理論應用詳述

# 數學

# 受驗叢書

## 代數學

## 第壹編　方程式

武藤鐵吉講義

數理專修學院藏版

# 大綱

## 內活力

（一）數理思想ノ養成
（二）記憶力ノ發達
（三）推理力ノ發達
（四）自信力ノ發達
（五）統一的ノ思想

## 外活力

（六）能辯力ノ養成
（七）態度ノ沈着
（八）運算ノ迅速
（九）教授的練磨
（十）數理的文章ノ發達



學者ハ上十ケ條法ヲ能ク練習スベシ





| | |
|---|---|
| 法學士 | 高田貞三郎 |
| 法學士 | 石川磐吉 |
| 法學士 | 水野鎮三 |
| 工學士 | 關口壽 |
| 醫學士 | 中山敏樹 |
| 商業學士 | 大久保一男 |
| 陸軍大尉 | 三宅廉士 |
| 陸軍中尉 | 小野醇 |
| 陸軍中尉 | 谷喜一郎 |
| 陸軍中尉 | 川村彥曹 |
| 陸軍中尉 | 高木大次郎 |
| 陸軍中尉 | 黒川與一 |
| 陸軍少尉 | 遠藤春山 |
| 海軍大尉 | 井戸玖吾 |
| 機關大尉 | 森清太郎 |
| 機關少尉 | 渡邊正 |
| 東京モスリン會社技師長 | 柳澤健吉 |
| 大阪紡績會社天津支店長 | 西時雄 |
| 東京モスリン會社技手 | 光田幸次郎 |
| 遞信省技手 | 池田重吉 |

本書發行之趣意

## 序言

數學受驗叢書發行ノ本旨ハ現今施行ノ中學校數學學科程度中ニ於テ重要ニシテ其理解シ難キ部分ノ理論及ビ應用等ヲ詳論シ而シテ高等諸學校入學受驗者或ハ中學在學生等ノ諸子ノ參考ニ供セント欲スルニ在リ之レ本叢書發行ノ本旨ナリ

明治四十一年九月一日

武藤鐵吉識

數理專修學院



# 目　次

◎第一章……數學全般之基礎……(1)
◎第二章……公理及原則應用……(37)
◎第三章……方程式解方原則……(45)
◎第四章……一元一次方程式……(54)
◎第五章……二元一次方程式……(62)
◎第六章……三元一次方程式……(77)
◎第七章……一元二次方程式……(81)
◎第八章……二元二次方程式……(87)
◎第九章……代用二次方程式……(97)
◎第十章……無理方程式及分數方程式……(107)
◎第十一章……二次方程式解法餘論……(113)
◎第十二章……方程式問題解方……(141)

# 第一章

# 數學全般之基礎

數學全般ノ基礎ハ　第一　數學上ノ公理，第二演算上ノ原理，是レナリ。

## 第一　數學上之公理

吾人ノ知得セル所ノ者ニ種々アリト雖モ其知得ノ因由ニ至リテハ　二種ニ過キズ即チ

第一　自然力ニ依リテ知得セル者

第二　推理力ニ依リテ知得セル者

是レナリ　自然力ニ依リテ知得セシ者トハ　例ヘバ菓物ノ樹上ヨリ落下スルヲ見テ樹上ニアル菓物ハ何時シカ必ラス落下スヘキノ理ヲ知ルカ如キ是レナリ　其推理力ニ依リテ知得セシ者トハ　例ヘバ大力ト小力トアリテ互ニ相ヒ引クキハ小力ハ必ラズ大力ノ方ヘ引キ寄セラルヽノ理ヲ看テ總テ地面上ニアル物體ハ其ノ引力地球引力ヨリ小ナルノ理ヲ推知スルガ如キ是レナリ

今眼光ヲ放チテ宇内萬民知得ノ状況ヲ觀察セバ

第一ノ知得力　ニ於テハ其差等ナキモ

第二ノ知得力 ニ至テハ其差等亦甚シ

自然力ニ依リテ知得セル事項ヲ區分セハ又自ツカラ二種ノ區分アリ 第一 變化轉動セル者

第二 一定不易ナル者

是レナリ 吾人ハ第二ノ物件ニ命名シテ之レヲ公理ト云フ 而ノ其公理中數學ニ關スル公理ヲ數學公理ト名稱シ數學上一般ニ關スル公理ヲ一般公理，數學中某一科ニ關スル公理ヲ特別公理，ト稱ス

本章ニ論スル所ハ數學上一般ニ關係スル公理ナリ

## 一般 公理 十項

〔一〕 全量ハ其部分中ノ何レヨリモ大ナリ

例ヘハ日本國ト云ヘル全量ヲ畿內八道及ヒ臺灣ニ分チシニ其部分中ニ於テハ東山道ノ如キハ甚タ大ナリト雖モ全量タル日本國ヨリハ小ナルベシ

〔二〕 全量ハ其部分ノ和ニ等シ

例ヘハ日本國ヲ畿內八道等ニ分割セシ者ヲ和スル𬼂ハ即チ全量タル日本國ナリ

〔三〕 一量ニ等シキ量ハ又互ニ相等シ

例ヘハ 甲ノ國ノ人口ト 乙ノ國ノ人口トカ等シク

又 甲ノ國ノ人口ト 丙ノ國ノ人口トカ等シケレハ



乙ノ國ノ人口ハ 丙ノ國ノ人口ト等シ ト云フ

『數學上ニ於テハ等シト云フヿヲ顯表スルニ ＝(イクオール) ナル符號ヲ用フ例ヘハ甲カ乙ニ等シト云フ事實ヲ略記スルニ 甲＝乙 ナル記號法ヲ用ユルナリ』

今略記法ヲ用ヒテ上ノ關係ヲ示スヿ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{l} A=B \\ A=C \end{array}\right\} \text{ナレハ}\quad B=C \quad \text{ナリ}$$

〔四〕 相等シキ量ノ各ニ 又他ノ相等シキ量ノ各ヲ加フル𬼂ハ 其和ハ又相等シ

$$\begin{array}{ll} \text{例ヘバ} & 5=2+3 \\ \text{又} & 8=2+6 \end{array}\Bigg\} \text{ナル𬼂ハ}$$

必ラズ $\overline{5+8=2+3+2+6}$ ナリ

$$\begin{array}{ll} \text{一般ニ} & A=B+C \\ \text{又} & D=E+F \end{array}\Bigg\} \text{ナル𬼂ハ}$$

必ラズ $\overline{A+D=B+C+E+F}$ ナリ

〔五〕 相等シキ量ノ各ヨリ 他ノ相等シキ量ノ各ヲ減スル𬼂ハ 其差ハ又相等シ

$$\begin{array}{ll} \text{例ヘバ} & 8=5+3 \\ \text{又} & 5=4+1 \end{array}\Bigg\} \text{ナル𬼂ハ}$$

必ラズ $\overline{8-5=(5+3)-(4+1)}$ ナリ

$$\left.\begin{array}{ll}\text{一般ニ} & A = B+C \\ \text{又} & D = E+F\end{array}\right\}\text{ナレバ}$$

$A-D=(B+C)-(E+F)$ ナリ

〔注意〕　四ト五トハ讀者第三章ニ至リテ知ル如ク方程式解法根原ノ定則トナル者ナリ

〔六〕　相等シキ量ノ同シ倍量ハ　又互ニ相等シ

例ヘハ　$8=5+3$　ナル𪜈ハ

必ラズ　$8\times 4=(5+3)\times 4$　ナリ

一般ニ　$A=B+C$　ナル𪜈ハ

必ラズ　$A\times M=(B+C)\times M$　ナリ

〔七〕　相等シキ量ノ同シ分量ハ　又互ニ相等シ

例ヘハ　$8=5+3$　ナル𪜈ハ

必ラズ　$8\div 4=(5+3)\div 4$　ナリ

一般ニ　$A=B+C$　ナル𪜈ハ

必ラス　$A\div M=(B+C)\div M$　ナリ

〔注意〕　六ハ第三章ニ於テ知ル如ク　分數ヲ有スル方程式ヲ分數ヲ有セサル方程式ニ化スル爲メニ應用スル者ナリ　七ハ方程式解法ノ條ニ於テ知ル如ク一元一次方程式解法ニ於テハ必ラス　一回ハ此ノ法ヲ應用セサルベカラサル者ナリ



『數學上ニ於テ　甲物體ガ　乙物體ヨリモ　大ナリト云フヿヲ顯表スル簡單ナル記號法ノ必用アル事往々アリ其時ハ　甲＞乙　ナル記號法ヲ以テ顯表スルヿトセリ甲＞乙　ヲ讀ミテ　甲ハ乙ヨリ大ナリト云フ』

〔八〕　相等シキ量ヲ相等シカラサル量ニ加フル𪜈ハ相等シカラザル結果ヲ生ス而メ元大ナリシ方ヘ加ヘタル者ハ小ナリシ方ヘ加ヘタル者ヨリモ大ナリ

$$\left.\begin{array}{ll}\text{例ヘバ} & 8>7 \\ \text{又} & 5=2+3\end{array}\right\}\text{ナレバ}\quad 8+5>7+(2+3)\ \text{ナリ}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{一般ニ} & A>B \\ \text{又} & C=P\end{array}\right\}\text{ナレバ}$$

必ラス　$A+C>B+P$　ナリ

〔九〕　相等シキ量ヲ相等シカラサル量ヨリ減スレハ其差ハ相等シカラズ　大ナリシ方ヨリ減シタル者ハ小ナル方ヨリ減シタル者ヨリモ大ナリ

$$\left.\begin{array}{ll}\text{例ヘハ} & 8>7 \\ \text{又} & 5=2+3\end{array}\right\}\text{ナレバ}\quad 8-5>7-(2+3)\text{ナリ}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{一般ニ} & A>B \\ \text{又} & C=P\end{array}\right\}\text{ナレバ}$$

必ラズ　$A-C>B-P$　ナリ

〔十〕相等シカラサル量ヲ相等シキ量ノ各ヨリ減スル時ハ其差ハ相等シカラス 大ナル方ヲ減シタル殘リハ小ナル方ヲ減シタル殘ヨリ小ナリ

例ヘハ 又 $\left.\begin{array}{l}8=6+2\\ 5>4\end{array}\right\}$ ナル時ハ

必ラス $8-5<6+2-4$ ナルヘシ

例ヘハ 又 $\left.\begin{array}{l}A=B\\ C>D\end{array}\right\}$ ナル時ハ

必ラス $A-C<B-D$ ナルヘシ

〔注意〕八九十ノ三公理ハ後來不等式問題ノ解方ニ必用欠クヘカラサル者ナリ

## 第二 演算上之原理

〔演算〕トハ加減乘除，自乘，開方乘，等ノ六種ニシテ是等ノ物件ヲ夫々定則ヲ以テ成効スヘキノ方法ヲ示ス者ナリ

〔演算之基礎〕既ニ諸子ノ知ル如ク演算法ハ通常上ノ六種ナリト雖モ 今其ノ性狀ヲ深ク考察スル時ハ全ク加減演算ノ二種ニ止マルヿヲ知ルヘシ 即チ乘法ハ加法ノ特別ナル者ニシテ除法ハ又減法ノ特別ナル者ナリ而シテ自乘ハ乘法ノ特種ナル者又開方乘ハ自乘法ノ特種ナル者



ナルヲ以テナリ 乍去理論上ヨリ考察スルトキハ演算ノ基礎ハ加法ノ一種ニ歸スルナリ何トナレハ減法ハ加法ノ反法ナルヲ以テナリ 然レモ實際上及ヒ社會今日ノ發達上ニ於テハ演算上ノ基礎ハ加減ノ兩法ニアルヿヲ認ムルヲ以テ最モ便益ナリトス 何トナレハ總テノ演算ノ起リハ量ニ就テ起リ量ノ研究ハ增減ト云フ事實ヲ確ムルニ就テ起ル者ナレハナリ

〔演算定則之標準〕予ハ演算ノ基礎ヲ詳述スルニ先達ツテ演算ノ標準ト云フヿヲ諸子ニ知ラシメサルヘカラズ 借テ理論上ヨリ數學ヲ研究スルニハ何處マテモ理論上ノ純一ナル考ニ依リテ成効スヘキヤ否ヤト云フ事ヲ考ヘサルヘカラズ

予ハ上ノ問題ヲ決定スルニ當リテ一ツノ例ヲ示サン

若シ人アリテ蠶ノ親ハ何ナリヤト問フ者アラハ 何人モ直チニ蠶卵ナリト答ヘン蠶卵ノ親ハ何ナリヤト云ハヽ何人モ直チニ蛾ナリト答ヒン然ラハ蛾ノ親ハ何ナリヤト問ハヽ蠶ナリト答ヘン然ラハ蠶ノ親ハ蠶ト云フ事ニナリテ蠶ノ親ハ何者ナリヤト云フヿヲ理論上ヨリ決シテ確定スルヿ能ハサルヘシ天地間ニ於ケル萬有ノ理モ亦如斯 故ニ或ル哲學者ガ萬有ハ空ヨリ成リテ空ニ歸スト云ヒシハ

即チ是レナリ

吾人ハ今上ニ揭ケタル例ニ就テ如何ナル事柄ヲ認識スベキヤ　實ニ上ニ揭ケタル問答ニ就テハ蠶ノ親ハ知ルヿヲ得ベカラサルモ蠶ノ轉々巡環スル回期數ヲ明カニ認識セシナラン

夫レ蠶兒ノ發生セル輪轉回期ノ數ヲ認識セル以上ハ蠶兒ノ親ハ蠶卵ナリト定ムルモ亦蛾ナリト定ムルモ亦蠶兒ナリト定ムルモ決シテ不都合ナカラサルベカラスト雖𪜈凡ソ物理ヲ研究スルニハ其中ニ於テ最下位ト心ニ會得スル者或ハ最簡ナル者ト認ムル者ヲ以テ之レカ基本トナスヲ最モ有益ノ事トナスナリ

偖テ數學ニ於テハ如何ナル者ヲ以テ最下位及ヒ簡易ナル者トナスヤト云フニ加減ノ二法ヲ以テ最下位ニシテ且ツ簡易ナル者ト假定シ而メ加減法ノ實際上ニ起リタル事實ヲ以テ基本トナシ是レヲ研究スルヲ可トス　其ノ加減法ノ實際上ニ起リタル一定不變ノ事ヲ演算定則ノ標準ト稱ス　今其ノ標準ナル者ヲ下ニ示サントス

〔第一〕　加法ハ其ノ順序ニ關セズ

例ヘハ　15+3+25+17　ト云フ式アルキハ

是レヲ　15+25+17+3　トナスモ可ナリ



〔第二〕　某數ニ若干數ヲ次第々々ニ加フル代リニ某數ニ其ノ若干數ノ和ヲ加フルモ可ナリ

例ヘハ　15+3+25+17　ト云フ式アルキハ

是レヲ　15+(25+3+17)　トナスモ可ナリ

又　15+3+25+17　ト云フ式ヲ次ノ如ク

(15+25)+(17+3)　トナスモ可ナリ

〔第三〕　被減數及ヒ減數ヨリ同數ヲ減シ又ハ同數ヲ加フルトモ　其差ハ元ノ被減數ト減數トノ差ニ等シ

例ヘハ　25−12=(25+7)−(12+7)

又　25−12=(25−9)−(12−9)

〔第四〕　或ル數ヨリ若干數ヲ次第々々ニ減スル代リニ若干數ノ和ヲ或ル數ヨリ減スルモ可ナリ

例ヘハ　18−3−4−5　ト云フ演算ヲ次ノ如クナス

18−(3+4+5)　モ可ナリ

〔第五〕　加減演算ハ其順序ヲ變更スルモ妨ケナシ

例ヘバ　35−25+18−20+90−100　ト云フ式アレバ

35−100−20+90−25+18　トナシ

又　35+90+18−100−20−25　トナシ

或ハ　(35+90+18)−(100+20+25)　トナスモ可ナリ

先ツ最初ノ式ハ 35 ヨリ 25 ヲ引ケバ 10 殘リ夫レヘ

18 ヲ加フレバ 28 トナリ夫レヨリ 20 ヲ減スレバ 8 殘リ夫レヘ 90 ヲ加フレバ 98 トナリ夫レヨリ 100 ヲ減ズレバ 2 不足スルナリ最初ノ式ノ答ハ 不足ノ 2 ナリ予輩ハ不足 2 ト云フコヲ示スニ $-2$ ヲ以テス 二度目ニ書キシ式ハ 35 ヨリ 100 ヲ引ケバ 65 丈ケノ不足トナリ又夫レヨリ 20 ヲ引ケバ 85 丈ケノ不足トナル之レニ 90 ヲ加フレバ 5 トナル次ニ夫レヨリ 25 ヲ減スレバ不足 20 トナリ夫レヘ 18 ヲ加フレバ 不足ノ 2 トナルナリ

其他同理ニ依リテ第三番目ノ式ノ答モ第四番目ノ式モ又不足 2 ト云フ答ヲ得ベシ

既ニ上ニ示セシ四例ノ如ク 加減演算ハ其ノ順序ヲ如何樣ニ變更スルモ常ニ同一ノ結果ニ達スベキ者ナルニ依リテ其内最モ便益ナル者ヲ擇フヲ以テ最モ必用ノコトナス而ノ通例社會一般ニ行フ所ノ法ハ第四式ニシテ第一增量ノ和ヲナシ 第二減量ノ和ヲナシ 而シテ大ナル方ヨリ引キテ大ナル量ノ符號ヲ付スルコトナリ居レリ 此ノ定則ヲ合一法ノ定則ト稱ス

〔正數負數〕 某數ノ前ニ加號アル時ハ其ノ某數ヲ正ノ某數ト云ヒ 某數ノ前ニ 減號アルトキハ其ノ某數ヲ負ノ



某數ト云フ 又書キ始メノ數ニシテ其ノ前ニ加減ノ符號ナキ數ヲモ正ノ某數ト稱ス正數負數ヲ亦正量負量ト云フ

〔合一法〕 數多ノ加減號ニ依リテ組成セラレタル式ヲ計算セント欲セバ 正量ハ正量ノミニテ加ヒ負量ハ負量ノミニテ加ヒ 然ル後チ正量ト負量トニテ何レカ大ナルヤヲ驗シ大量ヨリ小量ヲ引キテ其ノ結果ニ大量ノ符號ヲ記シ置クベシ

〔例一〕 $35-25+18-20+90-100$ ヲ合一セヨ

$$\left.\begin{aligned}\text{正量ノ和} &= 35+18+90=143\\ \text{負量ノ和} &= 100+20+25=145\end{aligned}\right\}\text{ナリ故ニ}$$

上式ヲ合一セバ $-2$ トナルナリ

〔例二〕 $-35+25-18+20-90+100$ ヲ合一セヨ

$$\left.\begin{aligned}\text{正量ノ和} &= 25+20+100=145\\ \text{負量ノ和} &= 35+18+90=143\end{aligned}\right\}\text{ナリ故ニ}$$

上式ヲ合一セバ $+2$ トナルナリ

〔例三〕 $35+25+17+3$ ヲ合一セヨ

$$\left.\begin{aligned}\text{正量ノ和} &= 35+25+17+3=80\\ \text{負量ノ和} &= 0\end{aligned}\right\}\text{ナリ故ニ}$$

上式ヲ合一セバ $+80$ トナルナリ

〔例四〕 $-35-25-17-3$ ヲ合一セヨ

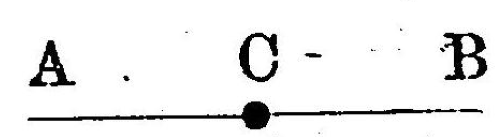
$$\left.\begin{array}{l}\text{負量ノ和} = 35+25+17+3=80\\ \text{正量ノ和} = 0\end{array}\right\}$$ ナリ故ニ

上式ヲ合一セバ $-80$ トナルナリ

〔合一法之約言〕 同號ナレバ加ヘテ其號ヲ付セヨ異號ナレバ大ナル者ヨリ引キテ大ナル符號ヲ付セヨ

今上ニ掲ケタル五ケ條ノ事項ハ容易ニ何人モ承諾スル所ノ事ナラン 依リテ數學上ニ於テハ此ノ五ケ條ト 一般公理十項トヲ種々ニ組ミ合セテ 演算上ニ起ル種々ノ事柄ト 思考上ニ起レル種々ノ問題トヲ氷解セシムルナリ

〔正數負數之起原〕 正數負數ト云フ數ハ天然上ニ如斯ノ數ハアルニアラズシテ 複雜ナル今日ノ社會ニ起レル事件ヲ處理スル爲メニ起ル處ノ數ナリ 社會ノ初稺ナル時ハ唯タ行クト云フ一方アルノミニシテ 未タ進退ト云フ自在ナル感念ハアラサルナリ




例ヘハ AB ト云フ直線ニ就テ圖解セシニ 今 A 點ニ多クノ人アリテ A ヨリ B ニ向フテ行クトセン然ルトキニ社會ノ初稺ナル時ハ甲ハ A ヨリ何程行キタリ乙ハ A ヨリ何程行キタリ又丙ハ A ヨリ何程行キタリト云フ丈ケノ事ニシテ 唯タ行キタリト云フノ感念ナレモ 社會ノ追々發達スルニ隨フテ A ヨリ B

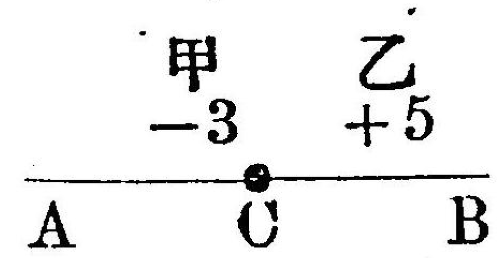


ニ進ム各人ノ進程ノ平均數ト云フ標準點假令ヘハ C ヲ定メラル丶故ニ A ヨリ B ニ向フテ進行スル人ノ進程ニ於テ 甲ハ及ハズトカ 乙ハ過キタリトカト云フ事柄ガ生スルナリ 即チ其ノ及ハサル數ヲ不足數又ハ負數ト稱シ過キタル數ヲ正數ト稱ス 借テ社會ノ初稺ナル時ニモ行クト云フ一方アリシヿ故其行キタル行程ニモ 0 ヨリ無窮大ト云フ數迄アリシナリ 依リテ社會發達ノ今日ニ於テハ過キタル數ニ 0 ヨリ無窮大迄アリ又不及數ニモ 0 ヨリ無窮大迄アルヿトナレリ 即チ昔日ハ 0 ヨリ少キ數ハナカリシカ今日ニテハ 不及ヿ無窮大ト云フ數ガ最モ小サキ數トハナリシナリ 例ヘハ昔日ニテハ 一文ナシノ人カ最貧乏ノ人ナリシカ今日ニテハ 借財ノ無窮ニアル人ガ最貧乏人トナリシナリ

〔正數負數之性質〕 今上ニ正數負數ノ起原ヲ說キタレバ 其ノ起原ヨリ起レル一種ノ性情ヲ驗シ更ラニ一層高等ナル感念ヲ起スヿヲ必要トス

上ニ示セル圖ニ於テ甲ハ C ニ達セザルヿ 3 乙ハ C ニ過キタルヿ 5 ナリト云フヿアリトセバ 現今ノ社會ニ於テ此ノ現象ヲ云ヒ表ハスニハ甲ハ C ナル標準點ヨリ後ノ方ヘ 3 丈ケ進ミタリト云ヘ乙ハ C ナル標準點ヨ

リ前ノ方ヘ 5 丈ケ進ミタリト云フナリ 是レ實際ト少シク異ナルヿアリト雖モ斯クノ如キ見解ヲ下スヲ以テ實ニ便利ナリトス 依リテ吾人ハ 正數負數ノ性質トシテ次ノ事柄ヲ斷定ス




◎ +5 ハ順ノ方ヘ 5 丈ケ行キタルヿヲ示シ −3 ハ逆ノ方ヘ 3 丈ケ行キタルヿヲ示ス

即チ 正數モ負數モ等シク數ニシテ互ニ相反スルト云フ一ツノ性質ヲ有スルナリ 依リテ下ノ表アリ

| | |
|---|---|
| $+5=+1+1+1+1+1$ | $-5=-1-1-1-1-1$ |
| $+4=+1+1+1+1$ | $-4=-1-1-1-1$ |
| $+3=+1+1+1$ | $-3=-1-1-1$ |
| $+2=+1+1$ | $-2=-1-1$ |
| $+1=+1$ | $-1=-1$ |

今天地間ノ物理ヲ考フルニ同一物ニシテ必ラス二樣ノ相反スル性質アリ彼此互ニ相交換シテ流動止マサルナリ 所謂天地アリ 日月アリ 君臣アリ 男女アリ 剛柔アリ 受授アリ 前後アリ 左右アリ 東西アリ 南北アリ 上下アリ 動靜アリ 有形無形ノ價値アリ 權理義務アリ 是等ヲ同性兩儀若シクハ單ニ兩儀ト云フ



彼ノ數ニ正アリ 負アリトセシハ數學ヲシテ普ク此ノ諸理ヲ處理セシメンカ爲メナリ 即チ數理ヲ以テ陰陽受授變化ノ定則ヲ研究シ天地ノ化育ヲ翼賛セント欲スルニアルナリ 是レ正負ヲ說クノ必要アル所以ナリ 是レ故ニ數學ニ於テハ 加號及ヒ減號ヲ常ニ下ノ各樣ノ如ク讀ムナリ

| (+) | (−) | (+) | (−) |
|---|---|---|---|
| 受ケル | 授ケル | 有形價値 | 無形價値 |
| 余マル | 足ラス | 負フ | 負ハセル |
| 前 | 後 | 働ラク | 怠マケル |
| 動 | 靜 | 入ル | 出ツル |
| 上 | 下 | 順カフ | 逆ラフ |
| 右 | 左 | 表 | 裏 |

〔正負之交錯〕 既ニ一物體ニ表面アリ裏面アルトキ其表面ニ又表裏ト云フ言語起ルベク 其裏面ニモ又表裏ト云フ言語起ルベシ 更ラニ詳言セバ此ノ地球ヲ一枚ノ紙ノ如キ者ナリト假定シ月世界ニ一人ノ人アリテ表面ト裏面ト云フ名稱ヲ付シタル者トナストキハ其表面及ヒ裏面ニ生活スル人モ又各表面裏面ト云フ言葉ヲ發セン 即チ表面ニ生活スル人ヨリ 表面ト云ヒバ

月世界ニ居ル一人ノ人ヨリ見レバ是レ眞ノ表面ナリ又表面ニ生活スル人ヨリ　裏面ト云ヒバ

月世界ニ居ル一人ノ人ヨリ見レバ是レ眞ノ裏面ナリ又裏面ニ生活スル人ヨリ　表面ト云ヒバ

月世界ニ居ル一人ノ人ヨリ見レバ是レ眞ノ裏面ナリ又裏面ニ生活スル人ヨリ　裏面ト云ヒバ

月世界ニ居ル一人ノ人ヨリ見レバ是レ眞ノ表面ナリ今上ニ云ヒタル四ツノ言語ヲ簡明ニ示セバ次ノ如シ

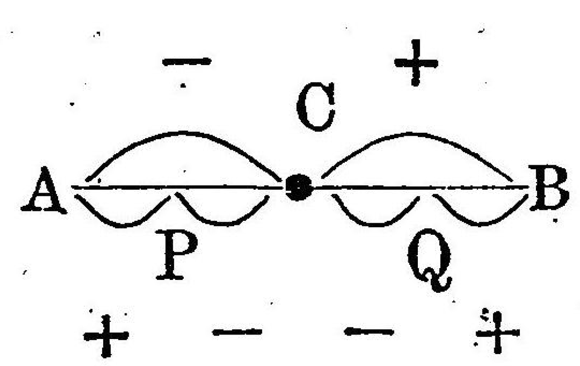
| | | |
|---|---|---|
| $_2$表面ハ | $_1$表面ノ | $_3$表面ナリ |
| $_2$裏面ハ | $_1$表面ノ | $_3$裏面ナリ |
| $_2$表面ハ | $_1$裏面ノ | $_3$裏面ナリ |
| $_2$裏面ハ | $_1$裏面ノ | $_3$表面ナリ |

更ラニ簡明ニ記號法ニテ示セバ次ノ如シ

$+(+)=+,\qquad -(+)=-,$

$+(-)=-,\qquad -(-)=+,$

◎次ニ一直線ニ付キテ正負交錯法ヲ示サン




今茲ニ一直線ABヲ取リCヲ基點トナシテCBヲ順トナシCAヲ逆トナス時ハ　茲ニCヲ基點トナシテ順逆ト云フ二道ヲ得ベシ　而シテ順道及ヒ逆道中ニアリ



テモ亦各々順逆ノ兩道アリ

| | | |
|---|---|---|
| $_2$順フ者ハ | $_1$順道ニ | $_3$順ナリ |
| $_2$逆フ者ハ | $_1$順道ニ | $_3$逆ナリ |
| $_2$順フ者ハ | $_1$逆道ニ | $_3$逆ナリ |
| $_2$逆フ者ハ | $_1$逆道ニ | $_3$順ナリ |

◎次ニ價値ニ付キテ正負交錯法ヲ示サン

價値 { 有形價値　金銀，土地，家屋，等ノ物
　　　無形價値　學藝，勤勞，等ノ物

價値ニハ有形ト無形トアリテ

| | | |
|---|---|---|
| $_2$受クレバ | $_1$有形價値ヲ | $_3$利益トナリ |
| $_2$授クレバ | $_1$有形價値ヲ | $_3$損耗トナリ |
| $_2$受クレバ | $_1$無形價値ヲ | $_3$損耗トナリ |
| $_2$授クレバ | $_1$無形價値ヲ | $_3$利益トナル |

◎凡ソ天地間ノ諸理ハ森羅萬象ナリト雖モ悉ク分類セバ表裏，順逆，損益，ノ三類中ニ悉ク包括セラルヽ者ニシテ此ノ三者ハ皆ナ同一ノ結果ニ到着スル者ナリ更ラニ換言セバ　萬有ノ諸理ハ　次ノ四圖ニ外ナラズ

$+(+)=+,\qquad -(+)=-,$

$+(-)=-,\qquad -(-)=+,$

予輩ハ既ニ數ノ組成ヲシテ正數ト負數トヲ設ケ以テ此ノ

天地ノ大道ニ合セタル者ナレバ 隨フテ起ル處ノ正數及ヒ負數ニ付テノ加減法モ亦此ノ理ニ適合スベキヿハ甚タ明白ナリ即チ

$$+(+5)=+5,\quad -(+5)=-5,$$
$$+(-5)=-5,\quad -(-5)=+5,$$

然レ𪜈此ノ事件ハ甚タ重要ナル件ナレバ又次ニ聊カ說明スル所アラントス

◎數價ニ付キテノ正負ノ交錯 今此ノ事ヲ說クニハ上ノ三法ヨリハ少シク長キニ亘ラサルヲ得ズ 偖テ數ニ正數アリ負數アリト云フヿヲ知レリトセバ吾人ガ是レ迄算術ニテ $N+M$, $N-M$, ト云フヿハ如何ナルヿナリヤトノ考察ヲ下サヾルベカラズ即チ次ノ如キ者ナルヤ明ラカナリ

$$N+M=N+(+M),$$
$$N-M=N-(+M),$$

是レヲ反記セバ

$$N+(+M)=N+M \cdots\cdots(1)$$
$$N-(+M)=N-M \cdots\cdots(2)$$

此ノ (1) (2) ノ式ヲ推シテ直チニ (3) (4) ヲ得ベシ

$$N+(-M)=N-M \cdots\cdots(3)$$



$$N-(-M)=N+M \cdots\cdots(4)$$

何トナレバ (1) 式ニテ知ル如ク N ニ正數 M ヲ加フレバ M 丈ケ增スナレバ N ニ負數ヲ加フレハ M 丈ケ減セサルヲ不得 盖シ負數ハ正數ノ反對ナレバナリ 次ニ (2) 式ニ依リテ知ル如ク N ヨリ正數 M ヲ引ク片ハ N ガ M 丈ケ減スルナレハ 負數ハ正數ノ反對ナル者故 N ヨリ 負數 M ヲ減スル片ハ N ハ M 丈ケ增加セサルベカラズ 即チ (3) (4) ノ眞ナルヿハ明白ナルヿナリ 偖テ (1) (2) (3) (4) 各等式ノ兩邊ヨリ N ヲ取リ去ルモ公理第五ニ依リテ又等式ヲ得ベシ 即チ下ノ如シ

$$+(+M)=+M,\quad +(-M)=-M,$$
$$-(+M)=-M,\quad -(-M)=+M,$$

〔兩數加減之塲合〕 今茲ニハ正數負數間ニ起レル加減演算法ノ種々ノ塲合ヲ詳述セン 加減演算ニ起レル悉クノ物件ハ決シテ次ノ十三種ノ以外ニアルヿナシ 故ニ次ノ十三件ヲ能ク記臆セバ正數負數間ニ起レル加減演算法ニ於テ決シテ間違ヲ生スルヿナシ

$$(+4)+(+3)=+4+3=7,\quad (-4)+(+3)=-4+3=-1,$$
$$(+4)+(-3)=+4-3=1,\quad (-4)+(-3)=-4-3=-7,$$
$$(+4)-(+3)=+4-3=1,\quad (-4)-(+3)=-4-3=-7,$$

$$(+4)-(-3)=+4+3=7,\quad (-4)-(-3)=-4+3=-1,$$

$$+(+4)=+4,\qquad +(-4)=-4,$$

$$-(-4)=+4,\qquad -(+4)=-4,$$

$$+4-4=0$$

◎次ニ上ノ十三則ヲ一般ニ文字ニテ示サン

$$+(+M)=+M,\qquad -(-M)=-M,$$

$$-(-M)=+M,\qquad -(+M)=-M,$$

$$+M-M=0$$

$$(+N)+(+M)=+N+M,\quad (-N)+(+M)=-N+M,$$

$$(+N)+(-M)=+N-M,\quad (-N)+(-M)=-N-M,$$

$$(+N)-(+M)=+N-M,\quad (-N)-(+M)=-N-M,$$

$$(+N)-(-M)=+N+M,\quad (-N)-(-M)=-N+M,$$

〔正負交錯之餘論〕 玆ニハ正負交錯論ノ三例ニ就テ更ラニ論スル所アラントス

彼ノ正負交錯ノ三例中ニ於テ何ノ例ガ其意味廣ク且ツ最モ正數負數ノ演算ニ適當セルヤト考フルニ第二例即チ直線ノ正負交錯法コソ最乘ノ者ト云ハサルベカラズ 何トナレバ 順逆 ト云フ二語ハ如何ナル事物ノ原理ヲモ代表スルヿヲ得ベク且ツ正負ト云フ吾人ノ感念ハ元ト直線圖解ヨリ出セシ者ナルヲ以テナリ



