text{甲}\text{——}(100-20)\text{乙} \\ 180\text{乙}\text{——}(180-15)\text{丙} \\ \text{丙}\text{——}150\text{甲} \end{array}$$

$$\therefore \text{丙} = \frac{(100-20)\times(180-15)\times150}{100\times180} = \frac{80\times165\times150}{100\times180} = 110,$$

$$150\text{步} - 110\text{步} = 40\text{步}。$$

例四　甲、乙、丙三人速度的比，甲和乙是3比4，乙和丙是5比6。丙20小時所走的距離，甲須走多少時間？

「這個題目，當然很容易，但須注意走一定距離所需的時間，和速度是成反比例的。」馬先生警告我們。

因了這一個警告，我們便知道，甲和乙速度的比是3比4，則牠們走相同的距離，所須的時間的比是4比3；同樣地，乙和丙走相同的距離，所須的時間的比是6比5。至於作圖的方法和前一題的相同。最後由橫線上的20，就用牠表時間，直上到OB線的C，由C橫過去到OA上的D，由D直下到橫線上32。牠告訴我們，甲須走32小時。

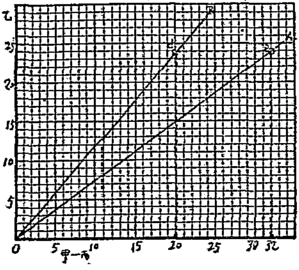



圖 132.

計算的方法是：

$$
\begin{array}{lcl}
4\text{甲} & \text{——} & 3\text{乙}, \\
6\text{乙} & \text{——} & 5\text{丙}, \\
20\text{丙} & \text{——} & x\text{甲}
\end{array}
$$

$$\therefore\ x=\frac{20\text{甲}\times6\times4}{3\times5}=32\text{甲}。$$

## 二九　按比分配

例一　大小兩數的和爲二十，小數除大數得四，大小兩數各若干?

「先生!這個題已經講過了!」周學敏還不等馬先生將題寫完就喊起來了。不錯，第四節的例二，便是這個題。難道馬先生忘了嗎?不!我想他一定有別的用意，故意這末來一下的。

「已經講過的？——很好！你就照已經講過的做出來看看。」馬先生呼周學敏做在黑板上。

「好！做得不錯！」周學敏做完，回到坐位上的時候，馬先生說，「現在，你們看一下，OD這條線是表示什麼的？」

「表示倍數一定的關係，大數是小數的4倍。」周學敏今天不知爲什麼特別高興，比平日還喜歡說話。

「我說，牠表示比一定的關係，對不對？」馬先生問。

「自然對大數是小數的4倍，也可說是大數和小數的比是4比1；或小數和大數的比是1比4。」王有道搶着回答。

「好！那末，這樣一個題：……」馬先生說着在黑板上寫：

——依照4和1的比將20分成大小兩個數，各是多少？

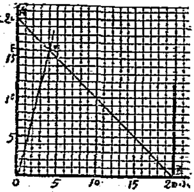



圖 133.

「這個題，在算術中，屬於那一部分？」

「配分比例。」周學敏又很快地回答。

「牠和前一個題，在本質上是不是一樣的？」

「一樣的！」我說。

這一來，我們當然明白了，配分比例問題的作圖法，和四則問題中的這種題的作圖法，根本是一樣的。

例二　4尺長的線，依照3和5的比，分成兩段，各長若干？

我相信，這個題，現在，我們當中，無論什麼人都會做了。AB表和一定，4尺的關係；OC表比一定，3比5的關係。FD等於OE，等於1尺半；ED等於OF，等於2尺半。牠們的和是4尺，比正好是：

$1\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}=\frac{3}{2}:\frac{5}{2}=3:5$。

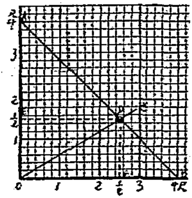



圖 134.

算術上的計算法，比起作圖法來，實在要緊些：

$(3+5):3=4尺:x_1尺$，　$x_1尺=\frac{4尺\times3}{3+5}=\frac{12尺}{8}=1\frac{1}{2}尺$；

$(3+5):5=4尺:x_2尺$，　$x_2尺=\frac{4尺\times5}{8}=\frac{5尺}{2}=2\frac{1}{2}尺$。

「這種題的算法，還有別的麼？」馬先生在大家做完以後，忽然提出這個問題。

沒有人回答。

「你們還記得用幾何畫法中的等分線段的方法，來作除法嗎？」馬先生這一說，我們自然想起第二節所說的了。他接着又說：

「比是可以看成分數的，這我們早就講過。分數可看成若干小單位集合成的，不是也講過的嗎？把這三項已講過的合起來，我們就可得出本題的另一種作法了。」

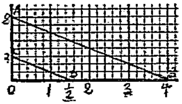



圖 135.

「你們無妨把橫線表示被分的數量4尺，然後將牠等分成3加5段。」馬先生這樣吩咐。

但我們照第二節所說的方法，過O任意畫一條線，馬先生卻說：「這眞是食而不化，依樣畫葫蘆未免小題大做。」他指示我們，就把縱線當要畫的線，更是省事。

眞的，我先在縱線上取OC等於3，再取CA等於5。連結AB，過C作CD和牠平行；這實在簡捷得多。OD正好等於1尺半，DB正好等於2尺半；結果不但和圖134的相同，而且同着算式比照起來更要明白些。卽如：

(3 + 5) : 3 = 4尺 : $1\frac{1}{2}$尺。

(OC CA) OC OB OD

例三　分96成三份：第一份4倍於第二份；第二份3倍於第三份；各是多少？

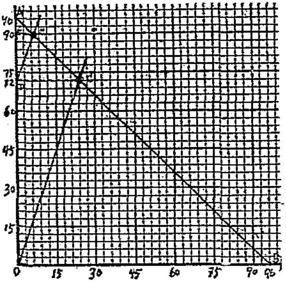



圖136.

