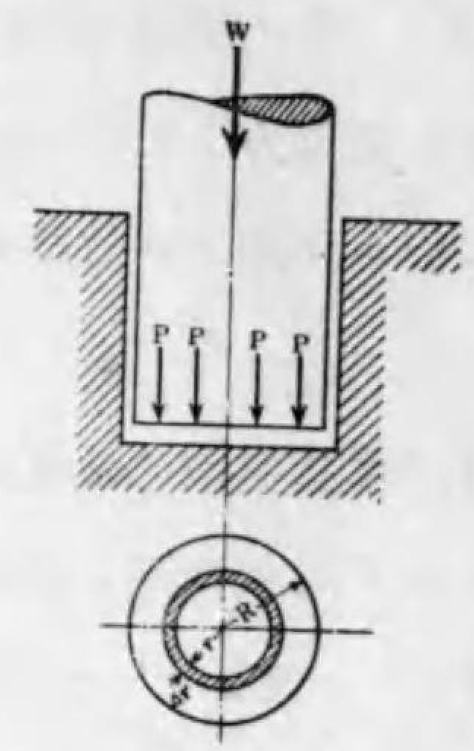
ト假定スルコトヲ得ルガ故ニ軸承ノ平面上單位面積毎ニ作用スル壓力 p ハ

$$p=\frac{\text{荷重}}{\text{面積}}$$

$$=\frac{W}{\pi R^2}$$



軸ノ中心ヲ中心トセル半徑 r, 幅 Δr ナル輪ヲ考フレバ, コノ輪ノ上ニ作用スル壓力 ΔW ハ

$$\Delta W=p\times(\text{輪ノ面積})$$

$$=p\times 2\pi r\Delta r$$

故ニ軸ト軸承トノ間ノ滑ノ摩擦係數ヲ μ トスレバ輪ノ上ニ作用スル摩擦力ハ垂直方向ノ壓力ト摩擦係數トノ積ナルガ故ニ

$$\mu\Delta W=\mu.p.2\pi r\Delta r$$

軸線ノ周リノ此摩擦力ノ moment ヲ ΔM_f トスレバ

$$\Delta M_f=\mu.\Delta W.r$$

$$=2\pi\mu p r^2\Delta r$$

故ニ全平面ニ作用スル摩擦力ノ軸線ノ周リノ moment ヲ M_f トスレバ

$$M_f=\int_0^R 2\pi\mu p r^2\,dr$$

$$=2\pi\mu p\int_0^R r^2\,dr$$

$$=2\pi\mu p\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R$$

$$=\frac{2\pi\mu p R^3}{3}$$

$$=\frac{2\mu WR}{3}$$

然ルニ或ル力ノ作用ヲ受ケテ廻轉スル物體ガ毎秒受クル仕事ハ

$$2\pi\times(\text{廻轉數毎秒})\times(\text{力ノ廻轉軸ノ周リノ moment})$$

ナリ。

故ニ毎秒摩擦ニヨリテ消費セラルヽ仕事ハ廻轉數毎秒ヲ n トスレバ

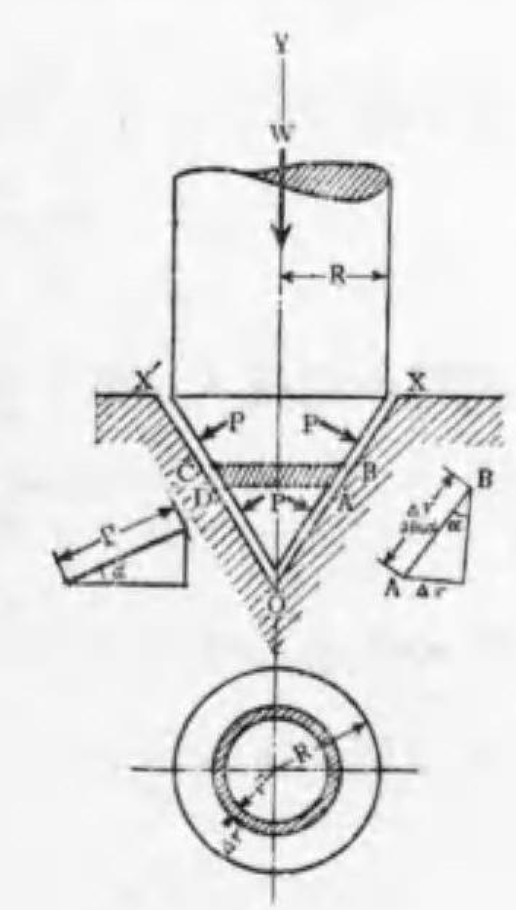
$$2\pi n M_f=\frac{4\pi\mu WRn}{3}$$

R ヲ米, W ヲ瓩ニテ表ハセバ摩擦ノタメニ消費セラルヽ馬力數ハ

$$\frac{4\pi\mu WRn}{3\times 75}$$

ナリ。

(2) 圓錐端ヲ有スル竪軸承



圖ノ如キ圓錐端ヲ有スル竪軸承ノ摩擦ニヨリテ消費セラルヽ馬力ヲ求メン。

荷重 W ガ圓錐ノ曲面上ニ一樣ニ分布セリト假定スレバ圓錐ノ曲面上ノ單位面積ニ作用スル壓力 p ハ次ノ關係ヲ滿足スベシ。

$$p\times(\text{圓錐ノ曲面積})=\frac{W}{\sin\alpha}$$

然ルニ

圓錐ノ曲面積 $=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times OX$ (OX ハ斜高)

$\therefore \quad p\times\pi R\times OX=\frac{W}{\sin\alpha}$

而シテ $\quad OX=\frac{R}{\sin\alpha}$

$\therefore \quad p=\frac{W}{\pi R^2}$

此式ハ圓錐ノ角 α ヲ含マザル故 α ガ如何ナル値ヲトルモ p ハ同一ニシテ其値ハ平面端ヲ有スル竪軸承ノ場合ニ於ケル値ニ等シ。

前頁ノ圖ニ於ケル微小輪 ABCD 上ノ壓力ハ

$$P\times 2\pi r AB$$

ナリ。然ルニ $AB=\frac{\Delta r}{\sin\alpha}$ ナルヲ以テ

微小輪 ABCD 上ノ壓力ハ

$$\frac{2\pi pr\Delta r}{\sin\alpha}$$

廻轉ニ抵抗スル微小輪 ABCD 上ノ摩擦力ハ

$$\mu.\frac{2\pi rp\Delta r}{\sin\alpha}$$

故ニ微小輪 ABCD 上ニ作用スル摩擦力ノ軸線ノ周リノ moment ヲ ΔM_f トスレバ

$$\Delta M_f=\mu.\frac{2\pi rp\Delta r}{\sin\alpha}.r$$

軸線ノ周リノ摩擦力ノ全體ノ moment ヲ M_f トスレバ

$$M_f=\int_0^R \mu p.\frac{2\pi r^2 dr}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\mu.p.2\pi}{\sin\alpha}\int_0^R r^2 dr$$

$$=\frac{\mu p 2\pi R^3}{3\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\mu.W.R}{3\sin\alpha}\text{ 米瓩}$$

故ニ摩擦ノタメニ消費セラルヽ馬力數ハ

$$\frac{4\pi\mu WRn}{3\times 75.\sin\alpha}$$

第　八　章

微　分　學〔II〕

74. 微分公式〔II〕

〔VI〕 函數ノ積ノ微係數

(i) $y=u.v$ 　トスレバ

(ii) $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$

(iii) $\Delta y=v.\Delta u+u\Delta v+\Delta u.\Delta v$

(iv) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=v.\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u.\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

(v) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=v.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u.\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

(vi) $\dfrac{dy}{dx}=v\dfrac{du}{dx}+u\dfrac{dv}{dx}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u.v)=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}}$$

系 (1) $v=c$ (定數) ナレバ $\dfrac{dc}{dx}=0$ ナルガ故ニ

$\dfrac{d}{dx}(cu)=c\dfrac{du}{dx}$ 　之レ公式 (II) ナリ

系 (2) 　$y=uvw$ ナルトキハ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\{u(vw)\}=vw\frac{du}{dx}+u\frac{d}{dx}(vw)$$

$$=vw\frac{du}{dx}+u(w\frac{dv}{dx}+v\frac{dw}{dx})$$

即 　$\dfrac{d}{dx}(uvw)=vw\dfrac{du}{dx}+uw\dfrac{dv}{dx}+uv\dfrac{dw}{dx}$

兩邊ヲ uvw ニテ割レバ

$$\frac{1}{uvw}\frac{d}{dx}(uvw)=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}+\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{w}\frac{dw}{dx}$$

同樣ニシテ 　$y=u_1u_2u_3\cdots\cdots u_n$ ナルトキハ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}+\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}+\cdots\cdots+\frac{1}{u_n}\frac{du_n}{dx}$$

〔VII〕 函數ノ商ノ微係數

(i) $y=\dfrac{u}{v}$ 　トスレバ

(ii) $y+\Delta y=\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$

(iii) $\Delta y=\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\dfrac{u}{v}=\dfrac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$

(iv) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$

(v) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

(vi) $$\frac{dy}{dx}=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

即 $$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}}$$

系 (1) $u=c$ (定數) ナレバ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right)=-\frac{c\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

例 (1) $y=(x^5-3\sqrt{x}+5)(x^3-\frac{1}{x^2})$ ノ微係數ヲ求メヨ。

〔解〕 $u=x^5-3\sqrt{x}+5$; $v=x^3-\frac{1}{x^2}$

$$\frac{du}{dx}=5x^4-\frac{3}{2\sqrt{x}};\quad \frac{dv}{dx}=3x^2+\frac{2}{x^3}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=(x^3-\frac{1}{x^2})(5x^4-\frac{3}{2\sqrt{x}})+(x^5-3\sqrt{x}+5)(3x^2+\frac{2}{x^3})$$

例 (2) $y=(x^2-5)(7x^5+3)(\sqrt{x}-4)$ ヨリ $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ。

〔解〕 $$\frac{dy}{dx}=(7x^5+3)(\sqrt{x}-4)\frac{d}{dx}(x^2-5)+(x^2-5)(\sqrt{x}-4)$$

$$\times\frac{d}{dx}(7x^5+3)+(x^2-5)(7x^5+3)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}-4)$$

$$=(7x^5+3)(\sqrt{x}-4)(2x)+(x^2-5)(\sqrt{x}-4)(35x^4)$$

$$+(x^2-5)(7x^5+3)(\frac{1}{2\sqrt{x}})$$

$$=2x(7x^5+3)(\sqrt{x}-4)+35x^4(x^2-5)(\sqrt{x}-4)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-5)(7x^5+3)$$

例 (3) $y=\frac{3x^3-5}{x^2-2}$

〔解〕 $$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2-2)\dfrac{d}{dx}(3x^3-5)-(3x^3-5)\dfrac{d}{dx}(x^2-2)}{(x^2-2)^2}$$

$$=\frac{(x^2-2).9x^2-(3x^3-5).2x}{(x^2-2)^2}$$

$$=\frac{x(3x^3-18x^2+10)}{(x^2-2)^2}$$

例 (4) $y=\frac{1}{x^n}$

〔解〕 $$\frac{dy}{dx}=\frac{-\dfrac{d(x^n)}{dx}}{x^{2n}}=\frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}=-nx^{-n-1}$$

問　題

次ノ各式ヲ微分セヨ。

(1) $y=x^3(2-x^2)$　　(2) $y=(5-x)(2+x^3)$

(3) $y=(3-\frac{1}{x})(6-\frac{3}{\sqrt{x}})$　　(4) $y=x^5(2+x)(8-x^3)$

(5) $y=\sqrt{x^3}(1-x)(2+\frac{1}{x^3})$

(6) $y=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)$

(7) $y=(1-2x^2)(5+3x^3)(7+8x^4)$

(8) $y=\frac{7x^5}{1-x^2}$

(9) $y=\frac{\sqrt{x}+3}{5-2x^3}$

(10) $y=\frac{3x^4-8}{a^2-x^2}$

(11) $y=\frac{x+7}{x^2-4}$

(12) $y=\frac{2x+5}{x^2-4}$

(13) $y=\frac{5-7x+8x^2}{1-3x+x^2}$

(14) $y=\frac{23}{9x^3+1}$

(15) $y=\frac{3-2x+5x^3}{x^5-6x+8}$

(16) $y=(1-x^3)(\sin x+10)$

(17) $y=(x^2\cos x+10)(1-\sin x)$

(18) $y=\frac{1-\sin x}{\cos x}$

(19) $y=\frac{\cos x}{a-b\sin x}$

(20) $y=\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$

(21) $y=x^{\frac{2}{3}}\sin 5x(1-3\cos 7x)$

(22) $y=(1-\sqrt{x})\left(3x-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{\sin x}\right)$

(23) $y=\frac{2ax+b}{3a^2(ax+b)^2}$

(24) $y=\frac{1-3x+7x^2}{5(x^2-1)^2}$

(25) $y=\frac{x^3\cos 5x}{(1-\sin 7x)^2}$

〔VIII〕 逆函數ノ微係數

y ヲ x ノ函數トスレバ x ハ y ノ逆函數ナリ

今 $y=f(x)$ トシ x ノ増分 $\varDelta x$ ニ對スル y ノ増分ヲ $\varDelta y$ トスレバ

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{1}{\frac{\varDelta x}{\varDelta y}}$$

$$\therefore\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}}$$

例 (1)　$x=y^3-3y+10$ ナルトキハ

$$\frac{dx}{dy}=3y^2-3=3(y^2-1)$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3(y^2-1)}$$

例 (2)　$y=x^{\frac{1}{5}}$ ナレバ

$$x=y^5$$

$$\frac{dx}{dy}=5y^4=5(x^{\frac{1}{5}})^4=5x^{\frac{4}{5}}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$$

〔IX〕 陰函數ノ微係數

y ハ x ノ陰函數

$$x^3+3xy+y^3=15$$

ナル場合ニハ，コノ方程式ヲ y ニ就テ解キ y ヲ x ノ陽函數トシテ表ハシ，然ル後 $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求ムルモノナレドモ，y ハ x ノ函數ニシテ y^3 ハ x ノ函數ノ函數ト考ヘ次ノ如ク微分スルコトヲ得。

$$\frac{d(x^3)}{dx}+\frac{d(3xy)}{dx}+\frac{d(y^3)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d(15)}{dx}$$

$$3x^2+3y+3x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+3y}{3x+3y^2}$$

例 (1)　圓 $x^2+y^2=a^2$ ヲ微分セヨ。

$$\frac{d(x^2)}{dx}+\frac{d(y^2)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d(a^2)}{dx}$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

例 (2)　楕圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上ノ點 $P(3, \dfrac{12}{5})$ ニ於ケル Slope ヲ求メヨ。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{25}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{9}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{2x}{25}+\frac{2y}{9}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{25y}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=3\\ y=\frac{12}{5}}}=-\frac{9\times 3}{25\times\frac{12}{5}}=\frac{9}{20}$$

問　題

次式ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ。

(1) $x^2+y^2-8xy=20$　(2) $x^3+y^3=3xy$

(3) $5x^4-7x^2y^3+10y^5=35$　(4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

(5) $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}$　(6) $b^2x^2-a_2y^2=a^2b^2$

(7) $ax^2+2hxy+by^2=k$

(8) 圓 $x^2+y^2=25$ 上ノ點 $P(4, -3)$ ニ於ケル Slope ヲ求ム。

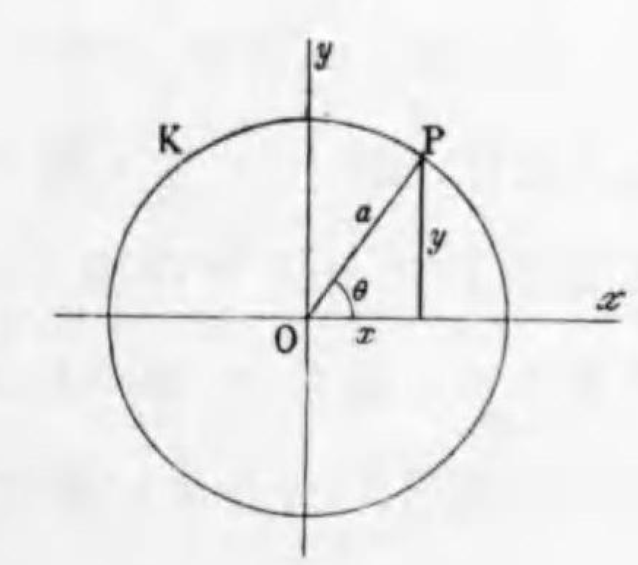
(9) 楕圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 上ノ點 $P(x'y')$ ニ於ケル Slope 及ビ切線ノ方程式ヲ求ム。

(10) 直角双曲線 $xy=k$ 上ノ點 $P(x', y')$ ニ於ケル Slope 及ビ切線ノ方程式ヲ求ム。

75. 媒介變數ニヨル曲線ノ方程式

(A) 圓 $x^2+y^2=a^2$ (i) 上ノ任意ノ點ヲ $P(x, y)$ トシ，OP ト x 軸ノナス角ヲ θ トスレバ

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos\theta\\ y&=a\sin\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(ii)}$$



ナル關係アリ

上式ノ θ ヲ 0 カラ 2π マデ變ズルトキハソレニツレテ x ト y トノ値ガ圓周上ノ各點ノ座標ヲ表ハ

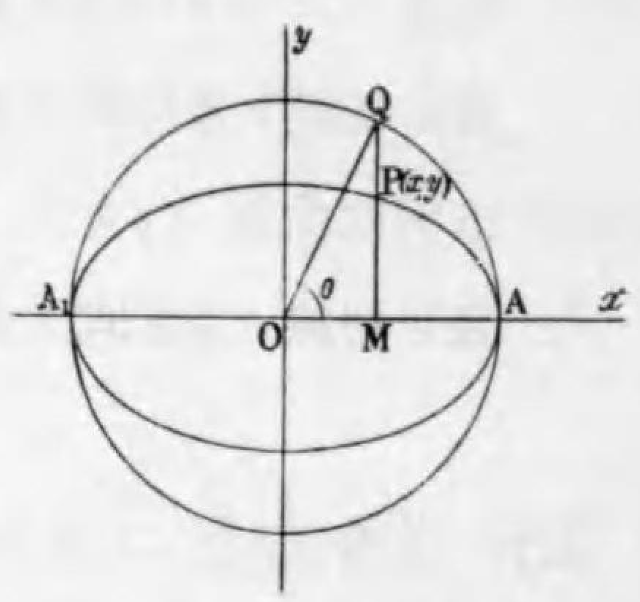
スモノナリ。

故ニ (ii) ハ θ ヲ變數トスル圓ノ方程式ナリトイフコトヲ得。カクノ如ク曲線上ノ點ノ座標 x, y ヲ第三變數 θ ノ函數トシテ表ハシタルトキ，コノ θ ヲ媒介變數 (Parameter) トイヒ之ニヨリテ表ハサレタル曲線ノ方程式 (ii) ヲ媒介變數ニヨル方程式 (Parametric equation) トイフ。

(ii) ヨリ θ ヲ消去スレバ Cartesian equation (i) ヲ得ベシ。

(B) 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \cdots\cdots$ (iii) 上ノ任意ノ一點 P ヨリ x 軸ニ垂線 PM ヲ引キ補助圓トノ交點ヲ Q トスレバ

$$x=\mathrm{OM}=\mathrm{OQ}\cos\theta=a\cos\theta$$



之レヲ (iii) ニ代入スレバ

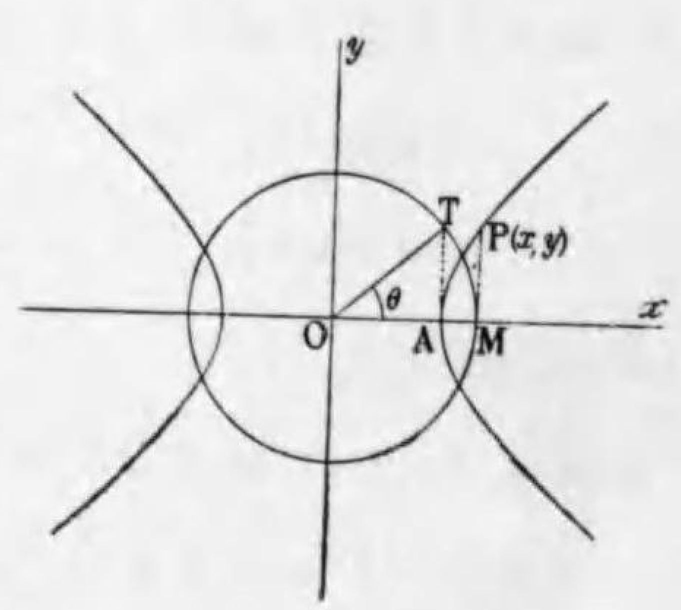
$$y=b\sin\theta$$

故ニ楕圓ノ Parametric equation ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos\theta \\ y&=a\sin\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}$$

ナリ。

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots$(v) 上ノ任意ノ點 P ヨリ x 軸ニ垂線 PM ヲ下シ OM ヲ半徑トスル圓ヲ畫キコノ圓ト A 點ニ於ケル切線トノ交點ヲ Q トシ，$\angle\mathrm{QOA}=\theta$ トスレバ



$$a=\mathrm{OA}=\mathrm{OT}\cos\theta=x\cos\theta$$

$$\therefore\quad x=a\sec\theta$$

之レヲ (v) ニ代入スレバ

$$y=b\tan\theta$$

∴ 双曲線ノ Parametric equation ハ

$$\left.\begin{aligned} x&=a\sec\theta \\ y&=b\tan\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(6)}$$

ナリ。

〔X〕 媒介方程式ノ微係數

$$x=f(t),\qquad y=\phi(t)$$

ニ於テ Δt ニ對スル x, y ノ增加ヲ $\Delta x, \Delta y$ トスレバ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

例 (1) $x=at^2$, $y=2at$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ。

〔解〕 $\dfrac{dx}{dt}=2at,\quad \dfrac{dy}{dt}=2a$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2a}{2at}=\frac{1}{t}$$

例 (2) 運動スル物體ノ時刻 t ニ於ケル位置ガ

$$x=4t,\qquad y=8t^2$$

ニテ與ヘラル、トキ x 方向ノ vel. v_x, y 方向ノ vel. v_y ヲ求メヨ。

マタ total vel. v ヲ求メヨ。

但シ total vel. $v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}$ ナリトス。

〔解〕 $v_x=\dfrac{dx}{dt}=4,\qquad v_y=\dfrac{dy}{dt}=16t$

$$\therefore\quad v=\sqrt{4^2+(16t)^2}$$

$$=4\sqrt{1+16t^2}$$

76. 微分法基本公式集〔I〕

〔I〕 $\dfrac{d(c)}{dx}=0$ 〔II〕 $\dfrac{d(c.u)}{dx}=c.\dfrac{du}{dx}$

〔III〕 $\dfrac{d(u+v)}{dx}=\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dx}$ 〔IV〕 $\dfrac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$

〔V〕 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

〔VI〕 $\dfrac{d(u.v)}{dx}=v\dfrac{du}{dx}+u\dfrac{dv}{dx}$

〔VII〕 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

〔VIII〕 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$

〔IX〕 $\dfrac{d}{dx}(x^2+y^2)=2x+2y\dfrac{dy}{dx}$

〔X〕 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$ 〔XI〕 $\dfrac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$

〔XII〕 $\dfrac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$

例 (1) $y=\sqrt{3x^2+4}$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ。

〔解〕 $u=3x^2+4$ トオケバ $y=u^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(u^{\frac{1}{2}})}{du}\cdot\frac{du}{dx}\cdot=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 6x$$

$$=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+4}}=\frac{3x\sqrt{3x^2+4}}{3x^2+4}.$$

〔別解〕 兩邊ヲ二乘シテ後微分スレバ

$$y^2=3x^2+4$$

$$\frac{d(y^2)}{dx}=\frac{d(3x^2+4)}{dx}$$

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=6x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x}{y}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}$$

$$=\frac{3x\sqrt{3x^2+4}}{3x^2+4}$$

例 (2)　$y=x\sqrt{x^2-a^2}$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ。

〔解〕　$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x^2-a^2}\cdot\dfrac{dx}{dx}+x\dfrac{d\sqrt{x^2-a^2}}{dx}$

$=\sqrt{x^2-a^2}+x\dfrac{d(u^{\frac{1}{2}})}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$　但シ $u=x^2-a^2$

$=\sqrt{x^2-a^2}+x\{\dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}.2x\}$

$=\sqrt{x^2-a^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$=\dfrac{2x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$

例 (3)　$y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求ム。

〔解〕　$y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\times\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$=\dfrac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{(x+1)-x}$

$=2x+1-2\sqrt{x^2+x}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(2x+1)-2\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+x}$

$=2-2\dfrac{d\sqrt{u}}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$　$[u=x^2+x]$

$=2-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}(2x+1)$

問　　題

次ノ函數ヲ微分セヨ。

(1) $5x^2-7x+10$

(2) $7\sqrt{x}-\dfrac{4}{x^3}+23$

(3) $ax^n-\dfrac{1}{\sqrt{bx}}+c$

(4) $x^3(1-x)^2$

(5) $\dfrac{(1-x^2)^2}{x^2}$

(6) $(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^2$

(7) $x^{\frac{2}{3}}(1-\sqrt{x})^2$

(8) $\dfrac{(1-x^3)^2}{x^2}$

(9) $(a-bx^2)^5$

(10) $\dfrac{(3-2x^2)^2}{x^5}$

(11) $\sqrt{(2+3x)^3}$

(12) $(x^2-5)^2(2x-\dfrac{1}{x})$

(13) $(5-2x^2)^{\frac{5}{2}}$

(14) $(1-x)\sqrt{4-3x^2}$

(15) $(\sqrt{x}-1)(5-x^2)^{\frac{3}{2}}$

(16) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{(1-x)^2}$

(17) $\dfrac{2-5x^2}{\sqrt{6x-5}}$

(18) $\dfrac{6-\sqrt{x}}{\sqrt{2-3x}}$

(19) $\cos x\sqrt{1-\sin x}$

(20) $\sin x(1+\cos x)^3$

(21) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

(22) $(\cos x-1)^2(\sin x+1)^3$

(23) $\dfrac{1-5\cos x}{1+3\sin x}$

(24) $\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin x}$

(25) $\dfrac{\sin 5x}{1-\cos 2x}$ (26) $\dfrac{(\sin x-\cos x)^2}{\cos 6x}$

(27) $\dfrac{(1-2\cos 3x)^2}{(1+3\sin 5x)^2}$ (28) $\dfrac{\cos 5x}{(1-\sin 2x)^2}$

(29) $\dfrac{\cos 5x}{1-\sin^2 x}$ (30) $\dfrac{(\sin x-1)^2}{\sin^2 x}$

(31) $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$ (32) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(33) $\sqrt{\dfrac{6x-5}{2x+3}}$ (34) $\sqrt{\dfrac{3-x^2}{3+x^2}}$

(35) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}$ (36) $\dfrac{a+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}}$

(37) $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ (38) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$

次ノ式ヨリ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ。

(39) $x^3y=10$ (40) $x^2-xy=5$

(41) $9x^2+4y^2=36$ (42) $x^2-4y^2=4$

(43) $\begin{cases} x=3t \\ y=4t \end{cases}$ (44) $\begin{cases} x=1-\dfrac{1}{t} \\ y=2t^2-\sqrt{t}+5 \end{cases}$

(45) $\begin{cases} x=3t^2-1 \\ y=2t^2 \end{cases}$ (46) $\begin{cases} x=8t^2+5 \\ y=3t^3-8 \end{cases}$

(47) $\begin{cases} x=\dfrac{\theta}{1+\theta} \\ y=3\theta^2+\dfrac{5}{\theta} \end{cases}$ (48) $\begin{cases} x=4\pi r^2 \\ y=\dfrac{4}{3}\pi r^3 \end{cases}$

(49) $\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta) \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$

(50) $\begin{cases} x=(a+b)\cos\theta-b\cos\dfrac{a+b}{b}\theta \\ y=(a+b)\sin\theta-b\sin\dfrac{a+b}{b}\theta \end{cases}$

77. 範　例

例 (1) 拋物線 $y^2=16x$ ノ切線ガ x 軸ト 45° ノ角ニテ交ルトイフ，ソノ切點ヲ求メヨ。

〔解〕 $y^2=16x$

$$2y\frac{dy}{dx}=16$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{8}{y}=\tan 45^\circ=1$$

$$\therefore\quad y=8$$

$$\therefore\quad x=4$$

故ニ切點 P ハ (4, 8) ナリ。

例 (2) 次ノ二圓ノ交點ニ於ケル交角ヲ求メヨ。

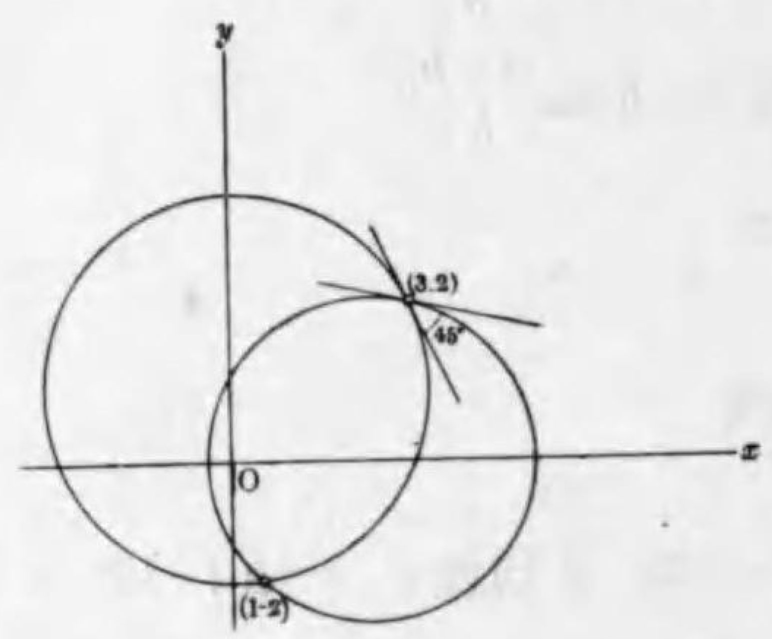
$$x^2+y^2-4x=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$x^2+y^2-2y=9 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

〔解〕 (i) ト (ii) ヲ聯立方程式トシテ解ケバ交點 (3, 2) 及ビ (1, −2) ヲ得。

(i) ヨリ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2-x}{y}$, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=3\\y=2}}=-\dfrac{1}{2}$

(ii) ヨリ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{1-y}$; $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\substack{x=3\\y=2}}=-3$

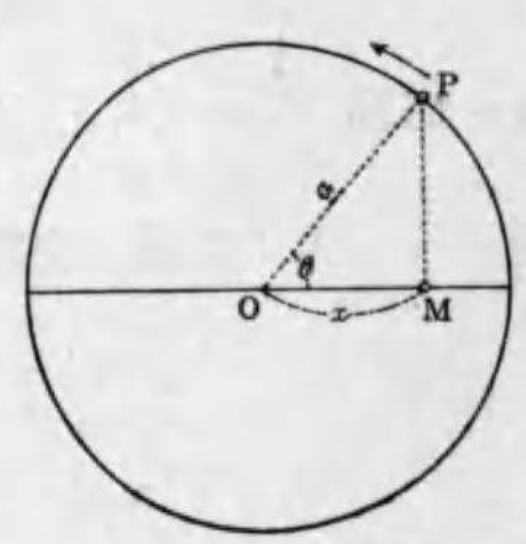


然ルニ傾度 m_1, m_2 ナル二直線ノ交角ハ

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{-\frac{1}{2}+3}{1+\frac{1}{2}\cdot 3}=1 \quad \therefore\quad \theta=45^\circ$$

故ニ二圓ハ (3, 2) ニ於テ 45° ニテ交ル他ノ交點 (1, −2) ニ於テモ同様ナリ。

例 (3) 圓周上ヲ一様ノ速サニテ走ル動點 P アリ圓ノ中心 O ヲ過ル定直線 Ox ニ P ヨリ下セル垂線ノ足ヲ M トスルトキハ M 點ノ速度及加速度ヲ求メヨ。



〔解〕 圓ノ半徑ヲ a, OM$=x$, $\angle$POM$=\theta$ トスレバ

$$x=a\cos\theta$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$$

P 點ハ圓周上ヲ同一ノ速サニテ走ルガ故ニ OP ノ角速度 ω ハ一定ナリ。

即 $\dfrac{d\theta}{dt}=\omega$

M 點ノ速度: $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}=-a\sin\theta\,.\,\omega$

$$=-a\omega\sin\theta$$

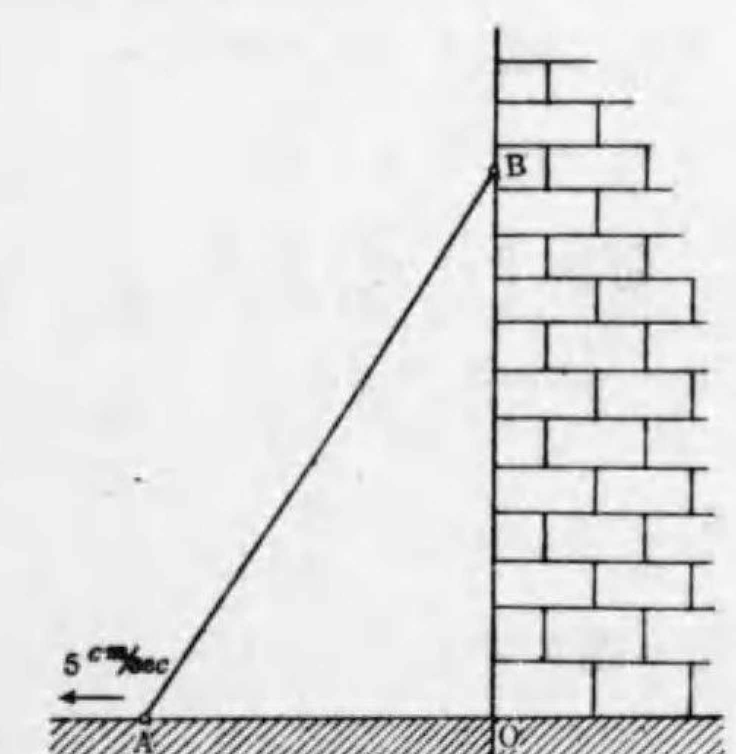
M 點ノ加速度: $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-a\,.\,\omega\,.\cos\theta\,.\,\dfrac{d\theta}{dt}$

$$=-a\,.\,\omega^2\cos\theta$$

$$=-\omega^2x$$

故ニ加速度ハ O 點ヨリノ距離ニ比例シ且ツ常ニ O 點ニ向ツテ居ル, コノ M 點ノ運動ヲ Simple harmonic motion トイフ。

例 (4) 壁ニカケラレタル長サ 10 m ノ梯子ノ下端ガ毎秒 5 cm ノ速サニテ水平ナル地面ヲ壁ニ直角ノ方向ニ辷リ去ルトキ, ソノ下端ガ壁ヨリ 6 m 離レタルトキ, ソノ上端ノ辷リ下ル速度ヲ求メヨ。



〔解〕 AB ハ梯子ニシテ OA ヲ x, OB ヲ y ニテ表ハセバ OA 即 x ハ時間ト共ニ長クナリ y ハ短クナル

且ツ x, y, AB ノ間ニハ

$$x^2+y^2=10^2$$

ナル關係アリ

之レヲ時間 t ニテ微分スレバ

$$\frac{d(x^2)}{dt}+\frac{d(y^2)}{dt}=\frac{d}{dt}(10^2)$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\ \frac{dx}{dt}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=6}=-\frac{6}{8}.5=\frac{-15}{4}$$

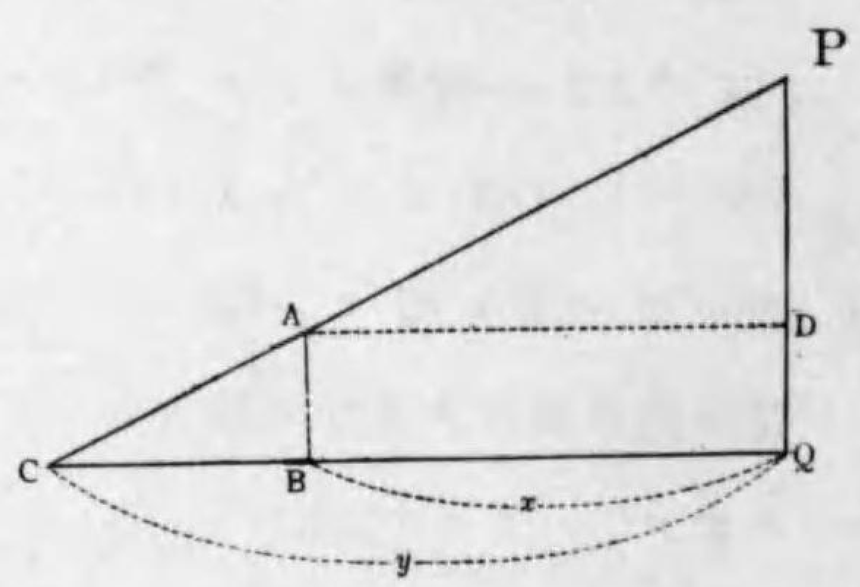
故ニ梯子ノ上端ハ $3\frac{3}{4}$ cm/sec ニテ辷リ下ル。

コヽニ(—)ハ時間ノ増加 $\varDelta t$ ニ對シテ y ハ短クナルコトヲ意味スルモノナリ。

例 (5) 身長 1.6 m ナル人ガ高サ 4 m ノ街燈ノ下ヲ毎秒 3 m ノ速サニテ歩ミ去ルトキ，ソノ人ノ影ノ端ノ速サヲ求メヨ。

マタソノ人ノ影ノ長サハ如何ナル割合ニテ長クナルカ。

人ヲ AB，街燈ヲ PQ，BC ヲ影トス，QB ヲ x トスレバ x ハ毎秒 3 m ヅヽ長クナル即 $\frac{dx}{dt}=3$ ナリ



QC ヲ y トスレバ $\frac{dy}{dt}$ ハ影ノ進ム速サナリ。

サテ △PAD∽△PCQ

$$\therefore\quad \frac{PD}{PQ}=\frac{AD}{QC}$$

$$\frac{2.4}{4}=\frac{x}{y}$$

$$y=\frac{4}{2.4}x$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{4}{2.4}\ \frac{dx}{dt}$$

$$=5.$$

故ニ影ノ速サハ 5 m/sec ナリ。

マタ影ノ長サ BC ヲ z トスレバ △ACB∽△PCQ

$$\frac{z}{y}=\frac{AB}{PQ}=\frac{1.6}{4};\quad \therefore\quad z=0.4y$$

$$\frac{dz}{dt}=0.4\ \frac{dy}{dt}=0.4\times5=2$$

故ニ影ハ毎秒 2 m ヅヽ長クナル。

例 (6) 發射セラレタル大砲ノ彈丸ノ t 時間後ノ位置ガ

$$x=500\sqrt{3}\,t$$

$$y=500t-16.1t^2$$

ナル式ニテ與ヘラルヽトキ (但シ t ハ秒，x 及 y ハ呎)

10 秒後ニ於ケル彈丸ノ速度ヲ求メヨ。

〔解〕 $$\frac{dx}{dt}=500\sqrt{3}$$

$$\frac{dy}{dt}=500-32.2t$$

$t=10$ トオケバ

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=10}=500\sqrt{3},\quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=10}=178$$

∴ 彈丸ノ速サ $v=\sqrt{(500\sqrt{3})^2+(178)^2}=884$ ft./sec

速度ノ方向 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{178}{500\sqrt{3}}\fallingdotseq 11°40'$

例 (7) Piston ノ velocity 及 acceleration.