依リテ正負交錯法ヲ十分ニ論セソニハ第二例ニ付テ論スルヲ要ス 〔彼ノ第三例ニ付テ交錯論ヲ十分論セント欲スル時ハ 經濟學, トカ 簿記學, トカ云フ者トナレバナリ〕 借テ二例ニ於ケル四個ノ事實ヲ最モ簡略ニ表セハ下ノ如シ

${}_2$順ハ　${}_1$順ノ　${}_3$順ナリ

${}_2$逆ハ　${}_1$順ノ　${}_3$逆ナリ

${}_2$順ハ　${}_1$逆ノ　${}_3$逆ナリ

${}_2$逆ハ　${}_1$逆ノ　${}_3$順ナリ

上ノ如ク簡略ニシテ能ク其意ヲ解スルヿヲ得ベク斯ク簡略ニナス𪜈ハ

$$+(+)=+,\quad -(+)=-,\quad +(-)=-,\quad -(-)=+,$$

ト云フ形象ニ最モ能ク適應スルナリ

今例二ヲシテ上ノ如ク四形象ニ適應セル唱ヒ方トナス𪜈ハ自然ノ感念トシテ玆ニ妙ナル感念カ起ル者ナリ 何トシテモ

$$\left.\begin{array}{llll}\text{順ノ順ハ} & \text{順,} & \text{順ノ逆ハ} & \text{逆,}\\ \text{逆ノ順ハ} & \text{逆,} & \text{逆ノ逆ハ} & \text{逆,}\end{array}\right\}\text{ト云フ}$$

呼ヒ聲ハ乘算九々ノ呼ビ聲ノ如クニ感セラレテ心ニ響ク處ハ下ノ如シ

〔順〕×〔順〕=〔順〕, 〔順〕×〔逆〕=〔逆〕,

〔逆〕×〔順〕=〔逆〕, 〔逆〕×〔逆〕=〔順〕,

果シテ此ノ如キ事實アリヤ否ヤ予輩ハ之レヲ研究セントス欲スルナリ　是レヲ研究スルニ數字ヲ假定シテ研究セン即チ下ニ揭ケル處ノ四個條ハ

〔+5〕×〔+3〕=+3×5, 〔+5〕×〔−3〕=−3×5,

〔−5〕×〔+3〕=−3×5, 〔−5〕×〔−3〕=+3×5,

夫々眞ナル者ナルヤ否ヤヲ研究スレバ足レリ

既ニ諸子ハ算術ニ於テ知ル如ク　5×3　ト云フコトハ　5ヲ三度繰リ回シテ加フルナリ更ラニ詳言セバ　〔+5〕=〔+3〕ヲ乘スルト云フコハ　+5　ヲ　+3　度丈ケ繰リ回スコナリ即チ次ノ如シ

◎〔+5〕×〔+3〕=+〔+5〕+〔+5〕+〔+5〕=+5+5+5=+3×5

同理ニ依リテ

◎〔+5〕×〔−3〕=−〔+5〕−〔+5〕−〔+5〕=−5−5−5=−3×5

◎〔−5〕×〔+3〕=+〔−5〕+〔−5〕+〔−5〕=−5−5−5=−3×5

◎〔−5〕×〔−3〕=−〔−5〕−〔−5〕−〔−5〕=+5+5+5=+3×5



即チ　〔+5〕×〔+3〕=+5×3, 〔+5〕×〔−3〕=−5×3,

〔−5〕×〔+3〕=−5×3, 〔−5〕×〔−3〕=+5×3,

ノ眞ナルコヲ知リ得タリ今上ノ四式ニ於テ其符號ノミヲ取リテ書クトキハ

〔+〕×〔+〕=〔+〕, 〔+〕×〔−〕=〔−〕,

〔−〕×〔+〕=〔−〕, 〔−〕×〔−〕=〔+〕,

上ノ如シ故ニ例ニノ呼ヒ方ノ自然ナル事柄ノ眞理ナルコヲ知ル　是レヲ乘法符號ノ四定則ト稱ス

〔乘法符號定則〕　同號ナル二數ノ積ハ正, 異號ナル二數ノ積ハ負, 此ノ事實ハ上表ニ依リテ明カナリ

〔除法符號定則〕　同號ナル二數ノ商ハ正, 異號ナル二數ノ商ハ負,

何トナレハ　〔+〕=〔+〕×〔+〕　ナル故

$\dfrac{〔+〕}{〔+〕}$=〔+〕　ナリ

又　〔−〕=〔+〕×〔−〕　ナル故

$\dfrac{〔−〕}{〔−〕}$=〔+〕　ナリ

又　〔+〕=〔−〕×〔−〕　ナル故

$\dfrac{〔+〕}{〔−〕}$=〔−〕　ナリ

又　〔−〕=〔−〕×〔+〕　ナル故

$$\frac{〔-〕}{〔+〕}=〔-〕$$ ナリ

今數字ヲ插入シテ示スヿ次ノ如シ

$$\frac{+15}{+3}=+5,\qquad \frac{+15}{-3}=-5,$$

$$\frac{-15}{-3}=+5,\qquad \frac{-15}{+3}=-5,$$

〔乘除法符號定則〕 乘除法ノ符號定則ヲ通常略ノ同號正，異號負，ト稱スルナリ

〔四則符號之歸一〕 加減乘除之レヲ四則ト云フ而シテ其ノ符號定則ノ歸着スル所ハ

$$+(+)=+,\qquad -(-)=+,$$

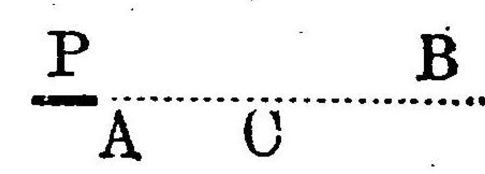
$$-(+)=-,\qquad +(-)=-,$$

ニシテ同號ナレバ正 異號ナレバ負ト云フ言葉ニ歸着スルナリ 更ラニ詳言セバ上ノ四形象ハ見様ニテ乘除法ノ定則トモ又 加減ノ定則トモ見ユルナリ 是レ實ニ加減乘除ハ理論上ヨリ云ヒハ加法ノ一法ヨリ成リタルヿヲ知リ居シニ其加減乘除 ノ四法ヲ制御スル各定則モ歸スル所一法ニ止マルヲ見タリ愈々以テ是レ迄論セシ所ノ事柄ニハ誤リナク且ツ數理ノ玄妙ヲ示ス者ト云ハサルベカラズ

〔正量負量〕 正量及ヒ負量ト云フヿヲ論スルニ先達



チテ 天然標準點 假定標準點 ト云フヿヲ論セサルベカラス 或ル伸縮界限內ニ一點ヲ設クルトキハ之レヲ 假定標準點ト云ヒ 縮少セシ限リノ處ニ一點ヲ設クルトキハ之レヲ天然標準點ト云フ



今一量アランニ此ノ量ハ種々ノ事柄ニ依リテ增大シ若シクハ減少スベシ今P ヲ以テ其ノ減少ノ極限ヲ示シ PB ヲ以テ其ノ增大ノ極限ヲ示サン然ルトキハ一量ハ AB ノ間ニ增減シ A ヲ天然標準點 C ヲ任意標準點トスベシ 偖テ予輩之ノ AB ノ變量間ニ某量ハ此 C ノ點位迄ニ增大スルハ普通ナリト考ヘテ C ヲ假定スル時ニ P ガ增大スルモ C ニ達セザレバ其 C ニ達スル量丈ケノ不足量即チ C 點ヨリハ 負量ト稱スルナリ 假令バ寒暖ト云フヿニ付テ例センニ寒ムシト云ヒ熱ツシト云フ言葉ハ全ク反對ノ事ニテ熱量ヲ〔+〕トシテ示セバ寒量ヲ〔-〕トシテ示サヽルヲ得ズ乍去昔日ハイザ知ラス今日ニテハ何人モ寒ムシト云フモ溫度ノナキ譯ケニハアラズシテ熱量ノ增進スルヿノ多少ニ依ル者タルヿヲ了知セン 然ラバ寒クトモ溫カクトモ熱クトモ云ハズニ唯溫カシト云フテ可ナラン 然レ𪜈今日社交上ニ於テ 寒 溫 熱 ノ三語アルヿハ大ニ便益

ナルヿナリ　此寒熱ト云フ言語ハ如何ナル事ヨリ起ルヤ
ト云フニ人體ノ溫度ヲ溫度ノ假定標準點ト定メテ某日ノ
溫度ガ人體ノ溫度ニ及バサル𪜈ハ寒ムシト云ヒ　某日ノ
溫度ガ人體ノ溫度ニ大ニ越ユル𪜈ハ熱シト云フ　換言セ
バ人熱ニ及ハサル熱量ヲ負量ノ熱　人熱ニ過キタル熱ヲ
正量ノ熱　ト云フナリ

◎正量負量ト云フ二量アルハ假定標準量アルニ依リテ起
ル處ノ言葉ニシテ負量某ト云フヿハ假定標準量ニ及ハサ
ル丈ケノ量ノヿナリ

故ニ假定標準點ナキ者即チ假定標準量ナキ者ニハ負量ト
云フヿハ決シテ起ラス

◎以上云ヒタルヿニ依リテ假定標準量ナキ者ノ計算ノ答
ニ負量ノ出テタル𪜈ハ全ク意味ナキ者ナリ

〔多項之演算〕今茲ニ一商人アリテ二個ノ商店ヲ所
有セリト假定セン然ラバ此ノ主人ノ收支ハ將サニ　第一
商店ト　第二商店ト　ノ決算ノ和ニ等シキヤ明ラカナリ
又第一第二商店ガ收入セシ者ヲ直チニ主人ガ收入シ　第
一第二商店ガ支出スベキ者ヲ直チニ主人ガ支出スル者ト
スルモ共ニ同一ノ結果ニ到達スベシ

換言セバ　第一商店ト第二商店トノ各決算ノ和ハ其第一



商店ノ出入ヲ表ハス演算ノ式ヘ　第二商店ノ出入ヲ表ハ
ス演算ノ式ヲ符號ノマヽニ書キタル式ノ決算ニ外ナラス

例ヘバ　第一商店 $= 25-13+18-21$

　　　　第二商店 $= 18-31+15+20$

ナリトスル𪜈ハ

主人ノ收支 =〔第一商店ノ決算〕+〔第二商店ノ決算〕

$$
\begin{aligned}
&=[25-13+18-21]+[18-31+15+20]\\
&=25-13+18-21+18-31+15+20\\
&=25+18+18+15+20-13-21-31\\
&=[25+18+18+15+20]-[13+21+31]\\
&=96-65\\
&=31
\end{aligned}
$$

◎多項式　三個以上ノ加減演算ノ式ヲ多項式ト云フ

〔多項式之加法〕或ル多項式ニ　或ル他ノ多項式
ヲ加ヘント欲セバ　第一多項式ノ次ニ第二多項式ヲ其符
號ノ儘マニ書キ足シタル後チ其ノ演算ヲ合一法ノ規則ニ
依リテナスベシ

〔多項式之減法〕或ル多項式ヨリ　或ル他ノ多項
式ヲ　減セント欲セバ　被減多項式ノ後トヘ減多項式全
體ヲ反對ノ符號トナシテ書キ足シタル後チ合一法ノ規則

ニ依リテ演算スベシ

如何ントナレバ　甲多項式ヘ　乙多項式ヲ加フルニハ　甲多項式ノ後チニ乙多項式ヲ其ノ儘マニ書キ足スベキ者ナレバ　減法　ハ加法ノ反法ナレバ　甲多項式ヨリ　乙多項式ヲ減スルニハ　乙多項式全體ノ符號ヲ反對トナシテ　甲多項式ノ後チニ書キ足スベキコハ明白ノ事ナリ

〔多項式之乘法〕　此ノ場合ニ二ツアリ

第一ノ場合ハ　多項式ヘ　一項式ヲ乘スル法

第二ノ場合ハ多項式ヘ　多項式ヲ乘スル法是レナリ

〔第一法則〕　多項式ヘ　一項式ヲ乘センニハ多項式ノ各項ヘ　夫々一項式ヲ乘スベシ（乘スル際ニ當リテ其ノ符號ハ同號ナレバ正　異號ナレバ負トナスベシ）

例ヘバ　$25-13+5$ ト云フ多項式ニ　$+3$　ヲ乘セント欲セバ　$+3$　ヲ被乘多項式ノ各項ヘ夫々乘スルナリ　即チ　$+3$ ヲ $+25$ ヘ乘シテ $+25\times3$　次ニ　$(-13)\times(+3)=-13\times3$　次ニ　$(+5)\times(+3)=+5\times3$　依リテ答ハ　$25\times3-13\times3+5\times3$ナリ今式ト答トヲ等式ニ書キ表ハセバ

$$(25-13+5)\times(+3)=+25\times3-13\times3+5\times3$$

何トナレバ

$$(25-13+5)\times(+3)$$



$$=+(25-13+5)+(25-13+5)+(25-13+5)$$
$$=+25-13+5+25-13+5+25-13+5$$
$$=+25+25+25-13-13-13+5+5+5$$
$$=25\times3-13\times3+5\times3$$

又　$(25-13+5)\times(-3)=-25\times3+13\times3-5\times3$

何トナレバ

$$(25-13+5)\times(-3)$$
$$=-(25-13+5)-(25-13+5)-(25-13+5)$$
$$=-25+13-5-25+13-5-25+13-5$$
$$=-25-25-25+13+13+13-5-5-5$$
$$=-25\times3+13\times3-5\times3$$

〔第二法則〕　或ル多項式ニ　或ル他ノ多項式ヲ乘セント欲セバ　乘多項式ヨリ一項ツヽ取リ出シテ是レヲ被乘多項式ノ各項ヘ乘スベシ（但シ其ノ乘法ヲ行フノ際同號ナレバ正　異號ナレバ負トナスベシ）

例ヘバ $(25-13+5)\times(4-3)$ ナル式ヲ演算センニハ　乘二項式中ヨリ　$+4$　ト　$-3$　トヲ順次ニ取リ出シテ　先ツ $+4$ ヲ $25-13+5$ ニ乘シ　次ニ　$-3$ ヲ $25-13+5$ ニ乘シ　其ノ符號ヲ同號正，異號負，トナシテ　各結果ヲ連記シ置クベシ　然ル後チ合一法ニ依リテ其演算ヲナス

ベシ

何トナレバ

$(25-13+5)\times(4-3)$ ニ於テ $25-13+5$ ヲ

假リニ一ツノ數ト見做シ是レヲ M ニテ表ハセバ

$$(25-3+5)\times(4-3)=M(4-3)=4M-3M$$

ナルベシ然ルニ M ハ $25-13+5$ ナル故

$$\begin{aligned}4M-3M&=4(25-13+5)-3(25-13+5)\\&=(4\times25-13\times4+5\times4)-(3\times25-13\times3+5\times3)\\&=4\times25-13\times4+5\times4-3\times25+13\times3-5\times3\end{aligned}$$

即チ證明セラレタリ

〔實際ニ於ケル乘法ノ雛方〕

(1) $(25-13+5)\times(+3)$ セヨ

(2) $(25-13+5)\times(-3)$ セヨ

(3) $(25-13+5)\times(4-3)$ セヨ

(1)

$$\begin{array}{l}\quad 25-13+5\\ \underline{+3\qquad\qquad\qquad\quad}\,(\times\\ +25\times3-13\times3+5\times3\end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{l}\quad 25-13+5\\ \underline{-3\qquad\qquad\qquad\quad}\,(\times\\ -25\times3+13\times3-5\times3\end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{l}25-13+5\\ \underline{4-3\qquad\qquad\qquad\quad}\,(\times\\ 25\times4-13\times4+4\times5\\ \underline{\qquad\quad -3\times25+13\times3-3\times5}\,(+\\ 25\times4-13\times4-3\times25+4\times5+13\times3-3\times5\end{array}$$



〔多項式除法〕本法ノ最モ簡易ナル方法ハ予カ著書代數因子分括原理中ニ富氏省除法ノ定則ト云ヘル所ニ就テ見ルベシ

〔代數和〕 算術上ニ於ケル和ハ必ラス其結果元ヨリモ增加スベキ者ナレモ 代數上ニ於テノ和ハ必ラス增加スベキ者ノミニハアラズ減少スヘキ意味ヲモ含ム者ナリ何トナレハ算術ニ於テハ正數ト正數トノ和ナレモ 代數ニテハ正數ト正數ノ和ナルコアリ 負數ト負數トノ和ナルコアリ 正數ト負數トノ和ナルコアルヲ以テナリ

〔因數之性質〕因數ノ性質ハ代數學上最モ必要ナル者故ニ次ニ是レヲ掲ケン

〔1〕 二因數ノ積ハ 其ノ順序ニ關セズ

例ヘバ $3\times5$ ナル式ト $5\times3$ ナル式トハ相等シ

〔2〕 數多ノ因數ノ積ノ内ニ於テ 其ノ順序ヲ交換スルモ 其積ハ變セズ

例ヘハ $3\times5\times7\times2=5\times2\times7\times3=3\times2\times7\times5$ 等ナリ

一般ニ $a.\ b.\ c.\ d.$ ヲ以テ或ル數ヲ表ハセバ

$$a\times b\times c\times d=b\times a\times d\times c=b\times c\times a\times d \text{ 等ナリ}$$

代數ニ於テハ $a\times b$ ノコヲ略シテ $ab$ ト書スルヲ以テ慣例トナスナリ

◎冪ノヿ　5×5×5×5　ノ如ク乘スル數ノ同シキ者ヲ　5　ノ自乘法　或ハ方乘若クハ冪ト稱シ其ノ乘クル因子ノ數ニ依リテ第何冪ト云フ　上ノ式ニ於テハ 5 ヲ四度連乘セシ者ナル故ニ　5　ノ第四冪ト稱スルナリ而ソ　5×5×5×5　ノヿヲ示ス簡易ノ記號法ハ其ノ右肩ニ小サク 4 ト書スルナリ　即チ　$5^4$ 此ノ　4　ノヿヲ　冪指數　又ハ　單ニ指數或ハ次數ト稱スルナリ　◎ $5^7$　ハ如何ナル意味ナリヤト云フニ　$5^7=5\times5\times5\times5\times5\times5\times5$　ノヿナリ

◎　$a^3b^2c^5$　ノ意味ハ　$a\times a\times a\times b\times b\times c\times c\times c\times c\times c$　ノヿナリ

◎　$13a^3bc^2$　ノ意味ハ　$13\times a\times a\times a\times b\times c\times c$　ノヿナリ

上ノ例ニ於テ 13 ヲ數字係數ト稱ス◎ $a^3b^2c^5$ ノ前ニハ何モナケレ𪜈　1　ナル數字係數ヲ有スル者トスルヿ慣例ナリ何トナレハ　$1\times a^3b^2c^5$　ハ　$a^3b^2c^5$　ナルベキヲ以テナリ◎又通常 $1a^1$ ノ如キ者ヲ　$a$　ト記スルカ慣例ナリ

〔3〕　$(13a^3bc^2)\times(-2a^2bcd)$　ヲ演算セヨ

$$
\begin{array}{r}
+13a^3bc^2=13aaabcc\\
-2a^2bcd=-2aabcd\\
\hline
(13a^3bc^2)(-2a^2bcd)=-26aaaaabbcccd\\
=-26a^5b^2c^3d
\end{array}
$$

$$
\therefore\quad (13a^3bc^2)\times(-2a^2bcd)
$$
$$
=-(13a^3b^2c^2)\times(2a^2b^1c^1d^1)=-(13\times2)a^{3+2}b^{1+1}c^{2+1}d^1
$$



〔法則〕兩係數ヲ相乘シ同文字ハ指數ヲ加ヘ異ナル文字アル𬼀ハ其ノ儘ニ書キ置キ符號ハ符號定則ニ依リテ付スベシ

〔括弧用法〕初學者ノ能ク間違フル所ハ括弧用法ニアル故茲ニハ詳シク其ノ用法ヲ說キ明カサン　其ノ用法ヲ說明セソガ爲メニ種々ノ例題ヲ取ラン學者ハ能ク記臆セヨ

〔例一〕　$(25-13+5)+(23-19-3)$　ナル式ノ括弧ヲ脫セシムベシ

上ノ式ハ　$25-13+5$　ニ　$23-19-3$　ヲ加ヘヨトノ式ナルヲ以テ　加法ノ法則ニ從フテ始ノ多項式ニ後チノ多項式ヲ其符號ノマヽニ連記スレバ足レリ

即チ　$25-13+5+23-19-3$

◎法則第一　括弧ノ前ニ正號アル𬼀ハ　其ノ括弧ヲ脫スルトモ　括弧內ノ符號ヲ變スベカラズ

〔例二〕　$(25-13+5)-(23-19-3)$　ナル式ノ括弧ヲ脫セヨ

此ノ式ハ　$25-13+5$　ヨリ　$23-19-3$　ヲ減スベキヿヲ表ハス式ナリ　然ルニ或ル多項式ヨリ或ル他ノ多項式ヲ減スルニハ　被減多項式ノ後ト〜減多項式ノ各項ヲ悉ク符

號反對トナシテ書キ足セバ可ナリ

即チ $25-13+5-23+19+3$

◎法則第二　括弧ノ前ニ負號アル卄其括弧ヲ脱セント欲セバ　括弧內ノ符號ヲ悉ク反對トナスベシ

〔例三〕 $(25-13+5)+7(23-19-3)$ ナル式ノ括弧ヲ脱セヨ

上式ハ $(23-19-3)$ ニ 7 ヲ乘シテ得タル結果ヲ $25-13+5$ ニ加ヘヨト云フヿヲ示ス式ナリ　即チ

$(25-13+5)+(23\times7-19\times7-3\times7)$ ナル式ノヿナリ

故ニ $25-13+5+23\times7-19\times7-3\times7$

今全體ノ演算式ヲ示スヿ次ノ如シ

$$\begin{aligned}&(25-13+5)+7(23-19-3)\\&=(25-13+5)+(23\times7-19\times7-3\times7)\\&=25-13+5+23\times7-19\times7-3\times7\end{aligned}$$

〔例四〕 $(25-13+5)-7(23-19-3)$ ヲ脱弧セヨ

此ノ式ノ意味ハ $(23-19-3)\times7$ ヲ $25+3+5$ ヨリ減セヨトノヿナリ　今全體ノ演算ヲ示セバ次ノ如シ

$$\begin{aligned}&(25-13+5)-7(23-19-3)\\&=25-13+5-(23\times7-19\times7-3\times7)\\&=25-13+5-23\times7+19\times7+3\times7\end{aligned}$$



◎注意一　例三四ノ式ハ $25-13+5$ ノ次ニ $(\pm7)\times(23-19-3)$ シテ得タル式ヲ其儘マニ書キ足シタルニ外ナラズ

◎注意二　時トシテ $-7(23-19-3)$ ノ代リニ $-7\,\overline{23-19-3}$ ト書スルヿアリ

又 $\frac{3}{5}(23-19-3)$ ト云フ代リニ $3\times\frac{23-19-3}{5}$ ト書スルヿアリ　故ニ $3\times\frac{23-19-3}{5}$ トアリタル卄ハ直チニ $\frac{3}{5}(23-19-3)$ ナリト心得テ演算スベシ

◎注意三　括弧ヲ用ヒタル式ニ種々ノ形狀アリト雖モ能ク上ノ四法ヲ記臆セバ脱弧法容易ナリ　故ニ次ニハ其ノ演算ノミヲ示サントス

〔例五〕 $35-[18+23-(18+7-2+\overline{19-3}+2)-51]$ ヲ脱弧セヨ

此ノ如キ式ヲ脱弧スルニハ最モ內ニアル者ヨリ取リテ逐次其外方ニ及ボスナリ

$$\begin{aligned}&35-[18+23-(18+7-2+\overline{19-3}+2)-51]\\&=35-[18+23-(18+7-2+19-3+2)-51]\\&=35-[18+23-18-7+2-19+3-2-51]\\&=35-18-23+18+7-2+19-3+2+51\end{aligned}$$

〔例六〕 $35-[18+(23-18+7)-2-(19-3+2)-51]$

ヲ脫弧セヨ

$$35-[18+(23-18+7)-2-(19-3+2)-51]$$
$$=35-[18+23-18+7-2-19+3-2-51]$$
$$=35-18-23+18-7+2+19-3+2+51$$

〔例七〕 $\{35-(18-23)+18-7\}+2+19-(3+2+51)$

ヲ脫弧セヨ

$$\{35-(18+23)+18-7\}+2+19-(3+2+51)$$
$$=\{35-18+23+18-7\}+2+19-3-2-51$$
$$=35-18+23+18-7+2+19-3-2-51$$

〔例八〕 $35-3(18-23)+18-7(2+19)-(3+2+51)$

ヲ脫弧セヨ

$$35-3(18-23)+18-7(2+19)-(3+2+51)$$
$$=35-(18\times3-23\times3)+18-(7\times2+19\times7)-3-2-51$$
$$=35-18\times3+23\times3+18-7\times2-19\times7-3-2-51$$



# 第二章

## 公理及原則應用

〔目的〕 本章ノ目的ハ前條ニ說明セル公理及原則ノ應用ノ一端ヲ知ラシメンカ爲メニ算術上ノ難問ヲ容易ニ解クノ便方ヲ示サント欲スルナリ

借テ此ノ目的ヲ達センニハ求ムル所ノ數ヲ $x$ ニテ代表シ問題ノ關係ニ依リテ等式ヲ組成シ其等式ニ公理及ビ演算ノ原則ヲ應用シテ　求ムル處ノ數ノ何倍ハ若干ナルベシト云フ　簡易ノ一等式ヲ得ルニアリ　詳細ハ下例ヲ以テ知ラルベシ

〔所期〕 予カ本章ニ於テ學者ニ望ム所ノ者ハ第一章ノ根原タル諸術ヲ忽視セサランカ爲メ其必要欠クベカラサル者タルヲ認知セシムルニアリ

第一章ノ所說ハ實ニ數學ノ大根原ニシテ數理ノ玄妙悉ク其內ニ包括ス

〔注意〕 下例ヲ通讀セシ學者ハ或ハ云ハン所說ノ例ハ悉ク了解セルモ予輩ハ ($x$×何＝何々) ト云フ式ニ或ル式ヲ變化スルヿヲ苦ムト　著者答テ曰ク通讀シテ第四章ニ

至ラバ一定ノ法則ヲ以テ其目的ヲ達シ得ベシ　學者若シ算術上ニ起ル總テノ難問ヲ容易ニ解カント欲セハ此ノ書ノ全篇ヲ通讀セシ以後ニ於テセヨ

## 例　題

〔一〕金七十二圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ配分スルアリ其方甲ハ乙ヨリ五圓多ク乙ハ丙ヨリ二圓多シト云フ然ル𪜈ハ各人ノ所得ハ如何

〔解〕今甲ノ所得ヲ $x$ トセハ　乙ノ所得ハ $x-5$ ニシテ　丙ノ所得ハ $x-7$ ナリ

然ルニ題意ニ依ルニ甲乙丙三人ノ和ハ七十二圓ナルヲ以テ下ノ等式アリ

$$甲+乙+丙=72$$
$$x+(x-5)+(x-7)=72 \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

上ノ問題ヲ記號法ニテ云フ𪜈ハ (A) ノ如シ

總テ或ル問題ヲ解クト云フヿノ秘訣ハ『求ムル數ノ何倍ハ若干ナリ』ト云フヿヲ知ルニアリ其關係ヲ求メン爲メニ　公理及原則　ヲ常ニ應用スルナリ　先ツ原則ニ依リテ (A) 式ノ括弧ヲ去ル𪜈ハ $x+x-5+x-7=72$ トナルベシ又加減演算ノ原則ニ依リテ $3\times x-12=72$ トナル

等式ノ兩邊ニ同數ヲ加フルモ其結果亦等シカルベシト云フ公理ニ依テ $3\times x-12=72$ ト云フ等式ノ兩邊ヘ 12 ヲ



加フル𪜈ハ

$3x-12+12=72+12$ ニシテ即チ $3\times x=84$ 依テ吾人ノ目的ハ達シタリ　甲$=28$ ヲ知ルナリ

〔二〕一職工ヲ雇フ者アリ約シテ曰ク汝勤勞セシ日ニハ日給三十錢ヲ與フベク又汝欠勤セシ日ニハ科料十八錢ヲ奪フベシト　然ルニ此ノ職工卅六日間ニ若干日ノ欠勤ヲナセシニ依リテ卅六日ノ終リニ受取リシ金高　六圓九十六錢　ナリシト云フ然ル𪜈ハ此ノ職工ノ欠勤日數如何

〔解〕今欠勤日數ヲ $x$ トセバ　勤勞日數ハ $36-x$ ナルベシ　依リテ勤勞ニ依リテ得タル金額ハ將サニ $30\times(36-x)$ ナルベク　而シテ欠勤ニ依リテ失ヒタル處ノ金額ハ $18\times x$ ナルベシ

然ルニ題意ニ依ルニ受取リシ金額〔即チ賃錢ヨリ科料ヲ引キ去ラレタル者〕ハ 696錢 ナルニ依リテ下ノ等式アリ

$$30\times(36-x)-18x=696 \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

上ノ問題ヲ記號法ニテ表セシ者ハ (A) 式ナリ故ニ上問題ヲ解カンニハ (A) 式ヨリシテ『求ムル數ノ若干倍ハ何程ナリ』ト云フ等式ヲ作ラサルベカラス是レニハ　公理及原則　ヲ用ヒテ其式ヲ得ルナリ

$$30\times(36-x)-18\times x=696$$

$30\times36-30\times x-18\times x=696$

$1080-48x=696$

$1080-48x+(48x-696)=696+(48x-696)$

$1080-48x+48x-696=696+48x-696$

$1080-696=48x$

$\frac{1080-696}{48}=x$

〔三〕 逃者アリ十六分時ノ後チ警吏之レヲ追フ其速力警吏ハ逃者ノ二倍ナリシヲ以テ一里ニシテ追及セリト云フ依テ二者ノ各速力ヲ問フ〔速力トハ一時間ニ行ク里數ノヿ〕

〔解〕 逃者ノ速力ヲ $x$ トセバ警吏ノ速力ハ $2x$ ナリ
逃者一里ヲ行ク時間ハ $\frac{1}{x}$ ニシ警吏一里ヲ行ク時間ハ $\frac{1}{2x}$ ナリ

然ルニ題意ニ依ルニ二人カ一里ヲ行ク時間ノ差ハ 16分即チ $\frac{16}{60}$ 時ナルヲ以テ下ノ等式アリ

$\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}=\frac{16}{60}$ ………………(A)

(A) ハ即チ上問題ヲ記號法ニテ表セシ者ナリ 故ニ上ノ問題ヲ解カンニハ (A) 式ヲシテ『求ムル數ノ若干倍ハ何程ナリ』ト云フヿヲ顯サシムルニ在リ其方法

$\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}=\frac{16}{60}$ ………………(A)