不過比前一題複雜一點，照前題的方法做麽當是不難的。但作圖136時，我卻感到了困難。表和一定的線AB當然毫無疑義可以作，但表比一定的線呢？我們所作過的，都是表單比的；現在是連比呀！連比！連比！本題，第一、二、三各份的連比，由4比1和3比1，得12比3比1，這怎樣用線表示呢？

馬先生見着我們，無從下手，納悶，他突然笑了起來，問道：

「你們讀過三國演義麽？牠的頭一句是什麽？」

「話說，天下大勢，分久必合，合久必分；……，」一個我們呼爲小說家的同學說。

「運用之妙，存乎其人，現在就用得到一分一合了。先把第二、三兩份合起來，第一份同牠的比是什麽？」

「12比4等於3比1。」周學敏。

依照這個比，我畫OC線，得出第一份OD是72。以後呢？又沒辦法了。

「剛才是分而合，現在就當由合而分了。DA所表的是什麼？」馬先生問。

自然是第二、三份的和。為什麼一下子就迷惑了呢？為什麼不會想到把ADC當獨立的看，作3比1來分AC呢？照這個比，作DE線，得出第二份DF和第三份FA，各是18和6。72是18的4倍，18是6的3倍，豈不是正合題嗎？

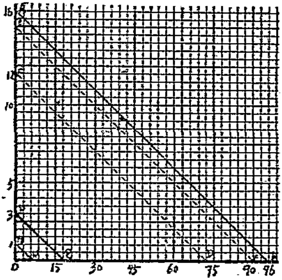



圖137.

本題的算法，很簡單，我不寫了。但用第二種方法作圖，更簡明些，所以我把牠作了出來。不過我先作的圖和135的形式是一樣的：OD表第一份，DF表第二份，FB表第三份。後來王有道同我討論了一番，依1和3對12的比，作MN和PQ同CD平行，用ON和OQ分別表第三份和第二份，牠們的數目，更是一眼看去就明瞭的了。

例四 甲、乙、丙三人合買一地，各人應有地的比是1又2分之1，和2又2分之1和4的比。後來甲買進丙所有的3分之1，而賣1畝給乙，甲和丙所有的地就相等了。各人原有地多少？

這個題的樣子比較轉得多些，但馬先生說，對付繁雜的題目，最緊要的，是化整爲零，把牠分成幾步去做。馬先生叫王有道做這一個分析的工作。

王有道說：

「第一步，把三個人原有地的連比，化得簡單些，就是：

$$1\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}:4=\frac{3}{2}:\frac{5}{2}:4=3:5:8。$$

接着牠說：

「第二步，要求出地的總數，這就替牠們清一清賬。對於總數說，因爲

$$3+5+8=16,$$

所以甲占$\frac{3}{16}$，乙占$\frac{5}{16}$，丙占$\frac{8}{16}$。

丙賣去他的3分之1，就是賣去總數的

$$\frac{8}{16}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{48},$$

他剩的是自己的3分之2，等於總數的

$$\frac{8}{16}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{48}。$$

甲原有總數的$\frac{3}{16}$，再買進丙出賣的總數的$\frac{8}{48}$，就是總數的

$$\frac{3}{16}+\frac{8}{48}=\frac{9}{48}+\frac{8}{48}=\frac{17}{48}。$$

甲賣去1畝便和丙的相等，這就等於說，甲若不賣這一畝的時候，比丙多1畝。好，這一來，我們就知道，總數的$\frac{17}{48}$比牠的$\frac{16}{48}$多1畝。所以總數是：

$$1畝\div\left(\frac{17}{48}-\frac{16}{48}\right)=1畝\div\frac{1}{48}=48畝。」$$

這以後，就是王有道不說，我也知道了：

$$16:\begin{matrix}3\\5\\8\end{matrix}=48畝:\begin{matrix}x_1畝\\x_2畝\\x_3畝\end{matrix}。$$

$$x_1畝=\frac{48畝\times3}{16}=9畝，\cdots\cdots甲的。$$

$$x_2\text{畝}=\frac{48\text{畝}\times 5}{16}=15\text{畝},\cdots\cdots\text{乙的。}$$

$$x_3\text{畝}=\frac{48\text{畝}\times 8}{16}=24\text{畝},\cdots\cdots\text{丙的。}$$

結果雖然已經算了出來，馬先生還叫我們用作圖法來做一次。

我對於作圖，決定用前面王有道同我討論所得的形式。

橫線表地畝。

縱線：OA表甲的，1又2分之1。OB表乙的，2又2分之1。OC表丙的，4。在OA上加OC的3分之1（4小段）得$OA_1$。從$A_1O$減去OC的3分之2（8小段）得$OA_2$；這就是後來甲賣給乙的。

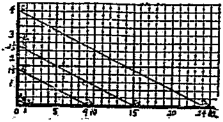


圖 138.

