Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Vorlesung 17

Kompaktheit

Bisher haben wir den Kompaktheitsbegriff nur für abgeschlossene und beschränkte Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}^n$ verwendet.

Teilmengen eines euklidischen Raumes, die sowohl abgeschlossen als auch beschränkt sind, nennt man kompakt. Auf topologischen Räumen, die nicht durch eine Metrik gegeben sind, kann man nicht von beschränkt sprechen, aber auch bei einem metrischen Raum, der keine Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist, führen die beiden Eigenschaften abgeschlossen und beschränkt nicht sehr weit. Jeder metrische Raum ist in sich selbst abgeschlossen und jede Metrik kann man so abändern, dass sie beschränkt wird, ohne dass die Topologie sich ändert. Schlagkräftiger ist das folgende rein topologische Konzept.

Definition 17.1. Ein topologischer Raum X heißt *kompakt* (oder *überdeckungskompakt*), wenn es zu jeder offenen Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{mit } U_i \text{ offen und einer beliebigen Indexmenge } I$$

eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ derart gibt, dass

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i$$

ist.

Diese Eigenschaft nennt man manchmal auch *überdeckungskompakt*. Häufig nimmt man zu kompakt noch die Eigenschaft Hausdorffsch mit hinzu. Es sei betont, dass diese Eigenschaft *nicht* besagt, dass es eine endliche Überdeckung aus offenen Mengen gibt (es gibt immer die triviale offene Überdeckung mit dem Gesamtraum), sondern dass man, wenn irgendeine irgendwie indizierte offene Überdeckung vorliegt, dann nur eine endliche Teilmenge aus der Indexmenge für die Überdeckung nötig ist.

Lemma 17.2. *Es sei X ein Hausdorffraum und es sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei Y kompakt. Dann ist Y abgeschlossen in X.*

Beweis. Siehe Aufgabe 17.21. □

Lemma 17.3. *Es sei X ein kompakter Raum und es sei $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Dann ist Y ebenfalls kompakt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 17.3. $\square$

Eine Variante des Kompaktheitsbegriffes ist die sogenannte *Folgenkomapktheit*, die besagt, dass jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Nach Aufgabe 2.9 ist dies im Fall einer abzählbaren Basis (es genügt eine abzählbare Umgebungsbasis für jeden Punkt) äquivalent dazu, dass jede Folge einen Häufungspunkt besitzt. Wir werden hier hauptsächlich Situationen besprechen, in denen überdeckungskompakt und folgenkompakt übereinstimmen.

Lemma 17.4. *Es sei X ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Dann ist X genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X einen Häufungspunkt (in X) besitzt.*

Beweis. Es sei X kompakt und sei eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben. Nehmen wir an, dass diese Folge keinen Häufungspunkt besitzt. Das bedeutet, dass es zu jedem $y \in X$ eine offene Umgebung $y \in U_y$ gibt, in der es nur endlich viele Folgenglieder gibt. Wegen

$$X = \bigcup_{y \in X} U_y$$

gibt es nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}.$$

Diese enthält einerseits alle Folgenglieder und andererseits nur endlich viele Folgenglieder, ein Widerspruch.

Es sei die Folgeneigenschaft erfüllt und sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung mit offenen Mengen. Da X eine abzählbare Basis besitzt, gibt es nach Aufgabe 2.8 eine abzählbare Teilmenge $J \subseteq I$ mit

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Wir können $J = \mathbb{N}$ annehmen. Nehmen wir an, dass die Überdeckung $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann ist insbesondere $\bigcup_{i=0}^{n} U_i \neq X$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und daher gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $x_n \notin \bigcup_{i=0}^{n} U_i$. Nach Voraussetzung besitzt diese Folge einen Häufungspunkt x. Da eine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ vorliegt, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_k$. Da x ein Häufungspunkt ist, liegen unendlich viele Folgenglieder in U_k. Dies ist ein Widerspruch, da nach Konstruktion für $n \geq k$ die Folgenglieder x_n nicht zu U_k gehören. $\square$

Der folgende Satz heißt *Satz von Heine-Borel*.

Satz 17.5. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *T ist überdeckungskompakt.*
(2) *Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T besitzt einen Häufungspunkt in T.*
(3) *Jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T besitzt eine in T konvergente Teilfolge.*
(4) *T ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) wurde allgemeiner in Lemma 17.4 bewiesen, für die Existenz einer abzählbaren Basis siehe Aufgabe 2.23. Die Äquivalenz von (2) und (3) ist klar. Die Äquivalenz von (3) und (4) wurde in Satz 36.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) gezeigt. □

Stetige Abbildungen auf kompakten Räumen

Lemma 17.6. *Es seien X und Y topologische Räume und es sei*

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Es sei X kompakt. Dann ist das Bild $\varphi(X) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 17.22. □

Die folgende Aussage ist eine wesentliche Verallgemeinerung von Satz 13.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) und von Satz 36.12 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).

