Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 11

Wir betrachten nun die Garbeneigenschaften, denen wir für die holomorphen Funktionen schon Lemma 3.9 (4,5) in begegnet sind.

Garben

Definition 11.1. Es sei X ein topologischer Raum. Unter einer *Garbe* $\mathcal{F}$ auf X versteht man eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X, die die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(1) Zu jeder offenen Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Elementen $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $\rho_{U,U_i}(s) = \rho_{U,U_i}(t)$ für alle $i \in I$ gilt $s = t$.
(2) Zu jeder offenen Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Elementen $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\rho_{U_i,U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j,U_i \cap U_j}(s_j)$ für alle $i, j \in I$ gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_i = \rho_{U,U_i}(s)$ für alle $i \in I$.

Diese Eigenschaften nennt man die Serreschen Bedingungen. Die erste fordert, dass man die Übereinstimmung von Schnitten lokal auf einer offenen Überdeckung überprüfen kann, die zweite fordert, dass zusammenpassende lokale Schnitte von einem globalen Schnitt herkommen. Für die leere Menge ist $\mathcal{F}(\emptyset)$ einelementig, was mengentheoretisch aus den Eigenschaften folgt, wenn man die Überdeckung der leeren Menge mit der leeren Indexmenge betrachtet. Stellvertretend für viele ähnliche Beispiele zeigen wir, dass die Prägarbe der Schnitte zu $p \colon Y \to X$ eine Garbe auf X ist.

Beispiel 11.2. Wir knüpfen an Beispiel 10.5 an, d.h. es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$p \colon Y \longrightarrow X$$

eine fixierte stetige Abbildung, und es sei

$$U \mapsto S(U,Y) = \left\{ s : U \to p^{-1}(U) \mid s \text{ stetiger Schnitt zu } p \right\}$$

die Prägarbe der stetigen Schnitte in Y. Dies ist eine Garbe. Die erste Serresche Bedingung ist erfüllt, da zwei Schnitte übereinstimmen, wenn sie in jedem Punkt $P \in U$ den gleichen Wert haben, was bei einer offenen Überdeckung lokal getestet werden kann. Die zweite Serresche Bedingung ist erfüllt, da man zu einer Familie von stetigen verträglichen Schnitten

$$s_i \colon U_i \longrightarrow Y|_{U_i}$$

direkt einen Schnitt

$$s \colon U \longrightarrow Y|_U$$

definieren kann, der diese simultan fortsetzt. Die Stetigkeit folgt, da diese lokal getestet werden kann.

Beispiel 11.3. Zu einer topologischen Gruppe G und einem topologischen Raum X ist durch $U \mapsto C^0(U,G)$ eine Garbe gegeben, die Garbe der stetigen Abbildungen mit Werten in G. Es handelt sich um eine Garbe von Gruppen. Die Garbeneigenschaften beruhen darauf, dass die Gleichheit von stetigen Abbildungen punktweise getestet werden kann und dass sich stetige Abbildungen, die auf offenen Mengen definiert sind und auf den Durchschnitten übereinstimmen, zu einer globalen stetigen Abbildung fortsetzen.

Lemma 11.4. *Es sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf einem topologischen Raum X. Es seien Schnitte $s,t \in \mathcal{F}(X)$ gegeben, die $s_P = t_P$ in den Halmen $\mathcal{F}_P$ für alle Punkte $P \in X$ erfüllen. Dann ist $s = t$.*

Beweis. Aufgrund der Veraussetzung gibt es zu jedem Punkt $P \in X$ eine offene Umgebung $P \in U_P \subseteq X$ derart, dass

$$\rho_{X,U_P}(s) = \rho_{X,U_P}(t)$$

ist. Somit ist

$$X = \bigcup_{P \in X} U_P$$

und aus der ersten Garbeneigenschaft folgt $s = t$. $\square$

Garbenmorpismen

Ein Garbenmorphismus ist einfach ein Prägarbenmorphismus zwischen Garben. Dennoch gibt es einige gewichtige Besonderheiten, die sich auf Surjektivität, Bild, lokaler Isomorphietest beziehen.

Lemma 11.5. *Es sei X ein topologischer Raum und $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1)

$$\varphi_U \colon \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

ist injektiv für jede offene Menge $U \subseteq X$.

(2) *Die Halmabbildungen*

$$\varphi_P \colon \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P$$

sind injektiv für alle Punkte $P \in X$.