下圖ニ於テ P ハ piston, PC ハ piston rod.

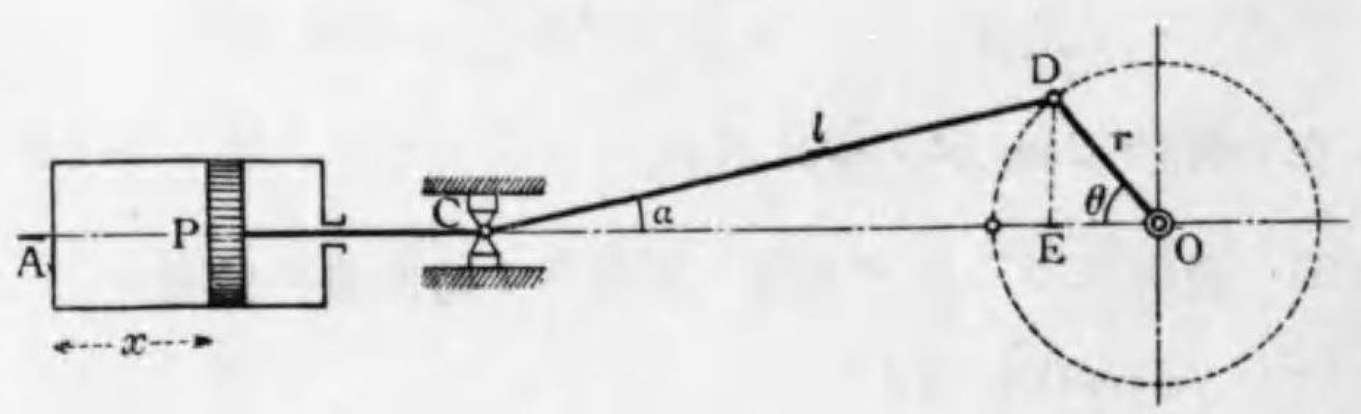
CD (長サ l) ハ connecting rod

OD (長サ r) ハ crank arm

C ハ cross head, D ハ crank pin

θ ハ或瞬間ノ crank ノ廻轉角

α ハ或瞬間ノ connecting rod ノ傾角



今 D 點ガ O ヲ中心トシテ廻轉スルトキソノ廻轉角 θ ナルトキノ piston P ノ變位ヲ x トスレバ

$$x=l+r-l\cos\alpha-r\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

然ルニ $DE=l\sin\alpha=r\sin\theta$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{r}{l}\sin\theta$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\sin\theta\right)^2}$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\sin\theta\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{r}{l}\sin\theta\right)^2+\cdots(\text{ii})$$

然ルニ實際ニ於テハ $l\geqq 5r$ ナルガ故ニ第三項以下ヲ無視スルコトヲ得。

(ii) ヲ (i) ニ代入スレバ

$$x=l+r-l\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\sin\theta\right)^2\right\}-r\cos\theta$$

$$=r\left\{1-\cos\theta+\frac{r}{2l}\sin^2\theta\right\}\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iii})$$

之レヲ t ニテ微分スレバ piston ノ velocity ヲ得

$$v=\frac{dx}{dt}=r\left(\sin\theta+\frac{r}{2l}\sin 2\theta\right)\frac{d\theta}{dt}\quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iv})$$

次ニ點 D ノ angular vel. ヲ ω トスレバ

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{v})$$

$$\therefore\quad v=r\omega\left(\sin\theta+\frac{r}{2l}\sin 2\theta\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{vi})$$

上式ヲ更ニ t ニテ微分スレバ piston ノ加速度 a ヲ得

$$a=\frac{dv}{dt}=r\omega\left(\cos\theta+\frac{r}{l}\cos 2\theta\right)\frac{d\theta}{dt}$$

$$=r\omega^2\left(\cos\theta+\frac{r}{l}\cos 2\theta\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{vii})$$

問　　題

次ノ曲線上ノ點ニ於ケル切線及法線ノ方程式ヲ求メヨ。

(1) 抛物線 $y=\frac{1}{8}x^2$ 上ノ點 $(4, 2)$

(2) 抛物線 $y^2=6x$ 上ノ點 $(24, 12)$

(3) 楕　圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上ノ點$(4, -\frac{9}{5})$

(4) 双曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 上ノ點 $(\frac{20}{3}, 4)$

(5) 双曲線 $xy=20$ 上ノ點 $(4, 5)$

(6) $y=\frac{1}{8}x^3$ 上ノ $x=4$ ナル點

(7) $y^2=\frac{1}{4}x^3$ 上ノ $x=2$ ナル點

(8) $y=\frac{1}{4}x^2$ ノ切線ガ x 軸ト 60° ノ角ヲナストイフ，ソノ切點ヲ求メヨ。

(9) アル曲線ノ slope ハ $5x$ ナリトイフ，ソノ曲線ノ一般方程式ヲ求メヨ。マタソノ曲線ガ點 $(2, 10)$ ヲ通ルトイフ，ソノ方程式ヲ求メヨ。

(10) 圓 $x^2+y^2=8$ ト抛物線 $x^2=2y$ トノ交角ヲ求メヨ。

(11) A ladder 24 feet long is leaning against a vertical wall. The foot of the ladder is moved away from the wall, along the horizontal surface of the ground

and in a direction at right angles to the wall, at a uniform rate of 1 foot per second. Find the rate at which the top of the ladder is decending on the wall when the foot is 12 feet from the wall.

(12) Show that when the top of the ladder is 1 foot from the grounn, the top is moving 575 times as fast as when the foot of the ladder is 1 foot from the wall.

(13) A man standing on a wharf is drawing in the painter of a boat at the rate of 4 feet a second. If his hands are 6 feet above the bow of the boat, how fast is the boat moving when it is 8 feet from the wharf?

(14) A man 6 feet high walks away at the rate of 4 miles an hour from a lamp post 10 feet high. At what rate is the end of his shadow increasing its distance from the post? At what rate is his shadow lengthening?

(15) A ship is 75 miles due east of a second ship. The first sails west at the rate of 9 miles an hour, the second south at the rate of 12 miles an hour. How long will they continue to approach each other? What is the nearest distance they can get to each other?

(16) A vessel is anchored in 10 fathoms of water, and the

cable passes over a sheave in the bowsprit which is 12 feet above the water. If the cable is hauled in at the rate of a foot a second, how fast is the vessel moving through the water when there are 20 fathoms of a cable out?

(17) A soap bubble is expanding, always remaining spherical. If the radius of the bubble is increasing at the rate of 2 in. per second, how fast is the volume increasing?

(18) In Ex. (17) find the general expression for the rate of change of the volume with respect to the radius.

(19) If a soap bubble is expanding as in Ex. (17), how fast is the area of its surface increasing?

(20) In Ex. (19) find the general expression for the rate of change of the surface with respect to the radius.

(21) Cube of metal is expanding under the influence of heat. Assuming that the metal retaints the form of a cube, find the rate of change at which the volume is increasing with respect to an edge.

(22) The altitude of a right circular cylinder is always equal to the diameter of the base. If the cylinder is assumed to expand, always retaining its form and proportions, what is the rate of change of the volume?

(23) Find the rate of change of the area of a sector of a circle of radius 6 ft. with respect to the angle at the center of the circle.

(24) Find the rate of change of the area of a sector of a circle with respect to the radius of the circle if the angle at the center of the circle is always $\frac{\pi}{4}$. what is the value of the rate when the radius is 8 in.?

第　九　章

超越函數ノ微分及ビ積分

78. 三角函數ノ微分及ビ積分

(A)　三角函數ノ微分公式ハ次ノ如シ。

〔XI〕　$\dfrac{d(\sin x)}{dx}=-\cos x$

〔XII〕　$\dfrac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$

〔XIII〕　$\dfrac{d(\tan x)}{dx}=\sec^2 x$

〔XIV〕　$\dfrac{d(\cot x)}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 x$

〔XV〕　$\dfrac{d(\sec x)}{dx}=\sec x\tan x$

〔XVI〕　$\dfrac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx}=-\operatorname{cosec} x\cot x$

〔XVII〕　$\dfrac{d(\operatorname{vers} x)}{dx}=\sin x$　　〔但シ $\operatorname{vers} x=1-\cos x$〕

〔證　明〕

〔XI〕, 〔XII〕ノ證明ハ P.85 ニ於テ既ニナセリ。

〔XIII〕　$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

同様ニ

〔XIV〕　$\dfrac{d(\cot x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=\dfrac{-1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x$

〔XV〕　$\dfrac{d(\sec x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x$

〔XVI〕　$\dfrac{d(\operatorname{cosec} x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)=-\operatorname{cosec} x\cot x$

〔XVII〕　$\dfrac{d(\operatorname{vers} x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}(1-\cos x)=\sin x$

(B)　u ガ x ノ函數ナルトキハ P.88 公式〔V〕ニヨリ次ノ便利ナル公式ヲ得。

〔XI′〕　$\dfrac{d(\sin u)}{dx}=\cos u\dfrac{du}{dx}$

〔XII′〕　$\dfrac{d(\cos u)}{dx}=-\sin u\dfrac{du}{dx}$

〔XIII′〕　$\dfrac{d(\tan u)}{dx}=\sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

〔XIV′〕　$\dfrac{d(\cot u)}{dx}=-\operatorname{cosec}^2 u\dfrac{du}{dx}$

〔XV′〕　$\dfrac{d(\sec u)}{dx}=\sec u\ \mathrm{tnn}\ u\dfrac{du}{dx}$

〔XVI′〕　$\dfrac{d(\operatorname{cosec} u)}{dx}=-\operatorname{cosec} u\cot u\dfrac{du}{dx}$

〔XVII′〕　$\dfrac{d(\operatorname{vers} u)}{dx}=\sin u\dfrac{du}{dx}$

(C). 三角函數ノ積分公式ハ次ノ如シ。

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad \text{or} \quad \operatorname{vers} x + c' \quad \cdots\cdots\cdots(71)$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad \cdots\cdots\cdots(72)$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c \quad \cdots\cdots\cdots(73)$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c \quad \cdots\cdots\cdots(74)$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c \quad \cdots\cdots\cdots(75)$$

$$\int \operatorname{cosec} x \,.\, \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c \quad \cdots\cdots\cdots(76)$$

(D) x ノ代リニ mx ヲ置換ユレバ

$$\int \sin mx\,dx = -\frac{1}{m}\cos mx + c \quad \text{or} \quad \operatorname{vers} mx + c' \quad \cdots(71')$$

$$\int \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx + c \quad \cdots\cdots\cdots(72')$$

$$\int \sec^2 mx\,dx = \frac{1}{m}\tan mx + c \quad \cdots\cdots\cdots(73')$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 mx\,dx = \frac{-1}{m}\cot mx + c \quad \cdots\cdots\cdots(74')$$

$$\int \sec mx \tan mx\,dx = \frac{1}{m}\sec mx + c \quad \cdots\cdots\cdots(75')$$

$$\int \operatorname{cosec} mx \cot mx\,dx = \frac{-1}{m}\operatorname{cosec} mx + c \quad \cdots\cdots\cdots(76')$$

例 (1) $y=\tan^5(1-3x^2)$ ヲ微分セヨ。

〔解〕 $w=\tan(1-3x^2)$, $u=1-3x^2$ トオケバ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(w^5)}{dw}\cdot\frac{dw}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=5w^5.\sec^2 u.(-6x)$$

$$=-30x\tan^4(1-3x^2)\sec^2(1-3x^2)$$

例 (2) $\int \tan^{\frac{3}{2}} x \sec^4 x\,dx$ ヲ求メヨ。

〔解〕 $\sec^4 x=\sec^2 x\,.\,\sec^2 x=(1+\tan^2 x)\sec^2 x$

$u=\tan x$ トオケバ $du=\sec^2 x\,dx$

$$\therefore \quad \int \tan^{\frac{3}{2}} x(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$$

$$=\int u^{\frac{3}{2}}(1+u^2)\,du=\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{5}\tan^{\frac{5}{2}}x+\frac{2}{9}\tan^{\frac{9}{2}}x+c$$

問　　題

次ノ函數ヲ微分セヨ。

(1) $\sin 5x$	(2) $\cos\dfrac{x^2}{3}$	(3) $\tan(1-3x)$
(4) $\operatorname{cosec}(2-x^2)$	(5) $\sec^3 x$	(6) $\operatorname{vers} 3x$
(7) $\cos^2 x$	(8) $\sin 6x^2$	(9) $\cot(a-bx)$
(10) $\tan\left(\dfrac{1-x}{3}\right)$	(11) $\operatorname{cosec}(-6x)$	(12) $\sec mx^3$
(13) $x^m\sin(mx)$	(14) $(x-1)^2\tan x$	

(15) $\sin^3 5x \,.\, \cos^5 3x$　　(16) $\dfrac{\sin(2x-\frac{\pi}{4})}{\sin(2x+\frac{\pi}{4})}$

(17) $\dfrac{\tan\frac{x}{2}-2}{2\tan\frac{x}{2}+1}$　　(18) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

(19) $\dfrac{a\sin x+b\ \mathrm{vers}\ x}{a\sin x-b\ \mathrm{vers}\ x}$　　(20) $(\tan x-3\cot x)\sqrt{\tan x}$

次ノ積分ヲ求メヨ。

(21) $\int\sin 7x\,dx$　　(22) $\int\cos 3x\,dx$

(23) $\int\sec^2(\frac{1}{2}x)dx$　　(24) $\int\tan^2 x\,dx$

(25) $\int\sin^5 x\,dx$　　(26) $\int\sin x\sqrt{\cos x}\,dx$

(27) $\int\cos x\sqrt{\sin x}\,dx$　　(28) $\int\cos x(1+4\sin x+9\sin^2 x)dx$

(29) $\int\tan^3 x\sec^2 x\,dx$　　(30) $\int 2x\cos(1+x^2)dx$

(31) $\int\sin(1-3x)\cos^{\frac{5}{2}}(1-3x)dx$

(32) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$　　(33) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^3 x\,dx$

(34) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^4 x\cos x\,dx$　　(35) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 3x\,da$

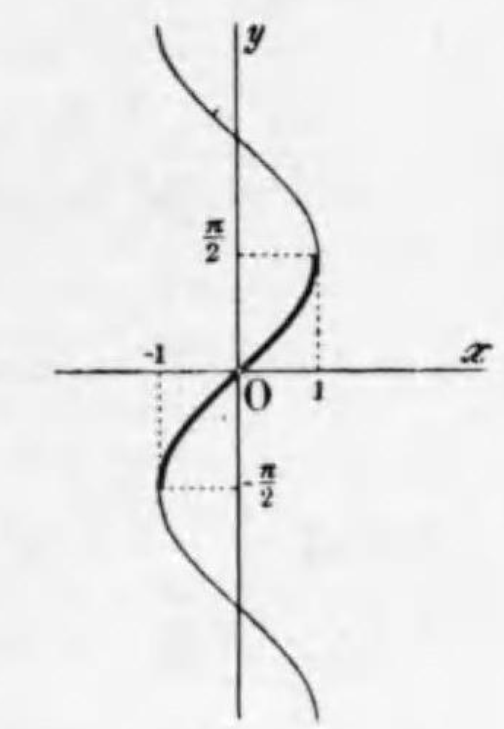
(36) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n x\,dx$　　(37) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$

(38) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\sin x-\cos x^2)dx$　　(39) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\sin x)^2 dx$

79. 逆三角函數ノ微分及ビ積分

(1) $y=\sin^{-1}x$ ノ微係數。

此函數ノ ぐらふ ハ圖ノ如キ ぐらふ ニシテ y ハ變域$(-1,1)$ 內ニ於ケル x ノ無限多價函數ナリ, 即チ -1 ト 1 トノ間ニアル x ノ一ツノ値ニ對シテ y ノ値ハ無限ニ多ク存在スル, 此函數ヲ一價函數ナラシメルタメニ通例次ノ規約ヲ設ケル。



$$-\frac{\pi}{2}\leqq\sin^{-1}x\leqq\frac{\pi}{2}$$

圖ノ太線ハ此様ナ制限ノ下ニアル函數 $y=\sin^{-1}x$ ノ ぐらふ ナリ。

サテ $y=\sin^{-1}x$ トスレバ

$$x=\sin y$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dy}=\cos y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

$(\pm)$ ノ複號ハ $\cos y$ ノ符號ニヨツテ定マル, $\cos y>0$ ナラバ正, $\cos y<0$ ナラバ負號ヲ取ルベキナリ, 然ルニ上ノ規約ニヨレバ

$$-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$$

故ニ　$\cos y \geqq 0$

故ニ複號ハ正號ヲ取ラネバナラス即チ

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\sqrt{1-x^2}$$

$$〔\mathrm{XVIII}〕\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

即
$$\boxed{\frac{d(\sin^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

〔註〕此公式ハ $-1<x<1$ ナル x ニ對シテ成立スルノデアル

$x=\pm 1$ ニ對シテハ左方又ハ右方微係數ガ $+\infty$ トナル，

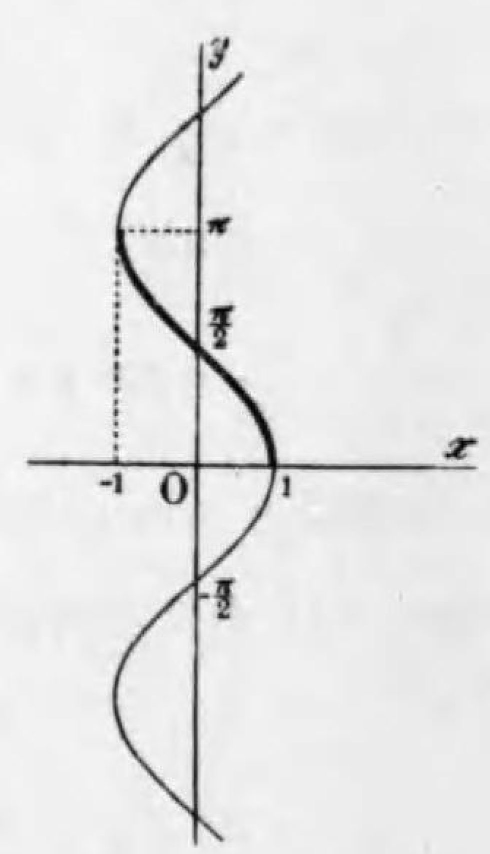
次ノ $\cos^{-1}x$ ノ微係數ノ公式ニツイテモ同樣ナリ。

(2) $y=\cos^{-1}x$ ノ微係數

此函數ノ ぐらふ モ圖ノ如ク x ノ無限多價函數ニシテコレヲ一價函數ナラシメルタメニ通例次ノ規約ヲ設ケル。

$$0\leqq \cos^{-1}x \geqq \pi$$

此ノ制限下ニアル函數 y ノぐらふハ圖ノ太線ナリ。



$y=\cos^{-1}x$ トスレバ

$x=\cos y$

$$\frac{dx}{dy}=-\sin y$$

然ルニ $\sin y=\pm\sqrt{1-x^2}$ デアツテ且ツ上ノ規定ニヨツテ

$0\leqq y\leqq \pi$ デアルカラ

$\sin y \geqq 0 \quad \therefore \sin y=\sqrt{1-x^2}$

從ツテ
$$\frac{dx}{dy}=-\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$〔\mathrm{XIX}〕\quad \boxed{\frac{d(\cos^{-1}x)}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

(3) $y=\tan^{-1}x$ ノ微係數

此函數ノ ぐらふ ハ圖ノ如キ ぐらふ ニシテ之ヲ一價函數ナラシメルタメニ通例次ノ制規ヲ設ケル。

$$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}$$

此制限ノ下ニアル函數 y ノ ぐらふ ハ圖ノ太線デアル。

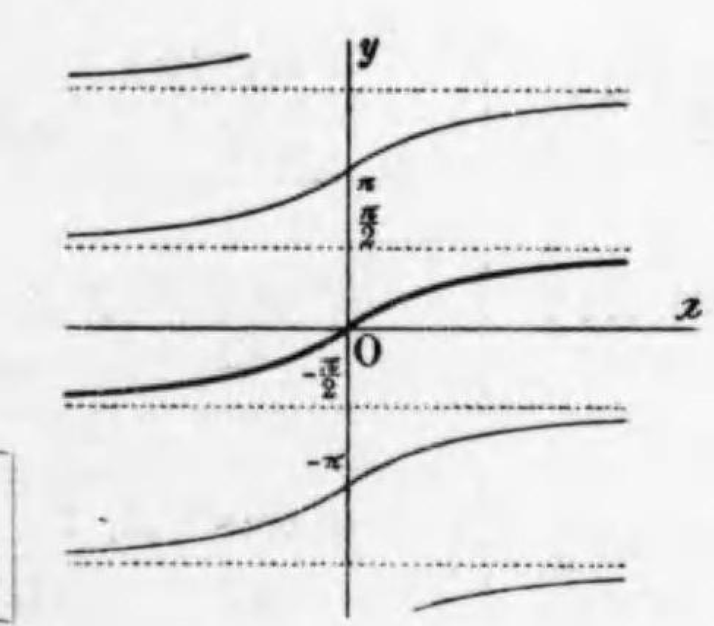
$y=\tan^{-1}x$ トスレバ

$x=\tan y$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=\sec^2 y=1+x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$

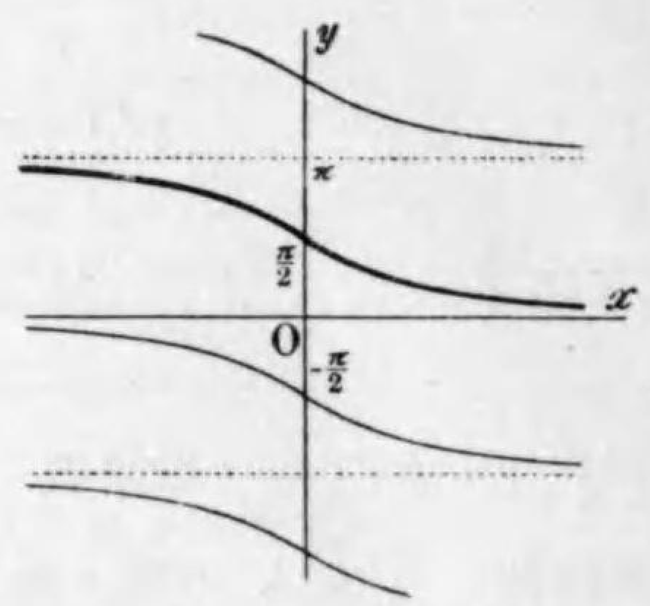
$$〔\mathrm{XX}〕\quad \boxed{\frac{d(\tan^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2}}$$



(4) $y=\cot^{-1}x$ ノ微係數

此函數ノ ぐらふ ハ圖ノ如キ ぐらふ ニシテ之ヲ一價函數ナラシメルタメニ通例次ノ制限ヲ設ケル。

$$0<\cot^{-1}x<\pi$$



此制限ノ下ニアル函數ノ ぐらふ ハ圖ノ太線デアル

$y=\cot^{-1}x$ トスレバ

$x=\cot y$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dy}=-\operatorname{cosec}^2 y=-(1+x^2)$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$$

〔XXI〕 $$\boxed{\frac{d(\cot^{-1}x)}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}}$$

同樣ニ

〔XXII〕 $$\boxed{\frac{d(\sec^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

〔XXIII〕 $$\boxed{\frac{d(\operatorname{cosec}^{-1}x)}{dx}=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

〔XXIV〕 $$\boxed{\frac{d(\operatorname{vers}^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}}$$

例 (1) $y=\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ ヲ微分セヨ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\sin^{-1}u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}\qquad \left[u=\frac{x}{a}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

例 (2) $y=\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ ヲ微分セヨ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(\tan^{-1}u)}{du}\ \frac{du}{dx}\qquad \left[u=\frac{x}{a}\right]$$

$$=\frac{1}{1+u^2}\ \frac{1}{a}$$

$$=\frac{a}{a^2+x^2}$$

例 (3) $$\frac{d(\sin^{-1}x^2)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{d(x^2)}{dx}=\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

例 (4) $$\frac{d(\sec^{-1}x)^3}{dx}=3(\sec^{-1}x)^2\frac{d(\sec^{-1}x)}{dx}$$

$$=3(\sec^{-1}x)^2\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{3}{x\sqrt{x^2-1}}(\sec^{-1}x)$$

80. 逆三角函數ノ積分公式ハ次ノ如シ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c \quad \text{or} \quad -\cos^{-1}\frac{x}{a}+c' \cdots\cdots\cdots\cdots(77)$$

但シ $|x|<a$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+c \quad \text{or} \quad -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a}+c' \cdots(78)$$

但シ $a\neq 0$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}+c \quad \text{or} \quad -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a}+c' \ (79)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}=\operatorname{vers}^{-1}\frac{x}{a}+c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(80)$$

問　　題

次ノ式ヲ微分セヨ。

(1) $\sin^{-1}x^4$　(2) $\cos^{-1}\frac{x}{a}$　(3) $\tan^{-1}(3x)$

(4) $\cot^{-1}\frac{x}{a}$　(5) $\cos^{-1}(1-x)$　(6) $x\sin^{-1}x$

(7) $x^2\tan^{-1}2\sqrt{x}$　(8) $\operatorname{cosec}^{-1}(5x)$

(9) $\sec^{-1}(x^2+1)$　(10) $\cot^{-1}(1-x^2)$

(11) $\sin^{-1}\frac{1+x}{\sqrt{2}}$　(12) $\operatorname{vers}^{-1}(3x+1)$

(13) $\tan^{-1}\frac{5x-1}{2}$

次ノ式ヲ積分セヨ。

(14) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$　(15) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　(16) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$

(17) $\int_0^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$　(18) $\int\frac{dx}{1+4x^2}$　(19) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(20) $\int\frac{dx}{9+x^2}$　(21) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}}$　(22) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$

(23) $\int\frac{dx}{\sqrt{10x-x^2}}$　(24) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$　(25) $\int\frac{dx}{1+(1-x)^2}$

81. 指數函數ト對數函數

a ガ 1 ニアラザル正ノ定數ナルトキ

$$y=a^x \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

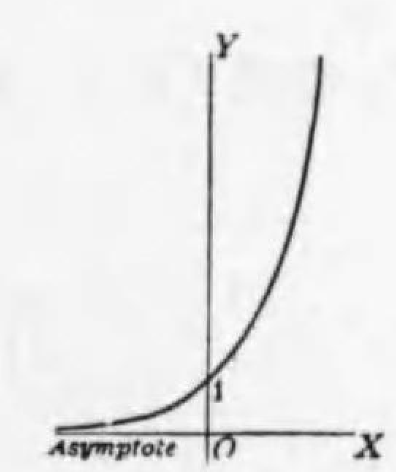
ナル函數ヲ指數函數 (Exponential f.) トイヒ a ヲ其底トイフ

$a>0$ ナルトキ

$x=0$　ナレバ　$y=1$

$x\to\infty$　ナレバ　$y=\infty$

$x\to-\infty$　ナレバ　$y=0$



The Exponential Curve
$y=e^x$

故ニ (i) ハ x ノ總テノ値ニ對シテ常ニ正ナル函數ナリ。

次ニ　$x=a^y \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$

ニ於テハ x ハ y ノ指數函數ナリ。コノ兩邊ノ對數ヲトレバ

$$y=\log_a x \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{iii})$$

コノ (iii) ヲ對數函數 (Logarithmic f.) トイヒ a ヲ其底トイフ。

故ニ指數函數ト對數函數ハ互ニ逆函數ナリ。

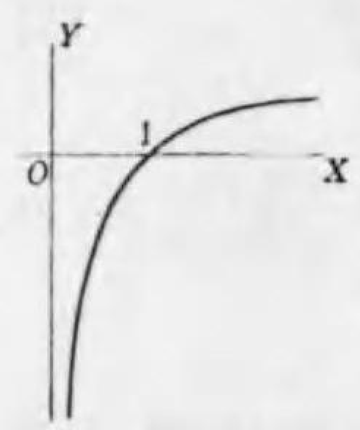
對數ハ x ノ正ノ値ニ對シテノミ存在スルガ故ニ $a>1$ ナルトキ

$x=1$ ナレバ $y=0$

$x\to0$ ナレバ $y=-\infty$

$x\to\infty$ ナレバ $y=+\infty$

ナリ。



The Logarithmic Curve
$y=\log x$

82. $e=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x \doteqdot 2.71828$

x ガ順次正ノ整數ヲ取リテ無限大ニナル場合ヲ考フレバ二項定理ニヨリ

$$(1+\frac{1}{x})^x=1+x(\frac{1}{x})+\frac{x(x-1)}{2!}(\frac{1}{x})^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}(\frac{1}{1})^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-\overline{x-2})(x-\overline{x-1})}{x!}(\frac{1}{x})^x$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{x})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})\;\cdots\cdots+$$

$$\cdots+\frac{1}{x!}(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})\cdots(1-\frac{x-2}{2})(1-\frac{x-1}{x})\;\cdots\cdots\text{(i)}$$

上式ノ $(n+1)$ 項ノ和ヲ S_{n+1} ニテ表ハシ，殘リノ項ノ和ヲ R_{n+1} ニテ表ハセバ

$$(1+\frac{1}{x})^x=S_{n+1}+R_{n+1}.$$

扨テ $x\to\infty$ ニシタトキノ S_{n+1} 及 R_{n+1} ハ次ノ如シ

$$S_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{x})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})\cdots(1-\frac{n-1}{x})$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to0} S_{n+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

次ニ $\lim\limits_{x\to\infty} R_{n+1}$ ヲ考ヘン

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})\cdots(1-\frac{n}{x})$$

$$+\frac{1}{(n+2)!}(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})\cdots(1-\frac{n}{x})(1-\frac{n+1}{2})$$

$$+\frac{1}{(n+3)!}(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})\cdots(1-\frac{n+1}{n})(1-\frac{n+2}{x})+\cdots\cdots$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})\;\cdots\cdots$$

$$\cdots(1-\frac{n}{x})\Big\{1.+\frac{1}{(n+2)}(1-\frac{n+1}{x})$$

$$+\frac{1}{(n+2)(n+3)}(1-\frac{n+1}{x})(1-\frac{n+2}{x})$$

$$+\cdots\cdots(x-n)\text{ 項ニ至ル}\Big\}$$

$(1-\frac{1}{x}), (1-\frac{2}{x}), \cdots (1-\frac{n}{x})$ 等ハミナ正ノ數ニシテ 1 ヨリ小ナレバ

$$R_{n+1} < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots(x-n)\text{ 項迄}\right\}$$

又 $(n+2), (n+3)\cdots$ 等ハ何レモ $(n+1)$ ヨリ大ナレバ

$$R_{n+1} < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots(x+n)\text{ 項ニ至ル}\right\}$$

$\{\ \}$ ノ内ハ初項ガ 1. 公比ガ $\frac{1}{(n+1)^2}$, 項數ガ $(x-n)$ ナル等比級數ナルヲ以テ其和ハ

$$\frac{1-\frac{1}{(n+1)^{x-n}}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}\left\{1-\frac{1}{(n+1)^{x-n}}\right\}$$

