高級幾何學

算學叢書

高級幾何學

N. Altshiller-Court 著
陸欽軾 譯

商務印書館發行

中華民國二十三年三月初版

（一〇三〇一）

算學叢書 高級幾何學一册

College Geometry

每册定價大洋貳元肆角

外埠酌加運費匯費

原著者 N. Altshiller-Court

譯述者 陸欽軾

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

B五六三

原著者爲中文譯本序

Time has not impaired the vigor of the ancient science of geometry. The last one hundred years have witnessed the birth of several new branches of geometry and many new conceptions in this domain of scientific pursuit. Even the very geometry of old has during this time been extended far beyond its original boundaries. The present book is an attempt to put within the reach of the learner some of these additions to the geometry of the triangle and of the circle. May this book be of as much service to the students of china as it proved to be to the students of the United States.

The Author

何序

吾國中學畢業生算學知識,以幾何爲最缺乏.故當其入大學也,每視理科之算學課程爲畏途,因而規避敷衍之儆,半及青年,此至可痛惜者也.余在大學授課時,於一年級學生恆先略解析幾何及微積分,而特爲補習中等算學,於幾何尤三致意焉.良以幾何方法謹嚴,可訓練其科學思想,一也;幾何問題,變化甚多,可引起學生之興趣,而發展其天才,二也;幾何爲空間最優美之科學,與其他高等算學關係甚衆,三也;最大之原因,厥爲學生之了解幾何不甚澈底,於定理固未諳熟,於方法更覺茫然,以致演題之時,苦不能下手,及爲他人所解出,則又覺平常無奇,終於見題生畏,雖有研究科學之雄心,不得不放棄而改覓他途,此爲余補習之第四原因也.余所注重者,爲幾何原理及證題方法.如軌跡之於作圖題,反演之於切圓問題,皆不憚詳言.此外如位似圖,如圓冪之研究,如平面上之移動及際樞之應用,如錐線之重要性質,其他凡中學之所忽

略與近世幾何初步之所需要者，皆一一補習之以余所得經驗，凡學生對於所補習功課能了解者，以後對於其他任何算學課程，皆能循序而進，毫無困難。惟以所任功課繁多，隨講隨爲門人筆錄，未能自著成書，以公之世，至今猶以爲憾也。今年夏以楊永清及孫署冰兩先生之介，獲讀陸君欽軾所譯美國高爾式之幾何，與余平時所注重者，雖互有詳略，要爲高中大學中間階段所必需，則無疑問矣。余旣佩其勤，又知此書之能嘉惠學子，故樂爲之序云。

何魯

例　言

1. 本書爲美國科學博士高爾武 Nathan Altshiller-Court)所著，專論初等幾何學中之高深學識.譯者以其取材豐富，論理新穎，故譯之以爲高級中學校師範學校或大學校之課本，且供校外師生之參考.

1. 凡近代闡發之定理，以及新增之名辭，本書莫不搜羅淨盡.例知極點，極線，根軸，根圓，九點圓，同軸圓，反形法，逆平行線，類似中線，來莫恩軸，及布洛喀圓等等，均儘量採納，以備學者將來之應用

1. 本書教材貫串，由淺入深，定理習題，亦皆佈置得宜.讀者循序漸進，卽能瞭解其理論之要旨，以及演題之方法.

1. 本書字句雋潔，意義暢達，故內容雖廣，而篇幅不多，適供一學期之用.

1. 本書之高氏原本，現尙初期出版，魚魯之誤，容

所不免.譯者已逐一校勘,並經原著者覆閱,庶免毫釐千里之差.

1. 譯者除將原文逐句譯述外,又詮註以啓蘊奥,極蒙原著者贊許,不敢妄參私意.

1. 本書所討論之圖形,或因太簡而從略,或因過繁而遺闕.今擇其重要者補諸篇末,讀者按圖索驥,自易一目了然.

1. 譯者學問譾陋,未窺高深,尙希博雅君子匡其不逮.

譯者謹識

目　　錄

頁

頁

高級幾何學

第一章

幾何作法

1. 作圖題之普通解法

1. **記法**(Notation). $A, B, C, \cdots\cdots$表示三角形(triangle)或多角形(polygon)之頂點(vertices)及角(angles).

$a, b, c, \cdots\cdots$表示三角形或多角形之邊(sides)三角形中,小楷字母所表示之邊,與大楷字母所表示之角,彼此相對。

h_a 為 a 邊上之垂高(altitude).

m_a 為 a 邊上之中線(median).

t_a 為 A 角之平分線(bisector).

$2p$ 表示三角形之周線(perimeter).

S, 三角形之面積(area).

R, 外半徑* (circumradius)

r, 內半徑** (inradius)

---

* 譯者附註——即外接圓之半徑

** 譯者附註——即內切圓之半徑.

習題

1. 自直線 (straight line) 上之一點 (point) 豎立此線之垂線 (perpendicular).

2. 自直線外之一點,放落此線之垂線.

3. 自一線上之一點作一角等於一已知角 (given angle).

4. 平分 (bisect) 一已知線段 (segment).

5. 平分一已知角

6. 經過一已知點,畫一線,使平行一已知線。

7. 畫一線,使與一已知線有一已知距離。

8. 以一已知線段,等分而成 n 段。

9. 內分 (divide internally) 及外分 (divide externally) 一已知線段,使分成一已知比。

10. 三等分 (trisect) 90° 角, 45° 角, 135° 角。

作一三角形,已知:

11. a, b, c. 12. a, b, C. 13. a, B, C. 14. a, h_a, B.

15. a, b, m_a. 16. a, B, t_b. 17. A, h_a, t_a.

作一直三角形* (right triangle), 已知其直角 (right angle) A, 及

---

*譯者附註——直三角形 (right triangle) 即直角三角形 (right-angled triangle).

18. a, B.　19. b, C.　20. a, b.　21. b, c.

作一四邊形 (quadrilateral) $ABCD$, 已知:

22. A, B, C, AB, AD.　23. AB, BC, CD, B, C.

24. A, B, C, AD, CD.

25. 用一已知半徑 (radius) 畫一圓 (circle), 使與下圖相切於一已知點:

(a) 一已知線。　(b) 一已知圓。

26. 畫一已知圓之切線 (tangent), 使平行一已知線.

27. 自一已知圓外之一已知點,畫此圓之二切線.

28. 經過已知二點,畫一圓,使有已知之半徑.

29. 經過已知二點,畫一圓,使其圓心 (center) 在一已知線上.

作一平行四邊形 (parallelogram), 已知:

30. AB, BC, AC.　31. AB, BC, B.

32. AB, BD, ABD 角

33. 作一正方形 (square), 已知其對角線 (diagonal).

34. 作二圓之公切線 (common tangents).

2. 以上諸題,甚易解答;其他習題,或須詳細研究,始有解法,則宜按步進行如下:

a. 假設此題已解,圖已作成,乃研究圖中已知件 (given parts) 與未知件 (unknown parts) 之互相關係,此謂題之解析 (analysis), *b.* 因此必得作圖要訣,然後書其作法.

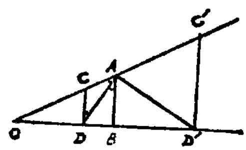
c. 證明依此作圖,全合題中一切條件.

d. 討論此題之可能情形,以及解答之多寡,等等.

以下例題即用此法:

3 題. 已知角之一邊上,有一已知點,在此邊上求一點,使離已知點及離此角之其他及一邊,其距相等.

解析. 設 A (第 1 圖)爲已知點,而 C 爲所求點(required point)。放落垂線 AB 及 CD,依假設,既 $AC=CD$,則 $\angle CDA=\angle CAD$;CD 線既平行 AB 線,則 $\angle CDA=\angle DAB$,



第 1 圖

故 $\angle CAD=\angle DAB$, 此即 AD 線爲 $\angle CAB$ 之平分線。

作法. 自已知點 A 放落垂線 AB。畫 OAB 角之平分線,且令此平分線與 OB 之交點爲 D,在 D 上畫 OB 之垂線,此垂線遇 OA 於所求點 C。

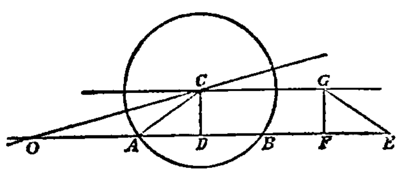
證明. 依作法 $\angle CAD=\angle BAD$, $\angle BAD=\angle ADC$, 因依作法 AB 平行 CD, 故 $\angle ADC=\angle CAD$, 然則 ADC 爲等腰三角形 (isosceles triangle), 而 $CA=CD$, 此即求證之條件。

討論. 此題有二解,因 A 點上有二角,其平分線在 OB 上得二交點。

4 題. 用一已知半徑,畫一圓形,使其圓心在已知角之一邊上,而使此角之其他一邊上有一已知長短之弦 (chord).

解析. 設 C (第 2 圖) 爲所求圓之圓心,以致 $CA=R$, 而 $AB=l$, 其 R 及 l 各爲已知之長短,自 C 至 AB, 其垂線 CD 之垂足 (foot of the perpendicular) D, 爲 AB 之中點 (mid-point),然則直三角形 ACD 中,今知其斜邊 (hypotenuse) $AC=R$, 而其股邊 (leg) $AD=\frac{1}{2}l$, 故 CD 亦爲可知邊,此即 C 點與已知線 OA 有一可知距離.

作法 已知角之 OA 邊上在任何一處,割去 $EF=\frac{1}{2}l$, 在 F 上豎立 OA 之垂線, 又用 E 爲圓心 R 爲半徑,畫一圓弧 (arc),遇此垂線於 G, 經過 G 作 OA 之平行線,使遇 OC 於 C, 以 C 爲圓心 R 爲半徑之圓,即此題之解答.



第 2 圖

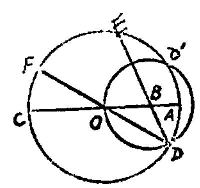
證明. 依作法,此圓之圓心在已知角之一邊上,且有此已知長爲其半徑.故僅須表明在此角之其他一

邊上,所割之 AB 弦,必有此所求長 l,直三角形 ACD 及 EFG 爲全等形 (congruent),因依作法 $AC=EG$,而 $CD=FG$,故 $AD=EF$;但依作法 $EF=\frac{1}{2}l$,故 $AD=\frac{1}{2}l$ 或 $2AD=l$,或 $AB=l$,此即求作之條件.

討論. l 弦必小於此圓之直徑(diameter) $2R$,則此題可解,苟已合此情形,則三角形 EFG 可作,而由 G 點畫出之平行線與此角之另一邊祇有一交點,故此題僅有一解.*

5 題. 經過直徑 AC 上之已知點 B,畫一弦 DBE,使 CE 弧$=3AD$ 弧。

解析. 設 DBE (第 3 圖) 爲所求弦,畫直徑 DOF. COF 角 $=\angle AOD$,故 CF 弧 $=AD$ 弧,而 EF 弧$=2AD$ 弧,然則圓周角 EDF (inscribed angle) 割一圓弧,二倍於圓心角 (central angle) AOD 所割之圓弧,故此二角相等,而 ODB 爲等腰三角形,此即 $BD=BO$,但 BO 爲可知者,故 D 點可得。



第 3 圖

作法. 用 B 爲圓心,BO 爲半徑,畫一圓形,使遇已知圓於 D. B,D 二點得此所求線.

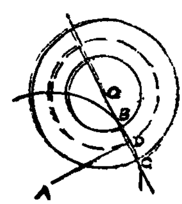
譯者附註——以E爲圓心R爲半徑之圓可遇FG於另一點G′,此G,G′二點對於OA爲對稱點,故經過G′而與OA平行之線遇OC於另一點C,而此題乃有二解,如EF割在OC線上,則又有二解.

證明. 三角形 OBD 中, $BO=BD$. 故 BOD 角 $=\angle BDO$, 或 AOD 角 $=\angle EDF$; 所以, EF 弧 $=2$ AD 弧, 但 CF 弧 $=AD$ 弧, 故 CE 弧 $=CF$ 弧 $+FE$ 弧 $=AD$ 弧 $+2AD$ 弧, 此卽求證之條件。

討論. 如 BO 大於 BA, 則以 B 爲圓心, BO 爲半徑之圓形, 將遇已知圓於二點 D 及 D', 而此題有二解, 此對於已知直徑互相對稱 (symmetrical). 如 BO 等於或小於 BA, 則此題無解。

6 題. 用一已知點爲圓心, 畫一圓形, 使此圓割二個已知同心圓 (concentric cirles). 且使割有之二交點與二圓之圓心爲共線點 (collinear points)。

解析. 設 B, C (第 4 圖) 爲所求圓 (A) * 與已知二圓之交點. 自已知點 A 至 OBC 線, 所放落之垂線 AD, 有 BC 弦之中點 D 爲其垂足; 故 $OD=\frac{1}{2}(OB+OC)$, 然則介於已知二圓正中之同心圓上, 必有此 D 點之位置; 同時 AD 旣垂直 OD, 則必 AD 與此可知之同心圓相切於 D. 故 A 點畫出之切線與此可知圓切成之切點 (point of contact) 必爲 D 之位置. D 點旣得, 則 OD 與已知二圓之交點 B 及



第 4 圖

譯者附註——有括號之大楷字母大都表示圓形, 此大楷字母所表示之點爲其圓心

C,各連 A 點而成所求圓之半徑。

作法 畫一圓形,用圓心 O 及此二圓半徑之半和(half the sum)爲其半徑.令 A 點畫出之切線與此圓切成之切點爲 D,而令任一已知圓與 OD 之交點爲 C.以 A 爲圓心 AC 爲半徑之圓形,即此所求圓.

讀者自證其理。

討論. 解析中,假設 B 點及 C 點同在圓心 O 之一旁.如 B,C 二點應在 O 之二旁,則得 D 之類似點 D'(analogous Point)此 D' 點在 O 爲圓心已知二圓半徑之半差(half the difference)爲半徑之圓形上.

然則:

如 $OA>\frac{1}{2}(OC+OB)$——二解.

如 $\frac{1}{2}(OC+OB)>OA>\frac{1}{2}(OC-OB)$——一解.

如 $\frac{1}{2}(OC-OB)>OA$——無解.

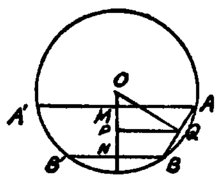
如 $OA=\frac{1}{2}(OC+OB)$,則有幾解?如 $OA=\frac{1}{2}(OC-OB)$,則有幾解?

7題. 用一已知點爲圓心,畫一圓形,使割已知二平行線而得二弦,且使此二弦之和有一已知長.

解析. 設 O (第5圖) 表示此已知點,而 AA', BB' 爲已

譯者附註——見附圖1

知二線.設$ABB'A'$爲所求圓.自O放落AA'及BB'線上之垂線.$AM+BN=\frac{1}{2}AA'+\frac{1}{2}BB'=\frac{1}{2}(AA'+BB)=\frac{1}{2}2l=l$,其$2l$爲已知之和.經過$MN$之中點$P$,畫$AM$之平行線,遇$AB$於$Q$.梯形(trapezoid) $ABNM$中,$PQ=\frac{1}{2}(AM+BN)=\frac{1}{2}l$,而$Q$既爲$AB$弦之中點,則$OQ$必垂直$AB$.



第 5 圖

作法　自已知點O放落已知線上之垂線,遇第一線於M,及第二線於N.經過MN之中點P,畫已知線之平行線,且割去$PQ=\frac{1}{2}l=\frac{1}{4}$所求和,連接$O,Q$,而在$Q$上豎立$OQ$之垂線,使遇已知線於二點$A$及$B$. OA線$=OB$爲所求圓之半徑.

讀者自證其理.

<u>討論</u>.　Q點之得其形,有一無二,而垂線AQB及A點亦然.如A,B二點同在垂線OMN之一旁,或B點與N相合,則此題將有一解,而僅限於一　如B點與N相合,則$\overline{PQ}^2=OP\cdot PN$.故$\frac{1}{2}l$大於或至少等於$OP,PN$二線段之比例中項(mean proportional),則此題將有一解.然如A,B二點在OMN之兩旁,則必修改其題句,方可用此作法,即$2l$將爲二弦之差,而非其和.

習　題

1. 用已知二點為圓心及等半徑,畫二圓,使其公切線之一,經過一第三已知點.

2. 用已知二點為圓心及等半徑,畫二圓,使其公切線之一,將與一已知圓相切.

3. 經過一已知點,畫一線,使自另二點放落此線上之垂線,其垂足各離此點等距.

4. 作一圓,經過一已知點,且與一已知線相切於一已知點.

5. 經過一已知點,畫一線,使此線與一已知角之二邊成相等之角.

6. 作一三角形,已知其垂高之一,及此垂高分此三角形而成兩三角形之兩個外半徑.

7. 作一平行四邊形,使已知二點將成兩個相對之頂點,而其他一對頂點,將在一已知圓上.

8. 經過一已知點,畫一線,使等半徑之已知二圓割此線而成等長之二弦.

9. 經過已知二點 A, B, 畫一圓,使與 AB 平行之一已知線相切.

10. 作一等邊三角形(equilateral triangle),已知其內半徑.

11. 作一等邊三角形,已知其外半徑與一垂高之和.

12. 作一等腰直三角形 (isosceles right triangle),已知其斜邊與垂高之和.

13. 在一已知等邊三角形中,內接(inscribe)另一等邊三角形,已知其頂點之一.

14. 在一已知正方形 (或正六角形 regular hexagon)中,內接另一正方形(或正六角形),已知其頂點之一.

15. 經過圓內之一已知點,畫一弦,使此弦被此已知點分成之二線段,將有一已知差;或有一已知比.

16. 經過已知圓上之已知二點,畫相等而平行之二弦.

17. 經過圓上一已知點,畫一弦,使其長二倍其邊心距(apothem).

18. 用一已知點爲圓心,畫一圓形,使其平分一已知圓(此即公弦爲已知圓之直徑).

19. 在一已知圓之延長直徑上,求一點,使自此點所畫之切線,等於此圓之半徑

20. 經過一已知點,畫一線,使已知二平行線割此線而成一已知長之線段.

21. 經過已知二點,畫一圓,使一已知圓與此圓所成

之公弦(common chord)與一已知線平行.

22. 在直三角形之股邊上,求一點,使離斜邊及離直角之頂點,其距相等.

23. 經過一已知點,畫一圓,使與已知二平行線相切.

24. 經過一已知點,畫一線,使一已知角之二邊割此線而有之線段,被此已知點分成一已知比.

25. 經過已知圓上之一已知點,畫一弦,使被另一已知弦分成一已知比.

26. 經過已知角中之一已知點,畫一線,使此角之二邊割此線而有之線段,被此已知點平分.

27. 作一梯形,已知其二底邊(bases)及其二對角線.

28. 作一平行四邊形,使其三邊有已知三點爲其中點.

29. 經過二等圓交點之一,畫二等弦(每一圓內畫一弦)互成一已知角.

30. 經過二圓交點之一,畫一線,使此二圓割此線而得等長之二弦.

31. 作一三角形,已知中線之一,及此中線分此三角形而成兩三角形之兩個外半徑.

32. 經過二圓公點之一,畫一線,使此二圓割此線

而得二弦,又使此二弦均張等角於其圓心上

33. 經過二圓之一交點,畫一線,使此二圓割此線而得二弦,又使此二弦之長有一已知比.

2. 幾何軌跡

8 幾何題之解答,往往必求一點,使合某種條件.例如,欲畫一圓,經過已知三點,則必求與已知三點距離相等之一點,即此圓之圓心.

自一已知點畫一已知圓之切線,此題之解答,必先求其切點,使已知點與已知圓圓心所規定之線段,張一直角於此切點上.

如將所求點應合條件之一,摒棄不顧,則此題將有數解然此點非可任意位置,惟能行動於某路上此路稱爲此點之幾何軌跡(geometric locus)現如顧及向所摒棄之條件,而不顧其另一條件,則其所求點畫成另一幾何軌跡.此所求點之位置,乃在二軌跡之交點上

畫一圓,經過已知三點之問題,又可舉以爲例.欲求離此已知三點A,B,C等距之點,則先摒棄其點之一,如C,而試求離A,B等距之點.如是,則此題乃有數解,其所求點能行動於AB線段之中垂線** (perpendicular bi-

*譯者附註——線段之兩端,均與其點相連,如連線所成之角等於某角,則此線段稱"爲張此某角於此某點上"(Subtend the angle at that point).

**譯者附註——或譯垂直等分線.

sector)上. 若取C點而摒棄A點, 則其所求點可畫成BC線段之中垂線.故所求點乃在二個中垂線之交點上.

所得軌跡之形狀, 全賴摒棄之條件. 初等幾何學(elementary geometry)中, 摒棄條件之後, 必使其軌跡組成直線及圓形.如欲解答之簡潔, 則對於幾何軌跡須有敏明之選擇.

欲知所求點應處之位置, 宜多識幾何軌跡.

9. 以下爲常用而至要之幾何軌跡:

軌跡1. 若平面上之一點與一已知點有一已知距離, 則此一點之軌跡爲一圓形, 有此已知點爲其圓心, 及此已知距離爲其半徑.

軌跡2 若自一點所畫已知圓之切線,有一已知長, 則此一點之軌跡爲一圓形, 與已知圓同心.

軌跡3. 若一點與一已知線有一已知距離,則此一點之軌跡爲二線, 均與已知線平行.

軌跡4. 若一點離已知二點等距,則此一點之軌跡爲已知線段之中垂線.

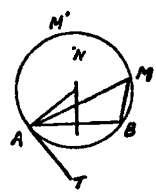
軌跡5. 若一點離相交二線等距,則此一點之軌跡爲已知二線所成二角之平分線.

軌跡6. 若自一點畫一已知圓之二切線,使此二切線所夾成之角, 等於一已知角, 則此一點之軌跡爲一

圓形,與已知圓同心.

軌跡7. 若一點在一已知線段之一旁,使此線段張一已知角於此一點上,則此一點之軌跡為經過其線段兩端之圓弧.

設 M(第6圖)為此軌跡之一點,以致 AMB 角等於此已知角.作一圓,經過 A,B 及 M 點於 AMB 弧之任何一點 M 上 AB 線段所張之角,等於 M 上所張之角.故 AMB 弧上之各點均屬於所求之軌跡.由另一方面看來,不在 AMB 弧上之任何一點 N,將在此弧之內,或在其外.如在其內,則 ANB 角將大於 AMB 角.如在其外,則小於 AMB 角.故 N 不屬於此軌跡.



第6圖

(AMB) 圓之切線 AT,與 AB 成一角,等於 AMB 角.故 AT 可作.所以(AMB)圓之作法,變為畫一圓與可知線 AT 相切於一已知點 A,而經過另一已知點 B

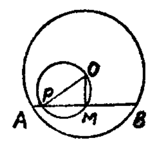
M 點必在 AB 之一旁.如不顧此條件,則其所求軌跡為二弧,彼此相等,而處於 AB 之兩旁.

如已知角為一直角,則此二弧將為同半徑之半圓形(semicircles),而乃:"若一已知線段張直角於一點上.則此一點之軌跡為一圓形,有此線段為其直徑."

軌跡8. 若一已知圓之弦經過一定點,則此弦之中

點所有之軌跡爲一圓形,當是時.已知點應在已知圓之內,或在其圓周上.

設P(第7圖)爲已知點,而M爲AB弦之中點,此弦經過已知點P而在已知圓(O)上,OP線段張直角於M上.故M在OP爲直徑之圓形上(軌跡7)另一方面看來,此圓之任何一點M,連P而得(O)圓之一弦,且垂直OM於M,故M爲此弦之中點,而M屬於所求之軌跡上



第7圖

如P點在(O)之外,則此軌跡上之任何一點M,必在OP爲直徑之圓形上.但非(OP)圓上之每點,皆屬於此軌跡.其軌跡乃爲(OP)圓在已知圓(O)內之一部分.

軌跡9. 若一已知圓內,書等長之諸弦,則此諸弦中點之軌跡爲一圓形,與已知圓同心.

諸弦均與此圓相切.

軌跡10. 若自一點至已知二點,使其距離平方(squares)之和等於一常數(constant),則此一點之軌跡爲一圓形,有此已知線段之中點爲其圓心.

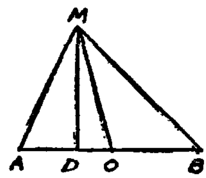
設M(第8圖)爲軌跡上之一點.連M至O,O即已知二點A B所得AB線段之中點;又自M放落AB上之垂線MD.三角形AOM及BOM中:

$$\overline{AM}^2=\overline{OM}^2+\overline{OA}^2-2OA\cdot OD$$

$\overline{BM}^2=\overline{OM}^2+\overline{OB}^2+2OB\cdot OD.$

但 $OA=OB=\frac{1}{2}AB$;故相加而有

$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=2OM^2+2OA^2.$



第 8 圖

今依假設 $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2$ 等於一已知常數 s^2,而 $\overline{OA}^2=a^2$,其 $2a$ 代表 AB 線段之長,故

$$\overline{OM}^2=\frac{1}{2}s^2-a^2. \qquad (1)$$

然則 M 點與此定點 O 有一定距離(fixed distance)OM,所以 M 之軌跡卽以 O 爲圓心之圓形.*

半徑 OM 可細察等式(1)而作之:OM 爲直三角形之一邊,其另一邊爲已知線段 AB 之半長 a,而其斜邊爲一正方形之邊,此正方形乃以 s 爲其對角線.**

軌跡 11. 若一點至二定點,其距離之比,爲一常數,則此一點之軌跡爲一圓形(阿破羅尼圓 The circle of Apollonius.)

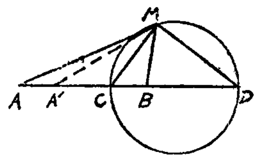
設 A, B (第 9 圖) 爲已知二點.求 M 點之軌跡,使 MA;MB 之比,等於一已知數 m.

*譯者附註——逆而言之,亦易表明此圓上之每點,合此所求軌跡之條件.

**譯者附註——$S(=\sqrt{S^2})$亦爲常數而非直線,如以直線代表常數,必先知其長度單位(unit length).

**譯者附註——如知常數 S^2 之長則其長度單位仍必知之,否則正方形之對角線 S 不能作出,如其假設乃使距離平方之和等於一已知線段之平方,則 S 爲已知線段而其長度單位不必知之,如 S^2 爲一面積而非常數,則其長度單位亦不必知之.

C, D二點內分及外分已知線段AB,使分成已知比m.則此二點爲所求軌跡上之可知點.今設M爲軌跡上之任何一點. MC線內分三角形AMB之AB邊而成此三角形其他二邊之比$AM:BM$,故此MC線爲AMB角之平分線;仿此,MD線爲M點上之外角平分線.故MC垂直MD,而M點在以可知線段CD爲直徑之圓形上.



第9圖

逆而言之. 今在此圓上任取一點M,而表明此點屬於此軌跡.畫MA'線,使CMA'角$=\angle CMB$. MD線既垂直CM,故DM爲M點上之外角平分線,而乃:

$$\frac{A'C}{BC}=\frac{A'D}{BD}, \text{或} \frac{A'C}{BC}=\frac{A'D-A'C}{BD-BC}. \quad (1)$$

今依作法:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}, \text{或} \frac{AC}{BC}=\frac{AD-AC}{BD-BC}. \quad (2)$$

既$A'D-A'C=CD=AD-AC$,則(1)與(2)之比例,三項相同,故$A'C=AC$.依作法A, A'二點,既同在C之一旁,故A與A'相合.然則MC爲AMB角之平分線.而乃:

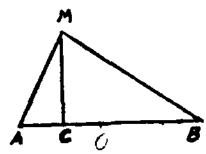
$$\frac{AM}{BM}=\frac{AC}{BC}=m.$$

故M爲此軌跡上之一點

軌跡12. 若一點至已知二點,使其距離平方之差,爲一常數,則此一點之軌跡爲一直線,與已知線段垂直.

設 A, B (第10圖) 爲已知二點. 求 M 點之軌跡,使 $\overline{AM}^2-\overline{MB}^2$ 有一已知值 (given value) d.

自 M 放落 AB 上之垂線 MC. 於是:



第 10 圖

$$\overline{AM}^2-\overline{AC}^2=\overline{MC}^2=\overline{MB}^2-\overline{BC}^2,$$

$$\overline{AM}^2-\overline{BM}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2=d,$$

$$(AC-BC)(AC+BC)=d,$$

或以 a 表示 $AC+BC=AB$, 則有:

$$AC-BC=d:a.$$

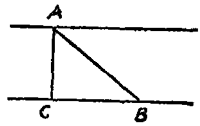
今知線段 AC, BC 之差* 及和; 故 C 點爲一可知之定點, 而 M 在一垂線上, 此與 AB 垂直於 C. 逆而言之, 亦易表明此垂線上之每點, 屬於此軌跡.

10題. 經過已知二點畫二平行線,使彼此相離有一已知距.

設 A, B (第11圖) 爲已知二點, 而 C 爲 A 點至所求線

*譯者附註——請讀第9節軌跡10之附註二,如知常數 d 之長,則其長度單位仍必知之,否則 $d:a$ 之長不能作出,且其長度單位愈長,則 C 點離 A 愈遠,如假設其距離平方之差,等於一已知線段之平方, S^2 或已知二線段平方之和,或已知二線段平方之差等等,則其長度單位雖或長短,而 C 點離 A 有一定距,故可任取其長度單位之長以作已知線段之平方,如 S^2 等等,而又作 $AC-BC$ 之位.

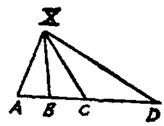
BC上之垂足.此已知線段 AB 張直角於C點上.故有 C 點之一軌跡,即以AB爲直徑之圓形.另一方面看來,C在A爲圓心已知距離爲半徑之圓形上.此題有二解,一解,或無解.



第 11 圖

11題　<u>已知四個順序之共線點A, B, C, D,求一點,使AB, BC, CD諸線段張有等角於此點上</u>

設X(第12圖)爲所求點.既AXB角$=\angle BXC$,則BX線爲AXC角之平分線,而三角形AXC中,$AX:CX=AB:BC$. AB, BC爲可知之二線段.故有X之一幾何軌跡(圓形). X之另一軌跡可細察 BC及CD二線段而得之.二軌跡相交而得X點.

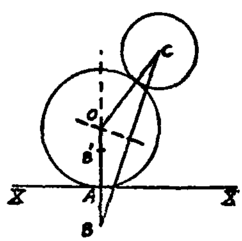


第 12 圖

12題.　<u>畫一圓,與一已知圓相切,又與一已知線相切於一已知點</u>

設(C)(第13圖)爲已知圓,A爲已知線 AX 上之已知點,而(O)爲所求圓.

先知所求圓圓心之一幾何軌跡爲AX之垂線AO.在OA上割去AB等於已知圓(C)之半徑,使B及C在AX之兩旁.然則$OB=OC=(O)$圓與(C)圓半徑之和,故圓心O在



第 13 圖

可知線段BC之中垂線上,且可得圓心O.

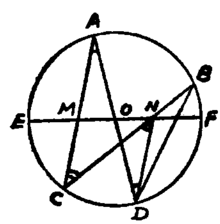
如不用B,而用其對於AX對稱之點B'.仿之可得另一圓形之圓心O,亦合題中之條件.**

B,C二點旣在AX之兩旁,則AX線必交BC線,而此二線之垂線亦然,故O點總可求得.如逢CB線爲AX之平行線,則O點將不能存在.此乃(C)圓與AX相切之情形.

試言CB垂直AX之情形.

13.題. <u>在一已知圓上,求一點使此圓上之已知二點各連此點而交一已知直徑於二點,且使此二點各離圓心等距.</u>

設A, B(第14圖)爲已知點,EOF爲已知直徑,而C爲所求點以致$OM=ON$畫直徑AOD,及直線ND.三角形AOM, DON爲全等形,因有二邊及O點上之夾角各各相等.故$\angle MAO=\angle ODN$,而AC線平行DN線,所以$\angle ACN=\angle CND$.但



第14圖

$\angle ACN$爲可知角,因用半個可知弧AB所量.故可知$\angle CND$,及其補角(supplementary angle) BND.然則可知

** 譯者附註——見附圖2.

線段 BD 於 N 上張有一角,其大小亦爲可知.故 N 在一可知圓弧之上,而 N 爲此可知弧與已知直徑 EF 之交點.

如 A, B 二點同在直徑 EF 之一旁,則 B 及 D 點乃在 EF 之兩旁,而此題有二解.如 A, B 在 EF 之兩旁,則此題無解.因此種情形使 A, B 二點連接圓上任何一點之後,其連線之一將割 EF 於其線外,而其他一連線將割在其內.

試言 A, B 二點之一,或其二點,均在 EF 上之情形.

習　題

1. 作一三角形,已知 a, b, A.

2. 作一平行四邊形,已知其一邊,一角,及一對角線.

3. 作一內接四邊形(inscriptible guadrilateral),已知其三邊,及其外接圓(circumscribed circle)之半徑.

4. 畫一圓使與同心二圓相切,且經過一已知點.

5. 用一已知半徑,畫一圓,使經過已知二點.

6. 用一已知半徑,畫一圓,使與一已知圓相切,而其圓心在一已知線上.

7. 用一已知半徑,畫一圓,使其經過一已知點,且

自另一已知點所畫之切線,有一已知長.

8. 在一已知三角形中,內接另一三角形,已知其二邊,且使其頂點之一,與一已知點相合.

9. 作一直三角形,已知斜邊上之垂高,斜邊上之二點,及二股上各一點.

10. 在一已知圓中,內接一直三角形,使二股各過一已知點.

作一三角形,已知:

11. a, c, h_b. 12. b, m_a, m_b. 13. a, R, h_b. 14. a, h_a, m_a.

15. m_a, h_a, R.

作一平行四邊形,已知:

16. 一垂高及二對角線.

17. 二垂高及一角.

18. 二垂高及一對角線.

19. 作一四邊形 $ABCD$, 已知 AB, AD, A, 及其內切圓 (inscribed circle) 之半經.

20. 經過一已知點,畫一線,使與已知二線同交於一點,但不能延長此已知線使之相交.

21. 作一三角形,已知其底邊,其對角,及此角之平分線與底邊之交點.

22. 作一直三角形,已知其斜邊,及二股平方之比

23. 作一直三角形,已知其斜邊,及斜邊中點至一股邊之距離.

作一四邊形 $ABCD$, 已知:

24. AC, ABC, ADC, BAC, 及 DAC.

25. AB, BC, CA, ADB, BDC.

26. 作一平行四邊形,已知一底邊,其相當垂高,及兩個對角線中之夾角.

27. 作一三角形,已知其底邊,及其他二邊各與底邊之中線夾成之二角.

28. 用一已知半徑,畫一圓,使經過一已知點,且割一已知線使成一已知長之弦.

29. 畫一線,使已知二圓割此線而成之二弦,各有已知長.

30. 在一已知圓中,內接一四邊形,已知其四角.

31. 放置已知二圓,使其儘量分離,以致其二公切線將夾成已知大小之一角.

32. 畫一圓,使自已知三點所畫之切線,各有已知長. 暗示 用軌跡12.

作一三角形,已知:

33　$a, h_a, b:c$.　34. $a, m_a, b:c$.　35. $a, t_a, b:c$.

36. 在一已知圓外外切(circumscribe)一三角形,已知其一邊,及其隣角(adjacent angles)之一,且使隣角之頂點在一已知線上.

37. 經過圓上之已知二點,畫平行二弦,使此二弦之和有一已知長.

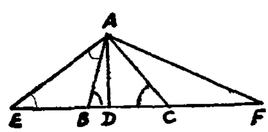
38　作一正方形,使每邊經過一已知點.

3. 間接要件

14. 圖形所合之條件,往往其已知件不直見於所求之圖內.例如,三角形二邊之和,使有已知之長短,或其底角之差,使有已知之大小,等等.欲得此題之解法,當以此種間接要件(indirect elements)置入題中之解析.

15. 題. 作一三角形,已知其周線,底邊之對角,及底邊上之垂高$(2p, A, h_a)$.

設 ABC(第15圖)為所求三角形.延長底邊 BC 於兩端,而割去 $CF=AC$,及 $BE=AB$.然則 $EF=2p$. EBA 為等腰三角形.



第 15 圖

故　$\angle E=\angle EAB=\frac{1}{2}\angle ABC$.

仿此 $\angle FAC=\angle AFC=\frac{1}{2}\angle ACB$.

故:

$$\angle EAF=\tfrac{1}{2}\angle B+\angle A+\tfrac{1}{2}\angle C=\tfrac{1}{2}\angle(A+B+C)+\tfrac{1}{2}\angle A$$
$$=90^\circ+\tfrac{1}{2}\angle A.$$

所以 EAF 爲可知角.三角形 ABC 之垂高 AD, 亦即 AEF 之垂高. 然則三角形 AEF 中, 今知底邊 $EF=2p$, 其對角 $\angle EAF=90^\circ+\frac{1}{2}A$, 及垂高 $AD=ha$. 故此三角形可作. 此三角形之頂點 A, 亦屬於所求三角形 ABC 中, ABC 之頂點 B, 在 EF 上,又在 AEF 之中垂線上 (既 $AB=BE$). 故 B 點可求. 仿此而 C 點亦然.

此題將有二解, 對於 EF 之中垂線互相對稱, 或有一解, 或無解.

16 註. 三角形 EAF 之三角, 僅用 ABC 之三角,即可表之. 而 ABC 所有垂高之一亦屬於 EAF 中. 誌此數語則下題易解.

習　題

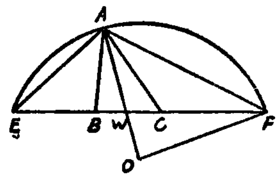
作一三角形, 已知:

1. $2p$, A, B.
2. $2p$, ha, B (或 C).
3. $2p$, hc, A.

17 題 作一三角形, 已知其周線, 一角, 及此角之平

分線 $(2p, A, t_a)$

設 ABC 爲所求三角形(第16圖). 延長底邊 BC 於兩端, 而割去 $BE=AB$, 及 $CF=AC$, 而乃 $EF=2p$. 依作法 ABE 爲等腰三角形, 故 $\angle EAB=\angle AEB=\frac{1}{2}\angle ABC$. 仿此, 等腰三角形 ACF 中:



第 16 圖

$$\angle FAC=\angle AFC=\tfrac{1}{2}\angle ACB.$$

然則 $\angle EAF=\angle EAB+\angle BAC+\angle CAF$,

或 $\angle EAF=\frac{1}{2}B+A+\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}(A+B+C)+\frac{1}{2}A=90^\circ+\frac{1}{2}A$,

所以已知線段 $EF=2p$ 於 A 上張有一角, 爲可知之大小 $90^\circ+\frac{1}{2}A$, 故能作 A 所必在其上之圓弧. 令此圓之圓心爲 O 其圓心角 $AOF=\angle 2AEF=2\cdot\frac{1}{2}B=B$; 故等腰三角形 AOF 中,

$$\angle FAO=\tfrac{1}{2}(180^\circ-B)=90^\circ-\tfrac{1}{2}B.$$

今: $\angle OAC=\angle OAF-\angle CAF=(90^\circ-\frac{1}{2}B)-\frac{1}{2}C$.

$$=90^\circ-\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}C=\tfrac{1}{2}A.$$

然則 OA 爲 BAC 角之平分線. 乃得下示之作法:

在線段 $EF=2p$ 上, 作一圓弧, 使 EF 張一角 $90^\circ+\frac{1}{2}A$ 於此弧之任何一點上, 用此圓之圓心 O, 又用半徑 OW, 等於 (O) 圓之半徑 OE 與平分線 $AW=t_a$ 之差, 畫一圓

遇 EF 於 W 點. OW 線遇 EF 弧於 A 點, 此爲所求三角形之頂點. 此三角形之其他二頂點 B, C 爲 EA 及 FA 二線段之中垂線各與 EF 之交點. 此題可有二解, 一解, 或無解. 如有二解, 當爲全等形.

18. 題. 作一三角形, 已知 $2p$, A. $b:c=n:m$.

參照上題之圖形及記法, 乃有:

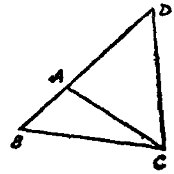
$$\frac{EB}{FC}=\frac{m}{n}, \quad \frac{BW}{CW}=\frac{m}{n}.$$

故:
$$\frac{EB+BW}{FC+CW}=\frac{m}{n}, \text{ 或 } \frac{EW}{FW}=\frac{m}{n}.$$

然則 W 點分 EF 成一已知比, 所以 W 點可得. OW 線可得 A 點.

19. 題. 作一三角形, 已知其底邊, 其對角, 及其他二邊之和 $(a, A, b+c)$.

設 ABC (第 17 圖) 爲所求三角形. 延長 BA 而割去 $AD=AC$. 等腰三角形 ACD 中, D 角 $=\angle ACD=\frac{1}{2}\angle BAC$. 然則三角形 BCD 中, 今知底邊 $BC=a$, BD 邊 $=b+c$, 及 D 角 $=\frac{1}{2}A$; 故此三角形可作. 其頂點 B, C 亦屬於所求三角形中. 頂點 A 爲 CD 線段之中垂線與 BD 之交點.



第 17 圖

如欲此題可解，必使 a 小於 $b+c$. 在輔助三角形 (auxiliary triangle) BCD 中，已知對此小邊之角，故合此條件可有兩三角形，或一三角形，或無三角形. 由每一輔助三角形，可得一所求三角形，而僅限於一. 所以此題有二解，或一解，或無解.

註. 輔助三角形 BCD 中

$$\angle D=\tfrac{1}{2}\angle A \quad \angle B=\angle B$$

而

$$\begin{aligned}\angle BCD&=\angle BCA+\angle ACD=C+\tfrac{1}{2}A\\&=\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}B\\&=\tfrac{1}{2}(A+B+C)-\tfrac{1}{2}\angle(B-C)\\&=90^\circ-\tfrac{1}{2}\angle(B-C).\end{aligned}$$

在 BCD 中，BD 上之垂高為 ABC 之垂高 hc. 有時應延長 AC 邊而不延長 AB 邊. 誌之則下題易解.

習　題

作一三角形，已知:

1. $b+c$, a, B (或 C).
2. $b+c$, B, hc.
3. $b+c$, C, hb.
4. $b+c$, A, B.

5. $b+c, a, hb$(或 hc).

6. $b+c, a, B-C$.

7. $b+c, hc, B-C$.

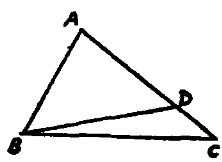
8. $b+c, hb, B-C$.

9. $b, c, B-C$.

暗示. 作 $b+c$. 三角形 BCD 中,乃有 B, D 二頂點以及 C 之軌跡. 割去 $BA=c$. C 點在 A 爲圓心 b 爲半徑之圓形上.

20. 題. 作一三角形,已知其底邊,其對角,及其他二邊之差 $(a, A, b-c)$.

設 ABC(第 18 圖)爲所求三角形.在 AC 上割去 $AD=AB$, 而乃 $CD=b-c$. 等腰三角形 ABD 中, ADB角$=\angle ABD=\frac{1}{2}(180^\circ-A)=90^\circ-\frac{1}{2}A$, 故 BDC 角 $=90^\circ+\frac{1}{2}A$. 然則三角形 BCD 中,今知底邊 $BC=a$, 其對角 $BDC=90^\circ+\frac{1}{2}A$, 及 CD 邊 $=b-c$, 故此三角形可作其頂點 B, C 屬於所求三角形 ABC 中.其第三頂點 A 乃在 CD 之延線上,又在 BD 線段之中垂線上.



第 18 圖

如欲此題可解,必使 a 大於 $b-c$. 三角形 BCD 中,已知角在大邊之對面.故此三角形總可作出,而僅有一

個作法.故此題有一解.

註. 輔助三角形 BCD 有 $\angle BCD=$ 三角形 ABC 之 C 角, $\angle BDC=90^\circ+\frac{1}{2}A$, 及 $\angle CBD=ABC-ABD=B-(90^\circ-\frac{1}{2}A)$

$$=B+\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}C-90^\circ$$

$$=\tfrac{1}{2}(A+B+C)+\tfrac{1}{2}(B-C)-90^\circ=\tfrac{1}{2}(B-C).$$

且 CD 上之垂高亦為 ABC 之垂高 hb. 用之可解下題.

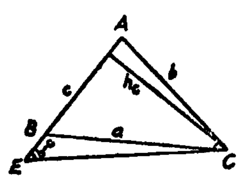
習　題

作一三角形, 已知:

1. $b-c$, a, C.
2. $b-c$, a, $B-C$.
3. $b-c$, hb, C.
4. $b-c$, hb, $B-C$.
5. $b-c$, A, B.
6. $b-c$, hb, A.

21. 題. 作一三角形, 已知 $b-c$, a, hc.

設 ABC (第 19 圖) 為所求三角形. 延長 AB, 而割去 $AE=AC$, 而乃 $BE=b-c$. 三角形 BCE 中, 今知 $BC=a$, $BE=b-c$, 及 BE 上之垂高等於 hc, 故此三角形可作. 自此三角形即可引渡而得所求三角形 ABC.*



第 19 圖

註. 仿上題之三角形 BCD, 可得 BCE 之三角, 而可應用於下題.

習　　題

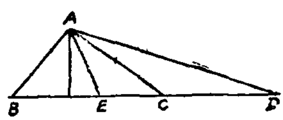
作一三角形, 已知:

1. $b-c$, hc, $B-C$.
2. $b-c$, hc, A.
3. b, c, $B-C$.

暗示. 三角形 BCD 或 BCE 可用爲輔助三角形.

22. 題. 作一三角形, 已知底邊之長加上其他二邊之差, 其頂角, 及底邊上之垂高 $(a+b-c, A, ha)$.

設 ABC(第 20 圖)爲所求三角形. 如欲 $a+b-c$ 置入圖中, 則延長 BC, 而割去 $CD=AC$ 及 $BE=BA$. 故 $ED=a+b-c$. 等腰三角形 ABE 中:



第 20 圖

$$\angle BAE=\angle BEA=90^\circ-\tfrac{1}{2}B.$$

故: $$\angle AED=90^\circ+\tfrac{1}{2}B.$$

又等腰三角形 ACD 中:

$$\angle ADC=\angle CAD=\tfrac{1}{2}C.$$

*譯者附註——然則此題可有幾解?

故三角形 AED 中:

$$\angle EAD=180^\circ-(90^\circ+\tfrac{1}{2}B)-\tfrac{1}{2}C=90^\circ-\tfrac{1}{2}(B+C)=\tfrac{1}{2}A.$$

然則輔助三角形 EAD 中,今知底邊 $ED=a+b-c$,其頂角 $EAD=\frac{1}{2}A$,及底邊上之垂高 $=ha$. 故此三角形可作其頂點 A 屬於所求三角形中,而頂點 B, C 爲 AE, AD 二邊之中垂線與底邊 ED 之交點.此題可有二解,一解,或無解.

註. 三角形 AED 之三角,可用 ABC 之三角表之.

習　題

作一三角形,已知:

1. $a+b-c,\ B,\ C.$

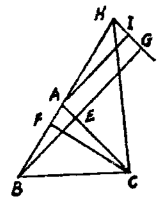
2. $a+b-c,\ A,\ B-C.$

3. $a+b-c,\ ha,\ B.$

4. 作一直三角形,已知二股和與斜邊之差,及一銳角 (acute angle).

23 題. <u>作一三角形,已知其底邊,其對角,及其他二邊上垂高之和 $(a, A, hb+hc)$.</u>

設 ABC 爲所求三角形(第21圖).延長垂高 BE,而割去 EG 等於垂高 CF. 經過 G,畫 AC 之平行線 GH,使遇



第 21 圖

AB之延線於H點. 故$\angle BHG=\angle BAC=A$, 而$\angle BGH=\angle BEA=90°$. 然則直三角形$BGH$中, 今知其股邊$=hb+hc$, 而其銳角$BHG=A$. 故此三角形可作, 而乃$BH$爲可知之長. 今易表明$BH=b+c$. 蓋先畫線$BH$之平行線$AI$, 遇$HG$於$I$點. $AIGE$爲一長方形, 所以$AI=EG=hc$. 今直三角形ACF及AHI中, $AI=CF=hc$, $\angle AHI=\angle CAF=A$. 故此二形爲全等形, 而$AH=AC=b$; 所以$BH=BA+AH=b+c$. 所求三角形ABC中, 今知a, A, $b+c$, 而此題變爲可知之題(19).*然自輔助三角形BGH欲引渡而得所求三角形ABC, 亦可直接求諸圖中. 蓋BGH之頂點B亦屬於ABC中. 欲求C點, 則在等腰三角形AHC中, 可見$\angle AHC=\angle ACH=\frac{1}{2}A$. 且旣$AHG$角$=A$. 故$HC$爲$H$角之平分線. 然則三角形$BGH$中, H角之平分線爲頂點C之一幾何軌跡. C之另一軌跡爲一圓形, 有圓心B及已知半徑a.* 於是頂點A爲CH線段之中垂線與BH邊之交點.

註. 如已知角A爲鈍角(obtuse angle), 則三角形BGH不夾A角, 而夾其補角, 此題仿之可解.

*譯者附註——然則此題可有幾解?

界說. 直三角形 BGH 包含三角形 ABC 之 $b+c$, $hb+hc$, 及 A; 故此三件中, 任知其二, 即可得其第三件. 凡有此種性質之三件, 謂之基件(datum).

習　題

作一三角形, 已知:

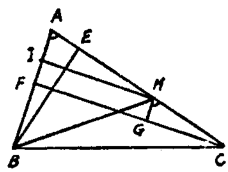
1. $hb+hc$, B, C.
2. $hb+hc$, b, c.
3. $hb+hc$, b, A.
4. $b+c$. $hb+hc$, a.
5. $b+c$, $hb+hc$, $B-C$.

暗示. 三角形 BGH 可得 A 角. 故 $B+C$ 等於 $180°-A$. 乃作 B 及 C 角.

6. a, $b+c$, $hb+hc$.
7. $a-b$, $hb+hc$, A.

24. 題. 作一三角形, 已知其底邊, 其對角, 及其他二邊上垂高之差. (a, A, $hc-hb$).

