序

俯仰宇宙。自然界、人爲界。形而上者。形而下者、系而爲學、釐而爲科。繁然錯列。莫殫莫究、卽就一科而言之、有委有原、有約有博。作者創始。述者增高、駸駸乎日進而未有極限。學者之習科學也、當其始患不得入其門。旣入其門、則欲罷不能、恆以一探究竟博觀變化爲愉快、遊山者思登五嶽之高、觀水者思極九瀛之闊、人情大抵然乎。憶曩時初習代數、所循誦者爲製造局之譯本、深喜代數立術、能探究數之公性情、足與中土天元術相頡頏。以視舊有各術之枝枝節節而爲之者。難易蓋迥判矣 然嘗因其術而觸類引伸。覺意象之表。尙有種種繁賾之理、足供研究者在、惜所誦之本、尙語焉而不詳。偶見某雜誌、載級數求和之解法、批郤導窾。得未曾有。聞友人述、謂是固譯自東文大代數者耳。於是知海外著述。不乏淵博精深先得我心者。深自恨未諳東文。無由窺此鴻祕也。近年以來、代數學教科書、出版日多。初學入門、可無困難之感、默計此時明習代數之人、當倍蓰於十年以前。苟非迻譯程度較高之書、引入於深造之域。殆不足饜其拾級而登之願望、館中同人、不辭勞瘁、取日本上野淸之大代數講義而譯之、期年而譯始成、又期年而印始成、某以與於校勘之役。藉得稍稍瀏覽、一償夙願、旣深自幸、且以此忖度並世學子之心。知其對於是書之出版。亦必有以先覩爲快者焉、吁。來者不可知、由今日言之、則是書者、固代數學中之五嶽九瀛也矣、

己酉年夏五 紹興壽孝天識於商務印書館編譯所

例言

一是書爲日本上野清氏所編纂取英國斯密斯氏霍爾氏乃托氏三家之大代數學譯述解證演爲講義其立義之嶄新體例之完備久爲彼國敎育家所歡迎今重譯之以供吾國習代數者參考之用。

一斯密斯氏書自開端始霍爾氏乃托氏書自比例始本書以斯密斯氏本爲主以霍爾氏乃托氏之說補其缺皆依據一千八百九十三四年間最新之版而蒐採上野氏此書實可謂集三家之大成。

一是書共分八卷都三十二編自第一編至第十九編專論數之運算及性質可稱爲初等之部自第二十編至第三十二編於數之運算及性質外詳論數之變化及配合可稱爲高等之部學者明此界限循序漸進自無難通之處苟能反覆熟習代數學之奧蘊畢宣矣。

一是書例題之解答專爲查對而設學者習至例題宜先以己意解演之後視其與是書合否合則考其孰繁孰簡不合則考其誤在何處庶易得益若第按文循誦而曰是易解是易解則非編纂者之本意也。

一是書材料豐富凡代數學之理法包括殆盡卽向之稱爲難題者依此書之理法解之自覺游刃有餘。

一是書各種名詞悉照現今所通行者而用之仍附載英文原名以資考證譯文之中間有爲譯者所添註而非上野清氏原書之所有者則標譯註二字以爲區別。

一是書文字不尙高深解說不厭煩瑣務以達意爲主惟卷帙浩繁譯述讐校前後易數人之手始克竣事未當之處訛誤之處均恐不免還望海內大雅匡其不逮則幸甚矣。

目　錄

第　壹　卷

第　壹　編

第　貳　編

第　叁　編

第　肆　編

第　伍　編

第　陸　編

第陸編補

第貳卷

第柒編

第捌編

第玖編

第玖編 (補)

第叁卷

第拾編

第拾壹編

第拾貳編

第拾貳編(補)

第拾叁編

第肆卷

第拾肆編

第拾伍編

第拾陸編

第拾柒編

第拾捌編

第拾玖編

第伍卷

第貳拾編

第貳拾壹編

第貳拾貳編

第貳拾叄編

第 陸 卷

第貳拾肆編

第貳拾伍編

第貳拾陸編

第貳拾柒編(上)

第柒卷

第貳拾柒編(續)

第貳拾捌編

第貳拾玖編

第貳拾玖編(補)

第捌卷

第叁拾編

第叁拾壹編

第叁拾貳編

查理斯密司氏

霍爾氏，乃托氏

大代數學講義

第壹卷

第壹編

定義

1. 代數學(Algebra)爲論數之學科。與算術(Arithmetic同。

譯注。算術舊稱數學。今從本書原名。稱算術。

算術中以5,6,等數字表數，其數字各有一定之値。代數學中以文字表數。其文字可代任何之數，即未定之數此代任何數之文字。謂之元字，但在一個題內所用同一之元字。所代爲同一之數

代數學中所用之元字。可以代任何之數，故凡所論數之理法可推之於任何數而皆同。

例如5加6所得之數爲11。此算術中所論之理法。不能類推之於他數，若代數中用元字代數。如a加a其所得之數常爲a之2倍此a不論爲任何數皆合。

2. 數(Numbers)謂整數及分數也。

又有數量者，如價値，長，面積，時間之類。各以其單位爲標準而以數示其爲單位之若干倍或若干分。

例如計物之長爲4。此必爲其單位所度得之數。其單位爲一尺，或一步，或一里，或爲別定之長。則其物之長，即爲4尺，或4步，或4里，或爲所定之長之4倍。

夫數者。本祇用以計算數量。故無論以元字或數字。爲數量之記號。其元字與數字。皆僅能表其數量之數。而數與數量。雖有分別。尋常亦屢有以數量二字爲數之代字者。

譯注。算術中全以數字與單位相連而言如4尺或4步謂之名數。對名數而言。則凡不連舉單位之數。謂之不名數。名數所以表數量。而名數中所用之數字。仍以表數而已。

〔注意〕此後各章。其關係尤要者。常加( )爲記號。如下3章關係尤要。故作(3)。

(3.) 加號 + (Plus) 置此號於一數之前。以示此一數加於前一數也。

例6+3。以示3加於6也。又6+3+2。以示3加於6之後。又以2加之也。

a+b。以示b加於a也。又a+b+c。以示b加於a之後。又以c加之也

(4.) 減號 − (Minus) 置此號於一數之前。以示從前一數減去此一數也。

例6−3。所以示自6減去3也。又6−3−2。所以示自6減3之後又以2減之也。

a−b。所以示自a減去b也。又a−b−c。所以示自a減b之後又以c減之也。此與加號之次序同。

加減兩號並用。如a+b−c。爲b加於a之後而以c減之。

又a−b+c。爲自a減去b而又以c加之也。

〔法則〕加減之運算。必從左順次以及於右。

例9+3+2=12+2=14。此從左及於右者也。

又9+3+2=9+5=14。此從右及於左者也。

加法之演算。從右及於左。其結果尙無不合。然依此習慣。以行於減法。則有大誤。

例9−3−2=6−2=4。此從左及於右者也。

若從右及左而運算之。則9−3−2=9−1=8。即爲大誤。何則以9−3−2之意。謂從9減3餘6。又從6減2餘4。此4即所得之結果。若從右運算。則與題意違背。學者宜愼之。

又 $9+3-2=12-2=10$。此從左及於右者也。

$9+3-2=9+1=10$。此從右及於左者也。其結果尙無不合。

$9-3+2=6+2=8$。此從左及於右者也。

$9-3+2=9-5=4$。此從右及於左者也。其結果不合。

(5.) 乘號 $\times$〔into〕置此號於一數之前。以示此一數乘於前一數也。

例 $a\times b$。所以示以 b 乘 a 也。$a\times b\times c$。所以示以 b 乘 a 又以 c 乘之也。

文字與文字之間。或數字與文字之間。其乘號可省。例 $a\times b$ 記爲 ab。$a\times b\times c$ 記爲 abc。

若夫數字與數字之間。其乘號斷不可省。否則大誤。例記 3×6 爲 36。此 36 即爲三十六之數。斷不可以代 3×6 者也。

有時以點 (·) 代乘號。然恐其與小數點相混。故記此點時。比小點畧低。例 6×3 則記如 $6\cdot3$。

〔餘論〕數字與數字之間。加號有時可省。

例 $60+3$ 即 63。又 $6+\frac{3}{10}$ 即 $6\frac{3}{10}$。

然如 $8+3$ 則不得記爲 83。

(6.) 除號 $\div$〔Divided by〕置此號於一數之前。以示用此一數以除前一數也。

例 $a\div b$。即 a 以 b 除也。$a\div b\div c$。所以示 a 以 b 除又以 c 除之也。

乘除兩號並用。如 $a\div b\times c$。爲 a 以 b 除又以 c 乘之也。又 $a\times b\div c$。爲 a 以 b 乘又以 c 除之也。

〔法則〕乘除之運算。亦從左順次以及於右。與加減之運算同。

若連用加減乘除之記號。如 $a-b\times c+c\div d$。其運算之次序若何。則於 16 章之末別爲說明之。

7. 積〔Product〕凡二數或二個以上之數相乘。其結果爲諸數之連乘積 (Continued product)。或單稱積。而其所乘之諸數。爲其積之因子 (Fartor)。

將積之因子分而爲二。彼此互爲係數 (Coefficient)。

例將 3abx 之因子分爲 3 與 abx。則 3 爲 abx 之係數。而 abx 爲 3 之係數，

若分爲 3ab 與 x。則 3ab 爲 x 之係數。而 x 爲 3ab 之係數。

積中一因子以數字表之者。謂之數字係數 (numerical coefficient)。

例 3abx，其 3 爲 abx 之數字係數，

(注意)係數用數字係數之處最多。

8. 方乘(Power) 諸因子相同，其所成之積，爲其因子之方乘，例 a 與 a 二因子所成之積 aa。爲 a 之二方乘，又 aaa。爲 a 之三方乘。aaaa，爲 a 之四方乘，以下類推，

有時祇有一個因子 a，卽以爲 a 之一方乘，

二方乘亦稱平方 (Square)。三方乘亦稱立方 (Cube)。例 aa 爲 a 之平方。aaa 爲 a 之立方。

9. 指數(Index) aa, aaa, aaaa 等之方乘簡略記法。卽以 a^2 代 aa。以 a^3 代 aaa。以 a^4 代 aaaa。故 a^n 可以代 aaaa……… 乘至 n 次之方乘也。(n 爲整數)

其於 a 之右肩上所記之小數字 2, 3, 4 及文字 n。所以示同因子之數。如 a^3b^2 卽爲 aaabb。

如上所記之小數字及文字以示同因子之數者，稱爲指數，

a 之一方乘當記爲 a^1。然可略之，僅記爲 a，

10. 方根(Root) 若一數之平方等於 a。則其一數，爲 a 之平方根，例 4 之平方卽 4^2 等於 16，則 4 爲 16 之平方根，

平方根 (Square Root) 之記號。記以 $\sqrt[2]{\ }$，或略記以 $\sqrt{\ }$。故 $\sqrt{a}$ 爲 a 之平方根，$\sqrt{16}$ 爲 16 之平方根，卽 $\sqrt{16}=4$，

若一數之立方等於 a。則其一數爲 a 之立方根，例 3 之立方卽 3^3 等於 27。故 3 爲 27 之立方根，

立方根 (Cube Root) 之記號，記以 $\sqrt[3]{\ }$。故 $\sqrt[3]{a}$ 爲 a 之立方根。又 $\sqrt[3]{27}$ 卽 3 爲 27 之立方根，

四乘根記以 $\sqrt[4]{\ }$。五乘根記以 $\sqrt[5]{\ }$。又 n 乘根記以 $\sqrt[n]{\ }$，故 $\sqrt[4]{a}$ 爲 a 之四　根，$\sqrt[n]{a}$ 爲 a 之 n 乘根，但 n 限於整數，

$\sqrt{}$之記號。蓋從根字即 Radix 之首字碼 r 變化而成。此種記號稱爲根號(Radical Sign)。

11. **不盡根**〔Surd〕所得之方根。其小數無盡者。稱爲不盡根或無理數(Irrational Surd)。例 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt[4]{4}$ 若精密求之。其小數無有窮盡。故稱 $\sqrt{7}$ 或 $\sqrt[4]{4}$ 等爲不盡根。

依算術上求平方根之法。$\sqrt{7}$ 之值僅能得其略近數 2.6457......若於代數學 7 之平方根，祇記爲 $\sqrt{7}$ 而已。

(12.) **代數式**〔Algebraical expression〕以種種之文字，數字，符號集合而成者。

例如 $7a+b^2-cd$ 或 $\sqrt{a}+9$ 等。皆爲代數式。

若如 $+\times6-\div ab$ 爲任意集合毫無意義者。不得謂之代數式。

項〔Terms〕以 + 或 − 相連之各部爲項。

例 $2a-3bx+5cy^2$ 此代數式之各部。爲 $2a, -3bx, +5cy^2$。即此代數式爲有三項者。

若以 × 或 ÷ 相連之各部。不得曰項。例 $5+6-7$ 爲有 $5, +6, -7$ 之三項。若 $5\times6\div7$。其全部分僅得爲一項。

例 $2a-3bx+5cy^2$ 爲 $2\times a-3\times b\times x+5\times c\times y\times y$。其在 + 及 − 之間者得謂之項。其在 × 與 + 或 − 之間者不得謂之項。

13. **同類項**〔Like terms〕有二項。除數字係數之外。其餘悉相同者。謂之同類項。

例 a 與 3a 爲同類項。$5a^3b^2c$ 與 $3a^3b^2c$ 爲同類項。

至若 $5a^2b^3c$ 與 $3a^3b^2c$ 則爲異類而非同類項。何則。一數中 a 之因子有二。b 之因子有三。而又一數中 a 之因子有三。b 之因子有二。故相異也。又 $5a^2b$ 與 $5ax$ 亦爲異類項。

14. **壹項式**〔Monomial expression〕代數式祇有一項者。例如 $3ab$, $7\div6\times8$。皆爲壹項式。

多項式〔Multinomial expression〕代數式有二項或二以上之項者。

例如 $a+b$, $a-b\times c$ 爲二項式(Binomial expression)。

$a-b+c$, ax^2+bx+c 爲三項式(Trinomial expression),

15. 相等號 $=$ (Equals) 置此號於兩代數式之間。以示其兩代數式爲相等者。例 $a=b$。爲 a 等於 b 也。$a+b=c$。爲 $a+b$ 等於 c 也。

若置符號 $>$ 於兩代數式之間。所以示前式大於後式。例 $a>b$ 爲 a 大於 b 也。

若置符號 $<$ 於兩代數式之間。所以示前式小於後式。例 $a<b$ 爲 a 小於 b 也。

若置符號 $\neq$ 於兩代數式之間。所以示前式與後式不相等。例 $a\neq b$ 爲 a 不等於 b。即爲 a 大於 b 或小於 b 也。故 $a\neq b$ 或記爲 $a\gtrless b$。

若置符號 $\ngtr$ 於兩代數式之間。所以示前式不大於後式。例 $a\ngtr b$ 爲 a 不大於 b。即爲 a 小於 b 或等於 b 也。故 $a\ngtr b$ 或記爲 $a\leqq b$。

若置符號 $\nless$ 於兩代數式之間。所以示前式不小於後式。例 $a\nless b$ 爲 a 不小於 b。即爲 a 大於 b 或等於 b 也。故 $a\nless b$ 或記爲 $a\geqq b$。

16. 括弧 (Brackets) 將二項或二項以上之代數式。置於括弧之內。視此代數式之全項。當作一項。例 $(a+b)c$ 其意謂於 b 加於 a 之結果。而以 c 乘之。其 $a+b$ 附以括弧者。視 $(a+b)$ 爲一項。即視爲 b 加於 a 之結果也。

又 $(a-b)(c+d)$。其意謂以 a 減 b 爲一數。c 加 d 爲又一數。而以此二數相乘也。

又 $(a+b)^2(c+d)^2$。其意謂以 a, b 和之平方爲一數。c, d 和之平方爲又一數。而以此二數相乘也。

所有括弧之形。如 ( ), { }, [ ]。

括線 (Vinculum) 以—代括弧者也。

例 $a-\overline{b-c}$ 即 $a-(b-c)$。又 $\sqrt{a+b}$ 即 $\sqrt{(a+b)}$。根號無括弧及括線者。其根號僅屬於一數。如 $\sqrt{}2a$ 爲於 2 之平方根即 $\sqrt{2}$。以 a 乘之。與 $\sqrt{2a}$ 或 $\sqrt{(2a)}$ 不同。若 $\sqrt{2a}$ 或 $\sqrt{(2a)}$。則爲 2a 之平方根也。

又 $\sqrt{}a+x$ 爲於 a 之平方根即 $\sqrt{a}$ 加以 x 也。與 $\sqrt{a+x}$ 或 $\sqrt{(a+x)}$ 不同。因 $\sqrt{a+x}$ 或 $\sqrt{(a+x)}$。爲 $a+x$ 之平方根也。欲表示全式之平方根。必用括弧或括線將全式包括之。

記分數時。於其分子分母間所置之橫線。與括線同其作用。如 $\frac{a+b}{3}$ 可記爲 $\frac{1}{3}(a+b)$。但 $\frac{1}{3}a+b$ 不得視爲與 $\frac{1}{3}(a+b)$ 同也。

〔注意〕代數式之各項。雖無括弧。可視爲與有括弧者無異。以行其加減。

例 $a+bc-d\div e+f$。此式爲有 a, $+bc$, $-d\div e$, $+f$ 四項。其 $+bc$ 及 $d\div e$ 視爲 $+(bc)$ 及 $(d\div e)$。故此式。可作爲 $a+(bc)-(d\div e)+f$。其意爲於 a 加 b, c 之積。又從其所得之結果以 e 除 d 之商減之。末則加以 f 也。此即如 4. 章所云加減之運算從左以及於右也。

又如 $15+6\times8-36\times4\div18+72\div9-1$。其運算之次序如次。

$$15+(6\times8)-(36\times4\div18)+(72\div9)-1$$
$$=15+48-(144\div18)+8-1=15+48-8+8-1。$$

〔法則〕於一式中加減乘除之運算。其次序先乘除而後加減。(參觀 4. 章及 6. 章)。

例題

1. 設 $a=1, b=2, c=3$ 及 $d=4$。試求下列各式之值。

(1) $5a+3c-3b-2d=5\times1+3\times3-3\times2-2\times4$
$=5+9-6-8=14-6-8=8-8=0$ 〔答〕

(2) $26a-3bc+d=26\times1-3\times2\times3+4=26-18+4=12$ 〔答〕

(3) $ab+3bc-5d$。〔答 0〕　　(4) $bc-ca-ab$。〔答 1〕

(5) $a+bc+d$。〔答 11〕

(6) $bcd+cda+dab+abc$
$=2\times3\times4+3\times4\times1+4\times1\times2+1\times2\times3=50$ 〔答〕

2. 設 $a=3, b=1$ 及 $c=2$ 則次之各值如何。

(1) $2a^3-3b^2-4c^3=2\times3^3-3\times1^2-4\times2^3$
$=2\times27-3\times1-4\times8=54-3-32=19$。〔答〕

(2) $2a^2b-3b^3c^2=2\times3^2\times1-3\times1^3\times2^2=18-12=6$。〔答〕

(3) $\frac{1}{16}c^3-\frac{1}{2}b^3=\frac{1}{16}\times2^3-\frac{1}{2}\times1^3=\frac{1}{16}\times8-\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$。〔答〕

(4) $a^3+3ac^2-3a^2c-c^3$。〔答 1〕

(5) $2a^4b^2c-3b^4c^2a-2c^4a^2b$。〔答 0〕

3. $a=3, b=2, c=1$ 及 $d=0$。求下各式之值。

(1) $(3a+4d)(2b-3c)=(3\times3+4\times0)(2\times2-3\times1)$

$=(9+0)(4-3)=9\times1=9$。〔答〕

(2) $2a^2-(b^2-3c^2)d=2\times3^2-(2^2-3\times1^2)\times0=18-0=18$。〔答〕

(3) $a^3-b^3-2(a-b+c)^3$。〔答 3〕

(4) $a(b^2-c^2)+b(c^2-d^2)+d(a^2-b^2)$。〔答 11〕

(5) $3(a+b)^2(c+d)-2(b+c)^2(a+d)=3(3+2)^2(1+0)-2(2+1)^2(3+0)$

$=3(5)^2(1)-2(3)^2(3)=3\times25\times1-2\times9\times3=21$。〔答〕

(6) $\frac{2a^2}{b+c}-\frac{2b^2}{c+a}-\frac{2c^2}{b+d}+\frac{2d^2}{a+d}=\frac{2\times3^2}{2+1}-\frac{2\times2^2}{1+3}-\frac{2\times1^2}{2+0}+\frac{2\times0^2}{3+0}$

$=\frac{2\times9}{3}-\frac{2\times4}{4}-\frac{2\times1}{2}+\frac{2\times0}{3}=6-2-1+0=3$。〔答〕

4. 若 $a=5, b=4, c=3$ 求次之各值。

$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$。〔答〕

$\sqrt{5ab}+c=\sqrt{5\times5\times4}+3=5\times2+3=13$。〔答〕

$\sqrt{(b^4c^2+b^2c^4)}=\sqrt{(4^4\times3^2+4^2\times3^4)}=\sqrt{(256\times9+16\times81)}$

$=\sqrt{3600}=60$。〔答〕

$\sqrt[3]{(a^2+4b^3+4c^2)}=\sqrt[3]{(5^2+4\times4^2+4\times3^2)}=\sqrt[3]{(25+64+36)}$

$=\sqrt[3]{125}=5$。〔答〕

5. (1) $a=2, b=1$。或 (2) $a=5, b=3$。或 (3) $a=12, b=5$。則 a^2-b^2 恆等於 $(a+b)(a-b)$ 試證之。

〔證〕(1) $a^2-b^2=2^2-1^2=4-1=3$ 而 $(a+b)(a-b)=(2+1)(2-1)=3\times1=3$。即 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。(2) 及 (3) 亦用同法證之。

6. (1) $a=2, b=2$ 或 (2) $a=5, b=1$ 或 (3) $a=6, b=3$ 則次之式恆相等。試證明之。

$a^3-b^3, (a-b)(a^2+ab+b^2), (a-b)^3+3ab(a-b)(a+b)^3-3ab(a+b)-2b^3$。

第貳編

根原之法則

17. 名數量 (Concrete quantities) 凡名數量。必以其同類單位之若干倍計算之。例如長 14 尺。即長 1 尺之 14 倍。然如論財產。同一金額。而有收與付之不同。贏與絀之各異。論路之距離。於同一直線上。而有反對之兩方向。論時間。計某時以前之時。與某時以後之時。而有既往將來之分別。若此類者。不遑枚舉。

故名數量有正反對兩種性質。解問題時。當從其量之性質。互用特別之符號表之。

18. 正及負數量 某數量不論其單位若何。而如 +4 者。所以示增加單位 4 倍之意。如 −4 者。所以示減少單位 4 倍之意。

若以 +4 表某人之財產增加 4 圓。(以一圓爲單位)則以 −4 表某人之財產減少 4 圓。或以 +4 表某人之借欵增加 4 圓。則以 −4 表某人之借欵減少 4 圓。

其他若以 +4 表某人贏利 4 圓。則以 −4 表某人虧本 4 圓。或以 +4 表某人虧本 4 圓。則以 −4 表某人贏利 4 圓。

若就直線上之方向計之。以 +4 表其方向上之距離 4 尺。則以 −4 表其反對方向上之距離 4 尺。

19. 性質之符號 (Signs of Affections) 如前章所述。若從其反對之性質。別立新符號以表之。於計算時更覺煩冗。不若仍用 + 及 − 之符號爲簡便也。

故於代數學所用之 + 及 − 之符號。有二種意義焉。一如舊例。名曰加號減號。其効用與算術同。是謂運算之符號。一以區別數量之性質。表示其正反對之形狀。是謂性質之符號。

將性質之符號。置於數量之前。所以表示其數量之性質若何也。

性質之符號 +。常畧而不用。例 + 4 可畧記爲 4。若夫 5 加 6 即 5+6。此 + 爲運算之符號。斷不可畧。否則將 5+6 畧記爲 56 誤甚。

20. 正數量及負數量 於數量之前。置符號＋者。謂之正數量(Positive quantity)。於數量之前。置符號－者。謂之負數量(Negative quantity)。而＋及－謂之正號及負號。

〔註〕於代數學上之符號。雖有加減乘除之符號。及＝＜＞等種。而僅云符號時。大都指正號＋負號－而言。

故變代數式之符號時。即將其式中之各項＋變爲－。－變爲＋而已。

例變 $a+b-c\times d$ 之符號。則得 $-a-b+c\times d$。

21. 絕對量 (Absolute Magnitude) 僅計某量之大小。不論其符號之關係若何。此謂絕對量。即無性量。

例如昇上4尺。及降下4尺。當示以＋4及－4。今僅曰4尺。即謂之絕對量。

又如計年數而曰五年。此五年爲從今以前之五年乎。抑爲從今以後之五年乎。今但曰五年。即謂之絕對量。又如計銀錢而曰五圓。此五圓旣非我所有。亦非人所有。無所謂贏絀。無所謂損益。此謂之絕對量。

譬如開議會時。有提出五圓之議案。吾輩與絕對的相爲反對。而曰議員之於此五圓。爲支出抑爲收入。二者必居一於此。否則僅曰五圓。是有名而無實也。故反對此議案者。非有反對收入五圓之意。亦非有反對支出五圓之意。此即絕對二字之意義也。

加　法

22. 加法 (Addition) 將二數量或諸數量合併而爲一。其法謂之加法。其結果謂之和(Sum)。

正數量示增。負數量示減。故加正數量。增其絕對量。加負數量。減其絕對量。

今舉一俗例。譬如火之始燃。加以薪。則火勢增。加以水。則火勢減。然則加正數量。與加負數量。其意亦猶是耳。

例如以 $+4$, 加於 $+6$。則得 $+6+4$, 即 $+10$。以 -4, 加於 $+10$。則得 $+10-4$。即 $+6$。

故
$$+6+(+4)=+6+4。$$
$$+10+(-4)=+10-4。$$
又如以 $+b$ 加於 $+a$。得 $+a+b$。以 $-b$ 加於 $+a$。得 $+a-b$。即
$$+a+(+b)=+a+b。$$
$$+a+(-b)=+a-b。$$
由是得次之規則。

〔規則〕將任何項加於某代數式時。可不變其符號。以列於某代數式之次。

用 a 及 b 之數值。可以求得 $a+b$, 及 $a-b$ 之數值。而於代數學。不論其 a 及 b 之值如何。則僅作 $a+b$ 及 $a-b$。其意義即已充足。至若 $5+3$ 及 $5-3$。可更充其意。即爲 8 及 2。

23. 負數之結果　$a-b$ 其 b 若大於 a。則於算術上無從計算之。

例如 $a=3$ 及 $b=5$。則 $a-b$ 爲 $3-5$。而 3 本不能減 5。然減 5 同於減 3 之後又減 2 也。由此意以推之。則得
$$3-5=3-3-2=-2。$$
但此 -2 有二種見解。一以示 2 減於他代數式之意。一以示與 $+2$ 之性質相反對之意。若此 -2 爲最後之結果。則以後之見解爲合宜。

有時解問題時。所得負數之結果。與題理不能合者。例如計算某邑人口之數。若得負數之結果。則與人口之數不相合。解此問題時。其結果非但負數不能合理。即分數亦不能合理。

減法

24. 減法 (Subtraction) 減法之運算。與加法適相反。減數量時。正者反減之。負者反加之。故減正數量減其絕對量。減負數量加其絕對量。

例如從 $+10$ 減 $+4$。得 $+10-4$。即 6。

又從 $+6$ 減 -4。得 $+6+4$。即 10。

故　$+10-(+4)=+10-4=+6$。

$+6-(-4)=+6+4=+10$。

又依同理　$a-(+b)=a-b$。

$a-(-b)=a+b$。

由是得次之規則

〔規則〕將任何項減自某代數式時。可變其符號。以列於某代數式之次。

25. 正項及負項　以上文字。所表之量。祇限於正數。然存此限制。殊多不便。此後所用文字。其所表之量。未必定為正數。如前所述之 $a+b$。其 a, b 假定為正數量。此後所用之 a, b。其所表之量為正為負。未可定也。即任何文字。可表正或負之數量。學者當注意之。

惟文字雖可表正或負之數量。而文字前置＋者。未必果為正數量。前置－者。未必果為負數量。

例如 $+a$。此 a 所表者。若為 $+4$。則 $+(+4)=+4$。若為 -4。則 $+(-4)=-4$。

然項之正負。則從外觀上判定之。其以＋置於前者。稱為正項(Positive term)。以－置於前者。稱為負項(Negative term)。

26. 加減之公式　定 b 為正數量。證22.及24.章之結果如次。

$$\left.\begin{array}{l}a+(+b)=a+b\ldots\ldots(1)\\ a+(-b)=a-b\ldots\ldots(2)\\ a-(+b)=a-b\ldots\ldots(3)\\ a-(-b)=a+b\ldots\ldots(4)\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(A)$$

於此公式。其 b 不但為任何之正數量能合於理。即 b 為任何之負數量亦合於理。

若 b 為負數等於 $-c$。但 c 為正整數。然

$+b=+(-c)=-c$。

$-b=-(-c)=+c$。

乃從(A)之四式中。以 $-c$ 代其 $+b$。以 $+c$ 代其 $-b$。則得

$$a+(-c)=a-c,$$
$$a+(+c)=a+c,$$
$$a-(-c)=a+c,$$
$$a-(+c)=a-c,$$

此即 b 爲負數量所得之關係。其 c 爲任何之正數量。均能合理，故 b 爲負數量。亦能合理。

由是知(A)之公式。其 b 不論其爲正數量或負數量。皆能合理。

27. 定義壹 兩數量 a 及 b 之差。爲從第壹數量 a 減去第貳數量 b 所得之結果也。

例 5 與 4 之差。爲 $5-4$。又 4 與 5 之差。爲 $4-5$。

故代數差。(即於代數學上所謂之兩數差)非同算術差(即於算術上所謂之兩數差)從大數減小數也。如欲表示 a 與 b 之算術差。其 a, b 爲未定之值。無從辨別其大小。則當記爲 $a\sim b$。而此 $a\sim b$ 之 $\sim$。與 $-$ 判然不同。

此 $a\sim b$。其意以爲 a 若大於 b。則爲 $a-b$。a 若小於 b。則爲 $b-a$。非若代數差所得之 $a-b$。無論 a, b 之值若何。早決定從 a 減 b 也。

定義貳 壹數量 a 比他數量 b 爲大。則 $a-b$ 必爲正。由此定義。連次記 $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ 其各數比其前數爲大。又連次記 $-1, -2, -3, -4, \ldots\ldots$。其各數比其前數爲小。

例 -4 必比 -3 爲小。何則。因 $(-3)-(-4)=-3+4=1$。其所得爲正數故也。

由是如 $7, 5, 0, -5, -7$ 等。可依大小之順序而列之。

例題

1. (1) 5 及 -4。(2) -5 及 4。(3) $5, -3$ 及 -6。(4) $-3, 4, -6$ 及 5。求其各和。　〔答 $1, -1, -4, 0$〕

〔解〕(1) $5+(-4)=5-4=1$。

(4) $-3+4+(-6)+5=-3+4-6+5=0$。

2. (1)從-4減3。(2)於3減-4。(3)於$-b$減$-a$。 〔答$-7,7,-b+a$〕

〔解〕(1) $-4-3=-7$。 (2) $3-(-4)=3+4=7$。

3. 有風雨表,第一日降下.01吋。第二日上昇.015吋。第三日又降下.01吋。問比初日昇降若干吋。 〔答$-.005$吋〕

〔解〕$-.01+.015+(-.01)$吋$=.015-.02$吋$=-.005$吋。卽降下.005吋。

4. 攝氏寒暑表原指10度。浸入冷水中。則降下20度。問指在何度。 〔答-10度〕

〔解〕$10+(-20)=10-20=-10$ 卽零度下10度。

5. $a=1,b=-2$,及$c=3$。則$a-b+c$及$-a+b-c$之値如何。〔答$6,-6$〕

〔解〕$a-b+c=1-(-2)+3=1+2+3=6$。

6. $a=1$, $b=-2$, $c=-1$。或$a=-2$, $b=-1$, $c=-3$。則$-a+b-c$之値如何。 〔答$-2,4$〕

7. $a=-3$, $b=-2$, $c=-1$。則$a-(-b)+(-c)$之値如何。 〔答-4〕

〔解〕$a-(-b)+(-c)=a+b-c=(-3)+(-2)-(-1)=-4$。

8. $a=-2$, $b=-3$, $c=-5$。則$-a+(-b)-(-c)$之値如何。 〔答0〕

9. $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$。則$-(-a)+b-(-c)$之値如何。 〔答-6〕

〔解〕$-(-a)+b-(-c)=a+b+c=(-1)+(-2)+(-3)=-6$。

乘 法

28. 乘法 [Multiplication] 於算術中乘法最初之定義。而曰一數以他數乘之者。爲連次取其一數。其次數同於他數單位之倍數也。例如5以4乘。以其他數單位之倍數爲4。故取其一數5至四次卽得。

然上之定義。僅合於整數,而不能合於分數。故茲不得不別立定義。使任何數之乘法,皆可援此定義以說明之。

定義 第一數以第二數乘。爲以第二數代其第二數所有之單位卽得。

例如5以4乘。其4之中所有之單位,爲$4=1+1+1+1$。

以5代其單位1。則爲$5\times4=5+5+5+5$。

又$\frac{5}{7}$以$\frac{3}{4}$乘。其$\frac{3}{4}$爲以單位1四等分之爲一分。而取其三分。卽

$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$。以$\frac{5}{7}$代其單位1.則以$\frac{5}{7}$四等分之。即$\frac{5}{7\times4}$爲一分。而取其三分。得

$$\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{7\times4}+\frac{5}{7\times4}+\frac{5}{7\times4}=\frac{5\times3}{7\times4}。$$

又$(-5)\times4=(-5)+(-5)+(-5)+(-5)=-5-5-5-5=-20$。

上之定義。其以負數乘者亦可通用。

例 4以－5乘。－5即同於逐次減五回。

$$-5=-1-1-1-1-1。$$
$$4\times(-5)=-4-4-4-4-4=-20。$$

又－5以－4乘。以

$$-4=-1-1-1-1。故$$
$$\begin{aligned}(-5)\times(-4)&=-(-5)-(-5)-(-5)-(-5)\\&=+5+5+5+5 \qquad (由26章)\\&=+20。\end{aligned}$$

故此定義。對於任何數。皆能合用。

因得次之法則。

〔法則〕求兩數量之積。先以兩數之絕對值相乘。次定其符號。若兩數量俱爲正或俱爲負。則其積爲正。置符號＋於積之前以表之。若兩數量一爲正一爲負。則其積爲負。置符號－於積之前以表之。

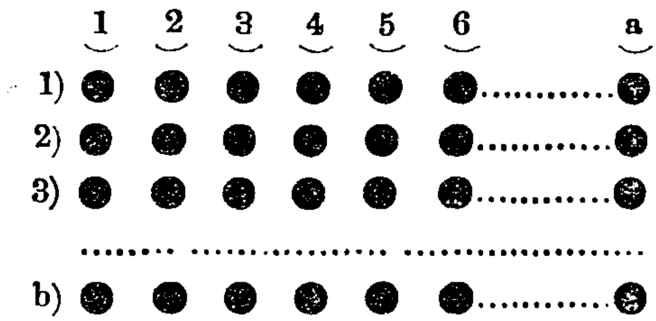
例

$$\left.\begin{aligned}(+a)\times(+b)&=+ab\ldots\ldots(1)\\(-a)\times(-b)&=+ab\ldots\ldots(2)\\(+a)\times(-b)&=-ab\ldots\ldots(3)\\(-a)\times(+b)&=-ab\ldots\ldots(4)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots B$$

此法則。所以決定積之符號者。謂之符號之法則(Law of Signs)。此法則簡言之。則曰同號得＋。異號得－(Like signs give +, and unlike signs give －)。

29. 積之因子 不拘於次序如何。無論爲整數或分數。第壹數以第貳數乘。同於第貳數以第壹數乘。此於算術已證明之。其證法如次。

先取兩整數 a 及 b。用黑點●作圖以示之。



此圖中所示。橫曰列。縱曰行。每列有 a 個黑點。共有 b 列。每行有 b 個黑點。共有 a 行。

故此黑點之全數。從橫列計算之。爲有 a 個黑點之 b 倍。即 $a\times b$ 從縱行計算之。爲有 b 個黑點之 a 倍。即 $b\times a$。$\therefore\ a\times b=b\times a$。

若 a 及 b 爲分數。則由 28 章。

$$\frac{5}{7}\text{以}\frac{3}{4}\text{乘。爲}\frac{5\times3}{7\times4}\text{。又}\frac{3}{4}\text{以}\frac{5}{7}\text{乘。爲}\frac{3\times5}{4\times7}\text{。}$$

惟依上之整數證法。$5\times3=3\times5$。又 $7\times4=4\times7$。故 $\dfrac{5\times3}{7\times4}=\dfrac{3\times5}{4\times7}$。即

$$\frac{5}{7}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}.$$

由是 $ab=ba$。已證得 a 及 b 凡爲正數者。無不合理。

然此法則。不獨對於正數。即負數亦能合理。何則。依前章所述，而知兩數之積之絕對值。與符號不相關。即 $+a\times-b$ 及 $-b\times a$。其絕對值 ab 及 ba 相等。故 $+a\times-b=-b\times a$。

如是 a 及 b 爲任何值。如次之公式皆能合理。

$$ab=ba\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

今試以 c 代前圖之黑點●

$$
\begin{array}{lllll}
 & \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} & \underbrace{4} \qquad\quad \underbrace{a} \\
1) & c & c & c & c\ldots\ldots\ldots\ldots c \\
2) & c & c & c & c\ldots\ldots\ldots\ldots c \\
 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
b) & c & c & c & c\ldots\ldots\ldots\ldots c
\end{array}
$$

即 c 之全數。爲有 ab 個。故 $c\times(ab)$。

又以每列爲 c 之 a 倍，即 $c\times a$。共有 b 列，故 $c\times a\times b$。

由是 $c\times a\times b=c\times(ab)$。

此對於 a, b, c 之任何值。皆能合理。與 $ab=ba$ 之法則同。故得次之公式。

$$a\times b\times c=a\times(b\times c)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

前云積之因子不拘於次序如何。茲可引用 (1) (2) 兩公式以證明之如次。

$$
\begin{aligned}
abc&=a(bc) && \text{由 (2)}\\
&=a(cb) && \text{由 (1) } bc=cb\\
&=acb && \text{由 (2)}
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
abc=a(bc)&=(bc)a && \text{由 (1)}\\
&=bca。
\end{aligned}
$$

如是得次之公式。

$$abc=acb=bca=bac=cab=cba\ldots\ldots\ldots\ldots(C)$$

30. 壹項式之積 旣知積之因子不拘於次序如何。由是可求得壹項式之積如次。

$$3a\times4a=3\times4\times a\times a=12a^2。$$

$$
\begin{aligned}
(-3a)\times(-4b)&=+3a\times4b \qquad (\text{由 28 章})\\
&=3\times4\times a\times b=12ab,
\end{aligned}
$$

$$(ab)^2=ab\times ab=a\times a\times b\times b=a^2b^2,$$

$$(\sqrt{2a})^2=\sqrt{2a}\times\sqrt{2a}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times a\times a=2a^2。$$

積之因子。雖不拘於次序。而通例恆以數字係數置於前，文字則依其次序順列於後。

例如 $3ab=3ba=ba3=a3b$。而通例用 $3ab$。

31. 指數之法則 (Index Law) 說明如次。

$a^2=aa$, $a^3=aaa$, $\therefore$ $a^2\times a^3=aa\times aaa=a^5=a^{2+3}$。

又 $a^3\times a^4=aaa\times aaaa=a^7=a^{3+4}$。

及 $a^4\times a=aaaa\times a=a^5=a^{4+1}$

〔法則〕由上例得兩個同文字方乘之積。其指數等於兩因子指數之和。

凡方乘之指數。爲正整數者。此法則皆能合理。設兩個 a 之方乘。爲 a^m 及 a^n。則

$a^m=aaa\ldots\ldots$至 m 因子, $a^n=aaa\ldots\ldots$至 n 因子,

$\therefore$ $a^m\times a^n=(aaa\ldots$至 m 因子$)\times(aaa\ldots\ldots$至 n 因子$)$

$=aaaaa\ldots\ldots$至 $(m+n)$ 因子 $=a^{m+n}$(由定義)

由是 m 及 n 爲任何正整數。即得次之指數之法則,

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(D)$$

32. 平方根之符號 由28章 $(-a)\times(-a)=+a^2=(+a)\times(+a)$,反言之。$a^2$ 爲 $-a$ 與 $-a$ 之積。或爲 $+a$ 與 $+a$ 之積。故 a^2 之平方根爲 $+a$ 或爲 $-a$。即 $\sqrt{a^2}=\pm a$,

此複號 (Double sign) $\pm$ 所以示 $+$ 或 $-$ 之兩意。

如是則任何兩代數式之平方根。必有貳值。其值之絕對值相等,而符號相反。

例題

1. 試以 $-4b$ 乘 $2a$。以 $-a^3$ 乘 a^2。以 $-3ab^3$ 乘 $-2a^3b$。

〔答 $-8ab, -a^5, 6a^4b^4$〕

〔解〕 $2a\times-4b=-2a\times4b=-2\times4\times a\times b=-8ab$,

$a^2\times-a^3=-a^{2+3}$ 〔從 (D)〕 $=-a^5$。

$-2a^3b\times-3ab^3=+2a^3b\times3ab^3=6a^{3+1}b^{1+3}=6a^4b^4$。

2. $-2xy^2$ 乘 $-3y^2z$, $3ax^2y$ 乘 $5a^2xy^2$。及 $3a^2bc^2x$ 乘 $12ab^2cx^3$。

〔答 $6xy^4z, -15a^3x^3y^3, 36a^3b^3c^3x^4$〕

3. $7a^4b^3c^2$ 乘 $-3a^3b^5c^7$，及 $-2ab^3x^5y^2$ 乘 $-4a^3b^2x^4y^6$。

〔答 $-21a^7b^8c^9$, $8a^4b^5x^9y^8$〕

4. 求 $(-a)^2$, $(-a)^3$, $(-a)^4$ 及 $(-a)^5$ 之值。　〔答 a^2, $-a^3$, a^4, $-a^5$〕

〔解〕$(-a)^2=-a\times-a=+a^2$。　$(-a)^3=(-a)^2(-a)=a^2\times-a=-a^3$。

$(-a)^4=(-a)^3(-a)=-a^3\times-a=+a^4$。

$(-a)^5=(-a)^4(-a)=a^4\times-a=-a^5$。

5. 求 $(-ab)^2$, $(a^2b)^4$ 及 $(-3ab^2c^3)^3$ 之值。　〔答 a^2b^2, a^8b^4. $-27a^3b^6c^9$〕

〔解〕本例之第三式之乘法如次。

$(-3ab^2c^3)^3=-3ab^2c^3\times-3ab^2c^3\times-3ab^2c^3=-27a^3b^6c^9$。

6. 證負數量之連次方乘。其號恆交互爲正負。

〔證〕$-a$ 之平方爲正。$-a$ 之立方。即以 $-a$ 乘平方之正值。故爲負。$-a$ 之四方乘。即以 $-a$ 乘 $-a$ 之立方。故爲正。以下同理。

7. $2a^2b$, $-3ab^2c^3$, 及 $-2a^2bx^3y^2$ 試各求其立方。

〔答 $8a^6b^3$, $-27a^3b^6c^9$, 及 $-8a^6b^3x^9y^6$〕

8. $(-a)^2\times(-b)^3$, $(-2ab^2)^3\times(-3a^2b)^3$, $(-3abc)^2\times(2a^2b)^3$ 求其各値。

〔答 $-a^2b^3$, $216a^9b^9$, $72a^8b^5c^2$〕

〔解〕$(-a)^2\times(-b)^3=+a^2\times-b^3=-a^2b^3$。

$(-2ab^2)^3\times(-3a^2b)^3=-8a^3b^6\times-27a^6b^3=216a^9b^9$。

$-(3abc)^2\times(2a^2b)^3=9a^2b^2c^2\times8a^6b^3=72a^8b^5c^2$。

9. $a=2$, $b=-1$, $c=-2$，求 $3abc-2a^2bc^3+4c^4$ 之值。〔答12〕

〔解〕原式 $=3\times2\times(-1)\times(-2)-2\times2^2\times(-1)\times(-2)^3+4\times(-2)^4$

$=3\times2\times1\times2-2\times4\times1\times8+4\times16=12-64+64=12$。

10. $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$, $d=-4$, 則 $2a^2bc-3b^2cd+4c^2da-5d^2ab$ 之值爲何。　〔答 -148〕

除　法

(33.) 除法 (Division) 其運算與乘法相反。設 $c\times b=a$。其 c。即爲 b 除 a 時所得之結果。

故 b 除 a。即求其何數以 b 乘之而能等於 a 也。

除法之運算與乘法相反。且乘法不拘於因子之次序。故連次以各數除。亦不拘於除數次序。

例 $a\div b\div c=a\div c\div b$

於29章中所證明者。知連次以兩數量乘之。同於以其積一次乘之。即 $a\times b\times c=a\times(bc)$。反之。 $a\div b\div c=a\div(b\times c)$。

但通例 $a\div(b\times c)$ 記爲 $a\div bc$。

即連次以兩數量除。同於以其積一次除之也。

乘除互用時。其乘數與除數亦不拘於次序。

即 $a\times b\div c=a\div c\times b$。

何則以 $a=a\div c\times c$,

$$\therefore\ a\times b=a\div c\times c\times b=a\div c\times b\times c \qquad (29章)$$

兩邊以c除之。 $a\times b\div c=a\div c\times b$。

由是a, b之積。以c除。與c除a後以b乘。其結果相同。

34. 餘論 除法之運算。往往書除數於被除數之下。而中間記以橫線。

例 $\frac{a}{b}=a\div b$。 有時 $\frac{a}{b}$ 或記爲a/b。從 $a\div b$ 得分數 $\frac{a}{b}$。其a爲分子。b爲分母。

又 $\frac{1}{c}=1\div c$。則 $\frac{1}{c}\times c=1\div c\times c=1$。

$a\times\frac{1}{c}\times c=a\times(\frac{1}{c}\times c)=a\times 1=a$, 此兩邊以c除之。爲 $a\times\frac{1}{c}=a\div c$。

故以任何數c除同於以 $\frac{1}{c}$ 乘。

由是 $a\times b\div c=a\div c\times b$ 可記之如次。

$$a\times b\times\frac{1}{c}=a\times\frac{1}{c}\times b$$ 即與29章(C)同。

35. 指數之除法 $a^3\times a^2=a^5$, 及 $a^7\times a^3=a^{10}$。此法則已述明於前。反之則爲 $a^5\div a^3=a^2$, $a^{10}\div a^7=a^3$ 由此推之。若m及n爲正整數。而 $m>n$。則 $a^m\div a^n=a^{m-n}$。

何則。由31章 $a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}=a^m$。兩邊以 a^n 除之 $a^{m-n}=a^m\div a^n$

〔法則〕任何數量之高次方乘，以同數量低次方乘除之。其除得之指數，等於兩數量指數之差。

因是　$a^5b^2\div a^2b=a^{5-2}b^{2-1}=a^3b$，

及　$a^7b^6c^4\div a^2b^3c^4=a^{7-2}b^{6-3}c^{4-4}=a^5b^3c^0=a^5b^3$。

於上之第二例 $c^0=1$。何則。因 $c^4\div c^4=1$。又因 $c^4\div c^4=c^{4-4}=c^0$。故 $c^0=1$ 也。

36. 符號之除法 於28章已證得 $a\times(-b)=-ab$。

$\therefore$　$(-ab)\div(-b)=a$，　及　$(-ab)\div a=-b$。

又　$(-a)(-b)=+ab=(+a)(+b)$，

$\therefore$　$+ab\div(-a)=-b$，　及　$+ab\div(+a)=+b$。

故被除數與除數，其符號相同者，商之符號爲+。其符號相異者。商之符號爲−。其法則全與乘法符號之法則同。

例　$-a^3b^6\div ab^2=-a^2b^4$。　及　$-2a^5bc^7\div(-3a^4bc^2)=\frac{2}{3}ac^5$。

例　題

1. 10a 以 −2a 除，$3a^2b^3$ 以 $-2ab^3$ 除，$-7a^5b^3c^4$ 以 $-3a^2b^2c^2$ 除。求其各商。

〔答 $-5,-\frac{3}{2}a,\frac{7}{3}a^3bc^2$〕

〔解〕$-7a^5b^3c^4\div(-3a^2b^2c^2)=\frac{7}{3}a^{5-2}b^{3-2}c^{4-2}=\frac{7}{3}a^3bc^2$。

2. $-2a^5b^7c^8$ 以 $4a^3bc^7$ 除，$-6x^5y^4$ 以 $3x^3y$ 除。$-5a^2b^4x^7y^8$ 以 $-2ab^4x^2y^5$ 除。求其各商。

〔答 $-\frac{1}{2}a^2b^6c,\ -2x^2y^3,\frac{5}{2}ax^5y^3$〕

〔解〕$-2a^5b^7c^8\div4a^3bc^7=-\frac{2}{4}a^{5-3}b^{7-1}c^{8-7}=-\frac{1}{2}a^2b^6c$。

$-5a^2b^4x^7y^8\div(-2ab^4x^2y^5)=\frac{5}{2}a^{2-1}b^{4-4}x^{7-2}y^{8-5}=\frac{5}{2}ax^5y^3$。

3. 於 $-2a^3bc^5$ 以 $-3ab^7c^2$ 乘而以 $8a^3b^6c^6$ 除之。　〔答 $\frac{3}{4}ab^2c$〕

〔解〕$-2a^3bc^5(-3ab^7c^2)\div8a^3b^6c^6=6a^4b^8c^7\div8a^3b^6c^6=\frac{3}{4}ab^2c$。

37. 根原之公式 凡屬於壹項式所有代數學根原之法則，如前諸章所示之(A), (B), (C), (D) 諸公式是也。茲復彙集之如次。

$$\left.\begin{array}{l} +(+a)=+a \\ +(-a)=-a \\ -(+a)=-a \\ -(-a)=+a \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(A) \qquad \left.\begin{array}{l} (+a)(+b)=+ab \\ (+a)(-b)=-ab \\ (-a)(+b)=-ab \\ (-a)(-b)=+ab \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(B)$$

$$abc=cba=cab=\cdots\cdots\cdots(C) \qquad a^m\div a^n=a^{m-n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(D)$$

如上所示之公式。於(A), (B), (C) 已證得 a, b, c 爲任何數，均能合理；於(D) 證得 m 及 n 爲正整數爲合理。

多　項　式

38. 多項式 (Multinomial Expression) 以上所述皆一項式，至是進論多項式。

先記 $a+b+c+\cdots\cdots\cdots$ 爲任何之多項式。但 $a, b, c\cdots\cdots\cdots$ 爲正或負之任何數。

例多項式 $3x^2y-\frac{5}{2}xy^2-7xyz$。由(A)可記爲

$$(3x^2y)+(-\frac{5}{2}xy^2)+(-7xyz),$$

以 a 代 $3x^2y$，以 b 代 $-\frac{5}{2}xy^2$，以 c 代 $-7xyz$，則上之多項式即爲 $a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots$。

故以某代數式證明某定理時，皆可記其式爲 $a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 以證之；但 $a, b, c,\cdots\cdots$ 爲正或負之任何數。

39. 互換法則 (Commutative Law) 貳或貳以上諸代數量(即正量或負量)之和，不論其相加之次序如何，其結果恆同。此可由加法之意義說明之。

例如某人有若干項之存款及借款，欲計其總數，則於若干項內，不論以何項爲先，何項爲後，其求得之總數，恆相等。

故　　$a+b+c=c+a+b=b+c+a=\cdots\cdots\cdots(E)$

所示之(C)及(E)，其法則，謂之互換法則，即加法及乘法之運算，不拘於其次序如何也。

40. 餘論 旣知加法之運算。不拘於次序。

故　$a+(b+c+d+\ldots\ldots)=(b+c+d+\ldots\ldots)+a$ 〔由 (E)〕

$=b+c+d+\ldots\ldots+a$

$=a+b+c+d+\ldots\ldots$ 〔由 (E)〕

由是知將代數式之全項一併加之。與將其各項分別加之。其結果相同。

代數式 $+a-b+c-d$ 可記爲 $+a+(-b)+c+(-b)$ 之形。

故　$+(+a-b+c-d)=+(+a+(-b)+c+(-d))$。

因是將代數式之各項分別相加時。其置於項之前所含之符號須記憶之。

凡所謂項者。其於項之前。必含有符號者也。

41. 多項式之減法 減法之運算與加法相反。於加法將代數式之全項一併加之。與將其各項分別加之。其結果同。由同理而知將代數式之全項一併減之。與將其各項分別減之。其結果亦同。即 $a-(b+c+d+\ldots\ldots)=a-b-c-d-\ldots\ldots\ldots$。

(42.) 配分法則 (Distributive Law) c 爲正整數。而 a 及 b 爲任何數。可證得 $(a+b)c=ac+bc$。

$(a+b)c=(a+b)+(a+b)+(a+b)+\ldots\ldots\ldots\ldots$ 至 c 項(乘法之定義)

$=a+b+a+b+a+b+\ldots\ldots\ldots$(40 章)

$=a+a+a+\ldots\ldots$ 至 c 項 $+b+b+b+\ldots\ldots$ 至 c 項

$=ac+bc$。

由是 c 爲正整數。證得 $(a+b)c=ac+bc\ldots\ldots\ldots$(F)

除法與乘法相反。故 d 爲正整數。

$$(a+b)\div d=a\div d+b\div d。$$

別證之。由 (F) $(ac+bc)\div c=a+b=ac\div c+bc\div c$。

由是 $(a+b)\times c\div d=\{(a+b)\times c\}\div d$

$=\{ac+bc\}\div d=ac\div d+bc\div d$。

即　$(a+b)\times\frac{c}{d}=a\times\frac{c}{d}+b\times\frac{c}{d}$。

由此式而知公式(F)其c爲分數,亦能合理,然c爲任何值,皆能合理,設c爲負數,證明如次,

$$(a+b)(-c)=-(a+b)c=-ac-bc=a(-c)+b(-c),$$

乃證得公式(F)其a, b, c爲任何值,皆能合理,

故兩代數量之和以第三數乘,等於各代數量以第三數乘所得積之和,是謂配分法則,

43. 除法之配分法則 此於前章已爲證明,玆別爲證之如次,

$$(a+b)\div c=(a+b)\times\frac{1}{c}=a\times\frac{1}{c}+b\times\frac{1}{c}$$
$$=a\div c+b\div c,$$

故兩代數量之和以第三數除,等於各代數量以第三數除所得商之和,

44. 結合法則(Associative Law)由40章之理,而知

$$a+b+c+d+e+\ldots\ldots=(a+b)+c+(d+e)+\ldots\ldots$$
$$=a+(b+c+d)+e+\ldots$$
$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

即凡代數式,可任取若干項集合之,

又由20章之理,而知

$$abcde\ldots\ldots=a(bc)(de)\ldots\ldots=a(bcd)e=\ldots\ldots,$$

即凡積可任取若干因子集合之,

45. 注意 此編所示者,爲代數學根原之法則,而於次編,乃推廣之,以示此法之應用,

第叁編

加法，減法，括弧用法

加 法

46. 加法（Addition）凡加任意之項於代數式。其項之符號不變。又取代數式之全體相加與次第分加其結果相同。此在前編已詳述之。由是得加法之法則如下。

〔法則〕凡加二個或二個以上之代數式。其各項之號不變。而可任意連記之。

例如求 $a-2b+3c$ 及 $-4d-5c+6f$ 之和。其各符號不變。惟記爲 $a-2b+3c-4d-5c+6f$。

47. 運算 如前法諸式相加之後。遇有同類項。須用加或減。化爲簡式。

二同類項之號同者。先求其兩係數之和。乃記以公用之號。以公有之文字。附於係數後。

例如 $2a$ 及 $5a$ 連次相加。與一次加入 $7a$ 同。即 $+2a+5a=+7a$。

又以 $2a$ 及 $5a$ 連次相減。與一次減去 $7a$ 同。即 $-2a-5a=-7a$。

若二同類項之號異者。先求其兩係數之差。乃以大數之號爲號。以公有之文字。附於係數後。

例如 $+5a-3a=+2a+3a-3a=+2a$

又 $+3a-5a=+3a-3a-2a=-2a$。

故有種種之同類項者。可依前法而倂爲一項。

〔第一例〕$2a+5b$ 加 $a-6b$。則

其和 $=2a+5b+a-6b=2a+a+5b-6b=3a-b$。

〔第二例〕$3a^2-5ab+7b^2$ 加 $-4a^2-2ab+3b^2$ 加 $2a^2+5ab-8b^2$。則

其和 $=3a^2-5ab+7b^2-4a^2-2ab+3b^2+2a^2+5ab-8b^2$。其 $3a^2$，$-4a^2$，

$+2a^2$。可用心算併爲 $+a^2$。由同理得 $-2ab$ 及 $+2b^2$。

故所求之和 $=a^2-2ab+2b^2$。

初學者可將同類項。列於一行加之。

例如

$$\begin{array}{r} 3a^2-5ab+7b^2 \\ -4a^2-2ab+3b^2 \\ 2a^2+5ab-8b^2 \\ \hline a^2-2ab+2b^2 \end{array}$$

減法

48. 減法 (Subtraction) 凡減任意之項於代數式。須變其項之符號。又取代數式之全體相減。與次第分減其結果相同。在前編亦既詳言之。因得下之法則。

〔法則〕凡減去任何代數式。須變其各項之號。而列於原式之次。

例如從 $2a-3b-4c$。減去 $a-2b+3c$。則變其 $a-2b+3c$ 式各項之符號。而列於 $2a-3b-4c$ 之次。

即 $2a-3b-4c-a+2b-3c=a-b-7c$ 即差。

49. 運算 置減式於被減式之下。將同類項列於一行而求其差。惟置時減式之符號。仍其舊。至運算時。可反視其各號。而如加法施之。依前章例列爲

$$\begin{array}{r} 2a-3b-4c \\ a-2b+3c \\ \hline a-b-7c \end{array}$$

減式之 a。心中可記爲 $-a$。$-2b$ 可記爲 $+2b$。$+3c$ 可記爲 $-3c$。

又從 $a^2-5ab+2ac-2b^2$ 減去 $3ab-5ac+c^2$。

$$\begin{array}{rrrrr} a^2 & -5ab & +2ac & -2b^2 & \\ & 3ab & -5ac & & +c^2 \\ \hline a^2 & -8ab & +7ac & -2b^2 & -c^2 \end{array}$$

即所求之差。

括弧用法

50. 括弧 (Brackets) 一全代數式相加。用括弧括之。而於其

前置＋號。然如46章所云。凡加任何代數式。其各項之號不變。而可連記之。由是知括弧之前置＋者。可以逕去其括弧。

例如 $+(2a-5b+7c)=+2a-5b+7c$。故代數式中之若干項。可任意用括弧括之。而於其前置＋。如

$3a-2b+4c-d+e-f=3a-2b+(4c-d+e-f)=3a+(-2b+4c)-d+(e-f)$

括弧內首項之號爲＋者。畧而不記可也。

51. 括弧之減法 減一全代數式者。其代數式可以括弧括之。於其前置－。依48章所云。凡減任何代數式。則變其各項之號。而列於原式之次。由是知括弧之前置－者。欲去其括弧。必盡變其括弧內各項之號。

例如 $a-(2b-c+d)=a-2b+c-d$。

故有任意之代數式若干項。欲以括弧括之。而於其前置－者。必變其所括各項之號。

例如 $a-2b+3c-d=a-(2b-3c+d)=a-2b-(-3c+d)$。

52. 括弧解法 有時括弧內又有括弧。則須避諸括弧之混雜。而用種種相異之形。

例如 $a-[2b-\{3c-(2d-e)\}]$。

此式爲從 $2b$ 減去{}內之式。其結果再從 a 減去之。而在{}內之式。又爲從 $2d$ 減去 e。其結果再從 $3c$ 減去者也。

若遇此數種之括弧。欲解去之。可依50及51兩章之法則。例如下。

$$\begin{aligned}&a-[b+\{c-(d-e)\}]=a-[b+\{c-d+e\}]\\&=a-[b+c-d+e]=a-b-c+d-e。\end{aligned}$$

例題一

試加下列之各式.

1. $3x-5y,\ 5x-2y,$ 及 $7y-4x$。　　〔答 $4x$〕

〔解〕$3x-5y+5x-2y+7y-4x=3x+5x-4x-5y-2y+7y=4x$,

或
$$\begin{array}{r}3x-5y\\5x-2y\\-4x+7y\\\hline 4x\end{array}$$

2. $3x-5y+2z,\ 5x-7y-5z$, 及 $6y-z-10x$。

〔答 $-2x-6y-4z$〕

3. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c,\ \frac{1}{2}b-\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}a$, 及 $\frac{1}{2}c-\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b$。

〔答 $\frac{5}{12}a+\frac{5}{12}b+\frac{5}{12}c$〕

4. $a^3-a^2+a,\ a^2-a+1$, 及 a^4-a^3-1。 〔答 a^4〕

5. $x^2-5xy-7y^2$ 及 $3y^2+4xy-x^2$。 〔答 $-xy-4y^2$〕

6. $m^2-3mn+2n^2,\ 3n^2-m^2$, 及 $5mn-3n^2+2m^2$。

〔答 $2m^2+2mn+2n^2$〕

7. $3a^2-2ac-2ab,\ 2b^2+3bc+3ab$, 及 $c^2-2ac-2bc$。

〔答 $3a^2+2b^2+c^2+ab-4ac+bc$〕

8. $\frac{3}{2}a^2b-5ab^2+7b^3,\ 2a^3-\frac{1}{2}a^2b+5ab^2$, 及 $3b^3-2a^3$。

〔答 a^2b+10b^3〕

9. 試從 $a+b-2c$ 減 $3a-4b+2c$。

〔解〕$a+b-2c-3a+4b-2c$

$=a-3a+b+4b-2c-2c$

$=-2a+5b-4c$。〔答〕

或

$$\begin{array}{r} a+b-2c \\ 3a-4b+2c \\ \hline -2a+5b-4c \end{array}$$

10. 試從 $c-\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b$ 減 $\frac{a}{2}+\frac{3}{2}b-\frac{5}{3}c$。 〔答 $-a+\frac{13}{6}b+\frac{8}{3}c$〕

11. 試從 $4x^2-5x-7$ 減 $3x^2-4x+2$。 〔答 x^2-x-9〕

12. 試從 $5b^4-3ab^3+4a^2b^2$ 減 $5a^4-3a^3b+4a^2b^2$。

〔答 $-5a^4+3a^3b-3ab^3+5b^4$〕

13. 求 $-3x^2-5xy+4y^2$ 及 $-5x^2+2xy-3y^2$ 之差。

〔解〕$-3x^2-5xy+4y^2-(-5x^2+2xy-3y^2)$

$=-3x^2-5xy+4y^2+5x^2-2xy+3y^2=2x^2-7xy+7y^2$。〔答〕

14. 加何數於 $2bc-3ca-4ab$ 其和爲 $bc+ca$。

〔解〕$bc+ca-(2bc-3ca-4ab)=bc+ca-2bc+3ca+4ab$

$=4ab-bc+4ca$。〔答〕

15. 加何數於 $3a^2-2b^2+3c^2$ 其和爲 $bc+ca+ab$。

〔答 $-3a^2+2b^2-3c^2+bc+ca+ab$〕

16. $3x-\{2y+(5x-\overline{3x+y})\}$ 化爲簡式。

(解) 原式 $=3x-\{2y+(5x-3x-y)\}=3x-\{2y+5x-3x-y\}$

$=3x-2y-5x+3x+y=x-y$，〔答〕

又此解式之簡法如下。

原式 $=3x-\{2y+(5x-3x-y)\}=3x-\{2y+(2x-y)\}$

$=3x-\{2y+2x-y\}=3x-\{2x+y\}=3x-2x-y$

$=x-y$。

17. $x-[3y+\{3z-(x-2y)\}+2x]$ 化爲簡式，

(解) 原式 $=x-[3y+\{3z-x+2y\}+2x]=x-[3y+3z-x+2y+2x]$

$=x-(x+5y+3z)=x-x-5y-3z=-5y-3z$，〔答〕。

18. $y-2x-\{z-x-(y-x+z)\}$ 化爲簡式，

(解) 原式 $=y-2x-\{z-x-y+x-z\}=y-2x-\{-y\}$

$=y-2x+y=-2x+2y$。〔答〕

19. $a-[a-b-\{a-b+c-(a-b+c-d)\}]$ 化爲簡式，

(解) 原式 $=a-[a-b-\{a-b+c-a+b-c+d\}]$

$=a-[a-b-(+d)]=a-[a-b-d]$

$=a-a+b+d=b+d$。〔答〕

20. $2x-[3x-9y-\{2x-3y-(x+5y)\}]$ 化爲簡式。　〔答y〕

21. $a-[3a+c-\{4a-(3b-c)+3b\}-2a]$ 化爲簡式，

(解) 原式 $=a-[3a+c-\{4a-3b+c+3b\}-2a]$

$=a-[3a+c-\{4a+c\}-2a]=a-[3a+c-4a-c-2a]$

$=a-[-3a]=a+3a=4a$，〔答〕

22. 從 $y-\{2x-(z-y)\}$。減 $x-(3y-z)$，

(解) 所求之差 $=y-\{2x-(z-y)\}-\{x-(3y-z)\}$

$=y-\{2x-z+y\}-\{x-3y+z\}$

$=y-2x+z-y-x+3y-z=-3x+3y$。〔答〕

23. 從 $2n-(3n-\overline{2m-n})$。減 $2m-(3m-\overline{2n-m})$，

(解) 所求之差爲 $2n-(3n-\overline{2m-n})-\{2m-(3m-\overline{2n-m})\}$

$=2n-(3n-2m+n)-\{2m-(3m-2n+m)\}=4m-4n$，〔答〕

24. 設 $a=-1, b=-2, c=-3$。試求

$\{a-(b-c)\}^2+\{b-(c-a)\}^2+\{c-(a-b)\}^2$ 之值。

(解) 原式 $=\{a-b+c\}^2+\{b-c+a\}^2+\{c-a+b\}^2$

$=\{-1-(-2)+(-3)\}^2+\{-2-(-3)+(-1)\}^2+\{-3-(-1)+(-2)\}^2$

$=\{-1+2-3\}^2+\{-2+3-1\}^2+\{-3+1-2\}^2$

$=\{-2\}^2+\{0\}^2+\{-4\}^2=4+0+16=20$。(答)

25. 設 $a=1, b=2, c=-3$。試求

$\{a^2-(b-c)^2\}-\{b^2-(c-a)^2\}-\{c^2-(a-b)^2\}$ 之值。

(解) 原式 $=a^2-(b-c)^2-b^2+(c-a)^2-c^2+(a-b)^2$

$=1^2-(2+3)^2-2^2+(-3-1)^2-(-3)^2+(1-2)^2$

$=1-5^2-4+(-4)^2-9+(-1)^2$

$=1-25-4+16-9+1=-20$。(答)

第肆編

乘　法

53. 一項式之積於第二編所示之結果。順序之如下，

(1) 積之因子。其次序可以任意更換。

(2) 兩數量積之符號。如兩數量之號。同者爲正，異者爲負，

(3) 同數量兩方乘積之指數，等於其因子指數之和。

由是可依 (1), (2), (3) 三例求一項式之積如下。

$(-2a^2bc^3)\times(-3a^3b^2c)=+2a^2bc^3\times3a^3b^2c$ 依 (2) 例

$=2\times3\times a^2a^3bb^2c^3c$ 依 (1) 例

$=6a^5b^3c^4$ 依 (3) 例

又 $(-3a^2b)\ (-5ab^3)\ (-7a^4b^2)=\{+3a^2b.\ 5ab^3\}\ (-7a^4b^2)$

$=-3.5.7.a.^2a.a^4bb^3b^2=-105a^7b^6$。

54. 多項式及一項式之積依42章所云任意兩代數量之和。乘第三數量之積。等於兩代數量各乘第三數量之積之和。

例如 $(x+y)z=xz+yz$……………………(1)

(1) 式中之 $x.y$ 及 z 任爲何數，皆合於理。故以 $a+b$ 代 x 用於式即得

$\{(a+b)+y\}z=(a+b)z+yz=az+bz+yz$

$\therefore (a+b+y)z=az+bz+yz$

同法得 $(a+b+c+d+\ldots\ldots)z=az+bz+cz+dz+\ldots\ldots$

但 $a+b+c+d+\ldots\ldots$ 爲任何多項式(見38章)

〔法則〕多項式及一項式之積。等於多項式之各項。分乘其一項之積之和。

55. 兩多項式之積先示乘法之通例。即兩多項式之乘法如下。

求 $(a+b+c+\ldots\ldots)(x+y+z+\ldots\ldots)$ 之積。依38章，

$x+y+z+\ldots\ldots$ 以 m 代之。由前章得

$(a+b+c+\cdots\cdots)(x+y+z+\cdots\cdots)=(a+b+c+\cdots\cdots)m$

$=am+bm+cm+\cdots=ma+mb+mc+\cdots\cdots$

$=(x+y+z+\cdots)a+(x+y+z+\cdots)b+(x+y+z+\cdots)c+\cdots\cdots$

$=ax+ay+az+\cdots+bx+by+bz+\cdots+cx+cy+cz+\cdots\cdots$

〔法 則〕由是兩多項式之積。等於兩式中所有各項相乘積之和。

例如 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$。

又 $(3a+5b)(2a+3b)$

$=(3a)(2a)+(3a)(3b)+(5b)(2a)+(5b)(3b)$

$=6a^2+9ab+10ab+15b^2=6a^2+19ab+15b^2$。

又 $(a-b)(c-d)=\{a+(-b)\}\{c+(-d)\}$

$=ac+a(-d)+(-b)c+(-b)(-d)=ac-ad-bc+bd$。

兩多項式之乘法。須留意各式中各項之符號(視40章)。

(56.) 乘法之三公式 以下示以最要之例。名爲三公式。

(1) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=aa+ab+ba+bb$

$\therefore\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

〔法 則〕由是任意兩數量和之平方。等於其各平方之和。加兩數量相乘積之二倍。

(2) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=aa+a(-b)+(-b)a+(-b)(-b)$

$\therefore\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。

〔法 則〕由是任意兩數量差之平方。等於其各平方之和。減兩數量相乘積之二倍。

(3) $(a+b)(a-b)=aa+a(-b)+ba+b(-b)$

$\therefore\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

〔法 則〕由是任意兩數量和與差之積。等於兩數量平方之差。

由此三公式。又得最要之公式如下。

$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$

此兩公式其知之與否。足以驗其學力之淺深。

57. 多項式乘法之例 示簡便之法如下。

$$\begin{array}{l}
a^2+2ab-b^2 \text{.................被乘式} \\
\underline{a^2-2ab+b^2} \text{.................乘式} \\
a^4+2a^3b-a^2b^2 \\
\qquad -2a^3b-4a^2b^2+2ab^3 \\
\underline{\qquad\qquad\qquad + a^2b^2+2ab^3-b^4} \\
a^4 \qquad\qquad -4a^2b^2+4ab^3-b^4 \text{.........積}
\end{array}$$

如上法置乘式於被乘式之下。於其下作一横綫。先以乘式之第一項 a^2。乘被乘式之各項 a^2, $+2ab$, $-b^2$。得 a^4, $+2a^3b$, $-a^2b^2$ 横列於横綫下。次以乘式之第二項 $-2ab$。乘被乘式之各項,得積横列之。以與前列之同類項相配。次以乘式之第三項 $+b^2$。乘被乘式之各項。亦如前法列之。乃取此三列相加。即得全體之積。

依此方法可施乘法如下。

$$\begin{array}{lll}
a+b & a+b & a^2+ab+b^2 \\
\underline{a+b} & \underline{a-b} & \underline{a-b} \\
a^2+ab & a^2+ab & a^3+a^2b+ab^2 \\
\underline{\quad +ab+b^2} & \underline{\quad -ab-b^2} & \underline{\quad -a^2b-ab^2-b^3} \\
a^2+2ab+b^2, & a^2 \qquad -b^2, & a^3 \qquad\qquad b^3
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
a+b+c & 3x^2-xy+2y^2 \\
\underline{a+b+c} & \underline{3x^2+xy-2y^2} \\
a^2+ab+ac & 9x^4-3x^3y+6x^2y^2 \\
\quad +ab \qquad +b^2+bc & \quad +3x^3y- \ x^2y^2+2xy^3 \\
\underline{\qquad\quad +ac \qquad +bc+c^2} & \underline{\qquad\qquad -6x^2y^2+2xy^3-4y^4} \\
a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2, & 9x^4 \qquad - \ x^2y^2+4xy^3-4y^4
\end{array}$$

58. 多項式之整列 代數式各項。爲同文字之各方乘者。則以最高次方乘置於左。順次而置其低次於右。此種列法謂之該文字之遞降方乘(Descending Powers)。

例如 $a^3+a^2b+ab^2+b^3$。爲 a 之遞降方乘。

同法以同文字之最低指數置於左。順次而置其高次於右，謂爲該文字之遞昇方乘（Ascending Powers）。

例如前式 $a^3+a^2b+ab^2+b^3$。爲 b 之遞昇方乘。

如有 $a^3-ab^2+6a^2b-b^3$ 之不整列式。依 a 之遞降方乘整列之。爲 $a^3+6a^2b-ab^2-b^3$。依 a 之遞昇方乘整列之，爲 $-b^3-ab^2+6a^2b+a^3$。

59. 注意 代數式所以欲整列爲遞降。或遞昇方乘者。以便於求兩多項式之積。如 57 章，蓋兩式不整列，則其積之同類項不能相配於一縱行。

例如

$$\begin{array}{r}
6a-3a^2+7 \\
\underline{2+8a^2+a} \\
12a-6a^2+14 \\
+48a^3-24a^4+56a^2 \\
+6a^2-3a^3+7a \\
\hline
19a+56a^2+45a^3+14-24a^4
\end{array}$$

如此求其積則不合法。若兩式皆整列於遞降方乘，則得

$$\begin{array}{r}
-3a^2+6a+7 \\
\underline{8a^2+a+2} \\
-24a^4+48a^3+56a^2 \\
-3a^3+6a^2+7a \\
-6a^2+12a+14 \\
\hline
-24a^4+45a^3+56a^2+19a+14
\end{array}$$

60. 定義 凡 n 個文字之積所成之項，謂之 n 乘元（Dimensions）或云 n 次（Degree）項，

例如 $3abc$ 爲三乘元。即三次項，$5a^3b^2c$ 爲 $5aaabbc$ 爲六乘元，即六次項也。

故一項之次數。爲其因子指數之和。

乘元專指文字因子。不指數字。例如 $5ab$ 則 a,b 爲乘元，而 5，a，b 爲因子。

稱某項或某代數式之次數。有時但指其中之特別一個，或數個文字之方乘而言。

例如ax^2+bx+c之第一項爲三次。第二項爲二次。第三項爲一次。然若專指x言。則謂爲x之二次式。因(x^2即xx)故也。

又$ax^2y+bxy+cx^2$謂爲x之二次式。或謂爲x,y之三次式。因以第一項之x,y爲三次故也。

若是者。稱代數式之次數。即指特別文字之最高次。

又某代數式。特別文字爲x。其不函x之項。謂爲x之無關係項。例如ax^2+bx+c其c。即x之無關係項。

等次項(Homogeneous)代數式各項之乘元。其次數相等者。稱此代數式爲等次式。

例如$a^3+3a^2b-5b^3$之各項。皆爲三次。故稱等次式。

又$ax^2+bxy+cy^2$。爲x及y二次之等次式。

又如$ax^2+bcxy+d^3y^2$。雖各項不等次。而指x及y言。亦爲二次之等次式。

61. 兩等次式之積亦必等次何也。兩多項式之積。爲其兩式各項積之總合。如(55章)。故兩式之各項。各自等次。則其各項之積。必爲兩式中各一項次數之和。

例如$a^3+a^2b+b^3$。以a^2-ab+b^2乘之。其積爲$a^5+2a^2b^3-ab^4+b^5$。即五次之等次式。蓋因被乘式之各項三次。乘乘式之各項二次。故積之各項爲三次與二次之和。即五次。

兩等次式之積。若不等次。其有誤可知。

62. 餘論　兩代數式之積。其特別一個最高次之項。必爲其兩式中各最高次之項之積。又其積之同文字之最低次項。必爲其兩式中各最低次之項之積。凡此皆當注意。

故兩代數式中。其特別文字之最高次。及最低次項。祇有一項。則積內同文字之最高次。及最低次項。亦祇有一項。

例如61章。兩代數式中其a之爲最高及最低次者。祇有一項。故積內a之最高次a^5及最低次b^5。亦祇有一項也。

63. 分離係數(Detached Coefficients)代數式之簡畧乘法。可僅以兩式之係數相乘。謂之分離係數法。

例如$3x^2-x+2$。以$3x^2+2x-2$乘之。

依x之遞降方乘。順次記其係數。即。

$$
\begin{array}{r}
3-1+2 \\
\underline{3+2-2} \\
9-3+6 \\
+6-2+4 \\
\underline{-6+2-4} \\
9+3-2+6-4
\end{array}
$$

兩式內x之最高次，爲x^2及x^2。故積之最高次爲x^4。依x^4而順次記x之方乘。即

$9x^4+3x^3-2x^2+6x-4$。爲所求之積。若方乘之某項缺者。則補以0

例如x^4-2x^2+x-3，以x^4+x^3-x-3乘之，被乘式缺x^3。乘式缺x^2故各補以0。

$$
\begin{array}{l}
1+0-2+1-3 \\
\underline{1+1+0-1-3} \\
1+0-2+1-3 \\
\quad 1+0-2+1-3 \\
\qquad\quad -1-0+2-1+3 \text{……………此項次於0項，故比} \\
\underline{\qquad\qquad\quad -3-0+6-3+9} \qquad\quad \text{上列右二位。} \\
1+1-2-2-5-1+5+0+9
\end{array}
$$

即$x^8+x^7-2x^6-2x^5-5x^4-x^3+5x^2+9$。即積，

凡等次式之積函二個文字者。亦可依分離係數法求之，

例如$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$，以$a^2-2ab+b^2$乘之。則可以$1-2+1$乘$1-3+3-1$。詳於例題二。

(64.) 公式用法 56章所示之三公式。

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{……………………}(1)$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \text{……………………}(2)$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \text{……………………}(3)$$

此公式爲施乘法者所必需。

此公式中之a及b任爲何數。皆合於理。

今於(1)式之b用－b代之，則得

$$\{a+(-b)\}^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2$$

即$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$即從(1)式得(2)式。又於(3)式之b用$\sqrt{2}$代之，則得。

$$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})=a^2-(\sqrt{2})^2=a^2-2.$$

用不盡根，亦能合理。其用$\sqrt{2}$之原理。此處暫不解釋，因至後編，自能明瞭也。

以上三公式旣用任何數。皆合於理，故可於(1)式之b用$\boxed{}$代之，則$(a+\boxed{})^2=a^2+2a\boxed{}+\boxed{}^2$。

故置b+c於$\boxed{}$之內，亦無不合。

即$(a+\boxed{b+c})^2=a^2+2a\boxed{b+c}+\boxed{b+c}^2$，若去此$\boxed{}$。

即$(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$。

$$\therefore (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\text{.....................}(4)$$

於(4)式之c用－c代之。則

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+(-c)^2+2ab+2a(-c)+2b(-c),$$

$$\therefore (a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc,$$

又於(3)式之b用b+c代之。則

$$\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}=a^2-(b+c)^2=a^2-(b^2+2bc+c^2),$$

$$\therefore (a+b+c)(a-b-c)=a^2-b^2-2bc-c^2.$$

[增例] 再示數例於下。

$$(a^2+2b^2)(a^2-2b^2)=(a^2)^2-(2b^2)^2=a^4-4b^4.$$

$$(a^2+\sqrt{3}b^2)(a^2-\sqrt{3}b^2)=(a^2)^2-(\sqrt{3}b^2)^2=a^4-3b^4.$$

$$(a-b+c)(a+b-c)=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}=a^2-(b-c)^2.$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$$
$$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4.$$

末一例稍混，恐初學未易記憶，故重記其公式於下。

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$$

$$(x^3+x^2+x+1)(x^3-x^2+x-1)=\{(x^3+x)+(x^2+1)\}\{(x^3+x)-(x^2+1)\}$$
$$=(x^3+x)^2-(x^2+1)^2=x^6+2x^4+x^2-(x^4+2x^2+1)=x^6+x^4-x^2-1.$$

(65.) 多項式之平方 於前章及51章之法。已可求得三數和之平方。今更示以求諸數和之平方法。

例如$(a+b+c+d+\ldots\ldots)^2$。

即$(a+b+c+d+\ldots\ldots)(a+b+c+d+\ldots\ldots)$。

任意兩代數式之積。等於此式各項，乘彼式各項之積之和。前已證明之。故如上之被乘式。第一項a以乘式第一項a乘之。得a^2。同法得$b^2, c^2, d^2\ldots\ldots\ldots$又被乘式之一項(例如$b$)以乘式中相異之項(例如$d$)乘之，得$bd$。而被乘式之一項$d$。以乘式中相異之項$b$乘之。亦得$bd$。故得$2bd$。同法得兩式各異項之積。爲$2ab, 2ac\ldots\ldots\ldots$

由是所求之平方。爲

$$a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots\ldots+2ab+2ac+2ad+\ldots\ldots+2bc+2bd+\ldots\ldots\ldots$$。

即所有各項相乘積之和。

〔法則〕若干數量和之平方。等於各數量平方之和。加各相異兩數量之積之二倍。

例如求$(a+b+c)^2$。則各項之平方。爲a^2, b^2, c^2。又各相異兩項之積。爲ab, ac, bc。

由是而$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$。

同法得$(a+2b-3c)^2=a^2+(2b)^2+(-3c)^2+2a(2b)+2a(-3c)+2(2b)(-3c)$

$=a^2+4b^2+9c^2+4ab-6ac-12bc$。

又$(a-b+c-d)^2$

$=a^2+(-b)^2+c^2+(-d)^2+2a(-b)+2ac+2a(-d)+2(-b)c+2(-b)(-d)$
$+2c(-d)$

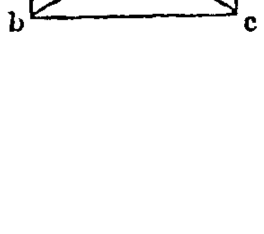
$=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$。

以上諸例熟練之後。可省去運算。而直書其答式。

求兩多項式之平方。可以直線畫多角形。計其各邊與對角線。則雖童子亦易求得之。

其各線爲2倍。各角點爲平方。示之如下。

求$(a+b+c+d)^2$。



四角形各角點之平方。爲a^2, b^2, c^2, d^2。

又四邊之2倍。爲$2ab, 2bc, 2cd, 2da$。

對角線之2倍。爲 $2bd, 2ca$。

$\therefore (a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2da+2bd+2ca$,

$(a+b+c+d+e)^2$ 則可作五角形圖求之,

66. 連乘積 凡求諸代數式之連乘積。可先求任兩式之積。乃次第以他式乘之,

例如 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 之連乘積。求法如下。

$$\begin{array}{l}
x+a \\
\underline{x+b} \\
x^2+ax \\
\underline{\quad +bx+ab} \\
x^2+(a+b)x+ab \\
\underline{x+c\qquad\qquad\quad} \\
x^3+(a+b)x^2+abx \\
\underline{\quad +\quad cx^2+(ac+bc)x+abc} \\
x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc
\end{array}$$

即連乘積。

如上式爲依通有文字 x 方乘之順序而記其積。爲整列代數式之要例,

又如求 $(x^2+a^2)^2(x+a)^2(x-a)^2$ 之連乘積。

積之因子可任意更換其次序。故從便利置之如下。卽所求之積 $=(x+a)^2(x-a)^2(x^2+a^2)^2$

$=\{(x+a)(x-a)(x^2+a^2)\}^2=\{(x^2-a^2)(x^2+a^2)\}^2$

$=(x^4-a^4)^2=x^8-2x^4a^4+a^8$。

(67.) 察視法 兩多項式之積。等於此式各項乘彼式各項之積之和。(55章)故三多項式之積。等於兩多項式積之各項,乘第三式各項之積之和。即三多項式之連乘積。等於第一式各項與第二式各項之積,乘第三式各項之積之和。

同法推得諸多項式之連乘積。等於第一式各項,第二式各項,第三式各項,及他式各項相乘諸積之和,

依此法各多項式中各項之連乘積。可從視察得之。因而求得其全積,爲尤便捷,

例如$(a+b)^3$即求$(a+b)(a+b)(a+b)$之積。

此三式可視察其各項連乘積。先從三式各取a乘得a^3。次從兩式各取a。從他一式取b乘得a^2b。然三式內可以各取一b。以各乘他二式之a。故得三個a^2b。即$3a^2b$。又依同法從一式取a。從兩式各取b。亦可取三次。故得$3ab^2$。末從三式各取b乘得b^3。

由是而$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

例如求$(x+a)(x+b)(x+c)$之積。

先從三式各取x。得x^3。次從兩式各取x。從他一式取a或b或c。得x^2a, x^2b, x^2c。次從一式取x。從他兩式取ab或bc。得xab, xac, xbc。末從各式取a與b與c得abc。

由是而$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+x^2a+x^2b+x^2c+xab+xac+xbc+abc$。

$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$。

(68.) 二項式之方乘 二項式之平方及立方。既詳於前矣。若繼此而更施乘法。則得四方乘五方乘等。但是等之運算。用分離係數法較易。

例如$(a+b)^4=(a+b)^3(a+b)$

$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)$。

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$為三次之等次式。a+b為一次之等次式。故其積為四次之等次式。而第一項為a^4。依此運算頗易。

$$\begin{array}{r}1+3+3+1\\ 1+1\\ \hline 1+3+3+1\\ 1+3+3+1\quad\\ \hline 1+4+6+4+1\end{array}$$

即$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$。

下列之公式。宜熟記之。

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$。

$(a+b)^3$之公式。又有簡要之記法如下。

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$。

於前公式中之b。用 -b 代之。則

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$。

$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$。

五方乘及高次之方乘。其逕求之法。稱爲二項式之定理。詳於後編。

〔要用之公式〕64章及本章所示之公式外。更有重要之公式。揭明如下。

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \text{ ....(A)}$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \text{ ....(B)}$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4 \text{ ....(C)}$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc \text{ ....(D)}$$

例題二

1. $2x-a$, 以 $x-2a$ 乘之。

〔解〕

$$\begin{array}{r} 2-1 \\ 1-2 \\ \hline 2-1 \\ -4+2 \\ \hline 2-5+2 \end{array}$$

即 $2x^2-5ax+2a^2$。

2. $3x-\frac{1}{3}$, 以 $\frac{1}{3}x-3$ 乘之。

〔解〕

$$\begin{array}{l} 3-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}-3 \\ \hline 1-\frac{1}{9} \\ \quad -9+1 \\ \hline 1-9\frac{1}{9}+1 \end{array}$$

即 $x^2-9\frac{1}{9}x+1$。

3. x^2-xy+y^2, 以 $x+y$ 乘之。

〔解〕依公式 $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$。

4. $1+x+x^2+x^3$, 以 $x-1$ 乘之。

〔解〕改被乘式爲x之遞降方乘。如 x^3+x^2+x+1。與乘式同一整列之。

$$\begin{array}{r} 1+1+1+1 \\ 1-1 \\ \hline 1+1+1+1 \\ -1-1-1-1 \\ \hline 1+0+0+0-1 \end{array}$$

積之第一項爲x^4。而末項不含x。故所求之積爲x^4-1。

5. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$, 以 $y-x$ 乘之。

〔解〕改乘式爲x之遞降方乘。即$-x+y$。與被乘式同一整列之。

$$\begin{array}{r} 1+1+1+1+1 \\ -1+1 \\ \hline -1-1-1-1-1 \\ +1+1+1+1+1 \\ \hline -1+0+0+0+0+1 \end{array}$$

即所求之積爲$-x^5+y^5$。

6. x^2-x+2, 以 x^2+x-2 乘之。

〔解〕所求之積$=\{x^2-(x-2)\}\{x^2+(x-2)\}=x^4-(x-2)^2$〔64章公式(3)〕

$=x^4-(x^2-4x+4)$〔64章公式(2)〕

$=x^4-x^2+4x-4$。

7. $1+ax+a^2x^2$, 以 $1-ax+a^2x^2$ 乘之。

〔解〕所求之積$=(1+ax+a^2x^2)(1-ax+a^2x^2)=1+a^2x^2+a^4x^4$。〔公式(C)〕

8. x^4+x^2+1, 以 x^4-x^2+1 乘之。

〔解〕所求之積爲$(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=x^8+x^4+1$.〔公式(C)〕

9. $3x^2-xy+2y^2$, 以 $3y^2-xy+2x^2$ 乘之。

〔解〕改乘式爲$2x^2-xy+3y^2$如下。

$$\begin{array}{l} 3-1+2 \\ 2-1+3 \\ \hline 6-2+4 \\ \quad -3+1-2 \\ \qquad +9-3+6 \\ \hline 6-5+14-5+6 \end{array}$$

即 $6x^4-5x^3y+14x^2y^2-5xy^3+6y^4$。

10. x^3-5x^2+1，以 $2x^3+5x+1$ 乘之。

〔解〕 $1-5+0+1$

$\underline{2+0+5+1}$

$2-10+0+2$

$5-25+0+5$

$\underline{1-5+0+1}$

$2-10+5-22-5+5+1$ 即 $2x^6-10x^5+5x^4-22x^3-5x^2+5x+1$。

11. $x^3-5x^2y+y^3$，以 $y^3+5xy^2+2x^3$ 乘之。

〔解〕 於前題之答。入以 y 之遞昇方乘。即得

$2x^6-10x^5y+5x^4y^2-22x^3y^3-5x^2y^4+5xy^5+y^6$。

12. $3a^3-2a^2b+3ab^2-3b^3$，以 $2a^3+5a^2b-4ab^2+b^3$ 乘之。

〔解〕 $3-2+3-3$

$\underline{2+5-4+1}$

$6-4+6-6$

$15-10+15-15$

$-12+8-12+12$

$\underline{3-2+3-3}$

$6+11-16+20-29+15-3$

即 $6a^6+11a^5b-16a^4b^2+20a^3b^3-29a^2b^4+15ab^5-3b^6$。

13. $2a^3x^3-3a^2x^2y^2+5y^6$，以 $a^3x^3+4axy^4-2y^6$ 乘之。

〔解〕 改爲 $2(ax)^3-3(ax)^2(y^2)+5(y^2)^3$ 與 $(ax)^3+4(ax)(y^2)^2-2(y^2)^3$ 其 ax 及 y^2 各可視爲一個文字求之。

$2-3+0+5$

$\underline{1+0+4-2}$

$2-3+0+5$

$8-12+0+20$

$\underline{-4+6+0-10}$

$2-3+8-11+6+20-10$

即 $2a^6x^6-3a^5x^5y^2+8a^4x^4y^4-11a^3x^3y^6+6a^2x^2y^8+20axy^{10}-10y^{12}$。

14. $2a-3a^2+5a^3-7a^5$, 以 $1-2a^2+6a^4$ 乘之,

[解] $2-3+5+0-7$
$1+0-2+0+6$
$\overline{}$
$2-3+5+0-7$
$-4+6-10-0+14$
$12-18+30+0-42$
$\overline{}$
$2-3+1+6-5-18+44+0-42$

此例積之第一項爲a。故2爲2a。

即 $2a-3a^2+a^3+6a^4-5a^5-18a^6+44a^7-42a^9$。

15. $a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2$, 以 $a+b+c$ 乘之,

[解] $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$ (公式(D))。

16. $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$, 以 $x+y+z$ 乘之。

[解] $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)=x^3+y^3+z^3-3xyz$。

17. $4a^2+9b^2+c^2+3bc+2ca-6ab$, 以 $2a+3b-c$ 乘之,

[解] $\{2a+3b+(-c)\}\{(2a)^2+(3b)^2+(-c)^2-(3b)(-c)-(-c)(2a)-(2a)(3b)\}$
$=(2a)^3+(3b)^3+(-c)^3-3(2a)(3b)(-c)$ (公式(D))
$=8a^3+27b^3-c^3+18abc$。

18. 求 x^4+1, x^2+1, x^2-1 之連乘積。

[解] $(x^2+1)(x^2-1)(x^4+1)=(x^4-1)(x^4+1)=x^8-1$ (64章(3))。

19. 求 x^4+16y^4, x^2+4y^2, $x+2y$ 及 $x-2y$ 之連乘積。

[解] $(x-2y)(x+2y)(x^2+4y^2)(x^4+16y^4)=(x^2-4y^2)(x^2+4y^2)(x^4+16y^4)$
$=(x^4-16y^4)(x^4+16y^4)=x^8-256y^8$。

20. 求 $(x-y)^2$, $(x+y)^2$ 及 $(x^2+y^2)^2$ 之連乘積。

[解] $\{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)\}^2=\{(x^2-y^2)(x^2+y^2)\}^2$
$=(x^4-y^4)^2=x^8-2x^4y^4+y^8$。

21. 求 $(x^2+1)^3$, $(x+1)^3$ 及 $(x-1)^3$ 之連乘積。

[解] $\{(x-1)(x+1)(x^2+1)\}^3=(x^4-1)^3=x^{12}-3x^8+3x^4-1$。

22. 求 x^2-x+1, x^2+x+1 及 x^4-x^2+1 之連乘積。

[解] $(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$
$=x^8+x^4+1$ (公式(C))。

23. 求 $a^2-2ab+4b^2$, $a^2+2ab+4b^2$ 及 $a^4-4a^2b^2+16b^4$ 之連乘積。

〔解〕 $\{a^2-a(2b)+(2b)^2\}\{a^2+a(2b)+(2b)^2\}(a^4-4a^2b^2+16b^4)$

$=\{a^4+a^2(2b)^2+(2b)^4\}(a^4-4a^2b^2+16b^4)$

$=(a^4+4a^2b^2+16b^4)(a^4-4a^2b^2+16b^4)=a^8+16a^4b^4+256b^8$。

24. 求下列各式之平方。

(1) $a+2b-3c$, (2) a^2-ab+b^2, (3) $bc+ca+ab$,

(4) $1-2x+3x^2$, (5) x^3+x^2+x+1。

〔解〕 可用64章及65章之公式求之,

(1) $(a+2b-3c)^2=a^2+4b^2+9c^2+2a(2b)+2a(-3c)+2(2b)(-3c)$

$=a^2+4b^2+9c^2+4ab-6ac-12bc$。

(2) $(a^2-ab+b^2)^2=a^4+a^2b^2+b^4-2a^3b+2a^2b^2-2ab^3$。

$=a^4+3a^2b^2+b^4-2a^3b-2ab^3$。

(3) $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2(bc)(ca)+2(bc)(ab)+2(ca)(ab)$

$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2bc^2a+2b^2ca+2ca^2b$

(4) $(1-2x+3x^2)^2=1+4x^2+9x^4-4x+6x^2-12x^3$

$=1-4x+10x^2-12x^3+9x^4$。

(5) $(x^3+x^2+x+1)^2=x^6+x^4+x^2+1+2x^5+2x^4+2x^3+2x^3+2x^2+2x$

$=x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$。

〔注意〕 本例(3)又有如下法記之。亦爲要用之公式。

$(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$。

25. 求下列各式之立方。

(1) $a+b+c$, (2) $2a-3b-2c$, (3) $1+x+x^2$。

〔解〕 可用68章之公式。

(1) $\{a+(b+c)\}^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$

$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$。

(2) 於前式之 a, b, c。順次用 2a, −3b, −2c, 代入之。則 $(2a-3b-2c)^3$

$=8a^3-27b^3-8c^3-24a^2c+54b^2a-54b^2c+24c^2a-36c^2b+72abc$。

(3) $(1+x+x^2)^3=1+x^3+x^6+3x+3x^2+3x^2+3x^4+3x^4+3x^5+6x^3$

$=1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$。

26. $(x+y+z)^2-(-x+y+z)^2+(x-y+z)^2-(x+y-z)^2$ 化為簡式。

〔解〕可用56章(A)及(B)之兩公式。

原式$=\{(y+z)+x\}^2-\{(y+z)-x\}^2+\{x+(z-y)\}^2-\{x-(z-y)\}^2$

$=4(y+z)x+4x(z-y)=8xz$。

27. 試證 $(x+y)(x+z)-x^2=(y+z)(y+x)-y^2=(z+x)(z+y)-z^2$。

〔證〕$(x+y)(x+z)-x^2=(y+x)\{(y+z)-(y-x)\}-x^2$

$=(y+x)(y+z)-(y^2-x^2)-x^2=(y+z)(y+x)-y^2$。

又以同法得 $(y+z)(y+x)-y^2=(z+x)(z+y)-z^2$。

28. 試證 $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-x^2-y^2-z^2=(x+y+z)^2$。

〔證〕先解去左邊之括弧，并其同類項而簡之，即得
$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ 即依64章知等於 $(x+y+z)^2$。

29. 化 $\{x(x+a)-a(x-a)\}\{x(x-a)-a(x+a)\}$ 為簡式。

〔解〕原式$=(x^2+ax-ax+a^2)(x^2-ax-ax-a^2)=(x^2+a^2)\{(x^2-a^2)-2ax\}$

$=(x^2+a^2)(x^2-a^2)-(x^2+a^2)2ax=x^4-a^4-2ax^3-2a^3x$。

30. 試證 $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(y-z)(z-x)(x-y)$。

〔證〕$-(x-y)=-x+y=(z-x)+(y-z)$ 用68章 $(a+b)^3$ 之簡要公式。
則 $-(x-y)^3=\{(z-x)+(y-z)\}^3$。

即 $-(x-y)^3=(z-x)^3+(y-z)^3+3(z-x)(y-z)\{(z-x)+(y-z)\}$。

即 $-(x-y)^3=(z-x)^3+(y-z)^3-3(z-x)(y-z)(x-y)$。

由是得 $(x-y)^3+(z-x)^3+(y-z)^3=3(z-x)(y-z)(x-y)$。

31. 試證 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ 及

$a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2$。

〔證〕依68章之簡要公式，即得 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$。

又 $(a+b)^4=(a+b)^2(a^2+2ab+b^2)=(a+b)^2\{(a^2-2ab+b^2)+4ab\}$

$=(a+b)^2(a-b)^2+4ab(a+b)^2$

$=(a^2-b^2)^2+4ab(a+b)^2$。

$=a^4+b^4-2a^2b^2+4ab(a+b)^2$。

由是得 $a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2$。

32. 試證 $(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)=(x^2-xy+y^2)^2$。

〔證〕由56章公式，$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ 故 $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$，依

此。則 $(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2)=\{(x^2+y^2)+xy\}^2-4(x^2+y^2)xy$。

$$=\{(x^2+y^2)-xy\}^2=(x^2-xy+y^2)^2$$。

33. 試證 $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2+2(x+y)(x+z)+2(x+z)(y+x)$
$+2(z+x)(z+y)=4(x+y+z)^2$。

〔證〕$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$。以 $x+y,\ y+z,\ z+x$ 代其 a, b, c，則左邊爲 $\{(x+y)+(y+z)+(z+x)\}^2=4(x+y+z)^2$。

34. 試證 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$。

〔證〕$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2$。

$=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$。

35. 設 $x=a+d,\ y=b+d,\ z=c+d$ 試求下題之證.