(A) ノ兩邊ニ $60x$ ヲ乘セヨ



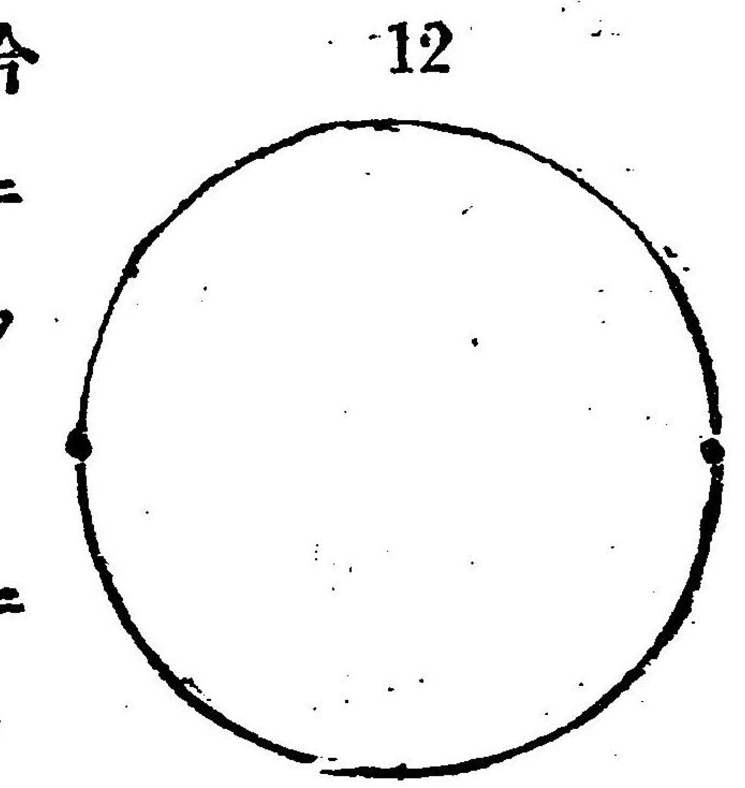
$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}\right)\times60x=\frac{16}{60}\times60x$

然ルトキハ　$60x\times\frac{1}{x}-60x\times\frac{1}{2x}=\frac{16}{60}\times60x$ …………(B)

(B) ヲ約メ　$60-30=16x$ ……………(C)

$\frac{60-30}{16}=x$

〔四〕 圓形ノ池アリ其周圍六十間アリ甲ハ一時間ニ一周シ乙ハ十二時間ニ一周スト云フ今二人 (12) ナル點ヲ發シ同方向ニ回ルトキ二人ノ位置正反對スル時ノ時間ヲ求ム




〔解〕 甲一時間ノ速力ハ 60 ニシテ乙一時間ノ速力ハ 5 ナルベシ
偖テ二人ノ位置正反對トナルニハ其里程ニ卅間ノ差ヲ生セザルベカラズ故ニ今 $x$ ヲ以テ求ムル所ノ時間トセバ下ノ等式アリ

$60x-5x=30$ ………………(A)

$55x=30$

$x=\frac{30}{55}=\frac{6}{11}=32$分 43秒$\frac{7}{11}$

〔五〕 今年父ハ四十二年ニシテ子ハ六年ナリ何年ノ後チ子ノ年ノ三倍カ父ノ年ト等シカルベキヤ

〔解〕 今求ムル處ノ年數ヲ $x$ ニテ表セバ題意ハ下式

ノ如シ

$42+x=(6+x)\times 3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$

$42+x=6\times 3+3\times x$

$42+x+(-x-18)=6\times 3+3\times x+(-x-18)$

$42+x-x-18=18+3\times x-x-18$

$42-18=2\times x$

$\frac{42-18}{2}=x$

〔六〕 甲乙二工アリ或ル事業ヲ甲ノミニテナストキハ 20 時間ニメ成効シ 乙ノミニテハ 4 時間ニメ成効スト云フ 今其事業ヲ甲若干時作事シタルニ甲所用アリテ作事ヲナスコ能ハヌ依テ乙甲ニ代リテ作事シ遂ニ其業ヲ成効セリト云フ而ノ甲乙作事ノ時間合計ハ六時間ナリト云フ然ルトキハ各何時宛働キタルヤ

〔解〕 今甲ノ働キシ時間數ヲ $x$ トセハ 乙ノ働キシ時間ハ $6-x$ ナルベシ然ルニ問題ニ依ルニ全事業ヲ 1 トセバ 甲一時間ノ働キハ $\frac{1}{20}$ 乙一時間ノ働キハ $\frac{1}{4}$ ナルベシ 故ニ下ノ等式アリ

$\frac{1}{20}x+\frac{1}{4}(6-x)=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$

(A) 式ハ即チ上ノ問題ヲ記號法ニテ表セル者ナリ 故ニ公理及ヒ原則ヲ應用シテ (A) 式ヨリ $x$ ノ價ヲ發見セハ



是レ即チ求ムル所ノ $x$ ノ價ナリ其方法如下

$\frac{1}{20}x+\frac{1}{4}(6-x)=1$

上ノ式之兩邊ヘ 20 ヲ乘セヨ

$20\left\{\frac{1}{20}x+\frac{1}{4}(6-x)\right\}=1\times 20$

$20\times\frac{1}{20}x+20\times\frac{1}{4}(6-x)=20$

$x+5(6-x)=20$

$x+30-5x=20$

$30-4x=20$

$30-4x+(4x-20)=20+(4x-20)$

$30-4x+4x-20=20+4x-20$

$10=4x$

$\frac{10}{4}=x$

〔七〕 男 50 人 女 40 人 童 30 人 ニテ 250円 ノ金ヲ配分セシニ男一人ノ取リ前ハ女一人ノ取リ前ノ $\frac{3}{2}$ 倍又童一人ノ取リ前ハ女一人ノ取リ前ノ $\frac{3}{5}$ 倍ニ等シト云フ依テ各人ノ取リ前ヲ求ム

〔解〕 今女一人ノ取リ前ヲ $x$ トセバ

男一人ノ取リ前ハ $\frac{3}{2}x$ ナリ

童一人ノ取リ前ハ $\frac{3}{5}x$ ナリ

$$\left.\begin{array}{l}\text{故ニ女 40 人ノ取リ前ハ } 40x \\ \text{男 50 人ノ取リ前ハ } 50\times\frac{3}{2}x \\ \text{童 30 人ノ取リ前ハ } 30\times\frac{3}{5}x\end{array}\right\}\text{ナリ}$$

題意ニ依ルニ此ノ 50 男 40 女 30 童ノ取リ前ノ和ハ 250円ナルヲ以テ次ノ等式アリ

$$50\times\frac{3}{2}x+40\times x+30\times\frac{3}{5}\times x=250$$

$$75x+40x+18x=250$$

$$133x=250$$

$$x=\frac{250}{133}$$



# 第三章
# 方程式解方原則

〔方程式〕 等號ヲ以テ記キ表ハサレタル式ヲ方程式ト云ヒ 等號ノ左邊ヲ前邊 右邊ヲ後邊ト云フ 例ヘバ $\frac{1}{20}x+\frac{1}{4}(6-x)=1$ ハ方程式ニシテ 其等式ノ左邊 $\frac{1}{20}x+\frac{1}{4}(6-x)$ ヲ前邊ト云ヒ 其等號ノ右邊 1 ヲ後邊ト稱スルナリ

〔名稱〕 方程式ハ未知數ノ數ニ依リテ何元ノ方程式ト稱ス 未知數一個ナルトキハ一元方程式ト云ヘ 未知數二個ナルトキハ二元方程式ト稱シ 三ツナレバ 三元方程式ト稱ス

又此外ニ次數ヲ呼ビテ 何元何次方程式 ト云フ即チ通常論スル所ノ方程式ハ

一元 一次 方程式……………
二元 一次 方程式……………
三元 一次 方程式……………
四元 一次 方程式…………… 是レナリ
五元 一次 方程式……………

一元　二次　方程式………………
二元　二次　方程式………………

一次，二次，三次，四次，等ト稱スルハ未知數ノ右ノ肩ニ小サク書キタル數字ニ依リテ稱スル者ニシテ $x^1$ ヲ $x$ ノ一次 $x^2$ ヲ $x$ ノ二次 $x^3$ ヲ $x$ ノ三次ト云フ其他之レニ倣フ　而ノ方程式ノ次數ハ其方程式中ニ含有セル未知數ノ最高次數ヲ取リテ名稱スル者ナリ　例ヘハ $a.$ $b.$ $c.$ $d.$ ヲ以テ一定數トシ $x.$ $y.$ $z.$ ヲ以テ未知數トセハ

$ax=b$　ハ　一元一次方程式
$ax+by=c$　ハ　二元一次方程式
$ax+by+cz=d$　ハ　三元一次方程式
…………………………　ハ　…………………
…………………………　ハ　…………………
$ax^2+bx=c$　ハ　一元二次方程式
$ax^2+bxy+y^2=c$　ハ　二元二次方程式
…………………………　ハ　…………………
…………………………　ハ　…………………
$ax^3+bx^2+cx=d$　ハ　一元三次方程式
$ax^3+bxy+cxy^2+dy^3=e$　ハ　二元三次方程式
…………………………　…………………



…………………………　…………………

此ノ外類知スヘシ

本章ノ所說ハ方程式全般ニ關スル定理ナリ

［定理第一］ 方程式ノ一邊ヨリ他ノ一邊ヘ任意ノ項ヲ移スキハ　其項ノ符號ヲ反對トナスヘシ

例ヘハ　$a+b-c=x-y+z$………(A)　ナル方程式ニ於テ前邊ニアル $-c$ ヲ後邊ヘ移サンニハ其符號ヲ反對トナシテ後邊ヘ記入スヘシ

即チ　$a+b=x-y+z+c$………(B)　トナスヘキナリ

何トナレハ參理ニ依リテ知ル如ク方程式ノ兩邊ヘ同數ヲ加フルモ又其結果ハ方程式ナルヘシ依 $+c$ ヲ兩邊ニ加フ〔$a+b-c+c=x-y+z+c$〕ルキハ (A) 式變シテ (B) 式トナルヘシ

［注意］ 定理第一　ヲ轉項法ノ法則ト云フ（一次方程式ニ於ケル轉項法ノ一般ノ法則ハ未知數ヲ悉ク前邊ヘ移シ既知數ヲ悉ク後邊ヘ移スナリ）

## 例題

〔一〕 $2x+25-5x=28-75x$ ニ於テ $x$ ヲ前邊ヘ既知數ヲ後邊ヘ移スヘシ

$$2x+75x-5x=28-25$$

〔二〕 $5(x+3)+6=37-3(4-x)$ ニ於テ $x$ ヲ前邊ヘ既知數ヲ後邊ヘ移スベシ

此ノ如キ例題ハ先ツ括弧ヲ原則ニ依リテ脫去シ然ル後チニ轉項法ヲ行フベシ 脫弧スル𪜈ハ (A) トナルベシ

$$5(x+3)+6=37-3(4-x)$$

$$(5x+15)+6=37-(12-3x)$$

$$5x+15+6=37-12+3x \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

此ノ (A) 式ニ轉項法ヲ施スナリ余モ亦之レニ倣ヘ

〔三〕 $7-2\{5x-4(x+2)\}=0$ ニ於テ $x$ ヲ前邊ヘ已知數ヲ後邊ヘ移スベシ

上式ノ如ク數多ノ括弧ニ依リテ成立セル方程式ヲシテ轉項センニハ中ニアル括弧ヨリ脫去シテ次第々々ニ其外方ニ及ホスベキ者ナリ

$$7-2\{5x-4(x+2)\}=0$$

$$7-2\{5x-(4x+8)\}=0$$

$$7-2\{5x-4x-8\}=0$$

$$7-2\{x-8\}=0$$

$$7-\{2x-16\}=0$$

$$7-2x+16=0$$

$$-2x=-16-7$$



〔四〕 $7-2\{5x-4(x+2)\}=5(x+3)+3(4-x)-31$ ナル式ヲ轉項シテ $x$ 前邊ニアリ已知數後邊ニアル一新方程式ヲ作ルベシ

前邊ヲ脫弧演算セバ $23-2x$

後邊ヲ脫弧演算セバ $2x-4$

即チ與ヘラレタル式ハ $23-2x=2x-4$

トナル之ヲ轉項セバ $-2x-2x=-4-23$ ナリ

〔定理第二〕 與ヘラレタル方程式ノ符號ヲ悉ク反記スルモ妨ケナシ

例ヘハ $a+b-c=x-y+z \cdots\cdots (1)$ ナル方程式ヲシテ此 $-a-b+c=-x+y-z \cdots\cdots (2)$ ノ如クナシ得ベシ 何トナレバ公理ニ依リテ知ル如ク (1) ナル方程式ノ兩邊ニ同數ヲ乘スルモ其結果等シカルベキヲ以テ此ノ兩邊ヘ (−1) ヲ乘スルモ可ナルベキヲ知ル (1) 式ノ兩邊ヘ〔−1〕ヲ乘スル𪜈ハ (2) 式ヲ得ベシ

〔別證〕 $P=P$

$$\frac{a+b-c=x-y+z}{P-(a+b-c)=P-(x-y+z)}$$

$$P-a-b+c=P-x+y-z$$

此ノ兩邊ヨリ P ヲ減スル𪜈ハ

$$-a-b+c=-x+y+z$$

即チ證明ヲ得タリ

〔定理第三〕 方程式ノ兩邊ニ任意ノ數ヲ乘スルモ其方程式ノ答ハ變スルヿナシ 但未知數ヲ含マサル者トス

例ヘハ $x=A$ ナル方程式アランニ此ノ方程式ノ兩邊ニ M ト云フ任意數ヲ乘スルトモ其答ハ變セズ即チ $x=A$ ナル式ヨリ得ル $x$ ノ答モ

$Mx=AM$ ヨリ得ル $x$ ノ答モ全ク同一ノ者ナリ

如何トナレハ $Mx=AM$ ナル式ハ

$$Mx-MA=0$$

$$M(x-A)=0$$

借テ $M(x-A)=0$ ナランニハ其二因子中少クモ一個ハ必ラス 0 ナラサルヘカラス然ルニ M ハ 0 タルヿヲ得ズ依テ $x-A=0$ ナラシ $x-A$ カ 0 ナランニハ $x=A$ ナルヘシ

〔注意〕此ノ定理ハ去分法第一種ノ定理ニシテ與ヘラレタル分數方程式ノ分母ガ既知數ヨリナルトキニ應用シテ其分母ヲ去ル者ナリ

## 應用

〔一〕 $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=9$ ナル方程式ヲシテ分母ヲ有セサル方程式ニ化スヘシ



『總與ヘラレタル分數方程式ヲシテ分母ヲ有セサル方程式ニ化サンニハ 各分母ノ最小公倍數ヲ求メ與ヘラレタル分數方程式ノ兩邊ニ乘ズヘシ』

今本問題ニ於テ各分母ノ最小公倍數ヲ求ムルトキハ 12 ナリ

$$12\left\{\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right\}=9\times12$$

$$12\times\frac{x}{3}+12\times\frac{x}{4}+12\times\frac{x}{6}=108$$

$$4x+3x+2x=108$$

此ノ式ハ去分ヲナシタル方程式ナリ

〔二〕 下式ヲ去分スヘシ

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x-2}{3}=3$$

$$6\left\{\frac{x+1}{2}+\frac{x-2}{3}\right\}=3\times6$$

$$6\times\frac{x+1}{2}+\frac{x-2}{3}\times6=3\times6$$

$$3(x+1)+2(x-2)=18$$

$$3x+3+2x-4=18$$

此式ハ去分セシ所ノ方程式ナリ

〔三〕 下式ヲ去分スヘシ

$$\frac{x+1}{4}-\frac{x-1}{3}=\frac{3x-5}{6}+\frac{2x+1}{4}-5$$

$$12\left\{\frac{x+1}{4}-\frac{x-1}{3}\right\}=12\left\{\frac{3x-5}{6}+\frac{2x+1}{4}-5\right\}$$

$$12\times\frac{x+1}{4}-12\times\frac{x-1}{3}=12\times\frac{3x-5}{6}+12\times\frac{2x+1}{4}-12\times5$$

$$3(x+1)-4(x-1)=2(3x-5)+3(2x+1)-60$$

$$(3x+3)-(4x-4)=(6x-10)+(6x+3)-60$$

$$3x+3-4x+4=6x-10+6x+3-60$$

是レ去分セシ處ノ方程式ナリ

〔定理第四〕 方程式ノ兩邊ヘ或ル未知數ヲ含ム式ヲ乘スルトキハ 此ノ方程式ノ答ハ與ヘラレタル方程式ノ答ノ外余分ノ答ヲ含ムベシ即チ其余分ノ答ハ 乘式ヲ0トナシテ得ル所ノ價ナリ

例ヘハ $x=A$ ナル方程式アランニ此ノ兩邊ニ $x-M$ ナル式ヲ乘シテ得タル新方程式ヲ解クトキハ $x=A$ ノ外ニ余分ノ答 $x=M$ ヲ得ベシ

如何トナレバ $(M-x)x=(M-x)A$ ハ

$(M-x)x-(M-x)A=0$ トナリ

$(M-x)(x-A)=0$ トナル

二因子ノ積0ナルヲ以テ $\left.\begin{matrix}M-x=0\\x-A=0\end{matrix}\right\}$ ト考フルコヲ得ベシ $\left.\begin{matrix}M-x=0 \text{ ナレバ } M=x\\x-A=0 \text{ ナレバ } A=x\end{matrix}\right\}$ ナリ

〔解〕 方程式ノ兩邊ヲ未知數ヲ含ミタル或ル式ニテ除スルトキハ 此ノ新方程式ハ原方程式ヨリモ不足ナル答ヲ得ベシ 其不足ナル答ハ 除式ヲ0トシテ得ベキ $x$ ノ價ナリ



〔補〕 高等數學ノ証明スル所ニ依レハ『或ル方程式ヲ解キテ得ベキ $x$ ノ答根ノ數ハ其方程式ノ次數ニ等シ』例ヘハ二次方程式ナレハ二ツノ答アリ 三次方程式ナレバ三ツ四次ナレバ四ツアリ

〔注意〕 此ノ定理ヲ去分法第二種ノ定理ト云ヒ未知數ヲ含ム或ル式ヲ分母トナシタル方程式ヲ去分スルトキニ應用スル者ナリ

未知數ヲ含ム或ル式ヲ分母トナシタル方程式ヲ解クニハ

〔第一〕 各分母ノ最低公倍數ヲ求メ是レヲ兩邊ニ乘シテ整方程式トナシテ其方程式ノ答ヲ發見スベシ

〔第二〕 其ノ內ニ於テ乘式ヲ 0 トナシテ得タル者ト同價ナル者アラハ此ノ答ハ原方程式ノ答トナルベキ者ナルヤ否ヤヲ驗スベシ

# 第四章

# 一元一次方程式

本章ニハ　一元一次方程式ノ解法ヲ論ゼントス

一元一次方程式ヲ解カンニハ與ヘラレタル方程式ヲ變化シテ $A\times x=B$ ノ形狀トナスベシ

其方法ハ以下ノ所説ヲ以テ知ルベシ上式ニ於テ A, B, ハ或ル一定ノ既知數ナリトス

## 〔化法之規則〕

〔第一〕 與ヘラレタル方程式分數式ナルトキハ　各分母ノ最小公倍數（或ハ最低公倍數）ヲ求メテ其方程式ノ兩邊ニ乘スベシ

〔第二〕 未知數ヲバ悉ク左邊ヘ移シ既知數ヲバ悉ク右邊ヘ移スベシ

〔第三〕 前邊及ヒ後邊ニアル處ノ者ヲ夫々合一スベシ

〔化法之約言〕 去分，轉項，合一，セヨ

## 應　用

〔一〕 $13x-7=5x+9$ ヲ化セヨ　轉項シテ

$13x-5x=9+7$ 合一シ $8x=16$



〔二〕 $3(x-1)-4(x-5)+5(x-6)=3(x-18)$ ヲ化セヨ　此式ヲ轉項センニハ脫弧ノ後ニセサルベカラス今逐一其演ヲ示サン

脫弧シ　$3x-3-4x+20+5x-30=3x-54$

轉項シ　$3x-4x+5x-3x=-54+3-20+30$

合一シ　$x=-41$

〔三〕 $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x-2}{3}=3$ ヲ化スベシ

$$6\times\left\{\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}\right\}=3\times 6$$

$$6\times\frac{x-1}{2}+6\times\frac{x-2}{3}=3\times 6$$

$3(x-1)+2(x-2)=18$　以上ハ去分法

$3x-3+2x-4=18$

$3x+2x=18+4+3$　以上ハ轉項法

$5x=25$　是レハ合一法

余ハ之レニ傚ヘ

〔注意〕 去分，轉項，合一，ノ三法ハ　總テノ一元一次方程式ノ形狀ヲシテ簡易ナラシムル者ニシテ方程解法ノ巧拙ハ全ク此ノ三法ニアリ

〔解法之規則〕 一元一次方程式解法ノ規則ヲ示スコ次ノ如シ

〔第一〕化法ヲ施シ $Ax=B$ ノ形狀トナス

〔第二〕$x$ ノ前ナル數 A ニテ B ヲ除シテ得タル商ヲ求ムル所ノ $x$ ノ價トナス

〔第三〕今得タル $x$ ノ價ガ其式ト其問題トニ滿足ナルヤ否ヤヲ驗ス

## 應用

〔一〕$\frac{x}{2}+2=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$ ナル式ヲ解ケ

去分シ $2x+8=x+10$

轉項シ $2x-x=10-8$

合一シ $1x=2 \quad \therefore x=\frac{2}{1}=2$

〔二〕$\frac{x+1}{4}-\frac{x-1}{3}=1$ ナル式ヲ解ケ

去分シ $3x+3-4x+4=12$

轉項シ $3x-4x=12-3-4$

合一シ $-1x=5 \quad \therefore x=\frac{+5}{-1}=-5$

〔注意〕$x$ ノ價此ノ如ク負數トナルヿアラハ是レ與ヘシ處ノ問題ニ不都合アルヿヲ証スル者ナリ

次ノ二例ヲ見バ容易ニ知ルヿヲ得ン

〔甲〕兄ハ 72 弟ハ 48 ナリ 弟ノ年ノ五倍ガ兄ノ年ト等シカリシハ何年前ナルヤ 答 42

〔乙〕兄ハ 72 弟ハ 48 ナリ 弟ノ年ノ五倍ガ兄ノ年ト



等シカリシハ何年後ナルヤ 答 −42

今甲ヲ解クトキハ 42 ヲ得ルナレドモ乙ヲ解クトキハ −42 トナリテ題ニ合スルヿ能ハズ故ニ實地ノ問題タルヿ能ハズ〔乙〕ヲシテ實地ノ問題トナサンニハ未知數ヲ反對ニセザルベカラズ即チ後ト云フ字ヲ前ト云フ字ニ訂サヾルベカラズ

『總テ問題ヲ解キテ負答ヲ得ルトキハ與ヘラレタル問題ノ或ル文言ヲ訂正シテ反對トナスベシ』

此ノ法則ヲデカルト氏ノ解義方則ト云フ

〔三〕$3(x-2)=2(x-3)$ ナル式ヲ解ケ

$3x-6=2x-6$

$3x-2x=-6+6$

$x=0$

〔注意〕此ノ如キ答ヲ得ル方程式ヲ虛飾方程式ト云フ例ヘハ玆ニ甲乙ト云フ二人同等ノ資本ヲ以テ商業ヲナシ互ニ其資金ヲ談スルアリ曰ク甲ノ資本金ヨリ二圓ヲ減シ之レヲ三倍スルモ乙ノ資金ヨリ三圓ヲ減シテ之レヲ二倍スルモ其金額ハ相等シト云フ依テ其所持金ヲ求ム（其式上ノ如シ）

〔四〕$72+x=48+x$ ナル式ヲ解ケ

$$72-48=0x$$

$$\frac{72-48}{0}=x$$

$\frac{24}{0}$ ハ如何ナル者ナリヤヲ考ヘンニハ $\frac{1}{0}$ ハ果シテ如何ナル者ナルベキヤヲ研究スルヲ要ス

$\frac{1}{0}$ ノ如何ナル者ナルヤヲ研究センニハ 0 トハ果ノ如何ナル者ナルベキヤヲ思考セサルベカラズ 即チ 0 トハ整數上ニテ最小ノ極限ト思考スルヲ以テ必要トス

今茲ニ $\dfrac{\quad}{10\text{ノ右ニ}0\text{一万個書キタル者ニテ}} > 0$ ナルベシ今此ノ不等式ニテ 1 = 1 ナル式ヲ除スルトキハ下ノ式アリ

$$10\text{ノ右ニ}0\text{一万個書キタル數} < \frac{1}{0}$$

此ノ如クニナシテ $\frac{1}{0}$ ハ吾人ノ書シ得ベキ如何樣ナル大數ヨリモ大ナルコヲ証明シ得ヘシ故ニ $\frac{1}{0}$ 無究大ナルコヲ知ル通常無究大ノ記號ニ $\infty$ ヲ用ヒルナリ

此ノ如ク $\frac{1}{0}=\infty$ ナルヲ以テ $\frac{24}{0}=24\times\frac{1}{0}=24\times\infty=\infty$

〔五〕 $5x-8=2+5x-8$ ナル式ヲ解ケ

$$5x-5x=2-8+8$$

$$(5-5)x=8-8$$

$$0x=0$$

$$x=\frac{0}{0}$$



今茲ニ得タル $\frac{0}{0}$ ハ果ノ如何ナル者ナルヤヲ研究センニハ $0x=0$ ニ注意セサルベカラズ

$0\times x$ トハ 0 ヲ $x$ 個取リテ加ヘ合スルコニシテ 0 ナリ

又 $0\times2=0,\quad 0\times(-2)=0,$

$0\times3=0,\quad 0\times(-3)=0,$

$0\times4=0,\quad 0\times(-4)=0,$

$0\times5=0,\quad 0\times(-5)=0,$

………… ……………

………… ……………

………… ……………

上ノ諸方程式ヨリ下表ヲ得ル故ニ $\frac{0}{0}$ ヲ不定數ト云フ

$2=\frac{0}{0}\quad -2=\frac{0}{0}$

$3=\frac{0}{0}\quad -3=\frac{0}{0}$

$4=\frac{0}{0}\quad -4=\frac{0}{0}$

$5=\frac{0}{0}\quad -5=\frac{0}{0}$

〔結論〕 以上ノ五例題ハ一元一次方程式ニ於テ起リ得ベキ總テノ場合ヲ盡セシ者ナリ

〔驗算〕 $x$ ノ價ヲ見出シタル後チ此ノ價格果シテ正格ナルヤ否ヤヲ試ミサルベカラス今下ニ其方法ヲ示スベシ

例ヘハ　例題第一ノ方程式 $\frac{x}{2}+2=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$ ヲ解キテ $x=2$ ヲ得タリ　此ノ答正當ナルヤ否ヤヲ驗センニハ與方程式ニ於テ $x$ ノ代リニ 2 ヲ入ルヽトキ前邊ト後邊ト等シクナルヤ否ヤヲ驗スルニアルナリ　若シ不等ナルトキハ求ムル處ノ $x$ ノ價ハ 2 ナルコト能ハス

今與方程式ニ於テ $x$ ノ代リニ 2 ヲ入ルトキハ前邊ハ $\frac{2}{2}+2=1+2=3$ 後邊ハ $\frac{2}{4}+\frac{5}{2}=\frac{12}{4}=3$ トナリテ適當セリ故ニ $x=2$ ハ正當ナルコトヲ知ル

## 演習問題

(1) $4x+6=5x+2$

(2) $2x+7=3x+5$

(3) $5x-12=6x-8$

(4) $7x+19=5x+7$

(5) $3(x-2)=2(x-3)$

(6) $5(x+2)=3(x+3)+1$

(7) $x-(4-2x)=7(x-1)$

(8) $5(4-3x)=7(3-4x)$

(9) $2(x-3)=5(x+1)+2x-1$

(10) $4(1-x)+3(2+x)=13$

(11) $2(x-2)+3(x-3)+(x-4)4-20=0$

(12) $2(x-1)+3(x-2)+4(x-3)+2=0$

(13) $5x+6(x+1)-7(x+2)-8(x+3)=0$

(14) $1-2\{x-3(6+x)\}=0$

(15) $2x-[3-\{4x+(x-1)-5\}=8$

(16) $x+\frac{2}{3}x=10$

(17) $\frac{x}{5}-\frac{x}{4}=1$



(18) $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}=3$

(19) $\frac{1}{4}(x+1)-\frac{2}{3}(x-1)=2$

(20) $\frac{1}{2}(2-x)-\frac{1}{5}(5x+21)=x+3$

(21) $\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-4)=0$

(22) $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}(x+2)+\frac{1}{4}(x+3)+8=0$

(23) $\frac{1}{2}(x-5)-\frac{1}{3}(x-4)=\frac{1}{2}(x-3)-(x-2)$

(24) $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}(x+2)+\frac{1}{4}(x+3)=16$

(25) $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}\left(2x-\frac{1}{2}\right)+1\frac{1}{4}=0$

# 第五章

# 二元一次方程式

二元一次方程式トハ二未知數ヲ含ム所ノ方程式ノ事ナリ例ヘハ $x-3y=24$ ノ如キハ $x, y,$ ヲ含ム所ノ二元一次方程式ナリ $Ax+By=c$ モ亦然リ

二元方程式ニ於テハ二ツノ方程式ナキ時ハ其未知數ヲ決定スルコ能ハス　例ヘハ甲乙二人ノ所持金ハ合セテ 50 圓ナリ依リテ甲乙二人ノ所持金ヲ求ムルト云フ問題アラハ此ノ問題ヨリノ甲ハ何程乙ハ何程ト決定スルコ能ハズ甲乙各ノ所持金ヲ決定スルニハ他ニ又一ツノ關係アルヲ必要トナス今上ノ問題ニ於テ例ヘハ甲ノ三倍ハ乙ノ二倍ニ等シト云フ關係アラバ　甲ハ 20円 乙ハ 30円 ナルコヲ決定シ得ベシ　上ノ二關係ヲ組ミ立ツル時ハ下ノ如シ

甲ノ所有ヲ $x$ 乙ノ所有ヲ $y$ トセバ

$$x+y=50$$

$$3x=2y$$

上ノ方程式ヲ二組ノ方程式ト云フ　二元一次方程式ノ解カルベキ要件ハ　方程式ノ數二組アルヲ必要トス（一般ニ $m$ 元ナレバ $m$ 個アルコヲ要ス）



## 二元一次方程式解法

二元一次方程式ヲ解カンニハ先ツ與ヘラレタル二方程式ヲ變シテ下ノ二形トナスニ在リ

$$Ax+By=C$$

$$Dx+Ey=F$$

與ヘラレタル二方程式ヲ上ノ二形トナス法ヲ簡易形ニ化スルト云フ

### 〔簡易形化法〕

〔第一〕 與ヘラレタル方程式分數式ナル時ハ　各分母ノ最小公倍數（又ハ最低公倍數）ヲ求メテ其方程式ノ兩邊ヘ乘スベシ

〔第二〕 後邊ニ未知數アラバ悉ク前邊ヘ移シ又前邊ニ既知數アラバ悉ク後邊ヘ移スベシ

〔第三〕前邊ニ於テハ $x$ ヲ合一シ又 $y$ ヲ合一シ後邊ニ於テハ既知數ヲ合一スベシ

〔化法之約言〕 去分，轉項，合一，セヨ

### 應用

〔一〕 下式ヲ簡易形ニ化スベシ

$$3x-4y+x=5x-6y-2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$3x-4y+2=7x+2y+4 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

〔第一式ノ變形法〕 $3x-4y+x=5x-6y-2 \cdots\cdots\cdots (1)$

第二則ニ依リテ $3x-5x-4y+6y+x=-2$

第三則ニ依リテ $-x+2y=-2$

〔第二式ノ變形法〕 $3x-4y+2=7x+2y+4 \cdots\cdots\cdots (2)$

第二則ニ依リテ $3x-7x-4y-2y=4-2$

第三則ニ依リテ $-4x-6y=2$

$$\left.\begin{array}{l}-x+2y=-2\\ -4x-6y=2\end{array}\right\}\text{ハ所要ノ形狀ナリ}$$

〔二〕 下式ヲ簡易形ニ化スベシ

$$4x-\frac{1}{3}(y-3)=5x-3 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$2y+\frac{1}{3}(2x-5)=\frac{21y+37}{6} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

〔第一式ノ變形法〕 $4x-\frac{1}{3}(y-3)=5x-3 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

