

Lineare Algebra

Arbeitsblatt 32

Übungsaufgaben

Die folgenden drei Aufgaben begründen, dass die über das Skalarprodukt eingeführte Orthogonalität mit der elementargeometrischen Orthogonalität übereinstimmt.

AUFGABE 32.1. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass für $u, v \in V$ die Gleichheit $\|v + u\| = \|v - u\|$ genau dann gilt, wenn $\langle v, u \rangle = 0$ ist.

AUFGABE 32.2. Begründe elementargeometrisch, dass im \mathbb{R}^2 die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen.

AUFGABE 32.3. Es sei

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ein Vektor.

a) Begründe elementargeometrisch, dass jeder Vektor der Form

$$v_{ij} = -a_j e_i + a_i e_j$$

zu $i \neq j$ senkrecht auf v steht.

b) Zeige, dass jeder Vektor

$$w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

mit

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$$

eine Linearkombination der v_{ij} ist (und damit senkrecht auf v steht).

c) Begründe, dass ein Vektor w , der im elementargeometrischen Sinn senkrecht auf v steht, die Bedingung $\sum_{i=1}^n a_i b_i = 0$ erfüllt.

AUFGABE 32.4. Bestimme, welche der folgenden Vektoren im \mathbb{R}^3 zueinander orthogonal bezüglich des Standardskalarproduktes sind.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 32.5. Bestimme, welche der folgenden Vektoren im \mathbb{C}^2 zueinander orthogonal bezüglich des Standardskalarproduktes sind.

$$\begin{pmatrix} 6 - 3i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 - 7i \\ -9 - 5i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3}i \\ 2 + i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 - 2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 + 2i \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 32.6.*

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Es sei $v \in V$ ein fixierter Vektor und $a \in \mathbb{K}$. Zeige, dass

$$\{u \in V \mid \langle u, v \rangle = a\}$$

ein affiner Unterraum von V ist.

AUFGABE 32.7. Diskutiere den Satz des Pythagoras im Sinne von Satz 32.3 im Vergleich zu der elementargeometrischen Version.

AUFGABE 32.8. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement ebenfalls ein Untervektorraum von V ist.

AUFGABE 32.9. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $u_i, i \in I$, ein Erzeugendensystem von U . Zeige, dass ein Vektor $v \in V$ genau dann zum orthogonalen Komplement U^\perp gehört, wenn

$$\langle v, u_i \rangle = 0$$

für alle $i \in I$ ist.

AUFGABE 32.10.*

Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im \mathbb{R}^3 .

AUFGABE 32.11. Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im \mathbb{R}^4 .

AUFGABE 32.12. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $v_i, i \in I$, eine Orthonormalbasis von V . Zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ sei der von $v_i, i \in J$, erzeugte Untervektorraum mit U_J bezeichnet. Zeige, dass das orthogonale Komplement von U_J gleich $U_{I \setminus J}$ ist.

AUFGABE 32.13. Betrachte eine Ecke in einem (rechtwinkligen) Zimmer. Bilden die drei Diagonalvektoren in den beiden anliegenden Wänden und dem Boden der Länge 1 eine Orthonormalbasis?

AUFGABE 32.14. Es sei V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei u_1, \dots, u_n eine Orthonormalbasis von V . Zeige, dass

$$u_1, iu_1, u_2, iu_2, \dots, u_n, iu_n$$

eine Orthonormalbasis des reellen Vektorraums V bezüglich des zugehörigen reellen Skalarprodukts ist.

AUFGABE 32.15. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $u_i, i \in I$, eine Orthonormalbasis von V . Zeige, dass für Vektoren $v = \sum_{i \in I} a_i u_i$ und $w = \sum_{i \in I} b_i u_i$ die Gleichheit

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} a_i b_i$$

gilt.

Die folgende Aufgabe ist die Grundlage der sogenannten *Fourier-Analysis*, bei der es darum geht, Schwingungen als unendliche Summe von trigonometrischen (harmonischen) Schwingungen darzustellen.