$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$。

〔證〕$x-y=(a+d)-(b+d)=a-b,\ y-z=b-c,\ z-x=c-a$

由是 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 解去兩邊之括弧。

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$。

即 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$。

36. $x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b$ 試求下題之證。

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$。

〔證〕此題與 35 同法證之。

37. 試證 $2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$

$$=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$$。

〔證〕因 $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$。平方之。得

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+2(a-b)(b-c)+2(b-c)(c-a)+2(c-a)(a-b)=0$ 即

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-2(b-a)(b-c)-2(c-b)(c-a)-2(a-c)(a-b)=0$。

是爲本題之證。

38. 試證 $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)-(ax+by+cz)^2$

$$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$。

〔證〕解去左邊之括弧。化爲簡式。即得

$b^2z^2-2bcyz+c^2y^2+c^2x^2-2acxz+a^2z^2+a^2y^2-2abyx+b^2x^2$。

即 $(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bz)^2$。

39. $x=a^2-bc,\ y=b^2-ca,\ z=c^2-ab$ 試證下列之式。

$ax+by+cz=(x+y+z)(a+b+c),\ bc(x^2-yz)=ca(y^2-zx)=ab(z^2-xy)$。

〔證〕 $ax+by+cz=a(a^2-bc)+b(b^2-ca)+c(c^2-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc$。

依 68 章公式(D)。$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\{(a^2-bc)+(b^2-ca)+(c^2-ab)\}$

$=(a+b+c)(x+y+z)$,

又 $x^2-yz=(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)=a(a^3+b^3+c^3-3abc)$,

故 $bc(x^2-yz)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc)$,

$ca(y^2-zx)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc)$,

$ab(z^2-xy)=abc(a^3+b^3+c^3-3abc)$,

$\therefore\ bc(x^2-yz)=ca(y^2-zx)=ab(z^2-xy)$。

40. 設 $3x=a+b+c$,

試求 $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3-3(x-a)(x-b)(x-c)$ 之值。

〔解〕依 68 章公式(D),

原式 $=\frac{1}{2}\{(x-a)+(x-b)+(x-c)\}[\{(x-a)-(x-b)\}^2+\{(x-b)-(x-c)\}^2+\{(x-c)-(x-a)\}^2]$

$=\frac{1}{2}\{3x-(a+b+c)\}\{(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2\}$,

而 $3x=a+b+c$,即 $3x-(a+b+c)=0$。$\therefore$ 原式 $=0$。

41.試證 $(a^2+b^2+c^2)^2=(b^2+c^2)^2+(ab+ac)^2+(ab-ac)^2+a^4$

$=(bc+ca+ab)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2$。

〔證〕 $(a^2+b^2+c^2)^2=\{(b^2+c^2)+a^2\}^2=(b^2+c^2)^2+2(b^2+c^2)a^2+a^4$

$=(b^2+c^2)^2+(a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2)+(a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2)+a^4$

$=(b^2+c^2)^2(ab+ac)^2+(ab-ac)^2+a^4$,

又 $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

$=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)+a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$,

$=(ab+bc+ca)^2+(a^4-2a^2bc+b^2c^2)+(b^4-2b^2ca+c^2a^2)+(c^4-2c^2ab+a^2b^2)$

$=(ab+bc+ca)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2$。

42. 試證 $(x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2)$

$=(ax-by)^2+(ax-by)(ay+bx+by)+(ay+bx+by)^2$。

〔解〕$(x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2)$

$=a^2x^2+b^2y^2+a^2xy+b^2xy+a^2y^2+b^2x^2+abx^2+abxy+aby^2$

$=(a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2+2abxy+2b^2xy+2aby^2)-abxy-b^2xy-aby^2$
$+a^2xy+abx^2+a^2x^2$,

$=(ay+bx+by)^2+(a^2x^2-2abxy+b^2y^2)+abxy-b^2y^2+a^2xy-aby^2$
$+abx^2-b^2xy$

$=(ay+bx+by)^2+(ax-by)^2+by(ax-by)+ay(ax-by)+bx(ax-by)$

$=(ay+bx+by)^2+(ax-by)^2+(ax-by)(by+ay+bx)$。

43. 試證 $1+a^2+b^2+c^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+a^2b^2c^2$
$=(1-bc-ca-ab)^2+(a+b+c-abc)^2$。

〔證〕$1+\{a^2+b^2+c^2\}+\{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\}+a^2b^2c^2$

$=1+\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}+\{(bc+ca+ab)^2-2abc(a+b+c)\}$
$+a^2b^2c^2$

$=1-2(ab+bc+ca)+(bc+ca+ab)^2+(a+b+c)^2-2abc(a+b+c)+a^2b^2c^2$

$=(1-ab-bc-ca)^2+(a+b+c-abc)^2$。

44. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2+4(ad-bc)^2$。

〔證〕$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2=\{(a^2+b^2-c^2-d^2)+2(c^2+d^2)\}^2$

$=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(a^2+b^2-c^2-d^2)(c^2+d^2)+4(c^2+d^2)^2$

$=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$。

但 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ (依 **34** 例)

$\therefore (a^2+b^2+c^2+d^2)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+4(ac+bd)^2+4(ad-bc)^2$。

45. 試證明下列之二題。

(1) $(a+2)^2-4(a+1)^2+6a^2-4(a-1)^2+(a-2)^2=0$。

(2) $(a+2)(b+2)-4(a+1)(b+1)+6ab-4(a-1)(b-1)+(a-2)(b-2)=0$,

〔證〕(1) 左邊 $=(a+2)^2+(a-2)^2-4\{(a+1)^2+(a-1)^2\}+6a^2$
$=2(a^2+4)-8(a^2+1)+6a^2=2a^2+8-8a^2-8+6a^2=0$,

(2) 左邊 $=(a+2)(b+2)+(a-2)(b-2)-4\{(a+1)(b+1)+(a-1)(b-1)\}$
$+6ab$

$=ab+2(a+b)+4+ab-2(a+b)+4-4\{ab+(a+b)+1+ab-(a+b)+1\}$
$+6ab$

$=2ab+8-4\{2ab+2\}+6ab=2ab+8-8ab-8+6ab=0$。

46. 試證下二題。

(1) $(a+2)^3-4(a+1)^3+6a^3-4(a-1)^3+(a-2)^3=0$。

(2) $(a+2)(b+2)(c+2)-4(a+1)(b+1)(c+1)+6abc-4(a-1)(b-1)(c-1)$
$+(a-2)(b-2)(c-2)=0$。

〔證〕(1) 左邊 $=(a+2)^3+(a-2)^3-4\{(a+1)^3+(a-1)^3\}+6a^3$
$=2a^3+24a-4(2a^3+6a)+6a^3=0$。

(2) 左邊 $=(a+2)(b+2)(c+2)+(a-2)(b-2)(c-2)$
$-4\{(a+1)(b+1)(c+1)+(a-1)(b-1)(c-1)\}+6abc$
$=abc+(ab+bc+ca)2+(a+b+c)4+8+abc-(ab+bc+ca)2+(a+b+c)4$
$-8-4\{abc+(ab+bc+ca)+(a+b+c)+1+abc-(ab+bc+ca)$
$+(a+b+c)-1\}+6abc$
$=2abc+8(a+b+c)-4\{2abc+2(a+b+c)\}+6abc=0$。

47. 證 $(a+b+c)^3+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
$=4a^2(b+c)+4b^2(c+a)+4c^2(a+b)+4abc$

〔證〕令 $a+b+c=s$。則左邊 $=s^3+(s-2a)(s-2b)(s-2c)$
$=s^3+s^3-2s^2(a+b+c)+4s(ab+bc+ca)-8abc$
$=2s^3-2s^3+4s(ab+bc+ca)-8abc$
$=4(a+b+c)(ab+bc+ca)-8abc$
$=4a\{a(b+c)+bc\}+4b\{b(c+a)+ca\}+4c\{c(a+b)+ab\}-8abc$
$=4a^2(b+c)+4b^2(c+a)+4c^2(a+b)+4abc$。

48. 試證 $x(x-y+z)(x+y-z)+y(x+y-z)(-x+y+z)$
$+z(-x+y+z)(x-y+z)+(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=4xyz$。

〔證〕令 $x+y+z=s$。則左邊
$=x(s-2y)(s-2z)+y(s-2z)(s-2x)+z(s-2x)(s-2y)+(s-2x)(s-2y)(s-2z)$
$=s^2(x+y+z)-4s(xy+yz+zx)+12xyz+s^3-2s^2(x+y+z)$
$+4s(xy+yz+zx)-8xyz$
$=s^3-4s(xy+yz+zx)+12xyz+s^3-2s^3+4s(xy+yz+zx)-8xyz=4xyz$。

49. $a^2+b^2+c^2+d^2-bc-ca-ab-ad-bd-cd$。以 $a+b+c+d$。乘之。

〔解〕$(a^2+b^2+c^2+d^2-bc-ca-ab-ad-bd-cd)(a+b+c+d)$ 上兩式之積 a^3, b^3, c^3, d^3。各有一個。如 a^2b 之項。則為 $a^2b-a^2b=0$。同法 a^2c,

a^2d, b^2a, b^2c, 等項，亦相消而爲0. 又 abc 其係數爲 -3。故所求之積爲 $a^3+b^3+c^3+d^3-3abc-3abd-3bcd-3cad$。

50. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)\ldots\ldots(x^{2^n}-x^{2^{n-1}}+1)$
$=x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1$。

〔證〕 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1=(x^{2^2}+x^2+1)$,

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$=x^8+x^4+1=x^{2^3}+x^{2^2}+1.$$

同法得 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)=x^{2^4}+x^{2^3}+1$,

$\therefore$ 左邊 $=x^{2^{n+1}}+x^{2^n}+1$。

第伍編

除法

69. 一項式之除法 以一項式除一項式之法。已詳於前。惟依43章兩代數之和。以第三數量除之。所得之商。等於以第三數量。分除其各數量之商之和。又依54章乘法之反法多項式以一項式除之。所得之商。等於以一項式。分除其各項之商之和。

例如 $(a^2x-3ax)\div ax=a^2x\div ax-3ax\div ax=a-3$。

又 $(12x^3-5ax^2-2a^2x)\div 3x=12x^3\div 3x-5ax^2\div 3x-2a^2x\div 3x$。

$$=4x^2-\frac{5}{3}ax-\frac{2}{3}a^2。$$

70. 多項式之除法 茲示以除法之通例。即以多項式除多項式之法。

除法爲乘法之反法。故於除式當求以何式乘之。而得被除式。因之得求法如下。

被除式與除式。皆整列爲某文字(假設 a)之遞降方乘。則其商亦得整列爲遞降方乘。

依62章被除式之第一項。爲除式第一項與商之第一項之積。故以除式之第一項。除被除式之第一項。得商之第一項。以乘除式。從被除式內減去之。則其餘式。等於商之他項與除式之積。是爲餘式。此餘式又整列於 a 之遞降方乘。以除式之第一項除其第一項。得商之第二項。以乘除式從餘式減去之。迭次施此方法。得商之第三項第四項等。以至得所求之商而止。

例如 $8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3$。以 $2a+b$ 除之。與算術除法同式如下。

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
2a+b) & 8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3(4a^2+2ab+b^2\text{……商}\\
& \underline{8a^3+4a^2b\qquad\qquad\qquad}\\
& \qquad\quad 4a^2b+4ab^2+b^3\\
& \qquad\quad \underline{4a^2b+2ab^2\qquad}\\
& \qquad\qquad\qquad 2ab^2+b^3\\
& \qquad\qquad\qquad \underline{2ab^2+b^3}
\end{array}
$$

商之第一項。爲 $8a^3\div 2a=4a^2$。以乘除式從被除式內減去之。得 $4a^2b+4ab^2+b^3$ 爲餘式。商之第二項爲 $4a^2b\div 2a=2ab$。以乘除式。從餘式內減去之。得 $2ab^2+b^3$ 爲第二餘式。商之第三項。爲 $2ab^2\div 2a=b^2$。以乘除式。從第二餘式內減去之。則已無餘。故被除式。等於所減諸式之和。即被除式等於以 $4a^2$, $+2ab$, $+b^2$ 乘除式之積之和。即被除式等於 $4a^2+2ab+b^2$ 式乘除式之積。故 $4a^2+2ab+b^2$。爲所求之商。

被除式與除式可整列爲同文字之遞降方乘。亦可均列爲遞昇方乘。如本例之 a 爲遞降方乘。其在 b 即遞昇方乘。惟被除式與除式。不可一式遞昇。一式遞降耳。

71. 例解 更舉數例解之如下。

〔第一例〕 $a^4-a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4$。以 a^2+b^2 除之。

$$
\begin{array}{r|l}
a^2+b^2) & a^4-a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4 \;(a^2-ab+b^2 \\
 & \underline{a^4 \qquad\;\; +a^2b^2} \\
 & \quad -a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4 \\
 & \quad \underline{-a^3b \qquad\quad -ab^3} \\
 & \qquad\quad +a^2b^2 \qquad +b^4 \\
 & \qquad\quad \underline{+a^2b^2 \qquad +b^4}
\end{array}
$$

〔第二例〕 $a^4+a^2b^2+b^4$。以 a^2-ab+b^2 除之。

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$。已示於前。故

$a^4+a^2b^2+b^4\div(a^2-ab+b^2)=a^2+ab+b^2$。雖然當以實際之運算。解之如下。

$$
\begin{array}{r|l}
a^2-ab+b^2) & a^4 \qquad +a^2b^2 \qquad +b^4 \;(a^2+ab+b^2 \\
 & \underline{a^4-a^3b+a^2b^2} \\
 & \qquad a^3b \qquad\qquad +b^4 \\
 & \qquad \underline{a^3b-a^2b^2+ab^3} \\
 & \qquad\qquad a^2b^2-ab^3+b^4 \\
 & \qquad\qquad \underline{a^2b^2-ab^3+b^4}
\end{array}
$$

此例於被除式與除式俱整列爲 a 之遞降方乘，而因欲便於逐次相減，故於被除式 a^3 及 a 之兩項，特空其位置。然不如此，而僅將各除式，依 a 之遞降方乘整列之亦可。

例如 $a^2-ab+b^2)a^4+a^2b^2+b^4(a^2+ab+b^2$

$$
\begin{array}{l}
\underline{a^4-a^3b+a^2b^2} \\
\quad a^3b+b^4 \\
\quad \underline{a^3b-a^2b^2+ab^3} \\
\quad a^2b^2-ab^3+b^4 \\
\quad \underline{a^2b^2-ab^3+b^4}
\end{array}
$$

〔第三例〕 $a^3+b^3+c^3-3abc$，以 $a+b+c$ 除之。

$a+b+c)a^3-3abc+b^3+c^3(a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2$

$$
\begin{array}{l}
\underline{a^3+a^2b+a^2c} \\
-a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3 \\
\underline{-a^2b-ab^2-abc} \\
\quad -a^2c+ab^2-2abc+b^3+c^3 \\
\quad \underline{-a^2c-abc-ac^2} \\
\quad\quad ab^2-abc+ac^2+b^3+c^3 \\
\quad\quad \underline{ab^2+b^3+b^2c} \\
\quad\quad\quad -abc+ac^2-b^2c+c^3 \\
\quad\quad\quad \underline{-abc-b^2c-bc^2} \\
\quad\quad\quad\quad ac^2+bc^2+c^3 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{ac^2+bc^2+c^3}
\end{array}
$$

如上例含二個以上之文字，不僅整列於 a 之遞降方乘，即其他文字，亦順次整列，故上例之 b 皆置於 c 前，又或僅作 a 式，其他二字以括弧括之，改爲簡式，如下。

$a+(b+c))a^3-3abc+(b^3+c^3)(a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)$

$$
\begin{array}{l}
\underline{a^3+a^2(b+c)} \\
-a^2(b+c)-3abc+(b^3+c^3) \\
\underline{-a^2(b+c)-a(b+c)^2} \\
\quad a(b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3) \\
\quad \underline{a(b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3)}
\end{array}
$$

惟從第一除式之第二項 $-3abc$ 減 $-a(b+c)^2$ 得 $a(b^2-bc+c^2)$。非熟練者不易知之。

72. 分離係數 除法亦如乘法用分離係數爲便。

例如 $2x^6-7x^5+5x^4+3x^3-3x^2+4x-4$。以 $2x^3-3x^2+x-2$ 除之。

$$
\begin{array}{r}
2-3+1-2)\,2-7+5+3-3+4-4\,(1-2-1+2 \\
\underline{2-3+1-2} \\
-4+4+5-3+4-4 \\
\underline{-4+6-2+4} \\
-2+7-7+4-4 \\
\underline{-2+3-1+2} \\
4-6+2-4 \\
\underline{4-6+2-4}
\end{array}
$$

商之第一項。爲 $2x^6\div 2x^3=x^3$。故從 $1-2-1+2$。而得 x^3-2x^2-x+2。即所求之商。

73. 除法之別定義 於70章所示被除式之最初減除式其第一項已減盡而爲0。故除式比被除式。其 a 之次數必低。故逐次之除式。必次第爲 a 之低次式。至除式之次數較低於除式。則知其已不能整除。即與算術之除數比除數小則不能整除者同。

由是除法之定義。須擴張之。如下。

〔定義〕以 B 除 A。求 $B\times C$，等於 A 之代數式 C。或求得 C 後。其 $B\times C$ 與 A 之差式內特別一文字。比 B 內特別一文字之次數低。

此定義其第一爲能整除者。第二爲不能整除者。

例如 $a^2+3ab+4b^2$。以 $a+b$ 除之。

$$
\begin{array}{r}
a+b)\,a^2+3ab+4b^2\,(a+2b \\
\underline{a^2+\ ab} \\
2ab+4b^2 \\
\underline{2ab+2b^2} \\
2b^2
\end{array}
$$

故得$(a^2+3ab+4b^2)\div(a+b)=a+2b$。而餘式爲$2b^2$。

卽$a^2+3ab+4b^2=(a+b)(a+2b)+2b^2$。

又被除式與除式。其整列與前異者。則

$$\begin{array}{r|l} b+a)\,4b^2+3ab+a^2 & (4b-a \\ 4b^2+4ab \quad\quad & \\ \hline -ab+a^2 & \\ -ab-a^2 & \\ \hline 2a^2 & \end{array}$$

卽$a^2+3ab+4b^2=(a+b)(4b-a)+2a^2$。

第一之餘式爲$2b^2$。第二之餘式爲$2a^2$。蓋因第一爲a之遞降方乘。故其餘式不復含a。第二爲b之遞降方乘，故其餘式不復含b。由是知同文字之整列。有遞降遞昇之異。而餘式亦因之而異。

74. 恆同式〔Identity〕 代數式之文字。不論爲如何之值。常有相等之關係者。謂之恆同式，

例如$a+a=2a$，其a爲任何値無不相等。故爲恆同式。

下列之恆同式，當熟記之。(乘法之公式亦爲恆同式。)

$$(x^2\pm 2ax+a^2)\div(x\pm a)=x\pm a。$$

$$(x^2-a^2)\div(x\pm a)=x\mp a，$$

$$(x^3\pm a^3)\div(x\pm a)=x^2\mp ax+a^2。$$

$$(x^4-a^4)\div(x\mp a)=x^3\pm ax^2+a^2x\pm a^3。$$

$$(x^4+a^2x^2+a^4)\div(x^2\mp ax+a^2)=x^2\pm ax+a^2。$$

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz)\div(x+y+z)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx。$$

例題三

1. x^2-9y^2。以$x+3y$除之。

〔解〕由**74**章之公式，$\{x^2-(3y)^2\}\div(x+3y)=x-3y$。

2. x^4-16y^4。以x^2-4y^2除之。 〔答 x^2+4y^2〕

3. $27x^3+64y^3$。以 $4y+3x$ 除之。

〔解〕由74章之公式。

$\{(3x)^3+(4y)^3\}\div(3x+4y)=(3x)^2-(3x)(4y)+(4y)^2=9x^2-12xy+16y^2$。

4. $3x^2-4xy-4y^2$。以 $2y-x$ 除之。

〔解〕除式列爲 $-x+2y$。

$$\begin{array}{l} -1+2)3-4-4(-3-2 \text{ 卽 } -3x-2y \text{ 商} \\ \quad\quad \underline{3-6} \\ \quad\quad\quad 2-4 \\ \quad\quad\quad \underline{2-4} \end{array}$$

$\begin{cases} \text{5. } 1-5x^4+4x^5\text{。以 } 1-x \text{ 除之。} \\ \text{6. } x^5-5xy^4+4y^5\text{。以 } x-y \text{ 除之。} \end{cases}$

〔解〕5.6兩題。可同用一分離係數求之。卽

$$\begin{array}{l} 1-1)1+0+0+0-5+4(1+1+1+1-4 \\ \quad\quad \underline{1-1} \\ \quad\quad\quad 1-0+0-5+4 \\ \quad\quad\quad \underline{1-1} \\ \quad\quad\quad\quad 1+0-5+4 \\ \quad\quad\quad\quad \underline{1-1} \\ \quad\quad\quad\quad\quad 1-5+4 \\ \quad\quad\quad\quad\quad \underline{1-1} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad -4+4 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{-4+4} \end{array}$$

〔5. 答 $1+x+x^2+x^3-4x^4$〕

〔6. 答 $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3-4y^4$〕

$\begin{cases} \text{7. } 1-6x^5+5x^6\text{。以 } 1-2x+x^2 \text{ 除之。} \\ \text{8. } m^6-6mn^5+5n^6\text{。以 } m^2-2mn+n^2 \text{ 除之。} \end{cases}$

〔7. 答 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$〕

〔8. 答 $m^4+2m^3n+3m^2n^2+4mn^3+5n^4$〕

〔解〕7.8兩題。亦可同用一分離係數如前例。

9. $1-7x^6+6x^7$。以 $(1-x)^2$ 除之。

〔解〕$(1-x)^2=1-2x+x^2$。故

$$
\begin{array}{l}
1-2+1)1+0+0+0+0+0-7+6(1+2+3+4+5+6 \\
\quad\quad \underline{1-2+1} \\
\quad\quad\quad 2-1+0+0+0-7+6 \\
\quad\quad\quad \underline{2-4+2} \\
\quad\quad\quad\quad 3-2+0+0-7+6 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{3-6+3} \\
\quad\quad\quad\quad\quad 4-3+0-7+6 \\
\quad\quad\quad\quad\quad \underline{4-8+4} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad 5-4-7+6 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{5-10+5} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 6-12+6 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{6-12+6}
\end{array}
$$

即所求之商。爲
$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5$

10. $1-x^8$。以 $1-x^2$ 除之。

〔解〕 $\{1-(x^2)^4\}\div(1-x^2)=1+x^2+(x^2)^2+(x)^8=1+x^2+x^4+x^6$。

11. $1+x-8x^2+19x^3-15x^4$。以 $1+3x-5x^2$ 除之。

〔答 $1-2x+3x^2$〕

12. $4-9x^2+12x^3-4x^4$。以 $2+3x-2x^2$ 除之。

13. $4x^4-9x^2y^2+6xy^3-y^4$。以 $2x^2+3xy-y^2$ 除之。

〔解〕

$$
\begin{array}{l}
2+3-2)4+0-9+12-4(2-3+2 \\
\quad\quad\quad \underline{4+6-4} \\
\quad\quad\quad\quad -6-5+12-4 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{-6-9+6} \\
\quad\quad\quad\quad\quad 4+6-4 \\
\quad\quad\quad\quad\quad 4+6-4
\end{array}
$$

〔12. 答 $2-3x+2x^2$。〕

〔13. 答 $2x^2-3xy+y^2$〕

14. $x^3-3x^2+3x+y^3-1$。以 $x+y-1$ 除之。

〔解〕本題含二文字。且爲不等次項，故不能用分離係數之法。今由68章 $(a-b)^3$ 之公式。

$x^3-3x^2+3x-1+y^3=(x-1)^3+y^3$ 故所求之商。即

$\{(x-1)^3+y^3\}\div\{(x-1)+y\}=(x-1)^2-(x-1)y+y^2$。

15. $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$。以 x^2+xy+y^2 除之。

〔解〕 $1+1+1)1+1+1+1+1+1(1+0+0+1$ 即 x^3+y^3。

$$\begin{array}{l} \underline{1+1+1\qquad\qquad} \\ \qquad\qquad 1+1+1 \\ \qquad\qquad \underline{1+1+1} \end{array}$$

16. $x^5-5x^4y+7x^3y^2-x^2y^3-4xy^4+2y^5$。以 $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 除之。

〔答 $x^2-2xy-2y^2$〕

17. $a^2-2b^2-6c^2+ab-ac+7bc$。以 $a-b+2c$ 除之。

〔解〕本題祇能用通例之除法。因題式中含三文字。故雖爲等次。不能用分離係數之法。且又無公式可用也。

$$\begin{array}{l} a-b+2c)a^2+ab-ac-2b^2+7bc-6c^2(a+2b-3c \\ \qquad\qquad \underline{a^2-ab+2ac\qquad\qquad} \\ \qquad\qquad\quad 2ab-3ac-2b^2+7bc-6c^2 \\ \qquad\qquad\quad \underline{2ab\qquad\quad -2b^2+4bc} \\ \qquad\qquad\qquad -3ac\qquad +3bc-6c^2 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{-3ac\qquad +3bc-6c^2} \end{array}$$

18. $a^2+2b^2-3c^2+bc+2ac+3ab$。以 $a+b-c$ 除之。

〔解〕本題同前用通例除法。 〔答 $a+2b+3c$〕

19. $6a^4+4b^4-a^3b+13ab^3+2a^2b^2$。以 $2a^2+4b^2-3ab$ 除之。

〔解〕除式與被除式。皆整列爲a之遞降方乘。用分離係數法。則得 $3+4+1$。即所求之商。爲 $3a^2+4ab+b^2$。

20. $x^4+y^4-z^4+2x^2y^2+2z^2-1$。以 $x^2+y^2-z^2+1$ 除之。

〔解〕$x^4+y^4-z^4+2x^2y^2+2z^2-1=x^4+2x^2y^2+y^4-(z^4-2z^2+1)$

$=(x^2+y^2)^2-(z^2-1)^2$。

故 $\{(x^2+y^2)^2-(z^2-1)^2\}\div\{(x^2+y^2)-(z^2-1)\}=(x^2+y^2)+(z^2-1)$。

21. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-c^3$。以 $a-b-c$ 除之。

〔解〕被除式 $=(a-b)^3-c^3$。

故 $\{(a-b)^3-c^3\}\div\{(a-b)-c\}=(a-b)^2+(a-b)c+c^2$。

22. $a^3+8b^3-c^3+6abc$。以 $a+2b-c$ 除之。

〔解〕由74章 $\{a^3+(2b)^3+(-c)^3-3a(2b)(-c)\}\div\{a+2b-c\}$

$=a^2+(ab)^2+(-c)^2-a(2b)-2b(-c)-(-c)a$。

故所求之商。爲 $a^2+4b^2+c^2-2ab+2bc+ca$。

23. $a^3+8b^3+27c^3+18abc$。以 $a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab$ 除之。

〔解〕由 **74** 章 $a^3+(2b)^3+(3c)^3-3a(2b)(3c)$

$=(a+2b+3c)(a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab)$。以

$a^2+4b^2+9c^2-6bc-3ca-2ab$ 除之。得 $a+2b+3c$。

24. $27a^3-8b^3-27c^3-54abc$。以 $3a-2b-3c$ 除之。

〔解〕與前例同。其商爲 $9a^2+4b^2+9c^2+6ab-6bc+9ca$。

25. $acx^3+(ad-bc)x^2-(ac+bd)x+bc$。以 $ax-b$ 除之。

〔解〕用通常之除法如下。

$$ax-b)acx^3+(ad-bc)x^2-(ac+bd)x+bc(cx^2+dx-c$$
$$\underline{acx^3\quad -bcx^2}$$
$$adx^2-(ac+bd)x+bc$$
$$\underline{adx^2-bdx}$$
$$-acx+bc$$
$$\underline{-acx+bc}$$

26. $2a^2x^2-2(b-c)(3b-4c)y^2+abxy$。以 $ax+2(b-c)y$ 除之。

〔解〕$ax+2(b-c)y)2a^2x^2+abxy-2(b-c)(3b-4c)y^2(2ax-(3b-4c)y$

$$\underline{2a^2x^2+4a(b-c)xy}$$
$$-a(3b-4c)xy-2(b-c)(3b-4c)y^2$$
$$\underline{-a(3b-4c)xy-2(b-c)(3b-4c)y^2}$$

27. $9a^2b^3-12a^4b+3b^5+2a^3b^2+4a^5-11ab^4$。以 $3b^3+4a^3-2ab^2$ 除之。

〔解〕被除式 $=4a^5-12a^4b+2a^3b^2+9a^2b^3-11ab^4+3b^5$

及　　除式 $=4a^3-2ab^2+3b^3$。

故 $4+0-2+3)4-12+2+9-11+3(1-3+1$

$$\underline{4+0-2+3}$$
$$-12+4+6-11+3 \qquad \text{即 } a^2-3ab+b^2$$
$$\underline{-12-0+6-9}$$
$$4+0-2+3$$
$$\underline{4+0-2+3}$$

28. 用 $x+y$ 除 x^3+y^3 之結果。以求 $x+y+z$, 除 $(x+y)^3+z^3$ 之商。

〔答 $(x+y)^2-(x+y)z+z^2$〕

29. 用 $x-y$ 除 x^3-y^3 之結果。以求 $x+y-2z$, 除 $(x+y)^3-8z^3$ 之商。

〔解〕本例與28例同法。$(x^3-y^3)\div(x-y)=x^2+xy+y^2$。

故以 $(x+y)$ 代 x, 以 $2z$ 代 y。則答式爲

$\{(x+y)^3-(2z)^3\}\div\{(x+y)-2z\}=(x+y)^2+(x+y)2z+4z^2$。

第陸編

因子分割法

75. 定義 任意之代數式。其分母不含文字者。謂之整代數式。例如$\frac{1}{2}a^3b-\frac{1}{4}b^3$爲整代數式。

又如$3a^3b-4b^3$之爲整代數式。固不待論。

任意之代數式。指其某特別之文字。而稱爲整代數式者。必其分母不含此特別文字也。

例如$\frac{x^2}{a}+\frac{x}{a+b}$雖分母含文字爲不整代數式。然以其不含x。故就x言。仍爲整代數式。

代數式各項不含平方根及他之方根者。稱爲有理(Rational)式。

例如$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$爲有理式。$\sqrt{a}+\sqrt{b}$爲無理式。

76. 因子 此編就任意之代數式。推究其有若何因子。而僅示其簡易之例。

故此編所推究者。其因子爲有理整代數式。或關於特別文字。而爲有理整代數式。即其因子可整除其原代數式者也。

77. 一項因子 代數式之各項。皆含此一文字。可以之除盡各項者。即爲其式之因子。

例如$2ax+x^2=x(2a+x)$, $ax+a^2x^2=ax(1+ax)$

及$2a^2b^2x+3a^2b^3y=a^2b^2(2x+3by)$皆易明瞭。

(78.) 公式用法 由已知之恆同式。可比較而求得諸因子。是等因子。最易顯出。

例如$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, 故

$a^2-4b^2=a^2-(2a)^2=(a+2b)(a-2b)$, $a^2-2=a^2-(\sqrt{2})^2=(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$,

$a^4-16b^4=(a^2)^2-(4b^2)^2=(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)=(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)$,

及 $a^3-9ab^2=a(a^2-9b^2)=a(a+3b)(a-3b)$,

又 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。故

$a^3+8b^3=a^3+(2b)^3=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$,

$8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$,

及 $a^9+x^9=(a^3)^3+(x^3)^3=(a^3+x^3)(a^6-a^3x^3+x^6)$

$=(a+x)(a^2-ax+x^2)(a^6-a^3x^3+x^6)$。

又 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。故

$a^3b^3-\frac{1}{8}x^3y^3=(ab)^3-(\frac{1}{2}xy)^3=(ab-\frac{1}{2}xy)(a^2b^2+\frac{1}{2}abxy+\frac{1}{4}x^2y^2)$。

附與此同法之例於下。

(1) $(a+b)^2-(c+d)^2=\{(a+b)+(c+d)\}\{(a+b)-(c+d)\}$

$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)$。

(2) $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$

$=\{(a^2+2ab+b^2)-c^2\}\{c^2-(a^2-2ab+b^2)\}=\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$

$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$。爲必要之公式。

(3) $(a+2b)^3-(2a+b)^3$

$=\{(a+2b)-(2a+b)\}\{(a+2b)^2+(a+2b)(2a+b)+(2a+b)^2\}$

$=(b-a)(7a^2+13ab+7b^2)$。

(79.) 視察之因子 x^2+px+q 之因子。可以視察而得,由恆同式 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$。則 x^2+px+q,有 $x+a, x+b$ 之因子 $a+b=p$, $ab=q$,

〔法則〕由是而 x^2+px+q。有一次因子。爲 x 之係數 p。即等於 $x+a, x+b$ 兩因子第二項之和。q 則等於其積。

例如 $x^2+7x+12$。則 $3+4=7$, $3\times4=12$。故

$x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$。

又 $x^2-7x+12$ 則 $(-3)+(-4)=-7$, $(-3)(-4)=12$。故

$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$。

又 $x^2+3x-18$。則 $-3+6=3$, $-3\times6=-18$。故

$x^2+3x-18=(x-3)(x+6)$。

已知 x^2+px+q 之因子。爲 $x+a$ 及 $x+b$。則以同法視察。可知 $x^2+pxy+qy^2$ 之因子爲 $x+ay$ 及 $x+by$。

又 $(x+y)^2+p(x+y)z+qz^2$ 之因子。爲 $x+y+az$ 及 $x+y+bz$。

由以上之結果。得 $x^2+7xy+12y^2=(x+3y)(x+4y)$,

$$x^2+3xy^2-18y^4=(x+6y^2)(x-3y^2)。$$

$$(a+b)^2-7(a+b)x+10x^2=(a+b-2x)(a+b-5x)。$$

及 $$x^4-5x^2+4=(x^2)^2-5(x^2)+4=(x^2-4)(x^2-1)$$
$$=(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)。$$

例題四

求次之各因子。

1. a^4-16b^4。

〔解〕原式 $=(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)=(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)$。

2. $16x^4-81a^4b^4$。 〔答 $(4x^2+9a^2b^2)(2x-3ab)(2x+3ab)$〕

3. $16-(3a+2b)^2$。

〔解〕原式 $=\{4+(3a+2b)\}\{4-(3a+2b)\}=(4+3a+2b)(4-3a-2b)$。

4. $4y^2-(2z-x)^2$ 〔答 $(2y+2z-x)(2y-2z+x)$〕

5. $20a^3x^3-45axy^2$。

〔解〕原式 $=5ax(4a^2x^2-9y^2)=5ax(2ax+3y)(2ax-3y)$。

6. $36a^2x^6-4a^2x^2y^4$。 〔答 $4a^2x^2(3x^2+y^2)(3x^2-y^2)$〕

7. $(3a^2-b^2)^2-(a^2-3b^2)^2$。

〔解〕原式 $=\{(3a^2-b^2)+(a^2-3b^2)\}\{(3a^2-b^2)-(a^2-3b^2)\}$
$=(4a^2-4b^2)(2a^2+2b^2)=8(a^2-b^2)(a^2+b^2)=8(a+b)(a-b)(a^2+b^2)$。

8. $(5a^2-3b^2)^2-(3a^2-5b^2)^2$。 〔答 $16(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$〕

9. $(5x^2+2x-3)^2-(x^2-2x-3)^2$。

〔解〕原式 $=\{(5x^2+2x-3)+(x^2-2x-3)\}\{(5x^2+2x-3)-(x^2-2x-3)\}$
$=(6x^2-6)(4x^2+4x)=24x(x^2-1)(x+1)=24x(x-1)(x+1)^2$。

10. $(3x^2-4x-2)^2-(3x^2+4x-2)^2$。 〔答 $16x(2-3x^2)$〕

11. $32a^3b^3-4b^9$。

〔解〕原式 $=4b^3(8a^3-b^6)=4b^3(2a-b^2)(4a^2+2ab^2+b^4)$。

12. $(a^2-2bc)^3-8b^3c^3$。 〔答 $(a^2-4bc)(a^4-2a^2bc+4b^2c^2)$〕

〔解〕原式 $=(a^2-2bc-2bc)\{(a^2-2bc)^2+(a^2-2bc)2bc+4b^2c^2\}$。

13. a^2-2a-8。

〔解〕$-4+2=-2$, $-4\times2=-8$, 故

原式 $=(a-4)(a+2)$。

14. $x+12-x^2$。

〔解〕原式 $=-(x^2-x-12)=-(x-4)(x+3)$。

15. $1-18x-63x^2$。

〔解〕$-21x+3x=-18x$, $-21x\times3x=-63x^2$。故

$1-18x-63x^2=(1-21x)(1+3x)$。

16. $8a-4a^2-4$。

〔解〕原式 $=-4(a^2-2a+1)=-4(a-1)^2$。

17. $a^3b-4a^2b^2+3ab^3$。

〔解〕原式 $=ab(a^2-4ab+3b^2)=ab(a-3b)(a-b)$。

18. $a^4b+5a^3b^2+4a^2b^3$。

〔解〕原式 $=a^2b(a^2+5ab+4b^2)=a^2b(a+b)(a+4b)$。

19. $(b+c)^2-6a(b+c)+5a^2$。 〔答 $(b+c-5a)(b+c-a)$〕

20. $9(a+b)^2-6(a+b)(c+d)+(c+d)^2$。

〔解〕原式 $=\{3(a+b)\}^2-2\{3(a+b)\}(c+d)+(c+d)^2=\{3(a+b)-(c+d)\}^2$。

21. x^4-29x^2+100。

〔解〕原式 $=(x^2)^2-29(x^2)+100=(x^2-25)(x^2-4)$

$=(x+5)(x-5)(x+2)(x-2)$。

22. $100x^4-29x^2y^2+y^4$。 〔答 $(5x+y)(5x-y)(2x+y)(2x-y)$〕

23. $x^4-8x^2y^2z^2+16y^4z^4$。

〔解〕原式 $=(x^2)^2-2(x^2)(4y^2z^2)+(4y^2z^2)^2=(x^2-4y^2z^2)^2$

$=(x+2yz)^2(x-2yz)^2$。

24. $9a^6-10a^4b^2+a^2b^4$。 〔答 $a^2(a+b)(a-b)(3a+b)(3a-b)$〕

25. $x^2-2ax-b^2+2ab$。

〔解〕原式 $=(x^2-2ax+a^2)-(a^2-2ab+b^2)=(x-a)^2-(a-b)^2$。

$=\{(x-a)+(a-b)\}\{(x-a)-(a-b)\}=(x-b)(x-2a+b)$。

26. $x^2+2xy-a^2-2ay$。 〔答 $(x-a)(x+2y+a)$〕

27. $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$。

〔解〕原式$=\{2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\}\{2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\}$

$=\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}$

$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)$。

28. $4(xy-ab)^2-(x^2+y^2-a^2-b^2)^2$。

〔答 $(x+y+a+b)(x+y-a-b)(x-y+a-b)(-x+y+a-b)$〕

(80.) 普通二次式之因子 某特別文字即x求其二次式之因子。法如下。

x之普通二次式。爲ax^2+bx+c (**60**章)。但a, b及c皆不含x,

此問題須先將x之普通二次式。分解其有理兩因子。此各因子。即x之一次式。即爲x及x以外之文字或數字所成之有理式或無理式。

普通二次式。爲ax^2+bx+c。欲求其兩因子。必先將此式配爲兩平方之差。

(注意) 將代數式化爲兩式平方之差A^2-B^2。最爲要法。因所求之兩因子。可從$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$解之。又$x^2+2ax+a^2$。爲完全之平方式。若祇有其首次兩項x^2, $2ax$。欲配成完全三項式。則其第三項。必爲x係數$2a$之半之平方。即a^2。

例如x^2+6x。則其第三項。爲x係數6之半之平方。即$3^2=9$。其完全平方式。即$x^2+6x+9=(x+3)^2$。

又x^2+5x加$\left(\frac{5}{2}\right)^2$則得$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$。

又x^2-px加$\left(\frac{-p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}$。則得$x^2-px+\frac{p^2}{4}=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$。

(81.) 二次式之因子分割法 求ax^2+bx+c之因子。

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)。$$

今由前章於 $x^2+\frac{b}{a}x$ 加 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$。則為 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$。故於前式之括弧內加減 $\frac{b^2}{4a^2}$。則

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right\}=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2\right\}。$$

由是而上式成為兩平方之差之形。故所求之因子為

$$ax^2+bx+c=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}$$

x 之二次式。常有 x 之一次兩因子。視 **91** 章。

〔第一例〕 求 x^2+4x+3 之因子。

$$x^2+4x+3=x^2+4x+4-4+3=(x+2)^2-1$$

$$=(x+2+1)(x+2-1)=(x+3)(x+1)$$

〔簡法〕 $4=3+1$, $3=3\times1$。 故 $x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$。

〔第二例〕 求 x^2-5x+3 之因子。

$$x^2-5x+3=x^2-5x+\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\left(-\frac{5}{2}\right)^2+3=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$

$$=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2=\left(x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$$

此例不能用簡法。

〔第三例〕 求 $3x^2-4x+1$ 之因子。

$$3x^2-4x+1=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=3\left\{x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right\}$$

$$=3\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right\}=3\left(x-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)=(3x-1)(x-1)$$

〔簡法〕 $3x^2-4x+1=3x^2-3x-x+1=3x(x-1)-(x-1)$

$$=(x-1)(3x-1)。$$

〔第四例〕 求$x^2+2ax-b^2-2ab$之因子。

$$x^2+2ax-b^2-2ab=x^2+2ax+a^2-a^2-b^2-2ab=(x+a)^2-(a+b)^2$$
$$=\{(x+a)+(a+b)\}\{(x+a)-(a+b)\}$$
$$=(x+2a+b)(x-b)。$$

(簡法) $x^2+2ax-b^2-2ab=x^2-b^2+2a(x-b)=(x-b)(x+b+2a)$。

82. 公式用法 可用下列之公式。求二次式之因子。

$$ax^2+bx+c=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right\}$$

例如$3x^2-4x+1$其$a=3$, $b=-4$, $c=1$, 故從上之公式

$$3x^2-4x+1=3\left\{x+\frac{-4}{2\times3}+\sqrt{\frac{16-4\times3\times1}{4\times9}}\right\}\left\{x+\frac{-4}{2\times3}-\sqrt{\frac{16-4\times3\times1}{4\times9}}\right\}$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\right)\left(x-\frac{2}{3}-\frac{2}{6}\right)=(3x-1)(x-1)。$$

(83.) 係數之關係 依81章。

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)。$$

於此公式中$a, b, c, \frac{b^2-4ac}{4a^2}$爲正或零或負。

〔第一〕 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$爲正。則ax^2+bx+c之兩因子。視b^2-4ac爲完全平方數卽有理。爲不完全平方數卽無理。

例如$3x^2-4x+1$。$b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times1=4=2^2$。

故$3x^2-4x+1$有有理兩因子$3x-1$及$x-1$。

又x^2-5x+3。$b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times3=13$爲不完全平方數

故$x-5x+3$有無理兩因子$x-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}$及$x-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}$。

〔第二〕 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$爲0。則前之公式

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right) \text{ 卽 } a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2。$$

故$b^2-4ac=0$。則ax^2+bx+c。爲x之完全平方式。

例如$4x^2-12x+9$。

$b^2-4ac=(-12)^2-4(4\times 9)=144-144=0$。

故 $4x^2-12x+9=(2x-3)^2$。

〔第三〕 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲負。則 $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ 即 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 之平方根決不能求。何也。凡正數或負數。其乘得之平方。皆爲正而不爲負也。

a 爲正則 $\sqrt{-a}$。即負數之平方根。謂之虛數(imaginary)。而他之正負各數量。則與此虛數量有區別。均謂之實數(Real)。

虛數之理。詳於後篇。此處祇求能辨虛數而已。由是知 ax^2+bx+c 之因子。若 b^2-4ac 爲負。則爲虛數因子也。

(註) 求因子之通例。在求有理因子。而有時亦須求無理因子。例如 x^3-8。通例以 $(x-2)(x^2+2x+4)$ 爲分解因子之結果。若再求 x 之一次三因子。則

$$x^2+2x+4=x^2+2x+1+3=(x+1)^2-(-3)$$
$$=(x+1)^2-(\sqrt{-3})^2=(x+1+\sqrt{-3})(x+1-\sqrt{-3}),$$

故 $x^3-8=(x-2)(x+1+\sqrt{-3})(x+1-\sqrt{-3})$。

求此虛數因子之理。詳於179章及193章。

84. 餘論 81章於二次式分爲一次兩因子。(實數或虛數)已示其法則。而普通三次式。如 ax^3+bx^2+cx+d。又四次五次等。其求因子法。以本編係授初學。故暫不說明。然在特別各式。可示明求因子之法如下。

(85.) 項之整列及集合 求代數式之因子。有時當將各項整列或集合之。其法如下。

例如 $1+ax-x^2-ax^3=(1+ax)-x^2(1+ax)$

$$=(1+ax)(1-x^2)=(1+ax)(1+x)(1-x)。$$

或書爲 $1-x^2+ax-ax^3=(1-x^2)+ax(1-x^2)$

$$=(1-x^2)(1+ax)=(1+x)(1-x)(1+ax)。$$

求代數式之因子。原無普通之法則。然必整列或集合之。如下所示之方法爲最要。

((第一)) 代數式含一次方之文字。則括合其同文字之項。而其因子自易求得。

〔第一例〕求 $ab+bc+cd+da$ 之因子。

此式中 a, b, c, d 各爲一次方。今集合其 a 字。則

$$ab+bc+cd+da=(ab+da)+(bc+cd)=a(b+d)+c(b+d)=(b+d)(a+c)。$$

〔第二例〕求 $x^2+(a+b+c)x+ab+ac$ 之因子。

此式中 a, b, c 各爲一次方。集合 a 字。則

$$x^2+(a+b+c)x+ab+ac=(x^2+bx+cx)+(ax+ab+ac)$$
$$=x(x+b+c)+a(x+b+c)=(x+b+c)(x+a)$$

〔第三例〕求 $ax^3+x+a+1$ 之因子。

集合一次方之 a 字，則

$$ax^3+x+a+1=a(x^3+1)+(x+1)=(x+1)\{a(x^2-x+1)+1\}$$

〔第四例〕求 $a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc$ 之因子。

此式中惟 c 爲一次方。故集合 c 字。則

$$a^2+2ab-2ac-3b^2+2bc=(a^2+2ab-3b^2)-2c(a-b)$$
$$=(a-b)(a+3b-2c)。$$

壹方乘之文字在代數式其因子分割法甚易。

((第二)) 代數式屬於某文字之二次式，如81章。其文字依遞降方乘整列。而求其因子(但爲有理因子)。

〔第一例〕求 $a^2+3b^2-c^2+2bc-4ab$ 之因子。

$$a^2+3b^2-c^2+2bc-4ab=a^2-4ab+3b^2+2bc-c^2$$
$$=a^2-4ab+4b^2-b^2+2bc-c^2=(a-2b)^2-(b-c)^2$$
$$=\{(a-2b)+(b-c)\}\{(a-2b)-(b-c)\}=(a-b-c)(a-3b+c)。$$

〔第二例〕求 $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$ 之因子。

$$原式=a^2-2ad+d^2-b^2-c^2+2bc=(a-d)^2-(b-c)^2$$
$$=(a-d+b-c)(a-d-b+c)。$$

〔第三例〕求 $a^2+2ab-ac-3b^2+5bc-2c^2$ 之因子。

$$原式=a^2+a(2b-c)-3b^2+5bc-2c^2$$
$$=a^2+a(2b-c)+\left(\frac{2b-c}{2}\right)^2-\left(\frac{2b-c}{2}\right)^2-3b^2+5bc-2c^2$$

$$=\left(a+\frac{2b-c}{2}\right)^2-\left(\frac{4b^2-4bc+c^2}{4}+3b^2-5bc+2c^2\right)$$

$$=\left(a+\frac{2b-c}{2}\right)^2-\frac{16b^2-24bc+9c^2}{4}=\left(a+\frac{2b-c}{2}\right)^2-\left(\frac{4b-3c}{2}\right)^2$$

$$=\left(a+\frac{2b-c}{2}+\frac{4b-3c}{2}\right)\left(a+\frac{2b-c}{2}-\frac{4b-3c}{2}\right)$$

$$=(a+3b-2c)(a-b+c)。$$

(簡法)原式$=a^2+a(2b-c)-(3b^2-5bc+2c)^2$

$$=a^2+a(2b-c)-(3b-2c)(b-c)$$

$$=a^2+a\{(3b-2c)-(b-c)\}-(3b-2c)(b-c)$$

$$=a^2+a(3b-2c)-a(b-c)-(3b-2c)(b-c)$$

$$=a(a+3b-2c)-(b-c)(a+3b-2c)$$

$$=(a+3b-2c)(a-b+c)。$$

大注意　此簡法於a之係數$2b-c$。作爲第三項$(3b-2c)(b-c)$之和或差。卽$(3b-2c)-(b-c)=2b-c$。

此法見79章之$x^2+px+q=(x+a)(x+b)$。而由$p=a+b$, $q=ab$擴張之者。實爲此後之要法。

〔第四例〕　求$x^4+x^2-2ax+1-a^2$之因子。

此爲a之二次式。故依a之遞降方乘整列。則

原式$=-\{a^2+2ax-x^4-x^2-1\}$

$$=-\{a^2+2ax+x^2-x^4-2x^2-1\}$$

$$=-\{(a+x)^2-(x^2+1)^2\}=-(a+x+x^2+1)(a+x-x^2-1)。$$

((第三))　代數式中某特別之一字。祇合兩個方乘。其一個之平方等於他一個。則其因子可如二次式解之。見81章。

〔第一例〕　求x^4-10x^2+9之因子。

$$x^4-10x^2+9=(x^2)^2-10(x^2)+25-25+9=(x^2-5)^2-16$$

$$=(x^2-5+4)(x^2-5-4)=(x^2-1)(x^2-9)$$

$$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)。$$

或$x^4-10x^2+9=x^4-6x^2+9-4x^2=(x^2-3)^2-(2x)^2$

$$=(x^2-3+2x)(x^2-3-2x)=(x+3)(x-1)(x-3)(x+1)。$$

〔第二例〕求 x^4+x^2+1 之因子。

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)。$$

〔注意〕若令 $x^4+x^2+1=x^4+x^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$=\left(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$ 則不合於理，

〔第三例〕求 x^6-28x^3+27 之因子。

$$x^6-28x^3+27=x^6-28x^3+14^2-14^2+27=(x^3-14)^2-13^2$$
$$=(x^3-14+13)(x^3-14-13)=(x^3-1)(x^3-27)$$
$$=(x-1)(x^2+x+1)(x-3)(x^2+3x+9)。$$

此例及第一例亦可用79章之方法求之。

〔第四例〕求 $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ 之因子。

原式 $=a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^4-2b^2c^2+c^4)$

$=a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2-(b^2+c^2)^2+(b^2-c^2)^2$

$=\{a^2-(b^2+c^2)\}^2-4b^2c^2$

$=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)$

$=\{a^2-(b-c)^2\}\{a^2-(b+c)^2\}$

$=(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)。$

（簡法）原式 $=a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2$

$=a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b+c)^2(b-c)^2$

$=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$

$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)。$

((第四)) P 含有 x 之若干項者。如 aP^2+bP+c，可依81章

$$aP^2+bP+c=a\left(P+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\left(P+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)。$$

〔第一例〕求 $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$ 之因子。

以 P 代 x^2+x 則

原式 $=P^2+4P-12=(P+6)(P-2)$

$=(x^2+x+6)(x^2+x-2)=(x^2+x+6)(x+2)(x-1)。$

此例之 x^2+x-2。依 83 章第壹 $b^2-4ac=1^2-4\times1(-2)=9=3^2$。故得 $(x+2)(x-1)$。

然在 x^2+x+6。則 $b^2-4ac=1^2-4\times1\times6=-23$。故不能得有理因子。

［第二例］求 $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$ 之因子。

$$\text{原式}=\{(x^2+x+4)+3x\}\{(x^2+x+4)+5x\}$$
$$=(x^2+4x+4)(x^2+6x+4)=(x+2)^2(x^2+6x+4)$$

［第三例］求 $2(x^2+6x+1)^2+5(x^2+6x+1)(x^2+1)+2(x^2+1)^2$ 之因子。

$2P^2+5PQ+2Q^2=(2P+Q)(P+2Q)$。故

$$\text{原式}=\{2(x^2+6x+1)+(x^2+1)\}\{(x^2+6x+1)+2(x^2+1)\}$$
$$=(3x^2+12x+3)(3x^2+6x+3)$$
$$=9(x^2+4x+1)(x+1)^2\text{。}$$

［第四例］求 $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$ 之因子。

$$\text{原式}=(x^2+x+1)(x^2+x+1+1)-12$$
$$=(x^2+x+1)^2+(x^2+x+1)-12$$
$$=\{(x^2+x+1)+4\}\{(x^2+x+1)-3\}$$
$$=(x^2+x+5)(x^2+x-2)$$
$$=(x^2+x+5)(x+2)(x-1)\text{。}$$

$$\text{或原式}=(x^2+x)^2+3(x^2+x)+2-12$$
$$=(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10$$
$$=(x^2+x+5)(x^2+x-2)=(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$$

例題五

求次列各式之因子。

1. x^3+ax^2-x-a.

〔解〕原式 $=x(x^2-1)+a(x^2-1)=(x^2-1)(x+a)=(x+1)(x-1)(x+a)$,

2. $ac-bd-ad+bc$。

〔解〕原式 $=a(c-d)+b(c-d)=(c-d)(a+b)$。

3. $ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$。

〔解〕原式 $=a(c^2-d^2)-b(c^2-d^2)=(c^2-d^2)(a-b)=(c+d)(c-d)(a-b)$,

4. $acx^2+(bc+ad)xy+bdy^2$。

〔解〕原式$=ax(cx+dy)+by(cx+dy)=(cx+dy)(ax+by)$。

5. $acx^3+bcx^2+adx+bd$。

〔解〕原式$=ax(cx^2+d)+b(cx^2+d)=(cx^2+d)(ax+b)$。

6. $(a+b)^2+(a+c)^2-(c+d)^2-(b+d)^2$。

〔解〕原式$=(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2$

$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)+(a+c+b+d)(a+c-b-d)$

$=(a+b+c+d)(a+b-c-d+a+c-b-d)=2(a+b+c+d)(a-d)$。

7. $a^4+a^3b-ab^3-b^4$。

〔解〕原式$=a^3(a+b)-b^3(a+b)=(a+b)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)$。

8. $a^4-a^3b-ab^3+b^4$。 〔答 $(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$〕

9. $a^2b^2-a^2-b^2+1$。

〔解〕原式$=a^2(b^2-1)-(b^2-1)=(b^2-1)(a^2-1)$

$=(b+1)(b-1)(a+1)(a-1)$。

10. $x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2+z^4$。

〔解〕原式$=x^2(y^2-z^2)-z^2(y^2-z^2)=(y^2-z^2)(x^2-z^2)$

$=(y+z)(y-z)(x+z)(x-z)$。

11. $x^2y^2z^2-x^2z-y^2z+1$。

〔解〕原式$=y^2z(x^2z-1)-(x^2z-1)=(x^2z-1)(y^2z-1)$。

12. $x^4+x^3y+xz^3+yz^3$。 〔答 $(x+y)(x+z)(x^2-xz+z^2)$〕。

13. $x(x+z)-y(y+z)$。

〔解〕原式$=(x^2-y^2)+z(x-y)=(x-y)(x+y+z)$。

14. x^4-7x^2-18。 〔答 $(x+3)(x-3)(x^2+2)$〕。

15. x^4-23x^2+1。

〔解〕原式$=x^4+2x^2+1-25x^2=(x^2+1)^2-(5x)^2$

$=(x^2+1+5x)(x^2+1-5x)=(x^2+5x+1)(x^2-5x+1)$。

16. $x^4-14x^2y^2+y^4$。

〔解〕原式$=x^4+2x^2y^2+y^4-16x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(4xy)^2$

$=(x^2+y^2+4xy)(x^2+y^2-4xy)=(x^2+4xy+y^2)(x^2-4xy+y^2)$。

17. x^8+x^4+1。

〔解〕原式$=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+1+x^2)(x^4+1-x^2)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$。

18. $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$,

〔解〕原式$=x^4-\{(a+b)^2+(a-b)^2\}x^2+(a+b)^2(a-b)^2$

$=\{x^2-(a+b)^2\}\{x^2-(a-b)^2\}$

$=(x+a+b)(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b)$,

19. $x^4-4x^2y^2z^2+4y^4z^4$。 〔答 $(x^2-2y^2z^2)^2$〕。

20. $x^2-2(a+b)x-ab(a-2)(b+2)$。

〔解〕原式$=x^2-2(a+b)x+(a+b)^2-(a+b)^2-ab(a-2)(b+2)$

$=\{x-(a+b)\}^2-\{(a+b)^2+ab\{ab+2(a-b)-4\}\}$

$=(x-a-b)^2-\{(a+b)^2-4ab+2ab(a-b)+a^2b^2\}$

$=(x-a-b)^2-\{(a-b)^2+2ab(a-b)+a^2b^2\}$

$=(x-a-b)^2-(a-b+ab)^2$

$=(x-a-b+a-b+ab)(x-a-b-a+b-ab)$

$=(x-2b+ab)(x-2a-ab)$。

〔簡法〕原式$=x^2-2(a+b)x-(ab-2b)(ab+2a)$

$=x^2-\{(ab+2a)-(ab-2b)\}x-(ab-2b)(ab+2a)$

$=x^2-(ab+2a)x+(ab-2b)x-(ab-2b)(ab+2a)$

$=x(x-ab-2a)+(ab-2b)(x-ab-2a)$

$=(x-ab-2a)(x+ab-2b)$。

21. $x^3+bx^2+ax+ab$。 〔答 $(x^2+a)(x+b)$〕。

22. $(1+y)^2-2x^2(1+y^2)+x^4(1-y)^2$。

〔解〕原式$=(1+y)^2-x^2\{(1+y)^2+(1-y)^2\}+x^4(1-y)^2$

$=(1+y)^2-x^2(1+y)^2-x^2(1-y)^2+x^4(1-y)^2$

$=(1+y)^2(1-x^2)-x^2(1-y)^2(1-x^2)$

$=(1-x^2)\{(1+y)^2-x^2(1-y)^2\}$

$=(1+x)(1-x)\{1+y+x(1-y)\}\{1+y-x(1-y)\}$

23. $x^2-y^2-3z^2-2xz+4yz$。

〔解〕原式$=x^2-2xz+z^2-(y^2-4yz+4z^2)$

$=(x-z)^2-(y-2z)^2=(x-z+y-2z)(x-z-y+2z)$

$=(x+y-3z)(x-y+z)$。

24. $2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$。

[解] 依a之遞昇方乘整列而括合之。則

原式$=(2y^2-5xy+2x^2)-a(y+x)-a^2$

$=(2y-x)(y-2x)-a\{(2y-x)-(y-2x)\}-a^2$

$=(2y-x)(y-2x-a)+a(y-2x-a)$

$=(y-2x-a)(2y-x+a)$。

25. $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$。

[解] 原式$=a^2-2a(b+c)-3b^2-3c^2+10bc$

$=a^2-2a(b+c)+(b+c)^2-(b+c)^2-3b^2-3c^2+10bc$

$=\{a-(b+c)\}^2-\{(b+c)^2+3b^2+3c^2-10bc\}$

$=(a-b-c)^2-(2b-2c)^2$

$=(a-b-c+2b-2c)(a-b-c-2b+2c)$

$=(a+b-3c)(a-3b+c)$。

26. $2a^2-7ab-22b^2-5a+35b-3$。

[解] 依a之二次式整列之。則

原式$=2a^2-a(7b+5)-(22b^2-35b+3)$

$=2a^2-a(7b+5)-(11b-1)(2b-3)$

$=2a^2-a\{(11b-1)-2(2b-3)\}-(11b-1)(2b-3)$

$=2a^2-a(11b-1)+2a(2b-3)-(11b-1)(2b-3)$

$=a(2a-11b+1)+(2b-3)(2a-11b+1)$

$=(2a-11b+1)(a+2b-3)$。若將原式括合其二次一次諸項.

則得$(2a^2-7ab-22b^2)-(5a-35b)-3$

$=(a+2b)(2a-11b)-\{3(2a-11b)-(a+2b)\}-3$

$=(2a-11b)(a+2b-3)+(a+2b-3)=(a+2b-3)(2a-11b+1)$。

27. $1+(b-a^2)x^2-abx^3$。

[解] 原式$=1-a^2x^2+bx^2(1-ax)=(1-ax)(1+ax+bx^2)$。

28. $1-2ax-(c-a^2)x^2+acx^3$。

[解] 原式$=1-2ax+a^2x^2-cx^2(1-ax)=(1-ax)(1-ax-cx^2)$。

29. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$。

〔解〕括合 a 之二次式。則

原式 $=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}=(b-c)(a-b)(a-c)$。

30. $b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2+2abc$。

〔解〕集合 a 之二次式。則

原式 $=a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}=(b+c)(a+b)(a+c)$。

31. $a^2b-ab^2+a^2c-ac^2-2abc+b^2c+bc^2$。

〔解〕原式 $=a^2(b+c)-a(b^2+2bc+c^2)+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2-a(b+c)+bc\}=(b+c)(a-b)(a-c)$。

32. $x^3(a+1)-xy(x-y)(a-b)+y^3(b+1)$。

〔解〕括合 a 與 b 之各項。則

原式 $=a\{x^3-xy(x-y)\}+b\{xy(x-y)+y^3\}+x^3+y^3$

$=ax(x^2-xy+y^2)+by(x^2-xy+y^2)+(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^2-xy+y^2)(ax+by+x+y)$,

33. $ax(y^3+b^3)+by(bx^2+a^2y)$。

〔解〕原式 $=xy(ay^2+b^2x)+ab(b^2x+ay^2)=(b^2x+ay^2)(xy+ab)$。

34. $2x^3-4x^2y-x^2z+2xy^2+2xyz-y^2z$。

〔解〕原式 $=2x^3-4x^2y+2xy^2-z(x^2-2xy+y^2)$

$=2x(x^2-2xy+y^2)-z(x^2-2xy+y^2)$

$=(x^2-2xy+y^2)(2x-z)=(x-y)^2(2x-z)$。

35. $xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$。

〔解〕依 x 之遞降方乘括合之。則

原式 $=x^4yz-x^3(y^3+z^3)+xyz(y^3+z^3)-y^3z^3$

$=yz(x^4-y^2z^2)-x(y^3+z^3)(x^2-yz)$

$=(x^2-yz)\{yz(x^2+yz)-x(y^3+z^3)\}$

$=(x^2-yz)(x^2yz+y^2z^2-xy^3-xz^3)$

$=(x^2-yz)\{z^2(y^2-zx)-xy(y^2-zx)\}$

$=(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$。

36. $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24.$

〔解〕原式 $=(x^2+x-12)(x^2+x-2)=(x-3)(x+4)(x-1)(x+2)$。

37. $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$。

〔解〕原式 $=(x^2+4x+8+2x)(x^2+4x+8+x)$

$=(x^2+6x+8)(x^2+5x+8)=(x+4)(x+2)(x^2+5x+8)$。

38. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$。

〔解〕$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

$=\{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\}-24=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24-24$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$。

39. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$。

〔解〕原式 $=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

$=\{(x^2+8x+10)-3\}\{(x^2+8x+10)+5\}+15$

$=(x^2+8x+10)^2+2(x^2+8x+10)-15+15$

$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+10+2)=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$。

40. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$。

〔解〕$4(x+5)(x+12)(x+6)(x+10)-3x^2$

$=4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2$

$=4\{(x^2+16x+60)+x\}(x^2+16x+60)-3x^2$

$=4(x^2+16x+60)^2+4x(x^2+16x+60)-3x^2$

$=\{2(x^2+16x+60)+3x\}\{2(x^2+16x+60)-x\}$

$=(2x^2+35x+120)(2x^2+31x+120)=(2x^2+35x+120)(2x+15)(x+8)$。

(86.) 定理 x^n-a^n 可以 $x-a$ 除之，但 n 必爲正整數，

$x-a)x^n-a^n(x^{n-1}$

$\underline{x^n-ax^{n-1}}$

$ax^{n-1}-a^n=a(x^{n-1}-a^{n-1})$……餘式

由是而 $x^n-a^n=x^{n-1}(x-a)+a(x^{n-1}-a^{n-1})$…………(A)

(A) 之右邊 $x^{n-1}-a^{n-1}$。如可以 $x-a$ 除盡。則凡右邊皆可以 $x-a$ 除盡。卽知 $x-a$，可以除盡其左邊，

故 $x-a$。可以除盡 $x^{n-1}-a^{n-1}$。即能除盡 x^n-a^n。

但 $x-a$ 能除盡 x^3-a^3。故能除盡 x^4-a^4。

即能除盡 x^5-a^5。

即能除盡 x^6-a^6。

準此推之。知 x^n-a^n 式。其 n 爲任何正整數。無不可以 $x-a$ 除盡。

(87.) 餘論 因 $x^n+a^n=x^n-a^n+2a^n$。故以 $x-a$ 除 x^n+a^n。可除盡 x^n-a^n 而仍餘 $2a^n$。

〔定理〕 $x-a$ 決不能除盡 x^n+a^n。

又 $x-a$ 能除盡 x^n-a^n。故以 $-a$ 代 a。則

$x^n-(-a)^n$。可以 $x-(-a)$ 除盡。

但 $x-(-a)=x+a$, n 爲奇數。則 $(-a)^n=-a^n$。爲偶數。則 $(-a)^n=a^n$。

〔定理〕 由是 $n=$ 奇數。則 x^n+a^n 可以 $x+a$ 除盡。

〔定理〕 由是 $n=$ 偶數。則 x^n-a^n 可以 $x+a$ 除盡。

〔四定理〕 由是 n 爲任意之正整數。則

$x-a$ 恆能除盡 x^n-a^n。

$x-a$ 恆不能除盡 x^n+a^n。

n 爲奇數。$x+a$ 恆能除盡 x^n+a^n。

n 爲偶數。$x+a$ 恆能除盡 x^n-a^n。

依上之定理而得

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots\cdots\cdots+a^{n-1}。$$

$$\frac{x^n\pm a^n}{x+a}=x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2-\cdots\cdots\cdots\pm a^{n-1}。$$

但第二式如 n 爲奇數。則用複號 $\pm$ 中之 $+$。n 爲偶數。則用複號 $\pm$ 中之 $-$。

(88.) 定理 含 x 之有理整代數式。如用 a 代 x。而此式爲 0。則 $x-a$。必爲此式之因子(最必要)。

此有理式。依 x 之遞降方乘。整列之如下。

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots$

由題意用α代x。而設爲等於0如下。

$$a\alpha^n+b\alpha^{n-}+c\alpha^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots=0$$

從原式減去此式是減0也，故仍得原式。即

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots\ldots$$
$$=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots-(a\alpha^n+b\alpha^{-1}+c\alpha^{n-2}+\ldots)$$
$$=a(x^n-\alpha^n)+b(x^{n-1}-\alpha^{n-1})+c(x^{n-2}-\alpha^{n-2})+\ldots\ldots$$

由前章之之定理，知$x^n-\alpha^n$, $x^{n-1}-\alpha^{n-1}$, $x^{n-2}-\alpha^{n-2}$, 皆能以$x-\alpha$除盡。故$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots$亦能以$x-\alpha$除盡。而爲其因子。

〔別證〕此定理又可證之如下。

以$x-\alpha$除$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots$令其商爲Q。其餘爲R。則

$$ax^n+bx^{n-1}+c^{n-2}+\ldots\ldots=Q(x-\alpha)+R\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

此恆同式不論用何數代x。皆合於理。

故令$x=\alpha$。則

$$a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}+\ldots=Q(\alpha-\alpha)+R=R,\ldots\ldots\ldots(B)$$

但Q爲含x之式，故易x爲α，則Q之值當變。故爲Q'。又R爲$x-\alpha$除原式之餘式。不含有x。故x之值雖變。而R仍爲R。

由是而R爲0，則(B)之左邊爲0。即用α代x之原式爲0。其原式能以$x-\alpha$除盡。若用α代x而不爲0。則(B)之左邊。即爲以$x-\alpha$除原式之餘式。

〔定理〕由是於x之有理整代數式用α代x。則其變化之式爲以$x-\alpha$除原式之餘式。

〔第一例〕求以$x-2$除x^3-4x^2+2之餘數式。

令$x=2$。則餘數$=2^3-4.2^2+2=-6$。

〔第二例〕求以$x-a$除$x^3-2a^2x+a^3$之餘數。

令$x=a$。則餘數$=a^3-2a^2a+a^3=0$。即原式能以$x-a$除盡。

〔第三例〕示$x-1$, $x-5$, $x+2$及$x+4$。爲$x^4-23x^2-18x+40$之因子。

令$x=1$　則原式$=1^4-23.1^2-18.1+40=0$　$\therefore$ $x-1$爲因子。
令$x=5$　則原式$=5^4-23.5^2-18.5+40=0$　$\therefore$ $x-5$爲因子。
令$x=-2$則原式$=(-2)^4-23(-2)^2-18(-2)+40=0$ $\therefore$ $x+2$爲因子。
令$x=-4$則原式$=(-4)^4-23(-4)^2-18(-4)+40=0$ $\therefore$ $x+4$爲因子.

〔第四例〕示 $a-b$。爲 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 之因子。

令 $a=b$ 則原式 $=b^3(b-c)+b^3(c-b)+0=0$

〔第五例〕示 a 爲 $(a+b+c)^3-(-a+b+c)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3$ 之因子

令 $a=0$ 則原式 $=(b+c)^3-(b+c)^3-(-b+c)^3-(b-c)^3$

$$=(b+c)^3-(b+c)^3+(b-c)^3-(b-c)^3=0$$

增補之問題 求 $x-\alpha$ 除 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots$ 之商及餘式。

設商爲 Q。餘數爲 R。依前之定理，則

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots=Q(x-\alpha)+R。$$

以 α 代 x 得 $a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}+\ldots\ldots=R。$

由減法而 $a(x^n-\alpha^n)+b(x^{n-1}-\alpha^{n-1})+c(x^{n-2}-\alpha^{n-2}+\ldots\ldots=Q(x-\alpha)$。

以 $x-\alpha$ 除之，得

$$a(x^{n-1}+x^{n-2}\alpha+x^{n-3}\alpha^2+\ldots)+b(x^{n-2}+x^{n-3}\alpha+\ldots)+c(x^{n-3}+\ldots)=Q。$$

即 $Q=ax^{n-1}+(a\alpha+b)x^{n-2}+(a\alpha^2+b\alpha+c)x^{n-3}+\ldots\ldots$

〔例〕求 $x-m$ 除 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 之商及餘式。

商 $=ax^3+(am+b)x^2+(am^2+bm+c)x+am^3+bm^2+cm+d,$

及餘式 $=am^4+bm^3+cm^2+dm+e$。

89. 餘論 於代數式 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots$ 內用 α 代 x，若此式爲 0。則 $x-\alpha$ 爲其因子。此理前已證明之。

今以 $x-\alpha$ 除此式。則其商之第一項，(x 之最高次項) 必爲 ax^{n-1}，由是原式 $=(x-\alpha)(ax^{n-1}+\ldots\ldots)$。

又設 $x=\beta$。而原式爲 0。則 $x=\beta$。其 $(x-\alpha)(ax^{n-1}+\ldots)$ 式亦必爲 0。但 $x=\beta$ 時。則 $x-\alpha$ 不能爲 0。故知 $ax^{n-1}+\ldots$ 式當爲 0。故 $ax^{n-1}+\ldots$ 能以 $x-\beta$ 除盡。

由是原式 $=(x-\alpha)(x-\beta)(ax^{n-2}+\ldots)$。

又如以 $\gamma, \delta\ldots\ldots$ 等代 x。而原式亦爲 0。則由同理而得

原式 $=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots\ldots(ax^{n-r}+\ldots\ldots\ldots)$。

但 r 爲 $x-\alpha, x-\beta, x-\gamma, x-\delta\ldots\ldots$ 諸因子之數。若 $r=n$。則 $ax^{n-r}=ax^0$ 即 a。

由是原式 $=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots\ldots$

在上式之 $x-\alpha, x-\beta, x-\gamma, x-\delta,\ldots\ldots$ 爲 n 個因子。

〔推論〕若 $x-\alpha$, $x-\beta$,……等因子在 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+$……式內不僅一個。例如 $x-\alpha$ 因子有 p 個。$x-\beta$ 因子有 q 個。……則

原式 $=a(x-\alpha)^p(x-\beta)^q$……故 $p+q$……$=n$。

90. 凡 x 之 n 次式 x 之值。不能多於 n 個。若於 n 個外。別以他字代 x。則其式不能爲 0。

何則。如 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots$ 其 x 之 n 個值 $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ 等。能令其式爲 0。故依前章得

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$$

今若於 x 之 n 個 $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ 外。設有 x 之值 k 而以之代 x。則 $a(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)\ldots=0$。

然 k 與 $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ 各值不同。則 $k-\alpha$, $k-\beta$, $k-\gamma\ldots$ 各因子。均不能爲 0。而必 $a=0$。

故 x 之 n 次式若多於 n 個值。而其式爲 0 者。則其第一項（x 之最高次項）之係數必爲 0。

但 a 爲 0。則原式必變爲 $n-1$ 次式。即 $bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots$ 而此式 x 之值。若多於 $n-1$ 個。能令其式爲 0。則依同理必 $b=0$。

由此依同理類推。則必 $c=0$, $d=0$ 一切係數。可順次而知其等於 0 也。

〔定理之再述〕由是 x 之 n 次式。若 x 之值多於 n 個。而其式爲 0 者。必其係數皆爲 0 而後可。否則 x 之值。不能多於 n 個。若多於 n 個。其式不能爲 0。

91. 定理　凡 x 之兩 n 次式。若 x 有多於 n 個之值相等。則兩式全相等。（此即謂兩 n 次式。其以字代 x。而其值相等者。不能多於 n 個。若多於 n 個。則兩式相同云云）。

如 x 之兩 n 次式。爲

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots\ldots$$

及 $px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\ldots\ldots\ldots$

設此兩式中。其 x 有多於 n 個之值相等。則兩式之差。爲

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots-(px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\ldots)。$$

即 $(a-p)x^n+(b-q)x^{n-1}+(c-r)x^{n-2}+\ldots\ldots$ 是 x 之值多於 n 個。而其式爲0。則由前章之定理。其係數皆爲0。

即 $a-p=0,\ b-q=0,\ c-r=0\ldots\ldots$

即 $a=q,\ b=q,\ c=r\ldots\ldots$ 則兩式全相同。故無論以何值代x。而彼此恆相等。

〔別言〕是故n次之兩代數式。其代x之值。多於n個而相等。則兩式內x之同方乘之係數必相等。

有限項(自二項以至多項。其項數有限者)之兩代數式。其所含文字之任何值相等。則其同文字同方乘之係數必相等。

故有限項之任意兩代數式。其所含文字之任何值相等。則任意一文字之各方乘之係數亦相等。(此定理。甚爲重要。以下諸編屢用及之)。

92. 定理 含x之有理整代數式。分割其一次因子。祇有一法。

例如 x^2-3x+2。分割爲 $(x-1)(x-2)$。但僅此一法而已。決不能分割爲 $(x+1)(x-2)$ 或 $(x+2)(x+4)$。

設如 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots$ 能分割爲 $a(x-\alpha)^p(x-\beta')^q\ldots$ 又依他之方法。分割爲 $a(x-\alpha')^m(x-\beta')^s\ldots$ 則令 $x=\alpha$ 而原式爲0時。其第二方法變得之式。爲

$a(\alpha-\alpha')^m(\alpha-\beta')^s\ldots=0$。然則 $\alpha-\alpha',\ \alpha-\beta'\ldots\ldots$ 諸因子內。必有一因子爲0。

今定 $\alpha=\alpha'$。於此兩方法之式。皆能以 $x-\alpha$ 除盡。則各因子之數相等。即 $p=m$

何則。$a(x-\alpha)^p(x-\beta)^q\ldots\ldots=a(x-\alpha')^m(x-\beta')^s\ldots$ 若p與m不相等。則以 $x-\alpha$ 除之。兩式內必有一式尙餘 $x-\alpha$。如

$a(x-\beta')^q\ldots=a(x-\alpha)^{m-p}(x-\beta')^s\ldots$ 則 $x=\alpha$ 時。僅有一式爲0。於理爲不合。

故由 α 等於 α' 同法推得 $\beta,\ldots\beta'\ldots$ 亦各相等。即兩方法全然相同。

(93.) 輪換次序 (Cyclical order) 代數式整列於特別之順序。亦爲必要之法。

例如代數式$bc+ca+ab$。爲依輪換次序整列者也。輪換次序如右式即換 a 爲 b。換 b 爲 c。換 c 爲 a。謂之 a, b, c 輪換。

於 $bc+ca+ab$ 式。第一項 bc 換 b 爲 c。換 c 爲 a。即得第二項 ca。又換此 c 爲 a, a 爲 b。即得第三項 ab。

但不可如 $ab+ca+cb$ 式之不依順序。

又 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 亦爲依 a, b, c 之輪換次序整列者也。即從 $a^2(b-c)$。得 $b^2(c-a)$。從 $b^2(c-a)$。得 $c^2(a-b)$。又如 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 亦爲依輪換次序整列者。

(94.) 等勢式 (Symmetrical expressions) 凡代數式以其任意之兩文字互換。而其值不變者。稱之爲等勢式。

例如 $a+b+c$, $bc+ca+ab$, $a^3+b^3+c^3-3abc$, 皆爲等勢式。何則。因 $a+b+c$ 若將 a, b 互換。則爲 $b+a+c$。或將 a, c 互換。而爲 $c+b+a$。其值皆不變也。

又於 $bc+ca+ab$ 式互換 a, b。則爲 $ac+cb+ba$。其值不變。

又於 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 式互換 b, a。則爲 $b^3+a^3+c^3-3bac$。其值亦不變。故爲等勢式。

設有 $a+2b+3c$ 式。將 a, b 互換。爲 $b+2a+3c$。則其值變。故非等勢式。

代數式若祇以任意之二字互換。則其值變。若輪換其諸文字。則其值不變者。謂之輪換等勢式。

例如 $a^2b+b^2c+c^2a$ 互換 a, b。則爲

$b^2a+a^2c+c^2b$。其值變。若將 a, b, c 輪換。則爲

$b^2c+c^2a+a^2b$。其值不變。故爲輪換等勢式。

又 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 式互換 a, b。則爲 $(a-c)(c-b)(b-a)$

卽 $-(c-a)(a-b)(b-c)$。其値變。然將 a, b, c 輪換。則得

$(c-a)(a-b)(b-c)$。其值不變。故爲輪換等勢式。

兩等勢式之積或商。亦爲等勢式。何則。各式內之文字。既能互換或輪換。而其值不變。則其積及商內之文字。亦必互換或輪換而其值不變。

[等勢公式] 等勢公式。學者以能自作之爲要。

例如 $2a+3b+5c$。非等勢式。若

$3a+3b+3c, -7a-7b-7c$。則一見而知爲一次等勢式。蓋 a, b, c 之係數常相等。卽爲等勢式也。故 $La+Lb+Lc$ 卽 $L(a+b+c)$。知其爲一次之等勢公式。

又 a, b, c 之二次等勢式爲 $2a^2+2b^2+2c^2$ 及 $6ab+6bc+6ca$。或 $8a^2+8b^2+8c^2+6ab+6bc+6ca$。故 $L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)$ 爲二次之等勢公式。何則，$L=2$, $M=0$。則得第一式。$L=0$, $M=6$。則得第二式。$L=8$, $M=6$。則得第三式。

一次式與二次式互換輪換皆同。自三次式以上。互換者雖可輪換。而輪換者不能互換。

例如 a, b, c 之三次互換公式爲

$$L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+Nabc。$$

又輪換公式爲

$$L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+b^2c+c^2a)+N(ab^2+bc^2+ca^2)+Pabc。$$

四次以上解法同。

〔第一例〕 求 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 之因子。

命 $a=b$。則原式 $=b^2(b-c)+b^2(c-b)+0=b^2(b-c)-b^2(b-c)=0$。

故 $a-b$ 爲原式之一因子。見(88章)。同法得 $b-c$, $c-a$ 亦爲因子。而原式爲三次式。故其因子之數有三。

$$\therefore 原式=L(a-b)(b-c)(c-a)。$$

但 L 爲 a, b, c 同一之某係數。故依 91 章。原式與右邊之式。其同文字之係數當相等。

由是原式與右邊之式。比較其 a^2b 之係數。則於原式 a^2b 之係數爲 $+1$。於右邊 a^2b 之係數爲 $-L$。故 $-L=1$。卽 $L=-1$。

$$\therefore 原式=-(a-b)(b-c)(c-a)。$$

數字代用法 此例用任意之值代 a, b, c。其 L 常同。故 $a=0$, $b=1$, $c=2$。則

$$原式=L(a-b)(b-c)(c-a),$$

卽 $0+1^2(2-0)+2^2(0-1)=L(0-1)(1-2)(2-0)$,

卽 $-2=2L$。　$\therefore L=-1$。

∴如上所用a, b, c之值。取其運算之簡易。若令$a=99, b=7, c=8$則$99^2(7-8)+7^2(8-99)+8^2(99-7)=L(99-7)(7-8)(8-99)$。依此運算亦爲$L=-1$。

〔第二例〕求$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$之因子。

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

令$b=c$。則(1)式爲0。故$b-c$爲(1)式之因子。同法得$c-a$, $a-b$亦爲(1)式之因子。但(1)式爲四次式。故在$(b-c)(c-a)(a-b)$之三次因子外。尙有一因子。爲a, b, c之一次等勢式。即$L(a+b+c)$。則(1)式與下之(2)式同値。

$$L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

比較其a^3b之係數。則(1)式爲1。(2)式爲$-L$。故$1=-L$, $\therefore L=-1$。

由是原式$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$。

通例之分割法 用此例則當依a之遞降方乘整列之。

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$=(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}$〔此依b之遞降方乘整列者〕

$=(b-c)(c-a)\{b^2+bc-a(c-a)$

$=(b-c)(c-a)\{-c(a-b)-(a^2-b^2)\}$〔此括c之一方乘〕

$=-(b-c)(c-a)(a-b)(c+a+b)$

〔第三例〕求$b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$之因子。

$$b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

令$b=c$。則(1)式爲0。故$b-c$爲(1)式之因子。由是得$(b-c)(c-a)(a-b)$之三次因子。但(1)式爲五次式。尙有a, b, c二次等勢式之因子。故(1)式變爲同値之(2)式。如下

$$(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)\}\ldots(2)$$

比較其a^4b之係數。則(1)式爲0。(2)式爲$-L$。$\therefore L=0$,

又比較其a^3b^2之係數。則(1)式爲1。(2)式爲$L-M$。$\therefore 1=L-M$。但$L=0$。$\therefore M=-1$。

由是原式$=-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)$。

常通之因子分割法 用此例。則

$b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$

$=a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)$ 〔此依 a 之遞降方乘整列者〕

$=(b-c)\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$

$=(b-c)\{b^2(c^2-a^2)-a^2b(c-a)-ca^2(c-a)\}$ 〔b 爲遞降方乘〕

$=(b-c)(c-a)\{b^2(c+a)-a^2b-ca^2\}$

$=(b-c)(c-a)\{-c(a^2-b^2)-ab(a-b)\}$ 〔括 c 之一方乘〕

$=-(b-c)(c-a)(a-b)\{c(a+b)+ab\}$。

〔注意〕查理斯密斯氏於因子分割法。未見完善。今多從篤獨亨他氏本改正之。

例題六

求下列各式之因子。

1 $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$。

〔解〕$y=z$。則原式$=0+(y-x)^3+(x-y)^3=0$。

∴ $y-z$ 爲因子。 ∴ 原式$=L(y-z)(z-x)(x-y)$。

比較 x^2y 之係數。則 $-3=-L$。 ∴ $L=3$。

由是原式$=3(y-z)(z-x)(x-y)$。

〔別法〕$(y-z)+(z-x)=y-x=-(x-y)$ 已可明瞭。兩邊各求其立方。則 $\{(y-z)+(z-x)\}^3=-(x-y)^3$。

即 $(y-z)^3+(z-x)^3+3(y-z)(z-x)\{(y-z)+(z-x)\}=-(x-y)^3$。

即 $(y-z)^3+(z-x)^3+3(y-z)(z-x)(y-x)=-(x-y)^3$。

∴ $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=-3(y-z)(z-x)(y-x)$。

2. $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$。

〔解〕原式$=(y-z)(z-x)(x-y)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)\}$。

因 x^4y 之係數，爲 $-5=-L$， ∴ $L=5$。

又 $x=0$。$y=1$，$z=2$。則

$(1-2)^5+(2-0)^5+(0-1)^5=(1-2)(2-0)(0-1)\{5(0+1+4)+M(0+2+0)\}$。

即 $-1+32-1=2\{25+2M\}$。 ∴ $M=-5$。

由是原式$=5(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$。

3. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$。

〔解〕$b=c$。則原式$=0$。∴有$(b-c)(c-a)(a-b)$之因子。

又$b=-c$。則原式$=a^4(c^2-c^2)+c^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-c^2)=0$。

∴有$(b+c)(c+a)(a+b)$之因子。

由是原式$=L(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$。

比較a^4b^2之係數。則$1=-L$。 ∴ $L=-1$。

∴原式$=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$。

4. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$。

〔解〕原式$=L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$。$L=1$。

∴原式$=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$。

5. $a(b-c)^5+b(c-a)^5+c(a-b)^5$。

〔解〕原式有$(b-c)(c-a)(a-b)$之三次因子。而原式爲六次式。故倘有三次因子。由是

$$原式=(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+b^2c+c^2a)+N(ab^2+bc^2+ca^2)+Pabc\}$$

比較a^5b之係數。則$-1=-L$。 ∴ $L=1$。

比較a^4b^2之係數。則$0=L-M$。 ∴ $M=L=1$。

比較a^2b^4之係數。則$0=-L+N$。 ∴ $N=L=1$。

又$a=1$。$b=2$。$c=3$。則

$$1(2-3)^5+2(3-1)^5+3(1-2)^5=(2-3)(3-1)(1-2)\{(1^3+2^3+3^3)+(1^2.2+2^2.3+3^2.1)+(1.2^2+2.3^2+3.1^2)+P\times1\times2\times3\},$$

即 $-1+64-3=2\{1+8+27+2+12+9+4+18+3+6P\}$， ∴ $P=-9$。

$$∴原式=(b-c)(c-a)(a-b)\{a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2-9abc\}。$$

6. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$。 〔答 $-(b-c)(c-a)(a-b)$〕

7. $b^3c^3(b-c)+c^3a^3(c-a)+a^3b^3(a-b)$。

〔解〕原式爲七次式。是三次因子$(b-c)(c-a)(a-b)$之外。倘有四次因子。然考原式a之最高方乘爲a^4。故四次式內之a方乘高於二次者。可省畧之如下。

原式$=(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+M(a^2bc+b^2ca+c^2ab)\}$

比較a^4b^3之係數。則$1=-L$，∴ $L=-1$。

設 $a=1, b=2, c=3$ 則

$2^3.3^3(2-3)+3^3.1^3(3-1)+1^3.\ 2^3(1-2)$

$=(2-3)(3-1)(1-2)\{-(1^2.2^2+2^2.3^2+3^2.1^2)+M(1^2.2.3+2^2.3.1+3^2.1.2)\}$

即 $-216+54-8=2\{-49+36M\}$ $\therefore$ $M=-1$。

$\therefore$ 原式 $=-(b-c)(c-a)(a-b)\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)\}$。

8. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$。

(答 $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$)

9. $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$。

(解) 原式 $=(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^3+b^3+c^3)+M(a^2b+b^2c+c^2a)$
$+N(ab^2+bc^2+ca^2)+Pabc\}$。

比較 a^5b^1 之係數。則 $1=-L$, $\therefore$ $L=-1$,

比較 a^4b^2 之係數。則 $0=L-M$, $\therefore$ $M=L=-1$,

比較 a^2b^4 之係數。則 $0=-L+N$, $\therefore$ $N=L=-1$。

若 $a=1, b=2, c=3$, 則得 $P=-1$。由是原式爲

$-(b-c)(c-a)(a-b)(a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+abc)$。

10. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$。

(解) $a=0$ 則原式 $=(b+c)^3-(b+c)^3-(c-b)^3-(b-c)^3=0$。

$\therefore$ 原式 $=Labc$, $a=b=c=1$, 則

$(1+1+1)^3-(1+1-1)^3-(1+1-1)^3-(1+1-1)^3=L.1.1.1$。

$\therefore$ $L=24$。由是原式 $=24abc$。

11 $(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$。

(解) 原式 $=abc\{L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)\}$。

若 $a=b=2, c=-1$ 則 $(2+2-1)^5-(2-1-2)^5-(-1+2-2)^5-(2+2-1)^5$

$=-4\{L(4+4+1)+M(4-2-2)\}$ 即 $243+1+1-3125=-4\{9L+0\}$

$\therefore$ $L=80$。又 $a=b=c=1$。則

$(1+1+1)^5-(1+1-1)^5-(1+1-1)^5-(1+1-1)^5=\{80(1+1+1)$
$+M(1+1+1)\}$

$\therefore$ $M=0$ 由是原式 $=80abc(a^2+b^2+c^2)$。

12. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$。

(解) $a=0$ 則原式 $=b(c-b)^2+c(b-c)^2+(b+c)(c-b)(b-c)$。

$=(b-c)^2(b+c)-(b+c)(b-c)^2=0$。

$\therefore$ 原式$=Labc$。$a=b=c=1$。則 $1+1+1+1=L$

$\therefore L=4$ 由是原式$=4abc$。

13 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$。

〔答 $2abc$〕

14. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+a(a-b+c)(a+b-c)$

$+b(a+b-c)(-a+b+c)+c(-a+b+c)(a-b+c)$。

〔答 $4abc$〕

15. $(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(a+b-c)(-a+b+c)$

$+(a-b)(-a+b+c)(a-b+c)$。 〔答 $-4(b-c)(c-a)(a-b)$〕

16. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$。 〔答 $3(y+z)(z+x)(x+y)$〕

17. $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$。

〔解〕$x=-y$。則原式$=(-y+y+z)^5+y^5-y^5-z^5=0$。

$\therefore$ 原式$=(x+y)(y+z)(z+x)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)\}$。

比較 x^4y 之係數。則 $5=L$, 若 $x=y=1$, $z=0$, 則

$2^5-1-1=2\{5(1+1)+M(1)\}$ $\therefore$ $M=5$。

由是原式$=5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$。

18. $(b-c)(b+c)^2+(c-a)(c+a)^2+(a-b)(a+b)^2$。〔答 $-(b-c)(c-a)(a-b)$〕

19. $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$。

〔答 $-2(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$〕

20 $(b-c)(b+c)^4+(c-a)(c+a)^4+(a-b)(a+b)^4$。

〔答 $-(b-c)(c-a)(a-b)\{3(a^2+b^2+c^2)+5(bc+ca+ab)\}$〕

21. $a^3+b^3+c^3+5abc-a(a-b)(a-c)-b(b-c)(b-a)-c(c-a)(c-b)$。

〔答 $(b+c)(c+a)(a+b)$〕

22. $a^2(a+b)(a+c)(b-c)+b^2(b+c)(b+a)(c-a)+c^2(c+a)(c+b)(a-b)$。

〔解〕$b=c$。則原式$=c^2(2c)(c+a)(c-a)+c^2(c+a)(2c)(a-c)$

$=2c^3(c^2-a^2)-2c^3(c^2-a^2)=0$。

故原式有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之因子。

又 $a+b+c=0$。則

原式$=a^2(-c)(-b)(b-c)+b^2(-a)(-c)(c-a)+c^2(-b)(-a)(a-b)$

$=abc\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}=abc\{0\}=0$。

由是原式$=Labc(a+b+c)^2$ 比得 $L=-1$。

即原式$=-abc(a+b+c)^2$。

23. $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$。

〔解〕$x+y+z=0$。則原式$=(-x)(-y)(-z)+xyz=0$,

$\therefore$ 原式$=(x+y+z)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)\}$,

$\therefore L=0, M=1$。由是原式$=(x+y+z)(xy+yz+zx)$。

24. $a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2+abc(a+b+c)$
$+(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)$。　〔答 $(a+b)(b+c)(c+a)(a+b+c)$〕

25. $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$。

〔答 $12xyz(x+y+z)$〕

26. $a^2(b+c-2a)+b^2(c+a-2b)+c^2(a+b-2c)+2(c^2-a^2)(c-b)$
$+2(a^2-b^2)(a-c)+2(b^2-c^2)(b-a)$。　〔答 $-3(b-c)(c-a)(a-b)$〕

27. $(b+c-a-d)^4(b-c)(a-d)+(c+a-b-d)^4(c-a)(b-d)$
$+(a+b-c-d)^4(a-b)(c-d)$。

〔解〕$b=c$ 則原式$=(a-d)^4(c-a)(c-d)+(a-d)^4(a-c)(c-d)=0$。

又 $d=a$ 則原式$=0$。如此。則

原式$=L(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c)$。

$\because L=16$, 因是原式$=16(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c)$。

28. $12\{(x+y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-(z+x)^{2n}-(x+y)^{2n}+x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}\}$
能以 $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$ 除盡。

〔證〕$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4=12xyz(x+y+z)$

今於第一式令 $x=0$。則

$12\{(y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-z^n-y^{2n}+y^{2n}+z^{2n}\}=0$。

又 $x+y+z=0$。則 $12\{-(-x)^{2n}-(-y)^{2n}-(-z)^{2n}+x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}\}=0$

故第一式有 12, x, y, z, $(x+y+z)$ 之因子。即可以第二式除盡之。

29. 求證 $a^3(b+c-a)^2+b^3(c+a-b)^2+c^3(a+b-c)^2+abc(a^2+b^2+c)$
$+(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=2abc(bc+ca+ab)$

〔證〕左邊 $a=0$, 則左邊$=0$。故有 abc 之因子。由是左邊爲
$abc\{L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)\}$。考得 $L=0, M=2$ 則與右邊相等。

30. 試證 $(b-c)^6+(c-a)^6+(a-b)^6-9(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$
$=2(a-b)^3(a-c)^3+2(b-c)^3(b-a)^3+2(c-a)^3(c-b)^3$。

〔證〕$x=b-c,\ y=c-a,\ z=a-b$, 則

$x+y+z=(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$。 ∴ $x+y=-z$

$(x+y)^3=-z^3$。 即 $x^3+y^3+3xy(x+y)=-z^3$。

∴ $x^3+y^3+z^3=-3xy(x+y)=3xyz$。又 $(x^3+y^3+z^3)^2=9x^2y^2z^2$。

即 $x^6+y^6+z^6+2x^3y^3+2y^3z^3+2z^3x^3=9x^2y^2z^2$。

∴ $x^6+y^6+z^6-9x^2y^2z^2=-2x^3y^3-2y^3z^3-2z^3x^3$。

即 $(b-c)^6+(c-a)^6+(a-b)^6-9(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$

$$=-2(b-c)^3(c-a)^3-2(c-a)^3(a-b)^3-2(a-b)^3(b-c)^3$$

$$=2(c-b)^3(c-a)^3+2(a-c)^3(a-b)^3+2(b-a)^3(b-c)^3$$。

31. 證 $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3+(a+d)^3+(b+d)^3+(c+d)^3$。
$=3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$。

〔證〕$a+b+c+d=0$。則左邊$=0$。即易知其等於右邊。

32. 化 $4(a^2+ab+b^2)^3-(a-b)^2(a+2b)^2(2a+b)^2$ 爲最簡式。

〔解〕$a=0$。則原式$=4(b^2)^3-(-b)^2(2b)^2(b)^2=0$。

又 $a=-b$。則原式$=4(a^2-a^2+a^2)^3-(2a)^2(-a)^2(a)^2=0$。

由是原式$=ab(a+b)\{L(a^3+b^3)+M(a^2b+ab^2)\}$

$$=ab(a+b)^2\{L(a^2-ab+b^2)+Mab\}$$。

∵ 原式$=ab(a+b)^2\{L(a^2-2ab+b^2)+(L+M)ab\}$。

$a=b=1$。則

$4(1+1+1)^3-(1-1)^2(1+2)^2(2+1)^2=1(1+1)^2\{L(1-2+1)+(L+M)\}$,

即 $108=4(L+M)$。∴ $L+M=27$。又 $a=2,\ b=1$。則

$4(4+2+1)^3-(2-1)^2(2+2)^2(4+1)^2=2(2+1)^2\{L(4-4+1)+(27)2\}$。

即 $1372-400=18\{L+54\}$。∴ $L=0,\ M=27-L=27$。

由是原式$=ab(a+b)^2\{27ab\}=27a^2b^2(a+b)^2$。

33. $a^4(b^2+c^2-a^2)^3+b^4(c^2+a^2-b^2)^3+c^4(a^2+b^2-c^2)^3$ 能以
$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ 除盡之。

〔證〕$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$
$=-(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$。

設 $a+b+c=0$。則第一式

$=a^4\{b^2+c^2-(b+c)^2\}^3+b^4\{c^2+a^2-(c+a)^2\}^3+c^4\{a^2+b^2-(a+b)^2\}^3$

$=a^4\{-2bc\}^3+b^4\{-2ca\}^3+c^4\{-2ab\}^3$

$=-8a^3b^3c^3(a+b+c)=-8a^3b^3c^3(0)=0$。$\therefore$ 第一式有 $a+b+c$ 之因子。

又 $a+b-c=0$。則第一式

$=a^4\{b^2+c^2-(c-b)^2\}^3+b^4\{c^2+a^2-(c-a)^2\}^3+c^4\{a^2+b^2-(a+b)^2\}^3$

$=a^4\{2bc\}^3+b^4\{2ca\}^3+c^4\{2ab\}^3$

$=8a^3b^3c^3(a+b-c)=8a^3b^3c^3(0)=0$。

$\therefore a+b-c$。亦爲第一式之因子。同法考得 $b+c-a$, $c+a-b$。均爲第一式之因子。故如題云云。

34. $4\{cd(a^2-b^2)+ab(c^2-d^2)\}^2+\{(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd\}^2$。

(解) 原式 $=4\{c^2d^2(a^2-b^2)^2+2abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+a^2b^2(c^2-d^2)^2\}$

$+(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2-8abcd(a^2-b^2)(c^2-d^2)+16a^2b^2c^2d^2$

$=4c^2d^2(a^2-b^2)^2+4a^2b^2(c^2-d^2)^2+(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2+(4a^2b^2)(4c^2d^2)$

$=\{(c^2+d^2)^2-(c^2-d^2)^2\}(a^2-b^2)^2+\{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\}(c^2-d^2)^2$

$+(a^2-b^2)^2(c^2-d^2)^2+\{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2\}\{(c^2+d^2)^2-(c^2-d^2)^2\}$。

令 $a^2+b^2=x$, $a^2-b^2=y$, $c^2+d^2=m$, $c^2-d^2=n$。則

原式 $=\{m^2-n^2\}y^2+\{x^2-y^2\}n^2+y^2n^2+\{x^2-y^2\}\{m^2-n^2\}=x^2m^2$。

即　原式 $=(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2$ 此例不用通例之解式。

35. 求證 $(y^2-z^2)(1+xy)(1+xz)+(z^2-x^2)(1+yz)(1+yx)$
$+(x^2-y^2)(1+zx)(1+zy)=(y-z)(z-x)(x-y)(xyz+x+y+z)$。

(證) $y=z$, 則原式 $=0$。$\therefore$ 原式有 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 之三次因子。而原式爲自六次式至二次式。故其餘之因子。尙有三次二次一次零次。又原式 x 之最高方乘爲 x^3。故其餘之因子含 x 者。不多於一方乘。

$\therefore$ 原式 $=(y-z)(z-x)(x-y)\{Lxyz+M(xy+yz+zx)+N(x+y+z)+P\}$。

比較 x^2y 之係數。$0=-P$, $\therefore$ $P=0$。

又比較 x^3y 之係數。$-1=-N$。$\therefore$ $N=1$。

又比較 x^3y^2 之係數。$0=-M$。$\therefore$ $M=0$。

又 $x=1, y=2, z=3$, 則得 $L=1$。由是

原式$=(y-z)(z-x)(x-y)(xyz+x+y+z)$。

36. $a^3(b-c)(c-d)(d-b)-b^3(c-d)(d-a)(a-c)$
$+c^3(d-a)(a-b)(b-d)-d^3(a-b)(b-c)(c-a)$。

〔解〕$b=c$。則原式$=0$。依此求因子。則

原式$=(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)$。

37. $b^2c^2d^2(b-c)(c-d)(d-b)-c^2d^2a^2(c-d)(d-a)(a-c)+d^2a^2b^2(b-a)(a-b)$
$(b-d)-a^2b^2c^2(a-b)(b-c)(c-a)$。

〔解〕原式$=(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)\{L(abc+bcd+cda+dab)\}$
而$L=-1$。

$\therefore$ 原式$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)\{abc+bcd+cda+dab\}$。

此式之$\{\ \}$爲三次式。而其中無a^3, a^2b, 等項者。以原式無自a^3以上之高次項故也。

第陸編補

霍爾及乃托氏第三十四編摘要

等勢式

1. 緒言 霍爾及乃托氏之大代數自比例論始。故前數編之講義。無可入之材料。然在彼書 439 頁所載等勢式之例題。有爲斯密氏所未詳者。因摘要以解之。

2. 記號 $\sum$之記號，示等勢式之和。即總記其同種類之各項也。如記 $a+b+c$ 則爲 $\sum a$。然有時 $ab+bc+ca$ 不能爲 $\sum ab$。何則。以不見有 c 字故也。若欲知 $\sum ab$ 之爲 $ab+bc+ca$。可書爲 $\sum_{abc}ab$。故 $\sum_{abc}ab=ab+bc+ca$。

又 $\sum_{abcd}ab=ab+bc+ca+ad+bd+cd$

例題 (例題三十四 a)

求以下各式之因子(題之號數依原書)

9. $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$。

(解) $a=-b$ 則原式 $=-b(b-c)^2+b(c+b)^2+c(-b-b)^2-8b^2c$
$=b\{(b+c)^2-(b-c)^2\}+4b^2c-8b^2c=4b^2c+4b^2c-8b^2c=0$。

由是原式 $=L(a+b)(b+c)(c+a)$。依此求 L。則爲 1。故題式爲 $(a+b)(b+c)(c+a)$。

19. $(bc+ca+ab)^3-b^3c^3-c^3a^3-a^3b^3$。

(解) $a=-b$ 則原式 $=(bc-cb-b^2)^3-b^3c^3+c^3b^3+b^6$
$=-b^6-b^3c^3+b^3c^3+b^6=0$。故有 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 之因子。

又 $a=0$。則原式 $=(bc)^3-b^3c^3=0$。故有 abc 之因子。

由是原式 $=Labc(a+b)(b+c)(c+a)$。

$a=b=c=1$。則求得 L 爲 3。故題式爲 $3abc(a+b)(b+c)(c+a)$。

18. 證 $\sum a^2(b+c)-\sum a^3-2abc=(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$。

〔解〕原式$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)-a^3-b^3-c^3-2abc$

$=a^2(b+c)+a(b^2+c^2-2bc)+bc(b+c)-(b^3+c^3)-a^3$

$=(b+c)\{a^2+bc-(b^2-bc+c^2)\}-a\{a^2-(b-c)^2\}$

$=(b+c)\{a^2-(b-c)^2\}-a\{a^2-(b-c)^2\}$

$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)-a\}=(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)$。

20. 試證 $4\sum(b-c)(b+c-2a)^2=9\sum(b-c)(b+c-a)^2$。

〔解〕原式$=4(b-c)(b+c-2a)^2+4(c-a)(c+a-2b)^2+4(a-b)(a+b-2c)^2$。

令 $b=c$。則原式$=0+4(c-a)(a-c)^2+4(a-c)(a-c)^2=0$。

故原式$=A(b-c)(c-a)(a-b)$。

a^2b 之係數。爲 $16+16+8-4=-A$。∴ $A=-36$。

又原式右邊$=9(b-c)(b+c-a)^2+9(c-a)(c+a-b)^2+9(a-b)(a+b-c)$

$=36(b-c)(c-a)(a-b)$。故如題云云。

22. 證 $\sum(ab-c^2)(ac-b^2)=(\sum bc)(\sum bc-\sum a^2)$

〔解〕原式$=(ab-c^2)(ac-b^2)+(bc-a^2)(ba-c^2)+(ca-b^2)(cb-a^2)$

$=abc(a+b+c)+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-(ac^3+a^3c+ba^3+b^3a+cb^3+c^3b)$

$=(bc+ca+ab)^2-abc(a+b+c)-ac^3-a^3c-ba^3-b^3a-cb^3-c^3b$

$=(bc+ca+ab)^2-a^2(bc+ca+ab)-b^2(bc+ca+ab)-c^2(bc+ca+ab)$

$=(bc+ca+ab)(bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2)$。

33. 證 $abc(\sum a)^3-(\sum bc)^3=abc\sum a^3-\sum b^3c^3=(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$

〔解〕$abc(a+b+c)^3-(bc+ca+ab)^3$

$=abc\{a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3\}$

$-\{a^3(b+c)^3+3a^2bc(b+c)^2+3ab^2c^2(b+c)+b^3c^3\}$

$=bc(a^4-b^2c^2)+3abc(b+c)(a^2-bc)-a(b+c)^3(a^2-bc)$

$=(a^2-bc)\{bc(a^2+bc)+3abc(b+c)-a(b+c)^3\}$

$=(a^2-bc)\{bc(a^2+bc)+3abc(b+c)-ab^3-ac^3-3abc(b+c)\}$

$=(a^2-bc)\{a^2bc+b^2c^2-ab^3-ac^3\}=(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$。

又 $abc(a^3+b^3+c^3)-(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)$

$=bc(a^4-b^2c^2)-ac^3(a^2-bc)-ab^3(a^2-bc)$

$=(a^2-bc)\{bc(a^2-bc)-ac^3-ab^3\}=(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$。

例　題 (例題三十四b)

證下列之各式。

26. $(x^3+6x^2y+3xy^2-y^3)^3+(y^3+6xy^2+3x^2y-x^3)^3$
$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^3$。

〔解〕 原式$=\{3xy(2x+y)+(x^3-y^3)\}^3+\{3xy(x+2y)-(x^3-y^3)\}^3$。

令 $x^3-y^3=A$, $3xy(2x+y)=M$, $3xy(x+2y)=N$。則

$M+N=9xy(x+y)$, $M-N=3xy(x-y)$, $MN=9x^2y^2(2x^2+5xy+2y^2)$。

由是原式$=(M+A)^3+(N-A)^3$

$=M^3+N^3+3A(M^2-N^2)+3A^2(M+N)$

$=(M+N)\{M^2+N^2-MN+3A(M-N)+3A^2\}$

$=(M+N)\{(M-N)^2+MN+3A(M-N)+3A^2\}$

$=9xy(x+y)\{9x^2y^2(x-y)^2+9x^2y^2(2x^2+5xy+2y^2)+9Axy(x-y)+3A^2\}$

$=9xy(x+y)\{27x^2y^2(x^2+xy+y^2)+9(x^3-y^3)xy(x-y)+3(x^3-y^3)^2\}$

$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\{9x^2y^2+3(x-y)^2xy+(x^3-y^3)(x-y)\}$

$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\{3xy(x^2+xy+y^2)+(x^3-y^3)(x-y)\}$

$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2\{3xy+(x-y)^2\}$。

23. 求 $2a^2b^2c^2+(a^3+b^3+c^3)abc+b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3$ 之因子。

〔解〕 原式$=a^4bc+a^3(b^3+c^3)+2a^2b^2c^2+abc(b^3+c^3)+b^3c^3$

$=bc(a^4+2a^2bc+b^2c^2)+a(b^3+c^3)(a^2+bc)$

$=(a^2+bc)\{bc(a^2+bc)+a(b^3+c^3)\}$

$=(a^2+bc)\{ab(b^2+ca)+c^2(b^2+ca)\}$

$=(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$。

查理斯密司氏
霍爾氏，乃托氏
大代數學講義
第貳卷
第柒編
最高公因子，最低公倍數
最高公因子

95. 公因子 (Common Factor) 凡二個以上之整代數式，能以一整代數式各除盡之，則此一整代數式，謂爲各式之公因子。

最高公因子 (Highest Common Factor) 二個以上之整代數式。其最高公因子。即諸因子之中之最高次式，最高公因子之記號。則用 H. C. F。

例如 a^4-b^4, $(a^2-b^2)^2$ 之公因子爲 $a+b$, $a-b$, a^2-b^2。而 a^2-b^2 爲其最高公因子。

96. 一項式之最高公因子 二個以上之一項式。其最高公因子。可由視察而得。

例如求 a^3b^2c, 及 a^4b^3c 之最高公因子，其能除盡各式者：在 a 之最高方乘爲 a^3。在 b 之最高方乘爲 b^2。而 c 之最高方乘即爲 c。

故所求之 H.C.F. $=a^3b^2c$。

又求 $a^5b^4c^4$, a^2b^8 及 a^5bc^2 之最高公因子。其可以除盡三式者，a 之最高方乘爲 a^2。b 之最高方乘爲 b。而 c 不能整除各式，故所求之 H.C.F. $=a^2b$。

〔法則〕由是二個以上之一項式，其最高公因子。即各式中公有文字之最低方乘之積。

97. 因子分割法之應用 諸多項式之最高公因子，若

已知各式之因子。可與前章同法求之。

例如求 $(x-2)^2(x-1)^2(x-3)$。及 $(x-2)^2(x-1)(x-3)^3$ 之最高公因子。

其能整除各式之 $x-2$。其最高方乘爲 $(x-2)^2$。又能整除各式之 $x-1$ 及 $x-3$。其最高方乘爲 $x-1$ 及 $x-3$。

故所求之 H.C.F. $=(x-2)^2(x-1)(x-3)$。

又 $a^2b^3(a-b)^2(a+b)^3$ 及 $a^5b^2(a-b)(a+b)^2$ 之 H.C.F. 爲 $a^2b^2(a-b)(a+b)^2$。

例題

1. 求 $a^4b^2-a^2b^4$ 及 $a^4b^3+a^3b^4$ 之最高公因子。

〔解〕 $\left.\begin{aligned} a^4b^2-a^2b^4&=a^2b^2(a+b)(a-b)\\ a^4b^3+a^3b^4&=a^3b^3(a+b)\end{aligned}\right\}$ ∴ 所求之 H.C.F. $=a^2b^2(a+b)$。

2. 求 $a^6b^2-4a^4b^4$ 及 $a^6b^2-16a^2b^6$ 之最高公因子。〔答 $a^2b^2(a^2-4b^2)$〕。

3. 求 $a^3+3a^2b+2ab^2$ 及 $a^4+6a^3b+8a^2b^2$ 之最高公因子。〔答 $a(a+2b)$〕

(98.) 兩多項式之最高公因子 二次以上多項式之因子。雖不能以普通法求之。見(84章)。然如算術上兩數求最大公約數法求之。亦可得其最高公因子。

諸代數式中。含一項式之因子。可視察而得。故一項式之最高公因子。亦可視察而得。由是求兩多項式之最高公因子時。其一項式之因子。可置勿問。祇求其兩式中公有之最高次多項可也。

設 A 除 B 爲兩多項式。各依同文字之遞降方乘整列。又 B 之次數。較 A 爲高。

以 A 除 B 得商爲 Q。其餘式爲 R。則

$B=AQ+R$………(1)。 ∴ $R=B-AQ$………(2)。

任意代數式之各項。能以某式除盡之。卽其全式亦能以某式除盡。故(1)式之 B。能以 A 及 R 之各公因子除盡。(2)式之 R。能以 B 及 A 之各公因子除盡。

由是 A 及 B 之各公因子。與 A 及 R 之各公因子全然相同。故 A 及 R 之 H.C.F.。卽所求 A 及 B 之 H.C.F.。

今設以 R 除 A。其餘式爲 S。則 R 及 S 之 H.C.F.。可用同法推得與 A 及 R 之 H.C.F. 同。亦卽爲所求 A 與 B 之 H.C.F.。若依此法

續除之。(即又以S除R)則其除式及被除式之H. C. F。必與原兩式之H. C. F. 同，

故依此方法除至無餘。則其最後之除式，必爲其最後之被除式之最高公因子。即爲所求之最高公因子。

〔註〕例如求A及B之最高公因子。依前述之講義。示式於下。

$$
\begin{array}{l}
A)\,B\,(Q \\
\quad \underline{AQ} \\
\quad\; R)\,A\,(S \\
\qquad \underline{RS} \\
\qquad R_1)\,R\,(T \\
\qquad\quad \underline{R_1T} \\
\qquad\quad \cdots\cdots \text{歷次除之至末後} \\
\qquad\qquad H)\,R_n\,(X \\
\qquad\qquad\quad \underline{XH} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

A, B之H. C F. = R. A之H. C. F.
= R_1. R之H. C. F.
= ……………………
= H, 0之H.C.F = H爲所求之H.C F. 即A及B之最高公因子。

〔注意〕依除法之性質。餘式之次數必比除式爲低。例如x之三次式，其除得之餘式。不能高於x之二次式，

故如前次第施其除法。則餘式必次第爲低次式。若所得餘式，無公有之文字。則原兩式。爲無最高公因子。此猶在算術中最後之餘數爲1。則原兩數無最大公約數。

前述之求H. C. F. 法。其兩式內皆不含一項之公因子，即祗求多項式之H.C.F. 也。故其被除式或除式。以任何一項式除之或乘之。其所求之最高公因子皆不變。

〔法則〕由是求兩多項式之H.C.F. 則以兩式之公有文字，依遞降方乘整列之，以其低次式除高次式。(若兩式爲同次式，則可

任以一式除餘一式。又以除式除前之除式。次第依法除之。至無餘式時。則其最後之除式。即其所求之H.C.F. 但此法非求一項式之公因子者。蓋兩式之一項公因子。原可由視察得之也。又在運算時。其任意之除式。被除式或餘式。以一項因子除之或乘之。其最高公因子不變。

〔第一例〕 求 x^3+x^2-2 及 x^3+2x^2-3 之 H.C.F.

$$x^3+x^2-2)x^3+2x^2-3(1$$
$$\underline{x^3+x^2-2}$$
$$x^2-1)x^3+x^2-2(x+1$$
$$\underline{x^3-x}$$
$$x^2+x-2$$
$$\underline{x^2\quad -1}$$
$$x-1)x^2-1(x+1$$
$$\underline{x^2-x}$$
$$x-1$$
$$\underline{x-1}$$
$$0$$

故 $x-1$ 爲所求之H.C.F.

