

44
102644

應用力學

唐英 王壽寶編著



商務印書館發行

職業學校教科書

應 用 力 學

唐英 王壽寶編

商務印書館發行

職業學校教科書委員會委員

(以姓名四角號碼爲序)

唐凌閣	唐雄伯	唐志才	章之汶
譚勤餘	王雲五	賈佛如	何清儒
朱博泉	魏元光	吳福禎	潘序倫
李壽恆	蘇繼廣	葛敬中	葛成慧
黃任之	黃紹緒	黃質夫	林美衍
陳意	陳朱碧輝	周盛唐	周昌壽
鍾道贊	鄭西谷		

自序

力學爲研習各種工學之基本科學，東西各國，著述浩多，繁簡不一，有可作各級學校教本之用者，亦有專供自修參考者，而求諸我國出版界，則竟若鳳毛麟角，欲採一適合於工業學校作爲教本之用者，尤不可得。著者有鑒於此，不辭譴陋，特將近年來所編之應用力學講義，詳加增訂，付印問世，以適應我國目前急切之需。

本編證理力求簡明，敘述力求淺顯，以適合專科程度，俾可供專科學校或高級工業職業學校作爲教本之用，全書各節共附例題五十餘則，其演解圖解法或計算法斟酌並用，藉以啓發讀者對於應用兩法之判別能力。

本編所用各專門名詞，都採用我國工學界所習用者，亦有自行擬定者，編末附中德名詞對照表，以便檢查，而資參考。

本編雖由著者用作國立同濟大學附設高級工業職業學校講義，迄已三年，參考外籍，並根據教學情形，幾經修訂，目前尙稱適當，然學術之進步，日增月盛，故在取材上容有未能盡旁搜博採之能事，而疏忽之處，尤所難免，尙望海內高明有以指正之。

中華民國二十四年冬 唐英 合序於國立同濟大學教授室
王壽賢

目 錄

第一章 概論	1
第一節 靜力學界說	1
第二節 力之界說	2
第二章 力之集合分散及均衡	5
第一節 同一直線為趨向之諸力	5
第二節 趨向不同而着點相同之諸力	11
第三節 不在同一着點上之諸力	24
第四節 力之力矩	43
第五節 均衡定律	53
第三章 重心	55
第一節 重心概說	55
第二節 重心測定	56
第四章 均衡與穩固	73
第一節 均衡狀態	73
第二節 穩固性	74

第五章 摩擦	78
第一節 滑動摩擦	78
第二節 轉動摩擦	91
第三節 繩索摩擦	94
第六章 力學定律之應用於梁木	97
第一節 概說	97
第二節 支持於兩端梁木之受單力承重者	102
第三節 支持於兩端梁木之受均佈承重者	119
第四節 支持於兩端梁木之受局部均佈承重者	125
第五節 支持於兩端梁木之受混合承重者	132
第六節 支持梁之一端突出者	139
第七節 支持梁之兩端突出者	151
第八節 連續梁	159
第七章 桁構	162
第一節 概說	162
第二節 桁構圖解法	163
第三節 桁構計算法	167
第八章 風力	174

第一節 風力計算	174
第九章 土壓力	180
第一節 概說	180
第二節 土壓力圖解法	182
第十章 拱	185
第一節 自重拱	185
第二節 荷填料拱	188
第三節 荷重及填料拱	189
第四節 最大最小拱壓線	192
第五節 單面荷重拱	195
第六節 非對稱拱	197
第七節 高矢度拱	199
第八節 橋拱	201
第九節 橋梁荷重	206
第十節 橋臺及橋墩	207
第十一章 勢力線	211
第一節 勢力線之意義	211
第二節 單孔攔支梁勢力線	212
第三節 最大最小勢力	216

第四節	間接荷重勢力線.....	221
第五節	受集力作用之勢力線問題.....	233
第六節	受均佈力作用之勢力線問題.....	239

附錄

中德英名稱對照表.....	242
---------------	-----

應 用 力 學

第 一 章 概 論

第一節 靜力學界說

舉凡工程上各種物體，如房屋橋梁堤壩機器等，不論全部或局部，其形式與尺度，皆經工程師根據學理審慎設計而規定者。構造完成後，則該物體之整個或局部，在一定期間，絕不容因外力之侵襲，致使其形式或尺度上起有變動。此外力者，即如物體之自身重力及其應用上所受之動力與壓力，與夫水力、風力、雪力等是也。

凡一物體，終不能免外力之侵襲，惟外力之加於一物體者，同時沒有數種力量。倘此數種外力，能互成均勢，則該物體即能維持其穩固地位，是即其整個或局部，可不致受其影響而稍有



因外力之侵襲，物體本身乃有產生反抗力之必要。此種反抗力是也。蓋外力之於物體，可隨時造成該物體整個或局部之變動。欲求安定，惟此內力是賴。

(南)

根據內力之計算，以規劃物體之結構與尺度，使該物體能承受任何外力之侵襲而不起變動。此類計算法，固亦屬於力學範圍之內。以其重要，故特另設課本曰材料強弱學以分別詳討之。至於本書所述，乃材料強弱學之基本要點也。

靜力學中各種問題，可用計算法或圖解法以推算之，兩者各有其利弊。計算法利在準確而弊在繁瑣費時，圖解法則利在便捷醒目而弊在不能十分準確。然苟精細作圖，則此不準確之相差，為數極微，在實際應用上無所妨礙。故本書內容，計算與圖解並重。

第二節 力之界說

一、力之意義

力之為物，無形體，無色相，非所可望見者也，吾人見其感應後，始知其存在。凡力之能運動物體，或能改變物體之動作者，謂為動力，如蒸汽力、煤汽力、電力等是。凡力之能阻滯物體運動，消滅或減小其動作者，謂為阻力，如摩擦力、空氣阻力、材料應力等是。因動力之影響，然後有阻力之產生，故動力作用停止之時，阻力即隨之而自行消滅。在力之運用上，恆見動力有施行阻力之效能，鮮有阻力能運動物體而施行動力之效能者。試觀建築物之所以能穩定時立而不為外力所動者，蓋設計者在

其結構上早經妥爲規劃，於外力相犯時，能立即產生同量之阻力，相與抗持也。

力之確定，須具備下列四端，今分述之。

(一) 力之趨向：物體受外力侵襲後，準一定之趨向而移動其地位，此趨向即爲力之趨向，

如第 1 圖中之 MN 線即表示 P



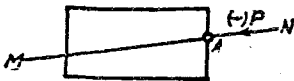
力之趨向也。

第 1 圖

(二) 力之着點：力之加於物體，必有其着力之點，是謂力之着點，第 1 圖中之 A 點即表示 P 力之着點也。

(三) 力之性質：物體受外力之侵襲，而發生動作，其動作必準一定趨向而行，或向前移，或

向後退，於是力之性質，乃有正負



之分。作圖中例用箭頭以表示之，

第 2 圖

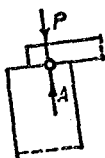
並用 (+) 號及 (-) 號以分正負。譬如同一趨向之相對兩力 (第 2 圖)，倘以向左者爲正，則向右者爲負，反是亦可。要之，吾人可假定任何一方向爲正，則其相反之方向應爲負。

(四) 力之大小：力有大小，普通以公斤爲單位。較大之力則可以噸爲單位，每噸合一千公斤。作圖中例用線之長短以表示之。譬如 1 公分 = 10 公斤，1 公分 = 200 公斤，或 1 公分 = 5 噸等。視作圖面積，以定比例尺之大小，比例尺愈大，其答案愈準確，倘 1 公分 = 100 公斤，則 300 公斤之力，作圖時可在力之趨

向上用 3 公分長之線以表示之。

物體受外力侵襲之影響，其體積必將因之稍有變動，因外力性質之不同，此變動或為伸張，或為緊縮。然任何物體，每因外力之侵襲，即由其着點起產生內力以抵抗之。苟此內外兩力之分量相同，該物體乃可維持原有地位而不移動。

例如有甲物體(橫梁)之 P 力加於乙物體(磚牆)上，乙物體必須有同量之內力 A (磚塊及土基之承重力) 以抵抗之，庶該物體(磚牆)之地位，不致受其影響而有所移動(第 3 圖)。



第 3 圖

二. 集力與分力

外力之加於物體，同時恆有數種力量，物體在同時間受此數種力量之侵襲，影響所及，得將演成某項運動。然此某項運動，亦可由某力單獨造成之，換言之，此單獨某力，即可用以替代所有同時間加於某物體之數種力量，故可稱為此數種力量之集力，其所替代之各力，則可稱為此集力之分力。

數種力量可用一單獨之集力以替代之，既如上述，則某一單獨力量，於必要時，亦可認為集力而將其分為若干分力也。

三. 力之均衡

如有若干外力，同時加之於某物體，而該物體屹立不為所動，是謂此若干外力在均衡狀態中，換言之，即此若干外力之集力為零。

第二章 力之集合分散及均衡

第一節 同一直線為趨向之諸力

一. 力之集合

(甲) 同一趨向與同一性質之兩力。

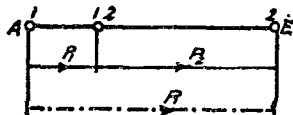
倘有性質與趨向相同之

P_1 及 P_2 兩力, 同時加於某物體 (第 4 圖), 則該物體所受影響, 應為其合力之侵襲也。



第 4 圖

(一) 圖解法: 如用圖解法以推測此合力之大小, 須先確定一比例尺, 例如 1 公分 = 若干公斤. 然後依照此比例尺, 接續繪此兩力於同一直線上, 線之長短, 即表示力之大小, 因二者性質相



第 5 圖

同, 故其總長即為此兩力之和, 即該物體所受 P_1 及 P_2 兩力之合力也 (第 5 圖)。

例題 1 倘於第 4 圖中之 $P_1 = 20$ 公斤, $P_2 = 50$ 公斤, 試求其合力之大小。

解 假定 1 公分 = 20 公斤，圖解如上 (第 5 圖)，得 $R = 3.5$ 公分，此即 $R = 3.5 \times 20$ 公斤 = 70 公斤。

(二) 計算法： 性質與趨向相同之兩力，同時加於某物體，則該物體所受影響，應為此兩力之和之侵襲，此兩力之和，即為其合力，故可演成公式如下：

$$R = P_1 + P_2 \dots\dots\dots(1)$$

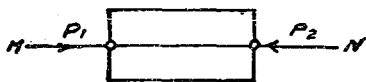
如將前題應用計算法以推算之，當有

$$R = P_1 + P_2 = 20 + 50 = 70 \text{ 公斤。}$$

定義 同一趨向與同一性質之兩力，其合力應等於兩力之和。

(乙) 同一趨向而不同性質之兩力。

倘有 P_1 及 P_2 兩力，同以直線 MN 為趨向，但其性質相反，則各該力對於物體之感應，必將互相抵減，甚或互相消滅，故曰性質不同，而趨向

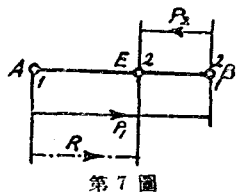


第 6 圖

相同之兩力，同時施於某物體，則該物體所受之影響，亦應為此兩力之合力之侵襲。

(一) 圖解法： 先確定一比例尺，例如 1 公分 = 若干公斤，然後依照此比例尺，繪 AB 線以代表 P_1 力， A 點為起點， B 點為終點。再自 B 點折回，用同一比例尺，繪 BE 線以代表 P_2 力。其所餘 AE 距離，即為 P_1 及 P_2 兩力之差，即 P_1 及 P_2 兩力之

合力是也。至於此合力之性質，則應與較大之力相同，如第 7 圖中之合力 R ，其性質應與 P_1 力相同。



第 7 圖

例題 2 倘於第 6 圖中之 $P_1 = +50$

公斤， $P_2 = -20$ 公斤，試求其合力之大小與性質。

解 假定 1 公分 = 10 公斤，圖解如上 (第 7 圖)，得 $R = 3$ 公分，此即

$$R = 3 \times 10 \text{ 公斤} = +30 \text{ 公斤}.$$

(二) 計算法：倘有趨向相同而性質不同之兩力，同時施於某物體，則該物體所受之影響，應為此兩力之差之侵襲，此兩力之差，即為其合力，故可演成公式如下：

$$R = +P_1 - P_2 \dots\dots\dots (2)$$

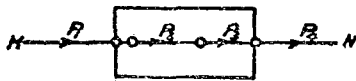
如將前題應用計算法以推算之，當為

$$R = +P_1 - P_2 = +50 - 20 = +30 \text{ 公斤}.$$

倘 $P_1 = P_2$ ，則 $R = +P_1 - P_2 = 0$ ，是則受此兩力侵襲之物體，應在均衡狀態中，而絕不致發生何種影響。

定義 同一趨向而不同性質之力，其合力應等於兩力之差。

(丙) 同一趨向與同一性質之諸力。

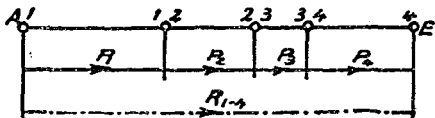


第 8 圖

倘有性質與趨向相同

之若干力量，同時作用於某物體（第 8 圖），則該物體所受影響，應爲此若干力量之合力。

（一）圖解法：先確定一比例尺，例如 1 公分 = 若干公斤，然後依照此比例尺，接續繪此若干力量於同一趨向上，第一力之終點，即爲第二力



第 9 圖

之起點，第二力之終點，即爲第三力之起點，依此累積，每段線之長短，即表示各該力之大小，該線總長，即表示此若干力量之和之大小，是即此若干力量之合力也（第 9 圖）。

例題 3 倘第 8 圖中之 $P_1 = 400$ 公斤， $P_2 = 250$ 公斤 $P_3 = 150$ 公斤， $P_4 = 300$ 公斤，試求其合力之大小。

解 假定 1 公分 = 200 公斤，圖解如上（第 9 圖），得 $R = 5.5$ 公分，是即

$$R = 5.5 \times 200 \text{ 公斤} = 1100 \text{ 公斤。}$$

（二）計算法：性質與趨向相同之若干力量，同時加於某物體，則該物體所受影響，應爲此若干力量之和之侵襲，此若干力量之和，即爲其合力，故可演成公式如下：

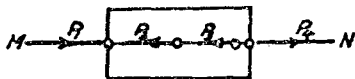
$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \dots \dots \dots = \Sigma P \dots \dots \dots (3)$$

如將前題應用計算法以推算之，當爲

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 400 + 250 + 150 + 300 = 1100 \text{ 公斤.}$$

定義 同一趨向與同一性質之諸力，其合力應等於諸力之和。

(丁) 同一趨向而不同



第 10 圖

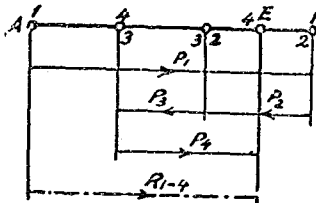
性質之諸力。

倘自若干力量，同以直線 MN 為趨向，但其性質不同，則各該力對於物體之感應，必將互相抵減，或至互相消滅(第 10 圖)。

(一) 圖解法：先確定一比例尺，例如 1 公分 = 若干公斤，然後依照此比例尺，接續繪此若干力量於同一趨向上，正力向左，則負力向右，或正力向右，負力向左亦可。要之，當以先一力之終點為次一力之起點，自第一力之起點，至末一力之終點間之距離，即為此若干力量之結數，即此諸力之合力是也。至於此合力之性質，則應視最初起點至最後終點之方向，並根據作圖時所假定之正負方向而定。

例題 4 倘第 10 圖中之 $P_1 = +800$ 公斤， $P_2 = -300$ 公斤， $P_3 = -250$ 公斤， $P_4 = 400$ 公斤，試求其合力之大小。

解 假定 1 公分 = 200 公斤，而以箭頭右向為正力，則圖解如右(第 11 圖)，得 $R = 3.25$



第 11 圖

公分，是即

$$R = 3.25 \times 200 = +650 \text{ 公斤.}$$

(二) 計算法：性質不同而趨向相同之諸力，同時加於某物體，則該物體所受之影響，應為此諸力之合力之侵襲，而此諸力之合力，即等於此諸力之結數，故可演成公式如下：

$$R = \pm P_1 \pm P_2 \pm P_3 \pm P_4 \dots = \Sigma P \dots \dots \dots (4)$$

如將前題應用計算法以推算之，當為

$$R = +P_1 - P_2 - P_3 + P_4 = +800 - 300 - 250 + 400 = +650 \text{ 公斤.}$$

定義 同一趨向而不同性質之諸力，其合力應等於諸力之結數。

二. 力之分散

吾人可將任何一力，視作若干分力之合力，而隨意分散之。

如欲將某一力在同一趨向上分為兩分力，可得無窮之分法。倘此兩分力中之一分力，有預定之數量及性質，則其另一分力之數量及性質，亦即確定。

如欲將某一力在同一趨向上分為 n 分力，則須先知 $n-1$ 分力之數量及性質，然須可用圖解法或計算法，以確定第 n 分力之數量及性質。

三. 力之均衡

同一趨向之力，加於物體，可造成該物體在均衡狀態而屹立不變者有下列兩途。

(其一) 性質不同而數量相等之兩力。

(其二) 性質不同之諸力，其結數等於零者。

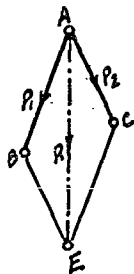
第二節 趨向不同而着點相同之諸力

(A) 在同一着點上之兩力

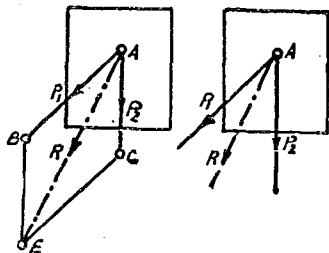
一. 力之集合

(甲) 圖解法

(一) 並行四邊形圖解法：倘有 P_1 及 P_2 兩力，同以 A 點為着點，作圖時即以 A 點為起點，依照預先假定之比例尺，繪 $P_1 = AB$ 及 $P_2 = AC$ ，然後自 P_1 力之終點 B ，繪一與 AC 之並行線，再自 P_2 力之終點 C ，繪一與 AB 之並行線，此兩並行線相交於 E 點，而造成一並行四邊形 $ABEC$ 。此並行四邊形之對角線 AE ，即表示 P_1 及 P_2 兩力之合力之大小及其趨向。至於該合力性質，應以 A 點為起點，而 E 點為終點，如第 12 圖所示者是也。



第 12 圖

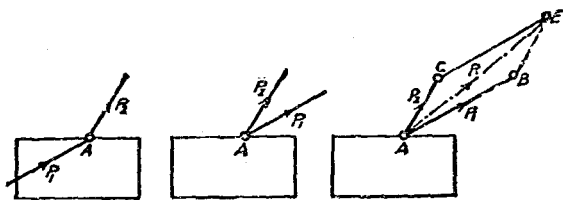


第 13 圖

倘不欲圖解時所需之虛線給入正圖中，則可在正圖之

旁另繪副圖以求其合力。其法在正圖旁任擇(A)點為起點，依照預先假定之比例尺，繪 $(P_1) = (A)(B)$ ，與正圖中之 P_1 力相並行，再繪 $(P_2) = (A)(C)$ ，與正圖中之 P_2 力相並行，然後依照上法求得 (R) ，乃自正圖中A點繪一與 (R) 等長及並行之線，該線即 P_1 及 P_2 兩力之合力也(第13圖)。

此項圖解法，祇適用於兩力之自同一着點引出者，故遇力



第 14 圖

之以着點為終點者，圖解時須照第14圖之順序改移而推求之。

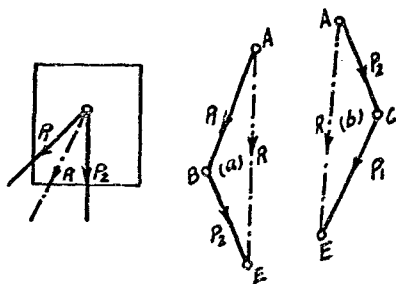
定義 同一着點上趨向不同之兩力，其合力之大小，應等於該兩力所構成之並行四邊形之對角線，該對角線亦即表示此合力之趨向與性質。

(二) 三角形圖解法：第12圖中之 $\triangle ABE$ 及 $\triangle ACE$ ，為兩個相同之三角形，每個三角形中，實已有 P_1 及 P_2 兩力存在，故為圖解上簡便起見，可用三角形以代替並行四邊形，是為三角形圖解法。

其法在正圖之旁任擇一點為起點，例如A點，然後依照預

先假定之比例尺，繪 $P_1 = AB$ ，與正圖中之 P_1 力相並行，再以 P_1 力之終點 B 為起點，接續繪 $P_2 = BE$ ，與正圖中之 P_2 相並行。倘將 P_1 力之起點與

P_2 力之終點相接連，則此三角形之終線 AE ，即表示 P_1 及 P_2 兩力之合力之大小及其趨向。至於該合力之性質，亦為自 A 點引出者，然後在



第 15 圖

正圖中以公共着點為起點，繪與 AE 等長及並行之線，用以表示所求得之合力 R ，而此圖解乃告完成（第 15 圖）。

倘此三角形副圖，由 P_2 力作起，可得同一結果，試將 $\triangle ABE$ 及 $\triangle ACE$ 兩三角形相碰合，適得並行四邊形 $ABEC$ ，正與上述之圖解法相同也（第 15 圖）。

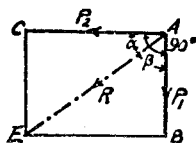
力之性質，用箭頭以表示之，既如上述，三角形副圖中之 P_1 及 P_2 兩力，其箭頭必指同一方向迴轉而行，但合力之箭頭，則必反指。

兩力間所構成之角度，與合力大小，有密切關係，角度愈大則合力愈小，角度愈小則合力愈大；倘該角度等於 0° ，則其合力應為兩力之和；倘該角度等於 180° ，則其合力應為兩力之差。

(乙) 計算法

欲求同一着點上兩力之合力，亦可用計算法以推求之。惟本章所述，祇限於兩力之有特殊情形者，試分述之。

(一) 兩力之構成直角者：兩力既構成直角，則圖解中之並行四邊形，變為長方形，三角形變為直角三角形(第 16 及 17 圖)。



第 16 圖

因 $R^2 = P_1^2 + P_2^2,$

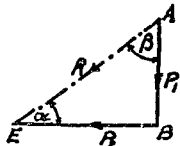
故 $R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} \dots \dots \dots (5)$

或 $\frac{P_1}{R} = \sin \alpha; P_1 = R \cdot \sin \alpha,$

故 $R = \frac{P_1}{\sin \alpha} \dots \dots \dots (5a)$

或 $\frac{P_2}{R} = \cos \alpha; P_2 = R \cdot \cos \alpha,$

故 $R = \frac{P_2}{\cos \alpha} \dots \dots \dots (5b)$



第 17 圖

例題 5 倘有構成直角之 P_1 及 P_2 兩力， $P_1 = 30$ 公斤， $P_2 = 40$ 公斤，試計算其合力。

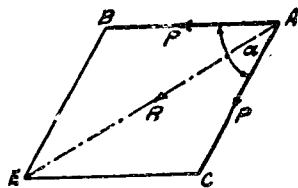
解 $R = \sqrt{30^2 + 40^2}$

$R = \sqrt{2500} = 50$ 公斤。

(二) 兩力相等者：倘 P_1 及 P_2 兩力相等，則圖解中之並

行四邊形將變為菱形(第 18 圖), 三角形將變為兩等邊三角形(第 19 圖), 而為 $P_1 = P_2 = P$. 設在 $\triangle ACE$ 中自 C 點引一垂直線, 則 $CD \perp AE$,

$$AD = \frac{AE}{2} = \frac{R}{2}.$$

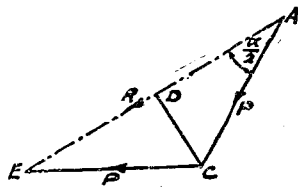


第 18 圖

$$\text{因 } \angle EAC = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{所以 } \frac{AD}{AC} = \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$AD = AC \cdot \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{R}{2} = P \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$



第 19 圖

$$\text{故 } R = 2P \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \dots \dots \dots (6)$$

例題 6 $P_1 = P_2 = 500$ 公斤, $\alpha = 60^\circ$, 求合力.

$$\text{解 } \quad \frac{\alpha}{2} = 30^\circ.$$

$$R = 2 \times 500 \times \cos 30^\circ = 1000 \times 0.866 = 866 \text{ 公斤}.$$

倘 $\alpha = 90^\circ$, 則圖解中之菱形成為正方形, 三角形成爲兩等邊直角三角形.

$$\text{因之 } R^2 = P_1^2 + P_2^2 = 2P^2.$$

$$\text{故 } R = P \cdot \sqrt{2} \dots \dots \dots (6a)$$

二. 力之分散

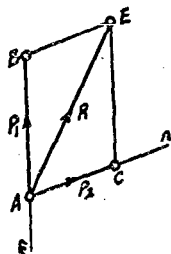
吾人可將任何一力，視作同一着點上不同趨向兩力之集力，而隨意分散之。

如欲將某一力在同一着點上隨意分爲不同趨向之兩分力，可得無窮分法。此類問題，在力學上無從確定，如欲求解，則必須預知兩力之趨向，或兩力中一力之大小趨向及其性質，其解法如下：

(甲) 圖解法

例一 試將 R 力準預定之 m 及 n 趨向分爲 P_1 及 P_2 兩分力。

解法之一，可應用並行四邊形圖解法，其法依照預先假定之比例尺，繪 $R = AE$ ，再經該力之終點 E ，繪與 n 之並行線 EB 與 m 之並行線 EC ，而造成一並行四邊形 $ABEC$ ，此間 $AB = P_1$ 及 $BC = P_2$ 。至於各該力之性質，則應爲自着點 A 引出者（第 20 圖）。

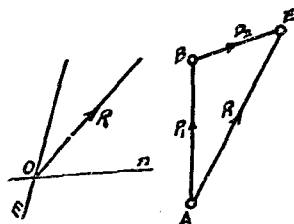


第 20 圖

解法之二，可應用三角形圖解法，其法在正圖之旁，另作副圖以求之，先繪 $R = AE$ ，再自 A 點繪與 m 之並行線 AB ，自 E 點繪與 n 之並行線 EB ，此間 $AB = P_1$ 及 $BE = P_2$ 。至於各該力之性質，則應與合力所指者相反（第 21

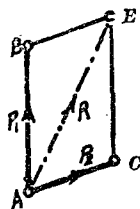
圖).倘自 A 點繪與 n 之並行線,
自 E 點繪與 m 之並行線,亦可
得同一結果.

例二 試將 R 力分爲 P_1 及
 P_2 兩分力, P_1 之大小趨向及性
質爲預知者



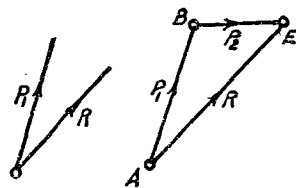
第 21 圖

解法之一,可應用並行四邊形圖解法,
其法依照預先假定之比例尺,繪 $AE=R$ 及 AB
 $=P_1$,然後將 R 之終點 E 與 P_1 之終點 B 以
直線接之,再準 AB 及 BE 繪成並行四邊形
 $ABEC$,此間 $AC=P_2$.至於 P_2 之性質,應爲自
 A 點引出者(第 22 圖).



第 22 圖

解法之二,可應用三角形圖解法,其法在正圖之旁,另
作副圖以求之,先繪 $AE=R$ 及
 $AB=P_1$,然後將 B 點與 E 點相連
接,此間 $BE=P_2$.至於 P_2 之性
質,應與 P_1 所指者相順(第 23
圖).

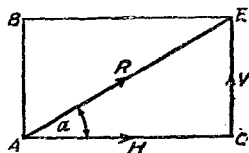


第 23 圖

(乙) 計算法

欲求同一着點上某力之兩分力,亦可用計算法以推算之,

惟本章所述，祇限於此兩分力有特殊地位，而在力學上有普遍之應用者，即此兩分力互相垂直是也，此間水平之力，例用 H 以表示之，垂直之力，



第 24 圖

則以 V 表示之，參閱右圖（第 24 圖）計算如下：

$$\frac{H}{R} = \cos \alpha; H = R \cdot \cos \alpha \dots \dots \dots (7)$$

$$\frac{V}{R} = \sin \alpha; V = R \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (7a)$$

三. 力之均衡

同一着點上不同趨向之兩力，絕對不能互相消滅而成均衡也。

(B) 在同一着點上之諸力

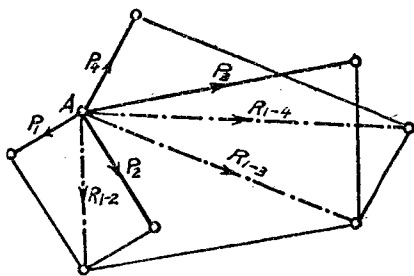
一. 力之集合

(甲) 圖解法

欲求同一着點上諸力之集力，可應用並行四邊形圖解法或三角形圖解法連續以推求之，兩法相較，以三角形圖解法，尤為適用，因其簡易而醒目也。

(一) 並行四邊形圖解法：倘在某物體同一着點上有 P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , ... 諸力。圖解之法，可先應用前法求 P_1 及 P_2 兩力之合力 R_{1-2} ，然後以 R_{1-2} 權充分力（因其能代替 P_1 及 P_2 兩力），

而求此 R_{1-2} 及 P_3 兩力之合力 R_{1-3} ，再將此可以代替 P_1 及 P_2 及 P_3 三力之 R_{1-3} 權充分力，而求此 R_{1-3} 及 P_4 之合力 R_{1-4} ，此



第 25 圖

R_{1-4} 可以代替 P_1, P_2, P_3 及 P_4 四力，即此四力之合力也(第 25 圖)。

例題 7 倘第 25 圖中之 $P_1 = 60$ 公斤， $P_2 = 100$ 公斤， $P_3 = 200$ 公斤， $P_4 = 80$ 公斤，試求其合力。

解 假定 1 公分 = 50 公斤，圖解如上(第 25 圖)，得

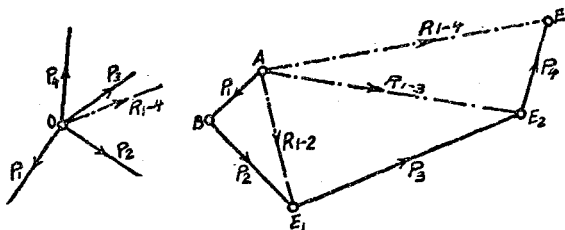
$$R = 4.74 \text{ 公分}$$

$$R = 4.74 \times 50 \text{ 公斤} = 237 \text{ 公斤}.$$

此圖解法之圖案，似欠明晰，故本題之解法，以應用三角形圖解法為宜。

(二) 三角形圖解法：其法仍用副圖依照上節所示之三角形圖解法，先求 P_1 及 P_2 兩力之合力 R_{1-2} ，再以 R_{1-2} 權充分力，在原圖上繼續求其與 P_3 之合力 R_{1-3} ，再以 R_{1-3} 權充分力，而仍在原圖上繼續求其與 P_4 之合力 R_{1-4} ，是 R_{1-4} 即為 P_1, P_2, P_3 及 P_4 四力之合力也。第 26 圖所示者，即應用此法

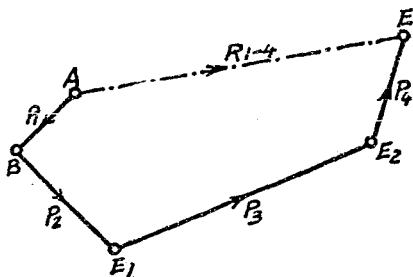
以解第 25 圖之問題，其結果相同，而圖案則較明白矣。



第 26 圖

試將第 26 圖副圖中之 R_{1-2} 及 R_{1-3} 刪去，則 P_1, P_2, P_3, P_4 及 R_{1-4} 構成一多角形。此多角形之 AB, BC, CD 及 DE 四邊與正圖中之 $P_1, P_2,$

P_3 及 P_4 互相平行，並各以前一力之終點為次一力之起點，依次連續而繪成者，第一力起點與末一力終點間之



第 27 圖

終線，即為此諸力之合力之大小，而此合力之性質，則與諸力所示之方向相反指。此種圖解法，乃以三角形圖解法為根據，亦可稱之為多角形圖解法（第 27 圖）。

定義 在同一着點上不同趨向之諸力，其合力之大小趨向及性質，可應用多角形圖解法以推求之，此多角形之各邊，為諸力

各依其大小及趨向並順其性質次第接續而成，第一力起點與末一力終點間之終線，即為此諸力之合力之大小與趨向，至其性質，則應與代表諸力之各邊所指者相反向。

(乙) 計算法

倘於同一着點上不同趨向諸力之合力，欲用計算法以推求之，可以經着點繪互相垂直之縱橫軸 $X-X$ 及 $Y-Y$ ，然後依照上節所示之計算法，將各力 $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$ 分爲互相垂直之分力 $H_1, H_2, H_3, H_4 \dots$ 及 $V_1, V_2, V_3, V_4 \dots$ ，再將在同一趨向上之各分力，合成兩分力集合而成一力，此最後一力，即諸力之合力是也，如第 28 圖所示，則

$$H_1 = +P_1 \cos \alpha_1,$$

$$V_1 = +P_1 \sin \alpha_1;$$

$$H_2 = +P_2 \cos \alpha_2,$$

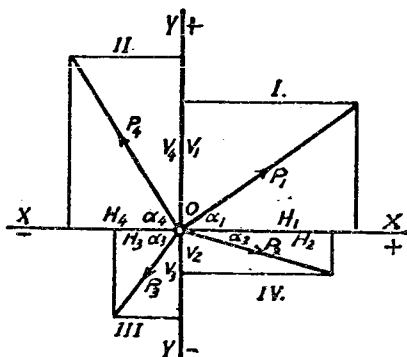
$$V_2 = -P_2 \sin \alpha_2;$$

$$H_3 = -P_3 \cos \alpha_3,$$

$$V_3 = -P_3 \sin \alpha_3;$$

$$H_4 = -P_4 \cos \alpha_4,$$

$$V_4 = +P_4 \sin \alpha_4.$$



第 28 圖

於是 $H = H_1 + H_2 - H_3 - H_4$, $V = V_1 - V_2 - V_3 + V_4$.

因之 $R = \sqrt{H^2 + V^2}$; $\text{tg } \alpha = \frac{V}{H}$.

二. 力之分散

將一力在同一着點上分爲不同趨向之諸力 (兩力以上), 於實際上絕少應用, 故本章不加詳述。

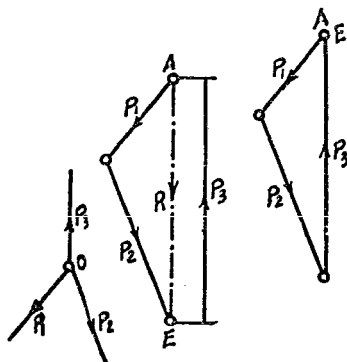
三. 力之均衡

(甲) 圖解法

(一) 三力之均衡: 同一着點上不同趨向之兩力, 可應用本章第一節所示圖解法以求其合力, 倘該着點上再加以第三力, 此第三力之大小及趨向, 均

與合力相等, 而其性質相反, 則此三力遂造成均衡之勢。

如第 29 圖所示者, P_1 及 P_2 兩力之合力爲 R , 倘有 P_3 加於着點, 其大小與趨向均與 R 相等, 而其性質相反,



第 29 圖

則副圖中三力所構成之三

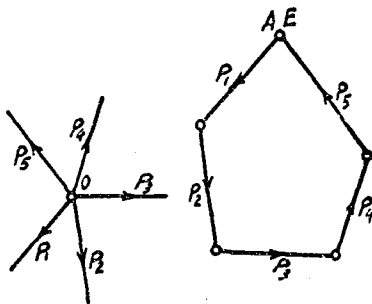
角形爲一閉合之三角形, 且各力之性質, 指同一方向迴轉而行, 此間無合力存在, 換言之, 該三力之 $R=0$, 即表示該三力相持於均衡之勢也。

定義 同一着點上不同趨向之三力, 如相持於均衡, 則用以推求合力之副圖三角形爲一閉合之三角形, 且此副圖中代表三

力之三邊，均準同一方向迴轉。

(二) 三力以上之均衡： 同一着點上，不同趨向之諸力，倘其合力 $R=0$ ，即各力必相持於均衡，則應用以推求合力之副圖，必為一閉合之多角形，此多角形之每邊，各代表一力。各該邊所示之性質，必指同一方向迴轉而行，如第 30 圖所示者是也。

定義 同一着點上不同趨向之諸力，如相持於均衡，則用以推求合力之副圖多角形為一閉合之多角形，且此副圖中代表諸力之各邊均準同一方向迴轉。



第 30 圖

(乙) 計算法

同一着點上不同趨向之諸力，可應用經着點所繪之縱橫軸，將各力分為垂直及並行之力，如 $H_1, H_2, H_3, H_4, \dots$ 及 $V_1, V_2, V_3, V_4, \dots$ 等是，倘此諸力相持於均衡，則其合力應等於零，因其合力等於零，故應

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma H = 0, \\ \Sigma V = 0. \end{array} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

第三節 不在同一着點上之諸力

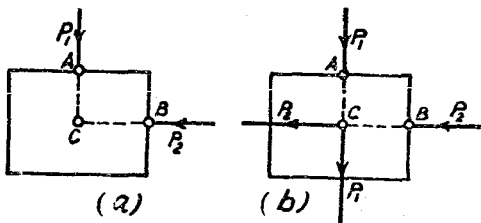
(A) 力之相交者

因計算法之繁瑣費時，不切實用。故本節所述祇以圖解法為限。

一. 力之集合

(甲) 力之相交甚近，其交點在圖畫紙範圍以內者。

(一) 兩力之合力：茲有 P_1 及 P_2 兩力加於某物體，兩力各有其着點， P_1 之着點為 A ， P_2 之着點為 B (第 31(a) 圖)，倘將 P_1 及 P_2 準各該力之趨向向前延長，使其相交於點 C ，並構成如



第 31 圖

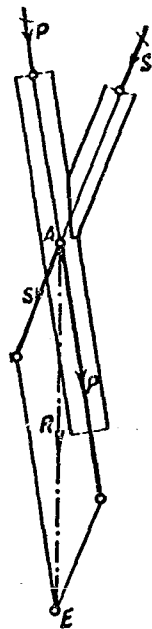
(第 31(b) 圖) 所示之地位，則此兩力與物體間之關係，仍可維持其原有之權威與感應，而不稍變，吾人乃得依照上節所示之圖解法，以求 P_1 及 P_2 兩力之合力。

例題 8 有一支柱，承重 8000 公斤，其旁加一承重 4000 公斤之斜撐木，試求其合力 R 。

解 可應用並行四邊形圖解法或三角形圖解法以推求之，倘用並行四邊形圖解法，其法先將 P 及 S 兩力，準原有趨向引長之，使相交於 A 點，然後假定一比例尺，設 1 公分 = 4000 公斤，乃就原圖上應用第一節所示並行四邊形圖解法以求合力 R (第 32 圖)，結果 $AE = 2.66$ 公分，是即

$$R = 2.66 \times 4000 = 10640 \text{ 公斤.}$$

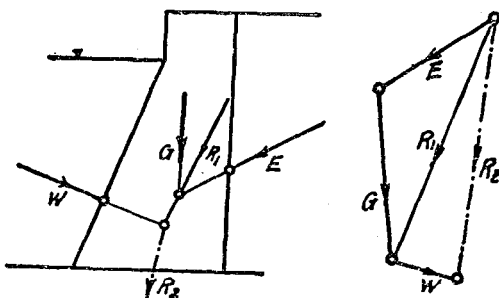
(二) 兩力以上之合力：倘有不同着點之諸力 (兩力以上) 同時加於某物體，欲求其合力，可重複應用上法而得之，即先求諸力中兩力之合力，再求此所得合力與第三力之合力，依此類推，至得最後之合力，此最後之合力，即諸力之合力是也。



第 32 圖

圖解之法，可應用並行四邊形圖解法或三角形圖解法，惟前者較為複雜而其圖案亦欠明瞭，故以應用三角形圖解法為佳。

例題 9 今有河岸支牆一段，其橫斷面如圖所示 (第 33 圖)，倘該牆自身重量 $G = 5000$ 公斤，水之壓力 $W = 2000$ 公斤，土之壓力 $E = 4000$ 公斤；試求其合力之大小及地位。



第 33 圖

解 應用三角形圖解法，假定 1 公分 = 2000 公斤，先求 E 及 G 之合力 R_1 ，再求 R_1 及 W 之合力 R_2 ，此間 $R_2 = 3.9$ 公分，即

$$R_2 = 3.9 \times 2000 \text{ 公斤} = 7800 \text{ 公斤}.$$

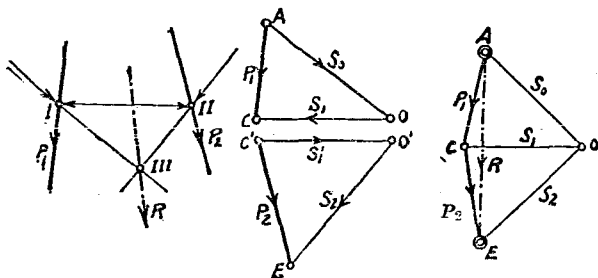
經 E 與 G 之交點，繪與副圖中 R_1 並行之線，此線即表示 R_1 之地位，再經 R_1 與 W 之交點，繪與副圖中 R_2 並行之線，此線即表示 R_2 之地位也。

(乙) 力之相交甚遠，其交點不在圖畫紙範圍以內者。

欲求此類諸力之合力，亦以應用圖解法較為便利，惟因其交點不在圖畫紙範圍以內，故上述之圖解法，不復完全適用，然吾人可根據第一節所示圖解法之原理，另行設法，以推求之。其法維何，即將每力分為不同趨向之兩分力，使各該分力互得適當

之交點，以便依照前法以求其合力也。

(一) 兩力之合力： 利用副圖，先將 P_1 力分爲 S_0 及 S_1 兩分力，再將 P_2 力分爲 S'_1 及 S_2 兩分力，其分法不拘。惟須造成 P_1 之分力 S_1 與 P_2 之分力 S'_1 大小相等而性質相反，然後在正圖中 P_1 力上任擇一點，假定爲點 I ，經點 I 繪 S_0 及 S_1 兩分力之並行線及其應有箭頭，再從 S_1 與 P_2 之交點(點 II)繪 S'_1 及 S_2 兩分力之並行線及其應有之箭頭，如此則 S_1 及 S'_1 兩分力因大小相等，性質相反，而互相消滅，祇剩 S_0 及 S_2 兩力爲 P_1 及 P_2 之分力 (第 34 圖)。

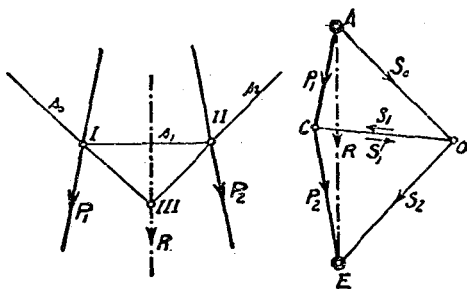


第 34 圖

使將第 34 圖中之副圖 ACO 及 $C'EO'$ 兩三角形相連合，即成多邊形 $ACEO$ ，此間 $AE = R$ ，爲 P_1 及 P_2 兩力之合力，亦即 S_0 及 S_2 兩力之合力，故正圖中 S_0 及 S_2 之交點(點 III)，即

所以確定 R 之地位。至於 R 之趨向大小及性質，則得之於副圖中。

故欲求不在同一着點上兩力之合力，而該兩力之交點又不在圖畫紙範圍以內者，可用上述圖解法以推求之，該圖解法作圖之順序，再為簡要，述之如下（參閱第 5 圖）。

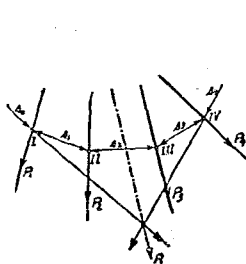


第 35 圖

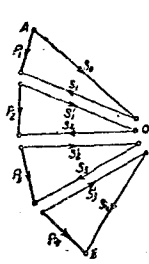
應用三角形圖解法以確定 P_1 及 P_2 兩力之合力 R ，即就此副圖三角形之旁任擇一點，例如 O ，是謂極點，乃將極點與 P_1 及 P_2 之起點與終點相接連而得 $AO = S_0$ ， $CO = S_1$ 及 $EO = S_2$ ，此諸線謂之射線，所以示各該力分力之趨向也，然後在正圖中 P_1 上任擇一點，假定點 I ，經點 I 繪 s_0 與 S_0 相並行，及 s_1 及 S_1 相並行， s_1 與 P_2 相交於點 II ，乃經點 II 繪 s_2 與 S_2 相並行，此 s_0 與 s_2 之交點（點 III ）為合力 R 必經之點， R 之地位因之確定