Beweis. Es seien s_P und t_P Keime aus $\mathcal{F}_P$ mit $\varphi_P(s_P) = \varphi_P(t_P)$. Wir können davon ausgehen, dass beide durch Schnitte $s, t \in \mathcal{F}(U)$ auf einer offenen Umgebung U von P repräsentiert werden. Aufgrund der Gleichheit im Halm zu $\mathcal{G}$ gibt es eine offene Umgebung $P \in U' \subseteq U$ mit $\varphi_{U'}(s) = \varphi_{U'}(t)$ in $\mathcal{G}(U')$. Aus der Voraussetzung folgt $s = t$ in $\mathcal{F}(U')$ und damit auch im Halm zu P.

Zum Beweis der Rückrichtung seien Schnitte $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $\varphi(s) = \varphi(t)$ in $\mathcal{G}(U)$ gegeben. Dann ist $\varphi(s)_P = \varphi(t)_P$ in jedem Halm $\mathcal{G}_P$ zu $P \in U$ und damit nach Voraussetzung (unter Verwendung von Lemma 10.16) auch $s_P = t_P$ in jedem Halm $\mathcal{F}_P$. Aus Lemma 11.4 folgt $s = t$. □

Lemma 11.6. *Es sei X ein topologischer Raum und $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus. Dann ist φ genau dann ein Garbenisomorphismus, wenn für jeden Punkt $P \in X$ die Halmabbildung*

$$\varphi_P \colon \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P$$

ein Isomorphismus ist.

Beweis. Die Hinrichtung ist trivial. Für die Rückrichtung ist zu zeigen, dass

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ bijektiv ist. Ohne Einschränkung sei $U = X$. Die Injektivität ergibt sich aus Lemma 11.5. Zum Nachweis der Surjektivität sei nun $t \in \mathcal{G}(X)$ vorgegeben. Zu jedem Punkt $P \in X$ gibt es ein eindeutiges

$$s_P \in \mathcal{F}_P$$

mit

$$\varphi_P(s_P) = t_P.$$

Jedes s_P wird repräsentiert durch ein

$$r_P \in \mathcal{F}(U_P),$$

wobei U_P eine offene Umgebung von P bezeichnet. Dabei hat $\varphi(r_P)$ die Eigenschaft, dass es im Halm $\mathcal{G}_P$ mit t_P übereinstimmt. Daher gibt es eine eventuell kleinere offene Umgebung $P \in V_P \subseteq U_P$, auf der $\varphi(r_P)|_{V_P} = t|_{V_P}$ gilt. Wir ersetzen U_P durch V_P und haben eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{P \in X} V_P$$

und Schnitte

$$r_P \in \mathcal{F}(V_P),$$

die jeweils auf $t|_{V_P}$ abbilden. Wir betrachten zwei Schnitte r_P und r_Q auf dem Durchschnitt $V_P \cap V_Q$. Für einen Punkt

$$Z \in V_P \cap V_Q$$

ist $(r_P)_Z = (r_Q)_Z$, da beide unter der bijektiven Abbildung φ_Z auf t_Z abgebildet werden. Nach Lemma 11.4 folgt

$$r_P|_{V_P \cap V_Q} = r_Q|_{V_P \cap V_Q}.$$

Somit gibt es aufgrund der zweiten Garbeneigenschaft ein globales Element $r \in \mathcal{F}(X)$ mit

$$r|_{V_P} = r_P$$

für alle P. Wegen der ersten Garbeneigenschaft ist $\varphi(r) = t$, da dies auf den V_P gilt. □

Diese Aussage gilt weder für Prägarben (man betrachte beispielsweise eine Vergarbung einer Prägarbe) noch ohne die Voraussetzung, dass es überhaupt einen Homomorphismus gibt. Zwei Garben, die halmweise zueinander isomorph sind, müssen nicht isomorph sein. Wichtige Beispiele dazu sind lokal freie Garben, die lokal isomorph zu freien Garben sind, aber im Allgemeinen selbst nicht frei sind.

Es ist auf den ersten Blick sicher überraschend und vielleicht auch enttäuschend, dass sich bei einem Garbenmorphismus die Surjektivität auf der Ebene der offenen Mengen und auf der Halmebene unterscheiden. Was aber zunächst wie ein Defizit aussieht, ist in Wirklichkeit eine Stärke der Garbentheorie, da sich in der globalen Nichtsurjektivität von halmweise surjektiven Morphismen topologische Eigenschaften des zugrunde liegenden Raumes widerspiegeln.

