

## Mathematik für Anwender II

### Vorlesung 60

#### Die Transformationsformel für Integrale

Wir kommen zur *Transformationsformel für Integrale*, wofür wir noch eine Bezeichnung einführen.

DEFINITION 60.1. Es sei  $G \subseteq V$  eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei

$$\varphi: G \longrightarrow V$$

eine total differenzierbare Abbildung. Dann nennt man die Determinante

$$\det(D\varphi)_P$$

die *Jacobi-Determinante* (oder *Fundamental-Determinante*) von  $\varphi$  in  $P \in G$ .

Wir betrachten die Jacobi-Determinante als eine auf  $G$  definierte reellwertige Funktion  $P \mapsto J(\varphi)(P) = J(P) := \det(D\varphi)_P$ . Bei einer stetig partiell differenzierbaren Abbildung ist sie stetig, da dann die Einträge in der Jacobi-Matrix stetige Funktionen sind. Bei einer linearen Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

stimmt das totale Differential in jedem Punkt mit  $\varphi$  selbst überein, und daher ist die Jacobi-Determinante konstant. In Satz 58.8 haben wir gesehen, dass die Determinante der linearen Abbildung das Verhältnis zwischen dem Volumen von Bild und Urbild festlegt. Eine wesentliche Verallgemeinerung von dieser Beziehung wird durch die beiden folgenden Aussagen gegeben.

SATZ 60.2. *Es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

*ein  $C^1$ -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante*

$$(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$$

*für  $x \in G$ . Es sei  $T \subseteq H$  eine (in  $\mathbb{R}^n$ ) kompakte Teilmenge und es sei*

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

*eine stetige Funktion. Dann ist  $\varphi^{-1}(T)$  ebenfalls kompakt und es gilt*

$$\int_T f \, d\lambda^n = \int_{\varphi^{-1}(T)} (f \circ \varphi) |J(\varphi)| \, d\lambda^n.$$

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Häufig startet man auch mit einer kompakten Teilmenge  $S \subseteq G$  und setzt  $T = \varphi(S)$ . Es kann auch auf  $S$  eine stetige Funktion  $\tilde{f}$  definiert sein, dann muss man  $f = \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$  setzen. Da ein Diffeomorphismus vorausgesetzt wird, ist die Aussage dieses Satzes grundsätzlich symmetrisch.

**KOROLLAR 60.3.** *Es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

*ein  $C^1$ -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante*

$$(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$$

*für  $x \in G$ . Es sei  $T \subseteq H$  eine (in  $\mathbb{R}^n$ ) kompakte Teilmenge. Dann gilt*

$$\lambda^n(T) = \int_{\varphi^{-1}(T)} |J(\varphi)| d\lambda^n.$$

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 60.2, angewendet auf die konstante Funktion  $f = 1$ . □

## Beispiele zur Transformationsformel

**BEISPIEL 60.4.** Wir betrachten das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto z^2.$$

In reellen Koordinaten ist dies die differenzierbare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy).$$

Diese Abbildung ist wegen  $\varphi(x, y) = \varphi(-x, -y)$  nicht injektiv. Allerdings ist die Einschränkung auf die positive Halbebene  $G = \{(x, y) \mid x > 0\}$  injektiv, und das Bild davon ist  $H = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$  (also die Ebene ohne die negative reelle Achse). Die Jacobi-Matrix von  $\varphi$  ist

$$\text{Jak}(\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x, y) = 4x^2 + 4y^2.$$

Wir möchten den Flächeninhalt des Bildes  $T = \varphi(S)$  des Einheitsquadrates  $S = [0, 1] \times [0, 1]$  unter dieser Abbildung berechnen (die eine Seite des Einheitsquadrates gehört nicht zu  $G$ , dieser Rand ist aber eine Nullmenge nach Lemma 58.6 und daher für den Flächeninhalt und die Integration unerheblich). Aufgrund von Korollar 60.3 ist dann

$$\begin{aligned} \lambda^2(T) &= \int_S (4x^2 + 4y^2) d\lambda^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (4x^2 + 4y^2) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left( \frac{4}{3}x^3 + 4xy^2 \right) \Big|_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \left( \frac{4}{3} + 4y^2 \right) dy \\
&= \left( \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}y^3 \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

