Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 12

Exaktheit

Es seien F, G, H kommutative Gruppen und seien

$$F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H$$

Gruppenhomomorphismen. Man sagt, dass ein Komplex vorliegt, wenn

$$\operatorname{bild} \alpha \subseteq \operatorname{kern} \beta$$

gilt, was zu $\beta \circ \alpha = 0$ äquivalent ist. Man sagt, dass der Komplex exakt ist, wenn

$$\operatorname{bild} \alpha = \operatorname{kern} \beta$$

gilt. Dieses Konzept überträgt man auf Garben von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X, indem man die Bedingungen halmweise interpretiert (siehe Lemma 10.16). Man sagt also, dass die Garbenhomomorphismen

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

einen Komplex bilden, wenn für jeden Punkt $P \in X$ die Halmabbildungen

$$\mathcal{F}_P \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}_P \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}_P$$

einen Komplex von Gruppen bilden, und man nennt den Garbenkomplex exakt, wenn der Halmkomplex für jeden Punkt exakt ist.

Definition 12.1. Ein exakter Komplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

von Garben von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X heißt *kurze exakte Sequenz*.

Hierbei ist insbesondere die vordere Abbildung injektiv und die hintere Abbildung (Garben)-surjektiv. Es ist $\mathcal{F}$ der Kern des Garbenhomomorphismus $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ und $\mathcal{H}$ ist die Quotientengarbe zur Untergarbe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

Lemma 12.2. *Es sei*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von kommutativen topologischen Gruppen (mit stetigen Gruppenhomomorphismen). Es trage F die induzierte Topologie von G und die Surjektion $p\colon G \rightarrow H$ habe die Eigenschaft, dass es zu jedem Element $h \in H$ eine offene Umgebung $h \in W \subseteq H$ und einen stetigen Schnitt *zu p gibt. Dann ist für jeden topologischen Raum X die zugehörige Sequenz der Garben der stetigen Abbildungen in diese Gruppen, also*

$$0 \longrightarrow C^0(-,F) \longrightarrow C^0(-,G) \longrightarrow C^0(-,H) \longrightarrow 0\,,$$

ebenfalls exakt.

Beweis. Siehe Aufgabe 12.6. □

Beispiel 12.3. Wir betrachten die kurze exakte *Exponentialsequenz*

$$0 \longrightarrow 2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^\times \longrightarrow 0$$

von topologischen Gruppen. Die Exaktheit in der Mitte beruht auf Satz 21.5 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) (2), die Homomorphieeigenschaft beruht auf der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und die komplexe Exponentialfunktion bildet nach Satz 21.6 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) surjektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab (sie ist eine Überlagerung, siehe Beispiel 6.3). Da es lokal einen Logarithmus gibt, sind die Voraussetzungen von Lemma 12.2 erfüllt. Somit gibt es zu jedem topologischen Raum X eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow C^0(-,\mathbb{Z}) \longrightarrow C^0(-,\mathbb{C}) \longrightarrow C^0(-,\mathbb{C}^\times) \longrightarrow 0\,,$$

die die (stetige komplexe) *Exponentialsequenz* heißt. Links steht die lokal konstante Garbe mit Werten in $\mathbb{Z}$, in der Mitte die Garbe der komplexwertigen stetigen Funktionen und rechts die Garbe der nullstellenfreien komplexwertigen stetigen Funktionen. Wenn man $X = \mathbb{C}^\times$ setzt, so ist die globale Auswertung der hinteren Abbildung nicht surjektiv, da die Identität nicht im Bild liegt.

Für die holomorphe Version der vorstehenden Aussage siehe Beispiel 11.14.