設 ABC(第 22 圖) 為所求三角形. 畫垂高 BE 及 CF, 割去 $FG=BE$, 而乃 $CG=hc-hb$. 畫 AB 之平行線 GH. 如是則直三角形 CGH 中, 其股邊 $CG=hc-hb$, 及 CHG 角 $=A$.



第 22 圖

故此三角形可作,而CH可得.今乃表明$CH=b-c$.先自H放落AB上之垂線HI. $HI=FG=BE$.故直三角形ABE及AHI爲全等形,因有公角A,及$BE=HI$;所以$AH=AB$,而乃$CH=CA-AH=CA-AB=b-c$.既得$b-c$,則此題變作一三角形,已知a, A, $b-c$ (20).* 但三角形ABC亦可直接用三角形CHG得之.

蓋頂點C屬於所求三角形中.BH爲AHG角之平分線;此極易看出,因等腰三角形ABH中,AHB角$=\frac{1}{2}(180°-A)$,但AHG角$=180°-\angle GHC=180°-A$.然則GHC角之補角平分線爲頂點B之一軌跡其另一軌跡爲一圓形,有圓心C及已知半徑$CB=a$.* 今頂點A爲BH之中垂線與CH延線之交點.

註. (a)如已知角A爲鈍角,則三角形CGH將夾A之補角,而非A角.此題仿之可解.

(b) $b-c$, $hc-hb$, A,此三件成一基件.

* 譯者附註——然則此題可有幾解?
* 譯者附註——此題可有幾解?

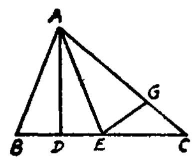
習　　題

作一三角形,已知:

1. $hc-hb,\ B,\ C.$
2. $hc-hb,\ b,\ c.$
3. $hc-hb,\ b-c,\ B-C.$
4. $hc-hb,\ A,\ b+c.$

25. 題. 作一三角形,已知一底角,底邊上之垂高,及底邊被垂足分成二線段之差,此即其他二邊在底邊上所有射影(projections)之差($B,\ ha,\ p-q$).

設 ABC(第23圖)爲所求三角形.自 A 放落 BC 上之垂線 AD,而割去 $DE=DB$.三角形 AEC 中,$EC=DC-DE=DC-BD=p-q$,其垂高 $AD=ha$,而其 AEC 角 $=180°-B$;故此三角形可作.其頂點 A 及 C 亦屬於三角形 ABC 中,而頂點 B 爲 EC 與一圓形之交點,此圓以 A 爲圓心 AE 爲半徑.**



第 23 圖

此已假設 B 爲銳角.如 B 爲鈍角,則此題失其意義.因 b 與 c 所有射影之差等於 a.然如 $p-q$ 易以 $p+q$,則一類似問題仍可解.

** 譯者附註——然則此題可有幾解?

26. 註. 輔助三角形 AEC 包含 ABC 之下件: $EC=p-q$, $AE=c$, $AC=b$, C, AEC 角 $=180°-B$, EAC 角 $=180°-C-(180°-B)=B-C$. 故用此輔助三角形可解下題.

習題

作一三角形, 已知:

1. $p-q$, B, C.
2. $p-q$, b, c.
3. $p-q$, b, B.
4. $p-q$, ha, b.
5. $p-q$, b, $B-C$.
6. $p-q$, ha, $B-C$
7. $p-q$, A, ha.

暗示. 自 E 點豎立 BC 之垂線, 遇 AB 於 F. $EF=2ha$. 作三角形 EFC. A 之軌跡為 EF 之中垂線, 其另一軌跡為一圓形, 於此圓之任何一點上, CF 張有一角 $180°-A$.

8. p, q, C.
9. $p-q$, c, C.
10. p, q, $B-C$.
11. $p-q$, ha, b^2+c^2.
12. $p-q$, C, b^2-c^2.

27. 題. 作一三角形, 已知其頂角, 其夾邊 (including sides) 之差, 及此二邊在底邊上所有射影之差 (A, $b-c$, $p-q$).

設 ABC (第23圖)爲所求三角形. 用 A 爲圓心 AB 爲半徑, 畫一圓, 遇 BC 於 E, 及 AC 於 G, 而乃 $EC=p-q$, $CG=b-C$, EAC 角 $=B-C$ (26). 故等腰三角形 EGA 中, EGA 角 $=90^\circ-\frac{1}{2}(B-C)$. 今:

$$\angle GEC=\angle AGE-\angle GCE=90^\circ-\tfrac{1}{2}(B-C)-C$$
$$=90^\circ-\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C-C=\tfrac{1}{2}A.$$

然則三角形 EGC 可作, 因知二邊及一角. EG 之中垂線. 遇 CG 之延線於 A; 而以圓心 A 半徑 AG 之圓形, 遇 EC 之延線於 B.

註. 如已知 $b+c$ 而非 $b-c$, 則此題仿之可解, 蓋可在 AC 之延線上割去 AB.

習　題

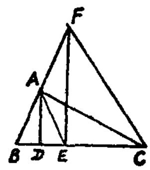
1. $p-q$, $b-c$, C
2. $p-q$, $b-c$, $B-C$.
3. $p-q$, $b+c$, C.
4. $p-q$, $b+c$, $B-C$.

28. 題. 作一三角形, 已知其頂角, 底邊上之垂高, 及

*譯者附註——此題可有幾解?

<u>其他二邊在底邊上所有射影之差($A, h_a, p-q$).</u>

設 ABC (第24圖)爲所求三角形, AD 爲垂高, E 對於 D 爲 B 之對稱點, 而 F 爲 BC 之垂線 EF 與 AB 延線之交點. 相似直三角形(similar right triangles) BEF 及 BAD 中, $EF:AD=BE:BD=2:1$. 直三角形 EFC 可作, 因 $EF=2AD=2h_a$, 而 $EC=p-q$. 又 CF 線段張一可知角$(180°-A)$於 A 上, 此成 A 之一軌跡; A 之第二軌跡爲 EF 之中垂線. AF 線遇 EC 於所求三角形之第三頂點 B.*



第 24 圖

4. 相似形及位似形

A. 相似性

有時不顧題中已知條件之一, 可作一圖, 與所求之圖相似. 從所作之相似圖, 與所不顧的條件, 常能推演另一條件, 用之可解此題. 以下例題, 即用此法.

29. 題. <u>作一正方形, 已知一邊與一對角線之和.</u>

一切正方形, 彼此相似, 故先任作一正方形 使 a', d' 表示其邊及對角線, 而 a, d 爲所求正方形之相當件.

*譯者附註——此題可有幾解

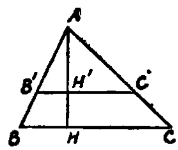
(corresponding elements) 自此二形之相似性,乃有:

$a:a'=d:d'$, 或 $(a+d):(a'+d')=a:a'$.

但 $a+d$ 爲已知件.故上之比例已知三項;故 a 可作如比例第四項,而此題變作一正方形,已知其邊.

30.題. 作一三角形,已知其三角,及其面積 m^2.

設 ABC (第25圖)爲所求三角形.不顧其已知之面積可作一三角形 $AB'C'$ 有此已知之三角.故與 ABC 相似.令 ABC 及 $AB'C'$ 之垂高爲 AH 及 AH'.相似三角形中:



第 25 圖

$$\frac{AH}{AH'}=\frac{BC}{B'C'}, \text{或} \frac{\overline{AH}^2}{\overline{AH'}^2}=\frac{AH\cdot BC}{AH'\cdot B'C'}.$$

今: $AH\cdot BC=2m^2$.

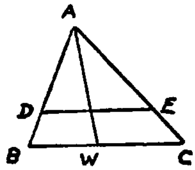
故: $$AH=\frac{AH'\cdot m\sqrt{2}}{\sqrt{AH'\cdot B'C'}}.$$

其分母 $\sqrt{AH'\cdot B'C'}$ 爲可知二線段 AH' 及 $B'C'$ 之比例中項.而乃 AH 爲 AH', $m\sqrt{2}$,* 及此比例中項之比例第四項.(fourth proportional) 故知 ABC 之垂高 AH.今可作此三角形如下:在 AH' 上割一線段 $AH=AH$,而經過 H 畫 $B'C'$ 之平行線 BC,使遇 AB', AC' 二線於 B 及 C 點.

*譯者附註——請讀9,軌跡10)之附註二及附註三. m^2 旣爲面積,則可變此面積而成正方形於是正方形之邊 m 不用長度單位而即可求之.

31. 題. 作一三角形,已知一角,此角之平分線,及此線所分對邊而成二線段之比.

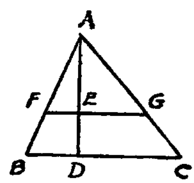
已知角 A 之 AB, AC, 二邊(第 26 圖),乃與已知角之對邊上 BW, CW 二線段有同一比值 $\frac{m}{n}$.故如作三角形 ADE,有已知角 A,及 AD, AE 二邊,使 $AD:AE=m:n$,則此三角形將與所求三角形相似.然後畫 A 角之平分線,而割去 AW 等於已知平分線,又經過 W 畫 DE 之平行線 BC,使遇 AD 於 B 及 AE 於 C.三角形 ABC 全合題中之條件.



第 26 圖

32. 題. 作一三角形,已知其二邊,及底邊與其垂高之比 $(b, c, a:ha=m:n)$.

設 ABC (第 27 圖) 爲所求三角形.畫垂高 AD,割去 $AE=n$,而畫 BC 之平行線 FEG,三角形 AFG,與 ABC 爲相似形.



第 27 圖

故: $\frac{FG}{AE}=\frac{BC}{AD}$.但 $\frac{BC}{AD}=\frac{m}{n}$.即假設之條件.

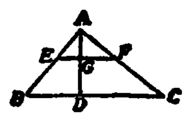
故: $\frac{FG}{AE}=\frac{m}{n}$,或 $FG=m$.

另一方面看來, $\frac{AF}{AG}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$.

然則所求三角形 ABC 之相似三角形 AFG 可作,因知底邊 $FG=m$, 垂高 $EA=n$, 而其二邊之比 $AF:AG=c:b$ (軌跡 11). 既作 AFG, 則在 AF 上割去一線段 $AB=c$, 而經過 B 畫 FG 之平行線,使遇 AG 於 c, 此即所求三角形 ABC 之第三頂點. 此題可有二解,一解,或無解.

33. 題. 作一直三角形,已知其周線,及二股平方之比 $(2p,\ b^2:c^2=n:m)$.

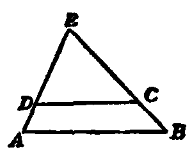
垂高 AD (第 23 圖) 分斜邊 BC 成二線段 BD 及 DC, 以致 $BD:CD=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=m:n$, 其 $m:n$ 爲已知比與 BC 平行之任何一線 EF, 被垂高 AD 分成二線段 EG 及 GF, 以致 $EG:GF=BD:CD=m:n$ 三角形 AEF 可作割去 $EG=m$ 及 $GF=n$, 於是 EF 之垂線 AG 將遇 EF 爲直徑之圓形於 A 點. 所求三角形之 AB 邊,比 AE 線,將如 ABC 之已知周線 $2p$, 比 AEF 之周線



第 28 圖

34. 題. 作一梯形,已知其不平行邊(non-parallel sides), 不平行邊之夾角,及二平行邊之比.

設 $ABCD$ (第 29 圖) 爲所求之梯形,而 E 爲不平行邊 AD, BC 之交點.三角形 ABE 與 CDE 相似.



第 29 圖

故:
$$\frac{EC}{EB}=\frac{ED}{EA}=\frac{CD}{AB}=\frac{m}{n},$$

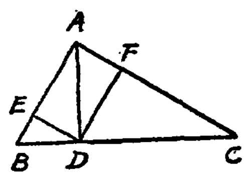
或
$$\frac{EC}{EB-EC}=\frac{ED}{EA-ED}=\frac{m}{n-m},$$

或
$$\frac{EC}{BC}=\frac{ED}{AD}=\frac{m}{n-m}.$$

然則線段 EC, ED 可作.故亦可作三角形 ECD,因知其二邊及一夾角作此三角形之後,延長 ED 而割去已知長 DA.經過 A 點而與 CD 平行之線,得所求梯形 $ABCD$ 之第四頂點 B 於 EC 之延線上.

35,題. 求二線,使此二線之比等於二立方之比.

設 m, n 爲二立方體(cubes)之邊.作一直三角形使其二股 AB, AC (第30圖)等於 m, n, 而自 A 放落斜邊 BC 上之垂線 AD, 又自 D 放落 AB, AC 上之垂線 DE, DF. 直三角形 ABD 中, $\overline{BD}^2=AB\cdot BE$, 而直三角形 ADC 中, $\overline{CD}^2=AC:CF$.



第 30 圖

故:
$$\frac{BE}{CF}=\frac{\overline{BD}^2}{\overline{CD}^2}\cdot\frac{AC}{AB}=\frac{\overline{BD}^2}{\overline{CD}^2}\cdot\frac{n}{m}.$$

* 譯者附註——此題可有幾解?

** 譯者附註——此題可有幾解?

直三角形 ABC 中：

$$\frac{\overline{AB}^4}{\overline{AC}^4}=\frac{BD}{CD}, \text{或} \frac{\overline{AB}^4}{\overline{AC}^4}=\frac{\overline{BD}^2}{\overline{CD}^2},$$

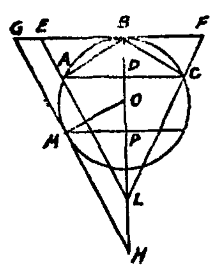
$$\text{或} \frac{\overline{BD}^2}{\overline{CD}^2}=\frac{m^4}{n^4}.$$

故：
$$\frac{BE}{CF}=\frac{m^4}{n^4}\cdot\frac{n}{m}=\frac{m^3}{n^3}.$$

註. 自 E, F 畫 BC 之垂線 EG, FH, 而乃 $\frac{BG}{CH}=\frac{m^4}{n^4}$. 又自 G, H 畫 AB, AC 之垂線 GI, HJ, 而乃 $\frac{BI}{CJ}=\frac{m^5}{n^5}$. 依次類推.

36. 題. 在一已知圓中內接一等腰三角形，已知其底邊與垂高之和.

設 ABC 爲所求三角形(第 31 圖). 延長垂高 BD, 割去 $DL=AC$, 而乃 BL 等於已知長 s. 命自 B 點所畫之切線與 LA, LC 二線之交點爲 E, F. 三角形 ALC 與 LEF 爲相似形. 故 $EF=LB=s$, 或 $BE=\frac{1}{2}s$. 故得下之作法：在此圓之切線上，割去 $BE=\frac{1}{2}s$. 經過 B 畫此圓之直徑，



第 31 圖

割去 $BL=s$, 而連接 L, E. LE 線將遇此圓於所求三角

形之頂點 A.

如 LE 線遇此圓於二點，則此題將有二解，如 LE 與此圓相切，則有一解.

如遇相切之情形，而令其切點爲 M，則三角形 POM, BGH 爲相似形；故：

$$MP : OP = HB : BG = s : \tfrac{1}{2}s = 2.$$

故三角形 OPM 中，

$$\overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{OP}^2 + 4\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 = R^2,$$

或 $$OP = R : \sqrt{5}$$

又三角形 MHO, MHP 爲相似形.

故： $$OH : OM = OM : OP,$$

或 $$OH = \overline{OM}^2 : OP = R^2 : (R : \sqrt{5}) = R\sqrt{5},$$

所以： $$S = BH = OH + OB = R\sqrt{5} + R = R(\sqrt{5} + 1).$$

此用已知圓之半徑表示 S 之最大限度 (upper limit). 如 S 大於 $R(\sqrt{5}+1)$，則此題無解.

當 $S = 2R$ 之時，此題僅有一解. 如 S 小於 $2R$，此題有一適當之解；其第二解所合之條件，變爲垂高與底邊之差等於 S.

習　題

作一三角形，已知：

1. $A, B, 2p$.　　2. $A, B, ha \pm hb$.

3. $A, B, b \pm c$.　　4. $A, b : c, ha$.

5. $A, a, b : c$.　　6. $a : b, b : c, ta + tb - tc$.

7. $A, a : c, hc$.　　8. $A, a : b, 2p$.

9. (ma, b) 角, (ma, c) 角, 及 S (面積).

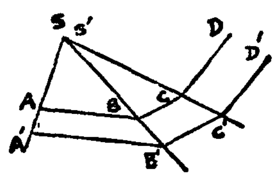
10. 作一平行四邊形,已知其面積及每一對角線與其一邊之比.

11. 已知一圓及二半徑之延線,在此延線之中,畫此圓之切線,使被切點分成已知比.

B. 位似形

37. 界說. 如兩個相似多角形之相當邊平行,則此兩個多角形謂之坐落相似 (similarly situated) 或位似 (homothetic).

38. 定理. 兩個位似多角形之相當頂點 (corresponding vertices) 連成共點線 (concurrent lines) (即相遇於一點).



第 32 圖

設 $ABCD\cdots$, $A'B'C'D'\cdots$ 爲兩個多角形,而 S 爲 AA' 與 BB' 之交點 (第 32 圖) 如證此題,必先表明任何別對相當頂點 C, C' 之連線,亦將經過 S. 如 CC' 不過 S, 則令 CC 與 BB' 之交點爲 S'. 相

似三角形 SAB 及 $SA'B'$ 中,

$$\frac{SB'}{SB}=\frac{A'B'}{AB}.$$ 又相似三角形 $S'B'C'$, $S'BC$ 中,

$$\frac{S'B'}{S'B}=\frac{B'C'}{BC}.$$

但依假設 $$\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'B'}{AB}.$$

故: $$\frac{SB'}{SB}=\frac{S'B'}{S'B}, \text{ 或 } \frac{SB'}{SB-SB'}=\frac{S'B'}{S'B-S'B'},$$

或 $$\frac{SB'}{BB'}=\frac{S'B'}{BB'},$$

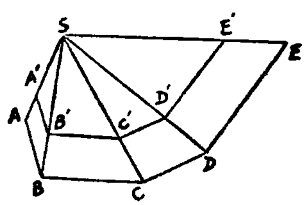
故 S' 與 S 相合.

39. 界說. S 點稱爲兩個多角形之**相似心** (center of similitude) 或**位似心** (homothetic center) 而其比值 K

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\cdots=\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\cdots=K$$

稱爲此圖之**相似比** (ratio of similitude) 或**位似比** (homothetic ratio).

40. 定理. 已知任何多角形 $ABCD\cdots$ (第 33 圖) 及一定點 S, 如在其射線 $SA, SB, SC, \cdots$ 上割去線段 $SA', SB', SC', \cdots$ 使



第 33 圖

$$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}=\cdots=K,$$

<u>其 K 爲一已知數，於是 $A'B'C'\cdots$ 將成一多角形與 $ABCD\cdots$ 位似.</u>

三角形 SAB 與 $SA'B'$ 顯爲相似形. 故 $A'B'$ 平行 AB，而 $\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=K$. 故此多角形之相當邊成比例而又平行.

41. 界說. 如 A, A' 二點同在 S 之一旁，此圖對於 S 稱爲"正相似"(directly similar)或"正位似"(directly homothetic)

如 A, A' 在 S 之二旁，此圖稱爲"倒相似"(inversely imilar)或"倒位似"(inversely homothetic).

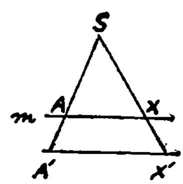
正位似之圖中，其位似比 K 爲正數(positive)而在倒位似之圖中爲負數(negative).

當位似比等於 -1 之時，此圖對於 S 謂之對稱.

已知位似心 S 及位似比 K，而設想一動點(variable point) A 繞一已知之曲線(curve) (C). 則得 A 之位似點 A' 所繞之路 (C'). 此二曲線 (C') 及 (C) 謂之位似.

42. 定理. <u>直線之位似形，爲一直線，與此已知線平行</u>

設 A(第 34 圖)爲已知線 m 上之任何一點，而 A' 爲 A 之相當點，使 $SA':SA=K$，其 K 爲已知比.

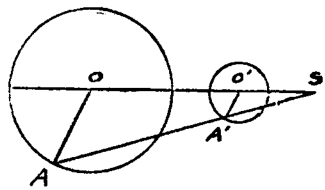


第 34 圖

令 m 上之任何別點爲 X. 經過 A' 而

與 m 平行之線，將遇 SX 於一點 X'，以致 $SX':SX=SA':SA=K$. 故 m 上之諸點有其相當點在經過 A' 而與 m 平行之直線上.

43. 定理. 圓之位似形爲一圓形.



第 35 圖

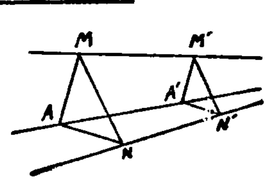
設 S(第 35 圖)爲已知之位似心，K 爲其位似比，而 O 爲已知圓之圓心. 作 O 之相當點 O，而令已知圓上 A 點之相當點爲 A'. 相似三角形 SOA 及 $SO'A'$ 中：

$$\frac{OA}{O'A'}=\frac{SA}{SA'}=\frac{1}{K}, \text{或 } O'A'=K\cdot OA.$$

A' 點離此定點 O'，既有定距 $K\cdot OA$. 故 A 之軌跡爲一圓形.

須知二圓之圓心爲相當點，又此二圓半徑之比等於其相似比.

44. 題. 經過一已知點，畫一線，使與已知二線同交於一點，但不能延長此已知線使之相交.



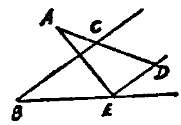
第 36 圖

任畫二平行線 MN, $M'N'$(第 36 圖)遇已知二線於 M,N 點；M', N' 點. 已知點 A 各連 M, N 二點而經過 M', N' 畫 MA.

NA之平行線,且令此平行線之交點爲A'.三角形AMN, $A'M'N'$爲位似形.故MM', NN', AA'爲共點線(38),此即AA'爲所求線.

45.題. 經過一已知點,畫一線,使一已知角之二邊,割此線而有之線段,被已知點分成一已知比.

已知角之一邊BC上(第37圖)任取一點C,而與已知點A相連.於是在AC上割去一線段AD.使$AC:AD$等於已知比$m:n$.因C點可畫此BC線,故D點將畫其位似軌跡即爲BC之平行線ED(42).如E爲此角之其他一邊與ED線之交點,則AE線爲此題之解答.

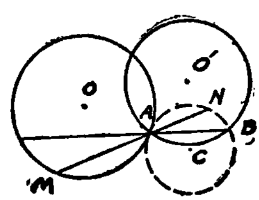


第37圖

如A點在已知角之外,則所割線段被A外分.

46.題. 經過二圓交點之一,畫一線,使此二圓割此線而得之二弦,有一已知比.

二圓之一(O)上,任取一點M(第38圖),連至二圓之交點A在MA上割去AN,使$AM:AN=K$,* 其K爲已知比.因M可畫成(O)圓,故N點另畫一圓(C),與(O)位似,A點爲其位似心,而K爲其位似比.(C)圓將遇

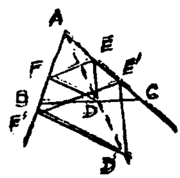


第38圖

已知之其他一圓 (O') 於 A, 及另一點 B. AB 線爲此題之解答.

47. 題. 在一已知三角形中,內接另一三角形,使其各邊與一(第三)已知三角形之各邊平行.

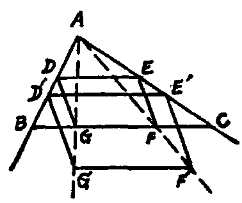
設 DEF (第 39 圖) 爲已知三角形 ABC 中所求之內接三角形. 任畫一線 $E'F'$ 與 EF 平行, 而經過 E', F' 二點畫 ED 及 FD 之平行線. 如 D' 爲此平行線之交點, 則三角形 DEF 與 $D'E'F'$ 爲位似形. 故 DD', EE', FF' 爲共點線, 此即 DD' 二點與 A 爲共線點. 今三角形 $D'E'F'$ 可作且 AD' 線遇 BC 於所求三角形之頂點 D, 故其作法即易成就.



第 39 圖

48. 題. 在一已知三角形中,內接一平行四邊形,使有一已知角,及其鄰邊(abjacent sides)之比有一已知值.

設 $DEFG$ (第 40 圖) 爲已知三角形 ABC 中所求之內接平行四邊形. 任畫一線 $D'E'$ 與 DE 平行. 經過 D' 畫 DG 之平行線, $D'G'$ 而割去 $D'G'$, 使 $D'E' : D'G' = DE : DG =$



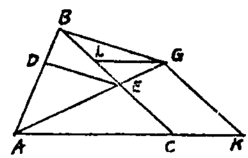
第 40 圖

* 譯者附註——應知其長度單位. 如已知比爲 $m:n$, 則其長度單位不必知之.

K，其 K 爲已知比.經過 E'，G' 畫 EF，GF 之平行線相遇於 F'，依作法,平行四邊形 $DEFG$ 與 $D'E'F'G'$ 爲相似形，而坐落相似.故 DD'，GG'，FF'，EE' 爲共點線，此即 F，F' 二點與 A 爲共線點，而 G，G' 二點亦然故如作 $D'E'F'G'$，即可作所求之平行四邊形最簡之作法，乃取 ABC 之底邊 BC 爲 $D'E'$ 線.

49. 題. 在一已知三角形 ABC 中，畫一線 DE，連接 AB 上之 D 點與 BC 上之 E 點，使 $AD=DE=EC$.

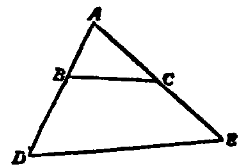
設 $ADEC$ (第 41 圖) 爲所求之圖.經過 B 畫 DE 之平行線 BG，遇 AE 於 G，又經過 G 畫 BEC 之平行線 GK，遇 AC 於 K.四邊形 $ADEC$ 及 $ABGK$ 顯係位似.故 $KG=GB=BA$，今 AB 爲已知之邊，故四邊形 $KGBA$ 可作如下：在 CB 上割去 $CL=AB$，而經過 L 畫 AC 之平行線 LG，遇圓心 B 半徑 AB 之圓形於 G 點,經過 G 而與 BC 平行之線 GK 作成此四邊形 $KGBA$. AG 線遇 BC 於 E，經過 E 而與 BG 平行之線爲所求線.



第 41 圖

50. 題. 作一三角形，已知其頂角，及底邊加每一其他二邊而有之二和 $(A, a+b, a+c)$.

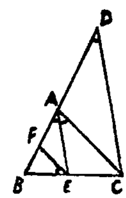
設ABC(第42圖)爲所求三角形.延長AB及AC,割去$BD=BC$及$CE=BC$.故$AD=a+c$,$AE=a+b$,所以三角形DAE可作,因知二邊及其夾角.自此三角形欲引渡而得ABC,則在ADE中畫一線BC,使$DB=BC=CE$,此題卽變爲上題(49).



第42圖

51.題. 作一三角形.已知其二邊,及其夾角之平分線(b, c, ta).

設ABC爲所求三角形.畫平分線$AE=ta$(第43圖).B點在圓心A及半徑$AB=c$之圓形上.但$EC:EB=b:c$.故B旣畫成此圓,c點亦將畫成一圓,與之位似,此以E點爲位似心,而其位似比爲$-(b:c)$,因B及C必在E之二旁.C之另一軌跡爲一圓形,有圓心A及半徑$AC=b$.故C點可求,而三角形ABC卽易作成.



第43圖

另一方面.延長BA(第43圖),而割去$AD=AC=b$.ADC角$=\frac{1}{2}A$(19);故DC平行AE,而有:

$$\frac{BA}{BD}=\frac{BE}{CD},\ 或\ CD=\frac{AE\cdot BD}{BA}=\frac{ta.(b+c)}{C}.$$

然則CD可作如比例第四項旣有CD,則作等腰三

角形 ACD. 於是延長 AD, 割去 $AB=c$, 而 ABC 爲所求三角形.

另一方面. 畫 AC 之平行線 EF (第43圖). 於是

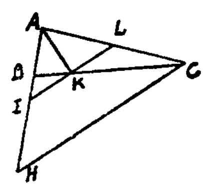
$$\frac{BF}{BA}=\frac{BE}{BC}, \quad \frac{BE}{EC}=\frac{c}{b}, \quad \frac{BE}{BC}=\frac{c}{b+c}.$$

故:
$$BF=\frac{c^2}{b+c},$$

而
$$AF=AB-BF=c-\frac{c^2}{b+c}=\frac{bc}{b+c}.$$

故 AF 可作. 今三角形 AFE 爲等腰三角形, 因 BFE 角 $=BAC$ 角 $=A$ 角, 而 BAE 角 $=\frac{1}{2}A$. 故三角形 FAE 可作, 因知其三邊. 乃得 FAE 角 $=\frac{1}{2}A$, 故又得 A 角.

另一方面. AB 上(第44圖)割去 $AH=AC=b$. 平分線 AK 垂直 HC. 經過 K 畫 HC 之平行線 IL. 乃有:



第 44 圖

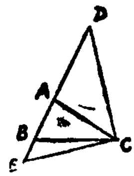
$$\frac{BI}{IH}=\frac{BK}{KC}=\frac{c}{b}.$$

故 I 點分可知線段 $BH=b-c$ 成一可知比 $c:b$. 故此點可得, 且可作直三角形 IAK, 因知其股邊 $AK=ta$ 而斜邊 $AI=IB+c$. 此三角形得 $\frac{1}{2}A$, 故又得 A 角.

52. 題. <u>作一三角形, 已知其底邊, 其對角, 及其他二</u>

邊之和比此二邊之差$[a, A, (b+c):(b-c)]$.

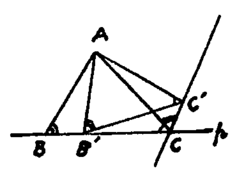
設 ABC (第45圖)爲所求三角形.割去 $AE=AD=AC$. BDC 角 $=\frac{1}{2}A$ (19);而 BEC 角 $=90^\circ-\frac{1}{2}A$(20).故知 E, D 二點所各有之一幾何軌跡(軌跡7).但 $BD:BE$ 爲已知比.故由 E 之軌跡可推演 D 之另一軌跡,即取 B 點爲位似心而已知比爲其位似比.然則今有 D 點之二軌跡,故此點可得.CD 之中垂線交 BD 而得所求三角形 ABC 之第三頂點 A.



第45圖

53. 定理 一個三角形,已知其形狀(即已知其三角之大小),一頂點已定,另一頂點在一已知線上,則其第三頂點之軌跡爲一直線.

設 ABC (第46圖)爲此變動三角形(variable triangle)之位置.當是時,底邊 BC 與已知線 p 相合,而 $AB'C'$ 爲此變動三角形之另一位置.AB' 線段於 C 點及 C' 點上張有同角.故 $AB'CC'$ 爲內接四邊形,而 ACC' 角 $=AB'C'$.然則 BCC' 角 $=BCA+ACC'=BCA+AB'C'$.但 BCA 及 $AB'C'$ 爲已知之二角.故 CC' 線與已知線 p 成一定角.而且 C 點已定.故 CC' 線亦定,而



第46圖

成所求之軌跡.

須知C點爲p與一直線之交點,此直線經過A而與p成一C角.又須知CC'線與p所成之角,等於A.

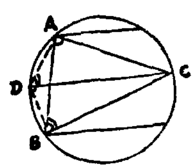
54.題. <u>作一三角形,與一已知三角形相似,且使一頂點與一已知點相合,而其他二頂點將在已知二直線上.</u>

任取一點B**在已知二線之一,p上.又在B與已知點A之連線AB上作一三角形ABC與所求三角形相似.B點旣畫p線,則C點將畫一直線s(53).s與第二已知線q之交點,爲所求三角形之頂點.其第三頂點即易求得.

55.題. <u>作一三角形,與一已知三角形相似,使其三頂點在已知三線上.</u>

此乃上題(54)之特例.A點可任意取在已知三線之任一線上.當已知三線平行之時,此題亦得下解:

設ABC(第47圖)爲所求三角形.畫ABC之外接圓,A及B各連D點.內接四邊形$ADBC$中,ADC角等於ABC角,而CDB角等於CAB角旣知



第47圖

*譯者附註——此題可有幾解?
**譯者附註——見附圖3.
***譯者附註——此題可有幾解?

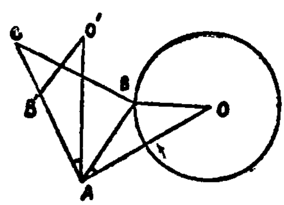
ABC 角及 CAB 角,故此題之解答,乃在中間一線上任取一點 D,而自此點畫二直線,一向上,一向下,與中間一線成已知之二角.此二線將遇其他已知二線於所求三角形之二頂點.

作在中間一線兩旁之二角,須知其頂點乃在其他二線上.

就三角形可有之大小而言,此題共有六解.*

56.定理. 一個三角形,已知其形狀,如一頂點已定,另一頂點在一已知圓上則第三頂點之軌跡爲一圓形.

設 A(第48圖)爲定點,O 爲已知圓之圓心.設 ABC 爲此變動三角形之位置而令 B 在(O)圓上.在 AC 上割去 $AB'=AB$.而在 AB' 上作一三角形 $AO'B'$ 與 AOB 爲全等形,使此二形坐落相似.依作法,既 $O'AB'$ 角 $=\angle OAB$.故 $O'AO$ 角 $=\angle B'AB$ 但 $B'AB$ 爲已知角.故 AO' 與定線 AO 成一定角.此即 AO' 爲一定方向.且依作法 $AO=AO'$,故 O' 爲一定點.但 $O'B'=OB$,故 B' 畫一圓形.



第48圖

今 $\frac{AC}{AB'}=\frac{AC}{AB}$ 爲常數,因已知三角形 ABC 之形狀.所以 C 點畫一曲線,與 B' 之軌跡爲位似形,此即圓形.

應知B與C二軌跡之關係．如B所環行之圓，再繞A旋轉，經過一常角BAC，則其新位置爲B'之軌跡．如以A爲位似心，而以$AC:AB$爲位似比，則此圖之位似形即爲C之軌跡．

57．題．作一三角形，與一已知三角形相似．使其頂點之一與一已知點相合，而其他二頂點在已知二圓上．

在已知二圓之一(P)上[**]任取一點B，又在B與已知點A之連線AB上作一三角形ABC與所求三角形相似．B點既畫(P)圓，則C點將畫一圓(56)，(S)．(S)與另一已知圓(Q)之一交點爲所求三角形之頂點．其第三頂點即易求得．[***]

58．題．作一三角形，與一已知三角形相似，使其三頂點在已知三圓上．

此乃上題(57)之特例．A點可任意取在已知三圓之任一圓上．

如已知三圓爲同心圓，則此題亦得下解：

設$A'B'C'$爲已知三角形，[****]O爲已知三圓之圓心，

[*] 譯者附註——見附圖4.
[**] 譯者附註——見附圖5.
[***] 譯者附註——此題可有幾解？
[****] 譯者附註——見附圖6.

而 $zz'z''$ 爲其半徑. 在 $A'B'$ 上作一點之軌跡, 使自此點至 A', B' 二點,其距離之比等於 $z:z'$ (軌跡11). 又在 $A'C'$ 上用 $z:z''$ 之比, 作一類似軌跡. 此二軌跡之交點 O' 連 $A'B'C'$ 三頂點.於是任畫半徑 $OA=z$. 作 AOB 角, AOC 角, 等於 $A'O'B'$ 角及 $A'O'C'$ 角, 而作此三角形 ABC.

二軌跡可相交於二點, 故另有一解.*

在外圓周上可放置任一已知角之頂點.

就三角形可有之大小而言, 此題可有十二解.**

如所有之軌跡並不相交, 則此題不成立.

習 題

1. 經過一已知點, 畫一線, 使三個已知共點線割此線而有之二線段, 有一已知比.

2. 經過一已知點, 畫一線, 使一已知線與一已知圓割此線而有之線段, 被已知點分成一已知比.

3. 經過一已知點, 畫一線, 交一已知圓使自此點至其二交點之距離, 有一已知比.

4. 已知三個同心圓,畫一割線,使第一圓與第二圓

---

*譯者附註——見附圖6.

**譯者附註——見附圖7.

中之線段,等於第二圓與第三圓中之線段.

5. 在一已知線上,求一點,自此點至此線上之一已知點,又至另一已知線,使其距離之比有一已知值.

6. 已知三個共點線,及一第四線,畫一截線(transversal),使此四線割此截線而有之三線段,有已知之比.

7. 畫一線,與一已知梯形之底邊平行,使此梯形之不平行邊割此線而有之線段,被二對角線三等分之.

8. 在一已知圓中,畫一弦,使被二半徑三等分,此二半徑已知其位置.

9. 經過圓上之一已知點,畫一弦,使被另一已知弦分成一已知比.

10. 經過圓中之一已知點,畫一弦,使被此已知點分成一已知比.

11. 畫一線,使二個同心圓割此線而得之二弦,有一已知比.

12. A 爲定點,P 爲定圓(圓心 C)上之動點;ACP 角之平分線遇 AP 於 Q. 求 Q 之軌跡.

13. APQ 爲一變動三角形;A已定,P在定線CD上行動;如 AP 遇 CD 之平行線於 R,又如 $PQ=AR$,又如 APQ

角爲一常數,證明Q之軌跡爲一直線.

14. 在一已知圓之扇形(sector)中,內接一正方形,使合二種情形:(*a*)正方形之二頂點在其圓弧上;(*b*)此二頂點在一半徑上.

15. 在一已知三角形中,內接一正方形.

16. 在一已知圓中,內接一長方形(rectangle),使與一已知長方形相似.

17. 在一已知之半圓中,內接一長方形,使與一已知長方形相似.

18. 在一已知三角形中,內接一長方形,使與一已知長方形相似.

19. 在一已知三角形中,內接一平行四邊形,已知鄰邊之比,及對角線之夾角.

20. 已知一三角形ABC,作一正方形,使二頂點在BA之延線及CA之延線上,而其對邊在BC上.

21. 作一三角形,與一已知三角形相似,使其一頂點與一已知點相合,另一頂點在一已知圓上,而其第三頂點在一已知線上.

第二章

三角形之性質

59. 記法. 三角形中,一定之點及線,如記以一定之字母則便利殊多.本章之記法,都用一定之字母.苟欲移作別用,則必預加說明.

A', B', C' 爲三角形 ABC 上 BC, CA, AB 三邊之中點.

D, E, F 爲垂高 AD, BE, CF 之垂足.

R, 外接圓之半徑(即外半徑).

O, 外心* (circumcenter).

I, 內心** (incenter), 又 I', I'', I''' 爲 BC, CA, AB 三邊上之傍切圓(excircles)圓心;而 r, r', r'', r''' 爲此圓形之半徑.

X, Y, Z 爲 BC, CA, AB 上之內切圓切點,而 X_1, Y_1, Z_1 爲圓心 I' 之傍切圓在 BC, CA, AB 上之切點; X_2, Y_2, Z_2 三點及 X_3, Y_3, Z_3 三點,仿之而爲其他二圓之切點.

H 爲垂心 (orthocenter).

G 爲重心 (centroid).

---

*譯者附註——即外接圓之圓心.

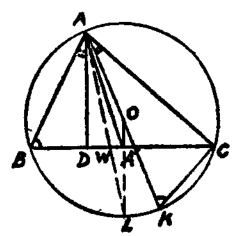
**譯者附註——即內切圓之圓心.

N 爲九點圓心 (nine-point center).

1. 外接圓

60 定理. 自三角形一頂點畫出之外直徑 (circumdiameter) 及垂高所成之夾角，等於此三角形其他二角之差.

設 AD (第 49 圖) 爲垂高，而 AK 爲直徑. 直三角形 ABD 及 ACK 中，B 角等於 K 角，因割同一圓弧，故:



第 49 圖

$$\angle BAD = \angle KAC = 90° - B,$$

而 $$\angle DAK = A - 2(90° - B)$$

$$= A + 2B - 180°$$

$$= A + 2B - A - B - C$$

$$= B - C.$$

讀者可證: B 角或 C 角爲鈍角，則此命題*(proposition) 仍成立.

61. 定理. 自一頂點畫出之垂高及外直徑所成之夾角，被此頂角之平分線平分

*譯者附註——陳述一事項者曰命題. 證明事項之陳述爲定理，而解事項之陳述爲問題.

設 AW 爲 A 角之平分線(第49圖). 旣 $\angle BAD=\angle CAO$ (60). 故 $\angle DAW=\angle OAW$.

另一方面. 自外心 O(第49圖)放落 BC 邊上之垂線 OL. L 點爲 $BLKC$ 弧之中點; 故 BAC 角之平分線 AW 必經過 L. OAL 爲等腰三角形, 而 OL 平行 AD 故 $\angle LAO=\angle OLA=\angle DAL$.

62. 註. 直三角形 ADW 中, $AD=ha$, $AW=ta$, 而 $\angle DAW=\frac{1}{2}(B-C)$. 故 $ha, ta, B-C$ 成一基件.

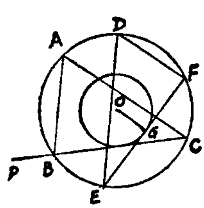
63. 定理 如一已知圓中, 內接一三角形, 使此三角形有一常角, 則其對邊與一定圓相切, 此定圓乃與已知圓同心.

讀者自證其理.

64. 註. 此題可視爲第一章軌跡7之逆題. 然則 a, A, R 三件成一基件.

65. 題. 在一已知圓中, 內接一三角形, 使其二邊與已知二線平行, 而其第三邊經過一已知點.

經過圓上任何一點 D, 畫二線, 與已知二線平行而遇此圓於 E, F (第50圖). EDF 爲可知角; 故線段 EF 可知其長(64). 故所求三角形 ABC 中, 經過已知點 P 之一邊, 可知其長.



第 50 圖

欲作三角形 ABC, 則自已知圓之圓心 O 放落 EF 之垂線 OG, 又用 O 爲圓心 OG 爲半徑畫一圓.自已知點 P 畫此圓之切線.此切線與已知圓之交點 B, C 爲所求三角形之二頂點.經過 B, C 而與已知二線平行之二線,相交於 ABC 之第三頂點 A 在此已知圓上.

此題可有二解,一解,或無解;其解答之多寡,取決於 P 點與 OG 圓之相關位置.

66.題. 作一三角形,已知一角之平分線,自同一頂點畫出之垂高及其外半徑(t_a, h_a, R).

三角形 ADW (第49圖)有 $AW=$ 已知平分線 t_a 爲其斜邊,及垂高 $AD=h_a$ 爲其股邊,故此三角形可作. AO 線與 AW 成 OAW 角 $=\angle WAD$. 此 AO 線乃經過所求三角形 ABC 之外心 (61) 割去 AO 等於已知半徑 R, 而乃 O 爲 ABC 之外心.

此題可有幾解?

67.題. 作一三角形,已知一頂點畫出之垂高,中線,及平分線(h_a, m_a, t_a).

有同一股邊 $AD=h_a$(第49圖),而其斜邊爲 $AA'=m_a$, $AW=t_a$ 之直三角形可作所求三角形 ABC 之外心 O, 在:(a)一直線上,此線與 AW 成一角等於 DAW 角(61);

在:(b)一垂線上,此線垂直 DA 於 A' 點.故 O 可求,而圓心 O 半徑 OA 之圓將遇 DA' 於所求三角形 ABC 之頂點 B, C.

68 題. 作一三角形,已知其外半徑,底邊上之中線,及二底角之差($R, ma, B-C$).

設 ABC(第49圖)爲所求三角形,內接於圓心 O 之圓中.令 A 角之平分線與(O)圓之交點爲 L.等腰三角形 OAL 中,OAL 角 $=\frac{1}{2}(B-C)$(61).故 AOA' 角 $=180°-(B-C)$.然則三角形 OAA' 中,今知其 AA' 邊 $=ma, OA=R$,及其 AOA' 角等於 $180°-(B-C)$.於是作此三角形,而用圓心 O 半徑 OA 畫一圓形.垂直 OA' 於 A' 之垂線將遇此圓於所求三角形 ABC 之二頂點 B, C.

此題可有二解,一解,或無解.

69. 題. 作一三角形.已知其外半徑,底邊上之中線,及底邊被垂足分成二線段之差($R, ma. p-q$).

設 ABC(第49圖)爲所求三角形,內接於圓心 O 之圓中.設 $CD=p, BD=q$,而乃 $DA'=CD-CA'=p-\frac{1}{2}(p+q)=\frac{1}{2}(p-q)$.

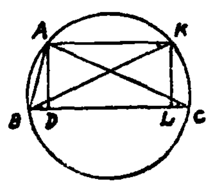
作直三角形 ADA',因知其斜邊 $AA'=ma$,及股邊 $DA'=\frac{1}{2}(p-q)$.乃得所求三角形,ABC 之外心 O 因 O 之一軌

跡爲一圓形,有圓心 A 及半徑 $OA=R$, 而其另一軌跡爲 DA' 之垂線垂直於 A. 以求得之 O 爲圓心 R 爲半徑之圓,將遇 DA' 線於所求三角形 ABC 之二頂點 B, C.

70. 註. 直三角形 ADA' 中, $AD=ha$, $AA'=ma$, 而 $DA'=\frac{1}{2}(p-q)$. 故 $ha, ma, p-q$ 成一基件.

71. 題. 作一三角形,已知其外半徑,二邊之和,及二底角之差 $(R, b+c, B-C)$.

設 ABC 爲所求三角形(第51圖)經過 A, 畫 BC 之平行線遇 ABC 之外接圓於 K. 等腰梯形 $ABCK$ 中, $\angle ABK=\angle ABC-\angle KBC=B-\angle BKA=B-\angle BCA=B-C$. 半徑 R 及可知角 $ABK=B-C$ 可得線段 AK (64). 然則三角形 ABK 中, 今



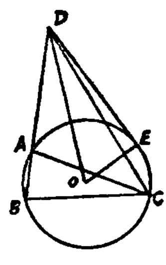
第51圖

知底邊 AK, 其對角 $B-C$, 及二邊之和 $AB+BK=AB+AC=b+c$. 故此三角形可作(19). 經過 B 而與 AK 平行之線將遇 ABK 之外接圓於所求三角形 ABC 之第三頂點 C.

72. 註. 自 A 及 K 放落 BC 上之垂線 AD, KL, 而乃 $CL=BD=q$, 而 $AK=DL=DC-CL=p-q$. 故三角形 ABK 中, $R, B-C, p-q$ 成一基件.

73.題. 作一三角形,已知其外半徑,其底邊,及其他二邊之和乘上其中一邊而有之積 $[R, a, (b+c)b]$.

設 ABC 爲所求三角形,內接於圓心 O 之已知圓中(第52圖).延長 BA,而割去 $AD=AC$,又自 D 畫此圓之切線 DE.既 $DA \cdot DB=\overline{DE}^2$ 或 $\overline{DE}^2=b(b+c)$,故 DE 可作如比例中項.* 直三角形 ODE 中,今知其二股邊;故斜邊 OD 可知.於是圓心 O 半徑 OD 之圓爲 D 之一軌跡.另一方面看來,$\angle ADC=\frac{1}{2}\angle BAC$,而 BAC 角可由 R 及 a 得之.故 D 又在一圓弧上,使 BC 張一可知角於此弧上.故又得 D 之另一軌跡.D 點與頂點 B 之連線將遇 (O) 圓於所求三角形 ABC 之第三頂點 A.



第 52 圖

習　題

作一三角形,已知:

1. $2p, R, A$.

暗示. R 及 A 得 a (46),而此題變成 a, A,及 $b+c=2p-a$.

2. $R, h_a, B-C$.　　3. $R, m_a, B-C$.

---

*譯者附註——應先知其長度單位,否則一個已知件 $b(b+c)$ 之比例中項不能作出.如 $b(b+c)$ 爲一已知面積,則其長度單位不必知之.

4. $R, ta, B-C$.　　5. R, C, b^2+c.

6. $R, A,$ 及 $a+b$, 或 $a-b$.　　7. R, a, hc.

8. $R, b+c, hb+hc$.

暗示. $b+c$ 及 $hb+hc$ 得 A 角 (23), R 及 A 得 a.

9. $R, b-c, hc-hb$ (24). 10. $R, A, hb+hc$.

11. $R, A, hc-hb$.　　12. $R, ta, B-C$.

13. $R, A, b-c$.　　14. $R, a, b-c$.

15. $R, a, B-C$.　　16. $R, A, b:c$.

17. $R, a:b:c$.　　18. $R, b, a:ha$.

19. $a, A, b(b+c)$.　　20. $R, ha, B-C$.

21. R, a, hb.　　22. $R, a, b+c$.

23. $R, b, B-C$.　　24. $R, B-C, b-c$.

25. $R, p-q, b+c$.　　26. $R, p-q, b-c$.

27. ha, ta, A.　　28. $A, ha:ta$.

29. 在一已知圓上,求一點使連至已知二點而割此圓於二點,並使此二點相連而成一已知長之弦.

30. 在一已知圓中,內接一三角形,使其三邊平行已知三線.

31. 在一已知圓上,求一點,使連至已知二點而割此圓於二點,並使此三點與所求點連成一三角形,使

此三角形有一已知角.

32. 在一已知圓中,內接一三角形,有一已知頂角,且使其底邊與另一已知圓相切,而另一邊與第三已知圓相切.

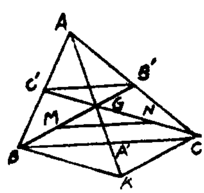
2. 中線

74 定理. 三角形二邊中點之連線與第三邊平行,而等於其半長.

75. 定理. 與三角形一邊平行之線,如經過另一邊之中點,則必經過第三邊之中點.

76. 定理. 三角形之三個中線相交於一點,而每一中線被此交點三等分

設 G 為 BB', CC'(第53圖)二個中線之交點. 令 BG, CG 之中點為 M,N. $B'C'$, MN 二線各平行 BC, 而等於 $\frac{1}{2}BC$(74). 故 $MNB'C'$ 為一平行四邊形. 故 $GB'=GM=MB$, 而 $GC'=GN=NC$.



第 53 圖

既任何二個中線被其交點三等分, 故第三中線亦被此點三等分.

從另一方面看來, $B'C'$ 線(第53圖)平行 BC, 而等於

$\frac{1}{2}BC$. 故三角形 $GB'C'$ 與 GBC 爲相似形，而 $BG:B'G=CG:C'G=BC:B'C'=2:1$. 故此定理云云.