Satz 17.7. *Es sei X ein nichtleerer kompakter topologischer Raum und sei*

$$f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $x \in X$ mit

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in X .$$

D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Beweis. Aufgrund von Lemma 17.6 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, also nach Satz 17.5 abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere ist $f(X) \leq M$ für eine reelle Zahl M. Wegen $X \neq \emptyset$ besitzt $f(X)$ wegen Satz 7.5 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) ein Supremum s in $\mathbb{R}$, das wegen der Abgeschlossenheit nach Korollar 33.18 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) zu $f(X)$ gehört, also das Maximum von $f(X)$ ist. Daher gibt es auch ein $x \in X$ mit $f(x) = s$. □

Bemerkung 17.8. Es sei X ein kompakter topologischer Raum. Aufgrund von Lemma 17.7 ist jede stetige Funktion

$$f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$$

beschränkt, und damit stimmt der Vektorraum $C(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen mit dem Vektorraum $C^b(X, \mathbb{R})$ aller stetigen und beschränkten Funktionen überein. Bei $X \neq \emptyset$ gibt es auf $C^b(X, \mathbb{R})$ stets die Supremumsnorm, die im kompakten Fall wieder wegen Lemma 17.7 zur Maximumsnorm wird, da das Supremum angenommen wird.

Die folgende Aussage heißt *Satz von Dini*.

SATZ 17.9. *Es sei X ein kompakter topologischer Raum. Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C(X, \mathbb{R})$, die punktweise und monoton gegen ein $f \in C(X, \mathbb{R})$ konvergiert. Dann ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Beweis. Die Funktionenfolge sei wachsend und es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir betrachten die offenen Mengen

$$U_n = \{x \in X \mid f(x) - f_n(x) < \epsilon\}.$$

Wegen der Monotonie ist

$$f(x) - f_{n+1}(x) \leq f(x) - f_n(x)$$

und daher ist $U_n \subseteq U_{n+1}$. Wegen der punktweisen Konvergenz ist

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Aufgrund der Kompaktheit gibt es ein n_0 mit

$$X = U_{n_0},$$

was die Behauptung bedeutet. □

Kompakte metrische Räume

LEMMA 17.10. *Ein kompakter metrischer Raum X ist vollständig.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Nehmen wir an, dass diese Folge nicht konvergiert. Nach Aufgabe 36.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) besitzt sie dann auch keinen Häufungspunkt. Das bedeutet, dass es zu jedem Punkt $y \in X$ eine offene Umgebung $y \in U_y$ derart gibt, dass es darin nur endlich viele Folgenglieder gibt. Aufgrund der Kompaktheit gibt es zur Überdeckung

$$X = \bigcup_{y\in X} U_y$$

eine endliche Teilüberdeckung, also

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i}.$$

Dann wären ab einem N alle Folgenglieder außerhalb dieser Menge, was absurd ist. □

Definition 17.11. Ein metrischer Raum M heißt *total beschränkt*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n \in M$ derart gibt, dass

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, \epsilon)$$

gilt.

Satz 17.12. *Es sei X ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *X ist kompakt.*
(2) *X ist folgenkompakt.*
(3) *X ist vollständig und total beschränkt.*

Beweis. Die Folgenkompaktheit ist äquivalent dazu, dass jede Folge einen Häufungspunkt besitzt. Von (1) nach (2) ergibt sich wie im Beweis zu Lemma 17.4. Aus (2) folgt (1) mit Lemma 17.4 wegen Aufgabe 17.20. Es sei (2) erfüllt. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Nach Voraussetzung besitzt sie eine konvergente Teilfolge. Daraus folgt aber schon, dass die Folge konvergiert. Der Raum ist also vollständig. Wenn X nicht total beschränkt ist, so gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass von den offenen Bällen $U(x, \epsilon)$ keine endliche Auswahl ganz X überdeckt. Wir können daher eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren mit der Eigenschaft, dass zu $n > m$. der Abstand

$$d(x_n, x_m) \geq \epsilon$$

ist. Eine solche Folge besitzt keine konvergente Teilfolge.

Es sei nun (3) erfüllt und wir wollen auf (2) schließen. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. Wir definieren induktiv unendliche Teilmengen $N_k \subseteq N_{k-1} \subseteq \mathbb{N}$ in folgender Weise: Es sei N_{k-1} schon konstruiert. Es sei $U\big(y_1, \frac{1}{k}\big), \ldots, U\big(y_r, \frac{1}{k}\big)$ eine offene Überdeckung von X, die es aufgrund der totalen Beschränktheit gibt. Dann gibt es eine unendliche Teilmenge $N_k \subseteq N_{k-1}$ derart, dass die x_n, $n \in N_k$, in einem der Bälle $U\big(y_i, \frac{1}{k}\big)$ liegen. Wir wählen eine Teilfolge x_{n_k} mit $n_k \in N_k$ und n_k aufsteigend. Dann ist für $\ell \geq k$ stets

$$d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) \leq \frac{2}{k}.$$

Es liegt also eine Cauchy-Folge vor, die wegen der Vollständigkeit konvergiert. $\square$

Abbildungsverzeichnis