極點地位之選擇，以外邊兩射線所構成之角度，近似直角為宜。

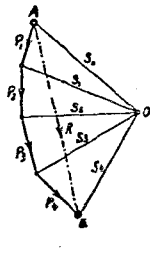
(二) 兩力以上之合力：欲求兩力以上之合力，其圖解法之步驟與上述者相同，例如欲求 P_1, P_2, P_3, P_4 四力之合力，可先將 P_1 分為 S_0 及 S_1 兩分力， P_2 分為 S'_1 及 S_2 兩分力， P_3 分為 S'_2 及 S_3 兩分力， P_4 分為 S'_3 及 S_4 兩分力，惟須造成 $S_1 = S'_1$ ， $S_2 = S'_2$ ， $S_3 = S'_3$ 。然後在正圖中 P_1 力上任擇一點(點 I)作起，繪 s_0 與 S_0 相並行，及 s_1 與 S_1 相並行， s_1 與 P_2 之交點為點 II ，經點 II 再繪 s_2 與 S_2 相並行， s_2 與 P_3 之交點為點 III ，經點 III 再繪 s_3 與 S_3 相並行， s_3 與 P_4 之交點為點 IV ，再經點 IV 繪 s_4 與 S_4 相並行，此間在同一趨向上之分力， S_1 與 S'_1 ， S_2 與 S'_2 ， S_3 與 S'_3 ，因大小相等性質相反，而互相消滅，所以在實際上，祇有 S_0 及 S_4 兩分力存在，此 S_0 與 S_4 兩分力，已可代表 P_1, P_2, P_3, P_4 四力，故 s_0 與 s_4 之交點(點 V)，即可以確定合力 R 之地



第 33 (a) 圖



第 33 (b) 圖



第 33 (c) 圖

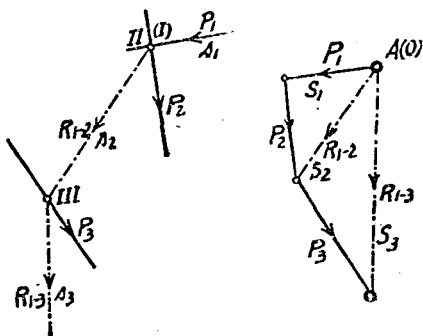
位。至於 R 之趨向大小及性質，則可應用多邊形圖解法以確定之〔第 36 (a), (b), (c) 圖〕。

故欲求不在同一着點上諸力之合力而該諸力互相間之交點，又不在圖畫紙範圍以內者，可用上述圖解法以推求之，該圖解法作圖之順序，再為簡要述之如上〔參看附圖 36 (a), (c)〕。

應用多邊形圖解法，以確定諸力之合力 $R = AE$ 。即就此副圖多邊形之一邊，任擇一極點 O ，並自 O 點繪射線 S_0, S_1, S_2, S_3 及 S_4 。再依照前法在正圖中繪 s_0, s_1, s_2, s_3 及 s_4 與各該射線相並行，引 s_0 與 s_4 相交於點 V ，此點 V 為合力 R 必經之點， R 之地位因之確定。

上述(一)(二)兩種圖解法，因副圖之多邊形，乃由諸力與自極點出發之射線結構而成，故可稱為射線多邊形圖解法。

此種射線多邊形圖解法，有時為求圖案簡單起見，在可能範圍，不妨應用一特殊步驟，即以副圖中第一力之起點作為極點，如第 37 圖所示者是也。此間副圖中即



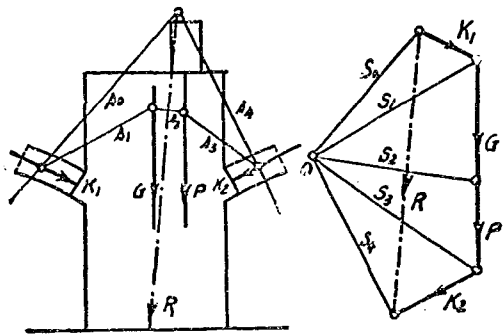
第 37 圖

以 P_1 力之起點 A 作為極點 O ，於是射線 S_3 應等於零， S_1 應在 P_1 之同一趨向上， S_2 應即為 P_1 及 P_2 兩力之合力 R_{1-2} ，而在正圖中應行經 P_1 與 P_2 兩力之交點（點 II ）， S_3 應為 R_{1-2} 及 P_3 兩力之合力，亦即為 P_1, P_2, P_3 諸力之合力 R_{1-3} ，該合力在正圖中必需行經 s_2 與 P_3 之交點（點 III ），於是此合力之地位因之確定。

例題 10 今有牆墩，其載重如第 38 圖所示，倘 $K_1 = 4000$ 公斤， $K_2 = 6000$ 公斤， $P = 6000$ 公斤， $G = 8000$ 公斤，試求其合力之大小趨向及地位。

解 假定 1 公分 = 4000 公斤，圖解如下（第 38 圖）。

$$R = 4.8 \text{ 公分} = 4.8 \times 4000 \text{ 公斤} = 19200 \text{ 公斤。}$$



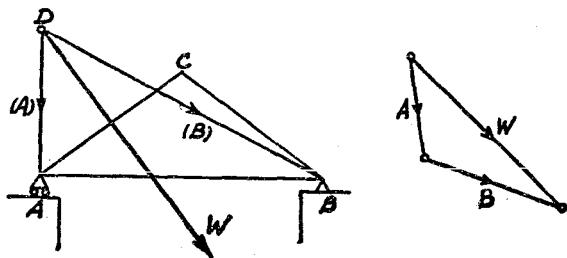
第 38 圖

二. 力之分散

(一) 一力分爲兩分力：欲將一力分爲兩分力，須具有下列兩條件，方可應用三角形圖解法以推求之。

1. 未知之兩分力，其趨向須預先確定。
2. 兩未知力之趨向，與已知力之趨向，須相交於一點。

例如將人字梁架 ABC 上之風力 W ，分爲兩分力，其一爲經支點 A 而垂直者，其二爲以此垂直力與風力之交點 D 與支點 B 爲趨向者，吾人即可應用三角形圖解法以推求之，如第 39 圖所示是也。



第 39 圖

(二) 一力分爲三分力：欲將一力分爲三分力，須具有下列兩條件方可應用三角形圖解法以推求之。

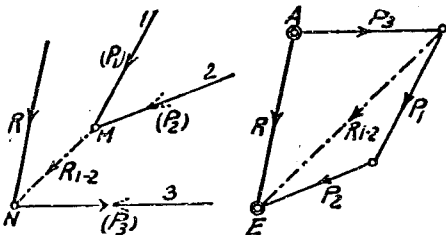
1. 三分力之趨向，須預先確定並不得相交於一點者。
2. 就中任何兩趨向之交點，不得在已知力之趨向上者。

例如欲將 R 力分爲在 (1), (2), (3) 趨向上之 P_1 , P_2 及 P_3 三分力，可先引 (1) 與 (2) 兩趨向相交於點 M ，再引 (3) 趨向與 R

相交於點 N 。此間 R 應等於 MN 及 P_3 兩力之合力，吾人乃可應用三角形圖解法以推求 P_3 力之大小與性質，而 MN 亦應等於 P_1 及 P_2 兩力之

合力，於是再可應用三角形圖解法以推求 P_1 及 P_2 兩力之大小及其性質，如第

40 圖所示者是也。



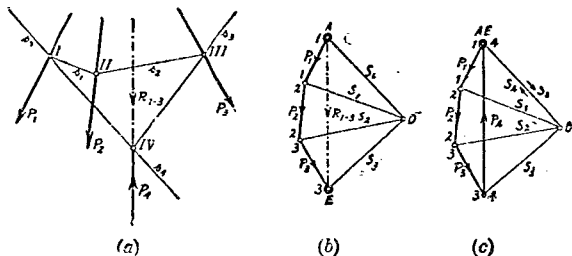
第 40 圖

(三) 一力分爲諸分力：欲將一力分爲三分力以上諸分力，此類命題，無從解答，故在力學上謂之不定值。

三. 力之均衡

諸力倘相持於均衡，即其合力等於零，前文已言之矣。

試就 P_1, P_2 及 P_3 三力，應用射線多邊形圖解法，以求其合力 R ，如第 41 (a), (b) 圖所示者是，倘欲使承受此三力侵襲之物



第 41 圖

體，維持原狀而不發生任何動作，則須加第四力 P_4 於其上，此 P_4 之大小應與 R 相等，但其性質應相反，因如此則此四力將構成一閉合之多角形，如第 41 (c) 圖，而造成 $R=0$ 。

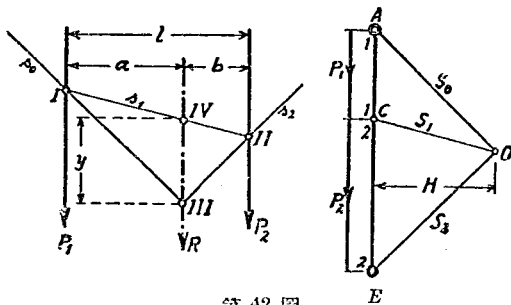
(B) 力之並行者

一. 力之集合

並行諸力，不能相交，或可謂為相交於無窮遠處，倘應用多角形圖解法，以求諸力之合力，則此諸力所構成之多角形，將變為一直線，而其合力之趨向，亦必在此同一直線上，因知此諸力之合力亦必與諸力相並行也。

I. 力之性質相同者

(一) 兩並行力之合力：圖解法：——應用第 35 圖所示之圖解法，以求兩並行力之合力，所得合力之大小性質及地位，應如第 42 圖所示者是。



第 42 圖

從此圖正副兩圖中，得知

$$\text{因} \quad \triangle IIVIII \sim \triangle OCA,$$

$$\text{所以} \quad a : y = H : P_1 \dots\dots\dots (I)$$

$$\text{又因} \quad \triangle IIIVIII \sim \triangle OCE,$$

$$\text{所以} \quad b : y = H : P_2 \dots\dots\dots (II)$$

$$\text{從 (I)} \quad a = \frac{H \cdot y}{P_1} \dots\dots\dots (III)$$

$$\text{從 (II)} \quad b = \frac{H \cdot y}{P_2} \dots\dots\dots (IV)$$

$$(III) \div (IV) \quad \frac{a}{b} = \frac{H \cdot y}{P_1} \cdot \frac{P_2}{H \cdot y} = \frac{P_2}{P_1} \dots\dots\dots (9)$$

因 $a + b$ 為 P_1 與 P_2 兩力間之距離，故根據以上之演算，可得下列定義。

定義 性質相同之兩並行力，其合力與各該力間之距離，應與各該力之大小成反比例，

依據上述定義，吾人乃知性質相同之兩並行力，其合力之地位必在兩力之間，且必靠近較大之一力，因之可得一更簡易之圖解法，以確定合力之地位，其法自 P_1 力上之任何一點 A ，繪一水平線，此線與 P_2 力相交於 B 點，乃自 A 點向上劃定 $AC = p_2 = P_2$ ，再自 B 點向下劃定 $BD = p_1 = P_1$ ，此間 CD 線與 AB 線之交點 E ，即為合力 R 必經之點，合力之地位，因之確定（第

因 $\triangle ACF \sim \triangle FBD$,

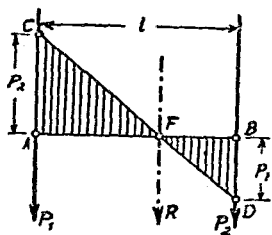
所以 $AF : AC = BF : BD$.

此間 $AF = a, AC = P_2,$

$BF = b, BD = P_1;$

故 $a : P_2 = b : P_1,$

或 $a : b = P_2 : P_1.$



第 43 圖

(所得結果與公式 (9) 相同.)

計算法: — $R = P_1 + P_2.$

根據公式 (9) $a : b = P_2 : P_1,$

即 $a \cdot P_1 = b \cdot P_2.$

因 $a + b = l,$

故 $b = l - a.$

所以 $a \cdot P_1 = (l - a) \cdot P_2,$

$$a \cdot P_1 = l \cdot P_2 - a \cdot P_2,$$

$$a \cdot P_1 + a \cdot P_2 = l \cdot P_2,$$

$$a(P_1 + P_2) = l \cdot P_2;$$

故得 $a = \frac{l \cdot P_2}{P_1 + P_2}.$

即 $a = \frac{P_2 \cdot l}{R} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots \dots \dots (10)$

照同法計算可得 $b = \frac{P_1 \cdot l}{R} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$

例題 11 今有同一性質之兩並行力， $P_1 = 1000$ 公斤， $P_2 = 3000$ 公斤，兩力間之距離 $l = 300$ 公分，試推算其合力之大小及地位。

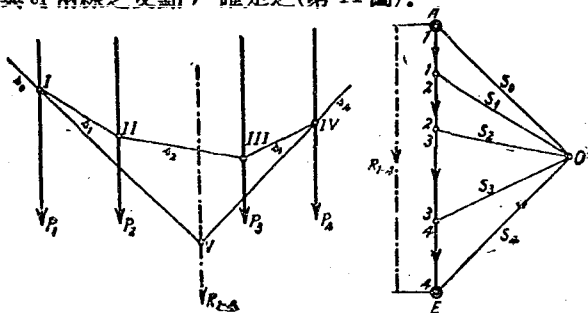
$$\text{解 } R = P_1 + P_2 = 1000 + 3000,$$

$$R = 4000 \text{ 公斤.}$$

$$a = \frac{P_2 \cdot l}{R}, a = \frac{3000 \times 300}{4000} = 225 \text{ 公分;}$$

$$b = l - a = 300 - 225 = 75 \text{ 公分.}$$

(二) 諸並行力之合力：欲求同一性質諸並行力之合力，其圖解法與第 35 圖所示之圖解法相同，今如第 44 圖中 AE 即表示合力 R 之大小趨向及性質，至於此合力 R 之地位，則由 s_3 與 s_4 兩線之交點 V 確定之(第 44 圖)。

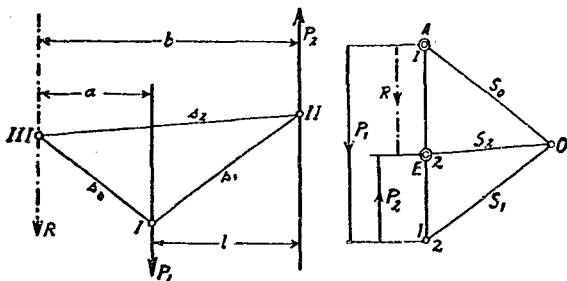


第 44 圖

II. 力之性質不同者

(一) 兩並行力之合力：假定有不同性質之兩並行力 P_1

及 $P_2, P_1 > P_2$, 則其合力 R 應等於 $P_1 - P_2$. 至於此合力 R 之地位, 可仍用上述之射線多邊形圖解法以確定之, 惟此間須注意射線之次序, 慎勿先後顛倒, 合力 R 仍須經 s_0 與 s_2 兩線之交點(點 III) 也. 倘 R 與 P_1 之距離為 a , R 與 P_2 之距離為 b , 則仍為 $a : b = P_2 : P_1$ (第 45 圖).



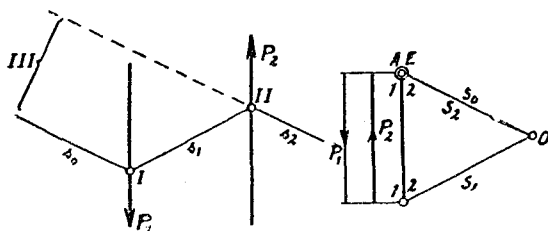
第 45 圖

定義 不同性質之兩並行力, 其合力應等於兩力之差, 該合力之性質, 應與較大之一力相同, 其地位必不在兩力之中間, 而在較大一力之外邊, 此合力與各該力間之距離, 應與各該力之大小成反比例.

兩力之相差愈小, 則 s_0 與 s_2 兩線之交點愈遠, 其合力與較大一力之距離亦愈遠.

倘 $P_1 = P_2$, 則 $R = P_1 - P_2 = 0$, 副圖中 S_0 及 S_2 兩射線必將併合, 正圖中 s_0 及 s_2 兩線因之互相並行而相交於無涯 (第 46

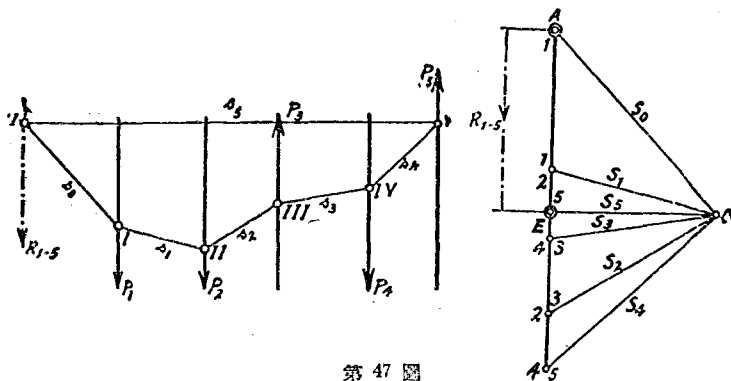
圖)。故不同性質之兩並行力，倘其大小相等，將不復有合力產生。



第 46 圖

生，物體之受其侵襲者，因無合力，故決不致發生推進動作，然因不在同一趨向上，故亦不能互相消滅。影響所及，勢必造成該物體之旋轉動作。

(二) 諸並行力之合力：圖解之法，與求兩並行力之合力相同，此間 AE 所示為合力之大小性質及趨向，至於合力之地位，則仍由 s_0 與 s_5 兩線之交點（點 VI ）以確定之（第 47 圖）。



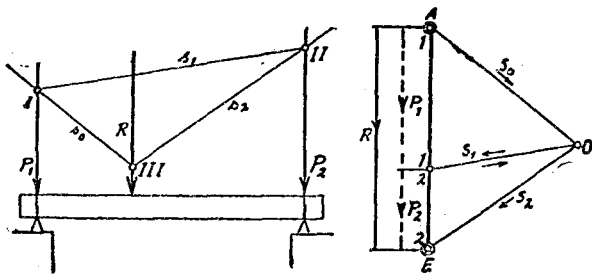
第 47 圖

定義 不同性質之諸並行力，其合力應等於諸力之結數，

二. 力之分散

(一) 一力分爲兩分力：欲將 R 力分爲 P_1 及 P_2 兩分力，須預知 P_1 及 P_2 兩分力之趨向，然後應用副圖以推求之。其法先依照假定之比例尺繪 R ，再擇一極點 O 而繪射線 S_0 及 S_2 ，斯即將 R 先分爲 S_0 及 S_2 兩分力。

然後在正圖中 R 上任擇一點(點 III)。自此點繪 s_0 與 S_0 及 s_2 與 S_2 相並行，因此可得 s_0 與 P_1 之交點 I 及 s_2 與 P_2 之交點 II ，連接 I 及 II 兩點而得 s_1 ，乃自副圖中 O 點繪一射線 S_1 與 s_1 相並行，斯即又分力 S_0 爲 S_1 及 P_1 兩分力，分力 S_2 又分爲 S_1 及 P_2 兩分力。但此間 S_1 可以消滅，乃祇剩 P_1 及 P_2 兩力爲 R 之分力(第 48 圖)。



第 48 圖

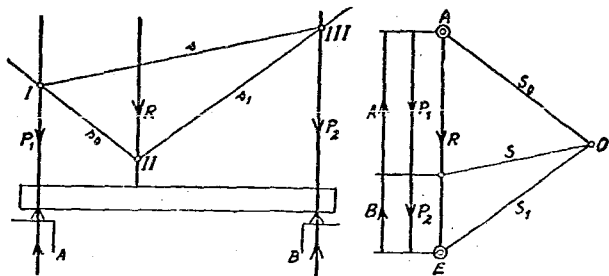
(二) 一力分爲諸分力：欲將一力分爲兩力以上之若干分力，此類命題，無從解答，在力學上所謂不定值是也。

三、力之均衡

並行之兩力，不論性質同否，均不能相持於均衡。

並行之三力，能相持於均衡，倘其中兩力之合力，與第三力有相同之趨向及大小而性質相反。

倘在 R 力之兩分力 P_1 及 P_2 之趨向上，加以大小相等而性質相反之 A 及 B 兩力($A=P_1, B=P_2$)則 A 與 P_1 及 B 與 P_2 互相消滅，斯即 A 及 B 兩力之合力，與 R 力大小相等而性質相反，乃得相持於均衡(第49圖)。

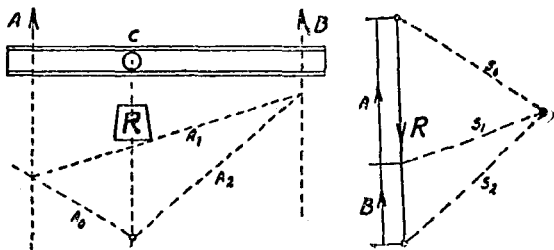


第49圖

例題 12 有起重機架一具，兩端懸起，全長為 AB ，倘吊車停留於 C 處而欲起重8000公斤貨物時，則 A 及 B 兩端應各荷重量若干公斤？

(圖解法)

解 $A=5000$ 公斤, $B=3000$ 公斤。

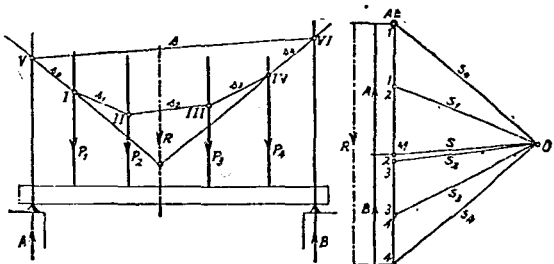


第 50 圖

例題 13 有荷重 P_1, P_2, P_3 及 P_4 四並行力之橫梁如圖示，試用圖解法以求其兩端支點之載重 (第 51 圖)。

(圖解法)

解 連續繪 P_1, P_2, P_3 及 P_4 ，擇定極點 O ，自 O 繪 S_0, S_1, S_2, S_3 及 S_4 諸射線，引各該射線之並行線 s_0, s_1, s_2, s_3 及 s_4 於正圖中， s_0 與 s_4 之交點即確定此諸力合力 R 之地位，此合力 $R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ ， s_0 與 m 相交於點 V ， s_4 與 n 相交於點 VI 。自點 V 繪一直線至點 VI ，是為 s ，經副圖之極點 O 繪 s 之



51 圖

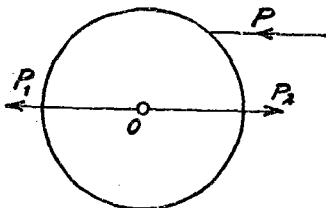
並行線 S ，此射線 S 分 R 為兩截，於是即得 $A = \overline{1M}$ 及 $B = \overline{1M}$

第四節 力之力矩

一. 力矩定義

物體受外力之侵襲後，必將準該力之趨向，向前移動其地位，倘該物體上之某一點為固定，則受外力侵襲後，必將準此固定之點為中心而演成旋轉動作。

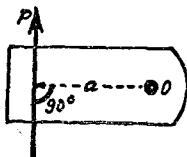
倘有一圓平面，以其中心 O 為固定之點，經此點設置一軸，則受 P 力之侵襲後，該圓平面必將準 O 點為中心而旋轉，蓋於 P 力發現時， O 點上即受其感應，其感應為 P_1 力。此 P_1 力應與 P 力同量同向而互相並



第 52 圖

行， O 點受 P_1 力感應後，因 O 點為固定之點，故即產生與 P_1 力同量而反向之抗力 P_2 ，如第 52 圖所示者是。此間應為 $P_2 = P_1 = P$ ， P_2 與 P 兩力稱為偶力，此偶力，即所以造成物體旋轉之動機也。

此旋轉效能之大小，與力之大小及力與固定點距離之遠近均成正比例，力與固定點間之距離，稱為槓距，即自固定點 O 至 P 力之垂直距離也（第 53 圖）。



第 53 圖

此旋轉效能，在力學上稱之謂力矩，公

式中恆用 M 以表示之，其數量應等於力乘槓距之積，故

$$M = P \cdot a \dots\dots\dots(11)$$

定義 P 力對於某一固定點 O 之力距，應等於該力 P 乘其槓距 a 之積。

吾人通常以公斤 (kg) 為力之單位，公分 (cm) 為槓距之單位，因之力距之單位乃為公分 \times 公斤，在算式中寫作 kg cm。

倘有較大之力，亦可以公噸 (t) 為單位，較大之槓距，亦可以公尺 (m) 為單位，如是則力距之單位乃為公噸 \times 公尺或公斤 \times 公尺，在算式中寫作 tm 或 kgm 其關係如下式。

$$1 \text{ tm} = 1000 \text{ kgm} \quad 1 \text{ kgm} = 100 \text{ kg cm.}$$

倘有 P 力為 500 公斤，其槓距為 100 公分，則該力之力距為

$$M = P \cdot a = 500 \times 100 = 50000 \text{ kg cm.}$$

凡力之加於某物體而經過其軸心者， $a = 0$ ，因之 $M = 0$ ，即該力對於此物體，不能造成旋轉動作，而另在其軸心上受該力壓之感應而已。故物體旋轉動作之產生，其所受外力與物體之軸心間必有一距離在也。

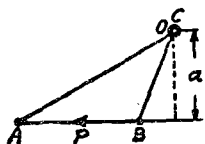
作圖中以直線表示力，例如 $AB = P$ ，以點表示軸心，例如 O ，倘將力之兩端 A 點及 B 點，與 O 點相連結，乃構成三角形

ABO , 二倍此 $\triangle ABO$ 之面積, 應即等於

P 力之力距大小, 因

$$M = 2 \cdot \triangle ABO = 2 \cdot P \cdot \frac{a}{2} = P a.$$

力所產生之旋轉動作, 其方向與鐘



第 54 圖

針所行之方向相同者, 是為右轉

之力距, 例用 (+) 號以表明其為

正, 其方向與鐘針所行之方向相

反者, 是為左轉之力距, 例用 (-)

號以表明其為負 (第 55 圖)。



第 55 圖

同一軸心上若干力距之準同一方向者, 其旋轉效能為此若干力距之和, 不準同一方向者, 可互相減小, 或互相消滅, 倘某一物體上, 若干正力距之和, 與若干負力距之和相等時, 則互相消滅, 該物體即不致產生旋轉動作, 是謂此物體對於旋轉動作, 在均衡狀態。

定義 物體對於旋轉, 得維持於均衡, 倘所有外力對於該物體上任何一固定點所產生之力距其結數等於 0。

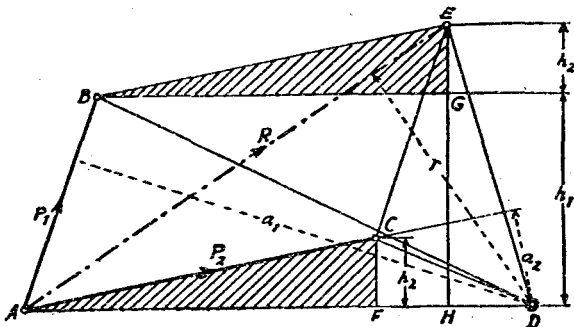
例如 M_1, M_2, M_3 等為 P_1, P_2, P_3 等諸力對於某物體上任何一固定點 O 所產生之力距, 倘 $\pm M_1 \pm M_2 \pm M_3 \pm \dots = 0$, 或 $\Sigma M = 0$, 則該物體對於旋轉必維持於均衡。

二. 力距定律

在物體之同一固定點上，諸力力距之結數，必等於其合力之力距，即

$$R \cdot r = \sum P \cdot a.$$

證 設有 P_1 及 P_2 兩力 (第 56 圖)，應用並行四邊形圖解



第 56 圖

法，得 R 為其合力，然後任擇一點 D 為固定點，自 D 繪各力之槓距 a_1 a_2 及 r ，並接連各力之起點及終點，再自 C 繪 CF 垂直於 AD ，自 E 繪 EH 垂直於 AD ，自 B 繪一與 AD 之並行線，此線與 EH 相交於 G 點，如是則

$$\triangle ACF \cong \triangle BEG,$$

$$CF = EG = h_2.$$

$$P_1 \cdot a_1 = 2 \cdot \triangle ABD = 2 \cdot \frac{AD \cdot h_1}{2}$$

$$P_2 \cdot a_2 = 2 \cdot \triangle ACD = 2 \cdot \frac{AD \cdot h_2}{2}$$

$$P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 = AD \cdot h_1 + AD \cdot h_2 = AD(h_1 + h_2)$$

但 $h_1 + h_2 = GH + EG = EH,$
 因之 $P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 = AD \cdot EH.$
 又 $P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 = 2 \cdot \triangle AED,$

$$2 \cdot \triangle AED = 2 \cdot \frac{R \cdot r}{2};$$

故 $P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 = R \cdot r.$

或 $R \cdot r = \Sigma P \cdot a \dots \dots \dots (12)$

三. 力距定律之應用

(甲) 計算法

吾人可應用力距定律，以推算諸力合力之地位，倘此合力之大小趨向及性質為預知者，其法可先任擇一點為固定點，測量各該力與此固定點間之槓距，然後以 x 為合力應有之槓距，按公式 (12) 以推得之，

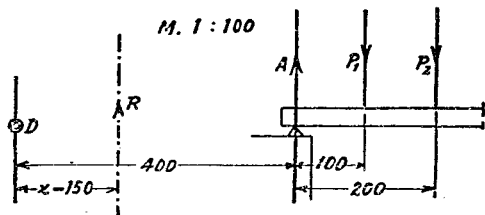
$$R \cdot x = \Sigma P \cdot a$$

得 $x = \frac{\Sigma P \cdot a}{R}.$

乃以所擇之固定點為中心， x 為半徑，繪一圓周，然後按 x 之正負號繪與已知趨向之並行切線，是即 R 之地位。

此法用於力之並行者，尤為簡便，因並行諸力之合力，其大小趨向及性質，易於推定也。

例題 14 如第 57 圖中之 $A = 12000 \text{ kg}$, $P_1 = 6000 \text{ kg}$, $P_2 = 2000 \text{ kg}$, 試求其合力 R 之地位。



第 57 圖

解 $R = \Sigma P$, $R = A - P_1 - P_2$, $R = 12000 - 6000 - 2000 = 4000 \text{ kg}$.

任擇 D 點為固定點，該點與 A 之距離為 4m ，於是

$$R \cdot x = A \cdot 400 - P_1(400 + 100) - P_2(400 + 200).$$

$$\therefore x = \frac{12000 \times 400 - 6000 \times 500 - 2000 \times 600}{400},$$

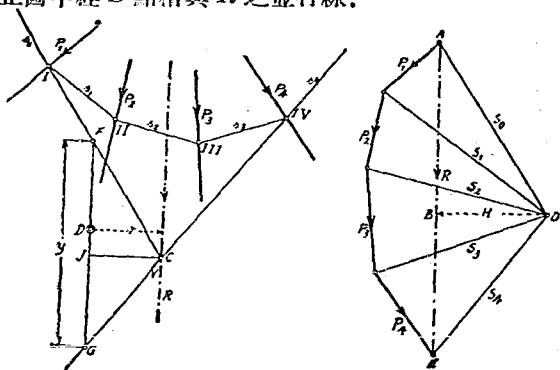
$$x = + \frac{600}{4} = 150 \text{ cm}.$$

乃知 R 之地位，應距離 D 點 1.5m ，或距離 A 力 2.5m 。欲求演算之簡單，可擇固定點於任何一力之趨向上，因如是，則該力之力距即等於 0。

(乙) 圖解法

應用力距定律，如在前文所述，用以求諸力合力之射線圖解法，以推求諸力之力距。

例如第 58 圖所示諸力，可由副圖以求得其合力之大小趨向性質及地位，倘欲知諸力對於任何一點 D 所產生之力距，則可在正圖中經 D 點繪與 R 之並行線。



第 58 圖

此線與 s_0 及 s_4 (即第一及末一射線之並行線) 相交於 F 及 G 點，並自 D 點繪與 R 之垂直距離 r ，再在副圖中自極點 O 繪與 R 之垂直距離 H ，可得

$$\triangle CFG \sim \triangle OAE,$$

$$CJ : FG = OB : AE.$$

命 $CJ = r$, $FG = y$, $OB = H$, $AE = R$;

$$\begin{aligned}
 M &= M_1 + M_2 + M_3 \\
 &= H \cdot y_1 + H \cdot y_2 + H \cdot y_3 \\
 &= H(y_1 + y_2 + y_3).
 \end{aligned}$$

因 $y_1 + y_2 + y_3 = y,$

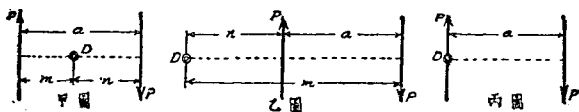
故 $M = H \cdot y.$

四. 偶力

大小相同而性質相反之二並行力，謂之偶力。偶力之合力 $R=0$ ，故其對於物體絕不能產生直線上之推進動作。

至於此偶力對於任何一固定點所產生之旋轉動作，不論此固定點之地位如何變易，其效能仍相等也。此固定點之地位，要不外下列三種：——

茲分別圖示如下。



第 60 圖

(1) 固定點 D 在二力之間者 (甲圖).

$$M = P \cdot m + P \cdot n = P \cdot (m + n).$$

因 $m + n = a,$

故 $M = P \cdot a.$

(2) 固定點 D 在二力之外者 (乙圖).

$$M = P \cdot m - P \cdot n = P \cdot (m - n).$$

因 $m - n = a,$

故 $M = P \cdot a.$

(3) 固定點在一力之趨向上者 (丙圖).

$$M = P \cdot a - P \cdot 0 = P \cdot a.$$

對於上述之證明，可知不論固定點之地位何在，其所產生之力距，仍為 $M = P \cdot a$ 而不變也。此間 P 為偶力中一力之大小， a 為偶力間之垂直距離。

倘有若干在同一平面上或並行平面上之偶力加於某物體上，則該物體之旋轉動作，應為此若干偶力結數之感應，即

$$M = P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3 + P_4 \cdot a_4 + P_5 \cdot a_5 + \dots \quad (14)$$

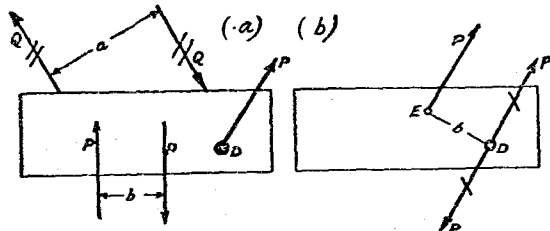
某一偶力可在同一平面上或其並行之平面上，可分為若干偶力，惟此若干偶力之結數 (ΣM) 應等於該偶力之 M 。

設有若干在同一平面上或其並行平面上之偶力加於某物體，倘其結數為零，則該物體必在均衡狀態而不轉動。

五. 單力與偶力

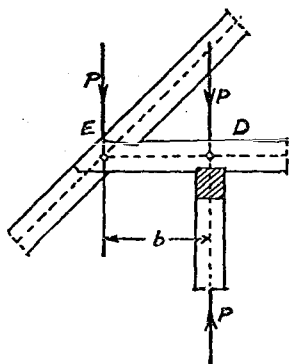
倘有某物體，同時受單力 P 及偶力 $Q \cdot a$ 之侵襲，但此偶力 $Q \cdot a$ ，可用 $P \cdot b$ 以代替之〔第 61 (a) 圖〕。因 $Q \cdot a = P \cdot b$ ，乃得 $b = \frac{Q \cdot a}{P}$ 。偶力之地位，可隨意移動，而其效能不變。既如上述，吾人乃可將此新偶力 $P \cdot b$ 移至新設之地位，使其中一力 P 與

原有之單力 P 在性質相反之同一趨向上 (第 61 (b) 圖), 如是則 D 點上之兩個 P 力互相消滅, 而祇剩 E 點上之 P 力, 此力對於 D 點之橫距為 b .



第 61 圖

反之, 吾人亦可將某一單力, 分爲與 P 力相並行之另一單力與偶力, 例如第 62 圖中之 E 點上, 受 P 力作用時, 則可在 D 點上, 引與 P 力大小相同而性質互反之兩並行力, 如此則造成 D 點上所受 E 點 P 力之感應, 爲單力 P 與偶力 $P \cdot b$ 是也。



第 62 圖

第五節 均衡定律

物體受外力侵襲後, 既不前後移動其地位, 又無旋轉動作之產生, 是則諸力相持於均衡, 而該物體乃可謂爲在均衡狀態

之下。

根據前文所述，吾人已知物體受若干外力之侵襲後，倘此諸力之合力等於零，則該物體必不致前後移動其地位，又倘此諸力對於任何一點所產生之力距，其結數等於零，亦無偶力之發現，則該物體必無旋轉動作也。

一. 圖解法之均衡定律

在同一平面上之諸力，能相持於均衡，倘接續引繪各該力之並行線，能構成一閉合之多角形副圖，引用副圖中射線於正圖時，亦能構成一閉合之多邊形者。

二. 計算法之均衡定律

倘諸力對於物體之前後推進動作相持於均衡，則其合力 R 必等於零。因合力 R 等於零，則其任何兩分力 R_x 及 R_y 應等於零，又倘諸力對於物體之旋轉動作相持於均衡，則各該力對於某一固定點所產生之力距，其結數應等於零，故計算法之均衡定律，可用下列三式，以表示之。

$$\Sigma R_x = 0,$$

$$\Sigma R_y = 0,$$

$$\Sigma M = 0.$$

但因分力之趨向，恆採用並行及垂直兩方向，故上列三式可寫作

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma H = 0, \\ \Sigma V = 0, \\ \Sigma M = 0. \end{array} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

第三章 重心

第一節 重心概說

宇宙萬物，因地心吸力而各有其重量，如物體之下墜，因有重量也。又如一物體加於另一物體上，在下之物體即感受一種壓力，此壓力亦即在上物體之重量也。

任何物體為若干小部分合組而成，此若干小部分，各有其重量，合此若干小部分之重量，即為此整個物體之重量。

物體之重量，即為重力，既為重力，則必有一定之大小趨向及着點也。吾人既認定地心吸力起自地球之中心，則此物體各小部分之重力，其趨向應集中於地球中心，然因地面與地心之距離甚遠，故各該重力之趨向，例即假定為垂直於地面，此整個物體之重力，乃亦為垂直於地面，重力之趨向，因之確定。

試將一物體分為無窮數之小部分，則各該小部分即有其重力。此無窮數互相並行之重力，必有其合力，此即為整個物體之重力，此整個物體之重力，亦必有其一定之着點。此着點為物體之中心點，亦即該物體之重心也。

在力學計算上，對於整個物體之密度，必假定其為平均的，故其重心地位，祇與物體之形體有關，其體質可不問也。下列各點為計算上所應注意者。

(1) 物體之重量，集中於重心，重心以外之部分，均可視作無重量的。

(2) 物體之重心，為固定的，不因物體地位之變更而移動。

(3) 經重心之直線，謂為重心軸，經重心之平面，謂為重心面，平面之重心，必為兩重心軸之相交點，立體之重心，必為一重心軸與一重心面之相交點或為三個重心面之相交點。

(4) 幾何圖案之有中心者，則此中心，即為重心，例如圓周，圓面及圓球之中心，即為其重心。

(5) 平面之平分線，即分該平面為兩個相等部分之線，即為該平面之重心線，物體之平分面，即分該物體為兩個相等部分之面，即為該物體之重心面。

第二節 重心測定

欲測一物體之重心，應先檢視此物體有平分線或平分面否，倘有之，則測定手續可以減省不少。

普通測定之法，圖解或計算均可。倘該物體為平面的，則先將此整個平面分為若干重心易知之小平面，經各該重心引互相

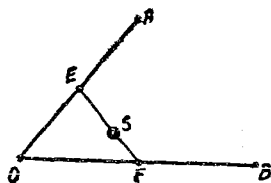
並行之重力，然後應用射線圖解法或力距定律，以求得此若干重力之合力，重心地位乃可因之而測定。倘該物體為立體的，則先將此整個物體分為無窮數之薄片，即無窮數之平面，而每個平面又可分為無窮數之細條，即無窮數之直線，此無窮數之直線，即為重力之表示，求得此無窮數重力之合力後，重心地位乃亦因以測定。

(一) 線之重心

(甲) 直線 AB 之重心，應即為該線之平分點 S 。



第 63 圖

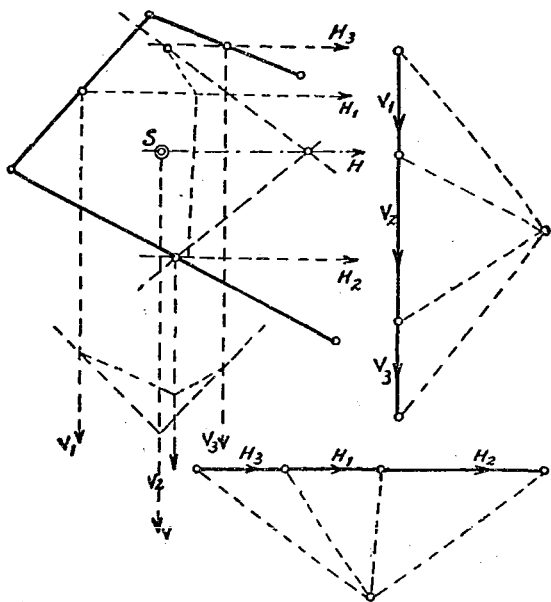


第 64 圖

(乙) 構成一角度之折線 AO 及 BO 。倘接連 AO 及 BO 之平分點 E 及 F ，分 EF 為兩截，使成 $ES : FS = BO : AO$ ，則 S 即為該折線 AO 及 BO 之重心(第 64 圖)。

(丙) 直線之在同一平面上，作多次轉折者，可在每段直線之平分點上，引互相並行之重力，各該重力之大小，即等於各該段直線之長，乃應用射線圖解法，以求此若干重力之合力，如是求之兩次，兩次所得合力之交點 S ，即為該折線之重心，作圖

時將前後二次並行重力之趨向，以互相垂直為宜(第 65 圖)



第 65 圖

(丁) 求彎線之重心，可分全線為若干小段，此若干小段，均假定其為直線，然後依上法測定之。

(戊) 弧線之重心，必在其中心角之分角線上，其距離弧線之中心點應為

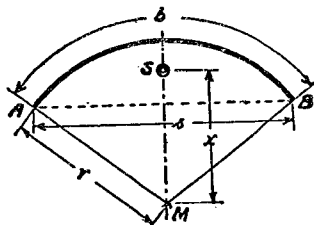
$$x = \frac{r \cdot s}{b} \dots\dots\dots (16)$$

此間

r = 弧線之半徑，

s = 兩端間弦線 AB 之長，

b = 弧線 AB 之長。



(二) 平面之重心

I. 圖解法

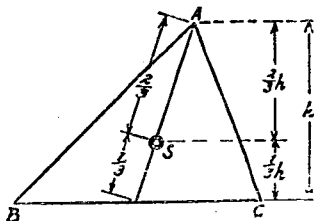
第 66 圖

各種平面重心之測定，在力學上應用甚廣，其測定之法，以用圖解法為多，因其手續較為簡易也。

許多平面，如並行四邊形，長方形，正方形，圓形，橢圓形，圓環及工字形等，其重心之測定，一索即得，因其兩重心軸之交點即為其重心也。並行四邊形，長方形及正方形之重心，即為其對角線之交點，圓環及圓形之重心，即為其中心點。

(甲) 三角形之重心

吾人可將三角形，平面分為與一邊並行之無窮數細條，即為與一邊並行之無窮數直線，此無窮數直線之重心，為各該線之平分點。倘將此無窮數平分點相接連，即得此三角形平面之重心軸，如是兩重心軸之交點，即為整個三角形平面之