連$A_2D_1$（$OD_1$表1畝，）作$AD_2$，$BD_3$同着$CD_4$和$A_2D_1$平行。

$OD_2$指9畝，$OD_3$指15畝，$OD_4$指24畝；牠們的連比，正是：

$$9:15:24=3:5:8=1\frac{1}{2}:2\frac{1}{2}:4。$$

這樣看起來，作圖法，還要簡捷些了。

例五 甲工6日，乙工7日，丙工8日，丁工9日，其工價相等，今甲工3日，乙工5日，丙工7

2日，丁工7日，共得工資24元6角4分；各應得多少。

自然，這個題，只要先找出四個人各應得工資的連比就容易了。

我想，這是說得過去的，假定他們相等的工價都是1，則他們各人一天所得的工價，便是$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{9}$。而他們應得的工價的比是：

$$甲:乙:丙:丁=\frac{3}{6}:\frac{5}{7}:\frac{12}{8}:\frac{7}{9}=63:90:189:98。$$

但　　$$63+90+189+98=440,$$

而　　$$24.64元\times\frac{1}{440}=0.056元,$$

$$0.056元\times63=3.528元\cdots\cdots甲的,$$

$$0.056元\times90=5.04元\cdots\cdots乙的,$$

$$0.056元\times189=10.584元\cdots\cdots丙的,$$

$$0.056元\times98=5.488元\cdots\cdots丁的。$$

本題若用作圖法解，理論上當然毫無困難；但事實上要表示出小數三位來，是很難能而不可貴的啊！

# 三十 結束的一課

暑假已快完結，馬先生的講述，這已是第三十次。全部算術中的重要題目，可以說，十分之九都提到了；還有許多要點，是一般的教科書上不曾講到的。這個暑假，我算過得最有意義了。

今天，馬先生來結束全部的講授。他提出混合比例的問題。照一般算術教科的說法，把混合比例的問題分成四類，馬先生也就照這種順序講。

第一，求平均價。

例一　上等酒二斤，每斤三角五分；中等酒三斤，每斤三角；下等酒五斤，每斤二角。三種相混，每斤值多少？

這又是已經講過的——第十三節——老題目；但周學敏這次卻不開腔了；大約他和我一樣，正期待着馬先生的花樣翻新吧。

「這個題目，在第十三節已講過，你們還記得麼？」馬先生問。

「記得的！」好幾個人回答。

「現在，我們已有了比例的概念，和牠的表示法，無妨改變一個花樣。」果然馬先生要掉換

一種方法了。「你們用縱線表價錢，橫線表斤數，先畫出正好表示上等酒二斤一共的價錢的線段。」

當然，這是非常容易的，我們畫了OA線段。

「再從A起畫表示中等酒三斤一共的價錢的線段。」

我們又作AB。

「又從B起畫表示下等酒五斤一共的價錢的線段。」

這就是BC。

「連結OC，」我們照辦了。馬先生問：「由OC看來，三種酒一共值多少錢？」

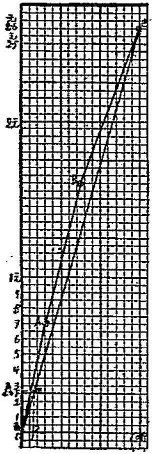


圖 159.

「二元六角。」我說。

「一共幾斤？」

「十斤。」周學敏。

「怎樣找出一斤的價錢呢？」

「由指示一斤的D點」王有道說，「畫縱線和OC交於E；由E橫過去得F；牠指出2角6分來。」

「對的」這種作法，並不見得比第十三節所用的簡單，不過對於以後的題目說，卻比較合用。」馬先生這樣作一個小小的結束。

第二，求混合比。

例二　上茶每斤價1元2角下茶每斤價8角。現在要混成每斤價9角5分的茶，應依照怎樣的比配合？

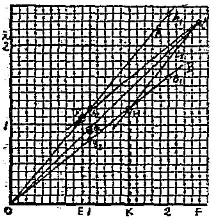


圖 140.

依了前面馬先生所給的暗示，我先作好表每斤1元2角、每斤8角和每斤9角5分的三條線OA、OB和OC。再將牠和圖139比較一下，我就想到將OB搬到OC的上面去，便是由C作CD平行於OB；牠和OA交於D。由D往下到橫線上得E。

上茶：下茶＝OE：EF＝9：15＝3：5。

上茶3斤值3元6角，下茶5斤值4元；一共8斤值7元6角，每斤正好值9角5分。

自然，將OA搬到OC的下面，也是一樣的。即過C作CH平行於OA，軸和OB交於H。由H往下到橫線上，得K。

$$下茶：上茶=OK：KF=15：9=5：3。$$

結果完全一樣，不過順序不同罷了。

其實這個比由$A_1$、$C_1$、$B_1$和$A_2$、$C_2$、$B_2$的關係就可看出來的：

$$A_1C_1 : C_1B_1 = 5 : 3;$$

$$A_2C_2 : C_2B_2 = 2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} = \frac{5}{2} : \frac{3}{2} = 5 : 3。$$

把這種情形，和算術上的計算法比較，更是有趣。

| | 原價 | | 損益 | 混合比 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 平均價 0.95元(OC) | 上 | 1.20元(OA) | $-0.25$元 ($A_2C_2$) | 15(EF) | 5($A_1C_1$ 或 $A_2C_2$) |
| | 下 | 0.80元(OB) | $+0.15$元 ($B_2C_2$) | 9(OE) | 3($C_1B_1$ 或 $C_2B_2$) |

例三　有四種酒，每斤的價：A，5角；B，7角；C，1元2角；D，1元4角；怎樣混合法可成每斤

價9角的酒?