又此運算內第一之餘式 x^2-1，爲有 $x-1$ 及 $x+1$ 之因子。而依88章。$x=1$ 則原兩式爲0。故 $x-1$ 爲原兩式之公因子。而 $x=-1$ 則兩式不能爲0。故 $x+1$ 不爲原兩式之公因子。而 $x-1$ 爲 H.C.F.

〔第二例〕 求 $x^3+4x^2y-8xy^2+24y^3$ 及 $x^5-x^4y+8x^2y^3-8xy^4$ 之 H.C.F.

第二式可以x除。而x非兩式之公因子。故可省去。即以x除第二式，得 $x^4-x^3y+8xy^3-8y^4$。

$$x^3+4x^2y-8xy^2+24y^3)x^4-x^3y+8xy^3-8y^4(x-5y$$
$$\underline{x^4+4x^3y-8x^2y^2+24xy^3}$$
$$-5x^3y+8x^2y^2-16xy^3-8y^4$$
$$\underline{-5x^3y-20x^2y^2+40xy^3-120y^4}$$
$$28x^2y^2-56xy^3+112y^4$$

此除式$=28y^2(x^2-2xy+4y^2)$此因子$28y^2$可除去。故

$$
\begin{array}{r l}
x^2-2xy+4y^2)\,x^3+4x^2y-8xy^2+24y^3\,(x+6 & \\
\underline{x^3-2x^2y+4xy^2\qquad\qquad} & \\
6x^2y-12xy^2+24y^3 & \\
\underline{6x^2y-12xy^2+24y^3} &
\end{array}
$$

由是$x^2-2xy+4y^2$爲所求之H.C.F.

〔第三例〕 求$2x^4+9x^3+14x+3$及$3x^4+15x^3+5x^2+10x+2$之H.C.F.

依此例施除法。則得分數之商。今欲避之。故以2乘第二式。以下做此。

$$
\begin{array}{l}
2x^4+9x^3+14x+3)\,3x^4+15x^3+5x^2+10x+2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{2\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 6x^4+30x^3+10x^2+20x+4\,(3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{6x^4+27x^3\qquad\quad+42x+9} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3x^3+10x^2-22x-5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
3x^3+10x^2-22x-5)\,2x^4+9x^3+14x+3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{3\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 6x^4+27x^3+42x+9\,(2x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{6x^4+20x^3-44x^2-10x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 7x^3+44x^2+52x+9 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{3\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 21x^3+132x^2+156x+27\,(7 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{21x^3+\ 70x^2-154x-35} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 62)\,\underline{62x^2+310x+62} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2+\quad 5x+1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x^2+5x+1)\,3x^3+10x^2-22x-5\,(3x-5 \\
\qquad\qquad\quad \underline{3x^3+15x^2+\ 3x} \\
\qquad\qquad\qquad -\ 5x^2-25x-5 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-\ 5x^2-25x-5}
\end{array}
$$

故x^2+5x+1爲所求之H.C.F. 然如63章用分離係數爲便。

99.別法 求兩式之H.C.F.。若依下之定理運算。較爲省力。

〔定理〕任意之兩式A及B。其特別文字(設爲x)之最高次公因子。與$pA+qB$及$rA+sB$之最高公因子同。但p,q,r,s。爲不含x之任意或正負數量。

欲證明此理。當先知A及B之公因子。爲$pA+qB$及$rA+sB$之因子。又$pA+qB$及$rA+sB$之公因子。爲$s(pA+qB)-q(rA+sB)$之因子。即$(sp-qr)A$之因子。

但$sp-qr$內不含有x。故$pA+qB$及$rA+sB$之公因子。爲A之因子。而$sp-qr$內不能有A之因子。

由同法得$pA+qB$及$rA+sB$之公因子。爲$r(pA+qB)-p(rA+sB)$。即$(rq-ps)B$之因子。即B之因子。

由是A及B之各公因子。恆爲$pA+qB$及$rA+sB$之因子。而$pA+qB$及$rA+sB$之各公因子。恆爲A及B之因子也。

故A及B之H.C.F.。與$pA+qB$及$rA+sB$之H.C.F.同。

〔例〕 求$2x^4+x^3-6x^2-2x+3$, $2x^4-3x^3+2x-3$之H.C.F.。

於第一式內減去第二式。即

$$(2x^4+x^3-6x^2-2x+3)-(2x^4-3x^3+2x-3)$$
$$=4x^3-6x^2-4x+6\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

又於第一式內加入第二式。即

$$(2x^4+x^3-6x^2-2x+3)+(2x^4-3x^3+2x-3)$$
$$=2x^2(2x^2-x-3)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

所求之H.C.F.。爲(1)式及(2)式之H.C.F.。又即爲(1)式及$2x^2-x-3$之H.C.F.。

由是以2乘$2x^2-x-3$。加入(1)式。則得

$$2(2x^2-x-3)+(4x^3-6x^2-4x+6)=2x(2x^2-x-3)\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

而$2x^2-x-3$及(3)式之H.C.F.即所求之H.C.F.

∴所求之H.C.F.$=2x^2-x-3$。

100.餘論 依98章求兩式A及B之H.C.F.逐次之餘式。爲R, S, ……。則A及B之各公因子。爲R之因子。故亦爲A及R之公因子。

由同法得A及R之各公因子。亦爲R及S之公因子。以下同理。故A及B之各公因子。爲各餘式之因子。而最後之餘式。爲A及B之H.C.F.。故A及B之各公因子。爲所求最高公因子之因子可知矣。

由是兩式之各公因子爲其H.C.F.之因子。與一項式同。

求A及B之H.C.F.之法。其所得之各餘式。皆得示FA+GB之形。但F及G爲x之有理整代數式。

何則。令逐次之商。爲$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots Q_n$。逐次之餘式。爲$R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots R_n$。即

$$
\begin{array}{l}
A)B(Q_1 \\
\quad \underline{Q_1A} \\
\quad R_1)A(Q_2 \\
\qquad \underline{Q_2R_1} \\
\qquad R_2)R_1(Q_3 \\
\qquad\quad \underline{Q_3R_2} \\
\qquad\quad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad\quad R_{n-1})R_{n-2}(Q_n \\
\qquad\qquad \underline{Q_nR_{n-1}} \\
\qquad\qquad R_n)R_{n-1}(Q_{n+1} \\
\qquad\qquad \underline{Q_{n+1}R_n}
\end{array}
$$

R_n爲有A及B之公因子。即其H.C.F.若A及B無含有x之公因子。即R_n不含有x。

但 $R_1=B-Q_1A=-Q_1A+B$。

$R_2=A-Q_2R_1=A-Q_2(B-Q_1A)=(Q_1Q_2+1)A-Q_2B$。

$R_3=R_1-Q_3R_2=(-Q_1A+B)-Q_3\{(Q_1Q_2+1)A-Q_2B\}$

$\qquad =-(Q_1Q_2Q_3+Q_1+Q_3)A+(Q_2Q_3+1)B$。

$\ldots=\ldots$

$R_n=R_{n-2}-Q_nR_{n-1}$。

R_1等於FA+GB。則F爲$-Q_1$, G爲1。

R_2等於FA+GB。則F爲Q_1Q_2+1。G爲$-Q_2$。

以下皆如此。則F及G爲x之有理整代數式。

同理推得R_n=FA+GB。

A及B不含有x之公因子。則R_n不含x，故$\frac{F}{R_n}$，$\frac{G}{R_n}$爲x之有理整代數式。而$1=\frac{F}{R_n}A+\frac{G}{R_n}B$，但$\frac{F}{R_n}=P$，$\frac{G}{R_n}=Q$。則$1=PA+QB$，而P及Q爲x之有理整代數式。由是得定理如下。

〔定理〕A及B爲x之有理整代數式。而在不含有x之公因子。則可作$PA+QB=1$之形。而P及Q爲x之有理整代數式。

(例) $A=x^3-3x^2+1$ 及 $B=x^2+2x+2$。求其P及Q。

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+2x+2)\ x^3-3x^2+1 & (x-5 \\
\underline{x^3+2x^2+2x} & \\
-5x^2-2x+1 & \\
\underline{-5x^2-10x-10} & \\
8x+11 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
8x+11)\ x^2+2x+2 & \left(\frac{1}{8}x+\frac{5}{64}\right. \\
\underline{x^2+\frac{11}{8}x} & \\
\frac{5}{8}x+2 & \\
\underline{\frac{5}{8}x+\frac{55}{64}} & \\
\frac{73}{64} &
\end{array}
$$

由是 $8x+11=(x^3-3x^2+1)-(x-5)(x^2+2x+2)$

$$\frac{73}{64}=(x^2+2x+2)-\left(\frac{1}{8}x+\frac{5}{64}\right)(8x+11)$$

$$=(x^2+2x+2)-\left(\frac{1}{8}x+\frac{5}{64}\right)\{(x^3-3x^2+1)-(x-5)(x^2+2x+2)\}$$

$$=-\left(\frac{1}{8}x+\frac{5}{64}\right)(x^3-3x^2+1)+\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{35}{64}x+\frac{39}{64}\right)(x^2+2x+2)。$$

即 $1=-\frac{1}{73}(8x+5)(x^3-3x^2+1)+\frac{1}{73}(8x^2-35x+39)(x^2+2x+2)$

$\therefore P=-\frac{1}{73}(8x+5)$，$Q=\frac{1}{73}(8x^2-35x+39)$。

101. 諸多項式之最高公因子 三個以上之多項式。求其最高公因子之法如下。

諸多項式爲 A, B, C, D............

求 A 及 B 之 H. C. F. 爲 G。

所求之 H. C. F. 爲 A 及 B 之公因子。亦爲 G 之因子。見前章。故 G, C, D............之 H. C. F. 可求。

依此法當先求第一式與第二式之 H. C. F. 次以之求第三式之 H.C.F。逐次如此。至最後之 H.C.F.。即爲所求之 H.C.F.。

〔註〕在代數學之最高公因子。有時亦稱爲最大公約數。即(G. C. M.)然此名殊不適當。

何則。以一式與他式相較。就一文字論。祇能審其次數高低。不能定其數值大小。故可曰高而不可曰大。

例如 a^2。可謂爲比 a 高。不可謂爲比 a 大。蓋 a 爲 3。則 $a^2=9$。a^2 固比 a 大。若 $a=\frac{1}{3}$, 則 $a^2=\frac{1}{9}$, a^2 又比 a 小也。

又兩式之最高公因子。(就一文字言)不得謂爲兩式數值之最大公約數。

例如 $14x^2+15x+1$ 及 $22x^2+23x+1$ 之 H. C. F. 爲 $x+1$。

今設 $x=\frac{1}{2}$, 則 $14x^2+15x+1=14\times\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{2}+1=12$,

$$22x^2+23x+1=22\times\frac{1}{4}+23\times\frac{1}{2}+1=18。$$

即兩式之數值 12, 18 之最大公約數爲 6。然其 H. C. F. 爲

$x+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$。故最高公因子。不得稱爲最大公約數。

例題七

求以下各兩式之 H. C. F.。

1. $a^2-5ab+4b^2$ 及 $a^3-5a^2b+4b^3$。　　〔答 $a-b$〕

〔解〕 $1-5+4)1-5+0+4(1$

$$\underline{1-5+4}$$

$$-4)\underline{-4+4}$$

$$1-1)1-5+4(1-4$$

$$\underline{1-1}$$

$$-4+4$$

$$\underline{-4+4}$$

∴ $1-1$ 即 $a-b$ 爲所求之 H. C. F。

2. $2x^2-5x+2$ 及 $12x^3-8x^2-3x+2$。 〔答 $2x-1$〕

3. $2x^4-3x^2y^2+y^4$ 及 $2x^6-3x^4y^2+y^6$。

〔解〕 $2x^4-3x^2y^2+y^4=2x^2(x^2-y^2)-y^2(x^2-y^2)$

$$=(x^2-y^2)(2x^2-y^2),$$

$$2x^6-3x^4y^2+y^6=2x^4(x^2-y^2)-y^2(x^4-y^4)$$

$$=(x^2-y^2)(2x^4-x^2y^2+y^4)。$$

由是 x^2-y^2 爲所求之 H.C.F.。

4. $2x^3+3x^2y-y^3$ 及 $4x^3+xy^2-y^3$ 〔答 $2x-y$〕

5. $x^2-4y^2+12yz-9z^2$ 及 $x^2+2xz-4y^2+8yz-3z^2$。

〔解〕 $x^2-4y^2+12yz-9z^2=x^2-(2y-3z)^2$

$$=(x+2y-3z)(x-2y+3z)$$

$$x^2+2xz-4y^2+8yz-3z^2=x^2+2xz+z^2-(4y^2-8yz+4z^2)$$

$$=(x+z)^2-(2y-2z)^2=(x+z+2y-2z)(x+z-2y+2z)$$

$$=(x+2y-z)(x-2y+3z)。$$

∴ $x-2y+3z$ 爲所求之 H. C. F。

6. $20a^4-3a^3b+b^4$ 及 $64a^4-3ab^3+5b^4$。

〔解〕 $20a^4-3a^3b+b^4)64a^4-3ab^3+5b^4(5$

$$\underline{100a^4-15a^3b+5b^4}$$

$$-3a)\underline{-36a^4+15a^3b-3ab^3}$$

$$12a^3-5a^2b+b^3)20a^4-3a^3b+b^4(b$$

$$\underline{12a^3b-5a^2b^2+b^4}$$

$$\underline{5a^2)20a^4-15a^3b+5a^2b^2}$$

$$4a^2-3ab+b^2$$

$4a^2-3ab+b^2)12a^3-5a^2b+b^3(3a+b$

$\underline{12a^3-9a^2b+3ab^2}$

$4a^2b-3ab^2+b^3$

$\underline{4a^2b-3ab^2+b^3}$

$\therefore$ $4a^2-3ab+b^2$。爲所求之 H. C. F。

7. $a^3-a^2b+ab^2+14b^3$ 及 $4a^3+3a^2b-9ab^2+2b^3$。 〔答 $a+2b$〕

8. $2x^4+x^3-9x^2+8x-2$ 及 $2x^4-7x^3+11x^2-8x+2$。

〔解〕 $2-7+11-8+2)2+1-9+8-2(1$

$\underline{2-7+11-8+2}$

$\underline{4)8-20+16-4}$

$2-5+4-1)2-7+11-8+2(1-1$

$\underline{2-5+4-1}$

$-2+7-7+2$

$\underline{-2+5-4+1}$

$2-3+1$

$2-3+1)2-5+4-1(1-1$

$\underline{2-3+1}$

$-2+3-1$

$\underline{-2+3-1}$

故 $2-3+1$ 即 $2x^2-3x+1$，爲所求之 H.C.F。

9. $11x^4-9ax^3-a^2x^2-a^4$ 及 $13x^4-10ax^3-2a^2x^2-a^4$。

〔解〕從第二式減第一式，則

$13x^4-10ax^3-2a^2x^2-a^4-(11x^4-9ax^3-a^2x^2-a^4)=x^2(2x^2-ax-a^2)$，

而 $2x^2-ax-a^2=(2x+a)(x-a)$。

故所求之 H.C.F.。必可除盡 $(2x+a)(x-a)$。

而 $2x+a$，非兩式之公因子。故 $x-a$ 爲 H C F

10. $x^4+x^3-9x^2-3x+18$ 及 $x^5+6x^2-49x+42$。

〔解〕 $1+1-9-3+18)1+0+0+6-49+42(1-1$

$\underline{1+1-9-3+18}$

$-1+9+9-67+42$

$\underline{-1-1+9+3-18}$

$\underline{10)10+0-70+60}$

$1+0-7+6$

$$
\begin{array}{l}
1+0-7+6)1+1-9-3+18(1+1 \\
\qquad\qquad \underline{1+0-7+6} \\
\qquad\qquad\quad 1-2-9+18 \\
\qquad\qquad\quad \underline{1+0-7+\ 6} \\
\qquad\qquad -2)\underline{-2-2+12} \\
\qquad\qquad\qquad 1+1-\ 6)1+0-7+6(1-1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{1+1-6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ -1-1+6 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \underline{-1-1+6}
\end{array}
$$

$\therefore$ $1+1-6$ 即 x^2+x-6 爲 H.C.F.

11. $x^4-2x^3+5x^2-4x+3$ 及 $2x^4-x^3+6x^2+2x+3$。　〔答 x^2-x+3。〕

12. $x^4+3x^2+6x+35$ 及 $x^4+2x^3-5x^2+26x+21$。　〔答 x^2-3x+7。〕

最低公倍數

102. 定義 二個以上整代數式之公倍數。(Common Multiple) 謂可被各式整除之式。

二個以上整代數式之最低公倍數。(Lowest Common Multiple) 即可被各式整除最低次之式。最低公倍數之記號則用 L.C.M.

103. 一項式之最低公倍數 已知諸代數式之因子。則其最低公倍數。可由視察而得。

例如求 $a^3b^2(x-a)^2(x-b)^3$ 及 $ab^4(x-a)^4(x-b)$ 之 L.C.M.。此兩式之任意公倍數。則有 a^3 之因子。又有 b^4, $(x-a)^4$, $(x-b)^3$ 之因子。故任意之公倍數爲 $a^3b^4(x-a)^4(x-b)^3$。惟諸公倍數內無有更低於此者。由是 $a^3b^4(x-a)^4(x-b)^3$ 爲所求之 L.C.M.

依上例得如下之法則。

〔法則〕諸代數式之最低公倍數。爲諸式內所含各因子最高方乘之積。

例　題

1. 求 $3x^2yz$, $27x^3y^2z^2$, $6xy^2z^4$ 之 L.C.M.

〔解〕3,27,6 之最小公倍數 54，爲所求 L.C.M. 之數字係數。x^3, y^2, z^4 爲其因子。故所求之 L.C.M. $=54x^3y^2z^4$。

2. 求 $6ab^2(a+b)^2$, $4a^2b(a^2-b^2)$ 之 L.C.M.

〔解〕 $4a^2b(a^2-b^2)=4a^2b(a+b)(a-b)$。

故所求之 L.C.M. $=12a^2b^2(a+b)^2(a-b)$。

3. 求 $2axy(x-y)^2$, $3ax^2(x^2-y^2)$, $4y^2(x-y)^2$ 之 L.C.M.

〔答 $12ax^2y^2(x^2-y^2)^2$〕

4. 求 x^2-3x+2, x^2-5x+6, x^2-4x+3 之 L.C.M.

〔解〕 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$。

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

故所求之 L.C.M. $=(x-1)(x-2)(x-3)$。

104. 兩多項式之最低公倍數 多項式之因子。難由視察得之者。可依98章之法。先求兩式之H.C.F. 如下。

〔例〕 求 x^3+x^2-2 及 x^3+2x^2-3 之 L.C.M.

此兩式之 H.C.F. 依98章得 $x-1$。

而 $x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$, $x^3+2x^2-3=(x-1)(x^2+3x+3)$。

但 x^2+2x+2, x^2+3x+3 兩式。為以 H.C.F. 除得之商。故無公因子。

由是所求之 L.C.M. $=(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+3x+3)$。

(105.) 最低公倍之定理 A 及 B 為兩整代數式。L 為其最低公倍數。

a 及 b 為 H 除 A 及 B 所得之商。

即 $A\div H=a$, $B\div H=b$, 故 $A=Ha$, $B=Hb$。

因 H 為 A 及 B 之最高公因子。故 a 及 b 無公因子。由是 A 及 B 之 L.C.M. 為 $H\times a\times b$。

故 $L=Hab=Ha\times Hb\div H=A\times B\div H$ ....(1)

由是 $L\times H=A\times B$ ....(2)

〔定理〕 從(1)式則兩式之 L.C.M.。等於兩式之積。以其 H.C.F. 除得之商。從(2)式則兩式之積。等於其 L.C.M. 與 H.C.F. 之積。

例題八

求以下諸式之 L.C.M.

1. $6x^2-5ax-6a^2$, $4x^3-2ax^2-9a^3$.

〔解〕 $6x^2-5ax-6a^2=(2x-3a)(3x+2a)$。

$4x^3-2ax^2-9a^3=4x^3-6ax^2+4ax^2-9a^3=2x^2(2x-3a)+a(4x^2-9a^2)$

$=(2x-3a)(2x^2+2ax+3a^2)$。

$\therefore$ 所求之 L.C.M. $=(2x-3a)(3x+2a)(2x^2+2ax+3a^2)$

$=12x^4+2ax^3-4a^2x^2-27a^3x-18a^4$。

2. $4a^2-5ab+b^2,\quad 3a^3-3a^2b+ab^2-b^3$。

〔解〕 $4a^2-5ab+b^2=(4a-b)(a-b)$。

$3a^3-3a^2b+ab^2-b^3=3a^2(a-b)+b^2(a-b)=(a-b)(3a^2+b^2)$,

$\therefore$ 所求之 L.C.M. $=(a-b)(4a-b)(3a^2+b^2)$。

3. $3x^3-13x^2+23x-21,\quad 6x^3+x^2-44x+21$。

〔解〕 求得兩式之 H.C.F. 爲 $3x-7$。

$\therefore$ 所求之 L.C.M. $=(3x^3-13x^2+23x-21)(6x^3+x^2-44x+21)\div(3x-7)$

$=(3x^3-13x^2+23x-21)(2x^2+5x-3)$。

4. $x^4-11x^2+49,\quad 7x^4-40x^3+75x^2-40x+7$。

〔答 $(x^2+5x+7)(7x^4-40x^3+75x^2-40x+7)$〕

5. $x^3+6x^2+11x+6,\ x^4+x^3-4x^2-4x$。

〔解〕 $x^3+6x^2+11x+6=x^3+2x^2+4x^2+8x+3x+6$

$=x^2(x+2)+4x(x+2)+3(x+2)=(x+2)(x^2+4x+3)=(x+2)(x+1)(x+3)$。

又 $x^4+x^3-4x^2-4x=x(x^3+x^2-4x-4)=x(x+1)(x+2)(x-2)$。

$\therefore$ 所求之 L.C.M. $=x(x+1)(x+2)(x+3)(x-2)$。

6. $x^4-x^3+8x-8,\ x^4+4x^3-8x^2+24x$。

〔答 $x(x-1)(x+2)(x+6)(x^2-2x+4)$〕

7. $8a^3-18ab^2,\quad 8a^3+8a^2b-6ab^2,\quad 4a^2-8ab+3b^2$。

〔解〕 $8a^3-18ab^2=2a(4a^2-9b^2)=2a(2a+3b)(2a-3b)$。

而 $8a^3+8a^2b-6ab^2=2a(4a^2+4ab-3b^2)=2a(2a-b)(2a+3b)$,

又 $4a^2-8ab+3b^2=(2a-3b)(2a-b)$。

$\therefore$ 所求之 L.C.M. $=2a(2a-3b)(2a-b)(2a+3b)$。

8. $x^2-7x+12,\ 3x^2-6x-9,\ 2x^3-6x^2-8x$。〔答 $6x(x+1)(x-3)(x-4)$〕

9. $8x^3+27,\quad 16x^4+36x^2+81,\quad 6x^2-5x-6$。

〔答 $(3x+2)(8x^3+27)(8x^3-27)$〕

10. $x^2-6xy+9y^2,\ x^2-xy-6y^2,\ 3x^2-12y^2$。 〔答 $3(x-3y)^2(x^2-4y)^2$〕

11. $x^2-7xy+12y^2$, $x^2-6xy+8y^2$, $x^2-5xy+6y^2$。

〔答 $(x-2y)(x-3y)(x-4y)$〕

12. 如 ax^2+bx+c, $a'x^2+b'x+c'$ 有 $x+f$ 之公因子。則 $(ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$。試證之。

〔證〕$x+f$ 必可整除 $a(a'x^2+b'x+c')-a'(ax^2+bx+c)$。

即 $(ab'-a'b)x+ac'-a'c=(ab'-a'b)\left(x+\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right)$。 $\therefore f=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$。

又 $x+f$ 可整除 $c'(ax^2+bx+c)-c(a'x^2+b'x+c')$。

即 $(ac'-a'c)x^2+(bc'-bc')x=(ac'-a'c)x\left(x+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}\right)$。 $\therefore f=\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}$。

由是 $\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}$。 $\therefore (ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$。

13. ax^3+bx^2+cx+d, $a'x^3+b'x^2+c'x+d'$ 如有 x 之二次公因子。試證 $\frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}=\frac{ca'-c'a}{bd'-b'd}=\frac{da'-d'a}{cd'-c'd}$。

〔證〕x 之二次公因子。爲 x^2+px+q。而 x^2+px+q 必能除原兩式之和或差。故如下法。

$$a'(ax^3+bx^2+cx+d)-a(a'x^3+b'x^2+c'x+d')$$
$$=(ba'-b'a)\left(x^2+\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}x+\frac{da'-d'a}{ba'-b'a}\right)。$$

$\therefore p=\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}$, $q=\frac{da'-d'a}{ba'-b'a}$。

又 $d'(ax^3+bx^2+cx+d)-d(a'x^3+b'x^2+c'x+d')$

$$=(ad'-a'd)x\left(x^2+\frac{bd'-b'd}{ad'-a'd}x+\frac{cd'-c'd}{ad'-a'd}\right)。$$

$\therefore p=\frac{bd'-b'd}{ad'-a'd}$, $q=\frac{cd'-c'd}{ad'-a'd}$。

由是 $\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}=\frac{bd'-b'd}{ad'-a'd}$。 即 $\frac{ca'-c'a}{bd'-b'd}=\frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}$。

又 $\frac{da'-d'a}{ba'-b'a}=\frac{cd'-c'd}{ad'-a'd}$。 即 $\frac{da'-d'a}{cd'-c'd}=\frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}$。

$\therefore \frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}=\frac{ca'-c'a}{bd'-b'd}=\frac{da'-d'a}{cd'-c'd}$。

14. ax^3+bx+c, $a'x^3+b'x+c'$。有 $x+f$ 之公因子。則其關係如何。

〔解〕$x+f$ 可整除 $a(a'x^3+b'x+c')-a'(ax^3+bx+c)$

$$=(ab'-a'b)\left(x+\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right)。$$

$$\therefore\ f=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=-\frac{ac'-a'c}{ba'-b'a}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)。$$

又 $x+f$。可整除 $c'(ax^3+bx+c)-c(a'x^3+b'x+c')$

$$=(ac'-a'c)x\left(x^2+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}\right)。$$

即可整除 $x^2+\frac{bc'-b'c}{ac'-a'c}$。故由 **88** 章 $x=f$；則 $(-f)^2+\frac{bc'-bc}{ac'-a'c}=0$。

$$\therefore\ f^2=\frac{b'c-bc'}{ac'-a'c}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

依 (1) (2) 兩式 $\left(-\frac{ac'-a'c}{bc'-b'c}\right)^2=\frac{b'c-bc'}{ac'-a'c}$,

由是 $(ac'-a'c)^3=(ba'-b'a)^2(b'c-bc')$。

15. 有 a, b, c, 三量。每二量之 H.C.F. 爲 g_1, g_2, g_3, L.C.M. 爲 l_1, l_2, l_3。試證 $g_1g_2g_3l_1l_2l_3=(abc)^2$。

〔證〕由 **105** 章 $g_1\,l_1=ab$, $g_2\,l_2=bc$, $g_3\,l_3=ca$, 以三個相等式相乘。即得 $g_1g_2g_3l_1l_2l_3=ab.bc.ca.=(abc)^2$。

16. A, B, C, 爲任意之三式，(BC), (CA), (AB), 及 (ABC)，爲 B 及 C, C 及 A, A 及 B, A, B, 及 C 之最高公因子。則 A, B 及 C 之最低公倍數，爲 A.B.C. (ABC)÷{(BC). (CA). (AB)} 其證如何。

〔證〕$B=(ABC)m$, $C=(ABC)n$, $A=(ABC)p$。則 m, n, p 爲以 H. C. F. 除其 A. B. C. 之商。故無公因子。設 x, y, z 爲三式之各因子。其 x 與 y, x 與 z, y 與 z 均無公因子。再設 α, β, γ 爲每二個原式之公因子。而 α 與 β, α 與 γ, β 與 γ。亦無公因子。則 $m=\beta\gamma y$, $n=\gamma\alpha z$, $p=\alpha\beta x$。

故 $(BC)=(ABC)\gamma$, $(CA)=(ABC)\alpha$, $(AB)=(ABC)\beta$。

$\therefore$ A, B, C 之 L.C.M. $=(ABC)\alpha\beta\gamma xyz$

$=(ABC)\alpha\beta x.\ (ABC)\beta\gamma y.\ (ABC)\gamma\alpha z.\ (ABC)\div\{(ABC)\gamma.\ (ABC)\alpha.\ (ABC)\beta\}$

$=A.B.C.\ (ABC)\div\{(BC).\ (CA).\ (AB)\}$。

第捌編

分數

106. 分數(Fractions)表示除法運算之式。可於被除式之下作一橫線。而以除式書之。其商數謂之代數分數(Algebraical Fraction)。

被除式爲分子(Numerator)。除式爲分母(Denominator)。

例如$\frac{a}{b}$。即$a\div b$之意義。

由此定義$\frac{a}{b}=a\div b$。故可推知$\frac{a}{b}\times b=a\div b\times b=a$。

(107.) 定理以同數量乘分母分子。其分數之值不變。

例如$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$。試證之。

依前章$\frac{a}{b}\times b=a$兩邊皆以m乘之。則

$$\frac{a}{b}\times bm=am \text{ 兩邊皆以 } bm \text{ 除之。則}$$

$$\frac{a}{b}=am\div bm=\frac{am}{bm}。$$

108. 約分如前章凡分數以同數量乘分母分子。其值不變。故反之。以同數量除分母分子。則其值亦不變。

因之凡分數之分母分子。可去其公有之因子。而化爲簡式。

例如$\frac{a^2x}{b^2x}=\frac{a^2}{b^2}$。即去其分母分子公有之因子x也。

如分母分子無公因子。則其分數爲巳約分數(Lowest Terms)。質言之。曰最低項。

欲化分數爲已約分數。可以分母分子之H.C.F除其分母分子。蓋如此則分母分子無公因子。且仍與原分數等值。

〔第一例〕變$\frac{3ax^2y}{6a^2xy}$爲已約分數。

分母分子之H.C.F.爲$3axy$。故

$$\frac{3ax^2y}{6a^2xy}=\frac{3ax^2y\div3axy}{6a^2xy\div3axy}=\frac{x}{2a}$$

〔第二例〕化$\frac{x^2-7xy+10y^2}{x^2-8xy+12y^2}$爲最簡式。

$$\frac{x^2-7xy+10y^2}{x^2-8xy+12y^2}=\frac{(x-2y)(x-5y)}{(x-2y)(x-6y)}=\frac{x-5y}{x-6y}$$

〔第三例〕化$\frac{x^2-ax}{a^2-x^2}$爲最簡式。

$$\frac{x^2-ax}{a^2-x^2}=\frac{-x(a-x)}{(a+x)(a-x)}=\frac{-x}{a+x}=-\frac{x}{a+x}$$

此$\frac{-x}{a+x}=\frac{x}{-(a+x)}=-\frac{x}{a+x}$因在除法。凡被除數與除數。其號異者。其商爲負也。

〔第四例〕化$\frac{x^4+3x^2+6x+35}{x^4+2x^3-5x^2+26x+21}$爲最簡式。

求分母分子之H.C.F.爲x^2-3x+7,

故原分數$=\frac{(x^4+3x^2+6x+35)\div(x^2-3x+7)}{(x^4+2x^3-5x^2+26x+21)\div(x^2-3x+7)}=\frac{x^2+3x+5}{x^2+5x+3}$

109. 通分母 以同數乘分母分子。其值不變。故異分母之諸分數。可變爲同分母。謂之通分。

其法先求各分母之最低公倍數。以其各分母除之。而各以所得之商。乘本分數之分母分子卽得。

如是則所得之新分數。皆以諸分母之最低公倍數爲分母。

〔例〕化$\frac{a}{x^3y(x+y)}$, $\frac{b}{xy^2(x-y)}$, $\frac{c}{x^2y^2(x^2-y^2)}$爲同分母。

此諸分母之L.C.M.爲$x^3y^3(x^2-y^2)$。以各分母除之。則順次得$y^2(x-y)$, $x^2(x+y)$, xy, 各商。以之各乘分母分子。則得

$$\frac{a}{x^3y(x+y)}=\frac{a\times y^2(x-y)}{x^3y(x+y)\times y^2(x-y)}=\frac{ay^2(x-y)}{x^3y^3(x^2-y^2)},$$

$$\frac{b}{xy^3(x-y)}=\frac{b\times x^2(x+y)}{xy^3(x-y)\times x^2(x+y)}=\frac{bx^2(x+y)}{x^3y^3(x^2-y^2)},$$

$$\frac{c}{x^2y^2(x^2-y^2)}=\frac{c\times xy}{x^2y^2(x^2-y^2)\times xy}=\frac{cxy}{x^3y^3(x^2-y^2)}。$$

通諸分數爲同分母。若不用L.C.M.而用任意之公倍數。亦可變爲同分母。然欲求簡式。非用最低公倍數不可。

110. 分數之加法 同分母兩分數之和(或差)。卽以兩分子之和(或差)爲分子。而以其同分母爲分母。

此理可由43章推知之。

在43章 $a+b\div c=a\div c+b\div c$。

故 $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ 卽 $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$,

同法 $$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},$$

若兩分數爲異分母者。先化爲同分母。再依上法求之。至如多於二個之諸分數。相加或相減。亦依前法次第求之。卽先通諸分母爲同分母。而後以通得之諸分子相加或減卽得。

〔第一例〕求 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}$ 之值。

分母之L.C.M.爲 $(a+b)(a-b)$ 而。

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}+\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a-b)+(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{2a}{a^2-b^2}$$

〔第二例〕求 $\frac{a}{a-b}+\frac{ab}{b^2-a^2}$ 之值。

$$\frac{a}{a-b}+\frac{ab}{b^2-a^2}=\frac{a}{a-b}+\frac{ab}{-(a^2-b^2)}=\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}-\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{a^2}{a^2-b^2}$$

〔第三例〕化 $\frac{a}{a-x}+\frac{a}{a+x}+\frac{2a^2}{a^2+x^2}+\frac{4a^4}{a^4+x^4}$ 爲最簡式。

此例以每二分數依次相加爲便。式如下

$$\frac{a}{a-x}+\frac{a}{a+x}=\frac{a(a+x)+a(a-x)}{a^2-x^2}=\frac{2a^2}{a^2-x^2},$$

$$\frac{2a^2}{a^2-x^2}+\frac{2a^2}{a^2+x^2}=\frac{2a^2(a^2+x^2)+2a^2(a^2-x^2)}{a^4-x^4}=\frac{4a^4}{a^4-x^4},$$

$$\frac{4a^4}{a^4-x^4}+\frac{4a^4}{a^4+x^4}=\frac{4a^4(a^4+x^4)+4a^4(a^4-x^4)}{a^8-x^8}=\frac{8a^8}{a^8-x^8}。$$

依上之運算。其第二式，可用a^2, x^2代第一之a, x。而以2乘之即得。其第三式，可用a^4, x^4代第二之a^2, x^2。亦以2乘之即得。故既得第一式之結果。則以後求之頗易。

［第四例］化$\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}$為最簡式。

此例須括合同種類之項。而施運算之法。

$$\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}-\left(\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x+1}\right)$$

$$=\frac{(x+3)-(x-3)}{x^2-9}-\frac{3(x+1)-3(x-1)}{x^2-1}=\frac{6}{x^2-9}-\frac{6}{x^2-1}$$

$$=\frac{6(x^2-1)-6(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-1)}=\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}。$$

［第五例］化$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$為最簡式。

依等勢式之例。易化諸分數為同分母。

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$=-\frac{a^2}{(a-b)(c-a)}-\frac{b^2}{(b-c)(a-b)}-\frac{c^2}{(c-a)(b-c)}$$

$$=-\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=-\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1。$$

但依94章第一例。則分子為

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)。$$

［第六例］化$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}$為最簡式。

$$原式=-\frac{a^2}{(a-b)(c-a)(x+a)}-\frac{b^2}{(b-c)(a-b)(x+b)}-\frac{c^2}{(c-a)(b-c)(x+c)}$$

$$=-\frac{a^2(b-c)(x+b)(x+c)+b^2(c-a)(x+c)(x+a)+c^2(a-b)(x+a)(x+b)}{(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)}$$

但依94章。分子內之$b=c$。則分子$=0$。同法推之。則分子有$(b-c)(c-a)(a-b)$之因子。惟分子之a無高於a^2次。故此外之因子不含a。

由是分子$=L(b-c)(c-a)(a-b)x^2$。

比較其a^2bx^2之係數。則$1=-L$。　$\therefore\ L=-1$。

故分子$=-(b-c)(c-a)(a-b)x^2$。

由是原式$=-\dfrac{-(b-c)(c-a)(a-b)x^2}{(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)}$

$=\dfrac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}$。

111. 分數之乘法 代數分數之乘法如下。

兩分數$\frac{a}{b}$及$\frac{c}{d}$。試證$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$。

依106章。$\frac{a}{b}\times b=a$，$\frac{c}{d}\times d=c$。

由是$\frac{a}{b}\times b\times\frac{c}{d}\times d=ac$。卽$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times bd=ac$。兩邊以$bd$除之。則$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=ac\div bd=\frac{ac}{bd}$。

〔法則〕兩分數之積。以其分母之積爲分母。分子之積爲分子。同理推得諸分數之連乘積。卽其諸分母之連乘積爲分母。諸分子之連乘積爲分子。

何則。因$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$。

又依同法得分數之方乘如下。

$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$，卽$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$。

112. 分數之除法 代數分數之除法如下。

證$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$。

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$其理已明。又兩邊以$\frac{d}{c}$乘之。則

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$。但$\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=\frac{cd}{dc}=1$。

由是$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$。

〔法則〕以$\frac{c}{d}$除者。可以$\frac{c}{d}$之反商$\left(即\frac{d}{c}\right)$乘之。

〔特別之例〕乘法及除法。示以特別之例如下。

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}。$$

$$\frac{a}{b}\div c=\frac{a}{b}\div\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}。$$

〔註〕代數分數之乘及除。可由33章證明之法則得之。

例如$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=a\div b\times(c\div d)=a\div b\times c\div d$

$$=a\times c\div b\div d=ac\div(bd)=\frac{ac}{bd}。$$

〔第一例〕化$\frac{x^3+a^3}{x^2-a^2}\times\frac{x-a}{(x+a)^2}$爲最簡式。

原式$=\frac{(x^3+a^3)(x-a)}{(x^2-a^2)(x+a)^2}=\frac{(x+a)(x^2-ax+a^2)(x-a)}{(x+a)(x-a)(x+a)^2}=\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2}$。

〔第二例〕化$\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$爲最簡式

原式$=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\dfrac{xy}{xy\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=\dfrac{xy}{y+x}$。

〔第三例〕化$\dfrac{\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}}{\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}}$爲最簡式。

$$\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{a^2-x^2}=\frac{4ax}{a^2-x^2}。$$

$$\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a+x)^2+(a-x)^2}{a^2-x^2}=\frac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}。$$

$\therefore$原式$=\frac{4ax}{a^2-x^2}\div\frac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}=\frac{4ax}{a^2-x^2}\times\frac{a^2-x^2}{2(a^2+x^2)}=\frac{2ax}{a^2+x^2}$。

(113.) 分數之定理 下示以必要之定理,即第二項內含有第一項者。

〔定理一〕諸分數$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$若相等。則必各等於

$$\frac{pa_1+qa_2+ra_3+\cdots\cdots}{pb_1+qb_2+rb_3+\cdots\cdots}$$

設各分數皆等於x。則$\frac{a_1}{b_1}=x,\quad a_1=b_1x,$

$$\therefore\quad pa_1=pb_1x,$$

同法得
$$qa_2=qb_2x,$$
$$ra_3=rb_3x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由加法得$pa_1+qa_2+ra_3+\ldots=(pb_1+qb_2+rb_3+\ldots)x$。

$$\therefore\quad \frac{pa_1+qa_2+ra_3+\ldots}{pb_1+qb_2+rb_3+\ldots}=x=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots$$

〔推論〕若$p=q=r=\ldots=1$。則

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots}$$

〔定理二〕諸分數$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$若相等。則必各等於$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$。但A爲$a_1, a_2, a_3, \ldots$所成n次之等次式。B爲在A內用$b_1$代$a_1$, b_2代a_2, b_3代a_3等所得之式。因各分數相等。故令各分數等於x。則

$$a_1=b_1x,\quad a_2=b_2x,\quad a_3=b_3x\ldots\ldots\ldots$$

在A之任意一項爲$\lambda a_1^{\alpha}a_2^{\beta}a_3^{\gamma}\ldots\ldots$則$\lambda b_1^{\alpha}b_2^{\beta}b_3^{\gamma}\ldots\ldots$爲在B內相當之項。以A, B二式爲n次之等次式。故$\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots=n$。

由是$\lambda a_1^{\alpha}a_2^{\beta}a_3^{\gamma}\ldots\ldots=\lambda(b_1x)^{\alpha}(b_2x)^{\beta}(b_3x)^{\gamma}\ldots\ldots$

$$=\lambda b_1^{\alpha}b_2^{\beta}b_3^{\gamma}\ldots\ldots x^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots}$$

而$\alpha+\beta+\gamma+\ldots=n$。故前式$=\lambda b_1^{\alpha}b_2^{\beta}b_3^{\gamma}\ldots\ldots x^n$。

即A之任意一項=B之相當項$\times x^n$。

∴ A之各項之和=B之各項之和$\times x^n$。

即 $A=x^n\times B$。 $\therefore\ \dfrac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}=x$。

〔例〕 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\dfrac{\sqrt[3]{(\lambda a_1^3+\beta a_2^3+\gamma a_1a_2a_3)}}{\sqrt[3]{(\lambda b_1^3+\beta b_2^3+\gamma b_1b_2b_3)}}$。

〔定理三〕若 $\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \dfrac{a_3}{b_3}$……爲不等諸分數。而其分母皆爲正數，則分數 $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots}$ 必較此中之最大分數小。而較最小分數大也。

設 $\dfrac{a_1}{b_1}$ 爲最大分數。而以 x 代之，則

$$\frac{a_1}{b_1}=x. \quad 故 \quad \frac{a_2}{b_2}<x,\ \frac{a_3}{b_3}<x,\ \ \cdots\cdots$$

由題意 $b_1, b_2, b_3,\cdots\cdots$ 皆爲正數。故得如下式。

$$a_1=b_1x$$
$$a_2<b_2x$$
$$a_3<b_3x$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

由加法 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots<(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots)x$。

$$\therefore\ \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots}<x=\frac{a_1}{b_1}。$$

其 $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots}{b_1+b_2+b_3+\cdots}$ 比最小之分數大者。亦可以同法證明之。

〔注意〕本題因 $b_1.\ b_2.\ b_3\cdots\cdots$ 爲正數。故能合理。若爲負數，則不等式之兩邊。以負乘之，其大小適相反。

例如 $5<7$. 兩邊以 -2 乘之，則 $-10>-14$。

故如 b_2 爲負。則從 $\dfrac{a_2}{b_2}<x$ 變爲 $a_2>b_2x$。於理不合。

〔第一例〕 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, 可證 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$。

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=x$。則 $a=bx, c=dx$。

$$\therefore\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{bx+b}{bx-b}=\frac{x+1}{x-1}\times\frac{d}{d}=\frac{dx+d}{dx-d}=\frac{c+d}{c-d}。$$

〔別法〕 因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。故 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$。即 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。

又 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$。即 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$。

由是 $\frac{a+b}{b}\div\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}\div\frac{c-d}{d}$。即 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$。

〔第二例〕 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。證其各等於 $\frac{\sqrt{(a^2-2ac+2c^2)}}{\sqrt{(b^2-2bd+2d^2)}}$。此例依定理二。即可推得。今別證之如下。

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=x$。 $a=bx,\ c=dx$。

$\therefore\ a^2-2ac+2c^2=(bx)^2-2(bx)(dx)+2(dx)^2$

$=(b^2-2bd+2d^2)x^2$。

由是 $x^2=\frac{a^2-2ac+2c^2}{b^2-2bd+2d^2}$。即 $x=\frac{\sqrt{(a^2-2ac+2c^2)}}{\sqrt{(b^2-2bd+2d^2)}}$。

〔第三例〕 $\frac{cy+bz}{l}=\frac{az+cx}{m}=\frac{bx+ay}{n}$。試證

$$\frac{bcx}{-al+bm+cn}=\frac{cay}{al-bm+cn}=\frac{abz}{al+bm-cn}。$$

從定理一。各分數 $=\frac{-a(cy+bz)+b(az+cx)+c(bx+ay)}{-al+bm+cn}$

$=\frac{2bcx}{-al+bm+cn}$。

同法推得各分數 $=\frac{2cay}{al-bm+cn}=\frac{2abz}{al+bm-cn}$。

例題九

化次之各分數爲最簡式。

1. $\frac{30a^2b^3c^5x^2y^4z^5}{36a^5bc^2x^5yz^6}$。 答 $\frac{5b^2c^3y^3z^2}{6a^3x^3}$。

2. $\frac{3a^7b^2c^{10}x^8yz^4}{a^6c^4x^3y^6}$。 答 $\frac{3ab^2c^6x^5z^4}{y^5}$。

3. $\frac{a^2-8ab+7b^2}{a^2-3ab-28b^2}$

〔解〕$\frac{(a-b)(a-7b)}{(a+4b)(a-7b)}=\frac{a-b}{a+4b}$。 （答）

4. $\frac{7x^4y^4-8x^2y^2+1}{28x^4y^4+3x^2y^2-1}$。

〔解〕$\frac{(7x^2y^2-1)(x^2y^2-1)}{(7x^2y^2-1)(4x^2y^2+1)}=\frac{x^2y^2-1}{4x^2y^2+1}$。 （答）

5. $\frac{(x^3-y^3)(x+y)}{(x^3+y^3)(x-y)}$。

〔解〕$\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)}{(x+y)(2^2-xy+y^2)(x-y)}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$。 （答）

6. $\frac{(x^6-y^6)(x-y)}{(x^3-y^3)(x^4-y^4)}$。

〔解〕$\frac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)(x-y)}{(x^3-y^3)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}$。 （答）

7. $\frac{2x^3+3x^2-1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$。

〔解〕原式$=\frac{2x^2(x+1)+x^2-1}{x^2(x^2+2x+1)+(x^2+2x+1)}=\frac{(x+1)(2x^2+x-1)}{(x^2+2x+1)(x^2+1)}$

$=\frac{2x^2+x-1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{2x-1}{x^2+1}$。

8. $\frac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}$

〔解〕原式$=\frac{x^3(x-1)-(x-1)}{x^4+x^2+1-2x^3-2x^2-2x}=\frac{(x-1)(x^3-1)}{(x^4+x^2+1)-2x(x^2+x+1)}$

$=\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1-2x)}=\frac{(x-1)^2}{x^2-3x+1}$。

9. $\frac{2x^3+5x^2y+xy^2-3y^3}{3x^4+3x^3y-4x^2y^2-xy^3+y^4}$。

〔解〕原式$=\frac{2x^3+2x^2y-2xy^2+3x^2y+3xy^2-3y^3}{3x^4+3x^3y-3x^2y^2-x^2y^2-xy^3+y^4}$

$=\frac{2x(x^2+xy-y^2)+3y(x^2+xy-y^2)}{3x^2(x^2+xy-y^2)-y^2(x^2+xy-y^2)}=\frac{2x+3y}{3x^2-y^2}$。

10. $\frac{54x^5-27x^4-3x^2-4}{36x^5+3x^3+3x-2}$。 答 $\frac{9x^3-3x-2}{6x^3+3x^2-1}$。

11. $\dfrac{(a+b)\{(a+b)^2-c^2\}}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}$。

〔解〕原式$=\dfrac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{\{2bc+(a^2-b^2-c^2)\}\{2bc-(a^2-b^2-c^2)\}}$

$=\dfrac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}}$

$=\dfrac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)}=\dfrac{a+b}{(a-b+c)(b+c-a)}$。

12. $\dfrac{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}$。

〔解〕原式$=\dfrac{-(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)}{-(x-y)(y-z)(z-x)}=xy+yz+zx$。

13. $\dfrac{x^4(y-z)+y^4(z-x)+z^4(x-y)}{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}$。

〔解〕原式$=\dfrac{-(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}{2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)}$

$=-\dfrac{1}{2}(y-z)(z-x)(x-y)$。

14. $\dfrac{a(b-c)(c-d)-c(d-a)(a-b)}{b(c-d)(d-a)-d(a-b)(b-c)}$。

〔解〕原式$=\dfrac{a\{-c^2+(b+d)c-bd\}-c\{-a^2+(b+d)a-bd\}}{b\{-d^2+(a+c)d-ac\}-d\{-b^2+(a+c)b-ac\}}$。

$=\dfrac{ac(a-c)-bd(a-c)}{ac(d-b)-bd(d-b)}=\dfrac{(a-c)(ac-bd)}{(d-b)(ac-bd)}=\dfrac{a-c}{d-b}$。

15. $\dfrac{x^3(y^2-z^2)+y^3(z^2-x^2)+z^3(x^2-y^2)}{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}$。

〔解〕原式$=\dfrac{-(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)}{-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)}=\dfrac{xy+yz+zx}{x+y+z}$。

16. $\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{b^2-a^2}$。

〔解〕原式$=\dfrac{2a(a-b)+2b(a+b)}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$。

17. $\dfrac{3-x}{1-3x}-\dfrac{3+x}{1+3x}-\dfrac{1-16x}{9x^2-1}$。

〔解〕 原式$=\frac{(3-x)(1+3x)-(3+x)(1-3x)}{1-9x^2}+\frac{1-16x}{1-9x^2}$

$=\frac{16x}{1-9x^2}+\frac{1-16x}{1-9x^2}=\frac{1}{1-9x^2}$。

18. $\frac{x}{x+2y}-\frac{y}{2y-x}-\frac{(x-y)^2}{x^2-4y^2}$。 〔答 $\frac{y(x+y)}{x^2-4y^2}$〕

19. $\frac{x-2a}{x+2a}-\frac{x+2a}{2a-x}+\frac{8ax^2}{x^2-4a^2}$。

〔解〕 原式$=\frac{x-2a}{x+2a}+\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{8ax}{x^2-4a}$。

$=\frac{(x-2a)^2+(x+2a)^2+8ax}{x^2-4a^2}=\frac{2(x^2+4ax+4a^2)}{x^2-4a^2}=\frac{2(x+2a)}{x-2a}$。

20. $\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x+4}+\frac{3}{x+6}-\frac{1}{x+8}$。

〔解〕 原式$=\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+8}\right)-\left(\frac{3}{x+4}-\frac{3}{x+6}\right)=\frac{6}{(x+2)(x+8)}-\frac{6}{(x+4)(x+6)}$

$=\frac{6(x+4)(x+6)-6(x+2)(x+8)}{(x+2)(x+8)(x+4)(x+6)}=\frac{48}{(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)}$。

21. $\frac{1}{x+a}-\frac{3}{x+3a}+\frac{3}{x+5a}-\frac{1}{x+7a}$。 〔答 $\frac{48a^3}{(x+a)(x+3a)(x+5a)(x+7a)}$〕

22. $\frac{1}{x-2a}-\frac{4}{x-a}+\frac{6}{x}-\frac{4}{x+a}+\frac{1}{x+2a}$。

〔解〕 原式$=\left(\frac{1}{x-2a}+\frac{1}{x+2a}\right)-\left(\frac{4}{x-a}+\frac{4}{x+a}\right)+\frac{6}{x}$。

$=\frac{2x}{x^2-4a^2}-\frac{8x}{x^2-a^2}+\frac{6}{x}=\frac{24a^4}{x(x^2-4a^2)(x^2-a^2)}$。

23. $\frac{1}{x^2-5xy+6y^2}-\frac{2}{x^2-4xy+3y^2}+\frac{1}{x^2-3xy+2y^2}$。

〔解〕 原式$=\frac{1}{(x-2y)(x-3y)}-\frac{2}{(x-3y)(x-y)}+\frac{1}{(x-y)(x-2y)}$

$=\frac{(x-y)-2(x-2y)+(x-3y)}{(x-y)(x-2y)(x-3y)}=\frac{0}{(x-y)(x-2y)(x-3y)}=0$。

24 $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$。 〔答 0〕

25. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$。 〔答 1〕

26. $\dfrac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(1+bc)(1+ba)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(1+ca)(1+cb)}{(c-a)(c-b)}$。

〔解〕 原式 $=-\dfrac{(1+ab)(1+ac)}{(a-b)(c-a)}-\dfrac{(1+bc)(1+ba)}{(b-c)(a-b)}-\dfrac{(1+ca)(1+cb)}{(c-a)(b-c)}$

$=-\dfrac{(b-c)(1+ab)(1+ac)+(c-a)(1+bc)(1+ba)+(a-b)(1+ca)(1+cb)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$。

在分子 $b=c$。則分子 $=0$。故分子有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之因子。而分子之 a 不高於 a^2 故分子 $=L(b-c)(c-a)(a-b)$， $\therefore\ L=1$。
由是原式爲 -1。

27. $\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$。

〔解〕 原式 $=abc\left\{\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}\right\}$

$+d\left\{\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}\right\}=abc\{0\}+d\{1\}=d$。

28. $\dfrac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}$。

〔解〕 $\dfrac{x^2-yz}{(x+y)(x+z)}=\dfrac{x(x+z)-z(x+y)}{(x+y)(x+z)}=\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{z}{x+z}$。

同法 $\dfrac{y^2-zx}{(y+z)(y+x)}=\dfrac{y}{y+z}-\dfrac{x}{y+x}$， $\dfrac{z^2-xy}{(z+x)(z+y)}=\dfrac{z}{z+x}-\dfrac{y}{x+y}$。
由加法原式 $=0$。

29. $\dfrac{(y-x)(z-x)}{(x-2y+z)(x+y-2z)}+\dfrac{(z-y)(x-y)}{(x+y-2z)(-2x+y+z)}$

$+\dfrac{(z-x)(z-y)}{(-2x+y+z)(x-2y+z)}$。

〔解〕 $x-y=a$， $y-z=b$， $z-x=c$。則

$\dfrac{(y-x)(z-x)}{(x-2y+z)(x+y+2z)}=\dfrac{-(x-y)(z-x)}{\{(x-y)-(y-z)\}\{(y-z)-(z-x)\}}=-\dfrac{ac}{(a-b)(b-c)}$。

$\therefore$ 原式 $=-\dfrac{ac}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{ba}{(b-c)(c-a)}-\dfrac{cb}{(c-a)(a-b)}=1$。

30. $$\frac{\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}+\dfrac{x+c}{x-c}-3\dfrac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}{\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{x}{x-b}+\dfrac{x}{x-c}-3\dfrac{x^3+(ab+bc+ca)x}{(x-a)(x-b)(x-c)}}。$$

〔解〕分子$=\dfrac{x+a}{x-a}+1+\dfrac{x+b}{x-b}+1+\dfrac{x+c}{x-c}+1-3\left\{\dfrac{(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}+1\right\}$

$$=\frac{2x}{x-a}+\frac{2x}{x-b}+\frac{2x}{x-c}-3\frac{(x+a)(x+b)(x+c)+(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=\frac{2x}{x-a}+\frac{2x}{x-b}+\frac{2x}{x-c}-3\frac{2x^3+2(ab+bc+ca)x}{(x-a)(x-b)(x-c)}=2\times 分母。$$

∴ 原式$=2$。

31. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$。 〔答 $a+b+c$〕

32. $\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^4}{(c-a)(c-b)}$。

〔解〕原式 $=-\dfrac{a^4}{(a-b)(c-a)}-\dfrac{b^4}{(b-c)(a-b)}-\dfrac{c^4}{(c-a)(b-c)}$

$$=-\frac{a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=-\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab。$$

33. $a^2\dfrac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\dfrac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$。

〔解〕通分母爲$-(a-b)(b-c)(c-a)$。則

分子$=a^2(b-c)(a+b)(a+c)+b^2(c-a)(b+c)(b+a)+c^2(a-b)(c+a)(c+b)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)^2$。

∴ 原式$=(a+b+c)^2$

34. $$\frac{a^2\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b^2\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}{a\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)+c\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)}。$$

〔解〕以 abc 乘分母子。則得

$$\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=a+b+c。$$

35. $\frac{1}{(a-b+c)(a+b-c)}+\frac{1}{(a+b-c)(-a+b+c)}+\frac{1}{(-a+b+c)(a-b+c)}$。

〔解〕原式$=\frac{(-a+b+c)+(a-b+c)+(a+b-c)}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}$

$$=\frac{a+b+c}{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}。$$

36. $\frac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\frac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\frac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$。

〔解〕原式$=\frac{b-c}{(a+b-c)(a-b+c)}+\frac{c-a}{(b+c-a)(b-c+a)}+\frac{a-b}{(c+a-b)(c-a+b)}$

$$=\frac{(b-c)(-a+b+c)+(c-a)(a-b+c)+(a-b)(a+b-c)}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}。$$

分子$=-a(b-c)+(b^2-c^2)-b(c-a)+(c^2-a^2)-c(a-b)+(a^2-b^2)$

$=-\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}+\{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)\}$

$=-\{0\}+\{0\}=0$。

由是原式=0。

37. 試證 $16+\left(\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}-2\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)^2=16\left(\frac{x^4+a^4}{x^4-a^4}\right)^2$。

〔證〕 $16+\left\{\frac{(x+a)^2+(x-a)^2}{x^2-a^2}-\frac{2(x^2-a^2)}{x^2+a^2}\right\}^2$

$$=16+\left\{\frac{2(x^2+a^2)}{x^2-a^2}-\frac{2(x^2-a^2)}{x^2+a^2}\right\}^2=16+\left\{\frac{8a^2x^2}{x^4-a^4}\right\}^2$$

$$=16\left\{1+\frac{4a^4x^4}{(x^4-a^4)^2}\right\}=16\left(\frac{x^4+a^4}{x^4-a^4}\right)^2。$$

38. 證 $\frac{a+b}{ax+by}+\frac{a-b}{ax-by}+2\frac{a^2x+b^2y}{a^2x^2+b^2y^2}=4\frac{a^4x^3-b^4y^3}{a^4x^4-b^4y^4}$

39. 證明以下諸式。

(1) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(1+ax)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)(1+bx)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(1+cx)}$

$$=\frac{1}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$$

(2) $\frac{a}{(a-b)(a-c)(1+ax)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)(1+bx)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(1+cx)}$

$=\frac{-x}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$。

(3) $\frac{1}{(a-b)(a-c)(1+ax)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)(1+bx)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(1+cx)}$

$=\frac{x^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$,

〔證〕玆就三題內之(3)證之,

原式$=-\frac{(b-c)(1+bx)(1+cx)+(c-a)(1+cx)(1+ax)+(a-b)(1+ax)(1+bx)}{(b-c)(c-a)(a-b)(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$

分子$=(b-c)(c-a)(a-b)(Lx^2+Mx+N)$。

比較 a^2bx^2 之係數。則 $1=-L$, $\therefore L=-1$。

比較 a^2bx 之係數。則 $0=-M$。 $\therefore M=-0$。

比較 a^2b 之係數。則 $0=-N$。 $\therefore N=-0$。

由是原式$=\frac{x^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$,

40. $\frac{(a+p)(a+q)}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{(b+p)(b+q)}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\frac{(c+p)(c+q)}{(c-a)(c-b)(x+c)}$。

〔解〕通分母爲$-(a-b)(b-c)(c-a)(x+a)(x+b)(x+c)$。則分子爲

$(a+p)(a+q)(b-c)(x+b)(x+c)+(b+p)(b+q)(c-a)(x+c)(x+a)$

$+(c+p)(c+q)(a-b)(x+a)(x+b)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b)(x-p)(x-q)$。

$\therefore$ 原式$=\frac{(x-p)(x-q)}{(x+a)(x+b)(x+c)}$,

41. $\frac{a(b+c-a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(c+a-b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(a+b-c)}{(c-a)(c-b)}$。 〔答 -2〕

42. $\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(a+b-c)(-a+b+c)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{(c-a)(c-b)}$

〔解〕同分母$=-(a-b)(b-c)(c-a)$。則分子爲

$(b-c)(a-b+c)(a+b-c)+(c-a)(b-c+a)(b+c-a)$

$+(a-b)(c-a+b)(c+a-b)=L(b-c)(c-a)(a-b)$。

比較 a^2b 之係數。則

$1-1+1+1+1+1=-L$。 $\therefore$ $L=-4$。

由是原式 $=4$

43. $\dfrac{a(b+c)}{b+c-a}+\dfrac{b(c+a)}{c+a-b}+\dfrac{c(a+b)}{a+b-c}$,

〔解〕原式 $=\dfrac{a(b+c)(c+a-b)(a+b-c)+\text{以下} a, b, c \text{之輪換}}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$。

在分子 $a=0$。則分子 $=0$。

$\therefore$ 分子 $=Labc(a+b+c)$。

$a=b=c=1$。則

$1(2)(1)(1)+1(2)(1)(1)+1(2)(1)(1)=L(1+1+1)$。 $\therefore L=2$。

由是原式 $=\dfrac{2abc(a+b+c)}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$。

44. 求下式之證。

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)^2+\left(n+\frac{1}{n}\right)^2+\left(mn+\frac{1}{mn}\right)^2-\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)\left(mn+\frac{1}{mn}\right)=4,$$

〔證〕左邊 $=m^2+2+\dfrac{1}{m^2}+n^2+2+\dfrac{1}{n^2}$

$$+\left(mn+\frac{1}{mn}\right)\left\{mn+\frac{1}{mn}-\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=4+\left(m^2+\frac{1}{n^2}\right)+\left(n^2+\frac{1}{m^2}\right)+\left(mn+\frac{1}{mn}\right)\left\{-\frac{n}{m}-\frac{m}{n}\right\}$$

$$=4+\frac{m}{n}\left(mn+\frac{1}{mn}\right)+\frac{n}{m}\left(mn+\frac{1}{mn}\right)+\left(mn+\frac{1}{mn}\right)\left\{-\frac{n}{m}-\frac{m}{n}\right\}$$

$$=4+\left(mn+\frac{1}{mn}\right)\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}-\frac{n}{m}-\frac{m}{n}\right)=4,$$

45. 求下式之證。

$$\left(\frac{2bc}{b+c}-b\right)\div\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b-2c}\right)+\left(\frac{2bc}{b+c}-c\right)\div\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c-2b}\right)=1\,c,$$

〔證〕左邊 $=b\left(\dfrac{2c}{b+c}-1\right)\div\dfrac{b-c}{c(b-2c)}+c\left(\dfrac{2b}{b+c}-1\right)\div\dfrac{c-b}{b(c-2b)}$

$$=\frac{b(c-b)}{b+c}\div\frac{-(c-b)}{c(b-2c)}+\frac{c(b-c)}{b+c}\div\frac{b-c}{b(2b-c)}$$

$$=\frac{b(c-b)}{b+c}\times\frac{c(b-2c)}{-(c-b)}+\frac{c(b-c)}{b+c}\times\frac{b(2b-c)}{b-c}$$

$$=-\frac{bc(b-2c)}{b+c}+\frac{bc(2b-c)}{b+c}=\frac{bc(-b+2c+2b-c)}{b+c}$$

$$=\frac{bc(b+c)}{b+c}=bc。$$

46. 證 $\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}+\frac{a-b}{1+ab}=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(1+bc)(1+ca)(1+ab)}$。

47. $(yz+zx+xy)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-xyz\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$。

〔解〕 原式 $=\frac{yz+zx+xy}{x}+\frac{yz+zx+xy}{y}+\frac{yz+zx+xy}{z}-\frac{yz}{x}-\frac{zx}{y}-\frac{xy}{z}$

$$=\frac{yz}{x}+z+y+z+\frac{zx}{y}+x+y+x+\frac{xy}{z}-\frac{yz}{x}-\frac{zx}{y}-\frac{xy}{z}$$

$$=2(x+y+z)。$$

〔別法〕 原式 $=\frac{(yz+zx+xy)^2}{xyz}-xyz\left(\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{x^2y^2z^2}\right)$

$$=\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2xyz(x+y+z)}{xyz}-\frac{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}{xyz}$$

$$=2(x+y+z)。$$

48. 設 $\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}$。試證此各分數等於

$$\frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}}。$$

〔證〕 $\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}=k$。則

$$y+z=(b-c)k,\ z+x=(c-a)k,\ x+y=(a-b)k。$$

$\therefore\ (y+z)+(z+x)+(x+y)=(b-c+c-a+a-b)k,$

即 $x+y+z=0$……………………………………………(1)。

又 $k^2=\frac{(y+z)^2}{(b-c)^2}=\frac{(z+x)^2}{(c-a)^2}=\frac{(x+y)^2}{(a-b)^2}$，由 113 章定理一

$$=\frac{(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}，由 (1) 式$$

$$=\frac{(-x)^2+(-y)^2+(-z)^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}。$$

$\therefore\ k=\frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{\sqrt{\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}}}。$

49. 設$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$。試證$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+y+a+b}$.

〔證〕$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=k$。則$x=yk,\ a=bk$。

$$\therefore\ \frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{y^2k^2+b^2k^2}{yk+bk}+\frac{y^2+b^2}{y+b}=\frac{y^2k+b^2k}{y+b}+\frac{y^2+b^2}{y+b}$$
$$=\frac{y^2(k+1)+b^2(k+1)}{y+b}\times\frac{k+1}{k+1}=\frac{(yk+y)^2+(bk+b)^2}{yk+bk+y+b}$$
$$=\frac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+a+y+b}。$$

50. 設$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$。試證$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$。

〔證〕$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$。則

$x=(b+c-a)k,\ y=(c+a-b)k,\ z=(a+b-c)k$.

$$\therefore\ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$$
$$=\{(b-c)(b+c-a)+(c-a)(c+a-b)+(a-b)(a+b-c)\}k$$
$$=\{b^2-c^2-a(b-c)+c^2-a^2-b(c-a)+a^2-b^2-c(a-b)\}k$$
$$=0。$$

51. 設$\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}$。而c不為0。則此各分數。等於$\frac{ay-bx}{a-b}$。又$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$。試證之。

〔證〕$\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}=\frac{a(bz-cy)+b(cx-az)}{a(b-c)+b(c-a)}=\frac{-c(ay-bx)}{-c(a-b)}$。

而$c\neq0$。故以$-c$除分母子。即得$\frac{ay-bx}{a-b}$。令此各分數。皆等於k。則

$bz-cy=(b-c)k,\quad cx-az=(c-a)k,\quad ay-bx=(a-b)k,$

由加法$(bz-cy)+(cx-az)+(ay-bx)=(b-c+c-a+a-b)k=0$.

即$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0$.

52. 求下式之證。

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^4}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^4}{(c-d)(c-a)(c-b)}$$
$$+\frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}=a+b+c+d。$$

〔證〕左邊之同分母爲$(a-b)(b-c)(c-a)(a-d)(b-d)(c-d)$。則

$$\text{分子}=a^4(b-c)(b-d)(c-d)-b^4(c-a)(c-d)(a-d)-c^4(a-b)(a-d)(b-d)$$
$$-d^4(a-b)(b-c)(c-a),$$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)(a+b+c+d).$$

由是左邊等於$a+b+c+d$。即等於右邊。

53. 下列諸分數之和。若$r<n-1$，則等於0。若$r=n-1$。則等於1。若$r=n$。則等於$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。試證之。

$$\frac{a_1^r}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots\cdots(a_1-a_n)}+\frac{a_2^r}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots\cdots(a_2-a_n)}$$
$$+\cdots\cdots\cdots+\frac{a_n^r}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots\cdots(a_n-a_{n-1})}.$$

〔證〕通分母爲

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots\cdots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\cdots\cdots(a_2-a_n)\cdots\cdots(a_{n-1}-a_n)$$

則分子$=a_1^r(a_2-a_3)(a_2-a_4)\cdots\cdots(a_2-a_n)(a_3-a_4)\cdots\cdots(a_3-a_n)\cdots\cdots(a_{n-1}-a_n)$
$+a_2^r(a_1-a_2)\cdots\cdots(a_1-a_n)(a_3-a_4)\cdots\cdots(a_{n-1}-a_n)+\cdots\cdots+a_n^r(a_1-a_2)\cdots\cdots(a_{n-1}-a_n)$。

分子爲等次式，而就其次數求分子之第一項。則a_1^r爲r次，$(a_2-a_3)\cdots\cdots(a_2-a_n)$爲$n-2$次，$(a_3-a_4)$爲$n-3$次，$\cdots\cdots a_{n-1}-a_n$爲1次，故其次數爲

$$r+(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+2+1=r+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)\text{ 次}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

又分母有$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots\cdots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\cdots\cdots(a_2-a_n)\cdots\cdots(a_{n-1}-a_n)$之因子。而其次數含$a_1$之因子$n-1$。含$a_2$之因子$n-2$。$\cdots\cdots$含$a_{n-1}$之因子1。故得$(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1)$次。

今$r=n-1$，則分子之次數從(A)得$n-1+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$。

即$\frac{1}{2}n(n-1)$次。故原式等於1。

故r若小於$n-1$則分子之次數低於$\frac{1}{2}n(n-1)$次，故原式可爲0。

又$r=n$。則(A)爲$n+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=\frac{1}{2}n(n-1)+1$次。分子有高於$\frac{1}{2}n(n-1)$次1次者。故分子在前之因子外。有$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$

故原式$=a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots a_n$。

54. 試證 $1+\dfrac{a_1}{x-a_1}+\dfrac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}+\dfrac{a_3x^2}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}+\ldots\ldots$

$+\dfrac{a_nx_{n-1}}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}=\dfrac{x^n}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}$。

(證) $1+\dfrac{a_1}{x-a_1}=\dfrac{x}{x-a_1}$, $1+\dfrac{a_1}{x-a_1}+\dfrac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}=\dfrac{x}{x-a_1}+\dfrac{a_2x}{(x-a_1)(x-a_2)}$

$=\dfrac{x^2}{(x-a_1)(x-a_2)}$以下由同理。推得本題之結果。

55. 求證 $\dfrac{b+c+d+\ldots\ldots+k+l}{a(a+b+c+\ldots\ldots+k+l)}=\dfrac{b}{a(a+b)}+\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\ldots\ldots$

$+\dfrac{l}{(a+b+\ldots\ldots+k)(a+b+\ldots\ldots+k+l)}$。

(證) 從 $\dfrac{b+c+d+\ldots\ldots+k+l}{a(a+b+c+\ldots\ldots+k+l)}$ 減 $\dfrac{b}{a(a+b)}$，則得

$\dfrac{c+d+\ldots\ldots+k+l}{(a+b)(a+b+\ldots\ldots+k+l)}$，從此式減 $\dfrac{c}{(a+b)(a+b+c)}$，則得

$\dfrac{d+\ldots\ldots+k+l}{(a+b+c)(a+b+c+\ldots\ldots+k+l)}$，以下可以同理推之。

第玖編

方程式　一未知數量

114. 方程式(Equations)兩代數式相等之式。謂之方程式。其兩相等式。稱方程式之兩節(Members)。或稱兩邊(Sides)。

例如$x+a=b+c-d$之方程式。$x+a$爲前節或爲左邊。$b+c-d$爲後節或爲右邊。

方程式其內所含諸文字不論爲何值而常相等。謂之恆同式(Identity)。

例如$x+x=2x$爲恆同式。因x爲3或爲6。其$x+x$恆等於$2x$也。

又$2(x+a)=2x+2a$其x, a任爲何值而常相等。故爲恆同式。

非恆同式者。謂之方程式。此編及次編則專論此。蓋方程式內所含諸文字。不論何值而相等者。祇可謂之恆同式。若其所含諸文字。僅限於特別之值而相等者。乃可謂之方程式。

方程式內含已知數量(Known Quantity)。及未知數量(Unknown Quantity)二種。已知數量用數字或a, b, c等最初之文字代之。未知數量用x, y, z等最後之文字代之。

115. 一未知數量 此編所論爲有一未知數量之方程式。

解(Solve)方程式。即求其未知數量之值。其值用於方程式。能令兩邊相等乃爲合理。而此未知數量之值。謂之方程式之根(Root)。凡同根兩方程式。謂之等值(Equivalent)。

僅有一未知數量x之方程式。爲x之有理整式。而其最高次僅有x者。其方程式爲一次(Simple)。有x^2者爲二次(Quadratic)。有x^3者爲三次(Cubic)以下類推。

(116.) 原則 解方程式須依下之原則。

〔第一〕方程式之兩邊各加同數量。與原式爲等值。

例如 $A=B$ 之方程式。兩邊各加 m。得 $A+m=B+m$ 仍爲等值可知。

〔第二〕方程式之一邊。以其任意之項移於他邊。則必變其符號。

例如方程式 $a+b-c=p-q+r$ 兩邊各加 $-p+q-r$。則依原則第一。$a+b-c+(-p+q-r)=p-q+r+(-p+q-r)$。即 $a+b-c-p+q-r=0$。

依此右邊移於左邊。則 p 爲 $-p$, $-q$ 爲 $+q$, $+r$ 爲 $-r$。已各變其符號。

由是凡方程式。以其他邊之各項。盡移於一邊。則其他邊可爲0。

又 $a+b-c=p-q+r$。移項可變爲

$$a+q-r=p-b+c。$$

〔第三〕方程式之兩邊。以同數量乘之或除之。則所得之方程式。亦與原式等值。

何則如 $A=B$。即知 $mA=mB$。反之若由 $mA=mB$。證明 $A=B$。則因 $mA=mB$。由原則第二。得 $m(A-B)=0$。而以 m 非 0。故 $A-B=0$。

$\therefore\ A=B$。

又兩邊如以同數量 m 除之。可不必別用證法。即與以 $\frac{1}{m}$ 乘之同。故 $\frac{A}{m}=\frac{B}{m}$。即 $A\div m=B\div m$。

117. 一次方程式 (Simple Equations) 示其解法於下。

〔第一例〕解 $13x-7=5x+9$ 式。

$5x$ 與 -7 各移項。得 $13x-5x=9+7$, (原則二)

即 $8x=16$,

兩邊以 x 之係數 8 除之。則 $x=2$。 (原則三)

〔第二例〕解 $\frac{3x}{4}-2=\frac{2x}{5}+5$ 式。

去分母故以 4, 5 之 L.C.M. 20 乘之。則得

$$15x-40=8x+100 \qquad \text{(原則三)}$$

移項則得 $15x-8x=100+40$ (原則二)

即 $7x=140$

兩邊以 x 之係數 7 除之。則 $x=20$ (原則三)

〔第三例〕解 $a(x-a)=2ab-b(x-b)$ 式,

解去括弧。則 $ax-a^2=2ab-bx+b^2$,

移項則得 $ax+bx=a^2+2ab+b^2$,

即 $(a+b)x=(a+b)^2$。

兩邊以 x 之係數 $a+b$ 除之。則 $x=a+b$。

由以上三例。得解一次方程式之法則,順序之如下。

〔法則〕方程式爲分數式及有他之代數記號如括弧者。則第一當去其分母及其記號。(即有括弧者。解去其括弧)第二移未知數量之項於左邊,移已知數量之項於右邊。且合各邊皆集爲一項。第三以未知數量之係數除已知數量。即得方程式之根。

118. 特別之例 凡一次方程式由 x 之項與已知項所成,故總可變爲 $ax+b=0$。而其解答爲 $x=-\frac{b}{a}$。

由是得特別之例如下。

〔第一〕 $b=0$。則 $x=-\frac{0}{a}=0$。

〔第二〕 $b=0,\ a=0$。則 $x=-\frac{0}{0}$。於此式無論 x 爲何值皆合於理。即爲恆同式。

$\frac{0}{0}$ 者。所以示任何之值。何則。因 $\frac{3}{5}=\frac{3\times 0}{5\times 0}=\frac{0}{0}$。

又 $8=\frac{8\times 0}{1\times 0}=\frac{0}{0}$。故爲不定數。

〔第三〕 $a=0$。則 $x=-\frac{b}{0}=-\infty$。即無窮大。

何則。a 之值次第減小。因而 $x=-\frac{b}{a}$ 之值。必次第增大。

例如　$a=\frac{1}{10}$，　則 $x=-\frac{b}{\frac{1}{10}}=-10b$，

$a=\frac{1}{100}$，　則 $x=-\frac{b}{\frac{1}{100}}=-100b$，

$a=\frac{1}{1000}$。　則 $x=-\frac{b}{\frac{1}{1000}}=-1000b$。

………………………………………

$\therefore$　$a=0$。則 $x=-\infty$。

例　題

解以下之方程式。

1. $\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-4)=4$。

〔解〕兩邊以 12 乘之。則得，$6(x-2)-4(x-3)+3(x-4)=48$，

即　$6x-12-4x+12+3x-12=48$。

即　$5x=60$。　$\therefore$　$x=12$。

2. $\frac{1}{3}(x-3)-\frac{1}{4}(x-8)+\frac{1}{5}(x-5)=0$。　〔答 $x=0$〕

3. $a(x-a)=b(x-b)$。　〔答 $x=a+b$〕

4. $(x+a)(x+b)-(x-a)(x-b)=(a+b)^2$。

〔解〕解去括弧。得 $x^2+(a+b)x+ab-x^2+(a+b)x-ab=(a+b)^2$。

即　$2(a+b)x=(a+b)^2$。　$\therefore$　$x=\frac{1}{2}(a+b)$。

5. $a(2x-a)+b(2x-b)=2ab$。　〔答 $x=\frac{1}{2}(a+b)$〕

6 $(a^2+x)(b^2+x)=(ab+x)^2$

〔解〕解去括弧。得 $a^2b^2+(a^2+b^2)x+x^2=a^2b^2+2abx+x^2$。

移項得 $(a^2-2ab+b^2)x=a^2b^2-a^2b^2$。　$\therefore$　$x=0$。

7. $3(x+3)^2+5(x+5)^2=8(x+8)^2$。

〔解〕$5\{(x+5)^2-(x+8)^2\}=3\{(x+8)^2-(x+3)^2\}$。

即　$5(-3)(2x+13)=3(5)(2x+11)$。

故　$-2x-13=2x+11$。　$\therefore$　$x=-6$。

8. $(x+a)^4-(x-a)^4-8ax^3+8a^4=0$。

〔解〕$\{(x+a)^2+(x-a)^2\}\{(x+a)^2-(x-a)^2\}-8a(x^3-a^3)=0$。

即 $2(x^2+a^2)4ax-8a(x^3-a^3)=0$。

即 $(x^2+a^2)x-(x^3-a^3)=0$。

故 $a^2x=-a^3$。 $\therefore\ x=-a$。

9. $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=3x(x^2-1)$。

〔解〕$(x-1)^3+(x+1)^3+x^3=3x^3-3x$。

即 $2x^3+6x+x^3=3x^3-3x$。 $\therefore\ 9x=0$。 $\therefore\ x=0$。

10. $(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3=3(x+a)(x+b)(x+c)$。

〔解〕$A^3+B^3+C^3-3ABC=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$

$$=\frac{1}{2}(A+B+C)(2A^2+2B^2+2C^2-2AB-2BC-2CA)$$

$$=\frac{1}{2}(A+B+C)\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\}$$。

故原方程式 $(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3-3(x+a)(x+b)(x+c)=0$。

變爲 $\frac{1}{2}(x+a+x+b+x+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$。

即 $3x+a+b+c=0$。 $\therefore\ x=-\frac{1}{3}(a+b+c)$。

119. 因子分割法之應用 凡因子有一爲0者。其積亦爲0。因子無一爲0者。其積亦不能爲0。

例如 $(x-2)(x-3)$ 必 $x-2$ 爲0。或 $x-3$ 爲0。則其式乃可爲0。

由是方程式 $(x-2)(x-3)=0$。則 $x-2=0$。或 $x-3=0$ 乃合於理。故此方程式之根爲 $x=2$。或 $x=3$。其他皆不能適合。

又連乘積 $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots$ 則必 $x-a$ 爲0。或 $(x-b)$ 爲0。或 $x-c$ 爲0……其式乃可爲0。若 $x-a,\ x-b,\ x-c,\ldots\ldots$ 諸因子內無一爲0者。則此連乘積不能爲0。

由是方程式 $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots=0$，則

$x-a=0$。或 $x-b=0$。或 $x-c=0$。乃合於理。故此方程式之根。爲 $x=a,\ x=b,\ x=c,\ldots\ldots$

依上所示。可不論方程式之次數如何。其餘答法。祇分割其一次因子令等於0。則其根可逕書出。

〔法則〕有任何次數之方程式。以其各項移於一邊而等於0。其解法與同次代數式分割其因子法同。

〔第一例〕解 $x^2-5x=6$ 式。

移項得 $x^2-5x-6=0$。

即 $(x-6)(x+1)=0$。

$\therefore$ $x-6=0$。或 $x+1=0$。

由是 $x=6$。或 $x=-1$。

〔第二例〕解 $x^3-x^2=6x$ 式。

移項得 $x^3-x^2-6x=0$。

即 $x(x-3)(x+2)=0$。

$\therefore$ $x=0$。或 $x=3$。或 $x=-2$。

(120.) 二次方程式 (Quadratic Equation) 二次方程式盡移其各項於一邊。則其公式如下。

$$ax^2+bx+c=0。$$

但 a, b, c 爲已知數量。

二次式因子分割法已見於第80章。今以同方法求二次方程式之根如下。

例如解二次方程式 $ax^2+bx+c=0$。

以 x^2 係數 a 除之。得 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$。

以 x 係數之半。即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}$ 之平方加而又減之。則得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0。$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left\{\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)}\right\}^2=0。$$

即 $$\left\{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}\right\}=0。$$

由是 $x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0$。或 $x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0$。

$\therefore$ x之二根。爲 $-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$。

〔簡解法〕平方根有＋及－之二種。即 $\sqrt{16}=\pm4$。故二次方程式之解法。如下爲便。

$$ax^2+bx+c=0。$$

即 $$x^2+\frac{b}{a}x=\frac{c}{a},$$

兩邊各加 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$。則得 $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$。

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}。$$

$$\therefore\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}。$$

由是 $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$。

〔第一例〕解 $x^2-13x+42=0$。式

$$x^2-13x+\left(\frac{13}{2}\right)^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2-42。$$

即 $$\left(x-\frac{13}{2}\right)^2=\frac{1}{4}。$$

$$\therefore\quad x-\frac{13}{2}=\pm\frac{1}{2}。$$

由是 $x=\frac{13}{2}\pm\frac{1}{2}$。即 $x=7$。或 $x=6$。

〔第二例〕解 $3x^2-10x+6=0$ 式。

即 $$x^2-\frac{10}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2-2。$$

即 $$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{7}{9}。$$

$$\therefore\quad x-\frac{5}{3}=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}。$$

由是 $x=\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}$ 或 $x=\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}$。

〔第三例〕解 $a(x^2+1)=x(a^2+1)$ 式。

變原方程式爲 $x^2-\frac{x}{a}(a^2+1)=-1$。

即 $x^2-\frac{x}{a}(a^2+1)+\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2=\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-1$。

即 $$\left(x-\frac{a^2+1}{2a}\right)^2=\frac{a^4-2a^2+1}{4a^2}。$$

$$\therefore\quad x-\frac{a^2+1}{2a}=\pm\frac{a^2-1}{2a}。$$

由是 $x=\frac{a^2+1}{2a}\pm\frac{a^2-1}{2a}$。

$\therefore$ $x=a$。或 $x=\frac{1}{a}$。

〔註〕以上所示二次方程式之解法。用因子分割法求之更便。

例題

解下之各方程式。

1. $9x^2-24x+16=0$。 〔答 $\frac{4}{3}$〕

〔解〕由原方程式。得 $(3x-4)^2=0$。 $\therefore$ $3x=4$。

2. $5(x^2+4)=4(x^2+9)$。 〔答 ±4〕

〔解〕由原方程式。得 $x^2=16$。 $\therefore$ $x=\pm4$。

3. $3x^2=8x+3$。 〔答 $3,\ -\frac{1}{3}$〕

4. $16x^2+16x+3=0$。 〔答 $-\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}$〕

〔解〕$16x^2+16x+4=1$, $(4x+2)^2=1$。 $\therefore$ $4x+2=\pm1$。

5. $x^2+(a-x)^2=(a-2x)^2$。 〔答 $0,\ a$〕

解 $x^2+(a-x)^2=(a-x)^2-2(a-x)x+x^2$。

$\therefore$ $2(a-x)x=0$。 由是 $x=a$。或 $x=0$

6. $x^2+(a-2x)^2=(a-3x)^2$。 〔答 $0, \frac{a}{2}$〕

7. $x^2+x=a^2+a$。 〔答 $a, -(a+1)$〕

〔解〕$x^2-a^2+x-a=0$。 卽 $(x-a)(x+a+1)=0$。

8. $x^2+2ax=b^2+2ab$。 〔答 $b, -(2a+b)$〕

〔解〕$x^2+2ax+a^2=b^2+2ab+a^2$。

卽 $(x+a)^2=(b+a)^2$。 $\therefore$ $x+a=\pm(b+a)$。

9. $(x-a)^2+(x-b)^2=(a-b)^2$。 〔答 a, b〕

〔解〕$(x-a)^2+(x-b)^2=\{(x-b)-(x-a)\}^2$。

由是 $0=-2(x-a)(x-b)$。 $\therefore$ $x=a, x=b$。

10. $(a-x)^3+(x-b)^3=(a-b)^3$。 〔答 a, b〕

〔解〕$(a-x)^3+(x-b)^3=\{(a-x)+(x-b)\}^3$。

卽 $(a-x)^3+(x-b)^3=(a-x)^3+(x-b)^3+3(a-x)(x-b)\{(a-x)+(x-b)\}$。

由是 $3(a-x)(x-b)(a-b)=0$。 $\therefore$ $x=a$ 或 b。

11. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$。 〔答 $1, \frac{a-b}{b-c}$〕

〔解〕$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$。

由原方程式減之。則得

$(b-c)(x^2-1)+(c-a)(x-1)=0$。

卽 $(x-1)\{(b-c)(x+1)+(c-a)\}=0$。 $\therefore$ $x=1$ 或 $\frac{a-b}{b-c}$。

(121.) 二根之詳論 前章解二次方程式$ax^2+bx+c=0$之二根。爲$-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$，及 $-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$。

負數之平方根爲虛數。故$\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$。必依$b^2-4ac$之正負而定爲實數(Real)或虛數(Imaginary)。

故$ax^2+bx+c=0$之兩根。從b^2-4ac之正負。而得實根或虛根。

又此兩根可從b^2-4ac之爲完全平方或非完全平方。而定其爲有理式或無理式。

由是此兩根皆爲有理式或皆爲無理式。又皆爲實根或皆爲虛根。自易明瞭。

又 $b^2-4ac=0$。則兩根爲等根。即 $-\frac{b}{2a}$。但此方程式不曰有一根 $-\frac{b}{2a}$ 而曰有相等之二根。

如 b^2-4ac 不爲 0。則此方程式爲有不等之二根。

由是 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根若相等。則其關係在 $b^2=4ac$。但依 83 章 $b^2=4ac$。則代數式 ax^2+bx+c 爲完全平方數。

〔注意〕b^2-4ac 之關係。最宜注意。

122. 特別之例 二次方程式特別之例。卽在係數爲 0 者。示之如下。

〔第一〕$c=0$。則 $ax^2+bx+c=0$。

即　　$ax^2+bx=0$。

即　　$x(ax+b)=0$。

$\therefore\ x=0$, 及 $-\frac{b}{a}$。即此兩根爲 0, 及 $-\frac{b}{a}$。

〔第二〕$c=0$, 及 $b=0$。則方程式爲 $ax^2=0$。由是此兩根皆爲 0。

〔第三〕$b=0$。則方程式爲 $ax^2+c=0$。

由是 $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$。故兩根之數值相等。而符號相反。

〔第四〕$a=0$, $b=0$, $c=0$。則此方程式爲恒同式。即 x 爲任何之值。皆合於理。

〔第五〕$a=0$, $b=0$。則在 $ax^2+bx+c=0$ 之式內。用 $\frac{1}{y}$ 代 x。即 $\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}+c=0$。即 $cy^2+by+a=0$。

而因 $a=0$, $b=0$。故 $cy^2=0$。

由第一例。則 y 俱爲 0。故 $x=\frac{1}{y}=\frac{1}{0}=\infty$。

即 x 之兩根。俱爲無窮大。

〔第六〕$a=0$, $c=0$。則 $ax^2+bx+c=0$。變爲 $bx=0$。由是 $x=0$。

又依第五例 $cy^2+by+a=0$。則 $by=0$。即 $y=0$。

由是 $x=\frac{1}{y}=\frac{1}{0}=\infty$

故在此例。則 x 之兩根爲 0 及 ∞。

〔第七〕 $a=0$。則 $cy^2+by=0$。

故 $y=0$, 及 $-\frac{b}{c}$。

由是 $x=\frac{1}{y}=\infty$, 及 $-\frac{c}{b}$。

例如方程式 $(a-a')x^2+(b-b')x+c-c'=0$。設 $a=a'$。則 x 之一根爲 ∞。其餘一根爲 $-\frac{c-c'}{b-b'}$。即有限數。

設 $a=a', b=b', c=c'$。則此方程式不論 x 爲如何之値。皆合於理即恆同式。

又方程式 $a(x+b)(x+c)+b(x+c)(x+a)=c(x+a)(x+b)$。除 $c=a+b$ 之外。不論 c 爲何値。必爲二次方程式。若 $c=a+b$。則 x^2 之係數爲零故通例爲一次方程式。然依第七例作二次方程式求之。則其一根必爲無窮大。

〔註〕無窮大之根。在代數學內。通例可置不論。

例如 $x^2+6x=x^2+12$。即 $6x=12$。 $\therefore\ x=2$。

若從 $x^2-x^2+6x=12$。即 $0x^2+6x=12$ 求之。則得 $x=2$, 及 ∞。

123. 方程式之零及無窮大根 普通之方程式。即 n 次方程式。如

$$ax^n+bx^{n-1}+\ldots\ldots+kx+l=0 \quad\ldots\ldots(1)$$

若 $l=0$。則得 $x(ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots\ldots+k)=0$。

又 $l=0, k=0$。則 x 之二根爲 0。依此其末項次第爲 0。則 0 之根亦次第加多。

又 $x=\frac{1}{y}$, 則得 $a\left(\frac{1}{y}\right)^n+b\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}+\ldots\ldots+k\left(\frac{1}{y}\right)+l=0$。

即 $$ly^n+ky^{n-1}+\ldots\ldots+by+a=0$$。

故 $a=0$, 則 y 之一根爲 0, 即 x 之一根爲 ∞。

又 $a=0, b=0$。則 y 之二根爲 0。即 x 之二根爲 ∞。依此知方程式首項之係數次第爲 0。則 ∞ 之根，亦次第加增。

由是從 (1) 式之末項爲 0。則得 0 之根。從其首項爲 0。則得 ∞ 之根。若 (1) 式之係數皆爲 0。則爲恆同式。

此理已見於 90 章與 91 章。當參考之。

(124.) 不整方程式 方程式之分母有含未知數者，謂之不整方程式。而其解法須以此不整方程式。化爲與之等值之整方程式。

方程式以其分數之分母乘之。則爲整方程式。雖然。其乘法必須檢查。(即檢查其根合理與否)。

何則。方程式之兩邊。以含未知數量之式乘之，即另得一新方程式，而其乘式等於 0 之一根，必非原方程式之根。故新方程式生有增根。

例如 $x+1=5$ 之根，爲 $x=4$。但此兩邊以 $x-2$ 乘之。則得 $(x+1)(x-2)=5(x-2)$。

即 $(x-2)(x+1-5)=0$。 $\therefore$ $x=4$, 及 $x=2$。

此 $x=2$ 爲非原方程所有之根，而由 $x-2=0$ 所生出者。

不整方程式化爲整方程式。則以含有未知數之分母乘其兩邊。故必生有增根。

如 $A=B$ 之方程式。以 P 乘之。則 $PA=PB$。即 $P(A-B)=0$。

P 爲乘式之未知數。故 $P=0$; $A-B=0$。而生有 $P=0$ 之增根。而不整方程式。即可依此意解之。

或謂不整方程式以其分母之最低公倍數乘之。則不生增根。但如下之第二例，乘以分母之最低公倍數者。仍生增根也。解明於後。

〔第一例〕解 $\frac{3}{x-5}+\frac{2x}{x-3}=5$ 式。

以分母之 L.C.M. $(x-5)(x-3)$ 乘其兩邊。則得

$$3(x-3)+2x(x-5)=5(x-5)(x-3).$$

$$\therefore\quad 3x^2-33x+84=0.$$

由是 $\qquad x=4,$ 或 $x=7$。

〔第二例〕 $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$。

以分母之 L.C.M. x^2-1 乘之，則得

$$x^2-3x+2(x^2-1)+x+1=0,$$

即 $3x^2-2x-1=0$。 $\therefore\ (3x+1)(x-1)=0$。

由是 $x=-\frac{1}{3}$，及 $x=1$。

故此方程式有 $-\frac{1}{3}$ 及 1 之兩根，然 1 非原方程式之根，即乘式 $x^2-1=0$ 之根，故爲增根。

由是不整方程式化爲整方程式之後，其不合理之根可省去，蓋不合理之根，必爲乘式 $=0$ 之根，而非原方程式之根也，今以別法證之如下。

〔別法〕 $x-1$ 爲不合理之根，今先行設法令其結果不得此根，則在於不必遷去其分母。

例如 從 $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$。變爲

$$\frac{x^2-3x+(x+1)}{x^2-1}+2=0,\ 即\ \frac{(x-1)^2}{x^2-1}+2=0。$$

即 $\frac{x-1}{x+1}+2=0$。 $\therefore\ x-1+2(x+1)=0$。 $\therefore\ x=-\frac{1}{3}$。

〔第三例〕 解 $\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$ 式。

此例亦不必遷去其分母，可從兩邊之各項各減去 1。

即 $\frac{x}{x-2}-1+\frac{x-9}{x-7}-1=\frac{x+1}{x-1}-1+\frac{x-8}{x-6}-1$。

即 $\frac{2}{x-2}+\frac{-2}{x-7}=\frac{2}{x-1}+\frac{-2}{x-6}$，

即 $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-6}$，

即 $\frac{-5}{(x-2)(x-7)}=\frac{-5}{(x-1)(x-6)}$。

由是 $(x-2)(x-7)=(x-1)(x-6)$。

$$\therefore \quad x=4。$$

〔第四例〕解 $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}+\frac{c}{x+c}=3$ 式。

兩邊各減去3。則得

$$\frac{a}{x+a}-1+\frac{b}{x+b}-1+\frac{c}{x+c}-1=0。$$

即 $$\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x+b}+\frac{x}{x+c}=0。$$

$$\therefore \quad x=0 \text{..(1)}$$

或 $$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=0。$$

以分母之L.C.M.乘之。則得

$$(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)=0。$$

即 $$3x^2+2x(a+b+c)+bc+ca+ab=0。$$

$$\therefore \quad x=-\frac{1}{3}\{(a+b+c)\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\}\text{......(2)}$$

由是此方程式之根爲(1)及(2)。

〔第五例〕解 $\frac{b+c}{bc-x}+\frac{c+a}{ca-x}+\frac{a+b}{ab-x}=\frac{a+b+c}{x}$ 式。

移項括之。則得 $\frac{b+c}{bc-x}-\frac{a}{x}+\frac{c+a}{ca-x}-\frac{b}{x}+\frac{a+b}{ab-x}-\frac{c}{x}=0。$

即 $$\frac{(a+b+c)x-abc}{x(bc-x)}+\frac{(a+b+c)x-abc}{x(ca-x)}+\frac{(a+b+c)x-abc}{x(ab-x)}=0。$$

由是 $$(a+b+c)x-abc=0 \text{......................................(1)}$$

或 $$\frac{1}{x(bc-x)}+\frac{1}{x(ca-x)}+\frac{1}{x(ab-x)}=0 \text{.......................(2)}$$

從(1)式 $x=\frac{abc}{a+b+c}$。

從(2)式去分母。得

$$(ca-x)(ab-x)+(ab-x)(bc-x)+(bc-x)(ca-x)=0。$$

即 $$3x^2-2x(bc+ca+ab)+abc(a+b+c)=0。$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}\{bc+ca+ab\pm\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-abc(a+b+c)}\}$$

(**125.**) **無理方程式**(Irrational Equations) 方程式含有未知數量之平方根或立方根。或其他之方根。謂之無理方程式。今示其解法於下。

先移無理項於一邊。其餘諸項移於他邊。乃將兩邊各自乘。乘後如尙有無理之項。再依此法解之。至悉化爲有理項而止。

〔第一例〕解 $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0$ 式。

移項得 $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+11}$。

兩邊自乘。則 $x+4+2\sqrt{(x+4)(x+20)}+x+20=4(x+11)$。

簡之。得 $\sqrt{(x+4)(x+20)}=x+10$。

又以兩邊自乘。則 $(x+4)(x+20)=x^2+20x+100$。

$\therefore \quad x=5$。

〔第二例〕解 $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2$ 式。

移項得 $\sqrt{2x+8}-2=2\sqrt{x+5}$。

兩邊自乘。則 $2x+8-4\sqrt{2x+8}+4=4(x+5)$。

即 $-4\sqrt{2x+8}=2x+8$。

又以兩邊自乘。則 $16(2x+8)=(2x+8)^2$。

即 $(2x+8)(2x-8)=0$。

$\therefore \quad x=-4$ 或 4。

〔第三例〕解 $\sqrt{ax+\alpha}+\sqrt{bx+\beta}+\sqrt{cx+\gamma}=0$ 式。

移項得 $\sqrt{ax+\alpha}+\sqrt{bx+\beta}=-\sqrt{cx+\gamma}$。

兩邊自乘。則 $ax+\alpha+2\sqrt{(ax+\alpha)(bx+\beta)}+bx+\beta=cx+\gamma$。

即 $(a+b-c)x+\alpha+\beta-\gamma=-2\sqrt{(ax+\alpha)(bx+\beta)}$。

又自乘。則 $(a+b-c)^2x^2+2(a+b-c)(\alpha+\beta-\gamma)x+(\alpha+\beta-\gamma)^2$

$$=4(ax+\alpha)(bx+\beta)。$$

即 $(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)x^2$

$+2(a\alpha+b\beta+c\gamma-b\gamma-c\beta-c\alpha-a\gamma-a\beta-b\alpha)x$

$+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma-2\gamma\alpha-2\alpha\beta=0$。

由是可從二次方程式而得其根。

〔餘論〕以上諸例。在平方根號之前所用之符號。無＋與－之差異。蓋代數量之平方根。必有兩符號。決非僅有一符號。即如$\sqrt{16}=\pm4$。故僅書$+\sqrt{x+1}$，或$-\sqrt{x+1}$。雖偏用一符號。而與$\pm\sqrt{x+1}$兼用兩符號者同意。

又　$x+\sqrt{x+1}$。決非僅爲$+\sqrt{x+1}$，而亦能爲$-\sqrt{x+1}$。

即　$x+\sqrt{x+1}$。可爲$x\pm\sqrt{x+1}$。

例如$\sqrt{(x+1)}=5$。即$x+1=25$。　　$\therefore\quad x=24$。

又　$-\sqrt{(x+1)}=5$。則亦$x+1=25$。　$\therefore\quad x=24$。

故$x=24$。則$\sqrt{x+1}=5$之根。即$\sqrt{24+1}=5$，$+5=5$，

又$x=24$。則$-\sqrt{x+1}=5$之根。即$-\sqrt{24+1}=5$，$-(-5)=5$。

即$\sqrt{x+1}=5$。則用$\sqrt{25}=+5$。

$-\sqrt{x+1}=5$。則用$\sqrt{25}=-5$。

126. **兩邊之平方** 有理方程式之兩邊各自乘。則生增根。例如有理方程式$A=B$之兩邊各方之。則得$A^2=B^2$。即$A^2-B^2=0$。即$(A-B)(A+B)=0$。

$\therefore\quad A=B$。$A=-B$。此$A=-B$之根爲增根。

由是方程式之兩邊各自乘。必不能與原方程式等值。然在無理方程式。獨能與原方程式等值。而不生增根。例如$\sqrt{A}=\sqrt{B}$之兩邊各方之。則得$A=B$。即$A-B=0$。即$(\sqrt{A}-\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{B})=0$。

$\therefore\quad \sqrt{A}=\sqrt{B}$。$\sqrt{A}=-\sqrt{B}$。

又$\sqrt{A}=\sqrt{B}$。原含有$\pm\sqrt{A}=\pm\sqrt{B}$之意義。故有$\sqrt{A}=\sqrt{B}$，$-\sqrt{A}=-\sqrt{B}$，$\sqrt{A}=-\sqrt{B}$，$-\sqrt{A}=\sqrt{B}$之四根。而此四根兩兩相等。故實得$\sqrt{A}=\sqrt{B}$，$\sqrt{A}=-\sqrt{B}$之二根。故無理方程式。若兩邊求其平方。則仍與原方程式等值。

例如$x+1=\sqrt{x+13}$。$x+1=-\sqrt{x+13}$此二式皆兩邊自乘。則皆得$(x+1)^2=x+13$。可參觀(152章)。

127. 定理 二次方程式,祇有二根。

在90章x之n次式。曾證x之值。若多於n個。則其式不能相消而爲0。故x之二次式x之值,若多於二個。其式亦不能相消而爲0。故x之二次方程式,其根不能多於二,特證之如次。

若$ax^2+bx+c=0$。設x之三根爲α, β, γ。則,

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \ldots\ldots(1)$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \ldots\ldots(2)$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \ldots\ldots(3)$$

而此三方程式a, b, c,非皆等於0。則同時不能適合。證之如次。

從(1)式及(2)式。由減法得$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$,

則 $$(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0。$$

但α, β原設爲不等。即$\alpha-\beta \neq 0$。

故 $$a(\alpha+\beta)+b=0 \ldots\ldots(4)$$

又$\beta-\gamma \neq 0$。故(2)(3)兩式。亦與前同法得

$$a(\beta+\gamma)+b=0 \ldots\ldots(5)$$

從(4)(5)兩式。由減法得$a(\alpha-\gamma)=0 \ldots\ldots(6)$

$\alpha-\gamma \pm 0$。故非$a=0$。則6式爲不合理。

若(6)式爲合理。即$a=0$。從(4)式。則$b=0$。從(1)式。則$c=0$。

由是二次方程式。若有三根,則各項之係數皆爲0。即爲恆同式。不論x爲如何之根。皆合於理。故非恆同式,則二次方程式之根。祇有二個。

〔第一例〕 解 $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=x^2$ 式。

$x=a$。則 $a^2\dfrac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)}=a^2$。

即 $a^2+0=a^2$ 爲合理。

又 $x=b$ 亦能合理。

而$x=c$。則$a^2\dfrac{(c-b)(c-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(c-c)(c-a)}{(b-c)(b-a)}=c^2$。其右邊爲$c^2$。故不合理,