第 67 圖

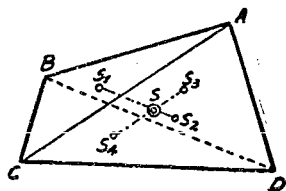
重心，此重心之地位，必在重心軸上，其距離底邊恆為頂高 h 之三分之一（第 67 圖）。

(乙) 不規則四角形之重心

設有不規則四角形 $ABCD$ ，欲求其重心，圖解如下：

圖解法一（第 68 圖）：——

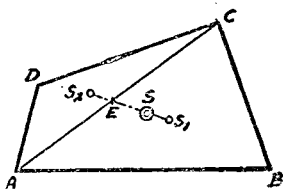
繪對角線 AC ，分四角形為二個三角形 ABC 及 ACD ，依上法測定 $\triangle ABC$ 之重心 S_1 及 $\triangle ACD$ 之重心 S_2 ，接連此兩重心而成此四角形之重心軸 S_1S_2 ，再繪另一對角線 BD ，分四角形為二個三角形 ABD 及 BDC ，依照上法，測得 $\triangle ABD$ 之重心 S_3 及 $\triangle BDC$ 之重心 S_4 ，接連 S_3S_4 ，是為此四角形之另一重心軸，兩重心軸相交於 S 點，是點即為此四角形 $ABCD$ 之重心。



第 68 圖

圖解法二（第 69 圖）：——

繪對角線 AC ，依上法測得 $\triangle ABC$ 之重心 S_1 及 $\triangle ACD$ 之重心 S_2 ，接連 S_1S_2 ，是為此四角形之重心軸，此重心軸與對角線 AC 相交於 E 點。然後作 $S_1S = S_2E$ ，此 S 點即為四角形 $ABCD$ 之重心。



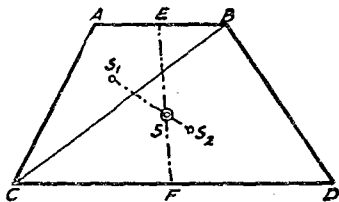
第 69 圖

(丙) 梯形之重心

設有梯形 $ABCD$, 欲求其重心, 圖解如下:

圖解法一(第70圖):——

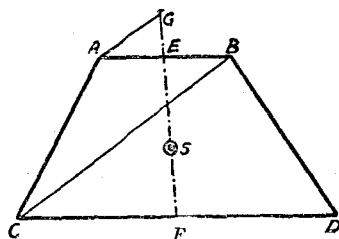
AB 及 CD 兩並行邊之平分點為 E 及 F , 接連 EF , 是為此梯形重心軸之一。再依上法, 繪對角線 BC , 而測得兩三角形之重心 S_1 及 S_2 , 接連 S_1S_2 , 是為此梯形之重心軸之二, 此兩重心軸之交點 S , 即為此梯形之重心。



第 70 圖

圖解法二(第71圖):——

先繪對角線 BC 及重心軸 EF , 然後自 A 點引一線與 BC 相並行, 此並行線相交 EF 之延長線於 G 點。作 $FS = \frac{1}{3}FG$, 是 S 點即為此梯形之重心。

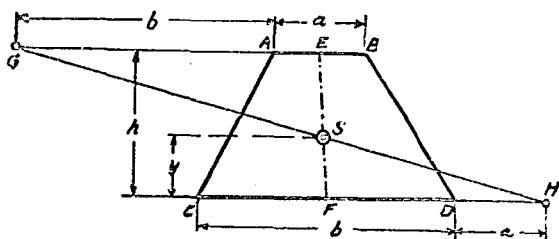


第 71 圖

圖解法三(第72):——

AB 及 CD 兩並行邊之平分點為 E 及 F , 接連 EF , 延長 AB 至 G , 使 $AG = CD$, 再延長 DC 至 H (另一方向), 使 $DH = AB$, 然後接連 HG 兩點,

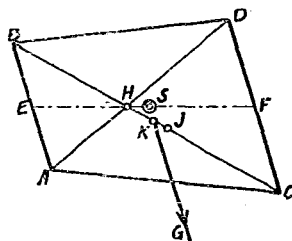
HG 與 EF 相交於 S 點，此點即爲此梯形之重心。



第 72 圖

圖解法四(第 73 圖):—

先繪對角線 AD 及 BC ，再接連兩平行邊之平分點而得 EF ，乃作 $CJ = BH$ ，再作 $JK = \frac{1}{3}JH$ ，經 K 點繪與 AB 及 CD 之平行線，此平行線與 EF 相交於 S 點，此點即爲此梯形之重心。



第 73 圖

(丁) 多角形平面之重心

欲求多角形平面之重心，可先將整個平面分爲若干小部分，由各該小部分之重心，按次求得整個平面之重心軸，如此二次推求，而得兩個重心軸，該兩重心軸之交點，即爲此多角形平面之重心。茲試述簡易之作圖法如下：—

將整個多角形平面，分爲若干最簡單之小部分，例如三角

形，並行四邊形，長方形或正方形等，各該小部分之重心，可依照上法測定之，然後自各該重心，繪各該小部分互相並行之重力，即以各該小部分之面積，為各該重力大小之標準，乃應用射線圖解法，以求此若干重力之合力。此合力之地位與趨向，即為此多角形之重心軸，然後將若干小部分之並行重力，移轉一直角，再依上法求得第二重心軸，兩重心軸之交點，即為此多角形平面之重心。

例題 15 試求
右圖剖面之重心
(第 74 圖)。

$$F_1 = 2 \times 8 = 16 \text{ cm}^2$$

$$F_2 = 2 \times 12 = 24 \text{ cm}^2$$

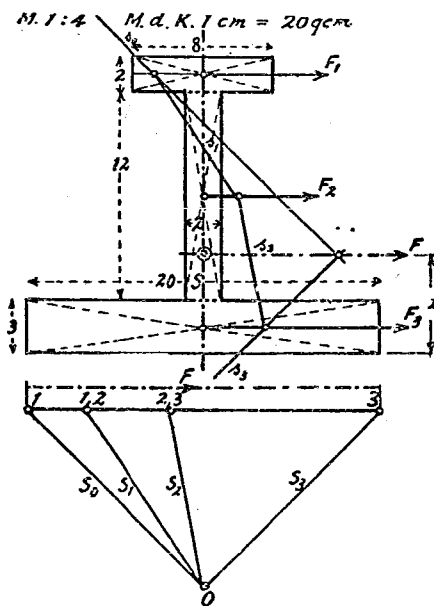
$$F_3 = 3 \times 20 = 60 \text{ cm}^2$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

$$= 16 + 24 + 60$$

$$= 100 \text{ cm}^2.$$

解 將整個剖面
面分為三個長方
形，以各長方形之
面積為重力，應用



第 74 圖

射線圖解法，假定 $1\text{cm} = 10\text{cm}^2$ ，而求得 F_1 F_2 及 F_3 之合力 F ，是即為該圖剖面重心軸之一，又 EF 為其剖面之平分線，是即重心軸之二。

此兩重心軸之交點 S ，即為該剖面之重心。

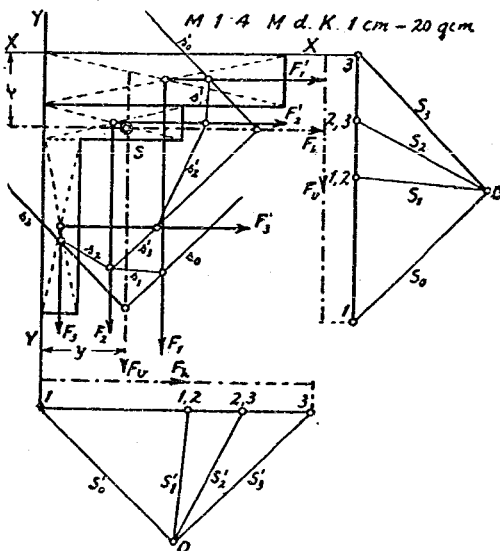
例題 16 試求下圖剖面之重心(第 75 圖)。

$$F_1 = 14 \times 3 = 42\text{ cm}^2$$

$$F_2 = 8 \times 2 = 16\text{ cm}^2$$

$$F_3 = 2 \times 10 = 20\text{ cm}^2$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 42 + 16 + 20 = 78\text{ cm}^2.$$



第 75 圖

解 將整個剖面分為三個長方形，經各長方形之重心，繪各該重力 F_1, F_2 及 F_3 ，均作水平方向，應用射線圖解法，而求得合力 F_h ，是為此剖面重心軸之一。

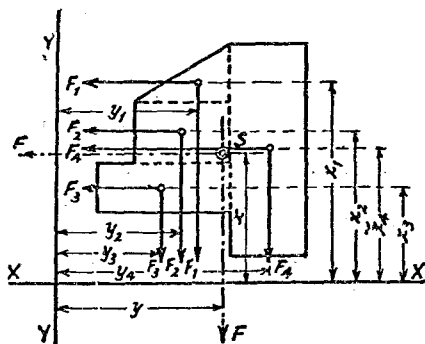
再經各長方形之重心，繪各該重力 F'_1, F'_2 及 F'_3 ，均作垂直方向，應用射線圖解法，而求得 F_v ，是為此剖面重心軸之二。

此兩重心軸之交點 S ，即為此剖面之重心。

II. 計算法

(甲) . 多角形平面之重心

上述圖解法之主要步驟，為兩度應用射線圖解法，以求各小部分並行重力之合力，換言之，即兩度應用射線圖解法，以求整個平面之兩重心軸，然此項步驟，亦可用計算法行之。其法維何，即應用力距定律以求諸並行力之合力是也。



第 76 圖

其法將整個平面分爲若干易於測定重心之小分面，例如第 76 圖中之 f_1, f_2, f_3 及 f_4 。再繪互相垂直之兩直線 XX 及 YY ，其地位以易於測定各小分面重力之槓距者爲宜，然後應用力距定律，以計算兩重心軸 F 與 XX 及 YY 之距離 x 及 y 如下：

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + f_4,$$

$$F \cdot x = f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + f_4 \cdot x_4 = \Sigma(f \cdot x),$$

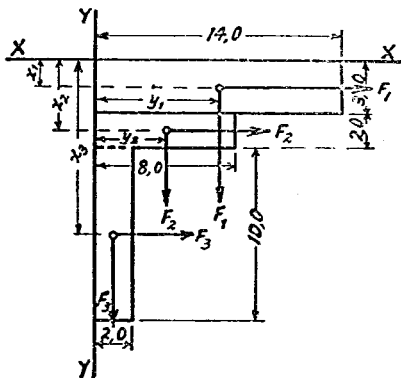
$$x = \frac{\Sigma(f \cdot x)}{F} \dots \dots \dots (16a)$$

$$F \cdot y = f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2 + f_3 \cdot y_3 + f_4 \cdot y_4 = \Sigma(f \cdot y),$$

$$y = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F} \dots \dots \dots (16b)$$

既得 x 及 y ，重心 S 之地位因之測定。

例題 17 試用計算法以求下圖剖面之重心(第 77 圖)。



第 77 圖

解

$$f_1 = 14 \times 3 = 42 \text{ cm}^2$$

$$f_2 = 8 \times 2 = 16 \text{ cm}^2$$

$$f_3 = 10 \times 2 = 20 \text{ cm}^2$$

$$F = f_1 + f_2 + f_3 = 42 + 16 + 20 = 78 \text{ cm}^2.$$

$$x_1 = 1.5, \quad x_2 = 4.0, \quad x_3 = 10 \text{ cm},$$

$$y_1 = 7.0, \quad y_2 = 4.0, \quad y_3 = 1.0 \text{ cm}.$$

$$78x = 42 \times 1.5 + 16 \times 4.0 + 20 \times 10 = 327,$$

$$x = \frac{327}{78} = 4.11 \text{ cm}.$$

$$78y = 42 \times 7.0 + 16 \times 4.0 + 20 \times 1.0 = 378,$$

$$y = \frac{378}{78} = 4.84 \text{ cm}.$$

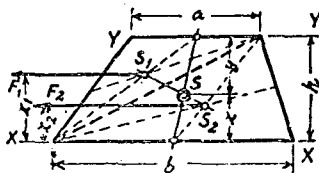
既知 x 及 y , 重心 S 之地位, 因之測定.

例題 18 試用計算法, 以求下圖梯形平面之重心公式.

$$\text{解 } f_1 = \frac{a \cdot h}{2}, \quad f_2 = \frac{b \cdot h}{2};$$

$$F = f_1 + f_2 = (a + b) \frac{h}{2}.$$

$$x_1 = \frac{2}{3}h, \quad x_2 = \frac{1}{3}h;$$



第 78 圖

$$(a + b) \frac{h}{2} \cdot x = \frac{a \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{3}h + \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{1}{3}h$$

$$(a+b) \cdot \frac{h}{2} \cdot x = \frac{h^2}{6} (2a+b).$$

$$\therefore x = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a+b}{a+b} \dots \dots \dots (17)$$

$$\text{或 } (a+b) \cdot \frac{h}{2} \cdot y = \frac{a \cdot h}{2} \cdot \frac{1}{3} h + \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{3} h,$$

$$(a+b) \cdot \frac{h}{2} \cdot y = \frac{h^2}{6} (a+2b).$$

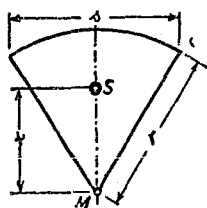
$$\therefore y = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b} \dots \dots \dots (17a)$$

既有 x 或 y , 重心 S 之地位, 因之測定.

(乙) 扇形面之重心

扇形面之重心, 必在中心角之平分線上(第79圖), 其與中心點之距離為

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot s}{b} \dots \dots \dots (18)$$



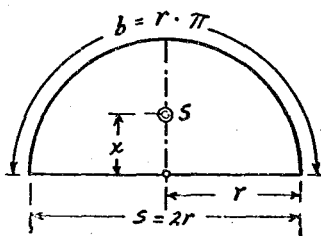
第 79 圖

此間 r = 半徑, s = 弦長, b = 弧長

(丙) 半圓面之重心

半圓面之重心, 必在底邊平分點之垂直線上(第80圖), 與中心點之距離為

$$x = \frac{4r}{3\pi} \dots \dots \dots (19)$$



第 80 圖

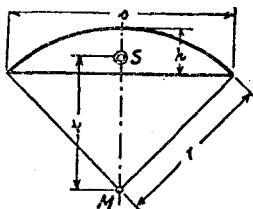
因 $s=2r$; $b=r \cdot \pi$.

故 $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot s}{b} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot 2r}{r \cdot \pi} = \frac{4r}{3\pi}$.

(丁) 圓截面之重心

圓截面之重心，必在中心角之平分線上(第 81 圖)，與中心點之距離為

$$x = \frac{s^3}{12F} \dots\dots\dots (20)$$



第 81 圖

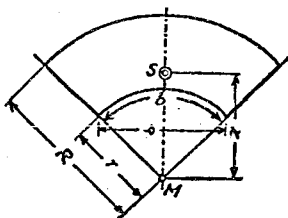
此間 $F =$ 圓截面之面積。

$$F = \frac{r(b-s) + s \cdot h}{2}$$

(戊) 圓缺面之重心 (第

82 圖)

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{s}{b} \dots\dots\dots (21)$$



第 82 圖

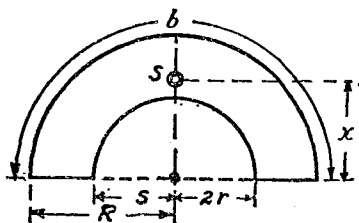
(己) 半圓面之重心

(第 83 圖)

此間 $s=2r$, $b=r \cdot \pi$,

以之代入上式，乃得

$$x = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \dots\dots\dots (22)$$

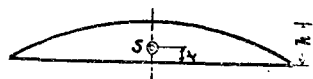


第 83 圖

(庚) 拋物線截面之重心 (第 84 圖)

拋物線截面之重心，必在
平分線上，與弦之距離為

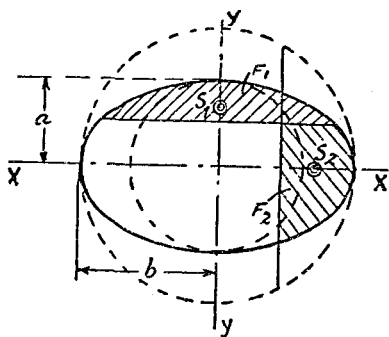
$$x = \frac{2}{5}h \dots \dots \dots (23)$$



第 84 圖

(辛) 橢圓截面之
重心 (第 85 圖)

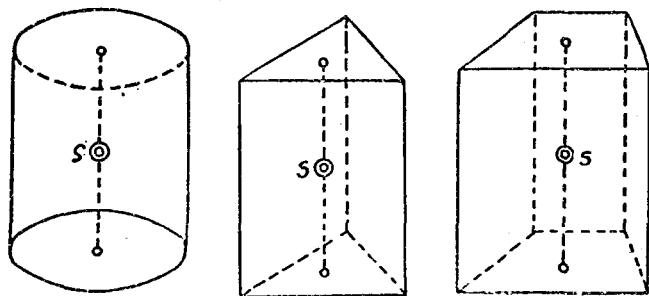
橢圓有內切及外切
兩圓周，外切圓之直徑，
即為橢圓之主徑，內切
圓之直徑即為橢圓之副
徑。



第 85 圖

截面之截及副徑者，

其重心 S_1 即為內切圓截面之重心。截面之截及主徑者，其重心



第 83 圖

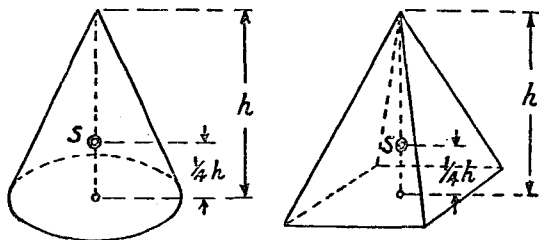
S_2 即為外切圓截面之重心。

(三) 立體之重心

(甲) 稜柱體與圓柱體之重心(第 86 圖)

將稜柱體或圓柱體之底與面之重心相接連，此直線之平分點即為此稜柱體或圓柱體之重心。

(乙) 稜錐體及圓錐體之重心(第 87 圖)

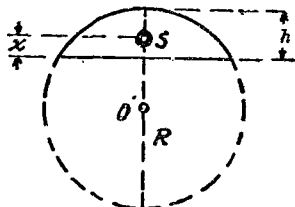


第 87 圖

將稜錐體或圓錐體之頂點與底之重心相接連，在此直線上距離底面 $\frac{1}{4}$ 體高處一點，即為此稜錐體或圓錐體之重心。

(丙) 圓球截體之重心(第 88 圖)

圓球截體之重心，位於經過截面中心點與圓球中心點之直徑上，其對於截面之距離為



第 88 圖

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2R-h)^2}{3R-h} \dots\dots\dots(24)$$

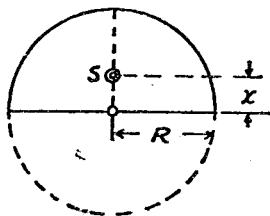
此間 $R =$ 圓球半徑, $h =$ 截體之高.

(丁) 半球體之重心(第 89 圖)

半球體之重心,位於經過截面中心點,而垂直於截面之直徑上,其對於截面之距離為

$$x = \frac{3}{8}R \dots\dots\dots(25)$$

此間 $R =$ 圓球半徑.



第 89 圖

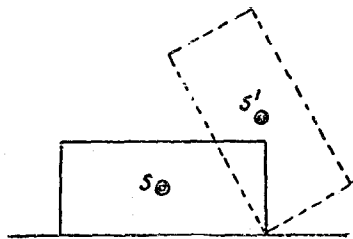
第四章 均衡與穩固

第一節 均衡狀態

物體在均衡狀態之下，其所置地位，是否穩固，則全視該物體之重心如何支持而定，蓋均衡未必即穩固也。因物體地位之穩固情形，可分為三種均衡狀態如下：——

(1) 穩固均衡狀態

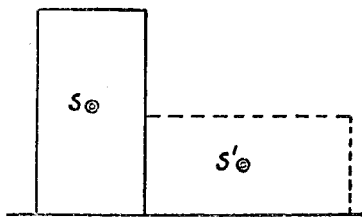
某物體位於均衡狀態之下，雖加以外力，可使該物體在某一點或某一線上轉動其地位，然該物體之本身重力，應時而起，相與抗爭，以謀維持其原有地位，或雖被轉動於一時，但外力侵襲停止時，則該物體立即恢復其原有地位，如此物體所原有之均衡狀態，謂為穩固均衡狀態，此時該物體之重心，離地最低，任何轉動，均足使重心擡高而置之於不穩固之地位也 (第 90 圖)。



第 90 圖

(2) 不穩固均衡狀態

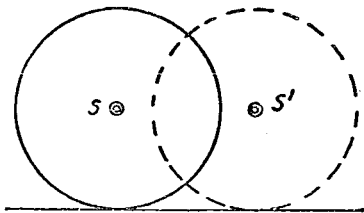
某物體位於均衡狀態之下，受外力侵襲後，即轉動而得較為穩固之地位，如此物體所原有之均衡狀態，謂為不穩固均衡狀態，蓋該物體在原有地位時，其重心並不離地最低，在轉動後所得新地位時，其重心較為低落也（第 91 圖）。



第 91 圖

(3) 無別均衡狀態

某物體位於均衡狀態之下，受外力侵襲後，不論轉動至任何新地位，該物體重心之高度，恆維持而不變，既不擡高，亦不低落，如此物體所有之均衡狀態，謂為無別均衡狀態，如圓球是（第 92 圖）。



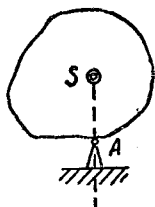
第 92 圖

第二節 穩固性

物體之立於一點上，立於一直線上，立於一平面上，立於若干平面上，或立於不在同一平面之若干點上，皆可支持該物體於均衡狀態。茲假定該物體除本身重力外，別無外力之侵襲，各

按其支持情形，分述如下：——

(1) 物體之立於一點上，而欲支持於均衡，則必須使該物體之垂直重力，經過該支點 A (第 93 圖)。

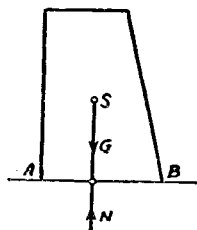


第 93 圖

(2) 物體之立於一直線上，而欲支持於均衡，則必須使該物體之垂直重力 G ，經過該直線。

(3) 物體之立於同一平面上之若干點，而欲支持於均衡，則必須使該物體之垂直重力，經過接連各該支點所構成之多邊形範圍以內。

(4) 物體之立於一平面上，而欲支持於均衡，則必須該物體之垂直力 G ，經過該支持面之範圍以內，斯時此支持面所產生之抵抗力之合力 N ，乃必經過該物體之重心 S 而與 G 大小相等，性質相反也 (第 94 圖)。



第 94 圖

倘物體之垂直重力，着於支持面之範圍以外，則 G 與 N 兩力因之構成一

雙偶力，此偶力所產生之力距，必使該物體向 G 力一方傾倒 (第 95 圖)。

倘物體之垂直重力，着於支持面之邊線上 (第 96 圖)，則

對於傾轉線 A 所產生之力距為 $M = D \cdot d$. 此力距謂之傾轉力距 (Kippmoment). 又該物體之垂直重力 G , 對於傾轉線 A 所產生之力距為 $M = G \cdot b$, 與 $D \cdot d$ 適得相反之性質, 前者謂之穩固力距 (Stand sicherheitsmoment). 物體穩固性之大小與穩固力距之大小成正比例. 卽物體之穩固力距愈大, 則該物體之穩固性亦愈大. 而穩固力距之大小與重力大小及其槓距長短又均成正比例. 總之, 物體在穩固均衡狀態時, 則其穩固力距必大於傾轉力距, 卽 $G \cdot b > D \cdot d$. 反之, 倘該物體在不穩固均衡狀態時, 則 $G \cdot b < D \cdot d$ 是也.

在應用上, 倘某物體之穩固力距至少爲傾轉力距之一倍半, 該物體之地位, 方得稱爲穩固, 卽

$$G \cdot b \geq 1.5 D \cdot d.$$

第五章 摩 擦

凡機械工作，其功能之一部分是實得其用，另一部分是歸消失，此若干工作量之所以消失，因物體間摩擦有以致之也。

倘將某一物體之任何一面，置於另一物體之平面上，或前或後推動之，因而產生之摩擦，謂為滑動摩擦 (die gleitende Reibung)。

倘有某一物體推動於另一物體上，同時該物體並在轉動中，如此而產生之摩擦，謂為轉動摩擦 (die rollende Reibung)。

倘將有彈力性之物體，如繩索或皮帶等，繞於另一物體而拉動之，因而產生之摩擦，謂為繩索摩擦 (die Seilreibung)。

摩擦之種類大別如上，今試分別詳述之：——

第一節 滑動摩擦

設在靜止於平面上之物體，加一擊以推動之，倘該物體與平面均有絕對光滑之表面，則此物體將維持其因此一擊而造成之滑動速度，向前滑動無已，但事實上必無其事，此一擊所造成之滑動速度，必將逐漸減小而至於 0，使該物體由滑動而仍歸

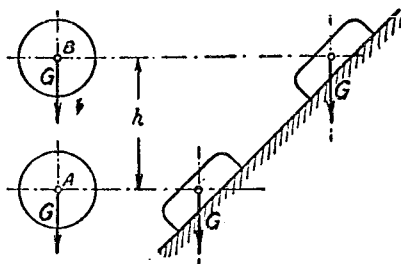
於靜止，此無他，蓋有阻力在焉。此阻力為何，除空氣阻力而外，尚有接觸面間之滑動摩擦力是也。

工作量之測量，普通以 $m\ kg$ 為單位，其公式如下：——

$$A = P \cdot S \dots \dots \dots (23)$$

此間 P 為工作所需之力， S 為工作所得之路程，兩者相乘，其所得之積，即為工作量。例如徒手提 G 重之物，自 A 點升至 B 點，則其工作量應為 $A = G \cdot h$ ，倘將 G 重之物在斜面上提至高度 h ，則所須之工作量必較大於 $G \cdot h$ 。

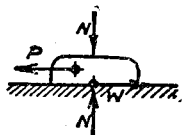
因物體與斜面相接觸之平面總是凹凸不平，因凹凸不平之表面，乃有阻力發生，此阻力即所謂滑動摩擦力者是也 (第 98 圖)。



第 98 圖

是故物體在平面上滑動，因有摩擦力之產生，乃有一部分工作量之消失，此消失的工作量之大小，在工程上極關重要，但其計算頗感繁複，欲求簡易，此所以力學中有本章之研討也。

某一物體在另一物體上滑動時，其所接觸之平面間，必因摩擦而發生阻力，此阻力可稱為摩擦阻力 (Reibungswiderstand)，如第 99 圖中所示之 W 力是也，是項摩擦阻力之大小，與下列各點有密切關係：——



第 99 圖

(1) 兩物體間所受之壓力(此壓力恆為垂直)，壓力愈大，則摩擦阻力亦愈大，壓力小則摩擦阻力亦愈小。

(2) 兩物體間接觸面之糙度，接觸面愈粗糙，則摩擦阻力愈大，愈光滑則摩擦阻力亦愈小。

(3) 兩物體間接觸面之面積，面積大則摩擦阻力亦大，面積小則摩擦阻力亦小(倘壓力不變，則摩擦阻力與接觸面之大小無關係)。

(4) 物體滑動之速度，愈高則摩擦阻力愈小，愈低則摩擦阻力愈大。

(5) 物體之堅度，堅度愈高，則摩擦阻力愈小，愈低則摩擦阻力愈大。

計算摩擦阻力之公式為

$$W = N \cdot \mu \dots \dots \dots (27)$$

此間 W 為摩擦阻力， N 為垂直壓力， μ 為滑動摩擦係數 (Reibungskoeffizient)。

此摩擦係數 μ ，因下列各種關係而異其值：——

- (1) 接觸面愈粗糙，則 μ 應愈大，愈光滑則 μ 愈小。
- (2) 接觸面愈大，則凹凸之接觸愈多，因之 μ 亦應愈大，惟極小物體，有陷入另一物體凹面之虞，故所取之 μ 亦應大。
- (3) 滑動之速度愈快，則 μ 應愈小，速度慢則 μ 應大，因在快速度滑動時，其接觸面之凹凸處每不及深陷也。
- (4) 物體之堅度愈高， μ 應愈小，愈低則 μ 愈大。

滑動摩擦係數之大小各異，既如上述，為計算上便利起見，乃根據實驗所得而有摩擦係數表之訂列，以便檢查，下表僅示其一部分耳。

滑動摩擦之各摩擦係數表

物 質		μ			
		靜 止 時		滑 動 時	
		乾	油 潤	乾	油 潤
木 與 木	順 紋	0.62	0.11	0.48	0.075
	逆 紋	0.54		0.34	
木 與 金 屬		0.60	0.11	0.40	0.10
鋼 與 鋼	平 面	0.11	0.098	0.105	0.092
	圓 面	0.169	0.15	0.162	0.14
鐵 與 銅		0.19	0.11	0.18	0.08
鐵 與 鐵		0.13	0.11		0.10
鋼 與 冰		0.027		0.014	
皮 與 鐵		0.50	0.12	0.56	0.15
磚 與 石 灰		0.67			
牆 與 土 基		0.65			
牆 與 三 和 土		0.75			

各種路面材料之摩擦係數表

物 質	柏油路面		碎石路面		石 路 面		硬木路面	
	乾	溼	乾	溼	乾	溼	乾	溼
牛 皮	0.79	0.95	0.76	0.80	0.71	0.83	0.75	0.92
橡 皮	0.89	0.94	0.88	0.83	0.70	0.87	0.93	1.00
鐵	0.42	0.45	0.39	0.36	0.35	0.35	0.60	0.53

倘 μ_0 爲物體在靜止時之摩擦係數， μ 爲物體在滑動時之摩擦係數，則必 $\mu_0 \geq \mu$ ，是即摩擦係數在物體靜止時必較在滑動時爲大，而 μ 在不同之滑動速度時又復各異也。

例題 19 設有靜止之某物體，其所受壓力 $N = 100$ kg. 摩擦係數 $\mu = 0.3$ 橫面推力 $P = 20$ kg. 試問該物體移動其地位否？

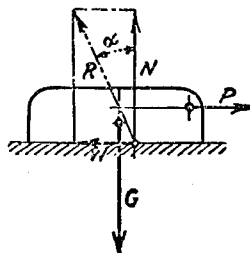
解 某物體之摩擦力應爲

$$W = N \cdot \mu = 100 \times 0.3 = 30 \text{ kg.}$$

今推力祇爲 20 kg，是則該物體雖受 P 力之推，決無滑動之虞，或可謂該物體對於滑動有 1.5 倍之安全性。

吾人所應注意者，此間 $W = 30$ kg，爲接觸面間所可產生之最大摩擦力，即最大阻力是也。倘推力 P 爲 20 kg 時，則 W 亦祇爲 20 kg，倘 P 爲 0 時，則 W 亦爲 0，倘 P 大於 30 kg 時，該物體乃被推動而向 P 所指示之方向滑動，倘 P 小於 30 kg 時，該物體決不致準 W 力所指方向而滑動也。

平面上有物體滑動時，如上文所述，同時即產生阻力以抵抗之，因此於滑面上，即有垂直的支持力 N 及水平的摩擦力 W (第 100 圖)，由 N 及 W 所得其合力 R ，此 R 力與垂直阻力 N 所構成之角度為 α ，此 α 可謂為摩擦角 (Reibungswinkel)，其與摩擦係數之關係如下：——



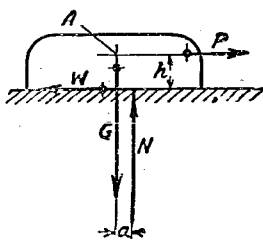
第 100 圖

$$\tan \alpha = W : N = N \cdot \mu : N = \mu,$$

是即 $\tan \alpha = \mu$ (28)

(1) 物體在平面上之滑動

設有某物體如第 101 圖所示，其所受之拉力為 P ，本身重力為 G ，支持力為 N ，摩擦阻力為 W ，按照均衡定律(公式 15)



第 101 圖

因 $\Sigma V = 0$ ，故 $G - N = 0$;

因 $\Sigma H = 0$ ，故 $P - W = 0$;

因 $\Sigma M = 0$ ，故 $W \cdot h - N \cdot a = 0$ 。

在上列七種不同數量中 (N, P, W, G, h, μ, a)，可應用摩擦公式 $W = N \cdot \mu$ 以測定此中四項數量 (N, W, P, a)。

例題 20 倘欲將 1000 kg 重之物體，在平面上拉動，假定摩

擦係數為 0.2, 問須用若干拉力?

$$\text{解 } G - N = 0, 1000 - N = 0. \quad \therefore N = 1000 \text{ kg.}$$

$$W = N \cdot \mu = 1000 \times 0.2 = 200 \text{ kg.}$$

$$P - W = 0, \quad \therefore P = 200 \text{ kg.}$$

例題 21 前題如拉力與接觸面之距離 $h = 50 \text{ mm}$, 問支持力 N 之着點何在?

$$\text{解 } W \cdot h - N \cdot a = 0,$$

$$200 \times 5 - 1000 \cdot a = 0,$$

$$\therefore a = 1 \text{ cm.}$$

第 102 圖, 示平面上有一物體, 其重力為 G , 因受外力 P 之侵襲, 其接觸面間乃有摩擦力 W 之產生, 以阻其滑動。

類此情形, 習見於機械及土木工程中, 吾人可用計算法以演算之, 此間可供應用之公式凡四。

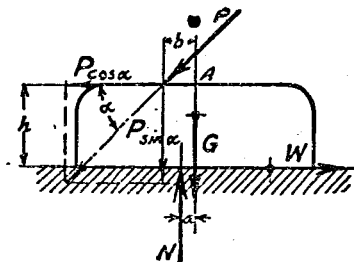
$$(1) G + P \cdot \sin \alpha - N = 0;$$

$$(2) P \cdot \cos \alpha - W = 0;$$

$$(3) -P \cdot \sin \alpha \cdot b - W \cdot h \\ + N \cdot a = 0$$

(以 A 為固定點);

$$(4) W = N \cdot \mu.$$



第 102 圖

例題 22 設 $G = 50$ 公斤, $\mu = 0.60$, $\alpha = 45^\circ$, 問 P 力在若干公

斤以內可維持該物體於靜止？

解 因 $50 + P \cdot \sin 45^\circ - N = 0;$

故 $N = 50 + P \cdot \sin 45^\circ.$

因 $P \cdot \cos 45^\circ - W = 0;$

故 $W = P \cdot \cos 45^\circ.$

又因 $W = N \cdot 0.60;$

故 $P \cdot \cos 45^\circ = (50 + P \cdot \sin 45^\circ) \times 0.60.$

$$P = 106 \text{ kg.}$$

(答) P 力在 106 公斤以內，仍可維持該物體於靜止。

(2) 物體在斜面上之移動

物體受外力 P 之感應而在斜面上滑動，因 P 力之趨向不同(或與斜面相並行，或為水平)，又因滑動之方向不同(或向上或向下)，乃有四種不同情形，分述如下：——

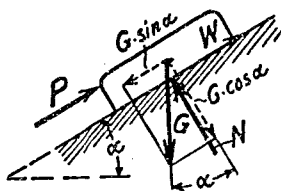
(a) 外力 P 與斜面相並行，

而物體向下推動(第 103 圖)。

此間重力 G 可分為兩分力。

其一為並行於斜面之 $G \sin \alpha$ ，

其二為垂直於斜面 $G \cdot \cos \alpha$ ，第



第 103 圖

二分力因 $\Sigma H = 0$ 而造成下列等式：

$$G \cdot \cos \alpha - N = 0, \quad N = G \cdot \cos \alpha.$$

第一分力因 $\Sigma V=0$ 而造成下列等式：——

$$-G \cdot \sin \alpha + W + P = 0,$$

即 $-G \cdot \sin \alpha + N \cdot \mu + P = 0,$

$$-G \cdot \sin \alpha + (G \cdot \cos \alpha) \cdot \mu + P = 0;$$

故 $P = G(\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) \dots\dots\dots(29)$

設 $P=0$, 則 $G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 0,$

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha = 0,$$

$$\mu = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \tan \alpha.$$

如以 $\angle \rho$ 爲摩擦角, 則 $\mu = \tan \rho$

乃因 $\tan \rho = \tan \alpha,$

而知 $\rho = \alpha.$

(b) 外力 P 與斜面相並行, 而物體向上推動(第 104 圖)。

此間 $G \cdot \cos \alpha - N = 0,$

$$N = G \cdot \cos \alpha,$$

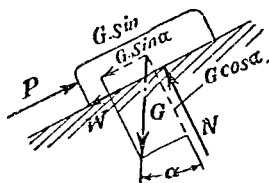
$$-G \cdot \sin \alpha - W + P = 0,$$

$$-G \cdot \sin \alpha - N \cdot \mu$$

$$+ P = 0,$$

$$-G \cdot \sin \alpha - (G \cdot \cos \alpha) \cdot \mu + P = 0;$$

故 $P = G(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \dots\dots\dots(30)$



第 104 圖

倘 P 力之大小在上列兩值之間者，既不足以推動物體向上滑動，而亦不能向下滑動，是則該物體在靜止狀態。

例題 23 有一物體，其重量為 1200 公斤，置於 $\alpha = 20^\circ$ 之斜面上，倘滑動係數為 0.18，問 P 力在若干公斤之範圍內，可維持該物體於靜止狀態？

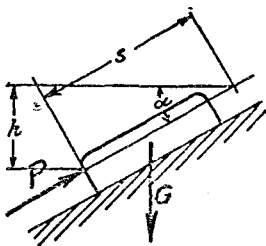
$$\begin{aligned} \text{解 } P_1 &= G(\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha) = 1200(0.342 - 0.939 \times 0.18) \\ &= 208 \text{ 公斤,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= G(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) = 1200(0.342 + 0.939 \times 0.18) \\ &= 612 \text{ 公斤.} \end{aligned}$$

(答) $P_2 = 612$ 公斤，該物體將開始向上滑動， $P_1 = 208$ 公斤，該物體將開始向下滑動

倘上題中之 $P_1 = 0$ ，則 $\alpha = \rho$ ，故曰如斜面角度等於或小於摩擦角度時（即 $\alpha \leq \rho$ ），則物體在斜面上雖無 P 力之支持而能維持於靜止。

欲使物體在斜面向上推進所需之工作量，必有一部分是消失及另一部分是有效能，倘向上推進所經過之路程為 s ，則所需之工作量為 $A_1 = P \cdot s$ 。物體在斜面上經過 s 路程，換言之，即提升至 h 高，

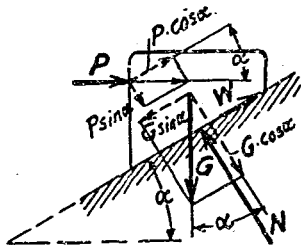


第 105 圖

$h = s \cdot \sin \alpha$ (第 105 圖), 則所得之工作量, 實為 $A_2 = G \cdot h$, 故工作效率 (Wirkungsgradn) 之決算, 應用公式 (30), 當為

$$\eta = \frac{A_2}{A_1} = \frac{G \cdot h}{P \cdot s} = \frac{G \cdot \sin \alpha}{P} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha} \dots \dots \dots (31)$$

(c) 外力 P 之趨向為水平, 而物體向下滑動, 此間可將重力 G 分為兩分力, 其一垂直於斜面者為 $G \cdot \cos \alpha$, 其二並行於斜面者為 $G \cdot \sin \alpha$, 又可將外力 P 分為兩分力, 其一垂直於斜面者為 $P \cdot \sin \alpha$, 其二並行於斜面者為 $P \cdot \cos \alpha$ (第 106 圖), 乃可演成下列等式:—



第 106 圖

$$G \cdot \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha - N = 0,$$

$$G \cdot \sin \alpha - P \cdot \cos \alpha - W = 0.$$

因 $W = N \cdot \mu,$

故 $G \cdot \sin \alpha - P \cdot \cos \alpha - N \cdot \mu = 0.$

又因 $N = G \cdot \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha,$

故 $G \cdot \sin \alpha - P \cdot \cos \alpha - (G \cdot \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha) \cdot \mu = 0,$

$$G \cdot \sin \alpha - G \cdot \cos \alpha \cdot \mu - P \cdot \cos \alpha - P \cdot \sin \alpha \cdot \mu = 0,$$

$$P \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \mu) = G \cdot (\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \mu);$$

乃得
$$P = G \cdot \frac{\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \cdot \sin \alpha}$$

倘以 $\mu = \tan \rho$ 代入上式,

乃得
$$P = G \cdot \frac{\sin \alpha - \tan \rho \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha + \tan \rho \cdot \sin \alpha}$$

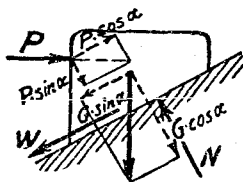
倘以 $\cos \alpha$ 除上式中分母分子,

乃得
$$P = G \cdot \frac{\tan \alpha - \tan \rho}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \rho}$$

是即 $P = G \cdot \tan(\alpha - \rho)$ (32)

(d) 外力 P 之趨向爲水平, 而物體向下滑動.

此間外力 P 及重力 G , 如上法
分爲四分力 (第 107 圖) 而演成下列
等式:—



第 107 圖

$$G \cdot \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha - N = 0,$$

$$G \cdot \sin \alpha - P \cdot \cos \alpha - W = 0,$$

因 $W = N \cdot \mu,$

故 $G \cdot \sin \alpha - P \cdot \cos \alpha + N \cdot \mu = 0;$

而 $N = G \cdot \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha,$

故 $G \cdot \sin \alpha - P \cdot \cos \alpha + (G \cdot \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha) \cdot \mu = 0,$

$$G \cdot \sin \alpha + G \cdot \cos \alpha \cdot \mu - P \cdot \cos \alpha + P \cdot \sin \alpha \cdot \mu = 0,$$

$$G(\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) - P \cdot (\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha) = 0;$$

$$\text{乃得 } P = G \cdot \frac{\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \cdot \sin \alpha}$$

倘以 $\mu = \tan \rho$ 代入上式，

$$\text{乃得 } P = G \cdot \frac{\sin \alpha + \tan \rho \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha - \tan \rho \cdot \sin \alpha}$$

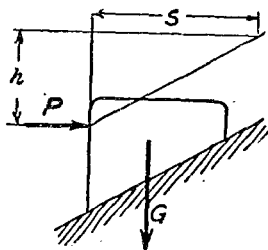
倘以 $\cos \alpha$ 除上式中之分母分子，

$$\text{乃得 } P = G \cdot \frac{\tan \alpha + \tan \rho}{1 - \tan \rho \tan \alpha}$$

$$\text{是即 } P = G \cdot \tan(\alpha + \rho) \dots \dots \dots (33)$$

倘 P 力之大小在上列兩值之間者，既不足以推動物體向上滑動，而亦不能向下滑動，是即該物體在靜止狀態。

欲使該物體在斜面上推進，所需之工作量必有一部分是消失及另一部分屬有效。倘向上推進所經過之路程為 s ，則所需之工作量为 $A_1 = P \cdot s$ ，物體在斜面上經過 s 路程，換言之，即提升至 h 高， $h = s \cdot \tan \alpha$ (第 108 圖)，則有效之工作量實為 $A_2 = G \cdot h$ ，故工作效率之決算應為



第 108 圖

$$\eta = \frac{A_2}{A_1} = \frac{G \cdot h}{P \cdot s} = \frac{G \cdot s \cdot \tan \alpha}{P \cdot s} = \frac{G \cdot \tan \alpha}{P} = \frac{G \cdot \tan \alpha}{G \cdot \tan(\alpha + \rho)}$$

$$\eta = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \rho)} \dots\dots\dots(34)$$

第二節 轉動摩擦

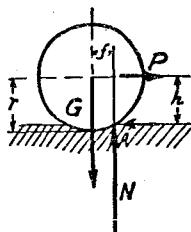
圓形物體在平面上轉動，是即其地位之轉變，其轉變方式，乃如第 109 圖所示，因外力 P 之推進或拉動，而該物體在 A 點上傾轉也，此間在 A 點上所產生之力距。

因 $\Sigma M = 0$,

故 $P \cdot h - G \cdot f = 0, P = G \cdot \frac{f}{h}$.