作圖是容易的，依每斤的價錢，畫OA、OB、OC、OD和OE五條線。再過E作OA的平行線，和OC、OD交於F、G。又過E作OB的平行線，和OC、OD交於H、I。由F、G、H、I各點相應地，便可得出A和C、A和D、B和C同着B和D的混合比來。配合這些比，就可得所求的數。因爲配合的方法不同，形式也就各別了。

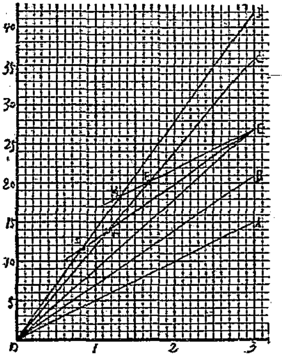



圖 141

馬先生說，本題由F、G、H、I各點去找A和C、A和D、B和C、同着B和D的比，反不如就AE、BE、CE、DE看，來得簡明。依照這個看法：

AE=12,　BE=6,

OE=9,　DE=15。

因爲只用到牠們的比，所以可變成：

AE=4,　BE=2,

CE＝3　DE＝5。

再注意把牠們的損益相消，就可以配合成了。

配合的方式，本題可有七種。馬先生叫我們共同考察，將算術上的算法，和圖對起來看；這實在是又切實又有趣的工作。本來，我們單是照呆法子計算的時候，方法雖懂得，結果雖不差，但心裏面總是模糊的。現在，經過這一番的探討，纔算一點不含糊地明瞭了。

配合的方式，可歸結成三種，就依照這樣，分別寫在下面：

（一）損益各取一個相配的；在圖上，就是OE線的上（損）和下（益）各取一個相配。

（1）A和D、B和C配。

| | 原價 | 損益 | 混合比 |
|---|---|---|---|
| 平均價 9角(OE) | A 5角(OA) | ＋4角(AE 下) | 5(DE) |
| | B 7角(OB) | ＋2角(BE 下) | 3(CE) |
| | C 12角(OC) | －3角(CE 上) | 2(BE) |
| | D 14角(OD) | －5角(DE 上) | 4(AE) |

(2)A和C、B和D配。

| 平均價 9角(OE) | 原價 | 損益 | 混合比 |
|---|---|---|---|
| | A 5角(OA) | +4角(AE 下) | 3(CE) |
| | B 7角(OB) | +2角(BE 下) | 5(DE) |
| | C 12角(OC) | −3角(CE 上) | 4(AE) |
| | D 14角(OD) | −5角(DE 上) | 2(BE) |

(二)取損或益中的一個和益或損中的兩個分別相配;其他一個損或益和一個益或損相配:

(3)D和A、B各相配,C和A配。

| 平均價 9 角 | 原價 | 損益 | 混 | 合 | | 比 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | A 5角 | +4角 | 5(DE) | | 3(CE) | 8 |
| | B 7角 | +2角 | | 5(DE) | | 5 |
| | C 12角 | −3角 | | | 4(AE) | 4 |
| | D 14角 | −5角 | 4(AE) | 2(BE) | | 6 |

（4）D和A、B各相配，C和B相配。

| | 原價 | 損益 | 混 | 合 | | 比 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 平均價9角 | A 5角 | +4角 | 5(DE) | | | 5 |
| | B 7角 | +2角 | | 5(DE) | 3(CE) | 8 |
| | C 12角 | −3角 | | | 2(BE) | 2 |
| | D 14角 | −5角 | 4(AE) | 2(BE) | | 6 |

（5）C和A、B各相配，D和A相配。

| | 原價 | 損益 | 混 | 合 | | 比 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 平均價9角 | A 5角 | +4角 | 3(CE) | | 5(DE) | 8 |
| | B 7角 | +2角 | | 3(CE) | | 3 |
| | C 12角 | −3角 | 4(AE) | 2(BE) | | 6 |
| | D 14角 | −5角 | | | 4(AE) | 4 |

（6）C和A、B相配，D和B相配。

| | 原價 | 損益 | 混 | 合 | | 比 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 平均價9角 | A　5角 | +4角 | 3(CE) | | | 3 |
| | B　7角 | +2角 | | 3(CE) | 5(DE) | 8 |
| | C　12角 | −3角 | 4(AE) | 2(BE) | | 6 |
| | D　14角 | −5角 | | | 2(BE) | 2 |

(三)取損或益中的每一個，都和益或損中的兩個相配：

(7)D和C各都同A和B相配。

| | 原價 | 損益 | 混 | | 合 | | 比 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 平均價9角 | A　5角 | +4角 | 5(DE) | | 3(CE) | | 8 | 4 |
| | B　7角 | +2角 | | 5(DE) | | 3(CE) | 8 | 4 |
| | C　12角 | −3角 | | | 4(AE) | 2(BE) | 6 | 3 |
| | D　14角 | −5角 | 4(AE) | 2(BE) | | | 6 | 3 |

第三，求混合量，——知道了全量。

例四　雞兎同一籠，共十九個頭，五十二隻腳；各有幾隻？

這原是馬先生說過，——第十節——在混合比例中還要講的。到了現在，平心而論，我已理會得牠的算法了：先求混合比，再依按比分配的方法，把總數分開就行的。

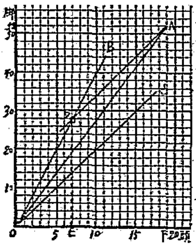



圖 142

且先畫圖吧。用縱線表腳數，橫線表頭數，A就指出十九個頭同五十二隻腳。

連OA表平均的腳數，作OA和OC表兎和雞的數目。又過A作AD平行於OC，和OB交於D。

由D往下看到橫線上，得E。OE指示7，是兎的隻數，EF指出12，是雞的隻數。

計算的方法，雖然很簡單，卻不如作圖法的簡明：

| 平均腳數 | 每隻腳數 | 相差 | 混合比 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{52}{19}$(OA) | 雞 2(OC) | 少 $\frac{14}{19}$ (下) | $\frac{24}{19}$ | 24 | 12 |
| | 兎 4(OB) | 多 $\frac{24}{19}$ (上) | $\frac{14}{19}$ | 14 | 7 |