AUFGABE 32.16.*

Zeige, dass die Funktionen

$$f_m: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$f_m(x) := e^{2\pi imx}$$

zu $m \in \mathbb{Z}$ im Raum der stetigen Funktionen von $[0, 1]$ nach \mathbb{C} ein Orthonormalsystem bezüglich des durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f \bar{g} dx$$

gegebenen Skalarproduktes bilden. Man verwende dabei Grundtatsachen über die komplexe Exponentialfunktion.

AUFGABE 32.17.*

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des \mathbb{R}^3 an.

AUFGABE 32.18.*

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

des \mathbb{R}^3 an.

AUFGABE 32.19. Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des \mathbb{R}^3 , versehen mit dem Standardskalarprodukt, an.

AUFGABE 32.20. Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 4 - i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2 - i \end{pmatrix}$$

des \mathbb{C}^2 an.

AUFGABE 32.21. Erstelle eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 , die ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

AUFGABE 32.22. Der \mathbb{R}^3 sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \longmapsto 3x + y + 7z,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U .

AUFGABE 32.23. Der \mathbb{R}^4 sei mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y, z, w) \longmapsto 4x - 3y + 2z - 5w,$$

versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt. Man bestimme eine Orthonormalbasis für U .

AUFGABE 32.24. Formuliere und beweise den „orthonormalen Basisergänzungssatz“.

AUFGABE 32.25. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass für die orthogonalen Komplemente die Gleichheit

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$$

gilt.

AUFGABE 32.26. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Zu Untervektorräumen $U \subseteq U' \subseteq V$ ist

$$U^\perp \supseteq U'^\perp.$$

(2) Es ist $0^\perp = V$ und $V^\perp = 0$.

(3) Es sei V endlichdimensional. Dann ist

$$(U^\perp)^\perp = U.$$

(4) Es sei V endlichdimensional. Dann ist

$$\dim_K(U^\perp) = \dim_K(V) - \dim_K(U).$$

AUFGABE 32.27. Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeige, dass durch

$$V \longrightarrow V^*, v \longmapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle),$$

eine Isomorphie zwischen V und seinem Dualraum V^* gestiftet wird.

AUFGABE 32.28. Beweise Korollar 32.13 mit Hilfe von Aufgabe 32.27 und Lemma 15.6.

AUFGABE 32.29. Bestimme den Wert des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ unter der orthogonalen Projektion auf die von $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ erzeugte Gerade.

AUFGABE 32.30. Bestimme den Wert des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ unter der orthogonalen Projektion auf den von $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum.

AUFGABE 32.31. Es sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und es seien

$$U \subseteq W \subseteq V$$

Untervektorräume. Es bezeichne p_U^V die orthogonale Projektion von V auf U . Zeige

$$p_U^V = p_U^W \circ p_W^V.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 32.32. (3 Punkte)

Bestimme das orthogonale Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum im \mathbb{R}^4 .

AUFGABE 32.33. (3 (1+1+1) Punkte)

Die komplexen Zahlen \mathbb{C} seien mit dem Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$ versehen.

a) Bestimme zu dem von $4 + 7i$ erzeugten komplexen Untervektorraum von \mathbb{C} das orthogonale Komplement bezüglich $\langle -, - \rangle$.

b) Bestimme zu dem von $4 + 7i$ erzeugten komplexen Untervektorraum von \mathbb{C} das orthogonale Komplement bezüglich des Realteils zu $\langle -, - \rangle$ (also dem zugehörigen reellen Skalarprodukt).

c) Bestimme zu dem von $4 + 7i$ erzeugten reellen Untervektorraum von \mathbb{C} das orthogonale Komplement bezüglich des Realteils zu $\langle -, - \rangle$.

AUFGABE 32.34. (5 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die linear unabhängigen polynomialen Funktionen

$$1, x, x^2, x^3 \in V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

mit dem in Beispiel 31.6 beschriebenen Skalarprodukt an.

AUFGABE 32.35. (2 Punkte)

Wende das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 5 - 2i \\ 3 - 3i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 - i \\ -2 + 4i \end{pmatrix}$$

des \mathbb{C}^2 an.

AUFGABE 32.36. (4 Punkte)

Bestimme den Wert des Vektors $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ unter der orthogonalen Projektion auf den von $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9