又因 h 與 r 相差極微，故上式乃可寫作

$$P = G \cdot \frac{f}{r} \dots\dots\dots(35)$$



第 109 圖

此間 f 為轉動摩擦之槓距 (Armdner rollenden Reibung). 由實驗所得，知

硬木與硬木 $f \approx 0.05$ cm

鐵與鐵(或鋼與鋼) $f \approx 0.005$ cm

鋼珠與軸領 $f \approx 0.0005$ 至 0.001 cm

例題 24 設有半徑 20 公分之鐵棍，重 300 公斤，問需用若干公斤，乃可在鐵板上拉動之？

(答) $P = G \cdot \frac{f}{r} = 300 \times \frac{0.05}{20} = 0.75$ 公斤。

例題 25 設有直徑 50 公分之路滾，重 600 公斤， $f=5$ cm，問需用若干公斤乃可拉動之？

$$(\text{答}) \quad P = G \cdot \frac{f}{r} = 600 \times \frac{5}{25} = 120 \text{ 公斤.}$$

設有物體在圓棍上以 P 力推動之，如第 110 圖，則圓棍之上部承受物體之重力 G_2 ，圓棍之下部感受支持力 $G = G_1 + G_2$ ，此間 G_1 為圓棍之重量，假定 $a = b = r$ ，乃得在 A 點上所產生之力矩為

$$P \cdot 2r - G_2(f_1 + f_2) - G_1 \cdot f_1 = 0,$$

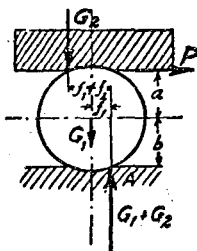
$$P = \frac{G_2(f_1 + f_2) + G_1 f_1}{2r}$$

然因大都 $f_1 = f_2 = f$,

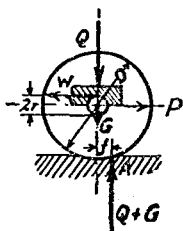
故 $P = \frac{f}{2r} (2G_2 + G_1)$(36)

在實際上，恆多滑動與轉動同時產生者，猶如車輪是也，因輪軸之上部須承受載重力 Q 而產生滑動摩擦 $W = Q \cdot \mu_1$ ，軌道上之支持力應為 $Q + G$ ，如此在軸心上所產生之力矩，應為

$$M = (Q + G) \cdot f + W \cdot r$$



第 110 圖



第 111 圖

然整個組織因 P 力之拉引而向前轉動，故在軸心上所產生之力距又為

$$M = P \cdot R.$$

再因 $W = Q \cdot \mu_1,$

乃得公式如下：——

$$P = (Q + G) \cdot \frac{f}{R} + Q \cdot \mu_1 \cdot \frac{r}{R} \dots\dots\dots(37)$$

式中 $\mu_1 = \frac{4}{\pi} \mu$ ，在此所得之 P ，即行駛阻力是也。

例題 26 有一起重滑車，其輪之直徑為 80 公分，軸之直徑為 9 公分，問吊重 12000 公斤時(包括本身重量 1000 公斤)，該車之行駛阻力為若干？

解 $f = 0.05\text{cm}, \mu_1 = 0.03.$

$$P = (Q + G) \frac{f}{R} + Q \cdot \mu_1 \cdot \frac{r}{R}.$$

此間 $Q = 12000 - 1000 = 11000$ 公斤，

$$G = 1000 \text{ 公斤}.$$

故 $P = 12000 \times \frac{0.05}{40} + 11000 \times 0.03 \times \frac{4.5}{40}$

$$= 15 + 37 = 52 \text{ 公斤}.$$

例題 27 前題倘該滑車之行駛速度 $v = 36\text{m/min}$ ，發動之

工作效率 $\eta = 70\%$, 則所需馬達應有若干馬力?

$$\text{解} \quad L_1 = \frac{P \cdot v}{75} = \frac{52 \times 36}{60 \times 75} = 0.416 P \cdot s,$$

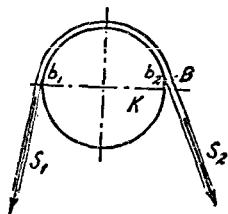
$$L_2 = \frac{L}{\eta} = \frac{0.416}{0.7} = \sim 0.6 P \cdot s.$$

(答) 馬達應有 $0.6 P \cdot s$.

第三節 繩索摩擦

繩索摩擦者, 乃有彈性之繩索與被圍繞之物體間所產生之摩擦, 即繩索 B 與圓體 K 所產生之摩擦是也(第 112 圖).

倘 $s_1 = s_2$, 則該繩索在圓體上既無動作產生, 即無摩擦存在, 倘 s_2 逐漸增加, 而繞着之面又非絕對光滑, 則必於某一限度時, 該繩索將開始準 s_2 之趨向而在圓柱上滑動, 此限度為何, 即



第 112 圖

$$s_1 = s_2 e^{\mu \alpha} \dots \dots \dots (38)$$

此間 s_1 為繩索一端之引力

s_2 為另一端之引力

e 為自然對數之底數

μ 為摩擦係數

a 為繩索繞着於圓體之弧長

下表節錄 $e^{\mu a}$ 之數值，以供檢閱而利應用。

弧長 a 與 圓周 2π 之 比 $\frac{a}{2\pi}$	$e^{\mu a}$			
	皮帶繞於圓盤			
	木圓盤	鑄鐵圓盤		
	稍加油潤	多量油潤	稍加油潤	溼潤
	$\mu=0.47$	$=0.12$	$=0.28$	$=0.33$
0.1	1.34	1.02	1.19	1.27
0.2	1.81	1.16	1.42	1.61
0.3	2.43	1.25	1.69	2.05
0.4	3.26	1.35	2.02	2.60
0.5	4.88	1.46	2.41	3.30
0.6	5.88	1.57	2.81	4.19
0.7	7.90	1.66	3.43	5.32
0.8	10.60	1.83	4.09	6.75
0.9	14.30	1.97	4.87	8.57
1.0	19.20	2.12	5.81	10.90

例題 28 設有皮帶繞於飛輪，其繞着之弧長為 144° ， s_2 端之

引力為 100 kg，問在 s_1 端之引力應為若干？

解 $144^\circ = 0.4 \times 360^\circ$; $\frac{\alpha}{2\pi} = 0.4$.

在上表檢得 $e^{\mu\alpha} = 2.02$,

乃得 $s_1 = s_2 \cdot e^{\mu\alpha} = 100 \times 2.02 = 202 \text{ kg}$.

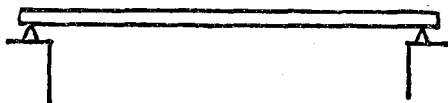
第六章 力學定律之應用於梁木

第一節 概說

外力之加於梁木者，大率以垂直爲多，力之趨向與梁之縱軸 (Längsachse) 恆直角相交，故梁木縱軸之趨向，多作水平，或爲直線，如房屋之欄柵，或爲折線，如房屋之頂架，或爲弧線，如牆拱頂等是，然梁木之解釋，普通就伏羲言，只單指欄柵而已。

梁木之計算，與其支持方式及支點多少均有密切關係，梁木之最普通者有二支點，倘此二支點即在梁木之兩端者，稱爲支持於兩端之普通梁木，或稱單孔欄支梁 (einfacher Träger auf zwei Endstützen 第 113 圖)，其一端或兩端突出於支點之外者，稱爲支持梁，或稱有臂梁 (Träger mit Kragstück 第 114 及第 115 圖)，梁木之支持於兩點以上之若干支點者，稱爲連續梁，或稱多孔梁 (durchlaufender od. kontinuierlicher Träger 第 116 圖)，倘一端受鉗制而另一端自由伸出者，稱爲伸出梁，或曰臂梁 (eingespannter Träger 第 117 圖)。

梁木支持之點稱爲支點(Stützpunkt od. Auflager), 支點以外之突出部分稱爲突出段, 或曰臂 (Kragstück), 其不受支持之梁端, 卽突出段之終端, 稱爲自由端 (freies Trägerende).



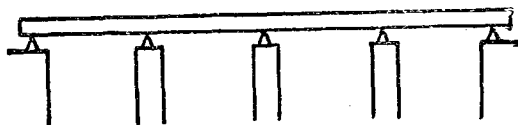
第 113 圖



第 114 圖



第 115 圖



第 116 圖



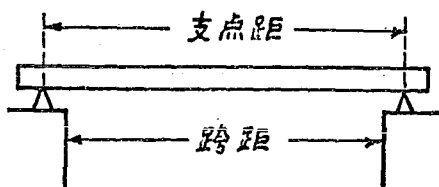
第 117 圖

梁木所橫跨之透光距離稱為光距，或曰淨寬 (Lichtweite) 或曰跨距 (Spannweite)，支點與支點間之距離則稱為支點距，或曰跨度 (Stützweite 第118 圖)。

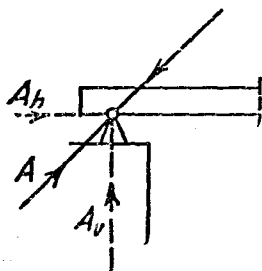
梁木支點之結構，有固定的與活動的二種 (feste und bewegliche Auflager)，固定的支點之結構，能隨時產生阻力以抵抗水平垂直或任何趨向之外力，亦即任何趨向之外力，均無變動該支點原有地位之可能 (第 119 圖)，活動支點之結構，則可使該支點在一定限度內左右移動其地位，蓋梁木有彈性 (Elastizität) 因天時之變遷及外力之侵襲乃有伸縮，同時又假定梁與支點間

之接觸面絕無摩擦阻力之存在也，故在活動支點上所能產生之阻力，其趨向必為垂直 (第 120 圖)。

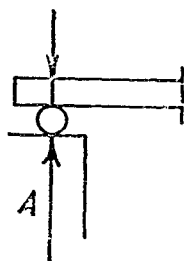
例如第121 圖所示之梁木，受斜 P 力侵襲後，在支



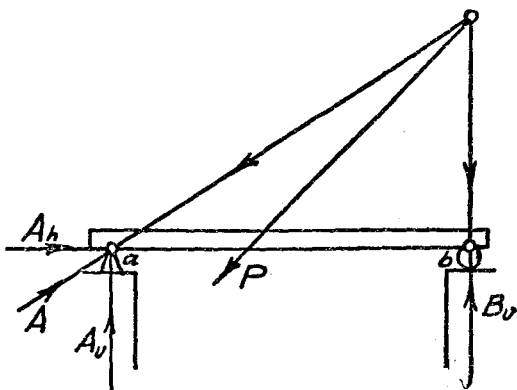
第 118 圖



第 119 圖



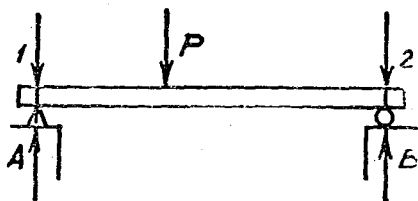
第 120 圖



第 121 圖

點上必有支持力產生，其所產生者，在 a 點上為水平之 A_h 及垂直之 A_v ，而在 b 點上則祇有垂直之 B_v ，共計三力，蓋因 b 為活動之支點也。

又如第 122 圖所示之梁木，受垂直的 P 力侵襲後，其在兩支點上所產生之支持力，均為垂直，即 A 及 B ，此類梁木之計算，



第 122 圖

祇須應用均衡定律中之 $\Sigma N = 0$ 及 $\Sigma V = 0$ 兩公式，至於 $\Sigma H = 0$ 則無用，因無水平之力在也。

外力之加於梁木，是謂梁木之承重，或曰荷重，因承重方式 (Belastungsart) 之不同，可分為下列各類：——

(1) 力之着於一點或數點者，謂為單力承重，或曰集力荷重 (Einzelbelastung).

(2) 力之連續分佈於梁之全長，作均等之承重者，謂為均佈承重 (gleichmässig verteilte Belastung).

(3) 力之連續分佈於梁之一段，於該段上作均等之承重者，謂為局部均佈承重 (Streckenbelastung).

(4) 合以上各類承重而加於同一梁木者，謂為混合承重 (gemischte Belastung).

外力之直接加於梁木者，謂為直接承重 (unmittelbare Belastung)，如普通承重是；間接加於梁木者，謂為間接承重 (mittelbare Belastung)，如橋面上之承重轉支於橋之大梁者是也。

梁木之承重，尚有靜止與活動之分，靜止承重 (bleibende Belastung)，如梁之自重及其上牆身等之重力，為靜止而永遠不變之承重是也。活動承重 (bewegliche Belastung)，如橋面上車輛行人之重力及屋面上之風力雪力等，為活動而有時間性之承重是也。

外力之加於梁木，除能使支點上產生支持力 (Auflagerwiderstände)，以相與維持於均衡外，並可使梁木彎曲 (durchbie-

gen), 及可在垂直於縱軸之任何橫斷面上, 將梁木剪為兩截 (Durchscheren), 是故梁木之任何橫斷面上, 必有剪截此梁木之力存在, 此力為何, 即斷面橫力 (Querkraft) 是也, 在各該橫斷面, 除斷面橫力外, 尚有一種能使梁木彎曲之力距存在, 此力距為何, 即彎曲力距, 或撓幾率 (Biegemoment) 是也。

梁木受外力侵襲後, 既有截斷及彎曲之危險, 其本身乃有產生內力以相與抗持之必要, 是故梁木材料之選擇, 尺度之推算, 均應視其所能產生之內力, 能否勝任於目前及維持於久遠為定, 計算之第一步, 即為推算梁木之最大彎曲力距 (Maximalmoment), 該最大彎曲力距所在之斷面, 即最危險之斷面 (der gefährdete Querschnitt) 是也。

第二節 支持於兩端梁木之受單力承重者

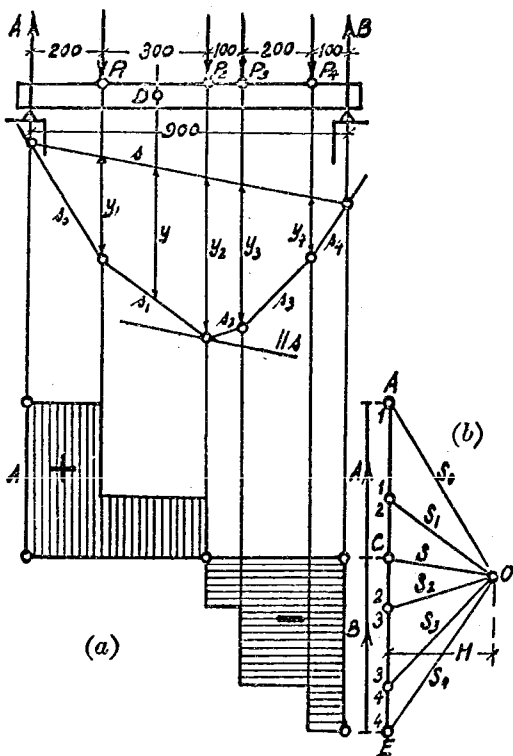
一. 受若干單力承重者

甲. 圖解法

I. 支點攔支力之推算 (Bestimmung der Auflagerwiderstände)

倘有梁木受 P_1, P_2, P_3 及 P_4 外力之侵襲, 如第 123 圖所示者, 則其兩支點上所產生之攔支力 A 及 B , 可應用射線多邊形圖解法以推求之 [第 123 (a) 及 (b) 圖]。

II. 彎曲力矩及斷面橫力之推算 (Bestimmung des Biegemomentes und der Querkraft)



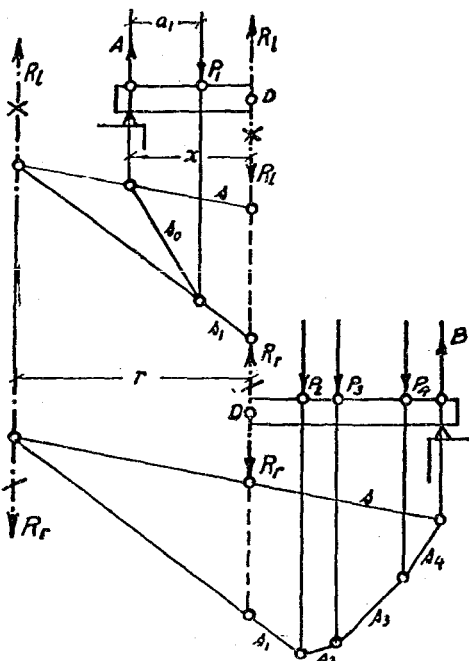
第 123 圖

(1) 概述

倘欲推求該梁木在 D 點上所產生之彎曲力矩及斷面橫

力，則須假設此梁木在 D 點上被截為二段（第 124 圖），在未截斷前，所有加於此梁木之外力，必互相維持於均衡，即在梁之任何一點上，其外力與內力亦必相持於均衡，在截斷之後，各段即失其均衡，倘欲恢復其原有之均衡狀態，則端賴該斷面上所產生之內力，此內力之推求，乃有賴於材料強弱學之研討。

梁木在 D 點截斷後，先將左邊一段上之外力，應用射線多邊形圖解法以求得其合力 R_1 之大小與地位 [第 124 及 123 (b) 圖]，然後在 D 點上加兩力，其大小與 R_1 相等但性質相反，因之造成偶力而產生 $M_1 = R_1 \cdot r$ ，此 M_1 即為 D 點斷面上所應有之彎曲力距，其所餘向上之力 R_2 ，即為該



第 124 圖

第 125 圖

斷面上所應有之斷面橫力是也。

此間 R_i 亦可稱為該梁木 D 點斷面上之剪力 (Schub-od. Scherkraft), 其大小應等於左段梁木上諸力之和, M_i 為產生於 D 點斷面上, 足使梁木彎曲之力距, 其大小應等於左段梁木上諸力對於 D 點所產生力距之和, 即

$$M_i = M_D = A \cdot x - P_1 \cdot (x - a_1).$$

應用同樣圖解法, 求得右邊一段梁木在 D 點斷面上所產生之彎曲力距 $M_r = R_r \cdot r$ 及斷面橫力 R_r .

此得自右段梁木之 R_r , 必與得自左段梁木之 R_i 在同一地位, 並且同一趨向同一大小, 惟其性質相反(第 125 圖), 必如是, 因 $R_i - R_r = 0$ 而得 $\Sigma V = 0$, 又因 $R_i = R_r$, 故 $M_i = M_r$ 而得 $\Sigma M = 0$, 此梁木庶得維持於均衡。

$$\text{又證} \quad A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$\underbrace{A - P_1}_{R_i} = \underbrace{P_2 + P_3 + P_4 - B}_{R_r}$$

$$M_i = M_r$$

故欲推算梁木之某處斷面上所產生之彎曲力距及斷面橫力, 依據上述, 採用該斷面之左段或右段梁木均可, 惟為演算上便利起見, 以採用外力較少之一段為宜。

(2) 彎曲力距之圖解

梁木任何斷面上所產生之彎曲力距，假定為 D 點斷面上之彎曲力距 M_D ，依照本書第二章第五節所示，應為 $M_D = H \cdot y$ ，此間 H 為副圖中極點與合力間之垂直距離，其單位為 kg (依照力比例尺)， y 為正圖中第一與末一射線之並行線與經過 D 點所繪並行於合力之線之交點間距離，其單位為 cm (依照正圖之比例尺)，為求演算上之便利起見， H 之距離以擇一整數為宜。

此間 H 為不變之數，梁木上各斷面所有彎曲力距之大小，乃因 y 之大小而異，是即 y 之大小可以直接表示彎曲力距之大小，故正圖中射線並行線 $s_0, s_1, s_2, s_3 \dots$ 與閉合線 s 所構成之多角形，稱之為彎曲力距面積 (Momenten äche) 可也 (第 123 圖)。

如第 123 圖所示者，該梁木最大之彎曲力距在 P_2 力着點之下，即在與閉合線 s 相並行之最外切線上，此最外切線，有時亦可與多角形之一邊相併合，是即鄰近兩力間之任何斷面，皆可得該梁木之最大彎曲力距也。

土木工程中梁木斷面之計算，其第一步即為此最大彎曲力距之推求。

(3) 斷面橫力之圖解

梁木任何斷面上所產生之斷面橫力，應等於該斷面之左段或右段梁木上諸力之合力，各斷面橫力之大小，每遇單力之着點

處始有突然變動，在鄰近兩力間之任何斷面，其斷面橫力之大小必相等。

梁木之斷面橫力，亦可製圖以表示之，是為斷面橫力面積 (Querkraftsfläche)，猶彎曲力距之有彎曲力距面積也，其法在 A 與 B 之間 (即支點上抵抗力趨向之間)，繪一水平線，是為零軸 (Nullachse)，然後在每一斷面下繪一垂直線，線之長短應即等於各該斷面橫力之大小，在零軸之上者為正，在零軸之下者為負，因無窮比鄰之斷面而得無窮代表斷面橫力之垂直線，因無窮比連之垂直線，而得構成一平面圖案，此平面圖案，即斷面橫力面積是也。

如第 123 圖所示者，左端之支點上祇有一外力為 A ，是即該點上之斷面橫力 $V = A$ ，乃依照力比例尺在零軸之 A 端上繪一垂直線，因 A 為正，故該垂直線應繪於零軸之上，在 A 與 P_1 間一段梁木上，任何斷面之斷面橫力應 $= A$ 而不變，故 A 與 P_1 兩力間之斷面橫力面積應為一長方形，至 P_1 力之着點下其斷面橫力始有突然變動，即此處之斷面橫力 $V_1 = A - P_1$ ，在 P_1 與 P_2 其斷面橫力又應為 V_1 而不變，至 P_2 力之着點下乃變為 $V_2 = A - P_1 - P_2$ ，餘此類推，乃得

第一段 (A 與 P_1 之間) $V_1 = A$;

第二段 (P_1 與 P_2 之間) $V_2 = A - P_1$;

第三段 (P_2 與 P_3 之間) $V_3 = A - P_1 - P_2$;

第四段 (P_3 與 P_4 之間) $V_4 = A - P_1 - P_2 - P_3$;

第五段 (P_4 與 B 之間) $V_5 = A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = -B$.

細察此斷面橫力面積及彎曲力距面積，可以發現二大要點，(1) 斷面橫力最大之處，必為彎曲力距最小之處，或即彎曲力距 = 0 處，(2) 彎曲力距最大之處，必為斷面橫力最小之處，或即斷面橫力 = 0 處，力學上最大彎曲力距之推求，多利賴之。

例題 29 設第 123 a/b 圖中之 $P_1 = 540$ kg, $P_2 = 630$ kg, $P_3 = 450$ kg, $P_4 = 270$ kg, 正圖之比例尺為 1:200, 力比例尺為 1 cm = 400 kg, $H = 600$ kg.

解 由圖解得知該梁木之最大彎曲力距應在 P_2 之下，此間斷面橫力為 0。

$$M_1 = H \cdot y_1 = 600 \times 1.97 \times 200 = 176400 \text{ kg cm.}$$

$$M_2 = H \cdot y_2 = 600 \times 2.32 \times 200 = 278400 \text{ kg cm} = M_{\max.}$$

$$M_3 = H \cdot y_3 = 600 \times 2.08 \times 200 = 249000 \text{ kg cm.}$$

$$M_4 = H \cdot y_4 = 600 \times 0.85 \times 200 = 102000 \text{ kg cm.}$$

支點上之 $M = 0$, 因 $y = 0$; 又得知各段斷面橫力如下:——

$$V_1 = A = 880 \text{ kg}, \quad V_2 = 340 \text{ kg}, \quad V_3 = -260 \text{ kg},$$

$$V_4 = -740 \text{ kg}, \quad V_5 = -1010 \text{ kg} = -B.$$

乙. 計算法

I. 支點擱支之力之計算

任何工程上各部之結構，必須在均衡狀態之下，故須適合下列三項公式之規定：——

$$(I) \quad \Sigma H = 0, \quad (II) \quad \Sigma V = 0, \quad (III) \quad \Sigma M = 0.$$

通常加於梁木上之外力，恆為垂直，因外力之垂直，其支點擱支之力亦作垂直之趨向，故無應用到公式 (I) $\Sigma H = 0$ 之必要，欲求支點擱支之力 A 及 B 之大小，祇須應用 (II) (III) 兩公式足矣。

根據公式 (II)，

$$\text{因} \quad A + B - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = 0,$$

$$\text{乃得} \quad A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4; \dots\dots\dots(\text{甲})$$

$$\text{或可寫作} \quad A + B = \Sigma P.$$

此間等式 (甲) 包含二個未知數 A 及 B ，故須再列第二等式後方可計算，此第二等式可根據力矩定理而列成之，即物體上諸力對於某一固定點所產生之力矩，其結數應等於零，為求計算上便利起見，此固定點應即選定於 A 力或 B 力上，庶二個未知數中，其一可因槓距 = 0 而無力矩產生，倘參照第 126 圖，設以 b 點為固定點。

$$\text{乃因} \quad A \cdot l - P_1 \cdot b_1 - P_2 \cdot b_2 - P_3 \cdot b_3 - P_4 \cdot b_4 = 0,$$

$$A \cdot l = P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3 + P_4 \cdot b_4;$$

$$\text{而得 } A = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot b_3 + P_4 \cdot b_4}{l} \dots\dots\dots (39)$$

今將等式 (39) 所得之 A , 代入等式 (甲), 即可確定 B 之大小, 或則再以 a 點為固定點, 而列成等式 (40) 如下:—

$$B \cdot l - P_1 \cdot a_1 - P_2 \cdot a_2 - P_3 \cdot a_3 - P_4 \cdot a_4 = 0,$$

$$B = \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3 + P_4 \cdot a_4}{l} \dots\dots\dots (40)$$



第 126 圖

由公式 (40) 以算得 B 之大小, 然後將公式 (39) 及 (40) 所得之 A 及 B , 代入等式 (甲), 可資校對。

II. 斷面橫力之計算

斷面橫力之計算, 已詳前文, 即梁木之第一段上在 A 與 P_1 之間者, 其斷面橫力 $V_1 = A$, 在 P_1 與 P_2 間之第二段上, 應為 $V_2 = A - P_1$, 於 P_2 之下斷面橫力正負過渡之處, 即 $V_D = 0$ 處, 應即為該梁木最大彎曲力距所在之斷面也。

III. 彎曲力距之計算

彎曲力距之計算，已詳前文，即梁木任何斷面上所產生之彎曲力距，應為該斷面之左段或右段梁木上諸力對於此斷面重心點所產生之力距之結數，例如按照第 126 圖可得如下：——

倘以 I 為固定點，則 $M_1 = A \cdot a_1 - P_1 \cdot 0 = A \cdot a_1$ ；(第 127 圖)

倘以 II 為固定點，則 $M_2 = A \cdot a_2 - P_1(a_2 - a_1)$ ；(第 128 圖)

倘以 III 為固定點，則 $M_3 = A \cdot a_3 - P_1(a_3 - a_1) - P_2(a_3 - a_2)$ ；

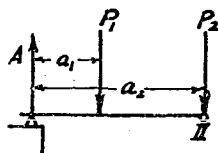
(第 129 圖)

或 $M_3 = B \cdot b_3 - P_4(b_3 - b_4)$ ；(第 130 圖)

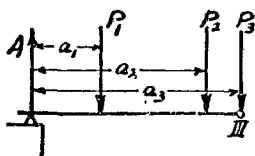
倘以 IV 為固定點，則 $M_4 = B \cdot b_4$ 。(第 131 圖)



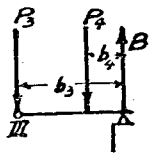
第 127 圖



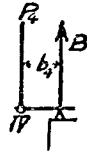
第 128 圖



第 129 圖



第 130 圖



第 131 圖

例題 30 設如第 123 圖所示之梁木，倘 $P_1 = 540$ ， $P_2 = 630$ ， $P_3 = 450$ ， $P_4 = 270$ kg，可依照上法以演算之如下。

(1) 支點間支力之計算

$$A + B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4,$$

$$A + B = 540 + 630 + 450 + 270 \text{ kg},$$

$$A + B = 1890 \text{ kg},$$

倘以 B 爲固定點，則

$$A \cdot 900 - 540 \times 700 - 630 \times 400 - 450 \times 300 - 270 \times 100 = 0,$$

$$A = 880 \text{ kg}.$$

倘以 A 爲固定點，則

$$B \cdot 900 - 540 \times 200 - 630 \times 500 - 450 \times 600 - 270 \times 800 = 0,$$

$$B = 1010 \text{ kg}.$$

(2) 斷面橫力之計算

梁木之第一段： $V_1 = A = +880 \text{ kg};$

梁木之第二段： $V_2 = A - P_1 = 880 - 540 = +340 \text{ kg};$

梁木之第三段： $V_3 = A - P_1 - P_2 = 880 - 540 - 630$

$$= -290 \text{ kg};$$

梁木之第四段： $V_4 = A - P_1 - P_2 - P_3 = 880 - 540 - 630$

$$- 450 = -740 \text{ kg};$$

梁木之第五段： $V_5 = A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = -B$

$$= -1010 \text{ kg}.$$

在 P_2 力處爲斷面橫力正負過渡之處，故該處爲最大彎曲

力距所在之斷面。

(3) 彎曲力距之計算

倘以 I 爲固定點 (第 127 圖):

$$M_1 = A \cdot 200 = 880 \times 200 = 176000 \text{ kg cm.}$$

倘以 II 爲固定點 (第 128 圖):

$$\begin{aligned} M_2 &= A \cdot 500 - P_1 \cdot 300 = 880 \times 500 - 540 \times 300 \\ &= 278000 \text{ kg cm} = M_{n.ox}. \end{aligned}$$

倘以 III 爲固定點 (第 129 圖):

$$\begin{aligned} M_3 &= A \cdot 500 - P_1 \cdot 400 - P_2 \cdot 100 = 880 \times 500 - 540 \times 400 \\ &\quad - 630 \times 100 = 249000 \text{ kg cm.} \end{aligned}$$

但此 M_3 之計算, 以應用右段梁木爲簡便 (第 130 圖), 卽如

$$\begin{aligned} M_3 &= B \cdot 300 - P_4 \cdot 200 = 1010 \times 300 - 270 \times 200 \\ &= 249000 \text{ kg cm.} \end{aligned}$$

倘以 IV 爲固定點 (第 126 圖):

$$\begin{aligned} M_4 &= A \cdot 800 - P_1 \cdot 600 - P_2 \cdot 300 - P_3 \cdot 200 \\ &= 880 \times 800 - 540 \times 600 - 630 \times 300 - 450 \times 200 \\ &= 101000 \text{ kg cm.} \end{aligned}$$

但此 M_4 之計算, 亦以應用右段梁木爲簡便 (第 140 圖). 卽如

$$M_4 = B \cdot 100 = 1010 \times 100 = 101000 \text{ kg cm.}$$

IV. 計算法之順序

支持於兩端之梁木，其計算法之步驟，應如下列順序。

1. 梁木上外力之確定。
2. 支點上擱支力之計算。
3. 斷面橫力之計算，以求得最危險之斷面。
4. 彎曲力距之計算，以求得最大彎曲力距。
5. 梁木斷面尺度之確定（屬於材料強弱等範圍）。

二. 受單力承重之有特殊情形者

甲. 獨力承重之梁木

I. 圖解法

祇受一力承重之梁木，其圖解之法已詳示於第 132 a/b 圖中，毋容贅述，照得此間最危險斷面，應在 P 力之下，因最大彎曲力距 M_{max} 亦在此 P 力之下， $M_{max} = H \cdot y_{max}$ 。

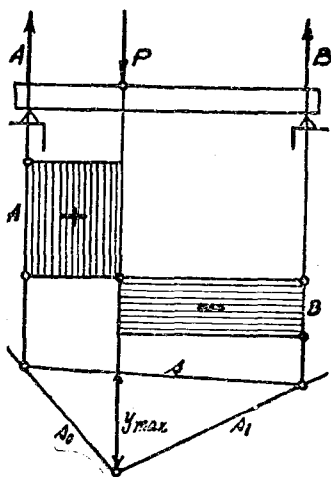
II. 計算法

(1) 支點上擱支力之計算 (第 133 圖)。

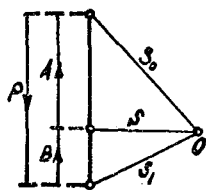
因 $\Sigma V = 0$ ，故 $A + B = P$ 。

因 $\Sigma M = 0$ (以 B 為固定點)，則 $A \cdot l - P \cdot b = 0$ ，故 $A = \frac{P \cdot b}{l}$ 。

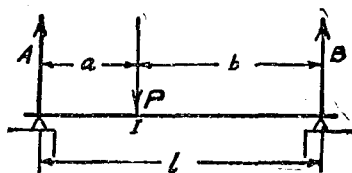
以 $\Sigma M = 0$ (以 A 為固定點)，則 $B \cdot l - P \cdot a = 0$ ，故 $B = \frac{P \cdot a}{l}$ 。



第 132(a) 圖



第 132(b) 圖



第 133 圖

上列第一式可資校對之用。

(2) 斷面橫力之計算

梁木之第一段： $V_1 = A$ ；

梁木之第二段： $V_2 = A - P_1$ 或 $V_2 = -B$ 。

由上列之等式，可知 $A - P_1 = -B$ 。

因 P 力之下為斷面橫力正負過渡之處，故該處斷面為最危險之斷面。

(3) 最大彎曲力距之計算。

倘應用左段梁木而以 I 為固定點時（第 134 圖），則

$$M_{max} = A \cdot a.$$

但因 $A = \frac{P \cdot b}{l},$

故 $M_{max} = \frac{P \cdot b}{l} \cdot a = \frac{P \cdot a \cdot b}{l} \dots \dots \dots (41)$

倘應用右段梁木，亦可得

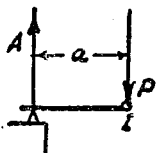
$$M_{max} = B \cdot b = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}.$$

該梁木所受最大彎曲力距之大小，將視 P 力之地位而定，細察公式 (41)，可知倘此單力位於梁木之中點，則該梁木將承受最大之彎曲力距。

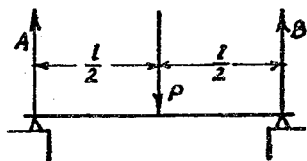
因倘 $a = b = \frac{l}{2};$

則 $A = B = \frac{P}{2},$

$$M_{max} = A \cdot \frac{l}{2} = \frac{P \cdot l}{4} \dots \dots \dots (42)$$



第 134 圖

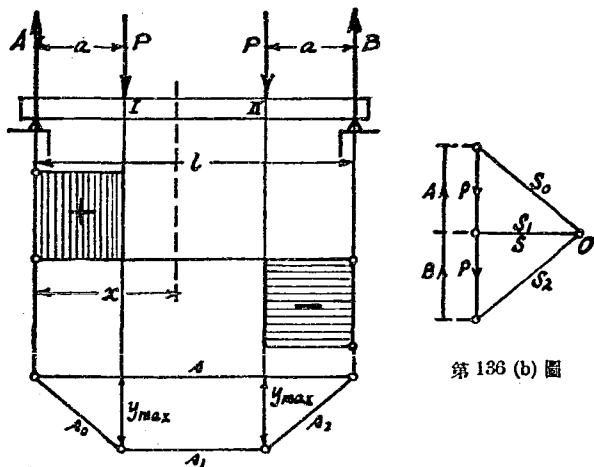


第 135 圖

乙. 梁木之受相等兩單力承重,

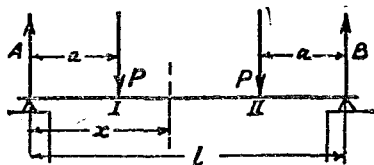
且各單力與支點之距離亦相等者,

I. 圖解法 (詳第 136 a/b 圖)



第 136 (b) 圖

第 136 (a) 圖



第 137 圖

II. 計算法

(1) 支點上擱支力之計算。

因 $\Sigma V = 0$, 故 $A + B = P + P = 2P$.

因承重方式為左右相對稱, 乃知 $A = B$,

故 $2A = 2P$,

$$A = P.$$

倘應用公式 $\Sigma M = 0$, 亦可得同一結果, 如以第 137 圖中 B 為固定點, 則可得

$$A \cdot l - P(l - a) - P \cdot a = 0,$$

$$A \cdot l - P \cdot l + P \cdot a - P \cdot a = 0,$$

$$A \cdot l = P \cdot l,$$

$$A = P.$$

(2) 斷面橫力之計算

梁木之第一段: $V_1 = A$;

梁木之第二段: $V_2 = A - P = A - A = 0$;

梁木之第三段: $V_3 = -B$.

此間在梁木之第二段上, 任何斷面之斷面橫力 = 0, 即任何斷面之彎曲力距為最大彎曲力距。

(3) 彎曲力距之計算

P 力下之彎曲力距, 在左邊者為 $M_1 = A \cdot a$, 在右邊者為

$$M_2 = B \cdot a,$$

但因 $A = B = P,$

故 $M_1 = P \cdot a; M_2 = P \cdot a.$

倘再在第二段梁木上任擇一斷面，其與 A 之距離為 x (第 137 圖)，則

$$M_x = A \cdot x - P \cdot (x - a). \quad \text{但因 } A = P;$$

$$M_x = P \cdot x - P \cdot x + P \cdot a;$$

$$M_x = P \cdot a.$$

故在梁木之第二段上，任何斷面均得最大彎曲力距 $M_{max} = P \cdot a.$

第三節 支持於兩端梁木之受均佈承重者

甲. 圖解法

梁木上之均佈承重，可以分爲若干相等之小段，以各小段經過重心之重力，代表該梁木全部之均佈承重。

I. 支點間支力之推算

倘應用本章第二節所示之圖解法，以推求支點間支力，則必得 $A = B$ ，將全部均佈承重用 Q 以代表之，則得

$$A = B = \frac{Q}{2}.$$

但爲計算上便利計，此項均佈承重，例用梁木之長度單位

上所承受之若干重量以代表之，即用 $q = \frac{Q}{l}$ (第 138 圖)，此間 l 之單位例為公分 (cm)，故 q 之單位為每公分所承受之公斤，即 kg/lfd. cm (Kg für einen laufenden Centimeter).

$$\text{因 } Q = q \cdot l, \text{ 乃得 } A = B = \frac{q \cdot l}{2}.$$

II. 斷面橫力之推算

倘此均佈承重，如上文所述，用若干經過相等小段重心之單力以代表之，則該梁木之斷面橫力面積必在零軸之上下作梯級狀展拓，如所分之相等小段愈多，即單力愈多，則此梯級狀之曲折愈小，倘將梁木上全部均佈承重分為無窮數相等小段時，是即造成無窮數相等單力，於是該斷面橫力面積一邊之梯級狀曲折乃亦成無窮之小，而成一斜直線。

$$\text{支點 } A \text{ 處之斷面橫力爲： } V_A = +A = +q \frac{l}{2}.$$

$$\text{支點 } B \text{ 處之斷面橫力爲： } V_B = -B = -q \frac{l}{2}.$$

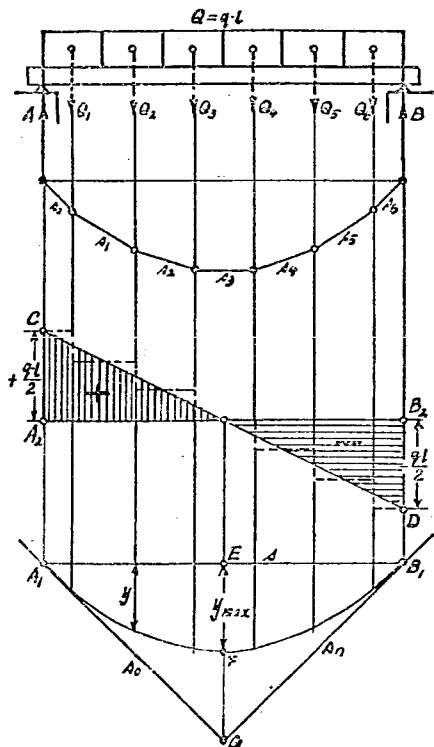
試繪 $A_2C = +\frac{ql}{2}$ 及 $B_2D = -\frac{ql}{2}$ ，再接繪直線 CD ，即成該梁木之斷面橫力面積，圖示居中斷面橫力 = 0，此處斷面應即為最危險之斷面 (第 139 圖)。

III. 彎曲力距之推算

倘將若干單力以代表均佈承重如第 133 圖所示者，則接繪

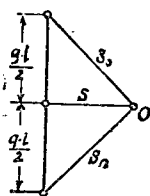
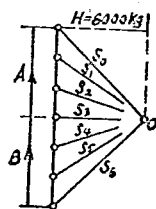
副圖中射線之並行線於正圖中，而得一多角形，此多角形即為彎曲力距面積，然因均佈承重可分為無窮數小段，而用無窮數單力以代表之，此多角形乃成為無窮數角之多角形，而形成一切於 s_0 及 s_n 之彎曲線（拋物線）[第 139 (b) 圖]，圖示最大彎

第 138 (a) 圖



第 139 (b) 圖

第 138 (b) 圖



第 139 (a) 圖

曲力距，位於梁之正中，其大小應為 $M = H \cdot y$ 。

作圖時應先在副圖中 Q 之平分點上繪一垂直線，在此垂直線上任擇一點為極點 O ，必如是，正圖中之結合線 s 方得成為水平線[第 139 (b) 圖]，最外兩射線之並行線 s_0 及 s_n 相交於 G 點，該兩線即為拋物線之切線， A_1 及 B_1 兩點即為其切點，繪 EG 垂直於 $A_1 B_1$ 乃得拋物線之頂點 F ，因此間 $EG = 2 \cdot EF = 2 \cdot y_{max}$ ，蓋 EF 為 y 中之最大者。

例題 31 設有梁木如第 138 圖所示者，倘 $Q = 12000 \text{ kg}$ ， $l = 12$ 公尺，試求 M_{max} 。

解 第 139 a/b 圖即按本題而作，圖中長度比例為 1:200，力比例為 $1 \text{ cm} = 4000 \text{ kg}$ 。

$$q = \frac{Q}{l} = \frac{12000}{1200} = 10 \text{ kg}; \quad H = 6000 \text{ kg};$$

$$\text{乃得 } A = B = \frac{ql}{2} = \frac{10 \times 1200}{2} = 6000 \text{ kg}$$

$$\text{及 } M_{max} = H \cdot y_{max} = 6000 \times 1.50 \times 200 = 1800000 \text{ kg cm.}$$

乙. 計算法

I. 支點間支力之計算

倘梁木之支點距為 l ，其上承重為 $q \text{ kg/lfm}$ ，則其全部承重應為

$$Q = q \cdot l.$$

因 Q 為均佈承重，平均分佈於梁木之全長者，故

$$A = B = \frac{Q}{2} = \frac{ql}{2}$$

II. 斷面橫力之計算

倘欲計算梁木上任何一斷面之斷面橫力，假定該斷面在與 A 相距 x 之 C 點處（第 140 圖），可先將 C 點之左段梁木另繪一圖，如第 141 圖，乃知加於該段梁木之外力應為支點間支力 A 及均佈承重 $q \cdot x$ ，因之

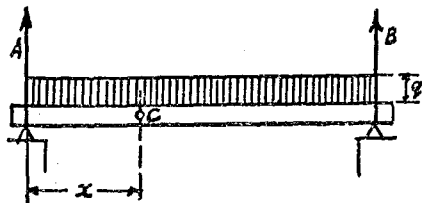
$$V = A - q \cdot x \dots \dots \dots (\text{甲})$$

$$V = \frac{ql}{2} - q \cdot x,$$

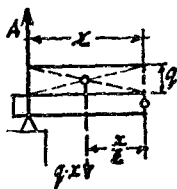
$$V = q \left(\frac{l}{2} - x \right) \dots \dots \dots (43)$$

欲求該梁木之最危險斷面，可將上列等式（甲）寫作 $V = 0$ ，

即
$$0 = q \left(\frac{l}{2} - x \right).$$



第 140 圖



第 141 圖

但此間 q 已知其不能 $=0$, 故 $\left(\frac{l}{2} - x\right)$ 必須 $=0$, 方可使兩數之積 $=0$.