在這里，因爲混合比的兩項12同7的和正是19；所以用不到再計算一次按比分配了。

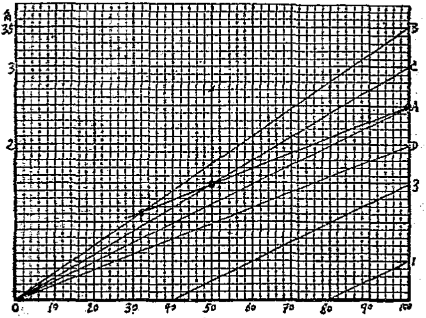



圖 143.

例五　上、中、下三種酒，每斤的價是3角5分、3角和2角；要混合成每斤2角5分的酒100斤；每種須多少？

作OA、OB、OC和OD分別表示每斤價2角5分、3角5分、3角和2角的酒。這個圖正好表出：上種酒損1角，BA；中種酒損5分，CA；而下種酒益5分，DA。因而混合比是：

上　中　下　　上　中　下　　上　中　下

5：10 } 即 1：2 } 即 1：1：3。

5：5 } 即 1：1

依這個比，在右邊縱線上取1和3，過1和3作線平行於OA，交橫線於80和40。從80到100是20，從40到100是60。即上酒20斤，中酒20斤，下

酒60斤。

算法和前面的一樣，不過末了須按1和1和3的比分配100斤罷了。所以，本不想把式子寫出來。

但是，馬先生卻問：「這個結果自然是對的了，還有別的分配法沒有呢？」

爲了回答這個問題，只得將式子寫出來。

| 原價 | | 損益 | 結合 | | | 比 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 平均價2.5角(OA) | 上 3.5角(OB) | －1.0角(BA上) | 5(OA) | | 5 | 1 |
| | 中 3.0角(OC) | －0.5角(CA上) | | 5(CA) | 5 | 1 |
| | 下 2.0角(OD) | ＋0.5角(DA下) | 10(BA) | 5(CA) | 15 | 3 |

混合比仍是1比1比3，把100斤分配下來，自然仍是20斤、20斤和60斤了；還有什麼疑問呢？

「不但是不！」馬先生說：「比是活動的，在這里，上比下和中比下，各爲5比10和5比5，也就是1比2和1比1。從根柢上講，只要按照這兩個比，分別取出各種酒相混合，損益都正好相抵消而合於平均價。所以：

| 混合比 | | (1) | | (2) | | | (3) | | | (4) | | | (5) | | | (6) | | | (7) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 上 | 5 | | 1 | | 1 | 1 | | 1 | 2 | | 2 | 3 | | 3 | 6 | | 6 | 7 | | 7 |
| | 中 | | 5 | | 1 | 1 | | 11 | 11 | | 7 | 7 | | 8 | 8 | | 1 | 1 | | 2 | 2 |
| | 下 | 10 | 5 | 2 | 1 | 3 | 2 | 11 | 13 | 4 | 7 | 11 | 6 | 8 | 14 | 12 | 1 | 13 | 14 | 2 | 16 |

(1)和(2)是已用過的，(3)、(4)、(5)和(6)都可得出答數來。」

是的，由(3)，2、7、1 1 的和是2 0；所以：

上 $100斤\times\frac{2}{20}=10斤$，中 $700斤\times\frac{7}{20}=35斤$，下 $100斤\times\frac{11}{20}=55斤$。

由(4)，3、8、1 4 的和是2 5；所以：

上 $100斤\times\frac{3}{25}=12斤$，中 $100斤\times\frac{8}{25}=32斤$，下 $100斤\times\frac{14}{25}=56斤$。

由(5)，6、1、1 3 的和是2 0；所以：

上 $100斤\times\frac{6}{20}=30斤$，中 $100斤\times\frac{1}{20}=5斤$，下 $100斤\times\frac{13}{20}=65斤$。

由(6)，7、2、1 6的和是2 5；所以：

上100斤×$\frac{7}{25}$=28斤，中100斤×$\frac{2}{25}$=8斤，下100斤×$\frac{16}{25}$=64斤。

「除了這幾種，還有沒有呢？」我正在懷着這個疑問，馬先生卻問了出來。但是沒有什麼人回答。後來他說，還有，但還有更根本的問題，先要解決。

又是什麼問題呢？

馬先生問：「你們就這幾個例看，能得出什麼結果呢？」

「各個連比三次的和，是5（2）、2 0〔(3)和(5)〕、2 5〔(1)、(4)和(6)〕，都是1 0 0的約數。」王有道。

「這就是根本問題，」馬先生，「因為我們要的是整數的答數，所以這些數就得除得盡1 0 0。」

「那末，能夠配來合用的比，只有這這樣多了麼？」周學敏問。

「那也不只，不過配成各項的和是5或2 0或2 5的，只有這樣多了。」馬先生回答。

「怎樣知道的呢？」周學敏追問。

「那是一步一步地推算的結果。」馬先生說。「現在你仔細看前面的六個連比。把(2)做

基本，因爲牠是最簡單的一個。在（2）中，我們又用上和下的比，1比2做基本，我們將牠的形式改變；再把中和下的比，1比1也跟着改變，來湊成，三項的和是5，或20或25。例如，用2去乘這樣的兩項，得2比4，牠們的和是6，20減去6剩14，折半是7，就用7乘第二個比的兩項。這樣就是（4）。」