由是此方程式x之二根。爲a, b。且爲x之二次方程式。故非恆同式。

〔第二例〕 $a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2$,

此方程式,亦爲二次方程式。而 $x=a, x=b, x=c$ 皆能適合。即有三根。故爲恆同式。

〔第三例〕 $a^3\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^3\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^3\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^3$。

此方程式爲三次方程式。而 $x=a, x=b, x=c$ 皆能適合又 $x=0$ 則不能適合。故非恆同式。

故此方程式。爲有 a, b, c 三根之三次方程式。

〔第四例〕 $(a-\alpha)^2x+(a-\beta)^2y+(a-\gamma)^2z=(a-\delta)^2$。

$(b-\alpha)^2x+(b-\beta)^2y+(b-\gamma)^2z=(b-\delta)^2$。

$(c-\alpha)^2x+(c-\beta)^2y+(c-\gamma)^2z=(c-\delta)^2$。

上之三方程式。證其合理如下。

先設 $(d-\alpha)^2x+(d-\beta)^2y+(d-\gamma)^2z=(d-\delta)^2$。

但 d 爲任意之數量。

再設方程式 $(X-\alpha)^2x+(X-\beta)^2y+(X-\gamma)^2z=(X-\delta)^2$。此式爲 X 之二次方程式。然令 $X=a, X=b, X=c$,則與最初之三方程式適合。是 X 之值有三個。故知此方程式。爲恆同式。即 X 爲任意之值。均能合理。

由是 $X=d$。亦必適合。

即 $$(d-\delta)^2x+(d-\beta)^2y+(d-\gamma)^2z=(d-\delta)^2。$$

(128)。根及係數之關係 示二次方程式之根與其係數之關係如下。

依 120 章 $ax^2+bx+c=0$ 之根。爲 $-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$。此二根爲 α, β。則

$$\alpha=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}。\qquad \beta=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}。$$

由加法得 $\alpha+\beta=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$ ....(1)

又由乘法得 $\alpha\beta=\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$ ....(2)

(1)式及(2)式。所以示兩根之和及積。全賴係數而著。故此兩式爲最要之式。

〔別法〕$ax^2+bx+c=0$,即 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$,其二根爲 α,β。則 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$。即 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$。其二根亦爲 α,β。故此兩方程式全同。

由是比較其 x 之係數及末項,則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ 及\ \alpha\beta=\frac{c}{a}。$$

129. 任意方程式之根及係數之關係 任何次數之方程式。其根與係數之關係,可依下之方法求得之。

x 之 n 次式。爲 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+\ldots\ldots$ 而 x 之 n 個之值。即 $x=\alpha,\ x=\beta,\ x=\gamma\ldots\ldots$ 可以代入。而令其式爲零。

故 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+dx^{n-3}+\ldots\ldots=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots$

此方程式之兩邊,x 之同方乘之係數相等。故可得根及係數之關係。(詳在437章)。

〔例〕三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 三根爲 α,β,γ,則

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx+d &= a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}。\end{aligned}$$

比較其兩邊之係數。則

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha &= \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma &= -\frac{d}{a} \end{aligned}\right\}。$$

任意次數之方程式。其次項(即比最高方乘少一次之項)之係數爲各根之和。故次項之係數爲0。則其各根之和爲0。

例如前之三次方程式。若 $b=0$。則

$ax^3+cx+d=0$。即三根之和 $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{0}{a}=0$,

〔附例〕$x^3+px+q=0$之三根爲a,b,c。則$a+b+c=0$。而得恆同式如下。

$$bc+ca+ab=p \qquad (1)$$

$$abc=-q \qquad (2)$$

而因 $$a+b+c=0 \qquad (3)$$

故 $$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2p \qquad (4)$$

又因a,b,c爲$x^3+px+q=0$之三根。

故 $$\left.\begin{array}{l} a^3+pa+q=0 \\ b^3+pb+q=0 \\ c^3+pc+q=0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

從(5)式由加法得$a^3+b^3+c^3+p(a+b+c)+3q=0$。

$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3=-3q \qquad (6)$$

(5)式之第一第二第三。次第以$a^{n-3}, b^{n-3}, c^{n-3}$,乘之相加。則得$a^n+b^n+c^n+p(a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2})+q(a^{n-3}+b^{n-3}+c^{n-3})=0$,

由是此方程式設$n=4$。則

$a^4+b^4+c^4+p(a^2+b^2+c^2)+q(a+b+c)=0$,

即 $a^4+b^4+c^4+p(-2p)+q(0)=0$。

$\therefore\quad a^4+b^4+c^4=2p^2$。

$n=5$,則$a^5+b^5+c^5+p(a^3+b^3+c^3)+q(a^2+b^2+c^2)=0$。

即 $a^5+b^5+c^5+p(-3q)+q(-2p)=0$。

$\therefore\quad a^5+b^5+c^5=5pq$。

$n=6$。則$a^6+b^6+c^6+p(a^4+b^4+c^4)+q(a^3+b^3+c^3)=0$。

即 $a^6+b^6+c^6+p(2p^2)+q(-3q)=0$。

$\therefore\quad a^6+b^6+c^6=3q^2-2p^3$。

$n=7$。則 $a^7+b^7+c^7=-7p^2q$。

由是 $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=pq$, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}=-p$, $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}=-q$,

$$\therefore\quad \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}。$$

又 $$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=-p^2q=-p.pq=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^5+b^5+c^5}{5}。$$

又因 $2.\frac{a^4+b^4+c^4}{4}=p^2$。故

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=-q.p^2=2\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.\frac{a^4+b^4+c^4}{4}。$$

此例之應用在308章第二例。

130.已知根之方程式 凡高次方程式之根。每不能以普通之法求得之。然已知其根而反求其方程式。則任爲如何之高次式。皆易求得之。

例如求4及5爲根之方程式。則 $x=4, x=5$. 即 $x-4=0, x-5=0$。

$\therefore\ (x-4)(x-5)=0$。即 $x^2-9x+20=0$。

又如有2, 3及 -4 之根。而求其方程式。則 $x=2, x=3, x=-4$。即 $x-2=0, x-3=0, x+4=0$。

$\therefore\ (x-2)(x-3)(x+4)=0$。　即　$x^3-x^2-14x+24=0$。

〔註〕方程式 $x^2-9x+20=0$ 所有之根爲4, 5。此外不能再有他根明矣。然以含x之他方程乘之。則其根除4, 5之外。必別有他根。若以 $x^5+7x^2-2=0$ 之方程式。爲無根之式。則 $(x^2-9x+20)(x^5+7x^2-2)=0$。即 $(x-4)(x-5)(x^5+7x^2-2)=0$ 之方程式。亦祇以4及5爲根。而別無他根。即與前之 $x^2-9x+20=0$ 方程式同。必無是理。

謂各方程式必有一根者。可以論理方程式。(Theory of Equations)證明之。但屬於高等數學之部分。茲從畧。

〔第一例〕α, β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之二根。則以 $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ 爲二根之方程式若何。

$ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α, β。故由128章

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\text{及}\alpha\beta=\frac{c}{a}。$$

又所求之方程式爲 $\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(x-\frac{\alpha}{\beta}\right)=0$。

即　$$x^2-\left(\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}\right)x+1=0。$$

即　$$\alpha\beta x^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x+\alpha\beta=0。$$

$$\therefore\ \frac{c}{a}x^2\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right\}x+\frac{c}{a}=0。$$

〔第二例〕α,β,γ 爲 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根。則 $\beta\gamma,\gamma\alpha,\alpha\beta$ 爲三根之方程式若何。

由 129 章 $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a},$

又所求之方程式爲 $(x-\alpha\beta)(x-\beta\gamma)(x-\gamma\alpha)=0$。

即 $x^3-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)x-\alpha^2\beta^2\gamma^2=0$。

$$\therefore\quad x^3-\frac{c}{a}x^2+\frac{bd}{a^2}x-\frac{d^2}{a^2}=0。$$

即 $$a^2x^3-acx^2+bdx-d^2=0。$$

131. 二次三項式之值論其變化如下。

代數式 ax^2+bx+c。因 x 之值變而全式之值亦變。然 x 爲任意之實數。可自 $+\infty$ 變至 $-\infty$。而此式之值。則僅限於其能變之值。不能任意變化之。

如 $2x-6$ 之一次式欲變爲 5。則令 $2x-6=5$。即 $x=5\frac{1}{2}$ 又欲變爲 0。則令 $2x-6=0$。即 $x=3$。其他不論如何之值。皆可變得。惟在二次式內。決不能如此。

代數式 ax^2+bx+c 用適宜之實數代 x。令全式之值爲 λ 即 $ax^2+bx+c=\lambda$。然此方程式。能否爲實根。其關係式由 121 章而得。

$$b^2-4a(c-\lambda)>0。$$

即 $$b^2-4ac+4a\lambda>0。\dots\dots\dots\dots(1)$$

〔第一〕b^2-4ac 爲正。則在 (1) 式內之 $4a\lambda$。不論爲如何之正數。皆合於理。又 $4a\lambda$ 不大於 b^2-4ac。則不論爲如何之負數。亦皆合理。以能與關係式(即 (1) 式)適合。而不致原式中 x 爲虛根也。

故 b^2-4ac 爲正。則在 ax^2+bx+c 式以實數代 x。其值爲 λ。則與 a 同號(λ 與 a 同號。則 $4a\lambda$ 爲正)之各數。皆合於理。又與 a 異號(λ 與 a 異號。則 $4a\lambda$ 爲負)而小於 $\frac{b^2-4ac}{4a}$ 之負數。亦能合理。

例如 $3x^2-7x+2$ 之式內。其 $(-7)^2-4\times3\times2>0$。故此式之值。能得任何之正數值。又能得比 $\frac{(-7)^2-4\times3\times2}{4\times3}=2\frac{1}{12}$ 小之負數值。即用

任意之實數代x。則此式之值，可得任何之正數值，又可得比$2\frac{1}{12}$小之負數值。

〔第二〕若b^2-4ac爲負。則在(1)式內之$4a\lambda$。爲不比$4ac-b^2$小之各正數值，皆合於理。

故b^2-4ac爲負。則以實數代x，而ax^2+bx+c之值，恆與a同號。而不小於$\frac{4ac-b^2}{4a}$。

例如$3x^2-2x+7$。則得$(-2)^2-4\times3\times7<0$。故此式之值。由實數代x而得者。必不小於$\frac{4\times3\times7-(-2)^2}{4\times3}=6\frac{2}{3}$。

〔第三〕若b^2-4ac爲0。則在(1)式內，其$a\lambda$爲任何正數值。皆合於理。

依第一第二兩例，可知以下諸事。

代數式ax^2+bx+c。其b^2-4ac爲負或爲0，則無論用如何之數代x。而不變其號。

即方程式$ax^2+bx+c=0$之兩根爲虛根，或爲等根。則代數式ax^2+bx+c內。以任何實數代x，而所得之值。其號不變。

若方程式$ax^2+bx+c=0$。爲不等之實根。則此代數式內。用任何實數以代x。恆變其號。

例如$3x^2-2x+7=0$之兩根，爲$\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{-20})$。即虛根，故$3x^2-2x+7$之值。若$x=0$則爲$+7$。$x=1$則爲$+8$，$x=10$則爲$+287$。又$x=-1$則爲$+12$。其數恆爲正。

又$-9x^2+12x-16=0$爲等根，即$\frac{4}{3}$。故在$-9x^2+12x-16$式內。無論用如何之實數代x。其數恆爲負。

又$x^2-9x+18=0$。有不等之兩實根3及6。故$x-9x+18$之值。若$x=2$則爲$+4$。$x=4$則爲-2。其號已變。又若$x=7$則爲$+4$。其號又變。

此證又可從下法得之。

方程式$ax^2+bx+c=0$。爲有不等之二實根α, β。

則 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$。

但$(x-\alpha)(x-\beta)$其x之值。大於α及β。或小於α及β。則其數皆爲正。何則。x之值。若皆比α, β大。則$x-\alpha$, $x-\beta$之積爲正。若皆比α, β小。則$x-\alpha$, $x-\beta$爲負。而其積亦爲正數。

故以任意之值。代入方程式ax^2+bx+c中之x。如x之值。不在方程式兩根之間。則所得之值。必恆與a同號。

若所代x之值在α, β兩根之間。則$x-\alpha$與$x-\beta$異號。即$(x-\alpha)(x-\beta)$爲負。故代數式ax^2+bx+c。即$a(x-\alpha)(x-\beta)$之值。與a異號。

132. 別法 二次三項式ax^2+bx+c之值。從其b^2-4ac之正或負。而對於x之種種之值。變其號或不變其號。以別法證之如下。

先設 $ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$……………………(A)

〔第一〕b^2-4ac爲正。

則在(A)式內。若$x=-\frac{b}{2a}$。則此代數式爲負。若x增大至$\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2$大於$\frac{b^2-4ac}{4a^2}$。則此代數式爲正。

故b^2-4ac爲正。則代數式ax^2+bx+c用適宜之實數值代x。則變其號。

〔第二〕b^2-4ac爲負或爲零。

惟$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$恆爲正。而$-\frac{b^2-4ac}{4a^2}$爲正或爲零。則(A)式必恆爲正。故代數式$ax^2+bx+c$。其$b^2-4ac$爲負或爲零。則$x$無論爲如何之數值。而不變其號。即常與$a$同號。

133. 應用 依131章及132章。於x之二次式。用適宜之實數值代x而變其號。則其方程式之實根。即可因此推知。

例如在代數式$a^2(x-\beta)(x-\gamma)+b^2(x-\gamma)(x-\alpha)+c^2(x-\alpha)(x-\beta)$內。其$\alpha, \beta, \gamma$依大小順序之爲$\alpha>\beta>\gamma$。則此代數式。若$x=\alpha$。其數必爲正。何則。$\alpha-\beta$與$\alpha-\gamma$皆爲正。故$a^2(x-\beta)(x-\gamma)+0+0$爲正。

又 $x=\beta$。則 $0+b^2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)+0$ 即 $-b^2(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)$ 爲負。

由是方程式 $a^2(x-\beta)(x-\gamma)+b^2(x-\gamma)(x-\alpha)+c^2(x-\alpha)(x-\beta)=0$。在其代數式內。用 α,β 以代 x。即必變其號。故 $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ 對於各實數值。皆爲實根。

〔第一例〕 $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$。試就 x 之一切實數值。而證其數爲正。

此代數式 $=\{(x-1)(x-6)\}\{(x-3)(x-4)\}+10$

$$=(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10$$

$$=(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+82$$

$$=(x^2-7x+9)^2+1。$$

即 $(x^2-7x+9)^2$。則以一切實數代 x。其數皆爲正。

〔第二例〕 $\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}$。用適宜之實數值代 x。則可得任意之實數值。試證之。

令 $$\frac{4x^2+36x+9}{12x^2+8x+1}=\lambda。$$

則 $$x^2(4-12\lambda)+(36-8\lambda)x+(9-\lambda)=0。$$

在此方程式內。x 爲實根之關係。由 **121** 章。得

$$(36-8\lambda)^2-4(4-12\lambda)(9-\lambda)>0,$$

即 $$16(\lambda^2-8\lambda+72)>0。$$

即 $$16(\lambda-4)^2+896>0。$$

即上之關係 λ 爲任意之值。其式常爲正而大於0。故能合理。故用適宜之實數值代 x。可得 λ 爲任意之實數值。

〔第三例〕 $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$。若 x 爲實數值。可證其式不大於7。又不小於 $\frac{1}{7}$。

令 $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}=\lambda$。 則 $x^2(1-\lambda)-3x(1+\lambda)+4(1-\lambda)=0$。

x 爲實根。則其關係爲 $9(1+\lambda)^2-16(1-\lambda)^2>0$。

即 $$\{3(1+\lambda)+4(1-\lambda)\}\{3(1+\lambda)-4(1-\lambda)\}>0。$$

即　　$-7(\lambda-7)\left(\lambda-\frac{1}{7}\right)>0$。

由上之關係 $\lambda-7$ 及 $\lambda-\frac{1}{7}$，可知其號相異。故 λ 在 7 與 $\frac{1}{7}$ 之間。

例題十

試解下列之方程式。

1. $(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(a+b)^3$。

〔解〕 $(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=\{(x-a+2b)-(x-2a+b)\}^3$。

即 $(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3$
$-3(x-a+2b)(x-2a+b)\{(x-a+2b)-(x-2a+b)\}$。

$\therefore\ 0=-3(x-a+2b)(x-2a+b)(a+b)$。

由是 $x=a-2b$。 或 $2a-b$。

2. $(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+(b+c-2a)=0$。

〔解〕 $(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x-(c+a-2b)-(a+b-2c)=0$。

即 $(c+a-2b)(x^2-1)+(a+b-2c)(x-1)=0$。

即 $(x-1)\{(c+a-2b)(x+1)+a+b-2c\}=0$。

$\therefore\ x-1=0$。 或 $(c+a-2b)(x+1)+a+b-2c=0$。

由是 $x=1$。 或 $x=\frac{b+c-2a}{c+a-2b}$。

3. $\frac{a^2}{(x-a)^2}=\frac{b^2}{(x+b)^2}$。

〔解〕去分母。則 $a^2(x+b)^2=b^2(x-a)^2$。兩邊開平方。則

$a(x+b)=\pm b(x-a)$。　$\therefore\ x=\frac{-ab\mp ab}{a\mp b}=0$。或 $\frac{2ab}{a-b}$。

4. $\frac{a+x}{b+x}+\frac{b+x}{a+x}=2\frac{1}{2}$。

〔解〕 $\frac{a+x}{b+x}-2-\left(\frac{1}{2}-\frac{b+x}{a+x}\right)=0$。即 $\left(\frac{a+x}{b+x}-2\right)-\frac{b+x}{2(a+x)}\left(\frac{a+x}{b+x}-2\right)=0$。

即 $\left(\frac{a+x}{b+x}-2\right)\left(1-\frac{b+x}{2(a+x)}\right)=0$。　$\therefore\ \frac{a+x}{b+x}-2=0$。或 $1-\frac{b+x}{2(a+x)}=0$。

由是 $x=a-2b$。 或 $b-2a$。

5. $\frac{ax+b}{a+bx}=\frac{cx+d}{c+dx}$。

〔解〕去分母。則 $adx^2+(ac+bd)x+bc=bcx^2+(ac+bd)x+ad$。

$\therefore$ $x^2(ad-bc)=ad-bc$。由是 $x=\pm1$。

6. $\frac{a-x}{1-ax}=\frac{1-bx}{b-x}$。 〔答 ±1〕

7. $\frac{3x-4}{x+1}=x^2+2x-\frac{7}{x+1}$。

〔解〕$\frac{3x-4}{x+1}+\frac{7}{x+1}=x^2+2x$。即 $\frac{3(x+1)}{x+1}=x^2+2x$。

即 $3=x^2+2x$。 $\therefore$ $4=x^2+2x+1$。 $\therefore$ $\pm2=x+1$。

由是 $x=1$。或 -3。

8. $x+1+\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{5x-4}{x^2-1}$。

〔解〕$x+1+\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\frac{x^2}{x+1}$。即 $x+1+\frac{x-4}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}$……(A)

去分母。則 $x^2+2x+1+x-4=x^2$。 $\therefore$ $x=1$。

〔餘論〕此方程式之根 $x=1$。用於原方程式。則

$1+1+\frac{1-5+4}{1-1}=\frac{1}{1+1}$ 根爲 $2+\infty=\frac{1}{2}$ 不能適合。然用於(A)式。則

$1+1+\frac{1-4}{1+1}$。即 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 爲能適合。

故原方程式。不以 $x-1$ 約之而變爲(A)式。即不能合理。凡此皆當研究者也。

例如 $\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ 若 $x=2$。則 $\frac{4+2-6}{4-4}=\frac{0}{0}$ 不能適合。然以所含 $x-2$ 之因子約之。則

$\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+3}{x+2}$，而得 $\frac{2+3}{2+2}=\frac{5}{4}$。故遇不整方程式時。於此最當注意。

9. $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}=0$。

〔解〕 $\left(\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x+8}\right)+\left(\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}\right)=0$。即 $\frac{2x}{x^2-64}+\frac{2x}{x^2-36}=0$。

$\therefore\quad x=0$。或 $\frac{1}{x^2-64}+\frac{1}{x^2-36}=0$。 $\therefore\quad x=0$。或 $\pm5\sqrt{2}$。

10. $\frac{2}{x+8}+\frac{5}{x+9}=\frac{3}{x+15}+\frac{4}{x+6}$。

〔解〕 $\frac{2}{x+8}-\frac{3}{x+15}=\frac{4}{x+6}-\frac{5}{x+9}$，即 $\frac{-x+6}{(x+8)(x+15)}=\frac{-x+6}{(x+6)(x+9)}$，

$\therefore\quad -x+6=0$。或 $(x+8)(x+15)=(x+6)(x+9)$。 $\therefore\quad x=6$。或 $-8\frac{1}{4}$。

11. $\frac{2}{2x-3}+\frac{1}{x-2}=\frac{6}{3x+2}$， 答 $\frac{50}{29}$，

12. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-c}+\frac{x-c}{x-a}=3$。

〔解〕 $\frac{x-a}{x-b}-1+\frac{x-b}{x-c}-1+\frac{x-c}{x-a}-1=0$。

即 $\frac{b-a}{x-b}+\frac{c-b}{x-c}+\frac{a-c}{x-a}=0$。去分母。則

$(b-a)(x-c)(x-a)+(c-b)(x-a)(x-b)+(a-c)(x-b)(x-c)=0$。

即 $x\{(a-b)(c+a)+(b-c)(a+b)+(c-a)(b+c)\}$

$=ca(a-b)+ab(b-c)+bc(c-a)$。

$$\therefore\quad x=\frac{a^2c+b^2a+c^2b+-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}。$$

13. $\frac{x+a}{a-x}+\frac{x+b}{b-x}+\frac{x-c}{c-x}=3$。

〔解〕 $\frac{x+a}{a-x}-1+\frac{x+b}{b-x}-1+\frac{x+c}{c-x}-1=0$。

即 $\frac{2x}{a-x}+\frac{2x}{b-x}+\frac{2x}{c-x}=0$。 $\therefore\quad x=0$。

或 $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}+\frac{1}{c-x}=0$。去分母。則

$(b-x)(c-x)+(c-x)(a-x)+(a-x)(b-x)=0$。

即 $3x^2-2x(a+b+c)+bc+ca+ab=0$。

$\therefore\quad x=\frac{1}{3}\left\{a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\right\}$。

14. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3$。

〔解〕 $\frac{x+a}{x-a}-1+\frac{x+b}{x-b}-1+\frac{x+c}{x-c}-1=0$。

即 $\frac{2a}{x-a}+\frac{2b}{x-b}+\frac{2c}{x-c}=0$。去分母。則

$a(x-b)(x-c)+b(x-c)(x-a)+c(x-a)(x-b)=0$。

即 $x^2(a+b+c)-2x(ab+bc+ca)+3abc=0$。

$\therefore\ x=\frac{1}{a+b+c}\{ab+bc+ca\pm\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-abc(a+b+c)}\}$

15. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=4+\frac{x-7}{x-1}$。

〔解〕 以各項之分母除其分子。而取整數之商。則

$2-\frac{3}{x+1}+3-\frac{7}{x+2}=4+1-\frac{6}{x-1}$。 $\therefore\ \frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}=\frac{6}{x-1}$。

去分母。則 $3(x+2)(x-1)+7(x^2-1)=6(x+2)(x+1)$。

即 $4x^2-15x-25=0$。 $\therefore\ x=5$。或 $-\frac{5}{4}$。

16. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$。

〔解〕 $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{3}{x}-\frac{2}{x}$。即 $\frac{x}{6}=\frac{1}{x}$。 $\therefore\ x=\pm\sqrt{6}$。

17. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x-b}{x+b}=0$。

〔解〕 $\frac{2(x^2+a^2)}{x^2-a^2}+\frac{2(x^2+b^2)}{x^2-b^2}=0$。 去分母。則

$(x^2+a^2)(x^2-b^2)+(x^2-a^2)(x^2+b^2)=0$。 即 $2x^4-2a^2b^2=0$。

由是 $x^2=\pm ab$。 $\therefore\ x=\pm\sqrt{ab}$。或 $\pm\sqrt{-ab}$。

18. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}$。

〔解〕 $\frac{x-1}{x+1}+1+\frac{x-4}{x+4}+1=\frac{x-2}{x+2}+1+\frac{x-3}{x+3}+1$。

即 $\frac{2x}{x+1}+\frac{2x}{x+4}=\frac{2x}{x+2}+\frac{2x}{x+3}$。 $\therefore\ x=0$。

或 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$。

即 $\frac{2x+5}{(x+1)(x+4)}=\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$, $\therefore\ 2x+5=0$。 $\therefore\ x=-\frac{5}{2}$.

或 $(x+1)(x+4)=(x+2)(x+3)$。

則 $x^2+5x+4=x^2+5x+6$。但此關係與有限之根不合。故去之。

19. $\frac{1}{x+a+\frac{1}{x+b}}=\frac{1}{x-a+\frac{1}{x-b}}$。

〔解〕 兩邊之分子爲1。故分母相等。

故 $x+a+\frac{1}{x+b}=x-a+\frac{1}{x-b}$, $\therefore\ 2a=\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x+b}$.

去分母。則 $a(x^2-b^2)=b$, $\therefore\ x=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}+b^2\right)}$.

20. $\frac{1}{3a-x}+\frac{1}{3b-x}+\frac{1}{3c-x}=0$。

〔解〕 去分母。則 $(3b-x)(3c-x)+(3c-x)(3a-x)+(3a-x)(3b-x)=0$。

即 $3x^2-6x(a+b+c)+9(bc+ca+ab)=0$。

$\therefore$ $x=a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$。

21. $\frac{a+b}{x+b}+\frac{a+c}{x+c}=\frac{2(a+b+c)}{x+b+c}$。

〔解〕 $\frac{a+b}{x+b}-1+\frac{a+c}{x+c}-1=\frac{2a+2b+2c}{x+b+c}-2$,

即 $\frac{a-x}{x+b}+\frac{a-x}{x+c}=\frac{2(a-x)}{x+b+c}$, $\therefore\ x=a$。

或 $\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=\frac{2}{x+b+c}$。 $\therefore\ \frac{x+b+c}{x+b}+\frac{x+b+c}{x+c}=2$,

即 $1+\frac{c}{x+b}+1+\frac{b}{x+c}=2$。 $\therefore\ \frac{c}{x+b}+\frac{b}{x+c}=0$。

$\therefore$ $x=-\frac{b^2+c^2}{b+c}$。

22. $\frac{a+c}{x+2b}+\frac{b+c}{x+2a}=\frac{a+b+2c}{x+a+b}$.

〔解〕 $\frac{a+c}{x+2b}-\frac{a+c}{x+a+b}=\frac{b+c}{x+a+b}-\frac{b+c}{x+2a}$。

即 $\frac{(a+c)(a-b)}{(x+2b)(x+a+b)}=\frac{(b+c)(a-b)}{(x+a+b)(x+2a)}$。 $\therefore\ \frac{a+c}{x+2b}=\frac{b+c}{x+2a}$。

由是 $x=-2(a+b+c)$。

23. $\frac{x-b}{x-a}-\frac{x-a}{x-b}=\frac{2(a-b)}{x-a-b}$。

〔解〕 $1+\frac{a-b}{x-a}-\left(1-\frac{a-b}{x-b}\right)=\frac{2(a-b)}{x-a-b}$。

$\therefore$ $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{2}{x-a-b}$。 $\therefore\ \frac{x-a-b}{x-a}+\frac{x-a-b}{x-b}=2$。

即 $1-\frac{b}{x-b}+1-\frac{a}{x-b}=2$。 $\therefore\ \frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}=0$。

由是 $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$。

24. $\frac{(x+a)(x+b)}{x+a+b}=\frac{(x+c)(x+d)}{x+c+d}$。

〔解〕 $\frac{x(x+a+b)+ab}{x+a+b}=\frac{x(x+c+d)+cd}{x+c+d}$。

即 $x+\frac{ab}{x+a+b}=x+\frac{cd}{x+c+d}$。 $\therefore\ \frac{ab}{x+a+b}=\frac{cd}{x+c+d}$。

$\therefore$ $x=\frac{cd(a+b)-ab(c+d)}{ab-cd}$。

25. $\frac{a(c-d)}{x+a}+\frac{d(a-b)}{x+d}=\frac{b(c-d)}{x+b}+\frac{c(a-b)}{x+c}$。

〔解〕 $(c-d)\left(\frac{a}{x+a}-\frac{b}{x+b}\right)=(a-b)\left(\frac{c}{x+c}-\frac{d}{x+d}\right)$

即 $\frac{(c-d)(a-b)x}{(x+a)(x+b)}=\frac{(a-b)(c-d)x}{(x+c)(x+d)}$。 $\therefore\ x=0$。

或 $\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{(x+c)(x+d)}$。 $\therefore\ x=\frac{cd-ab}{a+b-c-d}$。

26. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}$。

〔解〕 $\frac{(a+b)x-a^2-b^2}{ab}=\frac{(a+b)x-a^2-b^2}{(x-a)(x-b)}$。 $\therefore\ x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$。

或 $ab=(x-a)(x-b)$。 $\therefore$ $x=0$。或 $x=a+b$。

27. $\dfrac{a-b}{x+a-b}+\dfrac{b-c}{x+b-c}+\dfrac{c-a}{x+c-a}=0$。

〔解〕去分母。則 $(a-b)(x+b-c)(x+c-a)+(b-c)(x+c-a)(x+a-b)$
$+(c-a)(x+a-b)(x+b-c)=0$。

即 $-x\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}+3(a-b)(b-c)(c-a)=0$。

$\therefore$ $x=\dfrac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$。

28. $\dfrac{1}{1+2x}-\dfrac{2}{2+3x}+\dfrac{3}{3+4x}-\dfrac{4}{4+5x}=0$。

〔解〕 $\dfrac{-x}{(1+2x)(2+3x)}+\dfrac{-x}{(3+4x)(4+5x)}=0$。 $\therefore$ $x=0$。

或 $(3+4x)(4+5x)+(1+2x)(2+3x)=0$。 $\therefore$ $x=\dfrac{1}{26}(19\pm\sqrt{-3})$。

29. $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-ma)(x-mb)}=\dfrac{(x+a)(x+b)}{(x+ma)(x+mb)}$。

〔解〕 $\dfrac{(x+ma)(x+mb)}{(x-ma)(x-mb)}=\dfrac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}$。

即 $\dfrac{x^2+mx(a+b)+m^2ab}{x^2-mx(a+b)+m^2ab}=\dfrac{x^2+x(a+b)+ab}{x^2-x(a+b)+ab}$ 兩邊各減 1。則

$\dfrac{2mx(a+b)}{x^2-mx(a+b)+m^2ab}=\dfrac{2x(a+b)}{x^2-x(a+b)+ab}$. $\therefore$ $x=0$。

或 $\dfrac{m}{x^2-mx(a+b)+m^2ab}=\dfrac{1}{x^2-x(a+b)+ab}$。 $\therefore$ $x=\pm\sqrt{mab}$。

30. $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}$。

〔解〕 $\sqrt{2x+9}=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}$ 兩邊自乘。則

$2x+9=x+1+x-4+2\sqrt{(x+1)(x-4)}$。 $\therefore$ $6=\sqrt{(x+1)(x-4)}$。

兩邊自乘。則 $36=x^2-3x-4$。 $\therefore$ $x=8$。或 -5。

31. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$。

〔解〕求兩邊之平方。則得

$(x-1)(x-2)+(x-3)(x-4)+2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}=2$。

即 $x^2-5x+6=-\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$。

又 $(x-2)^2(x-3)^2=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$。

$\therefore$ $(x-2)(x-3)\{(x-2)(x-3)-(x-1)(x-4)\}=0$。

即 $(x-2)(x-3)\{1\}=0$。 $\therefore$ $x=2$, 或 3。

32. $\sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}$。

〔解〕兩邊求其平方。化爲簡式。則

$\sqrt{(7x-5)(4x-1)}=\sqrt{(7x-4)(4x-2)}$。

$\therefore$ $(7x-5)(4x-1)=(7x-4)(4x-2)$。 $\therefore$ $x=1$。

33. $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2+x}=a+b$。

〔解〕求兩邊之平方。則 $a^2-x+b^2+x+2\sqrt{(a^2-x)(b^2+x)}=(a+b)^2$。

$\therefore$ $\sqrt{(a^2-x)(b^2+x)}=ab$。 $\therefore$ $a^2b^2+(a^2-b^2)x-x^2=a^2b^2$。

由是 $x=0$。 或 a^2-b^2。

34. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$。

〔解〕兩邊自乘而簡之。則 $2\sqrt{(a-x)(b-x)}=0$。 $\therefore$ $x=a, b$。

35. $\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{a+c-(b+d)x}$。 〔答 $x=\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$〕

36. $\sqrt{ax+b^2}+\sqrt{bx+a^2}=a-b$。

〔解〕$(ax+b^2)-(bx+a^2)=(a-b)x-(a^2-b^2)$ 其式已明。又以原方程式除之。則 $\sqrt{ax+b^2}-\sqrt{bx+a^2}=x-(a+b)$,

與原方程式相加,則 $2\sqrt{ax+b^2}=x-2b$。

$\therefore$ $4(ax+b^2)=x^2-4bx+4b^2$。 $\therefore$ $x=0$, 或 $4(a+b)$,

37. $\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b+2x}$。 〔答 $x=a$, 或 $-b$〕

38. $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{2a+2b}$。

〔解〕兩邊各求其平方。則 $a+b+2\sqrt{(a-x)(b+x)}=2a+2b$。

$\therefore$ $4(a-x)(b+x)=(a+b)^2$, 即 $4\{ab+(a-b)x-x^2\}=(a+b)^2$。

$\therefore$ $4x^2-4(a-b)x+(a-b)^2=0$。 即 $\{2x-(a-b)\}^2=0$。

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}(a-b)$,

39. $\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}=2\sqrt{ax}$,

〔解〕兩邊求其平方。則

$(a+x)(x+b)+2\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}+(a-x)(x-b)=4ax$。

$\therefore\ \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}=(a-b)x$。 $\therefore\ (a^2-x^2)(x^2-b^2)=(a-b)^2x^2$。

即 $-x^4+(a^2+b^2)x^2-a^2b^2=(a^2+b^2-2ab)x^2$

$\therefore\ x^4-2abx^2+a^2b^2=0$。 即 $(x^2-ab)^2=0$。 $\therefore\ x=\pm\sqrt{ab}$,

40. $\sqrt{a(a+b+x)}-\sqrt{a(a+b-x)}=x$,

〔解〕 $a(a+b+x)-a(a+b-x)=2ax$。其式已明。

以原方程式除之。則 $\sqrt{a(a+b+x)}+\sqrt{a(a+b-x)}=2a$。

但 $x\neq0$。由加法。得 $2\sqrt{a(a+b+x)}=2a+x$。

$\therefore\ 4a(a+b+x)=4a^2+4ax+x^2$。 $\therefore\ x=\pm2\sqrt{ab}$,

41. $\sqrt{x^2+ax+b^2}-\sqrt{x^2-ax+b^2}=2a$。

〔解〕 $(x^2+ax+b^2)-(x^2-ax+b^2)=2ax$ 其式已明,

由除法。得 $\sqrt{x^2+ax+b^2}+\sqrt{x^2-ax+b^2}=x$。

由加法。$2\sqrt{x^2+ax+b^2}=x+2a$。

$\therefore\ 4(x^2+ax+b^2)=x^2+4ax+4a^2$。 $\therefore\ x=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{3(a^2-b^2)}$,

42. $\sqrt{x^2+ax+a^2}+\sqrt{x^2-ax+a^2}=\sqrt{2a^2-2b^2}$。

〔解〕 兩邊求其平方。則

$x^2+ax+a^2+2\sqrt{(x^4+a^2x^2+a^4)}+x^2-ax+a^2=2a^2-2b^2$。

$\therefore\ \sqrt{(x^4+a^2x^2+a^4)}=-x^2-b^2$。 $\therefore\ x^4+a^2x^2+a^4=x^4+2b^2x^2+b^4$,

由是 $x=\pm\sqrt{\left(\dfrac{b^4-a^4}{a^2-2b^2}\right)}$。

43. $\sqrt{ax-b}+\sqrt{cx+b}=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx-b}$,

〔解〕 兩邊自乘而簡之。則 $\sqrt{(ax-b)(cx+b)}=\sqrt{(ax+b)(cx-b)}$,

$\therefore\ acx^2+bx(a-c)-b^2=acx^2-bx(a-c)-b^2$。 $\therefore\ x=0$。

44. $\sqrt{x(a+b-x)}+\sqrt{a(b+x-a)}+\sqrt{b(a+x-b)}=0$。

〔解〕 $\sqrt{x(a+b-x)}=-\sqrt{a(b+x-a)}-\sqrt{b(a+x-b)}$,

兩邊自乘。則 $x(a+b-x)=a(b+x-a)+b(a+x-b)+2\sqrt{ab\{x^2-(a-b)^2\}}$。

$\therefore\ x^2-(a-b)^2=-2\sqrt{ab\{x^2-(a-b)^2\}}$。

$\therefore\ \{x^2-(a-b)^2\}^2=4ab\{x^2-(a-b)^2\}$。

由是 $x^2-(a-b)^2=0$, 或 $x^2-(a-b)^2=4ab$,

即 $x^2=(a-b)^2$。 或 $(a+b)^2$。$\therefore\ x=\pm(a-b)$, $\pm(a+b)$。

45. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}=0$。

〔解〕 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=-\sqrt{x+c}$ 兩邊求其平方。則

$$x+a+x+b+2\sqrt{(x+a)(x+b)}=x+c,$$

∴ $x+(a+b-c)=2\sqrt{x^2+x(a+b)-ab}$ 兩邊自乘。則

$$x^2+2x(a+b-c)+(a+b-c)^2=4x^2+4x(a+b)+4ab。$$

∴ $3x^2+2x(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)=0$。

∴ $x=\frac{1}{3}\left\{a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\right\}$。

46. $\sqrt{ab(a+b+x)}=\sqrt{a(a+b)(b-x)}+\sqrt{b(a+b)(a-x)}$。

〔解〕 兩邊平方之，則

$$ab(a+b+x)=a(a+b)(b-x)+b(a+b)(a-x)+2(a+b)\sqrt{ab(a-x)(b-x)}。$$

即 $ab(x-a-b)+x(a+b)^2=2(a+b)\sqrt{ab\{ab+x(x-a-b)\}}$。

兩邊平方之。則

$$a^2b^2(x-a-b)^2+2abx(x-a-b)(a+b)^2+x^2(a+b)^4$$
$$=4a^2b^2(a+b)^2+4abx(x-a-b)(a+b)^2。$$

∴ $a^2b^2(x-a-b)^2-2abx(xa-b)(a+b)^2+x^2(a+b)^4=4a^2b^2(a+b)^2$。

兩邊開平方。則 $ab(x-a-b)-x(a+b)^2=\pm 2ab(a+b)$。

∴ $x=\frac{\mp 2ab(a+b)-ab(a+b)}{(a+b)^2-ab}=\frac{-3ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$。或 $\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$。

47. $\sqrt{x^2-b^2-c^2}+\sqrt{x^2-c^2-a^2}+\sqrt{x^2-a^2-b^2}=x$。

〔解〕 $\sqrt{x^2-b^2-c^2}+\sqrt{x^2-c^2-a^2}=x-\sqrt{x^2-a^2-b^2}$ 兩邊平方之。則

$$x^2-b^2-c^2+x^2-c^2-a^2+2\sqrt{(x^2-b^2-c^2)(x^2-c^2-a^2)}$$
$$=x^2+x^2-a^2-b^2-2x\sqrt{x^2-a^2-b^2}。$$

即 $\sqrt{(x^2-b^2-c^2)(x^2-c^2-a^2)}=c^2-x\sqrt{x^2-a^2-b^2}$。 又平方之。則

$$x^4-x^2(a^2+b^2+2c^2)+(b^2+c^2)(c^2+a^2)=c^4+x^2(x^2-a^2-b^2)-2c^2x\sqrt{x^2-a^2-b^2}。$$

即 $-2c^2x^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=2c^2x\sqrt{x^2-a^2-b^2}$。 又平方之，則

$$4c^4x^4-4c^2x^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2=4c^4x^2(x^2-a^2-b^2)。$$

∴ $-4c^2a^2b^2x^2=-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)^2$。 ∴ $x=\pm\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{2abc}$。

48. $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-x^2}+\sqrt{c^2-x^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2-x^2}$。

〔解〕 $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{b^2-x^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2-x^2}-\sqrt{c^2-x^2}$ 兩邊平方之。則

$$a^2-x^2+b^2-x^2+2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}=a^2+b^2+c^2-x^2+c^2-x^2$$

$$-2\sqrt{(a^2+b^2+c^2-x^2)(c^2-x^2)}。$$

卽 $\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}-c^2=-\sqrt{(a^2+b^2+c^2-x^2)(c^2-x^2)}$，又平方之。則

$$a^2b^2-x^2(a^2+b^2)+x^4+c^4-2c^2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}=(a^2+b^2+c^2-x^2)(c^2-x^2)。$$

卽 $a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2+2c^2x^2=2c^2\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}$。又平方之，則

$$(a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)^2+4c^2x^2(a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)+4c^4x^4$$

$$=4c^4\{a^2b^2-x^2(a^2+b^2)+x^4\}。$$

卽 $4c^2a^2b^2x^2=4a^2b^2c^4-(a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)^2$。

$$\therefore\quad x=\pm\frac{1}{2abc}\sqrt{(2abc^2+a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)(2abc^2-a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$$

$$=\pm\frac{1}{2abc}\sqrt{(ab+bc+ca)(ab+bc-ca)(ab-bc+ca)(-ab+bc+ca)}$$

49. 問 x 爲如何之值，則 $\sqrt{14-(3x-2)(x-1)}$ 爲實數，

〔解〕 原式 $=\sqrt{12+5x-3x^2}=\sqrt{-3(x-3)(x+\frac{4}{3})}$。根號內之數量爲正。則 $x-3$ 與 $x+\frac{4}{3}$ 爲異號。故 x 在 $-\frac{4}{3}$ 與 3 之間，卽 x 之值不小於 $-\frac{4}{3}$。不大於 3。

50. $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ 證其在 5 與 9 之間無實數值。

〔證〕 $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}=\lambda$。則 $x^2(\lambda-1)+2x(\lambda-17)-(7\lambda-71)=0$。

此方程式 x 爲實根。則 $4(\lambda-17)^2-4(\lambda-1)\{-(7\lambda-71)\}>0$。

卽 $32(\lambda-5)(\lambda-9)>0$。 $\therefore$ $\lambda-5$ 與 $\lambda-9$ 同號，由是 λ 比 5 及 9 大，或比 5 及 9 小。故 5 與 9 之間無實數值。

51. x 爲實數，則 $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}$ 不能小於 $\frac{1}{3}$。試證之。

〔證〕 $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}=\lambda$。則 $x^2(\lambda-1)+2x(\lambda+3)+(\lambda-5)=0$.

故 $4(\lambda+3)^2-4(\lambda-1)(\lambda-5)>0$。 即 $48(\lambda+\frac{1}{3})>0$。

$\therefore\ \lambda+\frac{1}{3}>0$。 即 $\lambda>-\frac{1}{3}$。

52. x 爲實數。則 $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 爲如何之值。

(解) $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\lambda$。 則 $x^2(\lambda-1)+x(\lambda+1)+(\lambda-1)=0$。

$\therefore\ (\lambda+1)^2-4(\lambda-1)^2>0$。 即 $-3(\lambda-3)(\lambda-\frac{1}{3})>0$。

由是 λ 在 3 與 $\frac{1}{3}$ 之間。

53. 方程式 $x^2+y^2=6x-8y$。求其 x 及 y 之最大值。及最小值。

(解) 變原方程式爲 $(x-3)^2+(y+4)^2=25$。

故 $y+4=\pm\sqrt{\{25-(x-3)^2\}}=\pm\sqrt{-(x-8)(x+2)}$。

$\therefore$ x 在 8 與 -2 之間。

又 $x-3=\pm\sqrt{\{25-(y+4)^2\}}=\pm\sqrt{-(y-1)(y+9)}$。

$\therefore$ y 在 1 與 -9 之間。

54. $x^2+4y^2-8x-16y-4=0$。求 x 及 y 之最大值。與最小值。

(解) 變原方程式爲 $(x-4)^2+(2y-4)^2=36$。

$\therefore\ 2y-4=\pm\sqrt{\{36-(x-4)^2\}}=\pm\sqrt{-(x+2)(x-10)}$。

$\therefore$ x 在 -2 與 10 之間。

又 $x-4=\pm\sqrt{\{36-(2y-4)^2\}}=\pm\sqrt{-4(y+1)(y-5)}$

$\therefore$ y 在 -1 與 5 之間。

55. x 及 y 之方程式。適合於 $(x^2+y^2)=2a^2(x^2-y^2)$。則 y 之最大值如何。

(解) 從原方程式。得 $x^4+2x^2(y^2-a^2)+y^4+2a^2y^2=0$。

x 之實根爲 $4(y^2-a^2)^2-4(y^4+2a^2y^2)>0$。

即 $16\left(\frac{a}{2}+y\right)\left(\frac{a}{2}-y\right)>0$。 $\therefore$ y 在 $-\frac{a}{2}$ 與 $\frac{a}{2}$ 之間。

由是 y 之最大值爲 $\frac{a}{2}$。

56. $x^2(b^2+b'^2)+2x(ab+a'b')+a^2+a'^2=0$。其實根爲等根。試證明之。

〔證〕 $4(ab+a'b')^2-4(b^2+b'^2)(a^2+a'^2)\nless 0$。

即 $-4(ab'-a'b)^2\nless 0$。 $\therefore\ ab'-a'b=0$。

故由121章得等根。

57. $ax^2+bx+c=0$之兩根比爲$m:n$。則$mnb^2=(m+n)^2ac$。

〔證〕 兩根爲$m\alpha, n\alpha$。則$m\alpha+n\alpha=-\dfrac{b}{a}$, $m\alpha\cdot n\alpha=\dfrac{c}{a}$。

由是$\dfrac{(m+n)^2\alpha^2}{mn\alpha^2}=\dfrac{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2}{\dfrac{c}{a}}$。即$\dfrac{(m+n)^2}{mn}=\dfrac{b^2}{ac}$。

58. $ax^2+2bx+c=0$。及$a'x^2+2b'x+c'=0$。內有一個等根，則b^2-ac及$b'^2-a'c'$。皆爲完全平方數。其證如何。

〔證〕由題意。前方程式之兩根爲α,β。則後方程式之兩根爲α,γ。

由是$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$, $\alpha+\gamma=\dfrac{2b'}{a'}$, $\alpha\gamma=\dfrac{c'}{a'}$。

$\therefore\ \beta-\gamma=(\alpha+\beta)-(\alpha+\gamma)=\left(-\dfrac{2b}{a}\right)-\left(-\dfrac{2b'}{a'}\right)=$任意之有理數量$\cdots(1)$

又 $\alpha-\beta=\sqrt{\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}=\sqrt{\left\{\left(-\dfrac{2b}{a}\right)^2-4\dfrac{c}{a}\right\}}=\dfrac{2}{a}\sqrt{(b^2-ac)}$

及 $\alpha-\gamma=\sqrt{\{(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma\}}=\sqrt{\left\{\left(-\dfrac{2b'}{a'}\right)^2-4\dfrac{c'}{a'}\right\}}=\dfrac{2}{a'}\sqrt{(b'^2-a'c')}$。

$\therefore\ \beta-\gamma=(\alpha-\gamma)-(\alpha-\beta)=\dfrac{2}{a'}\sqrt{(b'^2-a'c')}-\dfrac{2}{a}\sqrt{(b^2-ac)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

從(1)則(2)之左邊不爲0。爲有理數量。故(2)之右邊之各項。亦爲有理式，由是b^2-ac及$b'^2-a'c'$爲完全平方數。

59. x_1及x_2爲$ax^2+bx+c=0$之兩根。則以(1) x_1^3及x_2^3 (2) $\dfrac{x_1^2}{x_2}$及$\dfrac{x_2^2}{x_1}$ (3) $b+ax_1$及$b+ax_2$爲兩根之方程式各如何。

〔解〕 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$。

(1) x_1^3及x_2^3爲兩根之方程式，即$(x-x_1^3)(x-x_2^3)=0$。

即 $x^2-(x_1^3+x_2^3)x+x_1^3x_2^3=0$。

即 $x^2-\{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\}x+(x_1x_2)^3=0$。

$\therefore\quad x^2-\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^3-\frac{3c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}x+\left(\frac{c}{a}\right)^3=0$。

即 $a^3x^2+(b^3-3abc)x+c^3=0$。

(2) $\frac{x_1^2}{x_2}$ 及 $\frac{x_2^2}{x_1}$ 爲兩根之方程式。即 $\left(x-\frac{x_1^2}{x_2}\right)\left(x-\frac{x_2^2}{x_1}\right)=0$。

即 $x^2-\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_2}\right)\left(\frac{x_2^2}{x_1}\right)=0$。

即 $x_1x_2-x^2-\{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\}x+(x_1x_2)^2=0$。

$\therefore\quad \frac{c}{a}x^2-\left\{\left(-\frac{c}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\left(-\frac{c}{a}\right)\right\}x+\left(\frac{c}{a}\right)^2=0$。

即 $a^2cx^2+(b^3-3abc)x+ac^2=0$。

(3) $b+ax_1$ 及 $b+ax_2$，爲兩根之方程式，即

$\{x-(b+ax_1)\}\{x-(b+ax_2)\}=0$。

即 $x^2-\{2b+a(x_1+x_2)\}x+b^2+ab(x_1+x_2)+a^2x_1x_2=0$。

$\therefore\quad x^2-\left\{2b+a\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}x+b^2+ab\left(-\frac{b}{a}\right)+a^2\left(\frac{c}{a}\right)=0$，

即 $x^2-bx+ac=0$。

60. x_1 及 x_2 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之兩根，而於 a, b, c 之項，求 $x_1^2(bx_2+c)+x_2^2(bx_1+c)$，及 $x_1^2(bx_2+c)^2+x_2^2(bx_1+c)^2$ 之值。

〔解〕 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$。

$\therefore\quad x_1^2(bx_2+c)+x_2^2(bx_1+c)$

$=b(x_1+x_2)x_1x_2+c(x_1^2+x_2^2)=b\left(-\frac{b}{a}\right)\frac{c}{a}+c\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}\right\}=-\frac{2c}{a}$。

又 $x_1^2(bx_2+c)^2+x_2^2(bx_1+c)^2=2b^2x_1^2x_2^2+2bcx_1x_2(x_1+x_2)+c^2(x_1^2+x_2^2)$

$=2b^2\left(\frac{c}{a}\right)^2+2bc\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)+c^2\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}\right\}=\frac{b^2c^2}{a^2}-\frac{2c^3}{a}$。

61. $x^2+mx+m^2+a=0$ 之兩根爲 x_1 及 x_2，試證

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2+a=0$。

〔證〕 $x_1+x_2=-m$, $x_1x_2=m^2+a$。

$\therefore\quad (x_1+x_2)^2-x_1x_2=(-m)^2-(m^2+a)$，即 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2+a=0$。

62. $(x^2+1)(a^2+1)=max(ax-1)$ 之兩根爲 x_1 及 x_2，

求 $(x_1^2+1)(x_2^2+1)=mx_1x_2(x_1x_2-1)$ 之證。

〔證〕從原方程式得$(a^2+1-ma^2)x^2+max+a^2+1=0$。

$\therefore\quad x_1+x_2=-\dfrac{ma}{a^2+1-ma^2},\qquad x_1x_2=\dfrac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}$。

又 $(x_1^2+1)(x_2^2+1)=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=\left(-\dfrac{ma}{a^2+1-ma^2}\right)^2$

$+\left(\dfrac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}-1\right)^2$

$=\dfrac{m^2a^2}{(a^2+1-ma^2)^2}+\dfrac{m^2a^4}{(a^2+1-ma^2)^2}$

$=\dfrac{m(a^2+1)}{a^2+1-ma^2}\left(\dfrac{ma^2}{a^2+1-ma^2}\right)=mx_1x_2\left(\dfrac{a^2+1}{a^2+1-ma^2}-1\right)$

$=mx_1x_2(x_1x_2-1)$。

63. $A(x^2+m^2)+Amx+Bm^2x^2=0$之兩根爲x_1及x_2。

求 $A(x_1^2+x_2^2)+Ax_1x_2+Bx_1^2x_2^2=0$之證。

〔證〕從原方程式。得$(A+Bm^2)x^2+Amx+Am^2=0$。

$\therefore\quad x_1+x_2=-\dfrac{Am}{A+Bm^2}$及$x_1x_2=\dfrac{Am^2}{A+Bm^2}$。

又 $x_1^2+x_2^2=(x+x_2)^2-2x_1x_2=\dfrac{A^2m^2}{(A+Bm^2)^2}-\dfrac{2Am^2}{A+Bm^2}$

$=\dfrac{-Am^2(A+2Bm^2)}{(A+Bm^2)^2}=-\dfrac{Am^2}{A+Bm^2}\left(1+\dfrac{Bm^2}{A+Bm^2}\right)=-x_1x_2\left(1+\dfrac{Bx_1x_2}{A}\right)$。

由是$A(x_1^2+x_2^2)=-x_1x_2(A+Bx_1x_2)$。

64. x爲實數。則$2(a-x)(x+\sqrt{x^2+b^2})$不大於a^2+b^2。試證之。

〔證〕$2(a-x)(x+\sqrt{x^2+b^2})=\lambda$。

則 $2(a-x)\sqrt{(x^2+b^2)}=\lambda-2x(a-x)$。

兩邊平方之。則$4(a-x)^2(x^2+b^2)=\lambda^2-4\lambda x(a-x)+4x^2(a-x)^2$。

卽 $4b^2(a-x)^2+4\lambda x(a-x)-\lambda^2=0$。

卽 $4(b^2-\lambda)(a-x)^2+4a\lambda(a-x)-\lambda^2=0$。

$a-x$爲實數。故$16a^2\lambda^2+16(b^2-\lambda)\lambda^2>0$。卽$16\lambda^2(a^2+b^2-\lambda)>0$。

由是λ不大於a^2+b^2。

65. 對於x之實數。求$\dfrac{2x^4-4x^3+9x^2-4x+2}{(x^2+1)^2}$之最小值。

〔解〕以x^2除原式分母子。卽得

$$\frac{2x^2-4x+9-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}。$$

令 $x+\frac{1}{x}=y$。 $=\frac{2y^2-4y+5}{y^2}=\lambda$。

$\therefore\ y^2(\lambda-2)+4y-5=0$。 $\therefore\ 16+20(\lambda-2)>0$。

卽 $20\left(\lambda-\frac{6}{5}\right)>0$。 $\therefore$ λ不小於$\frac{6}{5}$。卽所求之最小値爲$\frac{6}{5}$。

高次方程式

134. 高次方程式 高於二次之方程式。其普通之解法甚深。在此編不能驟示。故僅解明其特別之例而已。

135. 準二次方程式 因$ax^4+bx^2+c=0$。與二次方程式同形。故其解法。與$ax^2+bx+c=0$之二次方程式同。卽$ax^4+bx^2+c=0$之根。爲

$$x^2=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。卽\ x=\pm\sqrt{\left(-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)}。$$

又不僅未知數量之次數。與二次式同形。其未知數量之兩項。有與二次式同形者。例如含x之各項爲P。而$aP^2+bP+c=0$。則

$P=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$爲等値之方程式。

〔第一例〕解$x^4-10x^2+9=0$式。

$(x^2-9)(x^2-1)=0$。 $\therefore\ x^2=9$或1。 $\therefore\ x=\pm3$或±1。

由是所求之根。爲$+3,\ -3,\ +1,\ -1$之四根。

〔第二例〕解$(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$式。

$\{(x^2+x)+6\}\{(x^2+x)-2\}=0$。 $\therefore\ x^2+x+6=0$或$x^2+x-2=0$。

從$x^2+x+6=0$。 則$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-23}$。

從$x^2+x-2=0$。則$x=1$或-2。

故所求之根。爲$1,\ -2,\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-33}$。$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-23}$。

〔第三例〕解$(x^2+2)^2+8x(x^2+2)+15x^2=0$式。

$(x^2+2+5x)(x^2+2+3x)=0$。　∴　$x^2+2+5x=0$。$x^2+2+3x=0$。

從$x^2+2+5x=0$。則$x=-\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$。

從$x^2+2+3x=0$。則$x=-1$。或-2

由是所求之根。爲$-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2},\ -\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2},\ -1,\ -2$。

〔第四例〕解$ax^2+bx+c+p\sqrt{ax^2+bx+c}+q=0$式。

令$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$。則$y^2+py+q=0$。此y之根爲α,β。則從$ax^2+bx+c=y^2$。得$ax^2+bx+c=\alpha^2,\ ax^2+bx+c=\beta^2$。

由是可求得x之四根。

〔第五例〕解$2x^2-4x+3\sqrt{x^2-2x+6}=15$式。

$2(x^2-2x+6)+3\sqrt{(x^2-2x+6)}-27=0$。

令$y=\sqrt{(x^2-2x+6)}$。則$2y^2+3y-27=0$。　∴　$y=3$或$-\frac{9}{2}$。

故從$x^2-2x+6=y^2$。則$x^2-2x+6=9$。　∴　$x=3$或-1。

又從$x^2-2x+6=\frac{81}{4}$。則$x=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{61}$。

由是所求之根。爲$3,\ -1,\ 1+\frac{1}{2}\sqrt{61},\ 1-\frac{1}{2}\sqrt{61}$。

〔第六例〕解$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=\frac{9}{16}a^4$。

左邊之第一因子與第四因子相乘。又中間之兩因子相乘。則得$(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)=\frac{9}{16}a^4$。

即　$\{(x^2+5ax+5a^2)-a^2\}\{(x^2+5ax+5a^2)+a^2\}=\frac{9}{16}a^4$。

即　$(x^2+5ax+5a^2)^2-a^4=\frac{9}{16}a^4$。

即　$(x^2+5ax+5a^2)^2=\frac{25}{16}a^4$。

$\therefore\quad x^2+5ax+5a^2=\pm\frac{5}{4}a^2$。從 $x^2+5ax+5a^2=\frac{5}{4}a^2$。

則 $x=-\frac{5}{2}a\pm\frac{a}{2}\sqrt{10}$。又從 $x^2+5ax+5a^2=-\frac{5}{4}a^2$。

則 $\left(x+\frac{5}{2}a\right)=0$。 $\therefore\quad -\frac{5}{2}a$。

136. 反商方程式. (Reciprocal Equations) 謂其係數前後相同之方程式,

例如下式,即反商方程式。

$$ax^3+bx^2+bx+a=0。$$
$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0。$$
$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0。$$ (又見443章)。

〔第一例〕解 $ax^3+bx^2+bx+a=0$ 式。

$a(x^3+1)+bx(x+1)=0$。 即 $(x+1)\{a(x^2-x+1)+bx\}=0$。

$\therefore\quad x+1=0$, 或 $a(x^2-x+1)+bx=0$。

$\therefore\quad x=1$。或 $\frac{a-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{(a-b)^2-4a^2}}{2a}$。

〔第二例〕解 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 式。

以 x^2 除而括之,則得 $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$。

令 $y=x+\frac{1}{x}$。則 $y^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$, $\therefore\quad a(y^2-2)+by+c=0$。

由是得 y 之兩根爲 α,β。則 $x+\frac{1}{x}=\alpha$。及 $x+\frac{1}{x}=\beta$,

又由此兩方程式,可得 x 之四根。

〔第三例〕解 $ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$ 式。

$a(x^5-1)+bx(x^3-1)+cx^2(x-1)=0$。

即 $(x-1)\{a(x^4+x^3+x^2+x+1)+bx(x^2+x+1)+cx^2\}=0$。

$\therefore\quad x=1$。或 $ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(a+b)x+a=0$

第二之方程式,爲四次之反商方程式,故與第二例同法。

137. 視察法。 依88章之定理。方程式之一根。可由視察求得。

〔第一例〕解 $x(x-1)(x-2)=a(a-1)(a-2)$ 式。

由視察而知其一根爲 $x=a$,

又變原方程式。爲 $x^3-3x^2+2x-a(a-1)(a-2)=0$。

以 $x-a$ 除之。則得 $x^2+(a-3)x+(a-1)(a-2)=0$。由是可得其二根。

〔第二例〕解 $x^3+2x^2-11x+6=0$ 式。

求方程式之一根。爲如何之値。當依下之原則。但其根以有理數量爲限。

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+K=0$ 之一根爲 $\pm\frac{\alpha}{\beta}$。則 α 爲K之因子。β 爲 a 之因子。

依此原則得 $x^3+2x^2-11x+6=0$ 之一根。必爲6之因子。

而在 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6,$ 之內。惟 $x=2$ 爲適合。故 $x=2$ 爲其一根而變原方程式如下,

$$(x-2)(x^2+4x-3)=0。$$

由是從 $x^2+4x-3=0$, 可得 $x=-2\pm\sqrt{7}$。

〔第三例〕解 $(a-x)^4+(x-b)^4=(a-b)^4$ 式。

$x=a$ 及 $x=b$ 爲能適合。

又變原方程式。爲 $(a-x)^4+(x-b)^4=\{(a-x)+(x-b)\}^4$。

$\therefore\quad 0=4(a-x)^3(x-b)+6(a-x)^2(x-b)^2+4(a-x)(x-b)^3$。

即 $\quad 2(a-x)(x-b)\{2(a-x)^2+3(a-x)(x-b)+2(x-b)^2\}=0$。

故所求之根。爲 a 及 b 與二次方程式

$2(a-x)^2+3(a-x)(x-b)+2(x-b)^2=0$ 之二根

〔第四例〕解 $a^4\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^4\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^4\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^4$ 式,

由視察而知 $x=a, x=b, x=c$ 均能適合。

又此方程式去其分母。則

$$a^4(b-c)(x-b)(x-c)+b^4(c-a)(x-c)(x-a)+c^4(a-b)(x-a)(x-b)$$
$$=-x^4(a-b)(b-c)(c-a)$$

而以x^3之係數爲0。故諸根之和爲0。(見129章),因而他之一根。爲$0-(a+b+c)$。即$-a-b-c$。

由是所求之根。爲$a, b, c, -a-b-c$。

138. 二項方程式。(Binomial Equations) 其普通之式。爲$x^n \pm k=0$。

下所示之例。可以已說明之方法解之。

二項方程式。其普通之解法。可用三角法內 De Moivre 氏之定理解之。

〔第一例〕解$x^3-1=0$式。

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$。 $\therefore$ $x-1=0$。 即$x=1$。

或$x^2+x+1=0$。 即 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$。

〔注意〕由是$x^3=1$有三根。即1之立方根爲

$$1, \quad -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}, \qquad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

〔第二例〕解$x^4-1=0$式。

$x^4-1=(x-1)(x+1)(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})=0$。

故1之四方根爲$1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$。

〔第三例〕解$x^5-1=0$式。

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$。 $\therefore$ $x=1$。

或$x^4+x^3+x^2+x+1=0$。 即反商方程式。故由136章。而得

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0。 \text{即} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0。$$

$\therefore$ $x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$。

由是 $x^2-x\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+1=0$。

即 $x^2-x\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)^2=\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)^2-1$。

$\therefore$ $x-\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)=\pm\frac{\sqrt{(-10\mp2\sqrt{5})}}{4}$。

由是1之五方根爲

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4},\quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\pm\frac{\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}。$$

〔第四例〕解 $x^4+1=0$ 式，

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})=0。$$

由是 $x^2+1+x\sqrt{2}=0$。 $\therefore\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{-2}}{2}$。

或 $x^2+1-x\sqrt{2}=0$， $\therefore\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{-2}}{2}$。

故所求之根爲 $\frac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$。卽 $\frac{\pm1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$。

139. 一之立方根 由前章之例。知1之立方根爲

$$1,\quad \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3}\right),\qquad \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-3}\right)。$$

1之立方虛根可設爲 ω。又命此二虛根中之一個爲 ω_1。其他一個爲 ω_2，以區別之。則1之立方根爲 $1, \omega_1, \omega_2$，

示其關係式如下。

$$1+\omega_1+\omega_2=1+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})+\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=0。$$

及 $$\omega_1\omega_2=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=\frac{1}{4}(1+3)=1。$$

此關係亦可依129章得之，何則，三次方程式三根之和。原等於變號之 x^2 係數。而 $x^3-1=0$ 之式，其 x^2 係數爲0。故 $1, \omega_1, \omega_2$ 之和爲0。又三根之積，原等於三次方程式變號之末項，故 $1, \omega_1, \omega_2$ 之積爲1。

又 $$\omega_1^2=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{-3})^2=\frac{1}{4}(1-2\sqrt{-3}-3)=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=\omega_2，$$

及 $$\omega_2^2=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{-3})^2=\frac{1}{4}(1+2\sqrt{-3}-3)=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\omega_1。$$

卽 $\omega_1^2=\omega_2$ 及 $\omega_2^2=\omega_1$， 由是 $\omega_1\omega_2=1$。 $\omega_1^3=\omega_2^3=1$，

且知1之立方虛根，其一根等於他一根之平方。故設 ω 爲1之立方虛根，則1之立方根爲 $1, \omega, \omega^2$。

〔例〕 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$,

由是 $a+b+c$ 爲 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之因子。

由是 $a+\omega b+\omega^2c$ 爲 $a^3+(\omega b)^3+(\omega^2c)^3-3a(\omega b)(\omega^2c)$,

即 $a^3+\omega^3b^3+\omega^6c^3-3\omega^3abc$。

即 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之因子。

同法 $a+\omega^2b+\omega c$ 爲 $a^3+(\omega^2b)^3+(\omega c)^3-3a(\omega^2b)(\omega c)$

即 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 之因子。

$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$。

例題十一

試解以下之方程式。

1. $x^4-2x^2-8=0$。

〔解〕 $(x^2-4)(x^2+2)=0$。 $\therefore\ x=\pm2$ 或 $\pm\sqrt{-2}$。

2. $x^6+7a^3x^3-8a^6=0$。

〔解〕 $(x^3-a^3)(x^3+8a^3)=0$。 $\therefore\ x^3-a^3=0,\ x^3+8a^3=0$。

由是 $x=a,\ a\omega,\ a\omega^2,-2a,\ -2a\omega,\ -2a\omega^2$。

3. $x^6-7a^3x^3-8a^6=0$。 答 $-a,\ -a\omega,\ -a\omega^2,\ 2a,\ 2a\omega,\ 2a\omega^2$,

4. $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$。 答 $1,\ \dfrac{1}{4}(1\pm\sqrt{-15})$。

〔解〕 $\dfrac{x}{x^2+1}=y$,則 $y+\dfrac{1}{y}=2+\dfrac{1}{2}$。由視察得 $y=2$, 或 $\dfrac{1}{2}$。

即 $\dfrac{x}{x^2+1}=2$。或 $\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}$,因之而得答數。

5. $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}$。 答 $0,1,3,-8$,

〔解〕 $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}=y$。解法悉如前例。

6. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$, 答 $1,\ -2,\ \dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-19})$,

〔解〕 $x^2+x+1=y$。則 $y(y+1)=3.4$, 由視察得 $y=3$。

又 y 之係數爲1。 $\therefore\ y=-1-3=-4$。

由是 $x^2+x+1=3$, 或 $x^2+x+1=-4$。

7. $(x^2+7x+5)^2-3x^2-21x=19$。 答 $-1,\ -6,\ \frac{1}{2}(-7\pm3\sqrt{5})$。

〔解〕 $(x^2+7x+5)^2-3(x^2+7x+5)=4$。而 $x^2+7x+5=y$。則

$y^2-3y-4=0$。 $\therefore$ $y=4$，或 -1。

8. $\sqrt{16-7x-x^2}=x^2+7x-\frac{1}{4}$。 答 $\frac{1}{2}-\frac{15}{2},\ \frac{1}{2}(-7\pm4\sqrt{2})$。

〔解〕 $(16-7x-x^2)+\sqrt{(16-7x-x^2)}-16+\frac{1}{4}=0$。

令 $\sqrt{(16-7x-x^2)}=y$。 則 $y^2+y-\frac{63}{4}=0$。 $\therefore$ $y=-\frac{9}{2}$，或 $\frac{7}{2}$。

9. $6\sqrt{(x^2-2x+6)}=21+2x-x^2$。 答 $3,\ -1,\ 1\pm2\sqrt{19}$。

〔解〕 $(x^2-2x+6)+6\sqrt{(x^2-2x+6)}=27$。 令 $\sqrt{(x^2-2x+6)}=y$。

則 $y^2+6y-27=0$。 $\therefore$ $y=3$，或 -9。

10. $(a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+x^2+x^4)$。

答 $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3}),\ \frac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4})$。

〔解〕 $1+x+x^2=0$。或 $(a-1)(1+x+x^2)=(a+1)(1-x+x^2)$。

11. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$。

〔解〕 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$。

即 $(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24=24$。

$\therefore$ $(x^2+5x)(x^2+5x+10)=0$。由是 $x=0$，或 -5，或 $\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{-15})$。

12. $(x+a)(x+3a)(x+5a)(x+7a)=384a^4$。

〔解〕 $(x^2+8ax+7a^2)(x^2+8ax+15a^2)=384a^4$。

即 $\{(x^2+8ax-9a^2)+16a^2\}\{(x^2+8ax-9a^2)+24a^2\}=384a^4$。

即 $(x^2+8ax-9a^2)^2+40a^2(x^2+8ax-9a^2)+384a^4=384a^4$。

$\therefore$ $(x^2+8ax-9a^2)(x^2+8ax-9a^2+40a^2)=0$。

即 $(x-a)(x+9a)(x^2+8ax+31a^2)=0$。

由是 $x=a$，或 $-9a$，或 $-4a\pm a\sqrt{-15}$。

13. $(x-3a)(x-a)(x+2a)(x+4a)=2376a^4$。

〔解〕 $(x^2+ax-12a^2)(x^2+ax-2a^2)=2376a^4$。

設 $x^2+ax-2a^2=y$。 則 $(y-10a^2)y=2376a^4$。

卽 $y^2-10a^2y+25a^4=2401a^4$。 $\therefore\ y-5a^2=\pm49a^2$。

由是 $y=54a^2$，或 $-44a^2$。

卽 $x^2+ax-2a^2=54a^2$。 或 $x^2+ax-2a^2=-44a^2$，

由是 $x=7a$，或 $-8a$。 或 $\frac{1}{2}a(-1\pm\sqrt{-167})$。

14. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$. 答 -4，-6，$\frac{1}{2}(-15\pm\sqrt{129})$。

〔解〕 $(x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=4x^2$。

卽 $\{(x^2+10x+24)+4x\}\{(x^2+10x+24)+x\}=4x^2$。

卽 $(x^2+10x+24)^2+5x(x^2+10x+24)+4x^2=4x^2$。

$\therefore$ $(x^2+10x+24)(x^2+10x+24+5x)=0$。

由是 $x^2+10x+24=0$。 或 $x^2+15x+24=0$。

15. $2x^2-3x-21=2x\sqrt{x^2-3x+4}$。

〔解〕 $(x^2-3x+4)-2x\sqrt{(x^2-3x+4)}+x^2=25$。

$\therefore$ $\sqrt{(x^2-3x+4)}-x=\pm5$。 卽 $x^2-3x+4=(x\pm5)^2$。

卽 $-3x\mp10x=21$。 $\therefore$ $x=-\frac{21}{13}$或 3。

16. $x^4-2(a+b)x^2+a^2+2ab+b^2=0$。 答 $\pm\sqrt{(a+b)}$。

〔解〕 $x^4-2(a+b)x^2+(a+b)^2=0$。 卽 $\{x^2-(a+b)\}^2=0$。

17. $x^4-2a^2x^2-2b^2x^2+a^4+b^4-2a^2b^2=0$。

〔解〕 $x^4-2x^2(a^2+b^2)+(a^2+b^2)^2=4a^2b^2$。兩邊各開平方。

則 $x^2-(a^2+b^2)=\pm2ab$。 卽 $x^2=(a\pm b)^2$。 $\therefore$ $x=\pm(a\pm b)$。

18. $4x^4-4x^3-7x^2-4x+4=0$。 答 2，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}(-3\pm\sqrt{-7})$。

〔解〕 $4(x^4+2x^2+1)-4x(x^2+1)-15x^2=0$。

卽 $4(x^2+1)^2-4x(x^2+1)-15x^2=0$。

卽 $\{2(x^2+1)-5x\}\{2(x^2+1)+3x\}=0$。

由是 $2(x^2+1)-5x=0$。或 $2(x^2+1)+3x=0$。

此方程式用反商方程式(136章)之解法卽得。

19. $9x^4-24x^3-2x^2-24x+9=0$。 答 3，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}(-1\pm\sqrt{-8})$。

〔解〕 $9(x^2+1)^2-24x(x^2+1)-20x^2=0$。

即 $\{3(x^2+1)-10x\}\{3(x^2+1)+2x\}=0$。與前例同。

20. $x^5+1=0$。

〔解〕 $x+1=0$，或 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$。從 $x+1=0$。

$\therefore$ $x=-1$。又從 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$。得

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0。\quad \therefore\quad x+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})。$$

由是 $x^2-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})x+1=0$。$\therefore$ $x=\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{5})\pm\frac{1}{4}\sqrt{(-10\pm2\sqrt{5})}$。

由是所求之根爲

$$-1,\quad \frac{1}{4}\{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}\},\quad \frac{1}{4}\{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}\}。$$

21. 解 $x^8-1=0$。

〔解〕 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=0$。$\therefore$ $x=1,\ -1,\ \pm\sqrt{-1}$。

或 $x^4+1=0$。由 **138** 章第四例。$x=\dfrac{\pm1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$。

22. 解 $3x^3-14x^2+20x-8=0$。 答 $2, 2, \frac{2}{3}$。

〔解〕 $3x^3-6x^2-8x^2+16x+4x-8=0$。

即 $3x^2(x-2)-8x(x-2)+4(x-2)=0$。$\therefore$ $x-2=0$，或 $3x^2-8x+4=0$。

23. 解 $x^4-15x^2+10x+24=0$。 〔答 $2, 3, -1, -4$〕。

〔解〕 $x^4-9x^2-6x^2+18x-8x+24=0$。

即 $x^2(x^2-9)-6x(x-3)-8(x-3)=0$。

即 $(x-3)\{x^2(x+3)-6x-8\}=0$。即 $(x-3)(x+1)(x+4)(x-2)=0$。

24. 解 $x^4+7x^3-7x-1=0$。 〔答 ±1，或 $\frac{1}{2}(-7\pm3\sqrt{5})$〕。

〔解〕 $x^4-1+7x(x^2-1)=0$。 $\therefore$ $x^2-1=0$，或 $x^2+1+7x=0$。

25. 解 $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3=0$。

〔解〕設 $x=a, b, c$ 則各適合。而此方程式爲三次式。由是所求之根爲 a, b, c。

26. 解 $x(x-1)(x-2)=9, 8, 7$。 〔答 $9, -3\pm\sqrt{-47}$〕。

〔解〕由視察得 $x=9$，故以 $x-9$ 除原方程式。即得二次式。

27. 解 $x(x-1)(x-2)(x-3)=9\cdot8\cdot7\cdot6$,

〔解〕 $(x^2-3x)(x^2-3x+2)=54\cdot56$。 令 $x^2-3x=y$, 則

$y(y+2)=54\cdot56$. $\therefore\ y=54$。又 y 之係數為 2。故 y 之二根之和為 -2。由是他之一根,為 $y=-2-54=-56$。

$\therefore\ x^2-3x=54$, 或 $x^2-3x=-56$。

$$\therefore x=9,\text{或 } -6。\text{ 或 } \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-215})。$$

28. 解 $(a-x)^3+(b-x)^3=(a+b-2x)^3$。

〔解〕 $(a-x)^3+(b-x)^3=\{(a-x)+(b-x)\}^3$

$$=(a-x)^3+(b-x)^3+3(a-x)(b-x)\{(a-x)+(b-x)\},$$

$\therefore\ 3(a-x)(b-x)(a+b-2x)=0$。 由是 $x=a,\ b,\ \frac{1}{2}(a+b)$,

29. 解 $(a-x)^4+(b-x)^4=(a+b-2x)^4$。

〔解〕 $(a-x)^4+(b-x)^4=\{(a-x)+(b-x)\}^4$。

$\therefore\ 4(a-x)^3(b-x)+6(a-x)^2(b-x)^2+4(a-x)(b-x)^3=0$,

即 $2(a-x)(b-x)\{2(a-x)^2+3(a-x)(b-x)+2(b-x)^2\}=0$。

即 $(a-x)(b-x)\{7x^2-7x(a+b)+2a^2+2b^2+3ab\}=0$。

$\therefore\ x=a$, 或 b, 或 $\frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{1}{14}(a-b)\sqrt{-7}$。

30. 解 $(a-x)^5+(b-x)^5=(a+b-2x)^5$。

〔解〕 $(a-x)^5+(b-x)^5=\{(a-x)+(b-x)\}^5$。 即

$5(a-x)^4(b-x)+10(a-x)^3(b-x)^2+10(a-x)^2(b-x)^3+5(a-x)(b-x)^4=0$。

即 $(a-x)(b-x)\{(a-x)^3+2(a-x)^2(b-x)+2(a-x)(b-x)^2+(b-x)^3\}=0$。

即 $(a-x)(b-x)\{(a-x)+(b-x)\}\{(a-x)^2+(a-x)(b-x)+(b-x)^2\}=0$。

即 $(a-x)(b-x)(a+b-2x)\{3x^2-3x(a+b)+a^2+b^2+ab\}=0$。

$\therefore\ x=a,\ b,\ \frac{1}{2}(a+b),\ \frac{1}{2}(a+b)\pm\frac{1}{6}(a-b)\sqrt{-3}$。

31. 解 $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}$ 〔答 $a,\ b,\ \frac{1}{2}(a+b)$〕。

〔解〕 兩邊各求其立方。則

$a-x+b-x+3\sqrt[3]{a-x}\sqrt[3]{b-x}(\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x})=a+b-2x$,

即 $3\sqrt[3]{a-x}\sqrt[3]{b-x}\sqrt[3]{a+b-2x}=0$。

$\therefore\quad (a-x)(b-x)(a+b-2x)=0$。

32. 解 $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$。

〔解〕兩邊平方之。則

$\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+2\sqrt[4]{(a-x)(b-x)}=\sqrt{a+b-2x}$。移項。則

$\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}-2\sqrt[4]{(a-x)(b-x)}$。又平方之。則

$$a-x+b-x+2\sqrt{(a-x)(b-x)}$$
$$=a+b-2x+4\sqrt{(a-x)(b-x)}-4\sqrt{(a+b-2x)}\sqrt[4]{(a-x)(b-x)}$$。

即 $-2\sqrt{(a-x)(b-x)}=-4\sqrt{(a+b-2x)}\sqrt[4]{(a-x)(b-x)}$。

又四方之 $(a-x)^2(b-x)^2=16(a+b-2x)^2(a-x)(b-x)$。

即 $(a-x)(b-x)\{16(a+b-2x)^2-(a-x)(b-x)\}=0$。 $\therefore\quad x=a$, 或 b。

或 $16(a+b-2x)^2-(a-x)(b-x)=0$。

即 $16(a+b)^2-64x(a+b)+64x^2-ab+(a+b)x-x^2=0$。

即 $63x^2-63x(a+b)+16(a+b)^2-ab=0$。

$\therefore\quad x=\dfrac{1}{2}\left\{a+b\pm\dfrac{1}{63}(a-b)\sqrt{-63}\right\}$。

33. 解 $(a-x)^5+(x-b)^5=(a-b)^5$。 答 $a,\ b,\ \dfrac{1}{2}\left\{a+b\pm(a-b)\sqrt{-3}\right\}$。

〔解〕$(a-x)^5+(x-b)^5=\{(a-x)+(x-b)\}^5$ 與 30 例同法。

34. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{a-b}$ 試解之。 答 $a,\ b$。

〔解〕求兩邊之立方如 31 例。

35. 解 $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{x-b}=\sqrt[4]{a-b}$。 答 $a,\ b,\ \dfrac{1}{2}\left\{a+b\pm(a-b)\sqrt{-63}\right\}$。

〔解〕與 32 同法。

36. 解 $x^4+(a-x)^4=b^4$。

〔解〕$x=m+n$, 及 $a-x=m-n$。則 $m=\dfrac{a}{2}$, $n=x-\dfrac{a}{2}$。

又從原方程式。得 $(m+n)^4+(m-n)^4=b^4$。

即 $2m^4+12m^2n^2+2n^4=b^4$。

即 $2\left(\dfrac{a}{2}\right)^4+12\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^4=b^4$。

即 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^4+\frac{3}{2}a^2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=-\frac{a^4}{16}+\frac{b^4}{2}$。

$\therefore\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2=-\frac{3}{4}a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}$。即 $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\left\{-\frac{3}{4}a^2\pm\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}\right\}}$。

37. 解 $(x+a)^4+(x+b)^4=17(a-b)^4$。

〔解〕$(x+a)^4+(x+b)^4=17\{(x+a)-(x+b)\}^4$。

即 $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^4+1=17\left\{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)-1\right\}^4$ 命 $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)=y$，則

$y^4+1=17(y-1)^4$。即 $16y^4-68y^3+102y^2-68y+16=0$。

$\therefore\ 8\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)-34\left(y+\frac{1}{y}\right)+51=0$。

即 $8\left(y+\frac{1}{y}\right)^2-34\left(y+\frac{1}{y}\right)+35=0$。 $\therefore\ y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$ 或 $\frac{7}{4}$。

由是 $y^2-\frac{5}{2}y+1=0$, 或 $y^2-\frac{7}{4}y+1=0$。

$\therefore\ y=2$, 或 $\frac{1}{2}$, 或 $y=\frac{1}{8}(7\pm\sqrt{-15})$。

即 $\frac{x+a}{x+b}=2$, $\frac{x+a}{x+b}=\frac{1}{2}$, $\frac{x+a}{x+b}=\frac{1}{8}(7\pm\sqrt{-15})$。

從 $\frac{x+a}{x+b}=2$, 或 $\frac{1}{2}$, 得 $x=a-2b$, 或 $b-2a$。

又從 $\frac{x+a}{x+b}=\frac{7\pm\sqrt{-15}}{8}$, 得 $\frac{a-b}{x+b}=\frac{-1\pm\sqrt{-15}}{8}$。

$\therefore\ x+b=\frac{8(a-b)}{-1\pm\sqrt{-15}}$ 以 $-1\mp\sqrt{-15}$ 乘分母子。則

$x+b=\frac{8(a-b)(-1\mp\sqrt{-15})}{1-(-15)}=\frac{(a-b)(-1\mp\sqrt{-15})}{2}$。

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}\{a+b\pm(a-b)\sqrt{-15}\}$。

38. 解 $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a-x}=\sqrt[4]{b}$。

〔解〕平方之。得 $\sqrt{x}+\sqrt{a-x}+2\sqrt[4]{x(a-x)}=\sqrt{b}$，

即 $\sqrt{x}+\sqrt{(a-x)}=\sqrt{b}-2\sqrt[4]{x(a-x)}$，又平方之，即得

$x+a-x+2\sqrt{x(a-x)}=b-4\sqrt{b}\sqrt[4]{x(a-x)}+4\sqrt{x(a-x)}$。

卽 $2\sqrt{x(a-x)}-4\sqrt{b}\sqrt[4]{x(a-x)}=a-b$。 令 $\sqrt[4]{x(a-x)}=y$。

則 $2y^2-4y\sqrt{b}=a-b$。 $\therefore\ y=\sqrt{b}\pm\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$.

卽 $x(a-x)=y^4=\left(\sqrt{b}\pm\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\right)^4$。

39. 解 $abx(x+a+b)^3-(ax+bx+ab)^3=0$。

〔解〕 $abx\{x^3+3x^2(a+b)+3x(a+b)^2+(a+b)^3\}$

$$=x^3(a+b)^3+3x^2(a+b)^2ab+3x(a+b)a^2b^2+a^3b^3。$$

卽 $abx^4-x^3(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}+abx(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}-a^3b^3=0$.

卽 $ab(x^4-a^2b^2)-x(a+b)(a^2-ab+b^2)(x^2-ab)=0$。

卽 $(x^2-ab)\{ab(x^2+ab)-x(a+b)(a^2-ab+b^2)\}=0$。

卽 $(x^2-ab)\{abx^2-x(a^3+b^3)+a^2b^2\}=0$。

卽 $(x^2-ab)(bx-a^2)(ax-b^2)=0$。 $\therefore\ x=\pm\sqrt{ab},\ \dfrac{a^2}{b},\ \dfrac{b^2}{a}$。

40. 解 $abcx(x+a+b+c)^2-(xbc+xca+xab+abc)^2=0$。

〔解〕 $abcx\{(x+a)+(b+c)\}^2=\{bc(x+a)+ax(b+c)\}^2$。去括弧而簡之。

則 $abcx\{(x+a)^2+(b+c)^2\}=b^2c^2(x+a)^2+a^2x^2(b+c)^2$。

卽 $bc(x+a)^2(ax-bc)-ax(b+c)^2(ax-bc)=0$.

卽 $(ax-bc)\{bc(x+a)^2-ax(b+c)^2\}=0$。

卽 $(ax-bc)(bx-ca)(cx-ab)=0$。

$\therefore$ $x=\dfrac{bc}{a}$, 或 $\dfrac{ca}{b}$, 或 $\dfrac{ab}{c}$。

41. 解 $\dfrac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a+b-2x)^2}=\dfrac{a^4+b^4}{(a+b)^2}$。

〔解〕 $\dfrac{\{(a-x)^2-(x-b)^2\}^2+2(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2}=\dfrac{(a^2-b^2)^2+2a^2b^2}{(a+b)^2}$。

卽 $\dfrac{(a+b-2x)^2(a-b)^2+2(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2}=\dfrac{(a-b)^2(a+b)^2+2a^2b^2}{(a+b)^2}$。

卽 $(a-b)^2+\dfrac{2(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2}=(a-b)^2+\dfrac{2a^2b^2}{(a+b)^2}$,

$\therefore$ $\dfrac{(a-x)^2(x-b)^2}{(a+b-2x)^2}=\dfrac{a^2b^2}{(a+b)^2}$, 由是 $\dfrac{(a-x)(x-b)}{a+b-2x}=\pm\dfrac{ab}{a+b}$。

$\therefore$ $x=0,\ a+b,\ \dfrac{a^2+b^2}{a+b},\ \dfrac{2ab}{a+b}$.

42. $x^4+b(a+b)x^3+(ab-2)b^2x^2-(a+b)b^3x+b^4=0$。

〔解〕 $(x^2-b^2)^2+bx(a+b)(x^2-b^2)+ab^3x^2=0$。

即 $(x^2-b^2+abx)(x^2-b^2+b^2x)=0$。

∴ 從 $x^2-b^2+abx=0$。 $x=\frac{1}{2}b\left(-a\pm\sqrt{a^2+4}\right)$。

又 從 $x^2-b^2+b^2x=0$。 $x=\frac{1}{2}b(-b\pm\sqrt{b^2+4})$。

43. 解$(x^2+b^2)^2=2ax^3+2ab^2x-a^2x^2$。

〔解〕 $(x^2+b^2)^2-2ax(x^2+b^2)+a^2x^2=0$。

即 $\{(x^2+b^2)-ax\}^2=0$。 ∴ $x^2+b^2-ax=0$, $x=\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{a^2-4b^2}\right)$。

44. 解 $(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)+abc=0$。

〔解〕 $x+b+c+a=y$, 則原方程式,變為 $(y-a)(y-b)(y-c)+abc=0$,

即 $y^3-y^2(a+b+c)+y(ab+bc+ca)=0$。 ∴ $y=0$。

即 $x+a+b+c=0$, ∴ $x=-a-b-c$。

或 $y^2-y(a+b+c)+ab+bc+ca=0$。

∴ $y=\frac{1}{2}\{a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\}$。

即 $x=\frac{1}{2}(-a-b-c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\}$。

45. 解$\frac{a}{b+c-x}+\frac{b}{c+a-x}+\frac{c}{a+b-x}+3=0$。

〔解〕 $\frac{a+b+c-x}{b+c-x}+\frac{a+b+c-x}{c+a-x}+\frac{a+b+c-x}{a+b-x}=0$,

∴ $x=a+b+c$, 或 $\frac{1}{b+c-x}+\frac{1}{c+a-x}+\frac{1}{a+b-x}=0$,

即 $(c+a-x)(a+b-x)+(a+b-x)(b+c-x)+(b+c-x)(c+a-x)=0$,

即 $3x^2-4x(a+b+c)+a^2+b^2+c^2+3ab+3bc+3ca=0$,

∴ $x=\frac{1}{3}\{2(a+b+c)\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc+ca)}\}$。

46. $\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2-(b-c)^2}+\frac{(x-b)^2}{(x-b)^2-(c-a)^2}+\frac{(x-c)^2}{(x-c)^2-(a-b)^2}=1$,

〔解〕 $x=a$, 或 b, 或 c 為能適合。 ∴ a, b, c 為根,

又 $$\frac{(x-a)^2}{(x-a+b-c)(x-a-b+c)}+\frac{(x-b)^2}{(x-b+c-a)(x-b-c+a)}$$
$$+\frac{(x-c)^2}{(x-c+a-b)(x-c-a+b)}=1。$$

即 $$(x-a)^2(x+a-b-c)+(x-b)^2(x-a+b-c)+(x-c)^2(x-a-b+c)$$
$$=(x+a-b-c)(x-a+b-c)(x-a-b+c),$$

由是此方程式，爲三次方程式。故所求之根爲 a, b, c。

47. $$\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)}=\frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}+\frac{(x-c)(x-d)}{(x+c)(x+d)},$$

〔解〕 $\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=y$。 $\frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}=z$。 則

原方程式爲 $y+\frac{1}{y}=z+\frac{1}{z}$。 即 $(y-z)(yz-1)=0$。

$\therefore$ $y=z$。 即 $\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)}=\frac{(x+c)(x+d)}{(x-c)(x-d)}$。

$\therefore$ $x=0$。 或 $\pm\sqrt{\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{a+b-c-d}}$。

又 $yz=1$。 即 $\frac{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}=1$。

$\therefore$ $x=\pm\sqrt{-\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{a+b+c+d}}$。

第玖編補

霍爾及乃托氏第九編摘要

二次三項式

1. 二次三項式在 ax^2+bx+c,內有如下之關係,

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}。$$若 b^2-4ac 爲負。則

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}。$$

由是 b^2-4ac 爲負。則 ax^2+bx+c 式之值。與 a 同號。視 a 爲正則正;否則爲零。

2. 例解 $\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}$ 爲任意之實數。若 x 爲實數。則 a 值之界限若何。

令 $\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}=y$。則

$$(a-5y)x^2-7x(1-y)+(5-ay)=0。$$

因 x 爲實數。故 $49(1-y)^2-4(a-5y)(5-ay)\nless 0$ 即爲正。

即 $(49-20a)y^2+2(2a^2+1)y+(49-20a)$ 爲正。

由1章 $4(2a^2+1)^2-4(49-20a)^2$ 應爲負或零。

即 $4(a-5)^2(a+12)(a-2)$ 爲負或零。

由是 a 在 2 與 -12 之間。則前之代數式爲負,而 $49-20a$ 爲正。若 $a=5$, 或 -12, 或 2。則此代數式爲零。然 $a=5$,則 $49-20a$ 爲負。故知此值之界限爲 2 及 -12 而 a 在其中間。

例題九 (b)

10. 代數式 $\frac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$，若 p 在 1 與 7 之間。則對於 x 之任意實數值試表之。

〔解〕 $\frac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}=y$。則

$x^2(p+4y)-3x(y-1)-(py+4)=0$。

x 爲實數。則 $9(y-1)^2+4(p+4y)(py+4)\not<0$。

即 $y^2(16p+9)+2y(2p^2+23)+(16p+9)\not<0$。

故此代數式爲正。由 2 章。

$4(2p^2+23)^2-4(16p+9)^2$ 常爲負。

即 $4(p+4)^2(p-1)(p-7)$ 爲負。

由是 $p-1$ 與 $p-7$ 不能不異號。

故 p 在 1 與 7 之間。

14. $\frac{(ax-b)(dx-c)}{(bx-a)(cx-ad)}$ 若 a^2-b^2 與 c^2-d^2 爲同號。則對於 x 之任意實數值試表之。

〔解〕 $\frac{(ax-b)(dx-c)}{(bx-a)(cx-d)}=y$。則

$(ad-bcy)x^2-(ac+bd)(1-y)x+(bc-ady)=0$。因 x 爲實數。故

$(ac+bd)^2(1-y)^2-4(ad-bcy)(bc-ady)\not<0$。

即 $(ac-bd)^2y^2-2y\{(ac-bd)^2-2(ad-bc)^2\}+(ac-bd)\not<0$。

故 $\{(ac-bd)^2-2(ad-bc)^2\}^2-(ac-bd)^4$ 爲負。

即 $(ad-bc)^2\{(ad-bc)^2-(ac-bd)^2\}$ 爲負。

即 $-(a^2-b^2)(c^2-d^2)$ 爲負。

由是 a^2-b^2, c^2-d^2 不能不同號。

霍爾及乃托氏第拾編摘要

雜方程式

3. 雜方程式 在斯密氏書內所無者，爲指數方程式；今於此編補其例題於下。

例題十 (a)

11. $3^{2x}+9=10.3^x$。

〔解〕變原方程式，爲 $(3^x)^2-10(3^x)+9=0$。

即 $(3^x-1)(3^x-9)=0$，

故 $3^x-1=0$，或 $3^x-9=0$。即 $3^x=3^0$，或 $3^x=3^2$。

由是 $x=0$，或 $=2$。

12 $5(5^x+5^{-x})=26$。

〔解〕$5\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)=26$。即 $(5^x)^2-\frac{26}{5}(5^x)+1=0$。

即 $\left(5^x-\frac{1}{5}\right)\left(5^x-5\right)=0$。

故 $5^x=5^{-1}$，或 $5^x=5^1$。

由是 $x=-1$，或 $=+1$，即 $x=\pm1$。

13. $2^{2x+8}+1=32.2^x$。

〔解〕$2^{2x+8}+1=2^5.2^x$。即 $(2^{x+4})^2-2(2^{x+4})+1=0$。

開平方。則 $2^{x+4}-1=0$。即 $2^{x+4}=1=2^0$。

由是 $x+4=0$。即 $x=-4$。

14. $2^{2x+3}-57=65(2^x-1)$。

〔解〕$2^3.2^{2x}-65.2^x+8=0$。即 $(2^x-8)(82^x-1)=0$。

故 $2^x=8=2^3$，或 $2^x=\frac{1}{8}=2^{-3}$。

由是 $x=3$，或 $=-3$。即 $x=\pm3$。

15. $\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^x}}=2$。

〔解〕$\sqrt{2^{2x}}-2\sqrt{2^x}+1=0$。開平方得 $\sqrt{2^x}-1=0$。

故 $2^{\frac{x}{2}}=1$。即 $2^{\frac{x}{2}}=2^0$。 $\therefore\ x=0$。

44. $2^{x^2}:2^{2x}=8:1$。

〔解〕$2^{x^2}\times1=2^{2x}\times8$。即 $2^{x^2}=2^{2x+3}$。

故 $x^2=2x+3$。因之 $x=3$，或 $=-1$。

45. $a^{2x}(a^2+1)=(a^{3x}+a^x)a$。

〔解〕 $a^{3x+1}-a^{2x+2}-a^{2x}+a^{x+1}=0$。以 a 除之。則

$$a^{3x}-a^{2x+1}-a^{2x-1}+a^{x}=0,$$

即 $$a^{2x}(a^{x}-a)-a^{x-1}(a^{x}-a)=0,$$

即 $$(a^{x}-a)(a^{2x}-a^{x-1})=0,$$

故 $a^{x}=a$, 或 $a^{2x}=a^{x-1}$。

由是 $x=1$, 或 $2x=x-1$, 故 $x=\pm1$。

48. $(a+x)^{\frac{2}{3}}+4(a-x)^{\frac{2}{3}}=5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$。

〔解〕 $(a+x)^{\frac{1}{3}}=y$。 $(a-x)^{\frac{1}{3}}=z$。則原方程式,爲

$y^2+4z^2=5yz$。 即 $y^2-5yz+4z^2=0$。

即 $$(y-z)(y-4z)=0,$$

由是 $y=z$, 或 $y=4z$,

即 $y^3=z^3$, 或 $y^3=64z^3$,

即 $a+x=a-x$, 或 $a+x=64(a-x)$,

由是 $x=0$, 或 $x=\frac{63}{65}a$。

〔注意〕以上所示之例題。如12.15.等。曾有負指數。及分指數。即如 5^{-x} 或 $2^{\frac{x}{2}}$。此等雖未經證明。然 $5^{-x}=\frac{1}{5^x}$ 及 $2^{\frac{x}{2}}=\sqrt{2^x}$ 即證明在後。故此處僅示其定義而已。

例如 $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$。 $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ 之類。

又如 $x^{-3}=\frac{1}{x^3}$。 $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$。

凡分指數。及負指數。斯密氏於第十三編述之頗詳。然介先知其定義,方知指數上之計算亦頗簡便。

查理斯密司氏
霍爾氏,乃托氏

大代數學講義

第三卷

第拾編

通同方程式(或名聯立方程式。即多元方程式)。

140. 通同方程式(Simultaneus Equation) 一方程式含有二個或二個以上之未知數量。則其諸未知數量之值能適合者。多至無限。何則。其一個未知數量。恆因他未知數量任意之值而變。而得種種之值。

例如 $2x+y=12$ 式。其 $y=12-2x$。若 $x=1$ 則 $y=10$。$x=2$ 則 $y=8$。$x=3$ 則 $y=6$。故 x 及 y 可有無限之值。皆能適合。

然同此二未知數量,有二個方程式,則其未知數量之值。求其皆能適合者。即爲有限,推之至於含n個未知數量之方程式。亦有n個,則其未知數量之值。同時能適合者。亦必有限,

二個以上之方程式。其所含諸未知數量之值能適合者。謂之通同方程式。

含諸未知數量 $x, y, z, \cdots\cdots$ 之方程式。則其式之次數。當依未知數量中最高乘元之次數稱之,

例如 $ax+a^2y+a^3z=a^4$。 爲一次方程式,

$xy+x+y+z=0$。 爲二次方程式,

$x^2+y^2+z^2-3xyz=0$。 爲三次方程式,

141. 一次通同方程式 先論有二未知數量之一次方程式。

有 $x, y, z, \cdots\cdots$ 之一次方程式。爲 $ax+by+cz+\cdots\cdots=k$。在此方程式內 $a, b, c, \cdots\cdots k$,爲已知數量,

〔註〕同一組之諸方程式。其同未知數量之係數。可用同文字而附點，或小數字。以區別其值之異。則較便利。

例如 a. b, c, 用於第一方程。則第二方程用 a', b', c', 第三方程用 a'', b'', c''。或第一用 a, b, c, 第二用 a_2, b_2, c_2。

由是含 x 及 y 之一次通同方程式，則爲

$$ax+by=c。$$

$$a'x+b'y=c'。$$

142。兩未知數量之方程式如下。

$$ax+by=c。\qquad a'x+b'y=c'。$$

以第二式 y 之係數 b' 乘第一式，得 $\quad ab'x+bb'y=cb'$。

以第一式 y 之係數 b 乘第二式，得 $\quad a'bx+bb'y=c'b$。

由減法得 $(ab-a'b)x=cb'-c'b$。 $\therefore\ x=\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}$。

以 x 之值，代入第一式，則得 $a\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}+by=c$,

由是 $by=\dfrac{c(ab'-a'b)-a(cb'-c'b)}{ab'-a'b}$ $\quad\therefore\ y=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$。

或不關於 x 而徑求 y。則如第一次求 x 之法。從第一式得 $a'ax+a'by=a'c$, 從第二式得 $a'ax+ab'y=ac'$。

由減法得 $(ab'-ab')y=a'c-ac'$。 $\therefore\ y=\dfrac{a'c-ac'}{a'b-ab'}$。

(註) x 及 y 得其一個，則他一個可互換其係數得之。

例如 $x=\dfrac{cb'-c'b}{ab'-a'b}$ 從 a, b 及 a', b' 互換，則得

$y=\dfrac{ca'-c'a}{ba'-b'a}$ 即既知 x 可以徑得 y。

故凡解一次二通同方程式。必先消去他未知數量。而變爲第三之方程式，則其一未知數量，即可求得。依此方法去他之一未知數量者，謂之消去法 (Eliminated)。

(143.)公式依前章從

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\} \quad 則 \quad x=\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b} \quad 及 \quad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}。$$

由是 $\frac{x}{cb'-c'b}=\frac{1}{ab'-a'b}$ 即 $\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{-1}{ab'-a'b}$。

及 $\frac{y}{ac'-a'c}=\frac{1}{ab'-a'b}$ 即 $\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{-1}{ab'-a'b}$。

由是得最要之公式如下

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{-1}{ab'-a'b}。$$

此最要之公式，稱爲十文字之法。

$$ax+by+c(+1)=0。$$

$$a'x+b'y+c'(-1)=0。$$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & a \\ a' & b' & c' & a' \end{array}$$

-1	x	y
之	之	之
分	分	分
母	母	母

上之十文字。以其對角線上之兩文字相乘。一得正積。一得負積。

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{-1}{ab'-a'b}。$$

又從 $\left.\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right\}$ 得

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & a \\ a' & b' & c' & a' \end{array}$$

1	x	y
之	之	之
分	分	分
母	母	母

$$\therefore \frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}。$$

〔第一例〕解 $3x+2y=13,\ 7x+3y=27$。

$$\begin{array}{cccc}3&2&13&3\\7&3&27&7\end{array}$$

-1之分母　x之分母　y之分母

$$\therefore\ \frac{x}{2.27-3.13}=\frac{y}{13.7-27.3}=\frac{-1}{3.3-7.2}\ \text{即}\ \frac{x}{15}=\frac{y}{10}=\frac{1}{5}。$$

由是 $x=\frac{15}{5}=3,\qquad y=\frac{10}{5}=2$。

〔第二例〕解 $\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=2,\ \ \frac{2}{x}-\frac{5}{y}=-7$。

$$\begin{array}{cccc}4&3&2&4\\2&-5&-7&2\end{array}$$

$$\therefore\ \frac{\frac{1}{x}}{3(-7)-(-5)2}=\frac{\frac{1}{y}}{2.2-(-7)4}=\frac{-1}{4(-5)-2.3},$$

-1之分母　$\frac{1}{x}$之分母　$\frac{1}{y}$之分母

即 $\frac{\frac{1}{x}}{-11}=\frac{\frac{1}{y}}{32}=\frac{1}{26}$。

$\therefore\ \frac{1}{x}=\frac{-11}{26}$。 即 $x=-\frac{26}{11}$。 $\frac{1}{y}=\frac{32}{26}$。 即 $y=\frac{13}{16}$。

〔第三例〕解 $x-y=a-b,\ ax-by=2(a^2-b^2)$。

$$\begin{array}{cccc}1&-1&(a-b)&1\\a&-b&2(a^2-b^2)&a\end{array}$$

$$\therefore\ \frac{x}{-2(a^2-b^2)+b(a-b)}=\frac{y}{(a-b)a-2(a^2-b^2)}=\frac{-1}{-b+a},$$

-1之分母　x之分母　y之分母

即 $\frac{x}{b^2+ab-2a^2}=\frac{y}{2b^2-ab-a^2}=\frac{1}{b-a}$。

$\therefore\ x=\frac{b^2+ab-2a^2}{b-a}=2a+b$。 $y=\frac{2b^2-ab-a^2}{b-a}=a$

〔別法〕令 $y=x-(a-b)$ 代入第二式。則

$ax-b\{x-(a-b)\}=2(a^2-b^2)$。則 $x(a-b)=2(a^2-b^2)-b(a-b)$。

$\therefore\ x=2(a+b)-b=2a+b$。又 $y=x-(a-b)=2a+b-(a-b)=a+2b$。

144.論一次兩通同方程式之解法. 如下

$$ax+by=c\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$a'x+b'y=c'\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

此方程式變爲下之(3)(4)兩式,其 x 及 y 之值,能適合明矣。

$$(ab'-a'b)x=cb'-c'b\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$(ba'-b'a)y=ca'-c'a\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

故 $ab'-a'b\neq0$。則 x 及 y 各能得一個有限值。

若 $ab'-a'b=0$。則 x 及 y 皆爲無限大,見〔118章〕。但此固因 $cb'-c'b\neq0$。

又 $ab'-a'b=0$。則 $b'=\frac{a'b}{a}$ 代入(3)式,爲 $c\times\frac{a'b}{a}-c'b\neq0$

即 $\frac{b}{a}(ca'-c'a)\neq0$。故亦 $ca'-c'a\neq0$, 惟(3)(4)式,x 及 y 之係數皆爲0。以0除非0者。必爲無限大。

若 $ab'-a'b=0$。及 $cb'-c'b=0$。則 $x=\frac{0}{0}$。

又從 $b'=\frac{a'b}{a}$ 得 $c\times\frac{a'b}{a}-c'b=0$。即 $\frac{b}{a}(ca'-c'a)=0$。

$\because\ ca'-c'a=0$。由是 $y=\frac{0}{0}$。則對於 x 及 y 不論爲如何之值皆能適合。

$ab'-a'b=0$。則 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$。

$ab'-a'b=0$。及 $cb'-c'b=0$。則 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$。

不合理之方程式. (Inconsistent) 對於未知數量有限之值不適合者。謂之不合理之方程式。

例如 $ab'-a'b=0$。$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ 而不等於 $\frac{c}{c'}$。

不定方程式(Indeterminate) $ab'-a'b=0$, $cb'-c'b=0$

即 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$。則兩方程式全然相同，故謂之不定式。

例如以 $\frac{a'}{a}$ 乘(1)式。則 $a'x+\frac{a'}{a}by=\frac{a'}{a}c$。即

$a'x+\frac{b'}{b}by=\frac{c'}{c}c$。即 $a'x+b'y=c'$。即(1)式與(2)式同在此例。則 x 及 y 之值。可多至無限而皆能適合。

a, a', b, b', 不常爲0。今試設 a 及 a' 爲0。則從(1)式。$y=\frac{c}{b}$。從(2)式，$y=\frac{c'}{b'}$。而此結果非 $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$ 則不合理。

由是 $a=a'=0$。及 $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$ 則(1)式及(2)式爲 $y=\frac{c}{b}$ 能適合，而 x 之值常爲無限大。

若 $a=a'=0$ 而 $\frac{c}{b}\neq\frac{c'}{b'}$。則 $by=c$ 及 $b'y=c'$。雖不合理，然在 $ax+by=c$ 及 $a'x+b'y=c'$ 之內。令 a 及 a' 減小。至於極限。則亦能合理。

何則 $\frac{c}{b}\neq\frac{c'}{b'}$。則 $cb'-c'b\neq0$。

又 $a=a'=0$。則 $ab'-a'b=0$。故 x 及 y 之值。可爲無限大。

145. 三未知數量之通同方程式解法如下。

$$ax+by+cz=d \quad\text{......(1)}$$
$$a'x+b'y+c'z=d' \quad\text{......(2)}$$
$$a''x+b''y+c''z=d'' \quad\text{......(3)}$$

〔連次消去之法〕 以 c' 乘(1)式。c 乘(2)式。則得

$$ac'x+bc'y+cc'z=dc'$$

及
$$a'cx+b'cy+cc'z=d'c$$

由減法得 $(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c$ ......(4)

以 c'' 乘(1)式 c 乘(3)式如前法。則得

$$(ac''-a''c)x+(bc''-b''c)y=dc''-d''c \quad\text{......(5)}$$

從(4)式及(5)式。用143章之公式如下。

$$x=\frac{-(bc'-b'c)(dc''-d''c)+(dc'-d'c)(bc''-b''c)}{(ac'-a'c)(bc''-b''c)-(bc'-b'c)(ac''-a''c)}。$$

[未定係數之法] 以λ乘(1)式。μ乘(2)式，與(3)式相加。則得

$$x(\lambda a+\mu a'+a'')+y(\lambda b+\mu b'+b'')+z(\lambda c+\mu c'+c'')=\lambda d+\mu d'+d''。$$

此方程式λ及μ爲任意之值。皆能適合。見(149章。)

今命y及z之係數爲0。以求λ及μ之值，則

$$x(\lambda a+\mu a'+a'')=\lambda d+\mu d'+d''。\qquad \therefore\quad x=\frac{\lambda d+\mu d'+d''}{\lambda a+\mu a'+a''}$$

但從 $\left.\begin{matrix}\lambda b+\mu b'+b''=0\\ \lambda c+\mu c'+c''=0\end{matrix}\right\}$ 用143章之公式，得

$$\frac{\lambda}{b'c''-b''c'}=\frac{\mu}{b''c-bc''}=\frac{1}{bc'-b'c}。$$

$\therefore\quad \lambda(bc'-b'c)=b'c-b''c'$ 及 $\mu(bc'-b'c)=b''c-bc''$。

由是 $x=\dfrac{\lambda d+\mu d'+d''}{\lambda a+\mu a'+a''}\times\dfrac{bc'-b'c}{bc'-b'c}$

$$=\frac{d\lambda(bc'-b'c)+d'\mu(bc'-b'c)+d''(bc'-b'c)}{a\lambda(bc'-b'c)+a'\mu(bc'-b'c)+a''(bc'-b'c)}$$

$$=\frac{d(b'c''-b''c')+d'(b''c-bc'')+d''(bc'-b'c)}{a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)},$$

連次消去法。所得x之值，可以c約其分母分子。與未定係數法。所得x之值同，

依上法求得x之值。則y及z之值。可遞得之，即y之值。可在x值內。以a與b及a'與b'及a''與b''交換而得之，又y之值。可在x值內，以a, b, c及a', b', c'及a'', b'', c''輪換而得之，至z之值，可用第二之輪換得之。

x, y, z之值。其分母常同，而此分母非等於0，則各值皆爲有限數。

[第一例] 解

$$\begin{cases} x+2y+3z=6\dots\dots\dots\dots(1)\\ 2x+4y+z=7\dots\dots\dots\dots(2)\\ 3x+2y+9z=14\dots\dots\dots\dots(3)\end{cases}$$

以2乘(1)式。則$2x+4y+6z=12$。由此式減(2)式，則$5z=5$。$\therefore\ z=1$。

以3乘(1)式，則$3x+6y+9z=18$，由此式減(3)式，則$4y=4$。$\therefore\ y=1$。

$\therefore$ 從(1)式。得$x+2.1+3.1=6$。 $\therefore\ x=1$。

〔第二例〕解下之方程式。

$$x+y+z=1\cdots\cdots(1)$$

$$ax+by+cz=d\cdots\cdots(2)$$

$$a^2x+b^2y+c^2z=d^2\cdots\cdots(3)$$

以c乘(1)式減去(2)式,則得 $(c-a)x+(c-b)y=c-d\cdots\cdots(4)$

以c乘(2)式減去(3)式,則得 $a(c-a)x+b(c-b)y=d(c-d)\cdots\cdots(5)$

以b乘(4)式減去(5)式,則得 $(b-a)(c-a)x=(b-d)(c-d)$,

$$\therefore\quad x=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}。$$

y, z之値,可如下式逕書出之,

$$y=\frac{(c-d)(a-d)}{(c-b)(a-b)},\quad z=\frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}。$$

〔第三例〕解下之方程式,

$$x+y+z=a+b+c\cdots\cdots(1)$$

$$ax+by+cz=bc+ca+ab\cdots\cdots(2)$$

$$bcx+cay+abz=3abc\cdots\cdots(3)$$

從(1)式,則 $(x-c)+(y-a)+(z-b)=0$,

從(2)式,則 $a(x-c)+b(y-a)+c(z-b)=0$,

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & \times & \times & \times \\ a & b & c & a \end{array}$$

$(z-b)\ (x-c)\ (y-a)$

之分母 之分母 之分母

用143章十文字之法,則得

$$\frac{x-c}{c-b}=\frac{y-a}{a-c}=\frac{z-b}{b-a}$$

$$=\frac{bc(x-c)+ca(y-a)+ab(z-b)}{bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)}=\frac{bcx+cay+abz-bc^2-ca^2-ab^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}。$$

從(3)式,則 $\dfrac{x-c}{c-b}=\dfrac{y-a}{a-c}=\dfrac{z-b}{b-a}=\dfrac{3abc-bc^2-ca^2-ab^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}。$

$$\therefore\quad x=c-\frac{3abc-bc^2-ca^2-ab^2}{(a-b)(c-a)}=\frac{a(b-c)^2}{(a-b)(c-a)}。$$

由是y與z之値。可逕書出。

[第四例] 解下之方程式。

$$x+ay+a^2z+a^3=0\text{.......................}(1)$$
$$x+by+b^2z+b^3=0\text{.......................}(2)$$
$$x+cy+c^2z+c^3=0\text{.......................}(3)$$

先設 $\lambda^3+z\lambda^2+y\lambda+x=0$。此方程式內。用 a, b, c 代 λ，則順次得(1),(2),(3)三式而適合。故 λ 之值爲 a, b, c。

又以 a, b, c 爲三根之方程式。爲 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)=0$。

則 $\lambda^3-(a+b+c)\lambda^2+(ab+bc+ca)\lambda-abc=0$。

與前之 λ 之三次方程式。比較其係數。則

$z=-(a+b+c)$，$y=ab+bc+ca$。$x=-abc$。

146. 諸未知數量之通同方程式 含三個以上未知數量之一次通同方程式。依後編所示之定準數法。自易求得。

又用連次消去法。或未定係數之倍數法。亦能求得之。

例如
$$ax+by+cz+du=e\text{.......................}(1)$$
$$a'x+b'y+c'z+d'u=e'\text{.......................}(2)$$
$$a''x+b''y+c''z+d''u=e''\text{.......................}(3)$$
$$a'''x+b'''x+c'''z+d'''u=e'''\text{.......................}(4)$$

λ 乘(1)式。μ 乘(2)式。γ 乘(3)式與(4)式。相加，則得

$$x(a\lambda+a'\mu+a''\gamma+a''')+y(b\lambda+b\mu+b''\gamma+b''')$$
$$+z(c\lambda+c'\mu+c''\gamma+c''')+u(d\lambda+d'\mu+d''\gamma+d''')$$
$$=e\lambda+e'\mu+e''\gamma+e'''\text{.......................}(5)$$

λ, μ, γ 在(5)式內設 y, z, u 之係數爲 0，則

$$x=\frac{e\lambda+e'\mu+e''\gamma+e'''}{a\lambda+a'\mu+a''\gamma+a'''}\text{.......................}(6)$$

但 λ, μ, γ 可從方程式。

$$\left.\begin{array}{l} b\lambda+b'\mu+b''\gamma+b'''=0 \\ c\lambda+c'\mu+c''\gamma+c'''=0 \\ d\lambda+d'\mu+d''\gamma+d'''=0 \end{array}\right\}\text{.......................}(7)$$

而用 145. 章之法解之。得 λ, μ, γ 之各值，以此代入(6)式。即得 x 值。

又得x之後，則y, z, u各值。可由a, b, c, d及a′, b′, c′, d′及a″, b″, c″, d″及a‴, b‴, c‴, d‴輪換得之。即由x之值得之也。但未知數量之分母則同。

例題十二

試解以下之方程式。

1. $\frac{x}{3}-\frac{y}{6}=\frac{1}{2}$。 $\frac{x}{5}-\frac{3y}{10}=\frac{1}{2}$。

〔解〕去兩方程式之分母。則$2x-y=3$, $2x-3y=5$。

$\therefore\ (2x-y)-(2x-3y)=3-5$。 即 $2y=-2$。 $\therefore\ y=-1$。

$$x=\frac{1}{2}(y+3)=1,$$

2. $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=2$。 $\frac{18}{x}+\frac{8}{y}=10$。 答 $x=2\frac{4}{7}$, $y=2\frac{2}{3}$。

〔解〕$\frac{9}{x}-\frac{4}{y}+\frac{1}{2}\left(\frac{18}{x}+\frac{8}{y}\right)=2+\frac{1}{2}\times10$。 即 $\frac{18}{x}=7$。 $\therefore\ x=2\frac{4}{7}$。

3. $x+\frac{3}{y}=\frac{7}{2}$。 $3x-\frac{2}{y}=\frac{26}{3}$。 答 $x=3$, $y=6$,

〔解〕$3\left(x+\frac{3}{y}\right)-\left(3x-\frac{2}{y}\right)=3\times\frac{7}{2}-\frac{26}{3}$。 即 $\frac{11}{y}=\frac{11}{6}$。 $\therefore\ y=6$。

4. $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}+5=\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=10$,

〔解〕$\frac{4}{x}-\frac{3}{y}+5=10$。 即 $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}=5$。 又 $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=10$。

由加法 $\frac{10}{x}=15$。 $\therefore\ x=\frac{2}{3}$, $y=3$。

5. $ax+by=2ab$。 $bx-ay=b^2-a^2$。

〔解〕$a(ax+by)+b(bx-ay)=a(2ab)+b(b^2-a^2)$。

即 $x(a^2+b^2)=b(a^2+b^2)$。 $\therefore\ x=b$, 及 $y=a$.