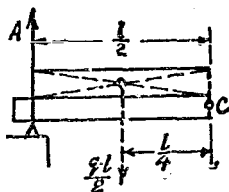
乃得
$$x = \frac{l}{2}.$$

是即證明該梁木之最危險斷面, 應在梁木全長之平分點處也。

III. 彎曲力距之計算

已知最危險斷面之所在, 乃知該梁木之最大彎曲力距必在其全長之平分點處, 計算時可先將此半截梁木另給一圖, 如第 142 圖, 乃知加於該段梁木之外力應為支點間支力 A 及均佈承重 $q \cdot \frac{l}{2}$, 因之

$$\begin{aligned} M_{max} &= A \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} \\ &= \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} \\ &= \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8}, \end{aligned}$$



第 142 圖

乃得
$$M_{max} = \frac{q \cdot l^3}{8}$$

但因 $Q = q \cdot l,$

故
$$M_{max} = \frac{Q \cdot l}{8} \dots \dots \dots (44)$$

倘欲求梁木上任何一點之彎曲力距，假定即第 140 圖中 C 點處之彎曲力距，則

$$\begin{aligned} M_x &= A \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} \\ &= \frac{ql}{2} \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} \\ &= \frac{qx}{2} (l - x). \dots\dots\dots(45) \end{aligned}$$

就上式中，倘 $x=0$ 或 $x=l$ ，則均為 $M_x=0$ ，倘 $x=\frac{l}{2}$ ，則亦可得

$$M_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8}.$$

第四節 支持於兩端梁木之受局部均佈承重者

力之連續分佈於梁木上之一段，在該段上作均佈之承重者，謂為局部均佈承重，如有門洞隔牆之加於閘柵者是，其解算之法，類與第三節所述大致相同，即該局部均佈之重力可用單力以代表之。

甲. 圖解法

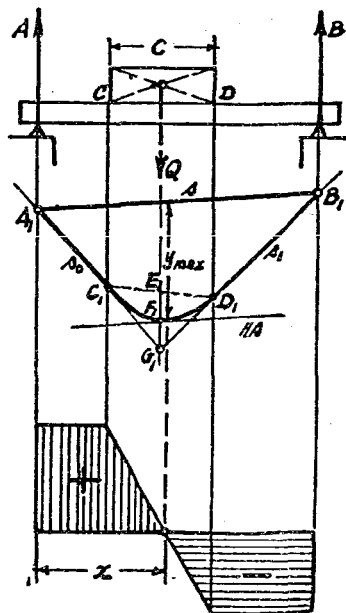
設有梁木受局部均佈之重力 Q ，其每 cm 之承重為 q ，於是應為 $q = \frac{Q}{C}$ [第 143 (a) 圖].

I. 支點間支力之推算

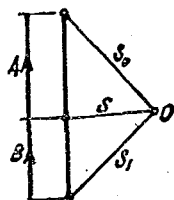
倘以單力代表此局部均佈承重 Q , 乃可依照本章第二節所示之圖解法, 引回射線並行線之閉合線 s 於副圖中, 即得 A 及 B 之大小 [第 143 (b) 圖].

II. 斷面橫力之推算

將梁木全長分爲若干段, 照第 143 (a) 圖所示之情形, 則可



第 143 (a) 圖



第 143 (b) 圖

分爲三段。先推求各該段起點與終點處之斷面橫力，以推求所得，按照力比例尺，垂直繪於零軸上各點處之或上或下，然後將各該垂直線之終端相接連，即成所欲得之斷面橫力面積，照第 143 (a) 圖應爲

第一段： A 與 C 間之一段， $V_1 = A$ ，故 AC 之間爲一水平線。

第二段： C 與 D 間之一段， V 愈趨愈小，由正而負，至終點 D 處之 $V_D = A - Q$ 或 $= -B$ ，故 CD 之間爲一斜直線。

第三段： D 與 B 間之一段， $V_3 = -B$ ，故 DB 之間又爲一水平線。

圖示該梁木最危險斷面，應在第二段中。

III. 彎曲力距之推算

先假定此局部均佈承重 Q 以單力代表之，而繪彎曲力距面積如本章第二節所述者，然後在 C_1 與 D_1 間，即受局部均佈承重之一段，改繪爲拋物線，此間 C_1 及 D_1 均爲該拋物線之切點， F_1 爲 E_1G_1 之等分點，應即爲該段拋物線之頂點。

梁木上任何一處之彎曲力距應爲 $M = H \cdot y$ ，使繪一切線與 \S 相並行，在此線與拋物線相切之處即得 y_{max} ，於是乃得 M_{max}

$$= H \cdot y_{max}$$

乙. 計算法

I. 支點間支力之計算

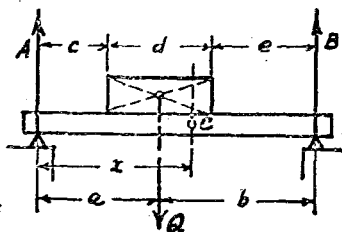
假定此局部均佈承重 Q 以單力代表之(第 144 圖), 乃可依本章第二節所述之計算法求

得:

$$A = \frac{Q \cdot b}{l}; \quad B = \frac{Q \cdot a}{l}; \quad A + B = Q.$$

II. 斷面橫力之計算

欲計算梁木上任何一斷面



第 144 圖

之斷面橫力, 可假設將該梁木

在該斷面上分為兩截, 乃應用其左段或右段梁木以求得此斷面上斷面橫力之大小及性質。

此間如第 144 圖所示之梁木, 第一段終點處之斷面橫力 $V_1 = +A$, 第二段終點處之斷面橫力 $V_2 = A - Q = -B$, 故其最危險之斷面應在第二段間。

今試在第二段間任擇一斷面 C , 該斷面與 A 之距離為 x , 假設將梁木在 C 處截斷, 查得加於左段梁木之外力, 乃為支點間支力 A 及局部均佈重力 $q \cdot (x - c)$ (第 145 圖), 乃知 C 處之斷面橫力為

$$Q_x = A - q(x + c).$$

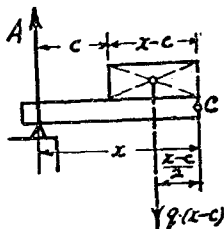
在最危險之斷面上, 其斷面橫力應為 $Q_x = 0$, 乃得

$$A - q(x - c) = 0,$$

$$A = q \cdot x - q \cdot c,$$

$$x = \frac{A + q \cdot c}{q},$$

$$x = \frac{A}{q} + c.$$



第 145 圖

細察上式，可知 x 必 $>c$ 而 $<c+d$ 。

III. 彎曲力距之計算

x 既經確定，乃以 C 點為固定點，即可得最大彎曲力距如下：

$$M_{\max} = A \cdot x - q(x-c) \cdot \frac{x-c}{2}.$$

此間 x 應等於 $\frac{A}{q} + c$ 。

例題 32 設有如第 145 圖所示之梁木，其上承重為 2 磚厚之磚牆一道，長 3 公尺，高 4 公尺，倘每立方公尺磚牆重量以 1800 公斤計算，試推算最危險斷面所在及其最大彎曲力距。

甲. 圖解法

$$Q = 3.0 \times 4.0 \times 0.53 \times 1800 = 11000 \text{ 公斤.}$$

本節第 143 a/b 圖，即依此題而作，該圖長度比例為 1:200，力比例為 1 cm = 4000 kg，由該圖可得 $A = 6190 \text{ kg}$ ； $B = 4810 \text{ kg}$ ； $H = 5000 \text{ kg}$ ；及

最危險斷面與 A 之距離 $x = 369$ cm,

$$M_{max} = H \cdot y_{max} = 5000 \times 1.75 \times 200 = 1750000 \text{ kg cm.}$$

乙. 計算法

因 $Q = 11000$ kg, 故 $q = \frac{11000}{300} = 36.67$ kg/lfd. cm.

I. 支點攔支力之計算

應用均衡定律第三公式, 倘以 B 為固定點 (第 146 圖), 乃得

$$A \cdot 800 - 11000 \cdot 450 = 0,$$

$$A = \frac{11000 \times 450}{800} = 6190 \text{ kg.}$$

倘以 A 為固定點, 可得

$$B \cdot 800 - 11000 \times 350 = 0,$$

$$B = \frac{11000 \times 350}{800} = 4810 \text{ kg.}$$

校對: $A + B = Q$; $6190 + 4810 = 11000$ kg.

II. 斷面橫力之計算

在第一段梁木之斷面橫力 $= A = +6190$ kg.

在第三段梁木之斷面橫力 $= B = -4810$ kg.

故最危險斷面必在第二段梁木間.

在第二段間任擇一斷面, 離 A 為 x (第 147 圖), 乃得

$$Q_x = 6190 - q \cdot (x - 200).$$

倘該斷面為最危險之斷面，則應 $Q_x = 0$ ，乃得

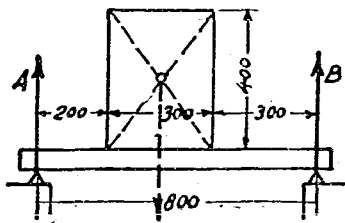
$$6190 - q(x - 200) = 0, \quad q = 3.667 \text{ kg/cm},$$

$$6190 = 36.67(x - 200),$$

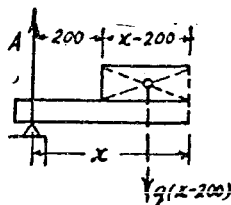
$$x = \frac{6190}{36.67} + 200 = 169 + 200,$$

$$x = 369 \text{ cm}.$$

故知該梁木之最危險斷面應在距離支點A，計369cm之處。



第 146 圖



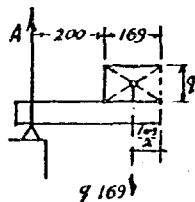
第 147 圖

III. 彎曲力距之計算

依上所得，可繪成第 148 圖，在最危險斷面處之彎曲力距，應即為最大彎曲力距，計算如下：

$$M_{\max} = 6190 \times 369 - 36.67 \times 169 \times \frac{169}{2},$$

$$M_{\max} = 1760000 \text{ kg cm}.$$



第 148 圖

第五節 支持於兩端梁木之受混合承重者

梁木之除受均佈承重外，同時再受其他重力，如單力及局部均佈承重者，是謂混合承重。

因梁木必有其自身重量，故各梁木上必有均佈力，然因此自身重量較諸其他加於此梁木之重力至為輕微，故演算時或可略而不計。

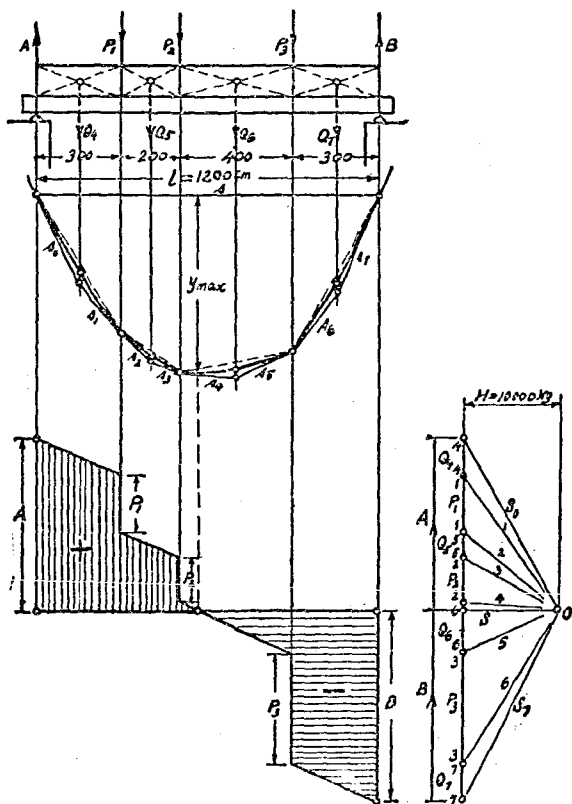
甲. 圖解法

是類樑木之圖解，有下列二法：

(其一) 先就單力所在之處，分梁木全長為若干段，將各段上之均佈承重用單力以代表之，乃就圖中所示單力與均佈承重力之次序，合併繪射線副圖，再在正圖上接繪副圖中射線之並行線，而將各段下之折線改為拋物線，如此所得之圖案，即為該梁木之彎曲力距面積(第 149 圖)。

引繪上圖中閉合線 s 之並行線 S 於副圖中， A 及 B 之大小因之確定，其次依法求得各單力下之斷面橫力，將 A , B 及各單力之斷面橫力垂直繪於零軸之上下，接連各該垂直線之終端，即為該梁木之斷面橫力面積(第 149 圖)。

(其二) 此法將單力承重與均佈承重分開，應用同一比例尺製繪各該種承重之斷面橫力面積與彎曲力距面積，然後將所

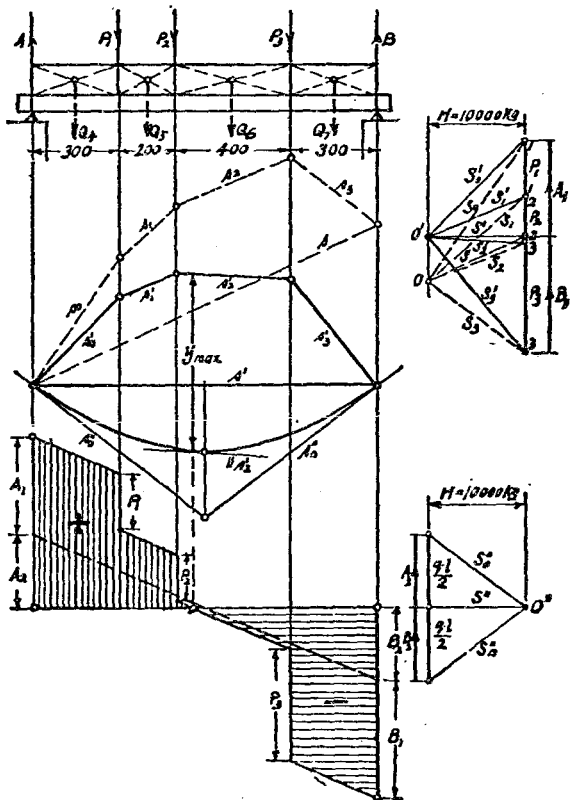


第 149 圖

得之各面積，就同類者併合之，即得該梁木之斷面橫力面積及彎曲力距面積（第 150 圖）。

此間所應注意者：(1) 分次作圖時所採用之極點距離 H 必

須相等，(2) 應用於圖解單力及均佈承重彎曲力距之極點，其地位須左右相反，(3) 須使二種不同彎曲力距面積之閉合線 s' 及 s 均為水平線，凡此皆所以利該兩面積之併合也。



第 150 圖

乙. 計算法

I. 支點攔支力之計算

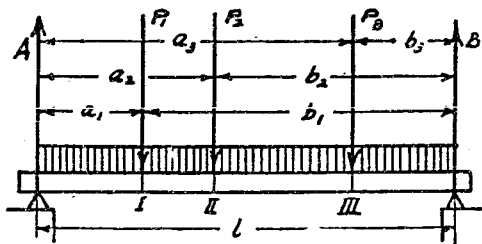
$$A = \frac{q \cdot l}{2} + \sum \frac{P \cdot b_i}{l}; \quad B = \frac{q \cdot l}{2} + \sum \frac{P \cdot a_i}{l}.$$

(倘有局部均佈承重時, 可用單力 P 以代表之)

校對: $A + B = q \cdot l + \sum P.$

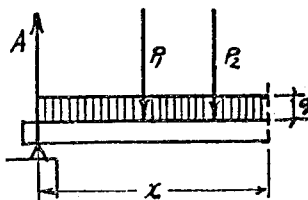
II. 斷面橫力之計算

試檢查各單力前後之斷面橫力 (第 151 圖), 倘 P_2 力以前之斷面橫力為 $V_2 = A - P_1 - q \cdot a_2 > 0$, 而 P_2 力以後即為 $V_3 = A - P_1 - P_2 - q \cdot a_2 < 0$, 則其最危險斷面必在 P_2 力處。



第 151 圖

倘 P_2 力以後之斷面橫力為 $V_3 = A - P_1 - P_2 - q \cdot a_2 > 0$, 而 P_3 力以前之斷面橫力為 $V_4 = A - P_1 - P_2 - q \cdot a_3 < 0$, 如是則其最危險斷面必不在單力之下而



第 152 圖

定在 P_2 與 P_3 兩力之間也 (參看第 149 及第 150 圖)。

第三段梁木上任何一斷面之斷面橫力應為 (第 152 圖)

$$Q_x = A - P_1 - P_2 - q \cdot x \quad \dots\dots\dots(\text{甲})$$

倘該斷面為最危險斷面，則應為

$$Q_x = A - P_1 - P_2 - q \cdot x = 0,$$

$$x = \frac{A - P_1 - P_2}{q} \quad \dots\dots\dots(\text{乙})$$

III. 彎曲力距之計算

倘知最大彎曲力距在 P_2 力之下 (第 153 圖)，則應為

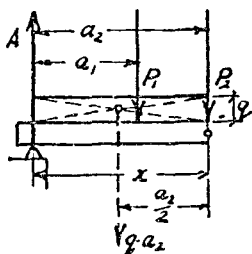
$$M_{max} = A \cdot a_2 - P_1(a_2 - a_1) - q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2}.$$

倘知最大彎曲力距在 P_2 與 P_3 兩力之間 (第 154 圖)，則應

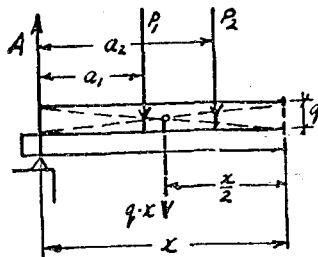
為

$$M_{max} = A \cdot x - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2) - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}.$$

此間 x 應以等式 (乙) 所得結果代入之。

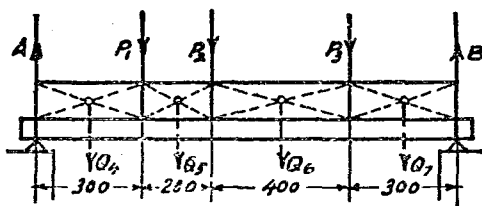


第 153 圖



第 154 圖

例題 33 設有如第 155 圖所示之梁木，其所受單力承重為 $P_1 = 6000 \text{ kg}$ ， $P_2 = 4800 \text{ kg}$ ， $P_3 = 12000 \text{ kg}$ ，均佈承重為 $Q = 15600 \text{ kg}$ ，即為 $q = \frac{15600}{1200} = 13 \text{ kg/lfd. cm}$ 。試求其最危險斷面所在及其最大彎曲力距。



第 155 圖

甲. 圖解法

第 149 圖即按本題而作，圖中長度比例為 1:200，力比例為 1 cm = 3000 kg， $H = 10000 \text{ kg}$ ，所得最危險斷面應在距離支點 A 計 $x = 562 \text{ cm}$ 之處，

$$M_{\max} = H \cdot y_{\max} = 10000 \times 3.15 \times 200 = 6300000 \text{ kg cm.}$$

第 150 圖亦按本題而作，惟所用之圖解法不同，但其結果應相同也。

第 156 圖中，除 $P_2 = 9600 \text{ kg}$ 外，其餘均與本題相同，此間最危險斷面應在 P_2 處，亦即最大彎曲力距所在之斷面也。

乙. 計算法

I. 支點擱支力之計算

依第 155 圖, 倘以 B 為固定點, 則

$$A \cdot 1200 - P_1 \cdot 900 - P_2 \cdot 700 - P_3 \cdot 300 - Q \cdot \frac{1200}{2},$$

$$A = \frac{6000 \times 900 + 4800 \times 700 + 12000 \times 300 + 15600 \times 600}{1200}$$

$$= 18100 \text{ kg.}$$

倘以 A 為固定點, 則

$$P_1 \cdot 300 + P_2 \cdot 500 + P_3 \cdot 900 + Q \cdot 600 - B \cdot 1200 = 0,$$

$$B = 20300 \text{ kg.}$$

校對: $A + B = Q + P_1 + P_2 + P_3,$

$$38400 = 38400.$$

II. 最危險斷面之計算

試檢查各單力前後之斷面橫力, 得知 P_2 力後之斷面橫力為

$$V_3 = A - P_1 - P_2 - q \cdot a_2 = 18100 - 6000 - 4800 - 13 \times 500$$

$$= +800 \text{ kg.}$$

但在 P_3 前之斷面橫力為

$$V_3 = A - P_1 - P_2 - q \cdot a_2 = 18100 - 6000 - 4800 - 13 \times 900$$

$$= -4400 \text{ kg.}$$

故知最危險斷面必在 P_1 與 P_2 兩力之間, 乃在該段梁木上

任擇一與支點 A 相距 x 之斷面，該斷面上之斷面橫力應為

$$V_x = A - P_1 - P_2 - q \cdot x = 0,$$

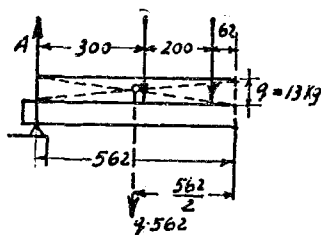
$$18100 - 6000 - 480 - 13 \cdot x = 0,$$

乃得 $x = 562 \text{ cm.}$

III. 最大彎曲力距之計算

既知最危險斷面在與支點 A 相距 $x = 562 \text{ cm}$ 之處，乃知
(第 156 圖)

$$M_{max} = 18100 \times 562 - 6000 \times 262 \\ - 4800 \times 62 - 13 \times 562 \times \frac{562}{2},$$



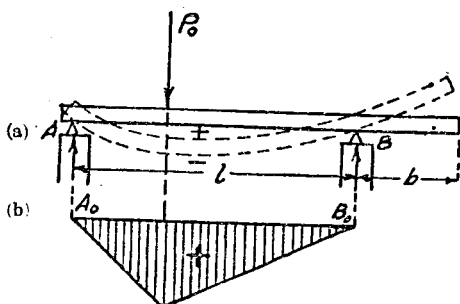
第 156 圖

$$M_{max} = 6249000 \text{ kg cm.}$$

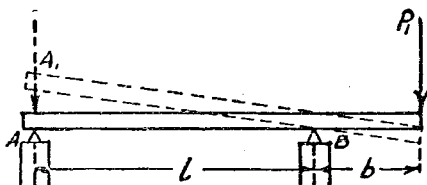
第六節 支持梁之一端突出者

梁木之自身重量，影響於梁木斷面之推算甚微，或可略而不計，前文已言之矣，故一端突出之支持梁，倘其上承重祇在 AB 之間者，則仍可應用上述之圖解及計算法，推算所得結果， A 及 B 兩支點上之擱支力必為 $+A_0$ 及 $+B_0$ 。又 AB 段梁木必將向下彎曲任何斷面必成上部受壓而下部受拉，其彎曲力距仍亦必為 $+M$ ，如第 157 a/b 圖所示者是也。

倘 AB 段上並無承重，而突出段上承受重力，如第 158 圖所示突出段上之 P_1 力，於是該梁木必將在 B 點上轉動，而使 A 端向上蹺起，該支點上攔支力乃必須為 $-A_1$ ，方可維持此梁木於均衡，凡此皆將於本節詳之。



第 157 圖



第 158 圖

(1) 突出段之受單力 P_1 承重者

I. 支點攔支力之計算

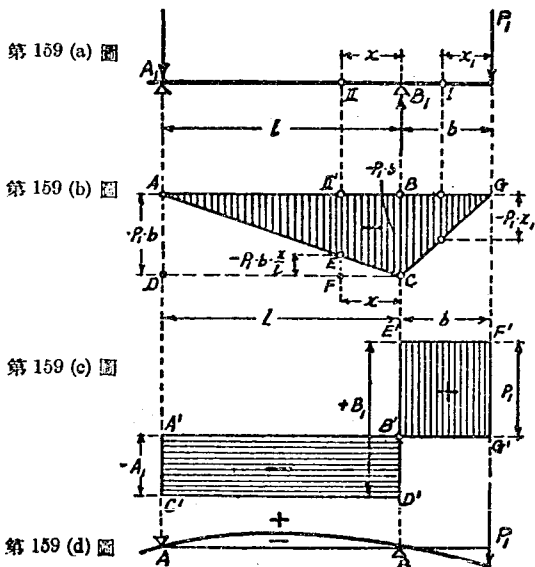
先行假定攔支力 A_1 之性質為向上者，應用均衡定律第三公式 $\Sigma M=0$ ，以 B 為固定點，可得：

$$A_1 \cdot l + P_1 \cdot b = 0;$$

$$-A_1 = +\frac{P_1 \cdot b}{l}.$$

此間所得為 $-A_1$ ，是乃指 A_1 之性質應與所假定者相反，即

應向下，如第 159 (a) 圖所示者，



$$A_1 = + \frac{P_1 \cdot b}{l}.$$

倘以 A 為固定點，可得

$$B_1 \cdot l - P_1(l + b) = 0; \quad B_1 = + \frac{P_1(l + b)}{l};$$

$$B_1 = P_1 + \frac{P_1 \cdot b}{l}.$$

此間所可注意者：(1) 擱支力 $B_1 > P_1$ ；(2) 突出段受力之結果，必使兩支點上之擱支力，成為近者正而遠者負。

倘應用 $\Sigma V = 0$ ，則為 $-A_1 + B_1 - P_1 = 0$ 或 $B_1 = A_1 + P_1$ ，
以 A_1 代入，亦可得 $B_1 = P_1 + \frac{P_1 \cdot b}{l}$ ，以資校對也。

II. 斷面橫力之計算

斷面橫力之推算，可應用第 159 (c) 圖所示之斷面橫力面積，圖示正負過渡之處在於 B ，故 B 處之彎曲力距應為該梁木之最大彎曲力距。

III. 彎曲力距之計算

(甲) 因 P_1 力而產生於突出段上之彎曲力距

在突出段上任擇一點，如 I ，與 P_1 相距 x_1 ，於是該點上所產生之彎曲力距應為

$$M_I = -P_1 \cdot x_1.$$

又 P_1 力之着點上所產生之彎曲力距，因 $x_1 = 0$ ，故

$$M_P = 0$$

又支點 B 上所產生之彎曲力距，因 $x_1 = b$ ，故

$$M_B = -P_1 \cdot b.$$

故此突出段上之最大彎曲力距應在支點 B 處，此種支點上之最大彎曲力距，有稱之曰支持力距 (Stützenmoment).

第 159 (b) 圖中之三角形 CBG ，即因 P_1 力而產生於突出段上之彎曲力距面積是也。

(乙) 因 P_1 力而產生於兩支點間之彎曲力距

在兩支點間任擇一點如 II, 與支點 B 相距 x , 於是該點上所產生之彎曲力距應為

$$M_x = -P_1 \cdot (b+x) + B_1 \cdot x.$$

因
$$B_1 = P_1 + \frac{P_1 \cdot b}{l},$$

故
$$M_x = -P_1 \cdot (b+x) + \left(P_1 + \frac{P_1 \cdot b}{l}\right) \cdot x,$$

$$M_x = -P_1 \cdot b + \frac{P_1 \cdot b}{l} \cdot x.$$

由上式可知 $M_x < M_B$.

倘 $x=0$, 則 $M_x = -P_1 \cdot x = M_B$.

倘 $x=l$, 則 $M_x = M_A = 0$.

第 159 (b) 圖中之三角形 ABC , 即因 P_1 力而產生於兩支點間之彎曲力距面積是也。

試由 A 點繪 $AD = -P_1 \cdot b$, 再將 C 與 D 相接連, 如是則

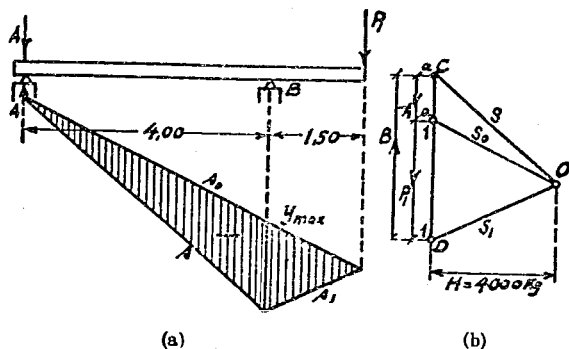
$$EF = -P_1 \cdot b \cdot \frac{x}{l}.$$

於是亦得 $II'E = II'F - EF = -P_1 \cdot b + \frac{P_1 \cdot b}{l} \cdot x = M_x$.

綜合(甲),(乙)所得兩三角形而成三角形 AGC [(第 159(b) 圖)], 是即因 P_1 力而產生於整個梁木之彎曲力距面積是也。

第 159 (d) 圖所以示該梁木受 P_1 力承重後之彈性變形線 (elastische Linie)。

例題 34. 設有一端突出之支持梁如圖示 [第 160 (a) 圖], 其支點距 $l = 4.0$ m, 突出段長 $b = 1.50$ m, 在突出段之終端受單力承重 $P_1 = 4000$ kg, 試求其支點攔支力及最大彎曲力距。



第 160 圖

解 假定長度比例 1:100, 力比例 1 cm = 200 kg, $H = 4000$ kg, 應用射線圖解法 (第 160 a/b 圖) 以求得

$$A = CA = 0.75 \times 2000 = 1500 \text{ kg,}$$

$$B = DC = 2.75 \times 2000 = 5500 \text{ kg.}$$

校對: $P_1 = B - A$, $P_1 = 5500 - 1500 = 4000$ kg.

由射線之並行線 s_0 , s_1 及閉合線 s 所構成之三角形, 即為該梁木之彎曲力距面積, 圖示 y_{max} 在支點 B 之下, 故得

$$M_B = M_{max} = H \cdot y_B = H \cdot y_{max},$$

$$M_{max} = 4000 \times 150 = 600000 \text{ kg cm.}$$

(2) 同時正段上受單力 P_0 及突出段上受單力 P_1 之承重者

所謂正段乃指兩支點間之一段梁木，下文依此)

設有梁木如圖示[第161(a)圖]， $P_0 = 4000 \text{ kg}$ ， $P_1 = 3000 \text{ kg}$ ，其支點擱支力及最大彎曲力距可依下法推算之。

I. 支點擱支力之計算

因 P_0 而所得之支點擱支力應為

$$A_0 = \frac{P_0}{2} = B_0 = 2000 \text{ kg.}$$

因 P_1 所得者，則為

$$A_1 = -\frac{P_1 \cdot b}{l} = -\frac{3000 \times 150}{400} = -1125 \text{ kg,}$$

$$B_1 = P_1 + \frac{P_1 \cdot b}{l} = 3000 + \frac{3000 \times 150}{400} = +4125 \text{ kg.}$$

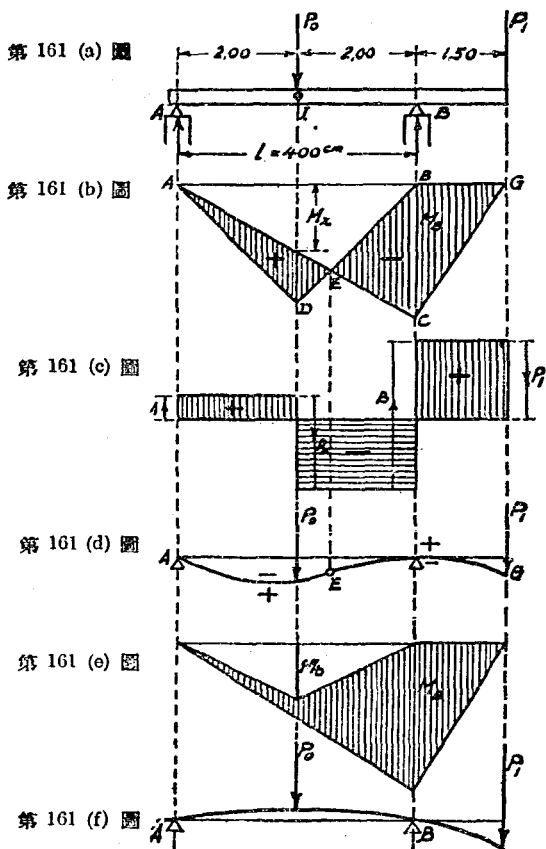
綜合由 P_0 及 P_1 所得，乃為

$$A = A_0 + A_1 = 2000 - 1125 = +875 \text{ kg,}$$

$$B = B_0 + B_1 = 2000 + 4125 = +6125 \text{ kg.}$$

II. 斷面橫力之計算

依據 P_0 ， P_1 ， A 及 B ，即可繪成斷面橫力面積如第161(c)圖



所示者，此間斷面橫力之穿過零軸者，即最危險之斷面，共有二處，圖示 I 及 B 處是也。

III. 彎曲力距之計算

在支點 B 上因 P_0 力而產生之彎曲力距 = 0, 因 P_1 力而產生之彎曲力距應為:

$$M_B = -P_1 \cdot b = -3000 \times 150 = -450000 \text{ kg cm.}$$

在 P_0 力之着點 I 上因 P_0 力而產生之彎曲力距為:

$$M_0 = \frac{P_0 \cdot l}{4} = \frac{4000 \times 400}{4} = +400000 \text{ kg cm.}$$

在該點在因 P_1 力而產生之彎曲力距為:

$$M_x = \frac{M_B}{2} = \frac{-450000}{2} = -225000 \text{ kg cm.}$$

故在該點上因 P_0 及 P_1 而產生之彎曲力距應為:

$$M_1 = M_0 + M_x = 400000 - 225000 = +175000 \text{ kg cm.}$$

第 161 (b) 圖中之 $\triangle ADB$ 為單力 P_0 之彎曲力距面積, $\triangle ACG$ 為單力 P_1 之彎曲力距面積, 正負彎曲力距過渡處之零點 E 應為該梁木彈性變形線凹凸過渡之點, 是即梁木之 AE 段作下彎, 其斷面上壓而下拉, EG 段作上彎, 其斷面上拉而下壓 [第 161 (a) 圖].

倘 $A_1 > A_0$, 則 $A = A_0 - A_1$ 為負數, AB 間彎曲力距乃均成負數, 即整個梁木之彎曲力距均為負數 [單力 P_0 之彎曲力距面積將包入於 P_1 之彎曲力距面積中, 如第 161 (c) 圖所示], 該梁木之最大彎曲力距乃祇為 M_1 , 據此可得規則如下:

凡突出段之支持梁，其計算方法，與支持於兩支點之普通梁木相同，惟須注意於彎曲力距之旋轉方向，倘兩支點上之擱支力同為正數時，則該梁木必有最大彎曲力距兩處，其一在一支點之上者為負數，其二在兩支點之間者為正數，於是其全長之彈性變形線上必有一上下彎曲過渡之點[第161 (e)圖]，倘兩支點上之擱支力有一為負數時，則該梁木祇有一負的最大彎曲力距，且必在突出段一端之支點上，其全長之彈性變形線，乃必只作向上凸彎之勢[第161 (f)圖]。

(3) 梁之全長受均佈承重者

設有受均佈承重之梁如圖示 [第162 (a)圖]，其支點距為 l ，突出段之長度為 b ，每 cm 之均佈承重為 q ，其支點擱支力斷面橫力及彎曲力距等可依下法計算之：

甲. 計算法

I. 支點擱支力之計算

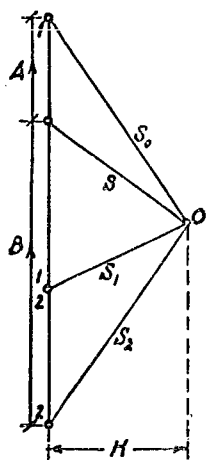
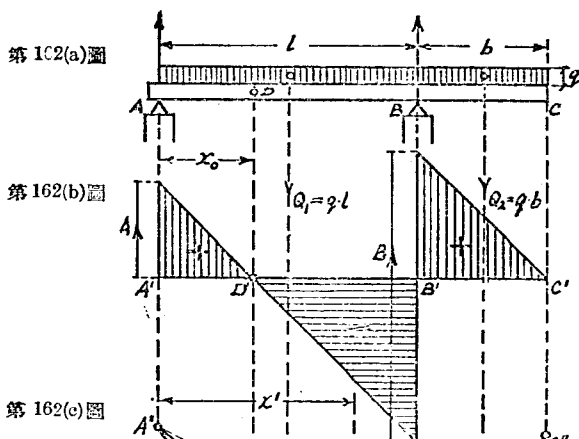
應用均衡定律而以 B 為固定點時，可得

$$A \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} + qb \cdot \frac{b}{2} = 0; \quad A = \frac{q}{2l}(l^2 - b^2) \dots \dots \dots (46)$$

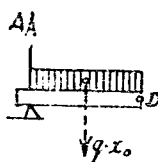
應用均衡定律而以 A 為固定點時，可得

$$B \cdot l - ql \cdot \frac{l}{2} - qb \cdot \left(l + \frac{b}{2} \right) = 0; \quad B \cdot l = ql \cdot \frac{l}{2} + qb \cdot l + \frac{qb^2}{2},$$

$$B = \frac{q}{2l}(l^2 + 2lb + b^2) = \frac{q}{2l}(l + b)^2 \dots \dots \dots (47)$$



第 162 圖



第 163 圖

倘 $l > b$ 時，則 A 為正數， $l < b$ 時，則 A 為負數。

II. 斷面橫力之計算

可將本題梁之全長，分為三段，求得各該段起點及終點處之斷面橫力，即可繪成斷面橫力面積如圖示 [第 162 (b) 圖]。

III. 最大彎曲力距之計算

圖示斷面橫力穿過零軸在 B 及 D 兩處，即示該樑有二個危險斷面，亦即示該梁應有二個最大彎曲力距：

其一，在支點 B 處，即支持距應為

$$M_B = -qb \cdot \frac{b}{2} = -\frac{q \cdot b^2}{2} \dots\dots\dots (48)$$

其二，在與支點 A 相距 x_0 之 D 點處，在該點上之斷面橫力應 = 0 (第 163 圖)，即

$$Vx_0 = A - qx_0 = 0; \quad A = q \cdot x_0;$$

$$x_0 = \frac{A}{q} = \frac{q(l^2 - b^2)}{q \cdot 2l} = \frac{l^2 - b^2}{2l};$$

故 $Mx_0 = A \cdot x_0 - qx_0 \cdot \frac{x_0}{2}$ 。但因 $A = q \cdot x_0$ ，

$$Mx_0 = q \cdot x_0^2 - qx_0^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{q \cdot x_0^2}{2},$$

$$Mx_0 = \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l^2 - b^2}{2l}\right)^2 = \frac{q}{8} \cdot \frac{(l^2 - b^2)^2}{l^2} \dots\dots\dots (49)$$

(乙) 圖解法

設有洋松過梁如圖示[第162(a)圖], $l = 4.00 \text{ m}$, $b = 2.00 \text{ m}$ 梁木間中到中距離為 1 m , 其上承受自身重量及益重合共為每平方公尺 5.0 kg . 圖解如第 162 (a)-(c) 圖, 該圖長度比例為 1 : 200, 力比例為 $1 \text{ cm} = 1000 \text{ kg}$.

此間支點擱支力 A 及 B , 應用射線多邊形圖解法以求得之.

第162(c)圖中之面積 $A''F'B''E'A''$ 為 AB 間一段梁木因受均佈承重而所得之彎曲力距面積, 其性質應為正, 又面積 $A''L'M''C''K''B''A''$ 為因受突出段上均佈承重而所得之彎曲力距面積, 其性質應為負, 正負相減乃得該梁木之彎曲力距面積如圖示, 此間

$$\bar{M}_{\text{net}} = H \cdot y_{\text{net}}; \quad \bar{M}_i = H \cdot y_B$$

第七節 支持梁之兩端突出者

(1) 受若干單力承重者

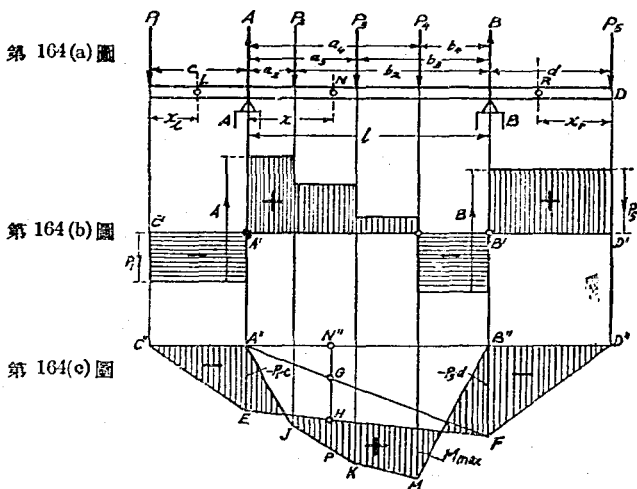
I. 支點擱支力之計算

設有兩端突出之支持梁如第 164 (a) 圖.

因突出段 c 上之 P_1 力而得支點擱支力 $+A_1$ 及 B_1 .

因突出段 d 上之 P_5 力而得支點擱支力 $-A_5$ 及 $+B_5$.

因正段上之 P_2, P_3 及 P_4 力而得支點擱支力 $+A_0$ 及 $+B_0$.



合以上三項支點攔支力而得整個之支點攔支力如下：

$$A = A_0 + A_1 - A_5; \quad B = B_0 - B_1 + B_5.$$

倘應用均衡定律之第三公式 $\Sigma M = 0$ ，而先後以 A 及 B 為固定點，亦可得同一結果。

校對：
$$A + B = \Sigma P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5.$$

II. 斷面橫力之計算

既得支點攔支力 A 及 B ，即可繪斷面橫力面積如第 164 (b) 圖。圖示斷面橫力穿過零軸凡三處，即該三處皆為最大彎曲力距所在之處，其中兩處即在兩支點上，另一處則在兩支點之間，即圖示在 P_4 力之着點處是也。

III. 彎曲力距之計算

在左邊突出段上任何一點 L 處之彎曲力距應為： M_L
 $= -P_1 \cdot x_l$, 該彎曲力距之大小與 x_l 成正比例, 故支點 A 處之彎
 曲力距應為:

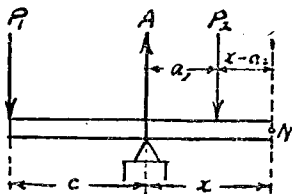
$$M_A = -P_1 \cdot c \quad [\text{第 164 (c) 圖}].$$

在右邊突出段上任何一點 R 處之彎曲力距應為： M_R
 $= -P_2 \cdot x_r$, 該彎曲力距之大小與 x_r 成正比例, 故支點 B 處之彎
 曲力距應為:

$$M_B = -P_2 \cdot d.$$

在正段上任何一點 N 處之彎曲力距, 倘以該點之左段為
 準(第 165 圖), 則應為:

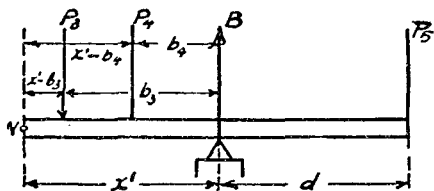
$$M_N = +A \cdot x - P_1 \cdot (c+x) - P_2 \cdot (x-a_2).$$



第 165 圖

倘以該點之右段為準(第 166 圖), 則應為:

$$M_Y = +B x' - P_6 (d+x') - P_3 \cdot (x' - b_3) - P_4 \cdot (x' - b_4).$$



第 166 圖

欲求支點上或任何一點上之彎曲力距，更有較為簡明之法，其法將突出段上所承受之 P_1 及 P_5 兩力與正段上所承受之諸力分開而各別演算之如下：

(a) 因 P_1 及 P_5 兩力之感應，在支點 A 上有攔支反力 A' 產生，試以 B 為固定點，可得

$$A' \cdot l - P_1 \cdot (c+l) + P_5 \cdot d = 0,$$

故
$$A' = +P_1 \cdot \frac{c+l}{l} - P_5 \cdot \frac{d}{l} \dots \dots \dots \text{(甲)}$$

因 P_1 及 P_5 兩力之感應，在正段上任何一點 N 處乃有彎曲力距 M'_n 產生，

$$M'_n = +A' \cdot x - P_1 \cdot (c+x) \dots \dots \dots \text{(乙)}$$

倘將由等式(甲)所得 A' 之值，代入等式(乙)，乃得

$$\begin{aligned}
 M'_x &= + \left(P_1 \cdot \frac{c+l}{l} - P_5 \cdot \frac{d}{l} \right) \cdot x - P_1 \cdot (c+x) \\
 &= \frac{P_1 \cdot cx}{l} + P_1 \cdot x - \frac{P_5 \cdot dx}{l} - P_1 \cdot c - P_1 \cdot x \\
 &= -P_1 \cdot c + \frac{P_1 \cdot cx}{l} - \frac{P_5 \cdot dx}{l} \\
 &= -P_1 \cdot c \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{P_5 \cdot dx}{l} \\
 &= -P_1 \cdot c \cdot \frac{l-x}{l} - P_5 \cdot d \cdot \frac{x}{l}
 \end{aligned}$$

但因 $l-x=x'$; $-P_1 \cdot c = M_A$; $-P_5 \cdot d = M_B$

$$\begin{aligned}
 \text{故} \quad M'_x &= -P_1 \cdot c \cdot \frac{x'}{l} - P_5 \cdot d \cdot \frac{x}{l} \\
 &= M_A \cdot \frac{x'}{l} + M_B \cdot \frac{x}{l}
 \end{aligned}$$

試繪 $A''E = M_A = -P_1 \cdot c$ 及 $B''F = M_B = -P_5 \cdot d$ ，再繪 $A''F$ 及 EF [第 164(c)] 圖，則圖示 $C''EFD''C''$ 為該梁上因 P_1 及 P_5 兩力之感應所產生之彎曲力距面積，其性質應為負，此間

$$N''H = N''G + GH \dots \dots \dots (\text{丙})$$

但因 $N''G : B''F = A''N' : A''B''$,

$$N''G : (-P_5 \cdot d) = x : l;$$

$$\text{故} \quad N''G = -P_5 \cdot d \cdot \frac{x}{l} \dots\dots\dots(\text{丁})$$

$$\text{又因} \quad GH : A'E = B'N'' : A'B'',$$

$$GH : (-P_1 \cdot c) = x' : l;$$

$$\text{故} \quad GH = -P_1 \cdot c \cdot \frac{x'}{l} \dots\dots\dots(\text{戊})$$

將(丁),(戊)代入(丙),乃亦得

$$N''H = M_n' = -P_1 \cdot c \cdot \frac{x'}{l} - P_5 \cdot d \cdot \frac{x}{l} = M_A \cdot \frac{x'}{l} + M_B \cdot \frac{x}{l}.$$

(b) 因 AB 間正段梁木上之 P_2, P_3 及 P_4 三力之感應,得彎曲力距面積 $A''JKMB''$, 其性質應為正. 在 N 處之彎曲力距應為 $M_{O_N} = N''P$.