今 $x>n$ ナルヲ以テ $\frac{n+1}{n}\left\{1-\frac{1}{(n+1)^{x-n}}\right\} < \frac{n+1}{n}$

故ニ n ヨリ大ナル總テノ x ノ値ニ對シテ

$$R_{\ +1} < \frac{1}{(n!)n}$$

從ツテ $\lim\limits_{x\to\infty} R_{n+1} < \frac{1}{(n!)n}$ ナリ。

然ルニ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to\infty} S_{n+1} + \lim\limits_{x\to\infty} R_{n+1}$

而シテ $0 < \lim\limits_{x\to\infty} R_{n+1} < \frac{1}{n(n!)}$ ナルニヨリ

$$\lim_{x\to\infty} S_{n+1} < \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x < \lim_{x\to\infty} S_{n+1} + \frac{1}{n(n!)}$$

即チ $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\ \frac{1}{n!} < \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$

$$< 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n(n!)}$$

從ツテ $n\to\infty$ ナル極限ヲ考フレバ

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdots$$

$$\begin{aligned}
&\fallingdotseq 1\\
&\ \ +1\\
&\ \ +0.5\\
&\ \ +0.166667\\
&\ \ +0.041667\\
&\ \ +0.008333\\
&\ \ +0.001389\\
&\ \ +0.000198\\
&\ \ +0.000025\\
&\ \ +0.000003\\
&\ \ +\cdots\cdots\cdots\\
&=2.718281828459045\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

コノ極限値ヲ e ナル文字ニテ表ハス，故ニ

$$e = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x \fallingdotseq 2.718282\cdots\cdots\cdots$$

コノ e ヲ底トスル對數ヲ自然對數 (Natural log.) 又ハ發見者ノ名ヲトリテ Narierian logarithms トイフ。

高等數學ニ於テハ勿論，學術上ニ於テ普通只對數トイヘバコノ自然對數ノコトニシテ $\log_e N$ ヲ $\log N$ ト記シ常用對數ハ必ラズ $\log_{10} N$ ト書クモノトス。

83. $\log_a x$ ノ微係數，但シ $a>0$, $x>0$ トス

(i) $y=\log_a x$ トスレバ

(ii) $y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)$

(iii) $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x$

$$=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

(iv) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

(v) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right\}$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left\{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right\}$$

但シ $m=\dfrac{x}{\Delta x}$

(vi) $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\log_a e$$

故ニ次ノ公式ヲ得。

〔XXV〕 $$\boxed{\frac{d(\log_a x)}{dx}=\frac{1}{x}\log_a e}$$

若シ $a=10$ ナレバ $\log_{10}e=0.434299\cdots\cdots$

〔XXVI〕 $$\boxed{\frac{d(\log_{10}x)}{dx}=\frac{0.43429}{x}}$$

若シ $a=e$ ナレバ $\log_e e=1$

〔XXVII〕 $$\boxed{\frac{d(\log x)}{dx}=\frac{1}{x}}$$

逆ニ次ノ積分公式ヲ得。

$$\boxed{\int\frac{dx}{x}=\int x^{-1}dx=\log|x|+c}\quad\cdots\cdots\cdots(81)$$

〔註〕 $|x|$ ハ x ノ正値ヲ表ハスモノニシテ

$x>0$ ナレバ $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\log x+c$

$x<0$ ナレバ $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\log(-x)+c$

例 (1) $y=\log_{10}(2x^3+5)$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求ム。

〔解〕 $2x^3+5=u$ トオケバ

$$6x^2=\frac{du}{dx}$$

$$y=\frac{\log_{10}u}{du}\ \frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{u}.\log_{10}e.(2x^2)$$

$$=\frac{0.43429\times 2x^2}{2x^3+5}$$

例 (2)　$y=\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メヨ。

〔解〕　$y=\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\left\{\log(1+x)-\log(1-x)\right\}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right\}$$

$$=\frac{1}{1-x^2}$$

例 (3)　$\displaystyle\int\frac{x^2dx}{2x^3+10}$ ヲ求ム。

$2x^3+10=u$ トオケバ $6x^2dx=du$

$$\therefore\quad \int\frac{x^2dx}{2x^3+10}=\frac{1}{6}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{6}\log u+c$$

$$=\frac{1}{6}\log(2x^3+10)+c$$

例 (4)　$\displaystyle\int\tan x\,dx=-\log|\cos x|+c$　ヲ證セヨ。

$\cos x=u$ トオケバ $-\sin x\,dx=du$

$$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{du}{u}$$

$$=-\log|u|+c=-\log|\cos x|+c$$

$$\therefore\quad \int\tan x\,dx=-\log|\cos x|+c \quad\cdots\cdots(82)$$

$$\int\cot x\,dx=\log|\sin x|+c \quad\cdots\cdots(83)$$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c \quad\cdots\cdots(84)$$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c \quad\cdots\cdots(85)$$

問　　題

(1)　次ノ函數ヲ微分セヨ。

(i)　$\log_{10}x^3$　　(ii)　$\log_{10}(1+2x)$

(iii)　$\log_{10}\sqrt{x}$　　(iv)　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(2)

(i)　$\log(1-5x^2)$　　(ii)　$\log(x^2-5x+7)$

(iii)　$\log(1-x^3)$　　(iv)　$\log(5x-3x^3)$

(v)　$\log\sin x$　　(vi)　$\log\tan\dfrac{x}{2}$

(3)

(i)　$\log\sqrt{1-x^2}$　　(ii)　$\log\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$

(iii)　$\log(a-x^3)^{\frac{5}{2}}$　　(iv)　$\log\left\{(a-x^n)^3\sqrt{b-x^m}\right\}$

（4） 次ノ積分ヲ求ム。

（i） $\int \frac{5}{x}dx,$　（ii） $\int \frac{(1-x)^3}{x^2}dx$

（iii） $\int \frac{(1-x)^2}{x}dx$　（iv） $\int \frac{x}{x^2+a}dx$

（5） 次ノ定積分ヲ求ム。

（i） $\int_1^2 \frac{3}{x}dx$　（ii） $\int_3^4 \frac{1-x}{x}dx$

（iii） $\int_1^5 \frac{2-3x^2+x^4}{x^3}dx$

（iv） $\int_{10}^{20} \frac{1+x^2}{x}dx$　（v） $\int_1^2 \frac{1+2x}{x+x^2}dx$

84. 對數微分法 (Logarithmic differentiation)

與ヘラレタル函數ヲ直接微分スル代リニ先ヅ其對數ヲ求メテ之ヲ微分スレバ便利ナルコト多シ。コノ微分法ヲ對數微分法トイフ。

例 (1)　$y=x^n$ ノ微係數ヲ求ム。

但シ n ハ任意ノ實數ニシテ x ハ正ノ數トス

〔解〕　$y=x^n$

$$\log y=n\log x$$

$$\frac{d(\log y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=n\cdot\frac{1}{x}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=m\frac{1}{x}y=nx^{n-1}$$

x ガ負數ノ場合ニ於テモ x^n ガ實數ナレバ之レヲ微分スルコトガ出來ル，コノ場合ニハ $x=-u$ トオケバ u ハ正數ナリ。

$$y=(-u)^n=(-1)^n u^n$$

x^n ガ實數ナルガ故ニ $(-1)^n$ モ實數ナリ。

$$\frac{dy}{dx}=(-1)^n\frac{d(u^n)}{dx}$$

$$=(-1)^n\frac{d(u^n)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=(-1)^n nu^{n-1}(-1)$$

$$=(-1)^2(-1)^{n-1}.nu^{n-1}$$

$$=n(-u)^{n-1}$$

$$=nx^{n-1}$$

故ニ P(83) 公式〔IV〕ハ指數 n ガ任意ノ實數ナルトキ成立スルコトヲ知ルベシ。

例 (2)　$y=\sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}$ ヲ微分セヨ。

〔解〕 $\log y=\frac{1}{2}\left\{\log(a+x)+\log(b+x)-\log(a-x)-\log(b-x)\right\}$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}\right\}$$

$$=\frac{a}{a^2-x^2}+\frac{b}{b^2-x^2}=\frac{(a+b)(ab-x^2)}{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(a+b)(ab-x^2)}{(ax+)^{\frac{1}{2}}(b+x)^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{3}{2}}(b-x)^{\frac{3}{2}}}$$

85. 指數函數ノ微係及積分

$y=a^x$ トスレバ

$\log y=x\log a$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log a$

$\frac{dy}{dx}=a^x.\log a$

〔XXVIII〕 $\boxed{\frac{d(a^x)}{dx}=a^x\log a}$

$a=10$ ナレバ $\log 10=2.302585\cdots\cdots\cdots$

〔XXIX〕 $\boxed{\frac{d(10^x)}{dx}=10^x(2.3026)}$

$a=e$ ナレバ

〔XXX〕 $\boxed{\frac{d(e^x)}{dx}=e^x}$

u ガ x ノ函數ナルトキハ

〔XXXI〕 $\boxed{\frac{d(e^u)}{dx}=e^u\frac{du}{dx}}$

逆ニ指數函數ノ積分公式ハ次ノ如シ

$$\boxed{\int e^x dx=e^x+c} \quad\cdots\cdots(86)$$

$$\boxed{\int a^x dx=\frac{1}{\log a}a^x+c} \quad\cdots\cdots(87)$$

例 (1) $y=e^{5x^2}$ ヲ微分セヨ。

〔解〕 $\log y=5x^2$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=10\,x$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=10\,x\,e^{5x^2}.$

例 (2) $y=x^x$ ヲ微分セヨ。

〔解〕 $\log y=x\log x$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log x+1$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=(1+\log x)x^x$

例 (3) $y=(2x^2+3)10^{4x-1}$ ヲ微分セヨ。

〔解〕 $\log y=\log(2x^2+3)+(4x-1)\log 10$

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{4x}{2x^2+3}+4.\log 10,$

$\frac{dy}{dx}=y\left[\frac{4x}{2x^2+3}+4\log 10\right]$

$=4.10^{4x-1}\left[x+(2x^2+3)\log 10\right]$

例 (4) $\int e^{5x}dx$ ヲ求メヨ。

〔解〕 $5x=u$ トオケバ $dx=\frac{1}{5}du$

$\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}\int e^u du=\frac{1}{5}e^u+c$

$=\frac{1}{5}e^{5x}+c$

例 (5) $\int \pi^{3x} dx$ ヲ求メヨ。

〔解〕 $3x=u$ トオケバ $dx=\frac{1}{3}du$

$$\therefore \quad \int \pi^{3x} dx = \frac{1}{3}\int \pi^{u} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^{u}}{\log \pi} + c$$

$$= \frac{\pi^{3x}}{3 \log \pi} + c$$

例 (6) 複利法 (Compound-interest law)

元金 P_0 圓ヲ年利率 r ニテ時間ノ經過スル瞬間每ニ利息ヲ元金ニ繰込ムモノトスルトキ t 年後ノ元利合計ヲ求メヨ。

〔解〕 t 年後ノ元利合計ヲ P 圓，ソレヨリ Δt 年間ノ利息ヲ ΔP 圓トスレバ

$$\Delta P = P \cdot r \, \Delta t$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = Pr$$

Δt ヲ限リナク小サクスレバ

$$\frac{dP}{dt} = Pr$$

$$\therefore \quad \int \frac{dP}{P} = r \int dt + c$$

$$\log P = rt + c$$

$t=0$ ニ於テハ $P=P_0$ $\therefore \ c=\log P_0$

$$\therefore \quad \log P - \log P_0 = rt$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{rt}$$

$$\therefore \quad P = P_0 e^{rt}$$

今元金ヲ P_0 圓，年利率ヲ 0.05 トシテ元利合計ガ元金ノ二倍ニナルマデノ期間ヲ求ムレバ

$$P_0 e^{0.05t} = 2P_0$$

$$e^{0.05t} = 2$$

兩邊ノ常用對數ヲトレバ

$$0.05t \ \log_{10} e = \log_{10} 2$$

$$0.05t \times 0.4343 = 0.3010$$

$$\therefore \quad t = \frac{0.3010}{0.05 \times 0.4343} = 13.87 \quad (\text{年})$$

問　　題

次ノ函數ヲ微分セヨ。

(1) (i) e^{5x} (ii) e^{-3x} (iii) e^{7x^2}

(iv) e^{ix} (v) e^{-ix} (vi) e^{2x^3}

(vii) e^{10t-5} (viii) e^{3t+2} (ix) e^{at+b}

(2) (i) x^{5x} (ii) 10^{x} (iii) π^{x^2}

(iv) $e^{\sin\theta}$ (v) $(\sin\theta)^{\theta}$ (vi) $e^{\tan\theta}$

(3) (i) $x\log x$ (ii) $\log(\log x)$ (iii) $\log x\sqrt{1+x^2}$

次ノ式ヲ微分セヨ。

(4) (i) $y=\frac{1}{2}(e^{u}+e^{-u})$ (ii) $y=\log(e^{2u}+e^{-2u})$

(iii) $y=e^{2\theta}(2\sin\theta-\cos\theta)$

(5) (i) $y=(1+x)(1+2x)(1+3x)$

(ii) $y=\sqrt[3]{1+x}\div\sqrt{1-x^2}$

(iii) $y=(1+x)^{1+x}$

(iv) $y=(1+x^2)^{2x+3}$

(v) $y=(3x^2+1)^{2x+4}$

次ノ積分ヲ求メヨ。

(6) $\int(e^x+e^{-x})^2dx$ (7) $\int(e^{4x}+e^{3x}+10^x)dx$

(8) $\int(e^{ax}-e^{-ax})^3dx$

(9) The sum of \$100 is put at interest at the rate of 5% per annum under the condition that the interest shall be compounded at each instant of time. How much will it amount to in 40 years?

(10) At a certain date the population of a town is 10,000. Forty years later it is 25,000. If the population increases at a rate which is always proportional to the population at the time, find a general expression for the population at any time t.

86. 双曲線函數 (Hyperbolic function)

双曲線函數トハ指數函數ヲ次ノ如ク組合ハセタル函數ニシテ，ソノ相互ノ關係ハ三角函數ニヨク似テオル。

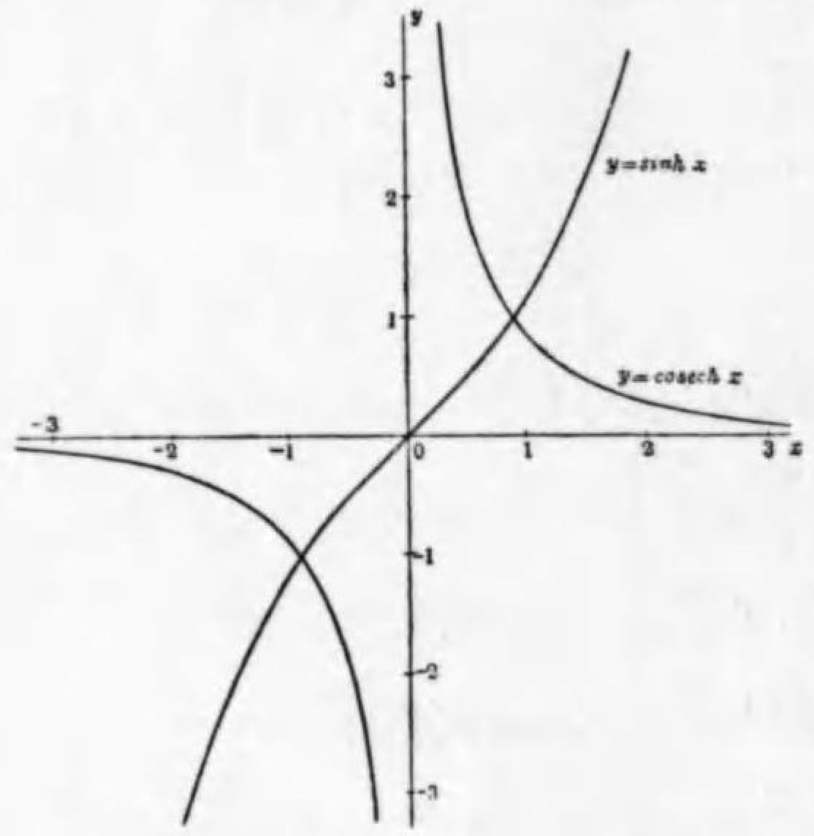
$$\sin hx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad\cdots\cdots\cdots(88)$$

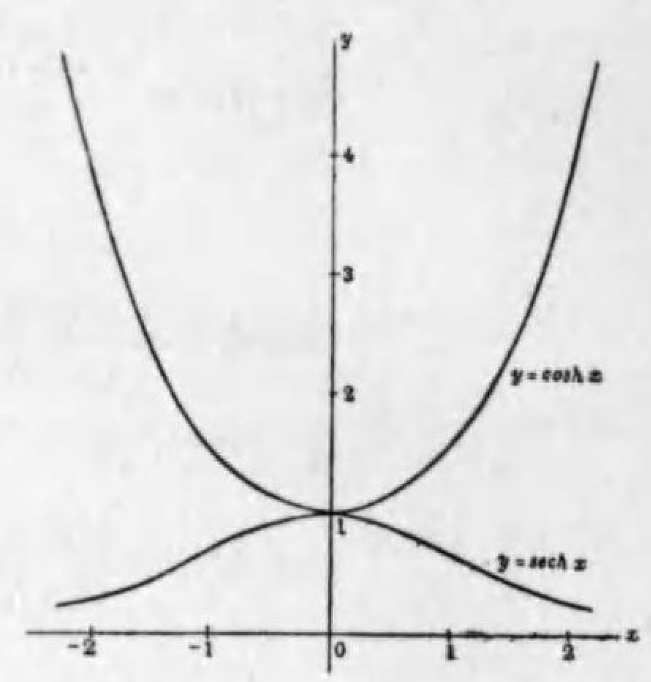
$$\cos hx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad\cdots\cdots\cdots(89)$$

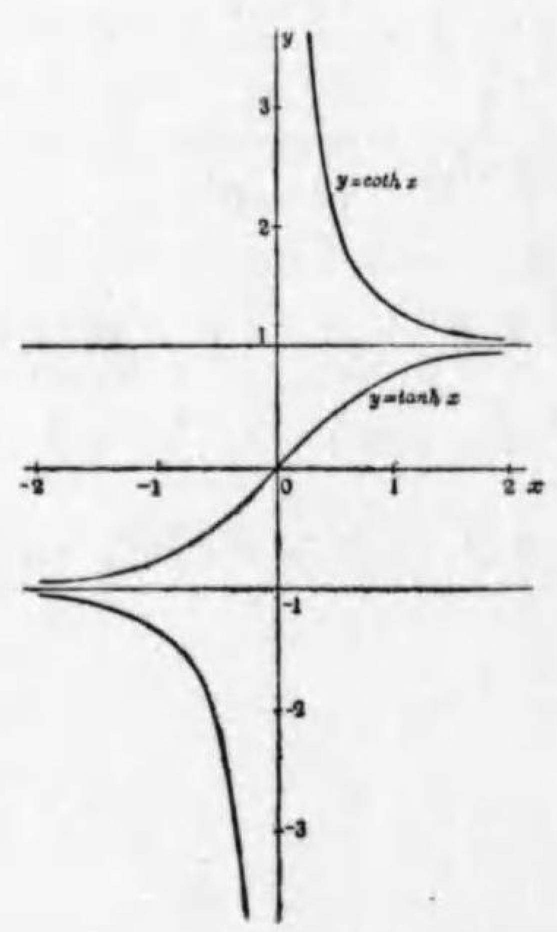
$$\left.\begin{aligned}\tan hx&=\frac{\sin hx}{\cos hx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\\ \cot hx&=\frac{\cos hx}{\sin hx}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\\ \sec hx&=\frac{1}{\cos hx}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}\\ \operatorname{cosec} hx&=\frac{1}{\sin hx}=\frac{2}{e^x-e^{-x}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(90)$$

$\sin hx$ ハ x ノ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ マデノ變化ニ對シテ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ マデ變化スレドモ，$\cos hx$ ハ 1 ヨリ $+\infty$ マデ變化ス。マタ $\tan hx$ ハ -1 ヨリ $+1$ マデ變化ス。

tun. / x	$\sin hx$	$\cos hx$	$\tan hx$	$\cot hx$	$\sec hx$	$\mathrm{cosec}\, hx$
$-\infty$	$-\infty$	∞	-1	-1	0	0
0	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
$+\infty$	∞	∞	1	1	0	0







双曲線函數相互ノ關係ハ次ノ如シ。

(i) $\cos h^2x - \sin h^2 = 1$

(ii) $1 - \tan h^2 x \quad = \sec h^2 x$

(iii) $\cot h^2 x - 1 \quad = \mathrm{cosec}\, h^2 x$

(iv) $\sin h(x \pm y) \quad = \sin hx \cos hy \pm \cos hx \sin hy$

(v) $\cos h(x \pm y) \quad = \cos hx \cos hy \pm \sin hx \sin hy$

(vi) $\sin h\, 2x \quad = 2 \sin hx \cos hx$

(vii) $\cos h\, 2x \quad = \cos h^2 x + \sin h^2 x$

$= 2 \cos h^2 x - 1$

$= 1 + 2 \sin h^2 x$

(viii) $\tan h(x+y) \quad = \dfrac{\tan hx \pm \tan hy}{1 \pm \tan hx \tan hy}$

(ix) $\tan h\, 2x \quad = \dfrac{2 \tan hx}{1 + \tan h^2 x}$

(x) $\sin h\, 3x \quad = 3 \sin hx + 4 \sin h^3 x$

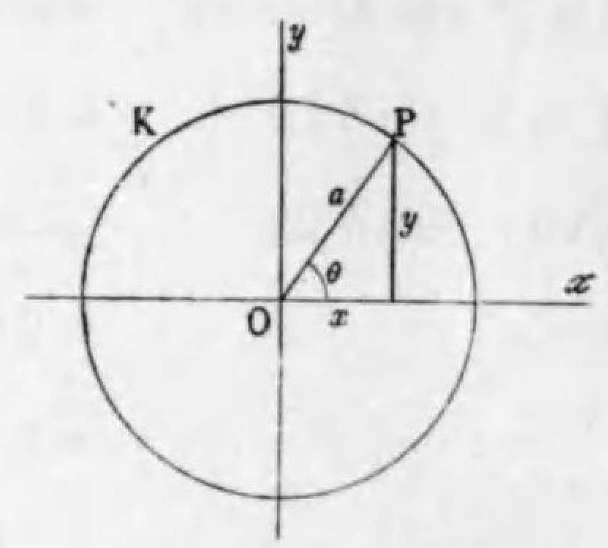
(xi) $\cos h\, 3x \quad = 4 \cos h^3 x - 3 \cos hx$

(xii) $\tan h\, 3x \quad = \dfrac{3 \tan hx + \tan h^3 x}{1 + 3 \tan h^3 x}$

87. 双曲線函數ノ直角双曲線

圓 $x_2+y^2=a^2$ 上ノ任意ノ一點ヲ $P(x, y)$ トシ $\angle POA=\theta$, 扇形 $O-\widehat{PA}$ ノ面積ヲ u トスレバ

$$u=\frac{a^2\theta}{2},\quad \theta=\frac{2u}{a^2}$$

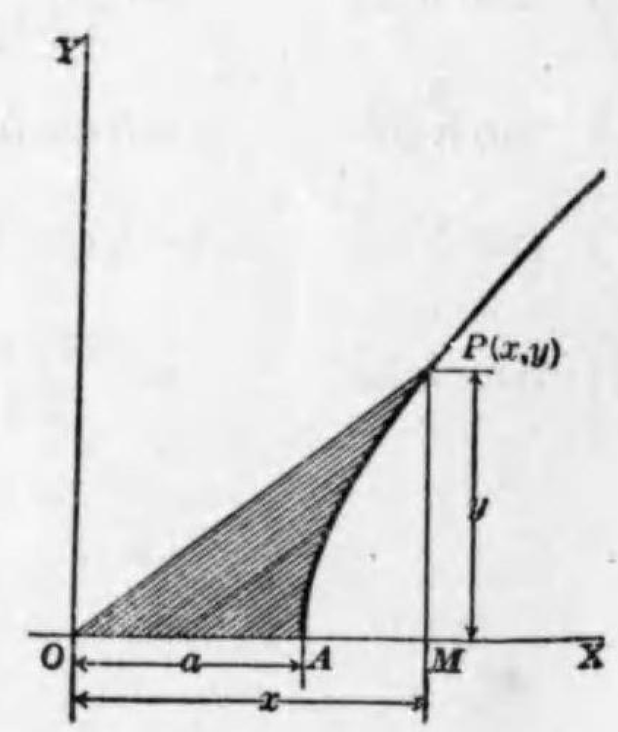


$$\therefore\quad \sin\theta=\sin\left(\frac{2u}{a^2}\right)=\frac{y}{a}$$

$$\cos\theta=\cos\left(\frac{2u}{a^2}\right)=\frac{x}{a}$$

$$\tan\theta=\tan\left(\frac{2u}{a^2}=\frac{y}{x}\right.$$

之レニ對シテ直角双曲線 $x^2-y^2=a^2$ 上ノ任意ノ點ヲ $P(x, y)$ トシ, $\angle POA=\theta$, 扇形 $O-\widehat{PA}$ ノ面積ヲ u トスレバ



$u=\triangle OPM-$面積APM

$$\text{面積 } APM=\int_a^x \sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

$$=\left|\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})}{a}\right|_a^x$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}xy-\frac{a^2}{2}\log\left(\frac{x+y}{a}\right)$$

$$\therefore\quad u=\triangle OPM-\left\{\frac{1}{2}xy-\frac{a^2}{2}\log\left(\frac{x+y}{a}\right)\right\}=\frac{a^2}{2}\log\left(\frac{x+y}{a}\right)$$

$$\therefore\quad \log\frac{x+y}{a}=\frac{2u}{a^2}$$

$$\frac{x+y}{a}=e^{\frac{2u}{a^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

マタ $x^2-y^2=a^2$ ヨリ $\dfrac{x-y}{a}=\dfrac{a}{x+y}$

$$\therefore\quad \frac{x-y}{a}=e^{-\frac{2u}{a^2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

$$\therefore\quad \frac{x}{a}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2u}{a^2}}+e^{-\frac{2u}{a^2}}\right)=\cos h\left(\frac{2u}{a^2}\right)$$

$$\frac{y}{a}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2u}{a^2}}-e^{-\frac{2u}{a^2}}\right)=\sin h\left(\frac{2u}{a^2}\right)$$

$$\frac{y}{x}=\frac{e^{\frac{2u}{a^2}}-e^{-\frac{2u}{a^2}}}{e^{\frac{2u}{a^2}}+e^{-\frac{2u}{a^2}}}=\tan h\left(\frac{2u}{a^2}\right)$$

88. 双曲線函數ノ微係數

双曲線函數ノ定義ヨリソノ微係數ハ次ノ如シ。

$$\frac{d}{dx}(\sin hx)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cos hx$$

〔XXXII〕 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin hx)=\cos hx}$$

同様ニシテ

〔XXXIII〕
$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d}{dx}(\cos hx)=\sin hx\\&\frac{d}{dx}(\tan hx)=\sec h^2x\\&\frac{d}{dx}(\cot hx)=-\operatorname{cosec} h^2x\\&\frac{d}{dx}(\sec hx)=-\sec hx\tan hx\\&\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} hx)=-\operatorname{cosec} hx\,.\cot hx\end{aligned}}$$

89. 逆双曲線函數

双曲線函數ノ逆函數即逆双曲線函數ハ對數函數トシテ表ハシ得ベシ。

今 $y=\sin h^{-1}x$ トスレバ $x=\sin hy$ ニシテ

$x=\frac{1}{2}(e^y-e^{-y})$ ナリ

兩邊ニ e^y ヲ乘ジテ變形スレバ

$$e^{2y}-2xe^y-1=0$$

$$e^y=x\pm\sqrt{x^2+1}$$

然ルニ e^y ハ y ノ値ノ如何ニカヽワラズ正ナルガ故ニ（±）中ノ（−）ハ捨テザルベカラズ。

$$\therefore\quad e^y=x+\sqrt{x^2+1}$$

$$y=\sin h^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

同様ニシテ ………(91)

$$\cos h^{-1}x=\log(x\pm\sqrt{x^2+1})$$

(91) ニ於ケル（±）ハ何レヲトルモ可ナリ。何トナレバ

$$x-\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$ ナルガ故ニ

$$\log(x-\sqrt{x^2-1})=-\log(x+\sqrt{x^2-1})$$

即 1 ヨリ大ナル x ノ各値ニ對シテ $\cos h^{-1}x$ ハ絶對値等シク符號ノミ異ナル二ツノ値ヲ有ス。故ニ $\cos h^{-1}x$ ハ x ノ二價函數ナリ。

90. 逆双曲線函數ノ微分及積分

一般的ニスル爲メニ x ノ代リニ $\frac{x}{a}$ ヲトリ

$$y=\sin h^{-1}\frac{x}{a}$$ トスレバ

$$x=a\sin hy$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy}=a\cos hy$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{a\cos hy}=\frac{1}{\pm a\sqrt{1+\sin h^2 x}}=\frac{1}{a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

〔註〕 $\cos hy$ ハ常ニ正ナルガ故ニ（±）ハ＋ノミヲトル。

即 $$\frac{d}{dx}\left(\sin h^{-1}\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

同様ニシテ

$$\frac{d}{dx}\left(\cos h^{-1}\frac{x}{a}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

〔但シ（±）ハ $\cos h^{-1}\frac{x}{a}$ ノ正負ニ従フ〕

$$\frac{d}{dx}\left(\tan h^{-1}\frac{x}{a}\right)=\frac{a}{a^2-x^2}$$

〔$x^2<a^2$ トス　$\because \ |\tan h\theta|\leq 1$〕

$$\frac{d}{dx}\left(\cot h^{-1}\right)=\frac{-a}{a^2-x^2}$$

〔$x^2>a^2$　$\because \ |\cot h\theta|>1$〕

微分公式ヲ逆ニシテ次ノ積分公式ヲ得。

$$\int \sin hx\, dx=\cos hx+c$$

$$\int \cos hx\, dx=\sin hx+c$$

$$\int \tan hx\, dx=\log(\cos hx)+c$$

$$\int \sec h^2 x\, dx=\tan hx+c$$

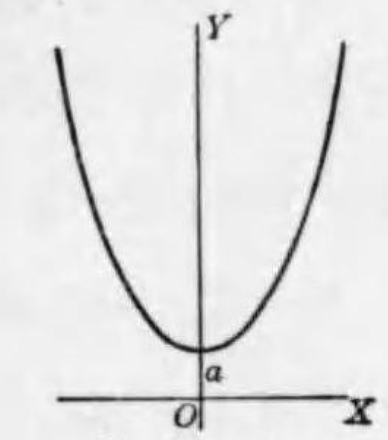
$$\int \operatorname{cosec} h^2 x\, dx=-\cot hx+c$$

91. 懸　垂　線 (Catenary)

$\cos hx=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ヲマタ懸垂線トモイフ，コノ曲線ハ鎖ヲ二點間ニ吊シタルトキ表ハレル曲線ニシテソノ一般式ハ

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

但シ a ハ原點ヨリコノ曲線ノ最下點マデノ距離ナリ。



The Catenary
$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$

例 (1) Catenary $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ ノ slope ヲ求メヨ。

〔解〕 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\sin hx$$

問　　題

次ノ式ヲ微分セヨ。

(1) $y=\sin hx+\frac{1}{3}\sin h^3 x$

(2) $y=\cos hx\,.\,\cos x+\sin hx\,.\,\sin x$

(3) $y=\cos hx\,.\,\sin x+\sin hx\,.\,\cos x$

(4) $y=\log\cos hx$

(5) $y=\tan^{-1}(\tan hx)$

(6) $y=\sin h^{-1}(\tan x)$

次ノ積分ヲ求メヨ。

(7) $\int_0^1 \sin h\, 2x\, dx$ (8) $\int_1^2 \cos h\, 3x\, dx$

(9) $\int_0^5 \sin h^2 x\, dx$

(10) Find the area under the catenary $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

(i) From $x=0$ to $x=3$

(ii) From $x=-1$ to $x=1$

(11) Find the area under the curve $y=\sin hx$

From $x=0$ to $x=3$

(12) Show that the pair of parameter equations

$$x=\cos t, \quad y=\sin ht$$

represent the rectangular hyperbola

$$x^2-y^2=1.$$

第 十 章

逐次微分法及極大極小

92. 逐次微係數

函數 $f(x)$ ノ微係數 $f'(x)$ ハ普通マタ x ノ函數ニシテ微分可能ナルトキソノ微係數ヲ $f(x)$ ノ第二階微係數 (Second differential coefficient or Second derivative) トイヒ $f''(x)$ ナル記號ニテ表ハス。之レニ對シテ $f'(x)$ ヲ $f(x)$ ノ第一階微係數 (First differential coefficient) トイフ。同樣ニシテ $f''(x)$ ノ微係數 $f'''(x)$ ヲ 第三微係數ト稱ス。 以下逐次斯ノ如クニシテ第四階，第五階，等一般ニ第 n 階微係數ヲ考フルコトヲ得ベク之ヲ表ハスニ $f^{(n)}$ ナル記號ヲ用フ。

$y=f(x)$ ナルトキ第二階，第三階微係數ハ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dd^2} \quad \text{or } y''$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{or } y'''$$

一般ニ $\qquad \frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)} \qquad$ ト記ス

力學ニ於テハ時間 t ニ對スル微係數ヲ次ノ如キ記號ニテ表ハスコトアリ

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\ddot{y}, \quad \frac{d^3y}{dt^3}=\dddot{y}$$

函數 $f(x)$ ノ微係數 $f'(x)$ ハ曲線 $f(x)$ ノ slope ヲ表ハスガ

故ニ第二階微係數 $f''(x)$ ハ曲線 $f'(x)$ ノ slope ヲ表ハス。同樣ニ $f'''(x)$ ハ曲線 $f''(x)$ ノ slope ヲ表ハスモノナリ。