6. $x+ay+a^2=0$。 $x+by+b^2=0$。 答 $x=ab$, $y=-a-b$。

〔解〕由減法 $(a-b)y+a^2-b^2=0$。 $\therefore\ y=-(a+b)$.

7. $x+y=2a$。 $(a-b)x=(a+b)y$。

〔解〕 $y=\frac{(a-b)x}{a+b}$。 $\therefore$ $x+\frac{(a-b)x}{a+b}=2a$。 $\therefore$ $x=a+b$, $y=a-b$。

8. $(b+c)x+(b-c)y=2ab$。 $(c+a)x+(c-a)y+2ac$。

〔解〕 以 c 乘第一式，b 乘第二式。由減法，

$(c^2-ab)x-(c^2-ab)y=0$。 $\therefore$ $y=x$。

故從第一式 $(b+c)x+(b-c)x=2ab$。 得 $x=a=y$。

9. $bx+ay=2ab$。 $a^2x+b^2y=a^3+b^3$。

〔解〕 $b(x-a)+a(y-b)=0$。 $a^2(x-a)+b^2(y-b)=0$。

由視察得 $x-a=0$， $y-b=0$。 $\therefore$ $x=a$, $y=b$。

10. $(a+b)x+by=ax+(b+a)y=a^3-b^3$。

〔解〕 從 $(a+b)x+by=ax+(b+a)y$ 得 $bx=ay$。 $\therefore$ $y=\frac{b}{a}x$。

由是 $(a+b)x+b\times\frac{b}{a}x=a^3-b^3$。

即 $(a^2+ab+b^2)x=a(a^3-b^3)$。 $\therefore$ $x=a(a-b)$ 及 $y=b(a-b)$。

11. $x+y+z=1$。 $2x+3y+z=4$。 $4x+9y+z=16$。

〔解〕 於第二式減第一式。則 $x+2y=3$，

於第三式減第二式。則 $2x+6y=12$。 即 $x+3y=6$。

$\therefore$ $(x+3y)-(x+2y)=6-3$。 $\therefore$ $y=3$, $x=-3$, $z=1$。

12. $x+y+z=1$。 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+4z=1$。 $\frac{5}{3}x+\frac{3}{4}y-\frac{z}{2}=1$。

〔解〕 變第二式。爲 $2x+y+16z=4$。變第三式。爲 $20x+9y-6z=12$。乃於第二式減第一式。則 $x+15z=3$。又以 9 乘第二式，而於第三式減去之。則 $2x-150z=-24$。 即 $x-75z=-12$。

$\therefore$ $(x+15z)-(x-75z)=3-(-12)$。 即 $90z=15$。

由是 $z=\frac{1}{6}$，$x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{3}$。

13. $x+2y+3z=3x+y+2z=2x+3y+z=6$。 〔答 $x=y=z=1$〕

14. $y+z=2a$, $z+x=2b$, $x+y=2c$。

〔解〕 $(y+z)+(z+x)-(x+y)=2a+2b-2c$。 即 $2z=2a+2b-2c$。

由是 $z=a+b-c$, $x=b+c-a$, $y=c+a-b$。

15. $y+z-x=2a,\quad z+x-y=2b,\quad x+y-z=2c$。

〔解〕於第一加第二，則 $2z=2a+2b$。

由是 $z=a+b,\quad x=b+c,\quad y=c+a$。

16 $y+z-3x=2a,\quad z+x-3y=2b,\quad x+y-3z=2c$。

〔解〕三方程式相加，得 $-x-y-z=2a+2b+2c$，

由此加第一式，則 $-4x=4a+2b+2c$。

$\therefore\quad x=-\frac{1}{2}(2a+b+c),\quad y=-\frac{1}{2}(2b+c+a),\quad z=-\frac{1}{2}(2c+a+b)$。

17. $ax+by+cz=1,\quad bx+cy+az=1,\quad cx+ay+bz=1$。

〔解〕第一第二式由減法得 $(a-b)x+(b-c)y+(c-a)z=0$。

第二第三式，由減法得 $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$。

用十文字之法，得

$$\frac{x}{(b-c)(a-b)-(c-a)^2}=\frac{y}{(c-a)(b-c)-(a-b)^2}=\frac{z}{(a-b)(c-a)-(b-c)^2}$$

此三分母，同為 $ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2$。故 $x=y=z$，

由是 $ax+bx+cx=1$。 $\therefore\quad x=y=z=\frac{1}{a+b+c}$。

18. $\frac{y+z-x}{b+c}=\frac{z+x-y}{c+a}=\frac{x+y-z}{a+b}=1$。

〔解〕 $\frac{(y+z-x)+(z+x-y)}{(b+c)+(c+a)}=1$。即 $\frac{2z}{a+b+2c}=1$。 $\therefore\quad z=\frac{1}{2}(a+b+2c)$。

19. $x+y+z=0,\quad ax+by+cz=1,\quad a^2x+b^2y+c^2z=a+b+c$。

〔解〕 $(a+b+c)(ax+by+cz)-(a^2x+b^2y+c^2z)=a+b+c-(a+b+c)$。

即 $a(b+c)x+b(c+a)y+c(a+b)z=0$。此式與第一用十文字之法，

得 $\frac{x}{b(c+a)-c(a+b)}=\frac{y}{c(a+b)-a(b+c)}=\frac{z}{a(b+c)-b(c+a)}$。

即 $\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=\frac{ax+by+cz}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$。

$\therefore$ 從第二 $\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=\frac{1}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$。

由是 $x=-\frac{a}{(a-b)(c-a)},\quad y=-\frac{b}{(b-c)(a-b)},\quad z=-\frac{c}{(c-a)(b-c)}$。

20. $x+y+z=a+b+c$, $bx+cy+az=bc+ca+ab$,

$cx+ay+bz=bc+ca+ab$。

〔解〕變三方程式爲順次得 $(x-a)+(y-b)+(z-c)=0$,

$b(x-a)+c(y-b)+a(z-c)=0$, $c(x-a)+a(y-b)+b(z-c)=0$。

由視察得 $x=a$, $y=b$, $z=c$。

21. $x+y+z=a+b+c$, $bx+cy+az=a^2+b^2+c^2$,

$cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2$。

〔解〕從第一 $(x-b)+(y-c)+(z-a)=0$。

從第二 $b(x-b)+c(y-c)+a(z-a)=0$。用十文字之法。得

$$\frac{x-b}{a-c}=\frac{y-c}{b-a}=\frac{z-a}{c-b}=\frac{c(x-b)+a(y-c)+b(z-a)}{c(a-c)+a(b-a)+b(c-b)}=\frac{cx+ay+bz-bc-ca-ab}{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}.$$

∴ 從第三 $\frac{x-b}{a-c}=\frac{y-c}{b-a}=\frac{z-a}{c-b}=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}=-1$。

由是 $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$。

22. $x+y+z=0$, $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=(b-c)(c-a)(a-b)$,

$bcx+cay+abz=0$。

〔解〕第一及第三用十文字之法。得

$$\frac{x}{ab-ca}=\frac{y}{bc-ab}=\frac{z}{ca-bc}。$$

即 $\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)}$。

從第二得 $\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=1$。

由是 $x=a(b=c)$, $y=b(c-a)$, $z=c(a-b)$。

23. $ax+by+cz=a$, $bx+cy+az=b$, $cx+ay+bz=c$。

〔解〕 $a(x-1)+by+cz=0$, $b(x+1)+cy+az=0$,

$c(x-1)+ay+bz=0$。 ∴ 由視察得 $x=1$, $y=z=0$。

24. $x-ay+a^2z-a^3=0$, $x-by+b^2z-b^3=0$, $x-cy+c^2z-c^3=0$。

〔解〕 在 $\lambda^3-z\lambda^2+y\lambda-x=0$ 式內。以 λ 代 a, b, c 爲能適合。

故 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)=0$。

即 $\lambda^3-(a+b+c)\lambda^2+(ab+bc+ca)\lambda-abc=0$。

∴ $z=a+b+c$, $y=ab+bc+ca$, $x=abc$。

25. $ax+by+cz=m,\quad a^2x+b^2y+c^2z=m^2,\quad a^3x+b^3y+c^3z=m^3$。

〔解〕 以c乘第一式而減第二式，則 $a(c-a)x+b(c-b)y=m(c-m)$，以c乘第二式而減第三式，則 $a^2(c-a)x+b^2(c-b)y=m^2(c-m)$。於此兩方程式。以b乘其前式而減後式，則

$$a(c-a)(b-a)x=m(c-m)(b-m)。\quad \therefore\quad x=\frac{m(c-m)(b-m)}{a(c-a)(b-a)}。$$

26. $ax+cy+bz=a^2+2bc,\quad cx+by+az=b^2+2ca,$
$bx+ay+cz=c^2+2ab$。

〔解〕 $a(x-a)+c(y-b)+b(z-c)=0,\quad c(x-a)+b(y-b)+a(z-c)=0,$
$b(x-a)+a(y-b)+c(z-c)=0$。

由視察，得 $x=a,\quad y=b,\quad z=c$。

27. $x+y+z=2a+2b+2c,\quad ax+by+cz=2bc+2ca+2ab,$
$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$。

〔解〕 $\{x-(b+c)\}+\{y-(c+a)\}+\{z-(a+b)\}=0$。
$a\{x-(b+c)\}+b\{y-(c+a)\}+c\{z-(a+b)\}=0$。
$(b-c)\{x-(b+c)\}+(c-a)\{y-(c+a)\}+(a-b)\{z-(a+b)\}=0$。

∴ 由視察，得 $x=b+c,\quad y=c+a,\quad z=a+b$。

28. $ax+by+cz=a+b+c,\quad a^2x+b^2y+c^2z=(a+b+c)^2$。
$bcx+cay+abz=0$。

〔解〕 $(a+b+c)(ax+by+cz)-(a^2x+b^2y+c^2z)=(a+b+c)^2-(a+b+c)^2$。

即 $a(b+c)x+b(c+a)y+c(a+b)z=0$。此式與第三式用十文字之法。得

$$\frac{x}{ca.c(a+b)+b(c+a)ab}=\frac{y}{ab.a(b+c)-c(a+b)bc}$$
$$=\frac{z}{bc.b(c+a)-a(b+c)ca},$$

即 $$\frac{x}{a(c-b)(ab+bc+ca)}=\frac{y}{b(a-c)(ab+bc+ca)}=\frac{z}{c(b-a)(ab+bc+ca)}.$$

即 $$\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=\frac{ax+by+cz}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)},$$

∴ 從第一 $$\frac{x}{a(b-c)}=\frac{y}{b(c-a)}=\frac{z}{c(a-b)}=\frac{a+b+c}{-(b-c)(c-a)(c-b)}.$$

由是 $x=-\dfrac{a(a+b+c)}{(c-a)(a-b)},\quad y=-\dfrac{b(a+b+c)}{(a-b)(b-c)},\quad z=-\dfrac{c(a+b+c)}{(b-c)(c-a)}.$

29. $x+y+z=l+m+n$, $lx+my+nz=mn+nl+lm$,

$(m-n)x+(n-l)y+(l-m)z=0$。

〔解〕變第一式。爲 $(x-m)+(y-n)+(z-l)=0$，

變第二式，爲 $l(x-m)+m(y-n)+(z-l)=0$。

故此兩方程式，$x=m$，$y=n$，$z=l$，爲能適合，而第三式亦爲 $(m-n)m+(n-l)n+(l-m)m=0$。

由是 m, n, l 爲 x, y, z 之根，

30 $lx+ny+mz=nx+my+lz=mx+ly+nz=l^3+m^3+n^3-3lmn$，

〔解〕三方程式相加，以 $m+n+l$ 除之，則

$x+y+z=3(m^2+n^2+l^2-mn-nl-lm)$ …………(A)

從第一減第二 $(l-n)x+(n-m)y+(m-l)z=0$，

從第二減第三 $(n-m)x+(m-l)y+(l-n)z=0$，

用十文字之法，得

$$\frac{x}{(n-m)(l-n)-(m-l)^2}=\frac{y}{(n-m)(m-l)-(l-n)^2}=\frac{z}{(l-n)(m-l)-(n-m)^2}。$$

此各分母同爲 $mn+ln+ml-m^2-n^2-l^2$。故 $x=y=z$。

由是從(A)得 $x=y=z=m^2+n^2+l^2-mn-nl-lm$，

31. $l^2x+m^2y+n^2z=lmx+mny+nlz=nlx+lmy+mnz=l+m+n$，

〔解〕 $l(lx-1)+m(my-1)+n(nz-1)=0$，

$m(lx-1)+n(my-1)+l(nz-1)=0$，

$n(lx-1)+l(my-1)+m(nz-1)=0$。

由視察，得 $lx=my=nz=1$，

32 $\frac{x}{a+\alpha}+\frac{y}{a+\beta}+\frac{z}{a+\gamma}=1$， $\frac{x}{b+\alpha}+\frac{y}{b+\beta}+\frac{z}{b+\gamma}=1$，

$\frac{x}{c+\alpha}+\frac{y}{c+\beta}+\frac{z}{c+\gamma}=1$。

〔解〕設 $\frac{x}{\lambda+\alpha}+\frac{y}{\lambda+\beta}+\frac{z}{\lambda+\gamma}=1$，以 λ 之值，代 a, b, c，變此方程式，爲

$$\lambda^3-\lambda^2(x+y+z-\alpha-\beta-\gamma)+\lambda\{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-x(\beta+\gamma)-y(\gamma+\alpha)-z(\alpha+\beta)\}$$
$$-(\beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta z-\alpha\beta\gamma)=0。$$

又 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)=0$。

即 $\lambda^3-\lambda^2(a+b+c)+\lambda(ab+bc+ca)-abc=0$。

此兩方程式，比較其係數，則

$$x+y+z-\alpha-\beta-\gamma=a+b+c \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha-x(\beta+\gamma)-y(\gamma+\alpha)-z(\alpha+\beta)=ab+bc+ca \quad\cdots\cdots(2)$$

$$\beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta z-\alpha\beta\gamma=abc \quad\cdots\cdots(3)$$

以 $(\alpha+\beta)$ 乘 (1) 加 (2) 則

$$(\alpha-\gamma)x+(\beta-\gamma)y=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+(\alpha+\beta)(a+b+c)+ab+bc+ca \quad\cdots(4)$$

以 $\alpha\beta$ 乘 (1) 減 (3)。則

$$\beta(\alpha-\gamma)x+\alpha(\beta-\gamma)y=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta(a+b+c)-abc \quad\cdots\cdots(5)$$

以 α 乘 (4) 減 (5)。則

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)x=\alpha^3+\alpha^2(a+b+c)+\alpha(ab+bc+ca)+abc,$$

$$\therefore \quad x=\frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)}{(\alpha+\gamma)(\alpha-\beta)}。$$

33. $y+z+w=a,\quad z+w+x=b,\quad w+x+y=c,\quad x+y+z=d$。

〔解〕四方程式相加。則 $3(x+y+z+w)=a+b+c+d$ ……(A)

(A) 從第一則 $3(x+a)=a+b+c+d$。 $\therefore\ x=\frac{1}{3}(b+c+d-2a)$。

(A) 從第二則 $3(y+b)=a+b+c+d$。 $\therefore\ y=\frac{1}{3}(a+c+d-2b)$。

(A) 從第三則 $3(z+c)=a+b+c+d$。 $\therefore\ z=\frac{1}{3}(a+b+d-2c)$。

(A) 從第四則 $3(w+d)=a+b+c+d$。 $\therefore\ w=\frac{1}{3}(a+b+c-2d)$。

34. $x+ay+a^2z+a^3w+a^4=0,\qquad x+by+b^2z+b^3w+b^4=0,$

$x+cy+c^2z+c^3w+c^4=0,\quad x+dy+d^2z+d^3w+d^4=0$。

〔解〕在 $\lambda^4+\lambda^3w+\lambda^2z+\lambda y+x=0$, λ 之四根爲 a, b, c, d。

故 $(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)(\lambda-d)=0$。

即 $\lambda^4-\lambda^3(a+b+c+d)+\lambda^2(ab+bc+ca+ad+bd+cd)$,

$$-\lambda(abc+abd+bcd+cad)+abcd=0。$$

比較此兩方程式之係數。則

$w=-(a+b+c+d),\quad z=ab+bc+ca+ab+bd+cd,$

$y=-(abc+abd+bcd+cad),\quad x=abcd,$

二次通同方程式

147. 二次通同方程式 此處先論二次通同方程式。然後再解高於二次之通同方程式。

〔第一類〕含二未知數量之兩方程式。其一爲二次式。一爲一次式。

例如 $3x+2y=7$, $3x^2-2y^2=25$, 試解之。

從第一式 $x=\frac{7-2y}{3}$。以此代入第二式。則得 $3\left(\frac{7-2y}{3}\right)^2-2y^2=25$。

由是 $y^2+14y+13=0$。 則 $(y+13)(y+1)=0$。

$\therefore$ $y=-1$ 或 $=-13$,

$y=-1$。則 $x=\frac{7-2(-1)}{3}=3$, $y=-13$, 則 $x=\frac{7-2(-13)}{3}=11$,

依上例凡兩方程式。其一爲一次式。一爲二次式。則在一次式內。以其一未知數量表他一未知數量。以代入第二之方程式內。則得他一未知數量之二次式。而二未知數量。均能依此求得之。

今示以公式如下

$$lx+my+n=0,$$
$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

從第一式。則 $x=-\frac{my+n}{l}$。以此代於第二式。則

$$a\left(\frac{my+n}{l}\right)^2-b\left(\frac{my+n}{l}\right)y+cy^2-d\left(\frac{my+n}{l}\right)+ey+f=0,$$

即 $y^2(am^2-bml+cl^2)+y(2anm-bnl-dml+el^2)+an^2-ndl+l^2f=0$。

即得 y 之二次式。由此先求得 y。而 x 之值亦易求得矣。

148. 任意之二次兩方程式 兩方程式均爲二次。則消去一未知數量。即爲他一未知數量之四次方程式。非前章之法所能解。

例如 $ax^2+bx+c=y$, $x^2+y^2=d$。

用第一式之 y 代於第二式。則

$$x^2+(ax^2+bx+c)^2=d,$$

即爲 x 之四次式。

149. 〔第二類〕 兩方程式。爲二次之等次式。則恆能解之。惟此例必消去已知數量之項。

例如 $ax^2+bxy+cy^2=d$, $a'x^2+b'xy+c'y^2=d'$。

d'乘第一式。d乘第二式相減。則

$d'(ax^2+bxy+cy^2)-d(a'x^2+b'xy+c'y^2)=dd'-dd'$。

即 $(ad'-a'd)x^2+(bd'-b'd)xy+(cd'-c'd)y^2=0$。

此方程式由81章可分割爲一次兩因子。如 $lx+my=0$ 之形。然亦可用第一類之法解之.

〔例〕解 $y^2-xy=15,\quad x^2+xy=14,$

$14(y^2-xy)-15(x^2+xy)=14\times15-15\times14,$

即 $15x^2+29xy-14y^2=0$。 $\therefore\ (5x-2y)(3x+7y)=0$。

由是 $5x-2y=0$。 或 $3x+7y=0$。

$5x-2y=0$。 即 $x=\frac{2}{5}y$。從第一式 $y^2-\frac{2}{5}y^2=15$.

$\therefore\ y=\pm5$。 $x=\pm2$。

$3x+7y=0$ 即 $x=-\frac{7}{3}y$。從第一式 $y^2+\frac{7}{3}y^2=15$。

$\therefore\ y=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$， $x=\mp\frac{7}{\sqrt{2}}$。

由是 $x=2,y=5$。 或 $x=-2,y=-5$。 或 $x=-\frac{7}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{3}{\sqrt{2}}$，

或 $x=\frac{7}{\sqrt{2}},\quad y=-\frac{3}{\sqrt{2}}$.

150. 特別之法 前設兩類之外。尚有特別類之方程式亦能解之。

〔第一例〕解 $x-y=2,\quad xy=15$。

以第一式平方之。加第二式之四倍。則

$(x-y)^2+4xy=2^2+4\times15$。 即 $(x+y)^2=64$。

$\therefore\ x+y=\pm8$。與 $x-y=2$ 相加或減。得

$x=\frac{\pm8+2}{2}=5$, 或 -3, $y=\frac{\pm8-2}{2}=3$, 或 -5。

由是 $x=5,\quad y=3$, 或 $x=-3,\quad y=-5$。

〔第二例〕解 $x^2+xy+y^2=a^2,\quad x^4+x^2y^2+y^4=b^4$。

以第一式除第二式。則 $x^2-xy+y^2=\frac{b^4}{a^2}$。從第一式減去此式。則

$2xy=a^2-\frac{b^4}{a^2}$。 ∴ $xy=\frac{a^4-b^4}{2a^2}$。

由是 $(x^2+xy+y^2)+xy=a^2+\frac{a^4-b^4}{2a^2}$。 ∴ $x+y=\pm\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{2a^2}}$。

及 $(x^2-xy+y^2)-xy=\frac{b^4}{a^2}-\frac{a^4-b^4}{2a^2}$。 ∴ $x-y=\pm\sqrt{\frac{3b^4-a^4}{2a^2}}$。

∴ $x=\frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{2a^2}}\pm\sqrt{\frac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right\}$，$y=\frac{1}{2}\left\{\pm\sqrt{\frac{3a^4-b^4}{2a^2}}\mp\sqrt{\frac{3b^4-a^4}{2a^2}}\right\}$。

〔第三例〕解 $x^2-2y^2=4y$， $3x^2+xy-2y^2=16y$。以 4 乘第一式減去第二式。則得 $x^2-xy-6y^2=0$。

即 $(x-3y)(x+2y)=0$。 ∴ $x=3y$， 或 $x=-2y$。

$x=3y$。則從第一式得 $9y^2-2y^2=4y$。 ∴ $y=0$， 或 $\frac{4}{7}$。

$x=-2y$。則從第一式得 $4y^2-2y^2=4y$。 ∴ $y=0$， 或 2。

由是 $x=y=0$， 或 $x=-4$， $y=2$， 或 $x=\frac{12}{7}$。 $y=\frac{4}{7}$，

〔第四例〕解 $x^2+y^2=(x+y+1)^2$， $x^2+y^2=(x-y+2)^2$

$(x+y+1)^2=(x-y+2)^2$。 ∴ $x+y+1=\pm(x-y+2)$。

∴ $2y=1$， 即 $y=\frac{1}{2}$， 或 $2x=-3$， 即 $x=-\frac{3}{2}$。

$y=\frac{1}{2}$。 則 $x^2+\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2}+1)^2$。 ∴ $x=-\frac{2}{3}$。

$x=-\frac{3}{2}$。 則 $\frac{9}{4}+y^2=(-\frac{3}{2}+y+1)^2$。 ∴ $y=-2$。

〔第五例〕解 $x+y=2b$， $x^4+y^4=2a^4$。

令 $x=b+z$。 則從第一式 $y=b-z$，

由是第二式變爲 $(b+z)^4+(b-z)^4=2a^4$。

即 $z^4+6b^2z^2+b^4=a^4$。

∴ $z=\pm\sqrt{\{-3b^2\pm\sqrt{(8b^4+a^4)}\}}$，

$x=b\pm\sqrt{\{-3b^2\pm\sqrt{(8b^4+a^4)}\}}$，

$y=b\mp\sqrt{\{-3b^2\pm\sqrt{(8b^4+a^4)}\}}$。

例題十三

解以下之各方程式。

1. $x+y=x^2-y^2=23$。 〔答 $x=12,\ y=11$。〕

〔解〕以 $x+y=23$。除 $x^2-y^2=23$。則 $x-y=1$。

2. $x^2-4y^2+x+3y=2x-y=1$。

〔解〕$y=2x-1$。 $\therefore\ x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)=1$，

即 $15x^2-23x+8=0$。 即 $(x-1)(15x-8)=0$。

$\therefore\ x=1,\ \ y=1,$ 或 $x=\frac{8}{15},\ \ y=\frac{1}{15}$.

3. $x^2+xy=12,\qquad xy-2y^2=1$。

〔解〕$(x^2+xy)-12(xy-2y^2)=12-12$，即 $x^2-11xy+24y^2=0$，

即 $(x-3y)(x-8y)=0$。 $\therefore\ x=3y$，或 $8y$，

若 $x=3y$。則 $(3y)^2+3y^2=12$， $\therefore\ y=\pm1,\ \ x=\pm3$，

若 $x=8y$。則 $(8y)^2+8y^2=12$， $\therefore\ y=\pm\sqrt{\frac{1}{6}},\qquad x=\pm8\sqrt{\frac{1}{6}}$。

4. $x^2+2y^2=22,\ 3y^2-xy-x^2=17$，

答 $\pm2,\ \pm3$，或 $\pm\frac{16}{9}\sqrt{3}$，或 $\mp\frac{13}{9}\sqrt{3}$。

5. $x-y=5,\quad \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{5}{84}$，

〔解〕變第二式。爲 $x-y=\frac{5}{84}xy$。 $\therefore$ 從第一得 $5=\frac{5}{84}xy$。

即 $xy=84,\qquad (x-y)^2+4xy=5^2+4\times84$。 即 $x+y=\pm19$，

從 $x+y=\pm19$。及 $x-y=5$。得 $x=12,\ y=7$，或 $x=-7,\ y=-12$，

6. $x+y=a+b,\ \frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=1$， 〔答 $a,\ b$ 或 $2a-b,\ 2b-a$。〕

〔解〕由視察得 $x=a,\ y=b$，兩方程式爲適合。

又去第二式之分母而括之，則 $(a-b)(x-y)+xy=a^2+b^2-ab$，

從第一式得 $y=a+b-x$，

$\therefore\quad (a-b)(x-a-b+x)+x(a+b-x)=a^2+b^2-ab$。

則 $x^2-x(3a-b)-ab+2a^2=0$。 $\therefore$ x二根之和爲 $3a-b$。

由是 $x=(3a-b)-a=2a-b$。 $\therefore\ y=2b-a$。

7. $a(x+y)=b(x-y)=xy$。 答 $0,0$ 或 $\frac{2ab}{b-a},\ \frac{2ab}{b+a}$。

〔解〕由視察得 $x=y=0$。

又各以xy除之，則 $\frac{a}{y}+\frac{a}{x}=1,\ \frac{b}{y}-\frac{b}{x}=1$ 由此得 x, y。

8. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{a^2},\ \frac{1}{y^2}+\frac{1}{yx}=\frac{1}{b^2}$。

〔解〕兩方程式相加，開平方。則 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\pm\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{ab}$。

從第一式 $a^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=x$。 $\therefore\ x=\pm\frac{a\sqrt{(a^2+b^2)}}{b}$。

從第二式 $b^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=y$。 $\therefore\ y=\pm\frac{b\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}$。

9. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=10,\ \frac{ab}{xy}=3$。 答 $\pm\frac{a}{3},\ \pm b$ 或 $\pm a,\ \pm\frac{b}{3}$。

〔解〕 $\left(\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}\right)+2\frac{ab}{xy}=10+2\times3$。 $\therefore\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\pm4$。

又 $\left(\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}\right)-2\frac{ab}{xy}=10-2\times3$。 $\therefore\ \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=\pm2$。

$\therefore\ \frac{2a}{x}=(\pm4)+(\pm2)=\pm6$, 或 ±2。 $\therefore\ x=\pm\frac{a}{3}$ 或 $\pm a$。

10. $x+y=2a,\quad x^3+y^3=2b^3$。

〔解〕以第一式除第二式，則 $x^2-xy+y^2=\frac{b^3}{a}$。

$\therefore\ (x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=(2a)^2-\frac{b^3}{a}$。即 $xy=\frac{4a^3-b^3}{3a}$。

又 $(x^2-xy+y^2)-xy=\frac{b^3}{a}-\frac{4a^3-b^3}{3a}$。 $\therefore\ x-y=\pm\sqrt{\frac{4b^3-4a^3}{3a}}$。

由是 $x=a\pm\sqrt{\frac{b^3-a^3}{3a}}$。 $y=a\mp\sqrt{\frac{b^3-a^3}{3a}}$。

11. $x^2-xy+y^2=109$, $x^4+x^2y^2+y^4=4251$。

〔解〕以第一式除第二式。則 $x^2+xy+y^2=39$，從此式減第一式。則 $2xy=-70$。 即 $xy=-35$，

$\therefore$ $(x^2+xy+y^2)+xy=39+(-35)$。 $\therefore$ $x+y=\pm 2$，

又 $(x^2-xy+y^2)-xy=109-(-35)$。 $\therefore$ $x-y=\pm 12$。

由是 $x=\pm 7$, $y=\mp 5$, 或 $x=\pm 5$, $y=\mp 7$。

12. $x^2+xy+y^2=133$, $x+\sqrt{xy}+y=19$。

〔解〕以第二式除第一式。則 $x-\sqrt{xy}+y=7$。從第二式減此式，則 $2\sqrt{xy}=12$。 即 $xy=36$。

$\therefore$ $(x^2+xy+y^2)+xy=133+36$。 $\therefore$ $x+y=\pm 13$，

又 $(x^2+xy+y^2)-3xy=133-3\times 36$， $\therefore$ $x-y=\pm 5$。

由是 $x=\pm 9$, $y=\pm 4$, 或 $x=\pm 4$, $y=\pm 9$。

13。 $x+y=72$, $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6$。 〔答 64, 8 或 8, 64。〕

〔解〕求第二式之立方。則 $x+y+3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})=216$，

$\therefore$ 從第一式 $72+3\sqrt[3]{xy}(6)=216$。 $\therefore$ $xy=512$。

14. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$, $xy+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=8$。 〔答 $-6\pm\sqrt{30}$, $6\mp\sqrt{30}$。〕

於第二式減第一式。則 $xy=6$。 又第一式爲 $y+x=2xy$，

$\therefore$ $y+x=12$，

15. $x+y=1$, $x^5+y^5=31$，

〔解〕以第一式除第二式。則 $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=31$。

從 $(x+y)^4=1$ 減此式。則 $5x^3y+5x^2y^2+5xy^3=-30$，

即 $x^2+xy+y^2=\dfrac{-6}{xy}$。 從 $(x+y)^2=1$ 減此式。則

$xy=1+\dfrac{6}{xy}$, 即 $x^2y^2-xy-6=0$。 $\therefore$ $xy=3$, 或 $xy=-2$。

從 $x+y=1$, $xy=-2$，求 x 及 y。則

$\dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{-11})$, $\dfrac{1}{2}(-1\mp\sqrt{-11})$, 或 2, −1, 或 −1, 2，

16. $x^2+y^2+3xy-4(x+y)+3=0$。 $xy+2(x+y)-5=0$。

〔解〕從第一式減第二式而括之。則 $(x+y)^2-6(x+y)+8=0$。

即 $(x+y-4)(x+y-2)=0$。 $\therefore$ $x+y=4$, 或 $x+y=2$。

由是從第二式 $xy=5-2(x+y)$。即 $xy=-3$, 或 $xy=1$。

從 $x+y=4$, $xy=-3$。 $\therefore$ $x=2\pm\sqrt{7}$, $y=2\mp\sqrt{7}$。

從 $x+y=2$, $xy=1$, $x=y=1$。

17. $x^2+xy+x=14$, $y^2+xy+y=28$。 答 2, 4, 或 $-\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}$。

〔解〕兩方程式相加,則 $(x+y)^2+(x+y)=42$, $\therefore$ $x+y=6$, 或 -7。

從第一式 $x=\frac{14}{x+y+1}=\frac{14}{6+1}=2$, 或 $x=\frac{14}{-7+1}=-\frac{7}{3}$。

18. $x^3+y^3=9$, $x^2-xy+y^2=3$。 〔答 2, 1, 或 1, 2〕

〔解〕以第二式除第一式,則 $x+y=3$。

又 $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=3^2-3$。即 $3xy=6$。 $\therefore$ $xy=2$。

19. $x(y-b)=y(x-a)=2ab$。 答 $2a, 2b$, 或 $-a, -b$。

20. $x+\frac{1}{y}=1$, $y+\frac{1}{x}=4$。

〔解〕 $xy+1=y$, $xy+1=4x$。 $\therefore$ $y=4x$。

由是從第二 $4x^2+1=4x$。 $\therefore$ $x=\frac{1}{2}$, $y=2$。

21. $ax+by=2ab$, $\frac{a}{y}+\frac{b}{x}=2$。

〔解〕從第二式 $ax+by=2xy$。 $\therefore$ 從第一式 $xy=ab$。

又 $(ax+by)^2-4abxy=(2ab)^2-4ab(ab)$。則 $ax-by=0$。

從 $ax+by=2ab$, 及 $ax-by=0$。 $\therefore$ $x=b$, $y=a$。

22. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$。

答 6, 6, 或 $-\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{5})$, $-\frac{3}{2}(1\mp\sqrt{5})$。

〔解〕去分母。則 $x^3+y^3=12xy$, $x+y=\frac{1}{3}xy$。

由除法得 $x^2-xy+y^2=36$。

又 $(x+y)^2-(x^2-xy+y^2)=\left(\frac{1}{3}\times xy\right)^2-36$。

卽　$3xy=\frac{1}{9}x^2y^2-36$。　∴　$x^2y^2-27xy-324=0$。

∴　$xy=36$, 或 -9。

23. $\frac{x^3}{y}+xy=a^2$, $\frac{y^3}{x}+xy=b^2$。　〔答　$\pm a\sqrt{\frac{\pm ab}{a^2+b^2}}$, $\pm b\sqrt{\frac{\pm ab}{a^2+b^2}}$。〕

〔解〕 $x(x^2+y^2)=a^2y$, $y(y^2+x^2)=b^2x$。

由除法。得 $\frac{x}{y}=\frac{a^2y}{b^2x}$。　∴　$x=\pm\frac{a}{b}y$。

∵　從第二式 $y\left(y^2+\frac{a^2}{b^2}y^2\right)=\pm aby$。　∴　$y=0$, 或 $\pm b\sqrt{\frac{\pm ab}{a^2+b^2}}$。

24. $xy-\frac{x}{y}=a$, $xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{a}$。　〔答　$\pm\frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}$, $\pm\sqrt{1+a^2}$。〕

〔解〕 $(xy-a)\left(xy-\frac{1}{a}\right)=\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}$。　卽　$x^2y^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)xy+1=1$。

卽　$xy=a+\frac{1}{a}$。　又從第一式 $\frac{x}{y}=xy-a=a+\frac{1}{a}-a=\frac{1}{a}$。

由是 $xy\times\frac{x}{y}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\frac{1}{a}$。　∴　$x=\pm\frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}$。

25. $x+y+\frac{y^2}{x}=14$, $x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}=84$。　〔答　2, 4, 或 8, 4。〕

〔解〕 $x^2+xy+y^2=14x$。　$x^4+x^2y^2+y^4=84x^2$。

由除法 $x^2-xy+y^2=6x$。　從第一式減此式。卽得 $2xy=8x$。

∴　$y=4$, $x^2+4x+16=14x$。　∴　$x=2$, 或 $x=8$。

26. $x+y=6$, $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440$。

〔解〕 從第二式 $\{(x+y)^2-2xy\}\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}=1440$。

∴　從第一式 $\{36-2xy\}\{216-18xy\}=1440$。

卽　$x^2y^2-30xy+176=0$。　∴　$xy=8$ 或 22。

從 $xy=8$, $x+y=6$。　故　$x=4$, $y=2$, 或 $x=2$, $y=4$。

又從 $xy=22$ 及 $x+y=6$。　故　$x=3\pm\sqrt{-13}$, $y=3\mp\sqrt{-13}$。

27. $x+y=8xy$, $x^2+y^2=40x^2y^2$。

〔解〕 $(x+y)^2-(x^2+y^2)=(8xy)^2-40x^2y^2$。　卽　$12x^2y^2-xy=0$。

∴　$xy=0$ 或 $\frac{1}{12}$。　由是 $x+y=0$ 或 $\frac{2}{3}$。

從 $xy=0,\quad x+y=0,\quad x=y=0$。

又從 $xy=\frac{1}{12},\quad x+y=\frac{2}{3}$。 $\therefore\quad x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{6}$，或 $x=\frac{1}{6},\quad y=\frac{1}{2}$。

28. $x^2-xy=8x+3,\quad xy-y^2=8y-6$。 答 $3,\ -\frac{1}{6}$，或 $-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$。

〔解〕從第一式減第二式，則 $x^2-2xy+y^2=8(x-y)+9$。

即 $(x-y)^2-8(x-y)-9=0$， $\therefore\quad x-y=9$，或 -1。

若 $x-y=9$。則從第一式，得 $x(x-y)=8x+3$。

即 $9x=8x+3$。 $\therefore\quad x=3$。若 $x-y=-1$。則從第一式 $-x=8x+3$。

即 $x=-\frac{1}{3}$。

29. $\frac{x+y}{1-xy}=3,\quad \frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{3}$。

〔解〕 $x+y=3(1-xy),\quad x-y=\frac{1}{3}(1+xy)$。

由是 $(x+y)^2-(x-y)^2=9(1-xy)^2-\frac{1}{9}(1+xy^2)$。 即 $2x^2y^2-5xy+2=0$。

$\therefore\quad xy=2$，或 $\frac{1}{2}$，從第一式 $x+y=3$，或 $\frac{3}{2}$。

從第二式 $x-y=1$，或 $\frac{1}{2}$。 $\therefore\quad x=-1,\ y=-2$，或 $x=1,\ y=\frac{1}{2}$。

30. $x-y=a(x^2-y^2),\quad x+y=b(x^2-y^2)$。

〔解〕從第一式 $x-y=0$， 或 $1=a(x+y)$，

　　從第二式 $x+y=0$， 或 $1=b(x-y)$，

由是 $x=0,\quad y=0,\quad x=\frac{a+b}{2ab},\quad y=\frac{b-a}{2ab}$。

31. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b},\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}$。

〔解〕 $2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=2\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)-\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2$。

即 $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)^2$。 $\therefore\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$，或 $-\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$。

從 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b},\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$。 則 $x=b,\ y=a$。

又從 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=-\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$, 則 $x=\frac{a^2}{b}$, $y=\frac{b^2}{a}$。

32. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{y}{b}+\frac{b}{y}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$。

(解) 從第一式 $\frac{bx-ay}{ab}=\frac{bx-ay}{xy}$, $\therefore$ $bx-ay=0$ (1)。或 $ab=xy$ (2)。

從第二式 $\frac{y(x-b)}{bx}=\frac{x-b}{y}$, $\therefore$ $x-b=0$ (3)。或 $bx=y^2$ (4)。

從(1)(3)則 $x=b, y=\frac{b^2}{a}$。　從(1)(4), 則 $x=b\frac{a^2}{b}, y=a$。

從(2)(3)則 $x=b, y=a$,　從(2)(4)。則 $x=\sqrt[3]{a^2b}$, $y=\sqrt[3]{ab^2}$。

[注意] (1)(2)及(3)(4)。不能於同時成立。

151. 解諸未知數量之通同方程式。含二未知數量之二次通同方程式。有一二之定則。已述於前。至未知數量在三個以上者。原無一定之解法。茲特舉其特別之例。解之如下。俾其他例題可以準此類推。

[第一例]

解 $\begin{cases}(x+y)(x+z)=a^2 \ldots\ldots(1)\\(y+z)(y+x)=b^2 \ldots\ldots(2)\\(z+x)(z+y)=c^2 \ldots\ldots(3)\end{cases}$

(2)式及(3)式之積。以(1)式除之, 則得

$(y+z)^2=\frac{b^2c^2}{a^2}$。 $\therefore$ $y+z=\pm\frac{bc}{a}$。同法得 $z+x=\pm\frac{ca}{b}$, $x+y=\pm\frac{ab}{c}$。

由是 $(y+z)+(z+x)-(x+y)=\pm\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}-\frac{ab}{c}\right)$。

即 $z=\pm\frac{b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2}{2abc}$。

同法 $x=\pm\frac{c^2a^2+a^2b^2-b^2c^2}{2abc}$, 及 $y=\pm\frac{a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2}{2abc}$。

[第二例]

解 $\begin{cases}x(y+z)=a \ldots\ldots(1)\\y(z+x)=b \ldots\ldots(2)\\z(x+y)=c \ldots\ldots(3)\end{cases}$

從(1)(2)兩式之和減去(3)式，則得 $2xy=a+b-c$。

同法 $2yz=b+c-a$，$2zx=c+a-b$，

$\therefore \quad \dfrac{2xy(2zx)}{2yz}=\dfrac{(a+b-c)(c+a-b)}{b+c-a}$。即 $x=\pm\sqrt{\dfrac{(a+b-c)(c+a-b)}{2(b+c-a)}}$.

同法 $y=\pm\sqrt{\dfrac{(b+c-a)(a+b-c)}{2(c+a-b)}}$，及 $z=\pm\sqrt{\dfrac{(c+a-b)(b+c-a)}{2(a+b-c)}}$。

〔第三例〕 解 $\begin{cases} x^2+2yz=a \dotfill (1) \\ y^2+2zx=a \dotfill (2) \\ z^2+2xy=b \dotfill (3) \end{cases}$

此三方程式相加開平方。則得 $x+y+z=\pm\sqrt{(2a+b)}$ ...(4)

從(1)式減(2)式。則 $(x-y)(x+y-2z)=0$。

$$\therefore \quad x-y=0 \dotfill (5)$$

或 $$x+y-2z=0 \dotfill (6)$$

(I) 從(5)式 $x=y$。 $\therefore$ 從(4)式 $2x+z=\pm\sqrt{(2a+b)}$。

又從(2)式減(3)式，則 $y^2+2zx-z^2-2xy=a-b$，

$\therefore$ 從(5)式 $x^2-2zx+z^2=b-a$。 $\therefore$ $x-z=\pm\sqrt{(b-a)}$，

由是 $x=y=\dfrac{1}{3}\{\pm\sqrt{2a+b}\mp\sqrt{b-a}\}$。

$$z=\frac{1}{3}\{\pm\sqrt{2a+b}\pm2\sqrt{b-a}\}.$$

(II) 從(6)式。$x+y=2z$。

$\therefore$ 從(4)式。$z=\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{(2a+b)}$， 及 $x+y=\pm\dfrac{2}{3}\sqrt{(2a+b)}$。

又 從(2)式。$y^2+x(x+y)=a$。

由是 $x=\pm\sqrt{\dfrac{a-b}{3}\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{2a+b}}$。 $y=\mp\sqrt{\dfrac{a-b}{3}\pm\dfrac{1}{3}\sqrt{2a+b}}$，

〔第四例〕 解 $b^2z+c^2y=c^2x+a^2z=a^2y+b^2x=xyz$，

$a^2(b^2z+c^2y)+b^2(c^2x+a^2z)-c^2(a^2y+b^2x)=(a^2+b^2-c^2)xyz$，

即 $2a^2b^2z=(a^2+b^2-c^2)xyz$。

$\therefore \quad z=0$， 或 $xy=\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2-c^2}$。

同法 $x=0$, 或 $yz=\dfrac{2b^2c^2}{b^2+c^2-a^2}$。

$y=0$, 或 $zx=\dfrac{2c^2a^2}{c^2+a^2-b^2}$。

由是可如第二例求 x, y, z。

〔第五例〕解 $x^2-yz=a$。 $y^2-zx=b$。 $z^2-xy=c$。

$(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)=a^2-bc$。

即 $x(x^3+y^3+z^3-3xyz)=a^2-bc$。

同法 $\dfrac{x}{a^2-bc}=\dfrac{y}{b^2-ca}=\dfrac{z}{c^2-ab}=\dfrac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz}$。

$\therefore\quad \dfrac{x^2}{(a^2-bc)^2}=\dfrac{yz}{(b^2-ca)(c^2-ab)}=\dfrac{x^2-yz}{(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)}$。

$\therefore\quad \dfrac{x^2}{(a^2-bc)^2}=\dfrac{a}{a(a^3+b^3+c^3-3abc)}$。

$\therefore\quad x=\dfrac{a^2-bc}{\pm\sqrt{(a^3+b^3+c^3-3abc)}}$。

〔第六例〕 解 $\begin{cases} x+y+z=a+b+c \dots\dots(1) \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \dots\dots(2) \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=3 \dots\dots(3) \end{cases}$

由視察可知 $x=a, y=b, z=c$。

又從(1)式。得 $(x-a)+(y-b)+(z-c)=0$。

及從(3)式。得 $\dfrac{1}{a}(x-a)+\dfrac{1}{b}(y-b)+\dfrac{1}{c}(z-c)=0$。

即 $bc(x-a)+ca(y-b)+ab(z-c)=0$。

(1)式及(3)式。變如上之方程式。用十文字之法。則

$$\frac{x-a}{a(b-c)}=\frac{y-b}{b(c-a)}=\frac{z-c}{c(a-b)}=K。$$

$\therefore\quad K^2=\dfrac{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}$。

$=\dfrac{x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2-2(ax+by+cz)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}$。

$\therefore$ 從(2)式。$K^2=\dfrac{-2(ax+by+cz-a^2-b^2-c^2)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}\dots\dots(4)$

又 $$K=\frac{a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}。$$

$$=\frac{ax+by+cz-a^2-b^2-c^2}{-(a-b)(b-c)(c-a)}\text{ ....}(5)$$

以(5)式除(4)式，則 $K=\frac{2(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}$。

$$\therefore\quad \frac{x-a}{a(b-c)}=\frac{y-b}{b(c-a)}=\frac{z-c}{c(a-b)}=\frac{2(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2}。$$

〔第七例〕解下之方程式。

$$x+y+z=6,$$
$$yz+zx+xy=11。$$
$$xyz=6,$$

此三方程式，依129章三次方程式之關係式可解。

如含 x, y, z 三根之三次方程式，其未知數爲 λ。則

$(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$。

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$。

從上之三方程式，則此三次方程式，爲

$$\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0。$$

$$\therefore\quad (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0。$$

$\therefore\ \lambda=1, 2,$ 或 3。 $\therefore\ x=1,\ y-2,\ z=3$。

而原方程式爲 x, y, z 之等勢式，故

$x=1,\ y=2,\ z=3$。

或 $x=1,\ y=3,\ z=2$。

或 $x=2,\ y=1,\ z=3$。

或 $x=2,\ y=3,\ z=1$。

或 $x=3,\ y=2,\ z=1$。

或 $x=3,\ y=1,\ z=2$。

〔第八例〕解下之方程式。

$x+y+z=a,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a},\quad yz+zx+xy=-c^2$。

從第二式得 $a(yz+zx+xy)=xyz$。 $\therefore$ 從第三式 $xyz=-ac^2$。

依前法λ之三根，爲x, y, z。則其方程式，爲$(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$。

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$。

即 $\lambda^3-a\lambda^2-c^2\lambda+ac^2=0$。

即 $(\lambda-a)(\lambda-c)(\lambda+c)=0$。 $\therefore\ \lambda=a,\ c,\ -c$。

由是x, y, z之值，爲$a,\ c,\ -c$。

〔第九例〕解下之方程式。

$$x^2(y-z)=a^2(b-c),$$
$$y^2(z-x)=b^2(c-a),$$
$$z^2(x-y)=c^2(a-b).$$

由加法得$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$，

$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b),$$

即 $(y-z)(z-x)(x-y)=(b-c)(c-a)(a-b)$ ....(A)

又 由乘法得$x^2(y-z)y^2(z-x)z^2(x-y)=a^2(b-c)b^2(c-a)c^2(a-b)$，

即 $x^2y^2z^2(y-z)(z-x)(x-y)=a^2b^2c^2(b-c)(c-a)(a-b)$...............(B)

從 (A) (B) 兩式，$x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$， $\therefore\ xyz=\pm abc$...............(C)

又從第一第二兩式，$a^2(b-c)y+b^2(c-a)x=x^2y(y-z)+y^2x(z-x)$

$$=xyz(y-x).$$

$\therefore$ 從 (C) 式，$a^2(b-c)y+b^2(c-a)x=\pm abc(y-x)$，

即 $bx(bc-ab\pm ca)=ay(ca-ab\pm bc)$，

由是 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$， 或 $\dfrac{x(bc-ab-ca)}{a}=\dfrac{y(ca-ab-bc)}{b}$。

同法 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$， 或 $\dfrac{x(bc-ca-ab)}{a}=\dfrac{y(ca-ab-bc)}{b}=\dfrac{x(ab-bc-ca)}{c}$。

〔I〕 $xyz=abc$，及 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$。 則 $\dfrac{x}{a}=\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{abc}}=\sqrt[3]{1}$。

$\therefore\ x=a,\ a(\omega),\ a(\omega)^2$。 $y=b,\ b(\omega),\ b(\omega)^2$。 $z=c,\ c(\omega),\ c(\omega)^2$。

〔II〕 $xyz=abc$， 及 $\dfrac{x(bc-ca-ab)}{a}=\dfrac{y(ca-ab-bc)}{b}=\dfrac{z(ab-bc-ca)}{c}$。

$$\therefore\ \frac{x(bc-ca-ab)}{a}=\sqrt[3]{\frac{xyz(bc-ca-ab)(ca-ab-bc)(ab-bc-ca)}{abc}}$$
$$=\sqrt[3]{\{(bc-ca-ab)(ca-ab-bc)(ab-bc-ca)\}}.$$

例題十四

解以下之方程式。

1. $yz=a^2,\quad zx=b^2,\quad xy=c^2$。

〔解〕 $\frac{(zx)(xy)}{yz}=\frac{b^2c^2}{a^2}$。 $\therefore\quad x=\pm\frac{bc}{a},\quad y=\pm\frac{ca}{b},\quad z=\pm\frac{ab}{c}$。

2. $x(x+y+z)=a^2,\quad y(x+y+z)=b^2,\quad z(x+y+z)=c^2$.

〔解〕 三方程式相加開平方。則 $x+y+z=\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$。

$$\therefore\quad x=\frac{a^2}{x+y+z}=\pm\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}\text{。}$$

$$y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\quad z=\pm\frac{c^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}\text{。}$$

3. $-yz+zx+xy=a,\quad yz-zx+xy=b,\quad yz+zx-xy=c$。

〔解〕 第一第二式相加。則 $2xy=a+b$。

同法 $2yz=b+c,\quad 2zx=c+a$。

$$\therefore\quad \frac{(2zx)(2xy)}{2yz}=\frac{(a+b)(c+a)}{b+c}\text{。}\quad \text{即}\quad x=\pm\sqrt{\frac{(a+b)(c+a)}{2(b+c)}}\text{。}$$

同法 $y=\pm\sqrt{\frac{(b+c)(a+b)}{2(c+a)}},\quad z=\pm\sqrt{\frac{(c+a)(b+c)}{2(a+b)}}$。

4. $yz=a(y+z),\quad zx=b(z+x),\quad xy=c(x+y)$。

〔解〕 由視察可知 $x=y=z=0$。

又 $\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b},\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{c}$。

$$\therefore\quad \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\text{。}$$

即 $\frac{2}{x}=\frac{ca+ab-bc}{abc}$。

由是 $x=\frac{2abc}{ca+ab-bc},\quad y=\frac{2abc}{ab+bc-ca},\quad z=\frac{2abc}{bc+ca-ab}$。

5. $yz=by+cz,\quad zx=cz+ax,\quad xy=ax+by$。

〔解〕 由視察可知 $x=y=z=0$。

又 $\frac{b}{z}+\frac{c}{y}=1,\quad \frac{c}{x}+\frac{a}{z}=1,\quad \frac{a}{y}+\frac{b}{x}=1$。

$\therefore\quad b\left(\frac{c}{x}+\frac{a}{z}\right)+c\left(\frac{a}{y}+\frac{b}{x}\right)-a\left(\frac{b}{z}+\frac{c}{y}\right)=b+c-a,$

即 $\frac{2bc}{x}=b+c-a,\quad \therefore\quad x=\frac{2bc}{b+c-a},\quad y=\frac{2ca}{c+a-b},\quad z=\frac{2ab}{a+b-c}$。

6. $x^2+2yz=12,\quad y^2+2zx=12,\quad z^2+2xy=12,$

〔解〕三方程式相加開平方。則 $x+y+z=\pm 6$。

從第一減第二式，則 $(x-y)(x+y-2z)=0$。

$\therefore\quad x-y=0,\quad x+y-2z=0,$ 如 $x-y=0$。則從第二得 $x^2+2zx=12$。

從第三得 $z^2+2x^2=12$。由減法 $x^2-2zx+z^2=0$。

$\therefore\quad x-z=0$。 $\therefore\quad x=y=z$。

故從 $x+y+z=\pm 6$，則 $3x=\pm 6$。 $\therefore\quad x=y=z=\pm 2,$

又若 $x+y-2z=0$。則從 $x+y+z=\pm 6$，$3z=\pm 6$。 $\therefore\quad z=\pm 2,$

又從第二 $y^2+(x+y)x=12$，及 $x+y=2z=\pm 4$，由是解此方程式，即得 x, y 而其根亦爲 ± 2，

7. $(y+z)(x+y+z)=a,\quad (z+x)(x+y+z)=b,\quad (x+y)(x+y+z)=c$。

〔解〕 三方程式相加，則 $2(x+y+z)^2=a+b+c,$

$\therefore\quad x+y+z=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c)},$

又於第二加第三而減第一。則 $2x(x+y+z)=b+c-a$。

$\therefore\quad x=\frac{b+c-a}{2(x+y+z)}=\frac{b+c-a}{\pm\sqrt{2(a+b+c)}}$。

8. $(y+b)(z+c)=a^2,\quad (z+c)(x+a)=b^2,\quad (x+a)(y+b)=c^2,$

〔解〕 第二式第三式相乘，以第一式除之，則 $(x+a)^2=\frac{b^2c^2}{a^2}$。

$\therefore\quad x=\pm\frac{bc}{a}-a,\qquad y=\pm\frac{ca}{b}-b,\qquad z=\pm\frac{ab}{c}-c,$

9. $x^2-(y-z)^2=a^2,\ y^2-(z-x)^2=b^2,\ z^2-(x-y)^2=c^2$。

〔解〕 $(x+y-z)(x-y+z)=a^2,\ (y+z-x)(y-z+x)=b^2,$

$(z+x-y)(z-x+y)=c^2,$

第一第二相乘，以第三式除之，則 $(x+y-z)^2=\frac{a^2b^2}{c^2}$。

$\therefore\quad x+y-z=\pm\frac{ab}{c},\ y+z-x=\pm\frac{bc}{a}$。

由加法 $2y=\pm\frac{ab}{c}\pm\frac{bc}{a}$。 $\therefore\ y=\pm\frac{b(a^2+c^2)}{2ac}$。z, x 以同理求之。

10. $x(y+z-x)=a,\ y(z+x-y)=b,\ z(x+y-z)=c$。

〔解〕 $y(z+x-y)+z(x+y-z)-x(y+z-x)=b+c-a$。

即 $-(y^2-2yz+z^2)+x^2=b+c-a$。 $\therefore\ x^2-(y-z)^2=b+c-a$。

同法 $y^2-(z-x)^2=c+a-b,\ z^2-(x-y)^2=a+b-c$。

以此與 9 例同法解之，則

$$\frac{x}{a(-a+b+c)}=\frac{y}{b(a-b+c)}=\frac{z}{c(a+b-c)}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{\{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\}}}。$$

11. $\frac{y+z}{a}=\frac{z+x}{b}=\frac{x+y}{c}=2xyz$,

〔解〕 $\frac{(z+x)+(x+y)-(y+z)}{b+c-a}=2xyz$。 即 $\frac{2x}{b+c-a}=2xyz$,

$\therefore\ x=0$, 或 $yz=\frac{1}{b+c-a}$。 同法 $y=0$, 或 $zx=\frac{1}{c+a-b}$.

$z=0$, 或 $xy=\frac{1}{a+b-c}$。 由是 $x=y=z=0$, 或

$$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}=\pm\frac{1}{\sqrt{\{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\}}}.$$

12. $\frac{y+z}{a}=\frac{z+x}{b}=\frac{x+y}{c}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$。

〔解〕由視察 $x=y=z=0$。

又由前例，即知 $\frac{2x}{b+c-a}=\frac{2y}{c+a-b}=\frac{2z}{a+b-c}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$。

$$\therefore\ \frac{4(x^2+y^2+z^2)}{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2}+\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}\right)^2。$$

由是 $\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$。

$$\therefore\ \frac{2x}{b+c-a}=\frac{2y}{c+a-b}=\frac{2z}{a+b-c}=\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2}。$$

13. $yz=a+y+z,\ zx=b+z+x,\ xy=c+x+y$。

〔解〕 $(y-1)(z-1)=a+1,\ (z-1)(x-1)=b+1\ \ (x-1)(y-1)=c+1$,

由是 $\frac{(z-1)(x-1)(x-1)(y-1)}{(y-1)(z-1)}=\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}$.

$\therefore\quad x-1=\pm\sqrt{\frac{(b+1)(c+1)}{a+1}}$。

14. $yz=a(y+z)+\alpha,\ zx=a(z+x)+\beta,\ xy=a(x+a)+\gamma$。

〔解〕 $(y-a)(z-a)=\alpha+a^2,\ (z-a)(x-a)=\beta+a^2,\ (x-a)(y-a)=\gamma+a^2,$

第二第三相乘。以第一除之。則

$(x-a)^2=\frac{(\beta+a^2)(\gamma+a^2)}{\alpha+a^2}$,　$\therefore\quad x=a\pm\sqrt{\frac{(\beta+a^2)(\gamma+a^2)}{\alpha+a^2}}$。

15. $yz-f^2=cy+bz,\ zx-g^2=az+cx,\ xy-h^2=bx+ay$。

〔解〕 $(y-b)(z-c)=f^2+bc,\ (z-c)(x-a)=g^2+ca,\ (x-a)(y-b)=h^2+ab$,

$\therefore\quad (x-a)^2=\frac{(g^2+ca)(h^2+ab)}{f^2+bc}$。 $\therefore\quad x=a\pm\sqrt{\frac{(g^2+ca)(h^2+ab)}{f^2+bc}}$。

16. $x+y^{-1}=\frac{3}{2},\ y+z^{-1}=\frac{7}{3},\ z+x^{-1}=4$。

〔解〕 從第二式 $\frac{1}{z}=\frac{7}{3}-y$, 從第三式 $z=4-\frac{1}{x}$。

$\therefore\quad \left(\frac{7}{3}-y\right)\left(4-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{z}\times z$。 即 $25x-7-3y(4x-1)=0$。

$\therefore$ 第一式 $\frac{1}{y}=\frac{3}{2}-x$。 即 $y=\frac{2}{3-2x}$

或 $25x-7-\frac{6}{3-2x}(4x-1)=0$, 即 $10x^2-13x+3=0$。

$\therefore\quad x=1$, 或 $x=\frac{3}{10}$。 由是 $x=1,\ y=2,\ z=3$,

或 $x=\frac{3}{10},\quad y=\frac{5}{6},\quad z=\frac{2}{3}$。

17. $x+y+z=6,\quad x^2+y^2+z^2=14,\quad xyz=6$。

〔解〕 $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=6^2-14$,　$\therefore\quad xy+yz+zx=11$,

λ 之三根爲 x, y, z, 則 $(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$。

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$。

即 $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$, 即 $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$。

$\therefore\quad \lambda=1, 2, 3$。 由是 x, y, z 之値, 爲 $1, 2, 3$,

即 $x=1,\ y=2,\ z=3,$ 或 $x=1,\ y=3,\ z=2$。

或 $x=2, y=1, z=3,$ 或 $x=2, y=3, z=1,$

或 $x=3,\ y=1,\ z=2,$ 或 $x=3,\ y=2,\ z=1,$

18. $x+y+z=15,\quad x^3+y^3+z^3=495,\quad xyz=105,$

〔解〕 $x^3+y^3+z^3-3xyz=495-3\times105$。

即 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=180,$

即 $(x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}=180,$

即 $15\{15^2-3(xy+yz+zx)\}=180$。 $\therefore\ xy+yz+zx=71,$

λ 之三根，爲 $x, y, z,$ 則 $(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$。

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0,$

即 $\lambda^3-15\lambda^2+71\lambda-105=0$。 $\therefore\ (\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)=0$。

$\lambda=3, 5, 7$。 $\therefore$ x, y, z 之值，爲 3, 5, 7。

19. $x+y+z=9,\quad x^2+y^2+z^2=41,\quad x^3+y^3+z^3=189$。

〔解〕 $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=9^2-41,$ $\therefore\ xy+yz+zx=20$。

又從 $x^3+y^3+z^3-3xy=(x+y+z)\{(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)\}$。

則 $189-3xyz=9\{41-20\}$。 $\therefore\ xyz=0,\ (\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0$。

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0$。

即 $\lambda^3-9\lambda^2+20\lambda=0$。 $\therefore\ \lambda=0, 4, 5,$ 即 x, y, z 之值爲 0, 4, 5,

20. $x+y+z=10,\quad yz+zx+xy=33,\quad (y+z)(z+x)(x+y)=294,$

〔解〕 以第一代入第三式，則 $(10-x)(10-y)(10-z)=294$。

即 $1000-100(x+y+z)+10(xy+yz+zx)-xyz=294$。

即 $1000-100(10)+10(33)-xyz=294$。 $\therefore\ xyz=36$。

$$(\lambda-x)(\lambda-y)(\lambda-z)=0,$$

即 $\lambda^3-(x+y+z)\lambda^2+(xy+yz+zx)\lambda-xyz=0,$

即 $\lambda^3-10\lambda^2+33\lambda-36=0$。 $\therefore\ (\lambda-3)^2(\lambda-4)=0$。

故 $\lambda=3, 3, 4$。 由是 x, y, z 之值爲 3, 3, 4。

21. $\dfrac{yz}{bz+cy}=\dfrac{zx}{cx+az}=\dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+y^2+c^2}$。

〔解〕 與 11 及 12 兩例同法如下。

$$\frac{xyz+xyz-xyz}{x(bz+cy)+y(cx+az)-z(ay+bx)}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}。$$

即 $\frac{xyz}{2cxy}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ 即 $\frac{z}{2c}=\frac{x}{2a}=\frac{y}{2b}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$。

以下與12例同法。 答 0, 0, 0, 或 $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$。

22, $\frac{a}{x}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{b}{y}+\frac{z}{c}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=1$。

〔解〕 $abc+cxy+bzx=bcx$, $cxy+abc+ayz=acy$, $bzx+ayz+abc=abz$。

從第一式減第二式而括之。則 $z(bx-ay)=c(bx-ay)$,

由是 $z=c$, 或 $bx=ay$,

〔I〕 $z=c$。則從第二 $cxy+abc+acy=cay$。 即 $xy=-ab$。

又從第三 $bcx+acy+abc=abc$。 即 $bx=-ay$。

從 $xy=-ab$, 及 $bx=-ay$, 得 $x=\pm a$, $y=\mp b$,

由是 $x=a$, $y=-b$, $z=c$, 或 $x=-a$, $y=b$, $z=c$。

〔II〕 $bx-ay$。 即 $y=\frac{b}{a}x$。

則從第二 $cx\times\frac{b}{a}x+abc+a\times\frac{b}{a}xz=ca\times\frac{b}{a}x$。 即 $z=\frac{c(ax-a^2-x^2)}{ax}$。

又從第三 $bzx+a\times\frac{b}{a}xz+abc=abz$, 即 $z=\frac{ac}{a-2x}$,

由是 $\frac{c(ax-a^2-x^2)}{ax}=\frac{ac}{a-2x}$。 即 $(a-2x)(ax-a^2-x^2)=a^2x$,

∴ $2x^3-3ax^2+2a^2x-a^3=0$。 即 $(x-a)(2x^2-ax+a^2)=0$。

由是 $x=a$, 或 $2x^2-ax+a^2=0$。 即 $x=\frac{1}{4}a(1\pm\sqrt{-7})$,

$x=a$。則 $z=\frac{ac}{a-2x}=\frac{ac}{a-2a}=-c$, $y=\frac{b}{a}x=\frac{b}{a}\times a=b$。

又 $x=\frac{1}{4}a(1\pm\sqrt{-7})$, $y=\frac{b}{a}x=\frac{1}{4}b(1\pm\sqrt{-7})$,

$z=\frac{ac}{a-2x}=\frac{ac}{a-\frac{1}{2}a(1\pm\sqrt{-7})}=\frac{2c}{1\mp\sqrt{-7}}=\frac{2c(1\pm\sqrt{-7})}{1-(-7)}=\frac{1}{4}c(1\pm\sqrt{-7})$,

∴ 原方程之根。為 $x=a$, $y=-b$, $z=c$。

或 $x=-a$, $y=b$, $z=c$, 或 $x=a$, $y=b$, $z=-c$,

或 $x=\frac{1}{4}a(1\pm\sqrt{-7})$, $y=\frac{1}{4}b(1\pm\sqrt{-7})$, $z=\frac{1}{4}c(1\pm\sqrt{-7})$。

23. $ax=\frac{z}{y}+\frac{y}{z}$, $by=\frac{z}{x}+\frac{x}{z}$, $cz=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$。

〔解〕 $axyz=y^2+z^2$, $bxyz=z^2+x^2$, $cxyz=x^2+y^2$。

$\therefore$ $(b+c-a)xyz=(z^2+x^2)+(x^2+y^2)-(y^2+z^2)=2x^2$。

由是 $x=0$, 或 $\frac{yz}{x}=\frac{2}{b+c-a}$

同法 $y=0$, 或 $\frac{zx}{y}=\frac{2}{c+a-b}$。

$\therefore$ $\frac{yz}{x}\times\frac{zx}{y}=\frac{2}{b+c-a}\times\frac{2}{c+a-b}$。 即 $z=\pm\frac{2}{\sqrt{\{(b+c-a)(c+a-b)\}}}$。

由是所求之根,爲 $x=0$, $y=0$, $z=0$,

或 $x=\pm\frac{2}{\sqrt{\{(c+a-b)(a+b-c)\}}}$, $y=\pm\frac{2}{\sqrt{\{(a+b-c)(b+c-a)\}}}$。

24. $y^2+z^2-x(y+z)=a^2$, $z^2+x^2-y(z+x)=b^2$ $x^2+y^2-z(x+y)=c^2$,

〔解〕 從第二第三之和減第一,則 $2x^2-2yz=b^2+c^2-a^2$。

$\therefore$ $x^2-yz=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$,

同法 $y^2-zx=\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)$, $z^2-xy=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$。

由 151 章第五例。得 x, y, z,

所求之根,爲$x=\pm\frac{b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2}{\sqrt{(2a^6+2b^6+2c^6-6a^2b^2c^2)}}$,

25. $x^2+yz-a^2=y^2+zx-b^2=z^2+xy-c^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$,

〔解〕 從 $x^2+yz-a^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$, $x^2-(y-z)^2=2a^2$。

同法 $y^2-(z-x)^2=2b^2$, $z^2-(x-y^2)=2c^2$,

由是與 9 例同法,即得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$

26. $x(x+y+z)-(y^2+z^2+yz)=a$,
$y(x+y+z)-(z^2+x^2+zx)=b$,
$z(x+y+z)-(x^2+y^2+xy)=c$,

〔解〕 第一加第二。則 $2xy-2z^2=a+b$。 $\therefore$ $z^2-xy=-\frac{1}{2}(a+b)$,

同法 $x^2-yz=-\frac{1}{2}(b+c)$。 $y^2-zx=-\frac{1}{2}(c+a)$。

由是與151章第五例同法,得

$$x=\pm\frac{(b+c)^2-(c+a)(a+b)}{2\sqrt{(3abc-a^3-b^3-c^3)}}$$

27. $x+y+z=a+b+c,\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2,$

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$。

〔解〕 $x=a+\lambda,\ y=b+\mu,\ z=c+\nu$。則

從第一 $\lambda+\mu+\nu=0$。

從第二 $\lambda^2+\mu^2+\nu^2+2a\lambda+2b\mu+2c\nu=0$。

從第三 $(b-c)\lambda+(c-a)\mu+(a-b)\nu=0$。

從第一及第三 $\frac{\lambda}{(a-b)-(c-a)}=\frac{\mu}{(b-c)-(a-b)}=\frac{\nu}{(c-a)-(b-c)}=K$.

$K^2=\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{(2a-b-c)^2+(2b-c-a)^2+(2c-a-b)^2}$ 從第二

$$K^2=\frac{-(a\lambda+b\mu+c\nu)}{3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\cdots\cdots\cdots(A)$$

又 $K=\frac{a\lambda+b\mu+c\nu}{a(2a-b-c)+b(2b-c-a)+c(2c-a-b)}$。

即 $K=\frac{a\lambda+b\mu+c\nu}{2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\cdots\cdots\cdots(B)$

以(B)除(A)。則 $K=-\frac{2}{3}$。 $\therefore\ \frac{\lambda}{2a-b-c}=-\frac{2}{3}$。

即 $\lambda=-\frac{2}{3}(2a-b-c)$。 即 $x+a=-\frac{2}{3}(2a-b-c)$。

$\therefore\ x=\frac{1}{3}(2b+2c-a)$ 又由視察得 $x=a,\ y=b,\ z=c$。

28. $(x+y)(x+z)=ax,\ (y+z)(y+x)=by,\ (z+x)(z+y)=cz$。

〔解〕第一第二相乘。以第三除之。則 $(x+y)^2=\frac{abxy}{cz}$。

$\therefore\ x+y=\pm\frac{1}{cz}\sqrt{abcxyz}$。 即 $z(x+y)=\pm\frac{1}{c}\sqrt{abcxyz}$。

同法 $x(y+z)=\pm\frac{1}{a}\sqrt{abcxyz}$, $y(z+x)=\pm\frac{1}{b}\sqrt{abcxyz}$。

由是 $x(y+z)+y(z+x)-z(x+y)=\pm\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\sqrt{abcxyz}$,

即 $2xy=\pm\frac{bc+ca-ab}{abc}\sqrt{abcxyz}$。

即 $4x^2y^2=\frac{(bc+ca-ab)^2}{abc}xyz$。

$\therefore$ $xy=0$。 或 $\frac{xy}{z}=\frac{(bc+ca-ab)^2}{4abc}$

同法 $yz=0$ 或 $\frac{yz}{x}=\frac{(ca+ab-bc)^2}{4abc}$, $zx=0$ 或 $\frac{zx}{y}=\frac{(ab+bc-ca)^2}{4abc}$。

由是 $x=y=z=0$。或 $x=\pm\frac{1}{4abc}(bc-ca+ab)(bc+ca-ab)$,

29. $x^2-yz=ax,\ y^2-zx=by,\ z^2-xy=cz$。

〔解〕 $y(ax)+z(by)+x(cz)=y(x^2-yz)+z(y^2-zx)+x(z^2-xy)$。

即 $axy+byz+czx=0$..(A)

又 $z(ax)+x(by)+y(cz)=z(x^2-yz)+x(y^2-zx)+y(z^2-xy)$。

即 $bxy+cyz+azx=0$..(B)

從 (A), (B) 用十文字之法 $\frac{xy}{c^2-bc}=\frac{yz}{a^2-bc}=\frac{zx}{b^2-ca}$。

$\therefore$ $\frac{yz}{a^2-bc}=\frac{xy}{c^2-ab}\times\frac{zx}{b^2-ca}\div\frac{yz}{a^2-bc}$。

即 $\frac{yz}{(a^2-bc)^2}=\frac{x^2}{(b^2-ca)(c^2-ab)}=\frac{-(x^2-yz)}{(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)}$。

$\therefore$ 從第一 $\frac{x^2}{(b^2-ca)(c^2-ab)}=\frac{-ax}{a(a^3+b^3+c^3-3abc)}$。

由是 $x=0$, 或 $x=-\frac{(b^2-ca)(c^2-ab)}{a^3+b^3+c^3-3abc}$ 如 $x=0$, 則從第三 $z^2=ca$,

$\therefore$ $z=0$, 或 c, 又推得各根如下。

$x=a,\ y=0,\ z=0$, 或 $x=0,\ y=b,\ z=0$, 或 $x=0,\ y=0,\ z=c$。

30. $x^2+a(2x+y+z)=y^2+b(2y+z+x)=z^2+c(2z+x+y)=(x+y+z)^2$。

〔解〕 $a(2x+y+z)=(x+y+z)^2-x^2=(2x+y+z)(y+z)$。

$\therefore$ $2x+y+z=0$..........(1) 或 $y+z=a$................(2)

同法 $2y+z+z=0$............(2) 或 $z+x=b$................(4)

及 $2z+x+y=0$............(5) 或 $x+y=c$................(6)

從 (1), (3), (5) $x=y=z=0$。

從 (2), (4), (6) $x=\frac{1}{2}(b+c-a)$, $y=\frac{1}{2}(c+a-b)$, $z=\frac{1}{2}(a+b-c)$,

從 (1), (3), (6) $x=\frac{1}{2}c$ $y=\frac{1}{2}c$, $z=-\frac{3}{2}c$,

從 (1), (4), (5) $x=\frac{1}{2}b$, $y=-\frac{3}{2}b$, $z=\frac{1}{2}b$,

從 (2), (3), (5) $x=-\frac{3}{2}a$, $y=\frac{1}{2}a$, $z=\frac{1}{2}a$,

31. $y^2+yz+z^2=a^2$, $z^2+zx+x^2=b^2$, $x^2+xy+y^2=c^2$.

〔解〕三方程式相加而括之，則

$2(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=a^2+b^2+c^2$。

即 $(x+y+z)^2-3(yz+zx+xy)=a^2+b^2+c^2-(x+y+z)^2$ ....(A)

又從第一減第二而括之。則 $(y-x)(y+x+z)=a^2-b^2$。

即 $\frac{a^2-b^2}{x-y}$(同法) $=\frac{b^2-c^2}{y-z}=\frac{c^2-a^2}{z-x}=-(x+y+z)$......................(B)

$\therefore$ $\frac{(a^2+b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}=\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}$

$=(x+y+z)^2$。 即 $\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)}=(x+y+z)^2$。

$\therefore$ 從 (A) $\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{a^2+b^2+c^2-(x+y+z)^2}=(x+y+z)^2$。

即 $(x+y+z)^4-(a^2+b^2+c^2)(x+y+z)^2+a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=0$。

$\therefore$ $(x+y+z)^2=\frac{1}{2}\{a^2+b^2+c^2\pm\sqrt{3(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4)}\}$。

由是得 $x+y+z$ 之值。設 $x+y+z=K$

又從 (B) $\frac{a^2-b^2}{x-y}=\frac{b^2-c^2}{y-z}=-K$。 $\therefore$ $x-y=\frac{b^2-a^2}{K}$, $y-z=\frac{c^2-b^2}{K}$.

$\therefore$ $(x+y+z)+(y-z)=K+\frac{c^2-b^2}{K}$。 即 $x+2y=K+\frac{c^2-b^2}{K}$。

又 $2(x-y)+(x+2y)=\frac{2(b^2-a^2)}{K}+\left(K+\frac{c^2-b^2}{K}\right)$,

$\therefore$ $x=\frac{1}{3K}(K^2+b^2+c^2-2a^2)$。

32. $a^2x+b^2y+c^2z=0,\quad \frac{(b-c)^2}{ax}+\frac{(c-a)^2}{by}+\frac{(a-b)^2}{cz}=0$。

$\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$。

〔解〕 從第一 $cz=-\frac{a^2x+b^2y}{c}$。從第二則

$cz\{b(b-c)^2y+a(c-a)^2x\}+abxy(a-b)^2=0$。

即 $\frac{a^2x+b^2y}{c}\{b(b-c)^2y+a(c-a)^2x\}-abxy(a-b)^2=0$。

$\therefore\quad a^3(c-a)^2x^2-ab\{c(a-b)^2-a(b-c)^2-b(c-a)^2\}xy+b^3(b-c)^2y^2=0$。

即 $a^3(c-a)^2x^2-ab(a+b)(c-a)(b-c)xy+b^3(b-c)^2y^2=0$。

即 $\{a^2(c-a)x-b^2(b-c)y\}\{a(c-a)x-b(b-c)y\}=0$。

由是 $\frac{b-c}{a^2x}=\frac{c-a}{b^2y}$，或 $\frac{b-c}{ax}=\frac{c-a}{by}$。

$\frac{b-c}{a^2x}=\frac{c-a}{b^2y}=\frac{a-b}{c^2z}=K$。 則 $\frac{(b-c)(c-a)}{a^2b^2xy}=K^2$。

即 $\frac{1}{xy}=\frac{a^2b^2K^2}{(b-c)(c-a)}$。 同法 $\frac{1}{yz}=\frac{b^2c^2K^2}{(c-a)(a-b)}$, $\frac{1}{zx}=\frac{c^2a^2K^2}{(a-b)(b-c)}$。

$\therefore$ 從第三 $K^2\left\{\frac{c^2a^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{a^2b^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{b^2c^2}{(c-a)(a-b)}\right\}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$。

$\therefore\quad K=\sqrt{-\frac{1}{abc}}$, 即 $\frac{b-c}{a^2x}=\sqrt{\frac{1}{-abc}}$。 $\therefore x=\frac{b-c}{a^2}\sqrt{(-abc)}$。

又 $\frac{b-c}{ax}=\frac{c-a}{by}=\frac{a-b}{cz}$。 同法 $x=\frac{b-c}{a}\sqrt{\left(-\frac{abc}{bc+ca+ab}\right)}$。

第拾壹編

問題

152. 問題(Problems) 本編爲研究方程式之應用問題。此等應用問題。有已知數量與未知數量二種。由此二種之關係，以求其未知數量。

解問題之方法。以代數記號表明已知數量與未知數量之關係。而作成方程式。然後將此方程式解之，以求未知數量。

解此方程式時。其結果須適合於所求之數量，其有不能適合者。因被題問意義所限制。而此限制在方程式不能顯著之例。如問題所求爲人數，則得分數之答，爲不合理也。

由是，解問題之次序有三。第一將已知數量與未知數量。以代數之記號作方程式；第二，解此方程式。求未知數量，第三，其求得之未知數量。須適合於問題之意義。其不合理者。則去之，而檢查其合理不合理之法。則如下之諸例。

〔第一例〕甲有銀 5 鎊。乙有銀 10 先令，問甲與乙若干。則甲所有爲乙之四倍。(一鎊爲二十先令)。

命 x 爲甲與乙之先令數。則甲初有銀 100 先令者。今祇有 $100-x$ 先令。而乙乃有 $10+x$ 先令。依題理得方程式，

$100-x=4(10+x)$。 $\therefore\ x=12$， 即甲與乙爲 12 先令。

〔注意〕x 示常數。故 x 當附於名數單位之種類，如本題以 x 爲先令是也。

〔第二例〕大工一人，小工二人，合營一事。則 12 日可成，大工三人小工一人。則 6 日可成，問大工一人獨營之，須幾何日。

命 $x=$ 大工一人成事之日數，$y=$ 小工一人成事之日數。則大工一人 1 日爲全事之 $\frac{1}{x}$。小工一人 1 日爲全事之 $\frac{1}{y}$。又大工一小

工二1日合營之事爲$\frac{1}{12}$。故$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{12}$，又大工三小工一1日合營之事爲$\frac{1}{6}$。故$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$

由此兩通同方程。求得$x=20$，卽大工一人獨營爲20日，

〔第三例〕某家有童子若干人。若11倍之。比其原數平方之2倍多12。問童子之總數若干。

命x爲童子之數。則$11x=2x^2+12$。卽$(2x-3)(x-4)=0$。

由是$x=4$，或 $x=\frac{3}{2}$。

但童子之數爲分數$\frac{3}{2}$則不合理。故4人爲所求之數。

〔第四例〕有桿長若干尺。若11倍之。比其長數平方之2倍多12尺。求桿長幾何。

命x爲桿之尺數。如前例得$x=4$或$\frac{3}{2}$。而桿之長爲分數亦能合理。故在本題。4尺或$\frac{3}{2}$尺均可爲所求之數。

〔第五例〕有二位之數。等於其數字之積之三倍。但知十位數比單位數少2。試求此數。

命x爲十位數字。則單位數字爲$x+2$。故原數爲$10x+(x+2)$。依題理得方程式，爲$10x+(x+2)=3x(x+2)$，$\therefore$ $x=2$或$-\frac{1}{3}$。

然數字必限於正整數，故$-\frac{1}{3}$爲不合理，由是十位數字爲2。單位數字爲$2+2=4$。 $\therefore$ 原數$=24$。

〔第六例〕二位之數。等於其數字之和之3倍，問此數爲若干。

命x爲十位數字，y爲單位數字。則依題理$10x+y=3(x+y)$。

卽 $7x=2y$。因x及y爲10以下之正整數。故$x=2$。則$y=7$。卽所求之數爲27。

〔第七例〕某數與其平方根之和爲90。求某數爲若干。

命x爲所求之數。則$x+\sqrt{x}=90$。

$\therefore\ (x-90)^2=x$。 即 $x^2-181x+8100=0$。

$\therefore\ x=81$, 或 $x=100$, 在本題之平方根有正負之兩值。故 $x=81$。則 $81+\sqrt{81}=81+9=90$, $x=100$。則 $100+\sqrt{100}=100-10=90$,

〔第八例〕父子之年齡之和爲100歲。父子年數之積之$\frac{1}{10}$。比父之年數多180。問各幾何歲,

命x爲父之年數,則$100-x$爲子之年數。

$\therefore\ \frac{1}{10}x(100-x)=x+180$, 即 $x^2-90x+1800=0$,

即 $(x-60)(x-30)=0$。 $\therefore\ x=60$, 或 30。

父之歲爲60。則子爲$100-60=40$。即40歲。若父之歲爲30。則子爲70歲,即不合理,

〔第九例〕某人買豚,鵝,及鴨三種。鵝價若減一先令。而以原價爲鵝數,則買鵝之總價。與1豚之價等。但知1鵝之價。等於2鴨之價。而14鴨之價。比1豚之價多7(先令)。問各1頭之價若干。

命 $x=1$豚之價。 $y=1$鵝之價。 $z=1$鴨之價。

1豚之價。既等於以鵝價少1之數。買鵝之總價。

則 $x=y(y-1)$..(1)

又因1鵝等於2鴨。故 $y=2z$..............................(2)

又14鴨比1豚多7。故 $14z=x+7$........................(3)

從(1)式,及(2)式。 $x=2z(2z-1)$, $\therefore$ 從(3)式 $14z=2z(2z-1)+7$。

即 $4z^2-16z+7=0$。 $\therefore\ z=\frac{7}{2}$, 或 $z=\frac{1}{2}$。

$z=\frac{7}{2}$。 則 $y=2\times\frac{7}{2}=7$。 $x=7(7-1)=42$。

又 $z=\frac{1}{2}$。 則 $y=2\times\frac{1}{2}=1$; $x=1(1-1)=0$。

故1豚之價爲42先令。1鵝之價爲7先令。1鴨之價爲$3\frac{1}{2}$先令。若1鴨之價爲$\frac{1}{2}$先令。1鵝之價爲1先令。則豚爲無價。便不合理。

例題十五

1. 分50爲二分。第一分之二倍，等於第二分之三倍，問各若干

〔解〕x爲第一分。則 $50-x$ 爲第二分。

$\therefore\ 2x=3(50-x)$。 $\therefore\ x=30$。 第二分 $=50-30=20$。

2. A較B少5磅。C等於A及B之和，而A, B, C之和爲50磅，問各若干。 答．A 10磅， B 15磅， C 25磅。

〔解〕A之所持爲x磅則 $B=x+5$ 磅。 $C=x+(x+5)$， 即 $2x+5$ 磅。由是 $x+(x+5)+(2x+5)=50$。 $\therefore\ x=10$。

3. 甲70歲，乙45歲，試求甲歲當乙歲2倍之年。 答 20年前。

〔解〕 所求之年爲自x年以前，則 $70-x=2(45-x)$。 $\therefore\ x=20$。即20年以前。

又若所求之年爲x年以後，則 $70+x=2(45+x)$。 $\therefore\ x=-20$。即 -20 年以後。故取負之反對，即正20年以前。

4. 雞卵之價，每個貴 $\frac{1}{4}$。則付金1磅，差少40個，問買雞卵20個之原價若干。(1磅爲20先令)。

〔解〕 20個之原價爲x磅，則1個之原價爲 $\frac{1}{20}x$ 磅。

由是 $\dfrac{1}{\frac{1}{20}x}=\dfrac{1}{\frac{1}{20}(1+\cdot25)}+40$。 $\therefore\ x=\frac{1}{10}$ 即 $\frac{1}{10}\times20$ 先令，即2先令。

5. 貨幣50個之價，合計爲14磅。其間半磅貨之數3倍於磅貨。其餘爲先令貨，問各貨之個數。 答 5, 15, 30。

〔解〕磅貨之數 $=x$，則半磅貨之數 $=3x$。而先令貨之數 $=50-4x$。

由是 $x+\frac{1}{2}(3x)+\frac{1}{20}(50-4x)=14$。 $\therefore\ x=5$。

6 有一工程A 20日可成，B 12日可成，若先使A動工後以B代之，則合計14日完工，求A之作工日數。

〔解〕 甲作工日數$=x$。則甲每日所作爲全事之$\frac{1}{20}$，乙每日所作爲全事之$\frac{1}{12}$。故 $\frac{x}{20}+\frac{14-x}{12}=1$。 $\therefore\ x=5$。 即 6 日。

7. 某人買每2個値1(辨士)之雞卵若干個，又買每12個値5(辨士)之雞卵四倍之。又買每20個値8(辨士)之雞卵五倍之。後賣去每100個價3先令8辨士。獲利3先令6辨士，求所買雞卵之數(1先令爲12辨士)。 答 1800。

〔解〕最初所買之雞卵爲x個。則次所買爲4x及5x個。

由是$\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}(4x)+\frac{8}{20}(5x)=\frac{44}{100}(x+4x+5x)-42$。 $\therefore\ x=180$，

$\therefore$ 所求之之雞卵數 $=x+4x+5x=10x=10\times180=1800$，

8. 某甲應付某乙金63鎊5先令。今以磅貨及半(古倫)貨給之合計100個問磅貨之數若干。但半古倫爲2先令6辨士。即$2\frac{1}{2}$先令。

〔解〕磅貨之數爲x。則半古倫貨之數$=100-x$，

由是$20x+\frac{5}{2}(100-x)=63\times20+5$， $\therefore\ x=58$，

9. 有人從A地步至B地一小時行4哩，行至一時間後，有四輪車發自A地追及之，此人遂乘此車，又歷2時間。即至B地。求A，B之距離若干。但四輪車每時之速率爲12哩，

〔解〕A，B之距離爲x。乘四輪車所行之路$=12$哩$\times2=24$哩，依題理步行$x-24$哩。比車發時早1時間，

由是$\frac{x-24}{4}=\frac{x-24}{12}+1$。 $\therefore\ x=30$。 即 30哩，

10. 旅客二人持共重600磅之行李，除火車許帶之重額外，應付運費3先令4辨士。及11先令8辨士。若以一人獨帶此行李計算，則應付運費1磅，求一人許帶之重額若干， 答 120磅，

〔解〕許帶重額爲x磅。則$\frac{3\frac{4}{12}+11\frac{8}{12}}{600-2x}=\frac{20}{600-x}$，

11. 設如作成一事。A, B共作之須4日。A, C共作之須6日。B, C共作之須12日。求A, B, C共作之日數。

〔解〕各人獨成此事之日數爲A=x, B=y, C=z。則

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$。

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{4}$。由是所求之日爲4日。

〔注意〕本題A, B共作。與A, B, C共作。均爲4日。可知C實未嘗作工也。

12. 父之年齡等於三子之和。然9年之後。則等於長子,仲子之和。又經3年。則等於長子,末子之和。又經3年。則等於仲子,末子之和。求各年齡幾何。 答36, 15, 12, 9。

〔解〕長子之歲 =x。仲子 =y。末子 =z。則父 =x+y+z。

由是 $x+y+z+9=(x+9)+(y+9)$。

$x+y+z+9+3=(x+9+3)+(z+9+3)$。

$x+y+z+9+3+3=(y+9+3+3)+(z+9+3+3)$。

從此三方程式,可得x, y, z。

13. A, B, 二人。從兩地同時相向而行。A每時之速率比B多2哩。經3時而相會。若B每時之速率減1哩。而A爲前速之$\frac{2}{3}$。則經4時相會。求兩地之距離若干。

〔解〕A每時之速=x哩。則B每時之速 =x−2哩。

由是 $3x+3(x-2)=4\times\frac{2}{3}x+4(x-2-1)$。 $\therefore\ x=9$。

故所求之距離 $=3\times9+3(9-2)=48$。

14. 一旅人擬至某地。預定在道之時限。若每時之速率增半哩。則至定限之$\frac{4}{5}$。已達某地。又若每時減速半哩。則比定限後$2\frac{1}{2}$時。始達某地。求其距離若干。 答 15哩。

〔解〕所求之距離 =x哩。每時之速 =y哩。則

$\frac{x}{y+\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}\times\frac{x}{y}$。 $\therefore\ y=2$。

又 $\frac{x}{y-\frac{1}{2}}=\frac{x}{y}+2\frac{1}{2}$。 即 $\frac{x}{2-\frac{1}{2}}=\frac{x}{2}+2\frac{1}{2}$。 $\therefore\ x=15$。

15. 分243爲三分。第一分之$\frac{1}{2}$，與第二分之$\frac{1}{3}$，與第三分之$\frac{1}{4}$。各相等。試求各數。

〔解〕依題理，第一分爲$2x$。第二分爲$3x$。第三分爲$4x$。則
$2x+3x+4x=243$。由是得$x=27$。

16. 有磅貨及先令貨若干個。若易磅貨爲先令。及先令貨爲辨士。則爲原價$\frac{1}{18}$。若磅貨爲五磅。及先令貨爲鎊。則其增價與原價之比。爲15比2。試證之。

〔證〕 磅貨之數$=P$。先令貨之數$=S$。則其原價爲$P+\frac{1}{20}S$鎊。若鎊爲先令。先令爲辨士，則其價爲$\frac{1}{20}P+\frac{1}{20\times12}S$鎊。故

$$\frac{1}{20}P+\frac{1}{20\times12}S=\frac{1}{18}\left(P+\frac{1}{20}S\right)$$化爲最簡式，$S=4P$。

由是原價$=P+\frac{1}{20}S$。即$P+\frac{1}{20}\times4P$。即$\frac{6}{5}P$鎊。又磅貨爲五磅。先令貨爲磅。則其價$=5P+S$。即$9P$磅。由是與原價之比爲$9P:\frac{6}{5}P=15:2$。

17. 有金1000鎊。分給A, B, C, D。祇知B所得者。等於A之半。C較D多A之$\frac{1}{3}$。若B多得100鎊。則等於C與D之和，問各得幾許。

答A450鎊，B 225鎊，C 237鎊10先令，D 87鎊10先令。

〔解〕 A之所得$=x$鎊。則B之所得$=\frac{1}{2}x$鎊。

又 C之所得$=y$鎊。則D之所得$=y-\frac{1}{3}x$鎊。

由是$\frac{1}{2}x+100=y+\left(y-\frac{1}{3}x\right)$。

及 $x+\frac{1}{2}x+y+\left(y-\frac{1}{3}x\right)=1000$。

18. 有兩數。第一數等於第二數之$\frac{3}{5}$。而其各平方之差爲16，問各若干。　　答 ±3, ±5。

〔解〕 第二數$=x$，則第一數$=\frac{3}{5}x$。

故 $x^2-\left(\frac{3}{5}x\right)^2=16$。　$\therefore\ x=\pm5$。

19. 有二位之兩數。其數字同而次序異。其和等於兩數字和之平方。其差等於小數字平方之5倍。問兩數各若干。　答38, 83。

〔解〕 小數字爲x，大數字爲y，則兩數爲$10x+y$，及$10y+x$。

故 $(10x+y)+(10y+x)=(x+y)^2$。

即 $11(x+y)=(x+y)^2$。　$\therefore\ x+y=11$。

又 $(10y+x)-(10x+y)=5x^2$。　即 $9(y-x)=5x^2$。

從 $x+y=11$，$9(y-x)=5x^2$，得 $x=3$, $y=8$。

20. 某人行若干路。其三分之一。每時行10哩，又三分之一。每時行9哩。其餘每時行8哩，若其半每時行10哩，又其半每時行8哩，則其時間比前遲半分時。求路程若干。　　答 18哩。

〔解〕 全距離$=6x$哩，則依題理。

$\frac{2x}{10}+\frac{2x}{9}+\frac{2x}{8}=\frac{3x}{10}+\frac{3x}{8}-\frac{\frac{1}{2}}{60}$。 即 $\frac{x}{10}+\frac{x}{8}-\frac{2x}{9}=\frac{1}{120}$。

由是 $x=3$。　$\therefore\ 6x=18$。

21. 有兩脚踏車，一自甲地至乙。一自乙地至甲。各於正午發車，及轉回時。於午後三時。再會於離甲9哩之處。甲乙之距離爲27哩。求其初會之處。及其時刻。　　答 離甲15哩，一時。

〔解〕 第一車於再會時。共行$27+(27-9)$哩，即45哩，又第二車共行$27+9$哩。即36哩。

$\therefore$ 第一車每時之速$=45$哩$\div3=15$哩。

第二車每時之速$=36$哩$\div3=12$哩。

又初會之時刻爲午後x時。則

$$15x+12x=27。$$

$$\therefore\ x=1。即午後1時。$$

22. 有金1015鎊。分給A, B, C。但知B比A少5鎊。而C所得鎊數。等於A所得先令數。而又以B之鎊數倍之。問各得若干。

答 A 10鎊 B 5鎊 C 1000鎊。

〔解〕A之所得 $=x$ 鎊。則 $B=x-5$ 鎊, $C=(x-5)\times 20x$(即1鎊爲20先令。故 $20x$ 爲A之先令數)。

由是 $x+(x-5)+(x-5)\times 20x=1015$。即 $10x^2-49x-510=0$。

即 $(x-10)(10x+51)=0$。

$\therefore\ x=10$。而 $10x+51=0$ 之答。爲不合題理,故省去不用。

23. 某街道建等距離之電信柱若干根,今若每1哩之柱數比前減去1根。則各柱間之距離增 $2\frac{14}{15}$ 碼。問1哩之柱數幾何。

〔解〕1哩即1760碼之柱數爲 x。則兩柱間之距離爲 $\frac{1760}{x}$。

故 $\frac{1760}{x}+2\frac{14}{15}=\frac{1760}{x-1}$。故 $\frac{44}{15}=\frac{1760}{x(x-1)}$。