Beispiel 12.4. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ fixiert, wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow E_n \longrightarrow \mathbb{C}^\times \xrightarrow{z^n} \mathbb{C}^\times \longrightarrow 1\,,$$

wobei rechts die n-te komplexe Potenzierung steht und E_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln bezeichnet, die zur zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(n)$ isomorph ist. Es liegt die Situation aus Lemma 12.2 vor, d.h. auf jedem topologischen Raum X erhält man eine kurze exakte Garbensequenz

$$1 \longrightarrow C^0(-,E_n) \longrightarrow C^0(-,\mathbb{C}^\times) \xrightarrow{z^n} C^0(-,\mathbb{C}^\times) \longrightarrow 1\,.$$

Da ferner das Potenzieren holomorph ist, erhält man auf einer riemannschen Fläche eine kurze exakte Garbensequenz

$$1 \longrightarrow C^0(-,E_n) \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \xrightarrow{z^n} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 1\,,$$

wobei vorne die lokal konstanten stetigen oder holomorphen Funktionen mit Werten in $E_n \cong \mathbb{Z}/(n)$ steht.

Lemma 12.5. *Es sei X ein topologischer Raum und sei*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{G} \xrightarrow{d'} \mathcal{H}$$

ein Komplex von Garbenhomomorphismen von Garben von kommutativen Gruppen auf X. Dann ist auch

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$$

ein Komplex.

Beweis. Die Voraussetzung bedeutet einfach, dass $d' \circ d$ die Nullabbildung ist. Dann ist insbesondere die globale Auswertung die Nullabbildung. $\square$

Lemma 12.6. *Es sei X ein topologischer Raum. Es sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{G} \xrightarrow{d'} \mathcal{H}$$

ein exakter Komplex von Garbenhomomorphismen von Garben von kommutativen Gruppen auf X. Dann ist auch der Komplex

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$$

exakt.

Beweis. Dass ein Komplex vorliegt ist klar nach Lemma 12.5. Die Exaktheit bedeutet, dass für jeden Punkt $P \in X$ der Komplex

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_P \longrightarrow \mathcal{G}_P \longrightarrow \mathcal{H}_P$$

der Halme exakt ist. Sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ und $d(s) = 0$ in $\Gamma(X, \mathcal{G})$. Dann ist $d(s)_P = 0$ in jedem Punkt und somit ist $s_P = 0$ für jeden Punkt. Also ist $s = 0$ nach Lemma 11.4 und die linke Abbildung ist injektiv. Sei nun $t \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ mit $d'(t) = 0$ in $\Gamma(X, \mathcal{H})$. Die Exaktheit in den Halmen bedeutet, dass für jeden Punkt P der Keim t_P zu $\mathcal{F}_P$ gehört. Daraus folgt mit Aufgabe 11.10, dass t selbst zu $\mathcal{F}$ gehört. $\square$

Auch bei einer kurzen exakten Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

ist im zugehörigen globalen Komplex

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$$

die hintere Abbildung im Allgemeinen nicht surjektiv. Dieses Phänomen wird im Rahmen der Kohomologie verstanden und produktiv verwertet.

Der Ausbreitungsraum

Es sei X eine riemannsche Fläche. Die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ den Ring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ der auf U definierten holomorphen Funktionen zuordnet, ist eine Garbe von kommutativen Ringen. Die entsprechenden Eigenschaften wurden in Lemma 3.9 nachgewiesen.

Die Halme der Garbe der holomorphen Funktionen $\mathcal{O}_{X,x}$ sind für alle Punkte isomorph, und zwar isomorph zum Ring des Halmes der holomorphen Funktionen $\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$. Dies ist der Ring der konvergenten Potenzreihen in einer komplexen Variablen, wobei sich Konvergenz auf einen positiven Konvergenzradius bezieht, der von der Potenzreihe abhängt, siehe Lemma 10.12. Ein Element eines solchen Halmes nennt man einen *holomorphen Funktionskeim*. Wir wollen in den folgenden Vorlesungen verstehen, inwiefern solche holomorphen Funktionskeime in natürlicher Weise miteinander in Beziehung stehen. Dazu ist der sogenannte Ausbreitungsraum ein wichtiges Hilfsmittel.