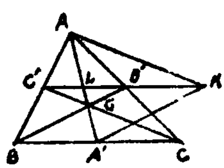
77 界說. G 點稱爲三角形 ABC 之重心.

三角形 $A'B'C'$ 爲 ABC 之中點三角形 (medial triangle).

78. 題. 作一三角形，已知其中線 (m_a, m_b, m_c).

設 ABC 爲所求三角形 (第 53 圖). 延長 AA'，而割去 $A'K=A'G$. 四邊形 $AGCK$ 中，其對角線互相平分. 故 $BGCK$ 爲一平行四邊形，而 $KC=BG=\frac{2}{3}m_b$，$BK=CG=\frac{2}{3}m_c$，而 $GK=2GA'=\frac{2}{3}m_a$. 故此平行四邊形可作. 此平行四邊形之第二對角線爲所求三角形之底邊，而其第三頂點 A 乃在 $A'G$ 之延線上割去 $A'A=m_a$ 以得之.

另一方面. 延長 $C'B'$ 而割去 $B'K=B'C'$ (第 54 圖). $AKCC'$ 之對角線互相平分；故 $AKCC'$ 爲一平行四邊形，而 $AK=C'C=m_c$. 又 $A'BB'K$ 爲一平行四邊形，因 $A'B$ 等於而又平行於 $B'K$. 故 $A'K=BB'=m_b$. 然則



第 54 圖

三角形 $AA'K$ 有已知中線爲其各邊，故可作此三角形如欲引渡而得所求三角形，則應知 AA' 被 $C'B'K$ 平分於 L；故 KL 爲 $AA'K$ 之中線而可知其長. 且 $C'L=LB'=$

$\frac{1}{3}KL$ 故可得 B', C' 二點，而三角形 ABC 即可作成。

79. 定理. 用一已知三角形之中線，作一新三角形，此新三角形之中線等於已知三角形相當邊之四分之三.

已知(78) $C'L=\frac{1}{3}KL$ (第54圖). 故 $KL=\frac{3}{4}KC'=\frac{3}{4}BC=\frac{3}{4}a$，又 KL 既爲 $AA'K$ 之任一中線 故此命題已證.

結果. 已知一三角形，1，用1之中線爲邊，作一新三角形，2；用2之中線爲邊，作一新三角形，3，依次類推. 單數之三角形，1, 3, 5, … 相似. 雙數之三角形，2, 4, 6, … 相似. 每一組中之三角形，其各邊爲前一三角形各邊之四分之三.

80 定理. 中線所成之三角形，其面積等於已知三角形面積之四分之三.

三角形 $AA'K$ (第54圖)之面積，等於 AKL 之面積加上 $A'KL$ 之面積. 此兩三角形有同一底邊 KL，及其垂高各等於 ABC 之 $\frac{1}{2}ha$；故 $AA'K$ 之面積：ABC 之面積 $=KL:BC$，而 $KL:BC$ 之比等於 $\frac{3}{4}$ (79).

81. 定理. 三角形中線之和，小於此三角形之周線.

延長 AA' 而割去 $A'K=AA'$ (第55圖). $ABKC$ 之對角線互相平分. 故 $ABKC$ 爲一平行四邊形，而 $BK=AC$. 故

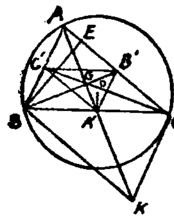
三角形 AKB 中,

$$AK<AB+BK=AB+AC,$$

或 $$2ma<b+c.$$

仿此: $$2mb<c+a.$$

$$2mc<a+b.$$



第 55 圖

故: $ma+mb+mc<a+b+c.$

82. 定理. 中線之和,大於三角形周線之四分之三.

三角形 BCG (第55圖) 中, 乃有:

$$\frac{2}{3}mb+\frac{2}{3}mc>a.$$

仿此: $$\frac{2}{3}mc+\frac{2}{3}ma>b,$$

$$\frac{2}{3}ma+\frac{2}{3}mb>c.$$

故: $$\tfrac{4}{3}(ma+mb+mc)>a+b+c,$$

或 $$ma+mb+mc>\tfrac{3}{4}(a+b+c).$$

另一方面. 以 ma, mb, mc 為邊之三角形 $AA'K$ 中 (第54圖), 其周線 $ma+mb+mc$ 大於此三角形中線之和 (79). 然此三角形之中線等於原三角形 (fundamental triangle) ABC 所有相當邊之 $\tfrac{3}{4}$ (79). 故 $ma+mb+mc$ 大於 $\tfrac{3}{4}(a+b+c)$.

83. 定理. 在一已知圓中, 可內接無數三角形. 使有

一已知之重心.

在已知圓(O)上任取一點A(第55圖),而連至已知重心G在AG之延線上,割去$GA'=\frac{1}{2}GA$,又連接A'與(O)之圓心O垂直.OA'於A'之垂直線將遇外接圓(O)於三角形ABC之其他二頂點.

表明三角形之重心必在此三角形之外接圓內.今假設G在題中已合此情形.

(O)上能否有一A點之地位,使不有其相當三角形ABC?

84 定理. 在一三角形中,較短之中線,對較長之一邊.

假設AB小於AC(第55圖).三角形ABA'及ACA'有兩對之邊相等,而其第三對不相等;故$AA'C$角大於$AA'B$角.另一方面看來,三角形BGA', CGA'有二對等邊,而其夾角不相等.故BG小於CG,或BB'小於CC',此即本題之證明.

85. 定理. 三角形及其中點三角形有同一重心.

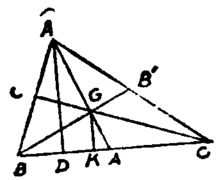
ABC之中線AA'平分$B'C'$線段(第55圖).故AA'亦爲三角形$A'B'C'$之中線.仿之而言其他中線.

86. 註. G點爲三角形ABC及$A'B'C'$之位似心,其位似比爲$-\frac{1}{2}$

87. 題. 作一三角形，已知二中線，及其第三邊上之垂高 (mb, mc, ha).

三角形 BGC 中（第 56 圖），已知 $BG=\frac{2}{3}mb$, $CG=\frac{2}{3}mc$, 及垂高 $CK=\frac{1}{3}ha$. 故 BGC 可作.

88. 題. 作一三角形，已知二中線，及一相當之垂高 (mb, mc, hb).



第 56 圖

直三角形 $BB'E$（第 55 圖）可作，而 ABC 之重心，G 可求. 頂點 C 在 EB' 與一圓形之交點上，此圓以 G 爲圓心，$GC=\frac{2}{3}mc$ 爲半徑. 頂點 A 對於 B' 點爲 C 之對稱點.

89. 題. 作一三角形，已知一角，及其夾邊上之二中線 (A, mb, mc).

畫 $BB'=mb$（第 56 圖）. BB' 線張已知角於頂點 A 上；故有 A 之一軌跡（9, 軌跡 7）. 頂點 C 畫一軌跡，與 A 之軌跡對於 B' 爲對稱. 今 G 點可在 BB' 上求之，而乃 C 在 G 爲圓心 $GC=\frac{2}{3}mc$ 爲半徑之圓形上.

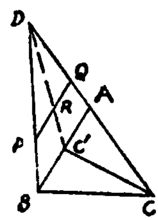
90. 作一三角形，已知其底邊，其他二邊上中線之比，及此二邊平方之差 $(a, mb:mc, b^2-c^2)$

三角形 BGC 中（第 56 圖），今知底邊 $BC=a$, 及其他二邊之比 $BG:CG=\frac{2}{3}mb:\frac{2}{3}mc=mb:mc$. 故 G 畫一圓形（9, 軌

跡11). A點畫一軌跡,與G之軌跡爲位似形,其位似心爲BC之中點A',而其位似比爲$3:1$, A之第二軌跡自b^2-c^2之情而知之(9,軌跡12).

91. 題. 作一三角形,已知一角,其夾邊之和,及其一邊上之中線($A, b+c, m_c$).

延長CA,割去$AD=AB$ (第57圖),而乃$CD=b+c$,及CDB角$=\frac{1}{2}A$. C'點之一軌跡爲一圓形,有圓心C及半徑$CC'=m_c$.欲求C'之第二軌跡,則在可知角BDC內,與AB平行之任何一線PQ必被DC'平分;故如畫一線PQ,使與CD成一角A,則C'點在PQ之中點R與D點之連線DR上. C'點求得之後,則經過C'而與CD成A角之線遇CD於所求三角形之頂點A,而遇DB於頂點B.



第57圖

習　題

1. 三角形各邊中點之連線,分此三角形而成四個全等三角形.

2. 三角形一邊上之中線,與其他二邊中點之連線互相平分.

3. 求一定底邊及一定外接圓之變動三角形所有重心之軌跡.

4. 經過三角形之每一頂點而各與其對邊平行之三線,成一新三角形,有已知三角形之頂點爲其各邊之中點.

5. 一個中線之中點與此三角形一頂點相連而三等分此頂點之對邊.

6. 三角形之中線,距離二頂點相等.

7. 三角形之一頂點,及其對邊之中點,距離其他二邊中點之連線相等.又此二中點距離原來二點連成之中線亦爲相等.

8. 自三角形各頂點至其平面上任何一線,所有三距離之和,等於自此線至此三角形各邊之中點所有三距離之和.

9. 經過三角形之重心,有任何一線;自此線一旁之二頂點至此線之總距離,等於第三頂點至此線之距離.

10. 三角形有相等之二中線者爲等腰三角形.

11. 如在等腰三角形中,畫一線,與底邊平行,則在一腰與其中線間之線段,等於另一腰與另一中線間

之線段.

12. 作一三角形,已知各邊之中點.

作一三角形,已知:

13. b, c, mb.　　14. b, c, ma.

15. mb, mc, b　　16. a, mb, mc.

17. 與三角形一邊平行之線,有其中點在此邊之中線上.

18. 自三角形一邊之中點至其他二邊,所有之二距離,爲此二邊之反比例.用中線上任何一點,其理亦然.

作一三角形,已知:

19. a, A, mb.　　20. $a, ha, mb : mc$.

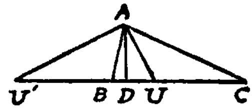
21. 三角形之三頂點與其重心相連而分此三角形成三個等積三角形 (epuivalent triangles). 惟重心有此性質.

3. 平分線

92. 定理. 三角形一角之內平分線(internal bisector)與其對邊交成二角,此二角之差等於此邊鄰角之差.

三角形 AUB 中(第58圖),外角 $AUC=B+\frac{1}{2}A$, 而 AUC 中, AUB 角 $=C+\frac{1}{2}A$. 故 $\angle AUC-\angle AUB=B-C$.

93. 定理. 外平分線(external bisector)與其對邊所成之夾角,等於此邊鄰角之半差.



第 58 圖

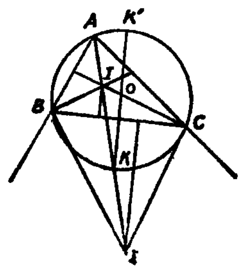
外平分線 AU'(第 58 圖)與底邊 BC 所成夾角之二邊各與內平分線 AU 及垂高 AD 垂直. 故此二角相等,而 DAU 角 $=\frac{1}{2}(B-C)$(61).

94. 定理. 二個內平分線所成之夾角,等於一直角加上此三角形第三角之一半.

三角形 BCI 中(第 59 圖)乃有:

$$\angle BIC=180°-\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}C$$
$$=90°+\tfrac{1}{2}A.$$

95. 定理. 二個外平分線所成之夾角,等於一直角減去此三角形第三角之一半.



第 59 圖

三角形 BCI' 中(第 59 圖)乃有:

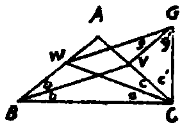
$$\angle BI'C=180°-\tfrac{1}{2}(180°-B)-\tfrac{1}{2}(180°-C)=\tfrac{1}{2}(B+C)$$
$$=90°-\tfrac{1}{2}A.$$

註. 四邊形 $BICI'$ 之二角爲直角. 故 $\angle BIC+\angle BI'C=180°$. 此證實上之二定理.

96. 定理. 如三角形二個內平分線相等,則此三角

形爲等腰三角形.

設平分線BV等於平分線CW(第60圖).如不爲等腰三角形,則一角,B,大於另一角,C,而三角形BCV及BCW中,$BV=CW$,$BC=BC$,而B角大於C角;故CV大於BW.今經過V及W,畫BA及BV之平行線.平行四邊形$BVGW$中,$BV=WG=CW$.故GWC爲等腰三角形,而$\angle(g+g')=\angle(c+c')$.但$\angle g=\angle b$.故$\angle(b+g')=\angle(c+c')$,所以$g'$小於$c'$.然則三角形$GVC$中,$CV$小於$GV$.但$GV=BW$.故$CV$小於$BW$.由此觀之,$B$,$C$二角不等之假設,引至互相抵觸之結果.故$B=C$,而此三角形必爲等腰.



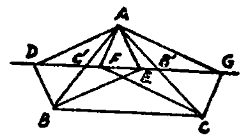
第60圖

註. 如言兩個外平分線,則此命題不確;蓋一三角形可有兩個相等之外平分線而不爲等腰三角形.

97 定理. 自三角形之一頂點,放落四垂線,放在此三角形其他二角之四個平分線上,則其四垂足爲共線點.

設AD, AE爲B角平分線上之垂線(第61圖).平分線BD, BE既互相垂直,則四邊形$ADBE$爲一長方形.故

* 譯者附註——參考美國雜誌"School Science and Mathematics"第31卷第4期,譯者登載此圖並詳證其理.



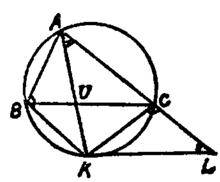
第 61 圖

對角線 DE 經過 AB 之中點 C'，而 $EC'=BC'$. 所以 $\angle C'EB=\angle EBC'=\angle EBC$. 故 DE 線平行 BC. 仿之可證 FG 線經過 AC 之中點 B'，而平行 BC. 今 BC 之平行線經過中點 B' 及 C' 者，彼此相合，故即得本題之證明.

98. 定理. 三角形一角之內外平分線，必經過一個外直徑（即外接圓之直徑）之兩端，此外直徑垂直此頂點之對邊.

BAK 角及 CAK 角相等（第 59 圖）. 故所割之 BK 弧及 CK 弧亦相等，而 K 為 BKC 弧之中點. 故自 K 放落 BC 邊上之垂線，必經過外接圓之圓心. 令此直徑之其他一端為 K'. AK' 線垂直 AK. 故 AK' 為 A 之外平分線.

99. 題. 作一三角形，已知一角，此角之平分線，及其夾角之和 $(A,\ ta,\ b+c)$.



第 62 圖

設 ABC 為所求三角形（第 62 圖）. 延長平分線 AU，使遇 ABC 之外接圓於 K；延長 AC 而割去 $CL=AB=c$

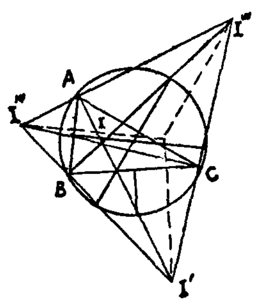
三角形 ABK 及 CKL 中，$AB=CL$, $BK=KC$, 而 $\angle KCL=\angle ABK$，蓋此二

角均爲 KCA 角之補角. 所以 KL 等於 AK, 而 $\angle ALK=\angle KAC=\frac{1}{2}A$. 然則等腰三角形 AKL 可作, 而線段 $UK=AK-AU=AK-ta$ 可知其長. 此線段於 C 上張有 UCK 角 $=\angle BCK=\frac{1}{2}A$. 故有 C 之一軌跡; 此交 AL 線而得 C 點. 三角形 ABC 即易作成.

100. 定理. 三角形三角之內平分線爲共點線, 其會合點 (point of concurrence) I 爲內心.

101. 定理. 三角形二角之外平分線與第三角之內平分線爲共點線. 依此所得之三點 I', I'', I''' 爲此三角形之傍心 (excenters).

102. 系說. I, I', I'', I''' 四點 (第 63 圖) 爲四圓之圓心, 此四圓與此三角形之各邊相切, 而每點離此三邊等距. 此四點常謂三角形之等心 (equicenters).



第 63 圖

103. 從上之二定理 (100, 101) 即有下之推論:

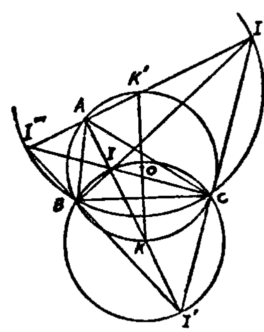
推論 I. 三角形之四個等心在六線上, 此六線即三角形三角之平分線.

每一等心在三線上, 而每一線上有二個等心.

推論 II. 三角形之三邊在其外接圓上各張二圓弧,如知此六弧之六中點,則此三角形之等心,可獨用界尺(ruler)作之.

104. 定理. 三角形之內心,及一已知頂點所對之傍心,爲一圓形直徑之兩端,此圓經過此三角形之其他二頂點.

平分線 BI, BI' 互相垂直(第64圖). 故 II' 線段張直角於 B 上. 至於 C 點上,其理亦然. 故此命題云云.



第 61 圖

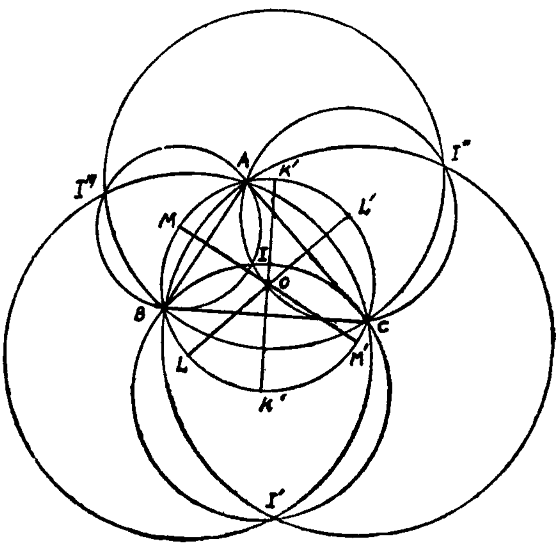
註. 此圓之圓心爲 BC 之中垂線與 II' 之公點. 今 II' 既爲 A 角之內平分線,故 II' 經過 BC 弧中之點 K, 又 BC 邊之中垂線亦經過 K. 故 K 爲 $BICI'$ 圓之圓心.

105. 定理. 三角形二頂點所對之二傍心,爲一圓形直徑之兩端,此圓經過此二頂點.

設 I'', I''' (第64圖)爲 ABC 之頂點 B, C 所對之二傍心,平分線 BI'', BI''' 互相垂直; 故 $I''I'''$ 線段張直角於 B 上. 至於 C 點上,其理亦然. 故此命題云云.

註. 此圓之圓心爲 BC 之中垂線 KK' 與 $I''I'''$ 之公點. 今 $I''I'''$ 旣爲 A 之外平分線, 故 $I''I'''$ 經過 K'. 故 K' 爲此圓之圓心.

106. 設 LL', MM' (第 65 圖) 爲 ABC 之外接圓 (O) 中與 CA, AB 二邊垂直之直徑. 此直徑與前一定理中 KK' 之性質相同, 故有下之定理:



第 65 圖

定理. 三角形之四個等心在六圓上, 此六圓經過三角形之兩兩頂點而有此三角形之各邊所張外接圓之圓弧中點爲其圓心.

推論. 如知三角形各邊在其外接圓上所張之圓弧中點,則此三角形之等心,可獨用圓規(compass)作之.

107. 如知外接圓及 BC 邊,則不論其 A 之位置如何,可得 $BICI'$ 及 $BCI'I''$ 二圓(104, 105). 故:

定理 如一變動三角形有一定底邊,及一定外接圓,則其等心畫成二圓,此二圓經過此二定頂點,而其圓心為與定邊垂直之外直徑兩端.

108.定理. 三角形之四個等心,可得六線段,此六線段之六中點為共圓點(concyclic point)經過此六點之圓形,即此三角形之外接圓.

從以上數命題,即有此結論.

109.定理. 三角形之內半徑,等於此三角形之面積被其半周線所除.

如 S 為 ABC 之面積,(第59圖)顯見:

$$\text{面積 } ABI+\text{面積 } BCI+\text{面積 } CAI=S,$$

$$\tfrac{1}{2}rc+\tfrac{1}{2}ra+\tfrac{1}{2}rb=S.$$

$$\tfrac{1}{2}r(a+b+c)=S,$$

$$r=S:p.$$

110.定理. $r'=S:(p-a)$.

顯見(第59圖):

$$S = \text{面積 } ABI' + \text{面積 } ACI' - \text{面積 } BCI',$$

或 $$S=\tfrac{1}{2}r'c+\tfrac{1}{2}r'b-\tfrac{1}{2}r'a=\tfrac{1}{2}r'(b+c-a)=r'(p-a).$$

故: $$r'=S:(p-a).$$

註. 仿此:

$$\underline{r''=S:(p-b),\quad r'''=S:(p-c).}$$

111 定理. 與三角形各邊相切之四圓,有四半徑之乘積,等於此三角形面積之平方.

從上之二定理(109, 110)乃有:

$$rr'r''r'''=S^4:p(p-a)(p-b)(p-c)=S^4:S^2=S^2.$$

112. 定理. 內半徑之倒數(reciprocal)等於三個傍半徑倒數之和.

顯見(109, 110):

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}=\frac{p-a}{S}+\frac{p-b}{S}+\frac{p-c}{S}$$
$$=\frac{3p-a-b-c}{S}=\frac{p}{S}=\frac{1}{r}.$$

113. 定理 三角形內半徑之倒數,等於此三角形三個垂高倒數之和.

顯見:

$$2S=2pr=aha=bhb=chc,$$

或 $$2p:\frac{1}{r}=a:\frac{1}{ha}=b:\frac{1}{hb}=c:\frac{1}{hc},$$

或 $$2p:\frac{1}{r}=(a+b+c):\left(\frac{1}{ha}+\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}\right).$$

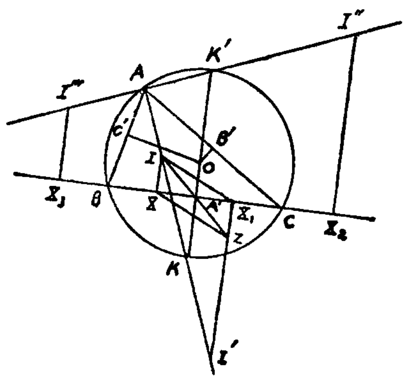
故: $$\frac{1}{r}=\frac{1}{ha}+\frac{1}{hb}+\frac{1}{hc}.$$

114. 定理 三角形三個傍半徑倒數之和,等於三個垂高倒數之和.

從上之二命題卽有此結論.

115. 定理 三角形三個傍半徑之和,等於其內半徑加上其外半徑之四倍.

設 IA'(第 66 圖)遇 $I'X_1$ 於 Z. $A'K$ 線平行 $I'X_1$ 而經過 II' 之中點 K(104). 故 $A'K=\frac{1}{2}I'Z$;又 $IA'=A'Z$, 而 IX_1ZX 爲一平行四邊形,因其對角線互相平分.故 $IX=ZX_1$,而 $I'Z=I'X_1-ZX_1=I'X_1-IX=r'-r$.



第 66 圖

然則: $A'K=\frac{1}{2}(r'-r)$.

梯形 $I'''X_3X_2I''$ 中, $A'K'=\frac{1}{2}(r''+r''')$.

故: $A'K'+A'K=\frac{1}{2}(r''+r''')+\frac{1}{2}(r'-r)$,

或 $$KK'=\frac{1}{2}(r'+r''+r'''-r);$$

且既 $KK'=2R$, 故:

$$r'+r''+r'''=4R+r.$$

116. 定理. 自外心至三角形之三邊,其距離之和,等於其外半徑加上其內半徑.

上之定理(115)已得 $A'K=\frac{1}{2}(r'-r)$; 故(第66圖) $OA'=R-\frac{1}{2}(r'-r)$.仿此, $OB'=R-\frac{1}{2}(r''-r)$, 而 $OC'=R-\frac{1}{2}(r'''-r)$.

故:
$$OA'+OB'+OC'=3R+r-\tfrac{1}{2}(r'+r''+r'''-r)$$
$$=3R+r-\tfrac{1}{2}4R=R+r.$$

註. 在鈍角三角形(obtuse-angled triangle)中,自外心至鈍角所對之邊,其距離應取為負數.

117. 定理. $ha=2rr':(r'-r)$.

已有(109, 110):

$$2S=aha=2p\cdot r,\ 2S=aha=2(p-a)r'.$$

故:
$$a(ha-r)=(b+c)r,\ a(ha+r')=(b+c)r',$$

或
$$(ha-r):(ha+r')=r:r'.$$

解 ha 而得所求之關係.

118. 定理. $ha=2r''r''':(r''+r''')$.

已有(110):

$$2S=aha=(a+c-b)r'',\ 2S=aha=(a+b-c)r'''.$$

故:
$$a(ha-r'')=(c-b)r'',\ a(r'''-ha)=(c-b)r''',$$

或 $$(ha-r''):(r'''-ha)=r'':r'''.$$

解 h_a 而得所求之關係.

119. 題. 作一三角形,已知四半徑 r, r', r'', r''' 中之任何三半徑.

依上二定理,此題可變作一三角形,已知其垂高(160).

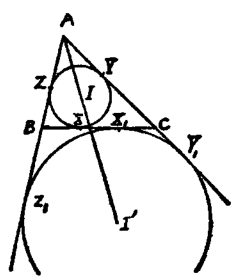
120. 定理 I 內切圓之一個切點,與此三角形之一個頂點同在一邊上,則此頂點與此切點中之距離等於半周線減去此頂點所對之一邊.

顯見 $AZ=AY$, $BZ=BX$, $CX=CY$ (第 67 圖).

今: $$AZ+AY=AB+AC-BZ-CY$$
$$=AB+AC-BX-CX$$
$$=AB+AC-BC=2p-2a.$$

故: $$AZ=AY=p-a.$$

121. 定理 II 一個傍切圓與此三角形之一個頂點相對,而此傍切圓之一個切點與此頂點同在一邊上,則此頂點與此切點中之距離等於此三角形之半周線.



第 67 圖

顯見 $AZ_1=AY_1$ (第 67 圖), $BX_1=BZ_1$, $CX_1=CY_1$.

今：
$$AZ_1+AY_1=AB+AC+BZ_1+CY_1$$
$$=AB+AC+BX_1+CX_1$$
$$=AB+AC+BC.$$

故：
$$AZ_1=AY_1=p.$$

推論. $BX_1=BZ_1=AZ_1-AB=p-c$ (第 67 圖); $CX_1=CY_1=AY_1-AC=p-b$.

122. 定理 III. 三角形之一邊內,內切圓之切點及傍切圓之切點,其中所得之線段與此邊有同一中點.

顯見(第 67 圖):

$$BX=p-b, \text{ 而 } CX_1=p-b \ (121).$$

123. 推論.

$$XX_1=BC-BX-CX_1=a-2(p-b)=a-2p+2b$$
$$=a+2b-a-b-c=b-c.$$

124 定理 IV. $ZZ_1=YY_1=a$ (第 67 圖).

顯見:

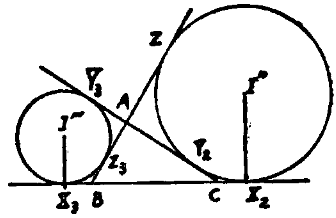
$$ZZ_1=BZ+BZ_1=p-b+p-c=2p-b-c=a.$$

125. 定理 V. 三角形一邊兩端之延線上二傍切圓之一切點,其中之距離等於其他二邊之和.

顯見(121)(第 68 圖):

$$X_2X_3=CX_3+BX_2-BC=p+p-a=b+c.$$

註. $BX_3=CX_3-BC=p-a$, 而 $CX_2=BX_2-BC=p-a$. 故 $BX_3=CX_2$, 所以 X_2X_3 之中點與 BC 之中點相合.



第 68 圖

126. 定理 VI.

$Y_2Y_3=Z_2Z_3=a$ (第 66 圖).

顯見:

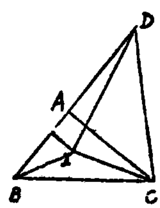
$$Y_2Y_3=CY_3-CY_2=p-CX_2=p-(p-a)=a,$$ 又仿之而言 Z_2Z_3.

127. 題. 作一三角形,已知一邊,外半徑及其內半徑 (a, R, r).

畫一圓, 用半徑 R 及 BC 弦 $=a$. 乃得 A 角 (64), 而 BC 弦張有一角 $90°+\frac{1}{2}A$ 於 I 點上 (94). 故有 I 之一軌跡. I 之第二軌跡爲一直線, 與 BC 平行而其距離等於 r.

128. 題. 作一三角形,已知一底角,二邊之和,及其內半徑 $(B, b+c, r)$.

延長 BA (第 69 圖) 而割去 $AD=AC$. 三角形 BID 可作,因知底邊 $BD=b+c$, IBD 角 $=\frac{1}{2}B$, 而其 BD 之垂高 $=r$.



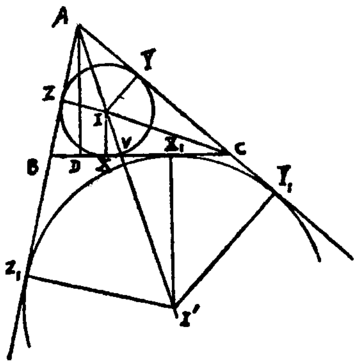
第 69 圖

今
$$\angle DCI=\angle DCA+\angle ACI$$
$$=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}C=90°-\frac{1}{2}B.$$

故 C 在一可知圓上，以 DI 畫如一弦。以 I 為圓心 r 為半徑之圓，有二切線經過 B 點，一為 BD，另一切線 BC 遇此可知圓於所求三角形 ABC 之頂點 C．ABC 之第三頂點 A 為 BD 與另一線之交點，此另一線為自 C 點所畫內切圓之第二切線。

129. 題. 作一三角形，已知其內半徑，二底角之差，及二邊之差 $(r, B-C, b-c)$

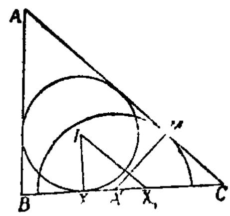
A 之內平分線 AIV 與 IX 所成之 VIX 角（第70圖），等於 AV 與垂高 AD 所成之角，此即 VIX 角等於 $\frac{1}{2}(B-C)$ (61)．故直三角形 VIX 可作．今 $XX_1 = b-c$ (123)．故 XX_1 之垂線 $I'X_1$ 遇 IV 於 I'．以 I, I' 為圓心 IX, $I'X_1$ 為半徑之二圓，其外公切線(external common tangents)相交於所求三角形 ABC 之頂點 A，而 XX_1 在此公切線上得有 ABC 之其他二頂點 B, C.



第 70 圖

130. 題. 作一三角形，已知其內半徑，二邊之差，及其一邊上之垂高 $(r, b-c, hb)$.

直三角形 IXX_1 (第71圖) 可作, 因 $IX=r$, $XX_1=b-c$ (123). BC 之中點 A' 亦爲 XX_1 之中點. 故自 A' 放落 AC 上之垂線 $A'M=\frac{1}{2}hb$ 可知其長以 I 及 A' 爲圓心而半徑 $IX=r$ 及 $A'M=\frac{1}{2}hb$ 之二圓, 其外公切線將遇 XX_1 於 C. 作 BA' 等於 CA', 而得 B 點. 自 B 所畫 (I) 圓之切線, 將遇此公切線於 ABC 之第三頂點 A.



第 71 圖

131. 題. 作一三角形, 已知一角之內平分線, 此角之相當傍半徑, 及其內半徑 (ta, r', r).

半徑 r, r' 可得 ha (117); 故直三角形 ADV (第70圖) 可作, 因 $AD=ha$, $AV=ta$. 與 BC 相距 r 之平行線, 遇 AV 於 I (A 及 I 同在 DV 之一旁). 圓心 I 半徑 r 之圓, 有二切線經過 A 點而遇 DV 於所求三角形 ABC 之其他二頂點 B, C.

132. 題. 作一三角形, 已知其底邊, 其他二邊之和, 及其內半徑 $(a, b+c, r)$

直三角形 AIZ 可作 (第70圖), 因 $AZ=p-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$ (120), 而 $IZ=r$; 於是 $AZ_1=p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ (121) 可知其長而垂直 AZ 於 Z_1 之垂線將遇 AI 於 I' 點. BC 邊爲二圓之

內公切線,此二圓有其圓心I, I'而有其半徑$IZ, I'Z_1$.頂點C爲此內公切線與另一線之交點,此另一線乃自A點所畫此任一圓之第二切線.

133 題. 作一三角形,已知其底邊,二邊之差,及其內半徑$(a, b-c, r)$.

直三角形CIY(第70圖)可依$CY=p-c=\frac{1}{2}(a+b-c)$(120)及$IY=r$而作之用圓心$I$及半徑$IY=r$,畫一圓.自$C$點所畫此圓之第二切線上割去$CB=a$,又自$B$畫此圓之第二切線遇$CY$於$A$,而$ABC$爲所求之三角形.

134 題. 作一三角形,已知其外半徑,其底邊,及其內半徑與底邊上傍半徑之和$(R, a, r'+r)$.

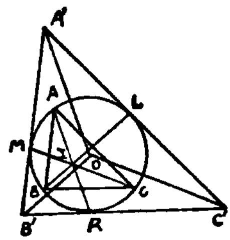
畫外接圓及BC弦$=a$(第66圖).如與BC垂直之外直徑一端爲K,則依(115).有$A'K=\frac{1}{2}(r'-r)$,又因$r'+r$爲已知件,故知r'及r.而此題變成:

(R, r, a)而爲已解之題(127).

135. 題. 作一三角形,已知三個內平分線之延線遇外接圓而有之三交點.

已知點R, L, M(第72圖)爲所求三角形ABC之BC, CA, AB邊在外接圓(O)上所張圓弧之中點.故在R, L, M上(O)之切線一三角形$A'B'C'$,與ABC爲位似形.

今圓心 O 爲 $A'B'C'$ 三個內平分線之交點，而與 ABC 之 I 點爲相當點，故經過 R, L, M 而與 $A'O$, $B'O$ $C'O$ 平行之線，將遇 (O) 圓於所求三角形 ABC 之頂點 A, B, C.



第 72 圖

136. 題. 作一三角形，已知其外心，內心，及一傍心 (O, I, I').

II' 線段之中點 K (第 64 圖) 在其外接圓上 (104). 故 OK 爲其外半徑，而此外接圓可畫. 此圓與 II' 爲直徑之圓形，有其公弦爲所求三角形 ABC 之 BC 邊. II' 與其外接圓之交點，即 K 以外之另一交點，爲 ABC 之第三頂點 A.

習題

1. 經過一個等心而與三角形一邊平行之線，等於二線段之和或差，此二線段在此三角形其他二邊之上而在此二平行線之中.

2. 如在已知圓 (O) 之二切線 AD, AE 所成 A 角之中，畫此圓之任何第三切線 BC，則此三角形 ABC 之周線將爲常數.

又於圓心 O 上 BC 所張之角將爲常數.

如切線 BC 畫在此圓之另一旁,即與 A 相對之一旁,則必修改其題句.

3. 經過一已知點,畫一線,使與一已知角之二邊,成一三角形,有一已知之周線.

4. 畫一線,與一已知線平行,使與一已知角之二邊,成一三角形,有一已知之周線.

5. 三個圓形,以三角形之頂點爲其圓心,而經過各邊上之內切圓切點,則此三圓各各相切

作一三角形,已知:

6. $r, ha, B-C$.　7. $A, ha, 2p$.　8. a, R, r'.

9. $b+c, r'', r'''$.　10. $B-C, r'', r'''$.　11. a, A, r'.

12. $b+c, ha, r$　　暗示. 從 $aha=(a+b+c)r$ 之關係,可作 a 如比例第四項.

13. $b+c, ha, r'$.

14. $b-c, ha, r'$.　　暗示. ha 及 r' 可得 r (117).

15. $b-c, r, r'$.　16. a, r, r'.

17. $a-b, A, r$.　　暗示. 三角形 AIZ 中, $AZ=\frac{1}{2}(b+c-a)$, 此與 $a-b$ 得有 C 邊.

18. $2p, A, r$.　19. $a-c, A, r$.

20. $b-c, A, r$. 暗示. 作 BIC (28)

21. $b+c, hb+hc, r$. 暗示. $b+c$ 及 $hb+hc$ 可得 A (23).

22. $b-c, hc-hb, r$. 23. $r, ta, B-C$.

24. ha, ta, r.

25. $b+c, r''', hc$. 暗示. 用 (125).

26. a, ha, r. 暗示. 從 $aha=r(a+b+c)$, 可得 $b+c$.

27. $r, ha, 2p$. 28. $r', ha, B-C$.

29. $b:c, A, r$. 30. $a:b:c, r$.

31. $2p, R, r'$. 暗示. $2p$ 及 r' 可得三角形 $AI'Z_1$ (121), 故又得 $\frac{1}{2}A$. 於是 A 及 R 可得 a.

32. $A, b+c, r$. 暗示. 三角形 AZI 可得 $p-a$, 或 $b+c-a$; 故又得 a.

33. $A, b+c, r'$.

34. a, r'', r''' 暗示. $Z_2Z_3=a$(126).

35. $b+c, r'', r'''$.

36. a, hb, r. 暗示. hb 及 a 可得 C; r 及 C 可得三角形 ICX. 故又得 I.

37. A, r'', r'''. 暗示. 圓心 I'', I''' 在 A 之外

平分線上甚易求得.

38. $ha, B-C, r''$(或r'''). 暗示. $\frac{1}{2}(B-C)$ 及 ha 可得 tx, 又得 A 之外平分線在此外平分線上, 可得 I''(或I''').

39. $b+c, B-C, r''+r'''$. 40. $b+c, B-C, r''$.

41. $2p, A, r'-r''$.

42. $b+c, r''-r''', A$. 暗示. $b+c$ 及 $r''-r'''$ 可得 $\frac{1}{2}(B-C)$, 而 $B-C=180^\circ-A$. 故 B 及 C 爲可知角.

43. 直三角形之面積, 等於其斜邊被內切圓切點所分成二線段之乘積.

44. 證明: $\dfrac{1}{r'}=\dfrac{1}{hb}+\dfrac{1}{hc}-\dfrac{1}{ha}$, 又證 r'', r''' 之類似關係.

45. 三角形一邊之中點, 此邊上之垂足, 及此邊兩端在其對角之內平分線上所有之射影, 爲四個共圓點.

如爲外平分線, 此命題是否成立?

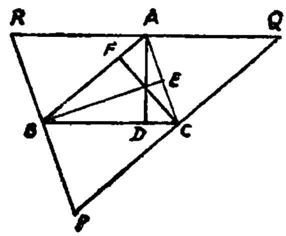
46. 自三角形之底邊與頂角之內平分線所成之交點, 畫內切圓之切線. 證此切線與此底邊所成之角, 等於底角之差.

試言外平分線之類似命題.

4. 垂高

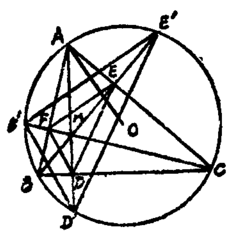
137. 定理. 三角形之三個垂高相交於一點.

第一證法. 經過已知三角形 ABC 之頂點 A, B, C (第73圖)畫其對邊之平行線 QR, RP, PQ. 平行四邊形 $AQCB$ 中, $AQ=BC$, 又平行四邊形 $ARBC$ 中, $AR=BC$. 故 $AQ=AR$, 此即 A 爲 QR 之中點,所以 ABC 之垂高 AD 爲 QR 之中垂線.仿此, BE 及 CF 爲 RP 及 PQ 之二個中垂線.但 PQR 各邊之中垂線相交於 PQR 之外心.故 AD, BE, CF 爲共點線.



第 73 圖

第二證法. 令垂高 BE, CF 之交點爲 H (第74圖). A 與 H 相連而延長 AH 使遇 BC 於 D. $BCEF$ 爲內接四邊形,因 BC 於 E 上及 F 上各張直角,故 $\angle FCB=\angle FEB$. 又 $AEHF$ 爲內接四邊形,故 $\angle FEH=\angle FAH$;所以 $\angle BAD=\angle FAH=\angle FEH=\angle FEB=\angle FCB$. 然則三角形 ABD 及 BCF 有 B 爲公角 (common angle) 而其他二角相等.故 $\angle ADB=\angle BFC=90°$,此即 AHD 爲 ABC 之第三垂高.



第 74 圖

界說. 垂高之交點 H 稱爲三角形之垂心.

垂足所成之三角形 DEF 稱爲垂趾三角形(pedal triangle)或垂心三角形(orthocentric triangle)或簡稱 ABC 之垂三角形(orthic triangle).

138. 定理. 三角形垂足之連線,得有三個三角形,與已知三角形相似.

內接四邊形 $BCEF$ 中(第74圖), B 角爲 FEC 角之補角,而 FEC 之鄰角 AEF 亦然.故 AEF 角 $=B$. 又仿此, $AFE=C$. 故 AFE 與 ABC 相似.仿之而言 CDE 及 BDF.

139. 界說. 內接四邊形之對邊,對於此四邊形之其他二邊,稱爲逆平行線(antiparallels). 然則 EF, BC (第74圖)對於 AB, AC 爲逆平行線;而 FD, AC 對於 AB, BC 爲逆平行線.

140. 定理. 在一已知三角形中,垂心分每一垂高而成二線段,其乘積各相等.

第一證法. 直三角形 BHF 及 CHE (第74圖)爲相似形.故 $HF:HE=BH:CH$, 或 $CH\cdot HF=BH\cdot HE$. 仿之可證 $BH\cdot HE=AH\cdot HD$.

第二證法. 在 $BCEF$ 之外接圓中(第74圖), BE, CF 二弦相交於 H. 故 $BH\cdot HE=CH\cdot HF$.

141. 定理. 垂高之線段,其一端爲垂心而其他一端

為此垂高之延線遇外接圓而有之交點,則此線段被此三角形之相當一邊平分.

$BD'D$ 角 $=C$(第74圖),因割外接圓之同一圓弧 AB,而 BHD 角 $=C$,因此二角之邊各相垂直,故 BHD 為等腰三角形,且既 BD 垂直 HD,故 $HD=DD'$.

142. 定理. 一邊被垂足分成二線段,此二線段之乘積,等於垂心至此邊之距離乘此垂高而有之乘積.

外接圓中,$BD\cdot DC=AD\cdot DD'$(第74圖).但 $DD'=HD$(141).故 $BD\cdot DC=AD\cdot HD$.

仿之而言其他二邊.

143. 定理. 自三角形二頂點放落之垂高,延長而割外接圓,割成圓弧之中點為此三角形之第三頂點.

ABE 角 $=\angle ACF$(第74圖),因 $BCEF$ 為內接四邊形.故 AE' 弧 $=AF'$ 弧.仿之而言 B,C 二頂點.

144. 註. 三角形 $HE'F'$ 中,EF 線連接 HE',HF' 之中點;故 EF 平行 $E'F'$ 而等於 $\frac{1}{2}E'F'$.

仿之而言其他二邊.

三角形 DEF 及 $D'E'F'$ 為位似形,H 為其位似心而 $\frac{1}{2}$ 為其位似比.

145. 定理. 一已知三角形之二頂點與其垂心成一

三角形,此三角形之外接圓等於已知三角形之外接圓.

依(141)題見三角形 HCB 與 $D'BC$ 爲全等形(第74圖).但 $D'EC$ 之外接圓卽 ABC 之外接圓,故此命題云云.

146. 定理. 經過三角形一頂點之外半徑,與垂三角形之相當邊垂直.

A 點(第74圖)爲 $E'AF'$ 弧之中點(143);故外半徑 OA 垂直 $E'F'$ 弦.但 EF 平行 $E'F'$(144).故 OA 垂直 EF.

仿之而言 DEF 之其他二邊.

147. 推論 I. 三角形之一邊與垂三角形之對邊,所成之夾角,等於已知三角形中此一邊所有鄰角之差.

顯見 BC 垂直 ha(第74圖),而 EF 垂直 OA,且依前定理(60) AD 與 AO 之夾角等於 $B-C$.

148. 推論 II. 自已知三角形之各頂點,所畫外接圓之切線,必平行垂三角形之相當邊.

因切線及垂三角形之邊均垂直相當外半徑.

149. 定理. 三角形之垂高爲垂三角形之內平分線.

A 既爲 $E'AF'$ 弧之中點(143)(第74圖),故 $D'A$ 爲 $F'D'E'$ 角之平分線.

今 DF, DE 爲 $D'F'$, $D'E'$ 之平行線(144).故 $D'DA$ 亦爲

FDE 角之平分線.

仿之而言 ABC 之其他二垂高.

另一方面. 內接四邊形 $BDHF$ 中(第74圖), $\angle HDF$ $\angle HBF$; 內接四邊形 $CDHE$ 中, $\angle ECH=\angle EDH$. 故 $\angle HDF=\angle HDE$, 而 DA 爲 EDF 角之平分線.

另一方面. FD 線爲 AC 之逆平行線(139)(第74圖). 故 $\angle BDF=A$ 又 DE 爲 AB 之逆平行線.故 $\angle CDE=A$. 所以 $\angle FDH=\angle EDH=90^\circ-A$, 而 DA 平分 EDF 角.

150. 註. DEF 之外平分線, 爲 ABC 之邊. ABC 之頂點及垂心, 爲垂三角形 DEF 之等心.

151. 題. 作一三角形, 已知其垂足.

已知 D, E, F 點(第74圖). ABC 之邊爲三角形 DEF 之外平分線(150). 故連接已知點 D, E, F, 而乃 D, E, F 三角之外平分線將得所求三角形 ABC.

152 題. 作一三角形, 已知其垂高之延線遇外接圓而有之三交點.

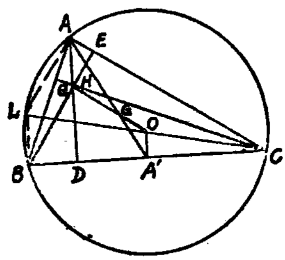
已知 D', E', F' 點(第74圖). 所求三角形 ABC 之垂高, 爲三角形 $D'E'F'$ 之平分線(149). 故三角形 $D'E'F'$ 之平分線, 將遇已知圓於所求三角形之頂點 A, B, C.

另一方面. 頂點 A, B, C 爲 $E'F', F'D', D'E'$ 三弧之中

點(143).

153. 定理. <u>自外心至三角形一邊之距離，等於此邊所對之頂點至此三角形垂心之半距離.</u>

直徑之一端爲 C, 令其另一端爲 L(第 75 圖). CAL 既爲直角,則 AL 平行 BH, 因各與 AC 垂直. 又 BL 垂直 BC, 故 BL 平行 AH. 然則 $HBLA$ 爲一平行四邊形, 而 $BL=AH$. 另一方面看來, OA' 連接三角形 BCL 二邊之中點 O, A'. 故 $OA'=\frac{1}{2}BL$. 所以 $OA'=\frac{1}{2}AH$.



第 75 圖

另一方面. 令外心 O(第 75 圖)與重心 G 之連線 OG 遇垂高 AD 而有之交點爲 Q. 三角形 AGQ 與 OGA' 爲相似形. 故 $GQ:OG=AG:GA'=2:1$. 如言另一垂高,則 OG 線仍不改變, 而 Q 點亦然, 因 $GQ=2OG$. 易言之, ABC 之每一垂高經過 Q, 而 Q 爲 ABC 之垂心 H; 而乃 $AH:OA'=2:1$.

154. <u>註.</u> 此乃三個垂高相交於一點之另一證法, 且又證明下之命題:

<u>三角形之外心, 垂心, 及重心爲共線點. 自重心至垂心之距離, 等於自重心至外心之二倍距離.</u>

155. 定理. 三角形之一邊,比垂三角形之相當邊,等於此三角形之外直徑,比此邊所對之頂點至垂心之距離.

AH 線段(第74圖)爲三角形 AEF 之外直徑(137), 而三角形 AEF 與 ABC 爲相似形(138). 今 BC 與 EF 爲此相似形之相當邊; 故此命題云云.

156. 註. 三角形之一邊,比垂三角形之相當邊,等於外半徑,比外心至此邊之距離.

因 $AH=2OA'$ (153).

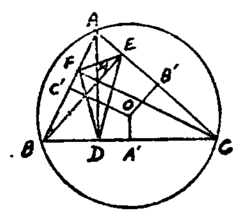
157. 推論. EF 之長被線段 a, R, 及 OA' 所定(156). 故: 如一變動三角形有一定底邊及一定外接圓, 則變動二邊上垂足相連之線段有一定長.

158. 令 a, b, c (第76圖)爲銳角三角形 (acute-angled triangle) ABC 之邊; e, f, g 爲其垂三角形之相當邊. 依(156)乃有:

$$\frac{e}{a}=\frac{OA'}{R},$$

$$\frac{f}{b}=\frac{OB'}{R},$$

$$\frac{g}{c}=\frac{OC'}{R}.$$



第 76 圖

其 OA', OB', OC' 爲自 ABC 之外心 O 至 a, b, c 之距離，而 R 爲外接圓之半徑，此三等式相加而有：

$$\frac{e}{a}+\frac{f}{b}+\frac{g}{c}=\frac{OA'+OB'+OC'}{R}$$

但依定理(116)乃有：$OA'+OB'+OC'=R+r$，其 r 爲 ABC 之內半徑。故：

$$\frac{e}{a}+\frac{f}{b}+\frac{g}{c}=\frac{R+r}{R}.$$

而可述之如下：

定理. 垂三角形之各邊與已知三角形之相當邊，所有三比之和，等於已知三角形內半徑及外半徑之和，比此三角形之外半徑。

159 定理. 垂三角形之周線，等於已知三角形之二倍面積被已知三角形之外半徑所除。

用上題之記法，乃有：

$$e+f+g=\frac{a\cdot OA'+b\cdot OB'+c\cdot OC'}{R}.$$

今 $a\cdot OA'$, $b\cdot OB'$, $c\cdot OC'$ (第76圖)表示三角形 OBC, OCA, OAB 之二倍面積。故此乘積之和爲三角形 ABC 之二倍面積，而乃：

$$e+f+g=2S : R.$$

另一方面．垂三角形之邊與已知三角形之相當外半徑互相垂直(146).故四邊形 $AEOF$(第74圖)之面積，等於半徑 $OA=R$ 與 EF 邊之半乘積(half the product).仿之而言四邊形 $BDOF$, $CDOE$.然則:

面積 $AEOF=R\cdot\frac{1}{2}EF$, 面積 $BDOF=R\cdot\frac{1}{2}FD$,

面積 $CDOE=R\cdot\frac{1}{2}DE$.