第一則ニ依リテ $12x-y+3=15x-9$

第二則ニ依リテ $12x-15x-y=-9-3$

第三則ニ依リテ $-3x-y=-12$

〔第二式ノ變形法〕 $2y+\frac{1}{3}(2x-5)=\frac{1}{6}(21y+37) \cdots\cdots\cdots (2)$

第一則ニ依リテ $12y+4x-10=21y+37$

第二則ニ依リテ $4x+12y-21y=37+10$



第三則ニ依リテ $4x-9y=47$

$$\left.\begin{array}{l}-3x-y=-12\\ 4x-9x=47\end{array}\right\}\text{ハ所要ノ形狀ナリ}$$

〔定理〕 $\left.\begin{array}{l}Ax+By=C\\ Dx+Ey=F\end{array}\right\}$ナル方程式ニ於テ

$$y=\frac{A\times F-D\times C}{A\times E-B\times D}\quad \text{ナリ}$$

〔證明〕 $Ax+By=C$ ヨリ $x=\frac{C-By}{A}$

$Dx+Ey=F$ ヨリ $x=\frac{F-Ey}{D}$

此ノ二式ニ於ケル $x$ ノ價格相等シカルベキ故 $\frac{C-By}{A}=\frac{F-Ey}{D}$ ナリ

此ノ式ヲ見ルニ $y$ ノミヲ含メル所ノ一元一次方程式ナリ故ニ其解方規則ニ依リテ $y$ ノ價ヲ求メ得ベシ

第一則ニ依リテ $D\times C-B\times D\times y=F\times A-E\times A\times y$

第二則ニ依リテ $E\times A\times y-B\times Dy=A\times F-D\times C$

第三則ニ依リテ $(E\times A-B\times D)y=A\times F-D\times C$

故ニ $y=\frac{A\times F-D\times C}{A\times E-B\times D}$ ナルヿヲ知リ得タリ

〔注意〕 與ヘラレタル二元一次ノ方程式ヨリ $y$ ノ答ヲ發見セントニハ下ノ如クスベシ

$$\left.\begin{array}{lcr}(+A) & \times & {}^{-}(+B)\\ (+D) & & (+E)\end{array}\right\}\text{分母}\qquad \left.\begin{array}{lcr}(+A)^{+} & \times & {}^{-}(+C)\\ (+D) & & (+F)\end{array}\right\}\text{分子}$$

上ヨリ下ル者ハ符號ノ順　下ヨリ上ル者ハ符號ノ反對トナシテ角線ノ如ク試算スベシ

## 應用

〔一〕 $\left.\begin{array}{l} 114x+16y=500 \\ 9x+6y=14 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

$$\begin{array}{cc} (+114)^{+} & {}^{-}(+16) \\ (+\ 9) & (+\ 6) \end{array}\Bigg|\text{分母} \qquad \begin{array}{cc} (+114)^{+} & {}^{-}(+550) \\ (+\ 9) & (+\ 14) \end{array}\Bigg|\text{分子}$$

$$y=\frac{114\times14-500\times9}{114\times6-16\times9}$$

〔二〕 $\left.\begin{array}{l} 114x-16y=500 \\ 9x+6y=14 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

$$\begin{array}{cc} (+114)^{+} & {}^{-}(-16) \\ (+\ 9) & (+\ 6) \end{array}\Bigg|\text{分母} \qquad \begin{array}{cc} (+114)^{+} & {}^{-}(+500) \\ (+\ 9) & (+\ 14) \end{array}\Bigg|\text{分子}$$

$$y=\frac{114\times14-500\times9}{114\times6+9\times16}$$

〔三〕 $\left.\begin{array}{l} 114x+16y=-500 \\ 9x+6y=14 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

$$\begin{array}{cc} (+114)^{+} & {}^{-}(+16) \\ (+\ 9) & (+\ 6) \end{array}\Bigg|\text{分母} \qquad \begin{array}{cc} (+114)^{+} & {}^{-}(-500) \\ (+\ 9) & (+\ 14) \end{array}\Bigg|\text{分子}$$

$$y=\frac{114\times14+500\times9}{6\times114-16\times9}$$

〔四〕 $\left.\begin{array}{l} 114x+16y=-500 \\ 9x-6y=14 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ



$$\begin{array}{cc} (+114)^{+} & {}^{-}(+16) \\ (+\ 9) & (-\ 6) \end{array}\Bigg|\text{分母} \qquad \begin{array}{cc} (+114)^{+} & {}^{-}(-500) \\ (+\ 9) & (+14) \end{array}\Bigg|\text{分子}$$

$$y=\frac{114\times14+500\times9}{-114\times6-16\times9}$$

〔五〕 $\left.\begin{array}{l} 114x+16y=-500 \\ 9x-6y=-14 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ $y=\dfrac{-114\times14+500\times9}{-114\times6-16\times9}$

〔六〕 $\left.\begin{array}{l} 114x-16y=-500 \\ 9x-6y=-14 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

$$\begin{array}{cc} (+114)^{+} & {}^{-}(-16) \\ (+\ 9) & (-\ 6) \end{array}\Bigg|\text{分母} \qquad \begin{array}{cc} (+114)^{+} & {}^{-}(-500) \\ (+\ 9) & (-\ 14) \end{array}\Bigg|\text{分子}$$

$$y=\frac{-114\times14+500\times9}{-114\times6+16\times9}$$

〔七〕 $\left.\begin{array}{l} -14x+16y=-500 \\ +9x+6y=-14 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

$$\begin{array}{cc} (-114)^{+} & {}^{-}(+16) \\ (+\ 9) & (+\ 6) \end{array}\Bigg|\text{分母} \qquad \begin{array}{cc} (-114)^{+} & {}^{-}(-500) \\ (+\ 9) & (-\ 14) \end{array}\Bigg|\text{分子}$$

$$y=\frac{+114\times14+500\times9}{-114\times6-16\times9}$$

〔八〕 $\left.\begin{array}{l} -114x+16y=500 \\ +9x+6y=14 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

$$\begin{array}{cc} (-114)^{+} & {}^{-}(+16) \\ +\ \ 9) & (+\ 6) \end{array}\Bigg|\text{分母} \qquad \begin{array}{cc} (-114)^{+} & {}^{-}(+500) \\ (+\ 9) & (+\ 14) \end{array}\Bigg|\text{分子}$$

$$y=\frac{-500\times9-114\times14}{-114\times6-16\times9}$$

〔九〕 $\left.\begin{array}{l} 2x-3y+14=0 \\ -4x+5y-26=0 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

轉項シテ $\left.\begin{array}{l} 2x-3y=-14 \\ -4x+5y=26 \end{array}\right\}$ トナル　是ノ式ヨリ $y$ ヲ求レバ可ナリ

〔十〕 $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1 \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{2y}{3}=3 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

去分シテ $\left.\begin{array}{l} 3x+2y=6 \\ 3x-8y=36 \end{array}\right\}$ トナル

〔十一〕 $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}+3y=-14 \\ \dfrac{x}{5}+5y=-4 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

去分セバ $\left.\begin{array}{l} x+9y=-42 \\ x+25y=-20 \end{array}\right\}$ トナル

〔十二〕 $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{5}(2x+3y)+\dfrac{1}{7}(y+6)-2=0 \\ \dfrac{1}{3}(2x-5y)+\dfrac{1}{4}(x+y)-1=0 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

去分法ヲ $\left.\begin{array}{l} 7(2x+3y)+5(y+6)-70=0 \\ 4(2x-5y)+3(x+y)-12=0 \end{array}\right\}$

行ヒバ $\left.\begin{array}{l} 14x+21y+5y+30-70=0 \\ 8x-20y+3x+3y-12=0 \end{array}\right\}$



轉項セバ $\left.\begin{array}{l} 14x+21y+5y=70-30 \\ 8x+3x-20y+3y=12 \end{array}\right\}$

合一セバ $\left.\begin{array}{l} 14x+26y=40 \\ 11x-17y=12 \end{array}\right\}$ トナル

〔十三〕 $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}(y-2)-\dfrac{1}{4}(x-3)=0 \\ x-\dfrac{1}{2}(y-1)-\dfrac{1}{3}(x-2)=0 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

去分法ヲ $\left.\begin{array}{l} 6x-4(y-2)-3(x-3)=0 \\ 6x-3(y-1)-2(x-2)=0 \end{array}\right\}$

行フトハ $\left.\begin{array}{l} 6x-4y+8-3x+9=0 \\ 6x-3y+3-2x+4=0 \end{array}\right\}$

轉項セバ $\left.\begin{array}{l} 6x-3x-4y=-9-8 \\ 6x-2x-3y=-3-4 \end{array}\right\}$

合一セバ $\left.\begin{array}{l} 3x-4y=-17 \\ 4x-3y=-7 \end{array}\right\}$ トナル

〔十四〕 $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{x}{y+1}=\dfrac{1}{3}\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$ ヲ解ケ

去分セバ $\left.\begin{array}{l} 2=x+y \\ 3x=y+1 \end{array}\right\}$ 其法 (1) ノ兩邊ヘ $2(x+y)$ ヲ (2) ノ兩邊ヘ $3(y+1)$ ヲ乗ズ

轉項セバ $\left.\begin{array}{l} -x-y=-2 \\ 3x-y=+1 \end{array}\right\}$ トナル

〔十五〕 $$\left.\begin{array}{l}\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=8\\ \frac{5}{x}+\frac{6}{y}=13\end{array}\right\}$$ ヲ解ケ

$$\left.\begin{array}{l}3\left(\frac{1}{x}\right)+4\left(\frac{1}{y}\right)=8\\ 5\left(\frac{1}{x}\right)+6\left(\frac{1}{y}\right)=13\end{array}\right\}$$ ト云フ式ニ化ス

$$\begin{array}{ccc}(+3) & \times & (+4)\\ (+5) & & (+6)\end{array}\Bigg|\text{分母}\qquad \begin{array}{ccc}(+3) & \times & (+8)\\ (+5) & & (+13)\end{array}\Bigg|\text{分子}\qquad \frac{1}{y}=\frac{39-40}{18-20}$$

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\quad\therefore\quad 2=y$$

〔十六〕 $$\left.\begin{array}{l}\frac{5}{6x}+\frac{8}{2y}=1\\ \frac{8}{6x}+\frac{5}{2y}=3\end{array}\right\}$$ ヲ解ケ

$$\left.\begin{array}{l}5\left(\frac{1}{6x}\right)+8\left(\frac{1}{2y}\right)=1\\ 8\left(\frac{1}{6x}\right)+5\left(\frac{1}{2y}\right)=3\end{array}\right\}$$ ト云フ式ニ化ス

$$\begin{array}{ccc}5 & \times & 8\\ 8 & & 5\end{array}\Bigg|\text{分母}\qquad \begin{array}{ccc}5 & \times & 1\\ 8 & & 3\end{array}\Bigg|\text{分子}\qquad \left(\frac{1}{2y}\right)=\frac{15-8}{25-64}$$

$$\left(\frac{1}{2y}\right)=-\frac{7}{39}\quad\therefore\quad 39=-14y,\quad y=\frac{39}{-14}$$

〔十七〕 $$\left.\begin{array}{l}\frac{5}{6x}+\frac{81}{2y}=1\\ \frac{81}{2x}+\frac{5}{6y}=2\end{array}\right\}$$ ナル式ヲ解ケ

$$\left.\begin{array}{l}\frac{5}{6}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{81}{2}\left(\frac{1}{y}\right)=1\\ \frac{81}{2}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{y}\right)=2\end{array}\right\}$$ ト云フ式ニ化ス



去分シテ $$\left.\begin{array}{l}5\left(\frac{1}{x}\right)+243\left(\frac{1}{y}\right)=6\\ 243\left(\frac{1}{x}\right)+5\left(\frac{1}{y}\right)=12\end{array}\right\}$$ トナシテ $\left(\frac{1}{y}\right)$ ヲ求ムルニアリ其方法上ト同シキヲ以テ略ス

〔結論〕與ヘラレタル二元一次方程式ヲ解カント欲セバ　先ツ與ヘラレタル二方程式ヲ簡易形ニ化シテ $y$ ノ價格ヲ發見スルヿアリ

與方程式ヲ簡易形ニ化サンニハ與方程式ノ形狀ニ應シテ去分　轉項　合一　等ノ三種ヲ用ユベシ又其中任意ノ一二種ヲ用ユベシ

$y$ ノ價ヲ知ルヿヲ得バ $x$ ノ價ヲ知ルヿ亦容易ナリ

## 演習問題

$$\left.\begin{array}{l}7x+4y=1\cdots\cdots\\ 9x+4y=3\cdots\cdots\end{array}\right\}1$$

$$\left.\begin{array}{l}2x+5y=19\cdots\cdots\\ 5x-4y=7\cdots\cdots\end{array}\right\}2$$

$$\left.\begin{array}{l}x-11y=1\cdots\cdots\\ 9x+111y=99\cdots\cdots\end{array}\right\}3$$

$$\left.\begin{array}{l}8x-21y=5\cdots\cdots\\ 6x+14y=-26\cdots\cdots\end{array}\right\}4$$

$$\left.\begin{array}{l}3x-2y=5\cdots\cdots\\ 9x+4y=35\cdots\cdots\end{array}\right\}5$$

$$\left.\begin{array}{l}7x+3y=66\cdots\cdots\\ 21x-6y=39\cdots\cdots\end{array}\right\}6$$

$$\left.\begin{array}{l}2x-4y+10=0\cdots\cdots\\ 4x-6y+3=0\cdots\cdots\end{array}\right\}7$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1\cdots\cdots\\ \frac{x}{4}-\frac{2y}{3}=1\cdots\cdots\end{array}\right\}8$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{3}-\frac{y}{6}&=\frac{1}{2}\cdots\cdots\\ \frac{x}{5}+\frac{3y}{10}&=\frac{1}{2}\cdots\cdots\end{aligned}\right\}9$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{5}+5y&=-4\cdots\cdots\\ 5x+\frac{y}{5}&=4\cdots\cdots\end{aligned}\right\}10$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{5}(x+2)+4y&=2\cdots\cdots\\ \frac{1}{11}(y+5)-\frac{1}{2}(x+1)&=1\cdots\end{aligned}\right\}11$$

$$\left.\begin{aligned}4x-\frac{1}{3}(y-3)&=5x-3\cdots\\ \frac{1}{3}(2x-5y)+\frac{1}{4}(x+y)&=1\end{aligned}\right\}12$$

$$\left.\begin{aligned}16x-\frac{4}{3}(y+3)&=37\cdots\cdots\\ 40x-\frac{15}{6}y&=109\frac{1}{3}\cdots\cdots\end{aligned}\right\}13$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y&=1\cdots\cdots\\ \frac{4}{3}x-\frac{2}{5}y&=\frac{3}{8}x+\frac{19}{10}y\cdots\end{aligned}\right\}14$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{x}+\frac{5}{y}&=7\cdots\cdots\\ \frac{2}{x}-\frac{2}{y}&=11\cdots\cdots\end{aligned}\right\}15$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{4}{x}-\frac{3}{y}&=5\cdots\cdots\\ \frac{6}{x}+\frac{3}{y}&=10\cdots\cdots\end{aligned}\right\}16$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{6}{y}-\frac{4}{y}&=2\cdots\cdots\\ \frac{18}{x}+\frac{8}{x}&=10\cdots\cdots\end{aligned}\right\}17$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{5}{6x}+\frac{8}{2y}&=1\cdots\cdots\\ \frac{5}{9y}+\frac{8}{2x}&=1\cdots\cdots\end{aligned}\right\}18$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{2x}+\frac{5}{4y}&=6\cdots\cdots\\ \frac{4}{4x}+\frac{5}{6y}&=7\cdots\cdots\end{aligned}\right\}19$$

## 解法餘論

二元一次方程式ノ解法ハ一般ニ四種アリ

第一　比較法

第二　代用法　又ハ　換置法

第三　消去法

第四　$m$ 解法是レナリ



今例ヲ揚ケテ其各法ヲ示サン

$$\left.\begin{aligned}3x+5y&=22\\ 7x-4y&=20\end{aligned}\right\}\text{ヲ解ケ}$$

〔第一法〕　比較法トハ與ヘラレタル二ツノ方程式ヨリ $x$ ノ價ヲ $y$ ト已知數トニテ代表セシメタル式ニテ更ニ方程式ヲ作ルナリ　即チ第一方程式

$3x+5y=22$　ヨリ　$x=\dfrac{22-5y}{3}$

ヲ得又第二ノ方程式

$7x-4y=20$　ヨリ　$x=\dfrac{20+4y}{7}$

ヲ得ベシ而ノ此ノ二方程式ニ於テ $x$ ノ價ハ相等シカルベキヲ以テ次ノ方程式アリ

$$\frac{22-5y}{3}=\frac{20+4y}{7}$$

然ルニ此式ハ一元一次ノ方程式ナルヲ以テ去分轉項合一ノ三法ニ依リテ $y=2$ ヲ得ルナリ

〔第二法〕　代用法トハ第一方程式ヨリ $x$ ノ價ヲ $y$ ト已知數ニテ代表シ是レヲ第二方程式ニ於ケル $x$ ニ代用スルナリ　即チ下ノ如シ

$3x+5y=22\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$　ヨリ　$x=\dfrac{22-5y}{3}$

ヲ求メ之レヲ第二方程式ノ $x$ ニ代用スルナリ

$$7\left(\frac{22-5y}{3}\right)-4y=20$$

此ノ式ハ第一方程式ヨリ得タル $x$ ノ價ヲ第二方程式ニ於ケル $x$ ニ代用セシ處ノ者ニシテ $y$ ヲ有スル一元一次方程式ナリ故ニ去分轉項合一ノ三法ヲ施シテ $y=2$ ヲ得ルナリ

〔第三法〕 消去法トハ第一方程式ト第二方程式ノ各ニ或ル適當ナル數ヲ夫々乘シテ二ツノ方程式ヲ作リ此ノ新方程式ノ二ツニ於ケル同未知數ノ係數ヲ相等シカラシメ然ル後チ此ノ新二方程式ニ於テ係數相等シキ未知數ノ符號相異ナルトキハ其二新方程式ヲ相加フベシ然ル時ハ其結果ハ一元一次ノ方程式トナル　若シ相等シキ係數ヲ有スル同シ未知數ノ符號同名ナルトキハ任意ノ一方程式ノ符號ヲ悉ク反對トナシテ加フベシ然セバ其結果ハ一元一次ノ方程式トナル（次例ト比較シテ其意ヲ知ルベシ）

$3x+5y=22\cdots\cdots(1)$　$7x-4y=20\cdots\cdots(2)$　ヲ解ケ

（甲）　$y$ ヲ消去スル法

(1) 式ノ兩邊ヘ 4 ヲ乘シ
(2) 式ノ兩邊ヘ 5 ヲ乘シ
其和ヲナスベシ

$$\begin{array}{rl} 12x+20y &= 88 \\ 35x-20y &= 100 \\ \hline 47x\phantom{+20y} &= 188 \end{array}$$

$$x=\frac{188}{44}=4$$

（乙）　$x$ ヲ消去スル法



(1) 式ニ 7 ヲ乘シ
(2) 式ニ 3 ヲ乘シ其符號ヲ悉ク反シテ加フルトキハ

$$\begin{array}{rl} 21x+35y &= 154 \\ -21x+12y &= -60 \\ \hline 47y &= 94 \end{array}$$

$$y=\frac{94}{47}=2$$

〔注意〕 與ヘラレタル二方程式ニ於テ或ル未知數ノ係數ヲ等シカラシメンガ爲メニ各式ヘ乘スヘキ數ハ次ノ定則ニ依リテ求ムベシ

總テ消去セントスル未知數ノ係數ノ最小公倍數（若クハ最低公倍數）ヲ求メ此ノ最小公倍數（若クハ最低公倍數）ヲ甲式ニ於ケル消去セントスル未知數ノ係數ニテ除シ其商ヲ甲式ノ全體ニ乘スベシ　又乙式ニ於テモ同樣ノ法ヲ施スベシ

〔第四法〕 $3x+5y=22\cdots\cdots(1)$　$7x-4y=20\cdots\cdots(2)$ ヲ解ケ　與ヘラレタル方程式ノ一ツニ $m$ ヲ乘シテ是レカ和ヲ爲ストキハ

$$\begin{array}{rl} 3mx+5my &= 22m \\ 7x-4y &= 20 \\ \hline (3m-7)x+(5m-4)y &= 22m+20 \end{array}$$

トナル此式ヨリ $x$ ヲ求メンニハ $5m-4=0$ トナスベシ $\left(\text{即チ}\quad m=\frac{4}{5}\right)$ 然ルトキハ

$$x=\frac{22m+20}{3m-7}=\frac{22\times\frac{4}{5}+20}{3\times\frac{4}{5}-7}=4$$

$y$ ヲ求メント欲セバ $3m-7=0$ トナスベシ

(即チ $m=\frac{7}{3}$) 然ルトキハ

$$y=\frac{22m+20}{5m-4}=\frac{22\times\frac{7}{3}+20}{5\times\frac{7}{3}-4}=2$$

此法ヲ稱シテ未定乘子法トモ云フ

〔學者ハ以上ノ四法ヲ能ク錬ランカ爲メニ 71 頁ニアル演習問題ヲ演習スベシ〕

〔注意〕 上ノ四解法ノ内何レノ一ツヲ記臆シ居ルモ二元一次方程式ヲ解クコヲ得ベシト雖圧第二第三ノ二法ハ取リ分ケ熟手スルヲ要ス



# 第六章

## 三元一次方程式

三元一次方程式トハ $x, y, z$ ノ三未知元ヲ有ツ方程式ニシテ三個ノ方程式ヨリ成立セル者ナリ今其簡易ナ形ヲ示セハ下ノ如シ

$Ax+By+Cz=D$ ················(1)

$Ex+Fy+Gz=H$ ················(2)

$Px+Ry+Sz=Q$ ················(3)

$x, y, z$ ノ外ノ文字ハ或ル既知數ヲ表セル者ナリ 若シ與ヘラレタル方程式複雜ナルトキハ去分轉項合一ノ三法ヲ施シテ上形ノ如キ者ニ化スルコヲ得ベシ故ニ上形ニ就テ其解法ヲ論スレバ可ナリ

〔解法〕 (1) 式ト (2) トニテ $z$ ヲ消去シ·········(A)

(2) 式ト (3) 式ニテ $z$ ヲ消去シ·····················(B)

(A) 式ト (B) 式ニテ $y$ ヲ消去シテ $x$ ヲ求メ

(A) 式ト (B) 式ニテ $x$ ヲ消去シテ $y$ ヲ求ム

$x$ $y$ ハ既知數トナリタルヲ以テ (1) 式ヨリ $z$ ヲ求ムルコヲ得ベシ

要スルニ三元一次方程式ノ解法ハ二元一次ノ方程式ニ化スルニ在リ　次ニ例題ヲ示サン

## 例　　題

〔一〕
$$\left.\begin{array}{l} 2x+4y+z=7\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x+2y+2z=8\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ 5x-4y+4z=9\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right\}\text{ヲ解ケ}$$

(1) ト (2) ニテ $y$ ヲ消去シ
$$\begin{array}{l} 2x+4y+z=7 \\ -6x-4y-4z=-16 \\ \hline -4x\quad -3z=-9\cdots\cdots\cdots\cdots(A) \end{array}$$

(1) ト (3) ニテ $y$ ヲ消去シ
$$\begin{array}{l} 2x+4y+z=7 \\ 5x-4y+4z=9 \\ \hline 7x\quad +5z=16\cdots\cdots\cdots\cdots(B) \end{array}$$

(A) ト (B) ニテ $z$ ヲ消去シ
$$\begin{array}{l} -20x-15z=-45 \\ +21x+15z=+48 \\ \hline x\quad =\ 3 \end{array}$$

∴ (1) ヨリ $y=\frac{1}{2}$　(A) ヨリ $z=-1$ ヲ得ルナリ

〔二〕
$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y-2z=2\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 5x-y+3z=23\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ 3x-5y+6z=1\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right\}\text{ヲ解ケ}$$

(1) ト (2) ニテ $z$ ヲ消去シ
$$\begin{array}{l} 9x-6y-6z=6 \\ 10x-2y+6z=46 \\ \hline 19x-8y\quad =52\cdots\cdots\cdots\cdots(A) \end{array}$$

(2) ト (3) ニテ $z$ ヲ消去シ
$$\begin{array}{l} 10x-2y+6z=46 \\ -3x+5y-6z=-1 \\ \hline 7x+3y\quad =45\cdots\cdots\cdots\cdots(B) \end{array}$$



$$\left.\begin{array}{l} 19x-8y=52\cdots\cdots\cdots\cdots(A) \\ 7x+3y=45\cdots\cdots\cdots\cdots(B) \end{array}\right\}\text{ヲ得ル}$$

依テ此ノ方程式ヨリ $x, y,$ ノ價ヲ求メ得ベシ既ニ $x, y,$ ノ價ヲ定ムルヿヲ得バ (1) 式ヨリ $z$ ノ價ヲ求メ得ベシ

〔三〕
$$\left.\begin{array}{l} x+2y-3z=6\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x+4y-7z=9\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ 3x-y-5z=8\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{array}\right\}\text{ヲ解ケ}$$

(1) ト (2) ニテ $z$ ヲ消去セバ (A) トナリ

(2) ト (3) ニテ $z$ ヲ消去セバ (B) トナル

$$\left.\begin{array}{l} 5x+10y=33\cdots\cdots\cdots\cdots(A) \\ 25x-27y=11\cdots\cdots\cdots\cdots(B) \end{array}\right\}$$

(A) (B) ナル式ハ二元一次ノ方程式ナル故是レヲ解クヿ容易ナリ

〔注意〕　四元一次方程式五元一次方程式ノ解法モ亦三元一次方程式ノ如ク漸次ニ未知元ヲ一個宛ツ消去シテ各未知元ノ答ヲ發見スル者ナリ

## 演習問題

下ノ各方程式ヲ解クベシ

$$\left.\begin{aligned}x+2y+3z&=6\\2x+4y+z&=7\\3x+2y+9z&=14\end{aligned}\right\}(1)$$

$$\left.\begin{aligned}x+4z-2y&=6\\x-8z-2y&=42\\2x+z+3y&=26\end{aligned}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{aligned}2x+3y+4z&=28\\x+7y-z&=10\\3x+6y-2z&=5\end{aligned}\right\}(3)$$

$$\left.\begin{aligned}x+y-z&=3\\x+z-y&=7\\y+z-x&=9\end{aligned}\right\}(4)$$

$$\left.\begin{aligned}x+5y+5z&=53\\x+3y+3z&=30\\x+y+z&=12\end{aligned}\right\}(5)$$

$$\left.\begin{aligned}2x-y+z&=4\\5x+y+3z&=5\\2x-3y+4z&=20\end{aligned}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{aligned}x+2y-z&=2\\2x-y+3z&=9\\3x+y-2z&=-1\end{aligned}\right\}(7)$$

$$\left.\begin{aligned}x+y+z&=12\\x+2y+3z&=20\\\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+z&=6\end{aligned}\right\}(8)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}&=62\\\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}&=47\\\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}&=38\end{aligned}\right\}(9)$$

$$\left.\begin{aligned}x+y&=1\\x+z&=8\\y+z&=-3\end{aligned}\right\}(10)$$

$$\left.\begin{aligned}x+y+z&=12\\x+2y-2z&=10\\x+y-z&=4\end{aligned}\right\}(11)$$

$$\left.\begin{aligned}x+y+z&=1\\\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+4z&=1\\\frac{5}{3}x+\frac{3}{4}y-\frac{z}{2}&=1\end{aligned}\right\}(12)$$



# 第七章

# 一元二次方程式

〔平方〕 同シ數ヲ二ツ掛ケ合セタル結果ヲ平方ト云フ

例ヘハ 5 ノ平方ハ 25 ナリ

又 6 ノ平方ハ 36 ナリ

通常平方ノ書キ方ハ其平方スベキ數ノ右ノ肩ニ小サク 2 ト書スル者ナリ

例ヘハ 5 ノ平方 ト云フヿハ $5^2$ ト書シ

又 6 ノ平方 ト云フヿハ $6^2$ ト書シ

又 $x$ ノ平方 ト云フヿハ $x^2$ ト書ス

〔開平〕 $A=x^2$ ト云フ式ヨリ $x$ ノ價ヲ見出スヿヲ A ヲ開平スルト云ヒ 而メ $x$ ヲ平方根ト云フ

例ヘハ $25=x^2$ ノ式ヨリ $x$ ノ價ヲ見出スヿヲ 25 ヲ開平スルト云ヒ而メ 5 ヲ平方根ト云フ

通常開平ノ記號ハ $\sqrt{\phantom{0}}$ ヲ以テス

例ヘハ 25 ヲ開平セヨト云フヿヲ $\sqrt{25}$ ト書ス

與ヘラレタル數ヲ開平スルヿハ既ニ算術ニ於テ知レルヿナレバ玆ニ略ス

〔開平商〕 $x^2=A$ ナレバ $x=\pm\sqrt{A}$ ナリ

例ヘハ $x^2=25$ ナレハ $x=\pm5$ ナリ

何トナレハ $(+5)\times(+5)=+25$ 又 $(-5)\times(-5)=+25$ ナレハ $\sqrt{25}=+5$ 又ハ $-5$ トナスヲ以テ最モ公平ノコトナスナリ

是ト同様ニ $x^2=A$ ナレバ $x=\pm\sqrt{A}$ ナリ

〔準備一〕 $(2Ax+B)^2=4A^2x^2+4ABx+B^2$ ナリ

$$\begin{aligned}(2Ax+B)^2&=(2Ax+B)\times(2Ax+B)\\&=(2Ax+B)\times2Ax+(2Ax+B)\times B\\&=4A^2x^2+2ABx+2ABx+B^2\\&=4A^2x^2+4ABx+B^2\end{aligned}$$

〔準備二〕 二次方程式ノ一般ノ形ハ $Ax^2+Bx+C=0$ ノ如キ形ニ化スルコヲ得ベシ　與ヘラレタル複雜ナル一元二次方程式ヲ上形ニ化サンニハ去分轉項合一ノ三法中ヲ施シテ化スルコヲ得ベシ

例ヘハ $\dfrac{x-5}{2}-\dfrac{3}{x-5}=3$ ノ如キ方程式アランニ之レヲ去分シテ $(x-5)^2-6=6(x-5)$

即チ　$x^2-10x+25-6=6x-30$

轉項シテ　$x^2-10x-6x+25-6+30=0$

合一シテ　$x^2-16x+49=0$



## 一元二次方程式解法

〔定理〕 $Ax^2+Bx+C=0$ ナル方程式ニ於ケル $x$ ノ價ハ次ノ二種アリ

$$x=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A},\qquad x=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A},$$

〔證明〕　$Ax^2+Bx+C=0$ ……(1)

(1)式ニ於テ C ヲ轉項シテ　$Ax^2+Bx=-C$ ……(2)

(2)式ノ兩邊ヘ 4A ヲ乘シテ　$4A^2x^2+4ABx=-4AC$ ……(3)

(3)式ノ兩邊ヘ $B^2$ ヲ加ヒテ　$4A^2x^2+4ABx+B^2=B^2-4AC$ …(4)

(4)式ノ前邊ハ準備第一ニ依リテ　$(2Ax+B)^2=B^2-4AC$ ……(5)

(5)式ノ兩邊ヲ開平スルトキハ　$2Ax+B=\pm\sqrt{B^2-4AC}$ ……(6)

(6)式ニ於ケル B ヲ後邊ヘ轉項スレバ　$2Ax=-B\pm\sqrt{B^2-4AC}$ ……(7)

(7)式ノ兩邊ヲ 2A ニテ除スルトキハ　$x=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

〔系一〕 $Ax^2-Bx+C=0$ ナレバ $x=\dfrac{+B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

〔系二〕 $Ax^2+Bx-C=0$ ナレバ $x=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2+4AC}}{2A}$

〔系三〕 $Ax^2-Bx-C=0$ ナレバ $x=\dfrac{+B\pm\sqrt{B^2+4AC}}{2A}$

〔注意〕 $Ax^2$ ノ符號負ナルトキハ全體ノ符號ヲ反記スベシ

## 應　用

〔一〕 $16x^2+16x+3=0$……………ヲ解ケ

$$x=\frac{-16+\sqrt{16^2-4\times3\times16}}{2\times16}=-\frac{1}{4}$$

$$x=\frac{-16-\sqrt{16^2-4\times3\times16}}{2\times16}=-\frac{3}{4}$$

通常次ノ如ク書スベシ

$$x=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\times3\times16}}{2\times16}=\begin{cases}-\frac{1}{4}\\-\frac{3}{4}\end{cases}$$

以下之レニ準ズ

〔二〕 $x^2+16x+48=0$……………ヲ解ケ

$$x=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\times48\times1}}{2\times1}=\begin{cases}-4\\-12\end{cases}$$

〔三〕 $7x^2-50x+7=0$……………ヲ解ケ

$$x=\frac{50\pm\sqrt{50^2-4\times7\times7}}{2\times7}\begin{cases}7\\\frac{1}{7}\end{cases}$$

〔四〕 $3x^2-11x-4=0$……………ヲ解ケ

$$x=\frac{+11\pm\sqrt{11^2+4\times4\times3}}{2\times3}=\begin{cases}4\\\frac{1}{3}\end{cases}$$

〔五〕 $21x^2+23x-20=0$……………ヲ解ケ

$$x=\frac{-23\pm\sqrt{23^2+4\times21\times20}}{2\times21}=\begin{cases}\frac{4}{7}\\-\frac{5}{3}\end{cases}$$