Definition 11.7. Ein Garbenmorphismus $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen Garben auf einem topologischer Raum X heißt *surjektiv*, wenn für jeden Punkt $P \in X$ die Halmabbildung

$$\varphi_P\colon \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P$$

surjektiv ist.

Diese Eigenschaft ist deutlich schwächer als die Eigenschaft, dass auf jeder offenen Menge eine surjektive Abbildung vorliegt.

Beispiel 11.8. Wir betrachten den stetigen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1,\, t \longmapsto (\cos t,\, \sin t)\,,$$

also die periodische trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises. Dies induziert einen Garbenmorphismus

$$C^0(-,\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(-,S^1)$$

auf jedem topologischen Raum X. Einer stetigen reellwertigen Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ auf $U \subseteq X$ wird die Hintereinanderschaltung

$$\varphi \circ f\colon U \longrightarrow S^1$$

zugeordnet. Dieser Garbenmorphismus ist surjektiv, da φ lokal umkehrbar ist. Er ist aber im Allgemeinen nicht auf jeder offenen Teilmenge surjektiv. Wenn beispielsweise $X = S^1$ ist, so besitzt die Identität auf S^1 keine stetige Liftung nach $\mathbb{R}$

Definition 11.9. Es sei X ein topologischer Raum und seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben von kommutativen Gruppen auf X. Ein Garbenmorphismus $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt *Homomorphismus von Garben kommutativer Gruppen*, wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Abbildung

$$\varphi_U\colon \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Beispiel 11.10. Zu einem stetigen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon F \to G$ zwischen topologischen Gruppen F und G wird auf jedem topologischen Raum X ein Homomorphismus von Garben von Gruppen festgelegt, indem auf jeder offenen Teilmenge U die Zuordnung

$$C^0(U,F) \longrightarrow C^0(U,G),\ f \longmapsto \varphi \circ f,$$

betrachtet wird.

Definition 11.11. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Dann nennt man die durch

$$(\operatorname{kern} \varphi)(U) := \operatorname{kern} \varphi_U$$

definierte Untergarbe von $\mathcal{F}$ die *Kerngarbe* zu φ.

Es handelt sich dabei genauer um eine Untergarbe von kommutativen Gruppen, d.h. für jede offene Teilmenge liegt eine Untergruppe von $\mathcal{F}$ vor, siehe Aufgabe 11.12.

Quotientengarbe

Zu einer Untergarbe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ von Garben von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X hätte man gerne eine Quotientengarbe $\mathcal{G}/\mathcal{F}$, wie es zu einer Untergruppe einer kommutativen Gruppe eine wohldefinierte Restklassengruppe gibt. Die naheliegende Idee, zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq X$ die Restklassengruppe $\mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ zu betrachten, stößt auf dass Problem, dass diese Konstruktion zwar eine Prägarbe, aber keine Garbe ist. Dieses Problem bekommt man durch das Konzept der Vergarbung in den Griff. Die Vergarbung ist ein Konstruktionsprozess, der jeder Prägarbe eine Garbe zuordnet, wobei die Halme in jedem Punkt übereinstimmen. Diese Eigenschaft ist wichtiger als die genaue Konstruktion der Vergarbung.

Definition 11.12. Zu einer Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen und einer Untergarbe von Gruppen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ nennt man die Vergarbung der Prägarbe $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ die *Quotientengarbe* zu $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$

Die Quotientengarbe wird mit $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ bezeichnet. Da vergarbt wird, muss nicht unbedingt $(\mathcal{G}/\mathcal{F})(U) = \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ gelten. Es gilt aber $(\mathcal{G}/\mathcal{F})_P = \mathcal{G}_P/\mathcal{F}_P$ für jeden Punkt $P \in X$, siehe Aufgabe 11.17.

Lemma 11.13. *Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ einer Untergarbe von Gruppen mit der Quotientengarbe $\mathcal{G}/\mathcal{F}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) *Jedes Element $s \in \Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$ wird repräsentiert durch eine Familie (U_i, g_i), $i \in I$, wobei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung ist und $g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{G})$ Schnitte sind mit*
$$g_i|_{U_i \cap U_j} - g_j|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{F}),$$
und jede solche Familie liegt ein Element in $\Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$ fest.