物理學的ニハ微係數 $f'(x)$ ハ速度ヲ表ハシ，第二微係數 $f''(x)$ ハ加速度ヲ表ハスコトハ既ニ述ベタリ。

例 (1) $y=\frac{1}{6}(x-2)^3+3$ ナルトキ

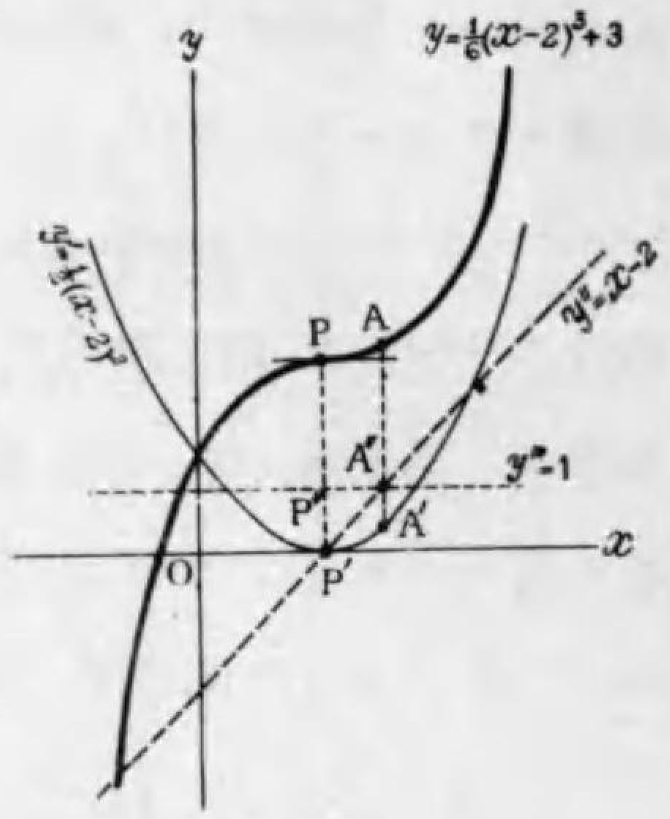
y', y'', y''' ヲ求メ且ツソノ曲線ヲ畫ケ

〔解〕 $y=\frac{1}{6}(x-2)^3+3$

$y'=\frac{1}{2}(x-2)^2$

$y''=x-2$

$y'''=1$



第三階微係數 y''' ハ定數ナルガ故ニ第四階以上ノ微係數ハミナ零ナリ。

次ニ x ニ種々ノ値ヲ與ヘテ之レニ對スル y, y', y'' ノ値ヲ求ムレバ次ノ如シ。

x	……-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5…
y	$-13\frac{5}{6}$	$-7\frac{2}{3}$	$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{5}{6}$	3	$3\frac{1}{6}$	$4\frac{1}{3}$	$7\frac{1}{2}$
y'			$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$
y''				-2	-1	0	1	2	

例 (2) $y=\frac{1}{4}(x^3-3x^2-9x+32)$ ナルトキ

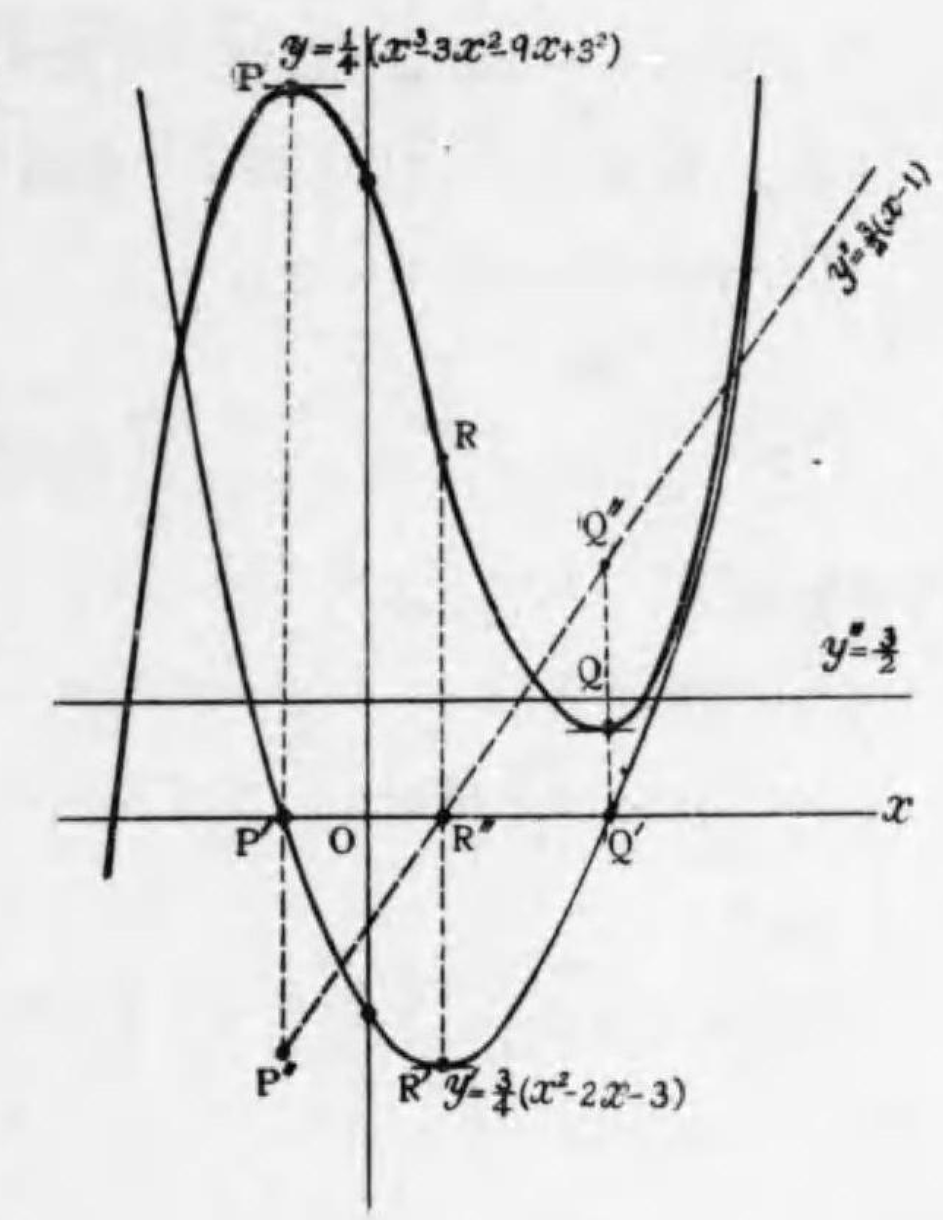
y', y'', y''' ヲ求メ且ツソノ曲線ヲ畫ケ

〔解〕 $y=\frac{1}{4}(x^3-3x^2-9x+32)$

$y'=\frac{3}{4}(x^2-2x-3)$

$y''=\frac{3}{2}(x-1)$

$y'''=\frac{3}{2}$



次ニ x ニ種々ノ價ヲ與ヘテ之レニ對スル y', y'', y''' ヲ求ムレバ次ノ如シ。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5………
y	$1\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	8	$3\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	3	$9\frac{1}{4}$………
y'	9	$3\frac{3}{4}$	0	$-2\frac{1}{2}$	-3	$-2\frac{1}{4}$	0	$3\frac{3}{4}$	9………
y''			-3		0		3		

上圖ニ於テ點 P, Q ニ於テハ $y'=0$ ナルガ故ニ曲線 y' ハ點 P', Q' ニテ x 軸ニ交ル。

マタ點 $R(x=1)$ ニ於テハ $y'=-3$ ナルガ故ニ之レニ對應スル曲線 y' 上ノ點 R' ハ $(1, -3)$ ナリ。

次ニ曲線 y' 上ノ點 R' ニ於テハ $y''=0$ ナルガ故ニ直線 $y''=\frac{3}{2}(x-1)$ ハ x 軸ト點 $R''(x=1)$ ニ交ルコトヲ見ルベク以下同樣ニ各曲線間ノ關係ヲ考究スルコトヲ得。

〔註〕 曲線 $y=f(x)$ ニ對シテ曲線 $y', y'', \cdots\cdots$ ノ曲線ヲ導曲線 (Derived curves) トイフ。

例 (3) $y=e^{ax}$ ナルトキ $\frac{d^ny}{dx^n}$ ヲ求メヨ。

〔解〕
$$\frac{dy}{dx}=ae^{ax}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=a^2e^{ax}$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=a^3e^{ax}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\therefore \quad \frac{d^ny}{dx^n}=a^ne^{ax}$$

嚴密ニハ數學的歸納法ニヨラザル可ラズ。

問　題

次ノ函數ノ y', y'', y''' ヲ求メ且ツソノ曲線ヲ畫キ，ソノ slope ガ零ナル點ヲ求メヨ。

(1) $y=x^3-12x+7$ 　　(2) $y=\frac{1}{3}(x-3)^3+5$

(3) $s=64t-16t^2$ 　　(4) $s=(t-1)^2(t+3)$

(5) 次ノ函數ノ第 n 階微係數ヲ求メヨ。

(i) $\sin x$ 　(ii) $\cos x$ 　(iii) $\tan x$

(iv) e^x 　(v) e^{ix} 　(vi) $\log(1+x)$

93. 增加函數ト減少函數

函數 $y=f(x)$ ガ連續函數ニシテ $x=a$ ナルトキ x ノ增加 Δx ニ對シテ函數 y ノ變化 Δy ガ正ナルトキコノ函數ヲ增加函數 (Increasing f.) トイヒ，之レニ反シテ Δy ガ負ナルトキ之レヲ減少函數 (Decreasing f.) トイフ。

增加函數ニ於テハ Δx, Δy 共ニ正ナルガ故ニ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ハ正，從ツテソノ極限ナル微係數モ正ニシテ

$$\frac{dy}{dx}=\tan\theta=\text{正}$$

故ニコノ曲線ノ $x=a$ ナル點ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角 θ ハ鋭角ニシテ曲線ハコノ點ニ於テ上昇シツヽアリ。

之レニ反シテ減少函數ニ於テハ

$$\frac{dy}{dx}=\tan\theta=\text{負}$$

故＝切線ガ x 軸トナス角 θ ハ鈍角＝シテ曲線ハソノ點＝於テ降下シツヽアリ。逆＝次ノ定理ヲ得

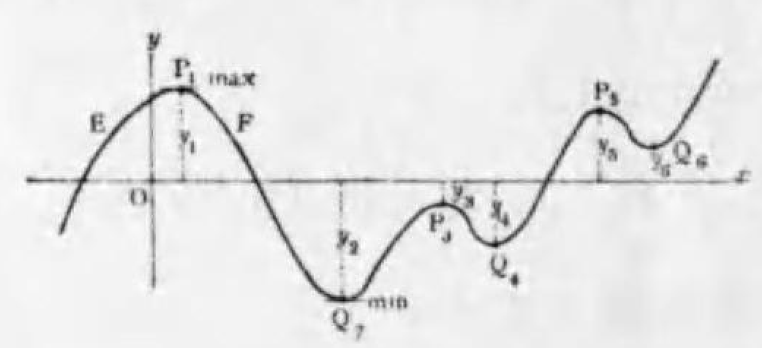
(A) $\dfrac{dy}{dx}$ ガ正ナレバ　增加函數

(B) $\dfrac{dy}{dx}$ ガ負ナレバ　減少函數　　ナリ。

94. 極大點及極小點

函數 $y=f(x)$ ノ曲線ガ下圖ノ如キ曲線ナルトキ A ヨリ P_1 マデノ間及 Q_2 ト P_3 トノ間ノ曲線ハ上昇曲線＝シテ增加函數ナルガ故＝ソノ slope ハ正ナリ。

マタ P_1 ヨリ Q_2 マデノ間及 P_3 ト Q_4 トノ間ノ曲線ハ降下曲線＝シテ減少函數ナルガ故＝ソノ slope ハ負ナリ。



次＝點 P_1, P_3, P_5 ……等ハ曲線ノ山頂＝當ル點＝シテ之レヲ極大點 (Maximum points) トイヒ。之等ノ點＝於ケル函數ノ値 y_1, y_3, y_5 ……等ヲ極大值 (Maximum value) トイフ。

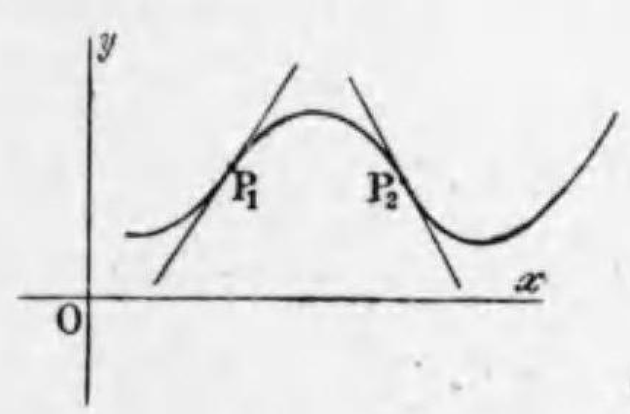
マタ曲線ノ谷底＝當ル點 Q_2, Q_4, Q_6 …等ヲ極小點(Minimum point) トイヒ之レ＝對スル函數ノ値 y_2, y_4, y_6 … 等ヲ極小值 (Minimum value) トイフ。

圖＝ヨリ明カナル如ク極大值及極小值ハ其函數ノ最大值及最小值ヲ表ハスモノ＝非ズシテ極大值 y_3 ハ極小值 y_6 ヨリ小ナルコトアルハ注意スベキコトナリ。極大值及極小值ヲ總稱シテ極值 (Turning value) トイフコトアリ。

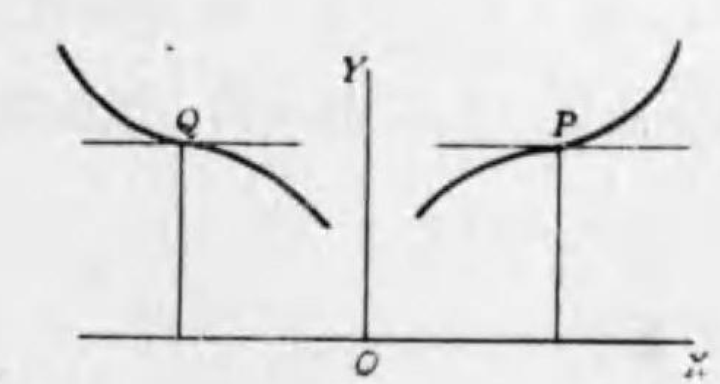
極大點＝於テハ曲線ガ上昇ヨリ降下＝移リ變ル點ナルガ故＝微係數 y' ハ正ヨリ負＝移リ變ル點ナリ。y' ガ正ヨリ負＝連續的＝變ル＝ハ必ラズ零ヲ過ギザル可ラズ，故＝極大點＝於テハ $y'=0$ ナリ。　同樣＝極小點ハ曲線ハ降下ヨリ上昇＝移ル點ナルガ故＝ y' ハ負ヨリ正＝移リ變ル點＝シテ $y'=0$ ナリ，故＝極點＝於テハ $y'=0$ ＝シテソノ點＝於ケル切線ハ x 軸＝平行ナリ。

95. 變曲點尖點及臨界點

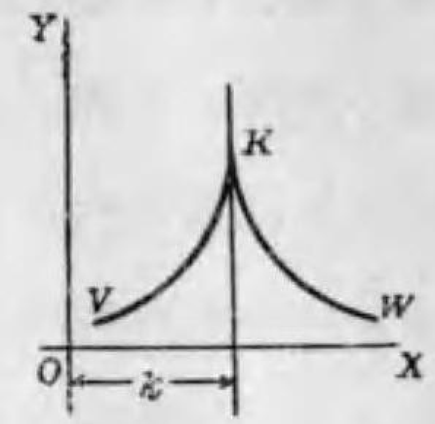
右圖＝於テ點 P_1 及 P_2 ＝於テハ曲線ハソノ彎曲ノ方向ヲ變ズルガ故＝之等ノ點ヲ變曲點 (Point of inflexion) トイフ。



變曲點ノ內＝ハ點 P. 及 Q ＝於ケルガ如クソノ點＝於ケル切線ガ x 軸＝平行ナルモノアリ。



マタ點 K ノ如キ尖ツテオル點ヲ尖點 (cusp) トイフ。



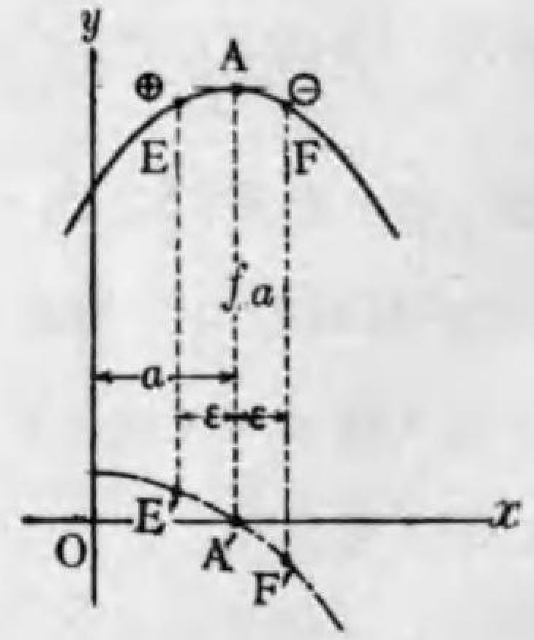
次ニ切線ガ x 軸ニ平行又ハ垂直ナル曲線上ノ點ヲ臨界點 (Critical point) トイフ。故ニ臨界點ノ内ニハ極大點，極小點及變曲點ヲ含ムモノニシテ本書ニ於テハ主トシテ切線ガ x 軸ニ平行ナルモノヲ論ズルコトヽス。

96. 曲線ト微係數トノ關係

(A)　極大點　函數 $f(x)$ ガ $x=a$ ニ於テ極大ナルトキハソノ第一微係數 $f'(x)$ ハ點 $A(x=a)$ ニ於テ零

$E(x=a-\varepsilon)$ ニ於テハ正，

$F(x=a-\varepsilon)$ ニ於テ負トナルガ故ニ

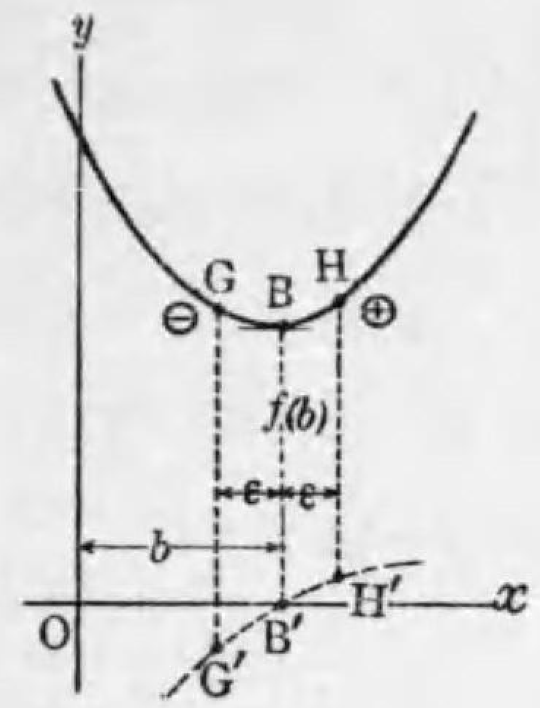


$$\left.\begin{aligned} f'(a-\varepsilon) &> 0 \\ f'(a) &= 0 \\ f'(a+\varepsilon) &< 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(92)$$

ナリ。從ツテ $f'(x)$ ハ減少函數トナルガ故ニソノ曲線 E'A'F' ハ降下曲線ナリ，故ニ第二微係數 $f''(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ負ナリ。

$$\left.\begin{aligned} f'(a) &= 0 \\ f''(a) &< 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(93)$$

(B)　極小點　之レニ反シテ函數 $f(x)$ ガ $x=0$ ニ於テ極小ナルトキハ



$$\left.\begin{aligned} f(b-\varepsilon) &< 0 \\ f'(b) &= 0 \\ f(b+\varepsilon) &> 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(94)$$

從ツテ函數 $f'(x)$ ハ增加函數ニシテソノ曲線 G'B'H' ハ上昇曲線トナルガ故ニ第二微係數 $f''(x)$ ハ $x=b$ ニ於テ正ナリ。

$$\left.\begin{aligned} f'(b) &= 0 \\ f''(b) &> 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(95)$$

(C)　變曲點　函數 $f(x)$ ガ $x=c$ ニ於テ變曲點ニシテソノ前後ニ於テ上昇曲線ナルトキハ (Fig. A) 第一微係數 $f'(x)$ ハ點 $C(x=c)$ ニ於テ零ナレドモ點 $K(x=c-\varepsilon)$ 及點 $L(x=c+\varepsilon)$ ニ於テ共ニ正ナリ。

Fig. A.

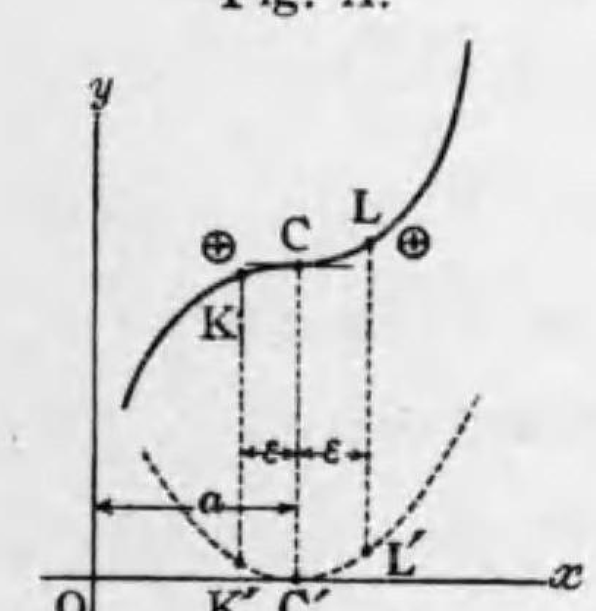
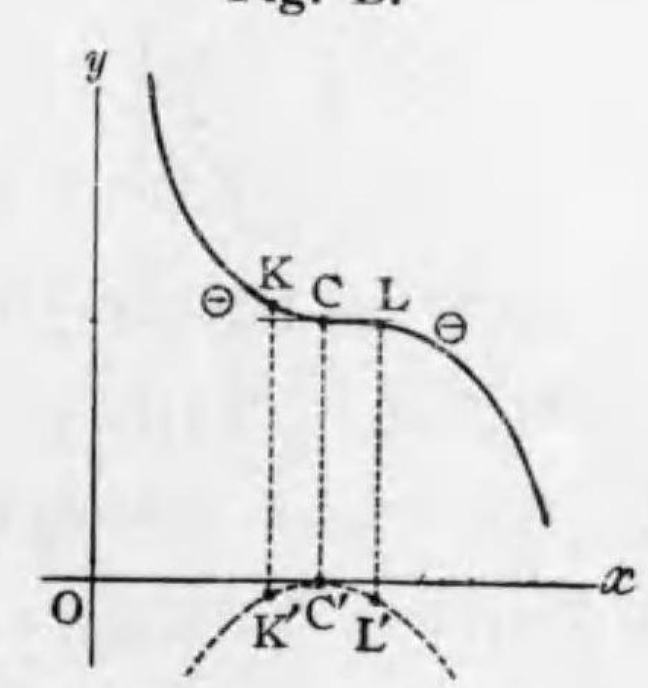


Fig. B.



$$\left.\begin{aligned} f(c-\varepsilon) &> 0 \\ f'(c) &= 0 \\ f'(c+\varepsilon) &> 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(96)$$

従ツテ函數 $f'(x)$ ノ曲線 K'C'L' ハ $x=c$ ニ於テ x 軸ニ切ス，故ニ第二微係數 $f''((x)$ ハ $x=c$ ニ於テ零ニシテ，第三微係數 $f'''(x)$ ハ正ナリ。

即
$$\left.\begin{aligned} f'(c) &= 0 \\ f''(c) &= 0 \\ f'''(c) &> 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(97)$$

變曲點 C ノ前後ニ於テ降下曲線ナルトキハ (Fig. B)

$$\left.\begin{aligned} f'(c-\varepsilon) &< 0 \\ f'(c) &= 0 \\ f'(c+\varepsilon) &< 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(98)$$

従ツテ函數 $f'(x)$ ノ曲線 K'C'L' ハ $x=c$ ニ於テ x 軸ニ切ス。故ニ第二微係數 $f''(x)$ ハ $x=c$ ニ於テ零ニシテ，第三微係數 $f'''(x)$ ハ負ナリ。

$$\left.\begin{aligned} f'(c) &= 0 \\ f''(c) &= 0 \\ f'''(c) &< 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(99)$$

(D) **極大點ト極小點** $f'(x)=0$ ノ根ガ $x=a$ ナルトキ

$f''(a)=0$, $f'''(a)$ ニシテ $f''''(a)<0$ ナレバ

$f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ極大ニシテ

$f''''(a)>0$ ナレバ極小ナリ。

以下次第ニ斯クノ如クシテ最後ニ奇數次ノ微係數ニ至リ $x=a$ ヲ代入シテ零トナラザレバ $f(a)$ ハ極大，極小ニアラズシテ最後ニ偶數次ノ微係數ニ至リ $x=a$ ヲ代入シテ正トナレバ $f(a)$ ハ極小値，負トナレバ $f(a)$ ハ極大値ナリ。

97. 極大，極小値ヲ求ムル法則

〔第一法〕 函數 $f(x)$ ノ極大，極小値ヲ求メルニハ $f'(x)=0$ ナル方程式ノ根 a ヲ求メ，$x=a$ ノ前後ニ於テ

〔I〕 $f'(x)$ ガ正ヨリ負ニ符號ヲ變ズルトキハ $f(a)$ ハ極大値

〔II〕 $f'(x)$ ガ負ヨリ正ニ符號ヲ變ズルトキハ $f(x)$ ハ極小値

〔III〕 $f'(x)$ ガ同符號ナルトキハ $f(x)$ ハ極値ニ非ズシテ $x=a$ ナル點ハ x 軸ニ平行ナル切線ヲ有スル變曲點ナリ

$f'(x)=0$ ナル方程式ガ多クノ根ヲ有スルトキハソノ各々ノ根ニツキテ檢セザル可ラズ

〔第二法〕 $f'(x)=0$ ノ根ガ a ナルトキ

〔IV〕 $f''(a)<0$ ナラバ $f(a)$ ハ極大値

〔V〕 $f''(a)>0$ ナラバ $f(a)$ ハ極小値

〔VI〕 $f''(a)=0$ ナルトキハ P.256 (97) (99) ヨリ $f'''(a)\neq 0$ ナレバ $x=a$ ハ變曲點

$f'''(a)=0$ ナレバ P.256 (D) ニヨリテ極大，極小ヲ決定スベシ。

例 (1)　$f(x)=x^5-5ax^4+5a^2x^3$　$(a>0)$ ノ極値ヲ求メヨ。

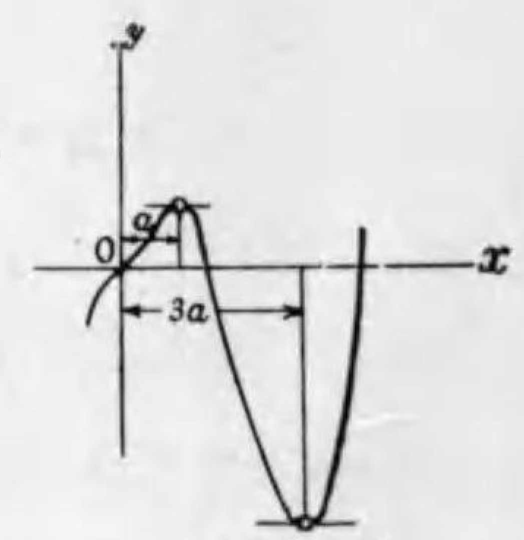
〔解〕　$f'(x)=5x^4-20ax^3+15a^2x^2$

$$=5x^2(x-a)(x-3a)$$

極値ニ對シテハ $5x^2(x-a)(x-3a)=0$ ナラザルベカラズ，コノ方程式ノ根ハ $x=0,\ a,$ 及 $3a$ ナリ

$f'(x)$ 中ノ x ＝ (i) 0 ヨリ少シ小ナル値及大ナル値，(ii) a ヨリ少シ小ナル値及大ナル値，(iii) $3a$ ヨリ少シ小ナル値及大ナル値ヲ代入シテ符號ノミヲ檢スレバ

x	……	0	…	a	…	$3a$	……
$f'(x)$	+	0	+	0	−	0	+
		infl.		max.		min.	



故ニ　$f(a)=a^5$　ハ極大値

$f(3a)=-27a^5$　ハ極小値

$x=0$　ハ變曲點ナリ。

〔第二法〕　$f'(x)=5x^4-20ax^3+15a^2x^2$

$$f''(x)=20x^3-60ax^2+30a^2x$$

$$f'''(x)=60x^2-120ax-30a^2$$

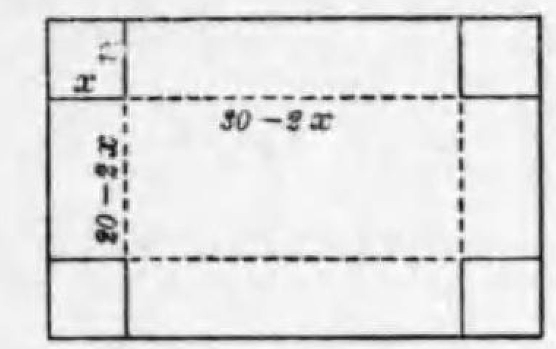
(i)　$x=a$　ニ對シテ　$f''(a)<0$　∴ $f(a)$　ハ極大値

(ii)　$x=3a$　ニ對シテ　$f''(3a)>0$　∴ $f(3a)$　ハ極小値

(iii)　$x=0$　ニ對シテ　$f''(0)=0$　$f'''(0)=-3a^2$

∴　$x=0$　ハ變曲點ナリ。

例 (2)　邊ノ長サ夫々 30 cm, 20 cm ナル矩形ノ厚紙アリ，ソノ四隅ヨリ相等シキ大サノ正方形ノ部分ヲ切リ去リ，殘リヲ以テ蓋ナキ箱ヲ作ラントス，箱ノ容積ヲ最大ナラシメントス，切リ去ルベキ正方形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ。



〔解〕 切リ去ルベキ正方形ノ一邊ノ長サヲ x トスレバ

箱ノ容積　$V=x(20-2x)(30-2x)$

$$=600x-100x^2+4x^3$$

$$\frac{dV}{dx}=600-200x+12x^2$$

∴　$\frac{dV}{dx}=0$　ノ根トシテ

$$x=\frac{25\pm5\sqrt{7}}{3}=3.9 \text{ or } 12.7$$

然ルニ 12.7 ハ問題ニ適セズ何ントナレバ 20 cm ヨリ 12.7 cm ノ 2 倍ノ長サヲトルコト能ハズ。

故ニ求ムル正方形ノ一邊ハ 3.9 cm ナリ。

〔第一法〕 ニテ之レヲ檢スレバ

$$\frac{dV}{dx}=12(x-3.9)(x-12.7)$$

∴　$x=3.9$ ノ前ト後ニテ $\frac{dV}{dx}$ ハ ＋ 及 － ナリ

∴　$x=3.9$ ニ於テ V ハ max. value ヲトル。

〔第二法〕ニテ之レヲ檢スレバ

$$\frac{d''V}{dx^2} = -200 + 24x$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=3.9} < 0$$

∴　$x = 3.9$ ニ於テ V ハ Max. value ヲトル

Max. value of $V = 3.9(20-7.8)(30-7.8)$

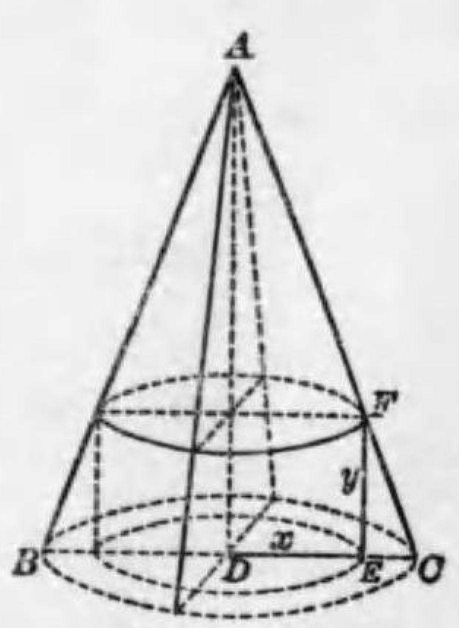
$\fallingdotseq 1056$

答　正方形ノ一邊ハ 3.9 *cm* ニシテ箱ノ容積ハ 1056 *c.c.*

〔註〕實際問題ニ於テハ Max. カ min. ナルカハ〔第一法〕〔第二法〕ニテ檢セズトモ明ナルコト多シ。

例 (3) A piece of wood is in the form of a right circular cone, the altitude and the radius of the base of which are each equal to 12 cm.

What is the volume of the largest right circuler cylinder that can be cut from this piece of wood, the axis of cylinder to coincide with the axis of the cone?