倘將 (a),(b) 所得之彎曲力距面積相併合,乃得整個梁木因諸力而產生之彎曲力距面積如圖示[第 164(c) 圖劃線之面積], 此間 M_N 乃應為:

$$M_N = M_{O_N} + M_n' = N''P - N''H = HP.$$

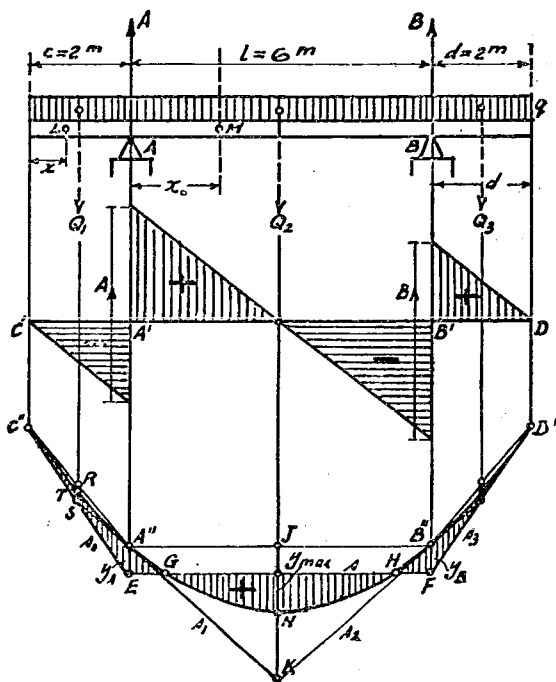
(2) 受均佈承重者

設有受均佈承重之梁如圖示[第 167(a) 圖], 全部均佈承重為 Q , 則每 cm 之承重應為:

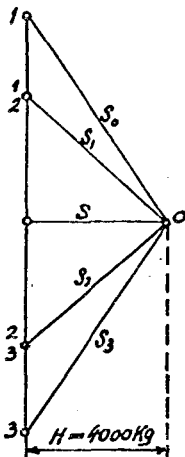
$$I = \frac{Q}{c} \frac{l+d}{l+d}.$$

倘如圖示 $c=d$, 則應

$$q = \frac{Q}{l+2c}$$



第 167 (a) 圖



第 167 (b) 圖

I. 支點攔支力之計算

$$A = B = \frac{Q}{2} = \frac{q(l+2c)}{2}$$

II. 斷面橫力之計算

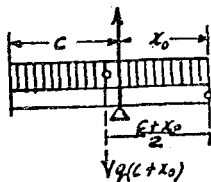
既知支點攔支力 A 及 B , 即可繪成斷面橫力面積如第 167 (b) 圖所示, 圖示斷面橫力之穿經零軸者凡三處, 就中二在梁之支點處, 一在正段之中間。

III. 彎曲力距之計算

在左邊突出段上任何一點 L 處之彎曲力距應為 (第 168 圖):



第 168 圖



第 169 圖

$$M_x = -qx \cdot \frac{x}{2} = -q \cdot \frac{x^2}{2}$$

倘 L 向右逐漸移動至支點 A 處, x 乃亦逐漸增長至 $x=c$, 乃得支點上之支持力距應為:

$$M_A = M_c = -qc \cdot \frac{c}{2} = -q \cdot \frac{c^2}{2}$$

在正段上任何一點 M 處之彎曲力距應為(第 169 圖):

$$Mx_0 = Ax_0 - q(c+x_0) \cdot \frac{c+x_0}{2}$$

最大彎曲力距應在正段之中間, 即 $x_0 = \frac{l}{2}$ 之處, 於是

$$\begin{aligned} Mx_0 &= M_{max} = A \cdot \frac{l}{2} - q \left(c + \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{c + \frac{l}{2}}{2} \\ M_{max} &= \frac{q(l+2c)}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2} \cdot \left(c + \frac{l}{2} \right)^2 \\ &= \frac{q}{2} \left(\frac{l^2}{2} + cl \right) - \frac{q}{2} \left(c^2 + 2c \cdot \frac{l}{2} + \frac{l^2}{4} \right) \\ &= \frac{q}{2} \left(\frac{l^2}{2} + cl - c^2 - cl - \frac{l^2}{4} \right) = \frac{q}{2} \left(\frac{l^2}{4} - c^2 \right) \\ &= \frac{q}{8} (l^2 - 4c^2) \dots \dots \dots (50) \end{aligned}$$

第八節 連續梁

支持於兩端之過梁, 倘其跨距過大, 則不獨施工每多困難,

而材料之選用或亦未能盡合於經濟之道，乃可於中間增加支點，以求斷面減小而用料較省，亦所以求施工之簡易也。此類橫過於若干跨之過梁，或可於各跨上分別架以支持於兩端之普通梁，或合各跨用一統長之梁，是為連續梁。

本節所述之連續梁，暫以受均佈承重而且各支點間之距離相等者為限，其最大彎曲力距 M_{max} 應即以第二支點上之支持力距為準。

(1) 支持於三點之連續梁(第 170 圖)

全部承重 $Q = q \cdot L$.

各段承重 $Q_1 = q \cdot l$,

$$A = B = \frac{3}{16}Q; \quad C = \frac{10}{16}Q. \dots\dots\dots(51)$$

$$M_{max} = \frac{Q_1 \cdot l}{8}; \quad \text{或} \quad M_{max} = \frac{Q \cdot L}{32} \dots\dots\dots(52)$$

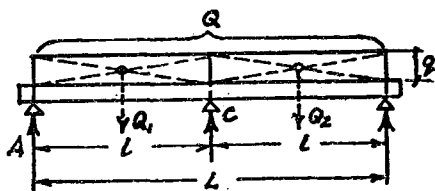
(2) 支持於四點之連續梁(第 171 圖)

全部承重 $Q = q \cdot L$,

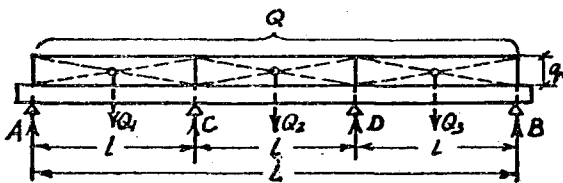
各段承重 $Q_1 = q \cdot l$.

$$A = B = \frac{4}{30}Q; \quad C = D = \frac{11}{30}Q. \dots\dots\dots(53)$$

$$M_{max} = \frac{Q_1 \cdot l}{10}; \quad \text{或} \quad M_{max} = \frac{Q \cdot L}{9} \dots\dots\dots(54)$$



第 170 圖



第 171 圖

(3) 支持於四點以上之連續梁

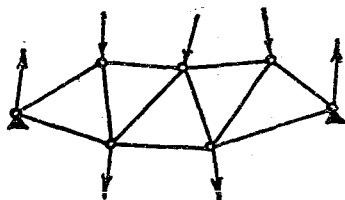
支持於四點以上之連續梁，除鋼筋混凝土結構外，在一般土木工程中應用甚少，蓋因各支點如磚牆或支柱等之沈陷不同，該梁之堅固性乃有不能維持於久遠之虞，至於支持於多點之木梁，如木橋及屋頂架之桁梁等，為謀補救上述弊病起見，乃有選用較大斷面尺度之必要，凡此皆將於各該學類另行研討之，本文從略。

第七章 桁構

第一節 概說

所謂桁構者，乃若干直桁在同一平面上組織而成之網膜狀結構物是也，其直桁間之空框作三角形，各三角形之頂角均在此整個結構之外周上(第 172

圖)，此項頂角，不論爲二直桁或若干直桁之交點，均稱爲節點(Knotenpunkt)，直桁之在外周上邊者，可稱之爲



第 172 圖

上桁(Obergurt)，例用字母 O 以表記之，在下邊者稱爲下桁(Untergurt)，例用 U 以表記之，中間直桁之垂直者稱爲豎桁(Vertikalen)，歪斜者稱爲斜桁(Diagonalen)，例用 V 及 D 以表記之。

外力之加於桁構者，應假定其必在桁構之同一平面上，而必以桁構之節點爲着點。

如整個桁構因計算上之需要而欲截爲兩段時，倘該桁構爲

合法構成者，則其被截斷之直桁，至多應為三根，為欲維持此被截之段（左段或右段）於均衡起見，在各截斷之直桁上應各依該直桁為趨向而加以維持之力，此項維持力即為各桁之受力（Spannkraften），或稱內力（Innerekräfte），以示與外力及支點攔支力之區別也。

既知桁構各桁之內力，均必以各該桁之中心線為趨向，故知各該內力祇應為拉力或壓力，且可平均分配於各桁橫斷面之全部，而收材盡其用之利，較諸受彎力者，在用料上經濟不少。

桁構之大者，其本身重量，普通即作為一種均佈承重計算之，小者例即略而不計，對於計算結果，亦無多影響，外力之加於桁構者，亦可分為靜止與活動兩種，活動者如橋梁上及滑車軌架上之承重是，靜止者如房屋頂架上之承重是，本章所述，暫以桁構之受靜止承重者為範圍，活動承重之於桁構，容在本書第十一章中另詳之。

桁構之支持於兩端者，其支點攔支力之計算，與支持於兩端之普通梁相同，此間不復多述。至於各桁內力（即其受力）之計算，其法甚多，擇要分述如下：——

第二節 桁構圖解法

(1) 節點圖解法 (Knotenpunktverfahren)

其法先擇節點之兩桁相交而受一外力之侵襲者作起，因此外力爲已知之力，故該兩桁之內力乃可應用三角形圖解法以求之，此第一節點上之各桁圖解既畢，然後及於鄰近之節點，相交於此第二節點之各桁中，有一桁之內力已在第一節點上求得，另兩桁之內力又可應用三角形圖解法以求之，依此類推而及桁構全部各節點，乃得該桁構全部各桁之內力。

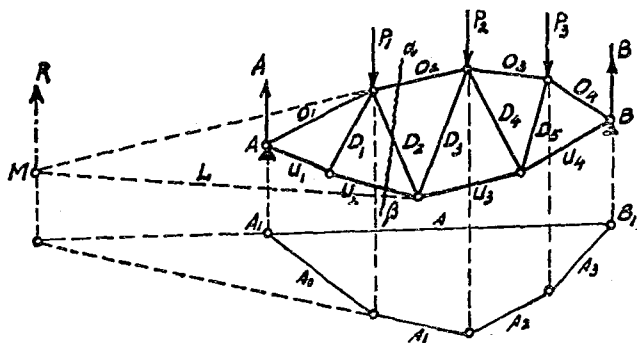
各桁內力之或拉或壓，視箭頭以區別之，副圖三角形各邊之箭頭應指同一方向迴轉而行，準此箭頭方向引繪於正圖中，箭頭之向節點者所以示壓力，離節點者所以示拉力。

(2) 克來馬拿圖解法 (Cremonaplan)

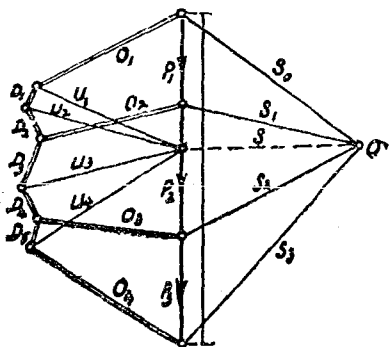
將前法中若干三角形副圖，作有系統之聯合而成一整個副圖，是卽爲克來馬拿圖解，此法作圖既簡易而圖案又醒目，故爲桁構圖解上最通用之一法。

作圖時例用雙線或藍色以表示壓力，單線或紅色以表示拉力，外力則例用較粗之線以表示之。

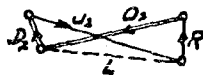
例如第 173 圖所示之桁構，在上邊節點上受外力 P_1, P_2 及 P_3 之侵襲，其支點間支力 A 及 B 可應用射線多邊形圖解法以求之，第 174 圖中並行於第 173 圖中 A_1B_1 線之射線 ot ，分 ad 爲兩截，卽得 $at = A$ 及 $dt = B$ 。至於各桁所應有之內力，可用克來馬拿圖解法以求之，如第 174 圖所示者是也。



第 173 圖



第 174 圖



第 175 圖

(3) 截剖圖解法 (Schnittverfahren)

倘祇須推求某一桁之內力，則上述二法，因均須自第一節點起循序圖解，殊感繁複，乃以應用截剖圖解法為宜，其法將整個桁構經切面 $\alpha\beta$ 截為兩段，使就左段而言，其被截斷之 O_2, D_2 及 U_2 三桁上當有維持力，以與 A 及 P_1 兩力相持於均衡，此維

持力即為各該桁之內力，其圖解之步驟如次：——(1) 應用射線圖解法以求 A 及 P_1 之合力 R ，圖示 $R = bt$ ，(2) 引長 O_2 與 R 相交於 M 點，並將 D_2 與 U_2 之交點與 M 相連接，即圖中之 L 線，(3) 應用三角形圖解法將 R 分為 O_2 及 L ，再將 L 分為 D_2 及 U_2 ，即得各該桁之內力，如第 175 圖所示者是也。

例題 35 設有房屋頂架如第 176(a) 圖， $l = 8$ m， $h = 2$ m， $V = 1$ m，頂架中到中距離 $b = 3$ m，每平方公尺基面之承重 $p = 165$ kg，試求支點攔支力 A 與 B ，及各桁內力之大小與性質。

解 每一頂架應承重： $p \cdot b \cdot l = 165 \times 3 \times 8 = 3960$ kg，

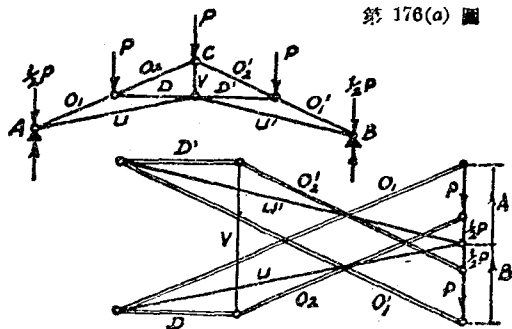
每一上桁上應承重： $p = \frac{3960}{4} = 990$ kg。

此間節點 A 及 B 上之 $\frac{1}{2}p$ 力，因與支點攔支力在同一趨向上而又正負相反，故支點攔支力實為：

$$A = B = 2p - \frac{1}{2}p = 1\frac{1}{2}p = 1\frac{1}{2} \times 990 = 1485 \text{ kg.}$$

應用克來馬拿圖解法，如第 176(b) 圖所示者，得構桁之內力如下：

$$\left. \begin{array}{l} O_1 = 6641 \text{ kg,} \\ O_2 = 4427 \text{ kg,} \\ D = 1980 \text{ kg.} \end{array} \right\} \text{壓} \quad \left. \begin{array}{l} U = 6123 \text{ kg,} \\ V = 2970 \text{ kg.} \end{array} \right\} \text{拉}$$



第 176(a) 圖

第 176(b) 圖

第三節 桁構計算法

桁構之計算法，普通可分為二，即節點計算法及截割計算法是也，茲分述如次：

(1) 節點計算法

節點計算法與節點圖解法，意義完全相同，所異者，一則應用平衡定律，($\Sigma H=0$ 及 $\Sigma V=0$)，依據各節點之平衡狀態，而求各桁之受力，一則利用閉合多角力圖之原理，以示一節點之平衡，而求各桁之受力也。今設有某桁構，其形式與荷重，如第 177 圖示，節點 I 之 $P_1 O_1$ 及 U_1 三力，應成平衡，由 $\Sigma(V)=0$ ，

得

$$P_1 + U_1 \sin \alpha = 0,$$

$$U_1 = -\frac{P_1}{\sin \alpha} = -\frac{P_1}{\frac{2.25}{\sqrt{2.25^2 + 6^2}}} = -\frac{750}{\frac{2.25}{6.4}} = -2133 \text{ kg(壓)}.$$

由 $\Sigma(H) = 0$, 得

$$O_1 = U_1 \cos \alpha,$$

$$O_1 = U_1 \cos \alpha = 2133 \cdot \frac{6.0}{6.4} = 2000 \text{ kg (拉)}$$

節點 II 由 $\Sigma(H) = 0$, 得

$$O_1 = O_2 = 2000 \text{ kg (拉)}$$

由 $\Sigma(V) = 0$, 得

$$P_2 = V_1 = 1500 \text{ kg (壓)}$$

節點 III 由 $\Sigma(H) = 0$, 得

$$U_1 \cos \alpha + D_1 \cdot \cos \alpha - U_2 \cos \alpha = 0,$$

$$2133 + D_1 - U_2 = 0,$$

$$D_1 + 2133 = U_2.$$

由 $\Sigma(V) = 0$, 得

$$V_1 + U_1 \sin \alpha - D_1 \sin \alpha - U_2 \sin \alpha = 0,$$

$$\frac{V_1}{\sin \alpha} + U_1 - D_1 - U_2 = 0,$$

$$4266 + 2133 - D_1 - D_1 - 2133 = 0,$$

$$4302 = 2 D_1,$$

$$D_1 = 2133 \text{ kg (拉)}.$$

$$U_2 = D_1 + 2133 = 4266 \text{ kg (壓)}.$$

他如 O_3, V_2, D_2, V_3, U_3 等桁條，應用同法，可以求得，惟須謹慎從事，否則未有不誤者，各桁之受力既得，然後列表如下，以期醒目，亦便於配料也。

桁條	拉(公斤)	壓(公斤)	桁條	拉(公斤)	壓(公斤)
O_1	2000		V_1		1500
O_2	2000		V_2		2250
O_3	4000		V_3		1500
U_1		2133	D_1	2133	
U_2		4266	D_2	2500	
U_3		6399			

此桁構之鑿着力 S_1 及 S_2 ，可計之如次：

求 S_1 時，可以 B 為旋點，得

$$S_1 \cdot 2.25 = 750.6 + 1500.4 + 1500.2,$$

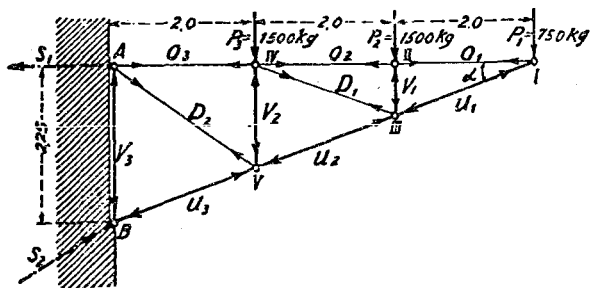
$$S_1 = \frac{4500 + 6000 + 3000}{2.25} = 6000 \text{ kg.}$$

求 S_2 時, 可應用直角三角形定律, 即

$$S_2 = \sqrt{S_1^2 + (P_1 + P_2 + P_3)^2}$$

$$= \sqrt{6000^2 + 3750^2}$$

$$= 7071 \text{ kg.}$$



第 177 圖

(2) 截剖計算法

此法與截剖圖解法相同, 一則應用平衡定律, ($\Sigma M=0$, $\Sigma H=0$, $\Sigma V=0$), 一則應用閉合多角力圖之原理, 以定桁條受力之大小也。設有某並行桁構, 其荷重情形, 如第 178 圖所

示，欲求 O_3 、 D_4 及 U_2 之受力，今以 $I-I$ 線剖桁構成左右兩部，計算受剖桁條之受力時，可僅注意其左部或其右部，而於截剖處，由桁條所傳達之力，另用外力補充之，其補充力之大小及性質，應與原有者，絲毫無異，故桁構之左部或右部，雖經截剖，但仍得平衡也。(第 178(a)圖)，各桁之求法詳下：

$$(a) \text{ 上桁 } O_3 \quad \text{攔支力 } A = \frac{7}{2}P = 3.5P$$

由 $\Sigma(M) = 0$ ；以 D_4 及 U_2 之交點 2 為旋點，得

$$A \cdot 2\lambda + O_3 \cdot h = \left(1 \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right)P \cdot \lambda,$$

$$7\lambda P + O_3 \cdot h = 3P \cdot \lambda,$$

$$O_3 \cdot h = \lambda \cdot P(3-7) = -4\lambda \cdot P,$$

$$O_3 = -4 \cdot \frac{P\lambda}{h} \text{ (壓)},$$

(b) 下桁 U_2 由 $\Sigma(M) = 0$ ，以 D_4 及 O_3 之交點 6 為

旋點；得

$$A \cdot \frac{3}{2}\lambda = P \cdot 1 \frac{1}{2}\lambda + h \cdot U_2$$

$$\frac{21}{4}\lambda \cdot P + \frac{3}{2}\lambda \cdot P + h \cdot U_2$$

$$\frac{\left(\frac{21}{4} - \frac{3}{2}\right)\lambda \cdot P}{h} = U_2,$$

$$U_2 = \frac{15}{4} \frac{\lambda \cdot P}{h} \text{ (拉)}.$$

(c) 斜桁 D_3 由 $\Sigma(H) = 0$; 得

$$A - 3P - D_3 \cdot \sin\alpha = 0,$$

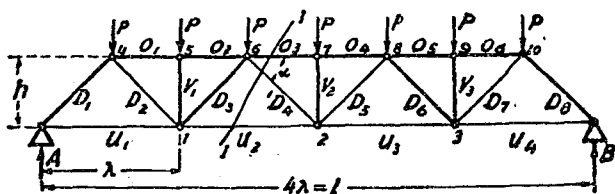
$$\frac{7}{2}P - 3P - D_3 \cdot \sin\alpha = 0,$$

$$\frac{P}{2} - D_3 \cdot \sin\alpha = 0,$$

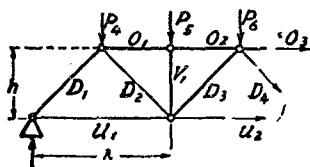
$$D_3 = \frac{P}{2 \sin\alpha} \text{ (拉)}.$$

其他諸桁,均可採用同法計之。

節點計算法,必須自攔支點或桁構之梢點開始,然後沿各節點漸進,以及桁構之全體,一如克來馬拿圖解法,故欲求某桁之受力時,往往須繞道其他諸節點,而不可直接計得,惟截剖計算法,則可逕捷求之也。節點計算法,遇有特種情形,如第 178 圖所示之並行桁構,應用 $\Sigma(V) = 0$, 則 $V_1 = V_2 = V_3 = -P$ 立即可知,毋勞計算,是故兩法各有其利,如能並用,尤為妥善。



第 178 圖

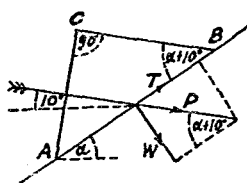


第 178(a) 圖

第八章 風力

第一節 風力計算

風力之加於垂直平面，除在高山之巔，濱海之地外，通常每平方公尺以 150 公斤計算，即 $p = 150 \text{ kg/m}^2$ ，就經驗上考查所得，風之吹襲，恆從斜上而下，其趨向與水平面構成銳角 10° ，故作 $\angle \alpha$ 。斜度之屋面，其與風向所構成之角度恆為 $\angle \alpha + 10^\circ$ (第 179 圖)。



第 179 圖

試繪 AC 線垂直於風力，假定頂架之中到中距離為 b ，則平面 $b \cdot AC$ 應為屋面 $b \cdot AB$ 之垂直於風向之影射面積，而為：

$$b \cdot AC = b \cdot AB \sin (\alpha + 10^\circ).$$

故風力之加於屋面 $b \cdot AB$ 者應為：

$$P = p \cdot b \cdot AC = p \cdot b \cdot AB \sin (\alpha + 10^\circ).$$

乃將 P 力分為兩分力，其一為並行於屋面者，可棄而不計，其二為垂直於屋面者，是為全屋面所承受之垂直於屋面之風力，

應為：

$$W = P \cdot \sin(\alpha + 10^\circ) = p \cdot b \cdot AB \sin^2(\alpha + 10^\circ) \dots \dots \dots (55)$$

於是每平方公尺屋面所承受之垂直於屋面之風力應為：

$$w = \frac{W}{b \cdot AB} = p \cdot \sin^2(\alpha + 10^\circ).$$

設 $p = 150 \text{ kg}$ ，則

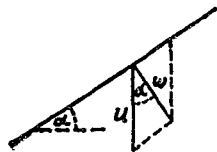
$$w = 150 \cdot \sin^2(\alpha + 10^\circ) \dots \dots \dots (56)$$

倘 h 為屋頂架之高度， l 為其跨距，因 $h:l$ 之不同， $\angle \alpha$ 乃各有大小之別，於是 w 乃亦因之而各異，茲將每平方公尺斜坡屋面所承受之垂直於該屋面之風力列表如下：

$h/l =$	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
$\alpha =$	45°	33°50'	26°40'	31°50'	18°20'	16°	14°	12°30'	11°20'
$w =$	100	70	54	42	34	29	25	22	10 kg/m ²

再將此垂直於屋面之風力 w 分為兩分力，其一為並行於屋面者，可棄而不計，其二為垂直於水平者（第 180 圖），即

$$u = \frac{w}{\cos \alpha}.$$



第 180 圖

此間 u 為每平方公尺屋面所承受之垂直於水平之風力，但通常對於斜坡較小之屋面，其風力恆以該屋面之影射平面為準，即每平方公尺屋面之影射平面所承受之垂直之風力，即

$$v = \frac{u}{\cos \alpha} = \frac{w}{\cos^2 \alpha}$$

茲將依照上列公式計算所得，列表如下：

$h/l =$	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
$\alpha =$	45°	33°50'	26°40'	21°50'	18°20'	16°	14°	12°30'	11°20'
$v =$	200	101	68	49	38	31	27	23	21 kg/m ²

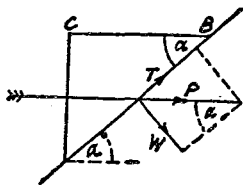
倘假定風力之趨向為水平的(第 181 圖)，則：

$$P = p \cdot b \cdot AC = p \cdot b \cdot AB \sin \alpha,$$

$$W = P \cdot \sin \alpha = p \cdot b \cdot AB \sin^2 \alpha,$$

$$w = \frac{W}{b \cdot AB} = p \cdot \sin^2 \alpha,$$

$$v = \frac{w}{\cos^2 \alpha} \dots \dots \dots (57)$$



第 181 圖

依據上列公式及三種不同的 p ，即 $p = 100, 125$ 及 150 kg ，將計算所得，列表如下：

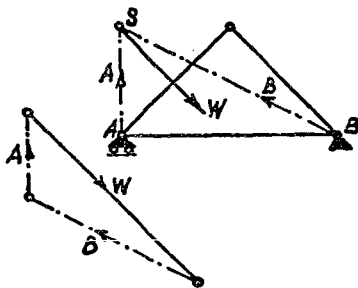
(1) 風力之垂直於斜坡屋面者 w

$h/l =$	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
$\alpha =$	45°	33°41'	26°34'	21°48'	18°26'	15°57'	14°2'	12°32'	11°19'
$w =$ ($p = 100$)	50	31	20	14	10	8	6	5	4 kg/m ²
$w =$ ($p = 125$)	62	38	25	17	13	9	7	6	5 kg/m ²
$w =$ ($p = 150$)	75	46	30	21	15	11	9	7	6 kg/m ²

(2) 風力之垂直於屋面之影射平面者 v

$h/l =$	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10
$\alpha =$	45°	33°41'	26°34'	21°48'	18°26'	15°57'	14°2'	12°32'	11°19'
$v =$ ($p=100$)	100	45	25	16	11	9	6	5	4 kg/m ²
$v =$ ($p=125$)	124	55	31	20	14	10	8	6	5 kg/m ²
$v =$ ($p=150$)	150	66	38	24	17	12	10	7	6 kg/m ²

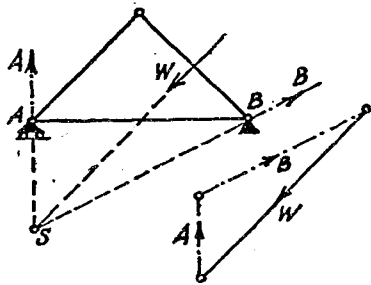
因垂直於屋面之風力而產生之支點擱支力，可用圖解法以求之，其加於頂架之左邊者如第 182 圖所示，加於右邊者如第 183 圖所示。



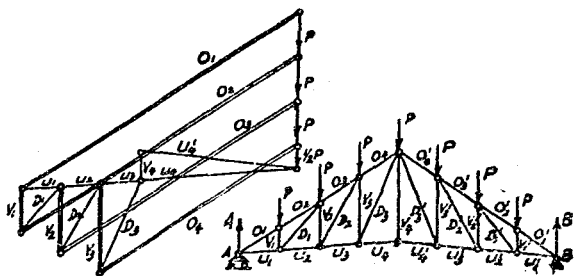
第 182 圖

至於該頂架各桁內力之推算，可如第 182 至 184 圖解之。

第 184 圖為因外力 P (本身重量及雪力) 而產生之各桁內力之圖解。

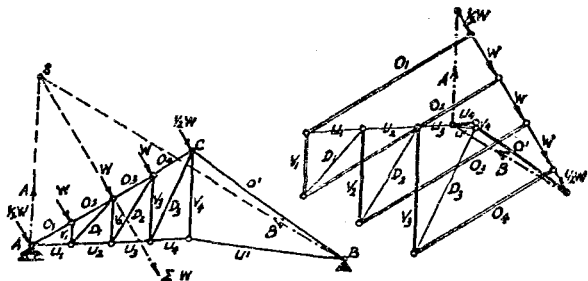


第 183 圖



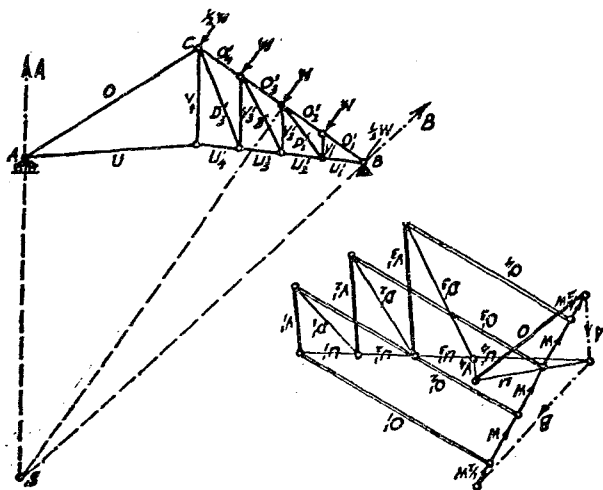
第 184 圖

第 184 圖爲因加於頂架左邊風力而產生之各桁內力之圖解。



第 185 圖

第 185 圖爲因加於頂架右邊風力而產生之各桁內力之圖解。



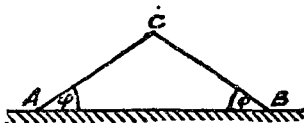
第 186 圖

合計第 184, 185 及 186 圖所得之各桁內力列成表格按其性質而相加之, 即得該頂架各桁應有之最大及最小內力。

第九章 土壓力

第一節 概說

使將鬆散之泥土傾置於平面上，必成一土堆，其 AC 與 BC 線與平面構成 ϕ 角，是為自然傾角 (natürlicher Böschungswinkel)，該角之大小，視土質而異，在土壓力計算上至關重要也 (第 187 圖)。



第 187 圖

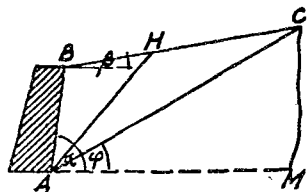
使將泥堆放成 α 角，倘 $\angle \alpha > \angle \phi$ ，則該泥堆勢將不能維持於均衡而有設法支持之必要，如第 188 圖所示之支牆，其一例也。

該支牆所受自有泥土一邊之壓力，是為土壓力，例用 E 以表記之。此 E 力即為推算支牆厚度及其穩固性之根據。茲將各種泥土之重量，摩擦係數及自然傾角列表如下：

土 別	自然傾角 ϕ	摩擦係數 = $\tan \phi$	重量 kg/m^2
黏 土 乾 (Tonerde)	45°	1.00	1600
	20°	0.36	2000
壩 埠 乾 (Lehmerde)	40°	0.83	1500
	20°	0.36	1900
砂 土 乾 (Dümmerde)	40°	0.84	1400
	30°	0.58	1860
砂和石子 (Sand u. Kies) 潮	30°	0.58	1800
磚石碎片 潮 (Gerölle)	40°	0.84	1700

下文計算中未經特別註明者，均以垂直於圖面之深度 $l=1.00$ 公尺為標準，換言之，即以支牆長度 $l=1.00$ 公尺為標準也。

第 188 圖中之 AB 所示支牆之背面，該背面所支持之泥土體積，即圖中所示之剖面 $ABCM$ ， α 角為支牆背面與水平面所構成之角度，此 α 角必大



第 188 圖

於 ϕ 角， BC 示垂直於圖面之泥土上面， β 為泥土上面與水平面所構成之角度，此 β 角必小於 ϕ 角，最大為等於 ϕ 角，即 $\angle B \leq \angle \phi$ 。

泥土之在 AC 與 AM 之間者，即在自然傾角範圍以內，必

相持於均衡，其在 AC 以上者，即在剖面 ABC 範圍之間，為土壓力所自生。倘支牆稍一移動，則 ABC 間之泥土亦必因而鬆動，亦必將在 AH 平面上開裂，此平面 AH 即為滑動面 (Gleitebene)，或稱裂面 (Bruchebene) 者是也。倘將支牆整個移開，則 AH 必將與 AC 合併在同一平面上。

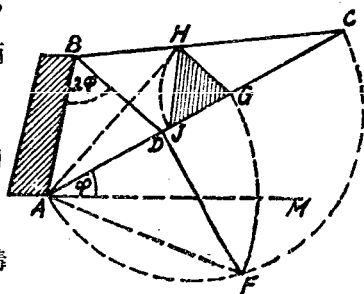
第二節 土壓力圖解法

裂面地位之確定與土壓力大小之推求，以應用雷白哈恩 (Rebhann) 圖解法最為簡便，其法可先假定牆面與泥土間之摩擦等於泥土與泥土間之摩擦，

即 AB 面間之摩擦等於 AC 面間之摩擦 (即 $\phi_1 = \phi$)。

繪 AC ，與水平線 AM 構成自然傾角 ϕ ，

再繪 BD ，與支牆背面 AB 構成一角度 $\phi + \phi_1 = 2\phi$ ，



第 189 圖

以 AC 為直徑繪半圓，作 DF 垂直於 AC ，

以 A 為中心 AF 為半徑作一弧線，與 AC 相交於 G 點，繪 GH 並行於 BD 。

作 $GJ = GH$ ，而繪直線 HJ

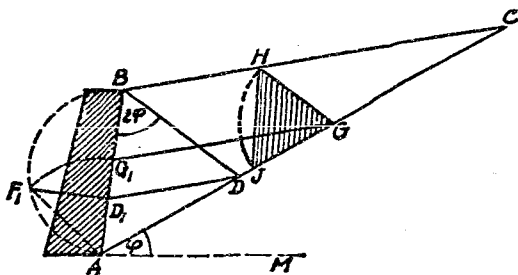
如此構成之 $\triangle GHJ$ ，稱為土壓力三角形(Erddruckdreieck)，以此三角形為剖面而長 1.00 公尺之稜柱體泥土(Erddruckprisma)，其重量即為土壓力之大小，即

$$E = F \cdot 1.0 \cdot r = F \cdot r \text{ 公斤} \dots \dots \dots (58)$$

(此間 F 為土壓力三角形之面積， r 為每 m^3 泥土之重量)

圖中 AH 即為裂面之地位(第 189 圖)。

又如第 190 圖所示之圖解法，亦可得同一結果，其作圖之法如下：



第 190 圖

先繪 AC ，與水平線 AM 構成自然傾角 ϕ ，

再繪 BD ，與支牆背面 AB 構成角度 2ϕ ，以 AB 為直徑繪半圓，

繪 DD_1 並行於 BC 及 F_1D_1 垂直於 AB ，

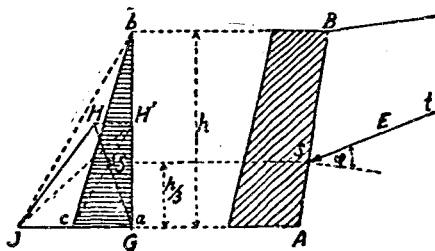
以 A 為中心 AF_1 為半徑作一弧線，與 AB 相交於 G_1 點，

作 G_1G 並行於 BC ，再作 GH 並行於 BD ，

作 $GJ = GH$ ，而繪直線 HJ 。

如此構成之 $\triangle GHJ$ ，亦即前法所得之土壓力三角形是也。

此土壓力着點，亦可用圖解法以確定之。其法先將土壓力三角形 $\triangle GHJ$ 繪於支牆之底線上，然後繪成直角三角形 $\triangle abc$



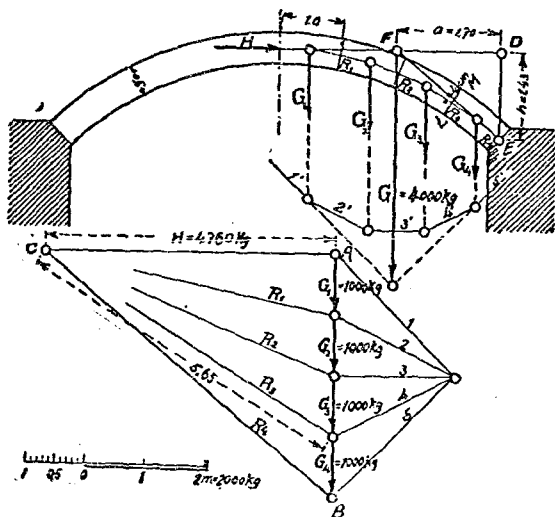
第 191 圖

$= \triangle GHJ$ ，求得 $\triangle abc$ 之重心 S ，乃自 S 作一並行線與 AB 相交於 s ，此 s 即為該土壓力之着點。再繪 st ，與 s 點上之垂直線構成 $\angle \phi$ ，此 st 線即為其趨向(第 191 圖)。

第十章 拱

第一節 自重拱

拱 (Gewölbe) 大都係對稱式 (第 192 圖), 其左右兩部, 相互



第 192 圖

抵住, 在拱頂 (Scheitel) 之壓力為水平向, 謂之水平推力 (Horizontalschub), 對稱式拱以靜力學計算時, 得僅注意拱之半, 而忽

其他半(如在第 192 圖拱之左部).再將水平推力,加於拱頂,以補其缺,拱之右半,分爲若干份,各計其自重,定重心點,作爲垂直自重之着力點.然後應用多角線圖,以定各自重合力之大小及地位,即右半拱之總重及其重力線也.爲便利計,通常分拱身每份之深爲 1 公尺,此而適用,則其他尺寸,亦必適於用也.

例題 36 某拱,無荷重,如第 192 圖所示,拱厚爲半公尺,求其水平推力及最大最小壓應力.

解 取拱身每份之長爲 1 公尺,深 1 公尺,其厚爲半公尺,故每份之體積當爲 $1.0 \times 0.5 \times 1.0 = 0.5 \text{ m}^3$.

設拱料重 2000 kg/m^3 , 則每份重爲 $0.5 \times 2000 = 1000 \text{ kg}$. 應用極圖及多角線圖,可得半拱之總重并其位置也,由計算法,亦得同值,其法如次:

以拱底(Kämpfer)中點 E 爲旋點,則水平推力 H 所生之力距,當與拱重 G 所生者相平衡 ($\Sigma M = 0$), 即

$$H \cdot h = G \cdot a,$$

$$H = \frac{G \cdot a}{h}.$$

在此 $G = 4 \times 1000 = 4000 \text{ kg}$; $a = 1.7 \text{ m}$;

$$h = 1.43 \text{ m};$$

故 $H = 4000 \times \frac{1.7}{1.43} = 4760 \text{ kg}$.