Definition 12.7. Es sei $\mathcal{G}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X. Unter dem *Ausbreitungsraum* zu $\mathcal{G}$ versteht man die Menge

$$\mathcal{G}^{\text{et}} := \biguplus_{x \in X} \mathcal{G}_x$$

zusammen mit der Projektion

$$p\colon \mathcal{G}^{\text{et}} \longrightarrow X,$$

die einem jeden Keim (x, t) seinen Basispunkt x zuordnet, versehen mit der Topologie, die durch die Basis

$$(U, s) = \{(x, s_x) \mid x \in U\}$$

zu offenen Mengen $U \subseteq X$ und Schnitten $s \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ definiert wird.

Statt Ausbreitungsraum sagt man auch etaler Raum. Ein Element in diesem Ausbreitungsraum schreibt man als (x, t), wobei $x \in X$ und $t \in \mathcal{G}_x$ ein Keim der Garbe im Punkt x ist. Die Zugehörigkeit $(x, t) \in (U, s)$ bedeutet, dass $x \in U$ und der Schnitt s auf den Keim t einschränkt.

Beispiel 12.8. Zur Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ besteht der Ausbreitungsraum aus allen Tupeln (a, g), wobei $a \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und g eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt a ist. Zu einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und einer holomorphen Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ besteht die offene Menge (U, f) des Ausbreitungsraumes aus allen Tupeln (a, f_a) zu Punkten $a \in U$ und wobei f_a die Potenzreihenentwicklung von f in a ist.

Lemma 12.9. *Der Ausbreitungsraum $\mathcal{G}^{\text{et}}$ zu einer Prägarbe $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X ist ein topologischer Raum und die Projektion*

$$p\colon \mathcal{G}^{\text{et}} \longrightarrow X$$

ist ein lokaler Homöomorphismus.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass in der Tat durch die Mengen

$$(U,s) \,=\, \{(x,s_x) \mid x \in U\}$$

eine Basis der Topologie vorliegt. Dazu ist zu zeigen, dass der Durchschnitt von zwei solchen Mengen eine Vereinigung von solchen Mengen ist. Sei also $(x,r) \in (U,s) \cap (V,t)$ mit $r \in \mathcal{G}_x$ und $s \in \mathcal{G}(U)$ bzw. $t \in \mathcal{G}(V)$. Hierbei gilt $x \in U \cap V$. Da s und t beide auf r einschränken, gibt es eine offene Umgebung $x \in W \subseteq U \cap V$, auf der s und t gleich werden. Deshalb gilt

$$(x,r) \in (W,s) \subseteq (U,s) \cap (V,t).$$

Die Projektion p ist stetig, da das Urbild von $U \subseteq X$ offen gleich

$$\bigcup_{s \in \Gamma(U,\mathcal{G})} (U,s)$$

ist. Sei $(x,r) \in \mathcal{G}^{\text{et}}$ ein Punkt des Ausbreitungsraumes. Der Keim wird repräsentiert durch einen Schnitt $s \in \Gamma(U,\mathcal{G})$ und somit gilt $(x,r) \in (U,s)$. Wir behaupten, dass $p\colon (U,s) \to U$ ein Homöomorphismus ist. Die Surjektivität ergibt sich aus $(x,s_x) \mapsto x$. Wenn (x,r) und (x',r') zu (U,s) gehören und beide auf den gleichen Punkt unter p abbilden, so ist zunächst $x = x'$ und dann auch $r = r'$, da ja beide Keime die Einschränkung von s sind. Die Stetigkeit der Umkehrabbildung ergibt sich daraus, dass die offenen Teilmengen von (U,s) die Form $(U', s|_{U'})$ mit offenen Teilmengen $U' \subseteq U$ besitzen und deren Bild gleich U' ist. □

Lemma 12.10. *Es sei $p\colon \mathcal{G}^{\text{et}} \to X$ der Ausbreitungsraum zu einer Garbe $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum X. Dann stimmt zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ die Menge der stetigen Schnitte von U in $p^{-1}(U)$ in natürlicher Weise mit $\Gamma(U,\mathcal{G})$ überein.*