〔六〕 $x^2+21x=46$……………ヲ解ケ

$x^2+21x-46=0$ トナシ



$$x=\frac{-21\pm\sqrt{21^2+4\times46\times1}}{2\times1}=\begin{cases}2\\-23\end{cases}$$

〔七〕 $15x^2+\frac{2}{3}x=5$……………ヲ解ケ

去分メ $45x^2+2x=15$…………トナシ

轉項メ $45x^2+2x-15=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2+4\times15\times45}}{2\times45}$$

〔八〕 $\frac{1}{12}(7x^2-8x)+\frac{1}{2}(7x^2+8x)=10x+3$

去分メ $6(7x^2+8x)+(7x^2-8x)=120x+36$

轉項メ $42x^2+48x+7x^2-8x-120x-36=0$

合一メ $49x^2-80x-36=0$

$$x=\frac{+80\pm\sqrt{80^2+4\times36\times49}}{2\times49}$$

〔九〕 $\frac{2}{x+8}+\frac{5}{x+9}=\frac{3}{x+15}+\frac{4}{x+6}$

去分メ $2(x+9)(x+15)(x+6)+5(x+8)(x+15)(x+6)$

$=3(x+8)(x+9)(x+6)+4(x+15)(x+9)(x+8)$

此後チ轉項合一メ簡易形ニ變シ $x$ ノ價ヲ發見スベシ

此ノ種ノ一般ノ例題ハ因子分括法ヲ學ヒタルノ後チニ至リテ解方ヲ施スヲ可トス　唯茲ニハ其方法亦同一ナリト云フコヲ示ス迄ノ事ナリ

## 演習問題

次ノ方程式ヲ解クベシ

(1) $x^2+2x-15=0$
(2) $x^2-6x-16=0$
(3) $x^2-20x+96=0$
(4) $x^2-14x-51=0$
(5) $x^2+20x+19=0$
(6) $x^2-6x+6=9$
(7) $x^2+8x=12$
(8) $3x^2-15x+12=0$
(9) $4x^2+12x-40=0$
(10) $x^2-3x+2=0$
(11) $x^2-7x+10=0$
(12) $5x^2+4x=204$
(13) $7x^2-20x-32=0$
(14) $6x^2-18x+6=0$
(15) $2x^2-5x-117=0$
(16) $3x^2-53x+34=0$
(17) $5x^2+4x-273=0$
(18) $6x^2+15x-9=0$
(19) $21x^2-292x+500=0$
(20) $5(x+9)=3(x^2+25)$
(21) $(x^2+3)-(x^2-25)=76$
(22) $(3x+4)^2=54x$
(23) $3x^2+(5x+2)^2=20x+32$
(24) $5(x^2+4)=4(x^2+9)$
(25) $(x+2)^2=4(x-1)^2$
(26) $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$
(27) $\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^2=1$
(28) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{18}{6}$
(29) $\frac{x-2}{12}-\frac{x^2-25}{x+4}=x-4$
(30) $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=\frac{13}{6}$
(31) $\frac{x}{x-2}+\frac{4}{x+1}=3$
(32) $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{7}{3}$
(33) $(3x-1)(3x+1)=0$
(34) $(x+1)(x+2)=0$
(35) $x(x-1)(x-2)=0$
(36) $(2x-1)(3x+1)(4x-1)=0$
(37) $(x+a)(x+b)(x+c)=0$
(38) $(ax+b)(cx+d)(ex+f)=0$



# 第八章

# 二元二次方程式解法

二次方程式ノ範圍内ニ於テ解クヿヲ得ベキ二元二次ノ方程式ハ特別ノ形狀ナル者ニ限レリ　而ソ其ノ特別ナル形狀ニ三種アリ

〔第一種〕　一方程式ハ一次ニシテ　他ノ一ハ二次方程式ナル者

〔第二種〕　兩方程式倶ニ二次ナル者

〔第三種〕　加減乘除等ノ方法ヲ兩式ニ施シテ二次方程式ノ公式ニ導キ得ベキ者

逐次例題ヲ揭ケテ之レヲ證明セン

〔第一種解法〕　例ヘハ　$x+y=20.$　$x^2-2y^2=71.$ ナル方程式ヨリ $xy$ ノ價ヲ發見セント欲セハ　先ツ第一方程式ヨリ　$x=20-y,$ ヲ作リ之レヲ第二方程式ニ於ケル $x$ ノ項ニ代用スルナリ　然ルトキハ第二ノ方程式ハ

$$(20-y)^2-2y^2=71$$

$$400-40y+y^2-2y^2=71$$

$$-y^2-40y+329=0$$

$y^2+40y-329=0$

依リテ $y=7$, $y=-47$, ヲ得ベシ

次ニ $x$ ヲ求メント欲セバ 第一方程式ニ於ケル $y$ ノ代リニ 7 ヲ代用スベシ然ルトキハ $y=7$. ナルトキノ $x$ ノ價ヲ得ベク 次ニ $y=-47$ ヲ第一方程式ニ於ケル $y$ ノ代リニ代用スルトキハ $y=-47$ ナルトキノ $x$ ノ價ヲ得ベシ 即チ下ノ如シ

$y=7$ ナルトキハ $x=13$

$y=-47$ ナルトキハ $x=67$

〔第二種解法〕 例ヘバ $4x^2-3xy=10$, $y^2-xy=6$, ノ如キ方程式ヲ解クニハ通例三様アリ

第一 $my$ 解法
第二 互乘解法
第三 交除解法
是レナリ

今此ノ三様ニ依リテ逐次其ノ解法ヲ示サント欲ス

〔$my$解法〕 $my$ 解法トハ與ヘラレタル代數式ニ於ケル $x$ ヲ悉ク $my$ ヲ以テ代用シ 然ル後チ此ノ二方程式ヨリ夫々 $y$ ノ價ヲ比較シ以テ $m$ ノ價ヲ見出シ以テ $xy$ ノ價ヲ定ムルノ法ナリ

今與式ノ各ニ於テ $x=my$ トナストキハ下ノ如シ



第一方程式 $4m^2y^2-3my^2=10$

第二方程式 $y^2-my^2=6$

第一方程式ヨリ $y^2=\dfrac{10}{4m^2-3m}$ ..............(A)

第二方程式ヨリ $y^2=\dfrac{6}{1-m}$ ..............(B)

AB 兩式ヨリ $\dfrac{10}{4m^2-3m}=\dfrac{6}{1-m}$

即チ $5(1-m)=3(4m^2-3m)$

$5-5m=12m^2-9m$

$-12m^2+9m-5m+5=0$

$12m^2-4m-5=0$

依リテ $m=\dfrac{5}{6}$, $m=-\dfrac{1}{2}$,

故ニ $x=\dfrac{5}{6}y$, 又ハ $x=-\dfrac{1}{2}y$, ナル關係ヲ知得セリ

是レヨリ $xy$ ヲ求ムル方法ヲ述ベン

借テ與ヘラレタル二方程式中ノ任意ノ一方程式ヲ取リテ $x=\dfrac{5}{6}y$ ヲ代用スルトキハ直チニ $y$ ノ二價ヲ求メ得ベシ

今 $x=\dfrac{5}{6}y$ ヲ第一方程式 $4x^2-3xy=10$ ニ代用スルトキハ $4\times\left(\dfrac{5}{6}y\right)^2-3\times\left(\dfrac{5}{6}y\right)y=10$ トナリ此ノ方程式ヨリ $y=\pm6$ ヲ得ル

然ルニ $x=\dfrac{5}{6}y$ ナル故 $x=\dfrac{5}{6}\times(\pm6)=\pm5$

◎次ニ $x=-\dfrac{y}{2}$ ヲ第一方程式ニ代用スルニ依リテ

$y=\pm 2,\ x=\mp 1,$ ヲ得ベシ

〔互乘解法〕 $\left.\begin{array}{l}4x^2-3xy=10\\ y^2-xy=6\end{array}\right\}$ナル方程式ヲ解カンニハ第二方程式ヲ反記シテ $6=y^2-xy$ トナシ是ノ兩式ヲ邊々相乘シ然ル後チ悉ク前邊ヘ移シテ其式ヲ分括シテ以テ $xy$ ノ關係ヲ確定スルナリ即チ

第一方程式 $4x^2-3xy=10$

第二方程式 $6=y^2-xy$

邊々乘シテ $24x^2-18xy=10y^2-10xy$

轉項シテ $24x^2-18xy+10xy-10y^2=0$

合一シテ $24x^2-8xy-10y^2=0$

即チ $12x^2-4xy-5y^2=0$

依リテ $(6x-5y)(2x+1y)=0$

即チ $x=\frac{5}{6}y$, 又 $x=-\frac{1}{2}y$ ヲ得ル此ノ他ハ前ト同法ナリ故ニ略ス

〔互除解法〕 $\left.\begin{array}{l}4x^2-3xy=10\\ y^2-xy=6\end{array}\right\}$ ナル方程式ヲ解カンニハ邊々相除シ然ル後チ去分轉項合一シテ $xy$ ノ關係ヲ定ムルナリ 今次ニ其ノ方法ヲ示サン

第一式ヲ第二式ニテ除シ各邊ノ分數式ヲ約シテ $\frac{4x^2-3xy}{y^2-xy}=\frac{5}{3}$ ヲ得ル次ニ



去分シテ $3(4x^2-3xy)=5(y^2-xy)$

轉項シテ $12x^2-9xy-5y^2+5xy=0$

合一シテ $12x^2-4xy-5y^2=0$ ヲ得ル以下前ト異ナル處ナシ故ニ略ス

〔第三種解法〕 此ノ場合ノ解法ハ夫レ夫レ算士ノ工夫力ニ依リテ爲ス者ナリ故ニ予ハ次ニ簡易ナル二三ノ例題ヲ示シ 其他種々ナル形狀ノ解法ノ例題ハ専ラ方程式原理續卷ヲ以テ詳述セントス

〔例一〕 $x^2+3x-2y=4,\ 2x^2-5x+3y+2=0,$ ナル方程式ヲ解ケ

上例ノ如シ $y$ ニ關シテ一次ナル方程式ハ 兩式ヨリ $y$ ノ價ヲ 既知數ト $x$ トニテ代表シ比較シテ $x$ ノ價ヲ定ムルヲ可トス

其ノ演算ハ次ノ如シ

$x^2+3x-2y=4$ ヨリ $\frac{x^2+3x-4}{2}=y$

$2x^2-5x+3y+2=0$ ヨリ $y=\frac{5x-2x^2-2}{3}$

依リテ $\frac{x^2+3x-4}{2}=\frac{5x-2x^2-2}{3}$ ナル式ヲ得タリ此ノ式ハ一元二次ノ方程式ナリ 故ニ此ノ式ヨリ $x$ ノ價ヲ定ムルコヲ得ベシ $x$ ノ價ヲ知ルコヲ得バ $y$ ノ價ヲ定

ムルコハ甚タ容易ナリ

〔例二〕 $2x^2-xy+y^2=2y,\quad 2x^2+4xy=5y,$ ナル方程式ヲ解ケ

第一方程式ノ兩邊ヲ第二方程式ノ兩邊ニテ除シ然ル後チ去分轉項合一シテ $xy$ ノ關係ヲ求ムレバ次ノ如シ

$$\frac{2x^2-xy+y^2}{2x^2+4xy}=\frac{2y}{5y}\quad 即チ\quad \frac{2x^2-xy+y^2}{2x^2+4xy}=\frac{2}{5}$$

去分シテ $10x^2-5xy+5y^2=4x^2+8xy$

轉項シテ $10x^2-4x^2-5xy-8xy+5y^2=0$

合一シテ $6x^2-13xy+5y^2=0$

二次公式ニ依テ $x=\frac{1}{2}y,\quad x=\frac{5}{3}y$ ヲ得ル

以下畧ス

〔例三〕 $x+\frac{1}{y}=3,\quad y+\frac{1}{x}=\frac{4}{3},$ ナル方程式ヲ解ケ

去分スルトキハ $xy+1=3y,\quad xy+1=\frac{4}{3}x,$

故ニ $3y=\frac{3}{4}x$ 即チ $y=\frac{4}{9}x$ ナル關係ヲ得タリ

以下畧ス

◎次ニ説ク二三ノ例題ハ分括法ヲ學ヒタル後チ讀ムベシ

〔例四〕 $x^2+xy+y^2=13,\quad x^4+x^2y^2+y^4=91,$ ナル方程式ヲ解ケ

第二方程式ヲ分括スルトキハ $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=91$

故ニ第一方程式ニ依リテ $13(x^2-xy+y^2)=91$



即チ $x^2-xy+y^2=7$

今得タル式ト $x^2+xy+y^2=13$ トノ兩式ハ共ニ二次項ノミヲ含ム式ナル故之レヲ解キテ $xy$ ノ價ヲ定ムルコハ容易ナリ

〔例五〕 $x^3+1=9y,\quad x^2+x=6y,$ ナル方程式ヲ解ケ

第一方程式ハ $(x+1)(x^2-x+1)=9y$

第二方程式ハ $x(x+1)=6y$

邊々相除スルトキハ $\frac{x^2-x+1}{x}=\frac{3}{2}$ トナル此ノ方程式ハ $x$ ノミヲ含ミタル一元二次方程式ナリ故ニ直チニ $x$ ノ價ヲ求メ得ベシ

〔例六〕 $x^2+xy-y=9,\quad y^2+xy-x=-3,$

第一方程式ヘ第二方程式ヲ加フレバ

$x^2+2xy+y^2-x-y=6$ トナル

即チ $(x+y)^2-(x+y)-6=0$ ナル式ヲ得ベシ

此ノ式ヨリ $x+y$ ノ價ヲ求ムレバ 3 又ハ $-2$ ヲ得ル

今 $x+y=3$ ト $x^2+xy-y=9$ トヲ組ミ合セテ $xy$ ノ二價ヲ求メ得ベク 又 $x+y=-2$ ト $x^2+xy-y=9$ トヲ組ミ合セテ $xy$ ノ二價ヲ定ムルコヲ得ベシ

〔注意〕 今次ニ $pq$ 解法ト稱スル解法ヲ述ヘントス偖テ $pq$ 解法ヲ述ブルニ先達デ是レニ必用ナル以下ノ諸

項ヲ説明セン

〔定理〕 $x+y=p,\ \ xy=q,$ トナス時ハ次ノ如シ

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x^2+y^2=p^2-2q \cdots\cdots \\ (2) & x^2+xy+y^2=p^2-q \cdots\cdots \\ (3) & x^2-xy+y^2=p^2-3q \cdots\cdots\end{array}\right\}(A)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(4) & x^3+y^3=p^3-3pq \cdots\cdots \\ (5) & x^3+x^2y+xy^2+y^3=p^3-2pq \cdots\cdots\end{array}\right\}(B)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(6) & x^4+y^4=p^4-4p^2q+2q^2 \cdots\cdots \\ (7) & x^4+x^2y^2+y^4=p^4-4p^2q+3q^2 \cdots\cdots \\ (8) & x^4-x^2y^2+y^4=p^4-4p^2q+q^2 \cdots\cdots\end{array}\right\}(C)$$

$$(9)\quad x^5+y^5=p^5-5p^3q+5pq^2 \cdots\cdots (D)$$

今上ノ九項ヲ証明スルニ當リ (A) (B) (C) (D) 中ノ上段ノ者ノミヲ証明セバ其ノ餘ハ容易ニ知リ得ベシ

〔一ノ証明〕 $x+y=p$ 此ノ式ノ兩邊ヲ平方シタル後チ $xy=q$ 此ノ式ノ兩邊ニ2ヲ乘シテ減スベシ

即チ其演算ハ次ノ如シ

$$x^2+y^2=x^2+2xy+y^2-2xy=(x+y)^2-2xy=p^2-2q$$

〔四ノ証明〕 演算ノミヲ記セン

$$x^3+y^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2$$
$$=(x+y)^3-3xy(x+y)=p^3-3pq$$



〔六ノ証明〕 演算ノミヲ示サン

$$x^4+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$$
$$=(p^2-2q)^2-2q^2=p^4-4p^2q+4q^2-2q^2$$
$$=p^4-4p^2q+2q^2$$

〔九ノ証明〕 (1)式ト (4)式 トノ相乘積ヨリ $x^2y^2(x+y)$ ヲ減セバ $x^5+y^5$ ヲ得ベシ 其演算ハ次ノ如シ

$$\begin{array}{l} x^2+y^2=p^2-2q \\ \underline{x^3+y^3=p^3-3pq} \\ x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5=p^5-5p^3q+6pq^2 \end{array}$$

即チ $x^5+x^2y^2(x+y)+y^5=p^5-5p^3q+6pq^2$

依リテ $x^5+pq^2+y^5=p^5-5p^3q+6pq^2$

故ニ $x^5+y^5=p^5-5p^3q+5pq^2$ トナル

〔例七〕 $xy(x+y)=240,\ \ x^3+y^3=280,$ ナル方程式ヲ解クベシ

$x+y=p,\ \ xy=q,$ トナス時ハ上ノ二方程式ハ次ノ如ク書スヿヲ得ベシ

$$qp=240,\quad p^3-3pq=280,$$

依リテ $p^3-3\times240=280$ ナル式ヲ得ベシ従フテ

$$p^3=280+3\times240 \quad \therefore p=\sqrt[3]{280+3\times240}$$

次ニ $pq=240$ ナルニ依リテ $q=240\div\sqrt[3]{280+3\times240}$

上ノ如ク $pq$ 確定セル以上ハ $xy$ ヲ求ムルヿハ容易ナリ

〔例八〕 $x+y=3,\quad x^4+y^4=17,$ ナル方程式ヲ解ケ

定理ニ依リテ $x^4+y^4=p^4-4p^2q+2q^2$ ナリ 然ルニ $x+y=3$ ナル故 $x^4+y^4=3^4-4\times9\times q+2q^2$、トナルベク 又題意ニ依ルニ $x^4+y^4=17$ ナルヲ以テ次式ヲ得ベシ $3^4-36q+2q^2=17$ 偖テ此ノ式ヨリ $q$ ノ價ヲ求ムレハ 2 ト 18 トヲ得ベシ即チ次ノ如キ關係式ヲ得タリ

$$\left.\begin{aligned}x+y&=3\\xy&=2\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}x+y&=3\\xy&=18\end{aligned}\right\}$$

此ノ二組ノ方程式ヨリ夫々 $xy$ ノ價ヲ定ムルヿヲ得ベシ

〔例九〕 $x^2+3xy+y^2+4(x+y)=13,$

$3x^2-xy+3y^2+2(x+y)=9,$ ナル方程式ヲ解ケ

第一方程式ノ兩邊ヘ 3 ヲ乘シテ第二方程式ヲ減スレバ $10xy+10(x+y)=30$ 即チ $xy+(x+y)=3,$ ナル式ヲ得ル 又 $x^2+3xy+y^2+4(x+y)=13$ ヲ變形セバ $(x+y)^2+4(x+y)+xy=13$ トナル 今得タル新二方程式ニ於テ $x+y=p,\ xy=q$ トセバ次ノ如シ

$$\left.\begin{aligned}q+p&=3\\p^2+4p+q&=13\end{aligned}\right\}$$

此ノ方程式ヨリ $p=\begin{cases}5\\-3\end{cases}\ q=\begin{cases}-2\\6\end{cases}$ ヲ得ル其他ハ略ス



# 第九章

# 代用二次方程式

代用二次方程式解法トハ二次以上ノ方程式ニシテ或ル方法ニ依リテ 二次方程ノ形狀トナスヿヲ得ヘキ方程式ナリ 而シテ其ノ種類ハ通常下ノ五種ナリ

(1) $(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40=0$

(2) $\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x^2}=\dfrac{17}{4}$

(3) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$

(4) $2x^2-4x-\sqrt{x^2-2x-3}=9$

(5) $\mathrm{A}x^4+\mathrm{B}x^3+\mathrm{C}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{A}=0$

今上ノ五種類ニ就キテ夫々其ノ解方ヲ述ベン

〔第一〕 此ノ塲合ニ二種アリ

◎第一ハ $(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40=0$ ノ如ク $x^2+x$ ニ對シテ二次方程式トナリテ顯ハレ居ルキ ◎第二ハ第一種ヲ演算シタル式即チ $x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$ ノ如クニナリ居ルキト是レナリ 第二形ノ如キ時ハ分括法ニ說ク所ノ準二次化法ヲ施スキハ直チニ第一種ノ者トナルベシ 故ニ第一種ノ塲合ノミノ解法ヲ述ベン

$(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40=0$ ナルニ依リ假リニ $x^2+x$ ヲ未知數ト見做シ M ニテ代表セシムルトキハ 與式ハ $M^2-22M+40=0$ トナリ 是レヨリシテ $M=20$, $M=2$, ナル答ヲ得ベシ 然ルニ $M=x^2+x$ ナルニ依リテ次ノ二方程式ヲ得ルナリ

$x^2+x=20$, $x^2+x=2$,

今得タル二ツノ新方程式ヨリ $x$ ノ價ヲ求ムレバ可ナリ

〔第二〕 $\frac{x^2}{x-1}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{17}{4}$ ノ如キ式ヲ解クニ當リ最モ輕便ナル手術アリ其ノ手術ハ次ノ定理ヲ記臆スルヿヲ要ス

〔定理〕 $M+\frac{1}{M}=P+\frac{1}{P}$ ナルトキハ $M=P$, $M=\frac{1}{P}$ ナル兩價ヲ有ス

何トナレバ $M=P$ トナストキハ定理ノ式ノ前邊ハ $P+\frac{1}{P}$ トナリテ後邊ト同一ナリ故ニ P ハ M ノ一價ナリ 次ニ M ノ代リニ $\frac{1}{P}$ ヲ代用スルトキハ又前後兩邊互ニ適當トナル依リテ $M=\frac{1}{P}$ モ亦 M ノ一價ナルヿヲ知リ得ベシ

〔別証〕 $M+\frac{1}{M}=P+\frac{1}{P}$

去分シテ $PM^2+P=P^2M+M$

轉項シテ $PM^2-P^2M-M+P=0$

合一シテ $PM^2-(P^2+1)M+P=0$



公式ニテ $M=\frac{P^2+1\pm\sqrt{(P^2+1)^2-4P^2}}{2P}=\begin{cases}P\\ \frac{1}{P}\end{cases}$

〔例一〕 $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2+\frac{1}{a^2}$ ナル方程式ヲ解ケ

先ヅ定理ニ依リテ $x^2=a^2$ 又ハ $x^2=\frac{1}{a^2}$ ナルヿヲ知ル

∴ $x=\pm a$ 又ハ $x=\pm\frac{1}{a}$ ナルヿヲ知リ得ベシ

〔例二〕 $x^2-\frac{1}{x^2}=a^2-\frac{1}{a^2}$ ナル方程式ヲ解ケ

此ノ式ハ $x^2+\frac{1}{-x^2}=a^2+\frac{1}{-a^2}$ ト書シ得ベシ故ニ定理ニ依リテ $x^2=a^2$ 又 $x^2=\frac{1}{a^2}$ ニシテ

$x=\pm a$, $x=\pm\frac{1}{a}$ ナルヿヲ知リ得ベシ

〔例三〕 $x^4+\frac{1}{x^4}=a^4+\frac{1}{a^4}$ ナル方程式ヲ解ケ

定理ニ依リテ $x^4==a^4$ 又 $x^4=\frac{1}{a^4}$ ナルヿヲ知ル

故ニ $x=\pm\sqrt{\pm a^2}$ 又ハ $x=\frac{1}{\pm\sqrt{\pm a^2}}$ ナルヲ知ル

〔例四〕 $\frac{x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=2$ ナル方程式ヲ解ケ

上式ハ次ノ如クニ書シ得ベシ $\frac{x^2}{x+1}+\frac{1}{\frac{x^2}{x+1}}=1+\frac{1}{1}$

故ニ $\frac{x^2}{x+1}=1$ 即チ $x^2=x+1$ ナリ此ノ方程式ヨリ $x$ ノ價ヲ求メ得ベシ

〔例五〕 $\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$ ナル方程式ヲ解ケ

上式ハ $\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{\frac{x}{x^2+1}}=2+\frac{1}{2}$ ト書スヿヲ得ベシ

故ニ $\frac{x}{x^2+1}=2$ 又 $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2}$ ナリ此ノ二方程式ヨリ $x$ ノ價ヲ求メ得ベシ

〔例六〕 $\frac{x^2}{x-1}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{17}{4}$ ナル方程式ヲ解ケ

此ノ式ハ $\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{\frac{x^2}{x-1}}=4+\frac{1}{4}$ ト書スルヿヲ得ル故

$\frac{x^2}{x-1}=4$ 又 $\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{4}$ ナル二方程式ヲ得ベシ此ノ二方程式ヨリ $x$ ノ價ヲ求メ得ベシ

〔例七〕 $\frac{x^3+5}{4}-\frac{4}{x^3+5}=\frac{3}{2}$ ヲ解ケ

此ノ式ハ $\frac{x^3+5}{4}-\frac{1}{\frac{x^3+5}{4}}=2-\frac{1}{2}$ ト書スルヿヲ得ル故

ニ $\frac{x^3+5}{4}=2$ 又ハ $\frac{x^3+5}{4}=\frac{1}{2}$ ナル二方程式ヲ得ベシ此ノ二方程式ヨリ $x$ ヲ求ムレハ容易ナリ

〔例八〕 $\frac{x^2+1}{x+2}+\frac{x+2}{x^2+1}=\frac{29}{10}$ ナル方程式ヲ解ケ

偖テ此ノ方程式ノ後邊ナル $\frac{29}{10}$ ヲ $a+\frac{1}{a}$ ノ形狀ニ分ツヿハ少シク難シ此ノ如クナルトキハ次ノ如クニナスベシ



$\frac{x^2+1}{x+2}=M$ トセバ $\frac{x+2}{x^2+1}=\frac{1}{M}$ ナルベシ故ニ與式ハ

$M+\frac{1}{M}=\frac{29}{10}$ 去分シテ $10M^2+10=29M$

轉項シテ $10M^2-29M+10=0$ ∴ $M=\frac{5}{2}$ 又ハ $\frac{2}{5}$ ヲ得ベシ 依リテ下ノ二方程式アリ

$\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{5}{2}$ 又 $\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{2}{5}$

此ノ二方程式ヨリ $x$ ノ價ヲ求ムルハ容易ナリ

〔例九〕 $3\frac{x^2-1}{x^2+1}-2\frac{x^2+1}{x^2-1}=5$ ナル方程式ヲ解ケ

今 $\frac{x^2-1}{x^2+1}=M$ トセハ $\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{M}$ ナルベシ故ニ上式ハ $3M-\frac{2}{M}=5$ 去分シテ $3M^2-2=5M$ 轉項シテ $3M^2-5M-2=0$ ∴ $M=2$ 又 $M=-\frac{1}{3}$ ヲ得ル

故ニ下ノ二方程式アリ

$\frac{x^2-1}{x^2+1}=2$ $\frac{x^2-1}{x^2+1}=-\frac{1}{3}$

此ノ二方程式ヨリ $x$ ノ價ヲ求ムルハ容易ナリ

〔第三〕 此ノ場合ノ形狀ニ自ツカラ三種ノ別アリ

第一 $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$ ノ如キ場合

第二 $x^2+x+1=\frac{42}{x^2+x}$ ノ如キ場合

第三 $x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)=10$ ノ如キ場合

今逐次其ノ解法ヲ述ベン

〔例一〕 $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$ ヲ解ケ

今 $x^2+x=M$ トセバ與式ハ變シテ下ノ如シ

$$(M+1)(M+2)=12$$
$$M^2+3M+2=12$$
$$M^2+3M-10=0$$
$$\therefore\ M=2\quad M=-5$$

依リテ下ノ二新方程式アリ

$$x^2+x=2,\quad x^2+x=-5,$$

此ノ二方程式ヨリ夫々 $x$ ノ價ヲ求メ得ベシ

〔注意〕 初學者ヲ試ムル爲メニ時トシテ次ノ如キ形トナシ置クヿアリ然レ圧敢テ恐ルヽニ足ラス

例ヘハ $(x^2+x+1)\left(x^2+x-\frac{3}{2}\right)+1=0$ ヲ解ケ

此ノ場合ニ於テモ $x^2+x=M$ トセバ

$$(M+1)\left(M-\frac{3}{2}\right)+1=0$$
$$M^2-\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}=0$$
$$2M^2-M-1=0$$

故ニ $M=\frac{1}{2}$ 又 $M=-1$ トナリ夫レヨリ $x$ ヲ求ムルハ容易ノヿナリ

〔例二〕 $x^2+x+1=\frac{42}{x^2+x}$ ナル方程式ヲ解ケ

$x^2+x$ ヲ $M$ トセバ 與式ハ變シテ



$$M+1=\frac{42}{M}$$
$$M^2+M=42$$
$$M^2+M-42=0$$
$$\therefore\ M=6\quad M=-7$$ 餘ハ略ス

〔例三〕 $x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)=10$ ナル方程式ヲ解ケ

今 $x+\frac{1}{x}$ ヲ $M$ トナス片ハ

$$x+\frac{1}{x}=M\qquad \therefore\ x^2+2+\frac{1}{x^2}=M^2$$

故ニ $x^2+\frac{1}{x^2}=M^2-2$ トナル 依リテ與式ハ下ノ如シ

$$M^2-2+4M=10$$
$$M^2+4M-12=0$$
$$\therefore\ M=2\qquad M=-6$$ 餘ハ略ス

〔例四〕 此ノ場合ニモ又四種ノ形狀アリ

第一 $2x^2-4x-\sqrt{x^2-2x-3}=9$ ノ如キ場合

第二 $x^2+\sqrt{x^2+3x+7}=23-3x$ ノ如キ場合

第三 $x^2+(x-2)(x-3)+\sqrt{2x^2-5x+6}=6$ ノ如キ場合

第四 $(x+5)(x-2)-36=\sqrt{(x+1)(x-1)}$ ノ如キ場合

今次ニ逐次其ノ解法ヲ述ベン

〔例一〕 $2x^2-4x-\sqrt{x^2-2x-3}=9$ ヲ解ケ

今 $\sqrt{x^2-2x-3}$ ヲ $M$ トセハ $x^2-2x-3=M^2$ ナルベク

此ノ兩邊ヲ 2 倍スルトキハ　$2x^2-4x-6=2M^2$　ナルベシ

故ニ　$2x^2-4x=2M^2+6$　依リテ與式變スルヿ下ノ如シ

$$2M^2+6-M=9$$

$$2M^2-M-3=0$$

$\therefore$　$M=-1$　　$M=+\dfrac{3}{2}$　餘ハ略ス

〔例二〕　$x^2+\sqrt{x^2+3x+7}=23-3x$　ヲ解ケ

與式ヲ轉項セバ　$x^2+3x+\sqrt{x^2+3x+7}-23=0\cdots\cdots(A)$

今　$\sqrt{x^2+3x+7}$　ヲ　M　トセバ　$x^2+3x+7=M^2$　ナリ

故ニ　$x^2+3x=M^2-7$　トナル故　(A) 式ハ下ノ如ク變形ス

$$M^2-7+M-23=0$$

$$M^2+M-30=0$$

$\therefore$　$M=-6$　又ハ　$M=+5$　ヲ得ル　餘ハ略ス

〔例三〕　$x^2+(x-2)(x-3)+\sqrt{2x^2-5x+6}=6$　ヲ解ケ

此ノ式ノ前邊ノ根號外ノ者ヲ演算セバ　$2x^2-5x+6$　トナル故ニ　與式ハ次ノ如シ

$$2x^2-5x+6+\sqrt{2x^2-5x+6}=6$$

今　$2x^2-5x+6=M$　トセバ

$$M^2+M=6$$

$$M^2+M-6=0$$



$\therefore$　$M=-3$,　$M=2$,　餘ハ略ス

〔例四〕　$(x+5)(x-2)-36=\sqrt{(x+4)(x-1)}$　ヲ解ケ

上式ヲ演算セバ　$x^2+3x-46=\sqrt{x^2+3x-4}$　トナル

今　$\sqrt{x^2+3x-4}=M$　トセバ　$x^2+3x-46=M^2-42$

故ニ與式變シテ

$$M^2-42=M$$

$$M^2-M-42=0$$

$\therefore$　$M=7$　　$M=-6$,　以下略ス

〔第五〕　$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bx+A=0$　ヲ解ケ

與式ノ全體ヲ　$x^2$　ニテ除スベシ　然ルトキハ下ノ如シ

$$Ax^2+Bx+C+\frac{B}{x}+\frac{A}{x^2}=0$$

次ニ變位シテ　$Ax^2+\dfrac{A}{x^2}+Bx+\dfrac{B}{x}+C=0$　トナシ

括リテ　$A\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+B\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+C=0\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$

今　$x+\dfrac{1}{x}=M$　トセバ　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=M^2-2$　ナリ

故ニ　(A) 式變シテ次ノ如シ

$$A(M^2-2)+BM+C=0$$

$$AM^2-2A+BM+C=0$$

$$AM^2+BM+(C-2A)=0$$

此ノ方程式ヨリ　M　ノ價ヲ求ムルヿヲ得ベシ　M　ノ價確

定セル後チハ $x$ ノ價ヲ求ムルコ容易ナリ

〔應用〕 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ ナル方程式ヲ解ケ

$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bx+A=0$ ナル方程式ニ於テ

$x+\dfrac{1}{x}=M$ トナスドハ $AM^2+BM+(C-2A)=0$ ナル

コハ既ニ知レリ $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ ナル式ハ A. B. C.