故: 面積 $ABC=R\cdot\frac{1}{2}(EF+FD+DE)$.

160. 題. 作一三角形，已知其垂高 (ha, hb, hc).

已有: $a\cdot ha=b\cdot hb=c\cdot hc\ (=2S)$.

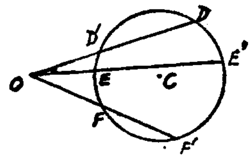
此可寫成:

$$a:\frac{1}{ha}=b:\frac{1}{hb}=c:\frac{1}{hc}.$$

故如有 p, q, r 三線段,使與 $\frac{1}{ha}$, $\frac{1}{hb}$, $\frac{1}{hc}$ 成比例,則 $a:p=b:q=c:r$,而以 p, q, r 爲各邊之三角形 PQR,將與所求三角形 ABC 相似.今自一頂點 P 畫三角形 PQR 之垂高,又割去 $PI=ha$; 經過 I 畫 QR 之平行線遇 PQ, PR 於 Q', R' 點.三角形 $PQ'R'$ 即爲所求三角形.

線段 p, q, r 之作法如下.任取一圓 (C)(第77圖).又用一適宜之 O 點爲圓心,畫三圓,有 ha, hb, hc 爲其半徑,

使遇 (C) 於 D, E, F 點.* 令 D', E', F' 爲 (C) 與 OD, OE, OF 三線之其他交點. 於是 $OD \cdot OD' = OE \cdot OE' = OF \cdot OF'$, 或 $OD' : \frac{1}{OD} = OE' : \frac{1}{OE} = OF' : \frac{1}{OF}$. 故線段 OD', OE', OF' 可取爲 p, q, r.

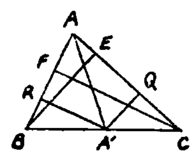


第 77 圖

另一方面. 作一三角形, 有已知垂高爲其各邊. 此三角形之垂高將與所求三角形之邊成比例. 故以此新垂高爲邊之三角形, 將與所求三角形相似. 此所求三角形可仿第一解法以得之.

161. 題. 作一三角形,已知二邊上之垂高,及第三邊上之中線 (hb, hc, ma).

設 BE, CF 爲已知之垂高(第 78 圖), 而 AA' 爲已知之中線. 自 A' 放落所求三角形 AC, AB 邊上之垂線 $A'Q, A'R$, 此二垂線等於 $\frac{1}{2}hb, \frac{1}{2}hc$. 故直三角形 $AA'Q, AA'R$ 可作. 乃畫一線經過 A' 而使 QAR 角割



第 78 圖

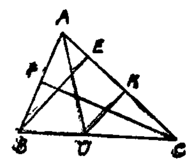
* 譯者附註——先任畫三線 OD, OE, OF 有一公點 O,而割去 $OD = ha, OE = hb, OF = hc$. 經過 D, E, F 畫一圓 (C). D', E', F' 諸點與 D, E, F 諸點可在 O 點之一旁或兩旁,全由已知垂高 ha, hb, hc 之長短而定. 苟依此所得之 D, E, F 點適爲共線點,則任一已知垂高 h_1 取在任一其他二線 OE, OF 上, 如 $ha = hb = hc$, 則此作法仍可適用, 但所求三角形必爲等邊三角形而可略此作法.

此線而有之線段被A'點平分.此乃已解之題(45).

162. 題. 作一三角形,已知自二頂點放落之垂高,及自第三頂點畫出之內平分線(hb, hc, ta).

自已知平分線AU之U端放落AC上之垂線UK(第79圖).於是:

$$UK : BE = CU : CB;$$



第79圖

但 $$CU : UB = b : c = hc : hb.$$

故: $$CU : CB = hc : (hc + hb);$$

而 $$UK : BE = hc : (hc + hb),$$

或 $$UK : hb = hc : (hc + hb).$$

然則UK可求如比例第四項,而直三角形UKA可作.畫AB線與UA成一角等於可知角UAK.頂點B在AB線上,又在AK之平行線上,此平行線有$BE=hb$之距離.B既求得,則BU線將遇AK於所求三角形ABC之第三頂點C.

習題

1. 一垂高小於其夾邊之半和.
2. 三角形垂高之和小於此三角形之周線.
3. 在一銳角三角形中,垂高之和大於此三角形

之半周線。

4. 三角形一邊之中點連至第二邊之中點,並連至第二邊之垂足,則此連線夾成之角,等於此邊(第二邊)所有鄰角之差。

5. 如三角形 ABC 中, BM, CN 線相交於垂高 AD 上,則 AD 爲 MDN 角之平分線。

6. 不用三角形面積之公式,證明三角形之垂高與此三角形之邊成反比例.

7. 三角形二邊之比,等於彼此之射影在此二邊上之比。

8. (a)直三角形有一已知三角形之底邊爲其斜邊,而其直角之頂點在其相當垂高上,則其面積爲已知三角形之面積與另一三角形面積之比例中項,此另一三角形被已知三角形之底邊與其垂心所規定.

(b)如一類似直三角形作在已知三角形之每邊上,則其面積平方之和,等於已知三角形面積之平方.

9. 已知一變動三角形之底邊及頂角,求其垂心之軌跡;且當變動頂點極近底邊之時,作其垂心.

10. 證明三角形之外心爲其中點三角形之垂心。

11. DP, DQ 爲自 D 至 AC, AB 上之垂線;證明 C, P, Q, B

爲共圓點,而 DPB 角 $=\angle CQD$.

12 已知一三角形1;用其垂高爲邊,作另一三角形2;用2之垂高爲邊,作一新三角形3,依次類推證明單數之三角形,1,3,5,…相似,雙數之三角形,2,4,6,…相似.

13. 作一三角形,已知 ha, ma, hb.

5. 九點圓

163 定理. 三角形各邊之中點,垂高之垂足,垂心連三頂點而成三線段之中點均在同一圓形上.

(a) 直三角形 ABD 中(第80圖),中線 $DC'=\frac{1}{2}AB$. 故 $DC'=A'B'$. 然則 $A'B'C'D$ 爲等腰梯形,故又爲內接形,此即垂高 AD 之垂足 D 在中點三角形 $A'B'C'$ 之外接圓上.且 AD 旣爲任一垂高,故 E, F 點在此同一圓上.

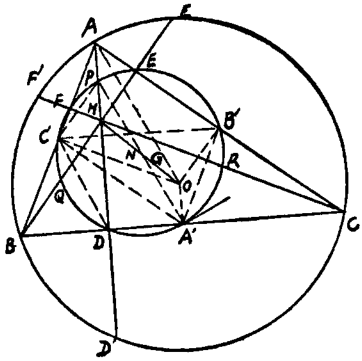
(b) 令 AH 之中點爲 P (第80圖). $C'P$ 線連接三角形 ABH 二邊之中點.故 $C'P$ 平行 BH,且 BH 旣垂直 $C'A'$,故 $PC'A'$ 角 $=90°$. 然則 PA' 線段於 D 及 C' 上各張直角.故經過 C', D, A' 之圓亦將經過 P 點.

界說. 此圓謂之**九點圓** (nine-point circle).

164 定理. 九點圓之圓心,在外心及垂心之中央.

九點圓之圓心 N (第80圖)在 DA', EB', FC' 三弦之中

垂線上.但自梯形 $OHDA'$, $OHEB'$, $OHFC'$ 可見中垂線各經過 OH 之中點 N. 故此命題云云.



第 80 圖

165 定理. 九點圓之半徑,等於外接圓半徑之一半.

依前定理 $OA'=\frac{1}{2}AH$ (153). 故 $OA=AP$ (第 80 圖), 而 $APA'O$ 爲一平行四邊形, 所以 $OA=PA'$. 今適證明 (163) PA' 爲九點圓之直徑.故此命題云云.

另一方面. 九點圓爲中點三角形 $A'B'C'$ 之外接圓, 且三角形 ABC, $A'B'C'$ 既爲相似形, 而各邊之比既爲 $2:1$ (86), 故其外半徑亦有同一之比.

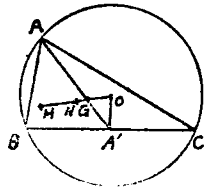
更有一層. 三角形 $A'B'C'$ 及 ABC 爲位似形 (86), ABC 之重心 G 爲位似心, 而其位似比爲 $-\frac{1}{2}$. 故 ABC 之外心 O 及 $A'B'C'$ 之外心 N 在 G 之二旁,而 $GN:GO$ 等於 $1:2$.

166. 上之二定理亦可推演如下:

九點圓爲 ABC 之垂三角形 DEF 之外接圓(第 80 圖). 如 $D'E'F'$ 爲 ABC 之延長垂高遇 ABC 之外接圓而得之三角形, 則三角形 DEF 與 $D'E'F'$ 爲位似形, 見前 (144),

ABC之垂心H爲位似心而其位似比爲$\frac{1}{2}$.今$D'E'F'$之外接圓卽爲ABC之外接圓.故DEF之外心N在H及O之中央,而DEF之外半徑爲ABC外半徑之一半.

167. G, N, O爲共線點(154, 165)而O, H, N亦爲共線點(166),故(第81圖):



第 81 圖

定理. 三角形之外心,垂心,九點圓心,及重心在一直線上.

已見 $GO : GN = 2 : 1$, 而 $HN = NO$, 或 $HO : HN = 2 : 1$, 此即H, G二點內分及外分ON線段而成同一比值$2 : 1$,此比即爲(O)圓及(N)圓所有半徑之比.

界說. $HNGO$線稱爲三角形之尤拉線(Euler line).

168. 定理. 在已知三角形之一邊中點上,九點圓之切線,爲此邊之逆平行線,此乃對於其他二邊而言.

(N)圓之半徑NA'(第80圖)平行(O)之半徑OA(165).故切(N)於A'點上之切線平行垂趾三角形DEF之EF邊(146),故亦與ABC之PC邊逆平行.此二線夾成之角等於$B-C$(147).*

---

*譯者附註——在A'點上九點圓之切線與BC成一角,等於$\angle CA'N - 90°$.而在D點上九點圓之切線與BC成一角,等於$\angle BDN - 90°$.但$\angle CA'N = \angle BDN$,因NDA'爲等腰三角形.故九點圓在D點上之切線及A'上之切線各與BC成相等之角,而乃此二切線與BC成一等腰三角形.

169. 定理. 在一已知圓中,可內接無數三角形,使有一已知點爲其垂心,或爲其九點圓心.

如 O 爲已知圓之圓心,而 H 爲三角形 ABC 之已知垂心(第81圖),則內分 OH 線段使成 $OG:HG=1:2$ 之 G 點,爲 ABC 之重心(166).逆而言之,有 O 爲外心而依此界說之 G 點爲重心之三角形,將有已知點 H 爲其垂心.今有無數三角形可以 G 爲重心而內接於已知圓 (O) 中(83).故此命題云云.

仿之而言已知九點圓心之情形.

表明三角形之垂心至外心之距離,小於此三角形外半徑之三倍.

註. 今有同一九點圓之無數內接三角形.如以一個三角形爲基本三角形(fundamental triangle),則另一三角形之作圖,得此基本三角形之九點圓上新九點.故另有一法以作已知三角形之九點圓上無數點.

170. 費爾巴定理. (Feuerbach's theorem). 三角形之九點圓與此三角形之內切圓及三個傍切圓相切.

證明見後(424).

171. 求三角形之九點圓上無數點之方法(169),可得無數之四圓組(groups of four circles),與一已知三角

形之九點圓相切.

習題

1. 九點圓之切線如經過此三角形之一頂點,則其長短之平方,等於自此頂點放落之垂高乘上自外心至對邊之距離.

2 證明三角形 PQR, $A'B'C'$ 爲全等形.

3. OP 線段被中線 AA' 平分.

4. 三角形 $DB'C'$ 及 $A'B'C'$ 爲全等形.

5. 如一變動三角形有一定底邊及一不變大小之頂角,則其九點圓心之軌跡爲一圓形.

6. 作一三角形,已知 A, N, H 點.

7. 一變動線,其長不變,而其兩端在已定之相交線上.證此三線所成之變動三角形,其垂心之軌跡爲一圓形.

8. 三角形 ABC 中, $\overline{AH}^2+\overline{BC}^2=4\overline{AO}^2$.

9. 作一三角形,已知 C, A 二點,及 HA, GA 之長.

10. 證明 HA' 遇外接圓於一直徑之末端,此直徑之另一末端爲 A 點.

11. 作一三角形,已知其二頂點,及其九點圓心.

12. 一變動三角形有一定頂點及一定九點圓;證明垂心總成一圓.

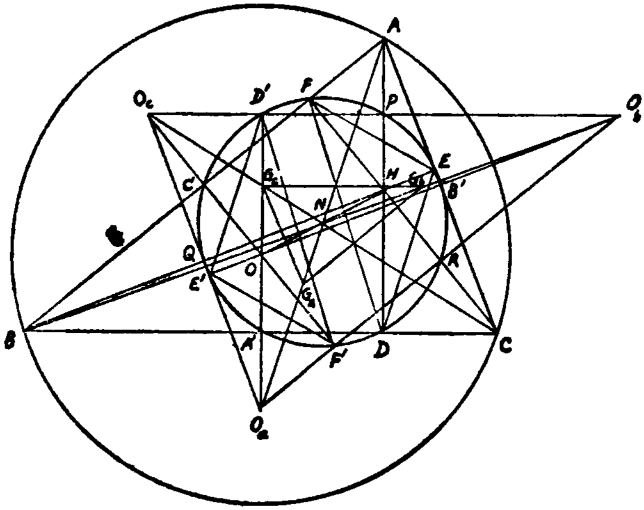
13. 作一三角形,已知其外接圓,垂心,及一頂點.

14. 作一三角形,已知其九點圓,重心,及二角之差.

15. 自垂心至外接圓圓周之任何一線,被其九點圓平分.

6. 垂心四邊形

172. 界說. 今言三角形 ABC 及其垂心 H (第 82 圖).三角形 HBC, HCA, HAB 之垂心為 A, B, C 點,見於圖中.



第 82 圖

然則 A, B, C, H 四點,每一點爲其他三點所成三角形之垂心.此四點稱爲點之垂心組(orthocentric group of points)或垂心四邊形(orthocentric guadrilateral).而每次取其三點所成之四個三角形,稱爲三角形之垂心組(orthocentric group of triangles).

173 定理. 垂心組之四個三角形有同一垂三角形.

讀者自證其理.

174. 推論I. 垂心組之四個三角形有同一九點圓.

三角形之九點圓爲其垂三角形之外接圓,而此組三角形旣有同一垂三角形,故對於九點圓亦然.

175. 推論II. 如垂三角形 DEF 之外接圓經過 ABC 各邊 BC, CA, AB 之中點 A', B', C'(第82圖),則此圓亦經過 AH, BH, CH 之中點 P, Q, R.

此六點爲三角形 HAB, HBC, HCA 各邊之中點.今如 DEF 之外接圓經過 ABC 各邊之中點,則亦將經過其他三個三角形各邊之中點,因此圓在 ABC 及此三個三角形中其性質相同.

176. 推論III. 垂心組之四個三角形,其外半徑相等.

其外半徑等於九點圓之直徑,而此四個三角形有同一九點圓(165, 174).

177 推論IV ABC之九點圓(N)與其內切圓及三個傍切圓相切(富爾巴定理)(170). 今垂心組$ABCH$之其他三個三角形與ABC有同一九點圓, 故與此三個三角形諸邊相切之諸圓亦與此九點圓相切.

178. 定理. 三角形之垂心組, 所有之外心, 另成一垂心組, 此與已知點之垂心組對於九點圓心N為對稱.

ABC之九點圓(N)(第82圖), 其圓心在ABC之外心O及垂心H之中央(164). 易言之, ABC之外心O及其垂心H對於九點圓心N為對稱. 今N點亦為HBC之九點圓心(174), 當是時A為此三角形之垂心. 故HBC之外心O_a及A對於N為對稱. 仿之而言三角形HCA, HAB之外心O_b, O_c. 然則應用N之對稱性, $O\,O_a\,O_b\,O_c$一組可由$HABC$一組推演而得之.

179. 定理. 三角形之垂心組, 及其外心之垂心組, 有同一九點圓.

$O\,O_a\,O_b\,O_c$之九點圓必與$ABCH$之九點圓(N)對於N為對稱(178). 夫一圓對於其圓心為對稱之圓形, 即此圓之本身. 故$O\,O_a\,O_b\,O_c$與$HABC$有同一九點圓.

---

* 譯者附註——每一三角形有四圓與此九點圓相切, 故共有十六圓與此九點圓相切, 見附圖8.

180. 註 I. $OO_aO_bO_c$ 之垂三角形 $D'E'F'$ (第 82 圖) 與 $HABC$ 之垂三角形 DEF 對於 N 爲對稱. 故 D, D'; E, E'; F, F'; 在 (N) 圓上彼此相對而相離有直徑之距 (diametrically opposite). 此又得三角形 ABC 之九點圓上之另外三點.

181. 註 II. 垂心組 $OO_aO_bO_c$ 之九點圓 (N), 又與十六圓相切,此十六圓乃與此組四個三角形之諸邊相切,而與 $HABC$ 一組之類似十六圓 (177) 對於 N 爲對稱. 故與三角形 ABC 之九點圓相切者, 今又得十六圓.

182 定理. 一已知三角形之垂心組, 其四頂點可視爲另一三角形垂心組之外心, 此二個垂心組有同一九點圓, 且對於其圓心爲對稱.

應用對稱性, $OO_aO_bO_c$ 一組 (第 82 圖) 已由 $HABC$ 一組推演而得之 (178). 但可倒述其步驟, 而應用同一方法, 將 $HABC$ 一組由已知之 $OO_aO_bO_c$ 一組推演而得之.

183. 定理. 三角形之垂心組, 所有四個重心, 另成一垂心組, 此二組之形相似, 而又坐落相似.

三角形 ABC 之重心 G (第 82 圖) 與 ABC 之九點圓心 N 及外心 O 爲共線點 (167), 而 $NG : GO = 1 : 2$. 既 $NH = NO$, 則 $NG : NH$ 等於 $1 : 3$, 而 H 點與 G 點在 N 之二旁.

易言之，G 點若以 N 爲位似心，$-\frac{1}{3}$ 爲位似比，則爲 H 之相當點．但 N 亦爲三角形 HBC 之九點圓心，此三角形之垂心爲 A，故 HBC 之重心 G_a；若以 N 爲位似心，$-\frac{1}{3}$ 爲位似比，則爲 A 之相當點．仿之而言三角形 HCA，HAB 之重心 G_b，G_c．故此命題云云．

184. 定理　三角形之垂心組所有之九點圓，與此組之重心所成另一組之九點圓，爲同心圓（第 82 圖）

$G\,G_aG_bG_c$ 一組之九點圓顯與已知一組 $HABC$ 之九點圓 (N) 爲位似形，此以 (N) 之圓心 N 爲其位似心．故此圓亦將有 N 點爲其圓心．

185. 定理．　三角形之垂心組，其四頂點可視爲另一三角形垂心組之重心，此二組有同一九點圓心，此心爲此二組之相似心，其相似比爲 -3．

讀者自證其理

186 定理．　三角形之垂心組，其外心及重心又成點之二個垂心組，有同一九點圓心，此心爲此二組之相似心，其相似比爲 $+3$

$HABC$ 及 $O\,O_aO_bO_c$ 二組（第 82 圖）對於 N 爲對稱形 (178)，而 $HABC$ 及 $G\,G_aG_bG_c$ 二組對於同一 N 點爲位似形 (183)．故 $O\,O_aO_bO_c$ 及 $G\,G_aG_bG_c$ 二組當以 N 爲位似心，

而其位似比等於$HABC$及$GG_aG_bG_c$二組位似比之負數.

習 題

1. 證明三角形HBC, HCA, HAB之外心,成一三角形,與ABC爲全等形;此兩三角形之邊各各平行,而H爲此新三角形之外心.

2. 證明三角形HBC, HCA, HAB之外心,所成之三角形,有ABC之外心爲其垂心.

3. 證明三角形HBC, HCA, HAB之重心,成一三角形,與ABC相似,而此三角形之邊與ABC之邊各各平行.

4. 證明三角形$HBC. HCA, HAB$之重心,所成之三角形,有ABC之重心爲其垂心.

187. 定理. 三角形之傍心,成一三角形,有已知三角形之內心爲其垂心

已知三角形ABC中(第63圖),A角之內平分線AII'垂直A角之外平分線$I''AI'''$. 仿之而言B及C之平分線.故ABC之傍心,成一三角形$I'I''I'''$,有$I'IA, I''IB, I'''IC$三線爲其垂高.故I爲$I'I''I'''$之垂心.

188. 推論 I. 三角形之等心 (102) 成一垂心組

189. 推論 II. 三角形爲等心所成垂心組之垂三角形.

190 定理. 一已知三角形之三等心,成一三角形,其外半徑等於已知三角形之外直徑.

已知三角形 ABC (第 63 圖) 爲其傍心所成三角形 $I'I''I'''$ 之垂三角形 (189). 故 ABC 之外接圓爲 $I'I''I'''$ 之九點圓 (163), 所以 $I'I''I'''$ 之外半徑爲 ABC 所有外半徑之二倍 (165). 仿之而言垂心組 $II'I''I'''$ 之其他三角形.

191 註. 以上證法,利用一種事實,即任何三角形 ABC 可視爲等心所成垂心組之垂三角形. 另一方面看來, ABC 可視爲主要之三角形 (principal triangle). 而有其九點圓 (N). 故由一方面看來之命題,如早有其證明,則用之可解另一方面看來之命題. 上之定理,即爲此種互解法 (the method of double interpretation) 之例題. 今更舉數例於下.

192. 定理 一已知三角形之四等心,所得六線段之中點,在此三角形之外接圓上.

前有此題之證明 (108). 今視已知三角形 ABC (第 63

---

*譯者附註——此以 $I'I''I'''$ 爲主要之三角形,而 ABC 爲其垂三角形. 故 ABC 之外接圓 (O) 爲垂心組 $II'I''I'''$ 之九點圓.

圖)爲其等心I, I', I'', I'''所成垂心組$II'I''I'''$之垂三角形，則ABC之外接圓爲$II'I''I'''$一組之九點圓(191).故此圓經過此組四個三角形$II'I''$, $I'I''I'''$, $I''I'''I$, $I'''II'$所有各邊之中點.

193 定理. 一已知三角形之三等心,成一三角形,此三角形之外心,對於已知三角形之外心爲其他一等心之對稱點.

此乃復言垂心組$HABC$外心之命題(178).今以DEF爲已知三角形.

194. 定理. 自三角形各頂點至垂三角形之相當邊,所有距離之和,等於垂心至垂三角形任何一邊之距離加已知三角形外直徑而有之和.

假設已知三角形爲銳角三角形.

此乃復言$r'+r''+r'''=4R+r$之公式(115).

195 定理. 一已知三角形之傍心,成一三角形,其面積等於已知三角形之周線乘已知三角形外半徑而有之積.

此乃復言垂三角形周線之命題(159).

196 定理. 自三角形之傍心,至此三角形相當邊放落之垂線爲共點線.

自三角形 ABC 之頂點 A, B, C 放落垂趾三角形三邊 EF, FD, DE 上之垂線,會於 ABC 之外心 O 上(146). 故自三角形 $II'I''$ 之頂點 I', I'', I''' (第63圖)放落垂三角形 ABC (189)三邊 BC, CA, AB 上之垂線爲共點線.

197. 用類似性可見此會合點爲三角形 $I'I''I'''$ 之外心, 因此心與 I 對於 O 爲對稱點(193).

定理. 故三角形之外心,內心,及其傍心三角形之外心爲共線點,此原三角形之外心離其他二點等距.

習　題

1. 用一類似方法(187),復言垂心組之重心定理.
2. 復言尤拉線之定理.

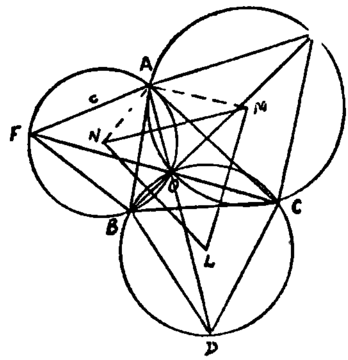
7. 混雜定理

198. 定理. 在已知三角形每邊上,作一等邊三角形,而每一三角形之第三頂點連至已知三角形中相對之頂點:(a)依此所畫之三連線相等.(b)此三線爲共點線,(c)此三個三角形之外心成一等邊三角形.

三角形 AFC, AEB 中(第83圖),乃有:

$AF=AB=c.\ AC=AE=b.$

$\angle FAC = \angle EAB = 60^\circ + A$. 故此二形爲全等形,而 $FC = BE$, 此證本題之前部.



第 83 圖

外接於三角形 ACE,ABF 上之(M),(N)圓有 A 爲公點,而相遇於另一點 O. $\angle AOB = \angle AOC = 120^\circ$. 故 $\angle BOC = 120^\circ$, 而 BCD 之外接圓 (L) 亦經過 O. 今 O 與六頂點 A, B, C, D, E, F 相連; $\angle FOB = \angle BOD = \angle DOC = 60^\circ$. 故 FOC 爲一直角,此即 F, O, C 爲共線點; 易言之, FC 線必經過 O. 仿之而言 AD 及 BE. 故 AD, BE, CF 三線相遇於 O.

等邊三角形 ABF 中, $AB : AN = \sqrt{3}$. 仿此, $AE : AM = \sqrt{3}$. 今 $\angle NAM = \angle BAE = 60^\circ + A$; 故三角形 AMN, BAE 相似,因成比例之邊夾相等之角.故 $BE : MN = AB : AN = \sqrt{3}$. 仿之可證 $CF : NL = \sqrt{3}$. 而 $AD : LM = \sqrt{3}$. 但 $AD = BE = CF$. 故:

$$LM = MN = NL.$$

199. 註 I. 於 O 點上, 三角形 ABC 張有相等之角.

註 II. 三角形 BCD 之作法, 乃使 BCD 及 ABC 在 BC

之二旁. 三角形 CAE, ABF 亦然. 如三個三角形 BCD, CAE, ABF 疊在三角形 ABC 之上, 則此命題仍確.

註 III. 如 A, B, C 爲共線點, 則此命題仍能成立.

200. 定理. 三角形二邊之乘積, 等於第三邊上之垂高乘外直徑而有之積.

直三角形 ABD, AKC (第 49 圖) 爲相似形, 因 $\angle ABD = \angle AKC$. 故 $AB : AK = AD : AC$; 而 $AB \cdot AC = AD \cdot AK$.

201. 註. 如 bc 爲已知之乘積, 而 h_a, $2R$ 任知其一件, 則其他一件可作如比例第三項* (third proportional).

202. 推論. 等式 $bc = h_a \cdot 2R$ 之兩邊各乘 a, 又注意 $ah_a = 2S$, 則:

$abc = 4R \cdot S$, 或 S 等於 $\dfrac{abc}{4R}$. 故

定理. 三角形之面積, 等於此三角形三邊之乘積被此三角形外直徑之二倍所除.

203. 題. 作一三角形, 已知其底邊, 其頂角, 及其他二邊之乘積 (a, A, bc).

a 邊及 A 角得所求三角形之外半徑 R (64), 而 bc, $2R$ 得其垂高 h_a* (201). 今可作此三角形, 因有 a, A, h_a.

---

* 譯者附註——應知其長度單位, 因 $1 : h_a = 2R : bc$. 如 bc 爲已知之面積, 則其長度單位不必知之.

204. 尤拉定理. (Euler's theorem) 外心及內心中之距離 d, 有下示之關係:

$$d^2=R(R-2r),$$

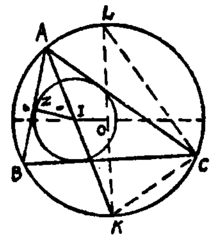
其 R, r 爲外半徑及內半徑.

外接圓 (O) 中 (第 84 圖), 乃有:

$$AI \cdot IK=(R+d)(R-d),$$

且旣 $IK=KC=BK$(104), 於是

$$R^2-d^2=AI \cdot CK.$$



第 84 圖

今直三角形 AIZ 及 KLC 中, A 角 $=\angle L$. 故此二形相似, 而

$$AI:KL=IZ:KC, \text{ 或 } IZ \cdot KL=AI \cdot KC,$$

$$\text{或 } 2Rr=AI \cdot KC.$$

然則:
$$R^2-d^2=2Rr,$$

$$d'^2=R(R-2r).$$

205. 推論. 三角形 ABC 之外心 O 及 BC 邊上之傍心 I' 其中距離 d' 有下示之關係:

$$d'^2=R(R+2r').$$

彷之而言其他傍心.

206. 定理. 以 O, I 爲圓心 (第 84 圖) 及 R, r 爲半徑之已知二圓, 如有

$$\overline{OI}^2=d^2=R(R-2r),$$

則無數三角形可外切於(I)圓之外,而同時內接於(O)圓之內.

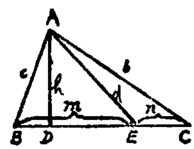
自(O)上任何一點A畫I圓之切線AB, AC, AI線平分BAC角,而$d^2=R(R-2r)$或$R^2-d^2=2Rr$之關係,乃證明$AI\cdot IK=2Rr$. 今三角形AIZ與KLC爲相似形. 故$AI\cdot KC=2Rr$,所以$IK=KC$. 故I爲三角形ABC之內心(104),此即BC線與(I)圓相切.

207. 施得櫆定理. (Stewart's theorem). 自三角形底邊上任何一點至所對之頂點,其距離平方乘底邊而有之積,等於其他二邊平方之和,各乘底邊之不鄰線段(non-adjacent segment),然後減去此二線段與底邊所乘之積.

設(第85圖) $AE=d$,而$AD=h$. 於是:

$$b^2=d^2+n^2+2n\cdot DE,$$

$$c^2=d^2+m^2-2m\cdot DE.$$



第85圖

第一等式乘m而第二等式乘n,則:

$$mb^2=md^2+mn^2+2mn\cdot DE.$$

$$nc^2=nd^2+nm^2-2mn\cdot DE.$$

故相加:

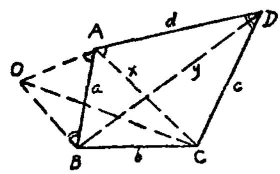
$mb^2+nc^2=d^2(m+n)+mn(m+n)=(d^2+mn)a,$

或 $$d^2a=mb^2+nc^2-amn.$$

註. 如 AE 爲 BC 之中線,則: $m=n=\frac{1}{2}a$; 如 AE 爲 A 角之內平分線,則: $m:n=c:b$. 應用上之公式,故能推算中線及平分線之長.

208 多來米定理. (Ptolemy's theorem). 聯圓四邊形 (cyclic quadrilateral) 中,對角線之乘積,等於二對對邊乘積之和,其逆定理亦確.

設 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ 爲四邊形 $ABCD$ 之邊,而 $AC=x$, $BD=y$ 爲其對角線(第 86 圖). 在 AB 上作一三角形 AOB 與 ADC 相似,使 AB 與 AD 爲相當邊,而 AOB 將在 $ABCD$ 之外,於是:



第 86 圖

$$AO:AC=AB:AD=OB:CD. \qquad (1)$$

故: $AO=ax:d$, $OB=ac:d$.

三角形 OAC 與 BAD 爲相似形,因依作法 $\angle OAC=\angle BAC$,而依(1)其夾邊成比例. 故 $OC:BD=AC:AD$, 或 $OC=xy:d$. 然則三角形 OBC 中, $BC=b$, $OB=ac:d$, $OC=xy:d$, 此即 OBC 之三邊與 bd, ac, xy 諸乘積成比例. 今

OC 小於 $OB+BC$;所以任何四邊形對角線之乘積 xy 小於對邊乘積之和 $ac+bd$. 如欲 xy 之乘積等於此和,故其必要而充足之條件(the necessary and sufficient condition)爲 OB 與 BC 成一平角,故必使 ABO 角及其等角 ADC 均爲 ABC 角之補角;易言之,必使 $ABCD$ 爲一聯圓四邊形.

209 題. 作一聯圓四邊形,已知其四邊 a, b, c, d.

上之定理可得此題之下解:

在一直線上,割去 $CB=b$, 而 $BO=ac:d$. A 點在圓心 B 半徑 a 之圓形上,而又爲一點之軌跡,自此點至 O, C 二點所有距離之比等於 $a:d$(軌跡 11),三角形 ACD 之其他二邊爲已知線. 故 D 可求得. D 點之位置應與 B 點在 AC 之二旁,細觀今之作圖,A 點可有二位置對於 BC 互爲對稱,而此二位置可任取其一,因取其另一位置,則在 BC 之其他一旁有同一四邊形.故此題僅有一解.

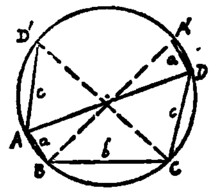
210. 註. 苟此四邊形之四邊,不必有一定之程序,則此題將有三解,蓋任取 a, c, 或 d 可爲 b 之對邊.

苟此三個四邊形畫其一如 $ABCD$(第87圖),則其他二個 $ABCD'$, $BCDA'$ 可割 $ABCD$ 之外接圓以得之; AD' 弧等於 CD 弧,而 DA' 弧等於 AB 弧.既 $D'ABC$, $ABCD$ 二

弧相等,故 CD', AD 二弦亦等.故 $ABCD'$ 有此所求之邊.

仿之而言 $BCDA'$.

211 定理. 聯圓四邊形中,一個對角線,比另一對角線,等於自第一對角線兩端畫出之四邊所有乘積之和,比另一對角線兩端畫出之四邊所有乘積之和(第87圖).



第87圖

BAD' 弧等於 CDA' 弧(第87圖),故 $BD'=CA'=z$

然則三個四邊形 $ABCD$, $ABCD'$, $BCDA'$ 有 x,y; x,z; y,z 爲其對角線.應用多來米定理,每一四邊形中,乃有:

$xy=ac+bd$; $xz=ad+bc$; $yz=ab+cd$.

從上之二等式,乃有:

$$x:y=(ad+bc):(ab+cd).$$

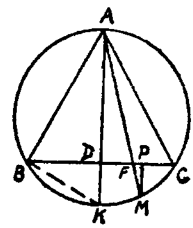
212. 定理. 如經過等邊三角形頂點 A 之一線,遇 BC 於 F, 又遇外接圓於 M, 於是

$$\frac{1}{MF}=\frac{1}{MB}+\frac{1}{MC}.$$

令 a 表示 ABC 一邊之長(第88圖), R 爲其外半徑.且令三角形 ABC, MBC 之垂高爲 AD, MP.

三角形 MBC 中,乃有(200):

$$MB \cdot MC = MP \cdot 2R; \qquad (1)$$



第 88 圖

又相似直三角形 ADF, MPF 中,乃有:

$$MP : AD = MF : AF.$$

故(1)變爲:

$$MB \cdot MC = 2R \cdot AD \cdot MF : AF. \qquad (1')$$

直三角形 ABK 中,乃有: $2R \cdot AD = a^2$. 故(1′)變爲:

$$MB \cdot MC = a^2 \cdot MF : AF. \qquad (2)$$

今應用多來米定理(208)於聯圓四邊形 $ABMC$ 中:

$$AB \cdot MC + AC \cdot MB = BC \cdot MA,$$

然因 $AB = AC = BC$, 而乃

$$MC + MB = MA. \qquad (3)$$

以(2)除(3),而得:

$$\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC} = \frac{MA \cdot AF}{a^2 \cdot MF} \qquad (4)$$

依施得槐定理(207),乃有:

$$\overline{AB}^2 \cdot CF + \overline{AC}^2 \cdot BF - \overline{AF}^2 \cdot BC = BC \cdot CF \cdot BF,$$

然因 $AB = AC = BC = a$, 而乃

$$a(CF + BF) - \overline{AF}^2 = BF \cdot CF. \qquad (5)$$

但　　$CF + BF = BC = a$, 而 $BF \cdot CF = AF \cdot MF$.

故(5)變爲:

$a^2-\overline{AF}^2=AF\cdot MF$, 或 $a^2=AF(AF+MF)=AF\cdot MA$.

以 a^2 代入(4)中之 $AF\cdot MA$, 乃得所求之關係.

習　題

1. 自三角形外心至四等心,所有距離平方之和,等於外半徑平方之十二倍.

2. 如 E, F 為圓心 O 半徑 R 之圓所有內接四邊形 $ABCD$ 兩對對邊 AB, CD; AD, BC 之相交點,則 $\overline{EF}^2$ 等於 $\overline{OE}^2+\overline{OF}^2-2R^2$. 暗示. 用施得槐定理.

3. 自直角之頂點至斜邊上三等分點,所有距離平方之和,等於斜邊平方之九分之五. 暗示. 用施得槐定理.

4. 自等邊三角形之外接圓上任何一點至此三角形頂點之一,則其距離等於此一點至其他二頂點所有距離之和.

5. 求一點,使一已知三角形之三邊各張已知角於此點上.(有兩種情形:(a)所求點在已知三角形之中;(b)此點在三角形之外)

6. 將 $abc=4R\cdot S$ 之關係, 言於立體幾何學(solid geometry)中之定理.

7. 如A',B',C'爲三角形ABC三邊BC,CA,AB之中點,表明三角形$AB'C',BC'A',CA'B'$之九點圓與$A'B'C'$之九點圓相切於$B'C',C'A',A'B'$之中點.

8. 作一三角形,已知其九點圓,其垂心,及其二角之差.

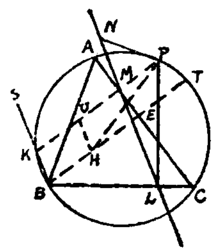
9. 作一三角形,已知其底邊,及其相當垂高被垂心分成之二線段.

第三章

西摩孫線

213. 定理. 自三角形之外接圓上任何一點,放落各邊上之垂線,其垂足爲共線點.

第一證法. 聯圓四邊形 $AMPN$ 中, $\angle PNM=\angle PAM=\angle PAC=\angle PBC=\angle PBL$ (第 89 圖), 又聯圓四邊形 $NBLP$ 中, $\angle PBL=\angle PNL$. 然則 $\angle PNM$ 等於 $\angle PNL$,故 N, M, L 爲共線點.



第 89 圖

第二證法. 內接四邊形 $AMPN$ 中 (第 89 圖), $\angle PMN=\angle PAN$. 今 $\angle PAN=\angle PKS$, 因其補角對同一圓弧 PCB. 然則 $\angle PMN=\angle PKS$, 所以 NM 線平行 BK. 又聯圓四邊形 $PMLC$ 中, $\angle PML+\angle PCL=180°$. 故 $\angle PML=\angle PKB$, 所以 ML 平行 KB.

然則 MN, ML 二線段均平行 KB. 故 L, M, N 爲共線點.

註. 此命題或述如下:三角形之外接圓上任何一點在各邊上之射影爲共線點.

界說. LMN線對於三角形ABC稱爲P點之西摩孫線(Simson line)或垂趾線(pedal line)而P稱爲LMN之極(pole).

214. 題. 求一點,使其西摩孫線有一已知之方向.

經過已知三角形之任何頂點,B(第89圖),畫一線BK有此已知方向,而遇ABC之外接圓於K.自K放落B之對邊AC上之垂線,遇AC於M,又遇外接圓於P. P即所求點.經過M而與BK平行之線爲P之西摩孫線,因自上定理(213)之第二證法即可知之*.

215. 定理. 一西摩孫線所有之極與此三角形之垂心相連,連成之線段被此西摩孫線平分.

令垂高BE(第89圖)遇(O)圓而有之交點爲T經過垂心H畫BK之平行線遇KMP於U.

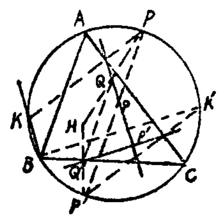
平行四邊形$BHUK$中,$HU=BK$,又等腰梯形$KBTP$中,$KB=PT$;故$HUPT$爲一等腰梯形.今知E爲HT之中點(141).故底邊HT之中垂線EA遇其他底邊UP於其中點M.然則LMN線經過三角形PUH所有PU邊之中點M而平行UH邊.故LMN平分此三角形之第三邊HP.

*譯者附註——此題可有幾解?

216. 註. ABC 之垂心 H 爲九點圓 (N) 及外接圓 (O) 之位似心，其位似比爲 $\frac{1}{2}$(166). 故 HP 之中點在 ABC 之九點圓 (N) 上.

217 定理. 二點對於同一三角形而有之垂趾線，成一夾角，可用此二點中之半弧量其大小.

設 P, P' 爲已知二點(第 90 圖)而自 P, P' 至 AC 邊，令其垂線所遇 ABC 之外接圓而有之交點爲 K, K'. P, P' 之垂趾線平行 BK, BK' (213)，所以此垂趾線中之夾角等於 $\angle KBK'$. 但圓周角 KBK' 乃以 KK' 之半弧量之，而 KK' 弧 $= PP'$ 弧，故此命題云云.



第 90 圖

218. 定理. 直徑兩端所有之西摩孫線，互相垂直，且相交於此三角形之九點圓上.

(a) 設 P, P' 爲一直徑之兩端(第 90 圖). 其垂趾線 p, p' 之夾角乃以 P, P' 之半弧量之 (217). 故 p, p' 互相垂直.

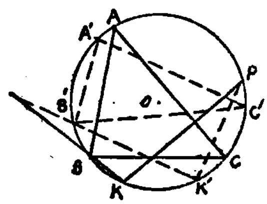
(b) 垂趾線 p, p' 經過 HP, HP' 線之中點 Q, Q'，此中點在九點圓 (N) 上 (216) 且 H 爲 (N) 及 (O) 之位似心，QQ' 線爲 PP' 之位似形，故 QQ' 爲九點圓 (N) 之直徑. 然則 p, p' 二線經過 (N) 之直徑兩端而互相垂直，故其交點

在此九點圓上。

219. 註. 三角形之外接圓中,一切直徑之兩端,有其西摩孫線交點之軌跡,爲此三角形之九點圓。

220. 定理. 圓上任何一點,對於二個內接三角形而有之二個垂趾線,其中夾角爲一常數.

設 ABC, $A'B'C'$ (第 91 圖) 爲 (O) 圓之二個內接三角形,而 P 爲 (O) 上之任何一點自 P 放落 AC 及 $A'C'$ 上之垂線;令此垂線遇 (O) 圓而有之交點爲 K, K'. P 對於 ABC, $A'B'C'$ 而有之垂趾線 p, p' 各與 BK, BK' 二線平行(213). 今 BK, $B'K'$ 之夾角乃以 BB' 弧及 KK' 弧之半差(或半和)量之. BB' 爲已知弧而 KK' 弧乃以 KPK' 角之二倍量之,此 KPK' 角乃等於 $A'C'$, AC 之夾角,而此夾角亦爲已知角.然則 $BK, B'K'$ 之夾角與 P 之位置不生關係;故此命題云云。



第 91 圖

221. 定理. 如經過圓上一點,畫三弦,取爲三圓之直徑,則此三圓兩兩相交於三個共線點.

設 MA, MB, MC 爲三弦.* 自 M 放落 AB 上之垂線,其

*譯者附註——見附圖 9.

垂足在一圓上,有 MA 爲其直徑,又在另一圓上有 MB 爲其直徑.故此點爲(MA),(MB)二圓所有 M 點外之另一公點.仿此,(MB),(MC)二圓之公點爲自 M 至 BC 線上之垂足,而(MC),(MA)之公點爲 M 在 AC 線上之射影.今 M, A, B, C 四點爲共圓點,所以 M 射在三角形 ABC 三邊上之射影,可連成M點對於 ABC 而有之西摩孫線(213).

222. 定理. 如三圓均經過其三圓心所成之外接圓上任何一點,則此三圓兩兩相交於三個共線點.

設 A, B, C 爲此三圓之圓心,而 M 爲其公點在 ABC 之外接圓上.以 MA, MB, MC 線段爲直徑之(A'),(B'),(C')三圓,依上定理(221)相交於三個共線點 D', E' F',而已知圓(A),(B),(C)之交點 D, E, F 爲 D', E', F' 之位似形,M 爲其位似心,其位似比爲2∶1.

223. 定理. 如一點在三角形各邊上之射影爲共線點,則此點在此三角形之外接圓上.

$PMLC$(第89圖)爲聯圓四邊形.故 PCL 角與 PML 角互爲補角.L, M, N 既爲共線點,則 $\angle PML$ 與 $\angle PMN$ 互爲補角;故 $\angle PCL=\angle PMN$.但聯圓四邊形 $PMAN$ 中,$\angle PMN=\angle PAN$,而 $\angle PAN$ 爲 $\angle PAB$ 之補角.故 $\angle PAB$

與$\angle PCL=\angle PCB$互為補角.所以A,B,C,P為共圓點.

此為西摩孫之逆定理.

224. 定理. 四直線,每次取其三線,所成四個三角形之外接圓有一公點.

設p,q,r,s為已知線,*三角形pqr, pqs之外接圓(pqr), (pqs)有pq點為其公點.故此二圓相遇於另一點M.如P,Q,R,S為M在p,q,r,s四線上之射影,則P,Q,R及P,Q,S各為共線點(西摩孫線).故P,Q,R,S四點為共線點.今三角形qrs中,M在各邊上之射影Q,R,S為共線點.故依西摩孫之逆定理,M為qrs外接圓上之一點,而同理M點亦在prs之外接圓上.

225. 推論. 四直線,每次取其三線,所成四個三角形之垂心,為共線點.

連M(224)*至三角形pqr, qrs, rsp, spq之垂心H_s, H_p, H_q, H_r連成之四線段被M之公共西摩孫線$PQRS$平分,其公共西摩孫線乃對於此四個三角形而有者(215),此即四個垂心在$PQRS$線之位似形上,其位似心為M而位似比為$2:1$,故此四垂心為共線點(42).

*譯者附註——見附圖10.

習　　題

1. 自三角形之外接圓上任何一點放落各邊上之垂線,且延長而遇外接圓.依此所得之三交點,連至三角形之相當頂點,證明連成之三線互相平行.

2. 三點之西摩孫線成一三角形,與此三點所成之三角形相似.

3. 三角形之外接圓上任何一點,對於其三邊而有之三個對稱點乃為共線點;連此三點之直線,經過此已知三角形之垂心.

4. 如 P 之垂趾線平行 AO, 證明 PA 平行 BC.

5. 證明一垂高之延線遇外接圓而有之交點,此交點之垂趾線經過此垂高之垂足,而與此三角形之相當邊為逆平行線.

6. P 點之垂趾線遇 BC 於 L 及 AD 於 K. 證明 LH 平行 PK.

7. 求三點,使其垂趾線垂直此已知三角形之中線.

8. 三角形之各邊在其外接圓上張有三弧,此三弧之中點,所有之垂趾線,成一三角形,與此已知三角形各邊上內切點所成之三角形為相似形.

9. 如 L, M, N 爲自三角形 ABC 所有外接圓上之 P 點至 BC, CA, AB 三邊上之垂足;證明(a)三角形 PLN, PAC 爲相似形;(b) $PL\cdot MN$, $PM\cdot NL$, $PN\cdot LM$ 與 BC, CA, AB 成比例;(c) $BC:PL$, $CA:PM$, $AB:PN$ 諸比之一,等於其他二比之和;又(d)求 P 之地位,使 ML 等於 MN.

10. 點與其垂趾線同在一線上者,有否?

11. 三角形如有各邊之極,試求此三極之位置.

12. 今言有同一外接圓及同一重心之一切三角形,表明外接圓上任何一點對於此一切三角形而有之西摩孫線爲共點線.

13 自一已知外直徑之兩端,各放落其西摩孫線上之垂線,此二垂線必相交於外接圓上;又此相交點之西摩孫線必平行已知外直徑.

第四章

截線

1. 美奈勞斯定理

226. 如三角形之延邊,仍稱爲三角形之邊,則一截線可遇三角形之各邊,而在每邊上得有二線段,其一端爲公有者,而其他兩端即爲三角形在此邊上之二頂點.三角形之三邊,依此共得六線段.此六線段可分成二組,每組三段,使同一組中之任何二段不有同一末端.此組線段謂之不連線段(non-consecutive segments).

注意一截線可遇三角形之二邊及第三邊外之延線上,或均遇三邊外之延線上,然不能遇三角形之三邊,或三角形之一邊及其他二邊外之延線上.

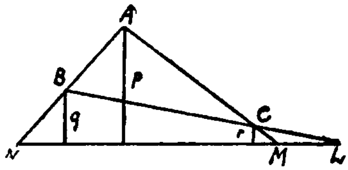
227. 美奈勞斯定理. (Menelaus' theorem). 一截線在三角形各邊上所得之六線段,其三個不連線段之乘積,等於其他三線段之乘積.

設 L, M, N(第 92 圖)爲截線 LMN 與已知三角形 ABC 之 BC, CA, AB 邊所有之交點.自三角形之頂點 A, B, C

放落 LMN 上之垂線 p, q, r.

從相似三形,乃得:

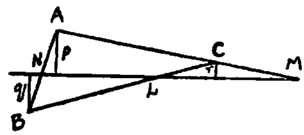
$AN : NB = p : q$, $BL : LC = q : r$, $CM : MA = r : p$.



第 92 圖 (a)

故:
$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=\frac{p\cdot q\cdot r}{q\cdot r\cdot p}. \qquad (m)$$

註. 爲便利計,三角形之三邊,可視爲有方向之線,如截線遇三角形於一邊之外,則此邊上之二線段將有異號 (opposite signs). 如截線遇於一邊之內,此二線段將有同號 (same signs). 然則 (m) 之三比,有其一比爲負號,或其三比全爲負號. 故此二個乘積之大小相同而符號相異.