「用2乘第一個比的兩項，得2比4，牠們的和，是6。第二個比的兩項，也用2去乘，得2比2，牠們的和是4。連比變成2比2比6，三項的和是10，也能除盡100。爲什麼不用這一個連比呢？」王有道問。

「不是不用，是可以不用，因爲2比2比6和（1）的5比5比15同着（2）的1比1比3是相同的。由此可以看出來，乘第一個比的兩項所用的數，必須和乘第二比的兩項所用的數不同，結果纔不同。」

馬先生回答王有道後又說：「你們爽性再進一步探究。第一個比，1比2，兩項的和是3，是一個奇數。第二個比，1比1，兩項的和是2，是一個偶數。所以，第一個比的兩項，無論用什麼數（整數）去乘，牠們的和總是3的倍數。並且，乘數是奇數，這個和也是奇數；乘數是偶數，牠也是偶數。再說奇數加偶數是奇數，偶數加偶數仍然是偶數。

跟着這幾個法則，我們來檢查上面的（3）、（5）、（6）、（7）四種混合比看。（3）的第一個比

的兩項沒有變，就算是用1去乘的，結果兩項的和是奇數，所以連比三項的和也只能是奇數，牠就只能是25。（5就是(2)）(5)的第一個比的兩項，是用3去乘的，結果兩項的和是奇數，所以連比三項的和也只能是奇數，牠就只能是25。在這里，要注意，若用4去乘第一個比的兩項，結果牠們的和是12，只能也用4去乘第二個比的兩項，使牠成4比4，而連比成爲4比4比12，這和(1)同(2)一樣。若用5去乘第一個比的兩項，不用說，得出來的就是(1)了。所以(6)的第一個比的兩項是用6去乘的，結果牠們的和是18，偶數；所以連比三項的和只能是20。20減去18剩2，正是第二個比兩項的和。用7去乘第一個比的兩項，結果，牠們的和是21，奇數，所以連比三項的和，只能是25。25減去21剩4，折半得2，所以第二個比，應該變成2比2。這就是(7)。

假如用8以上的數去乘第一個比的兩項，結果牠們的和已在24以上，連比三項的和當然超過25。——這就說明了配成連比三項的和是5或20或25的，只有(2)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)六種。」

「那末，這個題，也就只有這六種答數了，」一個同學問。

「不！我已回答過周學敏。周學敏！連比三項的和，合用的，還有什麼？」馬先生問。

「50和100。」周學敏。

「對的！那末，還有幾種方法可配合呢？」馬先生。

「……」

「沒有人回答得上來麼？這不是很便當的嗎？」馬先生。「其實也是很呆板的。第一個比幾化後，兩項的和總是『3』的倍數；這是第一點。(7)的第一個比兩項的和已是21，這是第二點。50和100都是偶數，所以變化下來的結果，第一個比兩項的和須是『3』的倍數，而又是偶數，這是第三點。由這三點去想吧！先從50起。」

「由第一二點想，21以上50以下的數，有幾個數是『3』的倍數？」馬先生問。

「50減去21剩29；3除29可得9，一共有9個。」周學敏。

「再由第三點，看只能用偶數，9個數中有幾個可用？」

「21以後，第一個3的倍數是偶數，50前面第一個3的倍數，也是偶數；所以有5個可用。」王有道說。

「不錯，24、30、36、42和48，正好5個。」我一個一個地想了出來。

「那末，連比三項的和，配成這五個數，都合用嗎？」馬先生問。

大約這中間又有什麼問題了。我就把五個連比都做了出來。結果，眞是有問題。

第一：用10乘第一個比的兩項，得10比20，牠們的和是30。50減去30剩20，折

半得10。連比便成了10比10比30等於1比1比3；同(2)是一樣的。

第二：用14乘第一個比的兩項，得14比28，牠們的和是42。50減去42剩8折半得4。連比便成了14比4比32；等於7比2比16同(7)一樣。

我將這個結果告訴了馬先生，他便說：

「可見得，只有三種方法可配合了。連同上面的六種，——(1)和(2)只是一種——一共不過九種。此外，就沒有了。」

我覺得，這很倒有意思。把九種比寫出來一看；除前面的(2)牠是作基本的以外，都是用一個數去乘(2)的第一個比的兩項得出來的。這些乘數依次是1、2、3、6、7、8、12和16。用5、10或14做乘數的結果，都合這九種中的一種重複，用9、11、13或15去乘是不合用的。

我正在玩味這些情況，突然周學敏大聲地說：

「馬先生，不對！」

「怎麼？你發現了什麼？」馬先生很詫異地。

「前面的(4)和(6)第一個比兩項的和都是偶數，不是也可以將連比配成三項的和都是50嗎？」周學敏很得意地。

「好！你試試看。」馬先生。「這個漏洞，你算捉到了。」我覺得很奇怪，爲什麼馬先生早沒有

注意到呢?!