(2) *Zwei solche Familien (U_i, g_i) (U_i, h_i) (also zur gleichen Überdeckung) definieren genau dann das gleiche Element in $\Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$, wenn*
$$g_i - h_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F})$$
für alle i ist.

(3) *Zwei Familien (U_i, g_i) und (V_j, h_j) definieren genau dann das gleiche Element in $\Gamma(X, \mathcal{G}/\mathcal{F})$, wenn auf einer (jeder) gemeinsamen Verfeinerung der beiden Überdeckungen die Differenzen zu $\mathcal{F}$ gehören.*

Beweis. Siehe Aufgabe 11.18. □

Beispiel 11.14. Es sei X eine riemannsche Fläche. Wir versehen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie und betrachten dazu auf X die Garbe der stetigen Abbildungen nach $\mathbb{Z}$ im Sinne von Beispiel 11.3. Es handelt sich um eine Garbe von lokal-konstanten Abbildungen. Über den Gruppenhomomorphismus
$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C},\ n \longmapsto 2\pi \mathrm{i} n,$$
können wir diese Garbe als eine Untergarbe der Garbe der holomorphen Funktionen auf X auffassen, da ja stetige lokal-konstante Funktionen insbesondere holomorph sind. In diesem Fall besitzt die Quotientengarbe $\mathcal{O}_X/2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$ eine einfachere Beschreibung, als die Definition der Quotientengarbe als Vergarbung einer Prägarbe vermuten lässt. Die Quotientengarbe ist nämlich die Garbe der holomorphen Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Diese Garbe nennt man die Garbe der holomorphen Einheiten auf X und bezeichnet sie mit $\mathcal{O}_X^\times$. Die Exponentialfunktion ist eine holomorphe surjektive Funktion
$$\exp\colon\ \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times,$$
diese definiert im Sinne von Beispiel 11.10 einen Garbenhomomorphismus
$$\exp\colon\ \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times,$$

wobei eine holomorphe Funktion f auf einer offenen Menge $U \subseteq X$ auf $\exp \circ f$ abgebildet wird. Der Kern dieses Garbenhomomorphismus ergibt die Garbe der lokal-konstanten Funktionen mit Werten in $2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z}$, da genau diese Zahlen unter der Exponentialfunktion auf 1 abbilden. Wir behaupten, dass der durch die Exponentialabbildung gegebene Garbenhomomorphismus surjektiv ist. Dies ist eine lokale Eigenschaft, die wir für jeden Punkt $P \in X$ nachweisen müssen. Sei $P \in U$ eine offene Umgebung und sei

$$h \colon U \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

eine holomorphe Funktion. Zu $h(P)$ gibt es, da die komplexe Exponentialfunktion nach Beispiel 6.3 eine Überlagerung ist, auf einer offenen Umgebung $h(P) \in V \subseteq \mathbb{C}^\times$ einen holomorphen Schnitt (einen lokalen Logarithmus)

$$s \colon V \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $\exp(s(z)) = z$ für $z \in V$. Auf $h^{-1}(V)$ ist somit $s \circ h$ eine holomorphe Funktion, die unter der Exponentialfunktion auf h abbildet.

Die Exponentialfunktion ist nicht global surjektiv. Wenn man beispielsweise $X = \mathbb{C}^\times$ setzt, so ist die globale Auswertung der Exponentialabbildung nicht surjektiv, da die Identität nicht im Bild liegt.

In der Theorie der riemannschen Flächen spielen neben der Strukturgarbe der holomorphen Funktionen die Garbe der invertierbaren holomorphen Funktionen (Einheitengarbe), die Garbe der lokal-konstanten Funktionen (mit Werten in $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), die Garbe der reell-partiell differenzierbaren Funktionen, die Garbe der differenzierbaren Differentialformen, die Garbe der holomorphen Differentialformen, die Garbe der meromorphen Funktionen, die Garbe der Hauptteile, die Garbe der meromorphen Diffeentialformen, die Garbe der Divisoren, invertierbare Garben eine wichtige Rolle. Garben sind miteinander durch kurze exakte Sequenzen verbunden und die Beziehung zwischen lokalen und globalen Aspekten wird systematisch durch die Kohomologie der Garbe erfasst.

Abbildungsverzeichnis