Beweis. Wir betrachten die natürliche Abbildung

$$\Gamma(U,\mathcal{G}) \longrightarrow \big\{h : U \to p^{-1}(U) \text{ stetig} \mid p \circ h = \mathrm{Id}_U\big\},$$

die einem $s \in \Gamma(U,\mathcal{G})$ die Abbildung

$$h\colon U \longrightarrow p^{-1}(U),\, x \longmapsto (x,s_x),$$

zuordnet. Die Abbildung h ist stetig, es liegt eine Homöomorphie zu (U,s) vor. Die Injektivität der Gesamtabbildung folgt aus Lemma 11.4. Zum Nachweis der Surjektivität sei ein stetiges h gegeben. Es wird also jedem Punkt $x \in U$ ein $h(x) \in \mathcal{G}_x$ in stetiger Weise zugeordnet. Sei $x \in U$ und es sei $x \in V \subseteq U$ eine offene Umgebung, auf der $h(x)$ durch den Schnitt $s \in \Gamma(V,\mathcal{G})$ repräsentiert werde. Dann ist (V,s) eine offene Umgebung von $(x,h(x))$ in $\mathcal{G}^{\text{et}}$. Wegen der Stetigkeit von h ist

$$U_x \,:=\, h^{-1}(V,s) \,=\, \{y \in U \mid h(y) \in V,\, s_y = h(y)\}$$

offen in X. D.h. dass auf der offenen Umgebung U_x von x die Abbildung durch einen Schnitt der Garbe über U_x gegeben ist. Die Abbildung h wird also lokal um jeden Punkt durch einen Garbenschnitt repräsentiert und diese sind zueinander verträglich, da sie ja punktweise durch h gegeben sind. Aufgrund der Definition einer Garbe rühren diese lokalen Schnitte von einem globalen Garbenschnitt über U her. $\square$

Wenn man in der vorstehenden Situation mit einer Prägarbe startet, so erhält man über die stetigen Schnitte im Ausbreitungsraum eine zugehörige Garbe, die sogenannte Vergarbung der Prägarbe.

LEMMA 12.11. *Der Ausbreitungsraum zur Garbe der holomorphen Funktionen auf einer riemannschen Fläche ist ein Hausdorffraum.*

Beweis. Es sei X die riemannsche Fläche und $p\colon E \to X$ der Ausbreitungsraum zur Strukturgarbe. Seien $(x,f),(y,g) \in E$ verschiedene Punkte. Bei $x \neq y$ kann man direkt die Urbilder von trennenden offenen Mengen von X nehmen. Sei also $x = y$ und seien also $f,g \in \mathcal{O}_{X,x}$ verschiedene Keime. Diese seien repräsentiert durch verschiedene holomorphe Funktionen

$$f,g\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$$

auf einer offenen zusammenhängenden Umgebung von x. Dann sind nach dem Identitätssatz in der Form Lemma 3.9 (3) auch die Keime von f und g in jedem Punkt $y \in U$ verschieden. Daher sind (U,f) und (U,g) trennende offene Umgebungen. $\square$

Auf dem Ausbreitungsraum E zu einer riemannschen Fläche X gibt es eine natürliche global definierte Funktion

$$E \longrightarrow \mathbb{C},$$

die einem holomorphen Funktionskeim (x,f) den wohldefinierten Wert $f(x)$ zuordnet.

SATZ 12.12. *Der Ausbreitungsraum zur Garbe der holomorphen Funktionen auf einer riemannschen Fläche ist in eindeutiger Weise eine riemannsche Fläche derart, dass $p\colon E \to X$ eine holomorphe Abbildung und ein lokaler Homöomorphismus ist. Die Auswertungsabbildung*

$$E \longrightarrow \mathbb{C},\ (x,f) \longmapsto f(x),$$

ist eine holomorphe Funktion auf E.

Beweis. Ein lokaler Homöomorphismus liegt nach Lemma 12.9 vor, deshalb gibt es eine eindeutige komplexe Struktur auf E derart, dass p holomorph wird. Die Hausdorffeigenschaft ist wegen Lemma 12.11 erfüllt. Die Auswertung entspricht auf der zu U homöomorphen offenen Menge (U,f) der holomorphen Funktion f und ist damit selbst holomorph. $\square$

Abbildungsverzeichnis