由 $x(x-1)=600$。 $\therefore\ x=25$, 或 -24。惟 -24 爲不合理,故從省。

24. 有兩數以其和乘大數,則得144。又以其差乘小數,則得14。問各若干。

〔解〕大數爲 x。小數爲 y。則 $(x+y)x=144$ $(x-y)y=14$。

由除法得 $\frac{(x+y)x}{(x-y)y}=\frac{144}{14}=\frac{72}{7}$。

化之爲 $7x^2-65xy+72y^2=0$。 即 $(x-8y)(7x-9y)=0$。

$\therefore\ x=8y$。 及 $x=\frac{9}{7}y$。

從 $x=8y$。用第二式。則 $(8y-y)y=14$。

$\therefore\ y=\pm\sqrt{2}$。 $\therefore\ x=\pm 8\sqrt{2}$。

又從 $x=\frac{9}{7}y$。用第二式。則 $\left(\frac{9}{7}y-y\right)y=14$。

$\therefore\ y=\pm 7$。 $\therefore\ x=\pm 9$。

25. A及B從兩地同時相向而行。經五時相會。若A每時之速度增1哩。而B早1時起程。或B每時之速度減1哩。而A後1時起程。則其相會處。皆與前同點。求兩地之距離數。 答50哩。

〔解〕A每時之速度$=x$哩。B每時之速度$=y$哩。則所求之距離$=5x+5y$。而A行至會點之距離$=5x$，B行至會點之距離$=5y$。

A若每時增1哩。則行$5x$之時間爲$5x\div(x+1)$。因B早1時起程。而仍行5時。故此A行之時間爲$5-1$。即4時間。

由是$\frac{5x}{x+1}=4$。　$\therefore\ x=4$。

又B若每時減1哩。則行$5y$之時間與前同法。爲

$\frac{5y}{y-1}=5+1$。　$\therefore\ y=6$。

由是所求之距離$=5\times4+5\times6=50$。

26. 有兵卒若干人。作爲充實方陣。今若改爲中空方陣。則外一邊之人數增16人。而共列四層。問人數若干。　答576人。

〔解〕一邊之人數爲x，則中空方陣之外一邊人數$=x+16$。中空之一邊$=x+16-4\times2=x+8$。

由是$x^2=(x+16)^2-(x+8)^2$。　$\therefore\ x=24$。　$\therefore\ x^2=576$。

27. 有二位之數。等於數字之和之7倍。則其轉位數。必等於數字之和之4倍。試證之。

〔證〕十位數字$=x$。單位數字$=y$。則

原數$=10x+y$。轉位數$=10y+x$。

依題理$10x+y=7(x+y)$。　$\therefore\ x=2y$。

由是$10y+x=4y+3(2y)+x=4y+3x+x=4(x+y)$。

28. A從甲地至乙地。計程7里。B後A 20分起行。B追及A復歸甲地。同時A亦達於乙地。B每時之速度4里。求A之速度。

〔解〕A每時之速度$=x$里。B追及A之路$=y$里。

從$\frac{y}{4}=\frac{y}{x}-\frac{20}{60}$，及$\frac{2y}{4}=\frac{7}{x}-\frac{20}{60}$兩方程式消去$y$。

則得$x^2+25x-84=0$，即$(x-3)(x+28)=0$。　$\therefore\ x=3$。

29. A，B各乘脚踏車同時起程。但A從L地向C地，B從C地向L地。途中相會後，A經4時達於C地，B經1時達於L地。求B所行之時。　答3時。

〔解〕A之時速 $=x$。B之時速 $=y$。則A行至會處之距離，爲B行1時間之距離。即等於 $y\times 1=y$。

又B行至會處之距離。爲A行4時間之距離，即 $4x$。

故 $\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$。　$\therefore\ y=2x$。

而兩地之距離。爲 $y+4x$。即 $2x+4x=6x$。

由是所求B之時間爲 $\frac{6x}{y}=\frac{6x}{2x}=3$。

30. 有三位之數。其數字之和爲10。中數字等於首末兩數字之和。若此數加99。則爲轉位數。問原數若干。　　答　253。

〔解〕依題理中數爲 $10\div 2=5$。即他兩數字之和爲5，今百位數字爲 x，則單位數字爲 $5-x$。

由是 $100x+50+(5-x)+99=100(5-x)+50+x$。　$\therefore\ x=2$。

31. 兩器各盛水與酒之混合物。第一器中酒與水之比爲 $1:3$。第二器中爲 $3:5$。若從兩器取出若干量作成酒5升及水9升之混合物，問應各取若干。　　答　2升。12升。

〔解〕第一器取出之量爲 x 升。則第二器取出之量爲 $5+9-x$，即 $14-x$ 升。而第一器取出之酒爲 $\frac{1}{1+3}x$。即 $\frac{1}{4}x$。第二器取出之酒爲 $\frac{3}{3+5}(14-x)$。即 $\frac{3}{8}(14-x)$。由是 $\frac{1}{4}x+\frac{3}{8}(14-x)=5$。　$\therefore\ x=2$。

又第二器取出之量爲 $14-2=12$。

〔別法〕前解所計算者爲酒。若計算水。則以9升代5升。即 $\frac{3}{1+3}x+\frac{5}{3+5}(14-x)=9$。　$\therefore\ x=2$。又第二爲 $14-2=12$。

32. 有一時計。於10時11時之間，其分針若在今後6分之位置，則與今3分時前之時針位置正相反對，問今爲何時。

答　10時15分。

〔解〕今之時爲10時 x 分。

$\therefore$ 今時分針之位置爲在12時中之 x 分。

$\therefore$ 分針從今之位置，至10時爲 $50-x$ 分。

$\therefore$ 從今後六分之分針至10時爲 $50-x-6$。即 $44-x$ 分(1)，

因時針之速率。爲分針之$\frac{1}{12}$。故今時時針之位置。爲在10時後$\frac{1}{12}x$分。 $\therefore$ 今前3分之時針位置。爲在10時後$\frac{1}{12}x-\frac{3}{12}$分。

(1)之分針位置。與(2)之時針位置。正相反對。則兩針成一直線。即其距爲30分。故$(44-x)+\left(\frac{1}{12}x-\frac{3}{12}\right)=30$。

$\therefore$ $x=15$分。

33. A, B, C三人順次於午後3時4時及5時。從甲地起。行至乙地。C於午後7時追及B更行$4\frac{1}{2}$哩。於午後$7\frac{1}{2}$時追及A。求B追及A之處及其時刻。 答距甲地30哩。午後9時。

〔解〕B追及A之時爲午後x時。

A, B, C各每時之速率。順次爲a, b, c哩。

依題理C爲行$7-5=2$時追及B。更行$4\frac{1}{2}$哩追及A。故至是共行$2c+4\frac{1}{2}$哩。又C追及A爲行$7\frac{1}{2}-5=2\frac{1}{2}$時。故其行程爲$2\frac{1}{2}c$。

$$\text{由是}\quad 2c+4\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}c。\qquad \therefore\quad c=9\text{哩。}$$

又C追及B行2c哩。B爲行$7-4=3$時。故

$$2c=3b。\ \text{即}\ b=\frac{2}{3}c=\frac{2}{3}\times 9=6\text{哩。}$$

又A爲C追及之時。共行$7\frac{1}{2}-3=4\frac{1}{2}$時。故

$$4\frac{1}{2}a=2\frac{1}{2}c。\ \text{即}\ 4\frac{1}{2}a=2\frac{1}{2}\times 9。\qquad \therefore\quad a=5\text{哩。}$$

又B之追及A。共行$x-4$時。A行$x-3$時。故

$$b(x-4)=a(x-3)。\ \text{即}\ 6(x-4)=5(x-3)。\ \therefore\ x=9\text{時。}$$

而所求之距離。爲距甲地$6(x-4)$哩。即$6(9-4)=30$哩。

34. 長60碼之汽車與長72碼之汽車，在平行之鐵道上。同向而行。經12秒始通過。今若緩車之速度增$\frac{1}{2}$。則其通過時間須24秒。求兩車每時之速度各若干。　　答45及$22\frac{1}{2}$哩。

〔解〕急車每時之速爲x哩。緩車每時之速爲y哩。則得

$$\frac{12}{60\times60}(x-y)=\frac{60+72}{1760}\text{ 及 }\frac{24}{60\times60}\left(x-\frac{3}{2}y\right)=\frac{60+72}{1760}。$$

35. A及B各出180鎊。分給若干貧民，B比A每人多給6鎊。故比A少給40人。問A給每人之金數。　　答3鎊。

〔解〕所求之金爲x鎊，則A所給之人數爲$\frac{180}{x}$人。

由是 $\frac{180}{x}-40=\frac{180}{x+6}$。故 $x^2+6x-27=0$。

卽 $(x-3)(x+9)=0$。　$\therefore$　$x=3$。而$x=-9$不用。

36. 有三船航過兩港間。第一比第二每時之速度疾半浬，故航過時間少$1\frac{1}{2}$時。又第二比第三每時疾$\frac{3}{4}$。故航過時間少$2\frac{1}{2}$時，求兩港間之距離。　　答450浬。

〔解〕所求之距離爲x浬。每時之速第一爲y浬，第二爲$\left(y-\frac{1}{2}\right)$浬。第三爲$y-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$，卽$\left(y-\frac{5}{4}\right)$浬，

依題理。$\frac{x}{y-\frac{1}{2}}=\frac{x}{y}+1\frac{1}{2}$。卽 $x=3y\left(y-\frac{1}{2}\right)$。

又 $\frac{x}{y-\frac{5}{4}}=\frac{x}{y}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}$。卽 $x=\frac{16}{5}y\left(y-\frac{5}{4}\right)$。

由是 $3y\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{16}{5}y\left(y-\frac{5}{4}\right)$。　$\therefore$　$y=\frac{25}{2}$。

故　$x=3y\left(y-\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{25}{2}\left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\right)=450$浬。

37. A及B往復於P及Q兩地，A比B後1時從P起行。至離Q 2哩之處追及B。更經32分又與B會。迨A歸P地時。則離B 4哩。問PQ之距離若干。　　答30哩。

〔解〕PQ之距離 $=x$ 哩，A及B每時之速爲a及b。因A比B後1時起程。而至離Q 2哩之處追及B，故

$$\frac{x-2}{b}-\frac{x-2}{a}=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

但B離A 4哩時。則已在歸途，因前已近Q 2哩故也，

由是
$$\frac{2x-4}{b}-\frac{2x}{a}=1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

2乘(1)式減(2)式，則 $\frac{4}{a}=1$，　∴ $a=4$，

A追及B後又行2哩，達於Q而歸，則B即在此2哩之途中再會A，故此32分間，共行2哩 $\times 2=4$ 哩明矣。

由是 $\frac{32}{60}a+\frac{32}{60}b=4$。　即 $a+b=\frac{15}{2}$。

$a=4$。故 $4+b=\frac{15}{2}$。　∴ $b=\frac{7}{2}$。

由是從(1)式 $\frac{x-2}{\frac{7}{2}}-\frac{x-2}{4}=1$。　∴ $x=30$。

第拾貳編

雜定理及雜例題

153. 消去法 (Elimination) 在通同方程式內。其方程式之數。若多於已可決定未知數量之方程式。則此諸方程式之常數。必有種種之關係。而決定此關係之理。甚爲緊要。

求得之關係式。必令其合一未知數量。故須由諸方程式，將其未知數量逐出之。但逐出二字。其意欠雅。故稱爲消去未知數量。

消去法。在代數學中。頗有一番學力。學者能熟於消去法，則其於代數學思過半矣。

予所改消去法之處。實較斯密氏法少優。可以自信。

〔第一例〕 $ax+b=0.\ a'x+b'=0$。消去 x。

從第一 $ax=-b$。從第二 $-b'=a'x$。

此兩方程式。順次相乘，則 $ax(-b')=-b(a'x)$ 而 $x\neq0$。故 $ab'=a'b$。

$\therefore\ ab'-a'b=0$。此爲所求之常數關係式。

〔第二例〕從下之方程式消去 x 及 y。

$$a\,x+b\,y+c\ =0$$
$$a'\,x+b'\,y+c'\ =0$$
$$a''x+b''y+c''=0$$

依 143 章十文字之法從一二兩方程式。

$$\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}=K$$

又變第三 $a''x+b''y+c''=0$ 式，爲下式。

$$a''(bc'-b'c)\frac{x}{bc'-b'c}+b''(ca'-c'a)\frac{y}{ca'-c'a}+c''(ab'-a'b)\frac{1}{ab'-a'b}=0$$

即 $a''(bc'-b'c)K+b''(ca'-c'a)K+c''(ab'-a'b)K=0$

$K\neq0$。 $\therefore\ a''(bc'-b'c)+b''(ca'-c'a)+c''(ab'-a'b)=0$，即爲所求之關係式。

有 $n-1$ 個未知數量。而有 n 個之一次方程式。其一般之消去法。詳於後編定準數。而此例爲其特例。

〔第三例〕從方程式 $ax^2+bx+c=0$。及 $a'x^2+b'x+c'=0$ 消去 x。

依 143 章 $\dfrac{x^2}{bc'-b'c}=\dfrac{x}{ca'-c'a}=\dfrac{1}{ab'-a'b}=K$。

$$K^2=\left(\frac{x}{ca'-c'a}\right)^2=\left(\frac{x^2}{bc'-b'c}\right)\left(\frac{1}{ab'-a'b}\right)。$$

$\therefore\quad (ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)$。

此關係式。爲兩代數式 ax^2+bx+c 及 $a'x^2+b'x+c'$。有 $x-\alpha$ 之公因子。故其關係式相同。何則兩式有 $x-\alpha$ 之因子。則以 α 代 x 得 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, 及 $a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0$。消去 α。即上之關係式。

〔第四例〕方程式 $ax^3+bx+c=0$。及 $a'x^3+b'x+c'=0$。消去 x。

與第三例同。即 $\dfrac{x^3}{bc'-b'c}=\dfrac{x}{ca'-c'a}=\dfrac{1}{ab'-a'b}=K$。

$$K^3=\left(\frac{x}{ca'-c'a}\right)^3=\left(\frac{x^3}{bc'-b'c}\right)\left(\frac{1}{ab'-a'b}\right)^2。$$

$\therefore\quad (ca'-c'a)^3=(bc'-b'c)(ab'-a'b)^2$ 爲關係式。

〔第五例〕從下之方程式消去 x。

$$ax^2+bx+c=0\dotfill(1)$$

$$a'x^3+b'x^2+c'x+d=0\dotfill(2)$$

以 $a'x$ 乘 (1) 式。a 乘 (2) 式。用減法。則

$$(ab'-a'b)x^2+(ac'-a'c)x+ad=0\dotfill(3)$$

從 (1) 式及 (3) 式。如第三例。即得關係式。

〔第六例〕從下之方程式。消去 x, y, z。

$$x+y+z=a\dotfill(1)$$

$$x^2+y^2+z^2=b^2\dotfill(2)$$

$$x^3+y^3+z^3=c^3\dotfill(3)$$

$$xyz=d^3\dotfill(4)$$

從 (3) 式及 (4)。得 $x^3+y^3+z^3-3xyz=c^3-3d^3$。

即 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=c^3-3d^3$。

則 $\frac{1}{2}(x+y+z)\{3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2\}=c^3-3d^3$。

以(1)及(2)兩式代入此式。則得

$$\frac{1}{2}(a)\{3(b^2)-(a)^2\}=c^3-3d^3。$$

$a^3+2c^3-6d^3-3ab^2=0$。即所求之關係式。

［第七例］從下之方程式消去 x, y, z。

$$x^2(y+z)=a^2 \dots\dots(1)$$
$$y^2(z+x)=b^2 \dots\dots(2)$$
$$z^2(x+y)=c^2 \dots\dots(3)$$
$$xyz=abc \dots\dots(4)$$

(1), (2), (3)三式相加。又以2倍(4)式加之。則得

$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz=a^2+b^2+c^2+2abc$。

即 $x^2(y+z)+x(y^2+z^2+2yz)+yz(y+z)=a^2+b^2+c^2+abc$,

即 $(y+z)\{x^2+x(y+z)+yz\}=a^2+b^2+c^2+abc$。

即 $(y+z)(x+y)(x+z)=a^2+b^2+c^2+abc$。

以此乘(4)式之平方 $x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$。則得

$x^2(y+z)y^2(z+x)z^2(x+y)=a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2+2abc)$。

又以(1), (2), (3)三式代入此式。則

$$a^2b^2c^2=a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2+2abc)。$$

a, b, c 非爲0。故 $a^2b^2c^2 \neq 0$。

$\therefore\ 1=a^2+b^2+c^2+2abc$。即所求之關係式。

［第八例］從下之方程式。消去 l, m, n, l', m', n'。

$$ll'=a,\quad mm'=b,\quad nn'=c。$$

$mn'+m'n=2f,\quad nl'+n'l=2g,\quad lm'+l'm=2h$。

以後之三方程式相乘而括合之。則得

$$8fgh=2lmnl'm'n'+ll'(m^2n'^2+m'^2n^2)+mm'(n^2l'^2+n'^2l^2)+nn'(l^2m'^2+l'^2m^2)$$
$$=ll'(mn'+m'n)^2+mm'(nl'+n'l)^2+nn'(lm'+l'm)^2-4ll'mm'nn'$$
$$=a(2f)^2+b(2g)^2+c(2h)^2-4abc,$$

$\therefore\ abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$。即關係式。

(154.) 普通二次式之定理 x及y之最普通二次式。可分割爲x及y之一次兩因子。

x及y之最普通二次式如下。

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c \quad \ldots\ldots(1)$$

上之代數式。與下之一次兩因子之積全相等。試求其關係式。

$$(lx+my+n)(l'x+m'y+n') \quad \ldots\ldots(2)$$

但l, m, n, l', m', n'爲不含x及y者。

以(2)式之兩因子相乘。則得

$$ll'x^2+(lm'+l'm)xy+mm'y^2+(nl'+n'l)x+(mn'+m'n)y+nn'。$$

是全與(1)式同。故與(1)式比較其x^2, xy, y^2, x, y之係數及常數項。則

$$ll'=a,\quad lm'+l'm=2h,\quad mm'=b,\quad nl'+n'l=2g。$$

$mn'+m'n=2f,\quad nn'=c$。此泓同方程式。全與153章之第八例同。由是所求之關係式。爲

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0 \quad \ldots\ldots(3)$$

例題

1. $12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+\lambda$。爲$x$及$y$之一次兩因子之積。則$\lambda$之值若何。 答 $\lambda=2$。

〔解〕$a=12,\quad 2h=-10,\quad b=2,\quad 2g=11,\quad 2f=-5,\quad \lambda=c$。

故由(3)式得。

$$12\times 2\lambda+(-5)\frac{11}{2}\left(-\frac{10}{2}\right)-12\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\left(\frac{11}{2}\right)^2-\lambda\left(-\frac{10}{2}\right)^2=0,$$

即 $24\lambda+\dfrac{5^2\times 11}{2}-75-\dfrac{11^2}{2}-25\lambda=0$。 $\therefore\ \lambda=2$。

2. $12x^2+36xy+\lambda y^2+6x+6y+3$。爲$x$及$y$之一次兩因子之積。則$\lambda$之值若何。 答 $\lambda=28$。

此例亦如前例。可從(3)式求得λ。

155. 文字值之制限 單方程式。含二未知數量。或諸未知數量。其未知數量。若任意不加限制。則可得無限之值。例如$x+y=5$。若$x=1$。則$y=4$。$x=2$。則$y=3$。又$x=6$。則$y=-1$。是所得

x,y之值。可至無限。然其未知數量,或爲有限制之數。則其答數。亦必有限。例如$x+y=5$。其x及y之值。以正整數爲限制,則除$x=1,y=4$,及$x=2,y=3$,及$x=3,y=2$,及$x=4,y=1$,及$x=5,y=0$之六組外。更無答數。

又如單方程式$2x+5y=7$。x及y爲正整數,則除$x=1,y=1$外。更無答數。

又 $3(x-a)^2+4(y-b)^2=0$。各文字之數量。限爲實數量。則除$x-a=0$。$y-b=0$。即$x=a$。$y=b$。此外別無答數。何則。因原方程式文字之項爲平方。必兩項俱爲正數。故非兩項皆爲0。則其式不能等於0。(下之例題各文字爲實數)。

例 題

1. $(a+b+c)^2=3(bc+ca+ab)$。則$a=b=c$。試證之。

此題若不注意於155章之理論。則亦不易解。

(證) 以原方程式之左邊。展其平方而化爲簡式。則得

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

即 $\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$。

此式左邊爲平方數之和。故爲正數。由是各文字項。不能不爲0。

$\therefore\quad a=b,\quad b=c,\quad c=a$。

2. x, x', y, y'均爲實數而

$$2(x^2+x'^2-xx')(y^2+y'^2-yy')=x^2y^2+x'^2y'^2$$

求證$x=x'$, $y=y'$。

(證) 解左邊與右邊同整列爲x之方乘。則

$$x^2(y^2+2y'^2-2yy')-2xx'(y^2+y'^2-yy')+x'^2(2y^2+y'^2-2yy')=0$$

$\therefore\quad (x^2-2xx'+x'^2)(y^2-2yy'+y'^2)+x^2y'^2-2xx'yy'+x'^2y^2=0$。

即 $(x-x')^2(y-y')^2-(xy'-x'y)^2=0$。

由是$(x-x')(y-y')=0$。及$xy'-x'y=0$。

從第一$x=x'$,或$y=y'$。

$x=x'$,則從第二$xy'-x'y=0$。得$x=0$,或$y=y'$。又$y=y'$。則從第二。得$y=0$,或$x=x'$。

但 $x=y=0$。則亦 $x'=y'=0$。

由是 $y=y'$, $x=x'$, 爲所求之結果。

3. $$\left.\begin{aligned} a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots\dots\dots\dots &= p^2 \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2+\dots\dots\dots\dots &= q^2 \\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\dots\dots\dots\dots &= pq \end{aligned}\right\} \text{證 } \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\dots\dots\dots\frac{p}{q}$$

但各數量爲實數。

〔解〕第一第二及第三。順次以 p^2, q^2 及 $\frac{1}{2}pq$ 除之，則

得
$$\left(\frac{a_1}{p}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}\right)^2+\left(\frac{a_3}{p}\right)^2+\dots\dots\dots\dots = 1\dots\dots\dots(1)$$

$$\left(\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{b_2}{q}\right)^2+\left(\frac{b_3}{q}\right)^2+\dots\dots\dots\dots =1\dots\dots\dots(2)$$

及
$$2\left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{b_1}{q}\right)+2\left(\frac{a_2}{p}\right)\left(\frac{b_2}{q}\right)+2\left(\frac{a_3}{p}\right)\left(\frac{b_3}{q}\right)+\dots=2\dots(3)$$

(1), (2) 兩式相加。又減 (3) 式而括之。則得

$$\left(\frac{a_1}{p}-\frac{b_1}{q}\right)^2+\left(\frac{a_2}{p}-\frac{b_2}{q}\right)^2+\left(\frac{a_3}{p}-\frac{b_3}{q}\right)^2+\dots\dots\dots=0。$$

此左邊之各項爲正數，

$$\therefore\ \frac{a_1}{p}-\frac{b_1}{q}=0,\quad \frac{a_2}{p}-\frac{b_2}{q}=0,\quad \frac{a_3}{p}-\frac{b_3}{q}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

由是 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\dots\dots\dots\dots=\frac{p}{q}$。

156. 三次恆同式 其最要之公式有三，即

$$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

及
$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \\ &=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)。\end{aligned}$$

前之二式甚易明瞭。後一式亦已說明於139章，此則示其應用之例。其 ω 爲1之立方虛根。

〔第一例〕 $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$

$$=2(a^3+b^3+c^3-3abc)。$$

〔證〕由公式左邊 $=\frac{1}{2}(\overline{a+b}+\overline{b+c}+\overline{c+a})$

$$\{(\overline{a+b}-\overline{b+c})^2+(\overline{b+c}-\overline{c+a})^2+(\overline{c+a}-\overline{a+b})^2\}$$

$$=(a+b+c)\{(a-c)^2+(b-a)^2+(c-b)^2\}$$

$$=2\times\frac{1}{2}(a+b+c)\{(c-a)^2+(a-b)^2+(b-c)^2$$

$$=2(a^3+b^3+c^3-3abc)。$$

〔第二例〕 $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3$

$$-3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4(a^3+b^3+c^3-3abc)。$$

〔證〕左邊 $=\frac{1}{2}(\overline{b+c-a}+\overline{c+a-b}+\overline{a+b-c})$

$\{(\overline{b+c-a}-\overline{c+a-b})^2$ 以下二項，為 a, b, c 之等勢$\}$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{4(b-a)^2+4(c-b)^2+4(a-c)^2\}$$

$$=4\times\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$$=4(a^3+b^3+c^3-3abc)。$$

〔第三例〕 $(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$
$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$。

〔證〕左邊 $=\frac{1}{2}(\overline{x^2-yz}+\overline{y^2-zx}+\overline{z^2-xy})$

$$\{(\overline{x^2-yz}-\overline{y^2-zx})^2+(\overline{y^2-zx}-\overline{z^2-xy})^2+(\overline{z^2-xy}-\overline{x^2-yz})^2\}$$

$=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\{(x+y+z)^2(x-y)^2+$ 下二項為等勢$\}$

$$=\frac{1}{4}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}(x+y+z)^2\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$

$$=\{\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\}^2=x^3+y^3+z^3-3xyz)^2。$$

〔第四例〕 試證 $(x^3+y^3+z^3-3xyz)(a^3+b^3+c^3-3abc)$，
可以 $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$ 之形表之。

〔證〕由公式 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$，
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$，

但 $(x+y+z)(a+b+c)=(ax+by+cz)+(bx+cy+az)+(cx+ay+bz)$,

$(x+\omega y+\omega^2 z)(a+\omega^2 b+\omega c)$

$$=(ax+by+cz)+\omega^2(bx+cy+az)+\omega(cx+ay+bz)。$$

$(x+\omega^2 y+\omega z)(a+\omega b+\omega^2 c)$

$$=(ax+by+cz)+\omega(bx+cy+az)+\omega^2(cx+ay+bz)。$$

令 $ax+by+cz=X$, $bx+cy+az=Y$, $cx+ay+bz=Z$。

則 $(x^3+y^3+z^3-3xyz)(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$$=(X+Y+Z)(X+\omega Y+\omega^2 Z)(X+\omega^2 Y+\omega Z)=X^3+Y^3+Z^3-3XYZ。$$

157. 定義 用 $\equiv$ 記號於兩代數式之間。即示兩代數式全然相同而為恆同式,

例如 $a^2-b^2\equiv(a+b)(a-b)$。

又 $\sum$ 記號所以示諸數量同類項之和。

例如 $a+b+c\equiv\sum a$, $ab+bc+ca\equiv\sum ab$。

由是 $(a+b+c+\ldots)^2\equiv a^2+b^2+c^2+\ldots\ldots+2ab+2ac+\ldots\ldots+2bc+\ldots\ldots$

畧書之為 $(\sum a)^2\equiv\sum a^2+2\sum ab$。

又 Π 記號為示同類數文字項之積之略號。

例如 $abc\equiv\Pi a$, $\Pi(b+c)=(b+c)(c+a)(a+b)$。

a^2b 為同類而 a,b,c 之輪換為 b^2c, c^2a。

故 $\sum a^2b\equiv a^2b+b^2c+c^2a$。

又 $\Pi a^2b\equiv a^2b\times b^2c\times c^2a$。

158. 雜例 以下示以要用之例,

〔第一例〕 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$。則

$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}$。但 n 為正整數。

〔證〕 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$。

由此已知恆同式。得 $3(b+c)(c+a)(a+b)=0$。

即 $b+c=0$ (1), 或 $c+a=0$ (2), 或 $a+b=0$ (3)。

(1) $b+c=0$。則 $b=-c$, 及 $a+b+c=a$。

$\therefore$ $a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}+(-c)^{2n+1}+c^{2n+1}$

$$=(a+b+c)^{2n+1}-c^{2n+1}+c^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}。$$

(2) $c+a=0$ 則 $c=-a$, 及 $a+b+c=b$。

$\therefore\ a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=a^{2n+1}+(a+b+c)^{2n+1}+(-a)^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}$。

(3) $a+b=0$, 可以同法推之。

〔第二例〕若 x, y, z 爲不等。而

$y^3+z^3+m(y^2+z^2)=z^3+x^3+m(z^2+x^2)=x^3+y^3+m(x^2+y^2)$。則此各式均等於 $2xyz$。又 $x+y+z+m=0$。

〔證〕$y^3+z^3+m(y^2+z^2)=z^3+x^3+m(z^2+x^2)$。故

$y^3-x^3+m(y^2-x^2)=0$ 卽 $(y-x)\{y^2+yx+x^2+m(y+x)\}=0$。

依題理 $y\neq x$。故 $y-x$ 非爲 0。

由是 $$y^2+yx+x^2+m(y+x)=0\cdots\cdots(1)$$

又 $z^3+x^3+m(z^2+x^2)=x^3+y^3+m(x^2+y^2)$。由同法,

$z-y$ 非爲 0。故 $z^2+zy+y^2+m(z+y)=0\cdots\cdots(2)$

從 (1) 式減 (2) 式而括之。則 $(x-z)(x+z+y+m)=0$。而

$x-z$ 非爲 0。故 $x+y+z+m=0$。卽如題言。

次以 $m=-(x+y+z)$ 代於 (1) 式。則

$y^2+yx+x^2-(x+y+z)(y+x)=0$。卽 $xy+yz+zx=0\cdots\cdots(3)$

但 $y^3+z^3+m(y^2+z^2)=y^3+z^3-(x+y+z)(y^2+z^2)$

$=-(y^2x+z^2y+y^2z+z^2x)$

$=-y(xy+yz)-z(yz+zx)$

從 (3) 式 $=-y(-zx)-z(-xy)$

$=2xyz$。

〔第三例〕$a+b+c+d=0$。則

$a^4+b^4+c^4+d^4=2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd$。

〔證〕從 $a+b=-(c+d)$。則 $a^2+b^2+2ab=c^2+d^2+2cd$。

故 $a^2+b^2-c^2-d^2=2(cd-ab)$。又平方之。則

$a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2c^2d^2-2a^2c^2-2b^2c^2-2a^2d^2-2b^2d^2$

$=4(c^2d^2-2abcd+a^2b^2)$。

故 $\sum a^4=2a^2b^2+2c^2d^2+2a^2c^2+2b^2c^2+2a^2d^2+2b^2d^2-8abcd$

$=2(ab-cd)^2+2(ac-bd)^2+2(ad-bc)^2+4abcd$。

〔第四例〕 $ax+by+cz=0$。 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$0。則

$ax^3+by^3+cz^3=-(a+b+c)(y+z)(z+x)(x+y)$。

(證) 用143章文字之法。則兩方程式如下。

$ax+by+cz=0$.........(1) $ayz+bzx+cxy=0$.........(2)

從(1)式及(2)式 $\frac{a}{y.xy-zx.z}=\frac{b}{z.yz-xy.x}=\frac{c}{x.zx-yz.y}$。

即 $\frac{a}{x(y^2-z^2)}=\frac{b}{y(z^2-x^2)}=\frac{c}{z(x^2-y^2)}=K$。

依113章分數之定理。則

$$K=\frac{ax^3+by^3+cz^3}{x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)}。$$

$$=\frac{ax^3+by^3+cz^3}{-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)}\text{........................}(3)。$$

又 $K=\frac{a+b+c}{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)}=\frac{a+b+c}{(y-z)(z-x)(x-y)}$......(4)。

從(3)式及(4)式 $\frac{ax^3+by^3+cz^3}{(y+z)(z+x)(x+y)}=a+b+c$。

例題十六

1. $\frac{x}{y+z}=a$, $\frac{y}{z+x}=b$, $\frac{z}{x+y}=c$。則 $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$。

(證) 從第一 $\frac{y+z}{x}=\frac{1}{a}$,加1則 $\frac{x+y+z}{x}=\frac{1+a}{a}$。

即 $\frac{x}{x+y+z}=\frac{a}{1+a}$ 由同理 $\frac{y}{x+y+z}=\frac{b}{1+b}$,

$\frac{x}{x+y+z}=\frac{c}{1+c}$。 ∴ $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1$。

2. $ax+by=0$, 及 $cx^2+dxy+cy^2=0$, 則 $a^2c+b^2c=abd$,

(證) $y=-\frac{ax}{b}$ 代入第二式。則 $cx^2+dx\left(-\frac{ax}{b}\right)+c\left(-\frac{ax}{b}\right)^2=0$。

即 $(b^2c-abd+a^2c)x^2=0$。 ∴ $b^2c+a^2c=abd$。

3. 從 $\frac{y-z}{y+z}=a$, $\frac{z-x}{z+x}=b$, $\frac{x-y}{x+y}=c$, 消去 x, y, z,

答 $a+b+c+abc=0$。

〔解〕 $x+y=X$, $y+z=Y$, $z+x=Z$。則

第一 $\frac{(x+y)-(z+x)}{y+z}=a$ 爲 $\frac{X-Z}{Y}=a$,

即 $\frac{Z-X}{Y}=-a$, 同法從第二第三 $\frac{X-Y}{Z}=-b$, $\frac{Y-Z}{X}=-c$,

由加法 $-(a+b+c)=\frac{Z-X}{Y}+\frac{X-Y}{Z}+\frac{Y-Z}{X}$

$$=\frac{ZX(Z-X)+XY(X-Y)+YZ(Y-Z)}{XYZ}=\frac{-(X-Y)(Y-Z)(Z-X)}{XYZ}。$$

即 $a+b+c=\frac{X-Y}{X}\cdot\frac{Y-Z}{Y}\cdot\frac{Z-X}{Z}=(-b)(-c)(-a)=-abc$,

$\therefore$ $a+b+c+abc=0$。

4. 從 $\frac{y}{x}+\frac{x}{z}=a$, $\frac{z}{y}+\frac{y}{x}=b$, $\frac{x}{z}+\frac{z}{y}=c$, 消去 x, y, z,

答 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=8$,

〔解〕 於第一加第二減第三，則 $\frac{2y}{x}=a+b-c$。同法

$\frac{2z}{y}=b+c-a$, $\frac{2x}{z}=c+a-b$。

$\therefore$ $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=\frac{2y}{x}\cdot\frac{2z}{y}\cdot\frac{2x}{z}=8$,

5. $x+\frac{1}{y}=1$, $y+\frac{1}{z}=1$, 則 $z+\frac{1}{x}=1$。試證之,

〔證〕 $z+\frac{1}{x}=\frac{1}{\frac{1}{z}}+\frac{1}{x}=\frac{1}{\left(y+\frac{1}{z}\right)-y}+\frac{1}{\left(x+\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y}}=\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-\frac{1}{y}}$。

$=\frac{1}{1-y}-\frac{y}{1-y}=1$。

6. 從 $a+c=\frac{b}{x}-dx$, $a-c=\frac{d}{x}-bx$。消去 x,

答 $\frac{c^2}{(b-d)^2}-\frac{a^2}{(b+d)^2}=1$,

〔解〕由加法 $2a=\frac{1}{x}(b+d)-x(b+d)$。 $\therefore\ \frac{2a}{b+d}=\frac{1}{x}-x$。

由減法 $2c=\frac{1}{x}(b-d)+x(b-d)$。 $\therefore\ \frac{2c}{b-d}=\frac{1}{x}+x$。

由是 $\frac{4c^2}{(b-d)^2}-\frac{4a^2}{(b+d)^2}=\left(\frac{1}{x}+x\right)^2-\left(\frac{1}{x}-x\right)^2=4$。

7. 從 $x^2-yz=a,\ y^2-zx=b,\ z^2-xy=c,\ ax+by+cz=d$, 消去 x, y, z。

答 $a^3+b^3+c^3-3abc=d^2$。

〔解〕 $x(x^2-yz)+y(y^2-zx)+z(z^2-xy)=ax+by+cz$。

即 $x^3+y^3+z^3-3xyz=d$..(1)

又依56章第三例。

$$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$$
$$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2。$$

即 $a^3+b^3+c^3-3abc=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$......................(2)

由是從(1)(2) $a^3+b^3+c^3-3abc=d^2$。

8. $x+y+z=a,\ x^2+y^2+z^2=b^2,\ x^3+y^3+z^3-3xyz=c^3$。試於此式示任意之根。及 a, b, c 之關係。 答 $a^3+2c^3=3ab^2$。

〔解〕於此三方程式。求 x, y, z。則各消去後，其値不能求得。即 x, y, z 之答爲 ∞，

故變第三方程式。爲 $\frac{1}{2}(x+y+z)\{3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2\}=c^3$，

故以第一及第二方程式。代於此式。則

$\frac{1}{2}a\{3b^2-a^2\}-c^3$。 $\therefore\ 3ab^2=a^3+2c^3$。

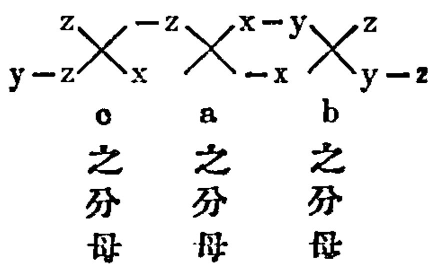
9. $bz+cy=cx+az=ay+bx$ 及 $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=0$ 則 $a\pm b\pm c=0$。

〔證〕從最初之方程式

$az-bx+c(x-y)=0$。 $a(y-z)+bx-cx=0$。

從此兩方程式。用十文字之法。

$$\frac{a}{zx-x(x-y)}=\frac{b}{(x-y)(y-z)+zx}=\frac{c}{zx+z(y-z)}。$$



即 $\frac{a}{x(y+z-x)}=\frac{b}{y(z+x-y)}=\frac{c}{z(x+y-z)}=K$ …………………………(A)

從 (A) $a+b+c=K\{x(y+z-x)+y(z+x-y)+z(x+y-z)\}$

$=-K(x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2zx)$

但從最後之方程式 $=-K(0)$，由是 $a+b+c=0$，

又從最初之兩方程式用十文字之法，

$$\frac{x}{a(b+c-a)}=\frac{y}{b(c+a-b)}=\frac{z}{c(a+b-c)}=\lambda$$

即 $x=a\lambda(b+c-a)$，$y=b\lambda(c+a-b)$，$z=c\lambda(a+b-c)$

代於最後之方程式而括之，則

$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$。

由是 $\pm a\pm b\pm c=0$。畧之得 $a\pm b\pm c=0$。

10. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，則 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。

(證) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1^2$ 即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{2xyz}{abc}\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=1$。

故從第二 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$。

11. $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$ 則 $x^2y^2z^2=1$ 或 $x=y=z$。

(證) $yz(x-y)=y-z$，$zx(y-z)=z-x$，$xy(z-x)=x-y$，

由是 $x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)=(x-y)(y-z)(z-x)$，

$\therefore$ $x^2y^2z^2=1$。 $x-y=0$ 或 $y-z=0$ 即 $x=y=z$。

12. $x=cy+bz$，$y=az+cx$，$z=bx+ay$，則

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}。$$

(證) $x-cy-bz=0$，$cx-y+az=0$，$bx+ay-z=0$，

從第一第二用十文字之法。$\frac{x}{-ca-b}=\frac{y}{-bc-a}=\frac{z}{-1+c^2}$。

即 $\frac{x}{ca+b}=\frac{y}{cb+a}=\frac{z}{1-c^2}$ …………………………(1)

第二第三依同法，及第三第一亦依同法，

$$\frac{x}{1-a^2}=\frac{y}{ab+c}=\frac{z}{ca+b} \text{ …………………………(2)}$$

及 $\dfrac{x}{ab+c}=\dfrac{y}{1-b^2}=\dfrac{z}{bc+a}$ ……………………………(3)

從(1)及(3) $\dfrac{y^2}{(bc+a)(1-b^2)}=\dfrac{z^2}{(1-c^2)(bc+a)}$。 $\therefore\ \dfrac{y^2}{1-b^2}=\dfrac{z^2}{1-c^2}$。

又從(2)及(3)依同法 $\dfrac{x^2}{1-a^2}=\dfrac{y^2}{1-b^2}$。

13. $x^2=y^2+z^2+2ayz,\ y^2=z^2+x^2+2bzx,\ z^2=x^2+y^2+2cxy$。則

$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}。$$

〔證〕 $x^2-(y^2+z^2)=2ayz$ 平方之.則 $x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2+z^2)^2=4a^2y^2z^2$,

即 $x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2-z^2)^2=-4y^2z^2(1-a^2)$,

即 $\sum x^4-2\sum y^2z^2=-4y^2z^2(1-a^2)$,

同法 $\sum x^4=2\sum y^2z^2=-4z^2x^2(1-b^2)$。 $\sum x^4-2\sum y^2z^2=-4x^2y^2(1-c^2)$。

由是 $y^2z^2(1-a^2)=z^2x^2(1-b^2)=x^2y^2(1-c^2)$。以此除 $x^2y^2z^2$。即得所求之結果。

14. x, y, z 爲不等。而 $y=\dfrac{a+bz}{c+dz}$, $z=\dfrac{a+bx}{c+dx}$, $x=\dfrac{a+by}{c+dy}$。

則 $ad+bc+b^2+c^2=0$。試證之。

〔證〕本題三方程式之常數a, b, c, d在同位置。當注意。

第一之z。以第二代用之。則

$$y=\frac{a+b\left(\dfrac{a+bx}{c+dx}\right)}{c+d\left(\dfrac{a+bx}{c+dx}\right)}=\frac{a(b+c)+(b^2+ad)x}{c^2+ad+d(b+c)x}。$$ 又從第三 $y=\dfrac{a-cx}{dx-b}$。

由是 $\dfrac{a(b+c)+(b^2+ad)x}{c^2+ad+d(b+c)x}=\dfrac{a-cx}{dx-b}$。去分母而括之,則

$(b^2+c^2+ad+bc)\{dx^2+(c-b)x-a\}=0$。

$\therefore\ b^2+c^2+ad+bc=0$。 或 $dx^2+(c-b)x-a=0$。

然 $dx^2+(c-b)x-a=0$。 則 $x(dx+c)=a+bx$。故變此方程式爲 $x=\dfrac{a+bx}{c+dx}$。然第一爲 $y=\dfrac{a+bx}{c+dx}$。 故 $x=y$。然依題意,則 $x\neq y$。由是 $b^2+c^2+ad+bc=0$。爲眞確無疑。

15. 從$\frac{x^2}{yz}+\frac{yz}{x^2}=l$, $\frac{y^2}{zx}+\frac{zx}{y^2}=m$, $\frac{z^2}{xy}+\frac{xy}{z^2}=n$。消去 x, y, z。

答 $l^2+m^2+n^2-lmn-4=0$。

〔解〕最初之兩方程式相乘。則 $\left(\frac{x^2}{yz}+\frac{yz}{x^2}\right)\left(\frac{y^2}{zx}+\frac{zx}{y^2}\right)=lm$。

即 $\frac{z^2}{xy}+\frac{xy}{z^2}+\frac{y^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3}=lm$。從此式減第三。則 $\frac{y^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3}=lm-n$。

此式乘第三。則 $\left(\frac{z^2}{xy}+\frac{xy}{z^2}\right)\left(\frac{y^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3}\right)=n(lm-n)$。

即 $\frac{y^2z^2}{x^4}+\frac{x^4}{y^2z^2}+\frac{y^4}{z^2x^2}+\frac{z^2x^2}{y^4}=lmn-n^2$。

即 $\left(\frac{yz}{x^2}+\frac{x^2}{yz}\right)^2-2+\left(\frac{y^2}{zx}+\frac{zx}{y^2}\right)^2-2=lmn-n^2$。

第一及第二代於此式。則 $l^2-2+m^2-2=lmn-n^2$。

16. 從 $bx^2+lx+c=0$, $cy^2+my+a=0$, $az^2+nz+b=0$, 及 $xyz=1$。消去 x, y, z。

答 $al^2+bm^2+cn^2+lmn=4abc$。

〔解〕變原方程式爲 $bx+\frac{c}{x}=-l$, $cy+\frac{a}{y}=-m$, $az+\frac{b}{z}=-n$。

$\therefore$ $\left(bx+\frac{c}{x}\right)\left(cy+\frac{a}{y}\right)\left(az+\frac{b}{z}\right)=(-l)(-m)(-n)$ 解此括弧。則

$$abcxyz+\frac{ca^2z}{xy}+\frac{ab^2x}{yz}+\frac{bc^2y}{zx}+\frac{c^2ayz}{x}+\frac{a^2bzx}{y}+\frac{b^2cxy}{z}+\frac{abc}{xyz}=-lmn。$$

$xyz=1$。故 $xy=\frac{1}{z}$, $yz=\frac{1}{x}$, $zx=\frac{1}{y}$。代於上式而括之。則

$$abc+c\left(a^2z^2+\frac{b^2}{z^2}\right)+a\left(b^2x^2+\frac{c^2}{x^2}\right)+b\left(c^2y^2+\frac{a^2}{y^2}\right)+abc=-lmn。$$

即 $2abc+c\left(az+\frac{b}{z}\right)^2-2abc+a\left(bx+\frac{c}{x}\right)^2-2abc+b\left(cy+\frac{a}{y}\right)^2-2abc$

$=-lmn$。

$\therefore$ $2abc+c(-n)^2-2abc+a(-l)^2-2abc+b(-m)^2-2abc=-lmn$。

即 $al^2+bm^2+cn^2-4abc+lmn=0$。

17. 從 $y^2+z^2=ayz$, $z^2+x^2=bzx$, $x^2+y^2=cxy$ 消去 x, y, z, 但 xyz 非爲0。

答 $a^2+b^2+c^2-abc=4$。

〔解〕$xyz\neq 0$, $\therefore$ x, y, z 各不為0。由是以yz除第一。則

$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=a$。同法 $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}=b$, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=c$。

$$\therefore\quad \left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=abc,$$

即 $1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+1=abc$。

即 $\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)^2-4=abc$。

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2-4=abc$,

18. 從 $b\frac{y}{z}+c\frac{z}{y}=a$, $c\frac{z}{x}+a\frac{x}{z}=b$, $a\frac{x}{y}+b\frac{y}{x}=c$，消去第一 x, y, z 及第二 a, b, c。 答 $a^3+b^3+c^3-5abc$, $y^3z^3+z^3x^3+x^3y^3=-x^2y^2z^2$。

〔解〕(1) 三方程式相乘。則 $\left(b\frac{y}{z}+c\frac{z}{y}\right)\left(c\frac{z}{x}+a\frac{x}{z}\right)\left(a\frac{x}{y}+b\frac{y}{x}\right)=abc$,

即 $abc+b^2c\frac{y^2}{x^2}+c^2a\frac{z^2}{y^2}+a^2b\frac{x}{z^2}+ca^2\frac{x^2}{y^2}+ab^2\frac{y^2}{z^2}+bc^2\frac{z^2}{x^2}+abc=abc$。

$$\therefore\quad abc+c\left(a\frac{x}{y}+b\frac{y}{x}\right)^2-2abc+a\left(b\frac{y}{z}+c\frac{z}{y}\right)^2-2abc$$
$$+b\left(c\frac{z}{x}+a\frac{x}{z}\right)^2-2abc=0,$$

$\therefore\quad c^3+a^3+b^3-5abc=0$,

(2) 去原三方程式之分母。且第一第二皆移項，則

$ayz-by^2-cz^2=0$, $ax^2-bzx+cz^2=0$, $ax^2+by^2=cxy$。

從第一第二用十文字之法。

$$\begin{array}{ccccccc} yz & & -y^2 & & -z^2 & & yz \\ & \times & & \times & & \times & \\ x^2 & & -zx & & z^2 & & x^2 \end{array}$$

$$\frac{a}{-y^2z^2-z^3x}=\frac{b}{-z^2x^2-yz^3}=\frac{c}{-xyz^2+x^2y^2}.$$

此各分數為λ。則

$$\lambda=\frac{ax^2+by^2}{x^2(-y^2z^2-z^3x)+y^2(-z^2x^2-yz^3)}=\frac{cxy}{xy(-xyz^2+x^2y^2)},$$

在第三 ax^2+by^2。等於 cxy。

由是 $x^2(-y^2z^2-z^3x)+y^2(-z^2x^2-yz^3)=xy(-xyz^2+x^2y^2)$,

$\therefore\quad z^3x^3+x^3y^3+y^3z^3+x^2y^2z^2=0$。

19. 從 $ax+yz=bc$, $by+zx=ca$, $cz+xy=ab$, $xyz=abc$, 消去 x, y, z。

答 $\sum b^3c^3=5a^2b^2c^2$。

〔解〕三方程式相乘，則 $(ax+yz)(by+zx)(cz+xy)=(bc)(ca)(ab)$。

即 $abcxyz+xyz(ax^2+by^2+cz^2)+abx^2y^2+bcy^2z^2+caz^2x^2+x^2y^2z^2=a^2b^2c^2$。

因 $xyz=abc$。故

$$a^2b^2c^2+abc(ax^2+by^2+cz^2)+abx^2y^2+bcy^2z^2+caz^2x^2=0,$$

即 $a^2b^2c^2+bc(a^2x^2+y^2z^2)+ca(b^2y^2+z^2x^2)+ab(c^2z^2+x^2y^2)=0$,

即 $a^2b^2c^2+bc(ax+yz)^2-2abcxyz+ca(by+zx)^2-2abcxyz$

$$+ab(cz+xy)^2-2abcxyz=0,$$

$\therefore$ $a^2b^2c^2+bc(bc)^2-2a^2b^2c^2+ca(ca)^2-2a^2b^2c^2+ab(ab)^2-2a^2b^2c^2=0$。

$\therefore$ $b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3=5a^2b^2c^2$。

20. 從 $\dfrac{x^2-xy-xz}{a}=\dfrac{y^2-yz-yz}{b}=\dfrac{z^2-zx-zy}{c}$，及 $ax+by+cz=0$。消去 x, y, z。

答 $a^3+b^3+c^3=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$。

〔解〕各分數爲 λ。則

$$\lambda=\frac{(x^2-xy-xz)-(y^2-yz-yx)-(z^2-zx-zy)}{a-b-c}$$

$$=\frac{(y-z-x)(z-x-y)}{a-b-c}=\frac{(y^2-yz-yx)(z^2-zx-zy)}{yz(a-b-c)}\text{......................}(1)$$

但從原分數 $y^2-yz-yx=b\lambda$, $z^2-zx-zy=c\lambda$。

由是從 (1) $\lambda=\dfrac{bc\lambda^2}{yz(a-b-c)}$。但 $\lambda\neq 0$。

$\therefore$ $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{bc}{yz(a-b-c)}$。 $\therefore$ $\dfrac{xyz}{\lambda}=\dfrac{ax}{\dfrac{a(a-b-c)}{bc}}$ 爲等勢式。

故 $\dfrac{xyz}{\lambda}=\dfrac{ax}{\dfrac{a(a-b-c)}{bc}}=\dfrac{by}{\dfrac{b(b-c-a)}{ca}}=\dfrac{cz}{\dfrac{c(c-a-b)}{ab}}$,

由是 $\dfrac{ax+by}{\dfrac{a(a-b-c)}{bc}+\dfrac{b(b-c-a)}{ca}}=\dfrac{-cz}{-\dfrac{c(c-a-b)}{ab}}$。但 $ax+by=-cz$,

由是 $\dfrac{a(a-b-c)}{bc}+\dfrac{b(b-c-a)}{ca}=-\dfrac{c(c-a-b)}{ab}$。

$\therefore$ $a^2(a-b-c)+b^2(b-c-a)+c^2(c-a-b)=0$。

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)=0$。

21. 從 $a^2yz=\alpha^2(y+z)^2$, $b^2zx=\beta^2(z+x)^2$, $c^2xy=\gamma^2(x+y)^2$。求得下之關係式 $\pm\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}=\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}-4$。

〔證〕三方程式開平方而變化之，則

$$\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{y}}=\pm\frac{a}{\alpha},\ \sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}=\pm\frac{b}{\beta},\ \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\pm\frac{c}{\gamma}。$$

$$\therefore\quad \left(\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{y}}\right)\left(\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)=\pm\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}。$$

即 $1+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1=\pm\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}$。

即 $$2+\left(\sqrt{\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{z}{y}}\right)^2-2+\left(\sqrt{\frac{z}{x}}+\sqrt{\frac{x}{z}}\right)^2-2+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2-2=\pm\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}。$$

$$\therefore\quad \frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}-4=\pm\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}。$$

22. $y^2+z^2+yz=a^2$, $z^2+x^2+zx=b^2$, $x^2+y^2+xy=c^2$。及 $yz+zx+xy=0$ 則 $a\pm b\pm c=0$。

〔證〕原三方程式相加。則 $2\sum x^2+\sum yz=a^2+b^2+c^2$。但 $\sum yz=0$。故 $\sum x^2=\frac{1}{2}\sum a^2$。

從第一減第二而括之。則 $(y-x)(x+y+z)=a^2-b^2$。

$\therefore\quad x+y+z=\frac{a^2-b^2}{y-x}$ 爲等勢式。故 $=\frac{b^2-c^2}{z-y}=\frac{c^2-a^2}{x-z}$。

由是 $(\sum x)^2=\frac{\sum(a^2-b^2)^2}{\sum(y-x)^2}$。即 $\sum x^2+2\sum yz=\frac{2\sum a^4-2\sum b^2c^2}{2\sum x^2-2\sum yz}$。

$\therefore\quad \sum x^2=\frac{\sum a^4-\sum b^2c^2}{\sum x^2}\qquad \therefore\quad (\sum x^2)^2=\sum a^4-\sum b^2c^2$。

$\therefore\quad (\frac{1}{2}\sum a^2)^2=\sum a^4-\sum b^2c^2$。　即　$\sum a^4+2\sum b^2c^2=4\sum a^4-4\sum b^2c^2$。

23. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$。則 $\frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}}$。但 n 爲正整數。

〔證〕$\frac{a+b}{ab}+\frac{a+b}{c(a+b+c)}=0$。　$\therefore\quad (a+b)\{ab+c(a+b)+c^2\}=0$。

即 $(a+b)(a+c)(b+c)=0$。 ∴ $a+b=0$，或 $a+c=0$，或 $b+c=0$，若 $a+b=0$。則 $a=-b$。

$$\therefore\ \frac{1}{a^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{-b^{2n+1}}+\frac{1}{b^{2n+1}}+\frac{1}{c^{2n+1}}=\frac{1}{c^{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{(-b+b+c)^{2n+1}}=\frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}}$$ 其他同法。

24. $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$。則

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0。$$

及 $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1}+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1}=1$，

(證) $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1\right)-\left(1-\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)-\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=0$。

即 $a\{(b+c)^2-a^2\}-b\{b^2-(c-a)^2\}-c\{c^2-(a-b)^2\}=0$。

即 $(b+c-a)\{a(b+c+a)-b(b-c+a)-c(c+a-b)\}=0$，

即 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=0$。

次 $b+c-a=0$。則 $b^2+c^2-a^2=b^2+c^2-(b+c)^2=-2bc$，

$c^2+a^2-b^2=c^2+a^2-(a-c)^2=2ac$，$a^2+b^2-c^2=a^2+b^2-(a-b)^2=2ab$。

故 $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^{2n+1}+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^{2n+1}$

$$=\left(\frac{-2bc}{2bc}\right)^{2n+1}+\left(\frac{2ca}{2ca}\right)^{2n+1}+\left(\frac{2ab}{2ab}\right)^{2n+1}=-1+1+1=1，$$

25. $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=0$。$a^2x^3+b^2y^3+c^2z^3=0$，$\frac{1}{x}-a^2=\frac{1}{y}-b^2=\frac{1}{z}-c^2$。

則 $a^4x^3+b^4y^3+c^4z^3=0$，及 $a^6x^3+b^6y^3+c^6z^3=a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2$。

(證) $\frac{1}{x}-a^2=\frac{1}{y}-b^2=\frac{1}{z}-c^2=\lambda$，則

$$a^2x^3\left(\frac{1}{x}-a^2\right)+b^2y^3\left(\frac{1}{y}-b^2\right)+c^2z^3\left(\frac{1}{z}-c^2\right)=\lambda(a^2x^3+b^2y^3+c^2z^3)，$$

即 $(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-(a^4x^3+b^4y^3+c^4z^3)-\lambda(0)$。

即 $0-(a^4x^3+b^4y^3+c^4z^3)=0$。 ∴ $a^4x^3+b^4y^3+c^4z^3=0$，

又 $a^4x^3\left(\frac{1}{x}-a^2\right)+b^4y^3\left(\frac{1}{y}-b^2\right)+c^4z^3\left(\frac{1}{z}-c^2\right)=\lambda(a^4x^3+b^4y^3+c^4z^3)$，

即 $(a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2)-(a^6x^3+b^6y^3+c^6z^3)=\lambda(0)$，

$\therefore\quad a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2=a^6x^3+b^6y^3+c^6z^3$。

26. $x-\frac{ayz}{x^2}=y-\frac{azx}{y^2}=z-\frac{axy}{z^2}$ 而 x, y, z 爲不等。則各等於 $x+y+z-a$ 試證之。

〔證〕設各數皆等於 λ。則第一第二式。爲 $x^3-ayz=\lambda x^2$, $y^2-azx=\lambda y^2$。由減法得 $x^3-y^3+az(x-y)=\lambda(x^2-y^2)$.

但 $x\neq y$。故兩邊以 $x-y$ 除之。則 $\lambda(x+y)=x^2+xy+y^2+az$。

由同法 $\lambda(y+z)=y^2+yz+z^2+ax$。

又由減法 $\lambda(x-z)=x^2-z^2+y(x-z)-a(x-z)$。但 $x\neq z$。故以 $x-z$ 除之則 $\lambda=x+y+z-a$。

27. x, y, z 爲不等。而 $2a-3y=\frac{(z-x)^2}{y}$, $2a-3z=\frac{(x-y)^2}{z}$.

則 $2a-3x=\frac{(y-z)^2}{x}$。及 $x+y+z=a$。

〔證〕去已知兩方程式之分母。用減法。則

$$y(2a-3y)-z(2a-3z)=(z-x)^2-(x-y)^2。$$

卽 $2a(y-z)-3(y^2-z^2)=(z-y)(z-2x+y)$。因 $y\neq z$。

故 $2a-3(y+z)=-(z-2x+y)$。 $\therefore\quad x+y+z=a$。

從第一方程式。$2(x+y+z)-3y=\frac{(z-x)^2}{y}$。去分母而變化之。

則 $2xy+2yz-y^2=z^2-2zx+x^2$。

$\therefore\quad 2x(y+z+x)-3x^2=y^2-2yz+z^2$。

卽 $2xa-3x^2=(y-z)^2$。 $\therefore\quad 2a-3x=\frac{(y-z)^2}{x}$。

28. $x+\frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}$ 若 x 及 y 互換。其值不變。則 x 及 z 互換。其值亦不變。又若 $x+y+z=1$。則此各式皆爲 0。但各數量皆不等。

〔證〕依題意 $x+\frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}=y+\frac{xz-y^2}{y^2+x^2+z^2}$。

$\therefore\quad (x-y)(x^2+y^2+z^2)=z(x-y)+(x^2-y^2)$。依題意。$x-y\neq 0$。故以 $x-y$ 除之。則 $x^2+y^2+z^2=x+y+z$。

由是 $x+\frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}=x+\frac{yz-x^2}{x+y+z}=\frac{yz+zx+xy}{x+y+z}=z+\frac{yx-z^2}{z+y+x}$。

又 $x+y+z=1$。則 $x^2+y^2+z^2=1$。　∴ 得 $yz+zx+xy=0$。

而上之各式爲等於$\frac{yz+zx+xy}{x+y+z}$。故爲0。

29　$y^3+z^3+m(y+z)=z^3+x^3+m(z+x)=x^3+y^3+m(x+y)$。則此各式等於$2xyz$。但 x, y, z 各不等。

〔證〕 $y^3+z^3+m(y+z)=z^3+x^3+m(z+x)$。　∴ $x^3-y^3+m(x-y)=0$。

但　$x-y\neq0$。　∴ $x^2+xy+y^2+m=0$。同法 $y^2+yz+z^2+m=0$。

由減法 $z^2-x^2+y(z-x)=0$。但 $z-x\neq0$。　∴ $z+x+y=0$。

由是 $x^3+y^3+m(x+y)=(x+y)(x^2-xy+y^2+m)$

$$=(x+y+z-z)(x^2+xy+y^2+m-2xy)=(0-z)(0-2xy)=2xyz.$$

30.　$y^2+z^2+myz=z^2+x^2+mzx=x^2+y^2+mxy$。則各等於$\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$。但 x, y, z 各不等。

〔證〕 與前題同法。從最初之兩相等式 $x+y+mz=0$。

同法 $y+z+mx=0$。　∴ 得 $m=1$。　∴ $x+y+z=0$。

由是各式 $=y^2+z^2+yz=z^2+x^2+zx=x^2+y^2+xy$

$$=\frac{1}{3}\{2(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx\}=\frac{1}{6}\{3(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)。$$

31.　x, y 爲不等。而$\frac{(2x-y-z)^3}{x}=\frac{(2y-z-x)^3}{y}$。則各等於$\frac{(2z-x-y)^3}{z}$。

〔證〕 $x+y+z=s$。　則 $\frac{(3x-s)^3}{x}=\frac{(3y-s)^3}{y}=K$。

卽　$27x^2-27xs+9s^2-\frac{s^3}{x}=27y^2-27ys+9s^2-\frac{s^3}{y}=K$……………(1)

卽　$27(x^2-y^2)-27s(x-y)+\frac{s^3}{xy}(x-y)=0$。但 $x-y\neq0$。

故以 $x-y$ 除之。則 $27(x+y)-27s+\frac{s^3}{xy}=0$。　∴ $s^3=27xyz$.

故(1)之第一邊爲 $K=27x^2-27xs+9s^2-\frac{27xyz}{x}$

$$=9s^2-27(xy+yz+zx)\text{……………(2)}$$

又 $\frac{(2z-x-y)^3}{z}=\frac{(3z-s)^3}{z}=27z^2-27zs+9s^2-\frac{s^3}{z}$

$$=27z^2-27sz+9s^2-\frac{27xyz}{z}=9s^2-27(xy+yz+zx)\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

從 (2) 及 (3) $\frac{(2z-x-y)^3}{z}=K$,

32. a, b, c, d 各爲實數量而非 0。若 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=4abcd$,

則 $a=\pm b$, 及 $c=\pm b$,

〔證〕括之。則 $(ac-bd)^2+(ad-bc)^2=0$。 $\therefore\ ac=bd,\ ad=bc,$

由是 $(ac)(ad)=(bd)(bc)$。 $\therefore\ a^2=b^2$。 $\therefore\ a=\pm b$。

33. a, b, c, x 各爲實數量。而 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$。

則 $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}=x$。

〔證〕從 $(ax-b)^2+(bx-c)^2=0$。 $ax-b=0,\ \ bx-c=0$。

34. $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$。則 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$。

〔證〕解括弧而括之,則 $(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2=0$。

故從 $bx-ay=0,\ \ cy-bz=0,\ \ az-cx=0$。得證。

35. 示下各式之證,

(1) $2(a^2+b^2)=(a+b)^2$。 則 $a=b$。

(2) $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$。 則 $a=b=c$。

(3) $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$。 則 $a=b=c=d$,

(4) $n(a^2+b^2+c^2+\ldots$ n 文字$)=(a+b+c+\ldots\ldots$ n 文字$)^2$。則 $a=b=c=\ldots\ldots$

〔證〕各從前項減後項,則 $a^2-2ab+b^2$。即如 $(a-b)^2$ 項之和,

故 $a-b=0,\ \ b-c=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\therefore\ \ a=b=c\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

36. a, b, c, d 各爲實正數。而 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$, 則 $a=b=c=d$,

〔證〕括原恆同式。則 $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$。

$\therefore$ 從 $a^2=b^2,\ \ c^2=d^2,\ \ ab=cd$, 得 $a=b=c=d$。

37. $(n-1)x^2+2x(a_1-a_n)+a_1^2+2a_2^2+2a_3^2+\ldots\ldots\ldots+2a_{n-1}^2+a_n^2$

$=2(a_1a_2+a_2a_3+\ldots\ldots+a_{n-1}a_n)$。則 $a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots\ldots\ldots=a_n-a_{n-1}=x$。

〔證〕本題亦以 $x, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ 爲實數量。今變原方程式爲

$$(n-1)x^2+2x\{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\ldots\ldots\ldots\ldots+(a_{n-1}-a_n)\}+(a_1-a_2)^2+\ldots\ldots+(a_{n-1}-a_n)^2=0。$$

但 x^2 爲有 $n-1$ 個，故分配而括之。

則 $\{x+(a_1-a_2)\}^2+\{x+(a_2-a_3)\}^2+\ldots\ldots\ldots+\{x+(a_{n-1}-a_n)\}^2=0$。

$\therefore\quad x=a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots\ldots\ldots=a_n-a_{n-1}$。

38. $a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)+abc(a+b+c)$
$$=(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)。$$

〔證〕左邊依 a 之遞降方乘括之，其後當自明瞭。

$$\sum a^3(b+c)=a^3(b+c)+a^2bc+a\{b^3+c^3+bc(b+c)\}+bc(b^2+c^2)$$
$$=a^2(ab+ac+bc)+a(b+c)(b^2-bc+c^2+bc)+bc(b^2+c^2)$$
$$=a^2(ab+ac+bc)+(b^2+c^2)(ab+ac+bc)=(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)。$$

39. $(b+c-a-d)^4(b-c)(a-d)+(c+a-b-d)^4(c-a)(b-d)$
$$+(a+b-c-d)^4(a-b)(c-d)=16(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c)。$$

〔證〕$b=c$。則左邊 $=0$。 $\therefore\quad (b-c)(c-a)(a-b)$ 爲其因子。

又 $d=a$。則左邊 $=0$。 $\therefore\quad (d-a)(d-b)(d-c)$ 亦爲其因子。

$\therefore$ 從左邊 $=A(b-c)(c-a)(a-b)(d-a)(d-b)(d-c)$，$A=16$。

40. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$
$$=3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)。$$

〔證〕$8(a+b+c)^3-(b+c)^3$ 爲有 $2(a+b+c)-(b+c)$，即 $2a+b+c$ 之因子。

又 $-(c+a)^3-(a+b)^3$。即 $-\{(c+a)^3+(a+b)^3\}$ 爲有 $(c+a)+(a+b)$，

即 $2a+b+c$ 之因子。故左邊有 $2a+b+c$ 之因子。同法知有 $a+2b+c$ 及 $a+b+2c$ 之因子。由此可得右邊。

41. $(a+b+c+d)^5-(b+c+d)^5-(c+d+a)^5-(d+a+b)^5-(a+b+c)^5$
$$+(b+c)^5+(c+a)^5+(a+b)^5+(a+d)^5+(b+d)^5+(c+d)^5+a^5-b^5-c^5-d^5$$
$$=60abcd(a+b+c+d)。$$

〔證〕$a=0$。則原式之左邊 $=0$。

$\therefore$ 從左邊 $=Aabcd(a+b+c+d)$，得 $A=60$。

42. $(a+b+c)^3abc-(bc+ca+ab)^3=abc(a^3+b^3+c^3)-(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)$。

〔證〕左邊 $=\{a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\}abc$
$$-\{b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3+3(bc+ca)(ca+ab)(ab+bc)\}$$

$$=abc(a^3+b^3+c^3)+3abc(a+b)(b+c)(c+a)-(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3)$$
$$-3c(b+a)a(c+b)b(a+b)=abc(a^3+b^3+c^3)-(b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3),$$

43. $(a^2+b^2+c^2)^3+2(bc+ca+ab)^3-3(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)^2$
$$=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2。$$

〔證〕 $a^2+b^2+c^2=x,\quad bc+ca+ab=y$。則

左邊 $=x^3+2y^3-3xy^2=(x+2y)(x-y)^2$。
$$=(a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2$$
$$=(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2=(a^3+b^3+c^3-abc)^2。$$

44. $(ca-b^2)(ab-c^2)+(ab-c^2)(bc-a^2)+(bc-a^2)(ca-b^2)$
$$=(bc+ca+ab)(bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2),$$

〔證〕 左邊 $=\{(ca-b^2)(ab-c^2)+(ab-c^2)(bc-a^2)+(ab-c^2)^2\}$
$$+\{(bc-a^2)(ca-b^2)-(ab-c^2)^2\}$$
$$=(ab-c^2)\{ca-b^2+bc-a^2+ab-c^2\}-c\{a^3+b^3+c^3-3abc\}$$
$$=(ab-c^2)(bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2)-c(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=(bc+ca+ca-a^2-b^2-c^2)\{ab-c^2+c(a+b+c)\},$$

45. $2(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)-(b^2+bc+c^2)^2$
$$+2(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)-(c^2+ca+a^2)^2$$
$$+2(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)-(a^2+ab+b^2)^2=3(bc+ca+ab)^2。$$

〔證〕本題無別法可解。唯解左邊之第一項。

$2a^4-b^4-c^4+2(a^3c+a^3b-b^3c-c^3b)+2a^2b^2+2a^2c^2-2b^2c^2+2abc(a+b+c),$

其第二項第三項可輪換 a, b, c 而得。相加即得右邊。

46. $(3a-b-c)^3+(3b-c-a)^3+(3c-a-b)^3$
$$-3(3a-b-c)(3b-c-a)(3c-a-b)=16(a^3+b^3+c^3-3abc),$$

〔證〕右邊爲 $A^3+B^3+C^3-3ABC$。則

$\frac{1}{2}(A+B+C)\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\}$ 而 A 爲 $3a-b-c$，B, C 依此輪換，故以之代於上式，則

$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(4a-4b)^2+(4b-4c)^2+(4c-4a)^2\}$。即得右邊。

47. $(na-b-c)^2+(nb-c-a)^2+(nc-a-b)^2$
$$-3(na-b-c)(nb-c-a)(nc-a-b)=(n+1)^2(n-2)(a^3+b^3+c^3-3abc),$$

〔證〕與前題同法，即左邊爲

$\frac{1}{2}\{(n-1)a+(n-1)b+(n-1)c\}$

$$\{(n+1)^2(a-b)^2+(n+1)^2(b-c)^2+(n+1)^2(c-a)^2\}$$

$$=(n+1)^2(n-1)(a^3+b^3+c^3-3abc)。$$

48. $(x^2+2yz)^3+(y^2+2zx)^3+(z^2+2xy)^3$

$$-3(x^2+2yz)(y^2+2zx)(z^2+2xy)=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2。$$

〔證〕如 **156** 章第四例用 ω，則較容易，即

$$(x^2+2yz)+(y^2+2zx)+(z^2+2xy)=(x+y+z)^2。$$

$\omega^3=1$。故 $(x^2+2yz)+\omega(y^2+2zx)+\omega^2(z^2+2xy)=(x+\omega^2y+\omega z)^2$。

又 $(x^2+2yz)+\omega^2(y^2+2zx)+\omega(z^2+2xy)=(x+\omega y+\omega^2z)^2$ 兩邊各連乘，則原式 $=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$。

49. $(by+az)^3+(bz+ax)^3+(bx+ay)^3-3(by+az)(bz+ax)(bx+ay)$

$$=(a^3+b^3)(x^3+y^3+z^3-3xyz)。$$

〔證〕與 **47, 48** 例同法。

50. $1+\omega+\omega^2=0$。則 $\{(b-c)(x-a)+\omega(c-a)(x-b)+\omega^2(a-b)(x-c)\}^3$
$+\{(b-c)(x-a)+\omega^2(c-a)(x-b)+\omega(a-b)(x-c)\}^3$

$$=27(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)。$$

〔證〕左邊之第一項爲 A，第二項爲 B，則

左邊 $=A^3+B^3=(A+B)(A+\omega B)(A+\omega^2B)$。

但 $A+B=2(b-c)(x-a)+(\omega+\omega^2)(c-a)(x-b)+(\omega+\omega^2)(a-b)(x-c)$

$$=2(b-c)(x-a)-(c-a)(x-b)-(a-b)(x-c)$$

$$=3(b-c)(x-a)-\{(b-c)(x-b)+(c-a)(x-b)+(a-b)(x-c)\}$$

$$=3(b-c)(x-a)-\{0\}=3(b-c)(x-a)。$$

由同法 $A+\omega B=3\omega^2(c-a)(x-b)$，$A+\omega^2B=3\omega(a-b)(x-c)$。

∴ 左邊 $=27(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)$。

51. 兩平方數之和，所成之若干因子之積，可以兩平方數之和表之。

〔證〕$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ 其理已明。

故 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=A^2+B^2$，由同理

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)=(A^2+B^2)(e^2+f^2)=(Ae+Bf)^2+(Af-Be)^2$。

又以此式爲 C^2+D^2。同法得四因子之積。爲 E^2+F^2。

由是可知題云云。

52. $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)\equiv(ap+bq+cr+ds)^2$
$+(aq-bp+cs-dr)^2+(ar-bs-cp+dq)^2+(as+br-cq-dp)^2$。

〔證〕 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$
$=(a^2p^2+b^2q^2+c^2r^2+d^2s^2)+(a^2q^2+b^2p^2+c^2s^2+d^2r^2)$
$+(a^2r^2+b^2s^2+c^2p^2+d^2q^2)+(a^2s^2+b^2r^2+c^2q^2+d^2p^2)$。

上之各項。補足 $2abpq, 2cdrs$……又各減去之。卽得原式之右邊。
由是 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)$。可得 $X^2+Y^2+Z^2+U^2$ 之形。
由同理 $(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$。
卽爲 $(X^2+Y^2+Z^2+U^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$ 之形。又此形可得
$M^2+N^2+P^2+Q^2$ 之形。
本題與前題爲同性質之題。

53. $(x^2+xy+y^2)(a^2+ab+b^2)$。可用 X^2+XY+Y^2 表之。

〔證〕 $1+\omega+\omega^2=0$, 及 $\omega^3=1$。
故 $x^2+xy+y^2=x^2-(\omega+\omega^2)xy+\omega^3y^2=(x-\omega y)(x-\omega^2y)$。
$\therefore$ 左邊 $=(x-\omega y)(a-\omega b)(x-\omega^2y)(a-\omega^2b)$。
但 $(x-\omega y)(a-\omega b)=ax-\omega(bx+ay)+\omega^2by$。今用 $\omega^2=-1-\omega$
$=(ax-by)-\omega(bx+ay+by)=X-\omega Y$。
由同法得 $(x-\omega^2y)(a-\omega^2b)=X-\omega^2Y$。
$\therefore$ 左邊 $=(X-\omega Y)(X-\omega^2Y)=X^2+XY+Y^2$。

54. $(x^2+pxy+qy^2)(a^2+pab+qb^2)$。可用 $X^2+pXY+qY^2$ 表之。

〔證〕 $x^2+pxy+qy^2=(x+\alpha y)(x+\beta y)$, 則 $\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=q$,
$\therefore$ $(x^2+pxy+qy^2)(a^2+pab+qb^2)=(x+\alpha y)(a+\beta b)(x+\beta y)(a+\alpha b)$。
但 $(x+\alpha y)(a+\beta b)=ax+\alpha ay+\beta bx+\alpha\beta by$
$=ax+\alpha ay+(p-\alpha)bx+qby=(ax+pbx+qby)+\alpha(ay-bx)$
$=X+\alpha Y$。 同法 $(x+\beta y)(a+\alpha b)=X+\beta Y$。
$\therefore$ 左邊 $=(X+\alpha Y)(X+\beta Y)=X^2+pXY+qY^2$。

55. $2s\equiv a+b+c$。則
(1) $a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)+c(s-a)(s-b)+2(s-a)(s-b)(s-c)=abc$。
(2) $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$。

(3) $(b+c)s(s-a)+a(s-b)(s-c)-2sbc$

$=(c+a)s(s-b)+b(s-c)(s-a)-2sca$

$=(a+b)s(s-c)+c(s-a)(s-b)-2sab$。

(4) $a(b-c)(s-a)^2+b(c-a)(s-b)^2+c(a-b)(s-c)^2=0$。

(5) $s(s-b)(s-c)+s(s-c)(s-a)+s(s-a)(s-b)-(s-a)(s-b)(s-c)=abc$。

(6) $(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2+s^2(s-b)^2(s-c)^2+s^2(s-c)^2(s-a)^2+s^2(s-a)^2(s-b)^2$
$+s(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)=a^2b^2c^2$。

〔證〕(1) 左邊$=s^2\sum a-2s\sum bc+3abc+2\{s^3-s^2\sum a+s\sum bc-abc\}$
$=2s^3+3abc+2\{s^3-2s^3-abc\}=3abc+2\{-abc\}=abc$。

(2) 左邊$=3s^3-3s^2(a+b+c)+3s(a^2+b^2+c^2)-(a^3b^3+c^3-3abc)$。

$=3s^3-6s^3+3s(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc+ca)$

$=-3s^3+3s(a^2+b^2+c^2)-2s(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=-3s^3+s(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)=-3s^3+s(2s)^2=s^3$。

(3) $(b+c)s(s-a)+a(s-b)(s-c)-2sbc$ 爲 $s^2(a+b+c)-2s(ab+bc+ca)$ $+abc$ 爲 a, b, c 之輪換等勢式，故如題意。

(4) 解左邊之括弧。

(5) 左邊 $=s(s-c)(s-b+s-a)+(s-a)(s-b)(s-s+c)$
$=s(s-c)c+(s-a)(s-b)c=(s^2-cs+s^2-as-bs+ab)c=abc$，

(6) 以本題(5)之恆同式之兩邊平方之，即得。

56. $2s=a+b+c+d$。則 $4(bc+ad)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2$
$=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$。

〔證〕從左邊 $=\{2(bc+ad)+(b^2+c^2-a^2-d^2)\}$
$\{2(bc+ad)-(b^2+c^2-a^2-d^2)\}$
$=\{(b+c)^2-(a-d)^2\}\{(a+d)^2-(b-c)^2\}$ 可得右邊。

57. $a+b+c+d=0$，則 $ad(a+d)^2+bc(a-d)^2+ab(a+b)^2+cd(a-b)^2$
$+ac(a+c)^2+bd(a-c)^2+4abcd=0$，

〔證〕$a+d=-(b+c)$，　$a+b=-(c+d)$，　$a+c=-(b+d)$。故

左邊 $=ad(b+c)^2+bc(a-d)^2+ab(c+d)^2+cd(a-b)^2+ac(b+d)^2+bd(a-c)^2$
$+4abcd=ad(b^2+c^2)+bc(a^2+d^2)+ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)+ac(b^2+d^2)$
$+bd(a^2+c^2)+4abcd$

$=abd(a+b+d)+acd(a+c+d)+bcd(b+c+d)+abc(a+b+c)+4abcd$
$=abd(-c)+acd(-b)+bcd(-a)+abc(-d)+4abcd=0$。

58. $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)=(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$。則 $ac=bd$。

〔證〕 $(b+c)(d+a)(a+b)(c+d)=\{(a+b)+(c+d)\}\{cd(a+b)+ab(c+d)\}$。

則 $(cd+ab+bd+ac)(a+b)(c+d)=cd(a+b)^2+(cd+ab)(a+b)(c+d)$
$+ab(c+d)^2$。

則 $cd(a+b)^2(bd+ac)(a+b)(c+d)+ab(c+d)^2=0$,

則 $\{c(a+b)-b(c+d)\}\{d(a+b)-a(c+d)\}=0$, 即 $-(bd-ac)^2=0$。

59. $a+b+c=0$, 及 $x+y+z=0$。 則
$4(ax+by+cz)^3-3(ax+by+cz)(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$
$-2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y)=54abcxyz$。

〔證〕 左邊用 $-(a+b)$ 代 c 且 $a=0$。則左邊爲 0。推之 b, c, x, y, z 亦同。
∴ 左邊 $=Labcxyz$ 而得 $L=54$。

60. 設 $a+b+c=0$。則下各式之證如何。

(1) $2(a^7+b^7+c^7)=7abc(a^4+b^4+c^4)$。
(2) $6(a^7+b^7+c^7)=7(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)$。
(3) $a^6+b^6+c^6=3a^2b^2c^2+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$,
(4) $25(a^7+b^7+c^7)(a^3+b^3+c^3)=21(a^5+b^5+c^5)^2$。

〔證〕 本題依129章。可得上各式之證。

61. $a+b+c+d=0$。則 $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(bcd+cda+dab+abc)^2$
$=9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)$。

〔證〕 $a^3+b^3+c^3+d^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+(c+d)^3-3cd(c+d)$
$=-(c+d)^3+3ab(c+d)+(c+d)^3+3cd(a+b)=3(abc+abd+acd+bcd)$

平方之。則 $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(abc+abd+acd+bcd)^2$。

又 $a^3+b^3+c^3+d^3=a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3=-3(a+b)(b+c)(c+a)$。

∴ $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(a+b)(b+c)(b+c)(c+a)(c+a)(a+b)$
$=9\{ac+b(b+a+c)\}\{ab+c(a+b+c)\}\{bc+a(a+b+c)\}$
$=9(ac-bd)(ab-cd)(bc-ad)$。

62. $a+b+c=0$。則 $\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9$。

(證) 左邊 $=\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{abc}\times\frac{\sum a(c-a)(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$

$=\frac{-(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}\times\frac{-\sum a\{a^2-a(b+c)+bc\}}{(b-c)(c-a)(a-b)}=\frac{\sum a(2a^2+bc)}{abc}$

$=\frac{2(a^3+b^3+c^3-3abc)+9abc}{abc}=\frac{9abc}{abc}=9$。

63. $\frac{1}{1+l+ln}+\frac{m}{1+m+ml}+\frac{nm}{1+n+nm}=1$。

$\frac{l}{1+l+ln}+\frac{ml}{1+m+ml}+\frac{1}{1+n+nm}=1$，其分母皆非0，則$l=m=n$。

(證) 以l乘第一減第二，則 $\frac{mnl-1}{1+n+nm}=l-1$。去分母，

則 $l+ln=n+nm$，即 $1+l+ln=1+n+nm$，故以此代入第一。

則 $\frac{1}{1+n+nm}+\frac{m}{1+m+ml}+\frac{nm}{1+n+nm}=1$。

即 $\frac{m}{1+m+ml}=\frac{n}{1+n+nm}$。即 $\frac{1}{m}+1+l=\frac{1}{n}+1+m$，

∴ $(m-n)(1+mn)=0$。但 $1+n+nm$ 非0。故 $1+mn\neq 0$，

∴ $m+n=0$。 ∴ $m=n$。

64. $a+(1-a)b+(1-a)(1-b)c+(1-a)(1-b)(1-c)d+\ldots\ldots$

$=1-(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\ldots\ldots$

(證) 左邊 $=1-(1-a)+(1-a)b+(1-a)(1-b)c+(1-a)(1-b)(1-c)d+\ldots$

$=1-(1-a)(1-b)+(1-a)(1-b)c+(1-a)(1-b)(1-c)d+\ldots\ldots$

$=1-(1-a)(1-b)(1-c)+(1-a)(1+b)(1-c)d+\ldots\ldots$

$=1-(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+\ldots\ldots$以下類推。

65. $\frac{1}{a}=1+2(1-a)+3(1-a)(1-2a)+\ldots\ldots$

$+\{n(1-a)(1-2a)\ldots\ldots(1-\overline{n-1}a)\}+\frac{1}{a}\{(1-a)(1-2a)\ldots\ldots(1-na)\}$。

(證) 用前例 $b=2a,\ c=3a,\ d=4a\ldots\ldots$

則 $a+(1-a)2a+(1-a)(1-2a)3a+(1-a)(1-2a)(1-3a)4d+\ldots\ldots$

$=1-(1-a)(1-2a)(1-3a)(1-4a)\ldots\ldots$

兩邊以a除之。移項，即得本題之證。

66. $a^n+a^{n-1}(1-a^n)+a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1})+\cdots\cdots$

$+\{a(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a^2)\}+\{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)\}=1$。

〔證〕左邊 $=1-(1-a^n)+a^{n-1}(1-a^n)+a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1})+\cdots\cdots$

$=1-(1-a^n)(1-a^{n-1})+a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1})+\cdots\cdots$

順次如此括之。則

左邊 $=1-(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)+\{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)\}=1$。

67. n 爲任意之正整數。則 $\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}$

$$+\frac{(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3}+\cdots\cdots+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)}{1-a^n}=n。$$

〔證〕原式之左邊爲 F_n 則

$$F_n=\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\cdots\cdots+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)}{1-a^n}。$$

$$F_{n+1}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}+\frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)}{1-a^2}+\cdots\cdots+\frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)\cdots\cdots(1-a^2)}{1-a^n}$$

$$+\frac{(1+a^{n+1})(1-a^n)\cdots\cdots(1-a)}{1-a^{n+1}},$$

減上之相當項。則

$F_{n+1}-F_n=a^n+a^{n-1}(1-a^n)+a^{n-2}(1-a^n)(1-a^{n-1})+\cdots\cdots$

$+a\{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a^2)\}+\{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)=1,$

從前例由是 $F_{n+1}=F_n+1$。由是 $F_2=F_1+1$, $F_3=F_2+1\cdots\cdots$

然 $F_1=\frac{1-a^1}{1-a}=1$, $\therefore$ $F_2=F_1+1=2$, $F_3=F_2+1=3\cdots\cdots F_n=n$。

68 $a+b+c+d=0$, $x+y+z+u=0$。$ax+by+cz+du=0$, 則

$2(a^4x+b^4y+c^4z+d^4u)=(a^2x+b^2y+c^2z+d^2u)(a^2+b^2+c^2+d^2)$。

〔證〕從第三 $(ax+by+cz+du)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=0$。

則 $x+y+z+u+ax\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)+by\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)+cz\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$$+du\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0。$$

從 $x+y+z+u=0$。去上之分母。則

$a^2x(bc+cd+db)+b^2y(cd+da+ac)+c^2z(da+ab+bd)+d^2u(ab+bc+ca)=0$。

但 $a^2x(bc+cd+db)=\frac{1}{2}a^2x\{(b+c+d)^2-b^2-c^2-d^2\}$

$$=\frac{1}{2}a^2x(a^2-b^2-c^2-d^2)=a^4x-\frac{1}{2}a^2x(a^2+b^2+c^2+d^2),$$

故上之方程式爲 $a^4x+b^4y+c^4z+d^4u$

$$-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^2x+b^2y+c^2z+d^2u)=0.$$

69. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$。

〔證〕$F_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$。

$F_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}$ 由減法，

$F_{2n}-F_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$。

又 $F_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$。

$F_n=\quad 1 \quad +\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{3} \quad\quad +\frac{1}{n}$ 由減法，

$$F_{2n}-F_n=1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots-\frac{1}{2n},$$

70. $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{u+a}+\frac{1}{v-b}=\frac{1}{u+a'}+\frac{1}{v-b'}=\frac{1}{f}$。則

$f^2(ab'-a'b)^2=aa'bb'(a-a')(b-b'),$

〔證〕$uv=f(u+v),$

$uv=f(u+v)+f(a-b)-av+bu+ab,$

$uv=f(u+v)+f(a'-b')-a'v+b'u+a'b',$

$\therefore\quad av-bu=f(a-b)+ab,\quad a'v-b'u=f(a'-b')+a'b'$。

由是 $u=\frac{aa'(b-b')+f(ab'-a'b)}{ab'-a'b},\quad v=\frac{bb'(a-a')+f(ab'-a'b)}{ab'-a'b}$ 故

$$uv=\frac{aa'bb'(a-a')(b-b')+\{aa'(b-b')+bb'(a-a')\}f(ab'-a'b)+f^2(ab'-a'b)^2}{(ab'-a'b)^2}$$。

又 $f(u+v)=\frac{f\{aa'(b-b')+bb'(a-a')+2f(ab'-a'b)\}}{ab'-a'b}$。

$uv=f(u+v)$。故由此可得結果。

第拾貳編補

霍爾及乃托氏第三十四編摘要

消去法

533. 第三例從 $x^2-y^2=px-qy$, $4xy=qx+py$, $x^2+y^2=1$。消去 x 及 y。

〔解〕$x(x^2-y^2)+y(4xy)=x(px-qy)+y(qx+py)$。

即 $x^3+3xy^2=p(x^2+y^2)=p(1)=p$……………………(A)

又 $y(x^2-y^2)-x(4xy)=y(px-qy)-x(qx+py)$。

即 $-3x^2y-y^3=-q(y^2+x^2)=-q(1)=-q$……………………(B)

從 (A) 式減 B 式，則 $(x+y)^3=p+q$，　$\therefore\quad x+y=(p+q)^{\frac{1}{3}}$。

(A) 式加 (B) 式。則 $(x-y)^3=p-q$，　$\therefore\quad x-y=(p-q)^{\frac{1}{3}}$。

由是 $(p+q)^{\frac{2}{3}}+(p-q)^{\frac{2}{3}}=(x+y)^2+(x-y)^2=2(x^2+y^2)=2$。

〔例題三十四〕$x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$。

$\frac{a}{x}(x-p)=\frac{b}{y}(y-q)=\frac{c}{z}(z-r)$。消去 x, y, z。

〔解〕令後式之各項爲λ。則

$$x=\frac{ap}{a-\lambda},\qquad y=\frac{bq}{b-\lambda},\qquad z=\frac{cr}{c-\lambda}。$$

又 $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=1^2-1$，即 $xy+yz+zx=0$。以上之 x, y, z 代入。而求其λ。則得 x, y z 之值。乃以所得之值。代用於 $x+y+z=1$。而變化之。則

$$\frac{1}{(a-b)cr+(a-c)bq}+\frac{1}{(b-c)ap+(b-a)cr}+\frac{1}{(c-a)bq+(c-b)ap}$$
$$=\frac{1}{bcqr+carp+abpq}。$$

第拾叁編

方乘，方根，分指數，負指數

159. 自乘法 (Involution) 凡求一數量之方乘，謂之自乘法。又求一數量之方根，謂之**開方法** (Evolution)。$5^2=25$ 為自乘法。$\sqrt{25}=5$。為開方法。

本編專論自乘法及開方法。以擴張指數之運用。

160. 指數之法則 依31章m及n為任意之正整數。可證明之如下。

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此為指數定則最要之公式。

由是 $a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n}\times a^p=a^{m+n+p}$。同理推之。

$$a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=a^{m+n+p+\cdots\cdots}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

〔法則〕同數量若干方乘之積。以各因子指數之和，為其指數。

又 $a^m\times a^m\times a^m\times\cdots\cdots n$ 因子 $=a^{m+m+m+\cdots n}=a^{mn}$。

即 $$(a^m)^n=a^{mn}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

〔法則〕一數量之某方乘。以方乘之指數。與原指數之積，為其指數。

又 $(ab)^m=ab\times ab\times ab\times\cdots\cdots m$ 因子。

$=(aaa\cdots\cdots m$ 因子$)(bbb\cdots\cdots m$ 因子$)=a^mb^m$。

同法 $(abc\cdots\cdots)^m=a^mb^mc^m\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

〔法則〕積之方乘。以各因子之方乘為其因子。

最普通者，為 $(a^xb^yc^z\cdots\cdots)^m=(a^x)^m(b^y)^m(c^z)^m\cdots\cdots$ 從(4)式

$=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\cdots\cdots$ 從(3)式

由是 $(a^xb^yc^z\cdots\cdots)^m=a^{xm}b^{ym}c^{zm}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

〔法則〕代數式任意之方乘。取方乘之指數乘因子之指數。各以其積為因子之指數。

其特別之處，爲 $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\left(a\times\frac{1}{b}\right)^m=a^m\times\left(\frac{1}{b}\right)^m=a^m\times\frac{1}{b^m}=\frac{a^m}{b^m}$。

161. 符號之定則 正數量之方乘常爲正。而負數量之方乘。則各次正負相間。

$$(-a)^2=(-a)(-a)=+a^2。$$
$$(-a)^3=(-a)^2(-a)=+a^2(-a)=-a^3,$$
$$(-a)^4=(-a)^3(-a)=-a^3(-a)=+a^4。$$

以下同理。故 $(-a)^{2n}=+a^{2n}$ 及 $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$。

〔別證〕上之最後二式。可依前章之(3)式，逕得其證。

例如 $(-a)^{2n}=\{(-a)^2\}^n=(+a^2)^n=+a^{2n}$。

又 $(-a)^{2n+1}=(-a)(-a)^{2n}=-a(+a^{2n})=-a^{2n+1}$。

〔法則〕不論正數量與負數量。其偶數方乘皆爲正。而奇數方乘則與原數量同符號(如原數爲正亦正。原數爲負亦負)。

162. 算術上之方根 在算術上求其平方根或他方根，恆能得其畧近之値。然求一不盡數之平方根或立方根，甚爲繁雜，故本編於數根之實地計算法。不復縷述，僅於理論上之證明，而示其運算於下。

例如求 $\sqrt{62}$ 之畧近値。先記 1, 2, 3............諸數之平方。至所得平方大於 62 而止。而 7^2 小於 62。8^2 大於 62。故 $\sqrt{62}$ 在 7 與 8 之間。

次記 7.1, 7.2, 7.3...........之平方。至大於 62 而止。而 $(7.8)^2$ 小於 62，$(7.9)^2$ 大於 62。故又知 $\sqrt{62}$ 在 7.8 與 7.9 之間.