水平推力 H 亦可應用圖解法求得之，今以 H 與 G 之交點爲 F ，連結 EF ，作 BC 並行於 EF ，作 AC 並行於 DF 。由兩三角形 ABC 及 DEF 相似關係，得

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE} = \frac{a}{h}.$$

但 $AB = G$,

故 $AC = \frac{G \cdot a}{h} = H.$

水平推力 H 與拱重 G_1 合成 R_1 ， R_1 與 G_2 合成 R_2 ， R_2 與 G_3 合成 R_3 ， R_3 與 G_4 合成 R_4 。後者當與 EF 線相疊合， $HR_1R_2R_3R_4$ 所成之線，謂之拱壓線 (Drucklinie des Gewölbes)。

於拱各斷面間之受力，亦可計算，設在 LM 斷面間，由 HG_1G_2 及 G_3 之合力 R_3 作用，依極圖量其長度爲 $5.65 \text{ cm} = 5650 \text{ kg}$ ，其着力點由拱壓線示之，距拱中心線爲 4 cm ，故尙在心核內，最大壓應力，當在 L 處，最小當在 M 處，應用下列公式可計之。

$$\sigma_d = \frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{6 \cdot e}{h} \right) \dots \dots \dots (59)$$

式中 e 爲力之偏心距， h 爲拱厚，斷面間最大壓應力當爲

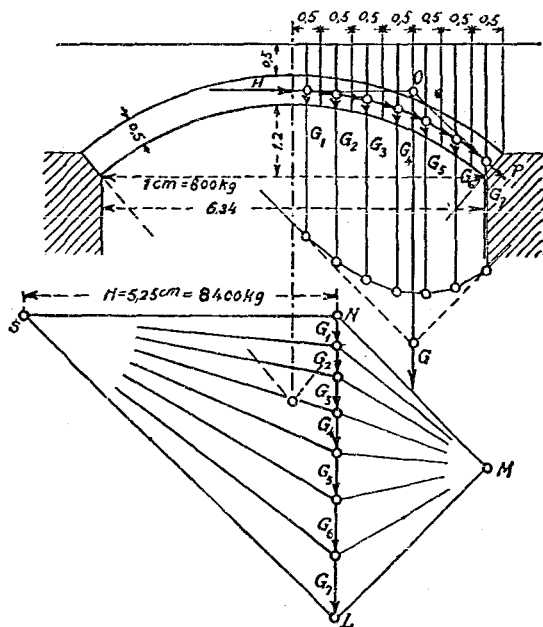
$$\sigma_d = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{6 \cdot e}{h} \right) = \frac{5650}{50 \times 100} \left(1 + \frac{6 \times 4}{50} \right) = 1.67 \text{ kg/cm}^2,$$

最小壓應力爲

$$\sigma_d = \frac{P}{F} \left(1 - \frac{6 \cdot e}{h} \right) = \frac{5650}{50 \times 100} \left(1 - \frac{6 \times 4}{50} \right) = 0.59 \text{ kg/cm}^2$$

第二節 荷填料拱

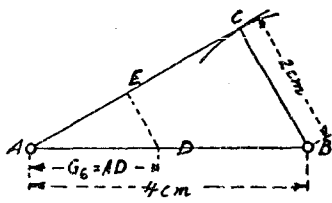
設於拱上，填以泥土，分拱身時，恆取垂直之條分，填料亦一併計之（第 193 圖）如條分甚狹，以每條之中線逕作重心線用，



第 193 圖

亦無不可，若填料比重與磚牆相等，則條分高度，即其自重之大小，此處以拱條分寬為 0.5 m ，則在高深每各公尺之體積為 $0.5 \times 1.0 \times 1.0 = 0.5\text{ m}^3$ 。設每立方公尺重為 1600 kg ，則在高度每公尺之重量為 $0.5 \times 1600 = 800\text{ kg}$ ，故條分之平均高度，亦得直接表其重量也。為節省地位計，在極圖僅以條分高度之半為力，即 $1\text{ cm} = 2\text{ m}$ ，高 $= 2 \times 800 = 1600\text{ kg}$ 。等分條分高度，應用第 194 圖，以 $AB = 4\text{ cm}$ ， $BC = 2\text{ cm}$ 作直角三角形 $\triangle ABC$ 。如以圓規量得 G_6 長度，在 AB 上取 $AD = G_6$ ，由 D 點至 AC 之垂直距 DE ，可用圓規量得之，則 $DE = \frac{1}{2}AD$ 。

因 $DE : DA = BC : BA = 2 : 4 = 1 : 2$ 是也。今取任意極點 M ，作極圖得 G_1, G_2, G_3, \dots
 $\dots G_7$ 之合力 G ，由拱頂中點作水平力 H ，與 G 相交於 O 點，再與拱底中點 P 相連成 OP 線，由 N 及 L 各作 OH 及 OP 之並行線交 S 點，則 NS 為水平推力，而拱壓線因亦成矣。



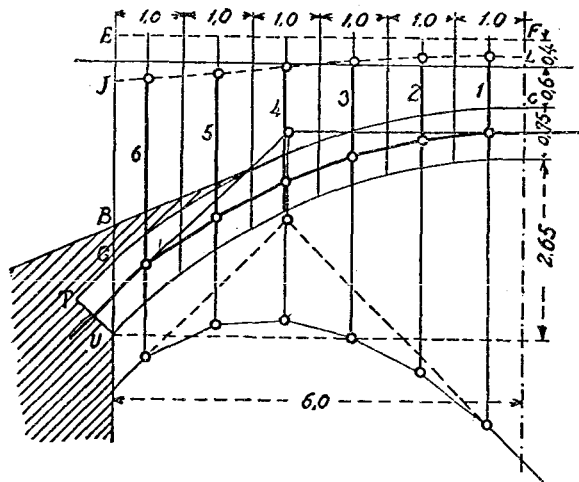
第 194 圖

第三節 荷重及填料拱

設於拱上，除荷有填料外，尚有荷重，則為便利計，恆將後

者當作填料之相當量而計算之，如荷重為 600 kg/m^2 ，而填料為 1500 kg/m^3 ，則 600 kg 相當 $\frac{600}{1500} = 0.4 \text{ m}^3$ 之填料，即以 0.4 m^3 填料，在每 m^2 間堆積之為 600 kg 荷重之相當量，故於第 195 圖，將填料高度，增益 0.4 m 也。

拱身比重，如較填料為大，則可將條分之高度減短，如第



第 195 圖

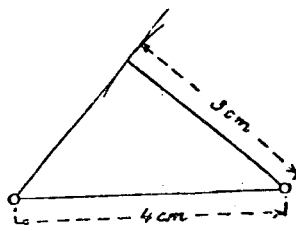
196 圖 $BEFC$ 為填料之積，而 $JBLC$ 為其與拱身同料之相當積，設填料重為 1500 kg/m^3 ，拱料重為 2000 kg/m^3 ，則應用第 194 圖將填料高度減短為其原有者 $\frac{1500}{2000} = \frac{3}{4}$ 。圖中條分高度，以粗線表重量，條分寬為 1 m ，在 1 m 拱深及拱高其重為

$1.0 \times 1.0 \times 1.0 = 1 \text{ m}^3$ 相當 2000 kg.

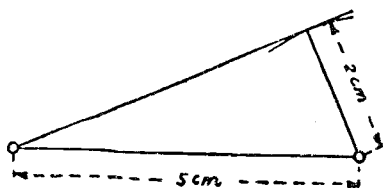
爲省地位計，應用第 197 圖，將比例尺縮成 $2/5$ ，再如第 198 圖所示，繪成極圖，在極圖上爲 2cm 長者，實係 $5 \times 2000 = 10000 \text{ kg}$ ，1 cm 者爲 5000 kg，以之繪拱壓線如圖。

注意：在第 195 圖，拱之 GTU 部分，并其上料重荷重。計算時未嘗顧及，蓋使條分寬度爲整數，以其簡便甚多也，且因而所起差誤極小，恆可忽視。於實際上，拱基尚需另行計算，將拱身剩餘部分，併入拱基，亦無不可，後當詳之。

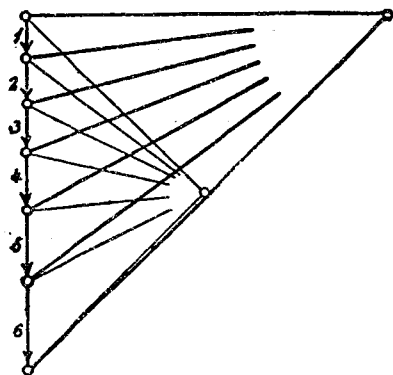
拱身應分爲許多條分，繪拱壓線於其上，若於每條分間又分爲若干



第 196 圖



第 197 圖

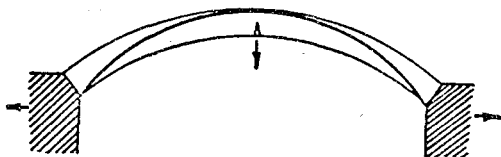


第 198 圖

份，則另得拱壓線，與前者相交叉，如再分之，遂使拱壓線漸成連續之弧線，而為最初所繪之拱壓線所包着，故條分之分，初不必甚多，如有所需，得作局部之補充，如條分寬度不廣，弧形拱壓線，得逕由曲線板連成之。

第四節 最大最小拱壓線

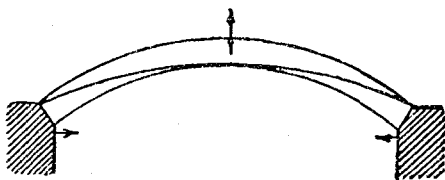
拱壓線由已往假定，均經拱頂及拱底之中點，但亦得經由其鄰近他點，蓋拱仍可不因以傾覆，惟不得超越拱外也，水平推力，每易其值，壓力線高度愈小，則水平推力愈大。就壓力線中，應行特別注意者有二，一為最小水平推力，當拱壓線在拱頂經拱上緣，在拱底經拱下緣時所起，此等拱壓線，謂之最小拱壓線



第 199 圖

(minimal Drucklinie (第 199 圖)，二為最大水平推力，其拱壓線所經途程，適與前者相反，在拱頂經下緣，在拱底經上緣，謂之最大拱壓線 (maximal Drucklinie) (第 200 圖)。

拱之最小水平推力，如為拱基所不能承受者，後者遂向兩



第 200 圖

側稍行移動，使拱頂之下緣及拱底之上緣開裂，而拱亦隨即傾覆矣（第 199 圖）。如拱基於拱身，起有水平推力（受鄰拱或其他作用），而後者尚大於拱之最大水平推力，則於拱頂之上緣及拱底之下緣開裂，而拱因亦頹矣（第 200 圖）。

爲拱安全計，最大最小拱壓線當不使其有發生可能，拱壓線超出斷面之心核，即起拉應力，重要之拱不使拱壓線超越斷面之心核，故當以拱壓線在拱頂交心核之上緣，在拱底交心核之下緣者，爲最小拱壓線（第 201 圖）。



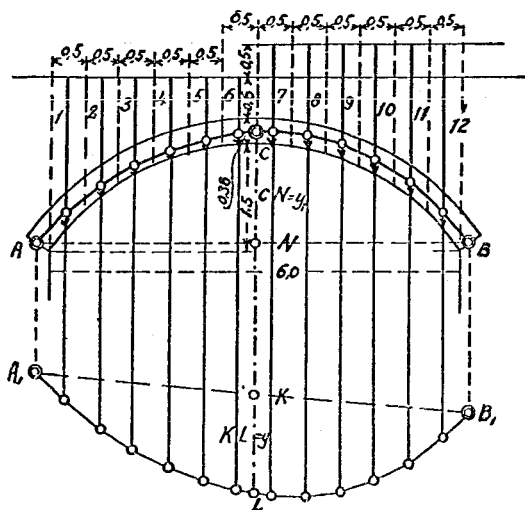
第 201 圖

以拱壓線在拱頂交心核之下緣，在拱底交心核之上緣者，爲最大拱壓線（第 202 圖）。



第 202 圖

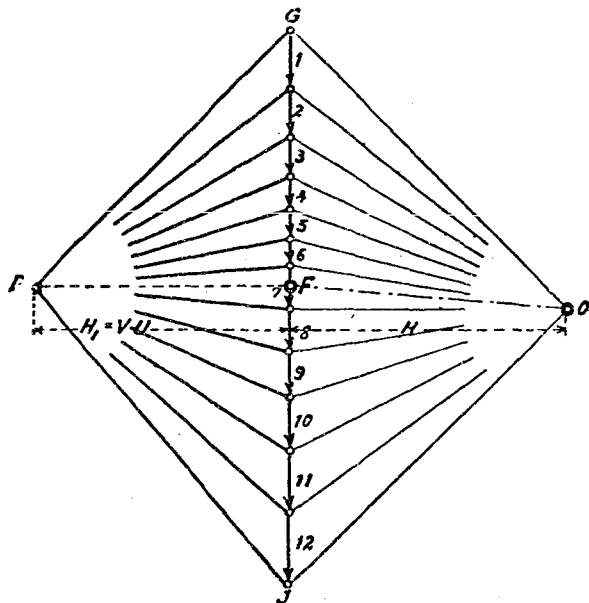
經拱之心核，有許多拱壓線之可能，但何者為實有，勢難斷定，以其與施工之優劣，模架之下沈及拱基之移動，至有關係。就大概言之，以起最小內力者，為其可能性至大者，計算拱各斷面之受力，在心核內，繪其最適宜之拱壓線，藉以得各處最大應力。



第 203 圖

第五節 單面荷重拱

拱承受單面荷重時，兩面拱壓線均應齊繪，以其荷重非對稱，拱壓線因亦互異，先取任意極點 O ，作多角線圖(在第 203 圖及第 204 圖中細線所示者)，由拱底中點 A 及 B ，引垂線交多角線於 A_1 及 B_1 ，故閉合線為 $A_1 B_1$ ，如求 AB 梁擱支力 A 及 B 然。由極點 O 作 $A_1 B_1$ 之平行線(在第 204 圖中為 OF 線)，而拱壓線即係多角線，前者僅向上彎曲，後者大都成下垂式，其



第 202 圖

水平推力即極距也。今在圖中所需之拱壓線，應經由 AB 兩點，故閉合線之方向，當亦成 AB 向，此極圖之極點，應在由 F 點作並行於 AB 之線上也（在第 204 圖 FP 線），同時拱壓線，亦須經拱頂中點 C ，其高為 $CN = y_1$ ， C 點之彎曲力距 $M = H \cdot KL = H \cdot y$ ，現設求得之極距為 H_1 ，則

$$M = H_1 \cdot y_1,$$

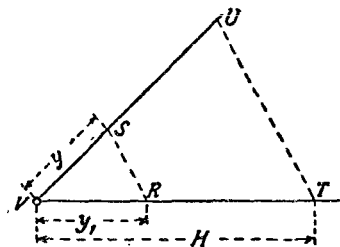
$$H_1 \cdot y_1 = H \cdot y,$$

$$H_1 = \frac{H \cdot y}{y_1}$$

H_1 由此式得決定之。再因 $\frac{H_1}{H} = \frac{y}{y_1}$ ，故 H_1 亦得由圖解法（第 205 圖）決定之，由 V 點引任意

二直線，在其一線上，取 y_1 及 H 之長度，在他一線上，取 y 長度，由 T 點作 RS 之並行線，得 TU 線，因

$$\frac{VU}{H} = \frac{y}{y_1}, \text{ 故 } VU = H_1 \text{ 也。}$$



第 205 圖

於第 204 圖，由 F 點取 H_1 距，得 FP 線，此 P 即為所求之極點，其當位於 GJ 之左，方得拱壓線為上彎式。繪時，可由 A 點起，後必經 BC 兩點，但為準確計，可自拱頂 C 點始。

$$H = 2.18 \text{ cm},$$

$$y = 1.47 \text{ cm},$$

$$y_1 = 0.62 \text{ cm};$$

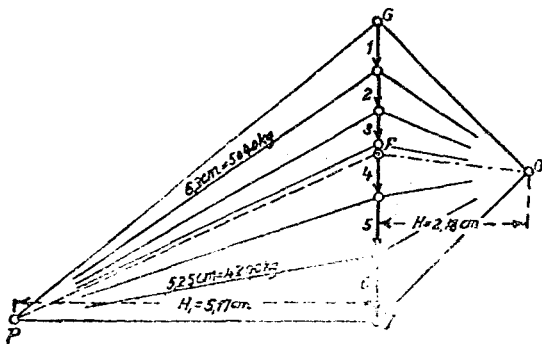
$$\text{故 } H_1 = \frac{H \cdot y}{y_1} = \frac{2.18 \times 1.47}{0.62} = 5.17 \text{ cm}.$$

今作 $OF \parallel B_1A_1$ 及 $FP \parallel BA$, 當 FP 與距 GJ 之垂直線上為 5.17 cm 處之相交點, 即極點 P 也。應用 P 極圖以作拱壓線, 按圖得拱之危險斷面, 當在 D 及 E 兩處, 在 D 點, 拱壓線適與核線相切, 其應力為

$$\sigma_d = \frac{2}{25} \times \frac{4200}{100} = 3.36 \text{ kg/cm}^2.$$

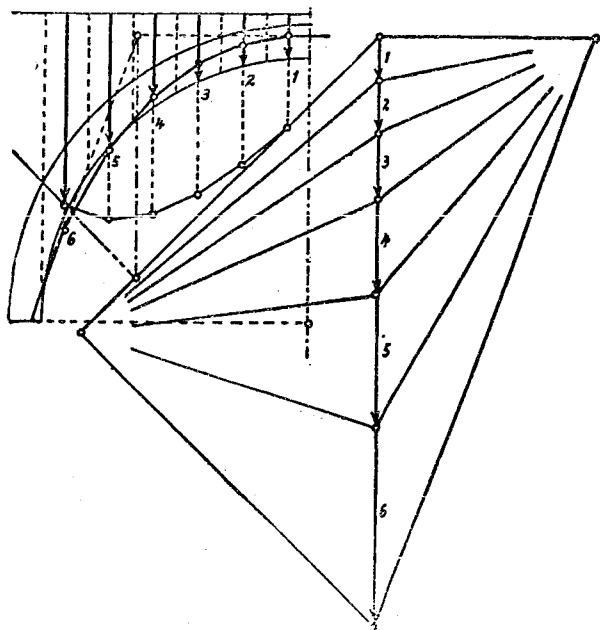
求 E 點, 拱壓線離拱核線為 10 cm, 距中心為 2.5 cm, 其應力為

$$\sigma_e = \frac{5040}{25 \times 100} \left(1 + \frac{6 \times 2.5}{25} \right) = 3.25 \text{ kg/cm}^2.$$



第七節 高矢度拱

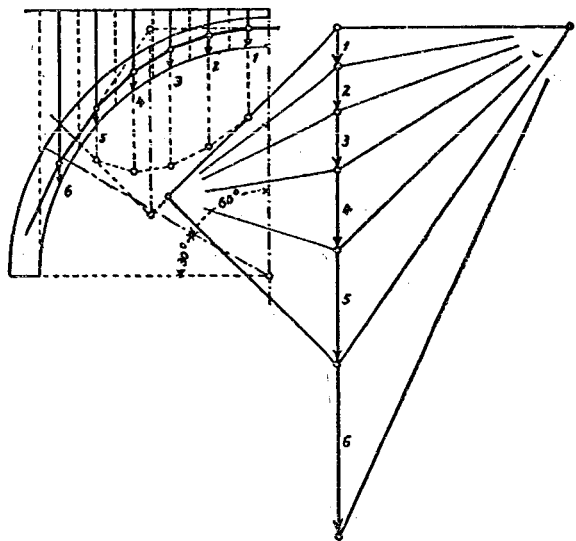
拱頂在拱底之上，其高稱為矢度 (Stich)。按諸以往各例，矢度與跨度之比甚小，故在高矢度拱，當另例以詳之，第 208 圖示半圓拱之最小拱壓線。該線在拱頂經心核上緣，在拱底經心核下緣一如前法。但於此處，拱壓線與拱身並不如昔之相互湊合。當拱弧幾成垂直時，而拱壓線則仍傾斜，欲使拱壓線依拱弧而



第 208 圖

行，則應在拱底附近，非施有極大之荷重不可，故於半圓拱之拱壓線，普通僅取其由拱頂起向兩旁各 60° 角範圍內之中央部分，視為拱身下部作為拱基，或由拱壓線距拱緣最近處起，視若拱底，該處壓應力為最大，傾覆之危，亦由是始(第 209 圖)。

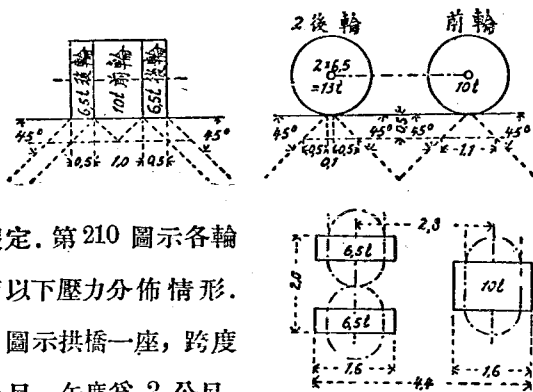
拱之下部，計算時既屬拱基，則於砌拱時，將該部與拱基同砌成水平層，而其上部則砌以拱式，此等砌法，當不以美觀為前提也，高矢度拱，除半圓外，尚有尖頂拱 (Spitzbogen)，橢圓拱 (Ellipso)，籃拱 (Korbbogen) 等。



第 209 圖

第八節 橋拱

橋拱 (Brückengewölbe) 之上，荷有填料及路基路面等重，故車輛之壓力，應向下分散，第 210 圖示蒸氣壓路機 通常視之在公路橋上最重之荷重，其壓力在土中向兩旁分散，恆取至 45° 為限，如第 210 圖所示者。但按諸實際，不甚符合，因在壓力之下方較諸兩旁受力為最大，漸遠則漸弱。但為便利計，故有均



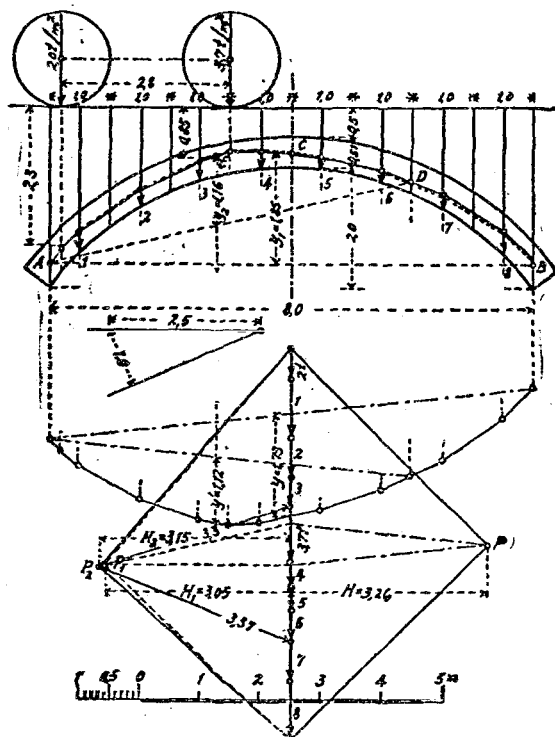
分之假定。第 210 圖示各輪於路面以下壓力分佈情形。第 211 圖示拱橋一座，跨度為 8 公尺，矢度為 2 公尺，

第 210 圖

拱厚為 0.51 公尺，拱頂填土高度為 0.5 公尺，該拱橋以蒸氣壓路機(如第 210 圖)為最大益重。今取一公尺拱深試驗之。分輪之壓力向兩旁 可使之至拱中心線為止，則前輪對於拱背之壓力區為 $1.0 + 2 \times 0.85 = 2.7m$ ，於一公尺深拱背之受力為 $10 : 2.7$

$= 3.7$ t, 兩後輪對於拱背之壓力區為 $2.0 + 2 \times 2.3 = 6.6$ m, 於一公尺深拱背之受力為 $13 : 6.6 = 2$ t. (第 211 圖)

今分拱身爲垂直八條分, 每份之寬爲一公尺, 設磚重及填土重均爲 1600 kg/m^3 , 則每公尺高之條分, 即 $1 \text{ m}^3 = 1600 \text{ kg}$, 如高度比例尺爲 $1 : 2.5$, 即縮小 $(2/5)$ 倍, 則每公尺高相當



第 211 圖

$\frac{5}{2} \times 1600 = 4000 \text{ kg}$. 繪極圖及經 A, B, C 三中點之拱壓線得

$$H = 3.26,$$

$$y = 1.73,$$

$$y_1 = 1.85,$$

$$H_1 = \frac{H \cdot y}{y_1} = \frac{3.26 \times 1.73}{1.85} = 3.05 \text{ m.}$$

其由虛線所示之拱壓線，在條分重 3 及輪重 3.7 t 間，向上傾，在條分重 6 及 7 間，向下傾，設 D 及 E 係上述兩斷面之心，核緣邊，繪經 A, E, D 三點之拱壓線得

$$y' = 1.12,$$

$$y_2 = 1.16,$$

$$H_2 = \frac{H \cdot y'}{y_2} = \frac{3.26 \times 1.12}{1.16} = 3.15 \text{ m.}$$

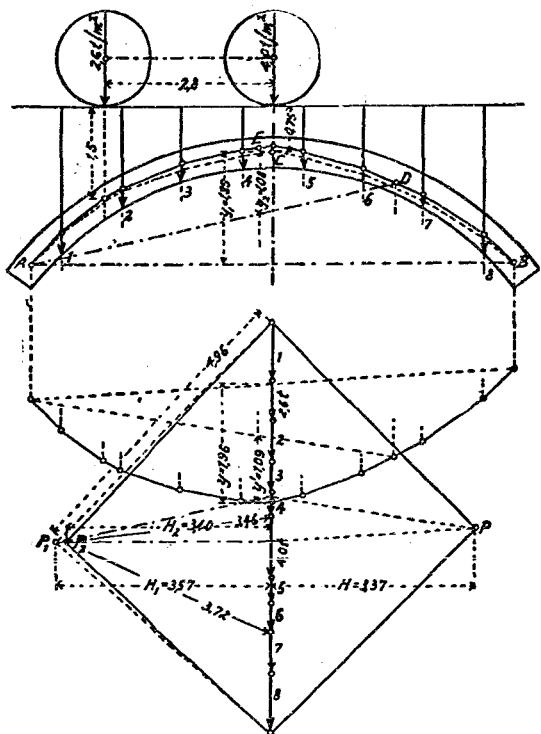
此新拱壓線，均未超越心核之外，其應力如次：

在 E 壓力 $4 \times 3.3 = 13.2 \text{ t}$ ，因着力點於心核緣邊，故

$$\sigma_d = \frac{2p}{3b \cdot f} = \frac{2 \times 13200}{3 \times 100 \times 17} = 5.2 \text{ kg/cm}^2.$$

在 D 壓力 $4 \times 3.37 = 13.48 \text{ t}$ ，因着力點於心核緣邊，可應用下式求之：

$$\sigma_d = \frac{2p}{3b \cdot f} = \frac{2 \times 13480}{3 \times 100 \times 17} = 5.3 \text{ kg/cm}^2.$$



第 212 圖

第 212 圖示前輪在橋拱中心線上，拱背之壓力區為 $1+2 \times 0.75 = 2.5$ m 於 1 公尺拱深間受力為 $10 : 2.5 = 4.0$ t，兩後輪對於拱背壓力區為 $2+2 \times 1.5 = 5.0$ m，於 1 公尺拱深間之受力為 $13 : 5.0 = 2.6$ t。

經 A, B, C 三中點，繪拱壓線(虛線)如前，其他凡不需要之線，均經省略，則

$$H_1 = \frac{H \cdot y}{y_1} = \frac{3.37 \times 1.96}{1.85} = 3.57 \text{ m.}$$

此拱壓線於 6, 7 兩點間，偏向拱之下緣，今以 D 點為拱身 $\frac{1}{3}$ 厚處，心核之下緣。經 A, B, C 三中點，繪拱壓線(虛線)如前，其他凡不需要之線，均經省略，則

$$H_1 = \frac{H \cdot y}{y_1} = \frac{3.37 \times 1.96}{1.85} = 3.57 \text{ m.}$$

此拱壓線於 6, 7 兩點間，偏向拱之下緣，今以 D 點為拱身 $\frac{1}{3}$ 厚處(心核之下緣)， E 點為拱身 $\frac{2}{3}$ 厚處(心核之上緣)。經 A, D, E 三點，另作新拱壓線一道，則

$$H_2 = \frac{H \cdot y}{y_2} = \frac{3.37 \times 1.09}{1.08} = 3.40 \text{ m.}$$

此新拱壓線之行程，較為適宜，計其應力如次：

1. 於 E 點之拱壓為 $4 \times 3.46 = 13.84$ 噸，

$$\sigma = \frac{2p}{3b \cdot f} = \frac{2 \times 13840}{3 \times 100 \times 17} = 5.4 \text{ kg/cm}^2.$$

2. 於 D 點之拱壓為 $4 \times 3.72 = 14.88$ 噸，

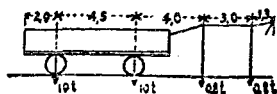
$$\sigma = \frac{2p}{3b \cdot f} = \frac{2 \times 14880}{3 \times 100 \times 17} = 5.8 \text{ kg/cm}^2.$$

按第 211 圖及第 212 圖所示壓路機之地位，爲求最大應用力，已極適當，其他地位，恆勿及也。

第九節 橋梁荷重

如第 210 圖所示壓路機，佔地 $2.0 \times 4.4 = 8.8 \text{ m}^2$ ，共重 $10 + 13 = 23$ 噸，則於每平方公尺橋面之荷重爲 $\frac{23}{8.8} = 2.6$ 噸，如所有橋面，盡爲壓路機所佔有，則非經濟，故普通僅以壓路機一架，在橋面上行走也。

此外亦有以運貨車之重量，爲設計之標準者（第 213 圖），其佔地至少爲



第 213 圖

$$14.8 \times 2.3 = 34 \text{ m}^2$$

總重爲 21.6 噸，於每平方公尺間之荷重爲

$$\frac{21.6}{34} = 0.64 \text{ 噸。}$$

任何橋梁亦可以人羣重量而計之，於每平方公尺間，可容五人或六人，相當重量 500 公斤，是等人羣之擁擠，僅得於城市橋梁之人行道上發現之，鄉村橋梁之人行道及普通橋梁之車馬道僅以 400 公斤爲每平方公尺間人羣之荷重也。

城市橋梁之計算，亦有僅以一壓路機爲荷重者，其四周則

悉載以人羣。次要道路之橋梁，可以第 214 圖所示之貨車為荷重，其佔地至少為 13.8×2.3

$$= 31.7 \text{ m}^2, \text{ 總重為 } 13.6 \text{ 噸},$$

因於每平方公尺橋面之荷重



第 214 圖

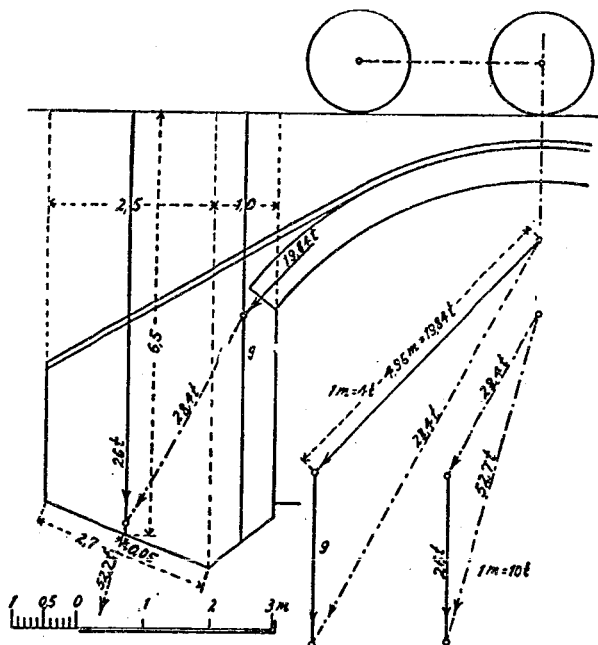
為 $\frac{13.6}{31.7} = 0.43 \text{ t}$ 。較之人羣荷重略多，鐵路橋梁應荷之重量，應以於該路上行駛之交通器具為準，幹路之車頭有七軸，軸重 25 噸，軸距 1.6 公尺，此於 11.2 公尺軌長荷有 175 噸，再分之於 3.5 公尺寬度間，遂成 $11.2 \times 3.5 = 39.2 \text{ m}^2$ ，故於每平方公尺橋面間之平均荷重為 $\frac{175}{39.2} = 4.5 \text{ 噸}$ 也。

第十節 橋臺及橋墩

第 213 圖示橋拱(第 211 圖及第 212 圖)之橋臺，當橋面無荷重，起最大剪力時，恐橋臺之稍有移動也。經以前多次之試驗得拱底最大壓力(第 212 圖)為

$$4 \times 4.96 = 19.84 \text{ 噸}.$$

此力復與條分 9 相合 成合力 $4 \times 7.1 = 28.4 \text{ 噸}$ 。橋臺之條分為 2.5 公尺寬，平均高度 6.5 公尺，每條分之重量為 $6.5 \times 2.5 \times 1.6 = 26 \text{ t}$ ，此力再與 28.4 噸相合 成合力 52.7 噸，其壓面寬度為 2.7 公尺，按圖量得其偏心距為 5 公分，依公式(59)

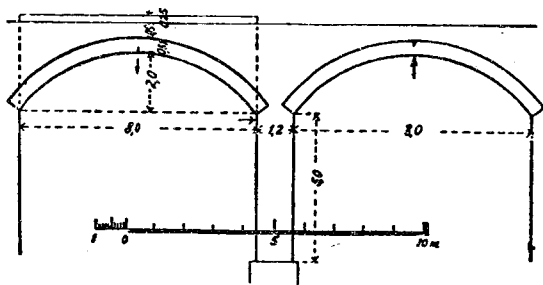


第 215 圖

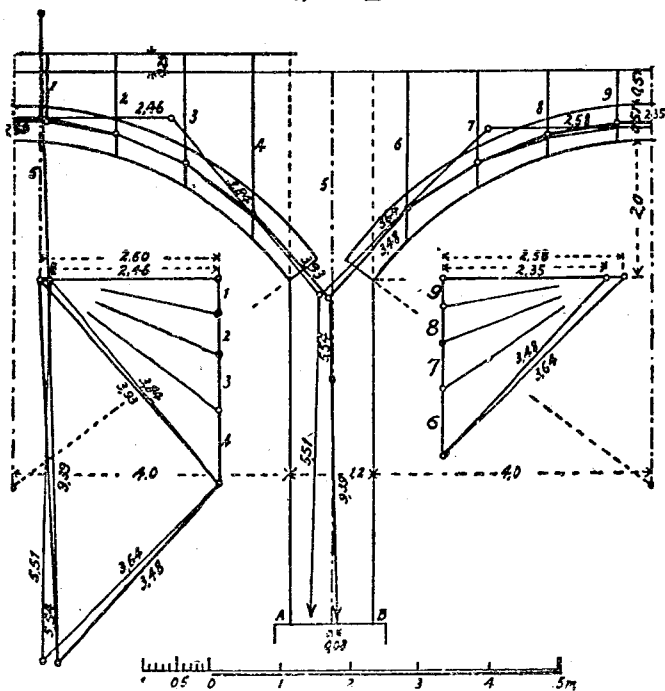
其應力當為

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{P}{F} \left(1 \pm \frac{6 \cdot e}{h} \right) = \frac{52700}{270 \times 100} \left(1 \pm \frac{6 \times 5}{270} \right) \\ &= 1.95(1 \pm 0.11) = 2.20 \text{ 或 } 1.74 \text{ kg/cm}^2.\end{aligned}$$

如兼顧橋臺後面之土壓力，則有增橋臺之穩固，於此姑勿計及。



第 216 圖



第 217 圖

第 216 圖示其橋墩，橋墩受拱壓情形，當以左拱有荷重而右拱無荷重時所起者，最爲不利 故於(第 216 圖)左拱荷有填土之相當量爲 25 公分高，因此拱壓較右邊爲大，而使右拱向上(在第 216 圖以箭頭所示者)，遂成最大拱壓線，而左拱則成最小拱壓線，有如第 217 圖以細線所示者，此二拱底之壓力(3.34×4 及 3.64×4 噸)，成向左之合力(5.51×4 噸)。故橋墩向右走動當無所慮也。

茲求適當拱壓分配計，將拱壓線略向中心運動，成爲第 215 圖中以粗線所示者，二拱底壓力之合力爲(5.54×4 噸)，此合力與橋墩之自重相合，遂成合力 $9.34 \times 4 = 37.36$ 噸，於 AB 面之偏心距爲 8 公分。

註：對於面積之心核及本章所用應力計算公式，詳編者“材料強弱學”一書。

第十一章 勢力線

第一節 勢力線之意義

任何結構物，受外力之作用，於結構物各部，所起之影響，謂之勢力 (Einflüsse)，如梁之攔支力，某定點之力距，橫力或彎曲度及桁構某桁應力等之勢力，要而言之，即梁桁等受力後，對於某部所生之結果是也。在昔橫力及力距等圖，係受不變值及不流動之荷重所繪成，今者對於梁之某點，受變值或移動荷重之作用，求其所起最大橫力或力距，現應用直角坐標系，以對於某部分之勢力為縱軸，在作用力之下方，繪各勢力之強度，連接各端，遂成勢力線 (Einflusslinien)，勢力線有直有曲有彎，其所表者有攔支力，力距，應力等，勢力之強度，與作用力之大小，其着力點及結構物之性質有關，今設勢力為 Y ，作用力為 P ，着力點離攔支處之距為 x ，結構物之性質為 c ，其公式如次：

$$Y = \phi(P, x, c) \dots\dots\dots (甲)$$

通常為利便計，取 P 為單位荷重，即 $P=1$ 變 (甲) 式為

$$Y = \phi(x, c) \dots\dots\dots (乙)$$

在定式結構 (statische bestimmte Konstruktion) $c=1$ 變 (2) 式爲

$$Y = \phi(x) \dots \dots \dots \text{(丙)}$$

在(甲), (乙) 及(丙) 公式如 x 及 Y 均爲一幂, 則其勢力線爲一直線, 或由二直線連成之, 如荷重非爲一公噸或一公斤, 而爲 P 公噸或公斤, 其勢力亦爲前之 P 倍。

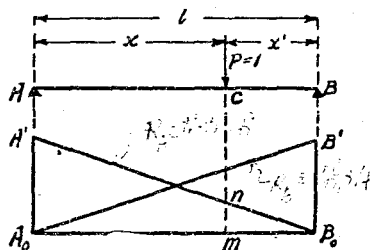
第二節 單孔閘支梁勢力線

一. 閘支梁勢力線

按第 218 圖, 有流動力 $P=1$ 作用於 AB 梁, 則其閘支力

$$A = \frac{P \cdot x'}{l} \quad \text{及} \quad B = \frac{P \cdot x}{l}$$

如作用力 P 在 C 點, 對於閘



第 218 圖

支力之勢力 $y = \frac{P \cdot x'}{l} = mn$; 如 $x' = 0$, 則 $y = 0$; 如 $x' = l$, 則

$y = 1$; 且其勢力線公式 $y = \frac{P \cdot x'}{l}$ 爲一直線公式, 故以 $A_0A' = 1$,

連接 $A'B_0$ 兩點, 此 $A'B_0$ 線爲閘支力 A 之勢力線. 同理 A_0B' 線爲閘支力 B 之勢力線,

二. 力距勢力線

按第 219 圖，設 $P=1$ ，沿梁之 $B'C$ 段移動，則其攔支力 $A = \frac{x'}{l}$ 對於 C 點之力距

$$M_c = \frac{ax'}{l} \dots\dots\dots(60)$$

其勢力線 $y = M_c = \frac{ax'}{l}$ 係一直線公式，如 $x' = 0$ ，則 $y = 0$ ，即經 B_0 點，如 $x' = l$ ，則 $y = a$ ，即經 A' 點， $A'B_0$ 勢力線之適用範圍，僅限於梁之 BC 段受力，因在此段間 $M_c = \frac{ax'}{l}$ 得以成立故也。

設 $P=1$ ，沿梁之 AC 段移動，其攔支力 $B = \frac{\xi}{l}$ ，

$$M_c = \frac{\xi}{l} \cdot b = y' \dots\dots\dots(61)$$

勢力線經過之點為：

$$\xi = 0 \quad y' = 0 \quad \text{經 } A_0 \text{ 點}$$

$$\xi = l \quad y' = b \quad \text{經 } B' \text{ 點}$$

勢力線 A_0B' 之適用範圍，僅限於在梁之 AC 段受力，惟在此段間 $M_c = \frac{\xi}{l} \cdot b$ 方為有效，兩勢力線相交於 C 點之下。由兩勢力線公式得

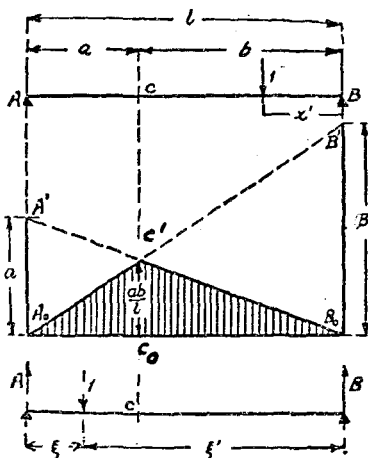
$$C_0C' = \frac{a \cdot b}{l} \text{ (第 219 圖).}$$

作圖法則： C 點力距勢力線之作法，先於攔支點 A_0 作縱距 a 達 A' 點，連接 $A'B_0$ 。再於攔支點 B_0 作縱距 b 達 B' 點，

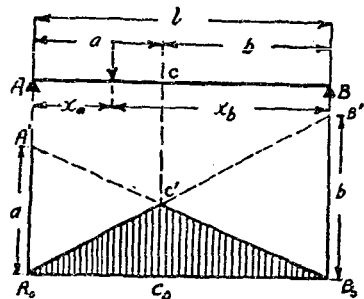
連接 A_0B' 兩線交於此 C' 點，此 $A_0C'B_0$ 線即係 C 點力距勢力線(第220圖)。

驗：兩勢力線之交點 C' ，應與 C 在同一垂直線上 $A_0C'B_0A_0$ 面 F_m ，謂之 C 點力距勢力面 (Einflussfläche)。

比例尺：勢力面之各縱距表力距，故圖中 a 或 b 非為公尺或公分而為公尺公噸或公分公斤，設長度比例尺為 $1:100$ 即一公分表一公尺公噸，其比例尺為 $1:200$ 即一公分表二公尺公噸，餘按此類推，當易解之。



第 219 圖



第 220 圖

三. 橫力勢力線

按第221圖，設 $P=1$ ，沿梁之 BC 段移動，其攔支力 A ，即係 C 點之橫力，故

$$A = \frac{x'}{l} = Q_c, \text{ 即}$$

$$Q_c = \frac{x'}{l} \dots\dots\dots(62)$$

其適用範圍，當以荷力在梁之 BC 段為限，理同前。

按第 222 圖，設 $P=1$ ，沿梁之 AC 段移動，其攔支

$$\text{力 } A = \frac{\xi'}{l}, \text{ 故 } Q_{c'} = A - 1$$

$$= \frac{\xi' - l}{l} = -\left(\frac{l - \xi'}{l}\right)$$

$$= -\frac{\xi}{l} = -B, \text{ 即}$$

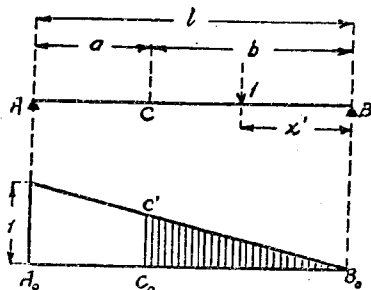
$$Q_{c'} = -B = -\frac{\xi}{l} \dots\dots\dots(63)$$

AC 段為其適用範圍，以橫力之性質為負，故繪在水平線之下方。公式 (63) 直

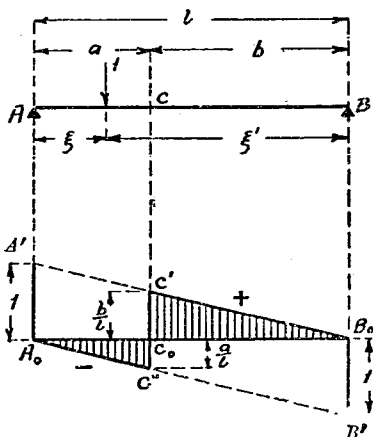
線經過點為

$$\xi' = 0 \quad Q_{c'} = -1 \quad \text{經 } B' \text{ 點}$$

$$\xi' = l \quad Q_{c'} = 0 \quad \text{經 } A_0 \text{ 點}$$



第 221 圖



第 222 圖

第 222 圖爲對於 C 點橫力勢力線，繪並行線以表者爲其勢力面。

作圖法則： C 點橫力勢力線之作法，先於攔支點 A_0 處向上作縱距 1 達 A' 點，連結 $A'B_0$ ，次於攔支點 B_0 處向下作縱距 1 達 B' 點，連結 $B'A_0$ ，再於 C_0 點作垂直線 $C'C_0C''$ ，遂得 $A_0C''C'B_0$ 曲折線，此即 C 點之橫力勢力線也， C 點在 AB 間任何處 $A'B_0$ 及 $B'A_0$ 兩直線，均適用之。

比例尺：力比例尺得任意選用，惟一經擇定，圖中各處均應按之量取。

討論： $A'B_0$ 及 A_0B' 兩線係並行，故沿梁各處，其垂直距均相等，由兩三角形相似之關係，得

$$C_0C' = \frac{b}{l} \quad \text{及} \quad C_0C'' = \frac{a}{l}.$$

設 $P=1$ ，適在 C 點左項，橫力 $Q_0 = -\frac{a}{l}$ ，如此單位荷力，自左而右，越過 C 點，則 C 點橫力之變化，當爲

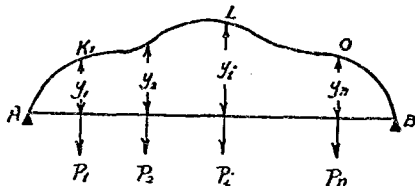
$$\Delta = \frac{a}{l} + \frac{b}{l} = \frac{a+b}{l} = 1.$$

第三節 最大最小勢力

一. 成組集力荷重

設在第 223 圖 AK_1LOE 爲 AB 梁之某種勢力線，其縱坐

標為 y ，該勢力線由單位荷重所作成，在 C 點之作用力為 P_1 ，則其勢力當為荷力 1 所作用者之 P_1 倍，即 $Y_1 = P_1 \cdot y_1$ 。