〔解〕 requ. cylinder ノ底ノ半徑ヲ x, 高サヲ y, 體積ヲ V トスレバ

$$V = \pi x^2 y \quad \text{.........(i)}$$

次ニ　△FEC∽△ADC

$$\therefore \quad \frac{FE}{EC} = \frac{AD}{DC}$$

$$\frac{y}{12-x} = \frac{12}{12}$$

$$\therefore \quad y = 12 - x$$

$$\therefore \quad V = \pi x^2(12-x) = 12\pi x^2 - \pi x^3$$

$$\frac{dV}{dx} = 24\pi x - 3\pi x^2 = 3\pi x(8-x)$$

方程式　$\frac{dV}{dx} = 0$ ノ根トシテ　$x = 0$ or 8

然ルニ　$x = 0$ ハ問題ニ適セズ

∴　$x = 8$ ハ求ムル値ナリ。

〔第一法〕 $x = 8$ ノ前後ニ於テ $\frac{dV}{dx}$ ハ +, −, ナリ。

〔第二法〕 $\frac{d^2V}{dx^2} = 24\pi - 6\pi x$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=8} < 0$$

∴　$x = 8$ ニ於テ V ハ max. value ヲトル

$V = 256\pi$ *c.c.*

例 (4) 操舵角ノ極限トシテ 35° ヲトル理由ヲ述ベヨ。

面積 A ナル板ヲ其運動ノ方向ト θ ナル角度ニテ水中ヲ曳クトキ之ニ及ボス水ノ抵抗 P′ ハ Lord Rayleigh ノ公式ニヨリ次ノ如シ

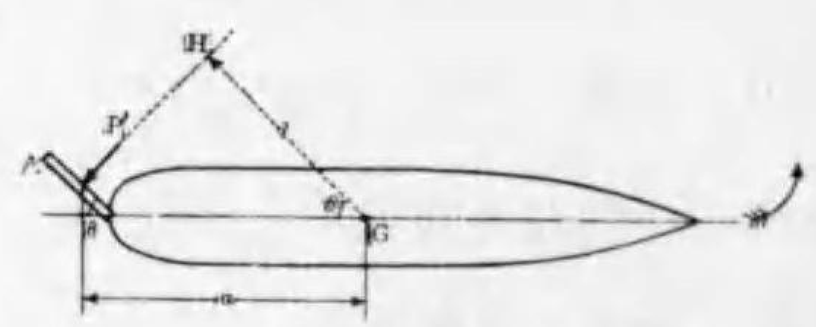
$$P'=P\frac{2\pi\sin\theta}{4+\pi\sin\theta}\doteqdot P\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

コヽニ P ハ面積 A ナル板ヲ之レニ垂直ノ方向ニ水中デ曳クトキ之ニ働ク全抵抗ニシテ

$$P=\frac{w}{g}v^2A$$

但シ v=速度 (呎, 秒), w=水一立呎ノ重量 (封度)

A ハ (平方呎) ナリトス



今船ノ重心ガ點 G ニアリトシ, 舵ヲ θ ダケ廻轉セルトキ舵面ニ及ボス水ノ抵抗 P′ ガ船ヲ廻轉セントスル廻轉能率ヲ M トスレバ

$$M=P'\times l=P\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\times a\cos\theta$$

$$=aP\frac{\sin 2\theta}{1+\sin\theta}$$

距離 a ハ舵ノ長サニ比シテ極メテ長キガ故ニ之ヲ定數ト見ルコトヲ得。故ニ M ハ θ ノ函數ナリ。

$$\therefore\quad \frac{dM}{d\theta}=aP\left\{\frac{2\cos 2\theta(1+\sin\theta)-\sin 2\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}\right.$$

$$\therefore\quad \frac{dM}{d\theta}=0$$ ヲ解キテ

$$2\cos 2\theta\,(1+\sin\theta)-\sin 2\theta\cos\theta=0$$

$$(1+\sin\theta)(1-\sin\theta-\sin^2\theta)=0$$

$$\therefore\quad \sin\theta=-1$$

$$\sin\theta=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

負根ハ問題ニ適セザルガ故ニ

$$\sin\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=.618$$

$$\therefore\quad \theta=38^\circ\ 10'$$

故ニ $\theta=38^\circ\ 10'$ ノトキ廻轉能率 M ハ最大ニシテ之レ以上操舵スレバ却ツテ M ハ減少スルナリ

從ツテ大體ニ於テ

$$\theta=35^\circ$$

ヲ以テ操舵ノ極限トスルモノナリ。

例 (5) 汽船ニ於ケル燃料消費量ハ速度ノ三乘ニ比例ス。某船ニ於テハ毎時 10 海里ノ速度ニテ航海スルトキ毎時 25 圓ノ燃料ヲ消費セリトイフ, 尙コノ船ハ燃料以外ノ費用トシテ毎時 100 圓ヲ要ストイフ。コノ汽船ガ靜水中ニ走ル場合ノ經濟的速サヲ求メヨ。

〔解〕 燃料ノ消費額 $F=kv^3$ (k ハ比例定數)

$$25=k(10)^3\qquad \therefore\ k=.025$$

船ノ一時間ノ費用 $E=.025v^3+100$

船ガ一海里ヲ走ルニ要スル費用 C ハ

$$C=\frac{0.025v^3+100}{v}$$

$$=0.025v^2+100v^{-1}$$

$$\therefore \quad \frac{dC}{dv}=0.05\,v^2-100\,v^{-2}$$

$$\frac{dC}{dv}=0 \text{ ヲ解ケバ}$$

$$v^3=2000, \quad v=\sqrt[3]{2000}$$

$$=12.6 \text{ 海里/時}$$

従ツテ一時間ノ費用 E ハ 150 圓ナリ。

問　題

次ノ函數ノ極大，極小ヲ求メヨ。(1–5)

(1) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$

(2) $f(x)=8+6x-5x^2$

(3) $f(x)=x^2-6x+8$

(4) $f(x)=x^3-3x^2-9x+9$

(5) $f(x)=x^2+\dfrac{16}{x}$

(6) 100 ヲ二分シテソノ各々ノ平方ノ和ヲ最小ナラシメントス。各々ノ數ヲ求メヨ。

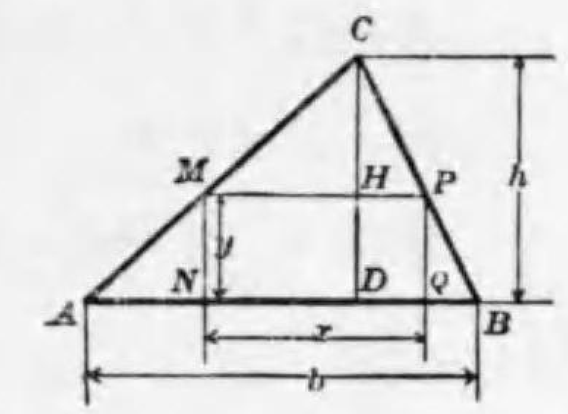
(7) 長サ 80 *cm* ノ針金ニテ最大ナル矩形ヲ作ラントス。各邊ノ長サヲ求メヨ。

(8) アル數アリ之レニソノ逆數ノ平方ヲ加ヘタルモノガ最小ナリトイフ，ソノ數ヲ求メヨ。

(9) 三角形 ABC ニ內接スル最大矩形ノ面積ヲ求メヨ。

但シ AB=b, ニシテ高サハ h ナリトス

〔略解〕 $\dfrac{MP}{AB}=\dfrac{CH}{CD}$, $\dfrac{x}{b}=\dfrac{h-y}{h}$



$$\therefore \quad x=\frac{b}{h}(h-y)$$

$$\therefore \text{ 矩形ノ面積} \quad A=\frac{b}{h}y(h-y)$$

$$\frac{dA}{dy}=0 \text{ ヨリ } y=\frac{1}{2}h$$

實際 M ガ AC 上ヲ A ヨリ C ニ向ツテ動クトキ M ガ A 及 C ニアルトキハ零ナルガ故ニソノ中點ニ於テ max. ニナルコト明ナリ。

(10) 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ內接スル最大矩形ノ面積ヲ求メヨ。

〔註〕 矩形ノ面積 $A=4xy=4\dfrac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}$ トスレバ

$x\sqrt{a^2-x^2}$ ノ max. ハソレヲ二乘シタル

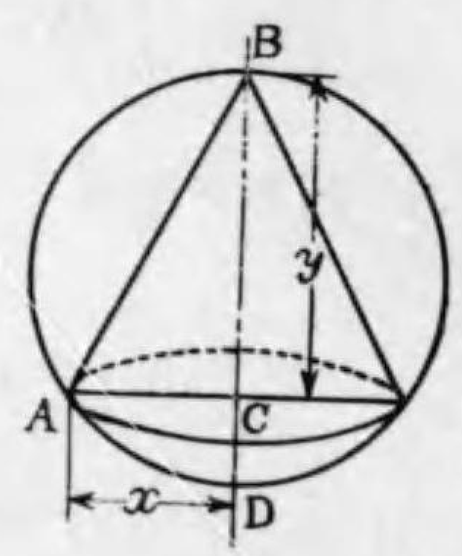
$x^2(a^2-x^2)$ ノ max. ニ等シトシテ微分スルモ可ナリ。

(11) 圓 $x^2+y^2=a^2$ ニ內接スル最大矩形ノ面積ヲ求メヨ。

(12) 斷面矩形ナル梁ノ强度 (Strength) ハ幅ト，厚サノ二乘トノ積ニ比例ス。然ルトキハ直徑 d ナル丸棒ヨリ最モ强キ矩形ノ梁ヲ作ルニハ幅及ビ厚サヲ如何ニスベキカ。

(13) 斷面ガ矩形ナル梁ノ剛性 (Stiffness) ハ幅ト，厚サノ三乘トノ積ニ比例ス。然ルトキハ直徑 d ナル丸棒ヨリ最大剛性ヲ有スル矩形ノ梁ヲ作ルニハソノ幅及ビ厚サヲ如何ニスベキカ。

(14) 半徑 R ナル球ニ内接スル最大容積ノ圓錐ノ高サヲ求メヨ。



〔略解〕 圓錐ノ容積 $V=\dfrac{1}{3}\pi x^2 y$

然ルニ $x^2=R^2-(y-R)^2$

$=y(2R-y)$

$\therefore\quad V=\dfrac{1}{3}\pi y^2(2R-y)$

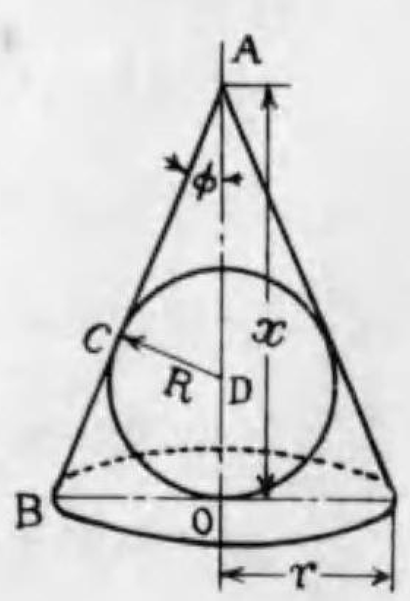
$$\frac{dV}{dy}=\frac{1}{3}\pi[2y(2R-y)-y^2]=0$$

コノ方程式ノ根ハ $y=\dfrac{4}{3}R.$

(15) 半徑 R ナル球ニ内接スル最大容積ノ圓筒ノ高サハ $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ ナルコトヲ證セヨ。

(16) 直圓錐ニ内接スル最大容積ノ圓筒ノ高サハ圓錐ノ高サノ $\dfrac{1}{3}$ ナルコトヲ證セヨ。

(17) 半徑 R ナル球ニ外接スル圓錐中體積ノ最小ナルモノハ高サ 4R ニシテ頂點ニ於ケル角ハ $2\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$ ナルコトヲ證セヨ。



〔解〕 $\triangle AOB \backsim \triangle ACD$

$\therefore\quad \dfrac{CD}{AC}=\dfrac{OB}{AO}$

即 $\dfrac{R}{\sqrt{(x-R)^2-R^2}}=\dfrac{r}{x}.$

$\therefore\quad r=\dfrac{xR}{\sqrt{x^2-2Rx}}.$

圓錐ノ體積 $V=\dfrac{1}{3}\pi x r^2$

$=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{x^2R^2}{x-2R}$

$\dfrac{dV}{dx}=0$ ノ根ヲ求ムレバ

$x=0$ 又ハ 4R

然ルニ $x=0$ ハ問題ニ適セズ故ニ $x=4R$

$\left[\dfrac{d^2V}{dx^2}\right]_{x=4R}>0\quad\therefore\ x=4R$ ハ所要ノ高サナリ。

又 $\sin\phi=\left[\dfrac{R}{x-R}\right]_{x=4R}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\quad \phi=\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$

故ニ $2\phi=2\sin^{-1}\dfrac{1}{3}$

(18) 半徑 a ナル圓板ヨリ扇形ノ部分ヲ切リ取リ殘リノ部分ヲ以テ容量ガ最大ナル圓錐狀ノ漏斗ヲ作ラントス。コノ

時切リ取ルベキ扇形ノ形ノ角ハ $2(1-\frac{1}{3}\sqrt{6})\pi$ radian
(約 66°4′) ナルコトヲ證明セヨ。

〔略解〕 漏斗ノ容積ヲ V トスレバ

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{a^2-r^2}$$

$\frac{dV}{dr}=0$ ノ根ヲ求ムレバ

$$r=0,\quad \text{or}\ \pm\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

r ヲ正トスレバ $r=\sqrt{\frac{2}{3}}a$

$\frac{d^2V}{dr^2}$ ノ符號ヲ檢スレバハ

$r=\sqrt{\frac{2}{3}}a$ ハ V ヲ max. ニス

所要ノ角ヲ θ radian トスレバ

$$\text{圓弧 ABC}=a(2\pi-\theta)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (\text{Fig. A})$$

$$=2\pi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)\ \cdots\cdots\cdots\ (\text{Fig. B})$$

$$\therefore\quad a(2\pi-\theta)=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$$\therefore\quad \theta=2\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\pi=2\left(1-\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)\pi\quad \text{Radian.}$$

Fig. A.

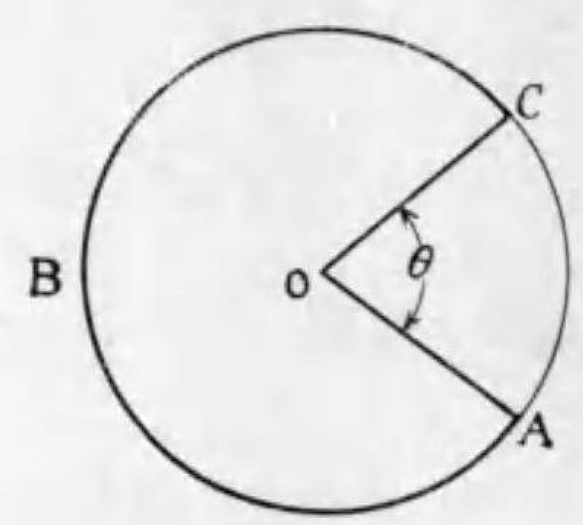
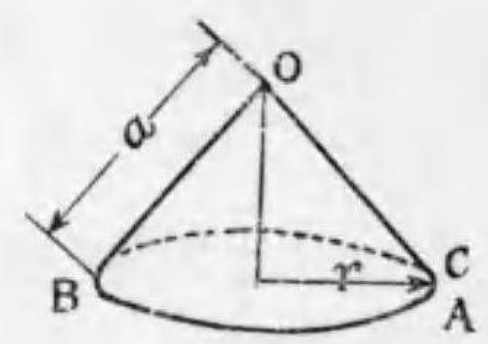


Fig. B.



(19) 容積ガ與ヘラレタルトキ圓錐形天幕ノ內ニテ布ヲ最小ニスルニハソノ高サト底ノ比ヲ如何ニスベキカ。

(20) 一定容積 V ナル頂上ニ開ケル直圓筒ヲ作ルニソノ材料ヲ最モ經濟的ニスルニハ高サト底ノ半徑ヲ如何ニスベキカ。

(21) 半徑 R ナル球ニ內接スル圓錐ノ內ニテソノ曲面積ノ最大ナル圓錐ノ高サハ $\frac{4}{3}$R ナルコトヲ證セヨ。

(22) 半徑 R ナル球ニ內接スル圓筒ノ內ニテソノ曲面積ノ最大ナル圓筒ノ高サハ $\sqrt{2}$R ナルコトヲ證セヨ。

(23) 圓錐ニ內接スル圓筒ノ內ノソノ曲面積ノ最大ナル圓筒ノ高サヲ求メヨ。

(24) 一邊ノ長サ 30 cm ナル正方影ノ厚紙アリソノ四隅ヨリ正方形ヲ切リ取リテ箱ヲ作リ。ソノ容積ヲ最大ナラシメントス。切リ取ルベキ正方形ノ一邊ヲ求メヨ。

(25) 深海ニ於ケル波長 λ ナル波ノ速度ハ $\sqrt{\frac{\lambda}{a}+\frac{a}{\lambda}}$ ニ比例スルモノトス
然ラバ波ノ速度ハ $\lambda=a$ ナルトキ最小ナルコトヲ證セヨ。

(26) 容積 V ナル開ケル圓筒狀水槽ヲ造ルニ側面一平方米ノ費用ハ底面一平方米ノ費用ノ $\frac{2}{3}$ ナリトイフ。最モ經濟的ニ造ルニハ高サ及ビ底ノ半徑ヲ如何ニスベキカ。

(27) 底面ガ正方形ニシテ容積ガ 180 立方米ナル たんく ヲ造ルニ側面一平方米ノ費用ハ 3 圓ニシテ底面ノ一平方米ノ費用ハ 5 圓ナリトイフ。最モ經濟的ニ造ルニハ高サ及ビ底ノ長サヲ如何ニスベキカ。

(28) 高サ 7 米ノ壁畫アリ，其最下部ハ觀覽者ノ眼ヨリ 9 米上方ニアリ。最モ大キク畫ヲ觀ルニハ壁ヲ隔テヽ幾米ノ距離ニ立ツベキカ。

(29) 汽船ガ推進ニ要スル ゑねるぎー ハ速度ノ三乘ニ比例スルモノトス。水流ノ速度毎時 C 浬ナル川ヲ逆上スルトキ最モ經濟的ナル汽船ノ速度ヲ求メヨ。

〔略解〕 汽船ノ速度ヲ v トスレバ毎時消費セラルヽゑねるぎーハ av^2 ナリ。 但シ a ハ比例定數

$v-c$＝毎時汽船ガ進ミ得ル距離

故ニ $\dfrac{av^3}{v-c}$ ハ汽船ガ單位ノ距離ヲ進ムニ要スル ゑねるぎー ナリ。

此問題ハ $\left(\dfrac{av^3}{v-c}\right)$ ガ如何ナル v ノ値ニツキテ極小ナルカヲ見出セバ可ナリ。

(30) 汽船ヲ進行セシムル仕事ハ其速サノ三乘ニ比例スルモノトス。速サ m 浬ナル潮流ニ反抗シテ航行スルトキ最モ經濟的ノ速サハ毎時 $\dfrac{3}{2}m$ 浬ナルコトヲ證セヨ。

(31) 汽船ニ於ケル石炭消費額ハ其速サノ三乘ニ比例スルモノトス。

今速サ 15 浬ナルトキ一噸 4 圓ノ石炭ヲ毎時 $4\dfrac{1}{2}$ 噸ヲ要ス。マタ其他ノ費用トシテ毎時 12 圓ヲ要ストイフ

然ラバ 2080 浬ノ航海ニ於ケル最モ經濟的ノ速サ及ビ最小ノ費用ヲ求メヨ。

(32) 遠心力ヲ考慮セルトキ最大許容張力 T ナル調鎖 (Chain belt) ニヨリテ最大動力ヲ傳達スルニハ調鎖ノ速度ヲ如何ニスベキカ。

〔略解〕 w＝調鎖ノ單位ノ斷面ニ對スル單位ノ長サノ重量

v＝調鎖ノ速度

y＝重力ニヨル加速度トスレバ

遠心的張力 (Centrifugal tension) $C=\dfrac{wv^2}{y}$

動力ヲ傳達スルニ有効ナル張力ヲ F トスレバ

力學上ヨリ

$$F=T-\frac{wv^2}{y}$$

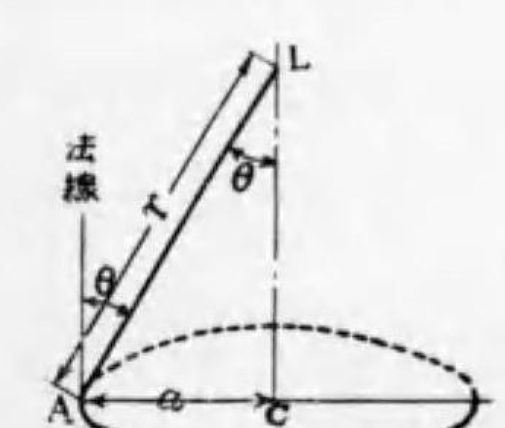
從ツテ傳達セラルベキ動力 P ハ

$$P=Tv-\frac{wv^2}{y}$$

P ヲ極大ナラシムル v ハ所要ノ速度ナリ。

之レヲ求ムレバ $v=\sqrt{\dfrac{Ty}{3w}}$

(33) 或ル微少面 A ニ於ケル照度ハ光源ヨリノ距離 r ノ自乘ニ逆比例シ，r ト A ニ於ケル法線トナス角 θ ノ餘弦ニ比例スルモノトス。



然ラバ半徑 a ナル圓周上ノ照

度ヲ最大ナラシメンニハ中心線上如何ナル距離ニ電燈ヲ取リ付クベキカ。

(34) A 及 B ニ夫々光度 a, b ナル電燈ヲ取リ付ケタリ，AB 線上照度ノ最小ナル點 P ノ位置ヲ求メヨ。

但シ $AB=d$ トス。

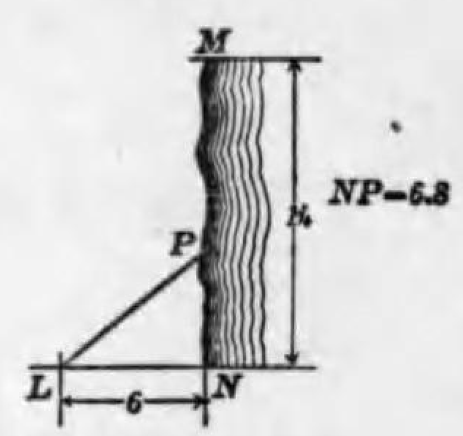
〔略解〕 P 點ノ照度ヲ I トスレバ，

$$I=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(d-x)^2}$$

$$\frac{dI}{dx}=-\frac{2a}{x^3}+\frac{2b}{(d-x)^3}$$

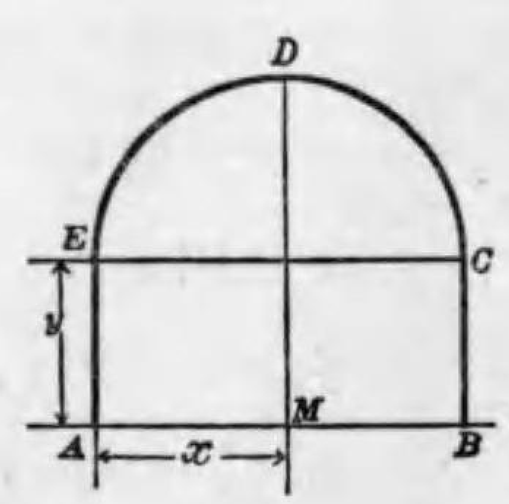
$$\therefore \quad AP:PB=\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}$$

(35) A man in a boat 6 miles from shore wishes to reach a village that is 14 miles distant along the shore from the point nearest to him. He can walk 4 miles an hour and row 3 miles an hour.



Where should be land in order to reach the village in the shortest possible time? Calculate this time.

(36) What must be the ratio of the height of a Norman wlndow of given perimeter to the width in order that the greatest possible amount of light may be admitted?



(37) A piece of galvanized iron b feet long and a feet wide is to be bent into a U-shaped water drain b feet long. If we assume that the cross section of the drain is exactly represented by a rectangle on top of a semi-circle, what must be the dimensions of the rectangle and the semicircle in order that the drain may have the greatest capacity.

(1) When the drain is closed on top?

(2) When it is open on top?

(38) A circular filter paper 10 in. in diameter is fold into a right circular cone. Find the height of the cone when it has the greatest volume.

(39) It is required to construct from two circular iron plates of radius a a buoy, composed of two equal cones having a common base, which shall have the greatest possible volume: find the radius of the hase.

(40) In a submarine telegraph cable the speed of signalling as varies $x^2 \log \frac{1}{x}$, Where x is the ratio of the radius of the core to that of the covering: show that the speed is greatest when the radius of the covering is $\sqrt{e}$ times the radius of the core.

98. 曲線ノ追跡 (Curve tracing)

方程式 $y=f(x)$ ガ與ヘラレタルトキ，ソノ曲線 即 ぐらふ ヲ畫クニハ P.18 (8) ニ於テ述ベタル如ク，自變數 x ニ種々ノ値ヲ與ヘテ之レニ對應スル y ノ値ヲ求メ，之等ノ x, y ヲ座標トスル點ヲ滑カナル曲線ニテ結ブモノナレドモ，曲線上ノ主要點，例ヘバ極大點，極小點，變曲點其他 x 軸及ビ y 軸トノ交點等ヲ先ヅ求メテソノ曲線ヲ畫ク方簡便ナリ。マタ對稱軸，對稱點，重複點及ビ漸近線ヲ見出シテソノ曲線ヲ畫ク方簡便ニシテ正確ナリ。

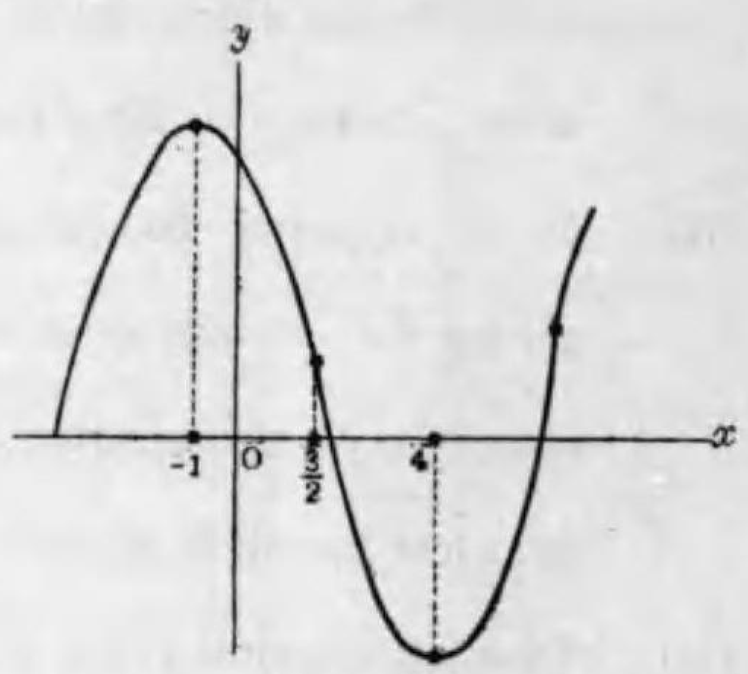
例 (1)　$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+10$ ナル曲線ヲ畫ケ。

〔解〕　$y'=x^2-3x^2-4=(x+1)(x-4)$

$y''=2x-3$

$y'=0$ ヨリ $x=-1$, or 4

$y''=0$ ヨリ $x=\frac{3}{2}$



次ニ y ノ式ノ $x=-1, 4, \frac{3}{2}$ 及ビ計算シ易キ値ヲ代入シテ y ノ値ヲ求メ次ノ表ヲ作ル

x	-2	-1	0	$\frac{3}{2}$	4	6
y	$9\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{6}$	10	$2\frac{7}{8}$	$-8\frac{2}{3}$	4
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''		$-$ max.		0 infl.	$+$ min.	

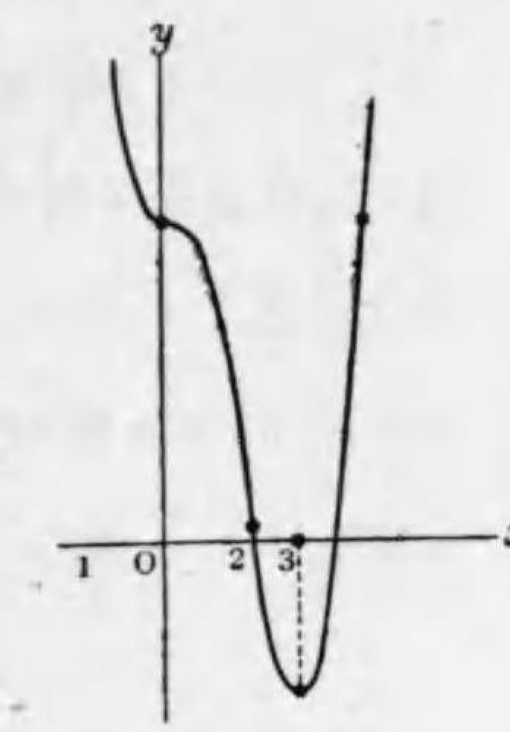
例 (2)　$y=3x^4-12x^3+50$ ノ曲線ヲ畫ケ。

〔解〕　$y'=12x^3-36x^2=12x^2(x-3)$

$y''=36x^2-72x=36x(x-2)$

$y'=0$ ヨリ $x=0$ or 3

$y''=0$ ヨリ $x=0$ or 2



次ニ y 式ノ $x=-1, 0, 1, 2, 3, 4$ ヲ代入シテ y ノ値ヲ求ムレバ次ノ如シ。

x	-1	0	1	2	3	4
y	65	50	41	2	-31	50
y'	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''		0 infl.		0 infl.	$(+)$ min.	

問　題

次ノ曲線ヲ畫ケ

(1) $y=2x^2-6x+5$　　(2) $y=-x^2+3x-3$

(3) $y=x^3-3x^2+5$　　(4) $y=x^4-2x^3+8$

(5) $y=x(x+2)^3$　　(6) $y=x^2-\frac{1}{x}$

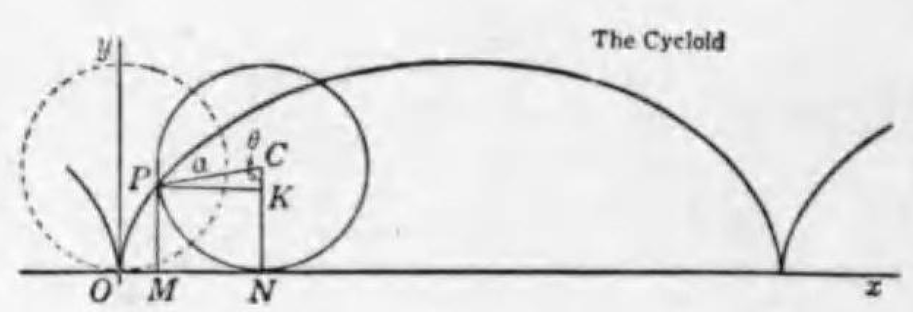
(7) $s=t^2-2t+10$　　(8) $s=6t-16t^2$

99. 特殊曲線

(1) さいくろいど (Cycloid)

圓ガ定直線上ヲ轉ガルトキ圓周上ノ或ル一點ガ畫ク軌跡ヲさいくろいどトイフ。

今半徑 a ナル圓ガ x 軸ニ沿ヒテ廻轉スルトキ，コノ圓ガ最初ニ原點 O ト一致セル點 P ガ畫ク cycloid ノ方程式ハ次ノ如シ



圓ガ θ radian 廻轉セルトキノ點 P ノ座標ヲ (x, y) トスレバ

$$\theta = \angle NCP$$

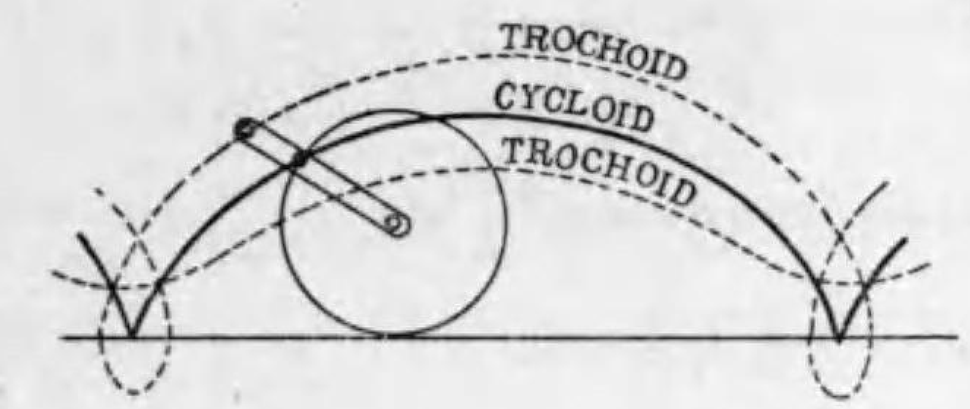
$$\text{(i)}\quad \begin{cases} x = ON - MN = a\theta - a\sin\theta = a(\theta - \sin\theta) \\ y = NC - KC = a - a\cos\theta = a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

(i) ハ θ ヲ媒介變數トスル媒介方程式ナルガ故ニ之レヨリ θ ヲ消去スレバ普通ノ直角座標ノ方程式ヲ得ベシ。

(2) とろこいど (Trochoid)

Cycloid ニ於テ圓周上ノ點ノ代リニ圓內ノ點又ハ圓外ノ點ノ畫ク軌跡ヲ とろこいど トイフ。ソノ方程式ハ次ノ如シ。

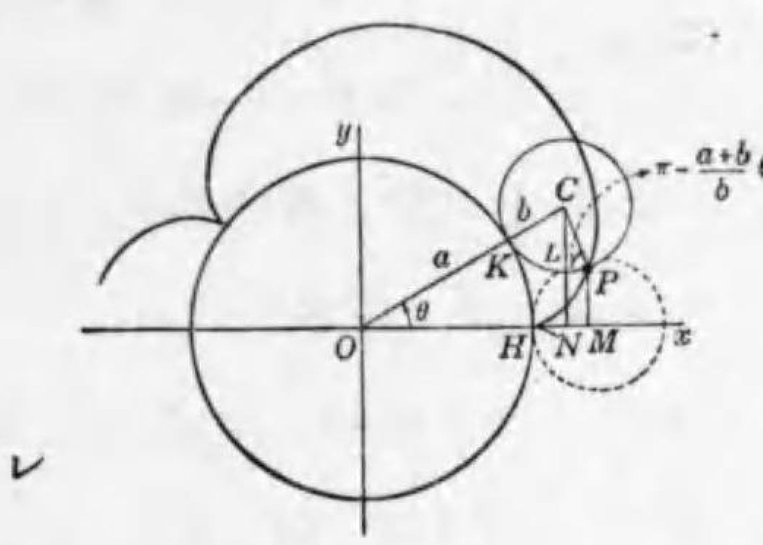
$$\text{(ii)}\quad \begin{cases} x = a\theta - b\sin\theta \\ y = a - b\cos\theta \end{cases}$$



(3) ゑぴさいくろいど (Epicycloid)

半徑 b ナル圓ガ半徑 a ナル圓ノ外周ニ沿ヒテ轉ルトキ，ソノ圓周上ノ一定點 P ガ畫ク軌跡ヲ ゑぴさいくろいど トイフ。

圖ニ於テ點 P ヲ初メ點 H ト一致セル點トスレバ



圓弧 PK＝圓弧 HK

$$b\phi = a\theta$$

但シ $\phi = \angle KCP$

今點 P ノ座標ヲ (x, y) トスレバ

$$x = OM = ON + NM$$

$$= (a+b)\cos\theta + b\sin\left[\phi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

$$= (a+b)\cos\theta - b\cos(\theta + \phi)$$

$$= (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\theta + \frac{a}{b}\theta\right)$$

$$= (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$$

$$y=(a+b)\sin\theta-b\cos[\phi-(\frac{\pi}{2}-\theta)]$$

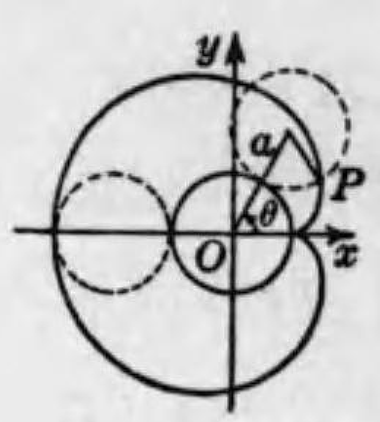
$$=(a+b)\sin\theta-\sin(\frac{a+b}{b}\theta)$$

故ニEpicycloid ノ方程式ハ

(iii) $$\begin{cases} x=(a+b)\cos\theta-b\cos(\frac{a+b}{b}\theta) \\ y=(a+b)\sin\theta-b\sin(\frac{a+b}{b}\theta) \end{cases}$$

ナリ。(iii) ニ於テ $a=b$ ナルトキ之ヲ かーぢをいど (Cardioid) トイフ，從ツテソノ方程式ハ次ノ如シ。

(iv) $$\begin{cases} x=2a\cos\theta-a\cos 2\theta \\ y=2a\sin\theta-a\sin 2\theta \end{cases}$$

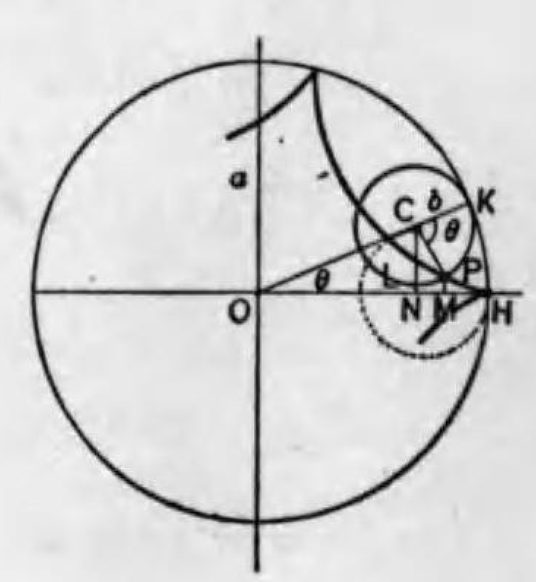


Cardioid 上ノ點ノ極座標ヲ (γ, ϕ) トスレバ，ソノ極方程式ハ

(v) $\gamma=a(1-\cos\phi)$

ナリ。 〔P.143 例 (2)〕

(4) はいぽさいころいど (Hypocycloid)

