Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 24

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 24.1. Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} .$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 24.2.*

a) Formuliere den Satz von Cayley-Hamilton für eine $n \times n$-Matrix.

b) Bestätige durch Nachrechnen den Satz von Cayley-Hamilton für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} .$$

c) Beweise den Satz von Cayley-Hamilton für eine beliebige 2×2-Matrix.

Aufgabe 24.3. Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 24.4. Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton für eine obere Dreiecksmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 24.5. Es sei M eine diagonalisierbare Matrix mit dem charakteristischen Polynom χ_M. Zeige direkt, dass

$$\chi_M(M) = 0$$

gilt.

Aufgabe 24.6. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei

$$\psi = \varphi \oplus \cdots \oplus \varphi\colon V \oplus \cdots \oplus V \longrightarrow V \oplus \cdots \oplus V$$

die m-fache direkte Summe von φ mit sich selbst. Wie verhält sich das Minimalpolynom (das charakteristische Polynom) von ψ zum Minimalpolynom (zum charakteristischen Polynom) von φ.

Aufgabe 24.7. Schreibe die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4X^2 - 3X + 2 & X^3 - 2X + 8 \\ 3X^4 - X^3 - 2X^2 + 7 & X^4 - 6 \end{pmatrix}$$

(mit Einträgen aus $\mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Q}(X)$) als

$$A_4X^4 + A_3X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0$$

mit Matrizen $A_4, A_3, A_2, A_1, A_0 \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{Q})$.

Aufgabe 24.8. Es sei M eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K, dessen Minimalpolynom die Form

$$(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_k)$$

mit verschiedenen λ_i besitze. Zeige, dass M diagonalisierbar ist.

Aufgabe 24.9. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei M die Menge der n-ten Einheitswurzeln in K. Zeige, dass M eine Untergruppe der Einheitengruppe $K^\times$ ist.

Aufgabe 24.10.*

Zeige, dass jede komplexe Einheitswurzel auf dem Einheitskreis liegt.

Die folgende Aufgabe benötigt den Begriff der konvergenten Potenzreihe, wie er in der Analysis entwickelt wird.

Aufgabe 24.11. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei F eine komplexe, auf $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe der Form

$$F = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jn} z^{jn}.$$

Zeige, dass für jede n-te komplexe Einheitswurzel ζ die Gleichheit $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Eine n-te Einheitswurzel heißt *primitiv*, wenn sie die Ordnung n besitzt.

Aufgabe 24.12. Es sei $\zeta \in K$ eine n-te primitive Einheitswurzel in einem Körper K. Zeige die „Schwerpunktformel“

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

Aufgabe 24.13. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $b_1, b_2 \in K$ zwei Lösungen der Gleichung $X^n = a$ sind und $b_2 \neq 0$, so ist ihr Quotient b_1/b_2 eine n-te Einheitswurzel.
(2) Wenn $b \in K$ eine Lösung der Gleichung $X^n = a$ und ζ eine n-te Einheitswurzel ist, so ist auch ζb eine Lösung der Gleichung $X^n = a$.

Aufgabe 24.14. Es sei M die Permutationsmatrix zu einer Transposition. Zeige, dass M über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 24.15.*

Es sei der Zykel $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto \ldots \mapsto n \mapsto 1$ gegeben und sei M die zugehörige $n \times n$-Permutationsmatrix über einem Körper K.

a) Es sei $P \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $< n$. Erstelle eine Formel für $(P(M))(e_1)$.

b) Bestimme das Minimalpolynom von M.

c) Man gebe ein Beispiel für einen Endomorphismus φ auf einem reellen Vektorraum V mit untereinander verschiedenen Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ derart, dass $\varphi(v_1) = v_2$, $\varphi(v_2) = v_3$ und $\varphi(v_3) = v_1$ gilt und dass das Minimalpolynom von φ nicht $X^3 - 1$ ist.

Aufgabe 24.16. Von einer Permutation $\pi \in S_n$ sei die Zyklenzerlegung bekannt. Bestimme das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom der Permutationsmatrix M_π.

Aufgabe 24.17. Es sei $\pi \in S_n$ eine Permutation und M_π die zugehörige Permutationsmatrix über einem Körper K. Zu $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$V_J = \langle e_j,\, j \in J \rangle \subseteq K^n.$$

a) Zeige, dass V_J genau dann M_π-invariant ist, wenn $\pi(J) \subseteq J$ ist.

b) Zeige, dass es M_π-invariante Unterräume geben kann, die nicht von der Form V_J sind.

Aufgabe 24.18. Es sei K ein endlicher Körper. Zeige, dass jede Einheit in K eine Einheitswurzel ist.

Aufgabe 24.19.*

Bestimme die Ordnung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper mit 3 Elementen.

Aufgabe 24.20. Es sei K ein endlicher Körper und M eine invertierbare $n \times n$-Matrix über K. Zeige, dass M endliche Ordnung besitzt.

Aufgabe 24.21.*

Man gebe eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ der Ordnung 4 an.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.22. (4 Punkte)

Bestätige den Satz von Cayley-Hamilton durch eine explizite Rechnung für die Matrix
$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24.23. (4 Punkte)

Es sei M eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K und sei
$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \in K[X]$$
ein Polynom mit
$$P(M) = 0$$
und mit
$$a_0 \neq 0.$$
Zeige, dass M invertierbar ist und dass die inverse Matrix durch
$$M^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_1 + a_2 M + \cdots + a_m M^{m-1}\right)$$
beschrieben wird.

Aufgabe 24.24. (5 Punkte)

Es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und
$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$
und
$$\psi \colon W \longrightarrow W$$
Endomorphismen mit den Minimalpolynomen P bzw. Q. Zeige, dass das Minimalpolynom von
$$\varphi \oplus \psi \colon V \oplus W \longrightarrow V \oplus W$$
gleich dem normierten Erzeuger des Ideals $(P) \cap (Q)$ ist.

Aufgabe 24.25. (3 Punkte)

Bestimme die Ordnung der Matrix
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
über dem Körper $\mathbb{Z}/(5)$ mit 5 Elementen.

Aufgabe 24.26. (4 Punkte)

Zeige, dass eine Permutationsmatrix über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.