第 92 圖 (b)

228. 逆定理. 如在三角形之每邊上取一點共取三點,使在三邊上得有六線段,以致三個不連線段之乘積,等於其他三線段之乘積,則此三點爲共線點.

用歸謬法 (reductio ad absurdum) 即易證明此題.

229 定理. 三角形之三個外平分線,遇其對邊於三個共線點.

令 A, B, C 之外平分線在 BC, CA, AB 上所得之交點爲 u', v', w'. 於是:

$BU' : U'C = c : b,\ CV' : V'A = a : c,\ AW' : W'B = b : a.$

故: $$\frac{BU' \cdot CV' \cdot AW'}{U'C \cdot V'A \cdot W'B} = 1,$$

而依美奈勞斯之逆定理(228) U', V', W' 爲共線點.

230. 定理. 二個內平分線及第三角之外平分線在此三角形之對邊上得有三個共線點.

此與上定理之證明相似.

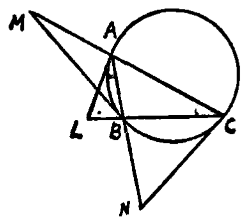
231. 結果. 三角形中,三角之六平分線在此三角形之對邊上得有六點, 每三點在一線上, 共在四線上.

232. 定理. 垂三角形之三邊, 遇巳知三角形之相當邊於三個共線點.

此巳知三角形之邊爲垂三角形之外平分線(150). 故依上定理(229)此巳知三角形之邊遇垂三角形之邊於三個共線點.

233. 定理. 在巳知三角形之頂點上, 所有外接圓之切線, 遇此三角形之對邊於三個共線點.

設 L, M, N(第93圖)爲 A, B, C 三點上之外接圓切線遇 BC, CA, AB 而有之交點. LAB 角 $= \angle C$, 因各以 AB 之



第 93 圖

半弧量之.故三角形 ALB 與 ALC 爲相似形,而

$AL:LC=AB:AC$, 或 $\overline{AL}^2:\overline{LC}^2=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$. 今 $\overline{AL}^2=LB\cdot LC$, 故:

$LB\cdot LC:\overline{LC}^2=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$, 或 $LB:LC=c^2:b^2$.

仿此: $MC:MA=a^2:c^2$, 而 $NA:NB=b^2:a^2$.

然則:
$$\frac{LB\cdot MC\cdot NA}{LC\cdot MA\cdot NB}=\frac{c^2\cdot a^2\cdot b^2}{b^2\cdot c^2\cdot a^2}=1,$$

所以 L, M, N 爲共線點 (228).

234. 註. 今已偶然證明在三角形之頂點上,所有外接圓之切線,外分其對邊而成此三角形其他二邊平方之比.

235. 界說. 在已知三角形之各頂點上,外接圓之切線成一三角形,稱爲已知三角形之**切線三角形**(tangential triangle).

236. 定理. 任何截線在已知三角形各邊上所得之三點,對於此三角形各邊中點而有之三個對稱點亦爲共線點.

設 L, M, N 爲三角形 ABC 之 BC, CA, AB 三邊上被此

截線所得之三點於是(227):　　$\frac{BL\cdot CM\cdot AN}{LC\cdot MA\cdot NB}=1.$

今令L'對於BC之中點A'爲L之對稱點,而M', N'爲CA, AB上之類似點,則

$$\frac{BL}{LC}=\frac{CL'}{L'B},\ \frac{CM}{MA}=\frac{M'A}{CM'},\ \frac{AN}{NB}=\frac{N'B}{AN'}.$$

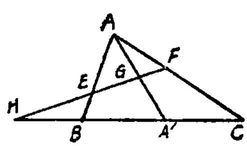
故:
$$\frac{CL'}{L'B}\cdot\frac{M'A}{CM'}\cdot\frac{N'B}{AN'}=1,$$

所以L', M', N'爲共線點(228).

界說. LMN及$L'M'N'$二截線謂之倒截線(reciprocal transversals).

237. 題. 在三角形ABC之AB, AC邊上,取相等之二線段AE, AF,表明自A點畫出之中線,分EF線段成AB, AC二邊之比.

設G, H(第94圖)爲EF與中線AA'及BC邊之交點.中線AA'對於三角形HEB,HCF視爲截線,則(227):



第94圖

$$HA'\cdot BA\cdot EG=BA'\cdot EA\cdot HG,$$

而
$$CA'\cdot FA\cdot HG=HA'\cdot CA\cdot FG.$$

乘此二等式而注意$AE=AF$, $BA'=CA'$,乃得:

$$BA \cdot EG = CA \cdot FG,$$

或 $$AB \cdot AC = FG \cdot EG.$$

習　題

1. P 點內分三角形之一邊,使其所成之比等於 Q 點內分另一邊之比. PQ 線外分第三邊而成何比?

2. 如任一截線割任一多角形之 AB, BC, CD, DE, ……邊於 L, M, N, R,……點表明其 $\frac{AL}{BL}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{ND}$……諸比之連乘積(continued product)爲1.

暗示. 設此截線割 AC 於 N, 割 AD 於 R', 等等; 於是 $\frac{AL}{BL}\cdot\frac{BM}{CM}\cdot\frac{CN'}{AN'}=1$, 及 $\frac{AN'}{CN'}\cdot\frac{CN}{DN}\cdot\frac{DR'}{AR'}=1$, 等等. 而乃乘之.

3. 三角形 ABC 之重心爲 G, AG 延長至 P, 使 $GP=AG$. 經過 P 而與 CA, AB, BC 平行之三線, 將遇 BC, CA, AB 於三個共線點.

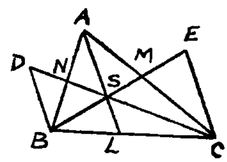
4. 三角形 ABC 之內切圓與 BC, CA, AB 相切於 X, Y, Z; YZ 延長而遇 BC 於 K; 證明 $BX:CX=BK:CK$.

5. A', B', C' 爲 BC, CA, AB 之中點; AA' 遇 $B'C'$ 於 P, CP 遇 AB 於 Q; 表明 $AQ=\frac{1}{3}AB$.

2. 稅瓦定理

238 稅瓦定理 (Ceva's theorem). 一已知點連至已知三角形之三頂點,此三連線割此三角形之三邊而得六線段,其不連三線段之乘積,等於其他三線段之乘積.

設 L, M, N(第 95 圖)爲 AS, BS, CS 三線在 ABC 各邊上之交點. 經過 B, C 畫 ASL 之平行線遇 CN, BM 於 D, E 點. 三角形 BLS, BCE 中, 乃有:



第 95 圖

$BL : BC = LS : CE$, 或 $BL \cdot CE = BC \cdot LS$, 而三角形 CLS, CBD 中

$CL : CB = LS : BD$, 或 $CL \cdot BD = CB \cdot LS$.

故: $$CL \cdot BD = BL \cdot CE,$$

或 $$BL : CL = BD : CE.$$

又: $$MC : MA = EC : AS,\ NA : NB = SA : DB.$$

乘以上三等式, 乃得:

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{NA}{NB} = 1, \tag{1}$$

239. 註 I. 如 S 點取在三角形之內,則此三角形之三邊將被 AS, BS, CS 三線內分. 如 S 取在 ABC 之外, 則此三角形之一邊將被內分, 而其他二邊將被外分.

如等式(1)書如下式

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1,$$

而比中之線段視爲有方向之線,於是S如在ABC之內,則其中每一比將爲正號,S如在ABC之外,則其中二比爲負,一比爲正.然則任一情形,三比之乘積總爲正號,而可書爲:

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1,$$

註II. 經過三角形之一頂點,畫一線,則此頂點與其對邊中之線段,稱爲稅瓦線(Cevian).

註III. 三角形LMN稱爲S點之線趾三角形(pedal triangle).*

240. 定理. 如在三角形之三邊上取三點,而分此三邊成六線段,使不連三線段之乘積,等於其他三線段之乘積,則此三點連至三角形中所對之頂點而成三個共點線.

此三點取在三角形三邊之中,或一點取在一邊中而其他二點取在其他二邊外之延線上(239,I).

此乃稅瓦之逆定理,用歸謬法即易證之.

*譯者附註——注意垂趾三角形(pedal triangle)(137)與線趾三角形(pedal triangle)(239)有何不同之處?

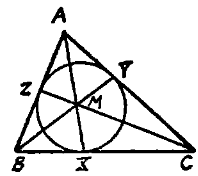
241 定理. 三角形之各頂點連至對邊上之內切點而成三個共點線.

設 X, Y, Z (第 96 圖) 爲 ABC 所有 BC, CA, AB 邊上之內切點. 於是:

$$AZ=AY,\ BZ=BX,\ CX=CY.$$

故: $$AZ\cdot BX\cdot CY=BZ\cdot CX\cdot AY.$$

所以: AX, BY, CZ 爲共點線 (240).



第 96 圖

242 界說. AX, BY, CZ 三線之公點 M 稱爲三角形 ABC 之葛爾剛訥點 (Gergonne point).

243 定理. 一傍切圓之三個傍切點,連至三角形中所對之頂點而成三個共點線.

今言頂點 A 所對之傍切圓.

如 X_1, Y_1, Z_1 爲 BC, CA, AB 上之切點, 於是:

$$AY_1=AZ_1,\ BZ_1=BX_1,\ CX_1=CY_1.$$

所以: $$AZ_1\cdot BX_1\cdot CY_1=BZ_1\cdot CX_1\cdot AY_1.$$

故: AX_1, BY_1, CZ_1 爲共點線 (240).

244. 定理. 三角形之各頂點連至對邊內之傍切點而成三個共點線.*

* 譯者附註——此點稱爲奈格爾點 Nagel point. Untersuchungen über die wichtigsten Zum Dreiecke gehörigen Kreise, 1836.

此與以上二定理有類似之證明.

245. 定理. 葛爾剛訥點(242)分割經過此點之稅尾線(239, II)而成六線段,此六線段所有三比之乘積,等於此三角形之外半徑與內半徑相比之四倍.

今言三角形 ABX 及截線 CZ(第96圖),依美奈勞斯定理乃有:

$$AZ\cdot BC\cdot MX=BZ\cdot CX\cdot MA,$$

或 (120)
$$\frac{AM}{MX}=\frac{BC\cdot AZ}{BZ\cdot CX}=\frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

仿此:
$$\frac{MB}{MY}=\frac{b(p-b)}{(p-c)(p-a)},$$

$$\frac{CM}{MZ}=\frac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)}$$

故:
$$\frac{AM}{MX}\cdot\frac{BM}{MY}\cdot\frac{CM}{MZ}=\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{abcp}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{abcp}{S^2}=\frac{A\cdot R\cdot S\cdot p}{S^2}$$

$$=\frac{A\cdot R\cdot S\cdot S}{S^2\cdot r}=\frac{4R}{r},$$

因 $abc=4R\cdot S$(202), 而 $pr=S$(109).

246. 定理. 如 LMN(第95圖)爲 S 點對於三角形 ABC

而有之線趾三角形(239, III), 於是

$$\frac{SL}{AL}+\frac{SM}{BM}+\frac{SN}{CN}=1.$$

三角形 ABC, SBC(第95圖)有底邊 BC 爲公邊. 故其面積之比, 等於此底邊上垂高之比. 但此垂高之比等於 $SL:AL$.

故: $$\frac{SL}{AL}=\frac{SBC}{ABC}.$$

仿此: $$\frac{SM}{BM}=\frac{SCA}{ABC},\quad \frac{SN}{CN}=\frac{SAB}{ABC}.$$

故: $$\frac{SL}{AL}+\frac{SM}{BM}+\frac{SN}{CN}=\frac{SBC+SCA+SAB}{ABC}=1.$$

247. 定理. 如 LMN 爲 S 點對於三角形 ABC 而有之線趾三角形(239, III), 於是

$$\frac{AS}{SL}=\frac{AM}{MC}+\frac{AN}{NB}.$$

經通 C, B(第95圖)畫 ASL 之平行線遇 MB, CN 於 E, D. 於是:

$$\frac{AS}{EC}=\frac{AM}{MC},\quad \frac{AS}{BD}=\frac{AN}{BN}.$$

故: $$\frac{AS}{EC}+\frac{AS}{BD}=\frac{AM}{MC}+\frac{AN}{BN}. \tag{1}$$

今: $$\frac{SL}{EC}=\frac{BL}{BC},\quad \frac{SL}{BD}=\frac{CL}{BC}.$$

故：$$\frac{SL}{EC}+\frac{SL}{BD}=\frac{BL}{BC}+\frac{CL}{BC}=1,\text{或}\frac{1}{EC}+\frac{1}{BD}=\frac{1}{SL}.$$

故此結果併(1)而成：

$$\frac{AS}{SL}=\frac{AM}{MC}+\frac{AN}{BN}.$$

248. 應用I. 如S點與重心G相合，於是

$$AM=MC,\ AN=BN,$$

而 $$AS:SL=1+1=2.$$

249. 應用II. 如S點與內心I相合，於是

$$AN:BN=b:a,\ AM:CM=c:a.$$

故：$$AS:SL=(b+c):a.$$

250. 應用III. 如S點與葛爾剛訥點(242)相合，於是

$$\frac{AN}{BN}=\frac{p-a}{p-b},\quad \frac{AM}{MC}=\frac{p-a}{p-c}.$$

故：$$\frac{AS}{SL}=\frac{p-a}{p-b}+\frac{p-a}{p-c}$$

$$=\frac{(p-a)(p-c+p-b)}{(p-b)(p-c)}=\frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)},$$

此乃符合(245)所得之結果.

習　題

1. 稅瓦定理能否成立，如一點在三角形之邊上，或在其延邊上？

2. 表明能分稅瓦線而成等比線段之點,僅爲重心。

3. 用稅瓦定理,證明三角形之中線爲共點線。用稅瓦之逆定理,證明(1)三角形之中線爲共點線;(2)內平分線爲共點線;(3)垂高爲共點線。暗示。依相似直三角形,$AF:AE=AC:AB$.

4 動點F, E取在三角形ABC之AB, AC邊上,使$\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}$爲一常數。求$BE$與$CF$之交點$O$所有之軌跡。表明三角形$BOC$之面積爲一常數。

5. 一圓遇BC於L, L',遇CA於M, M',又遇AB於N, N'。表明如AL, BM, CN爲共點線,則AL', BM', CN'亦爲共點線。

6. 照通用之記法,如M_1爲AX_1, BY_1, CZ_1三線之公點,則$\frac{AM_1}{X_1M_1}\cdot\frac{BM_1}{X_1M_1}\cdot\frac{CM_1}{Z_1M_1}=4R:r'$.

仿之而言其他二傍切圓.

7. $ABC, A'B'C'$爲兩三角形,使AA', BB', CC'相遇於O。證明如$BC, B'C'$相遇於L;$CA, C'A'$相遇於M;$AB, A'B'$相遇於N,則L, M, N爲共點線。暗示。言三角形OBC, OCA, OAB之截線$LB'C'$, $MC'A'$, $NA'B'$.

此題在配景三角形(perspective triangles)中,謂之戴沙固定理(Desargue's theorem).

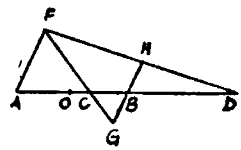
8. 如六角形 $ABCDEF$ 之頂點 A, C, E 在一直線上(而其餘三頂點 B, D, F 在另一直線上)，則此六角形之三對對邊 $AB, DE; BC, EF; CD, FA$ 遇於三個共線點.

此題謂之巴普斯定理 (Pappus' theorem) 或巴斯開定理 (Pascal theorem).

第五章

調和分割

251. 界說. 如 C, D 點(第 97 圖)內分及外分 AB 線段而成同一比值,則 C, D 點對於 A, B 二點爲彼此"調和共軛"(harmonic conjugates). 而 AB 線段乃被 C, D 二點"調和分割" (harmonically divided).



第 97 圖

252. 定理. <u>如 C, D 對於 A, B 爲調和,則 A, B 對於 C, D 亦爲調和.</u>

依假設而有: $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$.

故: $$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}, \text{或} \frac{CB}{DB} = \frac{CA}{DA}.$$

然則 B, A 二點內分及外分 CD 線段而成同一比值,故此命題云云.

253. A, B, C, D 四點謂之"調和列點" (a harmonic range). 一組調和列點爲兩對共軛點(conjugate points)組織而成. 如言調和列點,應知如何二點爲共軛點.

254. 爲便利計,一組調和列點之線段,可視爲有方向之線.若 C,D 內分及外分 AB 線段而成同一比值,則此二比之線段常書如下: $\frac{AC}{CB}$, $\frac{AD}{DB}$, 以致第一比爲正號而第二比爲負號.故此二比之複比 $\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}$ 等於 -1, 所以 $(ABCD)=-1$ 之記號(symbol)表示一組調和列點.

255. 題. <u>已知共線點 A, B, C, 作 C 對於 A, B 而有之調和共軛點 D.</u>

經過 A, B 任畫一對平行線 AF, BH(第 97 圖), 又經過 C 畫任何方向之一線遇 AF 於 F 及 BH 於 G. 在 BH 上取 H, 以致 B 爲 GH 之中點 FH. 線遇 ABC 於所求點 D, 因

$$AD:BD=AF:BH=AF:GB=AC:BC,$$

此即 $(ABCD)$ 爲一組調和列點.

此題必有一解而僅限於一.

<u>註.</u> 如 C 爲 AB 之中點, 則 $AF=BG=BH$, 而 FH 線平行 AB. 易言之, C 點對於 A, B 不有其調和共軛點.然自某種見解看來,例如射影幾何學(Projective Geometry)所採取之見解, C 對於 A, B 而有之調和共軛點, 可謂在 AB 線上之無窮遠處(at infinity).

256. 定理. 如在調和列點$(ABCD)$中,自AB線段之中心O量各線段之長,於是

$$OC\cdot OD=\overline{OA}^2.$$

依假設而有(第97圖):

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}.$$

故:
$$\frac{AC+CB}{AC-CB}=\frac{AD+DB}{AD-DB}. \tag{1}$$

今:
$$AC+CB=AB=2OA,$$
$$AC-CB=(AO+OC)-(OB-OC)=2OC,$$
$$AD+BD=(AO+OD)+(OD-OB)=2OD,$$
$$AD-BD=AB=2OA.$$

故(1)變爲: $2OA:2OC=2OD:2OA,$

或
$$OC\cdot OD=\overline{OA}^2.$$

257. 逆定理. 如O爲AB線段之中點,又如C, D爲AB線上之二點而有

$$OC\cdot OD=\overline{OA}^2,$$

則$(ABCD)$爲一組調和列點.

可逆言正定理(direct theorem)(256)之步驟以證此題.

258. 定理. 如在調和列點$(ABCD)$中,一切線段均自列點中之一點,B量起,則

$$\frac{2}{AB}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{BD}.$$

如其線段均有符號，則依假設而有:

$$\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB},$$

或取 B 爲原點(origin)，則

$$\frac{BC-BA}{-BC}=-\frac{BD-BA}{-BD},$$

或 $$-1+\frac{BA}{BC}=1-\frac{BA}{BD},$$

或 $$2=\frac{BA}{BC}+\frac{BA}{BD},$$

或 $$\frac{2}{BA}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{BD}.$$

註. 然則 BA 在代數學(Algebra)內，稱爲 BC 及 BD 線段之調和中項(harmonic mean). 故今名之曰"調和列點".

逆定理. 如 A, B, C, D 爲四個共線點，以致有方向之線段 BA, BC, BD 適合下列之條件:

$$\frac{2}{BA}=\frac{1}{BC}+\frac{1}{BD},$$

則 $(ABCD)$ 爲調和列點.

逆言正定理中之步驟，即可證此命題.

259 定理. 如$(ABCD)$為一組調和列點,而O為AB線段之中點,則其大小及符號如下:

$$DA \cdot DB = DC \cdot DO.$$

依前定理(256)應有大小及符號如下:

$$\overline{OA}^2 = OC \cdot OD.$$

故:
$$\overline{OA}^2 - \overline{OD}^2 = OC \cdot OD - \overline{OD}^2,$$

$$(OA - OD)(OA + OD) = (OC - OD)OD,$$

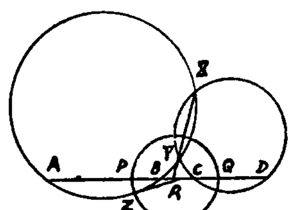
$$(DO + OA)(DO + OB) = (DO + OC)OD,$$

$$-DA \cdot DB = DC \cdot OD,$$

$$DA \cdot DB = DC \cdot DO.$$

260. 題. 求二點,使調和分割兩對共線點中之每一對.

在已知線$ABCD$外(第98圖)任取一點X,又經過X及已知二對中之一對共線點畫一圓XAB,而經過X及其他一對已知點另畫一圓XCD.令此二圓之第二公點為Y,而XY在$ABCD$上之交點為R.今如R不在此二圓之中,則自R畫其一圓之切線RZ,又用圓心R半徑RZ畫一圓形,割AB於所求點P,Q



第98圖

因 $\overline{RP}^2=\overline{RZ}^2=RX\cdot RY=RA\cdot RB=RC\cdot RD$,

用(257)之見解即可得其證明.

此題可有一解而僅限於一,當其時,R在二圓之外,此即 AB 及 CD 線段不相重疊.

習　　題

1. 已知列點 A, B, D. 作 D 對於 A, B 而有之調和共軛點 C.

2. 三角形一角之內外平分線,調和分割此角之對邊.

3. P, Q, R 爲 BC, CA, AB 上之三點,以致 AP, BQ, CR 爲共點線; P', Q', R' 爲 P, Q, R 對於 B, C; C, A; A, B 而有之調和共軛點; 證明 P', Q', R' 爲共線點.

4. O, O' 爲調和列點 $(ABCD)$ 所有 AB, CD 二線段之中點,而 H 爲以 AB, CD 畫如直徑之圓形所有之一公點. 表明 $\angle OHO'=90°$. 暗示. 表明 $\overline{OO'}^2=\overline{OH}^2+\overline{OH'}^2$.

5. 經過 BC 中點 A' 之線,遇 AB 於 F,遇 AC 於 G. 又遇經過 A 而與 BC 平行之線於 E. 表明 $(A'EFG)$ 爲調和列點. 暗示. 相似三角形表明 $EG:GA'$, $EF:A'F$ 二比相等.

6. P, Q 調和分割一圓之直徑; R, S 調和分割另一直徑; 表明 P, Q, R, S 爲共圓點.

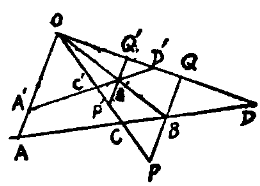
7. 表明三角形之外心, 垂心, 九點圓心, 及重心成一組調和列點.

8. 如 A, B, C, D 爲直線上順序之四點,表明於一點上使 AB, CD 線段張有等角, 則此一點之軌跡爲一圓形, 有二點爲其直徑, 此二點分已知點 A, D; B, C 中之每一對而成調和列點(看 § 11).

261. 定理. 如 O 爲調和列點 $(ABCD)$ 之線外一點,又如經過 B 而與 OA 平行之線遇 OC, OD 於 P, Q, 則 $PB = BQ$.

AO 既平行 PB, 故 $AC : CB = AO : PB$ (第 99 圖), 又 AO 既平行 BQ, 故 $AD : BD = AO : BQ$.

$(ABCD)$ 既已調和, 故 $PB = BQ$.



第 99 圖

262 逆定理. 如 OA, OB, OC, OD (第 99 圖) 爲四線使經過 OB 之一點 B 而與 OA 平行之線被 OC, OB, OD 分成相等之線段 PB 及 BQ, 則經過 B 之每一線被 OA, OB, OC, OD 調和分割.

逆言以上 (261) 證明之步驟, 即得此題之證.

263. 定理. 如 O 爲調和列點 $(ABCD)$ 之線外任何一點，則任何截線被 OA, OB, OC, OD 四線割成調和列點.

設 $A'B'C'D'$（第 99 圖）爲此截線. 經過 B, B' 畫 OA 之平行線 PBQ 及 $P'B'Q'$. $(ABCD)$ 既已調和，故 $PB=BQ$ (261)，而依平行線之理，

$$\frac{PB}{P'B'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{BQ}{B'Q'}.$$

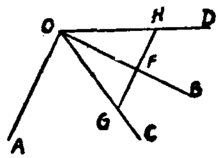
故 $P'B'=B'Q'$，而 $(A'B'C'D')$ 爲調和列點 (262).

264. 界說. 如四個共點線 OA, OB, OC, OD 被一截線割成四個調和點，因此而每一截線割成四個調和點 (263)，則此四線稱爲"調和束線" (a harmonic pencil)；OA, OB, OC, OD 中，每線均爲束線中之"射線" (ray)，而 O 點稱爲束線之"頂" (vertex) 或"心" (center)；OA, OB; OC, OD 稱爲兩對"共軛射線" (conjugate rays)，而 OC, OD 對於 OA, OB 爲"調和共軛，"或稱爲被 OA, OB "調和分割."此束線以 $O(ABCD)$ 或 $O(AB, CD)$ 表示之.

265. 定理. 如一組調和束線之一對共軛線互相直交，則此二射線爲束線中其他二線所成一角之平分線.

設 $O(ABCD)$（第 100 圖）爲已知之調和束線，而 OA 垂直 OB，任畫一線平行 OA 而遇 OB, OC, OD 於 F, G, H. 於

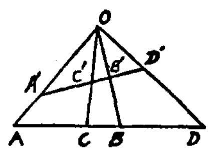
是依前定理(261) $GF=FH$, 且 OF 既垂直 OA, 故亦垂直 GH. 然則 OGH 爲等腰三角形,而 OF 爲 $\angle GOH=\angle COD$ 之平分線.



第 100 圖

266. 定理 如 $(ABCD)(A'B'C'D')$ 爲二組調和列點, 且如 AA', BB', CC' 相遇於一點 O, 則 DD' 亦經過 O.

連接 O, D' (第 101 圖), 又令 OD' 在 ABC 上之交點爲 E. $A'B'C'D'$ 既已調和, 則 $ABCE$ 亦必調和,此即 E 對於 A, B 爲 C 之調和共軛點. 但依假設, C 對於 A, B 而有之調和共軛點爲 D, 因 $(ABCD)$ 已調和, 故 E 與 D 相合, 而此命題全證.



第 101 圖

推論. 如 $(ABCD)(AB'C'D')$ 爲調和列點而此列點在 A 爲公點之二直線上, 則 BB', CC', DD' 爲共點線.

習　　題

1. 一角之二邊,及其內外平分線,成一組調和束線.

2. 三角形 ABC 中,證明 $A(OHII'')$ 爲一組調和束線.

3. 在一已知線上,往往有一點,使此點連至已知二點,其二連線所成之角,被此已知線平分.

4. 作 OC 對於 OA, OB 而有之調和共軛線.

5. 內切圓與三角形 ABC 之 BC, CA, AB 邊相切於 X, Y, Z; YZ 延長而遇 BC 於 T; 表明 $(BCXT)$ 爲調和列點.

6. 平形四邊形 $ABCD$ 中, AE 畫與 BD 平行; 表明 $A(ECBD)$ 爲調和列點.

7. A', B', C' 爲 BC, CA, AB 之中點; 證明 $A'A$ 對於 $A'B', A'C'$ 爲 $A'C$ 之調和共軛線.

8. AD, AA 爲 ABC 之垂高及中線; 經過 A' 而與 AB, AC 平行之二線遇 AD 於 P, Q; 表明 $(ADPQ)$ 爲調和列點.

9. 照三角形 ABC 之通用記法, 如 DF 遇 BE 於 K, 表明 $(BHKE)$ 爲調和列點; 又如 EF 遇 BC 於 M, 表明 $(BCDM)$ 爲調和列點.

10. 經過一已知點, 畫一截線, 使與三個已知線(共點線或非共點線)相交之三點, 與此已知點成一組調和列點.

11. 與一圓形相切於 C 點之切線, 遇其直徑 AB 之延線於 T 點; 證明自 T 所畫此圓之另一切線, 被 CA, CB, T, 及其切點調和分割.

12. A', B', C' 爲 BC, CA, AB 之中點; CC' 遇 AA' 及 $A'B'$ 於 L, M; 證明 $C'L \cdot MC$ 等於 $C'C \cdot LM$.

第六章

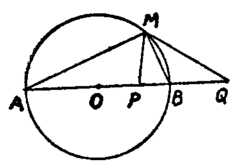
圓形之調和性

1. 反點

267 界說. 如二點與一已知圓之圓心爲共線點,且離此圓心所有二距之乘積等於半徑之平方,則此二點對於此圓稱爲"反點"(inverse points).

268. 定理. 二反點分其所處之直徑而成調和.

設 P, Q 爲二反點,而 A, B (第102圖)爲經過 P, Q 之直徑兩端.如 O 爲此圓之圓心,依假設而有 $OP \cdot OQ = \overline{OB}^2$,且 O 旣爲 AB 之中點,故 $(ABPQ)$ 爲調和列點(257).



第120圖

269 定理. 自圓上任何一點至已知二反點,其距離之比爲一常數.

設 P, Q (第102圖)在直徑 AB 上.$(ABPQ)$ 旣爲調和列點,則其束線 $M(ABPQ)$ 亦然(264).今 AMB 角 $=90°$.故 MA, MB 平分 PMQ 角(265),所以 $MP : MQ = PB : BQ$ 而

爲常數.此乃第一章軌跡11逆定理之另一證法.

習　題

1. 對於一圓而有之二對反點爲共圓點或共線點.

2. 自圓形(圓心O)外之一點P,畫此圓之二切線.證明P爲其切弦(chord of contact)與OP所成交點之反點.

3. 如P爲圓上之任何一點,而B, B'及C, C'爲一直徑上之二對反點,則BPC角與$C'PB'$角相等或互爲補角.

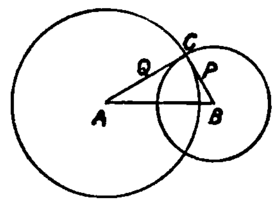
2. 直交圓

270. 界說. 如二圓在一交點上之二切線互相垂直,則此二圓謂之"直交"(orthogonal).此二圓旣在聯心線上互相對稱,則直交圓所有另一交點上之二切線當亦垂直.

271. 定理. 如二圓直交,而一圓之半徑經過一公點,則此半徑亦爲第二圓之切線.

設C爲二直交圓(A),(B)(第103圖)之一公點.畫此二圓之切線CP, CQ,則依假設QCP角$=90°$,故切(A)圓於

C 點之切線 CP 垂直 CQ，所以 CQ 經過圓心 A；仿此，CP 經過 B。然則 AQC 與 BPC 爲此二圓之切線.



第 103 圖

272. 逆定理. 如任一半徑經過二圓之一公點而爲其他一圓之切線，則此二圓直交.

如半徑 AC 爲 (B) 之切線（第 103 圖），則半徑 CB 垂直 AC，故 CB 爲 (A) 圓之切線. 然則 (A) 圓，(B) 圓之切線 BC，AC 互相垂直，故此二圓直交.

273. 推論. 如經過二圓一公點之二半徑互相垂直，則此二圓直交.

274. 定理. 如二圓直交，則聯心線* 之平方，等於其半徑平方之和.

依上定理(272)三角形 ABC 直交於 C 點上（第 103 圖）；故 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

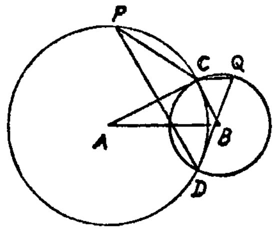
逆而言之. 如二圓聯心線之平方，等於其半徑平方之和，則此二圓直交.

如有 $AB=AC+BC$，則 ABC 爲一直三角形，而依上之推論(273)此二圓必直交.

*譯者附註——聯心線爲二圓圓心中之線段.

275. 定理　<u>如二交圓之圓周角在其公弦兩旁之弓形(segments)中，且此二角之和，等於90°或270°，則此二圓直交.</u>

設 A, B 為此二圓之圓心(第104圖)，而 P, Q 點為 (A)，(B) 二圓在其公弦 CD 兩旁之弓形上.



第104圖

照圖中之情形

$$\angle CAD = 2\angle CPD,\ \angle CBD = 2\angle CQD.$$

故: $$\angle CAD + \angle CBD = 2(\angle CPD + \angle CQD) = 180°,$$

所以 $$\angle ACB + \angle ADB = 180°,$$

因四角形四邊之和等於四直角.

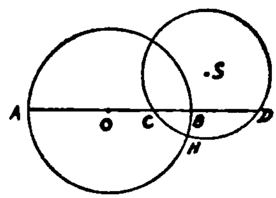
但 $\angle ACB = \angle ADB$. 故 $\angle ACB = 90°$，而此二圓直交.

如 P, Q 取在劣弧(minor arcs) CD 上，則應以 $\angle CPD + \angle CQD = 270°$ 為其假設.

276. 定理.　<u>如二圓直交，則一圓之每一直徑，割其他一圓於第一圓之反點上.</u>

經過(O)圓之圓心 O(第105圖)，畫一線，遇(O)於 A, B 及(O)之直交圓(S)於 C, D. 二圓既直交，則自(O)與(S)之交點 H 所畫之半徑 OH 必為(S)之切線. 故 $OC \cdot OD =$

$\overline{OH}^2=\overline{OB}^2$,此即 $(ABCD)$ 爲調和列點,而 C, D 對於 (O) 圓爲反點.



第 105 圖

推論. 如 $(ABCD)$ 爲調和列點,則以 AB 爲直徑之圓必直交經過 C, D 之任何圓形.

277. 逆定理. 如一圓經過另一圓之一對反點,則此二圓直交.

如 C, D 對於 (O) 爲反點(第105圖),則依反點之界說 $OC \cdot OD=\overline{OB}^2$,所以 $OC \cdot OD=\overline{OH}^2$,此即經過 C, D 之圓與半徑 OH 相切,故與 (O) 圓直交.

278 題. 經過已知二點,畫一圓,與一已知圓直交.

求已知點中之一點對於已知圓而有之反點.其所求圓即此反點及已知二點所定之圓*

此題往往有一解而僅限於一.如已知二點與其圓心爲共線點,而對於此圓並非反點,則此題爲不可能.如爲反點,則此題得無數之解.

習題

*譯者附註——參考第269節後之習題 1.

1. M為圓心O之圓上一點,而AB為一直徑;證明$(AMO)(BMO)$二圓直交.

2. 以已知二圓之公切線為直徑之圓形,與此二圓各相直交.

3. 如$(ABCD)$為一組調和列點,以AB, CD為直徑之圓形互相直交.

4. 二圓之交角,與聯心線張於此二圓公點上之角,互為補角.

5. 以二圓之圓心及此二圓之交點為頂點之四邊形,如為聯圓四邊形,則此二圓直交.

6. 以已知三角形之頂點為圓心,有三圓,每一圓為其他二圓之直交圓.求其半徑之長,以已知三角形之邊表示之.

7. 二直交圓之聯心線遇一圓於A, B及其他一圓於C, D;如O為第一圓之圓心,表明$DA \cdot DB = DC \cdot DO$.

8. 照三角形ABC之通用記法,證明三圓如以A, B, C為其圓心,而其半徑之平方為$AH \cdot AD$, $BH \cdot BE$, $CH \cdot CF$,則此三圓互相直交.

---

*譯者附註——此二圓之一公點上,二切線所成之角,為此二圓之交角.

9. 經過一已知點而與一已知圓直交之圓形,其圓心之軌跡爲一直線.

10. H 爲 ABC 之垂心;證明以 AH 及 BC 爲直徑之圓形互相直交.

11. 一已知點連至已知圓內一已知直徑之兩端,此二連線在已知圓上所得之二交點,與此已知點成一圓形,此圓與已知圓直交.

12. 以通用之記法,證明以 $I'I''$ 爲直徑之圓與 (IBC) 圓直交.

13. 二直交圓之一交點,連至聯心線割其一圓而有之二交點,則此二連線遇其他一圓於二點,證此二點爲與聯心線垂直之直徑末端.

14. 二直交圓中,互相垂直之二直徑末端,成一垂心組.

15. 證明一線被二直交圓調和分割,必爲其中一圓之直徑.

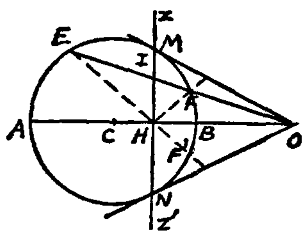
16. 如二圓相交於 P, Q 而與第三圓 (S) 直交,證明 P, Q 對於 (S) 爲反點.

3 對於圓形而有之極點與極線

279. 定理. 如一直線經過一定點 O,在此線上取一

I點,使此I點對於此線割一已知圓而有之二交點爲O之調和共軛點,則I點之軌跡爲一直線.

設I對於E,F二點爲O之調和共軛點(第106圖),此E,F二點在已知圓上而與O爲共線點;令經過O之直徑兩端爲A,B而O對於此圓而有之反點爲H(267),於是E(ABHO)爲調和束線,而EA,EB線既直交,故EB爲HEF角之平分線(265),此即BF弧等於BF′弧.故HO爲∠FHF′之平分線,而OH之垂線HZ爲其補角之平分線.但三角形HEF之底邊EF被H角之平分線HO,HZ調和分割;所以I點在定線OAB之垂線上,此垂線在定點H上而爲I之軌跡.



第 106 圖

280 界說. HI線稱爲O對於此圓而有之"極線"(polar),而O點稱爲HI線之"極點"(pole).**

281.題. 作一已知點對於一已知圓而有之極線

*譯者附註——試言O點在已知圓內之情形

**譯者附註——注意極(pole)(213)與極點(pole)(280)有何不同之處

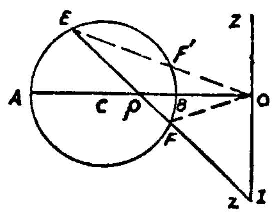
已知點P連至已知圓之圓心C,又求P對於此圓而有之反點Q.垂直CP於Q之垂線p,即爲所求之極線.

282. 註I. 如P點甚近此圓,則其反點Q將近P點.當P在圓上之時,Q與P相合,而P之極線變爲此圓之切線,相切於P.

註II. 圓形之平面上,每點對於此圓總有其極線,其唯一例外爲此圓之圓心.圓心之極線,或視在無窮遠處.此乃射影幾何學所取之見解.

283. 題. 已知其圓形之平面上一線,求其極點.

自已知圓之圓心C放落已知線p上垂線CQ. p之所求極點爲此垂足Q之反點P.



第 107 圖

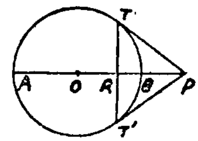
284. 註I 已知圓中,切線之極點爲此切線之切點.

註II. 平面內,每線有一極點,而僅限於一.惟此已知圓之直徑爲其例外.

285 定理. 一點在一已知圓外,則其極線爲自此點所耑二切線之切弦.

設TT'(第108圖)爲自已知點P至已知圓(O)所有切線PT, PT'中之切弦,且令TT'與PO之交點爲R,而

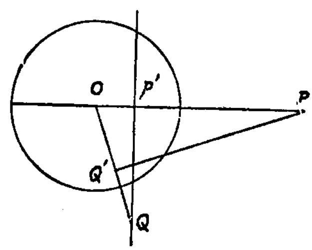
A, B 爲經過 P 之直徑兩端.直三角形 OTP 中, $\overline{OT}^2=OP\cdot OR$, 或 $\overline{OA}^2=OP\cdot OR$. 故 R 爲 P 之反點, 而垂直 PO 於 R 之垂線 TT' 爲 P 之極線 (267).



第 108 圖

286. 定理. 如 P 之極線經過 Q, 則 Q 之極線經過 P.

令 P, Q 之反點爲 P', Q' (第 109 圖),於是 $OP\cdot OP'=OQ\cdot OQ'=R^2$, 其 R 爲已知圓之半徑. 故 P, P', Q, Q' 爲共圓點, 所以 $PP'Q$ 角 $=\angle PQ'Q$. 但 QP' 線爲 P 之極線,因其經過 Q 而經過 P 之反點 P'. 故 $PP'Q$ 角 $=90°$, 而 $PQ'Q$ 角 $=90°$. 然則 PQ' 線經過 Q 之反點 Q' 而與 OQ 垂直, 此即 PQ' 爲 Q 之極線 (281), 且旣 PQ' 經過 P 點, 則此命題全證.



第 109 圖

287. 註 I. 二點中, 任一點之極線, 經過其他一點, 則此二點謂之"共軛點" (conjugate points).

註 II. 一線上任何一點,總有其共軛點,此共軛點乃在此線上而被此點之極線所得. 其例外之點爲何點?

288. 註 III. 二共軛點被二點調和分割,此分割之二點爲此共軛點之連線與此圓之交點(假設連線與圓

相交之情形).此從極線之界說(280)卽易見之.

289. 定理. 如 p 線之極點在 q 上,則 q 線之極點在 p 上.

設 P, Q 爲 p, q 之極點.於是依假設 P 在 q 上.故 P 之極線 p 經過 Q,此即 q 之極點在 p 上.

290. 界說. 二線中,任一線之極點,在其他一線上,則此二線謂之"共軛線" (conjugate lines).

291 定理. 共線點之極線爲共點線.

a 線上 $P, Q, R, \cdots$ 諸點之極線,當必經過 a 線之極點 A(286).

292. 推論. 任何一線之極點,爲此線上之任何二點所有二極線之交點.

293. 定理. 共點線之極點爲共線點.

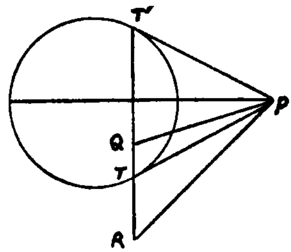
經過 A 點之 $p, q, r, \cdots$ 線,其極點必在 A 之極線上(289).

294. 推論. 一點之極線,爲經過此點之任何二線所有二極點之連線.

295. 定理. 如二共軛線相交於圓外,則此二共軛線對於自交點所畫此圓之二切線爲調和共軛線.

令共軛線 PQ, PR 遇 P 之切弦 TT' 於 Q 及 R(第110圖).於是依假設而有 PR 之極點在 PQ 上(290),又在 P 之極

線 TT' 上, 因 PR 經過 P. 故 Q 為 PR 之極點所以 $(TT'QR)$ 為調和列點, 而 $P\,(TT'QR)$ 為調和束線(264).



第 110 圖

296. 逆而言之. 對於一對切線為調和共軛之二線, 彼此共軛.

因如 $P(TT'QR)$ 為調和束線(第 110 圖), 則 $(TT'QR)$ 為調和列點. 故 Q 之極線經過 R; 亦經過 P, 因 Q 在 P 之極線上. 故 Q 之極線為 PR, 而 PQ 與 PR 為共軛點.

297. 定理　如二圓 (C). (C') 直交, 則 (C') 上任何一點 P, 對於 (C) 圓而有之極線, 經過 (C') 上 P 之直徑末端.*

P(第 111 圖)與圓心 C 之連線 PC, 遇 (C') 於 S, S 即 P 對於 (C) 而有之反點(276). 故 P 對於 (C) 而有之極線為垂直 PC 於 S 之垂線. 故此極線遇 (C') 於 P 之直徑末端 R.

298. 逆定理.　已知二圓 (C), (C'), 如 (C') 上之 P 點對於 (C) 圓而有之極線, 經過 (C') 上 P 之直徑末端. 則此二

---

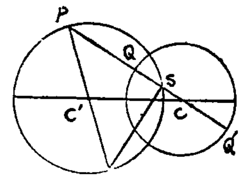
*譯者附註——因 PR 經過 TT' 之極點 P, 故 P 之極線 TT' 經過 PR 之極點(286).

*譯者附註——此定理或如下述: 如二圓直交, 則其一圓之直徑兩端, 對於其他一圓為共軛點.

**譯者附註——此定理或如下述: 如一圓之直徑兩端, 對於另一圓為共軛點, 則此二圓直交.

圓直交.

依假設 P 對於 (C) 圓而有之極線,經過 R 而為 PC 之垂線(第 111 圖). 故此極線與 RS 線相合,此即 S 點對於 (C) 圓為 P 之反點 (281); 故此二圓直交 (277).

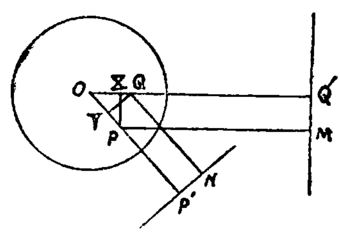


第 111 圖

如 PC 與 (C') 相切於 P, 則其情形若何?

299. 定理. 如 P 及 Q 為任何二點, 又如 PM 及 QN (第 112 圖) 為自每一點放落之垂線, 放在其他一點對於同一圓形 (O) 而有之極線上, 則 $OP : PM = OQ : QN$.

自 P 放落 OQ 之垂線 PX. 自 Q 放落 OP 之垂線 QY 於是 P' 既為 P 之反點,而 Q' 既為 Q 之反點, 則:



第 112 圖

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'.$$

又直三角形 OPX, OQY 既為相似形, 則:

$$OY \cdot OP = OX \cdot OQ$$

故:
$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'} = \frac{OX}{OY} = \frac{(OQ' - OX)}{(OP' - OY)} = \frac{XQ'}{YP'} = \frac{PM}{QN}.$$

故:
$$OP : PM = OQ : QN.$$

300. 題. <u>作一三角形,使其各頂點對於一已知圓爲其對邊之極點</u>

任取一點 P, 又對於已知圓而有之極線 p 上任取一點 Q. Q 之極線 q 將經過 P, 因 Q 在 P 之極線上,且此 Q 之極線 q 將遇 p 於所求三角形 PQR 之第三頂點 R. 依作法 QR 線及 RP 線爲 P 及 Q 之極線, 而乃 R 爲 PQ 之極點, 因 R 爲 P 及 Q 所有二極線之交點(292).

此題有幾解?

301. 界說. 三角形對於一圓稱爲"自共軛"(self-conjugate), 如每邊爲其相當頂點之極線.

302. 題. <u>已知一三角形,求一圓,使此三角形對於此圓爲自共軛.</u>

設 ABC 爲已知三角形. A 既爲 BC 之極點, 則自 A 至 BC 上之垂線必經過所求圓之圓心. 仿之而言其他二頂點. 故所求圓之圓心必爲三角形之垂心. 又所求半徑之平方必爲 $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$, 而此爲任何三角形中均能適合之條件(142). 但 A, D; B, E; C, F 對於所求圓必爲反點. 故每對反點應在圓心 H 之一旁, 此即 H 必在已知三角形 ABC 之外. 然則 ABC 必爲鈍角三角形.*

---

*譯者附註——此題有幾解? 與上題(300)有何不同之處?

界說. 此圓稱爲三角形之極圓(polar circle).

習題

1. 如 P, R 對於一已知圓 (S) 爲共軛點 則以 PR 爲直徑之圓與 (S) 直交.

2. 一定圓之變動弦 PQ 經過一定點 H;證明 P, Q 上之切線相交於一定線上, 此定線乃爲 H 之極線.

3. 自一定線上之變動點, 畫一定圓之切線, 表明其切弦旋轉於一定點上.

4. 與三角形 ABC 之外接圓相切於 A 之切線,如遇 BC 於 T, 且延長至 U, 使 $AT=TU$; 表明 A 及 U 對於經過 B, C 之任何一圓爲共軛點.

5 二共軛點之連線,其極點爲一三角形之垂心,此三角形乃被已知之二點及此圓之圓心所規定.

6. 證明二線之夾角,等於其二極點之連線張於圓心上之角.

7. P, P' 爲同心圓 $(S), (S')$ 上之二點;其圓心爲 O. N, N' 爲自 P, P' 放落之垂足, 放在 P, P' 對於 $(S'), (S)$ 而有之極線上. 證明 $PN:P'N'=OP':OP$.

8. TP, TQ 爲圓中 PQ 弦兩端上之切線. 此圓之任

何一點 R 上之切線,遇 PQ 於 S;證明 TR 爲 S 之極線.

9. 一變動圓經過一定點 C 而有二定點 H, K 爲共軛點;證明其圓心之軌跡爲一直線,垂直 C 點與 HK 中點之連線.

10. 極圓必調和分割其三角形之各邊.

11. 如 X 爲 BC 上任何一點,則以 AX 爲直徑之圓直交三角形 ABC 之極圓.

12. 證明一點對於已知二圓使有互相直交之二極線,則此一點之軌跡爲一圓形,以已知聯心線爲其直徑.

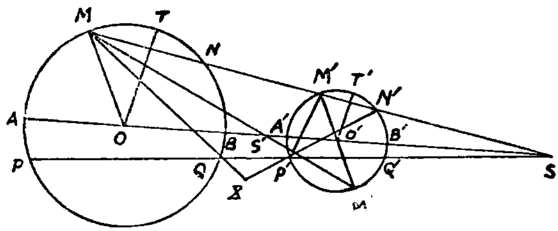
13. 一線遇已知二圓於四點;求此線上之另二點,使其中任一點對於此二圓而有二極線之交點即爲其他之一點.

4. 二圓之相似心

303. 一圓之位似形爲一圓形(43),今證其逆定理:

定理. 任何二圓爲位似形(若言二個不同之相似心,則其位似形有二種看法).

令 $OM, O'M'$ (第113圖)爲互相平行之任二半徑同在已知二圓 $(O), (O')$ 之聯心線 OO' 一旁,又令 S 爲 MM' 與



第 113 圖

OO' 之交點.三角形 $SOM, SO'M'$ 為相似形.

故:　　$OS : O'S = OM : O'M' = SM : SM'$.

但 $OM : O'M'$ 為一定量.故 S 點外分已知線段 OO' 成一已知比,而 S 點之位置乃定,而 M' 點為 M 之位似形,此以 S 為位似心,以 $OM : O'M'$ 為其位似比.

如平行二半徑 $OM, O'M'$ 取在聯心線 OO' 之兩旁,則上之推理亦可適用.惟以 S' 點為其位似心,此 S' 乃內分聯心線成此半徑之比.

S 點稱為二圓之"外相似心"(external center of similitude),而 S' 點稱為其"內相似心"(internal center of similitude).