各 1 トナリタル特別ノ場合ナルヲ以テ $x+\dfrac{1}{x}=M$ ト

ナスドハ $M^2+M-1=0$ トナルベシ 此ノ式ヨリ

$M=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ヲ得ル 故ニ

$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ヨリ $x$ ノ價ヲ求ムルコヲ得ベシ

以下畧ス



# 第十章

# 無理方程式及分數方程式

本章ニハ無理方程式ノ解方ト特種ナル形狀ヲ有スル分數方程式トノ解方ヲ說カントス

## 無理方程式解方

無理方程式トハ未知數ニ根號ヲ帶ヒタル項ヲ有スル方程式ノ事ナリ 例ヘハ

$\sqrt{x-3}=3,\quad 3\sqrt{x+7}=2\sqrt{3x+6},\quad x-\sqrt{x+2}=4,$

$\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+4}=1,\quad \sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2},$

$\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\dfrac{3}{\sqrt{1+x}},$ 等ハ何レモ無理ノ方程式ナリ

今逐次其ノ解方ヲ示サントス

〔例一〕 $\sqrt{x-3}=3$ ナル方程式ヲ解ケ

前後兩邊ヲ第二羃スルドハ $x-3=9 \quad \therefore\ x=12$

〔例二〕 $3\sqrt{x+7}=2\sqrt{3x+6}$ ナル方程式ヲ解ケ

前後兩邊ヲ第二羃スルドハ $9(x+7)=4(3x+6)$

$9x+63=12x+24,\qquad 9x-12x=24-63$

$-3x=-39\qquad x=13.$

〔例三〕 $x-\sqrt{x+2}=4$ ナル方程式ヲ解ケ

『總テ無理方程式ヲ解カンニハ無理ノ一項ヲ等號ノ一邊ニ孤立セシムルヲ要スルナリ』

此ノ法則ニ依リテ與式ヲ次ノ如ク轉項ス

$x-4=\sqrt{x+2}$ 此ノ兩邊ヲ二羃スルトキハ

$x^2-8x+16=x+2$ トナル次ニ轉項シテ

$x^2-9x+14=0$ ∴ $x=2,\ x=7,$

〔例四〕 $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+4}=1,$ ナル方程式ヲ解ケ

上ノ法則ニ依リテ與式ヲ次ノ如ク轉項ス

$\sqrt{2x+9}=1+\sqrt{x+4}$ 此ノ式ノ兩邊ヲ二羃シテ

$2x+9=1+2\sqrt{x+4}+x+4$ トナリ次ニ法則ニ依リテ

$2x+9-1-x-4=2\sqrt{x+4}$ トナシ其ノ兩邊ヲ演算シテ

$x+4=2\sqrt{x+4}$ トナシ 次ニ兩邊ヲ二羃シテ

$x^2+8x+16=4(x+4)$ トナル

$x^2+8x+16=4x+16$

$x^2+4x=0$ ∴ $x=0$ $x=-4.$

〔例五〕 $\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}$ ヲ解ケ

上式ノ兩邊ヲ二羃シテ

$4x+1-2\sqrt{4x+1}\sqrt{x+3}+x+3=x-2$

$4x+1+x+3-x+2=2\sqrt{4x+1}\sqrt{x+3}$

$4x+6=2\sqrt{4x+1}\sqrt{x+3}$



$2x+3=\sqrt{4x+1}\sqrt{x+3}$

$4x^2+12x+9=(4x+1)(x+3)$

$4x^2+12x+9=4x^2+13x+3$

$-x=-6$ ∴ $x=6$

〔例六〕 $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=\frac{3}{\sqrt{x+1}}$ ヲ解ケ

去分セバ $x+1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=3$ トナル

即チ $\sqrt{x}\sqrt{x+1}=2-x$

故ニ $x(x+1)=4-4x+x^2$

$x^2+x=4-4x+x^2$

$5x=4$ ∴ $x=\frac{4}{5}$

◎學者ハ上ノ六例題ヲ能ク注意シテ記臆シ居ルベシ

〔注意〕 無理方程式ノ根ハ時々其ノ題意ニ適セサル答ヲ得ルコアリ

例ヘバ $\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}=1$ ナル方程式ヲ解ケバ

$x=15$ ナル答ヲ得ベシ

然ルニ今上式ニ於テ $x=15$ トナストキハ

$\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}=5+4$

トナリテ題意ニ滿足ナル能ハス

今深ク其理ヲ考フルニ $\sqrt{x+10}=\pm\sqrt{x+10}$ ナルベク

又 $\sqrt{x+1}=\pm\sqrt{x+1}$ ナルベシ 故ニ與式ハ次ノ四個

中ニ成立スル者ノ一必ラス眞ナルベキナリ

$+\sqrt{x+10}+(-\sqrt{x+1})=1,\quad +\sqrt{x+10}+(+\sqrt{x+1})=1,$

$-\sqrt{x+10}+(-\sqrt{x+1})=1,\quad -\sqrt{x+10}+(+\sqrt{x+1})=1,$

然ルヲ强ヒテ $x+10$ ノ平方根及ビ $x+1$ ノ平方根ヲ正號トセリ是レ無理ナル點アリ依リテ上ノ如ク合ハサル根ヲ得タルナリ 故ニ $\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}=1,$ ナル如キ方程式アラバ上ニ列記セシ如ク四組ノ方程式トナシテ各其根ヲ求メ然ル後チ其答ノ當否ヲ驗シテ

$\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}=1,$ ノ眞正ノ形狀ヲ定メサルベカラズ 今 $\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}=1,$ ナル方程式ノ眞正ノ形狀ハ $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1}=1,$ ナルベキヲ知ル 而メ $x=15$ ハ能ク此ノ式ヲ滿足セシムル者ナリ

## 特種之分數方程式

分數方程式ハ一般ニ去分轉項合一ノ三法ヲ施シテ其方程式ヲ解クヘシト云フ規則ナレ㔫或ル特種ノ形狀ナル分數方程式ニ於テハ去分轉項合一ノ三法ニ關シテ幾分カ其ノ手數ヲ省クヿヲ得ベシ次ニ其ノ例ヲ示サン

〔例一〕 $\dfrac{3-2x}{x-5}=\dfrac{2x-7}{4-x}$ ナル方程式ヲ解ケ

此ノ分數式ノ如ク分母及ビ分子共ニ一次式ニシテ分母ノ $x$ ノ項ニテ分子ノ $x$ 項ヲ除シ盡シ得ル者ナルトキハ分母



ニテ分子ヲ除スルヲ以テ第一トス

今各分母ヲ以テ各分子ヲ除セシ者ヲ揭クレバ次ノ如シ

$$\frac{3-2x}{x-5}=-2-\frac{7}{x-5}$$

$$\frac{2x-7}{4-x}=-2+\frac{1}{4-x}$$

然ルニ假定ニ依ルニ $\dfrac{3-2x}{x-5}=\dfrac{2x-7}{4-x}$ ナル故ニ

$$-2-\frac{7}{x-5}=-2+\frac{1}{4-x}$$

故ニ $-\dfrac{7}{x-5}=\dfrac{1}{4-x}$ トナル斯クナリタル後チ去分轉項合一シテ　ノ價ヲ求ムルナリ餘ハ略ス

〔例二〕 $3\dfrac{x-1}{x+1}+2\dfrac{x+1}{x-1}=5$ ナル方程式ヲ解ケ

◎初學者ノ能ク間違ヲナスヿハ $3\dfrac{x-1}{x+1}$ ナル式ト $3+\dfrac{x-1}{x+1}$ ナル式トヲ混同スルヿナリ

今其ノ間違ノ因由ヲ尋ヌルニ算術ニ於テ $3+\dfrac{1}{4}$ ト書スベキ者ヲ略シテ $3\frac{1}{4}$ ト書セルナリ

故ニ代數學ニ於テ $3\dfrac{x-1}{x+1}$ ナル式ヲ $3+\dfrac{x-1}{x+1}$ ト考フル者アリ 是レ大ナル誤解ナリ何トナレバ $\dfrac{x-1}{x+1}$ ナル分數式ハ代數式ニメ $\dfrac{1}{4}$ ナル式ハ算術ノ式ナリ代數ニ於テハ或ル項ノ數字係數ハ其ノ後ノ字母ヲ倍スベキヿヲ表ハス者ナリ 予ハ次ニ明言シ置カン 『總テ分母分

子ニ或ル文字ヲ含ミタル式ノ前ニ何等ノ符號ヲモ有セサル數字（又ハ文字或ハ數字ト文字ト）アル𪜈ハ此ノ數字（又ハ文字或ハ數字ト文字）ヲ後ノ分數式ニ乘スベキ者ト心得ベシ』

$$3\frac{x-1}{x+1}=3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=3\left(1-\frac{2}{x+1}\right)=3-\frac{6}{x+1}$$

$$2\frac{x+1}{x-1}=2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=2+\frac{4}{x-1}$$

然ルニ題意ニ依ルニ

$$3\frac{x-1}{x+1}+2\frac{x+1}{x-1}=5$$ ナル故

$$3-\frac{6}{x+1}+2+\frac{4}{x-1}=5$$

即チ $-\frac{6}{x+1}+\frac{4}{x-1}=0$ ∴ $\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x+1}=0$

此ノ後ノ式ヲ解クコハ始ノ式ヲ解クヨリハ余程容易ナリトス

〔例三〕 $\frac{2x+1}{x+1}+\frac{2x+9}{x+5}=\frac{2x+3}{x+2}+\frac{2x+7}{x+4}$ ヲ解ケ

變形セバ $2-\frac{1}{x+1}+2-\frac{1}{x+5}=2-\frac{1}{x+2}+2-\frac{1}{x+4}$

$$\therefore\ -\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}=-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}$$

即チ $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+4}$

以下略ス



# 第十一章

# 二次方程式解法餘論

予カ今茲ニ論セント欲スル所ノ者ハ $Ax^2+Bx+C=0$ ナル𪜈 $x=\frac{1}{2A}(-B\pm\sqrt{B^2-4AC})$ ナリト云フコヲ先哲ガ如何樣ニナシテ發見セシヤト云フコヲ推理臆斷スルニアリ 今ヲ以テ古ヲ考フ果シテ其當ヲ得ルヤ否ヤヲ知ラス 唯好學ノ參考ニ供セント欲スルノミ 諸子是レヲ諒セヨ

二次方程式ノ解法ノ証明ガ今日ノ如クニ爲シ得タル迄ニハ少ナクトモ三階ノ階級ヲ經タル者ナルベシ

第一 ハ幾何學ニテ解セシ時代

第二 ハ變形法ニテ解セシ時代

第三 ハ因子法ニテ解セシ時代

是レナリ 而ノ現今ノ時代ハ第三ノ時代ニアリ將來ノ解法ハ 混成法ニテ解スベキ時代 ナリ詳シクハ結論ニテ述ヘン

〔第一時代〕 此ノ時代ニ於ケル解法ニ二種アリ

(A) 直接幾何圖形上ノ解法

(B) 幾何圖形性質上ノ解法

是レナリ予ハ總テノ解法ヲ論スルニ先達テ二次方程式トハ如何ナル者ナリヤト云フノ問題ヲ決定シ置カント欲ス

〔定義〕 二次方程式トハ二ツノ未知數ノ和ト其積トヲ知リテ其二未知數ヲ發見スルノ方法ナリ

〔例一〕 $\left.\begin{array}{r} x+y=8 \\ xy=15 \end{array}\right\}$ ナル片 $xy$ ノ價ヲ求ム ......(1)

ト云フカ如キ問題ナリ　先ツ上ノ關係ヨリシテ二未知數ヲ發見セントシ $x=8-y$ ヲ下式ニ代入スル片ハ

$(8-y)y=15$

即チ $8y-y^2=15$

轉項シテ $-y^2+8y-15=0$

變符シテ $y^2-8y+15=0$............(2)　トナリテ未タ知ルヿヲ得サル形狀トナレリ即チ此ノ(2)式ハ現今吾人カ名稱スル所ノ二次方程式ナリ

〔例二〕 $\left.\begin{array}{r} x+y=\frac{47}{30} \\ xy=\frac{1}{10} \end{array}\right\}$ ナル片 $xy$ ノ價如何

ト云カ如キ問題モ亦二次方程式ナリ　先ツ此ノ方程式ヲ解カント欲シテ $x=-y+\frac{47}{30}$ ヲ下式ニ代入スル片ハ

$\left(\frac{47}{30}-y\right)y=\frac{1}{10}$



$\frac{57}{30}y-y^2=\frac{1}{10}$

$+y^2-\frac{47}{30}y+\frac{1}{10}=0$............(A)

$30y^2-47y+3=0$...............(B)

(B) 式ト化シタリ此ノ (B) 式ハ吾人ノ未タ知ラサル所ノ者ニシテ現今吾人ハ此ノ形狀ノ者ヲ稱シテ二次方程式ト云ヒ $Ax^2+Bx+C=0$......($\alpha$) ノ形狀ヲ以テ有ルト有ラユル總テノ二次方程式ヲ表ハシム但シ A, B, C, ハ任意ノ既知數ナリトス　今 ($\alpha$) 式ヨリ (B) 式ヲ作ランニハ $A=30$ $B=-47$ $C=3$ $y=x$ トナス片ハ直チニ $30y^2-47y+3=0$ 式ヲ得ヘシ　又 (2) 式ヲ作ランニハ $A=1$ $B=-8$ $C=15$ $x=y$ トナセハ $y^2-8y+15=0$ 式ヲ得ヘシ此ノ如クニナシテ A, B, C, ニ任意ノ或ル數ヲ得セシムルニ從フテ如何ナル二次方程式ニテモ作リ得ラルヘキヲ以テ $Ax^2+Bx+C=0$ ナル方程式ハ實ニ萬象ヲ包括スル者ト云フヘシ

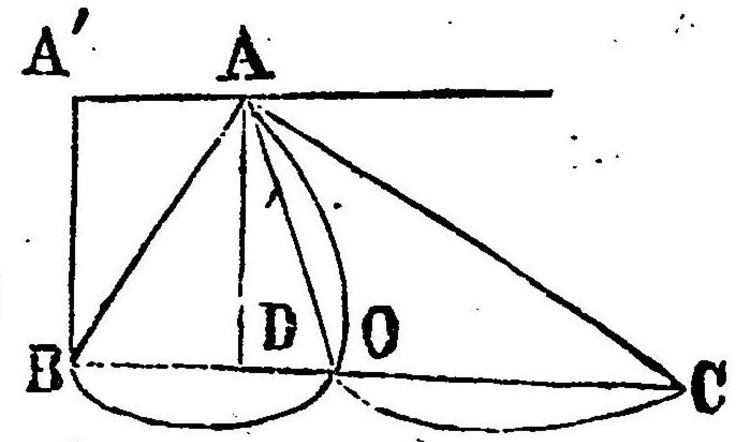
〔注意〕 學者ハ $Ax^2+Bx+C=0$ ナル方程式ニ於テ A, B, C, ヲ任意ノ或ル完全數トナス片(但シ $A>1$) $Ax^2+Bx+C=0$......(2) ナル方程式ハ如何ナル場合ニ於テ現出シ　又 $A=1$ ナル片即チ $x^2+Bx+C=0$......(1) ハ如何ナル片ニ現出セシヤヲ前二例ニ依リテ知リ得ヘシ

$x^2+Bx+C=0$ ハ $\left.\begin{matrix}x+y=-B\\ xy=C\end{matrix}\right\}$ ナル𪜈ニ $xy$ ノ價ハ如何ト云フノ問題ヲ變製セシ者ニシテ

$Ax^2+Bx+C=0$ ハ $\left.\begin{matrix}x+y=-\frac{B}{A}\\ xy=\frac{C}{A}\end{matrix}\right\}$ ナル𪜈 $xy$ ノ價ヲ發見セヨト云フノ問題ヲ變成セシ者タルヿヲ知ルハ甚タ容易ナルベシ

以下將サニ其解法ヲ論セントス

(A) 直接幾何圖形上ノ解法




幾何學ノ定理ニ依ルニ ABC ヲ直角三角形トナシ AD ヲ BC ヘノ垂線トナス𪜈ハ

$BD.\ DC=AD^2$ ナルヿヲ知ル

又 BC ヲ直徑トナシテ即チ O.A ヲ半徑トナシテ圓ヲ書ク𪜈ハ ABC ニ外書セル圓ヲ得ベシ

今此ノ二性質ヲ應用シテ二次方程式 $\left.\begin{matrix}x+y=a\\ xy=b\end{matrix}\right\}$ ナル方程式 即チ $y^2-ay+b=0$ ナル方程式ヲ解キ得ベシ其方法下ノ如シ

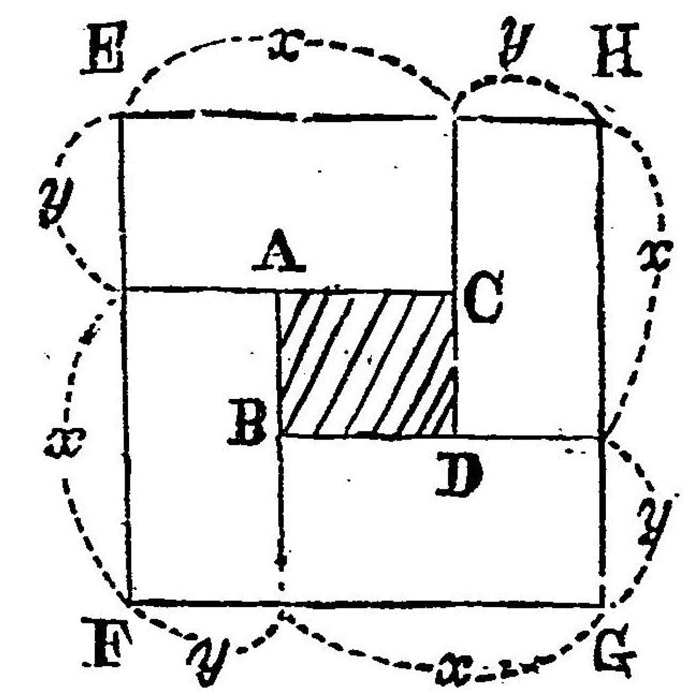
與ヘラレタ數ニ等シキ長サ $a$ ヲ直徑トシタル圓ヲ書キ $b$ ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ノ一邊 A'B ヲ B 點ニ垂



直立テ A' 點ヨリ平行線 AA' ヲ引キ圓周ト A ニ會セシメ A ヨリ BC ニ垂線 AD ヲ書ケハ BD, DC, ハ求ムル所ノ長サ $x$, $y$, ナリ

此ノ如キ解方ヲ二次方程式製圖解法ト云フ

(B) 幾何圖形性質上ノ解法




先ツ長サヲ $x$ 巾ヲ $y$ トセル矩形四個ヲ圖ノ如ク排列スル𪜈ハ其中央ニ ABCD ナル空虛ヲ生スベシ 乃チ

$4xy+\boxed{ABCD}=(x+y)^2$ ナルヿヲ知ル

∴ 正方形 $ABCD=(x+y)^2-4xy$

即チ $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

∴ $x-y=\sqrt{(x+y)^2-4xy}$ …………(イ)

(イ)式ハ即チ兩邊ノ和ト兩邊ノ積トヲ知リテ兩邊ノ差ヲ發見スルノ方法ナリ

〔應用〕 $\left.\begin{matrix}x+y=-B\\ xy=C\end{matrix}\right\}$ ナル方程式ヲ解ケ 換言セバ

$y^2+By+C=0$ ナル方程式ヲ解ケ

上式ニ依リテ知ル如ク $x-y=\sqrt{(x+y)^2-4xy}$

$$\therefore\quad x-y=\sqrt{(-B)^2-4C}$$

即 $x-y=\sqrt{B^2-4C}$

$$\begin{array}{ll} x+y=-B & x+y=-B \\ x-y=\sqrt{B^2-4C} & -x+y=-\sqrt{B^2-4C} \\ \hline 2x=-B+\sqrt{B^2-4C} & 2y=-B-\sqrt{B^2-4C} \\ x=\dfrac{-B+\sqrt{B^2-4C}}{2} & y=\dfrac{-B-\sqrt{B^2-4C}}{2} \end{array}$$

通常 $xy$ ノ價ヲ次ノ如ク書ス

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4C}}{2}$$

〔注意〕 上ノ問題ハ $x>y$ トノ考ヘニテ $xy$ ノ價ヲ見出シタル者ナレモ $x>y$ ナルヤ又 $x<y$ ナルヤハ問題ニ何ト云フ制限ナキ者ナレハ $x>y$ トノミ考ヘテ問題ヲ解クコハ不可ナリ故ニ $x<y$ ト考ヘテ解キ見ン然ルトキハ下ノ如シ

$$y-x=\sqrt{(x+y)^2-4xy}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ロ})$$

$$\therefore\quad y=\frac{-B+\sqrt{B^2-4C}}{2}\qquad x=\frac{-B-\sqrt{B^2-4C}}{2}$$

依リテ $y^2+By+C=0$ ノ最モ公平ナル $y$ ノ價ハ次ノ如シ $y=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4C}}{2}$

是レ $y^2+By+C=0$ ナルトキ $y$ ノ價ハ二ツアル所以ニシテ $x<y$ ト $x>y$ トニ歸因スル者ナリ



〔其二〕 $\left.\begin{aligned}x+y&=-\frac{B}{A}\\ xy&=\frac{C}{A}\end{aligned}\right\}$ ナル方程式即チ換言セバ

$Ay^2+By+C=0$ ナル方程式ヲ解クベシ

◎ $x>y$ ナルトキハ…………………………〔第一〕

$$x-y=\sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)^2-4\times\frac{C}{A}}$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\left\{-\frac{B}{A}+\sqrt{\frac{B^2}{A^2}-4\times\frac{C}{A}}\right\}$$

$$y=\frac{1}{2}\left\{-\frac{B}{A}-\sqrt{\frac{B^2}{A^2}-\frac{4C}{A}}\right\}$$

◎ $y>x$ ナルトキハ…………………………〔第二〕

$$y-x=\sqrt{\left(-\frac{B}{A}\right)^2-4\times\frac{C}{A}}$$

$$y=\frac{1}{2}\left\{-\frac{B}{A}+\sqrt{\frac{B^2}{A^2}-4\times\frac{C}{A}}\right\}$$

$$x=\frac{1}{2}\left\{-\frac{B}{A}-\sqrt{\frac{B^2}{A^2}-\frac{4C}{A}}\right\}$$

故ニ一般ニ $Ay^2+By+C=0$ ナルトキハ

$y=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ ナリ

〔第二時代〕 此ノ時代ニ於ケル解法ハ少シク簡略ニナシタル者ニシテ此ノ解法ノ起シ時ハ恰モ代數ト幾何學トノ分離セシ時ナリシナラン

此ノ時代ニ於ケル二次方程式ノ定義ハ $Ax^2=C$ ヲ一般ノ二次方程式ノ形狀ナリト定義シ置キシ者ナラン而シ

$x=\pm\sqrt{\frac{C}{A}}$ ト云フ二根アルベシト云フヲ定說トセシ

ナラン　何故ニ　$Ax^2=C$　ナル𬼀　$x=\sqrt{\frac{C}{A}}$　又

$x=-\sqrt{\frac{C}{A}}$　ナリヤト云フノ說明ニ至リテハ

$\left(+\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^2=\frac{C}{A}$　$\left(-\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^2=\frac{C}{A}$　ナレバ

$\sqrt{\frac{C}{A}}=\pm\sqrt{\frac{C}{A}}$　ナリトノ說明ヲ取リタル者ナルベシ

次ニ此時代ニ於ケル　$Ax^2+Bx+C=0\cdots\cdots(1)$　ナル方程式ノ解方ヲ論スベシ　$x=y-\frac{B}{2A}$　トナシテ (1) 式ニ代入スル𬼀ハ下ノ如シ

$$A\left(y-\frac{B}{2A}\right)^2+B\left(y-\frac{B}{2A}\right)+C=0$$

$$A\left(y^2-\frac{B}{A}y+\frac{B^2}{4A^2}\right)+B\left(y-\frac{B}{2A}\right)+C=0$$

$$Ay^2-By+\frac{B^2}{4A}+By-\frac{B^2}{2A}+C=0$$

$$Ay^2+\frac{B^2-2B^2}{4A}+C=0$$

$$Ay^2+\frac{-B^2+4AC}{4A}=0$$

$$Ay^2=\frac{B^2-4AC}{4A}$$　要スル所ノ式ナリ

$$y^2=\frac{B^2-4AC}{4A^2}$$

$$y=\pm\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$



$$x+\frac{B}{2A}=\pm\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$x=-\frac{B}{2A}\pm\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{-B\mp\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

是レヲ要スルニ　$Ax^2=C$　ト云フ如キ $x$ ノ一次項欠ケタル方程式ノ解方ハ甚タ容易ナル者故與ヘラレタル二次方程式ヲ變形シテ　$Ay^2=P$　ノ如キ形狀ニ化シタルナリ

一般ニ　$Ax^2+Bx+C=0$　ナル方程式ヲシテ一次ノ項ヲ欠損セシメント欲セバ $x$ ノ代リニ $x^2$ ノ係數ヲ二倍シタル者ニテ一次ノ係數ヲ除シタル商ノ符號ヲ反記シタル者ヲ $y$ ノ後チニ書キ足シタル者トナスベシ　而ノ其式ヲ決算スル𬼀ハ $y$ ニ就テノ二次式ニシテ且ツ $y$ 一次ノ項ヲ欠損セル者トナルベシ

〔例〕 $2x^2-5x+2=0$　ナル式ヲ解ケ

$x=y+\frac{5}{4}$　トナシテ上式ニ代入スル𬼀ハ

$$2\left(y+\frac{5}{4}\right)^2-5\left(y+\frac{5}{4}\right)+2=0$$

$$2y^2-\frac{9}{4\times 2}=0$$

$$2y^2=\frac{9}{8}\qquad y=\pm\frac{3}{4}$$

$\therefore\ x=\frac{5}{4}\pm\frac{3}{4}$　ヲ得ル

〔例〕 $x^2-9x+14=0$

$x=y+\frac{9}{2}$ トナシテ上式ニ代入スルトキハ

$$y^2=\frac{25}{4} \qquad y=\pm\frac{5}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{9}{2}\pm\frac{5}{2}$$

〔變形法發見ノ理由〕 玆ニハ發見セシ理由ヲ說明セントス 偖テ $Ax^2+Bx+C=0$ ……………………(1)
ナル方程式アランニ $x=y+K$ トナシテ (1) 式ニ代入スルトキハ $A(y^2+2Ky+K^2)+B(y+K)+C=0$
即チ $Ay^2+(B+2AK)y+(AK^2+BK+C)=0$ …………(2)
今 (2) 式ニ於テ $B+2AK=0$ 即チ $K=-\frac{B}{2A}$ ナル如クニ K ヲ取リタリトナストキハ (2) 式ハ變シテ $y$ 一次ノ項ヲ欠損セル (3) ノ方程式トナルベシ

$$Ay^2+A\left\{-\frac{B}{2A}\right\}^2+B\left\{-\frac{B}{2A}\right\}+C=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

$$y^2=-\frac{A\left\{-\frac{8}{2A}\right\}^2+B\left\{-\frac{B}{2A}\right\}+C}{A}=\frac{B^2-4AC}{4A^2}$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \text{ ヲ得 } \therefore\ x=\frac{\mp\sqrt{B^2-4AC}}{2A}+\frac{-B}{2A}$$

〔第三時代〕 現時二次方程式解法論
上來論シタル如ク二方程式解トハ二未知數ノ和ト其ノ積トヲ知リテ其ノ二未知數ヲ決定スルノ方法ナレ𪜈 其ノ未知數ノ一元ヲ消去スルトキハ一般ニ $Ay^2+By+C=0$



ノ形狀トナル 故ニ現時ニ於テハ二次方程式トハ未知數ノ第二冪ト同未知數ノ第一冪ト該未知數ヲ含マサル項トノ三項ヨリ成立スル式ヲ 二次方程式 ト名稱スルナリ 而ノ其ノ解法ハ既ニ第七章ニ於テ詳論セシ處ナリ
此ノ現時ニ於ケル論法ニテハ何故ニ二次方程式ハ一般ニ相異ナル二根ヲ有スルヤト云フ事ハ心裏ニ會得スルヿ難キ者ナリ 故ニ現時ニ於テハ二次方程式ナレバ 二根 三次方程式ナレバ 三根 四次ナレバ 四根 ヲ有スル者ナリトノ假定ヲナシテ其ノ方程式ノ解法ヲ論スル者ナリ 故ニ二次方程式ニハ三根ハ有セスト云フヿヲ證明セサルベカラズ 又 $Ay^2+By+C=0$ ナル方程式ノ二根ヲ夫々 $\alpha,\ \beta,$ トナストキハ $\alpha+\beta=-\frac{B}{A},\ \alpha\beta=\frac{C}{A}$ ト云フ理ヲモ亦證明セサルベカラス
現時ニ於テハ上ノ二ケ條ヲ定理トナセリ 今逐次之レヲ證明セントス
〔定理第一〕 一元二次方程式ノ答根ハ二個ニ限レリ
何トナレバ 代數因子分括原理第三編第二章定理第四ニ依リテ證明セル如ク $x$ ニ就テ $n$ 次ノ式ハ $n$ ヨリモ多クノ $x$ ノ價ニ對シテ零トナルヿ能ハサルヲ以テナリ
〔定理第二〕 $Ax^2+Bx+C=0$ ナル方程式ノ二根ヲ夫レ

夫レ $\alpha, \beta,$ トナル𪜈ハ

$$\alpha+\beta=-\frac{B}{A}, \quad \alpha\beta=\frac{C}{A},$$ ナリ

既ニ知ル如ク $Ax^2+Bx+C=0$ ナル方程式ハ

$$x=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \qquad x=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

ト云フ二根ヲ有ス　今始ノ式ノ答ヲ $\alpha$　次ノ式ノ答ヲ $\beta$ トナス𪜈ハ

$$\alpha=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \qquad \alpha=\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$\beta=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \qquad \beta=\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$\alpha+\beta=-\frac{B}{A} \qquad \alpha\beta=\frac{C}{A}$$

〔系一〕 $\alpha^2+\beta^2=\frac{B^2-2AC}{A^2}$

〔系二〕 $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{B^2-2AC}{AC}$

〔系三〕 $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{B^2-2AC}{C^2}$

此ノ他ハ猶ホ第八章ニ於ケル $pq$ ノ定理ト對照シテ研究スルヿヲ要ス

上ニ論シタル如ク本原ノ理ト現時ノ解方トハ全ク一致セリ　故ニ一元二次方程式トハ二未知數ノ和ト其ノ積トヲ知リテ二未知數ヲ求ムル所ノ式ナリト云フヿヲ得ベシ

〔應用〕　矩形アリ其兩隣邊ノ和 11 尺ニシテ其ノ面積 24 平尺ナリト云フ依リテ其ノ二邊ヲ求ム



〔解〕　$x^2-11x+24=0$ ハ要スル所ノ式ナリ

何トナレバ $x^2$ ノ係數ニテ $x^1$ ノ係數ヲ除シタル者ノ符號ヲ反セバ　其ノ兩根ノ和トナルベク　又 $x^2$ ノ係數ニテ末項ヲ除セシ者ハ其ノ兩根ノ積トナルベキヲ以テナリ

故ニ此ノ方程式ヲ解カバ二未知數ヲ確定スルヿヲ得ルナリ〔猶 114 頁ノ例ヲ參考スベシ〕

◎一般ニ $\alpha, \beta,$ ヲ根トセル二次方程式ヲ造ラント欲セバ　$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$　トセバ可ナリ

〔注意〕　學者ハ上ノ理ヲ能ク記臆スルヿヲ要ス

〔例一〕　$\frac{\alpha}{\beta}$ ト $\frac{\beta}{\alpha}$ トヲ根トナス二次方程式ヲ作レ

上ノ理ニ依リテ　$x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}$　ハ要スル所ノ式ナリ即チ　$x^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}x+1=0$

$$\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0$$

〔例二〕　$\alpha+\beta=\frac{5}{2}$　$\alpha\beta=\frac{3}{2}$　ナル𪜈　$\frac{\alpha}{\beta}$ ト $\frac{\beta}{\alpha}$ トヲ根トナス二次方程式ヲ作レ