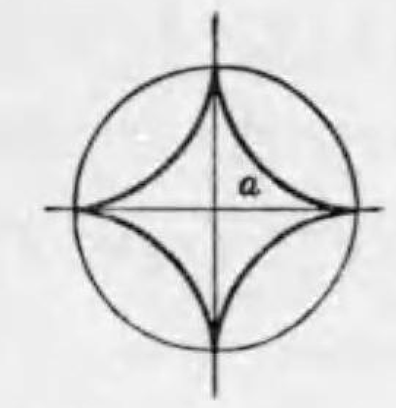


廻轉圓ガ定圓ノ內周ニ沿フテ轉ルトキ，コノ圓周上ノ一定點ガ畫ク軌跡ヲ はいぽさいくろいど トイフ。ソノ方程式ハ (iii) ニ於テ b ヲ $-b$ ト變ヘタモノニ等シ

(vi) $$\begin{cases} x=(a-b)\cos\theta+b\cos(\frac{a-b}{b}\theta) \\ y=(a-b)\sin\theta-b\sin(\frac{a-b}{b}\theta) \end{cases}$$

(vi) ニ於テ $b=\frac{a}{2}$ トスレバ $y=0$ ナル直線トナル

マタ $b=\frac{a}{4}$ トスレバ



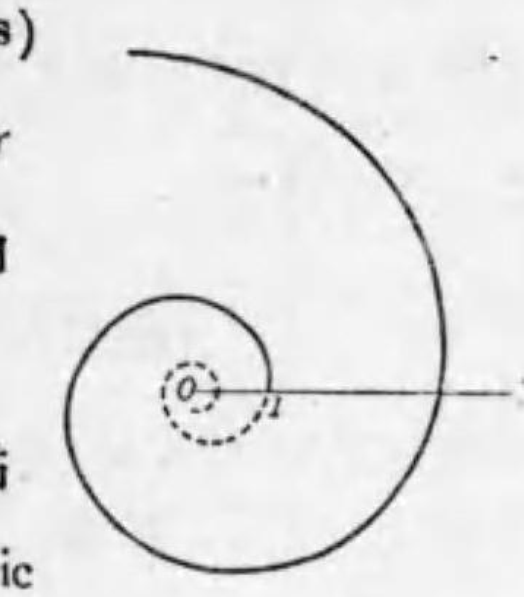
(vii) $$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases} \quad \text{or} \quad x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

〔P.146. 例 (1)〕

之レヲ Four-cusped hypocycloid 又ハ Astroid トイフ。

(5) 對數渦線 (Logarithmic spiral)

$\gamma=e^{a\theta}$ (γ, θ ハ polar coordinates)

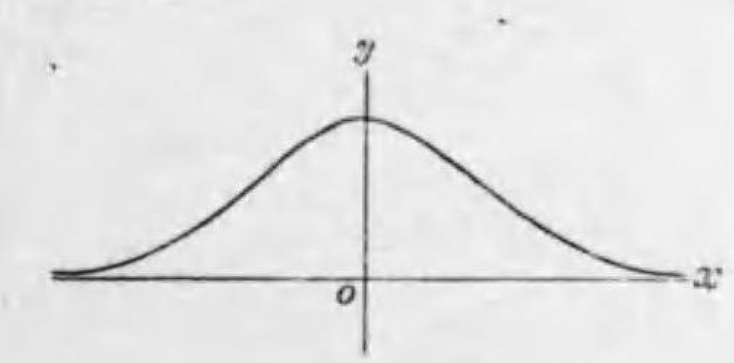


$\theta=0$ ナレバ $\gamma=1$, θ ガ次第ニ増セバ γ モ増スガ故ニ曲線ハ原點ノ周リニ渦ク曲線ナリ。

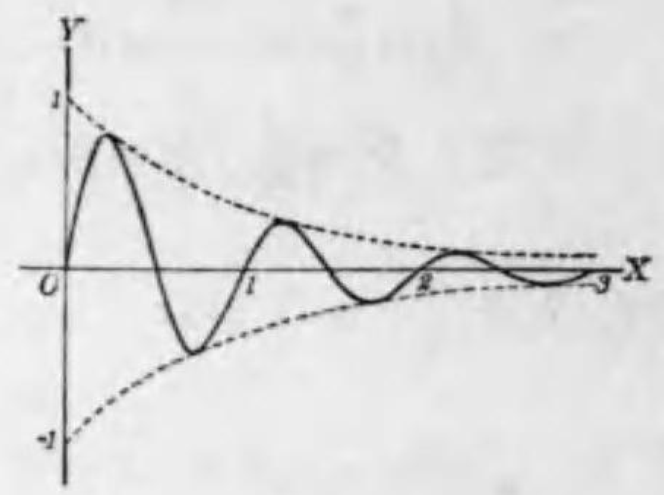
θ ガ負ナルトキハ $\gamma<1$ トナルガ故ニ點線ノ曲線トナル，コノ曲線ヲ logarithmic spiral トイフ。

(6) $y=e^{-x^2}$ ノ曲線

コノ曲線ハ y 軸ニ對シテ symmetry ニシテ $x=0$ ナレバ $y=1$. x ガ増セバ y ハ減ジテ次第ニ零ニ接近スルガ故ニ x 軸ハ Asymptate ナリ。

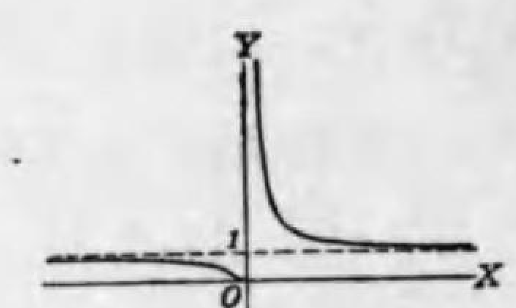


(7) $y=e^{-ax}\sin bx$ ノ表ハス曲線



コノ曲線ノ y ノ値ハ e^{-ax} ト $\sin bx$ トノ積ニシテ $\sin bx$ ハ 1 ト -1 トノ間ヲ oscillate スルガ故ニコノ曲線ハ $y=e^{-ax}$ ト $y=-e^{-ax}$ ノ間ヲ oscillate スル。

(8) $y=e^{\frac{1}{x}}$ ノ表ハス曲線



コノ曲線ハ $x\to0$ ナルトキ $y\to\infty$, マタ x ガ負ナル値ヨリ 0 ニ接近スルトキハ $y\to0$

例ヘバ $x=\frac{1}{1000}$ ナレバ $y=e^{1000}$

$$x=-\frac{1}{1000} \text{ ナレバ } y=e^{-1000}=\frac{1}{e^{1000}}$$

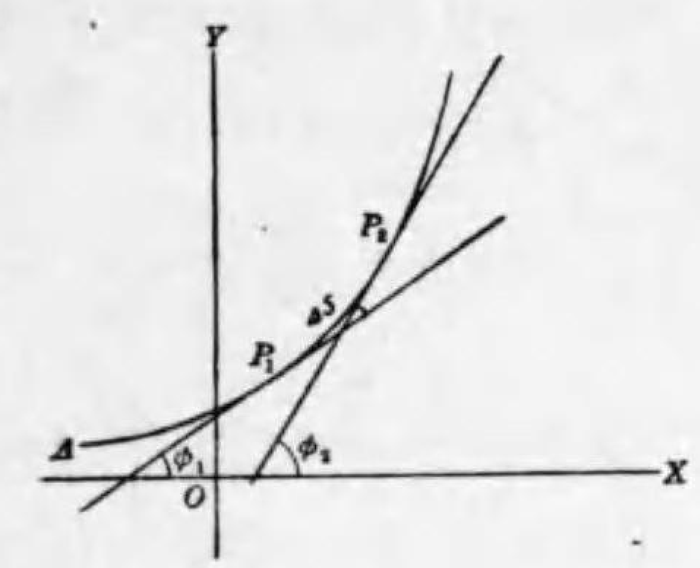
故ニコノ曲線ハ $x=0$ ニ於テ不連續 (Discontinuous) ナリ。

マタ $x\to\infty$ ナレバ $\frac{1}{x}\to0$ $y=1$ 故ニ $y=1$ ハ Asymptate ナリ。

第十一章

曲率, 縮閉線及伸開線

100. 率曲 (Curvature)



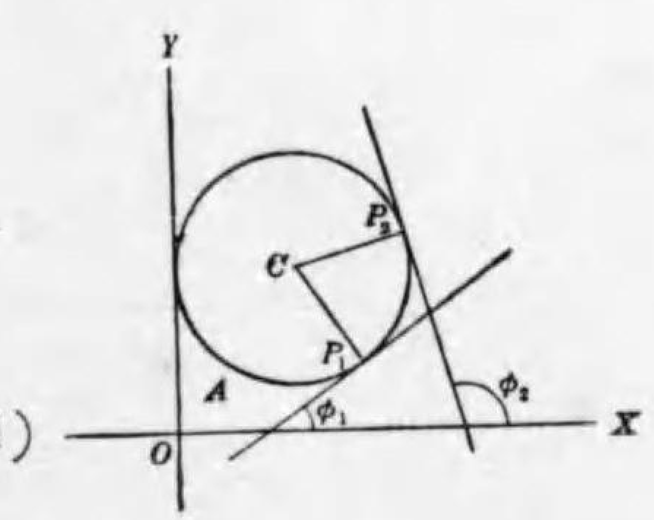
曲線上ノ二點 P_1, P_2, ニ於ケル切線ノナス角ヲ $\varDelta\phi$ 弧 P_1P_2 ヲ $\varDelta s$ トスレバ $\frac{\varDelta\phi}{\varDelta s}$ ハ弧 P_1P_2 間ニ於ケル曲線ノ彎曲ノ平均ヲ表ハスガ故ニ之ヲ平均曲率 (Average curvature) トイヒ。點 P_2 ガ點 P_1 ニ無限ニ接近シタ極限即

$$\lim_{\varDelta s\to0}\frac{\varDelta\phi}{\varDelta s}=\frac{d\phi}{ds} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(100)$$

ヲ點 P_1 ニ於ケル曲率 (又ハ曲度) トイヒ K ナル文字ニテ表ハスヲ常トス。

故ニ曲率トハ弧ノ長サニ對シテ曲線ノ方向ノ變化ノ割合ヲ表ハスモノナリ。

例ヘバ半徑 R ナル圓ニ於テハ



$$\varDelta s=R\varDelta\phi$$

$$\therefore\quad \frac{\varDelta\phi}{\varDelta s}=\frac{1}{R}$$

$$\boxed{K=\frac{d\phi}{\varDelta s}=\frac{1}{R}} \quad\cdots\cdots(101)$$

故ニ圓ノ曲率ハ其周上何レノ點ニ於テモ一定ニシテ其半徑ノ逆數ニ等シ。

101. 曲率ノ公式

曲線 $y=f(x)$ 上ノ點 $P(x, y)$ ニ於ケル切線ガ x 軸トナス角ヲ ϕ トスレバ

$$\tan\phi=\frac{dy}{dx}==y'$$

$$\therefore\quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\tan^{-1}y'$$

$$\therefore\quad \frac{d\phi}{dx}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{y''}{1+y'^2}$$

又 $\quad ds^2=dx^2+dy^2$

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+y'^2}$$

$$\therefore\quad \frac{d\phi}{ds}=\frac{\dfrac{d\phi}{dx}}{\dfrac{ds}{dx}}=\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{y''}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\quad \boxed{K=\frac{y''}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}}\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(102)$$

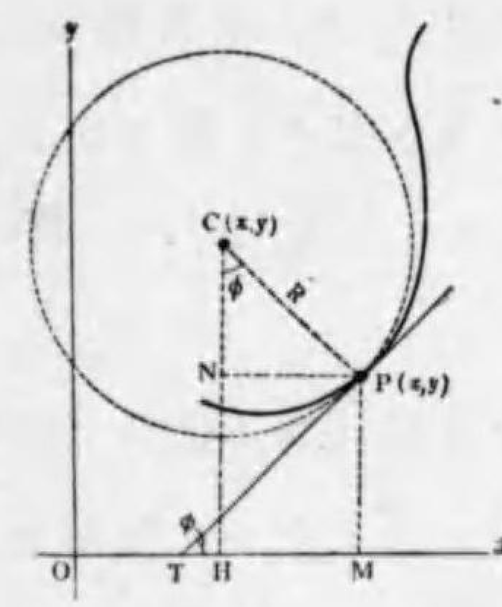
102. 曲率圓ト曲率半徑

曲線 $y=f(x)$ 上ノ一點 P ニ於テコノ曲線ニ切シ且ツ之レト同ジ曲率ヲ有スル圓ヲ點 P ニ於ケル曲率圓 (circle of curvature), ソノ半徑 R ヲ曲率半徑 (Radius of curvature), ソノ圓ノ中心 C(X, Y) ヲ曲率中心 (centre of curvature) トイフ。

曲率圓ニ於テハ曲率 K ハ半徑ノ逆數ナルガ故ニ

$$\boxed{\text{曲率半徑}\quad R=\frac{1}{K}=\frac{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}{y''}}\quad \cdots\cdots(103)$$

マタ曲率中心 C ノ座標ヲ (X, Y) トスレバ



$$X=OH=OM-HM$$

$$=x-R\sin\phi$$

$$Y=HC=HN+NC$$

$$=y+R\cos\phi$$

然ルニ $\quad \tan\phi=y'$

$$\sec^2\phi=1+\tan^2\phi=1+y'^2$$

$$\therefore\quad \cos\phi=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \sin\phi=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\therefore\quad \boxed{\begin{aligned} X&=x-\frac{y'(1+y''^2)}{y''} \\ X&=y+\frac{1+y'^2}{y''} \end{aligned}}\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(104)$$

曲線ノ方程式ガ極方程式ニテ $r=f(\theta)$ ナル場合ニハ

$$\boxed{R=\frac{1}{K}=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|}}\quad\cdots\cdots\cdots(105)$$

ナリ。

曲率半徑 R ハ公式 (103) ニヨリ y'' ノ符號ニ等シキガ故ニ

（1） $y''>0$ ナレバ R ハ正ニシテ曲線ハ上方ニ凹(Coneave upward)

（2） $y''<0$ ナレバ R ハ負ニシテ曲線ハ上ニ凸 (Convex upward)

ナリ。サレド普通 R ノ符號ヲ考ヘザルガ故ニ正ナルモノトスルコト多ク。從ツテソノ公式ハ

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\quad\cdots\cdots\cdots(107)$$

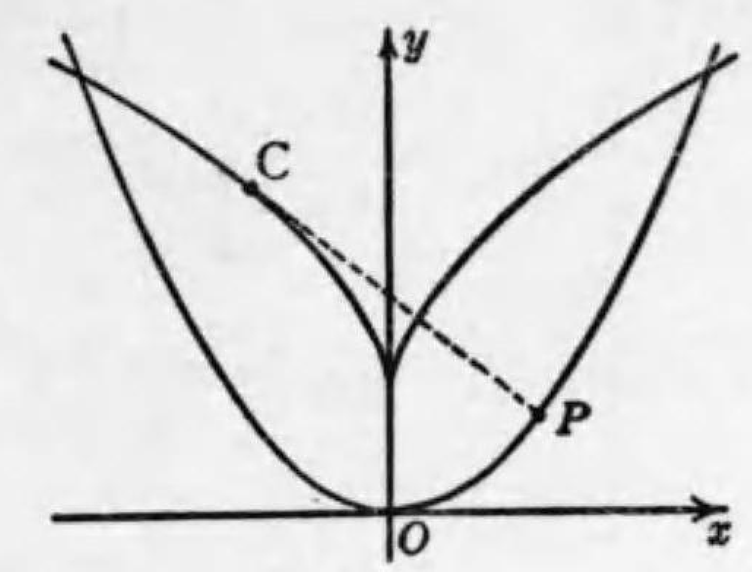
マタ梁柱等ノ撓ミノ計算ニ於テハ $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ハ 1 ニ比シテ小ナルガ故ニ之レヲ無視シテ

$$R=\frac{1}{y''}\quad\text{or}\quad K=y''\quad\cdots\cdots\cdots(108)$$

トスルコト多シ。

例 (1) 拋物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ ノ K. R, 及ビ C(X, Y) ヲ求メヨ。マタ (i) O(0,0), (ii) $P_1(2,1)$ (iii) $P_2(4,4)$ ニ於ケル値ヲ求メヨ。

〔解〕 $y=\frac{1}{4}x^2$



$$y'=\frac{1}{2}x,\quad y''=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore K=\frac{\frac{1}{2}}{(1+\frac{x^2}{4})^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$R=\frac{1}{K}=\frac{(4+x^2)^{\frac{3}{2}}}{4}$$

$$\begin{cases} X=x-\dfrac{(1+\frac{x^2}{4})\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}}=-\dfrac{x^3}{4} \\ Y=y+\dfrac{1+\frac{x^2}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{3x^2}{4}+2 \end{cases}$$

(i) 點 O ニ於テハ $K=\frac{1}{2}$, $R=2$, $X=0$, $Y=2$.

(ii) 點 P ニ於テハ $K=\frac{1}{4\sqrt{2}}$, $R=4\sqrt{2}$, $X=-2$, $Y=6$,

(iii) 點 P ニ於テハ $K=\frac{1}{10\sqrt{5}}$, $R=10\sqrt{5}$, $X=-16$, $Y=14$,

例 (2) 橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上ヲ點 $P(x,y)$ ニ於ケル曲率半徑ヲ求メヨ。

マタ $A(a,0)$ 及ビ $B(0,a)$ ニ於ケル曲率半徑ヲ求メヨ。

（京大及九大工學部）

〔解〕 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ヲ微分シテ

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y},\quad y''=-\frac{b^4}{a^2y^2}$$

$$\therefore\quad R=\frac{[a^4y^2+b^4x^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

$$[R]_A=\frac{b^2}{a},\quad [R]_B=\frac{a^2}{b}$$

例 (3) 鐵道線路ノ直線路ヨリ急ニ圓形路ニ變ズル際，ソノ方向變化ヲ徐々ナラシメル爲メニ緩和曲線ヲ用フ。コノ緩和曲線トシテ普通三次ノ拋物線ヲ用フルモノナリ。

今緩和曲線ガ $y=\frac{1}{3}x^3$ ナルトキ列車ガ (i) 點 (3, 9) (ii) 點 $(2, \frac{8}{3})$, (iii) 點 $(1, \frac{1}{3})$ ヲ通過スルトキ，長サノ單位ヲ一哩ニトリ其方向ノ變化ノ割合ヲ求メヨ。

〔解〕 $y=\frac{1}{3}x^3$

$$\frac{dy}{dx}=x^2;\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2x.$$

$$\therefore\quad K=\frac{2x}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

(i) 點 (3,9) ニ於テハ $K=\frac{6}{(82)^{\frac{3}{2}}}$ radian/mile

$=28'$/哩

(ii) 點 $(2, \frac{8}{3})$ ニ於テハ $K=\frac{4}{(17)^{\frac{3}{2}}}$ radian/mile

$=3°16'$/哩

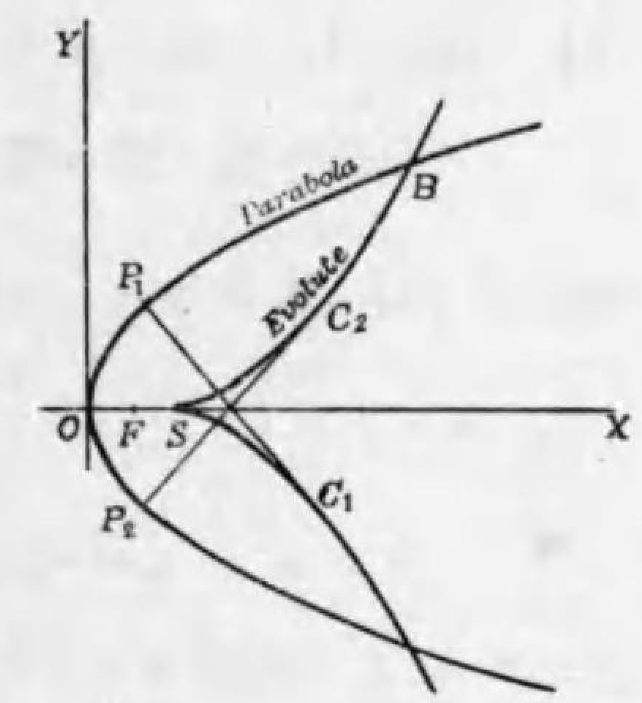
(iii) 點 $(1, \frac{1}{3})$ ニ於テハ $K=\frac{2}{(2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ radian/mile

$=40°30'$/哩

103. 縮閉線ト伸開線

拋物線 $y^2=4ax$ ……(i) 上ノ點 $P(x, y)$ ニ於ケル曲率中心 $C(X, Y)$ ハ

$$\left.\begin{aligned}X&=3x+2a\\ Y&=-\frac{xy}{a}\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$



ナリ。今點 P ガ拋物線上ヲ動クトキハ之レニ對應シテ點 C モ動イテ一ツノ曲線ヲ畫クベシ，コノ曲線ヲ，コノ拋物線ノ縮閉線 (Evolute) トイフ。逆ニ原拋物線ヲコノ曲線ノ伸開線 (Involute) トイフ。

(ii) ハ Evolute 上ノ點 C ノ座標ヲ x ノ函數トシテ表ハスガ故ニ (ii) ハ x ヲ parameter トスル Evolute ノ方程式ニシテ (i) ト (ii) ヨリ x, y ヲ消去スレバ

$$Y^2=\frac{4}{27a}(X-2a)^3\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

之レ Evolute ノ直角座標ノ方程式ナリ。

一般ニ曲線 $y=f(x)$ ノ Evolute ノ方程式ハ

$$\left.\begin{aligned} X&=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''} \\ Y&=x-\frac{1+y'^2}{y''}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(109)$$

ニシテ y, y', y'' ヲ x ニテ置換シテ消去スレバ直角座標ノ方程式ヲ得ベシ。

104. Evolute ノ性質

(A) 原曲線ノ法線ハ Evolute ノ切線ナリ。

(B) Evolute ノ弧ノ長サハ其兩端ニ於テ之レニ切スル原曲線ノ曲率半徑ノ差ニ等シ。

〔證明〕(A) 曲線 $y=f(x)$ ノ Evolute ノ方程式ハ

$$X=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''},\qquad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

但シ x ハ parameter ナリ。

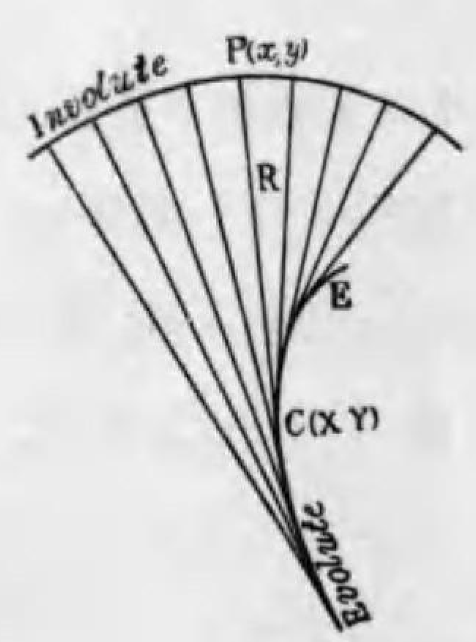
之レヲ x ニテ微分スレバ

$$\frac{dX}{dx}=1-\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)y''-y'\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)'$$

$$=-\left\{y'+\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)'\right\}y'$$

$$\frac{dY}{dx}=y'+\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)'$$

$$\therefore\quad \frac{dY}{dX}=-\frac{1}{y'}$$



故ニ原曲線ノ切線ト Evolute ノ切線トハ互ニ垂直ナルガ故ニ原曲線ノ法線ハ Evolute ノ切線ナリ。

(B) $R^2=(x-X)^2+(y-Y)^2$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$(i)

兩邊ノ微分ヲトレバ

$$RdR=(x-X)(dx-dX)+(y-Y)(dy-dY)\quad\cdots\cdots(ii)$$

然ルニ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x-X}{y-Y};\quad \therefore\ (x-X)dx+(y-Y)dy=0\quad\cdots(iii)$$

∴ (iii) ヲ (ii) ニ代入スレバ

$$dR=\frac{(x-X)dX+(y-Y)dY}{\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}}\quad\cdots\cdots\cdots(iv)$$

マタ $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{1}{y'}=\dfrac{y-Y}{x-X}$

$$\therefore\quad dR=\frac{dX+\dfrac{y-Y}{x-X}dY}{\sqrt{1+\left(\dfrac{y-Y}{x-X}\right)^2}}=\frac{dX+\dfrac{dY}{dX}dY}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dY}{dX}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{(dX)^2+(dY)^2}=ds$$

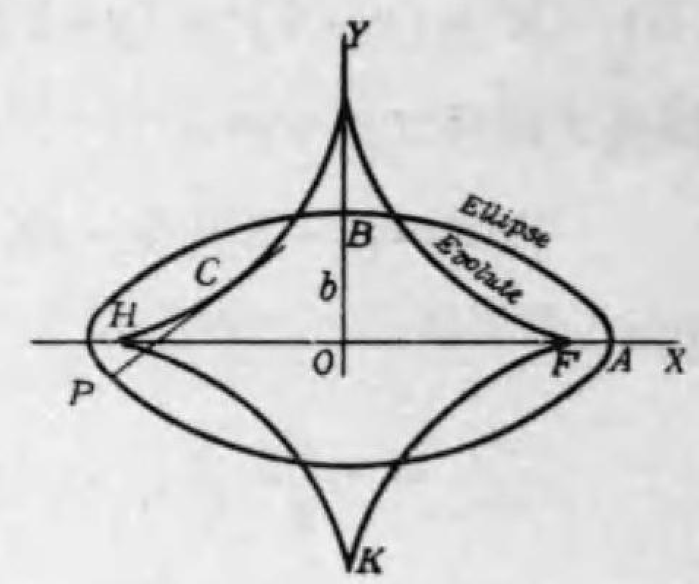
$$\therefore\quad \int_{R_1}^{R_2}dR=\int_{s_1}^{s_2}ds;\quad \text{or}\quad R_2-R_1=s_2-s_1$$

即 Evolute ノ弧ノ長サハ原曲線ノ曲率半徑ノ差ニ等シ。故ニ曲線 CE ノ形ノ糸卷ニマキツケタ糸ヲ引キ張リツヽ之レヲホドケバ其糸ノ端 P ハ曲線 CE ノ Involute ヲ畫ク。

從ツテ一ツノ曲線ノ Involute ハ無數ニアルガ之等ハ總テ共通ノ法線ヲ有シ且ツソレラ二ツノ Involute 間ニアル法線ノ長サハ一定ナリ。

例 (1) 楕圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$……(i) ノ Evolute ヲ求メヨ。

〔解〕 $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$



$y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$

曲率中心 C(XY) ハ

$$\left.\begin{aligned} X&=\frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4} \\ Y&=-\frac{(a^2-b^2)y^3}{b^4} \end{aligned}\right\}\text{……………(ii)}$$

(ii) ハ Evolute ノ parametric equ. ナリ。

(i) ト (ii) ヨリ x, y ヲ消去スレバ

$$(aX)^{\frac{2}{3}}+(bY)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$$

之レ Evolute ノ cartesian equ. ナリ。

例 (2) Cycloid $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$, ……(i) ノ R, K, C (X, Y) 及ビ Evolute ヲ求メヨ。

〔解〕 $$y'=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\cot\frac{\theta}{2}$$

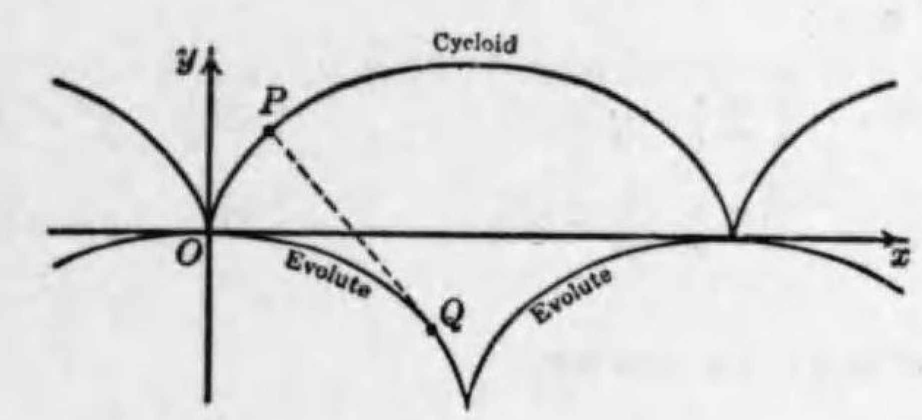
$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}=\frac{-1}{a(1-\cos\theta)^2}=\frac{-1}{4a\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$R=\left|\left(1+\cot^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\div\frac{-1}{4a\sin^4\frac{\theta}{2}}\right|=4a\sin\frac{\theta}{2}$$

$$K=\frac{1}{R}=\frac{1}{4a\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$X=a(\theta-\sin\theta)+\cot\frac{\theta}{2}\frac{1+\cot^2\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{4a\sin^4\frac{\theta}{2}}}=a(\theta+\sin\theta)$$

$$Y=a(1-\cos\theta)-\frac{1+\cot^2\frac{\theta}{2}}{\frac{1}{4a\sin^4\frac{\theta}{2}}}=-a(1-\cos\theta)$$



故ニ Cycloid ノ Evolute ハマタ Cycloid ニシテ原點ヲ (πa, $-2a$) ニ移シ且ツ θ ヲ $\phi+\pi$ トスレバ

$$\xi=a(\phi-\sin\phi)$$

$$\eta=a(1-\cos\phi)$$

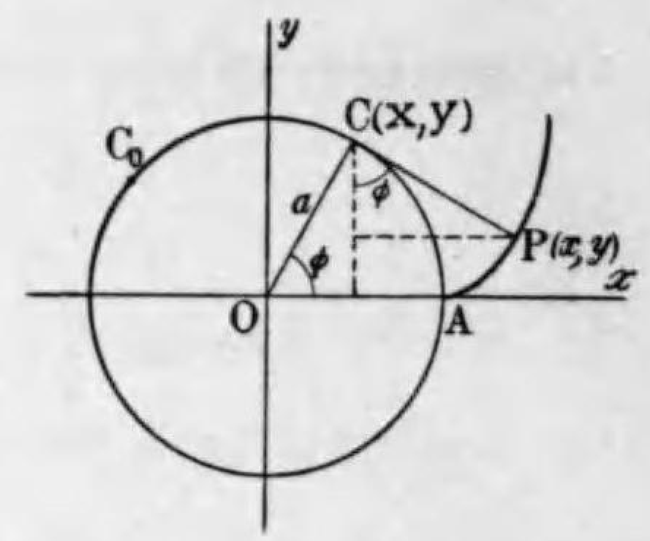
即原曲線ト同一ノ方程式ヲ得ベシ。

例 (3) 圓 $x^2+y^2=a^2$ ノ Involute ヲ求メヨ。

P (X, Y) ヲ Involute 上ノ點, CP ヲ圓 O ノ切線トスレバ

$CP=\widehat{CA}=a\phi$

$\therefore \begin{cases} X=a\cos\phi+a\phi\sin\phi \\ Y=a\sin\phi-a\phi\cos\phi \end{cases}$



圓ノ Involute ハ歯車裝置ノ歯ニ用フルモノニシテ實用上重要ナル曲線ナリ。

問　　題

次ク曲線ノ K, R, 及ビ C(X, Y) ヲ求メ且ツソノ曲線及ビ Evolute ヲ畫ケ。

(1) $y=x^2$　(2) $y=x^3$　(3) $y^2=4ax$

(4) $xy=a^2$　(5) $y=\sin x$　(6) $y=e^x$

(7) $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cos hx$

(8) $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\sin hx$

(9) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　(10) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

次ノ曲線ノ各點ニ於ケル K, R, 及ビ C(X, Y) ノ値ヲ求メヨ。

(11) 抛物線　$y=\frac{1}{2}x^2$　上ノ點 (0,0) 及點(−4, 8)

(12) 双曲線　$xy=40$　上ノ點 (5, 8) 及點(10, 4)

(13) 指數曲線　$y=e^x$　上ノ點 (0, 1) 及點 (2, e^2)

(14) 對數曲線　$y=\log x$　上ノ點 (1, 0) 及點 (e, 1)

(15) Catemary $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ 上ノ點 (0, a)

(16) Cubical parabola　$y^3=9x$　上ノ點 (3, 3)

(17) Cycloid $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ 上ノ點($\theta=60°$), 及點 ($\theta=180°$)

(18) Parabola　$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 上ノ點 (a, 0)

(19) Show that the circle $(x-\frac{\pi}{2})^2+y^2=1$ is tadgent to the curve $y=\sin x$ at the point for which $x=\frac{\pi}{2}$, and has the same radius of curvature at that point.

(20) Prove that the radius of curvature of the curve $x=a\cos^3\phi$, $y=a\sin^3\phi$ has its greatest value when $\phi=\frac{\pi}{4}$.