「(4)的第一個比，兩項的和是6，50減去6剩44，折半是22，所以第二個比可變成22比22，連比是2比22比26。」周學敏。

「你把2去約下來看。」馬先生。

「是1比11比13。」周學敏。

「這不是合(3)一樣了嗎?」馬先生說。周學敏卻窘了。接着，馬先生又說:「本來，這也應當探究的，再把那一個試試看。」我知道，這是他在安慰周學敏了。其實周學敏的這點精神，我覺得也可佩服。

「(6)的第一個比，兩項的和，是18，50減去18剩32，折半得16。所以連比是6比16，比28——還是可用2去約。約下來是3比8比14，正合(5)一樣。」周學敏連牠的不合用，也說了出來。

「好!我們總算把這個問題，盤弄個很夠了。」周學敏的疑問雖是對的，可惜他沒抓住頂緊要的地方。他只看到前面的七種，不曾想到七種以外。這一點我本來就要提醒你們的。假如用4去乘(2)的第一個比的兩項，得的是4比8。牠們的和便是12。50減去12剩38，折半是19。第二比是19比19。連比便是4比19比27。合前面的九種一共有十種配合法。這種探

究，不過等於一種遊戲。假如沒有總數100的限制，本來混合的方法是無窮的。」

對於這樣的探究，我覺得很有趣，就把各種結果抄在後面。

(1)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 1 | | 1 | 20斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 1 | 1 | 20斤 | 合 |
| 比 | 下 | 2 | 1 | 3 | 60斤 | 量 |

(2)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 1 | | 1 | 4斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 11 | 11 | 44斤 | 合 |
| 比 | 下 | 2 | 11 | 13 | 52斤 | 量 |

(3)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 2 | | 2 | 10斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 7 | 7 | 35斤 | 合 |
| 比 | 下 | 4 | 7 | 11 | 55斤 | 量 |

(4)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 4 | | 4 | 8斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 19 | 19 | 38斤 | 合 |
| 比 | 下 | 8 | 19 | 27 | 54斤 | 量 |

(5)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 3 | | 3 | 12斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 8 | 8 | 32斤 | 合 |
| 比 | 下 | 6 | 8 | 14 | 56斤 | 量 |

(6)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 6 | | 6 | 30斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 1 | 1 | 5斤 | 合 |
| 比 | 下 | 12 | 1 | 13 | 65斤 | 量 |

(7)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 7 | | 7 | 28斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 2 | 2 | 8斤 | 合 |
| 比 | 下 | 14 | 2 | 16 | 64斤 | 比 |

(8)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 8 | | 8 | 16斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 13 | 13 | 26斤 | 合 |
| 比 | 下 | 16 | 13 | 29 | 58斤 | 比 |

(9)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 12 | | 12 | 24斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 7 | 7 | 14斤 | 合 |
| 比 | 下 | 24 | 7 | 31 | 62斤 | 比 |

(10)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 16 | | 16 | 32斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 1 | 1 | 2斤 | 合 |
| 比 | 下 | 32 | 1 | 33 | 66斤 | 比 |

「但是，連比三項的和是100的呢？」一個同學問馬先生。

他說：「這也應得探究一番，一不做二不休，乾脆來過盡興吧。從哪里下手呢？」

「就和剛纔一樣，先找100以內的3的倍數，而且又是偶數的。3除100可得33，就是一共有三十三個3的倍數。第一個3和末一個99都是奇數，所以，106以內只有16個3的倍數是偶數。」周學敏回答得清楚極了。

「那末，混合的方法，是不是就有十六個呢？」馬先生又提出了問題。

「只好一個一個地做出來看了。」我說。

「那倒不必這末老實。例如第一個比兩項的和是3的倍數又是偶數，還是4的倍數的，大半就不必要。」馬先生提出的這個條件，我還不明白是什麼理由。我便追問：

「爲什麼？」

「王有道，你試解釋解釋看。」馬先生叫王有道，

「因爲第一，100本是4的倍數。第二，第二個比總是由100減去第一個比的兩項的和，折半得出來的；所以至少第二比的兩項都是2的倍數。第三，這樣合成的連比，三項都是2的倍數。用2去約，結果三項的和就在50以內，同着前面所用過的，便重複了。例如24；若第一個比爲8比16；100減去24，剩76，折半是38，第二個比還是38比38。連比便是8比38比54，等於4比19比27。」王有道的解釋，我明白了。

「照這樣說起來，十六個數中，有幾個不必要的呢？」馬先生。

「3的倍數又是4的倍數的，就是12的倍數。100用12去除，可得8。所以有8個是不必要的。」王有道真想得周到。

「剩下的八個數中，還有不合用的麽？」這個問題又把大家難住了。還是馬先生來提示：

「30的倍數，也是不必要的。」

這很容易考察，100以內30的倍數，只有30、60和90這三個。60又是12的倍數，依前面的說法，已不必要了，只剩30和90。牠們同着100都是5和10的倍數。100和牠們的差，當然是10的倍數。折半後便是5的倍數。兩個比的各項同是5的倍數；牠們合成的連比的三項，自然都可用5去約。結果這兩個連比三項的和都成了20，也重複了。

所以八個當中又只有六個可用；那就是：

(11)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 2 | | 2 | 2斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 47 | 47 | 47斤 | 合 |
| 比 | 下 | 4 | 47 | 51 | 51斤 | 比 |

(12)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 6 | | 6 | 6斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 41 | 41 | 41斤 | 合 |
| 比 | 下 | 12 | 41 | 53 | 53斤 | 比 |

(13)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 14 | | 14 | 14斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 29 | 29 | 29斤 | 合 |
| 比 | 下 | 28 | 29 | 57 | 57斤 | 比 |

(14)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 混 | 上 | 18 | | 18 | 18斤 | 混 |
| 合 | 中 | | 23 | 23 | 23斤 | 合 |
| 比 | 下 | 36 | 23 | 59 | 59斤 | 比 |