例一ニ依リテ知ル如ク　$\frac{\alpha}{\beta}$ ト $\frac{\beta}{\alpha}$ トヲ根トセル二次方程式ハ　$\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0$　ナリ

然ルニ第八章ノ $pq$ 定理ニ依リテ知ル如ク〔94頁〕

$\alpha^2+\beta^2=p^2-2q$ 偖テ題意ニ依ルニ $p=\dfrac{5}{2}$, $q=\dfrac{3}{2}$

ナル故 $\alpha^2+\beta^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-2\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{25}{4}-3=\dfrac{25-12}{4}=\dfrac{13}{4}$

$\therefore\ \alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{13}{4}x+\dfrac{3}{2}=0$

即チ $6x^2-13x+6=0$ ナルヿヲ知ル

〔例三〕 $2x^2-5x+3=0$ ナル方程式ノ二根ヲ $\alpha$, $\beta$, トナス𪜈ハ $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ト $\dfrac{\beta}{\alpha}$ トヲ根トセル二次方程式ヲ作レバ $6x^2-13x+6=0$ トナルト云フ其ノ証ヲ求ム

$2x^2-5x+3=0$ ナル方程式ニ於テ $\alpha\ \beta$ ヲ其ノ二根トナストキハ $\alpha+\beta=\dfrac{5}{2}$ $\alpha\beta=\dfrac{3}{2}$ ナルニ依リテ 必竟例題二ト同一ノ問題ナリ

〔例四〕 $2x^2-15x+4=0$ ノ根ヲ $\alpha$, $\beta$, トナス𪜈ハ $\dfrac{\alpha}{\beta}$ $\dfrac{\beta}{\alpha}$ ヲ根トセル二次方程式ハ $8x^2-209x+8=0$ ナリ其証ヲ求ム

$2x^2-15x+4=0$ ノ根ヲ $\alpha$, $\beta$, トナス𪜈ハ定理第二ニ依リテ $\alpha+\beta=\dfrac{15}{2}$, $\alpha\beta=\dfrac{4}{2}=2$, ナルベシ而メ $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ト $\dfrac{\beta}{\alpha}$ トヲ根トスル二次方程式ハ

$$x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=0$$ ナル方程式ナリ

即チ $x^2-\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)x+1=0$ ナル方程式ナリ



依テ $\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0$ ナル式ヲ得ル

然ルニ $\alpha^2+\beta^2=p^2-2q=\left(\dfrac{15}{2}\right)^2-2\times 2=\dfrac{225}{4}-4=\dfrac{209}{4}$

又 $\alpha\beta=2$ ナルニ依リテ

$$\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=2x^2-\frac{209}{4}x+2=0$$

依リテ $8x^2-209x+8=0$ ナル式ヲ得ベシ

〔例五〕 $x^2+px+q=0$ ナル方程式ノ根ヲ $\alpha,\beta$, トナス𪜈ハ $(\alpha+\beta)^2$ ト $(\alpha-\beta)^2$ トヲ根トナス二次方程式ハ $x^2-2(p^2-2q)x+(p^4-4p^2q)=0$ ナリ其証

〔解〕 $x^2+px+q=0$ ナル根ヲ $\alpha$, $\beta$, トナス𪜈ハ $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$ ナルベシ

而メ $(\alpha+\beta)^2$ ト $(\alpha-\beta)^2$ ヲ根トセル方程式ヲ作レバ

$$x^2-\{(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2\}x+(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2=0$$

即チ $x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2)=0$…………(A)

ナリ然ルニ第八章 $pq$ ノ定理ニ依ルニ $\alpha^2+\beta^2=p^2-2q$,

又 $\alpha^4+\beta^4=p^4-4p^2q+2q^2$ ナルヲ以テ

$\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2=p^4-4p^2q+2q^2-2q^2=p^4-4p^2q$ トナル

依リテ (A) 式ヲ變形スル𪜈ハ

$$x^2-2(p^2-2q)x+(p^4-4p^2q)=0$$

〔例六〕 $px^2+qx+r=0$ ナル式ノ根ヲ $\alpha.\ \beta$ トナス𪜈ハ $\alpha+\beta$, $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, ヲ根トセル方程式ハ

$qpx^2+(pr+q^2)x+qr=0$ ナリト云フ其証ヲ求ム

〔解〕 $\alpha+\beta,\ \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ヲ根トセル方程式ヲ作レバ

$x^2-\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)x+(\alpha+\beta)\times\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=0$ ナリ即チ

$x^2-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+3\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)x+\alpha\beta=0$ 去分シテ

$(\alpha+\beta)x^2-(\alpha^2+\beta^2+3\alpha\beta)x+\alpha\beta(\alpha+\beta)=0\cdots\cdots(A)$

ナリ偖テ $px^2+qx+r=0$ ノ根ヲ $\alpha,\beta,$ トナストキハ既ニ知ル如ク $\alpha+\beta=-\frac{q}{p},\ \alpha\beta=\frac{r}{p},$ ナリ而シテ又第八章ノ定理ニ依ルニ $\alpha^2+\beta^2=\left(-\frac{q}{p}\right)^2-2\frac{r}{p}$ ナリ故ニ

$\alpha^2+\beta^2+3\alpha\beta=\frac{q^2}{p^2}-\frac{2r}{p}+3\frac{r}{p}=\frac{q^2}{p^2}+\frac{r}{p}=\frac{q^2+pr}{p^2}$ ナリ

依リテ(A)式ヲ變化スレバ次ノ如シ

$\left(-\frac{q}{p}\right)x^2-\left(\frac{q^2+pr}{p^2}\right)x+\frac{r}{p}\left(\frac{q}{p}\right)=0$

$\therefore\ -qpx^2-(q^2+pr)x-qr=0$

即チ $qrx^2+(q^2+pr)x+qr=0$

〔例七〕 $x^2+px+q=0$ ナル式ノ根ヲ $\alpha,\beta,$ トナストキハ $\alpha^2,\beta^2$ ヲ根トセル方程式ハ次ノ如シト云フ

$x^2-(p^2-2q)x+qr=0$ 其証ヲ求ム

偖テ $\alpha^2,\beta^2,$ ヲ根 セル方程式ヲ作レバ

$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$ ナリ 然ルニ $x^2+px+q=0$ ノ根ハ $\alpha,\beta,$ ナル故ニ $\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q,$ ナリ



故ニ第八章 $pq$ ノ定理ニ依リテ $\alpha^2+\beta^2=p^2-2q$ ナルヿヲ知ル 此等ノ價ヲ $x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha\beta)^2=0$ ニ代入スルトキハ $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$ ナル式ヲ得ベキナリ

〔注意〕 此ノ種類ノ問題ハ通常ノ書ニハ次ノ如ク書シ居レリ

$x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$ ノ根ハ $x^2+px+q=0$ ノ根ノ平方ナルヿヲ証セ〔ト書セシモアリ又ハ〕

$x^2+px+q=0$ ノ根ハ $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$ ノ平方根ナルヿヲ証セ〔ト書セシモアリ又ハ〕

$Ax^2+Bx+C=0$ ノ根カ $x^2+px+q=0$ ノ根ノ平方ナル爲メノ要件ハ $p^2-2q=\frac{B}{A},\ q^2=\frac{C}{A},$ ナルヿヲ証セ〔ト書セシモアリ又ハ〕

$Ax^2+Bx+C=0$ ノ根カ $x^2+px+q=0$ ノ根ノ平方ナルヿノ要件ヲ求ム〔ト書セシモアリ〕

以上ノ四項ハ學者ノ大ニ注意ヲ要スベキヿナリ

〔例八〕 $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ ノ根ガ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ平方ナルヿノ要件ハ如何

一方程式ノ根カ二方程式ノ平方ナリト云フ故ニ

$ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ $\alpha\beta,$ トナストキ $\alpha^2,\beta^2$ ヲ根トセル方程式ヲ作ラバ 第一方程式ハ正ニ此ノ式ニ等シカ

ラサルベカラス

借テ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ $\alpha, \beta$, トナス𪜈 $\alpha^2, \beta^2$ ヲ根トセル方程式ヲ作レバ $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$ ナリ然ルニ第一方程式ハ $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ ナル故下式アルベシ

$$b^2=-(b^2-2ac) \qquad \therefore \ b^2=ac$$

〔注意〕 此ノ問題ハ等比級數ヲ學ヒタル後チノ問題トナス𪜈ハ次ノ如ク變製セラル

$a^2x^2+b^2x+c^2=0$ ノ根ガ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ平方ナル𪜈ハ $a, b, c$, ハ等比級數ヲナスト云フヿヲ証スベシト

## 二次方程式ト二次三項式トノ關係

今玆ニハ二次方程式ノ感念ヲ今一層嵩メンカ爲メニ二次三項式ト二次方程式トノ關係ヲ知ラシメントス

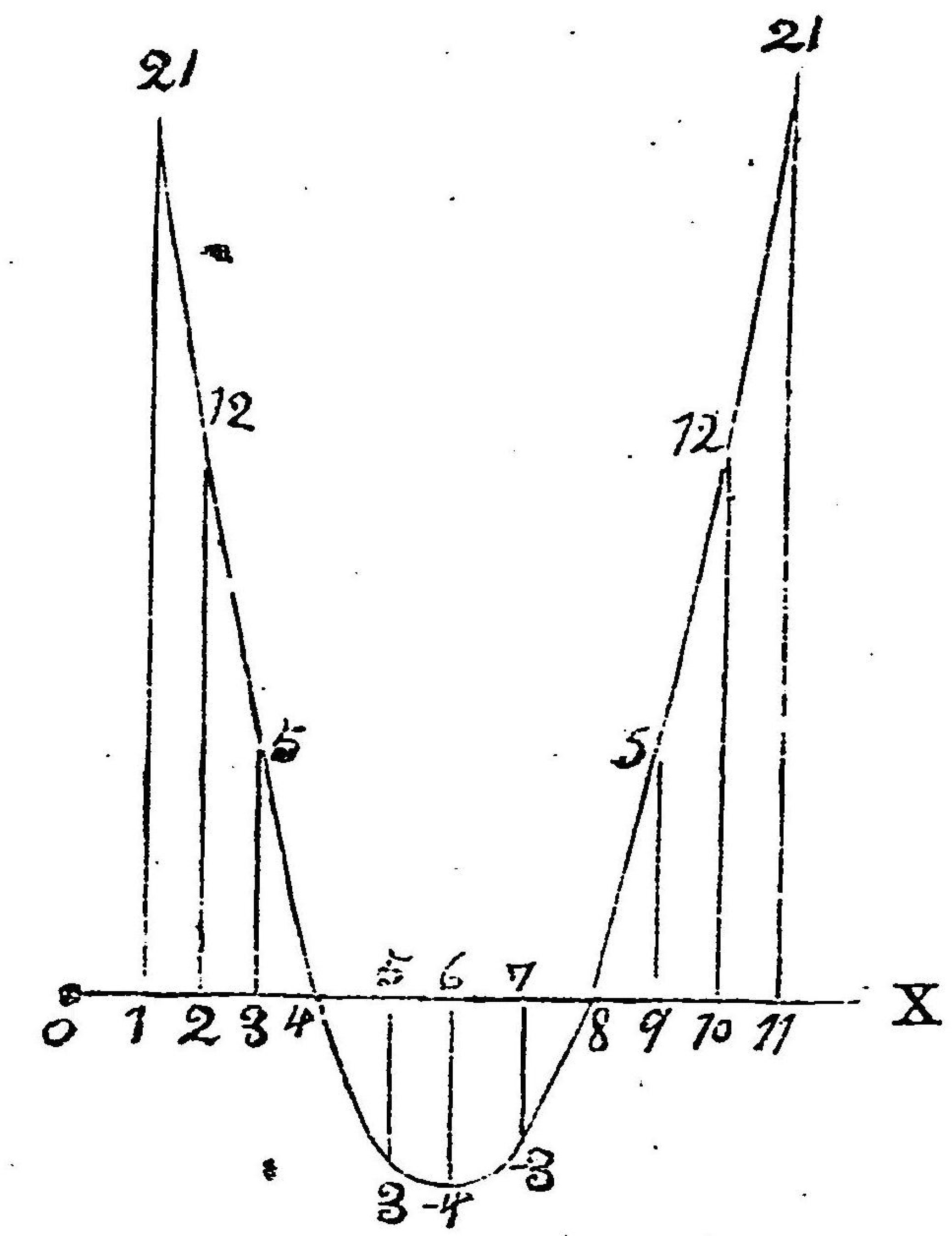
是レヲ研究センニハ二次三項式ノ值ノ變化ノ形狀ヲ研究セサルベカラス 今次ニ一例ヲ掲ケテ其ノ變化ノ形狀ヲ圖形ニテ示サント欲ス

◎ $x^2-12x+32$ ナル二次三項式ノ價ノ變化ノ形狀ヲ示スベシ

上式ニ於テ



| | | |
|---|---|---|
| $x=1$ | トセバ | 21 |
| $x=2$ | トセバ | 12 |
| $x=3$ | トセバ | 5 |
| $x=4$ | トセバ | 0 |
| $x=5$ | トセバ | $-3$ |
| $x=6$ | トセバ | $-4$ |
| $x=7$ | トセバ | $-3$ |
| $x=8$ | トセバ | 0 |
| $x=9$ | トセバ | 5 |
| $x=10$ | トセバ | 12 |
| $x=11$ | トセバ | 21 |




是レヲ圖形ニ顯ハサントセバ先ツ 0X ナル一直線ヲ畫キ 0X 上ニ 0 ヲ原點トシ 一分, 二分, 三分,…………九分, 一寸, 一寸一分, 等ナル長サヲ取リ 0X 上ニ先ツ一分ノ處ニ長サ 21 分ナル直線ヲ直角ニ立テ以テ $x=1$ ナル𪜈 21 トナルベキ事柄ヲ表ハサシム次ニ同樣ニナシテ $x=2$ ナル𪜈 12 トナルベキ價ヲ表ハサシム斯ノ如クナシテ遂ニ悉クノ諸點ヲ定メ此ノ諸點ヲ結ヒ付クル𪜈ハ一種ノ曲線ヲ得ベシ 此ノ曲線ハ $x^2-12x+32$ ノ價ノ變化ヲ表ハス所ノ一ツノ表ナリ

◎予輩ハ此ノ表ニ依リテ次ノ二種ノ感念ヲ惹起セリ

〔第一〕 二次方程式ノ二根ハ曲線ト OX トノ交點ナリ

〔第二〕 二次三項式ニ於テ其價格ヲ正數ナラシメ又負數ナラシムルコヲ得ベシ

即チ $x^2-12x+32$ ノ價ヲ負數トナサント欲セバ $x^2-12x+32$ ナル式ヲ零トナシテ其答 4 ト 8 トヲ見出シ 其ノ二根ノ間ニアル數價ヲ $x$ ノ代リニ代入スル片ハ $x^2-12x+32$ ノ價ハ必ラス負數トナルベシ

又 $x^2-12x+32$ ノ價ヲ正數トナサント欲セバ $x^2-12x+32$ ナル式ヲ零トナシテ其答 4 ト 8 トヲ見出シ 其ノ二根ノ以外ニアル數ヲ $x$ ノ代リニ代入スル片ハ $x^2-12x+32$ ノ價ハ必ラス正數トナルベシ

次ニ予輩ハ此ノ第二ノ感念ニ就テ理論上ニ是レヲ証セント欲ス

〔定理第一〕 $Ax^2+Bx+C$ ナル式ニ於テ $Ax^2+Bx+C=0$ トナシテ得タル $x$ ノ價ヲ $\alpha, \beta,$ トナス片ハ $Ax^2+Bx+C$ ノ式ニ於ケル $x$ ノ代リニ $\alpha, \beta,$ ノ中間ニアル數ヲ代入スル時ハ $Ax^2+Bx+C$ ノ價格ハ負數トナルベシ 又 $\alpha, \beta,$ 以外ノ數ヲ代入スル片ハ $Ax^2+Bx+C$ ハ正數トナルベシ



〔証明〕 本定理ノ證明法ハ次ノ如シ

$$Ax^2+Bx+C=A\left\{x+\frac{B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right\}\left\{x+\frac{B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right\}$$

ナルコハ既ニ分括法ニ於テ知ル所ナリ而シテ此ノ後邊ノ式ヲ變形セバ

$$A\left\{x-\left(\frac{-B-\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right)\right\}$$

ナリ而シテ假定ニ依リテ $A(x-\beta)(x-\alpha)$

故ニ $Ax^2+Bx+C=A(x-\alpha)(x-\beta)$…………(A)

借テ今 $\alpha$ ト $\beta$ トノ中間ナル數 K ヲ取リ (A) 式ノ前後兩邊ヘ K ヲ代入スル片ハ

$Ax^2+Bx+C$ ノ價格 $=AK^2+BK+C=A(K-\alpha)(K-\beta)$ トナル然ルニ K ハ $\alpha$ ト $\beta$ トノ中間ニアル數ナルニ依リテ $K<\alpha$ $K>\beta$ ナルベキヲ以テ $(K-\alpha)(K-\beta)$ ノ積ハ負數ナル價格ヲ有ス

次ニ $\alpha>\beta>L$ ト云フ關係アル L ヲ $x$ ニ代入スル片ハ $Ax^2+Bx+C$ ノ價格 $=AL^2+BL+C=A(L-\alpha)(L-\beta)$ ナリ然ルニ假定ニ依ルニ $L<\alpha, L<\beta,$ ナル故 $L-\alpha$ ハ負數ナリ亦 $L-\beta$ モ負數ナリ即チ $(L-\alpha)(L-\beta)$ ハ正數ナリ

次ニ $M>\alpha>\beta$ ト云フ關係アル M ヲ $x$ ニ代入スル片モ $Ax^2+Bx+C$ ノ價格ハ正數ナルコヲ知リ得ベシ

〔虛數〕 $Ax^2+Bx+C=0$ ナル式ニ於テ其ノ二根ハ左ノ如シ $\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$

借テ $B^2-4AC$ ガ負數トナル時例ヘハ $-M$ ノ如クナル時ハ $\frac{1}{2A}(-B\pm\sqrt{B^2-4AC})$ ハ $\frac{1}{2A}(-B\pm\sqrt{-M})$ ト云フ二ツノ虛根ヲ有ツナリ 此ノ $\sqrt{-M}$ ハ如何ナル者ナリヤト云フニ $(\sqrt{-M})^2$ セバ $-M$ トナルベキ數ナリト云フヿニテ現時是レハ如何ナル者ナリヤト云フヿヲ明ラカニ知ルヿヲ得サルナリ 故ニ數學者ハ之レニ虛數ナル名稱ヲ付シタリ 而ノ虛數ハ書ニモ何ニモ表ハスヿヲ得サルナリ 虛數ニ對シテ他ノ數ヲ實數ト云フ 又虛數ヲ有スル根ヲ虛根ト云ヒ 虛數ヲ有セサル根ヲ實根ト稱スルナリ

〔定理第二〕 $Ax^2+Bx+C$ ナル式ニ於テ $Ax^2+Bx+C=0$ トナシテ得ル所ノ二根ガ夫々虛數ナル時ハ $x$ ニ任意ノ數價ヲ與フルモ常ニ $Ax^2+Bx+C$ ノ價格ハ負數トナルヿヲ得ズ

〔証明〕 $Ax^2+Bx+C=0$ ナル式ニ於テ $\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ 然ルニ $\alpha,\ \beta,$ ハ虛數ナリトノ假定ナル故 $=\sqrt{B^2-4AC}$ ハ負數ナルヿ明白ナリ 既ニ分括法ノ定理第四中ニ論スル如ク



$Ax^2+Bx+C=A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2-4AC}{4A^2}\right]$ ナリ

借テ $x$ ヲ正數又ハ負數トナスモ $\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2$ ナル式ハ常ニ正ナリ 而ノ假定ニ依ルニ $\frac{B^2-4AC}{4A^2}$ ハ負數ナル故 $-\frac{B^2-4AC}{4A^2}$ ハ正數ナリ故ニ四角ナル括弧內ノ者ハ常ニ正量ナリ依リテ定理ハ証明セラレタリ

## 應用

〔例一〕 $x$ ノ値如何ナレバ $\sqrt{14-(3x-2)(x-1)}$ ハ實量ナルベキ

先ツ題意ニ依ルニ $\sqrt{14-(3x-2)(x-1)}$ ヲ實量トナサント欲スル者ナル故 $14-(3x-2)(x-1)>0$ トセサルベカラス 然ルニ $14-(3x-2)(x-1)=-(3x^2-5x-12)$ ナル故ニ $14-(3x-2)(x-1)>0$ ナラシムル爲メニハ必ラス $-(3x^2-5x-12)>0$ ナラシメサルベカラズ

$-(3x^2-5x-12)>0$ ナラシムル爲メニハ必ラス $3x^2-5x-12$ ノ價格ヲ負數ナラシメサルベカラス $3x^2-5x-12$ ノ價格ヲ負數ナラシムル所ノ $x$ ノ價ヲ求メント欲セバ $3x^2-5x-12$ ヲ零ニ等フシテ得タル二價 即チ 3 ト $-\frac{4}{3}$ トノ間ニアル數價ヲ擇ブベシ

依リテ $\sqrt{14-(3x-2)(x-1)}$ ガ實量タルベキ爲メ $x$ ニ與フル價ノ制限ハ 3 ヨリ大ナルヿヲ得ズ 又 $-\frac{4}{3}$ ヨリ小ナルヿヲ得サルナリ

〔例二〕 $\sqrt{14-(3x-2)(x-1)}$ カ實量ナル爲メニ必用ニシテ 且ツ十分ナル要件ハ $x$ ノ値 3 ト $-\frac{4}{3}$ トノ間ニアルベキナリ

此ノ證明法ハ上ノ例ト同一ナリ故ニ略ス

〔例三〕 $x$ 實數ナル片ハ $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ ハ 5 ト 9 トノ間ニアル實値ヲ有スルヿ能ハスト云フヿヲ證明セヨ

今此ノ分數式ハ如何ナル實値ヲ有スルヤヲ知ルヿ能ハサレバ此レヲ $m$ ト定メン

$$\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}=m,\qquad \therefore\ x^2+34x-71=mx^2+2mx-7m$$

即チ $x^2+34x-71-mx^2-2mx+7m=0$

$$x^2(1-m)+2(17-m)x-(71-7m)=0$$
$$x=\frac{-2(17-m)\pm\sqrt{4(17-m)^2+4(1-m)(71-7m)}}{2(1-m)}$$

然ルニ假定ニ依リテ $x$ 實數ナル故ニ根號内ノ量ハ必ラス正量ナルヿヲ要ス乃チ

$4(17-m)^2+4(1-m)(71-7m)\geqq 0$ ナルヿヲ要ス

即チ $45-14m+m^2\geqq 0$ ナルヿヲ要ス

分括セバ $(5-m)(9-m)\geqq 0$ ナルニアリ



$(5-m)(9-m)>0$ ナラシムルニハ $m$ ニ 5 ト 9 トノ間ニアル數ヲ與フルヿ能ハス 故ニ $x$ 實量ナル爲メニハ $m$ ハ 5 ト 9 トノ中間ニアル數ヲ取ルヿ能ハサルナリ

〔例四〕 $x$ ニ如何ナル實量ヲ與フルニ關セス $(x^2-3x+4)\div(x^2+3x+4)$ ハ 7 ヨリ大ナル値ヲ有スルヿヲ得ズ 又 $\frac{1}{7}$ ヨリ小ナル價ヲ有スルヿヲ得スト云フヿヲ證明スベシ

$\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}=m$ トセバ $x^2(1-m)-3x(1+m)+4(1-m)=0$

$\therefore\ x=\frac{+3(1+m)\pm\sqrt{9(1+m)^2-16(1-m)^2}}{2(1-m)}$ ナリ然ルニ $x$ ノ値ハ實數ナル故 $9(1+m)^2-16(1-m)^2\geqq 0$ ナルヲ要ス

即チ $-7m^2+50m-7\geqq 0$ ナルヲ要ス

依リテ $-(7m^2-50m+7)\geqq 0$ ………………(A)

(A) 式ノ前邊カ正量ナル爲メニハ括弧内ハ常ニ負數ナラシメサルベカラス 括弧内ヲ負數ナラシムルニハ $7m^2-50m+7=0$ トナシテ得タル二價 7 ト $\frac{1}{7}$ トノ間ノ數價ヲ $m$ ニ與フルベキナリ 依リテ $m$ ハ 7 ヨリハ大ナルベカラス 又 $\frac{1}{7}$ ヨリハ小ナルベカラスト云フヿヲ知レリ

〔例五〕 $m^2-8m+72$ ハ $m$ ニ如何ナル實數ヲ與フルト

モ常ニ 56 ヨリ大ナル價格ヲ有スト云フヿヲ証スベシ

〔証明一〕 $m^2-8m+72$ ヲ $y$ ト定メン 然ル片ハ

$$m^2-8m+72=y,\qquad \therefore\ m^2-8m+(72-y)=0$$

$$\therefore\ m=\frac{+8\pm\sqrt{8^2-4(72-y)}}{2}$$ ナルベシ

然ルニ $m$ ハ實値ナリトノ制限ナル故 上式ノ根號内ノ者ハ正量ナルベキヲ要ス 即チ $8^2-4(72-y)\geqq 0$

$\therefore\ y-56\geqq 0$ ナルニアリ 即チ $y\geqq 56$, ナルヲ知ル

〔證明二〕 $m^2-8m+72=m^2-8m+16+56$

$$=(m-4)^2+56$$

$$\therefore\ m^2-8m+72=(m-4)^2+56$$

偖テ $(m-4)^2$ ハ $m$ ヲ 4 トナス片ノ場合ヲ除キ常ニ 0 ヨリ大トナル者故 $(m-4)^2+56$ ナル式ハ常ニ 56 ヨリモ大ナリ

〔注意〕 上ノ例題ハ次ノ如キ問題トナリテ諸書ニ出現スルナリ

$m^2-8m+72$ ナル式ニ於テ其ノ價格カ最小トナルベキ時ノ $m$ ノ價ヲ求ム

偖テ此ノ式ニ於テハ上例ニ於テ知ル如ク $m=4$ ナル片 $m^2-8m+72$ ハ 56 トナリテ最小ナル價ナリ能ク上ノ二證明ニ注意セラルベシ



〔例六〕 $x$ ニ與フル或ル適當ナル實値ヲ以テスレバ $(4x^2+36x+9)\div(12x^2+8x+1)$ ハ如何ナル價ヲモ有シ得ベシト云フヿヲ證明スベシ

$$\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}=m$$ トナス片ハ

$$(4-12m)x^2+(36-8m)x+(9-m)=0$$

$$\therefore\ x=\frac{-(36-8m)\pm\sqrt{(36-8m)^2-4(4-12m)(9-m)}}{2(4-12m)}$$

假定ニ依ルニ $x$ 實量ナル故根號内ヲ計算シタル式 $m^2-8m+72\geqq 0$ ナルヿヲ要ス 然ルニ此ノ式ハ第五例題ニ於テ知ル如ク 56 ヨリ常ニ小ナラズ

〔例七〕 $x^2+y^2=6x-8y$ ニ適合スル所ノ $x$ 及ヒ $y$ ノ實値中最大ナル者ト最小ナル者トヲ求ムベシ

〔解〕 $x^2-6x+y(y+8)=0$ ナルニ依リテ

$$x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-4y(y+8)}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{-y^2-8y+9}}{2}$$

ナルヲ以テ $x$ カ實量ナル爲メニハ $-(y^2+8y-9)\geqq 0$ ナラサルベカラズ 即チ $y$ ハ 1 ト $-9$ トノ間ニアリ

〔例八〕 $x^2(b^2+b'^2)+2x(ab+b'a')+a^2a'^2=0$ ノ根 若シ實ナレバ其ノ二根ハ互ニ相等シカラザルベカラスト云フヿヲ證セ

$$x=\frac{-2(ab+a'b')\pm\sqrt{4(ab+a'b')^2-4(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)}}{2(b^2+b'^2)}$$

偖テ根號内ノ者ハ正量ナルヿヲ要ス然ルニ根號内ヲ計算

スルトキハ　$-(ab'-ba')^2$　トナル然ルニ　$(ab'-a'b)^2$　ハ常ニ正量ナル故ニ　$ab'-a'b=0$　ナルニ非ラスバ　$x$　ノ價ハ實値ナルヿヲ得ス　即チ　$x$　實値ナル爲メニハ與方程式ノ二根ハ互ニ相等シキヿヲ要ス



# 第十二章
# 方程式問題解方

方式程ノ問題ニ二種アリ　第一　ハ記號法ノミニ依リテ表セラレタル方程式　第二　ハ文言ヲ以テ云ヒ表ハサレタル方程式　是レナリ　記號法ヲ以テ書キ表ハサレタル方程式ノ解方ハ上來既ニ說明シ來レル所ノ者ナリ　故ニ本章ニハ專ヲ文言ヲ以テ云ヒ表ハサレタル方程式ノ解キ方ヲ示サントス　今次ニ示ス例題ハ諸書ノ問題ヲ解ク爲メノ摸範タラシメント欲シテ撰題セシ者ナレバ學者ハ能ク注意シテ記臆シ置クヿヲ要ス

## 年齡ニ關スル問題

〔1〕　父ハ滿卅七年子ハ滿七年ナリ今ヨリ幾年ノ後父ノ年齡子ノ年齡ノ三倍トナルベキヤ

〔解〕　今　$x$　ヲ以テ今ヨリ子ノ年ノ三倍ガ父ノ年ニ等シカルベキニ至ル迄ノ年數トセバ　其ノ時ノ父ノ年ハ

$37+x$　ニシテ　子ノ年ハ　$7+x$　ナルベシ

依リテ下式アリ　$37+x=3(7+x)$

〔2〕　甲乙二人アリ甲ノ年ハ七十乙ノ年ハ五十ナリ今ヨ

リ幾年以前ニ於テ甲ノ年ハ乙ノ年ニ二倍セシヤ

〔解〕 $x$ ヲ以テ今ヨリ甲ノ年カ乙ノ年ノ二倍ナルヿアリシ時迄ノ年數トセバ 其時甲ハ $70-x$ 乙ハ $50-x$ ナルベシ題意ニ依リテ次式アリ $70-x=2(50-x)$

〔3〕 父子アリ父ノ年ハ子ノ年ノ三倍ナリ今ヨリ十年ヲ經過セバ父ノ年ハ子ノ年ノ二倍ニ等シカルベシト云フ依リテ父子各年齢ヲ求ム

〔解〕 子ノ年ヲ $x$ トセバ父ノ年ハ $3x$ ナルベシ而メ今ヨリ十年後ノ父ノ年ハ $3x+10$ 其時ノ子ノ年ハ $x+10$ ナルベキヲ知ル 依リテ次式アリ

$3x+10=2(x+10)$

〔4〕 或人ニ其ノ年齢ヲ問ヒシニ我レニ一人ノ娘アリ今ヨリ五年ノ後チハ我カ年ハ娘ノ年ニ四倍シ今ヨリ十年ノ後チハ我年娘ノ年ニ三倍スト答ヘタリ 依リテ或人ノ年ヲ求ム

〔解〕 現今ノ娘ノ年ヲ $x$ トセバ 五年後ノ娘ノ年ハ $x+5$ ニシテ 五年後ノ父ノ年ハ $4(x+5)$ ナリ而シテ今ヨリ十年後ハ 今ヨリ五年後ノ五年後ナルベキヲ以テ今ヨリ十年後ノ娘ノ年ハ $(x+5)+5$ ニシテ 今ヨリ十年後ノ父ノ年ハ $4(x+5)+5$ ナリ 依リテ次式アリ



$3(x+5+5)=4(x+5)+5$

〔5〕 或人ニ年ヲ問ヒシニ答ヘテ曰ク我カ年ハ廿年以上卅年以下ナリ而メ本年ヨリ十八年ヲ經バ本年ノ年齢ヲ逆ニ讀ミタル者ニ等シト依テ其ノ年齢ヲ求ム

〔解〕 此ノ人ノ現今ノ年ヲ $20+x$ ト定ムレバ 18 年後ノ年ハ $20+x+18$ ナルベシ而メ 18 年後ノ年ハ現今ノ年ヲ逆ニ讀ミタル者ニ等シト云フ故現今ノ年 $20+x$ ナル數ヲ逆ニ讀ムトキハ $10x+2$ トナルベシ 依リテ次式アリ $20+x+18=10x+2$

