

Mathematik für Anwender I**Arbeitsblatt 17****Übungsaufgaben**

AUFGABE 17.1. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 5}{x - 2}$$

im Entwicklungspunkt 0.

AUFGABE 17.2. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin x \cos x,$$

im Nullpunkt.

AUFGABE 17.3. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

im Entwicklungspunkt $a = 3$.

AUFGABE 17.4. Bestimme das Polynom

$$f(z) = z^3 + 3z^2 - 7z - 4.$$

in der neuen Variablen $z - 2$ (also das unentwickelte Polynom) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

- direkt durch Einsetzen,
- über das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt 2.

AUFGABE 17.5.*

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

im Reellen.

- Bestimme den Definitionsbereich von f .
- Skizziere f für x zwischen -2π und 2π .
- Bestimme die ersten drei Ableitungen von f .
- Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 3 von f im Punkt $\frac{\pi}{2}$.

AUFGABE 17.6. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ im Punkt $a = 3$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 3 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

AUFGABE 17.7.*

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

AUFGABE 17.8.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

AUFGABE 17.9. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Vergleiche die polynomiale Interpolation zu $n + 1$ gegebenen Punkten und die Taylor-Polynome vom Grad n zu einem Punkt.

AUFGABE 17.10. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine im Punkt a n -fach differenzierbare Funktion. Zeige, dass das n -te Taylor-Polynom zu f im Punkt a , geschrieben in der verschobenen Variablen $x - a$, gleich dem n -ten Taylor-Polynom der Funktion $g(x) = f(x + a)$ im Nullpunkt (geschrieben in der Variablen x) ist.

AUFGABE 17.11. Man mache sich klar, dass man zu einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ das n -te Taylor-Polynom von f im Entwicklungspunkt b nicht aus dem n -ten Taylor-Polynom in einem Entwicklungspunkt a bestimmen kann.

AUFGABE 17.12. Es seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Polynome n -ten Grades und es seien $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ Punkte und $n_1, \dots, n_k \geq 1$ natürliche Zahlen mit

$$\sum_{j=1}^k n_j > n.$$

Die Ableitungen von f und g in den Punkten a_j sollen bis einschließlich zur $(n_j - 1)$ -ten Ableitung übereinstimmen. Zeige $f = g$.

Man mache sich zuerst die Aussage bei $k = 1$ und $n_1 = n + 1$ und bei $k = n + 1$ und $n_j = 1$ für alle j klar.

AUFGABE 17.13. Es sei $f(x) := \frac{x^2 - x + 5}{x^2 + 3}$. Bestimme ein Polynom h vom Grad ≤ 3 , das in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = 1$ die gleichen linearen Approximationen wie f besitzt.

AUFGABE 17.14.*

Es sei $f(x) = \sin x$. Bestimme Polynome P, Q, R vom Grad ≤ 3 , die jeweils folgende Bedingungen erfüllen.

- (a) P stimmt mit f an den Stellen $-\pi, 0, \pi$ überein.
- (b) Q stimmt mit f in 0 und in π bis zur ersten Ableitung überein.
- (c) R stimmt mit f in $\pi/2$ bis zur dritten Ableitung überein.

AUFGABE 17.15.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

AUFGABE 17.16. Es sei $p \in \mathbb{R}[Y]$ ein Polynom und

$$g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto g(x) = p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form

$$g'(x) = q\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom q ist.

AUFGABE 17.17. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n -te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+, x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$$

besitzt.

AUFGABE 17.18. Bestimme das Taylor-Polynom der dritten Ordnung zur Funktion $\frac{1}{x^2+1}$ im Nullpunkt mit dem in Bemerkung 17.6 beschriebenen Potenzreihenansatz.

AUFGABE 17.19. Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung der Umkehrfunktion des Sinus im Punkt 0 mit dem in Bemerkung 17.11 beschriebenen Potenzreihenansatz.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 17.20. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome im Entwicklungspunkt 0 bis zum Grad 4 der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin(\cos x) + x^3 \exp(x^2).$$

AUFGABE 17.21. (4 Punkte)

Es sei $f(x) := \frac{x^2+2x+1}{x^2+5}$. Bestimme ein Polynom h vom Grad ≤ 3 , das in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = -1$ die gleichen linearen Approximationen wie f besitzt.

AUFGABE 17.22. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = (\sin x)(\cos x),$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

AUFGABE 17.23. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \sin^3 x - \frac{1}{4} \sin x,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

AUFGABE 17.24. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung des natürlichen Logarithmus im Punkt 1 mit dem in Bemerkung 17.11 beschriebenen Potenzreihenansatz aus der Potenzreihe der Exponentialfunktion.

AUFGABE 17.25. (6 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei A_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n -Eckes. Zeige $A_n \leq A_{n+1}$.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5