KOROLLAR 60.5. *Es sei*

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

die Polarkoordinatenauswertung und es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen, auf denen  $\varphi$  einen Diffeomorphismus induziert. Es sei  $T \subseteq H$  eine (in  $\mathbb{R}^2$ ) kompakte Teilmenge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_T f(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_{\varphi^{-1}(T)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r d\lambda^2(r, \theta).$$

Dies gilt auch dann, wenn außerhalb von Nullmengen ein Diffeomorphismus vorliegt. Insbesondere gilt bei stetigem  $f$  die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r d\theta dr.$$

*Beweis.* Dies folgt wegen

$$\det(D\varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

direkt aus Satz 60.2. □

LEMMA 60.6. *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

*Beweis.* Durch eine einfache Substitution ist die Aussage äquivalent zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

Nennen wir dieses Integral  $I$ . Nach einer Variante des Satzes von Fubini für uneigentliche Integrale ist

$$I^2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} d\lambda^2.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten  $x = r \cos \theta$  und  $y = r \sin \theta$  ist dieses Integral nach Korollar 60.5 und nach Fubini gleich

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi] \times \mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \, d\lambda^2(r, \theta) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{[0,2\pi]} 1 \, d\lambda^1(\theta) \right) \left( \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \, d\lambda^1(r) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \, d\lambda^1(r) \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \, dr \\
&= -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Damit ist auch  $I = 1$ . □

**KOROLLAR 60.7.** Für die Zylinderkoordinatenauswertung

$$\Psi: G = \mathbb{R}_+ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z),$$

eine kompakte Teilmenge  $T \subseteq \Psi(G)$  und eine stetige Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt die Beziehung

$$\int_T f \, d\lambda^3 = \int_{\Psi^{-1}(T)} (f \circ \Psi) \cdot r \, d\lambda^3.$$

Dies kann man auch als

$$\int \int \int_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int \int_{\Psi^{-1}(T)} \tilde{f}(r, \theta, z) \cdot r \, dr \, d\theta \, dz$$

schreiben, wobei  $\tilde{f} = f \circ \Psi$  bezeichnet.

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 60.2, da die Jacobi-Determinante der Zylinderkoordinatenauswertung gleich  $r$  ist. □

**KOROLLAR 60.8.** Für die Kugelkoordinatenauswertung

$$\Psi: G = \mathbb{R}_+ \times ]0, \pi[ \times ]0, 2\pi[ \longrightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \varphi) \longmapsto (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta),$$

eine kompakte Teilmenge  $T \subseteq \Psi(G)$  und eine stetige Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

gilt die Beziehung

$$\int_T f \, d\lambda^3 = \int_{\Psi^{-1}(T)} (f \circ \Psi) r^2 \sin \theta \, d\lambda^3.$$

Dies kann man auch als

$$\int \int \int_T f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int \int \int_{\Psi^{-1}(T)} \tilde{f}(r, \theta, \varphi) \cdot r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

schreiben, wobei  $\tilde{f} = f \circ \Psi$  bezeichnet.

*Beweis.* Nach Beispiel 53.7 ist die Jacobi-Determinante von  $\Psi$  im Punkt  $(r, \theta, \varphi)$  gleich  $r^2 \sin \theta$ , so dass die Aussage aus Satz 60.2 folgt.  $\square$



BEISPIEL 60.9. Es soll eine Straße in der Ebene der Breite  $2a$  asphaltiert werden. Dabei wird die Straße durch den Verlauf des Mittelstreifen vorgegeben, der durch die Kurve

$$[0, s] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \psi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

bestimmt ist. Dabei sei  $\psi$  zweimal stetig differenzierbar und bogenparametrisiert, d.h. es sei  $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$ , was bedeutet, dass die Mittelstreifenkurve mit normierter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Die Breite ist dabei senkrecht zum Mittelstreifen zu messen. Die zu asphaltierende Trasse wird dann durch die Abbildung

$$\varphi: [0, s] \times [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, r) \longmapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -g'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix},$$

parametrisiert. Wir nehmen an, dass diese Parametrisierung injektiv ist, was erfüllt ist, wenn die Mittelstreifenabbildung  $\psi$  injektiv ist und die Straße nicht zu breit werden soll.

Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist

$$(D\varphi)_{(t,r)} = \begin{pmatrix} f'(t) - rg''(t) & -g'(t) \\ g'(t) + rf''(t) & f'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$\begin{aligned} & f'(t)f'(t) + g'(t)g'(t) - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \\ = & 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)). \end{aligned}$$

Daher ist die Asphaltfläche nach der Transformationsformel gleich

$$\int_{[0,s] \times [-a,a]} |1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t))| d\lambda^2.$$

Wenn wir weiter annehmen, dass

$$|g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)| \leq \frac{1}{a}$$

ist (was bedeutet, dass die Straßenbreite nicht allzu groß ist), so ist dieses Integral nach Korollar 59.6 gleich

$$\begin{aligned} & \int_{[0,s] \times [-a,a]} 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \, d\lambda^2 \\ &= 2as - \left( \int_{-a}^a r \, dr \right) \left( \int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t) \, dt \right) \\ &= 2as - 0 \cdot \left( \int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t) \, dt \right) \\ &= 2as. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Asphaltfläche gleich der Mittelstreifenlänge mal der Straßenbreite ist.

### Volumentreue Abbildungen

In einer früheren Vorlesung haben wir über Isometrien gesprochen, also lineare Abbildungen zwischen euklidischen Vektorräumen, die das Skalarprodukt und insbesondere die Norm respektieren. Aufgrund von Aufgabe 60.8 ist die Determinante einer Isometrie auf dem  $\mathbb{R}^n$  gleich 1 oder  $-1$ , so dass sich gemäß Korollar 60.3 das Volumen von beliebigen kompakten Teilmengen  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  unter der Abbildung nicht ändert, d.h. es ist stets  $\lambda^n(\varphi(T)) = \lambda^n(T)$ .

DEFINITION 60.10. Es seien  $G$  und  $H$  offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  und es sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein  $C^1$ -Diffeomorphismus. Man sagt, dass  $\varphi$  *volumentreu* ist, wenn

$$|(J(\varphi))(x)| = |\det(D\varphi)_x| = 1$$

für alle  $x \in G$  ist.

Im ebenen Fall spricht man natürlich von *flächentreu*. Für einen volumentreuen Diffeomorphismus ist

$$\lambda^n(\varphi(T)) = \lambda^n(T)$$

nach Korollar 60.3.

BEISPIEL 60.11. Es sei  $h \in \mathbb{R}[y]$  ein beliebiges Polynom in der einen Variablen  $y$ . Dann ist die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + h(y), y)$$

ein flächentreuer Diffeomorphismus. Die Jacobi-Matrix von  $\varphi$  ist ja

$$\text{Jak}(\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & h'(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass die Jacobi-Determinante konstant gleich 1 ist. Wenn man die Rollen von  $x$  und  $y$  vertauscht und die Hintereinanderschaltung von solchen Abbildungen betrachtet, so erhält man flächentreue Abbildungen, denen man es nicht auf den ersten Blick ansieht. Beispielsweise ist zu  $\varphi(x, y) = (x + y^2, y)$  und  $\psi(x, y) = (x, y + x^3)$  die Hintereinanderschaltung

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(x, y) &= \psi(\varphi(x, y)) \\ &= \psi(x + y^2, y) \\ &= (x + y^2, y + (x + y^2)^3) \\ &= (x + y^2, y + x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6).\end{aligned}$$





## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Hesoun? rybník.JPG , Autor = Benutzer Juan de Vojník auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 5
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9