(15)

| 混合比 | | | | 混合量 |
|---|---|---|---|---|
| 上 | 22 | 22 | 22斤 | |
| 中 | 17 | 17 | 17斤 | |
| 下 | 44 17 | 61 | 61斤 | |

(16)

| 混合比 | | | | 混合量 |
|---|---|---|---|---|
| 上 | 26 | 26 | 26斤 | |
| 中 | 11 | 11 | 11斤 | |
| 下 | 52 11 | 63 | 63斤 | |

對於這一個例題，尋根究底地，真弄得夠了。接着馬先生就講第四類。

第四，求混合量——知道了一部份的量。

例六　每斤價8角、6角、5角的三種酒，混合成每斤價7角的。所用每斤價8角和6角的斤數的比爲3比1，怎樣配合法？

這是很便當的。先作OA表每斤7角。次作OB表每斤8角，B正在縱線3上。從B作BC表每斤6

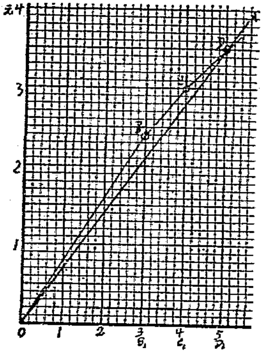


圖 144.

角，C正在縱線4上。——這樣一來，兩種斤數的比便是3比1——從C再作CD表每斤5角。CD和OA交在縱線5上的D。所以，三種的比，是：

$$OB_1 : B_1C_1 : C_1D_1 = 3 : 1 : 1。$$

試把計算法和牠對照：

| 原價 | 損益 | 混合比 | | |
|---|---|---|---|---|
| 8角(OB) | −1角 | 2 | 1 | 3($OB_1$) |
| 6角(BC) | +1角 | | 1 | 1($B_1C_1$) |
| 5角(CD) | +2角 | 1 | | 1($C_1D_1$) |
| 平均價 7角(OA) | | | | |

例七　每斤價5角、4角、3角的酒，混合成每斤價4角5分的；5角的用11斤，4角的用5斤，3角的要用多少斤？

本題的作圖法，和前一題的，除所表的數目外，完全相同。由圖上一望而知$OB_1$是11斤，$B_1C_1$是5斤，$C_1D_1$是兩斤。和計算法相較，還是算起來麻煩些。

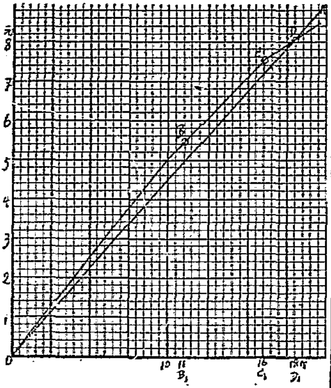



圖 145

| | 原價 | 損益 | 混合比 | | | | 混合量 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 每斤均價4.5角(OA) | 5角 OB, | −0.5角 | 1.5 | 0.5 | 3 1 | 3 5 | 6斤 5斤 | 11斤 |
| | 4角(BO) | +0.5角 | | 0.5 | 1 | 5 | 5斤 | 5斤 |
| | 3角(CO) | +1.5角 | 0.5 | | 1 | 1 | 2斤 | 2斤 |

由混合比得混合量，這一步比較麻煩些，還不如畫圖法的來得直截痛快。先要依題目上所給的數量來觀察。4角的酒是5斤，就用5去乘第二個比的兩項，5角的酒是11斤，但有5斤已確定了，11減去5剩6，牠是第一個比第一項的2倍，所以用2去乘第一個比的兩項。這就得混合比中的第一欄。結果，三種酒，依次是

1 1斤、5斤、2斤。

例八　將三種酒混合，其中兩種的總價是9元，合占1斗5升。第三種酒每升價3角，混成的酒，每升價4角5分。求第三種酒的升數。

「這是弄點小聰明的題目，兩種酒既有了總價9元和總量1斗5升，這就等於一種了。」馬先生說。

明白了這一點，還有什麽難呢？

作OA表每升價4角5分的。OB表1斗5升價9元的。從B作BC，表每升價3角的。牠和OA交於C。圖上，$OB_1$指1斗5升，$OC_1$指3斗。$OC_1$減去$OB_1$剩$B_1C$指1斗5升，這就是所求的。

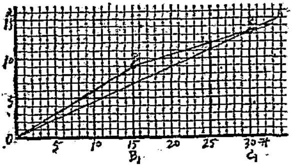



圖 146.

照這作法來計算，便是：

| 原價 | 損益 | 混合比 |
|---|---|---|
| 平均價4.5角(OA) | | |
| $\frac{90}{15}$角(OB) | −1.5角 | 15 ($OB_1$) |
| 3角(BC) | +1.5角 | 15 ($B_1C_1$) |

這題算完以後，馬先生在講臺上，向着我們靜靜地站了兩分鐘：

「李大成你近來對算學的興趣怎樣？」

「覺得很濃厚。」我不自主地很恭敬地回答。

「這就好了，你可以相信算學也是人人能領受的了。暑假已快完了，你們也應當把各種課都整理一下。我們的談話，就到這一次爲止。我希望你們不要偏愛算學，也不要怕牠，無論對於什麼功課，都不要怕！你們不怕牠，牠就怕你們。一切做一個現代人所不可缺少的常識，初中各科所教的，別人能學，自己也就能學，用不到客氣。勇敢和決心，是打破一切困難的武器。求知識，要講精神的修養，更要緊！——」

馬先生的話，停住了。靜靜地聽他的話的我們，都睜起一隻貪得無厭的饑眼，望着他。

19585