304. 註. 二圓之位似,不能多於二種看法.

如二圓位似,則其圓心為位似點,而相當之半徑必互相平行.故其位似心僅為 S 或 S'.

305. 題　<u>已知二圓,作其位似心.</u>

外分及內分此二圓之聯心線成其半徑之比;所分之二點必近於小圓之圓心.

306. <u>註 I.</u>　二圓之圓心及其相似心,成一組調和列點.

307. <u>註 II.</u>　如二圓相切,則其切點為一個相似心.

308. 定理.　<u>(a) 如二圓有外公切線,則此二公切線經過其外相似心.(b) 如二圓有內公切線,則此二公切線經過其內相似心.</u>

(a) 令 OT, $O'T'$ (第113圖) 為經過切點 T,T' 之二圓半徑. TT' 與 OO' 之交點,分 OO' 而成此半徑之比.故此點與二圓之外相似心相合.

(b) 同上.

309. 界說.　經過二圓 (O), (O') (第113圖) 之一個相似心 S,畫一線,遇 (O) 於 M, N, 又遇 (O') 於 M', N'. 令 M 之位似點為 M', 而 N 之位似點為 N'; 二對半徑 OM, $O'M'$; ON, $O'N'$ 各相平行.

M, N' 謂之"逆相當點" (anti-homologous points). M', N 為此二圓上另一對之逆相當點.

一圓之 MQ 弦,及第二圓中 M, Q 之逆相當點 N', P' 相連之 $N'P'$ 弦,稱為"逆相當弦" (anti-homologous chords).

310 定理. <u>自二圓之一個相似心至二個逆相當點,其距離之乘積爲一常數.</u>

令 A, B(第113圖)爲(O)上經過S之直徑兩端,而A', B'爲(O')上之類似點.於是

$$SM\cdot SN=SA\cdot SB,$$

而
$$SM'\cdot SN'=SA'\cdot SB'.$$

故:
$$SM\cdot SN\cdot SM'\cdot SN'=SA\cdot SB\cdot SA'\cdot SB'.$$

但
$$SM:SM'=SN:SN',$$

因S爲二圓之相似心.

故:
$$SM\cdot SN'=SM'\cdot SN,$$

所以
$$\overline{SM}^2\cdot\overline{SN'}^2=SA\cdot SB\cdot SA'\cdot SB'.$$

等式之右項既與指定之一對逆相當點M, N'毫無關係,則此命題已證.

311 推論. <u>兩對逆相當點,若非共線點則爲共圓點.</u>

如P, Q'爲另一對之逆相當點,則顯有:

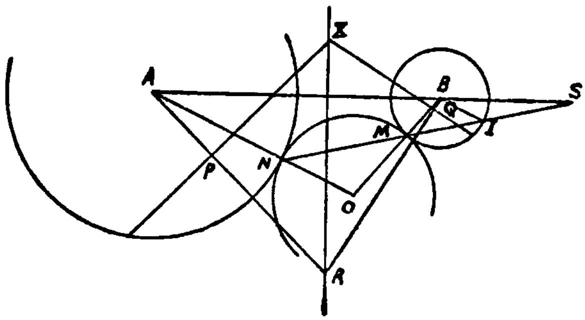
$$SM\cdot SN'=SP\cdot SQ'.$$

故M, N', P, Q'爲共圓點.

312. 定理. <u>如一圓與已知二圓相切,則其切點在已知二圓上爲逆相當點.</u>

設N, M(第114圖)爲(O)圓與已知二圓$(A), (B)$之切

點,且令 MN 線與 (B) 圓之第二交點為 I. MON, MBI 既



第 114 圖

為等腰三角形,則 $\angle MNO = \angle BIM$; 故 ONA 平行 BI 然則 MN 線乃連接已知二圓所有平行半徑之末端,故經過此二圓之一個相似心.

如已知圓均與 (O) 圓內切或均外切,則二切點之連線,經過已知圓之外相似心;如 (O) 與一圓內切而與其他一圓外切,則二切點之連線,經過其內相似心.

313. 界說. 圓形之直徑兩端,如為已知二圓之相似心,則此圓稱為已知圓之**相似圓** (circle of similitude).

314 定理. 自已知二圓之相似圓上任何一點至此二圓之圓心,其距離之比等於已知圓半徑之比.

蓋自一點至已知二圓之圓心 A, B 使其距離之比等於半徑 a, b 之比,則此點之軌跡為一圓形,而以 AB 分

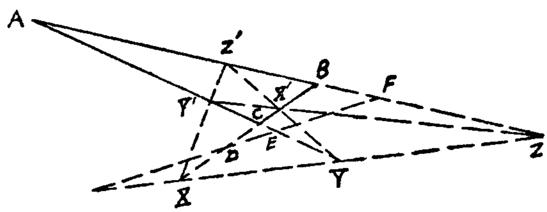
成 $a:b$ 比之二點爲其直徑之兩端(9, 軌跡 11). 此二點依其界說適爲二圓之相似心(303).

315. 推論. 二交圓之相似圓,經過此二圓之二公點.

如已知圓彼此相切,則其情形若何?

316. 定理. 三圓,每次取其二圓,所有六個相似心,乃在四直線上,每三個在其一線上.

設 A, B, C(第 115 圖)爲已知圓之圓心,且令其半徑以



第 115 圖

a, b, c 表示之.令 X, Y, Z 爲三對圓形之外相似心,而 X', Y', Z' 爲其內相似心.於是,既

$$BX:CX=b:c,\ CY:AY=c:a,\ AZ:BZ=a:b.$$

所以 $$\frac{BX\cdot CY\cdot AZ}{CX\cdot AY\cdot BZ}=1.$$

故依美奈勞斯定理 X, Y, Z 爲共線點.

又既 $$BX:CX=b:c,\ CY':AY'=c:a,\ AZ':BZ'=a:b.$$

所以 $$\frac{BX\cdot CY'\cdot AZ'}{CX\cdot AY'\cdot BZ'}=1.$$

故 X, Y', Z' 爲共線點.

仿之可證 X', Y, Z' 爲共線點 而 X', Y', Z 爲共線點.

317. 界說. 六個相似心所處之四線, 稱爲已知三圓之**相似軸**(axes of similitude)或**位似軸**(homothetic axes).

習　題

1. 同心圓有否相似心?

2. 等圓之相似心在何處?

3. 證明三角形之重心及垂心, 爲外接圓及九點圓之相似心.

4. 證明三角形之內心, 爲外接圓與三個傍心所得圓形之一個相似心.

5. 三圓每次取其二圓, 所有三個外相似心爲共線點.

6. 二圓在一公點上之二切線, 離任一相似心爲等距.

7. 證明已知二圓之圓心, 對於其相似圓爲反點.

8. 二圓相切於 A; 二變動割線 APQ, AHK 互相直交, 而遇其一圓於 P, H 及其他一圓於 Q, K; 證明 PK, QH 相交於一定點上.

9. 經過二圓圓心之任何一圓,必直交此二圓之相似圓。

10. 三角形 ABC 中,BC 上之傍切圓與 BC 相切於 X_1;如 I 爲其內心,又如 A' 爲 BC 之中點,證明 IA' 平行 AX_1.

11. 如一變動三角形有一定底邊而其他二邊之比亦定,表明二定頂點所對之二傍切圓,所有之外相似心爲一定點。

12. O 爲二圓之一公點,A, B 二點在此二圓上,且對於 O 點互相對稱表明此二圓之相似圓直交 (OAB) 圓。

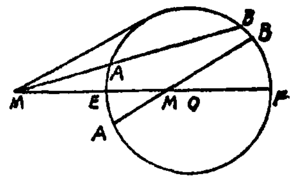
13. 三角形 ABC 之內切圓,與 BC 相切於 X,而 A 點所對之傍切圓,與 BC 相切於 X_1;如 AX_1 遇其內切圓於 F, G,證明 FX 或 GX 爲其內切圓之直徑。

14. S 爲二圓之相似心,而 P 爲一變動點。表明 SP 線對於已知二圓而有之極點 M, N,所成之 MN 線,必經過一定點。

15. A, B, C, D 爲四個共圓點;AB, CD 相遇於 E;AC, BD 相遇於 F;而 AD, CB 相遇於 G;表明以 AB 及 CD 爲直徑之二圓,其相似圓乃以 FG 爲直徑之圓形。

5. 二圓之根軸

318. 如經過圓形所處平面上之一點 M(第116圖),畫一變動割線 MAB,遇此已知圓於 A,B 點,於是 $MA\cdot MB$ 為一常數.此在初級幾何學中早已證之.今假設 M 在已知圓之外,而使割線 MEF 經過此圓之圓心 O.如 M 至圓心之距離 MO 以 d 表示之,又如半徑 $OE=OF$ 以 r 表示之,則



第116圖

$$ME\cdot MF=(MO-OE)(MO+OF)=(d-r)(d+r).$$
$$=d^2-r^2.$$

如 M 在圓內,仿之而得

$$MC\cdot MF=r^2-d^2=-(d^2-r^2).$$

319. 界說. 自一點至圓心之距離平方,減此圓形之半徑平方,此二平方之差,稱為"此點對於此圓而有之冪(power)".

由上(318)可見外點之冪為正數,而內點之冪為負數.

外點之冪,等於自此點所畫之切線平方.

內點之冪,其絕對價值(absolute value)等於經過此點之最短一弦,所有半長之平方.

320. 定理. 如二圓直交,則其任一半徑之平方,等於其圓心對於其他一圓而有之羃.

如(O),(O')圓交成直角於A上,則切(O')圓於A點之切線為(O)之半徑OA.故O對於(O')而有之羃為$\overline{OA}^2$.

逆而言之. 如O對於(O')而有之羃為$\overline{OA}^2$,則OA為切(O')於A點之切線,故此二圓直交.

321. 定理. 如二圓均與任一第三圓相切,則此二圓之一個相似心,對於此第三圓而有之羃,為一常數.

與已知二圓(O)圓(第114圖)之切點M,N為已知圓上之逆相當點,因已見前(312),而MN線經過已知圓之一個相似心S.然則S對於(O)而有之羃為$SM \cdot SN$.但自相似心至二個逆相當點,其距離之乘積為一常數(310);故此定理云云.

注意證中之假設,與已知圓(O)之切點有同一性質(或均內切或均外切),

習題

1. 圓周上之一點,對於此圓而有之羃為何?

2. 如一點對於一已知圓而有之羃為一常數,則此點之軌跡為一圓形,與已知圓同心.

3. 已知一圓及此圓之平面上A, B二點.經過A,畫一變動割線,遇此圓於M, N表明經過M, N, B之圓,經過另一定點.

322. 定理. 如一點對於二圓有等冪,則此點之軌跡爲一直線.

設$(O), (O')$爲已知二圓,有圓心O, O'及半徑r, r'.如M點對於此二圓有等冪,則

$$\overline{OM}^2-r^2=\overline{O'M}^2-r'^2,\text{ 或 }\overline{OM}^2-\overline{O'M}^2=r^2-r'^2.$$

故M之軌跡爲一直線(軌跡12).*

界說. 此線稱爲二圓之根軸** (radical axis).

323. 註 I. 如二圓相交於二點,則其根軸爲其公弦之延線,因此線上之每點,對於二圓有等冪.

324. 註 II. 如二圓之一,易以一點,則根軸之定理,仍可成立,因仿之可用其證,而此定理乃如下述:

如一點對於一已知圓而有之冪,等於自此點至一已知點之距離平方,則此點之軌跡爲一直線,垂直已知點與圓心之連線.

325. 註 III. 同心圓不有根軸.

---

*譯者附註——請讀第9節軌跡12之附註.

**譯者附註——或譯等冪軸.

326. 註 IV. 如二圓彼此相切,則其根軸爲公點上之公切線。

327. 定理. 二圓之根軸,爲已知二圓之直交圓所有圓心之軌跡.

如一(M)圓直交已知圓(O),(O'),則(M)之圓心對於(O)而有之冪,等於(M)之半徑平方,因已見前(320),而此點對於(O')而有之冪亦然.故(M)之圓心在(O),$(O'$ 圓之根軸上。

328. 推論. 如一圓有其圓心在已知二圓之根軸上而直交此二圓之一,則亦直交其他一圓.

329. 定理. 自一點所畫二圓之切線,如爲等長,則此一點之軌跡爲此二圓之根軸.

蓋自一點所畫二圓之切線相等,則此點對於二圓有等冪,而此點乃在其根軸上.

330. 推論. 根軸必平分其二圓之公切線(如二圓有公切線).

331. 定理 二圓根軸上之一點,對此二圓而有之極線,必相交於根軸上之另一點.

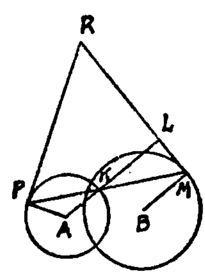
設R爲(A),(B)二圓(第114圖)根軸上之任何一點,而P,Q 爲R對於(A),(B)而有之反點.如R對於(A),(B)而

有之極線 PX, QX 所有之交點爲 X, 則 $PXQR$ 爲聯圓四邊形, 因 RPX 角與 RQX 角各爲直角(281)而 R, X 在此四邊形之外接圓上爲直徑之兩端.今此圓經過 R, P 二點, 此二點對於 (A) 爲反點. 故此圓直交 (A) (277), 而同理亦直交 (B). 故其圓心在 $(A), (B)$ 之根軸上 (327); 且旣 R 亦爲根軸上之一點,故此圓所有 R 之直徑末端 X 亦在 $(A), (B)$ 之根軸上.

332. 定理. 二圓之逆相當弦相交於根軸上.

設 M, N' 及 Q, P' 爲已知二圓 $(O), (O')$ 上 (第 113 圖) 之二對逆相當點 (309). 此四點乃爲共圓點 (311) 故如 X 爲逆相當弦 $MQ, N'P'$ 之公點, 則 $XM \cdot XQ = XN' \cdot XP'$. 然則 X 點對於已知圓 $(O), (O')$ 而有等冪, 故在其根軸上.

333. 定理. 如二圓之二切線相交於根軸上, 則其切點爲已知圓上之逆相當點.



第 117 圖

令 P, M (第 117 圖) 爲 $(A), (B)$ 二圓上之二點, 且令此二圓之切線 PR, MR 相交於 R. 如 R 爲其根軸上之一點, 則 $PR = MR$ (329), 所以 $\angle RPM = \angle RMP$. 如 (A) 圓遇 PM 於 K, 而 AK 遇 RM 於 L, 於是 $\angle KPA = \angle PKA =$

$\angle LKM$. 但 $\angle RMP+\angle MPA=90°$; 故 $\angle RMP+\angle MKL=90°$, 此即 AKL 垂直 MR, 而平行 (B) 之半徑 BM. 然則 PKM 線乃連接此二圓所有平行半徑 AK, BM 之末端. 故 PM 線經過此二圓之一個相似心. 今 P, M 點不能爲二圓上之相當點, 因在相當點上之切線必相平行, 故 P, M 爲逆相當點.

334. 逆定理. 切二圓於逆相當點之切線, 相交於其根軸上.

逆言正定理之證明步驟, 即見 $PR=MR$. 故 R 在其根軸上.

此命題可視爲逆相當弦定理(332)之界限情形(limiting case).

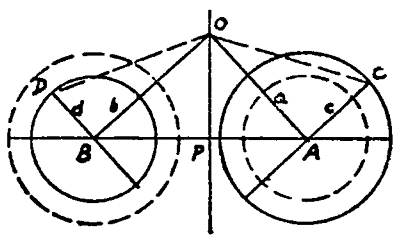
335. 定理. 自已知二圓根軸上之一點畫此二圓之四切線, 連接其四切點, 可得六線, 其中稱爲切弦之二線, 相遇於根軸上, 而其他四線兩兩相遇於此二圓之二個相似心上.

讀者自證其理.

336. 定理. 如一圓平分已知二圓, 則其圓心之軌跡爲一直線垂直已知二圓之聯心線.

令 a, b 爲自所求軌跡上之 O 點至已知圓圓心 A, B

之距離(第118圖),令c, d為此二圓之半徑,而C, D為$(A), (B)$上被O所得之直徑末端.直三角形OAC, CBD中,乃有:



第118圖

$$\overline{OC}^2=\overline{OA}^2+\overline{AC}^2=a^2+c^2,$$

$$\overline{OD}^2=\overline{OB}^2+\overline{BD}^2=b^2+d^2.$$

但依假設$OC=OD$.

故:　$a^2+c^2=b^2+d^2$, 或 $b^2-a^2=c^2-d^2$.

然則$\overline{OB}^2-\overline{OA}^2$等於常數$c^2-d^2$,而$A, B$為定點.故$O$之軌跡為一直線,與$AB$垂直(軌跡12).

337. 註. 在此二圓根軸上之任何一點,乃有:

$$b^2-a^2=d^2-c^2.$$

故上之OP線與此二圓之根軸,離AB之中點為等距;易言之,OP線另為二圓之根軸,此二圓有A, B為圓心,d, c為其半徑.

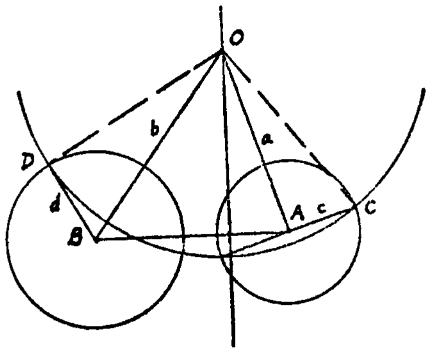
338. 定理. 一圓與已知二圓之一彼此直交,而平分其他一圓,則此圓圓心之軌跡為一直線,垂直已知

---

*譯者附註——請讀第9節軌跡12之附註.

圓之聯心線.

設 A 爲平分之已知圓(第119圖). 照上題通用之記法, 乃有: $OC=OD$.



第 119 圖

故:　　　$b^2-d^2=a^2+c^2$ 或 $b^2-a^2=d^2+c^2$.

然則自 O 至 A, B, 其距離平方之差爲一常數. 故 O 之軌跡爲一直線, 與 AB 垂直 (9, 軌跡 12)*

習　　題

1. 自二圓根軸上之一點, 畫此二圓之二割線, 此二圓上所得之四點爲共圓點. 其逆定理亦確.

2. 經過二對已知共圓點之每一對, 任畫一圓, 表明此二圓之公弦經過一定點.

* 譯者附註——請讀第 9 節軌跡 12 之附註.

3. 如一點對於二圓(或一點及一圓)而有之二冪,其和爲一常數,則此點之軌跡爲一圓形.

4. 經過二圓之一公點,有一變動線,此二圓割此變動線而得一弦,其中點之軌跡爲一圓形.

5. P點對於一圓(圓心O)而有之極線,爲二圓之根軸,此二圓爲已知圓與PO爲直徑之圓形. 暗示. 用(259).

6. 三角形之各邊,與其垂三角形之相當邊,所有三個交點,必在已知三角形之外接圓與其九點圓之根軸上.

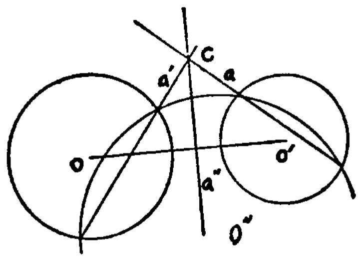
7. 與已知三角形各邊相切之四圓,每次取其二圓,則中點三角形各角之平分線爲其根軸.

8. 一圓經過一已知點而平分一已知圓,求此圓圓心之軌跡.

9. 如一點對於已知二圓而有之二冪,其差爲一常數,則此點之軌跡爲一直線平行二圓之根軸.

339. **定理.** 三圓,每次取其二圓,則其根軸爲共點線.

設O, O', O''(第120圖)爲三圓之圓心,而a, a', a''爲$(O')(O'')$圓;$(O''), (O)$圓;$(O), (O')$圓之根軸.今假設三圓心O,



第 120 圖

O', O'' 不爲共線點. a, a' 線既與相交二線各相垂直,則必相遇於一點 C, 此點對於$(O'), (O'')$圓而有之冪必相等,而對於$(O''), (O)$圓亦然.然則C點對於$(O), (O')$圓而有之冪亦將相等,所以C亦屬於根軸a''上.

三根軸之公點C,稱爲三圓之"根心"(radical center).*

如三圓之圓心爲共線點,則其根心不能存在.

如a, a'相合,則其根心不定.

340 題 作二圓之根軸.**

如二圓相交,則公點之連線即爲根軸.

如已知二圓不交(第120圖)則任畫一圓遇此已知二圓,其公弦之交點,爲此三圓之根心,故屬於所求根軸之上.其所求根軸乃自此點放落於已知二圓聯心線上之垂線.

如二圓之一,變爲一點,則任畫一圓經過此點而與已知圓相交,此二圓之公弦切所畫圓於已知點之切

---

*譯者附註——或譯等冪心.

**譯者附註——參攷(322)之附註.

線與此二圓之公弦亦必相交,此交點屬於所求根軸之上.故所求根軸乃自交點放落之垂線,放在已知點與已知圓圓心之連線上.

341. 題. 作一圓心之軌跡,使此圓平分已知二圓.

作已知二圓之根軸.其所求線必垂直聯心線,而離此圓心線中點之距必等於其根軸離此中點之距(337).

如一圓變爲一點,則其作法仍可成立.

342. 題. 畫一圓與已知三圓直交.

與已知二圓直交之圓形,其圓心在此二圓之根軸上(327);故所求圓必有三圓之根心爲其圓心.

此題往往有一解,而僅限於一

界說. 此圓稱爲已知三圓之**根圓***(radical circle).

343. 定理. 如一點對於已知三圓而有之極線爲共點線,則此點之軌跡爲其根圓.

設 P 爲一點,對於已知三圓 $(A),(B),(C)$** 而有之極線相遇於 Q.令 P 對於 (A) 而有之反點爲 D.以 PQ 爲直徑之圓將經過 D,因 PQ 張直角於 D 上(281);故此圓與 (A) 直交(277).仿之可表明此圓又與 $(B),(C)$ 直交.故此

*譯者附註——或譯等冪圓.

**譯者附註——見附圖11.

圓即其根圓(342)，而P為此圓上之一點.

344. 題. 畫一圓，平分已知三圓.

平分已知二圓之圓形，其圓心在一線上，此線垂直已知二圓之聯心線因已見前(336). 故所求圓之圓心為此二軌跡之交點.

此題往往有一解，而僅限於一.

習題

1. 三圓，每一圓與其他二圓相切，表明此三圓之三公點上所有之三切線為共點線.

2. 三圓有三角形ABC之三個稅瓦線AP, BQ, CR為其直徑，則有此三角形之垂心為其根心.

3. 證明三角形之垂心為三圓之根心，此三圓以此三角形各邊為其直徑.

4. 經過一已知點，畫一圓，與已知二圓直交.

5. 經過一已知點，有一變動圓，與一已知圓相切，求此變動圓所有二切線交點之軌跡，此二切線乃一在已知圓之切點上，一在此定點上.

6. 畫一圓，使自已知三點A, B, C所畫之切線，將有a, b, c, 之長.

7. 在一已知圓之平面上,用一已知半徑畫一第二圓,使此二圓之根軸經過一已知定點,求此第二圓圓心之軌跡.

8. 經過已知二點,畫一圓,平分一已知圓.

9. 經過一已知點,畫一圓,平分已知二圓.

10. 畫一圓,與已知二圓直交,而平分第三已知圓.

11. 畫一圓,經過一已知點,平分一已知圓,而直交另一已知圓.

12. 根軸之二極點,被此二圓之相似心調和分割.

13. 任何四點 A,B,C,D 取在一圓周上; AC,BD 相交於 E; AB,CD 相交於 F; AD,BC 相交於 G; 表明三角形 EAB,ECD 之外接圓,割 AD,BC 線於四點,此四點在一第四圓上;苟此四圓,每次取其三圓,則此組之四根心,將爲平行四邊形之頂點,其對角線爲 EF 線及 FG 之平行線.

6. 阿破羅尼圓

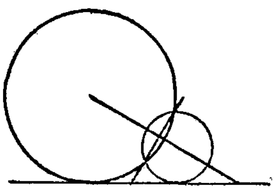
345. 欲得一圓,使合以下三種條件:此圓必經過一點或數點,必與一線或數線相切,必與一圓或數圓相切.則引起下之十題,若以記號表示之,爲(1)PPP,(2)PPL, (3)PLL, (4)LLL, (5)PPC, (6)PLC, (7)PCC, (8)LLC, (9)LCC, (10)CCC, 其 P, L, 及 C 表示一點, 一線及一圓.

346. 題 I. 作一圓形, 經過已知三點(PPP).

初級幾何學中即知此題有一解.

347. 題 II. 畫一圓形, 經過已知二點, 又與一已知線相切(PPL).

設 A, B(第121圖)爲已知二點, xy 爲已知線. 且令 xy 與所求圓相切之切點爲 T. 延長 AB 使遇 xy 於 I. IT 爲可知長, 因 $IT^2=IA\cdot IB$. 故 T 點可得, 而此題變爲上題(PPP).



第 121 圖

IT 之長既可劃在 I 點之兩旁, 故有二解. 此題必使已知二點同在已知線之一旁, 否則此題不能成立.

如 AB 平行 xy, 則 T 點在 AB 之中垂線上, 而此題僅有一解.*

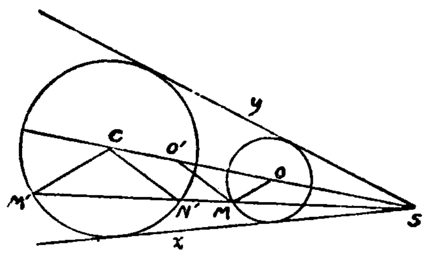
348. 註. 所求圓之圓心在 AB 之中垂線 SM 上, 令中垂線在 xy 上之交點爲 S. 自 S 所畫所求圓之切線爲 xy 線. 故另一切線對於 SM 爲 xy 之對稱線, 而此題變成

* 譯者附註——如一已知點在此已知線上, 則此題亦僅一解.

下題:

349. 題 III. 作一圓形,與已知二線相切,又經過一已知點(PLL).

設 x, y(第122圖)爲已知二線,相交於 S. 且設 M 爲已知點.任畫一圓(C),與 x, y 線相切. S 點爲(C)與所求圓(O)之一個相似心(308).故 SM 線將遇(C)於 M', N' 二點,其一點 M' 爲 M 之相當點,而半徑 OM 平行 CM'. 既圓心 O, C 必在 S 角之平分線上,故 O 點可求.



第 122 圖

此題有二解,因 M', N' 之任一點,均可取爲 M 之相當點.

350. 註. M 對於 S 角之平分線而有之對稱點,亦在所求圓上.故此題可變爲上題(PPL).**

351. 題 IV. 作一圓形,與已知三線相切(LLL).

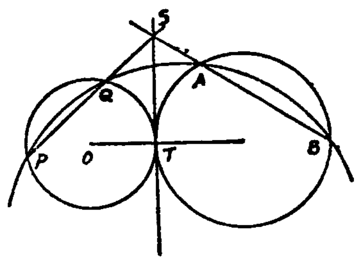
此題已解(102),可有四解.

** 譯者附註——如已知點在一已知線上或已知二線互相平行,則此題仍有二解.如已知二線互相平行,而又已知點在其一線上,則此題僅有一解.

試言二線或三線平行之情形.

352 題 V. 畫一圓形,經過已知二點,又與一已知圓相切(*PPC*).

設 A, B 爲已知點,而 T(第 123 圖)爲所求圓與已知圓(O)之切點.任畫一圓經過 A, B 而遇(O)於 P, Q. AB, PQ 二線,與 T 上之公切線,爲此三圓每次取其二圓之根軸.故此三線相遇於三圓之根心 S 上(339).但 S 易求,因 AB 爲已知線,而 PQ 可被經過 A, B 之任何一圓得於(O)上.



第 123 圖

自 S 畫(O)之切線,可得 T 點,而此題變爲(*PPP*).

此題有二解,因自 S 可畫(O)圓之切線有二.*

如已知一點在已知圓內,而其他一點在其圓外,則此題不能成立.**

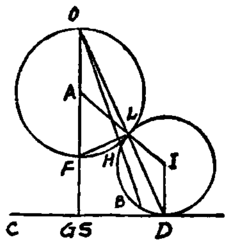
353. 題 VI. 畫一圓形,經過一已知點,又與一已知線及一已知圓相切(*PLC*).

---

*譯者註附——見附圖 12.

**譯者註附——如一點在圓上而其他一點不在圓上則此題僅有一解.

設(A)爲已知圓(第124圖),CD爲已知線,而B爲已知點.已知圓圓心A與所求圓圓心I之連線AI,經過二圓之切點L.



第124圖

經過圓心A,畫CD之垂線OG,又畫OLD, OBH, ID, LF諸線.

等腰三角形OAL, LID,在L上有等角.故O及D上之角亦等.故ID平行OG,而ID垂直CD,此即D點爲此圓與CD線之切點.

OLF角爲一直角.故四邊形$LFGD$之對角L及G皆爲直角,故爲聯圓四邊形.然則:

$$OF \cdot OG = OL \cdot OD = OB \cdot OH,\text{或} OB : OF = OG : OH.$$

用此比例可得OH之長,故又得H點,而此題變爲(PPL)

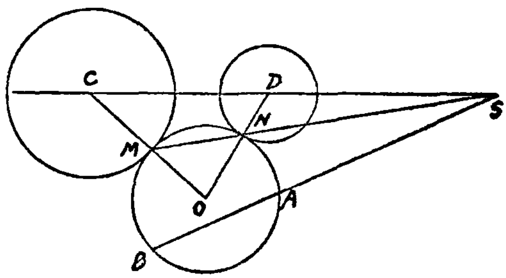
如不取O而取O之直徑末端F連接B, F,而延長至H',使$GF \cdot FO = D'F \cdot FL' = BF \cdot FH'$,則$H$之位置又得二解故共有四解.

354. 題 VII. 畫一圓形,經過一已知點,又與已知二

*譯附註者——見附圖13.如已知點在已知圓外而與已知圓同在已知線之一旁,則此題有四解.如已知點在已知圓上,或在已知線上則此題僅有二解.如已知點在O或F上,則僅有一解如在已知圓內或在已知線之其他一旁,則無解.試言已知線於已知圓相切之情形.

圓相切(*PCC*).

設(O)為所求圓,經過已知點A(第125圖),而與已知二圓相切於二點,M, N. 今知M, N為逆相當點(312),故與已知圓之相似心S為共線點.令(O)與SA之第二交點為B.於是$SA\cdot SB=SM\cdot SN$.但$SM\cdot SN$為可知之乘積,因任何一對逆相當點之乘積相同(310)故SB之長及B點之位置均可得之,而此題變為(*PPC*)之情形.



第 125 圖

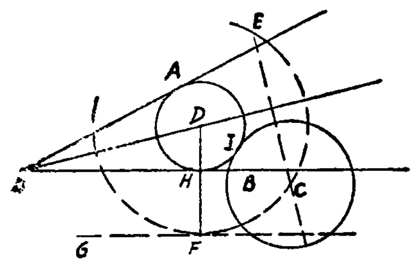
如不取S而取其內相似心S',連接A, S',而延長至B',使$S'A\cdot S'B'=S'M'\cdot S'N'$,其$M', N'$乃與$S'$同在一線上之逆相當點,則此題可有四解.

355 題 VIII 畫一圓形,與已知二線及一已知圓相切(*LLC*).

設OA, OB為已知線,而(C)為已知圓(第126圖).所求

*譯者附註——見附圖14.如二圓不交則有四解;相切,則有三解;相交則有二解.二圓同心則如何?

圓(D)之圓心D在O角之平分線OD上.畫CE垂直OD,畫DF垂直OB;用D爲圓心DC爲半徑,畫一圓形ECF. DF之垂線FG平行OB,



第 126 圖

而$DF=DC$, $DH=DI$. 故相減而$HF=IC=r$,即已知圓(C)之半徑.

然則一線GF如畫與OB平行而有距離r,且如C對於OD而有之對稱點E亦已得之,則經過E, C而與FG相切之圓,與所求圓(D)爲同心,而此題即變爲(PPL).

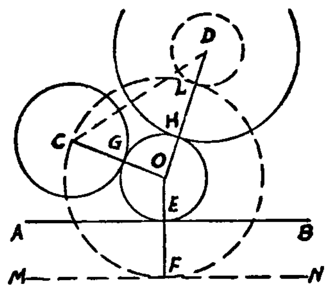
(PPL)題有二解. FG線可畫於OB之任何一旁,而C之對稱點又可取O之任一補角所有之平分線爲其對稱軸 故此題可有八解.*

356. 題 IX. 畫一圓形,與一已知線及已知二圓相切(LCC).

設所求圓(O)與已知圓(C),(D)(第127圖)相切於G, H,又與已知線AB相切於E.畫OC, OD, CD,又放落AB之

*譯者附註——見附圖15.如已知圓與已知二線相交,則有八解如與一線相切而與其他一線相交則有六解,如與二線相切,或與二線均不相交,或僅與一線相交,則有四解

垂線OF;用O爲圓心及一半徑等於OC,OD中之較短線段畫CFL圓;又用D爲圓心,DL爲半徑,另畫一圓;在F上畫MN垂直OF,乃與AB平行.



第127圖

FCL圓經過已知點C而與MN線相切,此MN線平行AB而有距離r,又與圓心D半徑$DL=r'-r$之圓形相切,其r'及r爲已知圓(D),(C)之半徑.依此所得之FCL圓,其圓心O爲所求圓之圓心.

然則此題變爲(PLC),此有四解.今MN線可畫於AB之任一旁,故此題可有八解.

357. 題X 畫一圓形,與已知三圓相切(CCC).

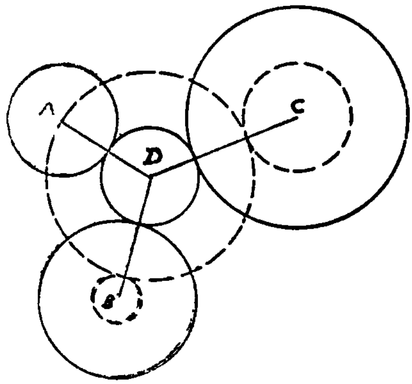
設A, B, C (第128圖)爲已知圓之圓心,而a, b, c爲其半徑,其a爲最小者.設D爲所求圓之圓心.以D爲圓心DA爲半徑之圓形,將經過A而與二圓相切,此二圓有圓心B, C及半徑$b-a$, $c-a$.苟已畫此(D)圓,則其圓

*譯者附註——見附圖16.如二圓不交而在已知線之一旁,則

心亦爲所求圓之圓心.

然則此題變爲(PCC),而可有八解(354).

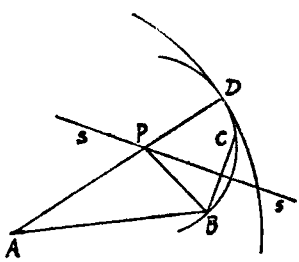
此題稱爲"阿破羅尼問題" (problem of Apollonius).



第128圖

358. 題. 在一已知線上求一點,使自此點至已知二點(不在此線上),其距離之和有一已知長.

設 s 爲已知線, A, B (第129圖)爲已知點,而 m 爲已知長. 設 P 爲所求點. 設想一圓,用 P 爲圓心 PB 爲半徑. 此圓將經過 B, 及 B 對於 S 而有之對稱點 C. 且此圓將與 A 爲圓心 m 爲半徑之(A)圓相切. 今已知(A)圓及 B, C 點. 故所求點 P 爲一圓形之圓心,此圓經過已知二點而與一已知圓相切. 此題已解(352). 可有二解.



第129圖

*譯者附註——見附圖17. 如二圓相切,則有六解;二圓相交,則有四解;三圓相切,則有二解,三圓相交,則僅一解. 試言三圓同心之情形.

359. 題. <u>在一已知線上,求一點,使自此點至已知二點(不在此線上),其距離之差有一已知長.</u>

此與上題之解法相似.

習題

1. 作一三角形,已知其底邊,其垂高,及其他二邊之和(或差).

2. 作一三角形,已知其底邊,其他二邊之和(或差),及中線與底邊所成之角.

3. 作一三角形,已知其底邊,其相當垂高,及其他二邊上二中線之和($a, ha, mb+mc$).

7. 同軸圓

360. 界說. 一組圓形謂之同軸(coaxal),若此組任何二圓之根軸,即爲此組任何其他二圓之根軸.

例如,經過二定點之一切圓形成一同軸組(coaxal system).此二定點爲此同軸組之"基點"(fundamental points)或"底點"(basic points).

仿此,與一已知線相切於一已知點上之一切圓形爲同軸圓.

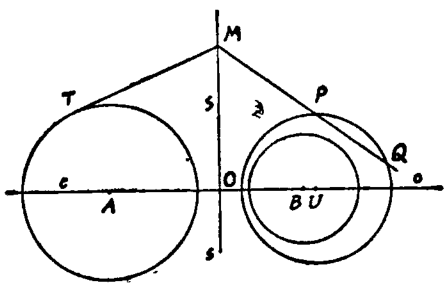
361. 定理. <u>一組同軸圓之根軸上任何一點,對於此組之每一圓有同冪.</u>

362. 定理 <u>一組同軸圓之圓心爲共線點.</u>

設$A, B, C, \cdots$爲一組同軸圓之圓心.其中二圓之根軸垂直其聯心線於一點,O.第三圓旣與此二圓同軸,則其聯心線AC垂直同一根軸,此即任何一圓如與此二圓同軸,則其圓心C必在A點放落其根軸之垂線上.

363. 題. <u>經過一巳知點,畫一圓形,使屬於一組巳知之同軸圓.</u>

自此組之根軸S上任何一點M(第130圖),畫此組任何一圓(A)之切線MT;而在M與巳知點P之連線MP上,求Q點,使$MP \cdot MQ = \overline{MT}^2$其$P, Q$同在$M$之一旁.$PQ$之中垂線將遇此組之聯心線$c$於所求圓之圓心$U$,其半徑乃爲$UP$.



第130圖

依作法M對於(A), (U)二圓有同冪,而依作法經過M之S線垂直聯心線AU;故S爲(A)與(U)之根軸,此即

(U)屬於此組中

此題有一解而僅限於一

不論此組圓形相交與否,均可用此作法.然在相交組中,更易作此所求圓,蓋可用此組圓形之二公點.

如P點在根軸上而已知圓成一不相交組,則此題無解.如爲相交組而P與此組之一基點相合,則此題將得無數之解.如P點在其根軸上之任何別處,則此題無解.

364. 推論. 上之作法,用此組之一圓及其根軸,故:一組同軸圓,乃被此組之一圓及其根軸所定,或被此組之二圓所定.因二圓得其根軸.

365. 定理. 如一圓直交已知二圓,則亦直交已知二圓之每一同軸圓.

與已知二圓(A),(B)直交之(P)圓,有圓心P在(A),(B)之根軸S上(327).如(C)爲第三圓與(A),(B)同軸,則(P)有其圓心在(A),(C)之根軸S上,而與(A)直交.故(P)亦與(C)直交(328).

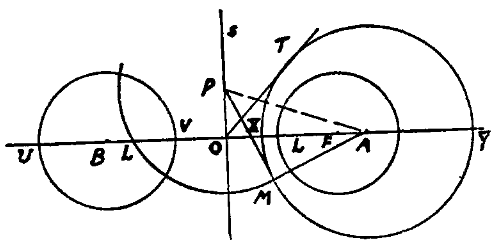
366. 題. 畫一圓形,使屬於一組已知同軸圓,而有一已知點爲其圓心.

假設已知圓心F在此組之聯心線c上,否則此題不

能成立。

如已知組之圓形有二公點,則此題毫無困難,總有一解而僅限於一。

如此組之圓形並不相交,令其根軸S在聯心線c上之垂足爲O(第131圖),而自O點所畫此組中一圓之切線爲OT. O點既在根軸上,則自O點所畫所求圓之切線等於OT. 故所求圓之半徑r爲一直三角形之股邊,另一股邊爲OT. 而其斜邊爲OF. 然則其半徑可得,而此題乃有一解。OF必大於OT,則此題方能成立。



第131圖

367. 界說. 設$OL=OT$(第131圖). 聯心線上,除L點外,任何別點可爲此組之任一圓圓心。但在OL線段之上,不有此組之任一圓圓心。至於根軸之其他一旁$OL'=OL$線段上,其理亦然。L, L'二點稱爲同軸組之限點(limiting points).

F點離L愈近,則其相當圓之半徑亦愈小。所以L點

稱爲此組之點圓(point circle)(卽半徑爲零之圓形).仿之而言L'點.

368. **定理.** 同軸組之二限點,對於此組之每圓爲反點.其逆定理亦確.

令聯心線與此組一圓(圓心A)之交點爲X, Y(第131圖).

於是$OX\cdot OY=\overline{OT}^2=\overline{OL}^2$,而$O$爲$LL'$之中點;故$(LL'XY)$爲調和列點(257).然則$L, L'$將於此圓爲反點.

369. 逆而言之. 如二點對於一組圓形爲反點,則此組爲同軸圓.

設L, L'爲此二點,而O爲LL'之中點(第131圖).故如X, Y爲其一圓之直徑,而L, L'在其上,則$(LL'XY)$爲調和列點,因假設L, L'對於此圓爲反點(268).故$OX\cdot OY=\overline{OL}^2$然則$O$對於一切已知圓有同冪$\overline{OL}^2$且其圓心旣爲共線點,故此圓同軸,其根軸爲垂直於$LL'$之垂線.

370. 推論I. 每一限點,對於其同軸組之一切圓形有同一極線.

因L, L'對於此組之每一圓形旣爲反點,則其中一點之極線,經過其他一點,而垂直LL'線.

371 推論II. 經過二限點之任何一圓,直交此組之

每一圓形(277)

372. 定理. 一組同軸圓,不有多於一對限點.

設(A),(B)爲成此一組之二圓,而X, Y; U, V(第131圖)爲聯心線AB與此二圓相交之四點.如L, L'爲一對限點,則必有$(XYLL')$及$(UVLL')$爲調和列點,而對於二對已知點X, Y; U, V不能多於一對L, L'點爲其調和共軛點(260).

373. 定理. 如一圓直交二個不相交圓,則必經過此二圓之限點.

設A, B(第131圖)爲已知二圓(A),(B)之圓心,且設(P)圓直交(A),(B)於M, N點.

(P)之圓心P在(A),(B)之根軸上(327).令此軸在AB上之垂足爲O.直三角形APO及APM共有斜邊AP,而AO大於AM,因O在(A)圓之外,故PO小於PM,所以(P)圓割AB線於二點L, L'.(P)圓既直交(A),(B),則L, L'二點對於其中每圓爲反點(276).故L, L'爲此二圓之限點(368, 372),而L, L'對於(A),(B)同軸之任何一圓(C)亦爲反點,而(P)將直交(C)圓.

374. 註. 自一同軸組之根軸上任何一點P,所畫之切線,等於自P至限點L之距離,因以P爲圓心以切線

之長爲半徑之圓形,必經過其限點.

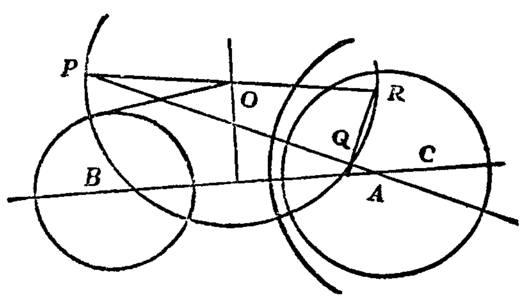
375. 定理. 二圓之公切線,被其任一同軸之圓調和分割(此乃同軸圓經過此切線之情形).

設 P, Q 爲與公切線 PQ 已知二圓 $(A),(B)$ 之切點,而 R, U 爲 PQ 與一 (S) 圓之交點,此 (S) 圓與已知二圓同軸.

PQ 之中點 O 對於 $(A),(B)$ 有等冪 (329). 故 O 在其根軸上,而自 O 所畫 (S) 之切線 OT, 等於 OP, 因依假設 (S) 與 $(A),(B)$ 同軸. 另一方面看來, $\overline{OT}^2 = OR \cdot OU$. 故 $\overline{OQ}^2 = OR \cdot OU$. 故此四點 P, Q, R, U 調和 (257).

376 題. 經過一已知點,畫一圓形,使直交一已知同軸組之圓形.

已知點 P 與此組之 (A) 圓圓心 A 相連 (第 132 圖). 求 P 對於 (A) 而有之反點 Q. PQ 之中垂線過此組之根軸於所求圓之圓心 O, 其半徑乃爲 OP.



第 152 圖

(O) 圓直交 (A), 因 (O) 經過 (A) 之反點 P, Q (277), 且其圓心 O 既在此組

之根軸上,則亦直交此組之任何別圓(328).

對於兩種同軸圓均可用此作法.在不相交組中,用此已知點及此組之限點即得此所求圓.

此題往往有一解,而僅限於一

其例外情形爲何?

377. 定理. 如已知三圓之圓心爲共線點,而均直交另一圓形,則此三圓同軸.

設 A, B, C (第132圖) 爲已知三圓之圓心.依前定理(327),直交 (A),(B) 之圓形,其圓心 O 在此二圓之根軸上.故 (A),(B) 之根軸爲自 O 點放落 AB 上之垂線.仿此,$(B)(C)$ 之根軸爲自 O 放落 BC 上之垂線.且依假設 A,B,C 既爲共線點,故此二根軸相合,此即三圓同軸.

378 定理. 一點對於一組同軸圓而有之極線,爲共點線.

經過已知點 P,畫 (O) 圓 (第132圖),直交此組同軸圓(376).欲作 P 對於此組 (A) 圓而有之極線,則 P 連至此圓之圓心 $A(O)$ 既直交 (A),則 (O) 將遇 (A) 之直徑 PA 於 P 對於 (A) 而有之反點 Q(276).今 P 對於 (A) 而有之極線,爲切 PA 於 Q 點之垂線(281),且 Q 既在 (O) 上,則此垂線將經過 (O) 圓所有 P 之直徑末端 R.然則 P 對於

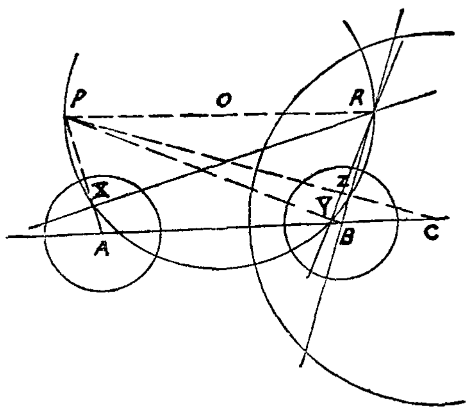
此組任何一圓而有之極線均過此定點R.

379. 註. (O)圓既直交此組之圓形,故有其圓心在此組之根軸上,而PR線段被其根軸平分.

試言P點取在此組根軸上之情形,且求R點.

380. 逆定理. 如三圓之圓心爲共線點,而另一點對於此三圓而有之極線爲共點線,則此三圓同軸.

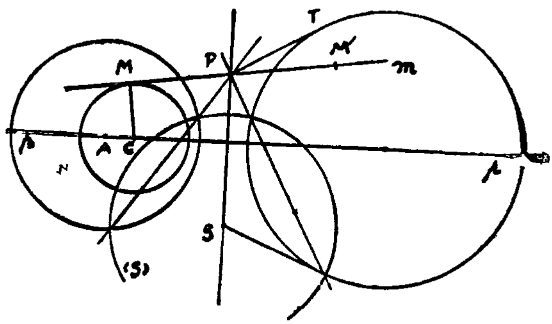
自三極線之公點R(第133圖),放落PA, PB, PC三線上之垂線.此三垂線爲P對於已知三圓$(A), (B), (C)$而有之極線,其PA, PB, PC爲已知點P與已知圓圓心A, B, C之連線,又此三垂線之垂足X, Y, Z爲P對於此三圓而有之反點(281).今以PR爲直徑之(O)圓經過X, Y, Z;故(O)直交$(A), (B), (C)$中之每圓(277).然則$(A), (B), (C)$圓直交同一圓形(O),而依假設圓心爲共線點;故此三圓同軸(377).



第133圖

381. 題. 畫一圓形,使與一已知線相切,而屬於已知同軸組.

自已知線 m (第134圖)與此組根軸之交點 P, 畫此組



第134圖

任何一圓之切線 PT, 而在 m 上割去 $PM=PM'=PT$. 垂直 m 於 M 之垂線,遇此組之聯心線於所求圓之圓心 C, 其半徑爲 CM.

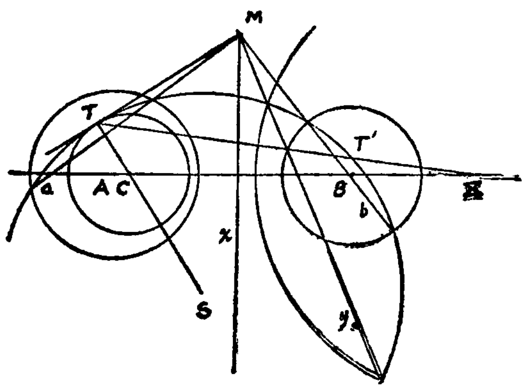
M' 點另得一圓,亦合題中之條件.然則此題往往有二解.

試言 m 與其根軸平行之情形, m 與其根軸相合之情形, m 經過一限點之情形, m 在底點間之情形.

註. 上之解法,對於兩種同軸組均可適用.然在相交組中,可畫二圓,經過其二基點而與已知線相切(347),而此題即解.

382. 定理. 一定圓與一已知同軸組中之一變動圓,所成之根軸,必經過已知組之根軸上一定點.

設(S)為定圓(第135圖)而(A),(B)為同軸組中變動



第 135 圖

圓之二個位置,其根軸為x.(A)與(S)之根軸a,遇(S)與(B)之根軸b於(S),(A),(B)三圓在x上之根心M(339).今設(C)為此組之任何別圓.(A),(C),(S)三圓之根心,被(A),(C)之根軸x與(A),(S)之根軸a相交而得,此即其根心為M點,而(C),(S)二圓之根軸亦經過M,故此命題全證.

383. 界說. M點稱為(S)圓對於同軸組(A),(B),(C)而有之根心.