第十二章

函數ノ展開

105. てーろる及まくろーりん之級數

函數 $f(a+x)$ ハ或變域內ニ於テ總テ微分可能ナリトシ，之ヲ x ノ冪級數 (Power series) ニ展開シ得ルモノト假定スレバ

$$f(a+x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots A_nx^n+\cdots$$

ナル形トナルベシ。今之ヲ逐次微分スレバ

$$f'(a+x)=A_1+2A_2x+3A_3x^3+4A_4x^4+\cdots$$

$$f''(a+x)=2A_2+2.3A_3x+3.4A_4x^2+\cdots$$

$$f'''(a+x)=2.3A_3+2.34A_4x+\cdots$$

$$f''''(a+x)=2.3.4A_4+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

上式ニ於テ $x=a$ トオケバ

$$f(a)=A_0 \qquad \therefore \quad A_0=f(a)$$

$$f'(a)=A_1 \qquad A_1=f'(a)$$

$$f''(a)=2!A_2 \qquad A_2=\frac{1}{2!}f''(a)$$

$$f'''(a)=3!A_3 \qquad A_3=\frac{1}{3!}f'''(a)$$

$$f''''(a)=4!A_4 \qquad A_4=\frac{1}{4!}f''''(a)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(a+x)=f(a)+xf'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots(110)$$

上式ニ於テ $a+x$ ノ代リニ x，從ツテ x ノ代リニ $x-a$ ト書キ改ムレバ

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots$$

$$+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\cdots\cdots(111)$$

トナル。(110) 及 (111) ヲ てーろる之級數 (Taylor's series) ト稱シ，(110) ハ $f(a+x)$ ヲ x ノ冪級數ニ展開スルトイヒ，(111) ハ $f(x)$ ヲ $x=a$ ニ於テ展開スルトイフ。

てーろる之級數 (110) 或ヒハ (111) ニ於テ

$a=0$ トオケバ

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots(112)$$

トナル。之レヲまくろーりん之級數 (Maclaurin's series) トイフ。

例 (1)　$\sin x$ 及 $\cos x$ ヲまくろーりん之級數ニ展開セヨ。

〔解〕　$f(x)=\sin x$ トオケバ　$f(0)=0$

$$f'(x)=\cos x \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x)=-\sin x \qquad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=-\cos x \qquad f'''(0)=-1$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x \qquad f^{(4)}(0)=0$$

$$f^{(5)}(x)=\cos x \qquad f^{(5)}(0)=1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+- \quad \cdots\cdots(113)$$

同様ニ

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(114)$$

(113) ニ於テ $\sin 10^\circ$ ノ値ヲ小數第四位マデ計算スルニハ

$10^\circ=\left(\frac{10\pi}{180}\right)^r=\cdot 17453^r$ ニ直シ。

$$\sin\frac{\pi}{18}=.17453-\frac{.17453}{3!}+\cdots\cdots$$

$$=.17453-.00089+-\cdots$$

$$=.17364\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \sin 10^\circ=.1736$$

〔註〕 小數第四位マデノ計算ニハ級數ノ第二項マデ計算スレバ十分ナリ。$x=.2$ トスルモ第三項ハ小數第四位マデノ計算ニ影響セザルコトヲ見ルベシ。

例 (2)　$\log(1+x)$ ヲ展開シテ $\log 2$ ノ値ヲ計算セヨ。

〔解〕　$f(x)=\log(1+x)$　トスレバ　$f(0)=0$

$f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$　　$f'(0)=1$

$f''(x)=(-1)(1+x)^{-1}$　　$f''(0)=-1$

$f'''(x)=(-1)(-2)(1+x)^{-3}$　　$f'''(0)=2!$

$f^{(4)}(x)=(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$　　$f^{(4)}(0)=-3!$

$f^{(5)}(x)=(-1)(-2)(-3)(-4)(1+x)^{-5}$

$f^{(5)}(0)=4!$

………………………………………………

$$\log(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+-\cdots(115)$$

$x=1$　トオケバ

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-+\cdots\cdots$$

$$=0.6931\cdots\cdots$$

例 (3)　e^x ヲ展開セヨ。

〔解〕　$f(x)=e^x$　トスレバ

$f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots f^{(n)}(x)=\cdots=e^x$

$f(0)=f'(0)=f''(0(=\cdots f^{(n)}(0)=\cdots=1$

$$\therefore \quad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^4}{n!}\cdots\cdots(116)$$

x ノ代リニ ix トオケバ

$$e^{ix}=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+i\frac{x^5}{5!}$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)$$

$$+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\right.$$

$$\therefore \quad e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(117)$$

マタ x ノ代リニ $-ix$ トオケバ

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(118)$$

(117)+(118) 及 (117)−(118) ヨリ

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\ \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}) \quad \cdots(119)$$

(119) ニ於テ x ノ代リニ ix トオケバ

$$\cos ix=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cos hx \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(120)$$

$$\sin ix=\frac{1}{2i}(e^{-x}-e^x)=-\frac{1}{i}\sin hx=i\sin hx \quad \cdots(121)$$

(117) ニ於テ $x=\pi$ トオクトキハ

$$e^{i\pi}=-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(122)$$

ナル面白キ關係アリ。

(117) ニ於テ $x=n\phi$ トオクトキハ

$$e^{in\phi}=\cos n\phi+i\sin u\phi$$

$$(\cos\phi+i\sin\phi)^n=\cos n\phi+i\sin\phi \quad \cdots\cdots(123)$$

(123) ハ ど・まあぶる之定理 (De Moivre's theorem) トイフ。非常ニ大切ナル定理ナリ。

例 (4)　$f(x)=5x^2+7x+3$ ヲ $x-2$ ノ冪級數ニ展開セヨ。

〔解〕　$f(x)=5x^2+7x+3$　　$\therefore\ f(2)=37$

$f'(x)=10x+7$　　$f'(2)=27$

$f''(x)=10$　　$f''(2)=10$

$f'''(x)=0$　　$f'''(2)=0$

$$\therefore\quad 5x^2+7x+3=37+27(x-2)+5(x-2)^2$$

例 (5)　$\log x$ ヲ $x=3$ ノ附近ニテ展開シ，$\log 3.5$ ノ値ヲ計算セヨ。　但シ $\log 3=1.0986$ トス。

〔解〕　$f(x)=\log x$　　$\therefore\ f(3)=\log 3$

$f'(x)=\frac{1}{x}$　　$f'(3)=\frac{1}{3}$

$f''(x)=-\frac{1}{x^2}$　　$f''(3)=-\frac{1}{9}$

$f'''(x)=\frac{2}{x^3}$　　$f'''(3)=\frac{2}{27}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\therefore\quad \log x=\log 3+\frac{1}{3}(x-3)-\frac{1}{18}(x-3)^2+\frac{1}{18}(x-3)^2+\cdots(124)$$

(123) ニ於テ $\log 3=1.0986,\ x=3.5$ トスレバ

$$\log 3.5=\log 3+\frac{1}{6}-\frac{1}{72}+\frac{1}{648}-\frac{1}{5184}+\cdots\cdots$$

$$=1.0986+.1667-.0139+.0015-.0002+\cdots\cdots$$

$$=1.2527.$$

例 (6)　$\sin(a+x)$ ヲ ていろる之數級ニ展開セヨ。

〔解〕　$f(a+x)=\sin(a+x)$

$f(x)=\sin x$　　$f(a)=\sin a$

$f'(x)=\cos x$　　$f'(a)=\cos a$

$f''(x)=-\sin x$　　$f''(a)=\sin a$

$f'''(x)=-\cos x$　　$f'''(a)=-\cos a$

$f^{(4)}(x)=\sin x$　　$f^{(4)}(a)=\sin a$

$$\therefore\quad \sin(a+x)=\sin a+x.\cos a-\frac{x^2}{2!}\sin a-\frac{x^3}{3!}\cos a+\cdots(125)$$

$a=0$　トオクトキハ

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$$

マタ $a=\frac{\pi}{3}$, $x=\left(\frac{1}{100}\right)^r$ トスレバ

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{100}\right)^r=\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{100}\cos\frac{\pi}{3}-\frac{1}{(100)^2 2!}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{(100)^3 3!}\cos\frac{\pi}{3}+\cdots\cdots$$

コヽニ $\sin\frac{\pi}{3}=.86603$; $\cos\frac{\pi}{3}=.50000$

$$\therefore\quad \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{100}\right)^r=.87099$$

$$\therefore\quad \sin 60^\circ 34' 22''.65=.87099.$$

問　題

(1) $\sin x$ 及ビ $\cos x$ ヲ まくろーりん之級數ニ展開シテ次ノ値ヲ小數第四位マデ求メヨ。

(i) $\sin\left(\frac{1}{10}r\right)$, *i. e.* $\sin 5^\circ 43' 46''.5$

(ii) $\sin(.5^r)$　(iii) $\sin(.2^r)$　(iv) $\cos(.2^r)$

(v) $\cos(.4^r)$　(vi) $\cos(.5^r)$

(2) $\log(1+x)$ ノ展開式ヨリ $\log 1.5$ ヲ小數第四位マデ求メヨ。

(3) e^x ノ展開式ヨリ e ノ値ヲ小數第五位マデ求メヨ。

次ノ展開式ヲ證明セヨ。

(4) $a^x=1+x\log a+\frac{x^2}{2!}(\log a)^2+\frac{x^3}{3!}(\log a)^3+\cdots\cdots$

(5) $\sin^{-1}x=x+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots$

(6) Ex. (5) ニ於テ $x=\frac{1}{2}$ トオケバ

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots\cdots$$

ヲ得。之レヨリ π ノ近似値ヲ小數第三位マデ計算セヨ。

マタ $x=1$ ナルトキハ如何。

(7) $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots\cdots$

(8) $\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$

(9) $\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots$

(10) $\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots$

(11) $4x^3-17x^2+11x+2$ ヲ $x+3$ ノ冪級數ニ展開セヨ。

(12) $\cos(a+x)$ ヲ てーろる之級數ニ展開シ $\cos 32^\circ$ ヲ小數第四位マデ計算セヨ。

(13) $\log 3=1.0986$ ヲ知リテ $\log 3\frac{1}{4}$ ヲ小數第四位マデ求メヨ。

(14) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ ヲ展開シテ $\sin 61^\circ$ ヲ求メヨ。

106. 不 定 形

二ツノ函數 $f(x)$, $\phi(x)$ ガ $x=a$ ニ於テ連續ニシテ $f(a)=0$, $\phi(0)=0$ ナルトキハ $f(x)/\phi(x)$ ナル分數式ノ $x=a$ ニ於ケル値ハ $\frac{0}{0}$ トナリテ不定ナリ。コノトキコノ分數式ヲ不定形 (Indeterminate form) トイフ。然レドモ $x\to a$ ナルトキノ $f(x)/\phi(x)$ ノ極限値ハ必ラズシモ不定ナラズ。故ニ若シコノ極限値ガ存在スルトキ, ソノ値ヲ以テ $f(x)/\phi(x)$ ノ $x=a$ ニ於ケル値トス。即

$$\left[\frac{f(x)}{\phi(x)}\right]_{x=a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(126)$$

尚不定形ニハ $\frac{0}{0}$ ノ外ニ $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 及ビ 0^0 等ノ場合アリ。

(A) 不定形 $\frac{0}{0}$

$f(a)=0$, $\varnothing(a)=0$ ナルトキ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(a)}{\varnothing(x)}$ ヲ求ムル法則ヲ求メントス。

てーろる之級數 (110) ニヨリ

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\cdots$$

$$\varnothing(a+h)=\varnothing(a)+h\varnothing'(a)+\frac{h^2}{2!}\varnothing''(a)+\frac{h^3}{3!}\varnothing'''(a)+\cdots$$

$$\therefore\ \frac{f(a+h)}{\varnothing(a+h)}=\frac{f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots}{\varnothing(a)+h\varnothing'(a)+\frac{h^3}{2!}\varnothing''(a)+\cdots}$$

然ルニ $f(a)=0$, $\varnothing(a)=0$ ナルガ故ニ

$$\frac{f(a+h)}{\varnothing(a+h)}=\frac{f'(a)+\frac{h}{2!}f''(a)+\cdots}{\varnothing'(a)+\frac{h}{2!}\varnothing''(a)+\cdots}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{\varnothing(a+h)}=\frac{f'(a)}{\varnothing'(a)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{f'(a)}{\phi'(a)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(127)$$

〔法則〕 $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ ガ $x=a$ ニ於テ $\frac{0}{0}$ ナル形ヲ取ルトキ, コノ極限値ヲ求ムルニハ $\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ ニ於テ $x=a$ ト置ケバ可ナリ。同様ニシテ若シ $\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ ガ $x=a$ ニ於テ $\frac{0}{0}$ ナル形ヲ取レバ $\frac{f''(x)}{\phi''(x)}$ ニ於テ $x=a$ ト置ケバ可ナリ。以下追テ斯クノ如クスベシ。

例 (1) $\frac{x^2-4}{x-2}$ ニ於テ $x=2$ ナルトキノ値ヲ求メヨ。

〔解〕 $\left[\frac{x^2-4}{x-2}\right]_{x=2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ $\left(\frac{0}{0}\right.$ ノ不定形$\left.\right)$

$$=\left[\frac{\frac{d(x^2-4)}{dx}}{\frac{d(x-2)}{dx}}\right]_{x=2}$$

$$=\left[\frac{2x}{1}\right]_{x=2}=4$$

例 (2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ ノ値ヲ求メヨ　($\dfrac{0}{0}$ ノ不定形)

〔解〕 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$

(B) 不定形 $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ ニ於テ $f(a)=\infty,\ \phi(a)=\infty$ ナルトキ

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ ヲ求メントス。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{\phi(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

之レ $\dfrac{0}{0}$ ナル形ナルガ故ニ $\dfrac{0}{0}$ ニ對スル法則ニヨリ

$$\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{\phi(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{-\dfrac{\phi'(x)}{\phi^2(x)}}{-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{\phi(x)}\cdot\frac{f(x)}{\phi(x)}\cdot\frac{\phi'(x)}{f'(x)}\right\}$$

$$1=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{\phi(x)}\cdot\frac{\phi'(x)}{f'(x)}\right\}$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\phi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\phi'(x)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(128)$$

〔法則〕 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ ガ $x=a$ ニ於テ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル形ヲ取ルトキコノ極

限値ヲ求ムル法則ハ $\dfrac{0}{0}$ ナル形ノ場合ト同一ナリ。

(C) 不定形 $0.\infty$ 及ビ $\infty-\infty$

不定形 $0.\infty$ 及ビ $\infty-\infty$ ハ $\dfrac{0}{0}$ 又ハ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ニ導キテソノ値ヲ求ムルコトヲ得。

例 (4) $\lim_{x\to 0} x\cot x$ ヲ求メヨ　($0.\infty$ ノ形)

〔解〕 $\lim_{x\to 0} x\cot x=\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}$　($\dfrac{0}{0}$ ノ形)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sec^2 x}=1$$

例 (5) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ ヲ求メヨ。($\infty-\infty$ ノ形)

〔解〕 $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left\{\dfrac{x-1-\log x}{(x-1)\log x}\right\}\cdots\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}+\log x}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}}\right\}=\frac{1}{2}$$

(D) 不定形 $1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$

$x=a$ ナルトキ $[f(x)]^{\phi x}$ ガ上ニ示セル孰レカノ形ヲトルトキハ

$$y=[f(x)]^{\phi x}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

トオキ兩邊ノ對數ヲトレバ

$$\log y = \phi(x)\log[f(x)] \quad \cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

(ii) ノ右邊ハ $x=a$ ニ於テ $0\times\infty$ ナル形ヲトルガ故ニ (C) ト同様ニシテソノ値ヲ求ムルコトヲ得。

例 (6)　$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ ヲ求メヨ。　(1^∞)

〔解〕　$y=(1-x)^{\frac{1}{x}}$

$$\log y = \frac{\log(1-x)}{x} \qquad \left(\frac{0}{0}\text{ ノ形}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}[\log y] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1}{1-x}\right) = -1$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0} y = e^{-1}$$

例 (7)　$\lim\limits_{x\to 0}(x^x)$ ヲ求メヨ　(0^0)

〔解〕　$y=x^x$

$$\log y = x\log x = \frac{\log x}{\dfrac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}[\log y] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\log x}{\dfrac{1}{x}}\right] \cdots\cdots \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}}\right] = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$

例 (8)　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ ヲ求メヨ。　(∞^0)

〔解〕　$y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

$$\log y = \tan x \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\tan x \,.\, \log x$$

$$\lim_{x\to 0}[\log y] = \lim_{x\to 0}(-\tan x \,.\, \log x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\log x}{\cot x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-\dfrac{1}{x}}{-\operatorname{cosec}^2 x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{1} = 0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$

107. 級數ニ展開シテ積分ヲ求ムル例題

例 (1)　$\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$ ヲ求メヨ。

〔解〕　**公式** (113) ニヨリ

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \int_0^x \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + - \cdots\right)dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \frac{x^7}{7.7!} + - \cdots$$

例 (2)　$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}dx$ ヲ求メヨ。

〔解〕　公式 (115) ニヨリ

$$\frac{\log(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+-\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}dx=\int_0^1(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+-\cdots)dx$$

$$=\left|x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\frac{x^4}{4^2}+-\cdots\right|_0^1$$

$$=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\cdots\cdots$$

問　　題

次ノ極限値ヲ求メヨ。

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$　　(2) $\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$

(3) $\lim_{x\to \infty}\frac{x}{e^x}$　　(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\operatorname{cosec} x}$

(5) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)\tan x$　　(6) $\lim_{x\to \infty} a^x.\sin\frac{m}{a^x}$

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\log(1+x)}{x^2}$

(8) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})$　　(9) $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$

(10) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(x\tan x-\frac{\pi}{2}\sec x)$

(11) $\lim_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})$　　(12) $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\tan x}$

(13) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$　　(14) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x-x}{3x^2}$

(15) 次ノ積分ヲ求メヨ。

(i) $\int_0^x \frac{\cos x}{x}dx$　　(ii) $\int_0^x \frac{e^x}{x}dx$

(iii) $\int_0^x xe^{-x}dx$　　(iv) $\int_0^x x\log(1-x)dx$

次ノ等式ヲ證明セヨ。

(16) $\int_1^x e^{-x^2}dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5(2!)}-\frac{x^7}{7(3!)}+\cdots\cdots$

(17) $\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots$

(18) $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}=-(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots)$

(19) $a\int\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,dx=\frac{a\pi}{2}-\frac{ae^2}{2}(\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2})-\frac{ae^4}{8}(\frac{1.3}{2.4}\,\frac{\pi}{2})\cdots$

但シ　$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$

〔註〕　$\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}$ ヲ二項定理ニテ展開セヨ。

楕圓ノ周ノ element of eught ハ $a\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}$ ナリ。

第十三章

微分方程式

108. 微分方程式ノ定義

微分又ハ微係數ヲ含ム方程式ヲ微分方程式 (Differential equation) トイフ。

微分方程式中ニ含マル、最高階微係數ノ階數ヲ其微分方程式ノ階數 (order) トイヒ，最高階微係數ノ次數ヲ其ノ次數(degree) トイフ。

例ヘバ

$$\frac{dy}{dx}=\sin x+c \qquad (一階一次)$$

$$a\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3-b\left(\frac{dy}{dx}-c\right)^5+ky=0 \qquad (二階三次)$$

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3=\mathrm{R}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \qquad (二階二次)$$

與ヘラレタル微分方程式ヨリ微係數ヲ含マザル x ト y トノ間ノ關係式ヲ求ムルコトヲ其微分方程式ヲ解クトイヒ，其關係式ヲ其微分方程式ノ解トイフ，微分方程式ハ物理學上ノ數學ノ應用方面ニ常ニ出テクル方程式ニシテ之レマデ積分ノ問題トシテ度々解キタリ。

109. 微分方程式ノ構成

x, y 及ビ任意ノ定數ヲ含ム方程式ヨリ其任意定數 (Arbitrary constant) ヲ消去スレバ微分方程式ヲ得ル。

例 (1) 直線ノ方程式 $y=mx+b$……(i) ヲ微分スレバ

$$\frac{dy}{dx}=m \quad \cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(\text{iii})$$

(i) ハ角係數ガ m, y 軸トノ交點ガ b ナル一本ノ直線ノ方程式ナレドモ (ii) ハ b ヲ含マザルガ故ニ角係數ガ m ナル總テノ直線ヲ表ハス。

次ニ (iii) ノ $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ハ總テノ直線ニ共通ナル性質，即曲率 K ハ零ナルコトヲ表ハスモノニシテ總テノ直線ヲ表ハス微分方程式ナリ。

例 (2) 圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$…(i) ヲ微分スレバ

$$(x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

$$1+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \quad \cdots\cdots(\text{iii})$$

$$y-b=-\left[1+)\frac{dy}{dx})^2\right]\Big/\frac{d^2y}{dx^2} \quad \cdots\cdots(\text{iv})$$

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\frac{d^3y}{dx^3}=3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\cdots(\text{v})$$

(i) ハ中心ガ (a, b) ニシテ半徑 r ナル一ツノ圓ノ方程式ナレ

ドモ (ii) ハ r ヲ含マザルガ故ニ半徑ノ如何ニ拘ラズ中心ガ (a, b) ナル總テノ圓ニ共通ナル性質ヲ表ハス。 次ニ (iii) ハ a 及 r ヲ含マザルガ故ニ中心ガ $y=b$ ナル直線上ニアル總テノ圓ヲ表ハス。

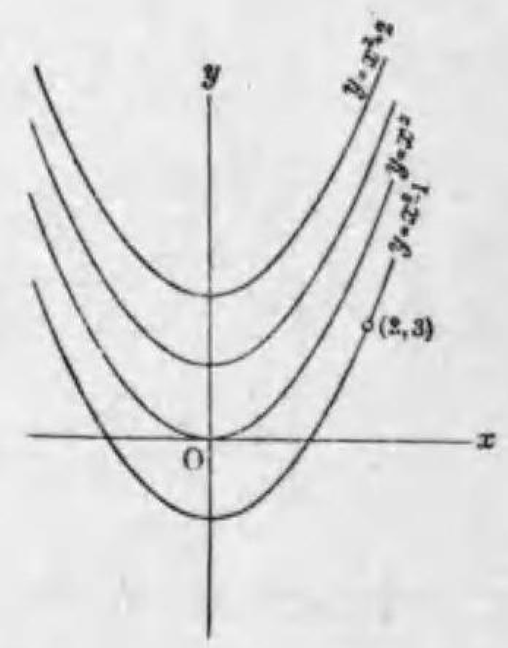
次ニ (v) ハ三ツノ任意定數 a, b, r ノ何レヲモ含マザルガ故ニ總テノ圓ニ共通ナル性質ヲ表ハス，即曲率半徑ノ微係數ガ零，即曲率半徑ガ一定ナルコトヲ示ス。 故ニ (v) ハ總テノ圓ヲ表ハス微分方程式ナリ。

斯クノ如クーツノ任意定數ヲ消去スレバ一階ノ微分方程式ヲ得二ツノ任意定數ヲ消去スレバ二階ノ微分方程式ヲ得ルコトヲ知ルベシ。

逆ニ微分方程式ヲ解クトハ上ノ消去式ヨリ原式ヲ導キ出スコトナレバ一階ノ微分方程式ノ解ハ必ラズーツノ任意定數ヲ含ミ，二階ノ微分方程式ノ解ハ二ツノ任意定數ヲ含ムモノナリ。

一般ニ n 階ノ微分方程式ノ解ハ n ケノ任意定數ヲ含ムモノニシテ之等ノ任意定數ハ問題ニ與ヘラレタル附帶條件ニヨリテ決定スルモノナリ。

例 (1) アル平面曲線アリ，ソノ曲線上ノ任意ノ點ニ於ケル slope ハソノ點ノ x 座標ノ 2 倍ナリトイフ，コノ曲線ノ方程式ヲ求ム。



〔解〕 曲線上ノ任意ノ點ヲ $P(x, y)$ トスレバ

$$\text{slope}=\frac{dy}{dx}=2x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$dy=2x\,dx$$

$$\int dy=\int 2x\,dx$$

$$y=x^2+c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

(i) ハコノ曲線ノ微分方程式ニシテ (ii) ハ其解ナリ。 C ハ積分常數ニシテ， コノ C ニ種々ノ値ヲ與フレバ圖ノ如ク一群ノ同類曲線 (Family of curves) ヲ得ベシ， 之等ノ一群ノ同類拋物線ハ何レモ (i) ナル微分方程式ヲ滿足スルガ故ニ之等ノ曲線ヲ積分曲線 (Integral curves) トイフ。

今問題ニコノ曲線ハ (2, 3) ナル點ヲ過ルモノトイフ附帶條件ヲツケレバ (ii) ヨリ

$$3=4+c \qquad \therefore\ c=-1$$

$$\therefore\ \text{曲線ノ方程式ハ}\ y=x^2-1 \cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

トナリテ問題ニ適スル唯一ツノ曲線ヲ得。

例 (2) 物體ヲ初速度 50 m/sec ニテ上方ニ投ゲタルトキ 4 秒後ニ於ケル速度ヲ求メヨ。

但シ $g=0.8\ \text{m/sec}^2$ ニシテ空氣ノ抵抗ナキモノトス。

〔解〕 上向キノ方向ヲ正トスレバ加速度 g ハ下方ニ作用スルガ故ニ物體ノ運動ノ微分方程式ハ次ノ如シ。

$$\frac{dv}{dt}=-g \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$dv=-g\,dt$$

之レヲ積分スレバ

$$v=-gt+c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

投ゲ始メノ速度ハ 50 m/sec ナルガ故ニ

$t=0$ ノトキ $v=50$ ナリ 故ニ $c=50$

$$\therefore \quad v=-gt+50 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

∴ 4 秒後ノ速度 v ハ

$$v=-g\times 4+50=10.8 \text{ m/sec.}$$

(ii) ノ如ク任意定數ヲ含ム解ヲ一般解 (General solution) トイヒ，一般解中ノ一部又ハ全部ノ任意定數ニ一定ノ値ヲ代入シタモノヲ，特別解 (Particular solution) トイフ。然ルニ微分方程式中ニハ一般解中ニ合マレザル特殊ノ解ノ存スルコトアリ，之レヲ特異解 (Siuglar solution) トイフ。

110. 變數分離可能ナル場合

與ヘラレタル微分方程式ガ

$$f(x)dx+\phi(y)dy=0$$

ナル形ニ導キ得ルトキニハ變數分離 (Separation of variables) ガ可能ナリトイフ。 但シ $f(x)$ 及ビ $\phi(y)$ ハ夫々 x 及ビ y ノミノ函數ナリトス。

兩邊ヲ積分スレバ

$$\int f(x)dx+\int\phi(y)dy=c$$

例 (1) $\dfrac{dy}{dx}=3x^2-5x+10$ ヲ解ケ。

〔解〕

$$dy=(3x^2-5x+10)dx$$

$$y=\int(3x^2-5x+10)dx$$

$$=x^3-\frac{5}{2}x+10x+c$$

例 (2) $x\dfrac{dy}{dx}+y^2=1$ ヲ解ケ。

〔解〕 變數ヲ分離スレバ

$$\frac{1}{1-y^2}dy=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1}{1-y^2}dy=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}=\log x+c$$

$$\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}=Ax \qquad \text{但シ } c=\log A$$

$$\frac{1+y}{1-y}=A^2x^2$$

〔公式〕

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}+c,$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}+c,$$

〔解〕

$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right\}$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\int\left\{\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a-x}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\log(a+x)-\log(a-x)\right\}+c$$

$$=\frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}+c$$

同様ニ $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2}\log\frac{x-a}{x+a}$

例 (3) $xy(1+x^2)dy=(1+y^2)dx$ ヲ解ケ。

〔解〕 $\displaystyle\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{1}{x(1+x)^2}dx$

$$\int\frac{y}{1+y^2}dy=\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\int\left\{\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right\}dx$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\log(1+y^2)=\log x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+c$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}\log\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{x^2}=c$$

コヽニ於テ $2c=\log c_1$ トオケバ

$$(1+x^2)(1+y^2)=c_1x^2$$

111. 同　次　形

與ヘラレタル微分方程式ガ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x,y)}{\phi(x,y)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

ナル形トナリ且ツ $f(x,y)$ 及ビ $\phi(x,y)$ ハ夫々 x, y ノ同次式ナルトキ (i) ヲ同次形 (Homogeneous) ナリトイフ。

同次形ノ微分方程式ニ於テハ

$$y=vx,\quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

ナル置換法ヲナストキハ變數分離可能トナル。

例 (1) $(xy+y^2)dx+(xy-x^2)dy=0$ ヲ解ケ。

〔解〕 $\displaystyle\frac{dy}{dx}=\frac{xy+y^2}{x^2-xy}$

$y=vx,\quad \dfrac{dy}{dx}=v+x\dfrac{dv}{dx}$ ヲ代入スレバ

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{vx^2+v^2x^2}{x^2-vx^2}=\frac{v+v^2}{1-v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^2}{1-v}$$

變數ヲ分離スレバ

$$\frac{1-v}{2v^2}dv=\frac{dx}{x}$$

之レヲ積分スレバ

$$-\frac{1}{2v}-\frac{1}{2}\log v=\log x+c$$

$v=y/x$ ニテ置換スレバ

$$-\frac{x}{2y}-\frac{1}{2}\log\frac{y}{x}=\log x+c$$

$$\log xy=-\frac{x}{y}-2c$$

$$xy=e^{-\frac{x}{y}-2c}$$

$$xy=Ae^{-\frac{x}{y}} \qquad \text{但シ} \quad A=e^{-2c}$$

例 (2) $(x-y^2)+2xy\frac{dy}{dx}=0$ ……(i) ヲ解ケ。

〔解〕 (i) ハ同次形ナラザレドモ

$y^2=z$ トオケバ $2y\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$ トナリテ (i) ハ

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z-x}{x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(ii)$$

トナリテ (ii) ハ同次形トナル。

$\therefore$ $z=vx$ トオケバ $\frac{dz}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

$$dv=-\frac{dv}{x}$$

$$\therefore \quad v=-\log x+c$$

$$\frac{z}{x}=-\log x+c$$

$$\frac{y^2}{x}=c-\log x$$

$$xe^{\frac{y^2}{x}}=A \qquad \text{但シ} \quad A=e^c$$

例 (3) $(ax+by+c)\frac{dy}{dx}=a'x+b'y+c'$ ………(i)

之レハ同次形ナラザレドモ

$$x=x_0+X,\ y=y_0+Y \qquad [x_0,\ y_0 \text{ ハ定數}]$$

トオケバ $\frac{dy}{dx}=\frac{dX}{dY}$

且ツ $ax+by+c=aX+bY+(ax_0+by_0+c)$

$$a'x+b'y+c'=a'X+b'Y+(a'x_0+b'y_0+c')$$

トナル。コノトキ $a'b-ab'\neq 0$ ナルトキハ

$$ax_0+by_0+c=0,\quad a'x_0+b'y_0+c'=0$$

ナルヨウニ $x_0,\ y_0$ ヲ定ムルコトヲ得。

從ツテ與微分方程式 (i) ハ

$$(aX+bY)\frac{dY}{dX}=a'X+b'Y$$

トナリテ同次形トナル。

若シ $a'b-ab'=0$ ナルトキハ

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=k$$

トオクトキハ，與微分方程式 (i) ハ

$$(ax+by+c)\frac{dy}{dx}=k(ax+by)+c'$$

トナル。而シテ $ax+by=z$ トオケバ

$$a+b\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$$

$$\therefore \quad (z+c)\left(\frac{dz}{dx}-a\right)=bkz+bc'$$

$$\frac{dz}{dx}=a+\frac{bkz+bc'}{z+c}$$

トナリテ變數分離形ニ歸スルコトヲ得。

例 (4)　$(2x+3y-6)\dfrac{dy}{dx}=6x-2y-7$　ヲ解ケ。

〔解〕　$a=2,\ b=3,\ c=-6,\ a'=6,\ b'=-2,\ c'=-7$

$$a'b-ab'=18+4=22\neq 0$$

$\therefore$　$2x_0+3y_0-6=0,\ 6x_0-2y_0-7=0$　ヨリ

$x_0=\dfrac{3}{2},\quad y_0=1$　ヲ得

$$x=\frac{3}{2}+X,\qquad y=1+Y$$

トオケバ與微分方程式ハ

$$(2X+3Y)\frac{dY}{dX}=6X-2Y$$

$$\frac{dY}{dX}=\frac{6X-2Y}{2X+3Y}$$

$\therefore$　$Y=vX$　トオケバ　$\dfrac{dY}{dX}=v+X\dfrac{dv}{dx}$

$$v+X\frac{dv}{dX}=\frac{6-2z}{2+3z}$$

$$\frac{2+3v}{6-4v-3v^2}dv=\frac{dX}{X}$$

$\therefore$　$-\dfrac{1}{2}\log(6-4v-3v^2)=\log X+c_1$

$$\log X^2(6-4v-3v^2)=-2c_1$$

$$6X^2-4XY+3Y^2=c_2\qquad 但シ\quad c_2=-2c_1$$

$\therefore$　$6\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(y-1)-3(y-1)^2=c_2$

112. 微分方程式ノ應用

〔A〕　空氣ノ抵抗ヲ考慮セル落體ノ速度

物體ガ空氣中ヲ落下スルトキ，ソノ抵抗ハ速度ニヨリテ異ナルモノニシテ，速度ガ小ナル間ハ速度ニ比例シ，速度ガ大ニナレバ速度ノ二乘ニ比例スルモノナリ。

（I）　空氣ノ抵抗ガ落體ノ速度ニ比例スル場合　m ぐらむ ノ物體ガ v ナル速度ニテ落下スル際之レニ作用スル力ハ重力 m ト空氣ノ抵抗 $R=kv$ （k ハ比例定數） ニシテコノ二力ノ差 $mg-kv$ ニヨリテ物體ハ落下スルガ故ニ次ノ微分方程式ヲ得。

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$\frac{m}{k}\frac{dv}{dt}=\frac{mg}{k}-v$$

$$\frac{dv}{a_1-v}=\frac{k}{m}dt\qquad 但シ\quad a_1=\frac{mg}{k}$$

$$\int\frac{dv}{a_1-v}=\frac{k}{m}\int dt$$

$$-\log(a_1 - v) = \frac{k}{m}t + c_1$$

$$a_1 - v = e^{-\frac{kt}{m} - c_1}$$

$$= Ae^{-\frac{kt}{m}} \qquad 但シ \quad A = e^{-c_1}$$

物體ガ靜止ノ狀態ヨリ落下スルモノトスレバ

$t=0$ ノトキ $v=0$ 　∴ $A=a_1$

$$\therefore \quad a_1 - v = a_1 e^{-\frac{kt}{m}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{ii})$$

$$v = a_1\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{iiii})$$

(iii) ニ於テ t ガ次第ニ大ニナレバ $e^{-\frac{kt}{m}}$ ガ次第ニ減少シテ落下ノ速度ハ $\frac{mg}{k}$ ニ接近シ, $t\to\infty$ ニナレバ $v\to\frac{mg}{k}$ トナル

(II) 空氣ノ抵抗ガ落體ノ速度ノ二乘ニ比例スル場合。

空氣ノ抵抗ヲ R トスレバ 　$R=kv^2$

落體ニ作用スル力ハ 　$mg-kv^2$

故ニ次ノ微分方程式ヲ得。

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{i})$$

$$\frac{m}{k}\frac{dv}{dt} = \frac{mg}{k} - v^2$$

$$\frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{k}{m}dt \qquad 但シ \quad a^2 = \frac{mg}{k}$$

$$\int\frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{k}{m}\int dt$$

$$\frac{1}{2a}\log\frac{a+v}{a-v} = \frac{k}{m}t + c_1$$

今靜止ノ狀態ヨリ落下スルモノトスレバ

$t=0$ ノトキ $v=0$ 　∴ $c_1=0$

$$\frac{1}{2a}\log\frac{a+v}{a-v} = \frac{k}{m}t \quad \vdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{ii})$$