第 223 圖

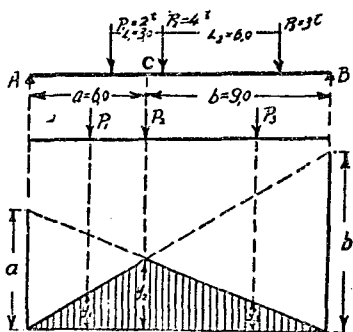
同理在 K 點作用之 P_2 力，其勢力 $Y_2 = P_2 \cdot y_2$ ，餘均類推。凡梁成組集力荷重時，不問力之強弱，着力點之地位，其總勢力當為

$$Y = \sum_1^n (P_i \cdot y_i) \dots\dots\dots (64)$$

如將此成組集力沿梁向左或右移動之，應用 (64) 公式，當易覺得其最大或最小勢力之集力地位及最大或最小勢力之值也。

例題 38 AB 梁受成組集力作用，求對於 C 點之最大力距 (第 224 圖)。

解 依作圖法，繪 C 點力距勢力線，次將 P_1, P_2, P_3 三力，同時向左或向右移動，覓其總勢力 $Y = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot Y_3$ 之最大值，經再次試驗，知以 P_2 移至 C 處為最大，其值如下：

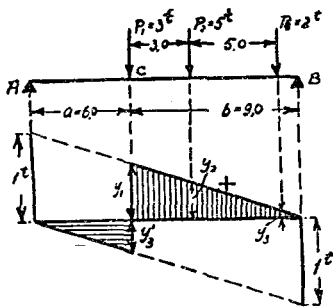


第 224 圖

$$M_c = 2 \times 1.9 + 4 \times 3.6 + 3 \times 1.6 = 3.8 + 14.4 + 4.8 = 23.0 \text{ mt.}$$

例題 39 AB 梁受成組集力作用，求其對於 C 點之最大最小橫力 (第 225 圖)。

解 依作圖法，繪 C 點橫力勢力線，如三個集力，均在 C 點之右邊，當得橫力之最大值，在其左邊當得最小值，計之如次：

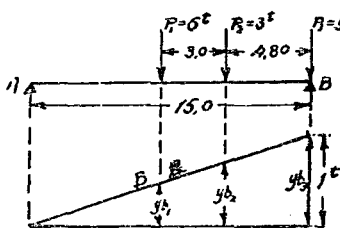


第 225 圖

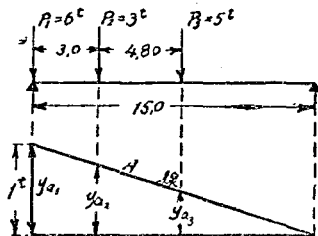
$$Q_{c \max} = +P_1 y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 = 3 \times 0.6 + 5 \times 0.4 + 2 \times 0.07 = 3.94t,$$

$$Q_{c \min} = -2 \times 0.4 - 5 \times 0.07 = -1.15t.$$

例題 40 AB 梁受成組集力作用，求其最大攔支力 (第 226 及第 227 圖)。



第 226 圖



第 227 圖

解 依作圖法，繪 A 及 B 兩攔支力勢力圖，某集力適作

用於攔支點時，其攔支力必為最大，故

$$B_{max} = 6.0 \times 0.48 + 3.0 \times 0.68 + 5.0 \times 1.0 = 9.92 \text{ t,}$$

$$A_{max} = 6.0 \times 1.0 + 3.0 \times 0.8 + 5.0 \times 0.48 = 10.8 \text{ t.}$$

二. 均佈荷重

設在第 228 圖 C 處，荷有重力 $p \cdot \Delta x$ ，按 p 為梁單位長度間之均佈力，其所起勢力為 $py \cdot \Delta x$ ，如將荷重長度擴大，由 x_1 至 x_2 ，其總勢力當為

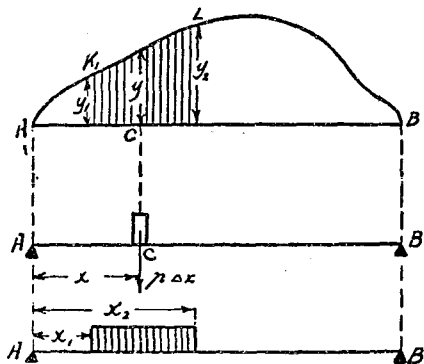
$$Y = \sum_{x_1}^{x_2} p \cdot y \cdot \Delta x = p \sum_{x_1}^{x_2} y \cdot \Delta x. \dots\dots\dots (65)$$

查 $\sum_{x_1}^{x_2} y \cdot \Delta x$ 為

在第 228 圖以並行線所示部分之面積，其勢力由 y_1 至 y_2 ，今以

$F_{y_1}^{y_2}$ 表其面積，則

$$Y_{y_1}^{y_2} = p F_{y_1}^{y_2} \dots\dots\dots (65a)$$



例題 41 受均佈荷

第 228 圖

重 p 作用之梁 AB ，應用勢力線法求攔支力 [第 229 圖 (a)]。

解 $F_0^l = \frac{1 \cdot l}{2}$ ，故 $A = p \cdot F = \frac{pl}{2}$ 。

同理 $B = \frac{pl}{2}$ 。

例題 42 前題，應用勢力線法，求 C 點之彎曲力距 [第 229 圖 (b)]。

$$\begin{aligned} \text{解 } F_0^l &= \frac{a \cdot b}{l} \cdot \frac{l}{2} \\ &= \frac{a \cdot b}{2}; \end{aligned}$$

$$\text{故 } M_c = p \cdot F_0^l = \frac{pab}{2},$$

$$b = l - a,$$

$$M_c = \frac{pa(l-a)}{2}.$$

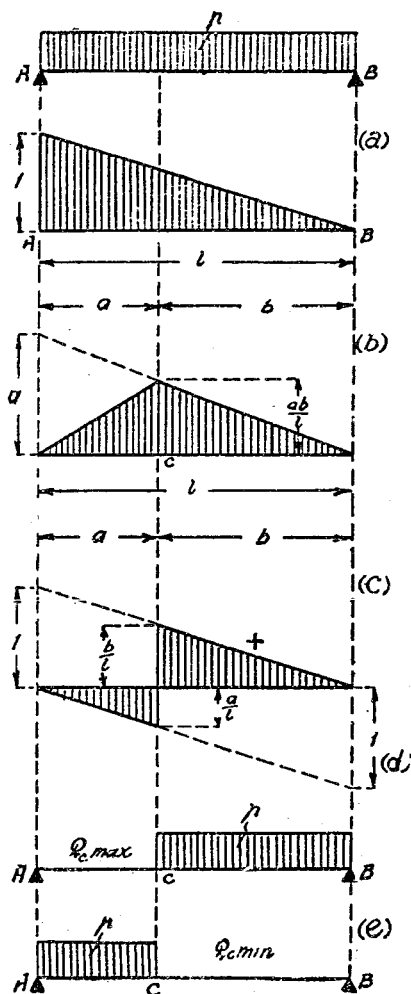
例題 43 前題，應用勢力線法，求 C 點之橫力 [第 229 圖 (c)]。

解 設正面積為 F_1 ，
負面積為 F_2 ，則

$$F_1 = \frac{b}{l} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{2l},$$

$$F_2 = -\frac{a}{l} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2l}.$$

因梁之全長受均佈荷重作用，故



第 229 圖

$$\begin{aligned}
 Q_c &= p(F_1 + F_2) = \frac{p}{2l}(b^2 - a^2) \\
 &= \frac{p}{2l}(b-a)(b+a) = \frac{p}{2l}(b-a)l.
 \end{aligned}$$

但 $b - a = l - a - a = l - 2a,$

故 $Q_c = \frac{p}{2}(l - 2a)$

如僅在梁之正面積一段間 (CB) 荷重 [第 229 圖 (d)], 可得最大橫力 $Q_{c \max}$

$$Q_{c \max} = p \cdot F_1 = \frac{pb^2}{2l}.$$

如僅在梁之負面積一段間 (AC) 荷重 [第 227 圖 (e)], 可得最小橫力 $Q_{c \min}$

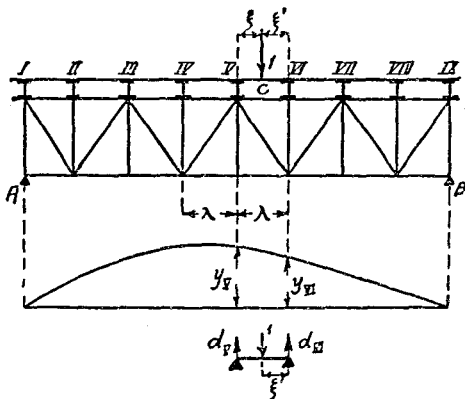
$$Q_{c \min} = p \cdot F_2 = -\frac{pa^2}{2l}.$$

第四節 間接荷重勢力線

按第 230 圖, 大梁上荷重, 非受直接作用, 先由短梁之傳達, 及其橫梁, 再至大梁, 今有單位荷重 1, 作用於 V, VI 間, 其距 V 為 ξ , 距 VI 為 ξ' , 設小梁之攔支力為 d_v 及 d_{vI} , 則

$$d_v = \frac{1 \cdot \xi'}{\lambda},$$

$$d_{vI} = \frac{1 \cdot \xi}{\lambda}.$$



第 230 圖

設單位荷重在 V 之勢力為 y_V 在 VI 之勢力為 y_{VI} ，則由 d_V 及 d_{VI} 所起之勢力為：

$$Y_V = y_V \cdot d_V = y_V \frac{\xi'}{\lambda};$$

$$Y_{VI} = y_{VI} \cdot d_{VI} = y_{VI} \cdot \frac{\xi}{\lambda}.$$

單位荷重在 C 對於大梁之勢力，當為前兩勢力之和，故

$$Y = y_V \cdot \frac{\xi'}{\lambda} + y_{VI} \cdot \frac{\xi}{\lambda},$$

$$Y = \frac{1}{\lambda} [y_V (\lambda - \xi) + y_{VI} \cdot \xi] \dots \dots \dots (66)$$

由第 231 圖及公式 (66) 相對照，知勢力 Y 僅依距離 ξ 而變化，且其關係為直線式，此直線即為 V, VI 兩點勢力之連結線。

因在 V, VI 兩點, 其荷重為直接, 依前法當可求得, 茲得結果如次:

凡梁受間接荷重時, 其勢力線在兩直接荷重點之間, 恆為直線, 此直線即係兩直接荷重點之勢力連結線, 其公式

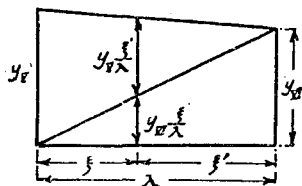
$$Y = \frac{1}{\lambda} (y_V(\lambda - \xi) + y_{VI}\xi)$$

之適用範圍, 當不限於原有勢力線之為直或彎也。

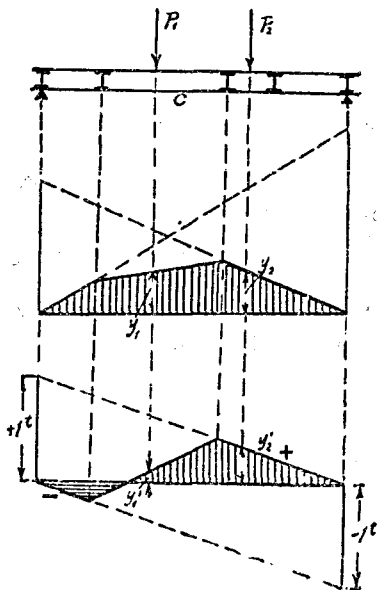
例題 44 有構造物及荷重, 如第 232 圖所示, 繪對於 C 點彎曲及橫力勢力線。

解 依法先繪對於 C 點彎曲勢力線及橫力勢力線, 然後將 C 點所在區, 勢力線之兩端以直線連接之, 即得其各值如次:

$$M_c = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2$$



第 231 圖



第 232 圖

$$Q_c = P_1 \cdot y'_1 + P_2 \cdot y'_2.$$

例題 45 並行桁梁 AB (第 233 圖), 繪對角桁 D_3 之受力勢力線.

解 (甲) 荷力作用於 IV 點之右邊

$$A = \frac{x'}{l} = Q,$$

$$D_3 = \frac{Q}{\cos \alpha} = \frac{x'}{l \cdot \cos \alpha},$$

$$D_3 = \frac{x'}{l \cdot \cos \alpha} \dots \dots \dots (67)$$

查公式 (67) 係表直線, 如

$$x' = l, \quad D_3 = \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$x' = 0, \quad D_3 = 0.$$

依幾何作圖法, 繪 $A'B_0$ 勢力線, 此線僅以荷力在 IV 點之右邊為限也.

(乙) 荷力作用於 III 點之左邊

$$Q = -\frac{\xi}{l}, \quad D_3 = \frac{Q}{\cos \alpha},$$

$$D_3 = -\frac{\xi}{l \cdot \cos \alpha} \dots \dots \dots (68)$$

查公式 (68) 係表直線, 如

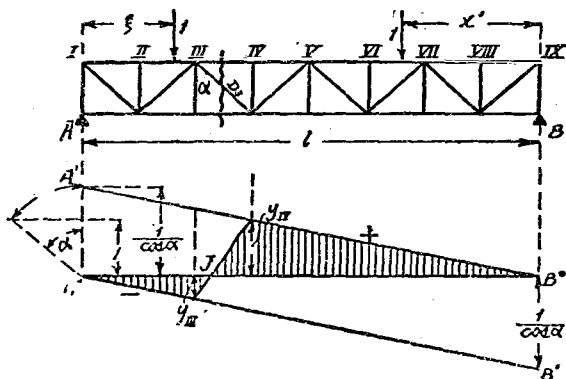
$$\xi = 0, \quad D_3 = 0;$$

$$\xi = l, \quad D_3 = -\frac{1}{\cos \alpha}.$$

應用同法，繪得 A_0B' 勢力線，此線以荷力作用在 III 之左邊為限。

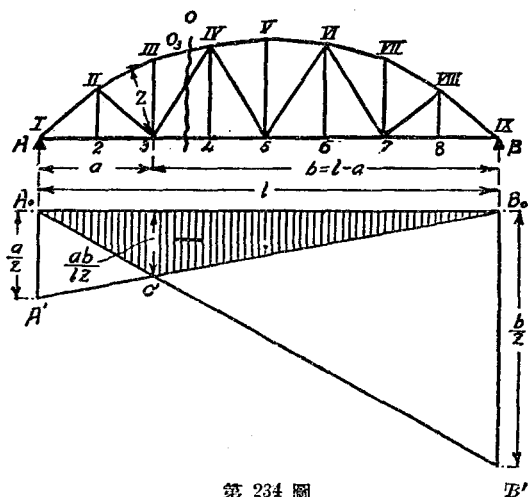
在 III, IV 區間之勢力線，依上定則，將 y_{III} 及 y_{IV} 之端，直線連接之，即得，圖中並行線所示之面，係所求之勢力面也。

設移動荷力在 J 點，其勢力為零，即 D_3 無力，移動荷力由左達 J 點， D_3 受壓力，經 J 點而右， D_3 受拉力，故 J 點謂之荷力分界 (Belastungsscheide)。



第 233 圖

例題 46 弧形桁梁 AB (第 234 圖) 繪上桁 O_3 之受力勢力線。



第 234 圖

解 上桁 O_3 之計算，應以 3 爲旋點切線之一面，對於是點外力之力距設爲 M_3 ，按切桁梁計算法 (Schnitt Verfahren)，得下式

$$O_3 \cdot z + M_3 = 0,$$

$$O_3 = -\frac{M_3}{z} \dots\dots\dots (69)$$

式中 z 爲上桁 O_3 離 3 之距，是爲定值，故 O_3 受力之大小，依 M_3 之變化而移，而 M_3 勢力線圖，前已詳論，今僅將其各勢力，以 z 除之，即成 O_3 之勢力線，故在攔支點 A 下爲 $\frac{a}{z}$ 之勢力及 B 下爲 $\frac{b}{z}$ 之勢力。查 O_3 之勢力爲負，故向下， $\frac{a}{z}$ 及 $\frac{b}{z}$ 應

以單位荷力乘之，故 $\frac{a}{z}$ 及 $\frac{b}{z}$ 均表力，比例尺得任意選用之。

作圖法則：在擱支點 A 下，用比例尺繪 $\frac{a}{z}$ 之縱距，其端與 B_0 相連接，得 $A'B_0$ 線，同法在擱支點 B 下，繪 $\frac{b}{z}$ 之縱距，其端與 A_0 相連接，得 A_0B' 線，此 $A_0C'B_0$ 線即係 O_3 之勢力線，而 C' 點定在 3 垂直之下方也。

例題 47 前題，繪下桁 U_3 受力勢力線 (第 235 圖)。

解 下桁勢力線之作法，與上桁者相似，今取 IV 為旋點，得

$$U_3 = \frac{M_{IV}}{r} \dots\dots\dots (70)$$

例題 46 及例題 47 每桁梁分區間，其勢力線為直線，在此亦適用之。

例題 48 前題，繪對角桁 D_3 受力勢力線 (第 236 圖)。

解 依切桁梁計算法，求 D_3 力，當以 L 為旋點，故

$$D_3 \cdot r_3 + M_L = 0,$$

$$D_3 = -\frac{M_L}{r_3} \dots\dots\dots (71)$$

M_L 為切之一面，對於 L 點外力力距，在切之左，起向右旋轉者 (與鐘錶指針同向)，在切之右，起向左旋轉者 (與鐘錶指針反向)，其勢力均為正，否則為負。

(甲) 荷力在切之右邊, 4, B 之間

$$A = \frac{1 \cdot x'}{l}, \quad M_L = -A \cdot C = -\frac{x'}{l} \cdot C,$$

$$D_3 = \frac{x' \cdot c}{l \cdot r_3} \dots\dots\dots (72)$$

式中 c, l, r_3 均係定數, 故公式 (72) 表直線, 如

$$x' = 0 \quad D_3 = 0 \quad \text{經 } B_0 \text{ 點}$$

$$x' = l \quad D_3 = \frac{c}{r_3} \quad \text{經 } A' \text{ 點}$$

連接 $A'B_0$ 兩點, 遂得勢力線, 惟僅限於 4, B 間適用之。

(乙) 荷力在切左邊, A, 3 之間

$$B = \frac{1 \cdot \xi}{l}, \quad M_L = +B(l+c) = \frac{\xi}{l} \cdot (l+c),$$

$$D'_3 = -\frac{\xi}{l} \cdot \frac{(l+c)}{r_3} \dots\dots\dots (73)$$

同理, 此公式亦表一直線, 如

$$\xi = 0, \quad D'_3 = 0;$$

$$\xi = l, \quad D'_3 = -\frac{(l+c)}{r_3}.$$

依此繪成 A_0B' 勢力線, 適用於 A, 3 之間。

3, 4 分區間之勢力線, 將 y_3 及 y_4 之兩端, 以直線連接之即得, 其力比例尺, 可任意選用, 與前同。

設 $A'B_0$ 及 A_0B' 兩直線之交點為 N , 應由下法定其地位。

$$\frac{NA'}{NB_0} = \frac{\frac{c}{r_3}}{\frac{l+c}{r_3}} = \frac{c}{l+c} = \frac{N_0A_0}{N_0A_0 + A_0B_0} = \frac{N_0A_0}{N_0A_0 + l'}$$

$$\text{即 } \frac{N_0A_0 + l}{N_0A_0} = \frac{l+c}{c} \quad \text{或} \quad 1 + \frac{l}{N_0A_0} = \frac{l}{c} + 1.$$

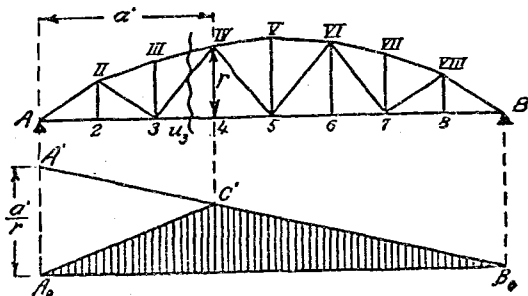
因知 $N_0A_0 = c$, 故兩勢力線之交點在 L 之垂直下方, 即力距旋點之垂直下方也。

上項證明, 亦可由公式 (72) 及 (73) 兩式中得之, 設 A_0 點為坐標系之零點, 則變 (72) 及 (73) 兩式為:

$$D_3 = (l - \xi) \frac{c}{lr_3} \dots\dots\dots (72a)$$

$$D'_3 = -\frac{\xi}{l} \cdot \frac{(l+c)}{r_3} \dots\dots\dots (73a)$$

在兩直線之交點, 其坐標為相等, 今設在此交點之橫坐標為 ξ_0' 則

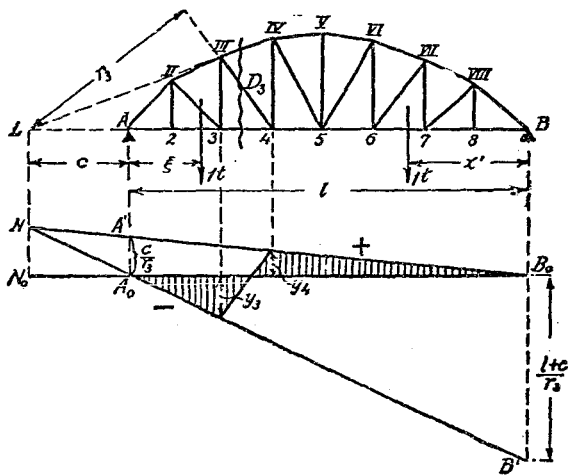


第 225 圖

$$(l - \xi'') \frac{c}{lr_3} = -\frac{\xi''}{l} \cdot \frac{(l+c)}{r_3},$$

故 $l \cdot c - c \cdot \xi'' = -\xi'' \cdot l - \xi'' \cdot c$ 即 $\xi'' = -c$.

作圖法則：繪 D_3 之勢力線，在 A_0 處作縱距 $\frac{c}{r_3}$ 達 A' 點，連接 $A'B_0$ 。同法於 B_0 處作縱距 $\frac{l+c}{r_3}$ 達 B' 點，連接 A_0B' ，再將



第 236 圖

$A'B_0$ 及 A_0B' 兩勢力線引長，相交於 N 點，此 N 點定在 L 點之垂直下方，在分區 3, 4 間之勢力線，依前法，將 y_3 及 y_4 之兩端以直線連接之便得。

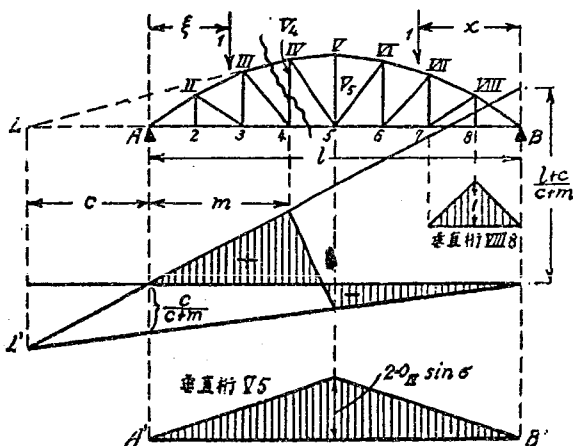
例題 49 前題，繪垂直桁 V_4 受力勢力線（第 237 圖）。

解 置橫切於桁構經 V_4 ，如單位荷力在切之右邊，則

$$V_4 = -\frac{x}{l} \cdot \frac{c}{c+m} \dots\dots\dots(74)$$

如單位荷力在切之左邊，則

$$V_4 = \frac{\xi}{l} \cdot \frac{l+c}{c+m} \dots\dots\dots(75)$$



第 237 圖

第 237 圖 V_4 勢力線之作法，自易明白，置橫力如第 237 圖所示者，則公式與作法，方屬合理，但 V_5 , II 2, 及 VIII 8 等桁，均列為例外也。

例題 50 . 前題，繪垂直桁 V_6 受力勢力線 (第 288 圖)。

解 V_5 桁受之力強

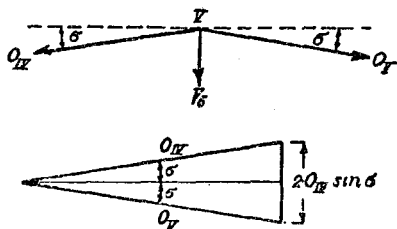
弱，視 V 點之情形已足，
即

$$O_{IV} \cdot \cos \sigma - O_V \cdot \cos \sigma = 0,$$

$$O_{IV} = O_V,$$

$$V_5 + 2 \cdot O_{IV} \sin \sigma = 0,$$

$$V_5 = -2 \cdot O_{IV} \sin \sigma.$$



第 238 圖

此即 V_5 之勢力線，可由 O_{IV} 之勢力線得之，僅將後者以 $-2 \cdot \sin \sigma$ 乘之便是，查 O_{IV} 勢力線，如例題 46 第 234 圖所示者係一三角形，頂角在 V 之垂直下方，今乘以 $2 \cdot \sin \sigma$ ，應用圖解法易得之，再將是值在梁之中央作縱距，連接 $A'B'$ 兩點，即成 V_5 受力勢力線矣（第 237 圖）。

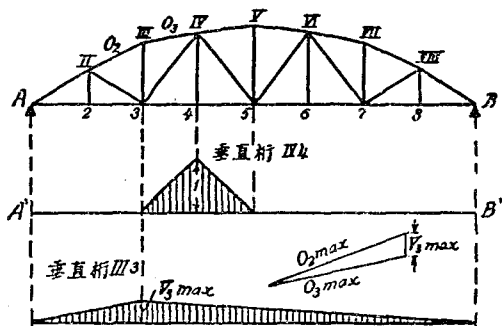
例題 51 前題，繪垂直桁 VIII 8 受力勢力線（II 2 桁同）。

解 定垂直桁 VIII 8 之受力，可於節點 8 之平衡定律中求得，繪成第 237 圖中垂直桁 VIII 8 勢力線圖，因其受拉力，故向上，如單位荷力在節點 8 處，其荷力為 1，漸遠則漸弱，及至 B 或 7 為零，故圖中以並行線所表示者即為 VIII 8 垂直桁之勢力面也。

例題 52 前題，繪垂直桁 III 3 受力勢力線（第 239 圖）。

解 垂直桁 III 3 勢力線之作法，與 V_5 桁者相似，以 III

點各力平衡之得 $V_{3 \max}$ ，依前法作成垂直桁 III₃，受力勢力線（垂直桁 V_4 同 VIII 8）。



第 239 圖

第五節 受集力作用之勢力線問題

(一) 單個集力

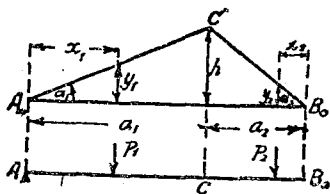
設 P 為集力，其勢力 $Y = P \cdot y$ 而最大勢力 $Y_{\max} = P \cdot y_{\max} = P \cdot h$ ，式中 h 為勢力多角形中最長縱距。

(二) 成組二個集力

設 $P_1 P_2$ 為成組集力，有定距，按第 240 圖所示荷力地位，則

$$Y = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2,$$

$$y_1 = x_1 \operatorname{tg} \alpha_1, \quad y_2 = x_2 \operatorname{tg} \alpha_2,$$



第 240 圖

$$Y = P_1 x_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + P_2 x_2 \operatorname{tg} \alpha_2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{a_1}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h}{a_2}$$

如將此成組集力向右移動 Δx 距，則荷力地位距攔支點變爲 $x_1 + \Delta x$ 及 $x_2 - \Delta x$ ，其總勢力因亦更改。

$$\Delta Y = \Delta x (P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - P_2 \operatorname{tg} \alpha_2),$$

$$\Delta Y = \Delta x \cdot h \left(\frac{P_1}{a_1} - \frac{P_2}{a_2} \right).$$

今以 Δx 向 $\left\{ \begin{array}{l} \text{右} \\ \text{左} \end{array} \right\}$ 移動爲 $\left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\}$ ，則 ΔY 之符號與括弧內之性質相 $\left\{ \begin{array}{l} \text{同} \\ \text{反} \end{array} \right\}$ 也。

在向右移動 ΔY 爲正，意即如括弧內之值爲正，則 ΔY 亦爲正，勢力有所增加，

$$\frac{P_1}{a_1} > \frac{P_2}{a_2} \text{ 時.}$$

同理，在向左移動，勢力有所增加，當在

$$\frac{P_1}{a_1} < \frac{P_2}{a_2} \text{ 時.}$$

綜上所得，再歸納定則如次：

在求最大(或最小)總勢力時，如 $\frac{P_1}{a_1} > \frac{P_2}{a_2}$ ，當將荷力向右移

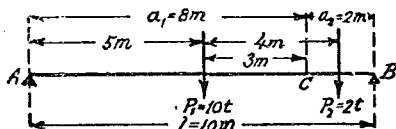
動，如 $\frac{P_1}{a_1} < \frac{P_2}{a_2}$ ，當將荷力向左移動，即在任何情形，總應向較小

均佈力之一邊移動，至其關係變更爲止，如 P 力超過 A, B, C 三者之一點是也。

在第 240 圖間，如 $\frac{P_1}{a_1} < \frac{P_2}{a_2}$ 則應向左移動，至 P_2 到 C 爲止，

達其最大總勢力 Y_{max} ，如 $\frac{P_1}{a_1} > \frac{P_2}{a_2}$ 則應向右移動， P_2 到 B 當在 P_1 到 C 之先，前者 P_2 之勢力爲零，若再向右移動，而總勢力仍有增加，候 P_1 達 C 方得最大總勢力也。

例題 53 有成組集力作用於梁 AB ，求對於 C 點之最大力矩(第 241 圖)。



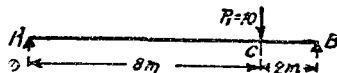
第 241 圖

解 就圖示情形

$$a_1 = 8 \text{ m}, \quad a_2 = 2 \text{ m},$$

$$\frac{P_1}{a_1} = \frac{10}{8} = 1.25, \quad \frac{P_2}{a_2} = \frac{2}{2} = 1.00.$$

按上定則，當將荷力向右移動，至 P_1 達 C 止(第 242 圖)，則

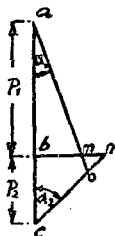


第 242 圖

$$M_{c, max} = \frac{a_1 \cdot a_2}{l} \cdot P_1 = \frac{8 \times 2}{10} \times 10 = 16 \text{ tm}.$$

由圖解求最大勢力，其法如次：

按第 243 圖，作 P_1P_2 二力，在一垂直線上，今以 $P_1 = \overline{ab}$ ， $P_2 = \overline{bc}$ ，在 a 作角 α_1 及在 c 作角 α_2 ，兩角均取自第 238 圖，則 $\overline{bn} = P_2 \operatorname{tg} \alpha_2$ 及 $\overline{bm} = P_1 \operatorname{tg} \alpha_1$ 如 $P_2 \operatorname{tg} \alpha_2 > P_1 \operatorname{tg} \alpha_1$ ，則荷力當向左邊移動，在此 $\overline{bn} > \overline{bm}$ ，即應向左移動，候 P_2 達 C 點而止，因 $\overline{bn} > \overline{bm}$ ，即由 a 及 c 所作二線之交點 O 在 P_1 之同方，故成立定則如下：



第 243 圖

二荷力之一，位於 O 點同方者，應以之作用於定點，方可得其最大力距。

(三) 成組多個集力

按第 244 圖， AB 梁受成組多個集力之作用，則

$$Y = (P_1y_1 + P_2y_2) + (P_3y_3 + P_4y_4).$$

設在 C 點左邊之合力： $R_1 = P_1 + P_2$ ；

在 C 點右邊之合力： $R_2 = P_3 + P_4$ 。

$$\text{故 } P_1x_1 + P_2x_2 = R_1 \cdot \xi_1, \quad x_1 = \frac{y_1}{\operatorname{tg} \alpha_1}, \quad x_2 = \frac{y_2}{\operatorname{tg} \alpha_2},$$

$$P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 = R_1 \cdot \xi_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = R_1 \cdot \eta_1.$$

η_1 為合力 R_1 之勢力，因得以下定則：

凡多力之總勢力 $\Sigma(P \cdot y)$ 與其合力之勢力相等。上項定則，

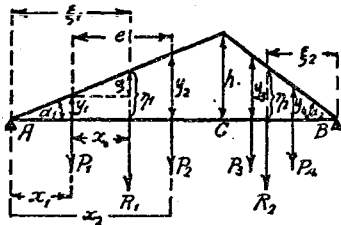
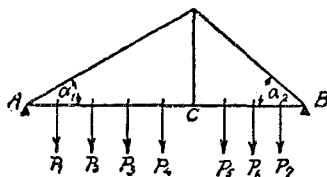
當限於荷力均在同一垂直線上。同理，梁之右邊，

$$P_3y_3 + P_4y_4 = R_2\eta_2.$$

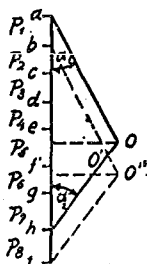
上例在 C 之左右各有二個荷力作用，如荷力在二個以上，其法仍可適用，今為一般應用計，表之如次：

$$\frac{R_1}{a_1} > \frac{R_2}{a_2} \rightarrow \quad \frac{R_1}{a_1} < \frac{R_2}{a_2} \leftarrow$$

由圖解求最大勢力，法同前，惟此間較為繁雜，因兩邊之關係，時起跳躍之變化，蓋一經移動， P_4 或 P_6 易越 C 點而過之， P_1 或 P_7 易越 A 或 B 之攔支點，而與梁不發生關係，或尚有其他新荷力上梁，此種情形在在均得使其關係起變化也。



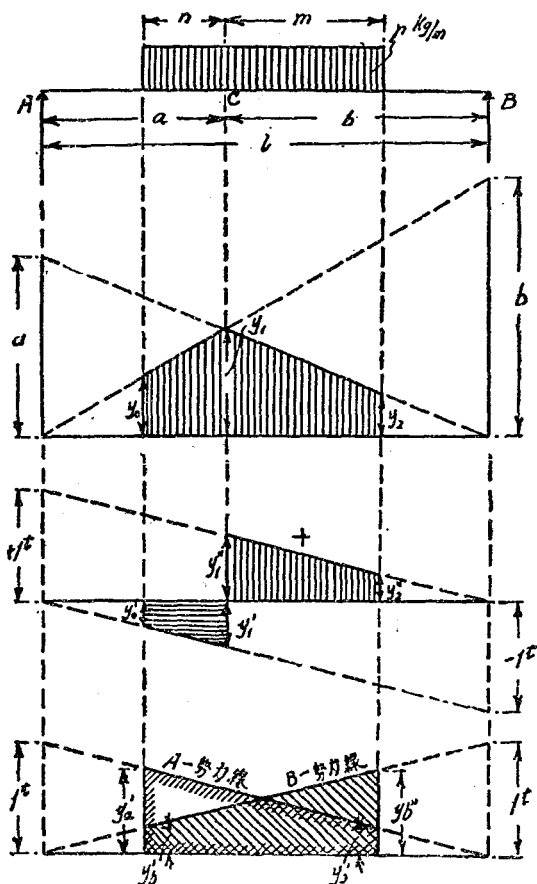
第 244 圖



第 245 圖

按第 245 圖所示荷重情形，應向左移動，以增其勢力如 P_6 達 C 點， P_1 亦離梁，但其最大勢力之條件，仍未到達，當再向左移， P_6 達 C 點，而其時沒有新荷力 P_6 上梁，則依 $bo''i$ 三角形， O'' 點適面對 P_6 ，故置 P_6 在 C 點為得最大勢力 Y_{max} 荷力

之地位，如遇特殊情形，應由多方試驗，方得分曉，如當 P_6 在 C ， P_6 在 C 或 P_7 在 C 等是也。



第 246 圖

第六節 受均佈力作用之勢力線問題

一. 直接均佈荷重

均佈荷重，得視之為極多集力，其總勢力故得由單位長度間荷重與其所屬各勢力之相乘積，即 $\Sigma(p \cdot y)$ 按 $p \cdot y$ 係表面積，而 $\Sigma(p \cdot y)$ 係表梁受均佈荷重一段間之勢力面（第 246 圖中以並行線所示之面），對於 C 點之力矩，橫力及攔支力如次：

$$M_c = l \left(\frac{y_0 + y_1}{2} \cdot n + \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot m \right),$$

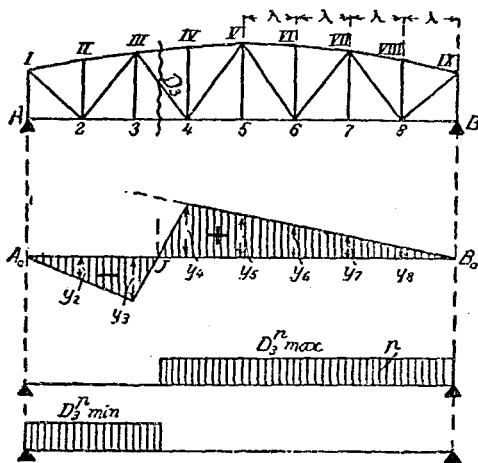
$$Q_c = p \left(- \frac{y'_0 + y'_1}{2} \cdot n + \frac{y''_1 + y''_2}{2} \cdot m \right),$$

$$A = (y'_a + y''_a) \frac{1}{2} (n + m) \cdot p,$$

$$B = (y'_b + y''_b) \frac{1}{2} (n + m) \cdot p.$$

二. 間接均佈荷重

按第 247 圖，就對角桁 D_3 之勢力線，如均佈荷重僅在 BJ 一段間， D_3 當可得最大拉力，如僅在 AJ 一段間，可得最大壓力也，如在每分區間完全荷重時，其力為 $p\lambda = P$ ，但在荷力分界處，荷力較 $p \cdot \lambda$ 力小，如仍視若與其他各區為同值，則所得結果較實有者略大，以增益其安全性，則



第 247 圖

$$Y_{max} = Py_4 + Py_5 + Py_6 + Py_7 + Py_8 = P \sum_4^8 (y),$$

$$Y_{min} = -P \sum_2^3 (y).$$

可直接應用兩腳圓規，將各縱距 y 加之，如以拉力為正，用 $\Sigma_+(y)$ 表之，以壓力為負，用 $\Sigma_-(y)$ 表之，則得

$$\left. \begin{aligned} Y_{max}^p &= p \cdot \lambda \Sigma_+(y), \\ Y_{min}^p &= p \cdot \lambda \Sigma_-(y). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (76)$$

設梁之自重為 g/m ，則因自重而起之勢力為

$$Y^g = g \cdot \lambda [\Sigma_+(y) + \Sigma_-(y)] \dots\dots\dots (77)$$

式中勢力縱距爲負時，應於其和之前，置以負號。

例題 54 設在第 247 圖， $\lambda = 4 \text{ m}$ ， $p = 3 \text{ t}$ ， $g = 4 \text{ t}$ ；求 D_3 之最大受力。

解 今設在圖中之勢力縱距力比例尺爲 $5 \text{ cm} = 1 \text{ t}$ ，則依法量得

$$\Sigma_{+}(y) = 30 \text{ cm},$$

$$\Sigma_{-}(y) = -12 \text{ cm};$$

故
$$Y_{\max}^p = \frac{30}{5} \times 4 \times 3 = 72 \text{ t},$$

$$Y_{\min}^p = -\frac{12}{5} \times 3 \times 4 = -28.8 \text{ t},$$

$$Y^p = 4 \times 4 \times \frac{(30 - 12)}{5} = +57.6 \text{ t}.$$

因知 D_3 受最大拉力爲 $72 + 57.6 = 129.6 \text{ t}$ 最小拉力爲 $57.6 - 28.8 = 28.8 \text{ t}$ 而無壓力也。

中 德 英 名 稱 對 照 表

中 名	德 名	英 名
力	Kraft	force
拉力	Zugkraft	tension
壓力	Druckkraft	compression
剪力	Schubkraft	shearing force
外力	äussere Kraft	external force
內力	innere Kraft	internal force
橫力, 剪力	Querkraft	shear
闌支力	Auflagerkraft	reaction or supporting force
水平推力	Horizontalschub	horizontal force
集力, 單力	Einzelne Last	concentrated force
均佈力	gleichmässig verteilte Last	uniform distributed force
土壓力	Erddruck	earth pressure
水壓力	Wasserdruck	water pressure
荷重, 承重	Belastung	load
自重, 死重	Eigengewicht	dead load
益重, 活重	Nutzlast	live load
向心荷重	zentrische Belastung	axial load
偏心荷重	exzentrische Belastung	eccentric load
混合承重	gemischte Belastung	concentrated loads and uniformly distributed load combined
均佈承重	gleichmässig verteilte Belastung	uniformly-distributed load
單力承重	Einzelbelastung	concentrated load
局部均佈承重	Streckenbelastung	Loaded uniformly over part moment
力距	Moment	Moment
彎曲力距	Biegemoment	bending moment
旋轉力距	Drehmoment	turning moment

中 名	德 名	英 名
鉗制力距	Einspannungsmoment	restrained moment
極距	Polweite	polar distance
支距, 跨度	Stützweite	span
光距, 淨寬度	Lichtweite	clear span
支持力距	Stützmoment	supported moment
孔間力距	Feldmoment	field moment
梁, 梁木	Balken	beam or girder
臂梁	Kragarm	cantilever beam
桁構梁	Fachwerktragen	truss
欄支梁	einfacher Balken	simple supported beam
鉗制梁	eingespannter Balken	fixed-end beam
連續梁, 多孔梁	durchlaufende Träger	continuous beam
拱	Gewölbe	arch
尖頂拱	Spitzbogen	sharped arch
籃拱	Korbbogen	flat or basket arch
橋拱	Brückengewölbe	arch of bridges
斷面積	Schnittfläche	sectional area
危險斷面	gefährdeter Querschnitt	dangerous section
裂面	Bruchebene	broken surface
力面	Kraftebene	force plane
勢力面	Einflussfläche	influence area
滑動面	Gleitfläche	sliding plane
彈性線	elastische Linie	elastic line
拱壓線	Drucklinie des Gewölbes	pressure line of arch
最大拱壓線	maximal Drucklinie	max. pressure line of arch
最小拱壓線	minimal Drucklinie	min. pressure line of arch
閉合線	Schlusslinie	closing line of force diagram
勢力線	Einflusslinie	influence line
旋點	Drehpunkt	turning point
欄支點	Auflagerpunkt	supporting point
重心點	Schwerpunkt	center of gravity
支點	Stützpunkt	support
角節點	Knotenpunkt	joint
極點	Pol	pole
極圖, 射線圖	Polfigur	force polygon

中 名	德 名	英 名
多角線圖	Seilpolygon	polygon diagram
力圖	Kräfteplan	force diagram
惰率	Trägheitsmoment	moment of inertia
抵率	Widerstandsmoment	section modulus
安全率	Sicherheitsgrad	factor of safety
拱底	Kämpfer	haunch of arch
拱頂	Scheitel	crown of arch
屋架, 屋頂架	Dachstuhl	roof truss
均衡, 平衡	Gleichgewicht	balance, equilibrium
荷力分界	Belastungsscheide	—
橋墩	Widerlager	abutment
橋墩	Pfeiler	pier
桁構	Fachwerk	truss
彎曲	Biegung	bending
摩擦	Reibung	friction
滑動摩擦	gleitende Reibung	sliding friction
轉動摩擦	rollende Reibung	rotating friction
繩索摩擦	Seilreibung	rope friction
摩擦係數	Reibungswert	coefficient of friction
摩擦角	Reibungswinkel	frictional angle
重心軸	Schwerachse	axis of center gravity
自然傾角	Natürlicher Böschungswinkel	angle of repose
定式結構	statisch bestimmte Konstruktion	statically determinate structure
不定式結構	statisch unbestimmte Konstruktion	statically indeterminate structure
上桁	Obergurt	top chord or top boom
下桁	Untergurt	bottom chord or bottom boom
垂直桁	Vertikale	vertical
斜桁	Diagonale	diagonal
矢高, 矢度	Stich	rise
趨向	Richtung	direction
性質	Richtungssinn	sense of the force

中華民國二十五年九月初版
中華民國二十七年十月四版

周製

F 四七六六上

職業學校
教科書
應用力學 一冊

◎(80744.1)

每冊實價國幣壹元

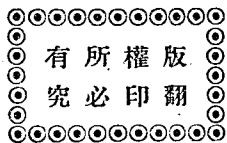
外埠酌加運費匯費

編者 唐壽寶

發行人 王雲五

印刷所 商務印書館

發行所 商務印書館



版權所有
翻印必究

(本書校對者 王煊 王養 王善 王蕃)



應用力學
實例卷元

66
505

621