384. 其逆定理亦確,即一圓(X)如有圓心在此已

知同軸組之聯心線上，而(S)與(X)之根軸經過M，則(X)屬於此已知同軸組.

385. 畫一圓形，使屬於一已知同軸組，而與一已知圓相切.

自已知圓(S)(第135圖)對於同軸組而有之根心M(383)，畫(S)之切線NT, MT'. 切點T與(S)圓圓心之連線，遇此同軸組之聯心線於所求圓之圓心C，其半徑為CT.*

T'點另得一圓，亦合題中之條件.

試言(S)圓心在已知同軸組之聯心線上之情形. 又言(S)圓屬於此組之情形.

386. 題. 畫一圓形，使屬於一已知同軸組，而直交一已知圓.

設(S)為已知圓，而(X)為此同軸組中之一圓與(S)直交. 此二圓之公弦y，經過(S)對於此同軸組而有之根心M(383). 另一方面看來，y為(X)之圓心X對於(S)而有之極線(285). 故M對於(S)而有之極線經過X(286).

此得下之解法:

*譯者附註——對於兩種同軸組均可用此作法.然在相交組中，所求圓經過二基點而與已知圓相切，此乃已解之題(352).

求已知圓(S)對於已知同軸組而有之根心M(383). M對於(S)而有之極線,將遇此同軸組之聯心線於所求圓之圓心X.

此題往往有一解.

如(S)之圓心在此組之根軸上,則此組之一切圓形均直交(S),或則此題不能成立,易言之,此題得無數之解或無解.

如已知圓之圓心S在其同軸組之聯心線上,則上之解法完全無效.然可解之如下:

如同軸組有二基點,則求其中一點對於(S)而有之反點,此點與二基點可得所求圓(277).

如已知組並不相同,則令其限點爲L, L',聯心線上(S)之直徑末端爲P, Q,而聯心線上所求圓(X)之直徑末端爲U, V. (X),(S)二圓旣直交,則$(UVPQ)$爲調和列點(276),而$(UVLL')$亦爲調和列點(368).. 故U, V二點調和分劃二對已知點P, Q及L, L'中之每一對所以U, V可得(260).

如(S)圓屬於此同軸組,而此同軸組並不相同,則此題不能成立.苟此同軸組有二基點,則此題有一解.

另一方面. 任畫二圓(O),(O')直交此已知同軸組之

圓形(327).其所求圓爲已知圓(S)與(O),(O')二圓之根圓(342).

387.題. 晝一圓形,使屬於一已知同軸組,而平分一已知圓.

已知圓(S)之圓心S(第135圖)連至(S)對於此同軸組而有之根心M(383)垂直SM於S之垂線,將遇此同軸組之聯心線於所求圓之圓心.*

此題往往有一解.

如圓心S在此組之聯心線上,則所求圓經過(S)之直徑兩端,此直徑與聯心線垂直.

388 定理 圓心在一已知線上而圓周直交一已知圓之諸圓,成一同軸組.

設(A)爲一圓直交已知圓(S)(第134圖),而有其圓心A在已知線p上.此二圓之公弦A爲對於(S)而有之極線(235);且A既在p線上,則此弦經過p對於(S)而有之極點P.

P對於(A)而有之冪,等於P對於(S)而有之冪.今如A在p線上變動,則P點仍定而P對於(S)而有之冪亦

*譯者附註——如已知組有二基點,則此題應用(338)後之習題8卽得其解法.

定.故 P 對於一切圓形與(S)直交而有其圓心在 p 上者,均有同冪.故此一切圓形同軸,而自 P 放落 p 上之垂線爲其根軸

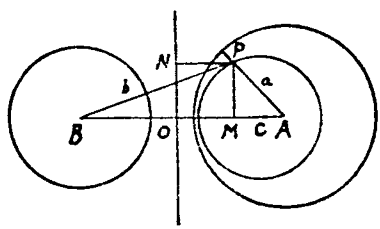
如 p 線遇(S)圓 則(S)割 p 而成之弦上,不能有(S)之直交圓圓心.故其同軸圓爲不相交組.

如 p 不遇(S),則極點 P 在(S)之內.故 P 對於(S)而有之冪,及對於同軸組之一切圓形而有之冪,均爲負數(319)故此組之圓形相交於二點,而 P 在此二點之間.

習題. 用此定理以解(386)題.

389. 定理 一點對於二圓而有之二冪,其差等於自此點至其根軸之二倍距離乘上其聯心線之長.

設 A, B (第136圖)爲已知二圓之圓心,a, b 爲其半徑,M, N 爲自已知點 P 放落聯心線 AB 及其根軸 NO 上之垂線 PM, PN 所有之垂足,而 O 爲根軸在聯心線上之垂足.P 對於已知二圓而有之冪,其差爲:



第136圖

$$(\overline{PA}^2-a^2)-(\overline{PB}^2-b^2)=\overline{PA}^2-\overline{PB}^2-(a^2-b^2).\quad(1)$$

O 對於二圓而有之冪既必相等,故:

$\overline{OA}^2-a^2=OB^2-b^2$, 或 $OA^2-\overline{OB}^2=a^2-b^2$;

而　$\overline{PA}^2=\overline{PM}^2+\overline{AM}^2$,　$\overline{PB}^2=\overline{PM}^2+\overline{MB}^2$.

代入 (1) 中而有:

$$(\overline{AM}^2-\overline{BM}^2)-(\overline{OA}^2-\overline{OB}^2)$$
$$=(AM+BM)(AM-BM)-(OA+OB)(OA-OB)$$
$$=AB(AM-OA+OB-BM)=AB\cdot 2OM$$
$$=AB\cdot 2PN.$$

390. 推論. 圓上一點,對於另一圓而有之冪,等於自此點至此二圓根軸之二倍距離,乘上此二圓聯心線之長.

391. 定理. 如一圓與已知二圓同軸,則此圓上任何一點,對於已知二圓而有之二冪,爲一常比.其逆定理亦確.

設 A, B 爲已知二圓之圓心(第136圖),且設 P 爲第三圓(圓心 C)上任何一點.如 PN 爲自 P 至此三圓公共根軸之距離,則 P 對於 (A), (B) 二圓而有之冪 p, p' 爲 (390)

$$p=2PN\cdot CA,\ p'=2PN\cdot CB;$$

故:
$$p:p'=CA:CB,$$

P 在 (C) 圓上之位置,與此比毫無關係.

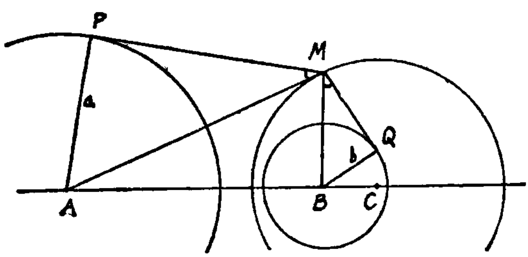
392. 逆而言之. 如一變動點對於已知二圓而有之

二冪,其比爲一常數,則此點畫成一圓,與已知二圓同軸.

如因 P 如爲變動點之任一位置,設 C (第 136 圖) 爲一圓形之圓心,此圓經過 P 而與已知二圓 (A), (B) 同軸.依其正定理乃有 $\frac{p}{p'}=\frac{CA}{CB}$.且依假設,此比既爲常數,則 C 點與 P 之位置毫無關係,故此定理云云.

393. 定理. 二圓之相似圓,與此已知二圓同軸.

設 A, B 爲已知二圓之圓心而 a, b 爲其半徑(第 137



第 137 圖

圖) 如 M 爲其相似圓 (C) 上之任何一點,而乃(314):

$$MA : MB = a : b, \text{ 或 } \overline{MA}^2 : \overline{MB}^2 = a^2 : b^2.$$

故: $$(\overline{MA}^2 - a^2) : (\overline{MB}^2 - b^2) = a^2 : b^2.$$

然則相似圓上之任何一點 M,對於已知二圓而有之二冪,有一常比.故依上定理(392) (C) 與已知二圓同軸.

394. 推論 I. 如自二圓之相似圓上一點,畫此二圓之切線,則此切線之比,等於已知二圓半徑之比.

因此點對於此二圓而有之二冪,其比等於半徑平方之比;而其切線之長,等於其冪之平方根(Spuare root).

395. 推論II. 二圓於其相似圓上之任何一點張有相等之角.

因設MP, MQ為自M所畫(A),(B)之二切線,既$MP:MQ=a:b$,則三角形MPA, MQB為相似形,因夾直角之二邊成比例.故$\angle PMA=\angle QMB$,而此命題乃證.

396. 定理　已知三圓,每次取其二圓,所有三個相似心為同軸圓.

設A, B, C(第115圖)為已知圓之圓心,且令其半徑以a, b, c表示之.令其外相似心為X, Y, Z,而其內相似心為X', Y', Z'.令其相似圓之圓心為D, E, F.

乃應有大小或符號如下:

$XD=DX'$, $BX:CX=BX':X'C=b:c$, $DB\cdot DC=\overline{DX}^2$.

故:
$$\frac{b}{c}=\frac{BX}{CX}=\frac{BD+DX}{CD+DX}=\frac{BD+DX}{DX-DC},$$

$$\frac{b}{c}=\frac{BX'}{X'C}=\frac{BD+DX'}{X'D+DC}=\frac{BD-DX}{DX+DC}.$$

乘此二式,而乃:

$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{\overline{BD}^2-\overline{DX}^2}{\overline{DX}^2-\overline{DC}^2}=\frac{\overline{BD}^2-DB\cdot DC}{DB\cdot DC-\overline{DC}^2}$$

$$=\frac{BD(BD+DC)}{CD(DC+BD)}=\frac{BD}{CD}.$$

仿此:
$$\frac{CE}{AE}=\frac{c^2}{a^2},\quad \frac{AF}{BF}=\frac{a^2}{b^2}.$$

故:
$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=\frac{b^2\cdot c^2\cdot a^2}{c^2\cdot a^2\cdot b^2}=1.$$

然則三個相似圓之圓心 D, E, F 爲共線點(228).

今 B, C 二點對於相似圓(D)爲反點.故 ABC 之外接圓直交(D)(277),而同理亦直交相似圓(E),(F).

然則(D),(E),(F)三圓直交同一圓形,而其圓心爲共線點.故依前定理(377)此三圓同軸.

習　題

1. 如有二點,使其對於一組圓形均有同冪,則此組圓爲同軸圓.

2. 如一組圓形之圓心爲共線點,而有一點,使其對於此組圓形有同冪,則此組爲同軸圓.

3. 求一點之軌跡,使一已知點對於一已知同軸組中之圓形爲此所求點之反點.

4. 與一定圓直交之一組圓形,有其圓心在此定圓之直徑上;證明此組圓形成一不相交之同軸組.

5. P 爲同軸組之根軸上一點; PH 爲自 P 所畫此組中一圓之切線; 證明 $PH=PL$.

6. 同軸組中,二圓之公切線張直角於此組之一限點上.

7. 證明一定圓與一同軸組中之圓形,所成之根軸,爲共點線.

8. 證明自一限點所畫此組中任何一圓之切線,被其根軸平分.

9. 經過一已知點又經過一已知三角形垂高兩端之三圓爲同軸圓.

10. 一變動圓經過二定點又割一定圓於 P,Q; 證明 PQ 經過一定點.

11. $A,B;C,D$ 爲已知二圓與其聯心線之交點,而 L 爲其一限點.如 $\frac{BL}{LA}=\frac{DL}{LC}$,證此二圓相等.

12. 以二圓之公切線爲直徑之圓形,經過此已知二圓之限點.

13. 自一限點所畫已知同軸組中一圓之切線,乃被此組之每一圓形調和分割.

14. 一變動圓經過二定點;證明一已知點對於此圓而有之極線經過一定點.求此點.

苟此變動圓與一已知線相切於一已知點,證此題.

15. 證明二圓公切線上之二切點,對於此二圓之任何同軸圓為共軛點.

16. 如一已知點對於一變動圓而有之極線為定線,證明任何已知別點之極線,經過另一定點.

17. 一變動圓經過二定點一已知點C對於此圓而有之極線,與經過C之直徑相交,證其交點之軌跡為一圓形.

18. 以三角形一個內平分線為直徑之圓形,與其內切圓及一傍切圓同軸,此傍切圓之圓心在此平分線上.

19. 經過一已知三角形之每一頂點,各畫一圓,共畫三圓,與其外接圓直交,而有其圓心在其頂點之對邊上.證此三圓同軸.

20. 如一圓與已知二圓相切,則直交其他二圓之一,此其他二圓乃與已知圓同軸,而有已知圓之相似心為其圓心.

21. 如三圓內切已知二圓之一,而外切其他一圓,則此三圓之根心,為已知二圓之一個相似心.

22. 如二圓與其他二圓相切,使四切點,或二切點或無切點,為外切點,證其任一對圓形之根軸,經過其他一對圓形之一個相似心.

第七章

反形法

397. 界說. 如 P, P' 二點與一已知點 O 爲共線點,而 $OP \cdot OP'$ 之乘積等於一已知常數 K, 則 P, P' 二點對於反形心(center of inversion), O 稱爲反點.

如 K 爲正數,則 P, P' 二點同在反形心之一旁,如 K 爲負數,則反點在其反形心之二旁.

如 P 點畫一圖形 (F), 則 P' 所畫之圖形 (F'), 對於反形心 O 稱爲 (F) 之反形(inverse).

398. 點與其反點相合者,有否?如 X 爲此點,則必有 $OX \cdot OX = K$, 或 $OX = \sqrt{K}$. 故如反形常數(constant of inversion)K 爲正數,則以圓心 O 半徑 $= \sqrt{K}$ 之圓,有圓周上之各點爲其自身之反點.此圓稱爲反形圓(circle of inversion)而任何一對反點對於此圓爲反形,所謂任何一對反點者,以前(267)已有其界說.

如反形常數爲負數,則點與其反點不能相合,此即反形圓爲虛形(Imaginay figure).

其常數 $\sqrt{K}$ 謂之反形半徑(radius of inversion).

已知反形心及反形常數,則每點有一反點,除反形心之自身爲其例外,因欲得反形心之反形,乃爲零之除法(division by zero). 然P點離O愈近,可見P'點離O愈遠,而OP'之距離無窮增加,則同時OP之距離,亦無窮減少.此種事實,或謂經過此心之已知線上,所有反形心之反形,乃在無窮遠處.

P點與反形心之連線,稱爲P點之動徑(ıadius vector)

399 定理. 一已知形對於一反形心而有之二反形爲位似形,其已知反形心爲其位似心.

設M爲已知形(F)之任何一點;M', M''爲反形上M之相當點,其反形心爲O,其反形常數爲K'及K''.然則:

$$OM\cdot OM'=K', \qquad OM\cdot OM''=K''$$

故相除而得:

$$OM':OM''=K:K''.$$

故M', M''爲相似形之相當點,有O爲相似心及$K':K''$爲其相似比.

然則反形常數,對於反形之形狀毫無關係,而反形理論之至要應用,僅求反形之形狀.故其反形常數恆不提及.

但如反形之大小有重大關係,則其反形常數必申

言之。

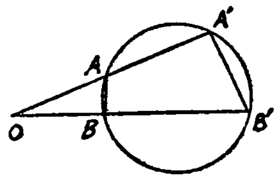
反形心之選擇，對於反形之形狀及大小均有關係。

400. 定理. 二對反點為共圓點.

401. 定理. 經過一對反點之任何一圓，直交其反形圓(277)(苟此反形圓不為虛形).

402. 定理. 二反線段對於其線端之動徑為逆平行線.

設 $AB, A'B'$ (第138圖)對於反形心 O 為二反線段. A, B, A', B' 既為共圓點(400)，故 $\angle OAB = \angle BB'A'$. 故 AB, $A'B'$ 對於 OAA', OBB' 為逆平行線.



第 138 圖

403. 題. 已知一線段之長，及其兩端動徑之長，求其反線段之長.

設 O (第138圖)為反形心，AB 為已知線段，而 $A'B'$ 為其反形. 相似三角形 OAB, $OA'B'$ 中，乃有:

$$\frac{A'B'}{OA'} = \frac{AB}{OB}$$

今 $OA \cdot OA' = K$, 其 K 為反形常數.

故: $$A'B' = AB \cdot \frac{K}{OA \cdot OB}$$

* 譯者附註——請讀第9節軌跡10之附註二. 如知常數 K 之長，則其長度單位仍必知之，否則 $A'B'$ 之長不能作出.

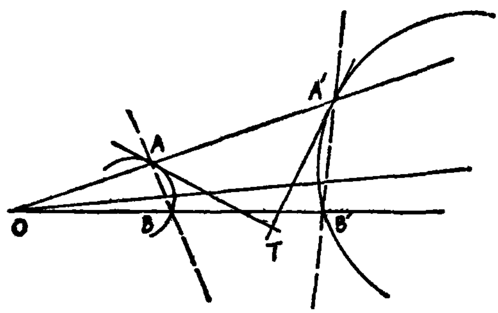
如 A, B 點與反形心 O 爲共線點,則上之證法完全無效,但其結果依然成立。

如遇此種情形,則 $AB=OB-OA$, $A'B'=OA'-OB'$, 而 $OA\cdot OA'=OB\cdot OB'=K$. 自此等式可推演而得上之結果。

如 A, B 爲共線點,而其動徑視爲有方向之線,則 AB, $A'B'$ 線段有異號。

404. 定理. 二反曲線 (inverse curves) 相當點上之切線,與其切點之動徑,成相等之角。

設 A, A' 爲二反曲線 (C), (C') 上之相當點(第139圖), B 爲 (C) 上接近 A 之一點,而 B' 爲 (C') 上之相當點。$ABB'A'$ 爲聯圓四邊形, AB, $A'B'$ 弦爲逆平行線,而 $\angle BAO=\angle OB'A'$ (402).



第 139 圖

今如 B 移至 A, 則同時 B' 亦將移至 A'、OBB' 線有 OAA' 爲其界限, AB 弦有切 (C) 圓於 A 之切線爲其界限,而 $A'B'$ 弦有切 (C') 圓於 A' 之切線爲其界限。故此命題云云。

如動徑 OAA' 取如首線(initial line),則 TAA', $TA'A$ 二角之大小雖等,而有異號.

405. 註. 二切線及其動徑成一等腰三角形.

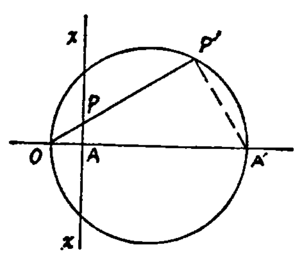
406. 定理. 二曲線相交之角,等於其反曲線在相當交點上之相交角.

切已知曲線於公點 A 上之切線成一角,其反曲線在其相當點 A' 上亦成一角,此二角對於 AA' 線段之中垂線顯為對稱形,因自上定理(404)即易見之.

407. 推論. 如二曲線彼此相切,則其反形亦彼此相切.

408. 定理. 直線之反形為一圓形,此圓經過其反形心.

設 x 為已知線(第140圖)而 O 為已知之反形心.自 O 放落 x 上之垂線 OA,而使經過 O 之任何別線遇 x 於 P.令 A, P 之反點為 A', P'. AP, $A'C'$ 為逆平行線.故 $\angle AP'P=\angle PAO=90°$.然則定線段 OA' 張直角於 P' 上.故 P' 之軌跡



第140圖

爲一圓形，以 OA' 爲其直徑.

如 x 線經過反形心，則 x 之每一點將有一點 x 爲其反形，此即經過反形心之直線，其反形爲此線之本身.

409. 逆定理. 如一圓經過反形心，則其反形爲一直線，與經過反形心之直徑垂直.

設 A 爲 A' 點之反形(第140圖)，此 A' 與已知之反形 O 心爲直徑之兩端；而 P 爲此圓上任何別點 P' 之反形. AP，$A'P'$ 爲逆平行線(402)；故 $\angle OP'A'=\angle OAP=90°$. 然則 P 之軌跡爲垂直 OA' 於 A 點之垂線，而此命題乃證.

410 註. $OA\cdot OA'=K$，或，如 C 爲此圓之圓心，則 $OA\cdot 2OC=K$. 此得已知線所反成圓形之半徑.

411. 定理. 一直線，及其同一平面上之圓形，總可視爲彼此之反形.

如取已知圓內垂直已知線之直徑一端爲其反形

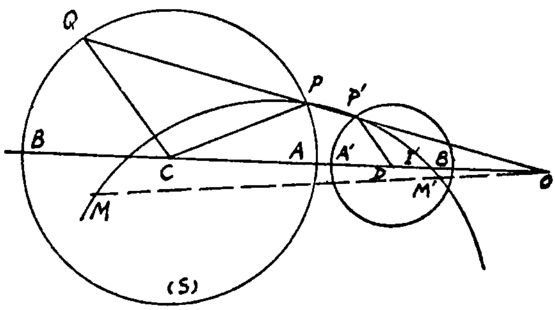
*譯者附註——如反形常數爲正數，則 A，A' 同在反形心 O 之一旁(397)，如反形常數爲負數，則 A，A' 在 O 之二旁；如爲正數而等於 OA 之平方，則 O 之直徑末端 A' 與 A 相合；如爲正數而大於 OA 之平方，則已知線 x 在此圓之內；否則 x 線總在此圓之外. 試作下題，已知一線 x 及倒形心 O 與反形常數 K，與此線所反成之圓.

**譯者附註——應先知其長度單位，因 $OA\cdot 2OC=K\cdot 1$ 或 $\frac{OC}{1}=\frac{K}{2OA}$. 如知反形常數絕對價值之平方根 $\sqrt{|K|}$，則其長度單位不必知之，因 $OA\cdot 2OC=\pm\sqrt{|K|}\cdot\sqrt{|K|}$.

心,而以此點至此線之距離乘上此圓之直徑為其反形常數,則此直線可反成此圓.此從上定理(408,409)得之.

412. 定理. 如一圓對於不在此圓上之一點而反其形,則其反形為一圓形.

設 O 為反形心,而 P 為已知圓(C)上之任何一點.令 OP 與(C)之第二交點為Q,而P之反點為P'(第 141 圖).



第 141 圖

於是$OP\cdot OP'=K$,其K為反形常數,而$OP\cdot OQ=p$,其p為已知之反形心O對於已知圓(C)而有之冪.故$OP':OQ=K:p$.故當Q畫成(C)圓,P'乃畫成一位似圓(D).

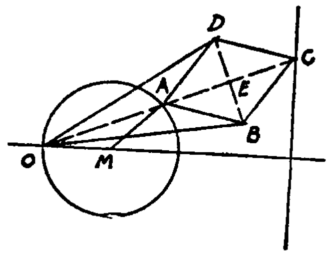
然則反形心為此已知圓與其反形之一個相似心(303).二反點乃為二圓上之逆相當點(309).

$(C)(D)$,為P,P'二點反方向所畫成之二圓.

如反形常數等於此點對於其已知圓而有之冪,則

$K:p=1$，而此圓反成其本身.

413. 破墨里葉之聯節器(peaucellier's cell). 設 $ABCD$ (第142圖)爲一菱形(rhombus)用等長之四硬棒互相扭成；且設 B, D 二頭與一定點 O 以等長之二硬棒扭在 O 上.於是 A 及 C 點對於圓心 O 之圓形將爲反點.



第142圖

蓋 O, A, C 爲共線點.而令 BD 與 AC 之交點爲 E. 於是:

$$OA\cdot OC=(OE-AE)(OE+AE)=\overline{OE}^2-\overline{AE}^2$$

$$=(\overline{OD}^2-\overline{DE}^2)-(\overline{AD}^2-\overline{DE}^2)=\overline{OD}^2-\overline{AD}^2.$$

故 A, C 對於一圓爲反點,此圓乃有 O 爲圓心及直三角形之一邊爲其半徑,其斜邊爲定長 OD 而其第二邊爲定長 AD. 故如 A 點畫任何曲線,則 C 點將畫成其反曲線.

如 A 被一硬棒連至定點 M,而使 $MA=MO$,則 A 點將畫經過 O 之圓形;故 C 點將畫成一直線,與 OM 垂直 (409)

* 譯者附註——試作下題;已知一圓 (C) 及反形心 O 與反形常數 K,作此圓所反成之圓.

此爲破壓里葉之聯節器,改變圓運動(circular motion)而成直線運動(rectilinear motion)

414. 題. 求一已知圓之反圓半徑(radius of the inverse circle).*

如 R, R' 爲已知圓及其反圓之半徑(第141圖).於是:

$$R':R=OP':OQ=OP\cdot OP':OP\cdot OQ=K:p.$$

故:
$$R'=R\cdot\frac{K}{P}.$$

然則反圓之半徑,等於已知圓之半徑乘此反形常數而被反形心對於已知圓而有之羃所除.

415. 設 C(第141圖)爲已知圓之圓心,A, B 爲經過反形心 O 之直徑兩端.令 C, A, B 之反點爲 I', A', B'.

於是:
$$OI'\cdot OC=K.$$

故:
$$1:OI'=OC:K. \qquad (1)$$

反圓(S')之圓心 D 爲 C 之位似形(412),而乃:

$$OC:OD=R:R'.$$

故(414):
$$OC:OD=p:K,$$

而(1)變爲:
$$1:OI'=OD\cdot p:K^2. \qquad (2)$$

* 譯者附註——圓所反成之圓,謂之反圓(inverse circle). 注意反形圓(circle of inversion)(398)與反圓之區別,反形半徑(radius of inversion)(398)與反圓半徑(radius of the inverse circle)之區別.

** 譯者附註——請讀第9節軌跡10之附註二.

今: $$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = K.$$

故: $$OA \cdot OA' \cdot OB \cdot OB' = K^2.$$

但: $$OA \cdot OB = p,\ OD = \tfrac{1}{2}(OA' + OB').$$

故代入(2)中,而有:

$$\frac{1}{OI'} = \frac{(OA'+OB')OA \cdot OB}{2OA \cdot OA' \cdot OB \cdot OB'},$$

$$\frac{2}{OI'} = \frac{OA'+OB'}{OA' \cdot OB'} = \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OB'}.$$

然則 I' 對於 A', B' 爲 O 之調和共軛點(258);故

定理. 一已知圓圓心之反形,爲反形心對於其反圓而有之反形.

416 定理. 任何二圓,可視爲彼此之反形,有二種不同之看法.

如已知二圓之一個相似心取爲反形心,而自此反形心至此二圓上二逆相當點之距離乘積取爲反形常數,於是每圓將爲其他一圓之反形(412).

此二圓之二個相似心,可任取其一;故此命題云云.

417. 定理. 如一圓經過已知二圓之二逆相當點(反點),則割已知二圓於相等之角.

* 譯者附註——然則已知圓雖反成一圓,而已知圓圓心之反形決非反圓之圓心,蓋爲反圓之圓心,則其反形心必在無窮遠處(268, 255). 參考(43, 304).

令已知二圓(C),(D)之一個相似心為O(第141圖),而P, P'為(C),(D)上之二逆相當點與O為共線點.今言經過P, P'之任何一圓(S).

如O取為此圖之反形心,而$OP \cdot OP' = K$為其反形常數,則(C)圓將反成(D)(416),而(S)圓將反成其本身,因如M為(S)上之任何一點,則OM線遇(S)於一點M',而乃$OM \cdot OM' = OP \cdot OP'$.故$M$之反形在$(S)$上.但$(C)$及$(S)$之相交角,等於此二圓反形$(D)$及$(S)$之相交角(406),此即$(S)$割$(C)$及$(D)$於等角.

418. 推論. 如一圓經過已知二圓之二逆相當點(反點),而與其中一圓相切,則與其他一圓亦相切.

419. 定理. 任何三圓,能反成三圓,使其圓心為共線點.

如已知圓之圓心為共線點,則其聯心線之任何一點可取為反形心,而其反形常數可任意取之(412).

如已知圓之圓心不為共線點,則取其已知圓之根圓(S)(342)上任何一點O為其反似心.於是(S)將反成一直線S(408),而已知圓將反成直交S之圓形(406),此即圓心將在S上.

* 譯者附註——應用此理,以作三圓之反圓,使此反圓之圓心為共線點,如附圖18.

反而言之,反成圓形之聯心線S可視爲已知線.於是此反形心必爲(S)之直徑末端,而此直徑必垂直S,其反形常數亦可得之.

如已知三圓之根心,在一圓之內,則此定理成立否?如其圓心爲共線點,則成立否?

420.定理. 任何三圓,能反成其本身.

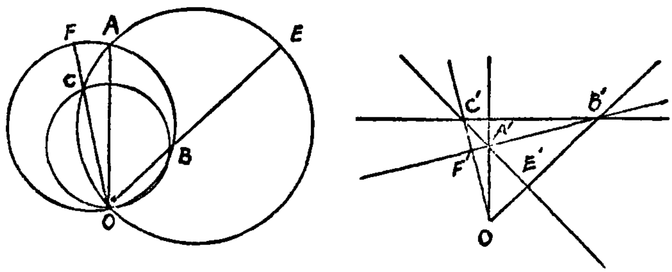
設O爲一點,對於已知三圓有同冪,易言之,如其圓形同軸,則O爲其根軸上之一點,如其圓形不同軸,則O爲其根心.

如O取爲反形心,而以O對於已知圓而有之冪K爲其反形常數,則此三圓之每一圓將與其反形相合.蓋使OPP'爲任何割線,遇此三圓之一於P, P'.於是$OP\cdot OP'=K$,易言之,此圓之P點有其圓上之另一點P'爲其所變之反形,而此命題乃證.

421.定理. $ABOF$, $ACOE$二圓相交於O, A(第143圖);OF, OE爲此二圓之直徑,遇其他一圓於C及B.證明AO經過OBC圓之圓心.

---

*譯者附註——應用此理,以作三圓之反圓,使此反圓之圓心在一已知線上.



第 143 圖

設 A', B', C', E', F' 對於反形心 O 爲 A, B, C, E, F 之反點。

此二反形之性質,寫於下示之二直行:

$ABOF$, $ACOE$ 爲經過 A, O 之二圓。 $A'B'F'$, $A'C'E'$ 爲經過 A' 之二直線。

$ABOF$ 之直徑 FO, 割 $ACOE$ 於 C. 自 O 至 $A'B'F'$ 其垂線 $F'O$ 割 $A'C'E'$ 於 C'.

$ACOE$ 之直徑 EO, 割 $ABOF$ 於 B. 自 O 至 $A'C'E'$, 其垂線 $E'O$ 割 $A'B'F'$ 於 B'.

證明 AO 經過 OBC 圓之圓心。 證明 AO' 垂直 $B'C'$.

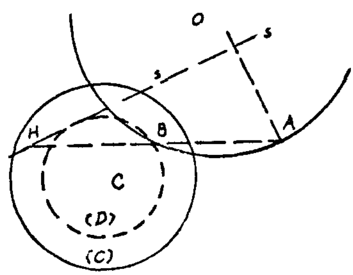
今顯見其反題之眞確,蓋三角形之垂高爲共點線.故其原題亦眞確。

---

* 譯者附註——請看附圖19.

422.題. 經過已知二點,畫一圓形,割一已知圓使其交角等於一已知角.

設(C)爲已知圓,A, B爲已知點,而(O)爲所求圓(第144圖).反此圓形,以A爲反形心而以A對於(C)而有之羃爲K.* (C)圓將不改變;而(O)將反成一直線S,經過B之反形H,而與(C)成此已知角m.凡



第144圖

一切直線與(C)成m角者,與(C)之同心圓(D)相切,因其割成之弦張此已知角於(C)弧之任何一點上,而此同心圓(D)卽易得之. 然則S線乃自可知點H所畫可知圓(D)之切線.S之反形爲此所求圓.此題有二解,因自H可畫(D)圓之切線有二.

423. 米多來**定理及其廣義.** 在一不聯圓四邊形(non-cyclic quadrilateral)中,二對對邊乘積之和,大於其

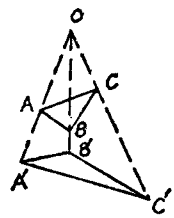
---

*譯者附註——如已知點之一,A,在(C)圓之外,則自A點所畫(C)圓之切線爲反形常數K之平方根(319),故用此K之平方根,卽可作此圖之反形(410,附註).如A點亦在(C)圓之內,則經過A點之最短一弦爲反形常數絕對價值之二倍平方根(319),故用之亦可作此圖之反形(410,附註).

** 譯者附註——(64.a 軌跡 9).

對角線之乘積，如為聯圓四邊形，則其和積相等.

設 $OABC$ 為已知四邊形（第145圖），而 A'，B'，C' 對於反形心 O 為 A,B,C 之反點. $OABC$ 既非聯圓四邊形，則 A'，B'，C' 不為共線點.



第145圖

今如 K 為反形常數，則(403)：

$$\frac{AB}{OA\cdot OB}=\frac{A'B'}{K},\quad \frac{BC}{OB\cdot OC}=\frac{B'C'}{K},\quad \frac{AC}{OA\cdot OC}=\frac{A'C'}{K}.$$

但　$$A'B'+B'C'>A'C',$$

因 A'，B'，C' 不為共線點.

故：　$$\frac{AB}{OA\cdot OB}+\frac{BC}{OB\cdot OC}>\frac{AC}{OA\cdot OC},$$

或　$$AB\cdot OC+BC\cdot OA>AC\cdot OB.$$

然如 $OABC$ 為聯圓四邊形，則 A'，B'，C' 為共線點(409)，而 $A'B'+B'C'=A'C'$. 故依上而有：

$$AB\cdot OC+BC\cdot OA=AC\cdot OB.$$

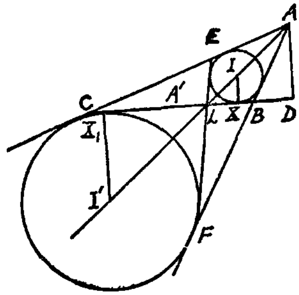
424. 費爾巴定理. 九點圓與其內切圓及每一傍切圓相切.

三角形 ABC 之通用記法見(59).

AII' 遇 BC 於 L（第146圖）. 其另一公切線 ELF 經過 L 而對於 BAC 角為 BC 之逆平行線，因 EF 對於 AII' 為

BC 之對稱線.

A, L 二點爲 $(I), (I')$ 二圓之相似心.故 $(ALII')$ 爲調和反點,所以 $(DLXX_1)$ 亦爲調和列點,因 $AD, IX, I'X$ 爲平行線.BC 之中點 A' 亦爲 XX_1 之中點(122).故(256):



第 146 圖

$$A'L \cdot A'D = \overline{A'X}^2 = \overline{AX_1}^2. \tag{1}$$

今反此圖形,以 A' 爲反形心,而 $\overline{A'X}^2 = \overline{A'X_1}^2 = K$ 爲反形常數.內切圓 (I) 將反成其本身,因其反形常數等於反形心對於 (I) 而有之羃;同理,傍切圓 (I') 亦反成其本身.九點圓之反形將爲一直線,因反形心 A' 在此圓上(409);此直線將經過 L,因此圓經過 (D),而 L 爲 D 之反形,見(1);且此線將與 BC 成一角於 L 上,此角之大小等於九點圓切在 D 上之切線與 BC 所成之角(406).* 惟此切線爲 BC 之逆平行線(168).故九點圓之反形經過 L 而與 BC 逆平行,此即九點圓之反形爲切線 ELF.故在

* 譯者附註——而九點圓切在 D 上之切線及切 A' 上之切線各與 BC 成相等之角,而乃成一等腰三角形(168, 附註).但九點圓所反成之直線及九點圓切在 D 上之切線各與 BC 成相等之角而成一等腰三角形(404, 405).故九點圓切在 A' 上之切線與九點圓所反成之直線乃互相平.…

原圖內，九點圓與(I)及(I')相切(407)。

倣之可證九點圓與其他傍切圓亦均相切。

425 定理. <u>一組相交同軸圓對於一交點反成一組共點線.</u>

此組之一切圓形將反成直線，因其反形心在其每圓上(409)，而此直線各經過此組圓形之其他一公點所有之反形。

426. 定理. <u>一組不相交同軸圓對於此組之一限點反成一組同心圓．其圓心爲其他一限點之反形.</u>

一切圓形經過已知組(S)之限點L, L'乃成一組相交同軸圓(R)，直交(S)組之圓形(368, 277)。

(R)對於L而有之反形爲一組直線，經過L'之反形L'' (425)；而(S)反成一組圓形(S')，直交此組直線(406)；易言之，此組直線爲(S')組所有每圓之直徑，然則(S)組之反形爲一組圓形，有L''爲圓心。

427. 定理. <u>一組同心圓，反成不相交之同軸組.</u>

一切直線經過已知組(S)之圓心A，乃直交(S)組之圓形而對於任何已知反形心O此組直線反成一組

** 譯者附註——請作此圖如附圖20.

* 譯者附註——請作此圖，如附圖21.

(R')圓，經過O且經過A之反形A'(408)同時(S)組之圓形反成一組(S')圓，與(R')組直交(406)，故(S')組之圓形成一同軸組，有O, A'爲其限點。

428 定理 <u>一組同軸圓，反成一組同軸圓。</u>

如已知圓有二公點，則其反圓亦有此二公點之反形爲公點。

另一方面看來，如(S)組爲不相交組，其二限點得一相交組之同軸圓(R)，與已知組直交。對於任何一點O，(R)之反形爲一相交同軸組(R')，而(S)之反形(S')爲一組圓形與(R')之圓形直交。故(S')之圓形同軸，而有(S)之限點反形爲其限點(367, 373)。

429. 定理. <u>一圓，及對於此圓而有之一對反點，反成一圓及一對反點。</u>

設P, Q對於已知圓(S)爲一對反點。經過P, Q之任何一圓(R)必直交(S)圓(277)；故(R)之反形(R')將直交(S)之反形(S')，且經過P, Q之反形P', Q'。然則經過P', Q'之任何一圓(R')直交(S')，此即P', Q'對於(S')爲反點。***

---

*譯者附註——參考附圖21.

**譯者附註——請作此圖，如附圖22.

***譯者附註——見附圖23.

430. 定理 反圓及其反形圓同軸.

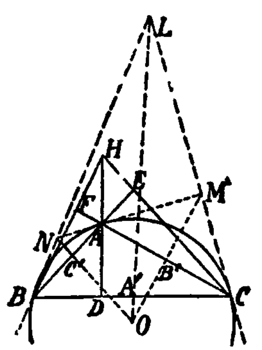
如一已知圓 (S) 割其反形圓 (C) 於二點 E, F，則此二點亦將屬於 (S) 之反形 (S')，因在反形圓上之點反成其本身.

如 (S) 及 (C) 不有公點，設 L, L' 為此二圓所得同軸組之限點. L, L' 二點對於 (C) 既為反點(368)，則反成彼此之本身，且此二點對於 (S) 既亦為反點，故依上定理 L, L' 對於 (S) 之反形 (S') 亦為反點.

然則 L, L' 二點對於 $(C), (S), (S')$ 三圓為反點，故此三圓同軸.(369).

431. 定理. 一已知三角形之外接圓，九點圓，極圓，及其切線三角形之外接圓均為同軸圓.

照三角形之通用記法，A, D 點；B, E 點；C, F 點(第147圖)對於三角形 ABC 之極圓為反點(302). 故 ABC 所有外接圓之反形乃經過 D, E, F；易言之，其九點圓對於此極圓為其外接圓之反形；故此三圓同軸(430).



第147圖

* 譯者附註——(398).

設 LMN 爲 ABC 之切線三角形，此即 A, B, C 上之切線所成之三角形.如 M 爲 A 上及 C 上之切線交點,則 M 點對於 ABC 之外接圓 (O) 爲 AC 之極點(285). 故 OM 線垂直 AC, 而遇 AC 於 B', B' 爲 M 對於 (O) 圓而有之反形.

然則 L, M, N 之反點爲 A', B', C', 所以九點圓對於 (O) 圓乃有 LMN 之外接圓爲其反形; 故此三圓同軸. 夫一同軸組乃被二圓所定, 今二組均有此外接圓及九點圓; 故此命題云云.

推論. 切線三角形之外接圓其圓心在已知三角形之尤拉線上, 因一同軸組之圓心爲共線點.

習題

1. 一組調和列點, 對於此線上任何一點, 反成另一組調和列點.

2. 如一圓對於此圓上之一點而反其形,則其圓心反成一點,此點對於所反成之直線爲反形心之對稱點.

3. 證明自反形心所畫一曲線之切線,亦爲其反曲線之切線

4. 反此定理: "半圓形中之角爲一直角," 取其直徑之一端爲其反形心.

5. 用反形法證明如三角形 ABC, ABD 之外接圓互相直交，則 CAD, CBD 之外接圓亦相直交.

6. 用反形法證明以一圓之三個共點弦(concurrent chords)爲直徑之圓形，兩兩相交於三個共線點.

7. 經過二圓之一公點，畫二割線 AMM', ANN', 遇第一圓於 M, N 及第二圓於 M', N'. 如二割線之每一線任意變動，而取其一切可能之位置，則 AMN', $AM'N$ 二圓之第二交點有何軌跡?

8. 二圓對於任何一點而反其形，則其聯心線反成何形?

9. 自一定點，畫二線，使遇一定線，且使夾一常角，證明依此所成之三角形，其外接圓與一定圓相切.

10. 一變動圓與一定圓相切而與另一定圓直交;證與另一定圓相切.

11. 對於任何一點反此定理:"二變動圓彼此相切而與二定線之每一線相切，於是彼此相切之切點，乃在此二線之任一線上，或在此二線所成二角之任一平分線上".

12. 證明與一已知圓直交而與另一已知圓割一常角之圓形，與第三定圓亦割一常角.

13. 反此定理:"如四邊形之對角互爲補角,則此四邊形爲聯圓四邊形,"取其一頂點爲反形心.

14. 證明已知圓之變動直徑兩端,連至此圓之二定點,此二連線交點之軌跡爲另一圓形,與已知圓直交.

15 反此定理:"自一已知點至圓上二點,此二點乃與已知點爲共線點,則其距離之乘積爲一常數,"取其圓上任何一點爲反形心.

16. 一定長之線段,其兩端移動於已知二線上,此二線相交於O;證明此兩端對於O而有之反點,連成與一定圓(圓心O)相切之變動線

17. 對於任何一點反此定理:"聯心線平分二交圓之公弦".

18. 已平分之一線段,對於此線段中之一點O而反其形,其反形成一組調和列點之三點,其第四點乃在O上.

19. 四圓相遇於A及B;而A點上之切線成一組調和束線.表明經過A之任何截線,割此四圓於一組調和列點.暗示.對於A而反其形.

20. 如A',B',C'對於任何一點O爲A,B,C之反形,表明$\angle BOC=\angle A+\angle A'$.

21. 如三圓有一公點,表明可畫四圓與此三圓相切.

22. 經過定點O,畫一變動線,使與一同軸組之任何二圓相切於P, Q. 求O對於P, Q而有之調和共軛點之軌跡.

23. 如一圓直交已知之相交二圓,則此相交二圓之二交點對於此圓為反點.

24. 如O, P對於(S)圓為反形,今對於O反此P點及(S)圓,證明P'為(S')之圓心.

25. 證明已知二圓之一公點,對於直交此二圓之任何一圓而有之反形軌跡為二直交圓. 暗示. 對於此點而反其形.

26. A', B'對於一已知圓(S)為A, B之反形. 如O為(S)上之任何一點,證明$OAB, OA'B'$二圓復相交於(S)上.

27. 三角形ABC之AB, AC二邊,其中垂線遇AC, AB於Q, R. 畫二圓,以Q, R為圓心,QA, RA為半徑;證此二圓相交於ABC之外接圓所有經過A之直徑上.

28. OAA', OBB'為二直線; $AB', A'B$相交於此二直線所成一角之平分線上.

證明 $$\frac{1}{OA}-\frac{1}{OA'}=\frac{1}{OB}-\frac{1}{OB'}.$$

29. 對於P反此定理:"A, B, C爲共線點;P爲任何一點,AFE, BFD, CED畫與PA, PB, PC垂直;於是$PDEF$爲聯圓四邊形.

第八章

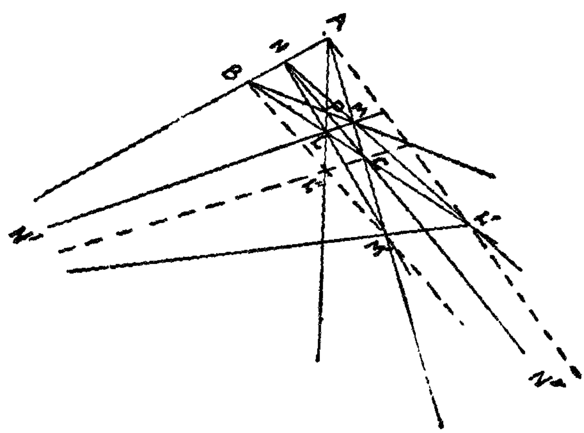
現代之三角形幾何學

1. 對於三角形而有之極點與極線

432. 定理 L', M', N' 爲共線點.

設 P 爲三角形 ABC 之平面上任何一點(第 148 圖)而 L, M, N 爲 AP, BP, CP 線與 ABC 之 BC, CA, AB 邊之交點. 對於 ABC 相當邊之末端令 L, M, N 之調和共軛點爲 L', M', N'.

依稅瓦定理有:



第 148 圖

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1.$$

而依作法,又有:

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AN'}{N'B},\ \frac{BL}{LC}=\frac{BL}{L'C},\ \frac{CM}{MA}=\frac{CM}{M'A}.$$

故依美奈勞斯定理,L', M', N'爲共線點.當P點取在三角形ABC之內,或在其外,則其所合內分及外分之條件,亦易見之.

433 界說. $L'M'N'$線對於三角形ABC稱爲P之極線,或P之三線形極線(trilinear polar)或調和聯合(harmonically associated)於P之一線,而P稱爲$L'M'N'$線之極點.

434. 註. 依美奈勞斯定理,則見L', M, N點;$L, M'N$點;L, M, N'點爲共線點.然則對於ABC已知點P之極線$L'M'N'$,有一簡便作法.

435. 定理. AL, BM', CN'線相交於一點L''.

此依稅瓦定理,即易證明(第148圖).

仿此,AL', BM, CN'線相交於一點M'',而AL', BM', CN線相交於一點N''.

436. 註. 已知$L'M'N'$線;如欲求其極點P,則A, B, C與L', M', N'相連,而作三角形$L''M''N''$. AL'', BM'', CN''

線乃相交於 P.

437. 界說. $L'' M'', N''$ 點對於三角形 ABC 稱爲 P 之**調和聯合點** (harmonic associates) 而對於 AL, BM, CN 線段則爲 P 之調和共軛點, 因就特例言 A, L, P, L'' 爲束線 $B(ACMM')$ 上之列點, 而此束線依作法已調和.

如已知 L'' 點, 則其調和聯合點爲 P', M', N' 點. 又仿之而言其他二點 M'', N''.

L'', M'', N'' 之三線形極線爲 $L'MN, LM'N, LMN'$ 線, 此線稱爲 $L'M'N'$ 之**調和聯合線** (harmonic associates).

習　題

1. 求垂心之極線,表明此線垂直三角形之尤拉線.

2. 表明內心之調和聯合點, 爲此三角形之傍心. 表明內心之三線形極線, 經過外平分線之線足, 而垂直內心與外心之連線.

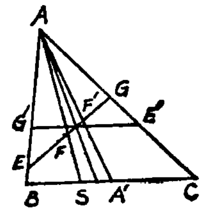
3. 求重心之調和聯合點. 重心有否三線形極線?

2. 類似中線

438. 界說. 中線對於其頂點畫出之內平分線而有之對稱線, 謂之**類似中線** (symmedian). 三角形有三個類似中線.

439. 定理. 三角形之一個類似中線,平分此三角形相當邊上之逆平行線.

設 EG (第 149 圖) 爲一線與已知三角形 ABC 之 BC 邊逆平行 (139) 在 A 角之平分線上旋轉三角形 AEG, 使 AE 邊與 AC 相合. EG 線有其新位置 $E'G'$, 而乃 $E'G'$ 平行 BC, 因 $\angle B=\angle AGE=\angle AG'E'$. 故 $E'G'$ 之中點 F' 在 ABC 之中線 AA' 上;今如在 A 之平分線上再旋轉 $AE'G'$, 使合其原位置 AEG, 則 F' 點將在中線對於 A 之平分線而有之對稱線上, 卽 A 之類似中線上.



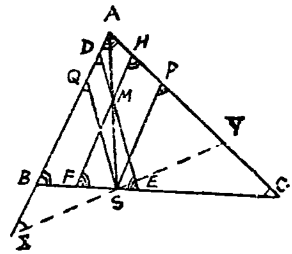
第 149 圖

440. 推論. 三角形之類似中線,爲其對邊所有逆平行線中點之軌跡.

441. 定理. 如已知三角形二邊之逆平行線爲等長,則其交點在此三角形第三邊之類似中線上. 其逆定理亦確.

設 DE, FH (第 150 圖) 爲三角形 ABC 中 AC, AB 邊之逆平行線,而 M 爲 DE 與 FH 之交點. 今 $\angle HFC=\angle DEB=A$. 故 FME 爲等腰三角形, 而 $FM=EM$, 旣依假設 ED 等於 FH, 故 $DM=HM$.

令 AM 與 BC 之交點爲 S, 而 SQ, SP 爲經過 S 而與 ED, FH 平行之線.從相似三角形可見 $SQ : MD = SP : MH = AS : AM$, 且旣 $MD = MH$, 故 $SQ = SP$.



第 150 圖

令經過 S 而與 BC 逆平行之線爲 XY. 乃有: $\angle SQB = \angle MDQ = C = \angle SXB$, 而 $\angle MHP = \angle SPC = B = \angle PYS$. 故 SQX, SPY 爲等腰三角形,而 $SX = SQ, SY = SP$, 且旣 $SQ = SP$, 故 $SX = SY$. 然則 S 爲 BC 之逆平行線 XY 之中點;故依上定理 S 爲此類似中線上之一點, 此即 M 點在 BC 之類似中線上.

442 逆定理. 三角形二邊之逆平行線,如經過第三邊之類似中線上一點, 則此逆平行線爲等長.

