Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Analysis III

Arbeitsblatt 64

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 64.1. Zeige, dass ein äußeres Maß die Subadditivitätseigenschaft für beliebige abzählbare Vereinigungen besitzt.

Aufgabe 64.2. Es sei M eine Menge, $\mathcal{P}$ ein Präring auf M,

$$\mu\colon \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf M und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$. Zeige, dass für jede Teilmenge $S \subseteq M$ die Beziehung

$$\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z))$$

gilt.

Aufgabe 64.3. Bestimme das Infimum über alle Summen von Intervalllängen zu einer Familie von offenen reellen Intervallen, die $\mathbb{Z}$ überdecken.

Aufgabe 64.4. Zu jeder rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$ sei ein Intervall $[a_q, b_q]$ derart gegeben, dass q in dessen Innern liegt, also $q \in]a_q, b_q[$. Ist

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [a_q, b_q] = \mathbb{R}?$$

Aufgabe 64.5. Bestimme das Infimum über alle Summen von Intervalllängen zu einer Familie von offenen reellen Intervallen, die $\mathbb{Q}$ überdecken.

Aufgabe 64.6. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ eine abzählbare Menge. Zeige, dass das Infimum über die Summe der Volumina der beteiligten offenen Intervall-Quader zu Überpflasterungen von T aus solchen Quadern gleich 0 ist.

Aufgabe 64.7. Es sei $T = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Zeige, dass das Infimum über die Summe der Flächen zu Überpflasterungen von T mit offenen Rechtecken gleich 0 ist.

Aufgabe 64.8. Es sei $T = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$. Zeige, dass das Infimum über die Summe der Flächen zu Überpflasterungen von T mit offenen Rechtecken gleich 0 ist.

Aufgabe 64.9. Es sei

$$f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion und T der (abgeschlossene) Subgraph von f. Zeige, dass das äußere Maß von T (zu dem Rechtecksprämaß) gleich dem bestimmten Integral $\int_a^b f(t)dt$ ist.

Aufgabe 64.10. Welche „vertrauten geometrischen Figuren“ kann man als (verallgemeinerte) Quader in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ auffassen?

Aufgabe 64.11. Es seien M und N zwei Mengen und sei $T \subseteq M \times N$ eine Teilmenge. Zu $x \in M$ sei $T(x) = \{y \in N \mid (x,y) \in T\}$. Zeige, dass $\{x\} \times T(x)$ die Faser der Hintereinanderschaltung

$$T \hookrightarrow M \times N \xrightarrow{p_1} M$$

über x ist.

Aufgabe 64.12. Es seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ zwei Messräume, die nicht leer seien und wobei die einelementigen Teilmengen messbar seien. Alle Teilmengen von $M \times N$ seien mit der durch $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ induzierten σ-Algebra versehen. Es sei $S \subseteq M$. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) S ist eine messbare Teilmenge von M.
(2) Es gibt ein $y \in N$ derart, dass $S \times \{y\} \subseteq M \times \{y\}$ messbar ist.
(3) Für alle $y \in N$ ist $S \times \{y\} \subseteq M \times \{y\}$ messbar.
(4) Es gibt ein $y \in N$ derart, dass $S \times \{y\}$ messbar in $M \times N$ ist.
(5) Für alle $y \in N$ ist $S \times \{y\}$ messbar in $M \times N$.

Aufgabe 64.13. Es sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass die Diagonale

$$\triangle = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}$$

eine messbare Teilmenge im Produktraum $X \times X$ ist.

Aufgabe 64.14. Es seien M, N_1, N_2 Messräume und es seien $f_1\colon M \to N_1$ und $f_2\colon M \to N_2$ messbare Abbildungen. Zeige, dass auch die Abbildung

$$(f_1, f_2)\colon\ M \longrightarrow N_1 \times N_2,\ x \longmapsto (f_1(x), f_2(x)),$$

messbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 64.15. (2 Punkte)

Es sei $\mathcal{P}$ ein Präring auf $\mathbb{R}$, der die Intervalle $[a, b]$, $a < b$, enthalte, und es sei μ ein äußeres Maß darauf, das auf diesen Intervallen den Wert $b - a$ besitze. Zeige, dass die Fortsetzung dieses äußeren Maßes auf allen abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ den Wert 0 besitzt.

Aufgabe 64.16. (3 Punkte)

Bestimme das Urbild der Einheitskreisscheibe $E \subseteq \mathbb{R}^2$ unter den Inklusionsabbildungen

$$\iota_y \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto (x, y).$$

Aufgabe 64.17. (3 Punkte)

Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (M_n, \mathcal{A}_n)$ Mengen mit darauf erklärten σ-Algebren. Zeige, dass die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ die kleinste σ-Algebra auf $M_1 \times \cdots \times M_n$ ist, für die alle Projektionen messbar sind.

Aufgabe 64.18. (4 Punkte)

Es seien X und Y zwei topologische Räume mit abzählbarer Topologie und mit den zugehörigen σ-Algebren der Borelmengen $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$. Zeige, dass das Mengensystem der Borelmengen auf dem Produktraum $X \times Y$ mit dem Produkt von $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$ übereinstimmt.