## 矩形ニ關スル問題

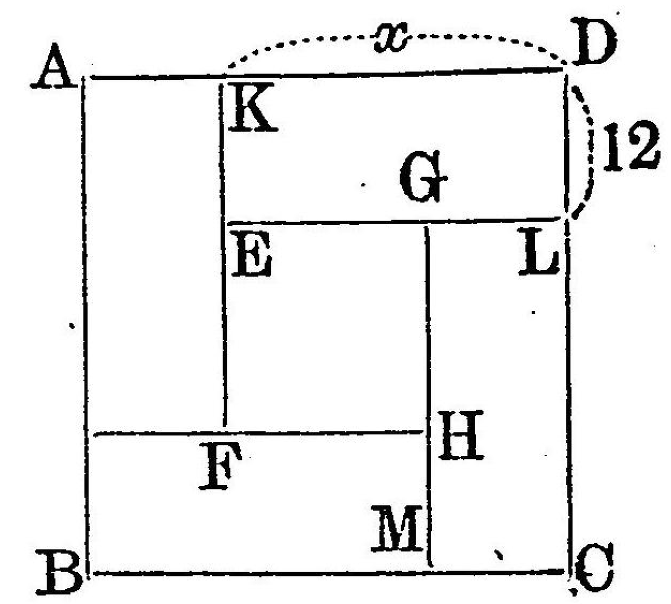
〔6〕 廣堂アリ其ノ長サハ巾ヨリ八間長シト云フ若シ此ノ長サト巾トヲ各二間ツヽ增ストキハ其ノ堂ノ面積ノ增スヿ六十坪ナリト云フ依リテ此ノ堂ノ長巾各如何

〔解〕 巾ヲ $x$ トセバ 長ハ $x+8$ ナルベシ而メ此ノ長幅各々二間ツヽ增シタルトキノ巾及ヒ長サハ $x+2$ $x+8+2$ ナルベシ而メ元ノ面積ハ $x(x+8)$ ニメ後チノ面積ハ $(x+2)(x+8+2)$ ナルベシ依リテ次式アリ

$x(x+8)+60=(x+2)(x+8+2)$

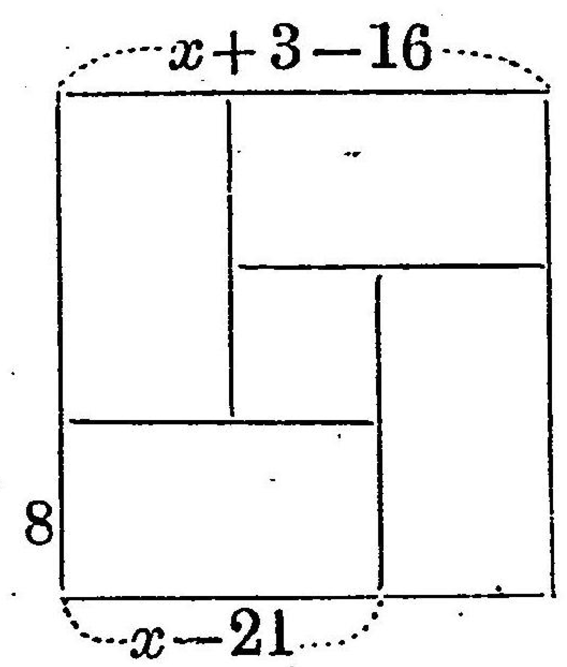
〔7〕 兵士一千二百九十六人ヲ以テ中空ノ方陣ヲ作ルトキハ其ノ厚サ十二列ヲ得ベシト云フ前面一列ノ人員ヲ求ム

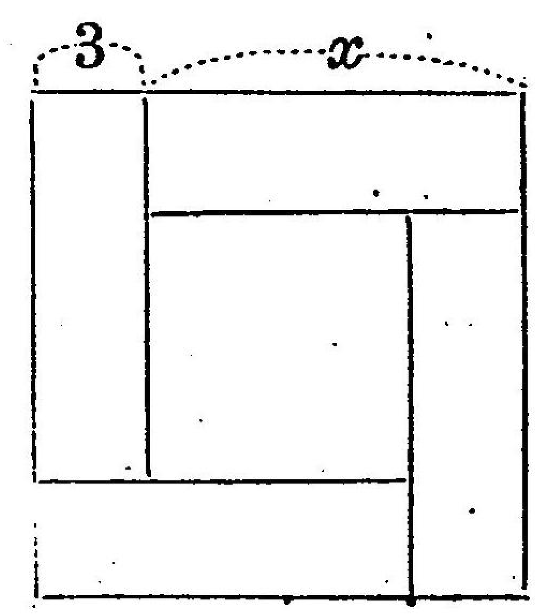
〔解〕 ABCD−EFGH ヲ以テ中空ノ方陣ヲ作リ得タル者トナストキ FE, EG, GH, HF, ヲ延長シテ對邊ト交ハル所ヲ KLM トナストキハ茲ニ生セシ四ツノ矩形ハ皆ナ其人員相等シカルベシ今一矩形ノ長サヲ $x$ トセバ巾ハ題意ニ依リテ十二ナル故ニ各一矩形ノ面積ハ $12x$ ナルベシ此ノ四倍ガ一千二百九十六人ナル故次式アリ $4\times12x=1296$




〔8〕 兵士若干人ヲ以テ中空方陣ヲ作ルアリ其ノ列數ハ四列ナリ 若シ前面一列ノ人員ヲ十六人減セバ其列數ハ八列トナルベシト云フ依リテ兵士ノ總數ヲ求ム

〔解〕 前例ノ如ク三列ノ中空方陣ヲ四個ノ等積矩形ニ分ツトキハ各一矩形ノ積ハ




$3x$ ナルベク其一邊ノ長サハ $x+3$ ナルベシ故ニ八列トナリタルトキノ一邊ノ長サハ $x+3-16$ ナルベシ依テ八列ニナシタル時ノ一矩形ノ一邊ハ $x+3-16-8=x-21$

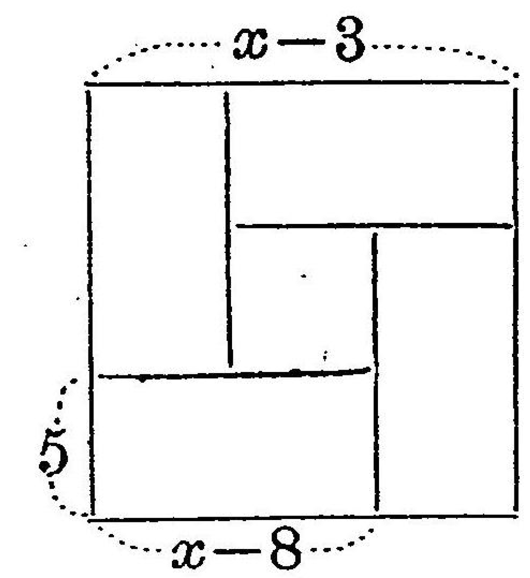


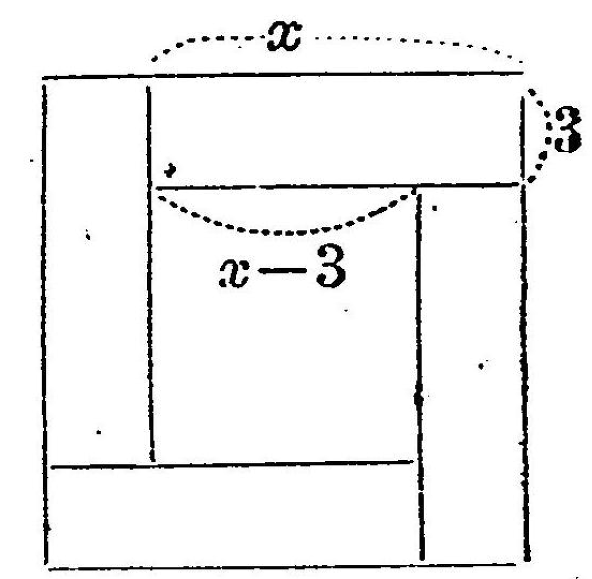
ナルベキヿヲ知ル依リテ次式アリ

$4\times3x=4\times8(x-21)$

〔9〕 兵士若干ヲ以テ中空ノ方陣ヲ作ルアリ一ハ三列一ハ五列ニシテ一方陣ハ丁度他ノ一方陣ノ内ニ容ルヽヿヲ得ルト云フ而シテ此ノ兩方陣ノ人員ハ相等シト云フ然ラバ兵士ノ數如何

〔解〕 前例ノ如ク三列中空方陣ヲ四個ノ等積矩形ニ分チ一矩形ノ長




サヲ $x$ トセバ新矩形ノ一邊ノ長サハ $x-8$ ナルベシ依リテ次式アリ $4\times3x=4\times5(x-8)$

〔10〕 三矩形アリ其ノ各面積ハ相等シケレドモ其ノ長サ及ヒ巾ハ夫々相異ナレリ 而シテ(第二)ハ第一ヨリ長サニ於テ 6 間長ク巾ニ於テ 4 間短シ (第三)ハ第一ヨリ長サニ於テハ 8 間長ク巾ニ於テハ 5 間短カシト云フ然ラハ面積如何

〔解〕 甲ノ長サヲ $x$ 巾ヲ $y$ トナストキハ

乙ノ長サハ $x+6$ 巾ハ $y-4$ ナルベシ

丙ノ長サハ　$x+8$　巾ハ　$y-5$　ナルベシ

題意ニ依リテ次式アリ

$xy=(x+6)(y-4)$,　$xy=(x+8)(y-5)$

〔11〕兵士若干ヲ矩形ノ陣ニ列スルアリ其ノ長サハ巾ノ二倍ナリト云フ　又若シ此ノ人員ノ内ヨリ二百六人ヲ減スレバ厚サ三列ナル中空方陣ヲ得ベク而シテ其ノ外面一列ノ人員ハ元ノ矩形陣ノ長サニ等シト云フ依リテ其ノ人員ヲ求ム

〔解〕矩形陣ノ長サヲ $x$ トセバ　巾ハ $\frac{x}{2}$ ナルベシ

而シテ 206 人ヲ減シテ作リタル中空方陣ノ前面一列ノ人員ハ $x$ ナルベキヲ以テ中空方陣ヲ四個ノ等積矩形ニ分チタル者ノ長サハ $x-3$ ナルベシ依リテ次式アリ

$$x\times\frac{x}{2}-206=4\times3(x-3)$$

〔12〕或ル矩形ノ一對角線ト長邊トヲ合セバ短邊ノ五倍ニシテ長邊ハ短邊ヨリ卅五尺長シト云フ依リテ矩形ノ面積ヲ求ム

〔解〕幾何學ノ證明スル所ニ依レバ矩形ノ對角線上ノ正方形ハ矩形ノ兩隣上ノ各正方形ノ和ニ等シキ者ナリ

今　短邊ヲ $x$ トスレバ　長邊ハ $x+35$ ナリ故ニ　對角線ハ　$\sqrt{(x+35)^2+x^2}$　ナリ然ルニ題意ニ依リテ次式ア



リ　$\sqrt{(x+25)^2+x^2}=5x$

## 二位數ニ關スル問題

〔13〕二位ノ數アリ其若干ナルヤヲ知ラス唯列數字ノ和ノ四倍ニ等シキコトヲ知リ　又此ノ數ニ廿七ヲ加フルトキハ原數字ノ列數字ノ位置ヲ轉倒セシ者ニ等シト云フ由テ原數ヲ求ム

〔解〕〔代數ニ於テハ二位ノ數字ヨリ成ル數ヲ　$10x+y$　ニテ表ハスナリ〕今單位ノ數字ヲ　$y$　十位ノ數字ヲ　$x$　トセバ　原數ハ　$10x+y$　ナルベシ〔列數字ノ和ト云ヒシハ例ヘハ　25　ト云フ數ナレバ　2+5　即チ　7　ノコトナリ〕然ルニ題意ニ依ルニ列數字ノ和ノ四倍ニ等シキ故

$10x+y=4(x+y)$…………(1)　ト云フ式ヲ得ベク　又

$10x+y$　ヘ　27　ヲ加フレバ原數ノ位置轉倒スト云フ故次式ヲ得ベシ　$10x+y+27=10y+x$…………(2)

〔14〕二位ノ數ニテ成ル二組ノ數アリ其一ハ他ノ二位數ヲ轉倒セシ者ナリ　而シテ此ノ二數ノ和ハ　99　差ハ　45　ナリト云フ問フ各數如何

〔解〕一數ヲ　$10x+y$　トセバ他ノ一數ハ　$10y+x$　ナルベシ　依リテ次式アリ　$(10x+y)+(10y+x)=99$,　$(10x+y)-(10y+x)=45$,

〔15〕 二位ノ數アリ單位ノ數字ハ十位ノ數字ノ二倍ナリ而シテ此ノ數ト此ノ數ノ轉倒數トノ差ハ 36 ナリト云フ依リテ其ノ數ヲ求ム

〔解〕 今十位ノ數ヲ $x$ トナス時ハ單位ノ數ハ $2x$ ナリ而シテ此ノ二位數ハ $10x+2x$ ナルベシ 今此ノ數ヲ轉倒セシ者ハ $2\times10x+x$ ナルベシ依リテ次式アリ

$$(10x+2x)-(20x+x)=36$$

◎此ノ式ヲ又次ノ如クナスモ可ナリ

$$10x+y-(10y+x)=36,\quad 2x=y,$$

〔16〕 二位ノ數アリ其列數字ノ和ハ 10 ニシテ各列數字ノ平方ノ和ハ 58 ナリト云フ由テ其ノ數ヲ問フ

〔解〕 此ノ問題ハ唯列數字ニノミ關シタル所ノ者ナリ今十位數ヲ $x$ 單位數ヲ $y$ トセバ 次式アリ

$$x+y=10,\quad x^2+y^2=58,$$

〔17〕 二位ノ數アリ其ノ列數字ノ相乘積ヲ以テ本數ヲ除スレバ 2 トナリ 又本數ニ 27 ヲ加フレバ其列數字ノ位置轉倒スト云フ依リテ本數ヲ求ム

〔解〕 十位數ヲ $x$ 單位數ヲ $y$ トナス時ハ本數ハ $10x+y$ ニシテ本數ヲ轉倒セシ者ハ $10y+x$ ナリ 依リテ次式アリ $(10x+y)\div xy=2,\quad 10x+y+27=10y+x,$



〔18〕 二位ノ數アリ十位ノ數字ハ單位數字ノ二倍ナリ又本數ヲ轉倒セシ者ヘ本數ヲ乘スレバ 2268 トナルト云フ依テ本數ヲ求ム

〔解〕 次ニ式ノミヲ掲ケン

$$(2\times10x+x)(10x+2x)=2268$$

〔注意〕 三位數ヲ代數式ニ表ハス法ハ $100x+10y+z$ トナスベシ

〔19〕 三位ノ數アリ列數字ノ和ハ 11 ニシテ單位ノ數字ハ百位ノ數字ニ 2 倍スルヿヲ知リ 又此數ニ 297 ヲ加フレバ 其位置轉倒スト云フ依テ其數ヲ求ム

〔解〕 $(100x+10y+2x)+297=200x+10y+x,$

$$x+y+2x=11,$$

## 作事ニ關スル問題

〔20〕 甲乙丙ノ三人共同シテ一事業ヲ若干日ニシテ成効ス 今此ノ工事ヲ甲一人ニテナス時ハ三人共同シテ爲ス日數ヨリモ六日多ク 乙一人ニテナス時ハ 甲ヨリモ更ラニ九日多ク 丙一人ニテナス時ハ 三人共同シテナス時ノ二倍ノ日數ヲ要スベシト云フ依テ各人治ムル時ノ日數ヲ求ム

〔解〕 三人共力シテ一事ヲ成効スル日數ヲ $x$ トセバ

甲ガ一事ヲ成効スル日數ハ $x+6$ 乙ハ $x+15$ 丙ハ $2x$ ナルベシ 今全事業ヲ 1 トナス𪜈ハ

$\frac{1}{x+6}$ ハ甲一日ノ働キ, $\frac{1}{x+15}$ ハ乙一日ノ働キ,

$\frac{1}{2x}$ ハ丙一日ノ働キ, $\frac{1}{x}$ ハ共力シテナス一日ノ働キ

故ニ下式アリ

$$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+15}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}$$

〔21〕 甲乙ノ二工協力シテ一事ヲ爲ス時ハ 30 日ニシテ成効ス 今二工共ニ爲スヿ 12 日ニシテ乙休業シ其後甲一人ニテ之レヲ爲スヿ 24 日ニシテ成効セリト云フ各一人ニテ爲ス時ノ日數ヲ求ム

〔解〕 甲ガ全事業ヲ爲ス日數ヲ $x$ 乙ガ全事業ヲ爲ス日數ヲ $y$ 全事業ヲ 1 トナス時ハ 甲一日ノ働キハ $\frac{1}{x}$ 乙一日ノ働キハ $\frac{1}{y}$ ナルベシ依リテ下式アリ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{30},\quad 12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{x}\times 24=1,$$

〔22〕 A,B, ノ二工アリ倶ニ一事業ヲ若干日ニシテ成効スト云フ 若シ此ノ二工ニ此ノ仕事ノ半分ヲ別々ニ爲サシメバ A ハ前ヨリ一日早ク, B ハ前ヨリ二日遲ク成効スト云フ依リテ問フ甲乙二工倶ニ爲サバ何日ヲ要スベキヤ



〔解〕 共同シテ一事ヲ成効スル日數ヲ $x$ トスル時ハ題意ニ依ルニ 甲ハ 全業ノ半ヲ $x-1$ 乙ハ 全業ノ半ヲ $x+2$ ニテ成スヿヲ得ベシ 依リテ甲ノ全業ヲ爲ス日數ハ $2(x-1)$ 乙ノ全業ヲ爲ス日數ハ $2(x+2)$ ナルベシ 依リテ下式アリ

$$\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+2)}=\frac{1}{x}$$

## 分數ニ關スル問題

〔23〕 分數アリ分母ニ七ヲ加ヘ分子ヲ二倍セバ三分ノ二トナリ若シ又分母ヲ二倍シ分子ニ二ヲ加フレバ五分ノ三トナルト云フ依リテ其ノ分數ヲ問フ

〔解〕 〔分數式ハ總ヘテ $\frac{x}{y}$ ト定ムベシ〕今分母ヲ $y$ 分子ヲ $x$ トナス𪜈ハ與ヘラレタル分數ハ $\frac{x}{y}$ トナルベシ依リテ下式アリ $\frac{2x}{y+7}=\frac{2}{3},\quad \frac{x+2}{2y}=\frac{3}{5},$

〔24〕 常分數アリ分母ト分子トノ差ハ十二ナリ今分子ニモ分母ニモ五ヲ加フル𪜈ハ其價四分ノ三トナルベシト云フ問フ此ノ分數ハ如何

〔解〕 $y-x=12,\quad \frac{x+5}{y+5}=\frac{3}{4},$ 又次ノ如ク爲スモ可ナリ

分子ヲ $x$ トセバ分母ハ $x+12$ ナリ故ニ與ヘラレタル分數ハ $\frac{x}{x+12}$ 偖テ分母ニモ分子ニモ 5 ヲ加フル𪜈ハ

$$\frac{x+5}{x+12+5}=\frac{3}{4}$$

## 損益ニ關スル問題

〔25〕 二圓四十錢ニテ牛肉ヲ買フニ牛肉ノ價今ヨリ二割騰貴スルトキハ四斤丈ケ減少スベシト云フ牛肉一斤ノ價ヲ求ム

〔解〕 $x$ ヲ以テ牛肉一斤ノ現今ノ價トナストキハ二割騰貴セシ時ノ牛肉一斤ノ價ハ $1.2x$ ナルベシ依リテ次式アリ

$$\frac{240}{x}=\frac{240}{1.2x}+4$$

〔26〕 二圓四十錢ニテ牛肉ヲ買フニ牛肉ノ價今ヨリ二割下落スルトキハ六斤丈ケ增加スベシト云フ牛肉一斤ノ價ヲ求ム

〔解〕 $x$ ヲ以テ牛肉一斤ノ現今ノ價トナストキハ二割下落セシ時ノ牛肉一斤ノ價ハ $.8x$ ナルベシ依リテ次式アリ

$$\frac{240}{x}+6=\frac{240}{.8x}$$

〔27〕 會食ノ申込アリシヲ以テ廿四人分ノ膳部ヲ準備セシニ廿一人來會シテ各人定價通リノ拂ヒ渡シヲ爲セシヲ以テ割烹店ニテハ一圓ノ損ヲナセシト云フ然ラハ一人前ノ定價如何　但シ定價ハ原價ヨリ一割二分五厘ノ利ヲ得ル如ク定メタリ

〔解〕 一人前ノ定價ヲ $x$ トセバ原價ハ $\frac{x}{1+.125}$ ナル



ベシ故ニ次式アリ $21x+1=24\times\frac{x}{1+.125}$

〔28〕 或宴會ノ費用 80圓ヲ若干人ニ等分ニ割リ當テシニ內四人ハ會費ヲ出サスシテ去リシヲ以テ殘ノ人員ニテ更ラニ一圓ツヽ出シタリト云フ依リテ其ノ人員ヲ求ム

〔解〕 $x$ ヲ全人員トナストキハ $\frac{80}{x}$ ハ各人ノ出金高ナルベシ依リテ次式アリ $\left(\frac{80}{x}+1\right)(x-4)=80$

〔29〕 或人物品若干ヲ 240 錢ニテ買ヒ其內 2 個ヲ除キ殘リヲ一個ニ付キ 2 錢ノ利ヲ得テ賣リシニ 252 錢ヲ得タリト云ノ物品ハ何個ナルヤ

〔解〕 物品ノ個數ヲ $x$ トスル時ハ $\frac{240}{x}$ ハ一個ノ價ナリ依リテ次式アリ $\left(\frac{240}{x}+1\right)(x-2)=252$

## 速度ニ關スル問題

〔30〕 空車ハ一時間ニ 14 里ヲ行キ重車ハ一日ニ 10 里ヲ行ク今或ル港ヨリ物ヲ運搬スルコト五日ニ三回ナリト云フ依リテ或ル港迄ノ距離ヲ求ム

〔解〕 $x$ ヲ或ル港迄ノ距離トナストキハ次式アリ

$$\frac{x}{14}+\frac{x}{10}=\frac{5}{3}$$

〔31〕 水夫アリ每時靜水ニテノ漕力ハ十二里ナリ今若干里ノ川ヲ上ラント欲セバ七時間ヲ要シ下ラント欲セバ五時間ヲ要スト云フ依テ問フ此ノ川每時ノ流速如何

〔解〕 $x$ ヲ以テ流水ノ速力トセバ上ルトキノ毎時ノ舟ノ進行力ハ $12-x$ ナルベク下ルトキノ毎時ノ舟ノ進行力ハ $12+x$ ナルベシ 依リテ次式アリ $7(12-x)=5(12+x)$

〔32〕 或ル人夫流レニ溯リテ或ル距離ヲ $8\frac{4}{7}$ 分ニテ達スベシ 而シテ此處ヲ流水ノ力ニテ下ル時間ハ同距離ノ靜水ヲ漕ク時間ヨリモ更ラニ 7 分多シト云フ 依テ問フ同シ距離ヲ流ニ順フテ漕キ下ルニハ何分ヲ要スルヤ

〔解〕 或ル距離ヲ 1 ト假定シ漕力ヲ $x$ 流速ヲ $y$ トナストキハ次式アリ $\frac{1}{x-y}=8\frac{4}{7}$, $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}-7$,

〔33〕 二列車アリ 36 里ノ鐵道ヲ直行スルニ一ハ毎時ノ速度他ノ一ヨリモ 14 里速キカ故ニ此ノ距離ヲ 12 分速ク着スト云フ問フ各列車ノ速度如何

〔解〕 $x$ ヲ遲キ方ノ一時間ノ速度トセバ $x+15$ ハ速キ方ノ一時間ノ速度ナルベシ 依リテ次式アリ

$$\frac{36}{x}=\frac{36}{x+15}-\frac{12}{60}$$

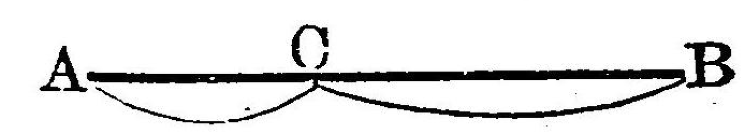
〔34〕 兩府アリ相去ルヿ廿五里ナリ今二人同時ニ此ノ兩府ヲ發シ相向フテ步行スルニ一人ハ他ノ一人ヨリ一里ヲ行クニ 18 分長ク時間ヲ費スベシト云フ而シテ此ノ二人出發後 5 時間ニシテ相會セリト云フ 時ノ速度各如何

〔解〕 甲ノ速度ヲ $x$ 乙ノ速度ヲ $y$ トセバ次式アリ



$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}-\frac{18}{60}$, $5(x+y)=25$

〔35〕 甲ハ A ヨリ B ニ往キ乙ハ同シ道ニテ B ヨリ A ニ往クアリ此ノ二人ノ速度ハ相等シカラス故ニ此ノ二人相會セシ後チ甲ハ三時間乙ハ一時廿分間ニシテ各先方へ到着セリト云フ然ラハ出發後何時間ニテ會合セシヤ




〔解〕 AB 間ノ距離ヲ $z$ 甲ノ速度ヲ $x$ 乙ノ速度ヲ $y$ トナストキハ $\frac{z}{x+y}$ ハ出會迄ノ時間數ニシテ $\frac{z}{x+y}x$ ハ甲ノ出會迄行キシ道程ナリ又 $\frac{z}{x+y}y$ ハ乙カ出會迄行キシ道程ナリ故ニ題意ニ依リテ次式アリ

$$\frac{z}{x+y}x=1\frac{20}{60}y,\quad 3x=\frac{z}{x+y}y$$

此ノ二式ヲ邊々相乘スルトキハ $3x^2=1\frac{20}{60}y^2$ トナル 故ニ $x:y=2:3$ ナリ 故ニ $x=2$ トセバ $y=3$ ナルベク而シテ其費セシ所ノ時間ハ $3x=\frac{z}{x+y}y$ ナル式ニ $xy$ ノ假定數ヲ代入シテ求メ得ベシ乃チ

$$6=\frac{z}{x+y}3 \quad \therefore \frac{z}{x+y}=2$$

〔36〕 二列車同時ニ兩府ヲ發シ相向フテ進行ス此ノ二列車カ途中ニテ相會シタル後チ一ハ四十五分 他ノ一ハ一時四十分ニシテ各々目的ノ地ニ達セリト云フ然ラバ各列車ガ兩府間ヲ經過スル時間各如何 但シ二列車ハ兩府間

ニテ停車セズ

〔解〕 35 例ト同樣ニナシテ出會迄ノ時間ヲ求ムレバ一時ナリ故ニ　甲ハ　$1^{\text{時}}45^{\text{分}}$　乙ハ　$2^{\text{時}}12^{\text{分}}$　ナリ

〔37〕 二輪車アリ其ノ小輪ハ 130 間ノ路ヲ行クニ大輪ヨリ 135 度多ク回轉スト云フ若シ大小各輪ノ周圍ヲ一尺增スキハ 35 間ノ道ヲ行クニ小輪ハ大輪ヨリ 27 度多ク回轉スト云フ依リテ各輪ノ周圍ヲ問フ

〔解〕 $x$ ヲ以テ大輪ノ周圍トナシ　$y$　ヲ以テ小輪ノ周圍トナスキハ次式アリ

$$\frac{130}{x}=\frac{130}{y}-135,\qquad \frac{35}{x+1}=\frac{35}{y+1}-27,$$

〔38〕 二條ノ鐵道相並ブアリ各々一列ノ汽車往來ス列車ノ長一ハ 92 尺他ハ 84 尺ナシ若シ此二列車相向フテ相逢フキハ三秒時ニシテ相分レ一列一列ノ後ト接スルキハ 12 秒時ニシテ相分ルヽト云フ二列ノ汽車ノ速力每秒時何程ナルヤ

〔解〕 $x$ ヲ甲車ノ每秒ノ速力　$y$ ヲ乙車ノ每秒ノ速力トナスキハ次式アリ

$$\frac{92+84}{x+y}=3,\qquad \frac{92+84}{x-y}=12,$$

〔39〕 兩府ノ間ニ鐵道アリ汽車是レヲ往來ス正午ニ貨車ヲ發シ一時ニ客車ヲ發ス然ルニ貨車ハ全程ノ三分ノ二ヲ行キテ汽罐ヲ損フ由テ速力ヲ減シテ原ノ四分ノ三トナシテ進行セシニ同日午後二時四十分ニシテ先地ヨリ十里ノ處ニテ客車ニ追ヒ付カレタリト云フ　但シ客車ノ速力ハ貨車ノ後速力ニ二倍セリト云フ依リテ兩府ノ距離及ヒ兩車ノ速力如何



〔解〕 $x$ ヲ貨車ノ初ノ速力トセバ　$\frac{3}{4}x$　ハ損セシ後チノ速力ナルベク　$2\times\frac{3}{4}x$　即チ　$\frac{3}{2}x$　ハ客車ノ速力ナルベシ　而シテ $y$ ヲ兩府間ノ距離トナスキハ次式アリ

$$\frac{\frac{2}{3}y}{x}+\frac{\frac{1}{3}y-10}{\frac{3}{4}x}=2^{\text{時}}40^{\text{分}}$$

$$y-10=\frac{3}{2}x(2^{\text{時}}40^{\text{分}}-1^{\text{時}})$$

## 時計ニ關スル問題

〔40〕 五時ト六時トノ間ニ於テ兩針相重ナル時ヲ問フ

〔解〕 五時ヲ打チタルキノ兩針ノ位置ヲ按スルニ 25 劃ノ里程丈ケ分針ハ時針ヨリ後レ居レリ　而シテ兩針ノ速度ノ比ハ常ニ 12 ト 1 トノ比ナリ

今假リニ五時ヲ打チタル時ヨリ兩針相重ナル時迄ノ分數ヲ $x$ トセバ　分針ハ $x$ 劃ノ里程ヲ行クナルベク　時針ハ　$\frac{x}{12}$　劃ノ里程ヲ行クベシ

而シテ此ノ兩針ハ相重サナリシヲ以テ 25 劃ノ道程丈ケ分針ハ時針ヨリモ多ク行キタルナリ依リテ次式アリ

$x-\frac{x}{12}=25$

〔41〕 五時ト六時トノ間ニ於テ分針時針直角ヲナス最初ノ時ヲ求ム

〔解〕 五時ヲ打チタル後チハ分針ト時針トノ間ノ劃度25 ナリ 分針ト時針ト直角ヲナストキノ劃度ハ 15 ナルベキヲ以テ 分針ハ時針ヨリモ 25−15 劃度乃チ10 劃度丈ケ多ク行カサルベカラス

故ニ今 $x$ ヲ以テ五時ヨリ兩針直角ヲナス時迄ノ分ノ數トナストキハ次式アリ $x-\frac{x}{12}=10,$

〔42〕 五時ト六時トノ間ニ於テ兩針直角ヲナス第二ノ時ヲ求ム

〔解〕 一般ニ兩針直角ヲナス場合ハ二度アル者ナリ 第一ハ兩針相重サナラサル前第二ハ兩針相重サナリシ後チ是レナリ 第一ヲ最初ノ直角ヲナス時ト云ヒ第二ヲ第二ノ直角ヲナス時ト稱ス

今五時ヲ打チタル時ノ有様ニ於テ考フルニ第二ノ直角ヲ爲スニハ分針ハ時針ヨリモ 40 劃度丈ケ多ク行カサルベカラス 何トナレハ五時ヲ打チタル時ハ分針ハ時針ヨリ



25 劃度丈ケ後ニアルヲ以テ 25 丈多ク行キ其上ニ又15 丈ケ多ク行カサルベカラサレバナリ 故ニ $x$ ヲ以テ第二直角ヲ爲ス迄ノ分ノ數トナス時ハ此時ノ分針ノ進行ハ $x$ 時針ノ進行ハ $\frac{x}{12}$ ナルベキニ依リテ次式アリ

$x-\frac{x}{12}=40$

〔43〕 二時ト三時トノ間ニ於テ分針時針一直線ヲ爲ス時ヲ求ム

〔解〕 $x$ ヲ以テ三時ヲ打チタル後チ分針時針一直線トナリタル時迄ノ分ノ數トナス時ハ次式アリ

$x-\frac{x}{12}=40$

〔44〕 或ル人十里ノ道ヲ行クニ六時ヲ打チタル後チ第一ノ直角ヲ爲セシ時ニ出發シ十二時ト一時トノ間ニ於テ分針時針一直線ヲ爲セシ時ニ達セリト云フ然ラハ此人百里ノ道ヲ行クニハ何時間ヲ費スベキヤ

〔解〕 ハ略ス

〔附言〕 予ハ猶ホ他日方程式問題集ナル者ヲ編輯シテ本問題ノ不足ヲ補ハント欲ス

大賣捌
神田區表神保町
東京堂

不許複製

明治四十一年九月廿一日發行
明治四十一年九月十八日印刷

（定價金參拾五錢）

印刷所　東京市四谷區坂町百二十六番地　六合舍活版所
印刷者　東京市四谷區坂町百二十六番地　林六三郎
發行所　東京市神田區錦町三丁目十七番地　數理專修學院
著作者兼發行者　東京市神田區錦町三丁目十七番地　武藤鐵吉

数学受験叢書

武藤　鉄吉／著



数学受験叢書

代数学　1　方程式

武藤鉄吉