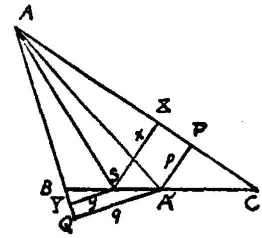
逆言正定理之證明步驟, 即得此題之證明.

443. 推論. 三角形中,一已知邊之類似中線,爲此三角形其他二邊之相等逆平行線所有交點之軌跡.

444. 定理. 自類似中線上任何一點,至此三角形夾此類似中線之二邊, 其距離之比等於此二邊之比.

設 AS 爲類似中線,而 AA' 爲其中線(第 151 圖). AS, AA' 線對於 A 角之平分線爲對稱. 故 $\angle BAS = \angle CAA'$, 而

$\angle BAA' = \angle CAS$. 故直三角形 $A'AQ$, SAX 爲相似形, 而直三角形 SAY, $A'AP$ 亦爲相似形; 故有:



第 151 圖

$$x:q = AS:AA',\quad y:p = AS:AA'$$

故: $x:y = q:p$.

今三角形 $AA'B$, $AA'C$ 爲等積形, 因各有 ABC 之半面積, 另一方面看來:

面積 $AA'B = \frac{1}{2}cq$, 面積 $AA'C = \frac{1}{2}pb$.

故: $pb = cq$, 或 $b : c = q : p$.

所以 $x : y = b : c$.

故在類似中線之線足上, 此題已證. 但自類似中線之任何別點, 其距離與 x, y 成比例. 故此命題亦已全證.

445. 定理. 三角形之一邊被其類似中線分成之線段, 與此三角形二鄰邊之平方成比例.

三角形 ASB, ASC 有一公共垂高. 故 (第 151 圖):

$$\frac{BS}{CS} = \frac{\text{面積 } ABS}{\text{面積 } ACS} = \frac{cy}{bx} = \frac{c}{b} \cdot \frac{y}{x}.$$

但依上定理 (444):

$$y : x = c : b.$$

故:
$$\frac{BS}{CS} = \frac{c}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c^2}{b^2}.$$

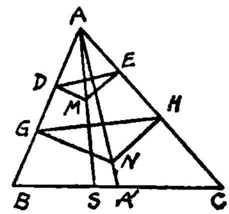
446. 定理. 自一點至三角形二邊之距離,如與此二邊成比例,則此點在第三邊之類似中線上.

假設此點在此二邊之夾角中.

如 M 爲一點,自此點至 b,c 之距離與 b,c 成比例,而 S 爲 AM 與 BC 之交點(第151圖)於是 S 至 b,c 之距離亦與 b,c 成比例.故 S 點分 BC 成二線段之比等於 b,c 平方之比,因見上定理(445)之證明.夫內分 BC 而成此比之點,限於一,故此命題云云.

447. 定理 自一類似中線(或中線)上之任何一點,如畫三角形夾邊上之垂線,則其垂足之連線,垂直此三角形之相當中線(或類似中線).

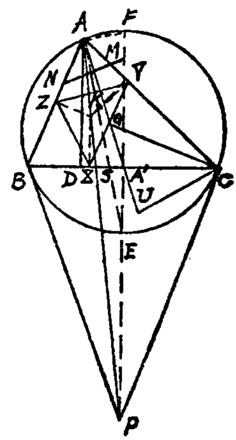
設 MD, ME 爲自類似中線 AS 上之一點 M 放落 AB, AC 邊上之垂線(第152圖). $ADME$ 爲聯圓四邊形;故 $\angle DEM = \angle DAM = \angle EAA$,其 AA' 爲經過 A 之中線.今 ME 垂直 AE.故 ED 垂直 AA'.仿之表明 GH 垂直 AS.



第152圖

448. 定理. 自三角形之一頂點畫出之類似中線,經過二切線之交點,此二切線乃在此三角形之其他二頂點上,而與其外接圓相切.

設 P(第153圖)爲外接圓(O)在三角形 ABC 之 B, C 頂點上所有切線 PB, PC 之交點. P 點對於(O)爲 BC 之極點(285). 故經過 P 之直徑 EF, 爲 BC 之中垂線, 而 P, A' 對於(O)圓爲反點,此即$(PA'EF)$爲調和列點, 故束線 $A(PA'EF)$ 亦然.今 EAF 爲一直角. 故 AE 爲 PAA' 角之平分線(265). 但 AE 爲 A 角之平分線, 而 AA' 爲 ABC 之中線.故依界說(438), AP 經過 A 而爲 ABC 之類似中線.



第153圖

另一方面. 切線 PB, PC 爲 ABC 中 AC, AB 邊之逆平行線(139, 148). 今 $PB=PC$. 故 P 爲 A 之類似中線上一點(441).

449 定理. 三角形一個類似中線,對於夾此類似中線之二邊而有之調和共軛線,與此頂點上之外接圓切線相合.

蓋此類似中線內分三角形之對邊成其他二邊平方之比(445), 而依前定理(234)切外接圓於此頂點上之切線外分其對邊成同一比值.

另一方面．類似中線AS(第153圖)平分BC之任何逆平行線，MN(439)，而切外接圓於A點之切線平行MN(139,148)．故三角形經過A之AB, AC二邊，類似中線AS，及此切線，成一調和束線(262)．

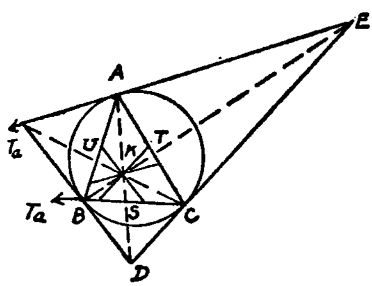
450 界說． 切外接圓於三角形三頂點之切線，或稱爲三角形之**外類似中線**(external symmedians)．

451. 題． 作一三角形，已知一頂點上畫出之垂高，中線，及類似中線(h_a, m_a, s_a)．

設ABC(第153圖)爲所求三角形，而AD, AA', AS爲頂點A之垂高，中線，及類似中線．三角形ADS, ADA'可作．SAA'之平分線，亦爲BAC角之平分線，而遇垂直BC於A'之垂線於ABC之外接圓上E點．故ABC之外心O在$A'E$上又在AE之中垂線上，所以O點可求，而OA爲其外半徑．

452. 定理 三角形之三個類似中線爲共點線．

其公點稱爲三角形之**類似重心**(symmedian point)或**來莫恩點**(Lemoine point)．



第154圖

1. **第一證法．** 令類似中線BK, CK(第154

圖)之交點爲K,而自K至三角形ABC中a, b, c邊之距離爲p, q, r. 乃有(444):

$$p:r=a:c, \quad q:r=b:c.$$

故:

$$p:q=a:b,$$

所以K亦在第三類似中線上(446).

自來莫恩點K至此三角形三邊之距離,與此三邊成比例,且有此性質者祗爲K點。

2. **第二證法**. 一個類似中線,爲相當逆平行線中點之軌跡(440),又爲此三角形其他二邊之等長逆平行線所有交點之軌跡(442). 故經過二個類似中線之交點K,所畫之三個逆平行線,彼此平分於此點上,而亦彼此相等;故亦在第三類似中線上。

3. **第三證法**. 設S, T, U(第154圖)爲類似中線之線足,在三角形ABC之BC, CA, AB邊上. 乃有(445):

$$\frac{BS}{SC}=\frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{CT}{TA}=\frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{AU}{UB}=\frac{b^2}{a^2}.$$

故依稅瓦定理, AS, BT, CV爲共點線。

4. **第四證法**. 令已知三角形ABC之切線三角形爲DEF(第154圖). DA, EB, CF爲ABC之類似中線(448). 但三角形DEF中,此三線即爲頂點D, F, F與內切圓切點A, B C之連線.故DA, EB, CF三線相交於DEF之

葛爾剛訥點(242). 然則三角形之來莫恩點爲其切線三角形之葛爾剛訥點.

5. **第五證法.** 命切外接圓 (O) (第 154 圖) 於 A, B, C 之切線與 BC, CA, AB 之交點爲 T_a, T_b, T_c. 切線三角形 DEF 之頂點 D, E, F 爲 BC, CA, AB 對於 (O) 而有之極點.

T_a 對於 (O) 而有之極線, 必經過 BC 之極點 D, 且經過 T_aA 之極點 A, 此即 T_a 之極線爲 ABC 之類似中線 AD. 但依前定理(233) T_a, T_b, T_c 爲共線點, 故其極線爲共點線.

453. 界說. $T_a T_b T_c$ 稱爲三角形 ABC 之來莫恩線 (Lemoine line) 或來莫恩軸 (Lemoine axis).

454. 推論. 來莫恩線,對於此三角形之外接圓,爲其來莫恩點之極線.

來莫恩點將以 K 表示之.

455. 定理. 來莫恩線,對於此三角形,爲其來莫恩點之三線形極線.

因 T_a, T_b, T_c 三點 (第 154 圖), 對於三角形 ABC 之相當邊末端,爲其類似中線線足之調和共軛點(452; 5),

456. 註 I. 切線三角形之頂點,爲來莫恩點之調和聯合點(437), 因此三角形被 T_a, T_b, T_c 三點與此已知三

角形之相當頂點相連而成。

457. 註II. 來莫恩軸垂直 OK 線，此 OK 線為來莫恩點 K 與外心 O 之連線(283).

OK 線稱為外接圓之布洛喀直徑(Brocard diameter).

458. 註III. 來莫恩點及切線三角形之一頂點，被其原三角形之相當邊及其所對之頂點調和分割。

459. 定理. 來莫恩點之垂趾三角形，有此來莫恩點之本身為其重心。

設 X, Y, Z(第153圖)為自類似重心 K 至三角形 ABC 之 BC, CA, AB 三邊上之垂足。今將證明 K 為 XYZ 之重心。

設 G 為 ABC 之重心。延長 AGA' 至 U，使 $A'U=A'G$。三角形 UCG 之三邊，顯與 ABC 之中線平行，而 UGC 之中線，顯與 ABC 之三邊平行。

今 K 既為 ABC 之每一類似中線上之一點，則三角形 XYZ 之三邊，垂直 ABC 之中線(447)，故又垂直 UCG 之三邊。又 XK, YK, ZK 三線既垂直 ABC 之三邊，故亦垂直 UCG 之中線。故 XK, YK, ZK 為 XYZ 之中線，而 K

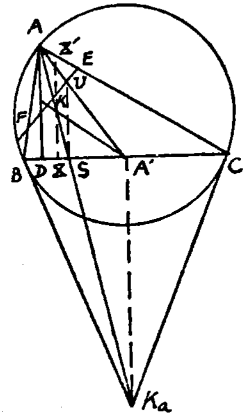
---

*譯者附註——一點之垂趾三角形有此點在原三角形各邊上之射影為其頂點。注意一點之線趾三角形(239)與一點之垂趾三角形(459)有何區別?

為 XYZ 之重心.

460. 定理. <u>三角形各邊之中點連至相當垂高之中點,其連線之交點,為其類似重心.</u>

設 K (第 155 圖) 為<u>來莫恩</u>點, S 為類似中線 AS 之線足, 而 Ka 對於 ABC 之外接圓為 BC 之極點. $(ASKKa)$ 為調和列點 (456), 而束線 $A'(ASKKa)$ 亦然, 其 A' 為 BC 之中點. 今垂高 AD 平行此束線之射線 $A'Ka$; 故此命題云云 (261).



第 155 圖

461. 令 ABC 之垂三角形為 DEF (第 155 圖), 而令 K 在 ABC 各邊上所有正射影 (orthogonal projections) X, Y, Z 對於 K 而有之對稱點為 X', Y', Z.

定理. <u>X', Y', Z 三點, 為三角形 AEF, BDF, CDE 之來莫恩點.</u>

$A'K$ 線經過 AD 之中點 (460). 故 X' 在 ABC 之中線 AA' 上.

EF 線與 BC 逆平行 (139). 故類似中線 AK 經過 EF 之中點 V (439). 然則 AVK 為三角形 AEF 之中線, 所以

ABC 之中線 AA' 爲 AEF 之相當類似中線(438).

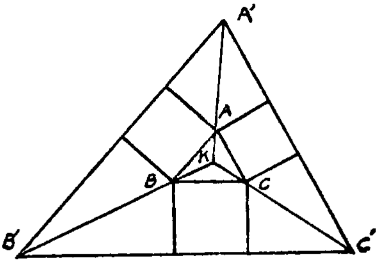
BAC 角及 SAA' 角,有同一平分線(438).故對於 BAC 互爲逆平行之 EF, BC 線對於 SAA' 亦爲逆平行.故如 U 表示 AA' 在 EF 上之交點,則 $UVSA'$ 爲聯圓四邊形,而 UVA' 角 $=\angle USA'$.但 A' 點爲四邊形 $BCEF$ 之外接圓圓心,而 V 爲 EF 弦之中點.故 UVA' 角 $=90$,而 USA' 爲一直角,此即 US 垂直 BC.然則 US 平行 XKX',而有

$$AK : AS = AX' : AU. \tag{1}$$

今三角形 ABC, AEF 爲相似形(138). $AKS, AX'U$ 爲其類似中線.故(1)表明 K 及 X' 爲二個相似形中之相當點,且 K 既爲 ABC 之類似重心,故 X' 點爲 AEF 之類似重心.

仿之而言 Y', Z' 點.

462. 定理. 如以三角形之每邊,取爲底邊,作正方形,使此三個正方形皆在已知三角形之外,而此正方形之外邊另成一三角形,於是此三角形之三頂點連至已知三角形之相當頂點而成共點線.



第 156 圖

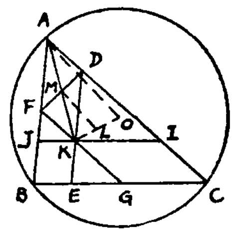
三角形 $ABC, A'B'C'$ (第 156 圖)顯爲位似形.

故此三線 AA', BB', CC' 爲共點線(38).

且自 A' 至 AB 之距離等於 C, 自 A' 至 AC 之距離等於 b. 然則自 A' 至 AB, AC 邊之距離, 與此二邊成比例, 此即 AA' 爲 ABC 之類似中線(446). 仿之而言 BB', CC' 線.

463. 定理. 經過來莫恩點而與此三角形三邊平行之三線, 割此三邊於六個共圓點.

設 K 爲 ABC (第 157 圖) 之類似重心, 而 EKD, FKG, IKJ 爲經過 K 而與 AB, AC, BC 平行之線. 平行四邊形 $AFKD$ 中, 對角線 FD 被 AK 平分於 M, 且 AK 既爲類似中線, 則 FD 與 BC 爲逆平行線(440). 仿之而言 IG 及 EJ.



第 157 圖

AFD 角 $=\angle BJE=C$ 故 $EDFJ$ 爲等腰梯形, 而 E, D, F, J 爲共圓點. 又 DF, IJ 既爲逆平行線, 則 I, D, F, J 爲共圓點; 而 $IGDF$ 既爲等腰梯形, 則 G, I, D, F 爲共圓點. 然則此題已證.

464 註. 此圓之圓心在 ABC 之外心 O 與類似重心 K 之中央.

因 FD 線垂直外半徑 OA (139, 146), 而三角形 OAK 中, 二邊中點之連線 LM, 平行第三邊 OA, 故 LM 垂直 FD

於中點 M. 同理, EJ 及 IG 之中垂線經過 L.

465. 界說. 此圓稱爲第一來莫恩圓 (first Lemoine Circle).

466. 定理. 經過三角形之類似重心而與此三角形三邊逆平行之線, 割此三邊於六個共圓點.

蓋此三個逆平行線相等, 而被此類似重心 K 平分. 故 K 離其各端等距, 而爲一圓之圓心, 此圓經過此六點.

467. 界說. 此圓稱爲第二來莫恩圓 (second Lemoine circle) 或餘弦圓 (cosine circle). 稱曰餘弦圓者, 因根據一種事實, 卽此圓在其三角形之三邊上割有三弦與其對角之餘弦成比例.

習題

1. 直三角形之來莫恩點, 與其斜邊上之垂高中點相合.

2. 表明類似重心總在此三角形之外接圓內. 此點是否總在此三角形之內?

3. 表明自外心 O 至來莫恩軸之距離等於 $R^2:OK$, 其 R 爲外半徑而 K 爲來莫恩點.

4. 在一三角形中,較短之類似中線對較長之邊,且如三角形之二個類似中線相等,則此三角形爲等腰三角形.

作一三角形,已知下點:

5. A, G, K.

6. A, O, K.

7. 自一頂點畫出之類似中線與中線相比,等於其相當二邊之二倍乘積,與此二邊平方之和相比.

8. 求三角形類似中線之長.用施得槐定理.

9. 在一已知圓中,可內接無數三角形,使有一已知點爲其類似重心.

10. 如三角形 ABC 之類似中線割其外接圓於 P, Q, R 三點,表明三角形 ABC, PQR 有同一來莫恩點.

3. 三角形之阿破羅尼圓

468. 界說. 三角形 ABC 中,A, B, C 三角之內平分線及外平分線遇其對邊 BC, CA, AB 於 U, U' 點;V, V' 點;W, W' 點以 UU', VV', WW' 爲直徑之圓形,稱爲三角形 ABC 之阿破羅尼圓.(the circle of Apollonius).

469. 定理. 阿破羅尼圓經過已知三角形之相當頂

點.

因 U, U' 點被 B, C 調和分割.故以 UU' 爲直徑之圓形,爲一點之軌跡,自此點至 B 及 C,其距離之比等於 $BU:CU=BU':CU'$(9,軌跡11).但 $AB:AC=BU:CU$.故 A 爲此軌跡上之一點.仿之而言其他二個阿破羅尼圓.

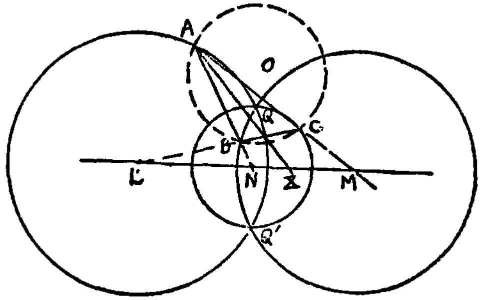
另一方面. UU' 線張直角於 A 上,故以 UU' 爲直徑之圓經過 A.仿之而言其他二圓.

470. 定理. 三角形之外接圓直交此三角形之每一阿破羅尼圓.

因 B, C 被阿破羅尼圓所有直徑 U, U' 之兩端 U, U',調和分割.故 B, C 對於 (UU') 圓爲反點(277).仿之而言其他阿破羅尼圓.

471. 定理. 三角形之三個阿破羅尼圓有二公點.

設 $(L), (M), (N)$(第158圖)表示經過一已知三角形頂點 A, B, C 之阿破羅尼圓.自此圓之界說,可知其任二圓彼此相交.今令 (M) 與 (L) 之一公點爲 Q.



第158圖

然則：　$\frac{QA}{QC}=\frac{BA}{BC}$，$\frac{QB}{QC}=\frac{BA}{CA}$.

故：　$\frac{QA}{QB}=\frac{CA}{CB}$，

此卽 Q 在 (N) 圓上.

另一方面. $(L),(M),(N)$ 圓既直交 ABC 之外接圓 (O) (470). 故其圓心 L, M, N 爲切 (O) 圓於 A, B, C 點之切線與 BC, CA, AB 之交點(271, 468). 今 L, M, N 爲共線點(234). 故 $(L),(M),(N)$ 爲同軸圓(377). 且其任二圓, $(L),(M)$, 既顯見其相交於二點, 則第三圓 (N) 亦經過此二點.

472. 界說. 三角形之三個阿破羅尼圓所有之公點 Q, Q' 稱爲三角形之**等力點**(isodynamic points).

473. 註. 阿破羅尼圓之聯心線,爲此三角形之來莫恩軸(453).

474. 定理. 三個阿破羅尼圓之公弦,經過此三角形之外心及類似重心.

三個阿破羅尼圓之公弦, 爲此三圓之根軸. 今 ABC 之外接圓(第153圖)與此三圓直交.故 O 對於其每圓有同冪即等於外半徑之平方; 故 O 在 QQ' 上. 今根軸 QQ' 垂直聯心線 LMN, 此聯心線爲來莫恩軸(473). 故 OQQ'

*譯者附註——仿而言之另一交點 Q'.

與布洛喀直徑(457)相合,故含有類似重心 K.

475. 定理. 外接圓與每一阿破羅尼圓所有之三公弦,爲原三角形之類似中線.

因阿破羅尼圓(L),(M),(N)(第 158 圖)既直交(O),則(O)與(L),(M),(N),所成之三公弦對於(O)爲圓心 L,M,N 之極線,而此圓心爲切(O)圓於 A,B,C 點之切線與 BC, CA, AB 之交點(471),故依前定理(452; 5)其公弦爲 ABC 之類似中線.

476. 定理. 三角形之類似中線,對於此三角形之三個阿破羅尼圓,爲外心之極線.

讀者自證其理.

477. 定理 三角形之一個阿破羅尼圓,其圓心爲其他二個阿破羅尼圓之一個相似心.

B, C 點上(M),(N)圓(第 158 圖)之切線 OB, OC 相交於此二圓之根軸 OK 上一點 O 故 B, C 爲此二圓上之逆相當點(333),而此逆相當點之連線 BC 遇其聯心線 MN 於此二圓之一個相似心. 今 BC 與 MN 之公點爲第三阿破羅尼圓之圓心 L.

478 定理. 經過三角形中一巳知頂點之類似中心,遇其來莫恩軸於二個阿破羅尼圓之一個相似心,此

二個阿破羅尼圓乃對於此三角形之其他二頂點而有者.

類似中線 AK 經過 A(第158圖)而與外接圓之切線 AL 被 AB, AC 邊調和分割(449). 今 AB, AC 在其來莫恩軸上得有二個阿破羅尼圓之圓心 N, M. 其一個相似心依上定理(476)爲 L 點. 故類似中線 AK 與來莫恩軸之交點 X, 對於此二圓之圓心 M, N, 爲$(M), (N)$所有相似心 L 之調和共軛點, 此即 X 爲此二圓之第二相似心(306).

479. 定理. 經過三角形一已知頂點之類似中線,遇其來莫恩軸於一點. 此點爲其布洛嗒直徑對於經過此頂點之阿破羅尼圓而有之極點.

布洛嗒直徑 OK (第158圖)垂直來莫恩軸, 在此軸上有阿破羅尼圓(L)之圓心 L. 故 OK 對於(L)而有之極點在其來莫恩軸上.

又對於(L), O 爲類似中線 AK 之極點(476). 故 AK 經過 OK 對於(L)而有之極點; 此即 OK 對於(L)而有之極點, 爲類似中線 AK 與來莫恩軸之交點 X; 故此命題云云(478).

推論. 一個阿破羅尼圓之圓心, 及布洛嗒直徑對

於此圓而有之極點,爲其他二個阿破羅尼圓之相似心(478, 479).

習題

1. 自三角形之一個等力點至此三角形之三頂點其三距離與此三角形之相當對邊成反比例.

2. 三角形之二個等力點,對於其外接圓爲反點.

3. 等力點對於 O 及 K 爲調和共軛點.

4. 等角線

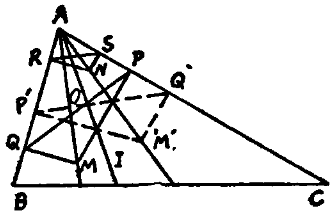
480. 界說. 二線經過已知角之一頂點而與此角之平方線成等角,則此二線稱爲"等角線"(isogonal lines)或"等角共軛線"(isogonal conjugate lines).

然則此三角形一頂點畫出之垂高及外直徑,爲一對等角線(61).二個等角共軛線之另一例爲自三角形一頂點畫出之中線及類似中線(438).

481 定理. 自一角所有二個等角線上之二點,至此角二邊之距離,成反比例.

設 M, N(第159圖)爲二個等角線 AM, AN 上之二點,而 MP, MQ, NR, NS 爲自此二點放落 BAC 角所有 $AB,$

AC 邊上之四個垂線. M 對於平分線 AI 而有之對稱點 M' 在 AN 上, 且自 M' 至 AB, AC 上之垂線 $M'P'$, $M'Q'$ 等於 MP, MQ. 乃有:



第 159 圖

$$\frac{M'P'}{NR}=\frac{AM'}{AN}=\frac{M'Q'}{NS}.$$

故:
$$\frac{MP}{NR}=\frac{MQ}{NS}.$$

482. 推論 I　自二個等角線上之二點, 至此角一邊之距離乘積, 等於此二點至其他一邊之距離乘積.

因
$$MP\cdot NS=MQ\cdot NR.$$

483. 推論 II.　二個等角共軛線上之二點, 在此角之二邊上, 所有之四個射影為共圓點.

今言二對相似三角形: ANS, AQM; APM, ARN, 乃有:

$$\frac{AQ}{AS}=\frac{MQ}{NS},\quad \frac{AP}{AR}=\frac{MP}{NR}.$$

故 (481):
$$\frac{AQ}{AS}=\frac{AP}{AR},$$

或
$$AQ\cdot AR=AP\cdot AS,$$

此即 P, Q, R, S 為共圓點.

注意此圓之圓心為 MN 之中點 O, 因其圓心為 PS,

QR 二弦所有中垂線之交點，而在梯形 $MNRQ$ 及 $MNSP$ 中，顯見此中垂線均經過 O 點.

484. 逆定理. 自二點至一已知角之二邊，如其距離成反比例，則此二點在二個等角共軛線上.

照其正定理用同一圖形及同一記法，則依假設有

$$NR : NS = MP : MQ.$$

若言 M' 點，則有:

$$NR : NS = M'P' : M'Q'.$$

故三角形 NSR 及 $M'P'Q'$ 爲相似形.因 N 角 $=\angle M'$，所以

$$NR : M'P' = NS : M'Q' = RS : P'Q'.$$

且 $P'Q'$ 線平行 RS 線，所以

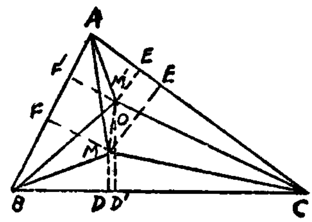
$$AR : AP' = AS : AQ' = RS : P'Q'.$$

然則四邊形 $ARNS$ 及 $A'P\,M'Q'$ 有其相當邊成比例，而其相當角相等，故爲相似形; 且旣 A, R, P' 及 A, S, Q' 爲共線點，故 A, N, M' 爲共線點 (38). 但依作法 AM' 爲 AM 之等角共軛線; 故此命題云云.

485. 定理. 一已知點在一角之二邊上有二個射影，此射線之連線垂直另一線之等角共軛線，此另一線爲此角之頂點與此已知點之連線.

此乃 447 題之概論，而與該題之證法亦同.

486. 定理. <u>一已知點連至已知三角形之三頂點,此三連線之等角共軛線為共點線.</u>



第 160 圖

令 AM, BM 線(第 160 圖)之等角共軛線 AM', BM' 之交點為 M'. 乃有(480):

$$ME:MF=M'F':M'E',\quad MF:MD=M'D':M'F'.$$

故,乘此二比例:

$$ME:MD=M'D':M'E',$$

此即 CM, CM' 為等角共軛線(484);故此命題云云.

487. 界說. 此 M, M' 二點,對於三角形 ABC, 稱為**等角共軛點**(isogonal conjugate points)或**等角反點**(inverse isogonal points).

三角形之垂心及外心,對於此三角形,為等角共軛點.重心及類似重心成另一對之等角共軛點.

488. 定理. <u>二個等角共軛點,在此三角形三邊上之六個射影,為共圓點.</u>

等角線 AM, AM' 上之 M, M' 二點(第 160 圖),其四個射影 E, F, E', F' 在一圓上,其圓心為 MM' 線段之中點 O(483). 又等角線 BM, BM' 上之 M, M' 二點,其四個射影

F, D, F', D' 在一圓上,其圓心爲 O (483). 故此六點 D, D', E, E', F, F' 爲共圓點.

習題

1. 一角之二邊,所有四個共圓點上之四個垂線,成一平行四邊形,其對頂點得其等角線.

2. 如 M, N 爲等角線 AM, AN 與 BC 之交點,則 $CM\cdot CN : BM\cdot BN = b^2$:

試言 AM, AN 爲中線及類似中線之情形.

3. 三角形之三頂點連至對邊上被一截線所交之交點,此連線之等角共軛線,遇其對邊於三個共軛點.

暗示. 用上之習題及美奈勞斯定理.

4. 三角形之三頂點,連至外接圓上之任何一點,此連線之等角共軛線,彼此平行,其逆定理亦確.

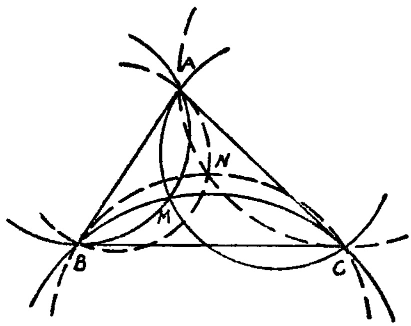
5. 有四點,而僅限於四,其中每點,對於一已知三角形爲其本身之等角點.

6. 三角形之一邊上任何一點,有此邊所對之頂點爲其等角共軛線.

5. 布洛喀點及布洛喀圓

489. 今言 (AB) 圓經過三角形 ABC 之 A, B 二頂點

(第161圖)而與 BC 邊相切於 B. 仿此, (BC) 圓可畫於 BC 邊上而與 CA 相切於 C, 又 (CA) 圓可畫於 CA 邊上而與 AB 相切於 A. 此 (AB), (BC), (CA) 三



第161圖

圓稱爲直接連圓組(the direct group of adjoint circles).

三頂點 A, B, C, 每次取其二頂點, 則在 BAC 式之輪換排列(circular permutation)中, 可得間接連圓組(the indirect group of adjoint circles) (BA), (AC), (CB), 其 (BA) 畫在 BA 邊上而與 AC 邊相切於 A, 仿之而其他二圓亦然。

490. 定理. 直接組之三個連圓有一公點 M.

(AB), (BC) 二圓(第161圖)有公點 B, 故相交於三角形 ABC 中之另一點 M. 今 (AB) 圓既與 BC 相切於 B, 則 AMB 角 $=180°-B$, 又仿此, BMC 角 $=180°-C$. 故:

$$\angle AMC=360°-(180°-B)-(180°-C)$$

$$=B+C=180°-A.$$

然則 M 點亦在 (CA) 圓之圓弧上。

491. 定理. 間接組之三個連圓,有一公點 N.

此與上題之證明相似.

492. 界說 此二點 M, N 稱爲三角形之布洛喀點 (Brocard points) 往往以希臘字母 Ω, Ω' 表示之.

493. 定理. $\angle MAB=\angle MBC=\angle MCA$, 而有此性質者祇此 M 點.

MAB 角內接於 (AB) 圓中(第 161 圖), 故以 BM 之半弧量之, 同時 BM 弦與此圓之切線 BC 成一 MBC 角, 亦以 BM 之半弧量之; 故此二角相等. 仿之而言 MBC 角及 MCA 角.

今如 M' 爲任何別點, 而有 $M'AB$ 角 $=M'BC$ 角, 則經過 M', A, B 三點之圓形將與 BC 相切於 B, 此即 M' 必爲 (AB) 圓之一點. 仿此而欲合 $M'BC$ 角 $=M'CA$ 角之條件, 則此點必在 (BC) 上; 故 M' 即 M.

494. 定理. $\angle NAC=\angle NCB=\angle NBA$, 而有此性質者祇此 N 點(第 161 圖).

此與上題之證明相似.

495. 定理. 三角形之二個布洛喀點, 爲此三角形之一對等角點.

如 N' 爲布洛喀點 M 之等角共軛點, 乃有 (第 161 圖)

$\angle MAB=\angle N'AC$, $\angle MBC=\angle N'BA$, $\angle MCA=\angle N'CB$.

但依假設: $\angle MAB=\angle MBC=\angle MCA$. 故: $\angle N'AC=\angle N'BA=\angle N'CB$, 此即 N' 與 N 相合(494).

496. 界說. 此角 $MAB=\angle NAC$ 稱爲三角形之布洛嗒角 (Brocard angle), 往往以 ω 表示之.

497. 已知一三角形 ABC 及直接組中之一個連圓, (AB), 可作布洛嗒點 M (第 161 圖) 及布洛嗒角如下: 經過 B 畫 AC 之平行線遇 (AB) 於 D. CD 線遇 (AB) 於所求點 M, 而 MBC 爲布洛嗒角.

顯有:

$$\angle MBC=\angle MAB=MDB=\angle MCA,$$

因 BD 平行 AC.

仿之而言第二布洛嗒點.

498. 界說. 如 O (第 162 圖) 爲三角形 ABC 之外心, 而 K 爲類似重心, 則以 OK 線段爲直徑之圓 (OK), 稱爲 ABC 之布洛嗒圓 (Brocard circle).

以 ABC 各邊之中垂線 OA', OB', OC' 與布洛嗒圓 (OK) 之交點 A_1, B_1, C_1 取爲頂點之三角形 $A_1B_1C_1$ 稱爲布洛嗒第一三角形 (Brocard's first triangle).

以 ABC 之類似中線 AK, BK, CK 與 (OK) 之交點 A

B_2, C_2 取爲頂點之三角形 $A_2B_2C_2$ 稱爲布洛喀第二三角形 (Brocard's second triangle).

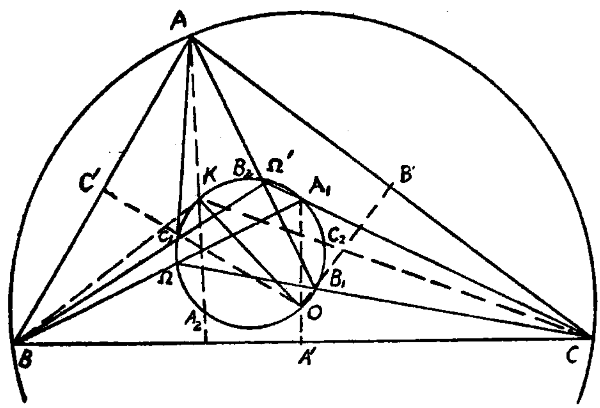
499 定理. 三角形之二個布洛喀點,在此三角形之布洛喀圓上.

KA_1O 角(第162圖)爲一直角,故 KA_1 平行 BC, 所以 A_1A' 等於 K 至 BC 之距離.仿之而言線段 B_1B', C_1C'. 乃有 (452; 1):

$$A_1A' : BC = B_1B' : CA = C_1C' : AB. \qquad (1)$$

今表明 C_1A 與 A_1B 之交點 P 在 (OK) 圓上.

自(1)乃有二個等腰三角形 C_1AB, A_1BC 爲相似形.



第 162 圖

故: $\angle BA_1A' = \angle AC_1C' = \angle PC_1O$. 然則 A_1, C_1 二點與 O 及 P 爲共圓點; 故 P 在 (OK) 上. 又言三角形 A_1BC 及 B_1CA,

則可表明A_1B及B_1C相交於(OK)上.故A_1B, B_1C, C_1A三線相交於(OK)上之P點.又自三角形A_1BC, B_1CA, C_1AB之相似性,有

$$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA.$$

故P與布洛喀點Ω相合.

仿之可知B_1A, A_1C, C_1B三線相交於第二布洛喀點Ω'在(OK)上.

500. 定理. 布洛喀第一三角形與其原三角形相似.

B_1KC_1角$=A$(第162圖),因依上題可知此二角之邊平行.另一方面看來,B_1KC_1角$=\angle B_1A_1C_1$.故$B_1A_1C_1$角$=A$.仿之而言三角形ABC及$A_1B_1C_1$之其他諸角.

501 定理. 布洛喀第二三角形(498)之頂點,為原三角形之外接圓割其類似中線之延線而得線段之中點.

內接於(OK)圓中之OA_2K角(第162圖)為一直角,此即OA_2為自ABC之外心O放落ABC之類似中線AK上之垂線;故此命題云云.

習　題

1. 二個布洛喀點,在此三角形三邊上之六個射影為共圓點.

2. 有一定底邊及一定底角之變動三角形中,一個布洛喀點之軌跡為一圓形.

3. 二個不同組之二個連圓,如與三角形一角之二邊相切,則必相交於此角之類似中線上一點,此點為此三角形之外接圓割其類似中線而得線段之中點.

4. 在一已知圓中,可內接無數三角形,使有一已知布洛喀圓.

5. 二個布洛喀點,對於其布洛喀直徑,互相對稱.

6. 三個類似中線之延線,割外接圓而有之三交點,成一三角形,與原三角形有同一布洛喀圓.

7. 三角形之來莫恩軸(453),為其外接圓及其布洛喀圓之根軸.暗示.用(338)後之11題.

8. 第162圖中,表明經過A, B, C而與第一布洛喀三角形之B_1C_1, C_1A, A_1B三邊平行之三線,相交於ABC之外接圓上.仿之而言自A, B, C放落$A_1B_1C_1$相當邊上之垂線.

表明依此所得之二點,為ABC之外直徑兩端.

作一三角形,已知下點:

9. B, C, Ω.　　10. A, O, Ω.

索　引

二　畫

三　畫

四　畫

---

*習題

*習題

巴斯開定理 (Pascal theorem) 250.

* 習題

五 畫

---

*習題

* 習題

六畫

* 習題

*習題

八 畫

*習題

* 習題

九畫

十畫

* 習題

*習題

十一畫

十二畫

* 習題

十三畫

十四畫

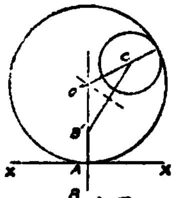
*習題

十五畫

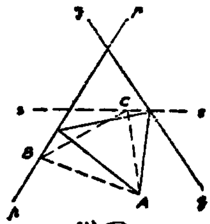
*習題

* 習題

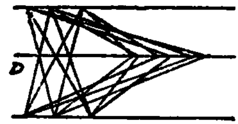
附圖1



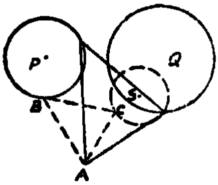
附圖 2



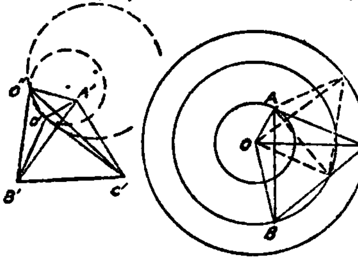
附圖 3



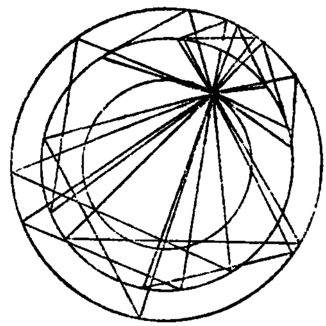
附圖 4



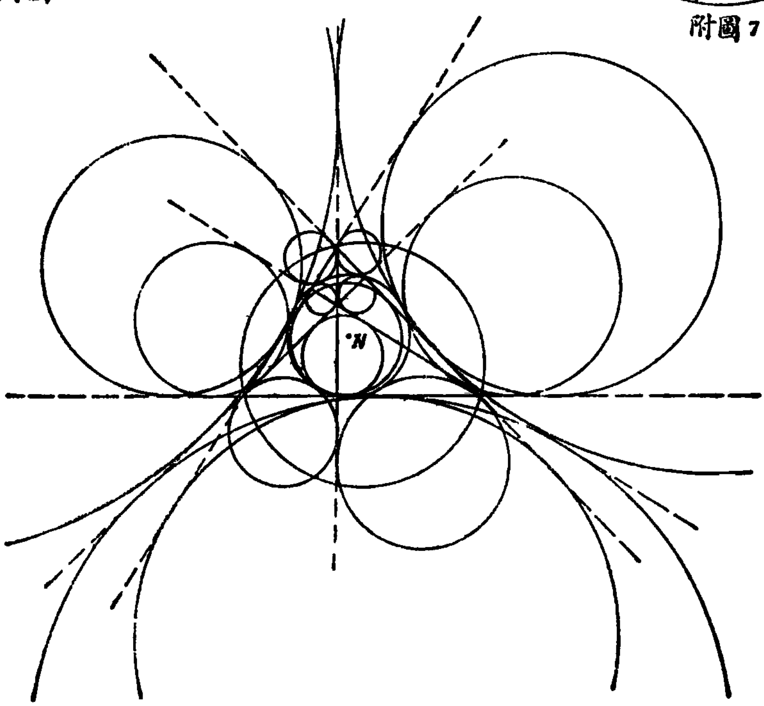
附圖 5



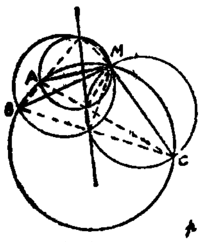
附圖 6



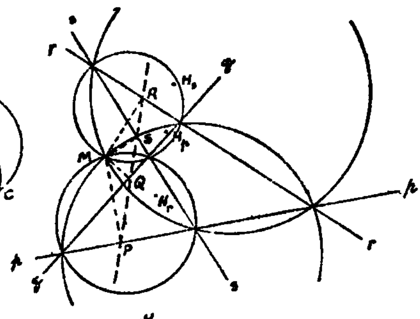
附圖 7

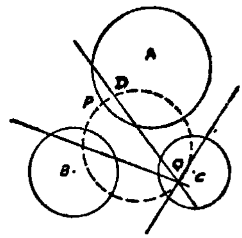


附圖 8

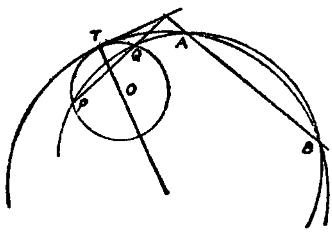


附圖 9

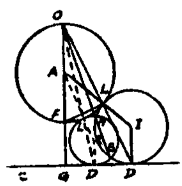

附圖 10

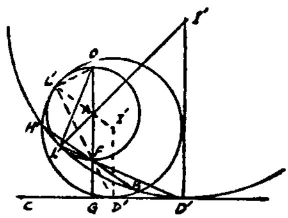


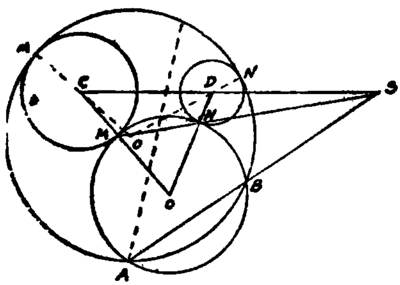
附圖 11



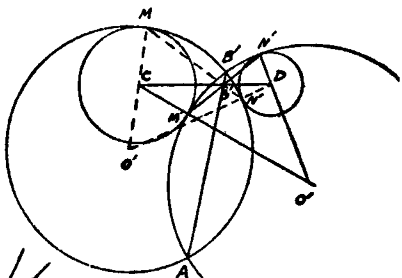
附圖 12


附圖 13a

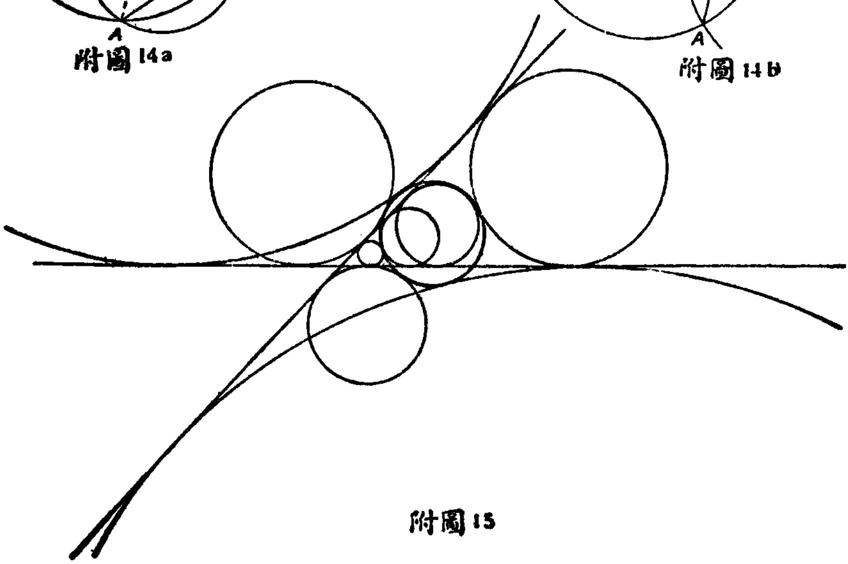

附圖 13 b

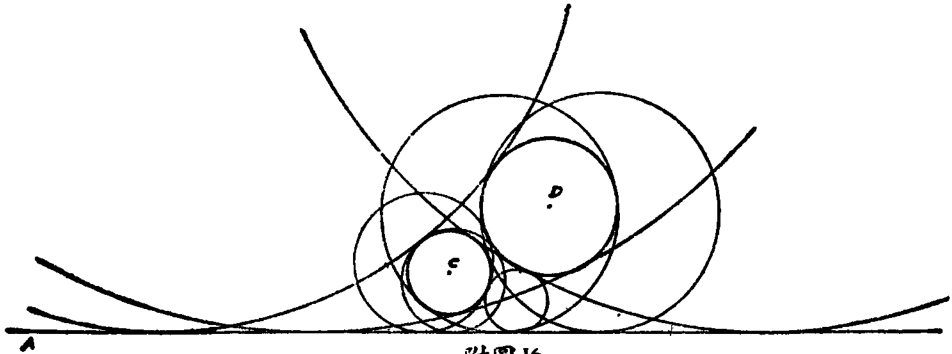


附圖 14a

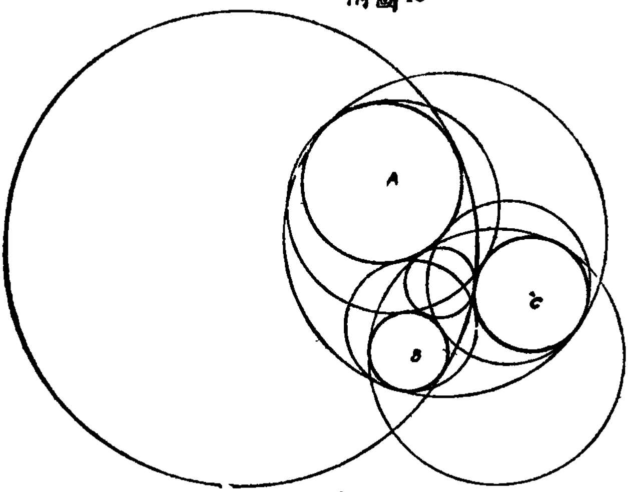


附圖 14 b

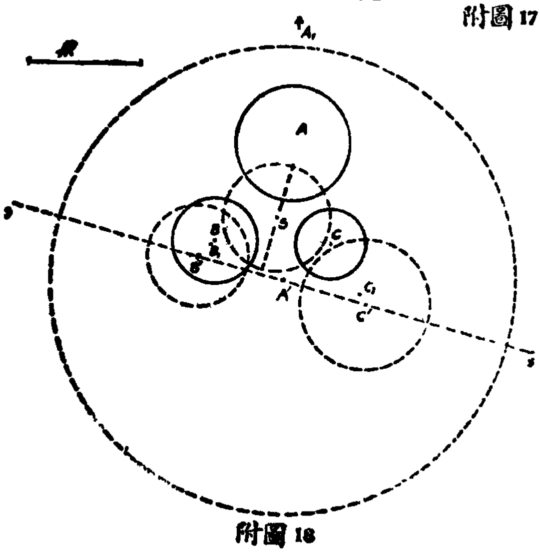

附圖 15



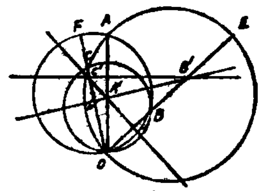
附圖 16



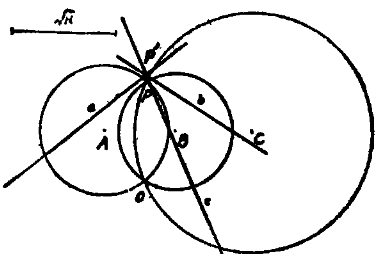
附圖 17



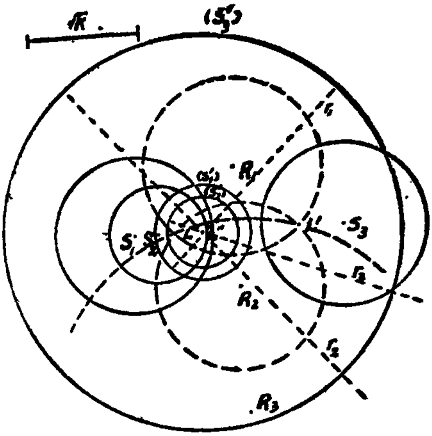
附圖 18



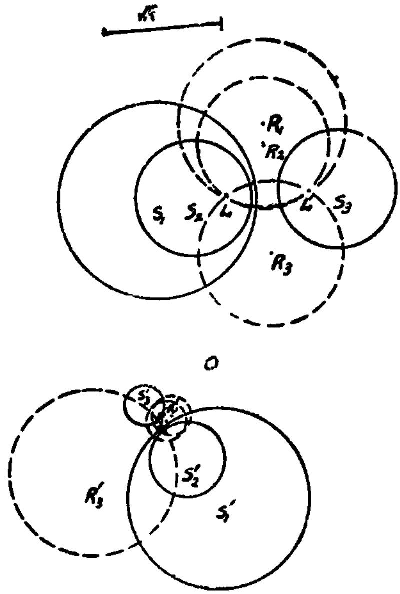
附圖 19



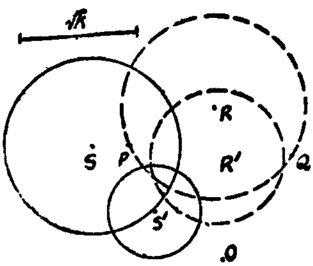
附圖 20



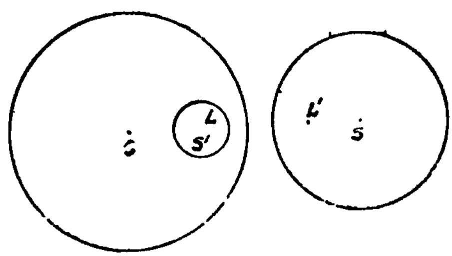
附圖 21



附圖 22



附圖 23



·附圖 24