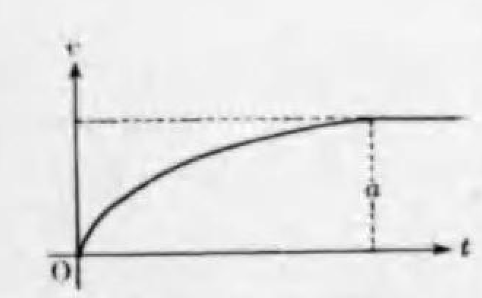
$$\frac{a+v}{a-v} = e^{bt} \qquad 但シ \quad b = \frac{2ak}{m}$$

$$v = a\frac{e^{bt} - 2}{e^{bt} + 1} \quad \cdots\cdots\cdots (\mathrm{iiii})$$

(iii) ニ於テ t ガ次第ニ大キクナレバ t ハ次第ニ a ニ接近シ $t\to\infty$ トナレバ $v\to a$ トナル, 故ニ

$$v = a = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{iv})$$

卽落下スル物體ノ速度 v ハ初メノ間ハ時間 t ト共ニ速クナレドモ, アル一定ノ速サニナレバソレカラ後ハ等速度運動ヲナスコト上圖ノ如シ。



(B) 自己感應 L 電氣抵抗 R ナル電流ノ輪路ニ E ナル電壓ヲ作用セシメタルトキ流ル、電流 i ハ次ノ微分方程式ニテ與ヘラルモノトス。

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{i})$$

電流 i ヲ t ニテ表ハセ　但シ L, R, 及ビ E ハ一定ナルモノトス。

〔解〕
$$\frac{L}{R}\frac{di}{dt}=\frac{E}{R}-i$$

$$\frac{di}{\frac{E}{R}-i}=\frac{R}{L}dt$$

$$\int\frac{di}{\frac{E}{R}-i}=\frac{R}{L}\int dt$$

$$-\log\left(\frac{E}{R}-i\right)=\frac{R}{L}t+c_2$$

(A)　$t=0$ ノトキ $i=0$ トスレバ $c_1=-\log\frac{E}{R}$

$$\therefore\quad \log\left(\frac{E}{R}-i\right)-\log\frac{E}{R}=-\frac{R}{L}t \quad \cdots\cdots\text{(ii)}$$

$$\left(\frac{E}{R}-i\right)\frac{R}{E}=e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

t ガ次第ニ大キクナレバ $e^{-\frac{Rt}{L}}$ ハ次第ニ小サクナリテ電流 i ハ $\frac{E}{R}$ ニ接近シ $t\to\infty$ ノトキ $i\to\frac{E}{R}$ トナルガ故ニ おーむノ定律

$$i=\frac{E}{R} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}$$

ハ (iii) ニ於テ $t\to\infty$ ナル特別ノ場合ナリ。

(B)　$t=0$ ノトキ　$i=i_0$ トスレバ

$$-\log\left(\frac{E}{R}-i\right)=\frac{Rt}{L}+C_2$$

$$-\log\left(\frac{E}{R}-i_0\right)=C_2$$

$$\therefore\quad \log\left(\frac{E}{R}-i\right)-\log\left(\frac{E}{R}-i_0\right)=-\frac{Rt}{L}$$

$$\therefore\quad \log\frac{\frac{E}{R}-i}{\frac{E}{R}-i_0}=-\frac{Rt}{L}$$

$$\frac{\frac{E}{R}-i}{\frac{E}{R}-i_0}=e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$\therefore\quad \frac{E}{R}-i=\left(\frac{E}{R}-i_0\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$\therefore\quad i=\frac{E}{R}-\left(\frac{E}{R}-i_0\right)e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right)+i_0e^{-\frac{Rt}{L}}$$

問　　題

次ノ各式ヨリ任意定数ヲ消去シテ微分方程式ヲ作レ。

(1)　$x^2+y^2=c^2$	(2)　$xy=c$
(3)　$x^2-y^2=cx$	(4)　$r=c\sin\theta$
(5)　$r=e^{c\theta}$	(6)　$y=ax^2+bx+c$

(7) y 軸上ニ中心ヲ有スル總テノ圓ヲ表ハス微分方程式ヲ求ム。

(8) y 軸ニ平行ナル軸ヲ有スル總テノ拋物線ノ方程式ハ $\dfrac{d^3y}{dx^3}=0$ ナルコトヲ證セヨ。

次ノ微分方程式ヲ解ケ。

(9) $x^2\dfrac{dy}{dx}=(1-x)^2$ (10) $y\dfrac{dy}{dx}=a\sin x+b$

(11) $x\,dy=y\,dx$ (12) $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{a^2-x^2}$

(13) $xy\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$ (14) $xy\dfrac{dy}{dx}=xe^x+a$

(15) $(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$

(16) $x\sqrt{1+y}\,dx=y\sqrt{1+x}\,dy$

(17) $x\sqrt{1+y^2}\,dx=y\sqrt{1+x^2}\,dy$

(18) $a\left(x\dfrac{dy}{dx}+2y\right)=xy\dfrac{dy}{dx}$

(19) $\cos\theta\,dr+r^2\sin\theta\,d\theta=0$

(20) $\sec\theta\,dr=(1+r)\sin\theta\,d\theta$

(21) $\tan\theta\,dr=(2r+1)\sin\theta\,d\theta$

(22) $\cos^2\theta\,dr=(1-r^2)\,d\theta$

(23) $x^2+y^2=2xy\dfrac{dy}{dx}$

(24) $(3x^2-y^2)dx=3xy\,dy$

(25) $\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$

(26) $dy+y\sin x\,dx=\sin x\,dx$

(27) $(y-1)dx=(x+1)dy$

(28) $x(1+y^2)dx=y(1+x^2)dy$

(29) $2(x-2y-5)dx+(5x-y-7)dy=0$

(30) $(2x-2y+1)dx=(2x+y-1)dy$

(31) Slope ガ $\dfrac{1}{3}$ ニシテ點 (4, 2) ヲ通ル曲線ヲ求ム。

(32) Slope ガ $\dfrac{4}{y}$ ニシテ點 (2, 4) ヲ通ル曲線ヲ求ム。

(33) 次切線 (Subtangent) ガ $2x$ ナル曲線ヲ求ム。

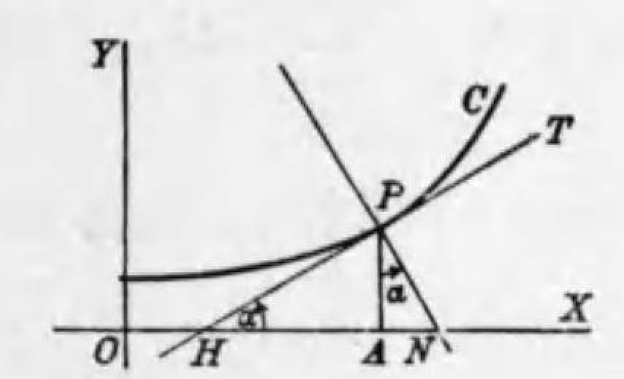
(34) 次法線 (Subnormal) ガ $2a$ ナル曲線ヲ求ム。

〔註〕 次切線トハ HA ノ長サ

$=\dfrac{y}{\tan\alpha}=\dfrac{y}{y'}$

次法線トハ AN ノ長サ

$=y\tan\alpha=yy'$



(35) $L\dfrac{di}{dt}+Ri=E$ ニ於テ

E=10 volt, R=0.8 ohm, L=0.06 Henry

ナリトシ, $t=0$ ノトキ $i=0$ ナルトキ i ヲ t ノ項ニテ表ハセ。マタ $t=0.1$ ナルトキ i ノ値ヲ求メヨ。

(36) 汽車ガ F ナル力ニテ進ムトキノ最大速度ヲ求メヨ。

但シ抵抗 R ハ速度ノ平方ニ比例スルモノトス。

113. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ ナル微分方程式

コノ形ノ微分方程式ハ x ニツキテ二回積分スレバ可ナリ。

$$\frac{dy}{dx}=\int f(x)dx+c_1$$

更ニ x ニツキテ積分スレバ

$$y=\int\left\{\int f(x)dx+c_1\right\}dx+c_2$$
$$=\int\left\{\int f(x)dx\right\}dx+\int c_1dx+c_2$$
$$=\int\int f(x)dx\,dx+c_1x+c_2$$

但シ $\displaystyle\int\left\{\int f(x)dx\right\}dx=\int\int f(x)dx\,dx$ トス。

例 (1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sin x$ ヲ解ケ。

〔解〕 $\displaystyle\frac{dy}{dx}=\int\sin x\,dx+c_1$

$$=-\cos x+c_1$$

$$\therefore\quad y=-\int\cos x\,dx+c_1x+c_2$$
$$=-\sin x+c_1x+c_2$$

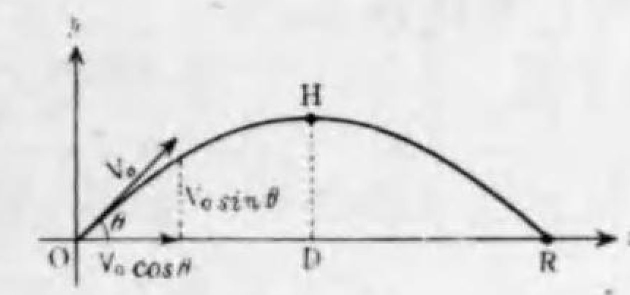
114. 拋射體ノ運動

彈丸ヲ初速 V_0 仰角 θ ニテ發射スルトキ，ソノ彈道，着彈距離及ビ最高點ヲ求メントス。但シ空氣ノ抵抗ハナキモノトス。

發射點ヲ原點，水平線ヲ x 軸，鉛直線ヲ y 軸ニトレバ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$



(i) ヲ積分スレバ

$$\frac{dx}{dt}=c_1$$

$t=0$ ナルトキ $\dfrac{dx}{dt}=V_0\cos\theta \qquad \therefore\ c_1=V_0\cos\theta$

$$\therefore\quad \frac{dx}{dt}=V_0\cos\theta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

(ii) ヲ積分スレバ

$$\frac{dy}{dt}=-gt+c_2$$

$t=0$ ナルトキ $\dfrac{dy}{dt}=V_0\sin\theta \qquad \therefore\ c_2=V_0\sin\theta$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dt}=-gt+V_0\sin\theta \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iv)}$$

(iii) ト (iv) ヨリ時刻 t ニ於ケル速度 v ハ

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$v=\sqrt{V_0^2\cos^2\theta+(V_0\sin\theta-gt)^2}$$

次ニ (iii) ヲ積分スレバ

$$x=V_0\cos\theta.t+c_3$$

$t=0$ ノトキ $x=0 \qquad \therefore\ c_3=0$

$$\therefore\quad x=V_0(\cos\theta)t \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(v)}$$

(iv) ヲ積分スレバ

$$y=\mathrm{V_o}(\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2+c_4$$

$t=0$ ノトキ $y=0$ $\therefore\ c_4=0$

$$y=\mathrm{V_o}(\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{vi})$$

(v) ト (vi) ヨリ t ヲ消去スレバ

$$y=\mathrm{V_o}\sin\theta\frac{x}{\mathrm{V_o}\cos\theta}-\frac{1}{2}\frac{gx^2}{\mathrm{V_o}^2\cos^2\theta}$$

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2\mathrm{V_o}^2\cos^2\theta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{vii})$$

(vii) ハ彈道ノ方程式ニシテ拋物線ナリ。

(vii) ニ於テ $y=0$ トスレバ着彈距離 x ヲ得ベシ。

$$x=\frac{\mathrm{V_o}^2\sin 2\theta}{g} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{viii})$$

コノ着彈距離ノ最大ナルハ

$\sin 2\theta=1,\qquad \theta=45°$

ナルトキナリ。即 45° ノ仰角ニテ發射スレバ彈丸ハ最モ遠距離ニ達ス。

次ニ最高點ニ於テハ昇ル速度ハ 0 即 $\frac{dy}{dt}=0$ ナルガ故ニ

(iv) ニ於テ $\frac{dy}{dt}=0$ トオケバ

$$t=\frac{\mathrm{V_o}\sin\theta}{g} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ix})$$

コノトキノ高サハ

$$y=\mathrm{V_o}(\sin\theta)\frac{\mathrm{V_o}\sin\theta}{g}-\frac{1}{2}g\frac{\mathrm{V_o}^2\sin^2\theta}{g^2}$$

$$y=\frac{\mathrm{V_o}2\sin^2\theta}{2g} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{x})$$

空氣ノ抵抗ヲ考慮スルトキハ拋射體ノ運動ハ拋物線トナラズシテ其射程モ公式 (viii) ノ與フルモノヨリ甚ダ小ナリ。

Helie ハ公式 (vii) ヲ實驗的ニ次ノ如ク變形セリ。

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2\cos^2\theta}\left(\frac{1}{\mathrm{V_o}}+\frac{kx}{\mathrm{V_o}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{xi})$$

コヽニ $k=0.0000000458\,\frac{d^2}{w}$ ノ d ハ吋ニシテ彈丸ノ直徑, w ハ封度ニテ示セル其重量ナリ。マタ多クノ彈丸ハ右廻リノ廻轉ヲスルガ故ニ彈丸ハ右ニ彎曲セントスルモノナリ。之レヲ Drift トイフ。故ニ彈道及着彈距離ノ計算ニ於テハ Drift 及ビ風ノ速度ニ對スル補正ヲ施サヽル可ラズ。

115. 梁ノ彎曲 (Bending of Beem)

〔I〕 一端ヲ固定シ他端 A ニ荷重 W ヲ與ヘタルトキノ梁ノ彎曲ヲ計算セントス。

今原點 O ヨリ x ナル距離ニアル點 P ニ於ケル Bending moment ヲ M トスレバ

$$\mathrm{M}=\mathrm{W}(l-x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

マタ梁ノ彈性曲線ノ微分方程式ハ

$$\mathrm{M}=-\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

コヽニ E ハ youngth modulus,

I ハ moment of inertia with respect to neutral axis.

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{W}{EI}(l-x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

之レヲ積分スレバ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{W}{EI}\left(lx-\frac{1}{2}x^2\right)+c_1$$

$x=0$ ナル點ニ於テハ $\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \ c_1=0$ ナリ。

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{W}{EI}\left(lx-\frac{1}{2}x^2\right) \quad \cdots\cdots\text{(iv)}$$

(iv) ヲ再ビ積分スレバ

$$y = -\frac{W}{EI}\left(\frac{1}{2}lx^2-\frac{1}{6}x^3\right)+c_2$$

$x=0$ ナル點ニ於テハ $y=0 \quad \therefore \ c_2=0$

$$y = -\frac{W}{EI}\left(\frac{1}{2}lx^2-\frac{1}{6}x^3\right) \quad \cdots\cdots\text{(iv)}$$

一端 A ニ於テハ (iii) 及ビ (iv) ニ $x=l$ ヲ代入シテ

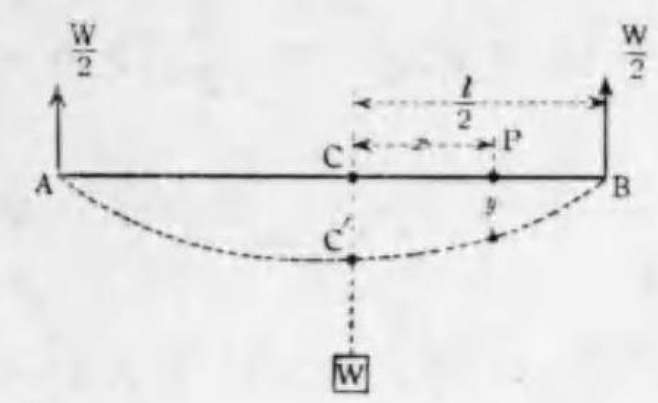
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_A = -\frac{W}{EI}\left(l^2-\frac{1}{2}l^2\right) = -\frac{Wl^2}{2EI}$$

$$(y)_A = -\frac{Wl^3}{EI}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = -\frac{Wl^3}{3El}$$

之レmox. deflection ノ値ナリ。

〔II〕 兩端ニテ支ヘ，中心ニ荷重セル梁。

梁 AB ノ中心 C ニ荷重 W ヲ與ヘタルトキ，ソノ梁ノ Deflection ヲ計算セントス。



今中心 C ヲ原點ニトリソレヨリ x ナル距離ニアル點 P ニ於ケル Bending moment M ハ

$$M = \frac{W}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right) \cdots\cdots\text{(i)}$$

マタ梁ノ彈性曲線ノ微分方程式

$$M = -EI\frac{d^2y}{dx^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{W}{2EI}\left(\frac{l}{2}-x\right) \quad \cdots\cdots\cdots\text{(iii)}$$

之レヲ積分スレバ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{W}{2EI}\left(\frac{l}{2}x-\frac{1}{2}x^2\right)+c_1$$

$x=0$ ナルトキ $\frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \ c_1=0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{W}{2EI}\left(\frac{l}{2}x-\frac{1}{2}x^2\right) \quad \cdots\text{(iv)}$$

更ニ積分スレバ

$$y = -\frac{W}{2EI}\left(\frac{l}{4}x^2-\frac{1}{6}x^3\right)+c_2$$

$x=\frac{l}{2}$ ナル點 B ニ於テハ $y=0$

$$c_2 = -\frac{1}{48}\frac{Wl^3}{EI}$$

$$y = -\frac{W}{2EI}\left(\frac{l}{4}x^2-\frac{1}{6}x^3\right)+\frac{Wl^3}{48EI} \cdots\text{(v)}$$

(iv) ニ於テ $x=\frac{l}{2}$ トスレバ點 B ニ於ケル slope ヲ得。

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_B=-\frac{W}{2FI}\left(\frac{l^2}{4}-\frac{l^2}{8}\right)=-\frac{Wl^3}{16EI} \quad \cdots\cdots(vi)$$

(v) ニ於テ $x=0$ トスレバ點 C ニ於ケル max. Deflection ヲ得。

$$(y)_c=\frac{1}{48}\frac{Wl^3}{EI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(vii)$$

尙點 C ヨリ左右等距離ニアル點ノ傾斜及ビ彎曲ハ同一ナルコト明ナリ。

問　　題

次ノ微分方程式ヲ解ケ　(1−4)

(1) $\frac{d^2y}{dx^2}=x^3$　　(2) $\frac{d^2y}{dx^2}=e^x$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}=\cos x$　　(4) $\frac{d^2y}{dx^2}=a-x^2$

(5) 靜止ノ狀態ヨリ落下スル物體ノ t 秒後ノ速度及ビ距離ヲ求メヨ。

(6) 初速度 10 m/sec ニテ 100 m 落下セル物體ノ速度ヲ求メヨ。

(7) 100 m/sec ノ初速度ニテ垂直ニ投ゲ上ゲラレタル物體ハ如何程ノ高サニ達スルカ。

(8) 初速度 800 m/sec ニシテ仰角 45° ニテ發射セラレタル彈丸ノ次ノ値ヲ求メヨ。

(i) 最高點ニ達スルニ要スル時間

(ii) 最高點ノ高サ

(iii) 到達距離

(9) 長サ 10 呎ノ梁ノ一端ヲ固定シ，他端ニ 5 噸ノ荷重ヲ與フルトキノ max. Deflection ヲ計算セヨ。

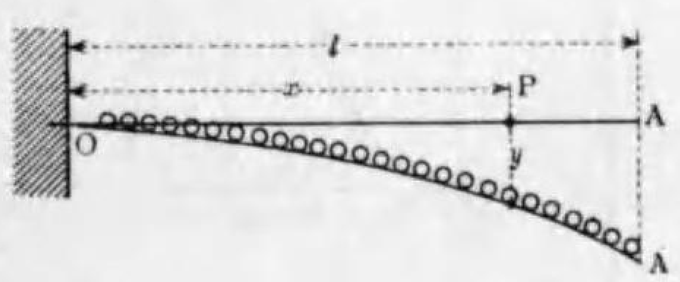
但シ $I=400$ (吋)^4, $E=12000$ 噸平方吋トス。

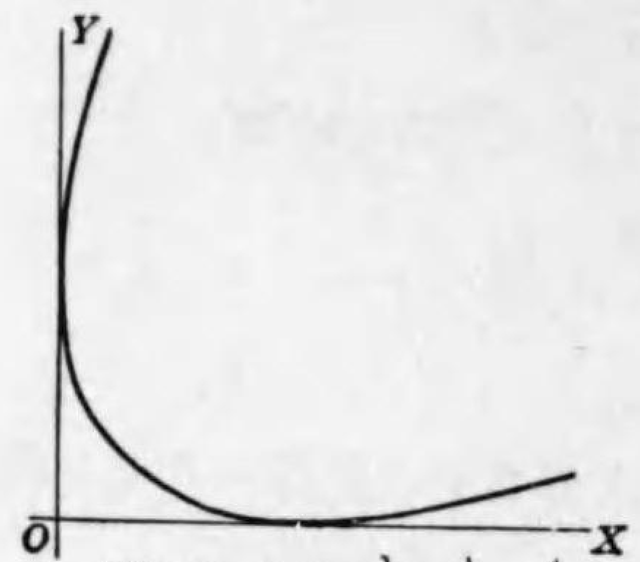
(10) 長サ 20 呎ノ梁ノ兩端ヲ支ヘ，ソノ中心ニ 24 噸ノ荷重ヲ與フルトキノ max. Deflection ヲ計算セヨ。

但シ I, E ハ (9) ニ同ジトス。

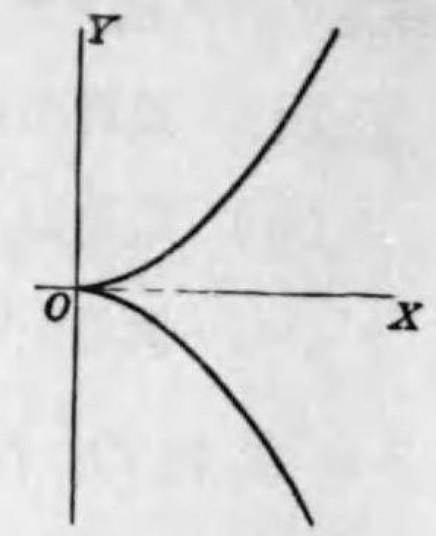
(11) 長サ l ナル梁ノ一端 O ヲ固定シ，O ヨリ a ナル距離ノ點 P ニ荷重 W ヲ與ヘタルトキノ max. Deflection ヲ計算セヨ。

(12) 長サ l ナル梁ノ一端 O ヲ固定シ，ソノ上ニ一樣ナル荷重ヲ與ヘタルトキノ max. Deflection ヲ計算セヨ。

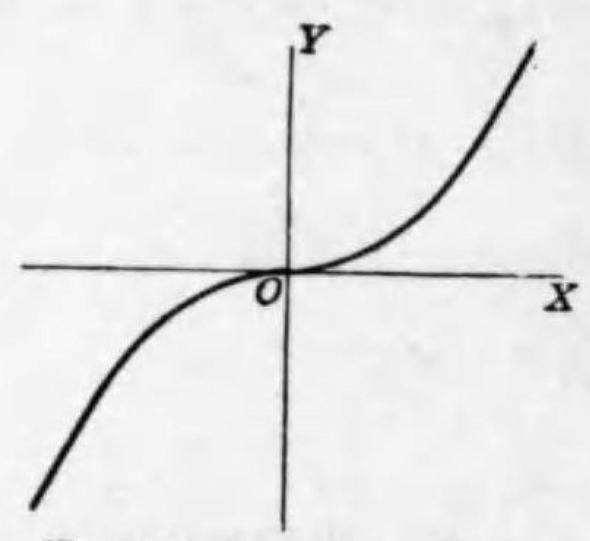




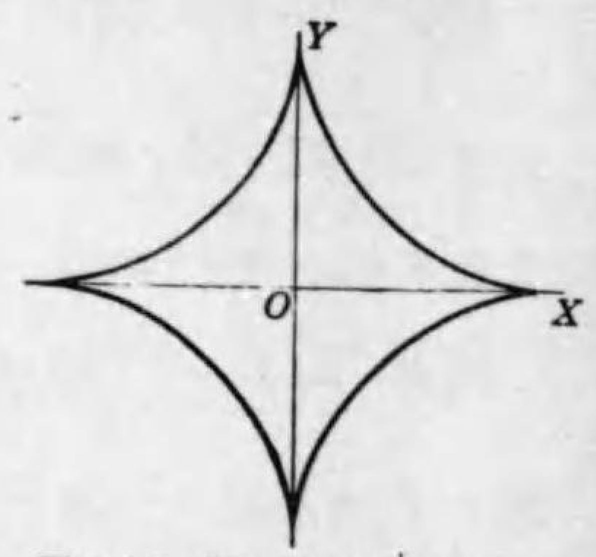
The Parabola $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$



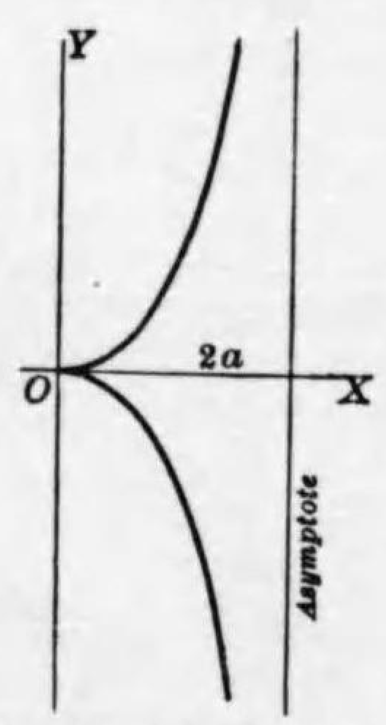
The Semi-Cubical Parabola, $a\,y^2=x^3$



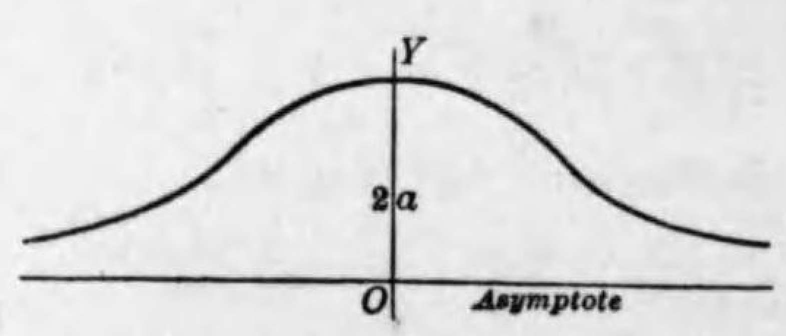
The Cubical Parabola $a^2y=x^3$



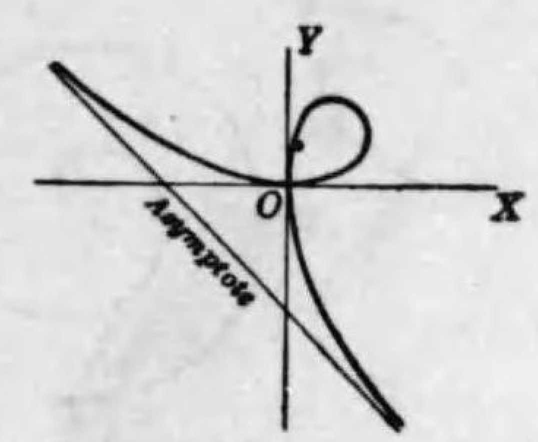
The Astroid or Four-Cusped Hypocycloid, $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$



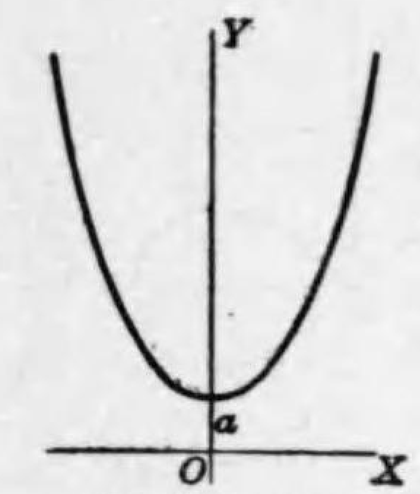
The Cissoid of Diocles
$y^2=\frac{x^3}{2a-x}$



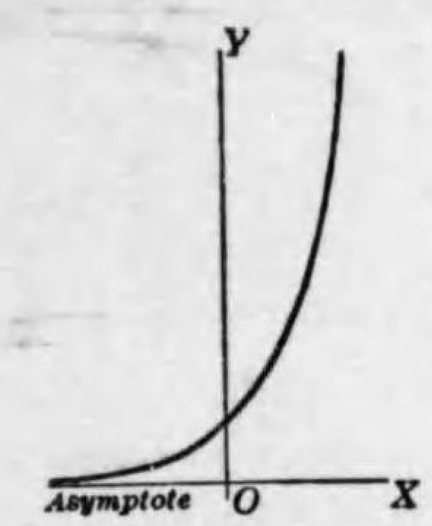
The Witch of Agnesi
$y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$



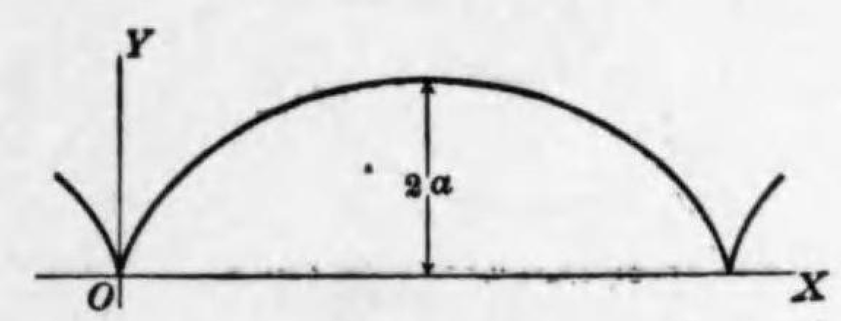
The Folium of Descartes
$x^3+y^3=3\,a\,x\,y$



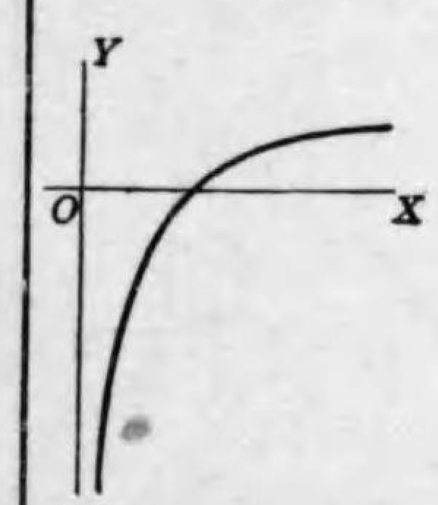
The Catenary
$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$



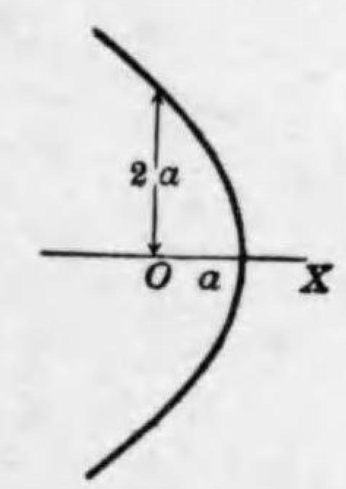
The Exponential Curve
$y=e^x$



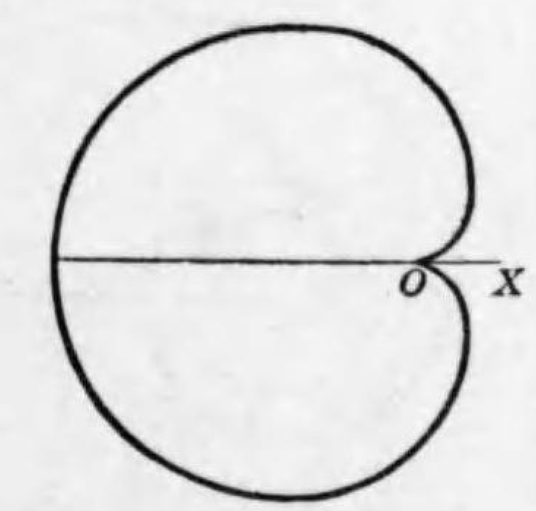
The Cycloid
$x=a\,(\theta-\sin\theta),\ y=a\,(1-\cos\theta)$



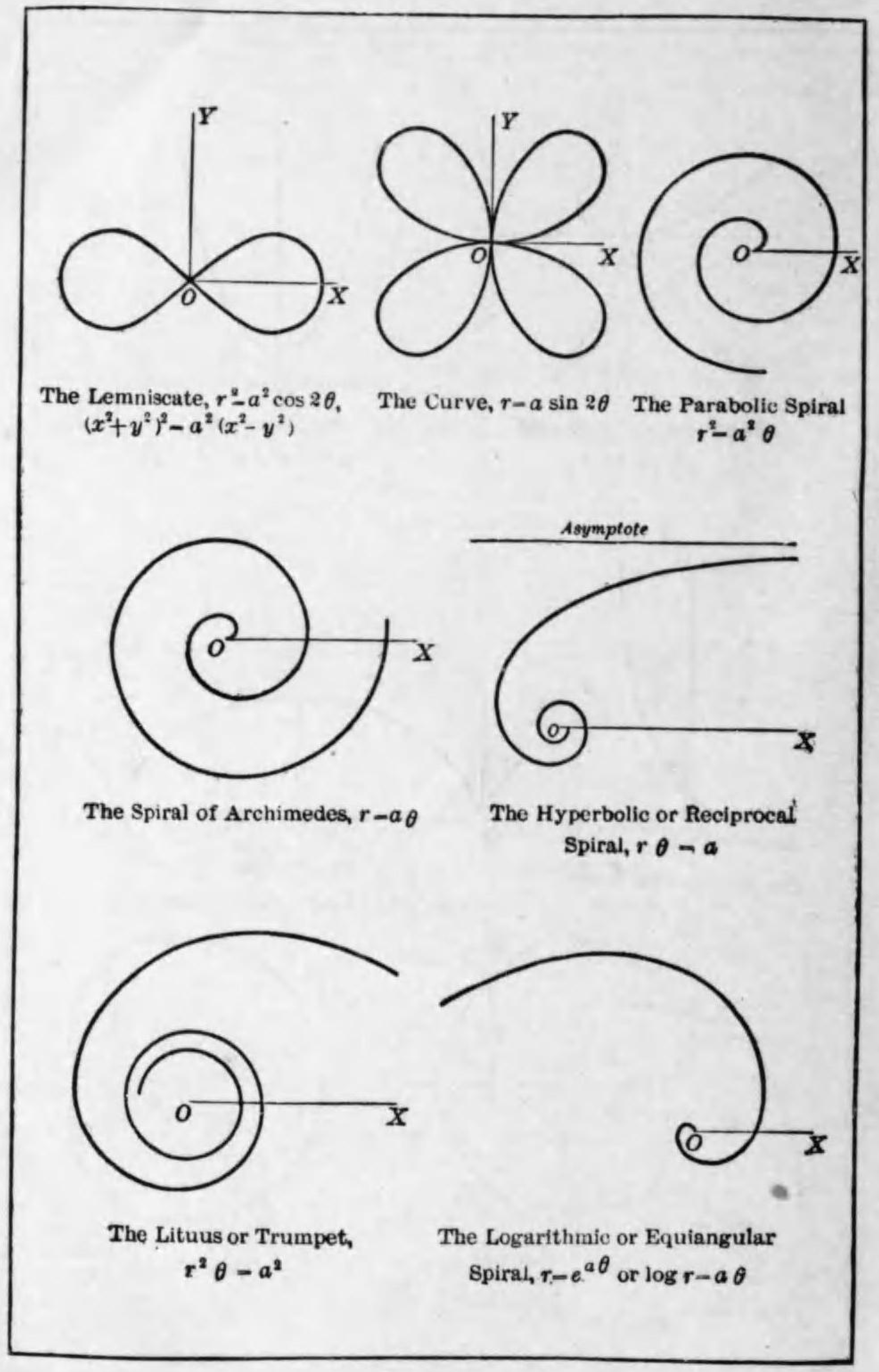
The Logarithmic Curve
$y=\log x$



Parabola
$r=a\sec^2\frac{\theta}{2}$



The Cardioid
$r=a(1-\cos\theta)$



The Lemniscate, $r^2=a^2\cos 2\theta$, $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

The Curve, $r=a\sin 2\theta$

The Parabolic Spiral $r^2=a^2\theta$

The Spiral of Archimedes, $r=a\theta$

The Hyperbolic or Reciprocal Spiral, $r\theta=a$

The Lituus or Trumpet, $r^2\theta=a^2$

The Logarithmic or Equiangular Spiral, $r=e^{a\theta}$ or $\log r=a\theta$

昭和八年五月三十日印刷
昭和八年六月　五　日發行

（定價金二圓三十錢）

不許複製

編者　堀　乙次郎

發行者　海事教育振興會理事　吉利　巖

印刷者　兵庫縣武庫郡本庄村深江七一八　後藤富之助

印刷兼發行所　兵庫縣武庫郡本庄村　神戸高等商船學校內　海事教育振興會

終