次又記 7.81, 7.82, 7.83,............之平方。如前法求之，則又知 $\sqrt{62}$ 在 7.83 與 7.84 之間。

逐次如此。雖所得之平方。不能恰合於 62。而屢次所得一爲小於 62 之平方。一爲大於 62 之平方。其差可漸次減小。至求得 $\sqrt{62}$ 之畧近値。極其精密。

此法不僅可用於求平方根。即求他方根亦可用之。故任意之整數或分數之 n 方根，恆能求得。

163. 根原定則之不盡根 代數學之根原定則。於文字之整數或分數。已證明其合理。而此編於不盡根。亦可證明之如下。

例如於根原定則中考察其互換法則。即證

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}$$

x, y, 及 p, q 爲整數或分數。而令 x, y 之間有 $\sqrt[n]{a}$。p, q 之間有 $\sqrt[m]{b}$ 如下。

$$x>\sqrt[n]{a}>y。$$

$$p>\sqrt[m]{b}>q。$$

而 x 與 y 之差及 p 與 q 之差。可設爲無限小。以此兩不等式之相應項相乘。則

$$x\times p>\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}>y\times q,$$

或 $$p\times x>\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}>q\times y。$$

因 p, q, x, y 爲分數或整數。故由互換法則。而得

$$x\times p=p\times x \qquad y\times q=q\times y。$$

依 162 章之證明 x 與 y 爲 $\sqrt[n]{a}$ 之略近之值。其差可至任何小。又 p 與 q 亦然。故小至於極限。則 p×x 與 q×y 之差。可幾至於無而相等。由是夾於兩積之 $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}$ 及 $\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}$ 亦不能不相等。

$$\therefore\quad \sqrt[n]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{b}\times\sqrt[n]{a}。$$

由是知不盡根。亦能依互換法則。而證其合理。

164. 方乘及方根之區別 一數量之平方根有二。立方根有三。已示於前。故一數量之 n 方根有 n 個。此即方根與方乘相異之處。何則。一數量之某方乘。祇有一個。例如 5 之平方。僅有 $5^2=25$ 之一數。而其方根即 $\sqrt{25}$。則有 +5 及 −5 之二根是也。

165. 不盡根之法則 積之 m 方乘。等於其因子 m 方乘之積。已證於 160 章之 (4) 式。而不盡根之因子。亦可依 163 章同法證之。即 $(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\cdots\cdots)^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2\times\cdots\cdots=a\times b\times\cdots\cdots$

由是 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\cdots\cdots=\sqrt{(a\times b\times\cdots\cdots)}$。

〔法則〕諸數量之各平方根之積。等於諸數量之積之平方根。

由此法。則 $\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{(2\times8)}=\sqrt{16}=4$。

由此法而反用之。則$\sqrt{75}=\sqrt{(5^2\times3)}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$。

由此法而擴張之。則

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\sqrt[n]{ab}\cdots\cdots$ 及 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$。

又 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$。何則。兩邊各乘至np方。皆為$a^{mp}$。一項式之m方乘。以其指數乘m為指數，即$(a^n)^m=a^{mn}$。故求此式之m方根。可以m除其指數。即$\sqrt[m]{a^{mn}}=a^{mn\div m}=a^n$。

又 $\sqrt[2]{a^4}=a^2$, $\sqrt[3]{a^6b^9c^3}=a^2b^3c$。 $\sqrt[n]{a^{n\alpha}b^{n\beta}c^{n\gamma}}=a^\alpha b^\beta c^\gamma$。

但此等方根。為在2方根，3方根，n方根之內。各取其一個。而n方根。必有n個之說也。

分指數及負指數之法則

166. 指數 前所論之指數。皆為正整數。然如墨守此法則。則其用甚狹。今將其法則擴充之。證明指數之為分數或負數。如$a^{\frac{3}{2}}$或a^{-2}等。無不合理。

凡指數不僅為正整數，即為分數及負數。而在代數記號。恆不關其值之如何。而能依同一之定則。

今有a^n試命n為分數或負數，則先依根原之指數定則，

$$a^m\times a^n=a^{m+n}。$$

若m, n各為$\frac{1}{2}$。則$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$。

即 $(a^{\frac{1}{2}})^2=a$。 而 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$。

故n為分數。亦合於指數之常例。而n為$\frac{1}{2}$，其意義即所以示a之平方根也。

又推求a^{-2}之意義。

設$m=3$, $n=-2$。依指數之法則，

$a^3\times a^{-2}=a^{3-2}=a$。 $\therefore$ $a^{-2}=\frac{a}{a^3}=\frac{1}{a^2}$，

由同理可推得$a^{-1}=\frac{1}{a}$, $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$等。

167. 分指數及負指數之法則今取普通之例示之如下。

〔第一〕解 $a^{\frac{1}{n}}$ 之意義。但 n 為任意之正整數。

由指數之法則，$(a^{\frac{1}{n}})^n=a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots$ 至 n 因子

$$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots n項}=a^{n\times\frac{1}{n}}=a$$

故知 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$。

〔第二〕求 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義。但 m 及 n 為任意之正整數。

由指數之法則，

$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\cdots$ 至 n 因子。

$$=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots\cdots n項}=a^{\frac{mn}{n}}=a^m。\quad\therefore\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}。$$

又別法 $a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m$。　即　$a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$。

由是知 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義，為 a 之 m 方乘之 n 方根。亦可為 a 之 n 方根之 m 方乘。故可書之如下。

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a^m)}=(\sqrt[n]{a})^m。$$

又 $a^{\frac{m}{n}}$ 之意義，從 165 章可得 $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$。

〔註〕$\sqrt[n]{(a^m)}=(\sqrt[n]{a})^m$ 之意義。苟如 164 章所示謂 n 方根，必有 n 個，則不能適合。故必如 165 章。僅取 n 方根內之一。乃合於理，例如 $\sqrt[2]{(a^4)}=\pm a^2$，則有二根。而 $(\sqrt[2]{a})^4$。即 $+a^2$ 祇此一個之值。即 $\sqrt[2]{(a^4)}$ 與 $(\sqrt[2]{a})^4$ 相異之點。

〔第三〕示 $a^0=1$ 之意義。

由指數之法則，$a^0\times a^m=a^{0+m}=a^m$　　$\therefore$　$a^0=a^m\div a^m=1$。

故不論 a 為如何之數，而 $a^0=1$，即 $2^0=(\sqrt{5})^0=(\frac{2}{3})^0=(-7)^0=1$。

〔第四〕求 a^{-m} 之意義，但 m 為任意之正整數。

由指數之法則。$a^{-m}\times a^m=a^{-m+m}=a^0$。但由第三 $a^0=1$。

故　$a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$ 及 $a^m=\dfrac{1}{a^{-m}}$。

168. 指數之諸公式 在前章證明 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ 之法。則無論爲分指數及負指數。皆可準此推求。故由此法。則不問 m 及 n 爲如何之數。均能合於下之諸公式。

$a^m\times a^n=a^{m+n}$, $(a^m)^n=a^{mn}$, $(ab)^n=a^nb^n$,

以上諸式。已證明於160章。玆再就分指數及負指數反覆推之。以證其合理。

〔第一〕證 $a^m\times a^n=a^{m+n}$。命 m 及 n 爲分數 $\frac{p}{q}$ 及 $\frac{r}{s}$。但 p, q, r, s 爲正數。則

$$a^m\times a^n=a^{\frac{p}{q}}\times a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\times\sqrt[s]{a^r}\ \text{(由定義)}$$
$$=\sqrt[qs]{a^{ps}}\times\sqrt[qs]{a^{rq}}=\sqrt[qs]{a^{ps+rq}}\ \text{(165章)}$$
$$=a^{\frac{ps+rq}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}=a^{m+n}。$$

又命 m 及 n 爲負數。則

$$a^{-m}\times a^{-n}\times\frac{1}{a^m}\times\frac{1}{a^n}\ \text{(由定義)}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-m-n}。$$

及 $a^{-m}\times a^n\times\frac{1}{a^m}\times a^n=a^n\div a^m=a^{n-m}=a^{-m+n}$。

由是 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ 對於 m 及 n 不論爲如何之值。均能合理。

推論 $a^{m-n}\times a^n=a^m$。其 m 及 n 爲任意之值。亦能合理。故推得 $a^m\div a^n=a^{m-n}$。

〔第二〕證 $(a^m)^n=a^{mn}$。但 m 及 n 爲任意之值。

先設 n 爲正整數。m 爲任意之值。則

$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times\ldots\ldots n$ 因子 $=a^{m+m+m+\cdots n\text{項}}$(167章第一)$=a^{mn}$。

次設 n 爲正分數 $\frac{p}{q}$ 而 p, q 爲正整數。則

$$(a^m)^n=(a^m)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\{(a^m)^p\}}=\sqrt[q]{(a^{mp})}\ \text{因 p 爲整數。故}$$
$$=a^{\frac{mp}{q}}=a^{mn}。$$

更設 n 爲負數。即 −p。則

$$(a^m)^n=(a^m)^{-p}=\frac{1}{(a^m)^p}=\frac{1}{a^{mp}}=a^{-mp}=a^{mn}。$$

由是 m 及 n 不論爲如何之值。而 $(a^m)^n=a^{mn}$。恆能合理

〔第三〕證 $(ab)^n=a^nb^n$。但 n 爲任意之值。

在 160 章 n 爲正整數。則已證明 $(ab)^n=a^nb^n$ 矣。

今設 m 爲任意之數。q 爲正整數，則

$$(a^mb^m)^q=a^mb^m\times a^mb^m\times\cdots\cdots\cdots\cdots q\text{ 因子。}$$

$$=a^{m+m+\cdots\cdots q\text{ 項}}\times b^{m+m+\cdots\cdots q\text{ 項}}$$

$$=a^{mq}b^{mq}\text{。}$$

設 n 爲正分數 $\frac{p}{q}$ 而 p 及 q 爲正整數，則

$(ab)^n=(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{(a^pb^p)}$。〔因 p 爲正整數故〕。

又　$(a^nb^n)^q=a^{nq}b^{nq}$。〔因 q 爲正整數故〕。

由是對於 n 之任意之正值。而 $a^nb^n=\sqrt[q]{(a^pb^p)}=(ab)^n$。

更設 n 爲負數 $-m$。則 $(ab)^n=(ab)^{-m}=\frac{1}{(ab)^m}=\frac{1}{a^mb^m}$

$$=a^{-m}b^{-m}=a^nb^n\text{。}$$

例　題

1.　化 $a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}$ 爲簡式。　〔解〕 $a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}$。

2.　化 $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{5}}\times a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{6}{5}}$ 爲簡式。　〔解〕 $a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{5}+\frac{6}{5}}=a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{10}{5}}=a^2b^2$。

3.　化 $(-a^{-2}b^{\frac{4}{3}})^{-\frac{3}{2}}$ 爲簡式。　〔解〕 $(a^{-2})^{-\frac{3}{2}}(b^{\frac{4}{3}})^{-\frac{3}{2}}=a^3b^{-2}=\frac{a^3}{b^2}$。

4.　化 $\sqrt{(a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{-\frac{2}{3}})}\div\sqrt[3]{(a^{\frac{1}{2}}b^4c^{-1})}$ 爲簡式。

〔解〕　$a^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{3}}\div a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{4}{3}}c^{-\frac{1}{3}}=a^{-\frac{5}{6}-\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}c^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=a^{-1}b^{\frac{1}{6}}c^0=\frac{\sqrt[6]{b}}{a}$。

169. 有理補因子　已知之無理式。以他代數式乘之其積可變爲有理式。則其乘式。謂爲原式之有理補因子。例如下，

$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-\sqrt{b^2}=a^2-b$。故 $a+\sqrt{b}$ 爲 $a-\sqrt{b}$ 之有理補因子。而 $a-\sqrt{b}$ 亦爲 $a+\sqrt{b}$ 之有理補因子。

又 $a\sqrt{b}\pm c\sqrt{d}$ 爲 $a\sqrt{b}\mp c\sqrt{d}$ 之有理補因子。

又從已知之恆同式 $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ 可推得

$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ 之有理補因子。爲

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})(\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r})(-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})。$$

而用此恆同式可求得特別之例如下。

$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})=(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2-r=p+q-r+2\sqrt{pq}$。

而 $(p+q-r-2\sqrt{pq})(p+q-r+2\sqrt{pq})=(p+q-r)^2-4pq$。故

$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ 之有理補因子。爲 $(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})(p+q-r-2\sqrt{pq})$。

又從恆同式 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ 即得

$a+b^{\frac{1}{3}}$ 爲 $a^2-ab^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ 之有理補因子。

170. 求任意二項式有理補因子。

求 $ax^{\frac{p}{q}}\pm by^{\frac{r}{s}}$。之有理補因子。則令

$X=ax^{\frac{p}{q}}$ 及 $Y=by^{\frac{r}{s}}$ 而 n 爲 q 及 s 之最小公倍數。則 X^n 及 Y^n 皆爲有理式。

由是 $(X+Y)\{X^{n-1}-X^{n-2}Y+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}Y^{n-1}\}=X^n+(-1)^{n-1}Y^n$。

及 $(X-Y)(X^{n-1}+X^{n-2}Y+\ldots\ldots+Y^{n-1})=X^n-Y^n$。

故 $X+Y$ 及 $X-Y$ 之有理補因子。爲

$$X^{n-1}-X^{n-2}Y+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}Y^{n-1}。$$

及
$$X^{n-1}+X^{n-2}Y+\ldots\ldots+Y^{n-1}。$$

〔例〕求 $x^{\frac{2}{3}}-ay^{\frac{5}{6}}$ 之有理補因子。 令 $X=x^{\frac{2}{3}}$, $Y=ay^{\frac{5}{6}}$, $n=6$。

由是 $X^6=x^4$, $Y^6=a^6y^5$, 而 $X-Y$ 之有理補因子。爲

$$X^5+X^4Y+X^3Y^2+X^2Y^3+XY^4+Y^5。$$ 故

$x^{\frac{2}{3}}-ay^{\frac{5}{6}}$ 之有理補因子。爲

$$x^{\frac{10}{3}}+ax^{\frac{8}{3}}y^{\frac{5}{6}}+a^2x^2y^{\frac{5}{3}}+a^3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{5}{2}}+a^4x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{10}{3}}+a^5y^{\frac{25}{6}}。$$

例題十七

1. 化 $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}}\times a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}$ 爲最簡式。 答 $a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$。

〔解〕 $a^{\frac{2}{3}+(-\frac{1}{2})}b^{\frac{5}{6}+(-\frac{2}{3})}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$。

2. 化 $a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{3}{4}}\times(a^2)^{-\frac{1}{6}}\times\frac{1}{(a^{-\frac{1}{12}})^5}$ 爲簡式。 答 1。

〔解〕　$a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{3}{4}}\times a^{-\frac{2}{6}}\times(a^{-\frac{1}{12}})^{-5}=a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{2}{6}+\frac{5}{12}}=a^0=1$。

3. 化 $(ab^{-2}c^{3})^{\frac{1}{2}}\times(a^3b^2c^{-3})^{\frac{1}{3}}$ 爲簡式。　　答 $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}$。

〔解〕　$a^{\frac{1}{2}}b^{-1}c^{\frac{3}{2}}\times ab^{\frac{2}{3}}c^{-1}=a^{\frac{1}{2}+1}b^{-1+\frac{2}{3}}c^{\frac{3}{2}-1}=a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}}$。

4. $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\times\left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\times\left(x^{\frac{a+b}{b-a}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$。　　答 1。

〔解〕　$x^{\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}+\frac{a+b}{(b-a)(c-a)}}=x^0=1$。

5. 以 $x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$ 乘 $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$。　　答 $x-y$。

〔解〕用 $(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$ 式。

6. 以 x^2-1+x^{-2} 乘 x^2+1+x^{-2}。　　答 x^4+1+x^{-4}。

〔解〕$\{(x^2+x^{-2})+1\}\{(x^2+x^{-2})-1\}=(x^2+x^{-2})^2-1=x^4+2+x^{-4}-1$。

7. 以 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$ 乘 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$。

答　$x+y+z-3xyz$。

〔解〕用 $(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(a+b+c)=a^3+b^3+c^3-3abc$ 之恆同式。

8 以 $x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}$ 除 $x^{\frac{4}{3}}-2+x^{-\frac{4}{3}}$。　　答 $x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}$。

〔解〕　因 $x^{\frac{4}{3}}-2+x^{-\frac{4}{3}}=(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})^2$ 而得。

9. 以 $a^{\frac{1}{10}}-x^{\frac{1}{5}}$ 除 $a^{\frac{1}{2}}-x$。　　答 $a^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{3}{10}}x^{\frac{1}{5}}+a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{1}{10}}x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{4}{5}}$。

〔解〕　$\dfrac{(a^{\frac{1}{10}})^5-(x^{\frac{1}{5}})^5}{a^{\frac{1}{10}}-x^{\frac{1}{5}}}=(a^{\frac{1}{10}})^4+(a^{\frac{1}{10}})^3x^{\frac{1}{5}}+(a^{\frac{1}{10}})^2x^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{1}{10}}x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{4}{5}}$。

10. 以 $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$ 除 $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$。　　答 $x+y$。

〔解〕　$\dfrac{x(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})+y(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}=x+y$。

11. 求 $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})^2$ 之證。

〔證〕　$(x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+4x)+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$

$=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})^2+2x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})+x^{\frac{2}{3}}=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})^2$。

12. 以 $3x-4+2x^{-1}$ 乘 $4x^2-5x-4-7x^{-1}+6x^{-2}$。其積以 $3x-10+10x^{-1}-4x^{-2}$ 除之。 答 $4x^2+3x+2-3x^{-1}$。

〔解〕用分離係數法。則

$$
\begin{array}{r}
4-5-4-7+6 \\
3-4+2 \\
\hline
12-15-12-21+18 \qquad\qquad \\
-16+20+16+28-24 \qquad \\
+8-10-8-14+12 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
3-10+10-4 \,\big)\, 12-31+16-15+38-38+12 \,\big(\, 4+3+2-3 \\
\qquad\qquad\quad\; 12-40+40-16 \\
\qquad\qquad\quad\; \overline{\quad +9-24+1+38} \\
\qquad\qquad\qquad +9-30+30-12 \\
\qquad\qquad\qquad \overline{\qquad\quad 6-29+50-38} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 6-20+20-8 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{\;-9+30-30+12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; -9+30-30+12 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{\qquad\qquad\qquad\quad 0}
\end{array}
$$

此商之最高項。為 $4x^2\times3x\div3x$。卽 $4x^2$。故得 $4x^2+3x+2-3x^{-1}$。

13. 以 $x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}$ 除 $x-x^{-1}-2(x^{\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{6}})+2(x^{\frac{5}{6}}-x^{-\frac{5}{6}})$。

〔解〕變被除式為 $x-x^{-1}+2x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{6}}+2x^{-\frac{1}{6}}-2x^{-\frac{5}{6}})$

$$=x-x^{-1}+2x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})+2x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})。$$

$$\therefore\quad 商=\frac{x-x^{-1}+2x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})+2x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})}{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}$$

$$=x^{\frac{2}{3}}+1+x^{-\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}。$$

14. 化 $\dfrac{ax^{-1}+a^{-1}x+2}{a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-1}$ 為簡式。答 $a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$。

〔解〕 $$\frac{(a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})^2}{a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}}=(a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})\left\{\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}}\right\}$$

$$=(a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{6}}x^{-\frac{1}{6}}+a^{-\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{6}})。$$

此題第二節之{ }與 a^3+b^3 以 a^2-ab+b^2 除之得 $a+b$ 同法。何則。因被除式之a, b之次數爲3次。除式爲2次。故得 $\frac{3}{2}$ 次,此式 $(ax^{-1})^{\frac{1}{2}}+(a^{-1}x)^{\frac{1}{2}}$ 爲 $\frac{1}{2}$ 次。故 $(ax^{-1})^{\frac{1}{3}}-1+(a^{-1}x)^{\frac{1}{3}}$ 爲 $\frac{1}{3}$ 次。故亦得 $\frac{3}{2}$ 次。而與前同形。

15. 以 $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}+\dfrac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ 除 $\dfrac{x^{\frac{7}{3}}}{y^{\frac{14}{5}}}+\dfrac{y^{\frac{14}{5}}}{x^{\frac{7}{3}}}$。

〔解〕 $\left\{\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)^7+\left(\dfrac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^7\right\}\div\left\{\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)+\left(\dfrac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)\right\}$

$$=\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)^6-\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)^5\left(\frac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)+\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}\right)^4\left(\frac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2-\cdots\cdots\cdots+\left(\frac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^6$$

$$=x^2y^{-\frac{12}{5}}-x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{8}{5}}+x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{5}}-1+x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{5}}-x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{8}{5}}+x^{-2}y^{\frac{12}{5}}。$$

16. 求 $\dfrac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=x^{\frac{2}{3}}+2$ 之證。

〔證〕 左邊 $=\dfrac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1-(x^{\frac{1}{3}}-1)=x^{\frac{2}{3}}+2$。

17. 求 $(2x+y^{-1})(2y+x^{-1})=(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}})^2$ 之證。

〔證〕 $(2x+y^{-1})(2y+x^{-1})$

$$=x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}})=(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}})^2。$$

18. 求 $\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}-\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}=1$ 之證。

〔解〕 $\dfrac{ab^{-1}(ab-a^{-1}b^{-1})+a^{-1}b(ab-a^{-1}b^{-1})}{(ab+a^{-1}b^{-1})(ab-a^{-1}b^{-1})}+\dfrac{ab-ab^{-1}-a^{-1}b+a^{-1}b^{-1}}{ab+a^{-1}b^{-1}}$

$$=\frac{ab^{-1}+a^{-1}b}{ab+a^{-1}b^{-1}}+\frac{ab-ab^{-1}-a^{-1}b+a^{-1}b^{-1}}{ab+a^{-1}b^{-1}}$$

$$=\frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{ab+a^{-1}b^{-1}}=1.$$

19. 設 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$。求 $(x+y+z)^3=27xyz$ 之證。

〔證〕 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=-z^{\frac{1}{3}}$ 兩邊立方之。則

$x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})=-z$。即 $x+y+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}(-z^{\frac{1}{3}})=-z$。

∴ $x+y+z=3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$。兩邊立方之。則 $(x+y+z)^3=27xyz$。

20. 求以下諸式之有理補因子。

(1) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{4}{3}}$。　　(2) $a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{1}{2}}$。

(3) $a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{2}{3}}$。　　(4) $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}$。

〔解〕 (1) $a^{\frac{1}{2}}=X$, $b^{\frac{4}{3}}=Y$。則 $a^3=X^6$, $b^8=Y^6$。故 $X+Y$ 之有理因子。爲 $X^5-X^4Y+X^3Y^2-X^2Y^3+XY^4-Y^5$。

即有理補因子爲 $a^{\frac{5}{2}}-a^2b^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{8}{3}}-ab^4+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{16}{3}}-b^{\frac{20}{3}}$。

(2) $a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{1}{2}}$ 爲 $X+Y$。則 $a^4x^5=X^6$, $y^3=Y^6$。故 $X+Y$ 之有理補因子。與(1)同法。得 $a^{\frac{10}{3}}x^{\frac{25}{6}}-a^{\frac{8}{3}}x^{\frac{10}{3}}y^{\frac{1}{2}}+a^2x^{\frac{5}{2}}y-a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{6}}y^2-y^{\frac{5}{2}}$。

(3) 用 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=a^3+b^3+c^3-3abc$。則

$$(a+bx^{\frac{1}{3}}+cx^{\frac{2}{3}})(a^2+b^2x^{\frac{2}{3}}+c^2x^{\frac{4}{3}}-bx^{\frac{1}{3}}cx^{\frac{2}{3}}-cx^{\frac{2}{3}}a-abx^{\frac{1}{3}})$$
$$=a^3+b^3x+c^3x^2-3abcx。$$

故有理補因子爲 $a^2+b^2x^{\frac{2}{3}}+c^2x^{\frac{4}{3}}-bcx-cax^{\frac{2}{3}}-abx^{\frac{1}{3}}$。

(4) $$(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})$$
$$=x+y+z-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}。$$

又 $$\{(x+y+z)-3(xyz)^{\frac{1}{3}}\}\{(x+y+z)^2+3(x+y+z)(xyz)^{\frac{1}{3}}+9(xyz)^{\frac{2}{3}}\}$$
$$=(x+y+z)^3-27xyz。$$

由是有理補因子爲 $(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}})$。與 $(x+y+z)^2+3(x+y+z)x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}+9x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}$ 之積。

21. $(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(y-z)+(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(z-x)+(1-z^3)^{\frac{1}{3}}(x-y)=0$。設 x, y, z 皆不等。則 $(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)=(1-xyz)^3$。

〔證〕$a+b+c=0$。則$a^3+b^3+c^3=3abc$。從本題之已知關係式，即得

$$(1-x^3)(y-z)^3+(1-y^3)(z-x)^3+(1-z^3)(x-y)^3$$
$$=3(y-z)(z-x)(x-y)(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(1-z^3)^{\frac{1}{3}}。$$

上之左邊$=(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3-\{x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3\}$
$=3(y-z)(z-x)(x-y)-3xyz(y-z)(z-x)(x-y)$
$=3(y-z)(z-x)(x-y)(1-xyz)$。由是

$$3(y-z)(z-x)(x-y)(1-xyz)=3(y-z)(z-x)(x-y)(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(1-z^3)^{\frac{1}{3}}.$$

依題意$(y-z)(z-x)(x-y)\neq 0$。

$$\therefore\quad 1-xyz=(1-x^3)^{\frac{1}{3}}(1-y^3)^{\frac{1}{3}}(1-z^3)^{\frac{1}{3}}。$$

兩邊立方之。則$(1-xyz)^3=(1-x^3)(1-y^3)(1-z^3)$。

查理斯密司氏
霍爾氏，乃托氏

大代數學講義

第四卷

第拾肆編

不盡根，虛數及複虛數

171. 定義 在算術上所求得之方根。僅爲略近數者。稱爲不盡根。

如代數式$\sqrt{a}$其實雖非不盡根而恒付以不盡根之名。

不盡根爲同根號者，稱爲同次，例如$\sqrt{2}$及$\sqrt{6}$爲二次，即平方之不盡根。又$\sqrt[3]{4}$爲三次即立方之不盡根。故$\sqrt[n]{a}$爲第n次之不盡根。

兩不盡根。其化出之無理因子相同者謂之同類，(Similar) 例如$\sqrt{8}$及$\sqrt{18}$化得$2\sqrt{2}$，及$3\sqrt{2}$俱有$\sqrt{2}$之無理因子。故爲同類。

有不盡根式之運算，可依前編所證得之定理施之。

註 所設之根號置於數字之前者，爲表算術上之一根。若置於代數式之前者。爲表諸根內任意之一根。

例如$\sqrt{a}$爲有兩方根即$+\sqrt{a}$或$-\sqrt{a}$。若所示爲$\sqrt{2}$則僅表算術上之一根1.414………。即不以$\pm\sqrt{2}$記之。

172. 有理數量 亦可以不盡根之形表之。

例如 $2=\sqrt{4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[n]{2^n}$。 $a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[n]{a^n}$。

又依165章 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{(ab)}$ 故 $2\sqrt{2}=\sqrt{4}\sqrt{2}=\sqrt{(4\times 2)}=\sqrt{8}$。

$5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{5^3}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{(5^3\times 3)}=\sqrt[3]{375}$。

及 $a\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a^n}\times\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{(a^n\times ab)}=\sqrt[n]{a^{n+1}b}$。

反之 $\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2)}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$。

及 $\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{(3^3\times 5)}+\sqrt[3]{(2^3\times 5)}=3\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5}$。

173. 任意兩不盡根可化爲同次之不盡根

例如$\sqrt[n]{a}$及$\sqrt[m]{b}$化爲同次，則依165章，得

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$ 及 $\sqrt[m]{b}=\sqrt[mn]{b^n}$。

〔例〕$\sqrt[3]{14}$與$\sqrt{6}$何者爲大，

兩邊化爲同次，即

$\sqrt[3]{14}=\sqrt[6]{14^2}=\sqrt[6]{196}$，及 $\sqrt{6}=\sqrt[6]{6^3}=\sqrt[6]{216}$，故

$\sqrt[6]{216}$大於$\sqrt[6]{196}$即$\sqrt{6}$大於$\sqrt[3]{14}$。

故比較不盡根之大小，不必各求方根，依上法求之即得。

174. 同次兩不盡根之積易求得之。

例如$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$。

由是求任意諸不盡根之積，先化諸不盡根爲同次，乃用如下之公式，即得

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}\times\ldots\ldots\ldots\ldots=\sqrt[n]{(abc\ldots\ldots\ldots\ldots)}。$$

例　　題

1. 以$\sqrt[3]{2}$乘$\sqrt{5}$。

〔解〕$\sqrt{5}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{5^3}\times\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{(5^3\times2^2)}=\sqrt[6]{500}$。

2. $3\sqrt{5}$以$2\sqrt[3]{2}$乘之。

〔解〕$3\sqrt{5}\times2\sqrt[3]{2}=3\times2\times\sqrt[6]{5^3}\times\sqrt[6]{2^2}=6\sqrt[6]{500}$，

3. $\sqrt{2}$以$\sqrt[3]{2}$乘之。

〔解〕$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{(2^3\times2^2)}=\sqrt[6]{32}$

又別法 $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^5}$。

4. 以$\sqrt{3}+\sqrt{5}$乘$\sqrt{2}+\sqrt{3}$。

〔解〕$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{5})=\sqrt{3}\times\sqrt{3}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt{5}+2\times\sqrt{5}$
$=3+\sqrt{6}+\sqrt{15}+\sqrt{10}$，

5. 以$\sqrt{8}$除$\sqrt[3]{4}$。

〔解〕$\sqrt[3]{4}\div\sqrt{8}=\sqrt[6]{4^2}\div\sqrt[6]{8^3}=\sqrt[6]{\frac{4^2}{8^3}}=\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$。

175. 不盡根計算不盡根之畧近數原屬於算術之問題，非代數學之問題，然在代數式，能變不盡根之形而歸於簡易，令

其便於實算。如分數之分母有不盡根。則依169章。乘其有理補因子而變爲有理式是也。

例如 $\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$。

$$\frac{3}{\sqrt{5}-1}=\frac{3(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{3}{4}(\sqrt{5}+1)。$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}}=\frac{1}{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)}{(3-1)(5-1)}$$

$$=\frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)。$$

176. 兩同類二次不盡根 其積及商皆爲有理。

例如 $a\sqrt{b}\times c\sqrt{b}=acb$ 及 $a\sqrt{b}\div c\sqrt{b}=\frac{a}{c}$。兩式自易明瞭。

反之。若兩不盡根 $\sqrt{a}$ 及 $\sqrt{b}$ 之積爲有理。則爲同類。

何則。命此積爲有理數 x。則 $x=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$。故

$x\sqrt{b}=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times\sqrt{b}=b\sqrt{a}$。卽 $x\sqrt{b}$ 與 $b\sqrt{a}$ 之兩不盡根爲同類。

又 $\sqrt{a}\div\sqrt{b}$ 爲有理。則其爲同類。可以同法推知。

177. 定理 下之定理。最爲重要。

若 $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$。而 a 及 x 爲有理數。$\sqrt{b}$ 及 $\sqrt{y}$ 爲無理數。則 $a=x,\quad b=y$。

何則。從 $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$，　$a-x+\sqrt{b}=\sqrt{y}$。兩邊平方之。則

$(a-x)^2+2(a-x)\sqrt{b}+b=y$。

$\therefore\quad 2(a-x)\sqrt{b}=y-b-(a-x)^2$。

此方程式。若不盡根等於有理數量。則不合理。故不盡根之係數。不能不爲0。卽 $a-x=0$。　$\therefore\quad a=x$。

由是從原式 $\sqrt{b}=\sqrt{y}$。　$\therefore\quad b=y$。

(例) 證照不盡根。若不爲同類。則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\neq 0$。

何則。若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=0$。則 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=-\sqrt{c}$。兩邊平方之。則 $a+b+2\sqrt{ab}=c$。由是 $\sqrt{ab}$ 不能不爲有理數。若此數爲有理。則由176章。$\sqrt{a}$ 與 $\sqrt{b}$ 爲同類。是不合於題意。故如題云云。

178. 相屬不盡根 $a+\sqrt{b}$ 及 $a-\sqrt{b}$ 兩式。互爲相屬二次不盡根。卽 $a+\sqrt{b}$ 爲 $a-\sqrt{b}$ 之相屬。又 $a-\sqrt{b}$ 爲 $a+\sqrt{b}$ 之相屬。

兩相屬不盡根之和及積,恆爲有理,

即 $(a+\sqrt{b})+(a-\sqrt{b})=2a$, $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$。

反之若 $a+\sqrt{b}$ 及 $c+\sqrt{d}$ 兩式之和及積爲有理,則其兩式互相屬,何則 $(a+\sqrt{b})+(c+\sqrt{d})=a+c+\sqrt{b}+\sqrt{d}$,此式爲有理,則由177章 $\sqrt{b}+\sqrt{d}$ 不能不爲0, $\therefore\ \sqrt{b}+\sqrt{d}=0$。即 $\sqrt{d}=-\sqrt{b}$。

又 $(a+\sqrt{b})(c+\sqrt{d})$。即 $(a+\sqrt{b})(c-\sqrt{b})=ac-b+(c-a)\sqrt{b}$。此式爲有理。則 $c-a=0$。故 $c=a$。

由是 $c+\sqrt{d}$,即 $a-\sqrt{b}$ 與 $a+\sqrt{b}$ 爲相屬,

179. 代數式 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots\dots\dots+k$,其 $a, b, c, \dots\dots\dots k$ 皆爲有理。若以 $\alpha+\sqrt{\beta}$ 代 x。而此式爲0。則以其相屬之 $\alpha-\sqrt{\beta}$ 代 x,亦必爲0。$x=\alpha+\sqrt{\beta}$。則依題意,

$a(\alpha+\sqrt{\beta})^n+b(\alpha+\sqrt{\beta})^{n-1}+c(\alpha+\beta)^{n-2}+\dots\dots\dots k=0$。而 $\alpha+\sqrt{\beta}$ 之方乘內 $\sqrt{\beta}$ 之偶數方乘爲有理,而其和爲 P。又奇數方乘爲 $\sqrt{\beta}$ 之若干倍,而其和爲 $Q\sqrt{\beta}$。故原方程式爲 $P+Q\sqrt{\beta}=0$。故由177章 $P=0,\ Q=0$。

又 $x=\alpha-\sqrt{\beta}$。則 $-\sqrt{\beta}$ 之偶數方乘。各爲正號之有理數。其和與前之 P 同。而 $-\sqrt{\beta}$ 之奇數方乘。各爲負 $\sqrt{\beta}$ 之若干倍。其和即 $-Q\sqrt{\beta}$ 故得 $P-Q\sqrt{\beta}$ 而以 $P=Q=0$ 故 $P-Q\sqrt{\beta}=0$。

由是依88章之定理。知原式有 $x-\alpha-\sqrt{\beta}$ 之因子。亦有 $x-\alpha+\sqrt{\beta}$ 之因子。

故凡有理整代數式,能以相屬平方兩不盡根之一根除盡,則其餘一根亦能除盡,

〔別證〕$\{x-(\alpha+\sqrt{\beta})\}\{x-(\alpha-\sqrt{\beta})\}$ 爲 x 之二次式。故以此除 $ax^n+bx^{n-1}+\dots\dots\dots+k$。則得商 Q,而餘式爲普通 $Rx+R'$ 之一次式,

$\therefore\ ax^n+bx^{n-1}+\dots\dots\dots\dots+k=Q\{x-(\alpha+\beta)\}\{x-(\alpha-\sqrt{\beta})\}+Rx+R'$。

今 $x=\alpha+\sqrt{\beta}$。則依題此左邊爲0。故

$0=Q\{0\}\{\alpha+\sqrt{\beta}-(\alpha-\sqrt{\beta})\}+R(\alpha+\sqrt{\beta})+R'$。

即 $-R\sqrt{\beta}=R\alpha+R'$, 由177章則 $R=0$。 $\therefore\ R'=0$。

由是 $ax^n+bx^{n-1}+\dots\dots\dots\dots+k=Q\{x-(\alpha+\sqrt{\beta})\}\{x-(\alpha-\sqrt{\beta})\}$。

即 $x=\alpha-\sqrt{\beta}$ 亦得原式爲0。

180. 二項式之平方根 有理數量與二次不盡根所成二項式之平方根。有時可化為簡式。

例如求 $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$。但 $\sqrt{b}$ 為不盡根，

設 $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，兩邊平方之。則 $a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$。

今 $\sqrt{b}$ 為不盡根，故由177章，

$$x+y=a。及\ 2\sqrt{xy}=\sqrt{b}，即\ xy=\frac{1}{4}b。$$

由是 x 及 y 為方程式 $x^2-ax+\frac{1}{4}b=0$ 之兩根。見(128章)而此兩根為 $\frac{1}{2}\{a+\sqrt{(a^2-b)}\}$，及 $\frac{1}{2}\{a-\sqrt{(a^2-b)}\}$。

故 $\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}}$。

若 $\sqrt{(a^2-b)}$ 非有理數。則前方程式之右邊，不能簡於左邊，亦不適於計算。故依此方法。必先審得 a^2-b 為平方數。而後可施運算。

又 x 及 y 若為有理數。則其根可由視察而得。

〔第一例〕求 $\sqrt{(6+2\sqrt{5})}$。

$\sqrt{(6+2\sqrt{5})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 兩邊平方之。則 $6+2\sqrt{5}=x+y+2\sqrt{xy}$。

$\therefore\ x+y=6$，及 $xy=5$。由視察而得 $x=5,\ y=1$。

故 $\sqrt{(6+2\sqrt{5})}=\sqrt{5}+1$。

〔第二例〕求 $\sqrt{(28-5\sqrt{12})}$

$\sqrt{(28-5\sqrt{12})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$。則 $28-5\sqrt{12}=x+y-2\sqrt{xy}$，

$\therefore\ x+y=28$，及 $2\sqrt{xy}=5\sqrt{12}$，即 $xy=75$，

由視察而得 $x=25,\ y=3$。

$\therefore\ \sqrt{(28-5\sqrt{12})}=\sqrt{25}-\sqrt{3}=5-\sqrt{3}$。

〔第三例〕求 $\sqrt{(18+12\sqrt{3})}$。

在此例則 $\sqrt{(a^2-b)}$，即 $\sqrt{(18^2-12^2\times3)}$，即 $\sqrt{-108}$ 為無理數。故不能開平方。但此式雖不能以 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 之形顯之，而可以 $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}$ 之形顯之。何則，

$$\sqrt{(18+12\sqrt{3})}=\sqrt{\{\sqrt{3}(6\sqrt{3}+12)\}}=\sqrt[4]{3}\sqrt{(12+6\sqrt{3})}=\sqrt[4]{3}(3+\sqrt{3})$$
$$=3\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{3}\sqrt{3}=\sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{27}。$$

〔第四例〕求 $\sqrt{(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})}$。

$\sqrt{(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 平方之則

$10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$。

由是 $x+y+z=10$, $xy=6$, $yz=10$, $zx=15$, 從後之三方程式察得 $x=3$, $y=2$, $z=5$ 代入第一方程式,適合 $3+2+5=10$。故

$\sqrt{(10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$。

〔第五例〕$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}$; 則 $\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$ 試證之。

$a+\sqrt{b}=(x+\sqrt{y})^3=x^3+3xy+(3x^2+y)\sqrt{y}$。

由是 $x^3+3xy=a$ 及 $(3x^2+y)\sqrt{y}=\sqrt{b}$, 由減法,得

$a-\sqrt{b}=x^3+3xy-(3x^2+y)\sqrt{y}=(x-\sqrt{y})^3$。

$\therefore\quad \sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}=x-\sqrt{y}$。

例題十八

化以下各式爲簡式

1. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$。 答 $2-\sqrt{3}$。

〔解〕原式 $=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3-1}=2-\sqrt{3}$。

2. $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$。 答 $5-\sqrt{15}$。

〔解〕原式 $=\dfrac{(5-3)\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=(\sqrt{5}-\sqrt{3})\sqrt{5}=5-\sqrt{15}$。

3. $\dfrac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$。 答 $\dfrac{4}{5}\sqrt{2}$。

〔解〕原式 $=\dfrac{(\sqrt{8}-\sqrt{3})+(\sqrt{8}+\sqrt{3})}{8-3}=\dfrac{2\sqrt{8}}{5}=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$。

4. $(2-\sqrt{3})^{-3}+(2+\sqrt{3})^{-3}$。 答 52。

〔解〕$\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^3}+\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^3}=\dfrac{(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3}{(4-3)^3}=2.2^3+6.2.3=52$。

5. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$。

〔解〕$\dfrac{(6-3)\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\dfrac{(6-2)\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{(3-2)\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=(\sqrt{6}-\sqrt{3})\sqrt{2}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{3}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{6}$

$=(2\sqrt{3}-\sqrt{6})-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})+(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})=0$,

6. $\dfrac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$。 答 $14\frac{1}{2}$。

〔解〕 $\dfrac{\{(7-2\sqrt{5})(31+13\sqrt{5})\}(5+\sqrt{7})}{\{(6-2\sqrt{7})(11+4\sqrt{7})\}(3+\sqrt{5})}=\dfrac{29(3+\sqrt{5})(5+\sqrt{7})}{2(5+\sqrt{7})(3+\sqrt{5})}=\dfrac{29}{2}$。

7. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$。 答 $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$。

〔解〕 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$。

8. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$，與前例同法。 答 $\dfrac{\sqrt{30}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{12}$。

9. $\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$。 答 $\frac{1}{2}(\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{14}-\sqrt{15})$。

〔解〕 $\dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})+\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\dfrac{1}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(7-5)(3-2)}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$。

10. $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{21}-\sqrt{10}-\sqrt{35}}$。與前例同法，

答 $\frac{1}{10}(\sqrt{6}+\sqrt{10}-\sqrt{21}-\sqrt{35})$。

11. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$。 答 $\dfrac{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4}{3}$。

〔解〕 $\dfrac{2-1}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{\frac{1}{3}(2+1)}{\sqrt[3]{2}+1}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1+\frac{1}{3}(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$。

12. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-1}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}+1}$ 答 $3\sqrt[3]{3}+1$。

〔解〕 如前例各分子爲 $\frac{1}{2}(9-1)$，及 $\frac{1}{2}(9+1)$。

13. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$ 答 $\sqrt[3]{2}-1$。

〔解〕 $\dfrac{1\times(1-\sqrt[3]{2})}{(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})(1-\sqrt[3]{2})}=\dfrac{1-\sqrt[3]{2}}{1-2}=\sqrt[3]{2}-1$。

14. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}$。 答 $\dfrac{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{4}}{4}$。

〔解〕 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1)}\times\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}-1}=\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{2}(3-1)}\times\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{4}}{4}$。

15. $\sqrt{(101-28\sqrt{13})}$。 答 $7-2\sqrt{13}$。

〔解〕 $\sqrt{(101-28\sqrt{13})}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$。 則 $101-28\sqrt{13}=x+y-2\sqrt{xy}$。

$\therefore$ $x+y=101$。 $xy=14^2\times 13$。

$\therefore$ $x=49$。 $y=52$。由是 $\sqrt{(101-28\sqrt{13})}=\sqrt{49}-\sqrt{52}$。

16. $\sqrt{(28-5\sqrt{12})}$。 答 $5-\sqrt{3}$。

〔解〕 $\sqrt{(28-10\sqrt{3})}=\sqrt{(5^2-2.5.\sqrt{3}+\sqrt{3}^2)}=5-\sqrt{3}$。

17. $\sqrt{\{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})\}}$。 答 $1+\sqrt{5}+\sqrt{7}$

〔解〕 原式 $=\sqrt{\{11+2(1+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{35})\}}$

$=\sqrt{(13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$，則

$13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$,

$\therefore$ $x+y+z=13$, $xy=5$, $yz=7$, $zx=35$。

由是 $x=5$, $y=1$, $z=7$。 $\therefore$ 原式 $=\sqrt{5}+\sqrt{1}+\sqrt{7}$。

18. $\sqrt{\{6-4\sqrt{3}+\sqrt{(16-8\sqrt{3})}\}}$。 答 $\sqrt{3}-1$。

〔解〕 原式 $=\sqrt{\{6-4\sqrt{3}+2\sqrt{(4-2\sqrt{3})}\}}$

$=\sqrt{\{6-4\sqrt{3}+2(\sqrt{3}-1)\}}=\sqrt{(4-2\sqrt{3})}=\sqrt{3}-1$。

19. $\sqrt[4]{(97-56\sqrt{3})}$。 答 $2-\sqrt{3}$。

〔解〕 原式 $=\sqrt[4]{(7^2-2.7.\ 4\sqrt{3}+4^2\ 3)}=\sqrt[4]{(7-4\sqrt{3})^2}$

$=\sqrt{(7-4\sqrt{3})}=\sqrt{(4-2.2\sqrt{3}+3)}=2-\sqrt{3}$。

20. $\dfrac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{(3-2\sqrt{2})}}$。 答 1。

〔解〕 原式 $=\dfrac{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{1}{1}=1$。

21. $(\sqrt{2}+\sqrt{45})\div\{\sqrt{2}+\sqrt{(7-2\sqrt{10})}\}$。 答 $\dfrac{1}{5}(15+\sqrt{10})$。

〔解〕 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{(5-2\sqrt{5}.\sqrt{2}+2)}}=\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$。

22. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}$。 答 $\sqrt{2}+\sqrt{6}-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$。

〔解〕原式 $=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\{\sqrt{2}-\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}\}}{2-(2+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{4-2\sqrt{3}\sqrt{(2+\sqrt{3})}}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})}$

$=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}+2\sqrt{\left\{\dfrac{1}{2}(4+2\sqrt{3})\right\}}=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}+2\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)\right\}$

$=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$。

23. $\dfrac{\sqrt{(5+2\sqrt{6})}-\sqrt{(5-2\sqrt{6})}}{\sqrt{(5+2\sqrt{6})}+\sqrt{(5-2\sqrt{6})}}$。 答 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$。

〔解〕 原式 $=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$。

24. $\sqrt{\{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}\}}$。 答 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$。

〔解〕 $\sqrt{\{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}\}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$。

25. $\sqrt{\{11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}\}}$ 同上法。 答 $\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}$。

26. $\sqrt{\{17+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}-4\sqrt{5}-2\sqrt{10}+2\sqrt{30}\}}$。

答 $2+\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{6}$。

〔解〕 $\sqrt{\{17+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}-4\sqrt{5}-2\sqrt{10}+2\sqrt{30}\}}$

$=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}-\sqrt{u}$。

則 $17+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}-4\sqrt{5}-2\sqrt{10}+2\sqrt{30}$

$=x+y+z+u+2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}-2\sqrt{xu}-2\sqrt{yu}+2\sqrt{zu}$。

∴ $x+y+z+u=17$, $xy=8$, $yz=12$, $zx=24$, $xu=20$, $yu=10$, $zu=30$, 由是 $x=4$, $y=2$, $z=6$, $u=5$。

27. 求 $\dfrac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}-\dfrac{1}{\sqrt{(8-\sqrt{60})}}-\dfrac{2}{\sqrt{(10+\sqrt{84})}}=0$ 之證。

〔證〕左邊 $=\dfrac{1}{\sqrt{(12-2\sqrt{35})}}-\dfrac{1}{\sqrt{(8-2\sqrt{15})}}-\dfrac{2}{\sqrt{(10+2\sqrt{21})}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})-\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})=0$。

28. 求 $\frac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}-\frac{3}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}-\frac{4}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}=0$。

〔證〕左邊 $=\frac{6-5}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\frac{5-2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\frac{6-2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-(\sqrt{5}+\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=0$。

虛數及複虛數

181. 虛數 在83章求二次式因子。曾示虛數之式。即$\sqrt{-a}$。但 a 必爲正數。惟此虛數式之用法。亦必依代數學之根原法則。

無論正數量與負數量。其平方必皆爲正，前已說明，然$\sqrt{-a}$之平方爲$(\sqrt{-a})^2=\sqrt{(-a)^2}=-a$。故$\sqrt{-a}$不能以正數或負數稱之。即不能示其性質若何。故稱之爲虛數(Imaginary)。

又 $a+b\sqrt{-1}$ 爲複虛數(Complex Quantity)。但 a 及 b 爲實數，又 $a+\sqrt{-b}$ 亦爲複虛數。

182. 新疑問 此等虛數。在代數學上可另立一新記號與否。亦一新疑問也，然代數學之根原法則，爲代數學上之憲法。國有憲法，不能因有外國人之新來。而爲之更立新制，故此虛數量。可不必另作新記號，而自能服從於原定之法則。

凡虛數量既不必另立新記號，而能服從於根原法則，故吾人對於此疑問。無須再計。仍用現在之記號，以$\sqrt{-a}$題虛數。而示明其在原則上。均能合理如下。

183. 虛數之單位 用$\sqrt{-1}$。.

以 -1 乘任意之數量。則其方向正相反對。即如向東4里之距離爲 $+4$。以 -1 乘之。得 -4。則變爲向西4里之距離。此易知者也，

而 $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$，故任意之數量。以$\sqrt{-1}$乘二次。其結果與以 -1 乘一次同。而與原數之方向正相反對，故以$\sqrt{-1}$乘一次者。則變方向之半分。即九十度之變化是也。

例如向東4里爲 $+4$，則向北4里爲 $4\sqrt{-1}$，向西4里爲 -4，又向南4里爲 $-4\sqrt{-1}$。又以$\sqrt{-1}$乘之。則仍爲東方4里。故順次以

$\sqrt{-1}$乘。卽如時計之針。依反向而動。設針初在3時。第一次反動在12時。第二次在9時。第三次在6時。第四次則復在原處3時。

凡實數量祇能在一直線上變其方向。卽 $+4$ 里爲向東。-4 里爲向西。而不能有別方向，惟虛數則以 $4\sqrt{-1}$ 及 $-4\sqrt{-1}$ 表向北與向南。故虛數之直線，與實數之直線交成直角而示其方向者也，

由是凡在一直綫之垂綫上所度之量。可用 $\sqrt{-1}$ 爲其運算之記號。而此記號之意義，亦見完足矣，

記號 $\sqrt{-1}$。通例以i顯之，依前述轉成直角(九十度)之說。卽 $-i$ 爲i正相反對之方向。

184. 虛數之運算 時計之針所成直角之單位卽 $\sqrt{-1}$，以a乘之，則其式爲ia，卽a倍其單位爲其長數，又使a爲時針之同轉於直角之數，則其式亦得ai，與前式同。故 $ai=ia$，卽得交換法則，

又bi乘ai。依28章乘法之定義。卽以ai代bi所有之單位，卽將b個轉得之直角代以a，而各又轉一直角也。合兩直角。卽成負號所表之方向。

由是 $ai\times bi=-ab=abii$，

依上法。記號i若在積中，則與他之記號同。可依交換法則得之。

$(ai)\times(ai)=aaii=a^2(-1)=-a^2$。而 $\sqrt{-a^2}=ai$。故虛數式祇須用一個。卽 $\sqrt{-1}$。

185. 據上之定義 $\sqrt{-1}$ 卽i爲時計之針。依逆方向通過直角之運算。亦爲在一直線上可度之量。故就代數學之根原法則，所論虛數及複虛數。均可證明之。

前章所示甚爲簡約。其詳細之處，則見於 De Morgan 氏之 Duble Algebra。又 Clifford 氏之 Common Sense of the Exact Sciences 第四編12章及13章，又 Hobson 氏之大三角法第十三編，皆爲斯密氏所未詳。

186. 定理 $a+bi=0$，若a及b爲實數。則a及b當俱爲0，

何則。$a=-bi$。是實數與虛數等。爲不合於理。故必 $a=0$，$b=0$，

〔註〕此後遇 $a+bi$ 之形。則當知a及b恆爲實數。

187. 定理 $a+bi=c+di$，則 $a=c$，$b=d$，

何則 $a-c+(b-d)i=0$。依 186 章，必 $a-c=0$。及 $b-d=0$ 也。

故兩複虛數相等。則各實數及各虛數俱相等。

188. 相屬複虛數 $a+bi$ 及 $a-bi$ 互爲相屬。即與 178 章同。

$(a+bi)+(a-bi)=2a$。　$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$，

由是兩相屬複虛數之和及積。皆爲實數。

反之兩複虛數，其和及積皆爲實數。則爲互相屬。

何則 $(a+bi)+(c+di)=a+c+(b+d)i$ 因爲實數。故 $b+d=0$。

即 $d=-b$。

又 $(a+bi)(c+di)$，即 $(a+bi)(c-bi)=ac+b^2-(a-c)bi$ 因爲實數。

故 $a-c=0$。即 $c=a$。由是 $c+di$，即 $a-bi$，

189. 定義 a^2+b^2 平方根之正數值，即 $+\sqrt{a^2+b^2}$ 謂之 $a+bi$ 之模數。(Modulus) 恆以 $\mathrm{mod}\,(a+bi)$ 記之。故 $\mathrm{Mod}\,(a+bi)=+\sqrt{(a^2+b^2)}$，

兩相屬複虛數。必有同一之模數。又依 188 章，

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2。$$

但　$\mathrm{mod}(a+bi)=+\sqrt{(a^2+b^2)}$，

故兩相屬複虛數之積，恆爲 a^2+b^2 平方根之正值之積。

即　$\mathrm{mod}(a+bi)=\mathrm{mod}(a-bi)=+\sqrt{(a^2+b^2)}$，

因 a 及 b 皆爲實數。故 a^2+b^2 若爲 0。則 a 及 b 必皆爲 0。

是故複虛數若消去。則其模數亦必消去。

又在 $\mathrm{mod}(a+bi)=+\sqrt{(a^2+b^2)}$ 式。其 $b=0$。則 $\mathrm{mod}\,(a)=+\sqrt{a^2}=+a$，故實數之模數即本數。

190. 積之模數 $a+bi$ 及 $c+di$ 之積，爲

$ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i$。

由是積之模數，即 $\mathrm{mod}\{(a+bi)(c+di)\}$

$$=\sqrt{\{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2\}}=\sqrt{\{(a^2+b^2)(c^2+d^2)\}}$$

$$=\sqrt{(a^2+b^2)}\times\sqrt{(c^2+d^2)}=\mathrm{mod}(a+bi)\times\mathrm{mod}(c+di)。$$

故兩複虛數之積之模數。等於其各模數之積。據此定理，可擴充之於諸複虛數。

定理 若干數之複虛數，其積之模數，等於其各模數之積。

$$\bmod\{(a+bi)(c+di)(e+fi)\}=\bmod\{(a+bi)(c+di)\}\bmod(e+fi)$$
$$=\bmod(a+bi)\bmod(c+di)\bmod(e+fi),$$

191.商之模數 兩複虛數之積之模數等於各模數之積。故反之兩式之商之模數，等於其各模數之商。

別證之如下。

$$(a+bi)\div(c+di)=\frac{a+bi}{c+di}\times\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

由是 $\bmod\left\{\frac{a+bi}{c+di}\right\}=\frac{\sqrt{\{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2\}}}{c^2+d^2}$

$$=\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(c^2+d^2)}}=\frac{\bmod(a+bi)}{\bmod(c+di)}。$$

192.實因子 凡能消去任意之積為0。必其積之內有一因子為0。今由190章之定理推之。雖其一因子。或若干因子為複虛數。而此題亦能合理。

何則。若干因子之積之模數。等於其各模數之積。而模數皆為實數。故非其因子之模數為0。則積之模數不能為0。若若干因子之積為0。則其模數亦必為0。見(189章)。即其因子亦必消失而為0。反之。若諸因子之一因子為0。則其模數為0。故積之模數為0。由是其積亦遂消失而為0。

193.定理 於 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots+k$ 式。設 $a, b, c\ldots\ldots k$ 等。皆為實數。用 $\alpha+\beta i$ 代 x 能令此式為0。則用 $\alpha-\beta i$ 代 x。亦能令此式為0。與(179章)同。

$x=\alpha+\beta i$ 代入原式。所生各實項之和為P。各虛項之和為Qi。則原代數式為P+Qi。

P及Q皆為實數。故僅含i之偶數方乘。由是P及Q。雖變i之符號。而其值不變。故用 $\alpha-\beta i$ 代 x。其結果為 $P+Q(-i)$。即 $P-Qi$。

若原式用 $\alpha+\beta i$ 代 x。而其式為0。則 $P+Qi=0$。

P及Q皆為實數。故 $P=0$。及 $Q=0$。故 $P+Qi=0$。由是 $P-Qi=0$。

即以 $\alpha-\beta i$ 代原式中之 x。其式亦為0。

由88章若 $x-\alpha-\beta i$ 為已知代數式之一因子。則 $x-\alpha+\beta i$ 亦為其一因子。

故在 x 之有理整代數式。其係數若為實數。則於兩相屬複虛數中。能以一複虛數整除。其餘一複虛數。亦必能整除之。

第拾伍編

平方根立方根

194. 求已知代數式之平方已示於前。本編則用反對之運算。示以求任意代數式之平方。等於已知代數式之方法，若已知之代數式。能有完全平方式之形。則其平方根。易由視察得之。

195. 由恆同式$a^2\pm2ab+b^2=(a\pm b)^2$。而視察三項式之形狀。爲兩數平方之和加(或減)兩數之積2倍所成。即知以其兩數之和(或差)爲平方根也，

由是求三項式之平方根，先依某文字整列爲遞降方乘，若能爲完平方式，則其全式之平方根，即等於兩外項平方根之和(或中項爲負。則等於其差)。

例如$4a^8-12a^4b^3+9b^6$之平方根。取其兩外項之平方根。$\pm2a^4$及$\pm3b^3$。因中項爲負。故得其差$\pm(2a^4-3b^3)$爲所求之平方根，

〔註〕代數式所含特別一文字。若僅有相異之兩方乘者，皆可依其文字之遞降方乘整列。而變爲三項式。

例如$a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$依a之遞降方乘整列。則得三項式爲$a^2+2a(b+c)+(b^2+2bc+c^2)$。

故據本章之理推之。可取其兩外項之平方根，　$\pm a$,　$\pm(b+c)$，則$\pm(a+b+c)$爲原式之平方根。

〔第一例〕求$a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$之平方根，

依a之遞降方乘整列。則原式$=a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$。

即　$\{a-(b+c)\}^2$。　　∴ 所求之平方根爲$a-b-c$。

〔第二例〕求$4x^4+9y^4+16z^4+12x^2y^2-16x^2z^2-24y^2z^2$之平方根。

依x之遞降方乘整列。則$4x^4+4x^2(3y^2-4z^2)+9y^4-24y^2z^2+16z^4$，

即 $4x^4+4x^2(3y^2-4z^2)+(3y^2-4z^2)^2$。

即 $\{2x^2+(3y^2-4z^2)\}^2$。

由是所求之平方根爲 $2x^2+3y^2-4z^2$。

〔第三例〕求 $a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+2bcx^3+c^2x^4$ 之平方根。

依a之遞降方乘整列則

$a^2+2a(bx+cx^2)+b^2x^2+2bcx^3+c^2x^4$。

即 $a^2+2a(bx+cx^2)+(bx+cx^2)^2$。

即 $a+bx+cx^2$ 爲平方根。

〔第四例〕求 $x^6-2x^5+3x^4+2x^3(y-1)+x^2(1-2y)+2xy+y^2$ 之平方根。

此代數式。爲僅有 y^2 及 y 相異二方乘。故依 y 之遞降方乘整列。

則 $y^2+2y(x^3-x^2+x)+x^6-2x^5+3x^4-2x^3+x^2$。

即 $y^2+2y(x^3-x^2+x)+(x^3-x^2+x)^2$。 即 $(y+x^3-x^2+x)^2$。

由是所求之平方根爲 $y+x^3-x^2+x$。

197. 求任意代數式之平方根。

今求 $(A+B)^2$ 之平方根。而A爲其平方根之若干項。B爲其餘之若干項。而A及B。皆依特別一文字之遞降(或遞昇)整列。其A項內各文字。皆比B項內各文字之次數高(或低)。

若已知 $(A+B)^2$ 平方根之若干項A。而求其餘之若干項B。則其法如下。

先從 $(A+B)^2$ 減 A^2。則其餘式爲 $(2A+B)B$。

前所設之特別文字。在此餘式內之最高次(或最低次)之項。必等於A之第一項與B之第一項之積之2倍。

由是欲求根之次項。其法將已求得之根之平方。從原式中減去之。再以根之第一項之2倍。除其餘式之最高次(或最低次)之項。所得商即根之次項。

根之初項爲原式中初項之平方根。故必先求其根之初項。乃次第依上法。求其根之全項。

例如求 $x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$ 之平方根

其法詳列於下。

$$x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4(x^3-2x^2+x-2$$

$$(x^3)^2=\underline{x^6}$$

$$(x^3-2x^2)^2=\underline{x^6-4x^5+4x^4}$$

$$(x^3-2x^2+x)^2=\underline{x^6-4x^5+6x^4-4x^3+x^2}$$

$$(x^3-2x^2+x-2)^2=\underline{x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4}。$$

先求已知代數式(卽依 x 文字之遞降方乘整列者)之第一項 x^6 之平方根得 x^3。爲所求之平方根之第一項。

次從已知代數式。減 x^3 之平方 x^6。其餘式之第一項爲 $-4x^5$。以 $2x^3$ 除之得 $-2x^2$。爲所求之平方根之第二項。

次從已知代數式減 x^3-2x^2 之平方 $x^6-4x^5+4x^4$。其餘式之第一項爲 $2x^4$。以 $2x^3$ 除之得 x。爲所求之平方根之第三項,

又從原式減 x^3-2x^2+x 之平方。其餘式之第一項爲 $-4x^3$。以 $2x^3$ 除之得 -2。爲所求之平方根之末項。

而減 x^3-2x^2+x-2 之平方。則適盡無餘。

由是 x^3-2x^2+x-2 爲所求之平方根。

以 x^3, x^3-2x^2 等之平方。置於原式之下。同行相對。則減後餘式之初項。易由視察而得。

198. 求代數式之平方根 用91章之定理。亦可求得。

如前章之例 $x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$ 之平方根。設爲 ax^3+bx^2+cx+d。則

$$x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4\equiv(ax^3+bx^2+cx+d)^2$$

$$\equiv a^2x^6+2abx^5+(2ac+b^2)x^4+2(ad+bc)x^3+(2bd+c^2)x^2+2cdx+d^2.$$

比較 x 之同方乘之係數。則 $a^2=1$, $2ab=-4$, $2ac+b^2=6$, $2(ad+bc)=-8$, $2bd+c^2=9$, $2cd=-4$, $d^2=4$.

從 $a^2=1$。則 $a=1$。從 $2ab=-4$。則 $b=-2$。從 $2ac+b^2=6$。則 $c=1$。從 $2(ad+bc)=-8$。則 $d=-2$。

而末後之 $2bd+c^2=9$, $2cd=-4$, $d^2=4$。對於所得 a, b, c, d 之各值。皆能合理,

故以此各值代入 ax^3+bx^2+cx+d。則得 x^3-2x^2+x-2 爲所求之平方根。

199. 平方根定義之擴張 代數式之平方根，非完全平方。則可以擴張其定義。即非完全平方之代數式。亦可依197或198章之法。得若干項之平方根。其根之平方式。與原代數有若干項相合。

例如 x^2+2x 之平方根為 $x+1$。何則。

$(x+1)^2=x^2+2x+1$。則可與前式合。至含 x 之項。

又 $1+x$ 之平方根。為 $1+\frac{1}{2}x$。而 $(1+\frac{1}{2}x)^2=1+x+\frac{1}{4}x^2$。與前式合至第二項。即與 $1+x$ 僅差 $\frac{1}{4}x^2$。又設 $1+x$ 之平方根，為 $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$。則與前式僅差 $-\frac{1}{8}x^3+\frac{x^4}{64}$。故 x 至無限小。則 $1+\frac{x}{2}$ 可為 $1+x$ 平方根之畧近值。而 $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ 為 $1+x$ 之畧近平方根。則更為精密。然 x 非甚小。則此值無用。

200. 已求得平方根之若干項 則可由通常之除法。而求得其項之次項。

設有已知代數式。以下所列之代數式為平方根。則

$$a_1x^n+a_2x^{n-1}+\ldots\ldots+a_rx^{n-r+1})+(a_{r+1}x^{n-r}+\ldots\ldots+a_{2r}x^{n-2r+1})+R。$$

其係數 $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2r}$ 可將上式乘為平方。自 $2r$ 項起，取其以前各項內 x 方乘之係數。與已知代數式內之相當 x 方乘之係數比較，即可求得之。

上式之平方如下。

$$(a_1x^n+a_2x^{n-1}+\ldots\ldots+a_r x^{n-r+1})^2+2(a_1x^n+\ldots\ldots+a_r x^{n-r+1})$$
$$(a_{r+1}x^{n-r}+\ldots\ldots+a_{2r} x^{n-2r+1})$$
$$+\{(a_{r+1}x^{n-r}+\ldots\ldots+a_{2r} x^{n-2r+1})^2+2R(a_1x^n+\ldots\ldots+a_r x^{n-r+1})$$
$$+2R(a_{r+1}x^{n-r}+\ldots\ldots+a_{2r} x^{n-2r+1})+R^2\}。$$

惟已知之代數式內。第一項 x 之方乘為 x^{2n}。至第 $2r$ 項 x 之方乘為 $x^{2n-2r+1}$。故欲決定 $a_1\,a_2\ldots\ldots a_{2r}$ 諸係數。可取 x^{2n} 至 $x^{2n-2r+1}$ 各方乘之係數相比較，而不必取及 x^{2n-2r} 以下各方乘之係數。

但 R 內所含 x 之最高方乘為 x^{n-2r}。故上式 $\{\}$ 內之 x 之最高方乘為 x^{2n-2r}

由是知〔 〕內之式。x 各方乘之係數與 $a_1\ a_2,\dots\dots a_{2r}$ 均無關係，故從所設之代數式，減平方根自首項至 r 項和之平方。而以首項至 r 項和之 2 倍。除其餘式，即得平方根之次 r 項。

201. 由通常記數所成之數。若其平方根，可求至 n 位。則以下之 n−1 位，可由除法求得之。但此數須爲 2n−1 位之完平方。否則最後之數。不免有誤。

N 爲有 2n−1 位之完全平方數。p 爲後有 n−1 個 0 之 n 個數字之數，q 爲其餘 n−1 位之數。則

$\sqrt{N}=p+q$，　∴ $(N-p^2)/2p=q+q^2/2p$。

今 $2p \nless 2.10^{2n-2}$ 及 $q \ngtr 10^{n-1}$。由是 $q^2/2p$ 不能不爲分數。故若從 N 減 p^2 以 $2p$ 除其餘數，則其整商爲 q。

次設 $\sqrt{N}$ 爲有 m 數字，但 m 大於 2n−1。

又 p 爲後有 m−n 個 0 之 n 個數字之數，q 爲後有 m−2n+1 個 0 之 n−1 個數字之數。r 爲其餘之有 m−2n+1 數字之數，則

$N=(p+q+r)^2$。

$$\therefore\ (N-p^2)/2p-q=(q^2+r^2+2qr)/2p+r.$$

今 $10^m>p\nless 10^{m-1}$，$10^{m-n}>q\nless 10^{m-n-1}$，及 $10^{m-2n+1}>r\nless 10^{m-2n}$。

故 $(q^2+r^2+2qr)/2p$ 小於 10^{m-2n+1}。

由是 $(q^2+r^2+2qr)/2p+r$ 小於 $2\times 10^{m-2n+1}$。但此實不小於 10^{m-2n+1}

由是 $(N-p^2)/2p$ 比 10^{m-2n+1}。僅多有 q，然其差異必小於 $2\times 10^{m-2n+1}$，即商數 $(N-p^2)/2p$ 中之 n−1 之數字。與 q 中之 n−1 數字。其所差異，不過最後之一數。

立方根

202. 恆同式 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 爲二項式，立方之四項式，依某文字之遞降方乘，或遞昇方乘整列。則其兩外項之立方根，即爲原二項式之項。

由是有四項之任意完全立方式，則其立方根，可由視察得之，即依一文字之方乘整列，而取其兩外項之立方根，爲所求之立方根。

例如$27a^6-54a^5b+36a^4b^2-8a^3b^3$爲完全立方。則其立方根爲$3a^2-2ab$。而依$3a^2-2ab$作一立方。卽可知已知代數式爲完全立方。

若代數式之特別一文字。有三種相異之方乘，則可依其文字之方乘整列之，而變爲四項之形，

故若干項之代數式爲完全立方。其一文字之方乘。僅有三種，則亦可由視察而得其立方根，

例如求$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+3b^2c+3bc^2$之立方根。

先依a之方乘整列。則得

$a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+c^2+2bc)+b^3+c^3+3b^2c+3bc^2$。

卽 $a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$。

由是所求之立方根爲$a+b+c$。

203. 求任意代數式之立方根.

試求$(A+B)^3$之立方根，但A爲立方根之若干項。B爲其餘之若干項。以A及B之各項。依一文字之遞降(或遞昇)整列。則A之各項比B之各項。其文字之次數高(或低)。

若已知A之各項，而求B之各項，則由$(A+B)^3$減A^3。其餘式爲$(3A^2+3AB+B^2)B$。

今依整列之方法，則在餘式內之最高次(或最低次)之項，必等於$3\times A$之第一項之平方$\times B$之第一項，

由是欲得立方根之次項，(卽B之最高次或最低次項)其法將已得若干項立方根之立方。從原式中減去之。再將立方根第一項之平方3倍之，以除其餘式之最高次(或最低次)之項卽得，

依此法則。則第一項以後之各項，可以次第求得，而根之第一項，卽爲已知代數式第一項之立方根，固自明瞭，

例如求$x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6$之立方根。其法如下。

$$x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6。$$

$$(x^2)^3=x^6$$

$$(x^2-2xy)^3=x^6-6x^5y+12x^4y^2-8x^3y^3$$

$$(x^2-2xy+3y^2)^3=x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6。$$

先將已知代數式。依 x 之遞降方乘整列。取其第一項之立方根得 x^2。卽爲所求立方根之第一項。

次從原式減 x^2 之立方。其餘式之第一項。爲 $-6x^5y$。以 $3\times(x^2)^2$ 除之。得 $-2xy$ 爲立方根之第二項。

次從原式減 x^2-2xy 之立方。其餘式之第一項爲 $9x^4y^2$。以 $3\times(x^2)^2$ 除之。得 $3y^2$ 爲立方根之第三項。

而 $(x^2-2xy+3y^2)^3$ 與原式等。故 $x^2-2xy+3y^2$ 爲所求之立方根。

〔註〕求立方根用上法者少。施諸實用。尙有簡易之法如下。

如前例第一項及末項之立方根。爲 x^2 及 $3y^2$。此卽爲原式立方根之第一項及末項。而此第一項之平方3倍。卽 $3\times(x^2)^2$。以除原式之第二項。得 $-2xy$ 爲立方根之第二項。若已知代數式爲完全立方。則不能不爲 $(x^2-2xy+3y^2)^3$。

又求次之立方式。

$$x^9-6x^8y+15x^7y^2-29x^6y^3+51x^5y^4-60x^4y^5+64x^3y^6-63x^2y^7$$
$$+27xy^8-27y^9$$

若所設之式。爲完全立方。則其立方根之初項及末項。爲 $\sqrt[3]{x^9}$。及 $\sqrt[3]{-27y^9}$。依次得所求根之初項及末項。爲 x^3 及 $-3y^3$。

又立方根之第二項。不能不爲 $-6x^8y\div3(x^3)^2=-2x^2y$。而其末項之前一項。不能不爲 $27xy^8\div3(-3y^3)^2=+xy^2$。

由是原式若爲完全立方。則不能不等於 $(x^3-2x^2y+xy^2-3y^3)^3$。卽易得其立方根。

204. 任意方根 如下之恆同式(見後253章)

$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+a$ 低於 $n-1$ 次之項。亦可依197及203章之法。求其代數式之 n 方根。

〔規則〕將代數式。依某文字之遞降或遞昇方乘整列。取其第一項之 n 方根。爲所求 n 方根之第一項。乃從原式中減其已得根

若干項之乘方。又以n方根第一項之$n-1$方乘之n倍。除其餘式之第一項。卽得n方根之次項。

依此規則。次第求之。則n方根可得。

如6, 8, 12諸方根。以有2, 3因子。故但求其平方根及立方根卽得。若求5, 7, 13等方根。則不能不依此規則。

例題十九

記下之平方根

1. $4x^{10}-12x^5y^3+9y^6$。 答 $2x^5-3y^3$,
2. $x^8+9x^4y^{12}-6x^6y^6$。 答 $x^4-3x^2y^6$。
3. $a^2+4b^2+9c^2+12bc-6ca-4ab$。 答 $a-2b-3c$,
4. $25a^4+9b^4+4c^4+12b^2c^2-20c^2a^2-30a^2b^2$。 答 $5a^2-3b^2-2c^2$。

求以下各式之平方根。

5. $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$。 答 x^3+x^2+x+1。

〔解〕從原式減$(x^3+x^2)^2$。則其餘式之初項。爲$2x^4$。以$2x^3$除之得x,故x^3+x^2+x+1爲所求之平方根。何則。以末項爲1故也。

6. $4x^4-8x^3y^2+4xy^6+y^8$。 答 $2x^2-2xy^2-y^4$。

〔解〕從原式減$(2x^2-2xy^2)^2$。則餘式之第一項爲$-4x^2y^4$。以$2(2x^2)$除之,則得$-y^4$。而原式等於$(2x^2-2xy^2-y^4)^2$。

7. $49+112x^2+70x^3+64x^4+80x^5+25x^6$。

答 $7+8x^2+5x^3$

〔解〕先求$7+8x^2$。次得$5x^3$。

8. $x^4-2x^3+5x^2-6x+8-6x^{-1}+5x^{-2}-2x^{-3}+x^{-4}$。

答 $x^2-x+2-x^{-1}+x^{-2}$。

〔解〕原式$-(x^2-x)^2=4x^2+x$之低次項, ∴ $4x^2\div2x^2=2$。

由是原式$-(x^2-x+2)^2=-2x+x$之低次項。

∴ $-2x\div2x^2=-x^{-1}$。又平方根之最後項爲$\pm x^{-2}$。故末得$+x^{-2}$。

9. $\frac{25x^2}{y^2}+\frac{y^2}{25x^2}-20\frac{x}{y}+\frac{4y}{5x}+2$。 答 $\frac{5x}{y}-\frac{y}{5x}-2$。

〔解〕 $\left(\frac{5x}{y}-\frac{y}{5x}\right)^2-4\left(\frac{5x}{y}-\frac{y}{5x}\right)+4=\left(\frac{5x}{y}-\frac{y}{5x}-2\right)^2$。

10. $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x+4x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}$。 答 $x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{6}}$。

〔解〕 $(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})^2-2x+4x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})^2-2x^{\frac{1}{6}}(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})+x^{\frac{1}{3}}$

$=(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{6}})^2$。

11. $x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}}$。 答 $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}$。

〔解〕 $(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}})^2+2x^{\frac{5}{6}}(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}})+x^{\frac{5}{3}}=(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}})^2$。

12. $x^{\frac{8}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}$。

答 $\pm(a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}-x^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{4}{5}})$。

〔解〕 $(x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}})^2+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}$

$=(x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}})^2+2a^{\frac{4}{5}}(x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}})+a^{\frac{8}{5}}=(x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{4}{5}})^2$。

求下之各立方根，

13. $x^3-24x^2+192x-512$。 答 $x-8$。

14. $x^6-3x^5y+6x^4y^2-7x^3y^3+6x^2y^4-3xy^5+y^6$。 答 x^2-xy+y^2。

〔解〕 x^2-xy 自易求得。又知 $\sqrt[3]{y^6}=y^2$。即得所求之根。

15. $1-9x^2+33x^4-63x^6+66x^8-36x^{10}+8x^{12}$。 答 $1-3x^2+2x^4$。

16. 求 $2a^2(b+c)^2+2b^2(c+a)^2+2c^2(a+b)^2+4abc(a+b+c)$ 之平方根。

答 $2(bc+ca+ab)$。

〔解〕 $2\{(ab+ac)^2+(bc+ba)^2+(ca+bc)^2+2abc(a+b+c)\}$

$=4\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\}=\{2(bc+ca+ab)\}^2$。

17. 求 $x^2(x^2+y^2+z^2)+y^2z^2+2x(y+z)(yz-x^2)$ 之平方根。

答 $x^2-x(y+z)-yz$。

〔解〕 $x^4-2x^3(y+z)+x^2(y^2+z^2)+2xyz(y+z)+y^2z^2$

$=x^4-2x^3(y+z)+x^2(y+z)^2-2yz\{x^2-x(y+z)\}+y^2z^2$

$=\{x^2-x(y+z)-yz\}^2$。

18. 求 $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$ 之平方根。 答 a^2+b^2。

〔解〕 原式 $=(a-b)^4-\{(a+b)^2+(a-b)^2\}(a-b)^2+(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$

$=(a-b)^4-(a^2-b^2)^2-(a-b)^4+(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2=(a^2+b^2)^2$。

19. 證 $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ 為完全平方。

〔證〕 原式 $=(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)+a^4$

$=\{(x^2+5ax+5a^2)-a^2\}\{(x^2+5ax+5a^2)+a^2\}+a^4$

$=(x^2+5ax+5a^2)^2-a^4+a^4=(x^2+5ax+5a^2)^2$。

20. $x^4+px^3+qx^2+rx+s$，若 $p^2s=r^2$ 及 $p^3-4pq+8r=0$。則爲完全平方。試證之。

〔證〕 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=(x^2+\frac{1}{2}px+\sqrt{s})^2$。

則 $=x^4+px^3+(\frac{1}{4}p^2+2\sqrt{s})x^2+p\sqrt{s}x+s$。

由是 $q=\frac{1}{4}p^2+2\sqrt{s}$ 及 $r=p\sqrt{s}$.

從 $r=p\sqrt{s}$，則 $p^2s=r^2$。 又 $pq=\frac{1}{4}p^3+2p\sqrt{s}=\frac{1}{4}p^3+2r$。

21. $4x^6-24x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2-40x+25$ 爲完全平方。求 A，B 及 C 之值。 答 $A=20$, $B=68$, $C=-44$ 或 $A=52$, $B=-68$, $C=76$。

〔解〕 $4x^6-24x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2-40x+25=(2x^3-6x^2+ax+b)^2$

$=4x^6-24x^5+(36+4a)x^4+(4b-12a)x^3+(a^2-12)x^2+2abx+b^2$。

由是 $b^2=25$。 ∴ $b=5$ 或 -5。

由 $2ab=-40$。 ∴ $a=-4$ 或 4。

$A=36+4a=36+4(-4)=20$， 或 $A=36+4(4)=52$，

$B=4b-12a=4(5)-12(-4)=68$， 或 $B=4(-5)-12(4)=-68$。

$C=a^2-12b=(-4)^2-12(5)=-44$， 或 $C=4^2-12(-5)=76$。

22. ax^3+bx^2+cx+d 爲完全立方，則 $b^2=3ac$ 及 $c^2=3bd$。

〔證〕 $ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)^3=m^3x^3+3m^2nx^2+3mn^2x+n^3$。

由是 $a=m^3$， $b=3m^2n$， $c=3mn^2$， $d=n^3$。

$b^2=9m^4n^2=3m^3(3mn^2)=3ac$，

$c^2=9m^2n^4=3(3m^2n)n^3=3bd$。

23. 求 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ 與 x，y，z 之有理式平方之關係。

〔解〕 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=(Ax+By+Cz)^2$

$=A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2+2BCyz+2CAzx+2ABxy$。

∴ $a=A^2$， $b=B^2$， $c=C^2$， $f=BC$， $g=CA$， $h=AB$。

由是 $af=A^2BC=(CA)(AB)=gh$，

$bg=B^2CA=(AB)(BC)=hf$，

$ch=C^2AB=(BC)(CA)=fg$，

24. $(a-\lambda)x^2+(b-\lambda)y^2+(c-\lambda)z^2+2fyz+2gzx+2hxy$ 爲 x, y, z 之有理代數式之平方。試證下式之關係。

$$a-\frac{gh}{f}=b-\frac{hf}{g}=c-\frac{fg}{h}=\lambda$$

(證) 如前例之關係。從 $(a-\lambda)f=gh$. 則 $\lambda=a-\frac{gh}{f}$ 以下同法。

25. 已知代數式之立方根之最初 r 項。試由通常之除法。求次之 r 項。

(證) P^3 爲已知代數式。其方根之 Q, 爲最初 n 項。R 爲其餘項,

$\therefore\quad P=(a_1x^n+a_2x^{n-1}+\ldots\ldots+a_r x^{n-r+1})+(a_{r+1}x^{n-r}+\ldots\ldots+K)=Q+R$。

由是 $\frac{P^3-Q^3}{3Q^2}=R+\frac{3QR^2+R^3}{3Q^2}$ ....(1)

Q 爲 x 之 n 次, R 爲 x 之 $n-r$ 次式, 故 $3QR^2+R^3$ 爲 x 之 $3n-2r$ 次式, 故 $\frac{3QR^2+R^3}{3Q^2}$ 爲 x 之 $(3n-2r)-2n$ 即 $n-2r$ 次式。

故 (1) 式右邊之 R。爲自 x^{n-2r} 以上之項。與 $\frac{3QR^2+R^3}{3Q^2}$ 之整數部, 相加, 則爲 x^{n-2r+1} 以上之係數。即從 x^{n-r} 至 x^{n-2r+1} 之第 r 項, 爲立方根之次項已明。故如題言,

26. 求證通常記數之數之立方根, 其最初之數, 知有 $n+2$ 位, 則可由除法而得次之 n 位。但此數爲 $2n+2$ 位之完全立方數。

(證) 全數爲 P^3。立方根之最初 $n+2$ 位之數爲 p。除 n 位爲 q, 則 $P=10^np+q$, 故

$$\frac{P^3-10^{3n}p^3}{3\times10^{2n}p^2}=q+\frac{3\times10^npq^2+q^3}{3\times10^{2n}p^2}=q+\frac{q^2}{10^{2n}p}+\frac{q^3}{10^{2n}p^2}\text{......................}(1)$$

$q<10^n$。 $\therefore\quad q^2<10^{2n}$。 又 $10^{n+1}<p$, $\therefore\quad 10^{n+1}<q^2<10^{2n}p$,

由是 $\frac{q^2}{10^np}<\frac{1}{10}$ 又 $\frac{q^3}{10^{2n}p^2}<\frac{1}{10^{n+2}}$, 故 (1) 之分數部, 皆小於 1。由是得 n 位 q,

27. 求證方程式 $x^3+qx-r=0$ 之一正根之數值爲 $n+2$ 位即 a, 則 $r-qa-a^3$。以 $3a^2+q$ 除之。其次之數字亦得至 $n-1$ 位。

(證) $x^3+qx-r=0$ 之一根爲 $a+\frac{b}{10^{n-1}}$, 則

$\left(a+\frac{b}{10^{n-1}}\right)^3+q\left(a+\frac{b}{10^{n-1}}\right)-r=0$。變之。則

$\frac{b}{10^{n-1}}(3a^2+q)+\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^3+3\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2a=r-qa-a^3$。

$$\therefore \quad \frac{b}{10^{n-1}}+\frac{\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)3a+\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^3}{3a^2+q}=\frac{r-qa-a^3}{3a^2+q}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但 $10^{n+2}>a>10^{n+1}$ 及 b 之最小數字爲 b'。則 $10^{n-1}>b'>10^{n-2}$。

故 $\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2 3a<\left(\frac{10^{n-1}}{10^{n-1}}\right)^2 3\times10^{n+2}$。即 $3\times10^{n+2}$。

又 $3a^2+q>3(10^{n+1})^2$ 即 $3\times10^{2n+2}$。

由是 $\frac{\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^2 3a}{3a^2+q}<\frac{3\times10^{n+2}}{3\times10^{2n+2}}$，即 $\frac{1}{10^n}$。

同法 $\frac{\left(\frac{b}{10^{n-1}}\right)^3}{3a^3+q}<\frac{1}{10^{2n+2}}$，

由是(1)之分數部。爲自 $\frac{b}{10^{n-1}}$ 以下之數位。故如題言。

第拾陸編

比及比例

205. 定義 一數量有他數量之若干倍。而審其大小之關係謂之比(Ratio)。

相異之兩名數。不能相比。如人數與金數。里數與斤數，不能比較其大小是也，

a及b之比。可以$a:b$記之，即a爲比之第一項，b爲其第二項，第一項稱前項，第二項稱後項。

比之前項大於後項。則其比大於1。謂之優比，前項小於後項，則其比小於1。謂之劣比。前項等於後項。則其比等於1。謂之等比，

凡若干比，以其第一項之積。比第二項之積。謂之諸比之複比。

例如$ac:bd$爲$a:b$及$c:d$之複比，

又$a^2:b^2$謂之$a:b$之二倍比。$\sqrt{a}:\sqrt{b}$謂之$a:b$之二分比。

206. 量 各量之比，恆以數顯之。故求一量爲他量之幾倍，則以他量之數。除此一量之數即得。故比者即分數也。

分數之原則，詳於第八編，而比之原則，與之全同，

故比之兩項，以相同之數乘或除之，則其值不變(見107章)，

相異之兩比。通爲公分母。可以比較其大小(見106章)，

113章之諸定理。亦合於比理，

又下之定理尤爲緊要，

207. 定理 任意之比，其各項皆加相同之正數量。則其值較近於1。

例如x爲正數量，加入$a:b$之各項，則得$a+x:b+x$。

今 $\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$，及 $\frac{a+x}{b+x}-1=\frac{a-b}{b+x}$。

因分子相同。而$\frac{a-b}{b+x}$之分母較大。故$\frac{a-b}{b+x}$之商數。小於$\frac{a-b}{b}$。即$\frac{a+x}{b+x}$與1之差。小於$\frac{a}{b}$與1之差。即$\frac{a+x}{b+x}$較$\frac{a}{b}$為近於1。

若x為甚大。則分數$\frac{a-b}{b+x}$可為甚小。即x愈變大。$\frac{a-x}{b+x}$與1之差。乃愈變小。故x若為無窮大。則$\frac{a+x}{b+x}$至於極限而等於1。

若兩數量之比為1。則不必如上例$a+x$與$b+x$常相等。故$a:b$與$a+x:b+x$相等。所以a與b當為不相等者(參看118章)。

208. **餘論**任意之比其各項加同數量。而近於1。故大於1之比其各項加同數量。則其值減小而近於1。小於1之比其各項加同數量。則其值增大而近於1。故上之定理可簡言之如下。

各項加同數量。則優比之值減。劣比之值增。

209. **不可通度數**兩數量之比。恆有不能以兩整數表之者。例如正方形之對角線。與其一邊之比為$\sqrt{2}:1$。而$\sqrt{2}$非有限小數。即不能以相當之分數顯之是也。

由是兩數之比。不能以兩整數表之者。謂之不可通度(Incommesurable)。

不可通度之兩數相比。雖不能表以整數。然亦可依所欲求之程度。求其畧近之值。以證其比之關係。此種定理。可用163章之法明之。

例如$\sqrt{5}:4=\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{2.236067\ldots}{4}=.559016\ldots\ldots$

故$\frac{\sqrt{5}}{4}$。雖$>\frac{559016}{1000000}$及$<\frac{559017}{1000000}$然所差俱在$\frac{1}{1000000}$以內為數甚微也。

比　例

210. **比例**有四數量。其第一與第二之比。等於第三與第四之比。則此四數量成為比例(Proportion)。

例如$a:b=c:d$。則a, b, c, d成比例。

其式則記爲$a:b::c:d$。可讀爲a比b如c比d。

凡成比例之四數量。第一及第四謂之兩外項，第二及第三謂之兩中項。

211. 四數量 a, b, c, d 成比例，則由比之定義，得$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

兩邊以bd乘之。則$ad=bc$。

故比例之兩外項之積與兩中項之積相等。

反之若$ad=bc$。則a, b, c, d成比例。

何則$ad=bc$，則$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$。

$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。即$a:b::c:d$。

由是又得下之四關係。凡$ad=bc$，則

$$a:b=c:d。$$
$$a:c=b:d。$$
$$b:a=d:c。$$
$$b:d=a:c。$$

此四式內。其一式合理。則餘三式亦皆合理。

［例］$a:b=c:d$。則$a+b:a-b=c+d:c-d$。

何則。$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。由113章第一例$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$，

由是　$a+b:a-b=c+d:c-d$，

212. 連比例 有諸數量。其第一與第二之比，第二與第三之比，第三與第四之比，(以下皆如此)而各各相等，則此諸數量謂之連比例(Continued Proportion)，

例如a, b, c, d…………爲$a:b=b:c=c:d=$………………

即$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$……………則成連比例，

$a:b=b:c$。則b稱爲a及c之比例中項。

a, b, c爲連比例。則$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$。　$\therefore$　$b^2=ac$。即$b=\sqrt{ac}$。

故兩數量間之比例中項，等於其積之平方根，

又 $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{b}{c}\times\frac{b}{c}$。即 $\frac{a}{c}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2}{b^2}$。

故三數量爲連比例。則第一與第三之比。等於第一與第二之二倍比。及第二與第三之二倍比。

213. 比例之兩定義 歐几里得之幾何學上。有比例之定義如次。

有四數量。其第一及第三以任意之等數倍之。又第二及第四以任意之等數倍之，若第一之倍數較第二之倍數大或等或小。從而第三之倍數較第四之倍數大或等或小。則此四數量成比例。

四數量 a, b, c, d 在代數學上比例之定義，則爲 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

故如上所示第一 a 及第三 c。均以 m 倍之。第二 b 及第四 d。均以 n 倍之，則無論 m, n 之値如何。恆得 $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$。

由是 $ma \gtreqless nb$。從而 $mc \gtreqless nd$。故適合於幾何學上比例之定義。

次設 a, b, c, d 爲適合於幾何學之定義者。而 a 及 b 爲可通度數。非如 $\sqrt{2}:1$。則 $a:b=m:n$。

但 m 及 n 爲整數，則 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$。　$\therefore\ na=mb$。

依定義 $na \gtreqless mb$，從而 $nc \gtreqless md$。

由是 $nc=md$，　$\therefore\ \frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{a}{b}$。

故 a, b, c, d 亦適合代數學上比例之定義。

若 a 及 b 爲不可通度之數，則不能求得二整數 m 及 n 以表之。即不能作 $a:b=m:n$ 之式。

然若取 a 之倍數爲 na，令 na 在 b 之相連兩倍數間，即在 mb 與 $(m+1)b$ 之間。則

$$na>mb \text{ 及 } na<(m+1)b。$$

由是依定義得 $nc>md$ 及 $nc<(m+1)d$，

故 $\frac{a}{b}>\frac{m}{n}$ 或 $<\frac{m+1}{n}$ 及 $\frac{c}{d}>\frac{m}{n}$ 或 $<\frac{m+1}{n}$。

考上之不等式，則知 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 之差。爲小於 $\frac{m+1}{n}-\frac{m}{n}$。即 $\frac{1}{n}$。

然 n 爲任意之等倍數。可爲任何大，故 n 愈增大。則 $\frac{1}{n}$ 愈減小。而 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{c}{d}$ 之差恆比 $\frac{1}{n}$ 更小。若 n 大至極限，則 $\frac{1}{n}$ 小至極限。而得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

例　題

1. $7+x:12+x$ 等於 $5:6$ 求 x。　　答 18。

(解) $\frac{7+x}{12+x}=\frac{5}{6}$。　$\therefore\ \frac{12-7}{12+x}=\frac{6-5}{6}$，　$\therefore\ 12+x=30$。

2. $6x^2+6y^2=13xy$。則 x 與 y 之比如何。　　答 $2:3$，或 $3:2$。

(解) 從原方程式 $(2x-3y)(3x-2y)=0$。

$\therefore\ 2x=3y$，或 $3x=2y$。　$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{3}{2}$，或 $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$。

3. $5:9$ 之各項加最小整數，則其比大於 $7:10$。求此整數若干。　　答 5。

(解) $5+x:9+x>7:10$。

即 $\frac{5+x}{9+x}>\frac{7}{10}$，　$\therefore\ 10(5+x)>7(9+x)$，　$\therefore\ 3x>13$。

由是 $x>4\frac{1}{3}$。　$x=5$。

4. $x+1:x+6$ 等於 $3:5$ 之二倍比求 x。　　答 $\frac{29}{16}$。

(解) 從 $\frac{x+1}{x+6}=\frac{3^2}{5^2}$ 得 x。

5. $a:b=c:d$ 求下之證。

(1) $a^2+ab+b^2:c^2+cd+d^2=a^2-ab+b^2:c^2-cd+d^2$。

(2) $a+b:c+d=\sqrt{(2a^2-3b^2)}:\sqrt{(2c^2-3d^2)}$。

(3) $a^2+b^2+c^2+d^2:(a+b)^2+(c+d)^2=(a+c)^2+(b+d)^2:(a+b+c+d)^2$。

〔證〕已知 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

(1) 故 $\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}=\frac{c^3+d^3}{c^3-d^3}$ 及 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ 由除法。

$\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\div\frac{a+b}{a-b}=\frac{c^3+d^3}{c^3-d^3}\div\frac{c+d}{c-d}$, 即 $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}=\frac{c^2-cd+d^2}{c^2+cd+d^2}$。

(2) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}=K$。 $K^2=\frac{2a^2}{2c^2}=\frac{3b^2}{3d^2}=\frac{2a^2-3b^2}{2c^2-3d^2}$。

$\therefore\quad K=\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{(2a^2-3b^2)}}{\sqrt{(2c^2-3d^2)}}$。

(3) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=K$, $a=bK$。 $c=dK$。

$\therefore\quad \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{(a+b)^2+(c+d)^2}=\frac{b^2K^2+b^2+d^2K^2+d^2}{(bK+b)^2+(dK+d)^2}=\frac{(K^2+1)(b^2+d^2)}{(K+1)^2(b^2+d^2)}=\frac{K^2+1}{(K+1)^2}$

$=\frac{(K^2+1)(b+d)^2}{(K+1)^2(b+d)^2}=\frac{(bK+dK)^2+(b+d)^2}{(bK+dK+b+d)^2}=\frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{(a+c+b+d)^2}$。

6. $a:b=c:d$。則 $ab+cd$ 為 a^2+c^2 及 b^2+d^2 之比例中項試證之。

〔證〕 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a^2}{ab}=\frac{c^2}{cd}=\frac{a^2+c^2}{ab+cd}$ 同法 $=\frac{ab+cd}{b^2+d^2}$。

由是 $a^2+c^2:ab+cd=ab+cd:b^2+d^2$。

變　數

214. 變數二數量有一定之關係。其第一量任意兩值之比。等於第二量相當兩值之比。則謂之第一量因第二量而變。

例如第一量之兩值為 $a_1\,a_2$ 之比。等於第二量之相當兩值 $b_1\,b_2$ 之比。則 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$。故 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$。

由是此二量之相當值為常比。

凡用 $\propto$ 記號。即示因變之意。故 $A\propto B$ 可讀為A因B變。

$a\propto b$。則 $a:b$ 為常數。而此常比。命為 m。則 $\frac{a}{b}=m$。 $\therefore\quad a=mb$。

於任意之例欲求常比m，必先知a及b之相當數值。

例如$a\propto b$知b等於5。a等於15，則

$$\frac{a}{b}=m=\frac{15}{5}, \quad \therefore \frac{a}{b}=3. \quad 即\ a=3b.$$

215. 定義 凡二數量，其第一量因第二量之反商而變，則謂之第一量因第二量反變。

例如a因b反變，則$a:\frac{1}{b}$為常比，而$ab=m$，

一數量依他二數量之積而變，則謂之此數量因他二數量合變。

例如$a\propto bc$為a因b及c合變。即$a=mbc$。但m為常數。

有三數量。其第一量依第二量及第三量之反商之積而變。則謂之第一量因第二量正變，因第三量反變，

例如a因b正變。因c反變。則$a:b\times\frac{1}{c}$為常比。即$a=m\frac{b}{c}$。但m為常數。

上所述各例之定義。知其相當數值。即可決定其常數。

例如a因b及c合變。若b為4。c為3而a為6，則$a=mbc$，

$$即\ 6=m\times4\times3。\quad \therefore m=\frac{1}{2}。\quad 由是\ a=\frac{1}{2}bc。$$

216. 定理 a唯與b及c相關係。若c為常數，則a因b變。b為常數。則a因c變。b及c皆為變數。則a因bc變，

設a, b, c之相當數值。為a', b', c及a'', b', c'然c之值。在第一及第二相同。故$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$……(1)

b'之值。在第二及第三相同，故$\frac{a'}{a''}=\frac{c}{c'}$……(2)

由是從(1)式及(2)式。得$\frac{a}{a''}=\frac{bc}{b'c'}$。即$\frac{a}{a''}=\frac{mbc}{mb'c'}$。

$\therefore\ a=mbc,\ a''=mb'c'$。即得證。

其例如下。

有牛肉若干。若重量(W)爲常數，則總價(C)因每斤之價(P)變。若每斤之價(P)爲常數，則總價(C)因重量(W)變。由是依定理，若重量與每斤之價，俱爲變數。則牛肉之總價(C)，當因重量(W)與每斤之價(P)之積而變。

例如W爲常數，則$C\propto P$。又P爲常數。則$C\propto W$。若P及W俱爲變數。則$C\propto PW$。

又如三角形之面積。若高爲常數，即因底邊變。若底邊爲常數。則因高變。若高及底邊俱爲變數。則其面積因高及底邊之積而變。

又如氣體之壓力。若溫度爲常數。則因其質之密度變。若密度爲常數。則因溫度變。若密度及溫度俱爲變數。則氣體之壓力，因密度與溫度之積而變。

例　題

1. 圓之面積，因其半徑之平方變，若半徑10尺之圓面積爲314·159平方尺。問半徑7尺之圓面積若干。 答 153·93791平方尺

(解) 面積爲A。半徑爲r。則$A\propto r^2$。即$A=mr^2$。

即 $314·159=m(10)^2$。 $\therefore\ m=3·14159$。

由是$A=3·14159\times 7^2=153·93791$，

2. 球之體積。因其半徑之立方變。半徑1尺之球之體積。爲4·188立方尺。問半徑3尺之球之體積若干。 答 113·076立方尺

(解) 球之體積爲V。半徑爲r。 則$V=mr^3$。

即 $4·188=m\times 1^3$。 $\therefore\ m=4·188$。

由是$V=4·188\times 3^3=113·076$。

3. 物體於靜止時墜落。其距離因其時之平方變。今若物體於2秒間落64尺。問6秒間落若干尺。 答 576尺。

(解) 距離爲v 時爲t，則$v=mt^2$。即$64=m(2)^2$。 $\therefore\ m=16$。

由是$v=16(6)^2=576$。

4. 氣體之體積因溫度正變，因壓力反變。今壓力15。溫度260。則其體積爲200立方吋。若壓力18。溫度390。則其體積爲若干。 答 250立方吋，

〔解〕體積爲V，壓力爲P，溫度爲T。則 $V=mT\times\frac{1}{P}$。

即 $200=m\times 260\times\frac{1}{15}$。 $\therefore\ m=\frac{150}{13}$。

由是 $V=\frac{150}{13}\times 390\times\frac{1}{18}=250$。

5. 在海岸望遠，其目力所到之距離，因目高於水平面之平方根變。今目高6呎，所望見之距離爲3哩，問目高72碼，其望見之距離若何。 答 18哩。

〔解〕距離爲D，目高爲h，則 $D=m\sqrt{h}$。

即 $3=m\sqrt{6}$。 $\therefore\ m=\frac{3}{\sqrt{6}}$。

由是 $D=\frac{3}{\sqrt{6}}\times\sqrt{72\times 3}=18$。但1碼=3呎。

不定式

217. 此爲分數，則有時對於文字之值，爲不定式。

例如 $x=0$，則 $\frac{x^2-x}{x^3-x}$ 之分母分子皆爲0，即得 $\frac{0}{0}$ 之式。又 $x=1$ 所得亦同。

又上之分數，若 $x=\infty$，則 $\frac{\infty}{\infty}$ 亦爲不定式。

今以此等不定式，求其分數之極限值，示其方法於下。

例如分數 $\frac{x^2-1}{x^3-1}$，若 $x=1$，則得 $\frac{0}{0}$。

今 $\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$。

而 $x-1$ 實非0，則以 $x-1$ 除其分母子，此分數之值仍不變，即 $x-1$ 雖任何小，亦能合理。

由是 $x-1$ 爲甚小，則得 $\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{x+1}{x^2+x+1}$。

此第二之分數，若x近於1，則其極限爲 $\frac{2}{3}$。

由是x爲甚小而近於1,則分數$\frac{x^2-1}{x^3-1}$亦近於$\frac{2}{3}$。而可以

$L_{x=1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{2}{3}$記之。

例　　題

1. 設x=2。求$\frac{x^2-5x+6}{x^2-10x+16}$之極限值。　　答 $\frac{1}{6}$。

(解) $L_{x=2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-10x+16}=L_{x=2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-8)}=L_{x=2}\frac{x-3}{x-8}=\frac{1}{6}$。

2. 設x=0及x=∞。求$\frac{x^2+2x}{2x^2+3x}$之極限值。　　答 $\frac{2}{3}$及$\frac{1}{2}$。

(解) $L_{x=0}\frac{x^2+2x}{2x^2+3x}=L_{x=0}\frac{x(x+2)}{x(2x+3)}=L_{x=0}\frac{x+2}{2x+3}=\frac{2}{3}$。

$$L_{x=\infty}\frac{x^2+2x}{2x^2+3x}=L_{x=\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x}\right)}=L_{x=\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{1}{2}。$$

其$\frac{2}{x}$及$\frac{3}{x}$。因x=∞而爲0。

3. 設x爲無窮大。求$\frac{2x^2+100x+500}{5x^3-40}$之極限值。　　答 0。

(解) $$L_{x=\infty}\frac{2x^2+100x+500}{5x^3-40}=L_{x=\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{100}{x}+\frac{500}{x^2}\right)}{x^3\left(5-\frac{40}{x^3}\right)}$$

$$=L_{x=\infty}\frac{2+\frac{100}{x}+\frac{500}{x^2}}{x\left(5-\frac{40}{x^3}\right)}=0。$$

例題二十

1. a+b, b+c, c+a爲連比例,則b+c : c+a=c−a : a−b。試證明之。

(證) 從$\frac{a+b}{b+c}=\frac{b+c}{c+a}$。　　$1-\frac{a+b}{b+c}=1-\frac{b+c}{c+a}$。

即 $\frac{c-a}{b+c}=\frac{a-b}{c+a}$。 $\therefore$ $\frac{b+c}{c+a}=\frac{c-a}{a-b}$,

2. $x:a=y:b=z:c$。則 $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$,

〔證〕 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=K$。則

$x=aK$, $y=bK$, $z=cK$, $x+y+z=K(a+b+c)$。

$$\therefore \quad \frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(aK)^3}{a^2}+\frac{(bK)^3}{b^2}+\frac{(cK)^3}{c^2}=K^3(a+b+c)$$

$$=\frac{K^3(a+b+c)^3}{(a+b+c)^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2},$$

3. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$。則 a, b, c, d 成比例。

〔證〕從原方程式 $\frac{a+b+c+d}{a-b+c-d}=\frac{a+b-c-d}{a-b-c+d}$。

$$\therefore \quad \frac{(a+b+c+d)+(a-b+c-d)}{(a+b+c+d)-(a-b+c-d)}=\frac{(a+b-c-d)+(a-b-c+d)}{(a+b-c-d)-(a-b-c+d)}。$$

即 $\frac{2(a+c)}{2(b+d)}=\frac{2(a-c)}{2(b-d)}$, $\therefore$ $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$ 再變之,則

$\frac{2a}{2c}=\frac{2b}{2d}$, $\therefore$ $a:b=c:d$,

4. $b^2+c^2=a^2$。則 $a+b+c:c+a-b=a+b-c:b+c-a$。

〔證〕從 $b^2+c^2=a^2$。則 $(b+c)^2-a^2=2bc$。

即 $(b+c+a)(b+c-a)=2bc$...(1)

又 $(b-c)^2=a^2-2bc$。 $\therefore$ $2bc=a^2-(b-c)^2$。

即 $(a+b-c)(a-b+c)=2bc$...(2)

從 (1) (2) 得結果,

5. 從 7, 10, 19, 31, 各數。減如何相同之數。則成比例, 答 3,

〔解〕 $\frac{7-x}{10-x}=\frac{19-x}{31-x}$。 $\therefore$ $1-\frac{7-x}{10-x}=1-\frac{19-x}{31-x}$。

即 $\frac{3}{10-x}=\frac{12}{31-x}$。 $\therefore$ $31-x=4(10-x)$。 $\therefore$ $x=3$,

6. $\frac{b}{a+b}=\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c}$。求 a : b : c 之值。 答 2 : 3 : 4。

〔解〕 $\frac{b+(a+c-b)}{(a+b)+(b+c-a)}=\frac{(a+c-b)+(a+b+c)}{(b+c-a)+(2a+b+2c)}$。

即 $\frac{a+c}{2b+c}=\frac{2(a+c)}{a+2b+3c}$。即 $\frac{1}{2b+c}=\frac{2}{a+2b+3c}$。

$\therefore\ a+c=2b$……………………………………………………(1)

又 $\frac{b}{a+b}=\frac{a+c-b}{b+c-a}$。從 (1) $\frac{b}{a+b}=\frac{2b-b}{b+c-a}$。

$\therefore\ a+b=b+c-a$。即 $c=2a$。 $\therefore$ 從 (1) $b=\frac{3}{2}a$。

由是 $a:b:c=a:\frac{3}{2}a:2a=2:3:4$。

7. $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$。則

$(a+b+c)(yz+zx+xy)=(x+y+z)(ax+by+cz)$。

〔證〕 已知分數爲 K。則

$K=\frac{x+y+z}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$……………………………(1)

又 $K=\frac{x+y}{(b+c-a)+(c+a-b)}=\frac{x+y}{2c}$。同法 $=\frac{y+z}{2a}=\frac{z+x}{2b}$。

$\therefore\ K=\frac{z(x+y)+x(y+z)+y(z+x)}{2cz+2ax+2by}=\frac{yz+zx+xy}{ax+by+cz}$……………………………(2)

從 (1) (2) 可得其結果。

8. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$。 則 $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$。

〔證〕 $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)=K$。則

$y+z=\frac{K}{a}$, $z+x=\frac{K}{b}$, $x+y=\frac{K}{c}$。

$\therefore\ x-y=(z+x)-(y+z)=\frac{K}{b}-\frac{K}{a}=\frac{K(a-b)}{ab}$。 $\therefore\ \frac{x-y}{c(a-b)}=\frac{K}{abc}$。

又 $y-z=(x+y)-(z+x)=\frac{K}{c}-\frac{K}{b}=\frac{K(b-c)}{bc}$。 $\therefore\ \frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{K}{abc}$。

及 $z-x=(y+z)-(x+y)=\frac{K}{a}-\frac{K}{c}=\frac{K(c-a)}{ca}$。 $\therefore\ \frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{K}{abc}$。

9. 證 $(l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots):(l_1b_1+l_2b_2+l_3b_3+\cdots\cdots\cdots\cdots)$ 在 $a_1:b_1, a_2:b_2, a_3:b_3,\cdots\cdots\cdots\cdots$諸比之最大及最小之間。

〔證〕與(113章定理三同)。

10. $a:b=c:d$, 則 $\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=(abcd)^n$。

〔證〕 $a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}=\frac{1}{a^{2n}}+\frac{1}{d^{2n}}+\frac{1}{b^{2n}}+\frac{1}{c^{2n}}$

$=\frac{d^{2n}+a^{2n}}{a^{2n}d^{2n}}+\frac{c^{2n}+b^{2n}}{b^{2n}c^{2n}}$。但 $ad=bc$

$=\frac{d^{2n}+a^{2n}}{b^{2n}c^{2n}}+\frac{c^{2n}+b^{2n}}{b^{2n}c^{2n}}$。但 $b^2c^2=bcad$

$=\frac{a^{2n}+d^{2n}+b^{2n}+c^{2n}}{(b^2c^2)^n}=\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{(abcd)^n}$。

由是 $\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=(abcd)^n$。

11. $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)=(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$, 則 $a:b=d:c$。

〔證〕從已知方程式,

$\{(a+b)(c+d)(b+c)(a+d)\}=\{(a+b)+(c+d)\}\{cd(a+b)+ab(c+d)\}$。

即 $(a+b)(c+d)(ab+ac+bd+cd)$

$=cd(a+b)^2+(a+b)(c+d)(cd+ab)+ab(c+d)^2$。

$\therefore$ $cd(a+b)^2-(a+b)(c+d)(ac+bd)+ab(c+d)^2=0$。

即 $c(a+b)\{d(a+b)-a(c+d)\}-b(c+d)\{d(a+b)-a(c+d)\}=0$。

即 $c(a+b)(bd-ac)-b(c+d)(bd-ac)=0$。

即 $(bd-ac)\{c(a+b)-b(c+d)\}=0$。

即 $(bd-ac)^2=0$。 $\therefore$ $bd=ac$。

12. $(bcd+cda+dab+abc)^2-abcd(a+b+c+d)^2=0$。則 a, b, c, d 可任意排列而成比例。

〔證〕 $\{cd(a+b)+ab(c+d)\}^2-abcd\{(a+b)+(c+d)\}^2=0$。

即 $c^2d^2(a+b)^2+a^2b^2(c+d)^2-abcd(a+b)^2-abcd(c+d)^2=0$。

即 $cd(a+b)^2(cd-ab)-ab(c+d)^2(cd-ab)=0$。

即 $(cd-ab)\{cd(a+b)^2-ab(c+d)^2\}=0$。

即 $(cd-ab)\{cda^2+cdb^2-abc^2-abd^2\}=0$。

即 $(cd-ab)\{ca(da-bc)-bd(da-bc)\}=0$。

即 $(cd-ab)(da-bc)(ca-bd)=0$。

$\therefore$ $cd=ab,\quad da=bc,\quad ca=bd$。

13. $\dfrac{x}{a+2b+c}=\dfrac{y}{a-c}=\dfrac{z}{a-2b+c}$, 則 $\dfrac{a}{x+2y+z}=\dfrac{b}{x-z}=\dfrac{c}{x-2y+z}$,

(證) 已知分數爲K。則

$$K=\frac{x\quad+\quad 2y\quad+\quad z}{(a+2b+c)+2(a-c)+(a-2b+c)}=\frac{x+2y+z}{4a}。$$

又 $$K=\frac{x-z}{(a+2b+c)-(a-2b+c)}=\frac{x-z}{4b}。$$

又 $$K=\frac{x\quad-\quad 2y\quad+\quad z}{(a+2b+c)-2(a-c)+(a-2b+c)}=\frac{x-2y+z}{4c}。$$

由是 $$\frac{x+2y+z}{4a}=\frac{x-z}{4b}=\frac{x-2y+z}{4c}。$$

14. $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$。及 $x+y+z=0$。僅適合於 $x:y:z$ 之一組。則

$bc-f^2+ca-g^2+ab-h^2+2(gh-af)+2(hf-bg)+2(fg-ch)=0$。

(證) $\dfrac{x}{z}=\lambda,\ \dfrac{y}{z}=\mu$. 以 z^2 及 z 除已知兩方程式。則

$a\lambda^2+b\mu^2+c+2f\mu+2g\lambda+2h\lambda\mu=0$。 $\lambda+\mu+1=0$。

$\mu=-(\lambda+1)$ 代入第一。則

$\lambda^2(a+b-2h)+2\lambda(b-f+g-h)+b+c-2f=0$。依題意 λ 之解答唯一個故 $4(b-f+g-h)^2-4(a+b-2h)(b+c-2f)=0$。解而括之。則

$bc-f^2+ca-g^2+ab-h^2+2(gh-af)+2(hf-bg)+2(fg-ch)=0$。

15. $\dfrac{a}{p(px-gy-rz)}=\dfrac{b}{g(gy-rz-px)}=\dfrac{c}{r(rz-px-gy)}$。 則

$$\frac{p}{a(ax-by-cz)}=\frac{g}{b(by-cz-ax)}=\frac{r}{c(cz-ax-by)}。$$

〔證〕 已知分數各以 pgr 乘之。則

$$\frac{agr}{px-gy-rz}=\frac{brp}{gy-rz-px}=\frac{cpg}{rz-px-by}。$$

順次以兩個分母子相加，則得

$$\frac{agr+brp}{-2rz}=\frac{brp+cpg}{-2px}=\frac{cpg+agr}{-2gy}。$$

$$\therefore\quad \frac{br+cg}{x}=\frac{cp+ar}{y}=\frac{ax+bp}{z}=K。$$

$$K=\frac{a(br+cg)-b(cp+ar)-c(ag+bp)}{ax-by-cz}=\frac{-2bcp}{ax-by-cz}。$$

$$\therefore\quad -\frac{K}{2abc}=\frac{p}{ax-by-cz}\text{ 同法 }=\frac{g}{by-cz-ax}=\frac{r}{cz-ax-by}。$$

16. $ab=cd$。則各等於 $(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)/(a+b+c+d)^2$。

又 $a+b=c+d$。則各等於 $abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\Big/(ab+cd)$。

〔證〕從 $ab=cd$。則 $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$。 $\therefore\ \frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{b}=\frac{a+b+c+d}{b+c}$。

由是 $\frac{(a+c)(b+c)}{a+b+c+d}=c$，

又從 $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$ 同法 $\frac{(c+d)(b+d)}{a+b+c+d}=d$，

由是 $\frac{(a+c)(b+c)(a+d)(b+d)}{(a+b+c+d)^2}=cd$。

次 $a+b=c+d=K$，則

$$\frac{K}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\text{ 及 }\frac{K}{cd}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}。\quad\therefore\ K\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}。$$

由是 $K=abcd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\Big/(ab+cd)$，

17. $x=2$ 及 $x=\infty$。求下各分數之極限值。

(1) $\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+14}$， (2) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$ (3) $\frac{x^2+6x-16}{x^3-12x+16}$。

答 (1) $\frac{3}{5}$, 1, (2) 0, 1, (3) ∞, 0。

〔解〕 (1) $L_{x=2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+14}=L_{x=2}\frac{x-5}{x-7}=\frac{3}{5}$。

及 $L_{x=\infty}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+14}=L_{x=\infty}\frac{1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}{1-\frac{9}{x}+\frac{14}{x^2}}=1$，

(2) $L_{x=2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}=L_{x=2}\frac{x-2}{x-3}=\frac{0}{-1}=0$。

及 $L_{x=\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}=L_{x=\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=1$。

(3) $L_{x=2}\frac{x^2+6x-16}{x^3-12x+16}=L_{x=2}\frac{x+8}{x^2+2x-8}=\frac{10}{0}=\infty$。

及 $L_{x=\infty}\frac{x^2+6x-16}{x^3-12x+16}=L_{x=\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{16}{x^3}}{1-\frac{12}{x^2}+\frac{16}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$。

18. $x=a$ 求下之極限值。

(1) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}$。 (2) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$。

答 (1) $3\sqrt[3]{a^2}$， (2) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$。

〔解〕 $L_{x=a}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=L_{x=a}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2})=3\sqrt[3]{a^2}$。

$L_{x=a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x^2-a^2)}}=L_{x=a}\left\{\sqrt{\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{x^2-a^2}}+\sqrt{\frac{1}{x+a}}\right\}$

$=L_{x=a}\left\{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\sqrt{\frac{1}{x+a}}\right\}=\sqrt{\frac{0}{2a2\sqrt{a}}}+\sqrt{\frac{1}{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$，

第拾柒編

等差，等比，調和級數

218. 級數 依定法次第演成之諸數。謂之級數(Series)。

例如 1, 2, 3, 4…………等。爲各項依次多 1 所成之級數。

又 3, 6, 12, 24…………等。爲各項依次 2 倍所成之級數。

其他如 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$…………等，或如 $1+a, 2+3a, 3+5a, 4+7a$ 等。皆以一定之規則連續成之。故皆爲級數。

此編僅論簡單之級數，俟後編再詳論之。

等差級數

219. 定義 級數中之任一項，與其前項之差恆相等者，謂之等差級數(Arithmetical Progression)。

例如 $b-a=c-b=d-c$…………則 a, b, c, d…………爲等差級數，略記爲(A. P.)。

A. P. 各項之差，謂之公差(Common Difference)，下之各項，爲等差級數。

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\ldots\ldots$$

$$3,\quad -1,\quad -5,\quad -9,\ldots\ldots$$

$$a,\quad a+2b,\quad a+4b,\ldots\ldots$$

此第一之公差爲 2。第二之公差爲 -4，第三之公差爲 $2b$。

220. 等差級數之初項 爲 a，公差爲 d，則由定義得

第 2 項 $=a+d$，第 3 項 $=a+2d$，第 4 項 $=a+3d$，第 5 項 $=a+4d$。以下準此，

由是審其 d 之係數。恆比其項數少 1。

故　第 n 項 $=a+(n-1)d$。

故知 A. P. 之初項及公差，則各項皆可求得。

例如A. P.之初項爲5。公差爲4。則其第10項 $=5+(10-1)4=41$,及第30項 $=5+(30-1)4=121$。

221. 知等差級數之任意二項則其級數即能決定。

例如第m項爲α,第n項爲β。則設a爲初項,d爲公差。故

$$a+(m-1)d=\alpha,\qquad a+(n-1)d=\beta。$$

於此兩方程式a及d之值,可以α,β之項表之。

例如A. P.之第7項15及第21項22,求第10項,

a爲初項,d爲公差。則

$$a+6d=15,\qquad a+20d=22。$$

由是$d=\frac{1}{2}$及$a=12$。 $\therefore$ 第10項 $=12+9\times\frac{1}{2}=16\frac{1}{2}$。

222. 等差中項三數量爲等差級數。則其中數謂爲他兩數之等差中項(Arithmetic Mean)。

如a, b, c爲A. P.則依定義

$$b-a=c-b,\qquad \therefore\ b=\frac{1}{2}(a+c)。$$

故兩數量間之等差中項,等於其兩數量之和之半。

諸數量爲A. P.則其中間之諸數量。謂爲兩外項之等差諸中項,

例如7, 9, 11, 13, 15之五數。其9, 11, 13稱爲7及15之等差三中項,

凡已知兩數量之間。可插入若干之等差中項,

例如a及b爲已知兩數量。今欲插入n項,則a, b二項與其間插入之n項,共得n+2項之等差級數,a爲其初項。b爲其末項,即第n+2項,

由是設d爲公差,則$b=a+(n+2-1)d$, $\therefore\ d=\frac{b-a}{n+1}$,

即此級數爲$a,\ a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\frac{b-a}{n+1}\cdots\cdots\cdots\cdots$

故所求之等差中項,爲

$$a+\frac{b-a}{n+1},\quad a+2\frac{b-a}{n+1}\cdots\cdots\cdots\cdots a+n\frac{b-a}{n+1}。$$

即 $\frac{na+b}{n+1}$, $\frac{(n-1)a+2b}{n+1}$ ………………… $\frac{a+nb}{n+1}$。

例如6及18之間插入等差5中項,則

$18=6+(5+2-1)d$, $\therefore$ $d=2$。

由是 6, 6+2, 6+4, 6+6, 6+8, 6+10, 6+12。

即, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18。

故所求中項,爲8, 10, 12, 14, 16。

223. 總和 求等差級數任意若干項之和,

a爲初項。d爲公差。n爲項數,而第n項爲l,則

$$l=a+(n-1)d \text{ ……………………………………… } (1)$$

又S爲所求之和,則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\text{ ………………………… }+(l-2d)+(l-2d)+l,$$

更以此和數,從末項逆記之,則

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\text{ ………………………… }+(a+2d)+(a+d)+a,$$

由是加其相當之項,則得

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\text{ ……………… 至 } n \text{ 項}=n(a+l)$$

$$\therefore \quad S=\frac{n}{2}(a+l) \text{ ……………………………………… } (2)$$

或從(1)式。 $$\therefore \quad S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} \text{ ……………………………… } (3)$$

從(1),(2),(3),之三公式,則於a, d, n, l s,五量中任知其三量。則可得其餘二量,

例題

1. 求等差級數3+6+9+……………至20項之和, 答 630,

〔解〕 $a=3$, $d=3$。 $\therefore$ $S=\frac{20}{2}\{2\times3+(20-1)3\}=630$,

2. 從1起連續諸奇數之和,等於其項數之平方。試證明之。

〔證〕 於1+3+5+…………, $a=1$, $d=2$。則n項之和,爲

$$S=\frac{n}{2}\{2\times1+(n-1)2\}=\frac{n}{2}(2+2n-2)=n^2。$$

3. 將級數$1+5+9+\cdots\cdots$以若干項相加，則其和為190。

答 10項，

〔解〕 $a=1$，$d=4$，$s=190$，從公式(3)

$190=\frac{n}{2}\{2\times1+(n-1)4\}$。 即 $2n^2-n-190=0$。

即 $(n-10)(2n+19)=0$。 由是$n=10$或$n=-9\frac{1}{2}$。 故$n=10$為解答。其$n=-9\frac{1}{2}$之一根去之，以項必為正整數也，

4. 取$5+7+9+\cdots\cdots$之若干項，則其和為480。 答 20項，

〔解〕 從公式(3)$(n-20)(n+24)=0$。 $\therefore$ 取$n=20$。

5. A. P. 之第5項11，第9項7，試求其第14項。 答 2，

〔解〕 $a+4d=11$，$a+8d=7$。 $\therefore$ $d=-1$，$a=15$，

由是第14項 $=15+13(-1)=2$。

6. 第4項b及第7項$3a+4b$。求A. P之第2項， 答 $-2a-b$。

〔解〕 初項為x，公差為d，則$x+3d=b$，$x+6d=3a+4b$，

$\therefore$ $d=a+b$，$x=-3a-2b$。

由是第2項 $=x+d=-3a-2b+(a+b)=-2a-b$，

7. $5, 8, 11, \cdots\cdots$級數之第幾項為320。 答 第106項，

〔解〕 $a=5$，$d=3$。 $\therefore$ $320=5+(n-1)3$， $\therefore$ $n=106$，

8 證A. P. 之各項加同數量。亦為A. P。

〔證〕 $a, b, c, d, \cdots\cdots$為A. P。同數量為x，則從

$b-a=c-b=d-c=\cdots\cdots$得

$(b+x)-(a+x)=(c+x)-(b+x)=(d+x)-(c+x)=\cdots\cdots$

$\therefore$ $a+x$，$b+x$，$c+x$，$d+x, \cdots\cdots$亦為A. P。

9. 證A. P. 之各項乘同數量亦為A. P。

〔證〕 從$b-a=c-b=d-c=\cdots\cdots$得$bx-ax=cx-bx=\cdots\cdots$

10. A, P, 之各連續兩項間。插入定數之等差中項，則其全體亦為A. P。

〔證〕 $b-a=c-b=d-c=\cdots\cdots$而$a, b, c, d\cdots\cdots$之各兩項間，插入n中項，則其差為$\frac{b-a}{n+1}$，$\frac{c-b}{n+1}$，$\frac{d-c}{n+1}\cdots\cdots$而各相等。故如題言。

11. 求下列各級數之和。

(1) $2\frac{1}{4}+4\frac{1}{2}+6\frac{3}{4}+$……………………至 23 項。 答 621。

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-$………………………至 12 項， 答 -16。

(3) $(a+9b)+(a+7b)+(a+5b)+$………至 10 項。 答 $10a$。

(4) $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+$……………至 n 項， 答 $\frac{1}{2}(n-1)$。

〔解〕 (1) $a=2\frac{1}{4}$, $d=2\frac{1}{4}$。

$\therefore S=\frac{23}{2}\left\{2\times2\frac{1}{4}+(23-1)2\frac{1}{4}\right\}=621$,

(2) $S=\frac{12}{2}\left\{2\times\frac{1}{2}+(12-1)\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=-16$。

(3) $S=\frac{10}{2}\{2(a+9b)+(10-1)(-2b)\}=10a$,

(4) $S=\frac{n}{2}\left\{2\frac{n-1}{n}+(n-1)\left(-\frac{1}{n}\right)\right\}=\frac{1}{2}(n-1)$。

12. A. P. 之第 7 項 15 及第 21 項 8，求最初 13 項之和。 答 195。

〔解〕 $a+6d=15$, $a+20d=8$。 $\therefore$ $d=-\frac{1}{2}$, $a=18$。

由是所求之和 $=\frac{13}{2}\left\{2\times18-(13-1)\frac{1}{2}\right\}=195$。

13. 有第 11 項爲 20 之 A. P. 求其第 21 項之和。 答 420,

〔解〕 $a+10d=20$。

$S=\frac{21}{2}\{2a+(21-1)d\}=21\{a+10d\}=21\{20\}=420$。

14. 奇數項之 A. P. 其初項，中央項，末項，亦爲 A, P。

〔證〕 項數爲 $2n+1$，初項爲 a。中央項爲 m。末項爲 l,

則 $m=a+(n+1-1)d=a+nd$, $l=a+(2n+1-1)d=a+2nd$,

由是 a, $a+nd$, $a+2nd$ 爲 A, P。

15. 8, 16, 24,………之級數若干項之和加 1。則可以奇數之平方數表之。

〔證〕 $S=\frac{n}{2}\{2\times 8+(n-1)8\}=4n+4n^2$。

由是$S+1=1+4n+4n^2=(1+2n)^2$。

16. 取級數$15+11+7+\cdots\cdots$若干項。則其和爲35。 答 5.

〔解〕 $35=\frac{n}{2}\{2\times 15+(n-1)(-4)\}$。 $\therefore$ $2n^2-17n+35=0$。

即 $(n-5)(2n-7)=0$。 $\therefore$ $n=5$ 而 $n=\frac{7}{2}$不用。

17. A. P.前5項之和爲-5。及第6項爲-13。求公差如何。

答 -4.

〔解〕 $-5=\frac{5}{2}\{2a+(5-1)d\}$ 及 $-13=a+5d$。從此兩方程式消去a求d之同數爲-4。

18. 於200及400間之各數。可以7整除者。求其諸數之和。

〔解〕 200以7除。則餘4。 $\therefore$ $200=7$之倍數$+4$。

由是$203=7$之倍數$+7=7$之倍數。

又400以7除。則餘1。 $\therefore$ $400-1=399=7$之倍數。

由是203, 210, 217,………399之A. P.爲所求之和。

故 $399=203+(n-1)7$。 $\therefore$ $n=29$。

由是$S=\frac{29}{2}(203+399)=8729$。

19. 於A. P.之級數每n項合爲一羣。則其諸羣亦爲A, P,而其公差與原級數之公差之比。爲$n^2:1$.

〔證〕 $a, a+d, a+2d,\cdots\cdots$爲原級數。每n項合爲一羣。則

第一羣 $(A)=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=an+\frac{n}{2}(n-1)d$。

第二羣 $(B)=\frac{n}{2}\{2(a+nd)+(n-1)d\}=an+\frac{n}{2}(n-1)d+n^2d$。

第三羣 $(C)=\frac{n}{2}\{2(a+2nd)+(n-1)d\}=an+\frac{n}{2}(n-1)d+2n^2d$。…………

……………………………………………………………………

由是A, B, C,………之公差爲n^2d。故d之比爲$n^2:1$。

等比級數

224. 定義 級數中任一項。與其前項之比恆相同者，謂之等比級數(Geometrical Progression)。

例如 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=$............則 a, b, c, d............爲等比級數。畧記爲 G. P.。

G. P. 各項與其前項之比。謂之公比(Common Ratio)。

下之各項爲等比級數。

$$1,\quad 3,\quad 9,\quad 27,\ldots\ldots$$
$$4,\quad -2,\quad 1,\quad -\tfrac{1}{2},\ldots\ldots$$
$$a,\quad a^3,\quad a^5,\quad a^7\ldots\ldots$$

此第一之公比爲3。第二之公比爲 $-\frac{1}{2}$。第三之公比爲 a^2。

225. 等比級數之第一項爲 a。公比爲 r。則

第2項爲 ar。

第3項爲 ar^2。

第4項爲 ar^3。

以下準此，而 r 指數。恆比項數少 1。

故　　第 n 項 $=ar^{n-1}$。

故知 G. P. 之初項及公比，則各項皆可求得。

例如初項爲 2。公比爲 3。則 G. P. 之第 6 項 $=2\times3^5$ 及第 20 項 $=2\times3^{19}$。

226. 知等比級數之任意兩項則此級數即可決定。

例如知第 m 項爲 α。及第 n 項爲 β。則設 a 爲初項。r 爲公比，即得

$$ar^{m-1}=\alpha,\quad ar^{n-1}=\beta。$$

從此兩方程式 $r^{m-n}=\frac{\alpha}{\beta}$。

$$\therefore\quad r=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{m-n}}=\alpha^{\frac{1}{m-n}}\beta^{\frac{1}{n-m}},$$

又 $a=\frac{\alpha}{r^{m-1}}=\alpha r^{1-m}=\alpha\left(\alpha^{\frac{1}{m-n}}\beta^{\frac{1}{n-m}}\right)^{1-m}=\alpha^{\frac{1-n}{m-n}}\beta^{\frac{1-m}{n-m}}$,

〔例〕 G. P. 之第3項爲18。第5項爲$40\frac{1}{2}$,試求其初項。

設初項爲a。公比爲r。則

$$ar^2=18,\qquad ar^4=40\frac{1}{2}。\qquad \therefore\ r^2=\frac{9}{4}。$$

由是 $a=\frac{18}{r^2}=18\times\frac{4}{9}=8$。

故此級數爲8, 12, 18..............

227. 三數量爲G.P則其中數。謂爲他兩數之等比中項(Geometric Mean)。

a, b, c 爲 G. P. 則由定義。得 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$。

由是 $b^2=ac$。 $\therefore\ b=\pm\sqrt{ac}$。

故已知兩數量之等比中項等於其積之平方根。

若干數量爲G. P. 則其中間之諸數。謂爲兩外項之等比諸中項。

如a, b, c, d, e 爲G. P.。則b, c, d 爲a, e之等比三中項。

凡已知兩數量之間。可插入若干之等比中項。

如a及b爲已知二數量。於其間插入n項之等比中項。則b爲G. P. 之第n+2項。故

$$ar^{n+2-1}=b。\qquad \therefore\ r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}。$$

由是此級數爲 $a, ar, ar^2\ ar^3\cdots\cdots ar^n, b$。

即其所求諸中項爲 $ar, ar^2\cdots\cdots\cdots ar^n$。

即 $a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},\quad a\sqrt[n+1]{\frac{b^2}{a^2}},\cdots\cdots\cdots,a\sqrt[n+1]{\frac{b^n}{a^n}}$,

即 $\sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b}{a}},\quad \sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b^2}{a^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}b^n}{a^n}}$。

即 $a^{\frac{n}{n+1}}b^{\frac{1}{n+1}},\quad a^{\frac{n-1}{n+1}}b^{\frac{2}{n+1}},\cdots\cdots\cdots\cdots,a^{\frac{1}{n+1}}b^{\frac{n}{n+1}}$.

例如求3及96之間之等比四中項。則項數爲 $4+2=6$。公比爲r。
即得 $96=3r^5$。 $\therefore\ r=\sqrt[5]{32}=2$。

由是得3, 6, 12, 24, 48, 96。

即所求之四中項爲6, 12, 24, 48。

228. 總和 求若干項等比級數之和。

a爲初項, r爲公比, n爲項數而第n項爲l。則

$$l=ar^{n-1}。$$

又S爲所求之總數。則

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$$

以r乘之。則

$$rS=\quad ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n$$

由減法得 $S-Sr=a-ar^n$。 $\therefore\ S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$。

〔例〕求級數3, 6, 12,…………至10項之和。

$a=3,\quad r=2,\quad n=10$。則由前之公式。得

$$S=\frac{3(1-2^{10})}{1-2}=3(2^{10}-1)=3069。$$

229. 無窮級數 由前章之公式,

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

若r爲常分數。則不論正或負。在n增大時。r^n之絕對值必從而減小。故n之值增至無窮大。r^n即可減至無限小。

由是r若小於1。則其項數多至無窮。而其和數S與$\dfrac{a}{1-r}$之差甚爲微小。

即n爲無窮大。則r^n可爲0。而$\dfrac{ar^n}{1-r}=0$。

故 $S=\dfrac{a}{1-r}$。

故等比級數$a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$若r之值小於1。則其無窮項數之和爲$\dfrac{a}{1-r}$。

例題

1. 求級數9−6+4……………之無窮項之和。 答 $\frac{27}{5}$。

〔解〕 $a=9,\ r=\frac{-6}{9}=-\frac{2}{3}$， $S=\frac{a}{1-r}=\frac{9}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{27}{5}$。

2. 等比級數無窮項之和。爲$4\frac{1}{2}$。第二項爲−2。則其級數如何。 答 $6,\ -2,\ \frac{2}{3}$……………

〔解〕 $ar=-2$，及$4\frac{1}{2}=\frac{a}{1-r}$，由是$9r^2-9r-4=0$，

∴ $r=-\frac{1}{3}$ 或 $r=\frac{4}{3}$ 因 $r=\frac{4}{3}>1$ 爲不合理，

故 $r=-\frac{1}{3}$， $a=-\frac{2}{r}=6$。

3. G. P. 之第3項2。第6項$-\frac{1}{4}$。則第10項如何。 答 $\frac{1}{64}$。

〔解〕 $ar^2=2$， $ar^5=-\frac{1}{4}$。 ∴ $r^3=-\frac{1}{8}$。 ∴ $r=-\frac{1}{2}$。

又 $a=\frac{2}{r^2}=8$。 由是$ar^9=8\left(-\frac{1}{2}\right)^9=-\frac{1}{64}$。

4. 試於8及−1之間。插入等比兩中項。又於2及18之間。插入等比三中項。 答 $-4,\ 2$ 又 $\pm2\sqrt{3},\ 6,\ \pm6\sqrt{3}$。

〔解〕 $8r^3=-1$。 ∴ $r=-\frac{1}{2}$。 ∴ $8\times-\frac{1}{2}=-4$， $-4\times-\frac{1}{2}=2$。

又 $2r^4=18$。 ∴ $r=\pm\sqrt{3}$， ∴ $\pm2\sqrt{3},\ 6,\ \pm6\sqrt{3}$，

5. G. P. 之各項，以同數乘之亦爲G. P。

〔證〕 $a,\ ar,\ ar^2$………………以x乘之，則

$ax,\ (ax)r,\ (ax)r^2$…………即亦爲G. P。

6. G. P. 各項之反商亦爲G. P。

〔證〕 依 $a,\ ar,\ ar^2$,……………之反商爲$\frac{1}{a}$， $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}\right)$，$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^2$，………

即亦爲G. P。

7. G. P. 之連續各二項。插入同數之中項。則其式亦爲G. P.

〔證〕 a, b, c, d..................爲G. P. 則$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=$..................

各兩項間。插入等比n中項，其比爲r。則$r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}=\sqrt[n+1]{\frac{c}{b}}=$........

各式皆同。故如題云云。

8. 求下列各式之和。

(1) $12+9+9\frac{3}{4}+$............至20項。　　答 $48\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}$,

(2) $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-$............至 6 項,　　答 $\frac{133}{243}$.

(3) $4+.8+.16+$..............至無窮。　　答 5.

〔解〕 (1) $a=12,\ r=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$。

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{12\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{3}{4}}=48\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{20}\right\}。$$

(2) $a=1,\ r=-\frac{2}{3}$。　$\therefore\ S=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^6}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3^6-2^6}{3^5\times 5}=\frac{133}{243}$,

(3) $a=4,\ r=\frac{.8}{4}=.2,\ S=\frac{a}{1-r}=\frac{4}{1-.2}=5$。

9. 等比級數諸數量之連乘積。等於$(gl)^{\frac{n}{2}}$。但n爲項數。g及l爲諸數量中之最大及最小者。試證之。

〔證〕 r爲公比。則$l, lr, lr^2,$............lr^{n-1}爲諸數量。$g=lr^{n-1}$而連乘積爲$l.\ lr.\ lr^2.$............lr^{n-1}。即$l^n r^{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)}$ 即$l^n r^{\frac{n-1}{2}(1+n-1)}$

即$l^n r^{\frac{n}{2}(n-1)}$。即$(l^2r^{n-1})^{\frac{n}{2}}$ 即$(lr^{n-1}l)^{\frac{n}{2}}$ 即$(gl)^{\frac{n}{2}}$。

10. 求證G. P. 諸數量之積。等於中項之n方乘。但n爲項數。且爲奇數。

〔證〕中項爲m。則依前例設$gl=m^2$。而諸數量之連乘積爲

$(gl)^{\frac{n}{2}}=(m^2)^{\frac{n}{2}}=m^n$。

11. G. P.之最初10項之和。等於最初5項之和之244倍，求公比，　　答3。

〔解〕 $\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=244\times\frac{a(1-r^5)}{1-r}$。　$\therefore$　$1-r^{10}=244(1-r^5)$，

$\therefore$　$1+r^5=244$，　$\therefore$　$r=\sqrt[5]{243}=3$。

12. G. P.之公比，小於$\frac{1}{2}$，則各項大於以下諸項之和，試證之。

〔證〕任設一項爲ar^m。則其以下諸項之和爲$ar^{m+1}+ar^{m+2}+\cdots\cdots$

即 $\frac{ar^{m+1}}{1-r}$。而 $ar^m-\frac{ar^{m+1}}{1-r}=\frac{ar^m(1-2r)}{1-r}$。

但 $r<\frac{1}{2}$。　$\therefore$　$1-2r$ 爲正，　$\therefore$　$ar^m>\frac{ar^{m+1}}{1-r}$。

調和級數

230. 定義 級數中任意連續三項之差之比。等於第一與第三之比，謂之調和級數(Harmonical Progression)，

例如 $a-b:b-c=a:c$。

$b-c:c-d=b:d$。

由是 a, b, c, d…………爲調和級數。畧記爲H. P.

a, b, c, 爲調和級數。則由定義，

$$a-b:b-c=a:c。$$

$$\therefore\quad c(a-b)=a(b-c)，$$

由是兩邊以abc除之。則得 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$。

由是 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ 爲等差級數，

故調和級數之反商爲等差級數，

231. 調和中項 a, b, c 爲調和級數。則 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ 爲等差級數，

由是 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$。　$\therefore$　$b=\frac{2ac}{a+c}$。

故兩數量之調和中項。(Harmonic Mean)等於其和數除其積之2倍。

設A. G. H. 為a及b兩數量之等差,等比,調和之中項。則

$$A=\frac{1}{2}(a+b),\quad G=\sqrt{ab},\quad H=\frac{2ab}{a+b}。$$

$$\therefore\quad AH=\frac{1}{2}(a+b)\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2。$$

故任意兩數間之等比中項。又為其兩數之等差中項。與調和中項之等比中項。

232. 定理 兩不等正數量之等差中項。恆大於其等比中項。

設a及b為兩正數。則

$$\frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab})=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \text{ 為正。}$$

由是 $\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}$。

又兩不等正數量之等比中項。恆大於其調和中項。

何則 $\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}$ 為正。

由是 $\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}$。

233. 插入項 凡任意兩項之間。可插入n個調和中項

先於 $\frac{1}{a}$ 及 $\frac{1}{b}$ 之間。求插入n個等差中項。則依222章。得

$\frac{1}{a}+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$, $\frac{1}{a}+\frac{2}{n+1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$ ………………… 而由此諸中項。求其反商。即為所求之調和中項如下。

$$\frac{(n+1)ab}{nb+a},\quad \frac{(n+1)ab}{(n-1)b+2a}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{(n+1)ab}{b+na}。$$

234. 求調和級數之總和 不能作一公式示之。

〔餘論〕凡級數三項。其相連兩項之差之比為等差級數。可僅以第一項表之。至等比級數。則已進一步。而關係及於第二項。至調和級數。則更進一步。而關係及於第三項。

例如有a, b, c三數。

此三數爲等差級數。則 $a-b=b-c$。

$$\therefore\ \frac{a-b}{b-c}=1=\frac{a}{a}。$$

又此三數爲等比級數。則 $b^2=ac$。故 $ab-b^2=ab-ac$。

即 $b(a-b)=a(b-c)$。 $\therefore\ \dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{b}$。

又如爲調和級數。則依230章之定義，得

$$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}。$$

由是等差，等比，調和之三級數。乃極明瞭。試整列其次序如下

$a-b : b-c :: a : a$..................(等差)

$a-b : b-c :: a : b$..................(等比)

$a-b : b-c :: a : c$..................(調和)

例題二十一

1. a, b, c 爲 A. P. 則 $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ 爲 A. P.

〔證〕 $a-b=b-c$。而 $a^2(b+c)-b^2(c+a)=ab(a-b)+c(a^2-b^2)$

$=(a-b)(ab+ca+bc)=(b-c)(ab+ca+bc)$

$=bc(b-c)+a(b^2-c^2)=b^2(c+a)-c^2(a+b)$。

2. 四數爲 A. P. 其平方之和爲120。第一與第四之積。比他兩數之積少8。求四數。 答 2, 4, 6, 8 或 −2, −4, −6, −8。

〔解〕 $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$, 爲四數。則

$(x-3y)^2+(x-y)^2+(x+y)^2+(x+3y)^2=120$。

即 $2(x^2+9y^2)+2(x^2+y^2)=120$。 $\therefore\ x^2+5y^2=30$。

又 $(x-3y)(x+3y)=(x-y)(x+y)-8$。 $\therefore\ 8y^2=8$。 $\therefore\ y=\pm1$。

由是 $x^2=30-5y^2=25$。 $\therefore\ x=\pm5$。

$\therefore$ 所求之四數爲 ±2, ±4, ±6, ±8。

3. a, b, c 爲 A. P. b, c, d 爲 H. P. 求證 $a : b=c : d$。

〔證〕 $a-b=b-c$ 及 $\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{c}$。 $\therefore\ \dfrac{b-c}{bc}=\dfrac{c-d}{cd}$。

$\therefore\ \dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$。 $\therefore\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$。

4. 三數爲G.P.其和爲14。其平方之和爲84。求各數。

答 2, 4, 8。

〔解〕三數爲x^2, xy, y^2。則$x^2+xy+y^2=14$,

$x^4+x^2y^2+y^4=84$。由此通同方程式。可得x, y。

5. 求證a, b, c爲等差級數。x爲a及b之等比中項，y爲b及c之等比中項。則x^2, b^2, y^2爲等差級數。

〔證〕$a-b=b-c,\quad x^2=ab,\quad y^2=bc,\quad 2b=c+a$。

又 $x^2+y^2=b(a+c)=2b^2$。 $\therefore\ x^2, b^2, y^2$爲A.P。

6. a, b, c, 爲調和級數。則$\dfrac{a}{b+c-a}$, $\dfrac{b}{c+a-b}$, $\dfrac{c}{a+b-c}$。亦爲調和級數。試證之。

〔證〕$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}$。故以$a+b+c$乘之。則

$$\frac{a+b+c}{a}-\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{b}-\frac{a+b+c}{c}。$$

即 $$\left(\frac{a+b+c}{a}-2\right)-\left(\frac{a+b+c}{b}-2\right)=\left(\frac{a+b+c}{b}-2\right)-\left(\frac{a+b+c}{c}-2\right)。$$

即 $$\frac{b+c-a}{a}-\frac{c+a-b}{b}=\frac{c+a-b}{b}-\frac{a+b-c}{c}。$$

$\therefore\ \dfrac{a}{b+c-a}$, $\dfrac{b}{c+a-b}$, $\dfrac{c}{a+b-c}$ 爲H.P。

7. a, b, c, d爲調和級數。則$3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$。

〔證〕$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right)。\qquad 即\ \frac{b-a}{ab}=\frac{c-b}{bc}=\frac{d-c}{cd}=\frac{d-a}{3ad}。$$

$\therefore\ \dfrac{(b-a)(d-c)}{ab\times cd}=\dfrac{(c-b)(d-a)}{bc\times 3ad}$。 $\therefore\ 3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$。

8. a, b, c爲調和級數。則$\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{b-a}+\dfrac{1}{b-c}$。

〔證〕 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}$。 $\therefore\ \dfrac{b-a}{ab}=\dfrac{c-b}{bc}$。

$\therefore\ \dfrac{a}{b-a}=-\dfrac{c}{b-c}$。 即 $\dfrac{a}{b-a}+\dfrac{c}{b-c}=0$。

$\therefore \quad \frac{a}{b-a}+1+\frac{c}{b-c}+1=2$。即 $\frac{b}{b-a}+\frac{b}{b-c}=2$。

9. a, b, c, 爲 H P。則 $\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=2$。試證之，

〔證〕由前例 $\frac{a}{b-a}+\frac{c}{b-c}=0$，及 $\frac{b}{b-a}+\frac{b}{b-c}=2$。

相加。則 $\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=2+0=2$。

10. a, b, c 爲 A. P。而 b, c, d 爲 G. P。c, d, e 爲 H. P。則 a, c, e 爲 G. P。試證之。

〔證〕 $2b=a+c,\quad c^2=bd,\quad d=\frac{2ce}{c+e}$ 連乘之。則

$2bc^2d=(a+c)bd\frac{2ce}{c+e}$。 即 $c=\frac{e(a+c)}{c+e}$。

$\therefore \quad c(c+e)=e(a+c)$， $\therefore \quad c^2=ae$。

11. 求證 a, b, c, 爲 H. P。則 $a-\frac{b}{2}$，$\frac{b}{2}$，$c-\frac{b}{2}$ 爲 G. P。

〔證〕 $b=\frac{2ac}{a+c}$。 $\therefore \quad \frac{b}{2}(a+c)=ac$。 即 $0=-\frac{b}{2}(a+c)+ac$。

$\therefore \quad \frac{b^2}{4}=\frac{b^2}{4}-\frac{b}{2}(a+c)+ac=\left(a-\frac{b}{2}\right)\left(c-\frac{b}{2}\right)$。

由是 $a-\frac{b}{2}$，$\frac{b}{2}$，$c-\frac{b}{2}$ 爲 G. P。

12. 若 a, b, c, 爲 H. P。則 a, a−c, a−b, 及 c, c−a, c−b 亦爲 H. P。試證之。

〔證〕由定義 $\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$。 即 $\frac{c}{b-c}=\frac{a}{a-b}$。

即 $\frac{a-(a-c)}{(a-c)-(a-b)}=\frac{a}{a-b}$。 $\therefore$ a, a−c, a−b 爲 H. P。

又 $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{c-b}$。 即 $\frac{c-(c-a)}{(c-a)-(c-b)}=\frac{c}{c-b}$。 $\therefore$ c, c−a, c−b 爲 H. P。

13. x, a_1, a_2, y 爲 A. P。又 x, g_1, g_2, y，爲 G P。及 x, h_1, h_2, y，爲 H. P。

則 $\frac{g_1g_2}{h_1h_2}=\frac{a_1+a_2}{h_1+h_2}$ 試證明之。

〔證〕 $x+y=a_1+a_2$, $xy=g_1g_2$。

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}。\quad 即\quad \frac{y+x}{xy}=\frac{h_1+h_2}{h_1h_2}。\qquad \therefore\ \frac{a_1+a_2}{g_1g_2}=\frac{h_1+h_2}{h_1h_2}。$$

14. G. P. 之第一項。第二項及第三項之和。與第三項，第四項及第五項之和之比。爲1:4。而七項爲384。則此級數如何。

答 6, ±12, 24,......

〔解〕 $\frac{a+ar+ar^2}{ar^2+ar^3+ar^4}=\frac{1}{4}$ 及 $ar^6=384$。

$$\therefore\quad \frac{a(1+r+r^2)}{ar^2(1+r+r^2)}=\frac{1}{4}。\qquad \therefore\ \frac{1}{r^2}=\frac{1}{4}。$$

$$\therefore\quad r=\pm 2,\quad a=\frac{384}{r^6}=\frac{384}{64}=6。$$

15. $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ 爲H. P。則

$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$ 試證明之。

〔證〕 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}=\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}=\ldots\ldots=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=K$。

則 $\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a^3}\right)+\left(\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a_4}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)=(n-1)K$。

即 $(n-1)K=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}$。 $\therefore\ K=\frac{a_n-a_1}{(n-1)a_1a_n}$。

又 $K=\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}=\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}=\frac{a_4-a_3}{a_3a_4}=\ldots\ldots=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}a_n}=\frac{a_n-a_1}{(n-1)a_1a_n}$。

由是 $\frac{(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\ldots\ldots+(a_n-a_{n-1})}{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots\ldots\ldots+a_na_{n-1}}=\frac{a_n-a_1}{(n-1)a_1a_n}$。

即 $\frac{a_n-a_1}{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\ldots\ldots\ldots+a_{n-1}a_n}=\frac{a_n-a_1}{(n-1)a_1a_n}$。

$\therefore\ a_1a_2+a_2a_3+\ldots\ldots\ldots+a_{n-1}a_n=(n-1)a_1a_n$。

16. a, x, y, b, 爲等差級數。a, u, v, b 爲調和級數。則 $xv=yu=ab$ 試證之。

〔證〕由222章 a, b 間之等差中項爲 $a+\frac{b-a}{3}$, $a+2\frac{b-a}{3}$,

$$\therefore\quad x=a+\frac{b-a}{3}=\frac{1}{3}(2a+b),\quad y=a+2\frac{b-a}{3}=\frac{1}{3}(a+2b)。$$

又$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$間之等差中項。為$\frac{1}{u}=\frac{a+2b}{3ab}$，$\frac{1}{v}=\frac{2a+b}{3ab}$。

即 $u=\frac{3ab}{a+2b}$，　$v=\frac{3ab}{2a+b}$。

由是 $xv=\frac{1}{3}(2a+b)\frac{3ab}{2a+b}=ab,$

$yu=\frac{1}{3}(a+2b)\frac{3ab}{a+2b}=ab$。

17. 有三數為等差級數。而其兩外項之積。為中項之5倍。而兩大數之和。等於最小數之8倍。求各數。　答 3, 9, 15。

〔解〕設三數為 $x-y, x, x+y$。則 $(x-y)(x+y)=5x$。即 $x^2-5x=y^2$。

又 $x+(x+y)=8(x-y)$。即 $y=\frac{2}{3}x$。

$\therefore\ \frac{4}{9}x^2=x^2-5x$。　$\therefore\ x=9$，而 $y=6$。

18. $\frac{a+b}{1-ab}$, b, $\frac{b+c}{1-bc}$，為 A. P。則 a, $\frac{1}{b}$, c，為 H. P。試證明之。

〔證〕$\frac{a+b}{1-ab}-b=b-\frac{b+c}{1-bc}$。即 $\frac{a(1+b^2)}{1-ab}=\frac{c(1+b^2)}{1-bc}$。

$\therefore\ a(1-bc)=-c(1-ab)$。　$\therefore\ 2abc=c+a$。

即 $2b=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$。　$\therefore\ \frac{1}{a}, b, \frac{1}{c}$，為 A. P。

$\therefore\ a, \frac{1}{b}, c$，為 H. P。

19. a, b, c 為 A. P. 及 a^2, b^2, c^2 為 H. P。則 $-\frac{1}{2}a, b, c$ 為 G. P。

〔證〕$a-b=b-c$ 及 $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}$。

由是 $c^2(b^2-a^2)=a^2(c^2-b^2)$。即 $c^2(a+b)(a-b)=a^2(b+c)(b-c)$。

$\therefore\ c^2(a+b)(a-b)=a^2(b+c)(a-b)$。

$\therefore\ a-b=0$，或 $c^2(a+b)=a^2(b+c)$，$a-b=0$。則 $b-c$ 亦為 0。

$\therefore\ a=b=c$。

又 $c^2(a+b)=a^2(b+c)$。則 $ac(c-a)+b(c^2-a^2)=0$。而 $c-a=0$ 與前同。故 $ac+b(c+a)=0$。而 $c+a=2b$。故 $ac+2b^2=0$。

$\therefore\ b^2=-\frac{1}{2}ac \qquad \therefore\ -\frac{1}{2}a,\ b,\ c,$ 爲 G. P.

20. 有 $a, b,$ 爲最初兩項之等差級數。及調和級數。x 爲等差級數之任意一項，y 爲相當之調和級數之一項，則 $x-a : y-a=b : y$。試證之。

〔證〕 $x=a+(n-1)d$ 則 $\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+(n-1)D,$

但 $d=b-a,\ D=\frac{1}{b}-\frac{1}{a},$

$\therefore\ x=a+(n-1)(b-a),$ 即 $x-a=(n-1)(b-a),$

$\frac{1}{y}=\frac{1}{a}+(n-1)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$ 即 $\frac{b(y-a)}{y}=(n-1)(b-a),$

由是 $x-a=\frac{b(y-a)}{y} \qquad \therefore\ x-a : y-a=b : y$。

21. a 爲 b 及 c 間之等差中項，b 爲 a 及 c 間之等比中項，則 c 爲 a 及 b 間之調和中項，試證之。

〔證〕 $2a=b+c,\ b^2=ac$。 $\therefore\ 2a=\frac{ac}{b}+c$。 $\therefore\ c=\frac{2ab}{a+b}$。

22. 自然數區分爲各羣，如 $1,|2,3,|4,5,6,|7,8,9,10,|$……………則第 K 羣之和，爲 $\frac{1}{2}k(k^2+1)$，試證之。

〔證〕如第 2 羣之末項，爲 $\frac{1}{2}2(1+2)=3$。第 3 羣之末項，爲 $\frac{1}{2}3(3+1)=6$。則第 K 羣之末項。爲 $\frac{1}{2}k(1+k)$。

故第 K 羣之和，爲 $\frac{1}{2}k\{2\times\frac{1}{2}k(1+k)+(k-1)(-1)\}=\frac{1}{2}k(k^2+1)$。

23. A. P. 及 H. P. 之初項爲 a。末項爲 l。項數爲 n。則 A. P. 之第 $r+1$ 項，及 H. P. 之第 $n-r$ 項之積，與 r 無關係。

〔證〕從 $l=a+(n-1)d,\ d=\frac{l-a}{n-1}$。

又從 $\frac{1}{l}=\frac{1}{a}+(n-1)D,\quad D=\frac{-(l-a)}{al(n-1)}$。

但 A. P. 之第 $r+1$ 項 $=a+rd=a+\frac{(l-a)r}{n-1}=\frac{a(n-1)+(l-a)r}{n-1}$。

H. P. 之第 $n-r$ 項 $=1\Big/\left\{\frac{1}{a}+(n-r-1)\frac{-(l-a)}{al(n-1)}\right\}=\frac{al(n-1)}{a(n-1)+(l-a)r}$。

由是此兩項之積$=\dfrac{a(n-1)+(l-a)r}{n-1}\times\dfrac{al(n-1)}{a(n-1)+(l-a)r}=al$。

24. 從 A. P. 之已知一項。至等距離之各兩項之積。取其逐次之差。則亦爲 A. P。試證之。

〔證〕 d 爲公差。已知一項爲 a。則 $a-nd$。及 $a+nd$ 爲與 a 等距離之兩項。此積爲 $(a-nd)(a+nd)=a^2-n^2d^2$。

逐次積爲 $a^2-(n+1)^2d^2$, $a^2-(n+2)^2d^2$, $a^2-(n+3)^2d^2$。

而此差爲 $(2n+1)d^2$, $(2n+3)d^2$, $(2n+5)d^2$..............................

故亦爲 A. P。

25. S_n, S_{2n}, S_{3n}, 爲 n 項, 2n 項, 3n 項之 G. P. 之和。則 $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$ 試證之。

〔證〕 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, $S_{2n}=S_n+\dfrac{ar^n(1-r^n)}{1-r}$。

即 $S_{2n}-S_n=r^nS_n$。 又 $S_{3n}=S_{2n}+\dfrac{ar^{2n}(1-r^n)}{1-r}$。

即 $S_{3n}-S_{2n}=r^{2n}S_n$。 $\therefore$ $(S_{2n}-S_n)^2=r^{2n}S_n{}^2=(S_{3n}-S_{2n})S_n$。

26. a, b, c, 皆爲正數。無論爲 A. P. 爲 G. P. 爲 H. P. 若 n 爲任意之正整數。則 $a^n+c^n>2b^n$。試證之。

〔證〕 $a<b<c$ 爲 A. P。則 $c-b=b-a=d$。

$a^n+c^n-2b^n=(c^n-b^n)-(b^n-a^n)$

$=d\{(c^{n-1}+c^{n-2}b............+b^{n-1})-(b^{n-1}+b^{n-2}a............+a^{n-1})\}$。

此式之 {} 內爲正。 $\therefore$ $a^n+c^n>2b^n$。

又 H. P. 爲 A. P. 之反商。故知 A. P. 亦能合理。

又爲 G. P。則從 $b^2=ac$, $a^n+c^n-2b^n=a^n+c^n-2a^{\frac{n}{2}}c^{\frac{n}{2}}=(a^{\frac{n}{2}}-c^{\frac{n}{2}})^2$ 其數爲正。故 $a^n+c^n>2b^n$。

27. P. Q. R. 爲 (1) A. P. (2) G. P. (3) H. P. 之第 p 項。第 q 項。第 r 項。求證 (1) $P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)=0$。

(2) $P^{q-r}Q^{r-p}R^{p-q}=1$。

(3) $QR(q-r)+RP(r-p)+PQ(p-q)=0$。

〔證〕 (1) $P=a+(p-1)d$, $Q=a+(q-1)d$, $R=a+(r-1)d$,

$P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)$

$=a\{(q-r)+(r-p)+(p-q)\}+d\{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)\}$,

$=a\{0\}+d\{0\}=0$。

(2) $P=at^{p-1}$, $Q=at^{q-1}$, $R=at^{r-1}$。

P^{q-r}, Q^{r-p}, $R^{p-q}=a^{(q-r)+(r-p)+(p-q)}t^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$

$=a^0t^0=1$。

(3) $\frac{1}{P}=\frac{1}{a}+(p-1)d$, $\frac{1}{Q}=\frac{1}{a}+(q-1)d$, $\frac{1}{R}=\frac{1}{a}+(r-1)d$。

$\frac{q-r}{P}+\frac{r-p}{Q}+\frac{p-q}{R}=\frac{1}{a}\{(q-r)+(r-p)+(p-q)\}$

$+d\{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)\}=0$,

$\therefore\quad QR(q-r)+RP(r-p)+PQ(p-q)=0$。

28. $a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots a_n$ 爲 H. P。則

$\frac{a_1}{a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}$, $\frac{a_2}{a_1+a_3+\cdots\cdots+a_n}$, $\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}}$。亦爲 H. P,

〔證〕 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}=\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}$。以 $a_1+a_2+\cdots\cdots\cdots+a_n$ 乘之，則

$$\left(1+\frac{a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{a_1}\right)-\left(1+\frac{a_1+a_3+\cdots\cdots+a_n}{a_2}\right)$$

$$=\left(1+\frac{a_1+a_3+\cdots\cdots+a_n}{a_2}\right)-\left(1+\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{a_3}\right)=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

則 $\frac{a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{a_1}-\frac{a_1+a_3+\cdots\cdots+a_n}{a_2}$

$=\frac{a_1+a_3+\cdots\cdots+a_n}{a_2}-\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{a_3}=\cdots\cdots\cdots\cdots$ 故此反商爲 H. P。

29. $a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots\cdots a_n$ 皆爲實數。而

$(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_{n-1}^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots+a_n^2)=(a_1a_2+\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}a_n)^2$,

則 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 爲 G. P。

〔證〕解已知方程式之括弧，消去 $a_1^2a_2^2$, $a_2^2a_3^2$, ……之項，再括之。

則 $(a_1a_n-a_2a_{n-1})^2+(a_3a_{n-2}-a_4a_{n-3})^2+\cdots\cdots\cdots=0$。

依題意 $a_1a_n-a_2a_{n-1}=0$, $a_3a_{n-2}-a_4a_{n-3}=0$。…………………

$\therefore\quad a_1a_n=a_2a_{n-1}$, $a_3a_{n-2}=a_4a_{n-3}$…………………

由是 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$, 爲 G. P。

30. 任意之偶數平方$(2n)^2$。等於A. P. 之n項之和。又任意之奇數平方$(2n+1)^2$。等於A. P. 若干項之和加1。試證之。

〔證〕$s=\frac{m}{2}\{2a+(m-1)d\}=\frac{d}{2}m^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)m$。而$a=\frac{d}{2}$。則

$s=am^2=4n^2$。　$\therefore$　$m=n,\ a=4,\ d=8$。

由是$4+12+20+\cdots\cdots$至n項$=4n^2$。

次$s+1=\frac{d}{2}m^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)m+1$爲平方數。則

$\left(a-\frac{d}{2}\right)^2-4\times\frac{d}{2}\times 1=0$。　$\therefore$　$a=\frac{d}{2}\pm\sqrt{2d},\ d=2$。則

$a=1\pm 2=3$，或-1。

由是$s+1=\left(m\sqrt{\frac{d}{2}}+1\right)^2=(m+1)^2=(2n+1)^2$。　$\therefore$　$m=2n$。

由是$(3+5+7+9+\cdots\cdots$至2n項$)+1=(2n+1)^2$。

或$(-1+1+3+5+\cdots\cdots$至$2n+2$項$)+1=(2n+1)^2$。

31. 任意正整數p之某方乘。爲1, 3, 5, 7,………級數之p項之和。又此和爲p^r。試求其初項。　　答 $p^{r-1}-p+1$。

〔證及解〕初項$=2k+1$。則

$s=\frac{p}{2}\{2(2k+1)+(p-1)2\}=2pk+p^2=p^r$。

$2k=p^{r-1}-p$。　$\therefore$　$2k+1=p^{r-1}-p+1$。

由是此級數爲

$s=(p^{r-1}-p+1)+(p^{r-1}-p+3)+(p^{r-1}-p+5)+\cdots\cdots+(p^{r-1}-p+2p-1)$
$=p(p^{r-1})-p(p)+(1+2+3+\cdots\cdots+2p-1)=p^r-p^2+p^2=p^r$。

32. A. P. 及G. P. 其第一項及第二項相同。而各項皆爲正數。試證A. P. 之他項。小於G. P. 之相應項。

〔證〕初項及第二項爲a及b A. P. 之第m項爲A。G. P. 之第m項爲G。則$A=a+(m-1)(b-a)=m(b-a)+2a-b$。

$$G=a\left(\frac{b}{a}\right)^{m-1}=\frac{b^{m-1}}{a^{m-2}}$$

$G-A=\frac{b^{m-1}}{a^{m-2}}-\{m(b-a)+2a-b\}$

$$=\frac{1}{a^{m-2}}\{b^{m-1}-a^{m-1}-ma^{m-2}(b-a)+a^{m-2}(b-a)\}$$

$$=\frac{b-a}{a^{m-2}}\{b^{m-2}+b^{m-3}a+\ldots\ldots+a^{m-2}-(m-1)a^{m-2}\}$$

$$=\frac{b-a}{a^{m-2}}\{(b^{m-2}-a^{m-2})+(b^{m-3}-a^{m-3})+\ldots\ldots+a^{m-2}(1-1)\}。$$

此最後之結果。在{}內之各項。與b−a爲同符號。故此式爲正數。由是G>A。

第拾捌編

記數法

235. 通常記數法 算術中所用數字。有十個記號。如0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 以表任意之數。且置於左之數字。常十倍於右一位。而單, 十, 百, 千等位。爲無數者。則用零(即0)以補之。

此記法。謂之通常記數法。以10爲其底數(Radix or base)。

236. 記數法 欲用任意之底數以代10。則必取小於底數之數字以書各數。

例如r進法。即用r爲底數以表N數。則

$$N=\ldots\ldots\ldots\ldots d_3d_2d_1d_0$$

但 $d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots\ldots\ldots\ldots$ 爲小於r之數。而 d_0 爲單位。d_1 爲 $d_1\times r$ d_2 爲 $d_2\times r^2$。$\ldots\ldots\ldots\ldots$ 故

$$N=d_0+d_1r+d_2r^2+d_3r^3+\ldots\ldots\ldots$$

〔註〕本編各文字皆爲正整數。

237. 定理 任意之正整數。可用任意之記數法表之。而每一記數法。所表之一數。祇有一種。

如N爲某正整數。以r之底數表之。則以r除N。得商爲 Q_1。餘數爲 d_0。則 $N=d_0+r\times Q_1$。

又以r除 Q_1。得商爲 Q_2。餘數爲 d_1。則

$$Q_1=d_1+r\times Q_2.$$

$$\therefore\quad N=d_0+r(d_1+rQ_2)=d_0+d_1r+r^2Q_2.$$

依此法逐次施之。至最後之商數 Q_n 小於r。則與最後之餘數全等爲 $Q_n=d_n$。

由是 $N=d_0+d_1r+d_2r^2+d_3r^3+\ldots\ldots\ldots+d_nr^n$。

但 $d_0, d_1, d_2, \ldots\ldots\ldots$ 俱爲r所除後之餘數。故俱小於r。又自 d_n 不能爲0外。其他皆得爲0。

故記N以r進法。則其數爲

$$d_n \ldots\ldots\ldots\ldots d_3d_2d_1d_0。$$

如上法以r除N。其各次所得之商及餘數。爲一定之數。故如定理所云。每一記數所表之一數。祗有一種。

例題

1. 2157記以6進法。 答 13553。

〔解〕 順次以6除之。如下

$6\,)\,\underline{2157}$

$6\,)\,\underline{359}$ 餘數 $3=d_0$

$6\,)\,\underline{59}$ 餘數 $5=d_1$

$6\,)\,\underline{9}$ 餘數 $5=d_2$

1 餘數 $3=d_3$

$\therefore\ 2157=1\times6^4+3\times6^3+5\times6^2+5\times6+3。$

即 2157以6進法記之。爲13553。

2. 6進法所記之數爲13553。今記以8進法得若干。 答4155。

〔解〕 13553爲以6爲底數。今若以8除之。當先化13爲$1\times6+3$。即9乃以8除得商1。餘數1。

次以此餘數1。與其次位5相連爲15。亦化爲$1\times6+5$。即11以8除得商1。餘數3。以下準此。

$8\,)\,\underline{13553}$

$8\,)\,\underline{1125}$ 餘數 5

$8\,)\,\underline{53}$ 餘數 5

4 餘數 1

由是所求之數爲4155。

3. 8進法之數爲4155。今記以10進法得若干。 答 2157。

與前法同。

$10\,)\,\underline{4155}$

$10\,)\,\underline{327}$ 餘數 7

$10\,)\,\underline{25}$ 餘數 5

2 餘數 1

故所求之數爲2157。

或 $4155=4\times8^3+1\times8^2+5\times8+5=\{(4\times8+1)8+5\}8+5$。故以8乘4加1。以8乘之加5。又以8乘之加5。即得所求之結果。

4. 3166記以12進法。 答 19et。

12爲底數。則小於12之數有十及十一。故以t代十。以e代十一。

〔解〕
$$\begin{array}{r|l} 12 & \underline{3166} \\ 12 & \underline{263}\ \text{餘數 10 即 t} \\ 12 & \underline{21}\ \text{餘數 11 即 e} \\ & 1\ \text{餘數 9。} \end{array}$$

故所求之數爲19 et。

5. $\frac{17}{21}$記以4進法。 答 $\frac{101}{111}$。

〔解〕
$$\begin{array}{r|l} 4 & \underline{17} \\ 4 & \underline{4}\ \text{餘數 1。} \\ & 1\ \text{餘數 0。}\ \therefore\ 101。 \end{array} \qquad \text{又} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & \underline{21} \\ 4 & \underline{5}\ \text{餘數 1} \\ & 1\ \text{餘數 1。}\ \therefore\ 111。 \end{array}$$

由是所求之分數爲$\frac{101}{111}$。

6. 4950記之爲20301。問用何數爲底數。 答 7。

〔解〕所求之底數爲r。則 $2r^4+or^3+3r^2+or+1=4950$。

即 $2r^4+3r^2-4949=0$。 即 $(r^2-49)(2r^2+101)=0$。

$\therefore\ r=\pm7,\quad r=\pm\sqrt{50\frac{1}{2}}$。

是由 $r=7$。

238. 分底數 通常記數法之分數。亦可以任意記數法之分底數表之。如 $\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}+\frac{c}{r^3}+\dots\dots$ 可作abc……而以$\frac{1}{r}$爲其底。

凡已知之分數。表以r進法之分底數。其法亦祇有一種。

設F爲已知之分數。則

$$F=abc\dots\dots=\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}+\frac{c}{r^3}+\dots\dots$$

但a, b, c,……爲正整數。或爲0。皆小於r。以r乘上之恆同式。

則得
$$F\times r=a+\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}+\dots\dots$$

由是a為Fr之整數部分。而$\frac{b}{r}+\frac{c}{r}+$..............不能不為分數部分。若Fr小於1。則a為0。何則，以凡小於1之數中。不能有整數部分也。

設Fr之分數部，為F_1，則$F_1=\frac{b}{r}+\frac{c}{r^2}+$........

又以r乘之。則$F_1\times r=b+\frac{c}{r}+$..................

由是b又為F_1r之整數部分。

依此順次以r底數乘其分數部分。即可求得a,b,c,..................

例　題

1. $\frac{1}{27}$以6之分底數記之。　　答 .012。

〔解〕 $\frac{1}{27}\times 6=0+\frac{6}{27}$，$\frac{6}{27}\times 6=1+\frac{9}{27}$，$\frac{9}{27}\times 6=2$，

由是所求之結果為·012。

2. $\frac{1}{7}$以3之分底數記之。　　答 $.\dot{0}1021\dot{2}$。

〔解〕 $\frac{1}{7}\times 3=0+\frac{3}{7}$，$\frac{3}{7}\times 3=1+\frac{2}{7}$，$\frac{2}{7}\times 3=0+\frac{6}{7}$，

$\frac{6}{7}\times 3=2+\frac{4}{7}$，$\frac{4}{7}\times 3=1+\frac{5}{7}$，$\frac{5}{7}\times 3=2+\frac{1}{7}$。

由是所求之結果為$.\dot{0}1021\dot{2}$。因最後之餘數，仍為$\frac{1}{7}$。故為循環數。

3. 以8進法所記之324.26。求以6進法記之。

〔解〕此數為$3\times 8^2+2\times 8+4+\frac{2}{8}+\frac{6}{8^2}$，若記以6進法。可將整數與分數分求之。較為便利。

$$\begin{array}{r|l} 6 & 324 \\ \hline 6 & 43 \text{ 餘數 } 2, \\ \hline & 5 \text{ 餘數 } 5. \end{array}$$

∴ 324為552。

又 $.26\times 6=2.04$, $.04\times 6=0.30$, $.30\times 6=2.20$, $.20\times 6=1.40$, $.40\times 6=3.00$。

$\therefore$ $.26$ 爲 $.20213$。

由是所求之數爲552.20213。

4. 以8進法所表之$.16\dot{3}1\dot{5}$變爲常分數。 答 $\dfrac{16277}{77700}$。

〔解〕 $N=.16\dot{3}1\dot{5}$。

$\therefore$ $8^2N=16.\dot{3}1\dot{5}$。 又 $8^5N=16315.\dot{3}1\dot{5}$。

$\therefore$ $8^5N-8^2N=16315-16$。

$\therefore$ $N=\dfrac{16315-16}{8^5-8^2}=\dfrac{16315-16}{77700}=\dfrac{16277}{77700}$。

〔註〕 10^5 爲10進法。則有六位數。首位1而附以五個0。爲100000。今與之相同之8^5。爲8進法。亦有六位數。首位1而附五0。爲100000。故 $8^5-8^2=100000-100=77700$。

5. 以7進法所表之$.2\dot{3}\dot{1}$變爲常分數。 答 $\dfrac{113}{330}$。

〔解〕 $N=.2\dot{3}\dot{1}$。 $\therefore$ $7N=2.\dot{3}\dot{1}$。

又 $7^3N=231.\dot{3}\dot{1}$。 $\therefore$ $N=\dfrac{231-2}{7^3-7}=\dfrac{226}{660}=\dfrac{113}{330}$。

6. 5進法之數$314.\dot{2}\dot{3}$變爲7進法。 答 $150.\dot{3}56\dot{4}$。

〔解〕

$$\begin{array}{r|l} 7 & 314 \\ \hline 7 & 22 \text{ 餘數 } 0。\\ \hline & 1 \text{ 餘數 } 5。\end{array}$$

$.\dot{2}\dot{3}\times 7=3.\dot{4}\dot{1}$。

$.\dot{4}\dot{1}\times 7=5.\dot{4}\dot{3}$。

$.\dot{4}\dot{3}\times 7=6.\dot{3}\dot{1}$。

$.\dot{3}\dot{1}\times 7=4.\dot{2}\dot{3}$。

以7連乘$\dot{2}\dot{3}$。亦得循環數$.\dot{3}56\dot{4}$。

由是所求之數爲$150.\dot{3}56\dot{4}$。

239. 定理 r進法所表任意之數。與其數字之和之差。恆能以r−1除盡。

設N爲任意之數。S爲其數字 $d_0, d_1, d_2,$ ………………之和。則

$$N=d_0+d_1r+d_2r^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+d_nr^n。$$

$$S=d_0+d_1+d_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+d_n。$$

$\therefore \quad N-S=d_1(r-1)+d_2(r^2-1)+\dots\dots\dots\dots+d_n(r^n-1)$。

上式之右邊。依86章各項能以r除盡。故N－S能用r－1除盡。

因N－S。能以r－1除盡。故N及S以r－1除之。其所得之餘數相同，

例題

1 同數字所記之兩數之差。恆能以r－1除盡。其r爲底數。

〔證〕設兩數爲N_1及N_2。因兩數字相同。故兩數字之和。均以S代之。則依前之定理N_1-S及N_2-S。能以r－1除盡。故知$(N_1-S)-(N_2-S)=N_1-N_2$能以r－1除盡。

2. 通常記數法。於其數之數字之和。能以9或3除盡之者。則其數亦能以9或3除盡。

〔證〕原數爲N。數字之和爲S。則

N－S能以10－1。即9整除。故S能以9整除。則N亦能以9整除S能以3整除。則N亦能以3整除。

3. 某數之奇位數字之和。與偶位數字之和之差。能以r+1整除者。則其數亦能以r+1整除。

〔證〕$N=d_0+d_1r+d_2r^2+d_3r^3+\dots\dots\dots$

及　$D=(d_0+d_2+\dots\dots)-(d_1+d_3+\dots\dots)$

則　$N-D=d_1(r+1)+d_2(r^2-1)+d_3(r^3+1)+\dots\dots\dots$

上式之右邊。依87章各項能以r+1除盡。故N－D。亦能以r+1整除。故知D若能以r+1整除。則N亦能以r+1整除。

4 N_1及N_2爲任意之兩整數。以9除N_1, N_2及$N_1\times N_2$各數。其餘數順次爲n_1, n_2及p。則n_1, n_2之積等於p。或其差爲9之倍數。

〔證〕但$N_1=n_1+9$之倍數。$N_2=n_2+9$之倍數。故$N_1\times N_2=(n_1+9$之倍數$)\times(n_2+9$之倍數$)$

$=n_1n_2+n_1\times9$之倍數$+n_2\times9$之倍數$+9$之倍數$\times9$之倍數。

$=n_1n_2+9$之倍數。

但$N_1\times N_2=p+9$之倍數。

故n_1n_2等於p。如其不等。必其差爲9之倍數。

此題可用以驗乘法之有誤與否。若 n_1n_2 非等於 p。或其差不爲9之倍數。則其乘積必有誤。

此題在算術中謂之九去法。

5. 7進法所記之三位數。若變爲9進法。則數字相同而位置相反。問此數爲何數。 答503。

〔解〕設三位之數字爲 a, b, c。則 $7^2a+7b+c=9^2c+9b+a$。

但 a, b, c, 俱爲小於7之正整數。而由上之關係。則得 $b=8(3a-5c)$。

即 b 爲8之倍數。然 b 小於7。故 b 不能不等於0。

由是 $3a=5c$。 $\therefore$ $a=5$ 及 $c=3$。

故7進法之原數爲503。

6. 有三位數。若2倍之。則其數位倒轉。其首末兩數字所成之二位數。以2倍之。其數位亦倒轉。求證此數之記數法。以連續三數內之一數爲底數。皆能合理。

〔證〕r 爲底數。三位數爲 abc。則 $abc\times 2=cba$。

cba 大於 abc。故 c 大於 a。

故2乘 c 必末位爲 a 而進1於其左位。次2乘 b 其末位與前之1相加爲 b。亦進1於其左位。又次2乘 a 與前之1相加爲 c 即得 cba 之積如下。

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ \times 2 \\ \hline c\ b\ a \end{array}$$

$$2c=a+r\text{..................................}(1)$$

$$2b+1=b+r\text{..................................}(2)$$

$$2a+1=c\text{..................................}(3)$$

從(1)式及(3)式。得 $ac\times 2=ca$。

又從 $2c=r+a$, $2a+1=c$, 消去 c。則得 $3a=r-2$。

a 爲整數。故 r−2 爲3之倍數。 $\therefore$ $r-2=0, 3, 6, 9,$............

$\therefore$ 從 $r=2, 5, 8, 11,$............ 而得

$a=0, b=1, c=1$, 或 $a=1, b=4, c=3$, 或 $a=2, b=7, c=5$, 或 $a=3, b=t, c=7$,............即於 2, 5, 8, 11............進法順次得 011, 143, 275, 3t7............而以 1, 2, 3 或 2, 3, 4 或 3, 4, 5 或 4, 5, 6 或 5, 6, 7 或 6, 7, 8 等三數內之一數爲底數。

例題二十二

1. 有以7及9爲底數之二位數，其數字相同。試求其數如何。

答 31。

〔解〕 $7a+b=9b+a$。 ∴ $3a=4b$。 ∴ $a=4,\ b=3$。

由是所求之數 $=7a+b=7\times4+3=31$。

2. 於任意之已知記數法。試依定位數。求其最大最小值。

〔解〕數字任何大。必比底數r小1。又任何小。亦必首位爲1。而以下爲0。 ∴ 最大數 $=(r-1)(r-1)(r-1)\ldots\ldots\ldots\ldots(r-1)$

最小數 $=100\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0$。

3. 有6位之數。用三數字輪次相列而成。則此數可以1001整除。試證之。

〔證〕 $abcabc=ar^5+br^4+cr^3+ar^2+br+c=(ar^2+br+c)(r^3+1)$。

但 $r^3+1=1r^3+0r^2+0r+1=1001$。

4. 依1斤，2斤，4斤，8斤，………之次序。取1027斤。試求各數。

答 1斤，2斤，1024斤

〔解〕

$$\begin{array}{r l}
2\,)\underline{1027} & \\
2\,)\underline{513} & \ldots\ldots1\\
2\,)\underline{256} & \ldots\ldots1\\
2\,)\underline{128} & \ldots\ldots0\\
2\,)\underline{64} & \ldots\ldots0\\
2\,)\underline{32} & \ldots\ldots0\\
2\,)\underline{16} & \ldots\ldots0\\
2\,)\underline{8} & \ldots\ldots0\\
2\,)\underline{4} & \ldots\ldots0\\
2\,)\underline{2} & \ldots\ldots0\\
1 & \ldots\ldots0
\end{array}$$

由是 $1027=10000000011$

$=2^9+2^1+1$

$=1024+2+1$。

5. 任意記數法所表之數144。恆爲平方數。試證之。

〔證〕 $144=r^2+4r+4=(r+2)^2$。故如題云云。

6 任意記數法所表之121，12321，1234321，等。恆爲平方數。試證之。

〔證〕$121=r^2+2r+1=(r+1)^2$, $12321=r^4+2r^3+3r^2+2r+1=(r^2+r+1)^2$,

$1234321=r^6+2r^5+3r^4+4r^3+3r^2+2r+1=(r^3+r^2+r+1)^2$。

7. 有二位之數加18。則其數位倒置。又此數以七進法記之。亦為轉位數。試求其數幾何。 答 46。

〔解〕從 $10a+b+18=10b+a$ 及 $10a+b=7b+a$。如是可得 a, b。

8. 有一數。以5之底數表之。則為 $4.4\dot{4}\dot{0}$。問以何數為底數。則為 $4.5\dot{4}$。 答 6。

〔解〕一數為 $N+4$。即 $N=.4\dot{4}\dot{0}$。 $\therefore$ $5N=4.\dot{4}\dot{0}$。 $\therefore$ $5^3N=440.\dot{4}\dot{0}$。

$\therefore$ $N=\dfrac{440-4}{5^3-5}=\dfrac{4\times5^2+4\times5-4}{120}=\dfrac{29}{30}$。次 $.5\dot{4}=\dfrac{5}{r}+\dfrac{4}{r(r-1)}=\dfrac{29}{30}$。

$\therefore$ $(r-6)(29r-5)=0$。 $\therefore$ $r=6$。

9. 於通常記數法。一數N之數字之和為S。他數2N之數字之和為2Q。則S−Q為9之倍數。試證之。

〔證〕$N=9$之倍數$+S$, $2N=9$之倍數$+2Q$。

$\therefore$ $2(S-Q)=(2N-9$之倍數$)-2(N-9$之倍數$)=9$之倍數。

10. 以奇數為底數之數。若為偶數。則數字之和。亦為偶數。若為奇數。則數字之和。亦為奇數。試證之。

〔證〕由239章 $N=(r-1)$之倍數$+S$。但 $r-1$ 為偶數。故n為偶數或奇數。從而S亦為偶數。或奇數。

11. 於任意記數法。凡三位數之平方。與轉位數之平方之差。恆能以 r^2-1 整除。試證之。

〔證〕$(ar^2+br+c)^2-(cr^2+br+a)^2$。能以 $(ar^2+br+c)-(cr^2+br+a)$ 整除。而 $(ar^2+br+c)-(cr^2+br+a)=(a-c)(r^2-1)$ 故如題云云。

12. 以r為底數之任意數之平方。與其轉位數之平方之差。恆為 r^2-1 之倍數。

〔證〕原數為奇位數。則

$(P_0r^{2n}+P_1r^{2n-1}+\ldots\ldots+P_nr^n+\ldots\ldots+P_{2n})^2-(P_{2n}r^{2n}+P_{2n-1}r^{2n-1}+\ldots\ldots+P_nr^n+\ldots\ldots+P_0)^2$

$=(P_0r^{2n}+P_1r^{2n}+\ldots\ldots+P_0)\{P_0(r^{2n}-1)+P_1r(r^{2n-2}-1)+\ldots\ldots-P_{2n}(r^{2n}-1)\}$, 故能以 r^2-1 整除。

又原數爲偶位數,則

$(P_0r^{2n+1}+P_1r^{2n}+\cdots\cdots+P_{2n+1})^2-(P_{2n+1}r^{2n+1}+P_{2n}r^{2n}+\cdots\cdots+P_0)^2$

$=\{P_0(r^{2n+1}+1)+P_1r(r^{2n-1}+1)+\cdots\cdots+P_{2n+1}r^{2n+1}+1)\}$

$\{P_0(r^{2n+1}-1)+P_1r(r^{2n-1}-1)+\cdots\cdots-P_{2n+2}(r^{2n+1}-1)\}$。

上式兩因子之各項,爲 $r+1$ 及 $r-1$ 之倍數,故能以 r^2-1 整除。

13. 7進法之三位數變爲11進法,則爲轉位數,求其數幾何。

答 502, 或 361。

〔解〕 $7^2a+7b+c=11^2c+11b+a$。 $\therefore\ b=6(2a-5c)$。

由是 $2a-5c=0$, 或 1。

若 $2a-5c=0$。則 $b=0,\ a=5,\ c=2$。 又 $2a-5c=1$。則 $b=6,\ a=3,\ c=1$。

14. 以5及9爲底數之數,其中兩數字相同。則無論各數字之次序如何。以4除之。恆得同一之餘數。試證之。

〔證〕 5爲底數之數爲N, 9爲底數之數爲N'。其數字之和皆爲S。則 $N-S=(5-1)$ 之倍數,即4之倍數, $N'-S=(9-1)$ 之倍數,即8之倍數,故4除N及N'之餘數,皆等於4除S之餘數,即如題云云。

15 3進法所表之6位數,若以12進法記之。則得其最後之三數字。試求此數。 答 288, 289, 或 290。

〔解〕 $3^5a+3^4b+3^3c+3^2d+3e+f=12^2d+12e+f$。

$\therefore\ e=3(9a+3b+c-5d),\ e<3$。 $\therefore\ e=0,\ 9a+3b+c-5d=0$。

又 $9a+3b+c=5d$。a及d爲六位數及三位數之首位數字。故不能爲0。設d爲1。或爲2。然 $9a<5d$。故d不能等於1。因而 $d=2$。

由是所求之數爲 $12^2d+12e+f=288+12\times0+f$。

故 $f=0,\ 1,\ 2$。則所求之數爲 288, 289, 290。

16. 8進法之四位數,若2倍之,則數位倒轉。求其原數。

答 2775 或 2525。

〔解〕 $abcd\times2=dcba$ 此題以 $d\times2$ 之末位爲a。故 $d>a$。

$\therefore\ 2d=a+8$。又 $a\times2=d$, 或 $a\times2=d-1$。

$2a=d$。則從 $2d=a+8$。得 $3a=8$ 爲分數不合理。故 $2a=d-1$。

從 $2d=a+8$。得 $a=2,\ d=5$。由是 $(8^3a+8^2b+8c+d)\times2=8^3d+8^2c+8b+a$。

$\therefore\ 341a+40b=170d+16c$。 $\therefore\ 341\times2+40b=170\times5+16c$。

即 $2c=5b-21$。　∴ b爲大於3之奇數。　∴ $b=5$ 或 7。

由是 $c=2$ 或 7。　∴ 所求之數爲2775或2525。

17. 有三位之數其數字成A. P。以其數字之和除之。則得商15。又加396。則爲其轉位數。求其原數。　答 135。

〔解〕 $\dfrac{100a+10(a+d)+(a+2d)}{a+(a+d)+(a+2d)}=15$。　∴ $d=2a$。

又 $100a+10(a+d)+(a+2d)+396=100(a+2d)+10(a+d)+a$。

∴ $d=2$。由是 $a=1$。　∴ 原數爲135。

18. 13ab45c能以792整除求數字a, b, c。　答 $a=8, b=0, c=6$。

〔解〕 $792=8\times9\times11$。故原數爲8之倍數。故45c爲8之倍數。

∴ $c=6$，又原數爲9之倍數。故 $1+3+a+b+4+5+6$。

即 $a+b+19$ 爲9之倍數。即 $a+b+1$ 爲9之倍數。

∴ $a+b=8$ 或 $a+b=17$。..(1)

又原數爲11之倍數。故 $1+a+4+6\sim(3+b+5)$。

即 $a+3\sim b$。爲11之倍數。　∴ $a-b=8$ 或 $b-a=3$............(2)

於(1)(2)從 $a+b=8$，$a-b=8$。則 $a=8$，$b=0$。

又從 $a+b=8$，$b-a=3$。則 $b=5\frac{1}{2}$。爲不合理。

又從 $a+b=17$，$a-b=8$。則 $a=12\frac{1}{2}$。亦不合理。

又從 $a+b=17$，$b-a=3$。則 $b=10$。亦不合理。

由是 $a=8$，$b=0$，$c=6$ 得答。

19. 某底數所記之數爲1155。能以同底數所表之12整除之。求其底數。　答 7。

〔解〕 $r^3+r^2+r5+5=(r+2)(r^2-r+7)-9$。故9不能不爲 $r+2$ 之倍數。

∴ $r+2=9$。　∴ $r=7$。

20. 有通常記數法所表之四位數。以9乘之。則爲轉位數。求其原數如何。　答 1089。

〔解〕 $(1000a+100b+10c+d)\times9=1000d+100c+10b+a$。

故 $a=1$，$d=9$。則上之方程式爲 $c=89b+8$。故 $b+0$，$c=8$。

21. r進法之數 $(r^2-1)(r^n-1)$。以 $r-1$ 除之。其商爲轉位數。試證之。

〔證〕 $(r^2-1)(r^n-1)=r^{n+2}-r^n-r^2+1$

$$=r^{n+1}(r-1)+r^n(r-2)+r^{n-1}(r-1)+\cdots\cdots+r^2(r-1)+1$$

$=(r-1)(r-2)(r-1\cdots\cdots(r-1)01$。

又 $(r^2-1)(r^n-1)\div(r-1)=r^{n+1}+r^n-r-1$

$=r^{n+1}+r^{n-1}(r-1)+r^{n-2}(r-1)+\cdots+r(r-2)+(r-1)$

$=10(r-1)(r-1)\cdots\cdots(r-2)(r-1)$，卽原數之轉位數。

22. 依任意之記數法，得 $\frac{1}{(r-1)^2}=.\dot{0}123\cdots\cdots(r-3)(\dot{r-1})$ 式。除 $(r-2)$ 之數字外。爲自 0 至 $r-1$ 連續循環數。試證之。

例如 $\frac{1}{(10-1)^2}=\frac{1}{81}=.\dot{0}1234567\dot{9}$。

〔證〕 $\frac{1}{(r-1)^2}=1\div(r^2-2r+1)=\frac{1}{r^2}+\frac{2}{r^3}+\cdots\cdots+\frac{r-2}{r^{r-1}}+\frac{r-1}{r^r}+\frac{r}{r^{r+1}}$

$+\frac{r+1}{r^{r+2}}+\cdots\cdots=\frac{1}{r^2}+\frac{2}{r^3}+\frac{3}{r^4}+\cdots\cdots+\frac{r-3}{r^{r-2}}+\frac{r-2}{r^{r-1}}+\frac{r-1}{r^r}+\frac{r}{r^{r+1}}+\frac{r+1}{r^{r+2}}\cdots\cdots$

然 $\frac{r-3}{r^{r-2}}+\frac{r-2}{r^{r-1}}+\frac{r-1}{r^r}+\frac{r}{r^{r+1}}+\frac{r+1}{r^{r+2}}+\frac{r+2}{r^{r+3}}\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=\frac{r-3}{r^{r-2}}+\frac{r-2}{r^{r-1}}+\frac{1}{r^{r-1}}-\frac{1}{r^r}+\frac{1}{r^r}+\frac{1}{r^{r+1}}+\frac{1}{r^{r+2}}+\frac{1}{r^{r+2}}+\frac{2}{r^{r+3}}+\cdots\cdots\cdots$

$=\frac{r-3}{r^{r-2}}+\frac{r-1}{r^{r-1}}+\frac{1}{r^{r+1}}+\frac{2}{r^{r+2}}+\frac{3}{r^{r+3}}+\cdots\cdots\cdots$ 卽循環末位爲 $\frac{r-1}{r^{r-1}}$。以下續得相同之數字。

由是 $\frac{1}{(r-1)^2}=.\dot{0}123\cdots\cdots\cdots(r-3)(\dot{r-1})$。

23. 有六位之數。以 3 倍之，則左端之數字移於右端，試證其右端之數字。必爲 1 或 2。又求其兩原數若何。　答 142857 與 285714。

〔證及解〕右端之數字爲 a，其次之諸位數爲 x。則 $N=10^5a+x$ 及 $3N=10x+a$。由此消去 x。

則 $N=142857a$ 而 $3N=142857a\times3$。不能不爲六位數。

$\therefore$ $a=1$，或 $a=2$。設 $a=1$。則 $N=142857$，$a=2$。則 $N=285714$。

24. 有三位之數，其最後兩數字相等。今以某數乘之，則其積亦爲三位數。其最初兩數字。等於原數之最後二位數字。而末位卽其乘數，試求原數。　答 166，199。

〔解〕 $(100a+10b+b)\times c=100b+10b+c$。卽 $11b(10-c)=c(100a-1)$。

從此方程式$c(100a-1)$爲11之倍數。而c小於10。

故$100a-1=11$之倍數$=99$。 $\therefore\ a=1$。

由是得方程式如下。

$11b(10-c)=99c$。 即 $10b-bc-9c+90=90$。

即 $(10-c)(b+9)=18\times5$或15×6。 $\therefore\ 10-c=5$或6。

$\therefore\ c=5$或4。又$b+9=18$或15。 $\therefore\ b=9$或6。

第拾玖編

排列及組合

240. 定義 從 n 個相異之物內。每次取 r 個。依其次序列成種種之式。謂之由 n 物取 r 個之排列法(Permutations)。

依上之定義。每兩列中。若非同物或物同而所列之次序不同。則兩排列相異。

例如有 a, b, c, d 四物。每次取其二個。則其排列如下。

ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc。

又每次取其三個。則其排列如下。

abc, abd, acb, acd, adb, adc bac, bad, bca, bcd, bda, bdc, cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca, dcb。

若於 n 物每次取 r 個。則其排列之種數。以 ${}_nP_r$ 表之。故上之二例爲 ${}_4P_2=12$, ${}_4P_3=24$。

241. 問題 於相異之 n 物內。求其每次取 r 個之排列數。

相異之 n 物爲 $a, b, c, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

從 n 物內每次取一個。則其排列之數。依前之記法得 ${}_nP_1$。

即 ${}_nP_1=n$ 爲已明瞭。

今於 n 字內。取 r 個之排列法。若計其特別一字所有之排列數。必與本字外所除 $n-1$ 字內。取 $r-1$ 個之排列數相等。而在 n 字內。每字之排列數可依同樣計之。

故 $${}_nP_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1}。$$

設 n 爲 $n-1$, r 爲 $r-1$。則 ${}_{n-1}P_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}P_{r-2}$。

設 n 爲 $n-2$, r 爲 $r-2$。則 ${}_{n-2}P_{r-2}=(n-2)\times{}_{n-3}P_{r-3}$。

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

次第得 $${}_{n-r+2}P_{r-r+2}=(n-r+2)\times{}_{n-r+1}P_{r-r+1}。$$
$${}_{n-r+1}P_1=(n-r+1)。$$

以上各式將其兩邊連乘。而去其公有之因子。則得

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)。$$

若n物每次悉取之。則r=n。故

$$_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-n+1),$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1。$$

定義 $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1$.之積。可以記號$\underline{|n}$記之。讀爲n之逐乘數(Factorial)。

例如$\underline{|4} = 4.3.2.1$。

又$n, n-1, n-2, \cdots\cdots n-r+1$。其r個數量之連乘積，以$n_r$記之。

例如$n_3 = n(n-1)(n-2)$。 $\therefore\ _nP_n = \underline{|n},\ _nP_r = n_r$。

242. 問題 n物中。含若干同類之物。求其每次悉取之排列數。

設n物內有p個a，q個b，r個c，…………等。令每次悉取之排列數爲P。今若於每列中。變其p個a字。爲p個相異之字。則依前例p個a字。每次取P個之排列，當有$\underline{|p}$種。

故全排列數當爲$P\times\underline{|p}$。

例如4物爲a, a, a, b。每次悉取之排列僅爲aaab, aaba, abaa, baaa。然3個a變爲相異之字。如a', a'', a'''則aaab一列，得$\underline{|3} = 3.2.1 = 6$。如下。

$a'a''a'''b$, $a'a'''a''b$, $a''a'a'''b$, $a''a'''a'b$, $a'''a'a''b$, $a'''a''a'b$。而aaba。亦得$\underline{|3} = 3.2.1 = 6$。如下。

$a'a''ba'''$, $a'a'''ba''$, $a''a'ba'''$, $a''a'''ba'$, $a'''a'ba''$, $a'''a''ba'$。其他abaa, baaa亦得$\underline{|3}$。

若再於$P\times\underline{|p}$個排列式中。令q個b字。變爲相異之字。則依前法而得全排列數。爲$P\times\underline{|p}$之q倍。即$P\times\underline{|p}\times\underline{|q}$。

又由同理r個c字以下。皆變爲相異之字。則得

$$P\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}\times\cdots\cdots$$

上得之結果。則以n物皆變爲相異者。但依前章之理。相異n物悉取之排列數。爲$_nP_n = \underline{|n}$ $\therefore\ P\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}\times\cdots\cdots = \underline{|n}$。

$$\therefore\ P = \frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}\cdots\cdots}。$$

例 題

1. 求 ${}_6P_3$, ${}_5P_4$ 及 ${}_7P_7$。 答 120, 120, 5040。

〔解〕 ${}_6P_3=6.5.4=120$ ${}_5P_4=5\times4\times3\times2=120$

${}_7P_7=\underline{|7}=7.6.5.4.3.2.1=5040$。

2. 求證 ${}_{10}P_4={}_7P_7$。

〔證〕 ${}_{10}P_4=10.9.8.7=2.5.3.3.2.4.7=7.6.5.4.3.2.1=\underline{|7}={}_7P_7$。

3. ${}_nP_5=12\times{}_nP_3$，求 n 之值。 答 7。

〔解〕 $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)=12n(n-1)(n-2)$。

$\therefore$ $(n-3)(n-4)=12$。 即 $n(n-7)=0$。 $\therefore$ $n=7$。

4. ${}_{2n}P_3=100\times{}_nP_2$，求 n 之值。 答 13。

〔解〕 $2n(2n-1)(2n-2)=100n(n-1)$。兩邊以 $4n(n-1)$ 除之。

則 $2n-1=25$。 $\therefore$ $n=13$。

5. ${}_{2n}P_3=2\times{}_nP_4$，求 n 之值。 答 8。

6. 求 Acacia, Hannah, Success 及 Mississippi 各文字之排列數。
答 60,90,420,34650。

〔解〕試舉一以例其餘。如第三之Success。其 s 字有 3。c 字有 2。u 及 e 各 1。故 n=7。

$$\therefore\ \frac{\underline{|7}}{\underline{|3}\,\underline{|2}}=\frac{7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1}=420。$$

7. 8人圍一圓桌而坐。其席次之變化若何。又有相異之球8個。以絲貫之作成輪形。則其變化若何。 答 $\underline{|7}$, $\frac{1}{2}\underline{|7}$。

〔解〕惟為圓桌。故abcdefgh 與 bcdefgha。其變化相同。依此則省去順移法。故可除去一人不動。其餘 7 人。作 ${}_7P_7$ 之排列。故所求之變化為 $\underline{|7}$。

又球之變化與人異。無上下表裏之別。故 abc 之現狀。與 cba 無異。其正反相對之各列全同。故如前法之二分之一為 $\frac{1}{2}\underline{|7}$。

8. 有四女與四男。圍坐一圓桌。男與男。女與女。各不相隣。問其坐法有幾種. 答 144。

〔解〕4女席次之變化為 $\underline{|3}=6$。又此變化每種有 4 男之變化為 $\underline{|4}=24$。由是總變化為 $6\times24=144$。

9. 相異之n物。依每次悉取之排列。其內有特別之r個物。必依一定之次序。則其排列數爲$\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}}$試證之。

〔證〕 r物有一定之次序而不變。則r個之物。當視爲同物。而所求之數爲P。若r個物爲每次取r之排列。則依242章$P\times\underline{|r}=\underline{|n}$。

$$\therefore\quad P=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}}。$$

10. 排列書籍n册。其內之特别2册不相降接。則其變化爲$(n-2)\underline{|n-1}$。試證之。

〔證〕 特別2册爲a, b。而a之外其餘n−1册悉取之排列數爲$\underline{|n-1}$。此各列內於b之前後可接a。如ab或ba。則有$2\underline{|n-1}$種。故所求之數爲 $\underline{|n}-2\underline{|n-1}=\underline{|n-1}(n-2)$。

11. n物每次取r個。若所取可爲同物。則其列數若何。 答 n^r。

〔解〕 例如a, b, c每次取二個。則得

aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc。

先於n物每次取1。則其數爲n。於此每1個各以n分配之。則爲$n\times n$。若又於每1個。各以n分配之。則爲$n\times n\times n$。

由是所求之列數爲$n\times n\times n$..............r因子$=n^r$。

組合法

243. 定義 從相異之n物內。每次選出r個。不計其排列之次序若何。但求取出之物不全相同。則謂之由n物取r個之組合法(Combinations)。

例如排列法中之abc與acb。以其次序之不同。而作爲二列。但此二列其物全同。故在組合法中。若取abc。則不復取acb也。

故由a, b, c, d四字內。每次取其二個。則其組合爲

ab, ac, ad, bc, bd, cd。

由相異之n物內每次取r個。則其組合爲

${}_nC_r$ 如 ${}_4C_2=6$ 是也。

244. 問題 求於相異之n物。每次取r個之組合數。

相異之n物以a, b, c…………至n字顯之。而在n字取r個之組合中。若計其特別一字之組數。等於其餘之$n-1$字內取$r-1$個之組數。各文字可同樣計之。即組合內每字有${}_{n-1}C_{r-1}$個。

故由n字內每次取r個。其組合之總字數爲$n\times{}_{n-1}C_{r-1}$。

又各組中之字數爲r。故文字之總數又爲$r\times{}_nC_r$。

由是 $r\times{}_nC_r=n\times{}_{n-1}C_{r-1}$。

設n爲$n-1$。r爲$r-1$。則

$$(r-1)\times{}_{n-1}C_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}C_{r-2}。$$

設n爲$n-2$ r爲$r-2$。則 $(r-2)\times{}_{n-2}C_{r-2}=(n-2)\times{}_{n-3}C_{r-3}$。

……………………………

次第得 $2\times{}_{n-r+2}C_2=(n-r+2)\times{}_{n-r+1}C_1$。

$${}_{n-r+1}C_1=n-r+1$$

以此各式相乘。而約其公因子。則得

$$\underline{|r}\,{}_nC_r=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)。$$

$$\therefore\ {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}=\frac{n_r}{\underline{|r}}\cdots\cdots(1)。$$

以$\underline{|n-r}$乘分母子。則

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)\underline{|n-r}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots\cdots2.1}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

$$=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)。$$

〔別證〕由n物內。每次取r個之組合爲${}_nC_r$。而此各組。若取其r字之排列。則得$\underline{|r}$組成${}_nP_r$。 $\therefore\ {}_nC_r\times\underline{|r}={}_nP_r$。

由是 ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{\underline{|r}}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}$。

〔註〕於公式(2)設$r=n$。則

$${}_nC_n=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|n-n}}=\frac{1}{\underline{|0}}.$$

而 ${}_nC_n=1$。 ∴ $1=\dfrac{1}{\lfloor\underline{0}}$ 即 $\lfloor\underline{0}=1$。

又$\lfloor\underline{0}=1$可用他法求得。

即$\lfloor\underline{n}=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3.2.1=n\lfloor\underline{n-1}$。若$n=1$。則$\lfloor\underline{1}=1.\lfloor\underline{1-1}$。

∴ $\lfloor\underline{0}=1$。

245.定理 由相異之n物內。每次取r個之組合數。恆等於每次取n−r個之組合數。

此題可直由事實上審得之。即從n物內選取r個。其餘爲n−r個。故選r個之組數。與選n−r個之組數同。

此證又依前章公式(2)可得。

由n物取r個之組合爲${}_nC_r=\dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\lfloor\underline{n-r}}$。而由n物取n−r個之組合。則r可以n−r代之。故

$$ {}_nC_{n-r}=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}\,\lfloor\underline{n-(n-r)}}=\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{n-r}\,\lfloor\underline{r}}。 $$

$$ \therefore\quad {}_nC_r={}_nC_{n-r}。 $$

第一證雖不用244章之公式(1)與(2)。而自能合理。

例題

1. 求${}_{10}C_4$, ${}_{12}C_9$及${}_{20}C_{17}$。 答 210, 220, 1140。

〔解〕 ${}_{20}C_{17}={}_{20}C_{20-17}={}_{20}C_3=\dfrac{20.19.18}{1.2.3}=1140$。

2. 設${}_nC_6={}_nC_{12}$。求${}_nC_{16}$。 答 153。

〔解〕 ${}_nC_6={}_nC_{n-6}$。即 $={}_nC_{12}$。 ∴ $n-6=12$。 ∴ $n=18$。

由是 ${}_{18}C_{16}={}_{18}C_2=\dfrac{18.17}{1.2}=153$。

3. 設${}_nC_5={}_nC_6$。求n之値。 答 11。

〔解〕 ${}_nC_5={}_nC_{n-5}={}_nC_6$。 ∴ $n-5=6$。 ∴ $n=11$。

4. $3\times{}_nC_4=5\times{}_{n-1}C_5$。求n之值。 答 10。

〔解〕 $3\times\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor\underline{4}}=5\times\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{\lfloor\underline{5}}$。

即 $3n=(n-4)(n-5)$。 即 $n^2-12n+20=0$。 即 $(n-10)(n-2)=0$。

∴ $n=10$ 或 2。

但 ${}_{n-1}C_5$ 爲從 $n-1$ 物內取五個。故 $n-1$ 不小於 5。

即 n 不小於 6。 ∴ $n=10$。

5. ${}_nC_4=210$。求 n 之值。 答 10。

〔解〕 $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\lfloor\underline{4}}=210$。

即 $(n^2-3n)\{(n^2-3n)+2\}=70\times72$。

∴ $n^2-3n=70$。 ∴ $n=10$。

6. 設 ${}_nP_r=272$ 及 ${}_nC_r=136$。求 n 及 r 之值。 答 $n=17,\ r=2$。

〔解〕 ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{\lfloor\underline{r}}$。 即 $136=\dfrac{272}{\lfloor\underline{r}}$。 ∴ $\lfloor\underline{r}=2=1.2=\lfloor\underline{2}$。 ∴ $r=2$。

由是 ${}^nC_2=136$。 即 $\dfrac{n(n-1)}{1.2}=136$。 ∴ $n=17$。

7. 設 ${}_nC_{r-1}:{}_nC_r:{}_nC_{r+1}=2:3:4$。求 n 及 r。 答 $n=34;\ r=14$。

〔解〕 $\dfrac{{}_nC_{r-1}}{2}=\dfrac{{}_nC_r}{3}=\dfrac{{}_nC_{r+1}}{4}$。 但 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\dfrac{n-2}{r}$。

又 ${}^nC_{r+1}={}_nC_r\times\dfrac{n-3}{r+1}$。

∴ 從 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{n-2}{r}$。 及 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{n-3}{r+1}$。 得 $n=34,\ r=14$。

8. 於子音6字及母音6字之內。取子音3字。母音2字。拼成文字。問得字數若干。 答 14400。

〔解〕 從子音6字選3字。則其種數爲 ${}_6C_3$。而所選子音之種數。每一種可配以從母音4字選2字之種數 ${}_4C_2$。故共選之數。爲 ${}_6C_3\times{}_4C_2=\dfrac{6.5.4}{1.2.3}\times\dfrac{4.3}{1.2}=120$。而此各組內。所含之5字。再依排列法變其次序。則得 $\lfloor\underline{5}=5\times4\times3\times2\times1=120$。

由是總字數爲 $120\times120=14400$。

9. 有五圓,壹圓,五角,壹角,五分,壹分,等貨幣各一個。問其中能得相異之價若干種。 答 63。

〔解〕 六種之貨幣。求每次取6, 5, 4, 3, 2, 1之組數。即得所求之數爲 ${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6=63$。

10. 有相異之2n物。依每次取n個之組合法。其含特別一物之數。等於其不含特別一物之數。試證之。

〔證〕 ${}_{2n}C_n=\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor 2n-n}=\dfrac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$。

又除去特別之一物。其餘 $2n-1$ 物。取 $n-1$ 之組合。爲

$${}_{2n-1}C_{n-1}=\frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1\lfloor 2n-1-(n-1)}=\frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1\lfloor n}\times\frac{2n}{2n}=\frac{\lfloor 2n}{2(\lfloor n)^2},$$

即適得全數之半。故如題云云。

11. 相異之4n物。依每次取n個之組合法。其含特別一物之數。等於不含此物數之三分之一。試證之。

〔證〕 ${}_{4n}C_n=\dfrac{\lfloor 4n}{\lfloor n\lfloor 3n}$。而含特別一物之數爲 ${}_{4n-1}C_{n-1}$。

即 $$\frac{\lfloor 4n-1}{\lfloor n-1\lfloor 4n-1-(n-1)}=\frac{\lfloor 4n-1}{\lfloor n-1\lfloor 3n}\times\frac{4n}{4n}=\frac{\lfloor 4n}{4\lfloor n\lfloor 3n}=\frac{1}{4}{}_{4n}C_n,$$

又不含此一物之數。爲 ${}_{4n}C_n-{}_{4n-1}C_{n-1}=\dfrac{3}{4}{}_{4n}C_n$。

12. 有3男4女。分於兩側以男女各1人爲一組打毬。試求其組數。 答 36。

〔解〕 各側1男。故兩側須有2男。因而從3男內取2男之排列數。爲 ${}_3P_2=6$。此各列又各於4女內取2女之組數。爲 ${}_4C_2=6$。

故 ${}_3P_2\times{}_4C_2=6\times6=36$。

13. 以1, 2, 3, 4, 5五個數字。作大於23000之數。其數共有幾種。 答 90。

〔解〕 此五數字所成之五位數。爲 ${}_5P_5=120$ 種。此中以1爲首位之數。爲 ${}_4P_4=24$。又21爲首位之數。爲 ${}_3P_2=6$ 種。皆小於23000。故所求種數爲 $120-24-6=90$。

14. 某選舉會。於候補者四人之內選舉三人。而選舉者每一人投票所書之姓名。不得過三人。問投票之法有幾種。 答 14。

〔解〕 從4人之內選1人。其數爲 ${}_4C_1$。選2人。其數爲 ${}_4C_2$。選3人。其數爲 ${}_4C_3$。

由是總數 $=4+6+4=14$。

246. 組合之最大值 已知n之值。求${}_nC_r$之最大值。

依244章。${}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}$。

由此關係式$n-r+1\gtreqless r$。從而${}_nC_r\gtreqless{}_nC_{r-1}$。

但從$n-r+1\gtreqless r$。則$n+1\gtreqless 2r$。 即 $\frac{1}{2}(n+1)\gtreqless r$。

故 $r\lesseqgtr\frac{1}{2}(n+1)$。從而${}_nC_r\gtreqless{}_nC_{r-1}$。

故 r若小於$\frac{1}{2}(n+1)$。則由n物取r個之組合。必增加。

故n爲偶數。則${}_nC_r$以$r=\frac{1}{2}n$時爲最大。

又 n爲奇數。則${}_nC_r$以$r=\frac{1}{2}(n+1)$。或 $r=\frac{1}{2}(n+1)-1=\frac{1}{2}(n-1)$ 爲最大。

例如$n=10$。則$r=5$時${}_nC_r$之值爲最大。又$n=11$。則$r=5$或$=6$時${}_nC_r$之值爲最大。

247. 定理 證${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$。

於$n+1$物。每次取r個之組合數。內以其含特別之一物者。與不含特別之一物者。分爲二羣。而含特別一物之組數。必爲n物每次取$r-1$個之組數。即${}_nC_{r-1}$。又不含特別一物之組數。必爲n物每次取r個之組數。即${}_nC_r$。

$$\therefore\quad {}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r。$$

〔別證〕由244章。

$${}_nC_r+{}_nC_{r-1}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r+1}}=\frac{\underline{|n}\,(n-r+1+r)}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}}$$

$$=\frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\,\underline{|n+1-r}}={}_{n+1}C_r$$

〔例〕證${}_{n+1}P_r={}_nP_r+r{}_nP_{r-1}$。

於$n+1$物。每次取r個之排列數內。其不含特別一字者爲${}_nP_r$。而含有特別一字者爲${}_nP_{r-1}$。然此一字。在各列r個字之首尾或中間。即有r種。故總計含有此特別字者。爲$r\,{}_nP_{r-1}$。

$$\therefore \qquad {}_{n+1}P_r = {}_nP_r + r\,{}_nP_{r-1}。$$

248. 定理 x, y爲兩正整數。若$x+y=m$。則

$${}_mC_n = {}_xC_n + {}_xC_{n-1}\cdot{}_yC_1 + {}_xC_{n-2}\cdot{}_yC_2 + \cdots\cdots + {}_xC_1\cdot{}_yC_{n-1} + {}_yC_n。$$

設m文字爲$a, b, c\cdots\cdots p, q\cdots\cdots$分之爲$x$及$y$二羣。

若從x羣內全取n個爲${}_xC_n$。又從x羣內取$n-1$個爲${}_xC_{n-1}$。而各附以從y羣取1之${}_yC_1$。則得${}_xC_{n-1}\,{}_yC_1$。又從x羣內取$n-2$個。而各附以從y羣取2之${}_yC_2$。則得${}_xC_{n-2}\cdot{}_yC_2$逐次如此。至末得從y羣取n。即${}_yC_n$。

依此所得之全數與從$x+y$(即m)。取n個之${}_mC_n$相等。已極明瞭。

由是${}_{x+y}C_n = {}_xC_n + {}_xC_{n-1}\cdot{}_yC_1 + {}_xC_{n-2}\cdot{}_yC_2 + \cdots\cdots + {}_yC_n$。

x或y恆大於n。若$r>n$則。${}_nC_r=0$。

249. Vandermond 氏之定理 x, y, n爲正整數。若$x+y$大於n。由244章${}_nC_r = \frac{n_r}{\underline{|r}}$。則前章之定理。爲

$$\frac{(x+y)_n}{\underline{|n}} = \frac{x_n}{\underline{|n}} + \frac{x_{n-1}}{\underline{|n-1}}\frac{y_1}{\underline{|1}} + \frac{x_{n-2}}{\underline{|n-2}}\frac{y_2}{\underline{|2}} + \cdots\cdots + \frac{x_{n-r}}{\underline{|n-r}}\frac{y_r}{\underline{|r}} + \cdots\cdots + \frac{y_n}{\underline{|n}}。$$

以$\underline{|n}$乘之。則

$$(x+y)_n = x_n + \frac{n}{\underline{|1}}x_{n-1}y_1 + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x_{n-2}y_2 + \cdots\cdots + \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}x_{r-r}y_r + \cdots + y_n,$$

上之方程式爲x及y逐乘數之次式。而y若爲大於n之特別正整數。則對於x之任意正整數。皆能合理。而此x之值。恆多於x種。由是依91章之定理。x即非正整數。而爲任意之值。亦能合理。由同法。x之值若大於n。則y之多於n種值。其能合理亦同。是謂Vandermond 氏之定理。即

n爲任意之正整數。則x及y無論爲如何之值。恆得下之相等式。

$$(x+y)_n=x_n+\frac{n}{1}x_{n-1}y_1+\frac{n(n-1)}{1.2}x_{n-2}y_2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}x_{n-r}y_r+\cdots\cdots+y_n。$$

〔例〕設 $n=3$，則 $(x+y)_3=x_3+3x_2y_1+3x_1y_2+y_3$。

即 $(x+y)(x+y-1)(x+y-2)=x(x-1)(x-2)+3x(x-1)y$

$$+3xy(y-1)+y(y-1)(y-2)。$$

等　次　積

250. 等次積由 n 字內。每次取 r 個之積。若可複用同字。則其相異之積之數爲 ${}_nH_r$。

例如於 a, b, c 三字。每次取二個。則其所成積爲 $a^2, b^2, c^2, ab, ac, bc$。即 ${}_3H_2=6$。

此中之 ab, ac, bc 爲前所示之組合數。

而等次積。則又計其餘之 aa 即 a^2，bb 即 b^2，cc 即 c^2。

問題 求 ${}_nH_r$。

由 n 字每次取 r 個之積中。其一切文字之數。爲 ${}_nH_r\times r$。而此中特別一字(例如 a)之數。則爲 ${}_nH_r\times r\div n$。

又此含 a 之各積。以 a 除之。即除去一 a。其所得之商。爲 $r-1$ 次。即由 n 字取 $r-1$ 之數之積。爲 ${}_nH_{r-1}$。此中含 a 字之數。爲

${}_nH_{r-1}\times(r-1)\div n$。而以 a 除得之數。即除去 a 之共數爲 ${}_nH_{r-1}$。

$$\therefore\qquad \frac{r}{n}{}_nH_r=\frac{r-1}{n}\times{}_nH_{r-1}+{}_nH_{r-1}。$$

即 $${}_nH_r=\frac{n+r-1}{r}\times{}_nH_{r-1}。$$

設 r 爲 $r-1$。則 $${}_nH_{r-1}=\frac{n+r-2}{r-1}\times{}_nH_{r-2}。$$

設 r 爲 $r-2$。則 $${}_nH_{r-2}=\frac{n+r-3}{r-2}\times{}_nH_{r-3}。$$

……………………………………………………

逐次得 $${}_nH_2=\frac{n+1}{2}\times{}_nH_1。$$

$${}_nH_1=n。$$

兩邊連乘而去其公因子。則得

$$ {}_nH_r=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots\cdots(n+r-1)}{1.2.3\cdots\cdots\cdots r}={}_{n+r-1}C_r $$(又見293章)。

例題

1. 求a, b, c, d用同字每次取三個之組合數。 答 20。

〔解〕 ${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6.5.4}{1.2.3}=20$。

2. 有a字6, b字6, c字6, d字6。求其每次取六字之組合數。

答 84。

〔解〕 ${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=\frac{9.8.7}{1.2.3}=84$。

3. 求證 ${}_nH_r={}_{n-1}H_r+{}_nH_{r-1}$,

又 ${}_nH_r={}_nH_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-2}H_{r-1}+\cdots\cdots\cdots+{}_1H_{r-1}$,

〔證〕 由247章, ${}_{n+r-2}C_r+{}_{n+r-2}C_{r-1}={}_{n+r-1}C_r$,

卽 ${}_{n-1}H_r+{}_nH_{r-1}={}_nH_r$,

又 ${}_nH_r={}_nH_{r-1}+{}_{n-1}H_r={}_nH_{r-1}+({}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-2}H_r)$

$={}_nH_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-1}+({}_{n-2}H_{r-1}+{}_{n-3}H_r)$

$={}_nH_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-2}H_{r-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$。

4. 求證 ${}_nH_r={}_{n-1}H_r+{}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-2}+\cdots\cdots+{}_{n-1}H_1+1$。

〔證〕 由前例, ${}_nH_r={}_{n-1}H_r+{}_nH_{r-1}={}_{n-1}H_r+({}_{n-1}H_{r-1}+{}_nH_{r-2})$

$={}_{n-1}H_r+{}_{n-1}H_{r-1}+{}_{n-1}H_{r-2}+{}_nH_{r-3}$ 以下同法。

至最後得 ${}_nH_1={}_{n-1}H_1+{}_nH_0={}_{n+1}H_1+1$。 由是合於題意。

251. 雜例 排列及組合法之例。詳於次編二項式之定理。(見292章)。

〔第一例〕 相異之mn物分給n人。每人得m個。其法有幾種。

答 $\lfloor mn/(\lfloor m)^n$。

從mn物內。取m個給第一人。其法爲 ${}_{mn}C_m$,而從此各餘數mn−m內。取m個給第二人。其法爲 ${}_{mn-m}C_m$,而其數變爲 ${}_{mn}C_m\times{}_{mn-m}C_m$。又從此各餘數mn−2m內。取m個給第三人。爲 ${}_{mn-2m}C_m$,以下準此求之。故所求變化之數。爲

$$_{mn}C_m \times {}_{mn-m}C_m \times {}_{mn-2m}C_m \times \cdots\cdots \times {}_{2m}C_m \times {}_mC_m$$

$$=\frac{\lfloor mn}{\lfloor m \lfloor mn-m} \times \frac{\lfloor mn-m}{\lfloor m \lfloor mn-2m} \times \frac{\lfloor mn-2m}{\lfloor m \lfloor mn-3m} \times \cdots\cdots \times \frac{\lfloor 2m}{\lfloor m \lfloor m} \times \frac{\lfloor m}{\lfloor m} = \frac{\lfloor mn}{(\lfloor m)^n}$$

〔第二例〕求證下式。

$$1-{}_nC_1\,{}_nH_1+{}_nC_2\,{}_nH_2-{}_nC_3\,{}_nH_3+\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n\,{}_nH_n=0。$$

因 $${}_nC_r\,{}_nH_r=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} \times \frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}。$$

$$=\frac{n^2(n^2-1^2)\cdots\cdots\{n^2-(r-1)^2\}}{1^2.2^2\cdots\cdots r^2}。$$

由此恆同式以 $r=1, 2, 3\cdots\cdots n$ 遞次代入之得。

$$1-\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2\,2^2}-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2.2^2.3^2}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+(-1)^n\frac{n^2(n^2-1^2)\cdots\{n^2-(n-1)^2\}}{1^2.2^2\cdots\cdots n^2}=0。$$

故最初二項之和 $=-\frac{n^2-1^2}{1^2}$。

最初三項之和 $=+\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2.2^2}$。

最初四項之和 $=-\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{1^2.2^2.3^2}$。

………………………………

由是左邊一切項之和 $=(-1)^n\frac{(n^2-1^2)(n^2-2)\cdots\cdots(n^2-n^2)}{1^2.2^2 3^2\cdots\cdots n^2}$。

〔第三例〕一平面上有 n 直線各不平行。又三線不會於一點。則此 n 直線必分割平面爲 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 部分。

〔證〕n 直線所分平面之部分其數爲 $F(n)$ 則 $n-1$ 直線所分平面之部分。其數爲 $F(n-1)$。

〔$F(n)$ 謂之 n 之函數〕。

因各直線旣不平行。則任一線必各與他直線相交。故 $n-1$ 直線。必截第 n 直線之部分爲 n。而此各分之兩邊。皆在分割平面內。故 n 直線所截平面之部分。較 $n-1$ 直線截得之部分多 n。

$$\therefore \quad F(n)=F(n-1)+n.$$

設 n 爲 $n-1$。則 $F(n-1)=F(n-2)+n-1$。

設 n 爲 $n-2$。則 $F(n-2)=F(n-3)+n-2$。

....

逐次得 $F(2)=F(1)+2$。

$F(1)=\ \ 1+1$。

加之。則 $F(n)=1+(1+2+\cdots\cdots+n)=1+\frac{1}{2}n(n+1)$。

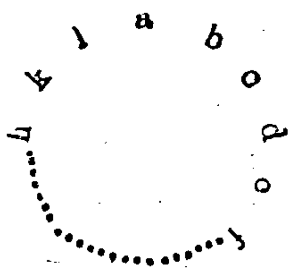
例如六直線爲 $F(6)=1+\frac{1}{2}6(6+1)=22$。即分平面。爲二十二部分。

〔第四例〕有依一定次序連續之物。於此 n 物中。每次取三個。其中每二物。在前之次序不相隣接者。則其組合之數。爲

$$\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)。$$

又此 n 物。若依次連續如環狀(即最初一物與最後一物連續)。則其方法變化之數爲 $\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)$。

(證)先證其第二問。設 n 物爲 $a, b, c, d, e, f, \ldots\ldots\ldots h, k, l$ 依次連續。成環狀如圖。



n 物每次取三個。其內二物在環形上不相連續。則先取 a 與間一個字之 c, ac 之次可附之字有 $n-5$。(即除連續於 a 之 b, l 與連續於 c 之 d。及 a, c 本字外。所餘之字爲 $n-5$)。又取 a 與間一個字之 k, ak 之次。可附之字。亦有 $n-5$。故其方法爲 $2(n-5)$。

次取 a 與任意之字 e。則 a, e 之次。可附之字數爲 $n-6$。(即除連續於 a 之 b, l 與連續於 e 之 d, f。及 $a\,e$ 本字外。所餘之字爲 $n-6$)而附於 ah, af 等字之次亦然。但除與 a 間一個字之 c, k 外。計有 $n-5$ 字。故其方法之數爲 $n-6$ 之 $n-5$ 倍。

由是以 a 爲第一字。每次取三字之全方法。爲

$$2(n-5)+(n-6)(n-5)。即\ (n-4)(n-5)。$$

此外各字之爲第一字者亦然。故共有 n 倍之方法。

即 $n(n-4)(n-5)$。

然在此各方法內所取之字。有重複者。如 ace, aec, cae, cea, eac, eca 等之排列。當以$\underline{|3}$除之。故所求之數爲$\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)$。

於第一開。則 a, l 不相連續。故 al 之次。所附之字有 $n-4$ 個。(即除與 a 連續之 b。與 l 連續之 k。及 a, l 本字外。所餘之字爲 $n-4$)。即較第二開。增 $n-4$。

由是所求之數爲$\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)+(n-4)$。即$\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)$。

〔第五例〕有記名之信筒 n 個。以書信 n 通投入之。求其全行錯誤之度數。　　答 $\underline{|n}\left\{\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{\underline{|n}}\right\}$。

〔解〕n 通之書信爲 $a, b, c, \cdots\cdots\cdots$ 而與之相當之信筒爲 $a', b', c', \cdots\cdots\cdots$ $F(n)$ 爲所求全行錯誤之度數。

設誤在 a。則 a 必入於 $b', c', \cdots\cdots\cdots$ 等 $n-1$ 信筒內。先設 a 誤入於 k' 內。若 k 亦誤入於 a'。則此時他信悉行錯誤之數。爲 $F(n-2)$。又 a 誤入於 k'。而 k' 不誤入於 a'。其餘 b 亦不入於 b'。c 亦不入於 c'。如此一切之錯誤。爲 $F(n-1)$。故 a 入於 k' 共有之誤法。爲 $F(n-1)+F(n-2)$。惟 a 可任意誤入 $b'c'\cdots\cdots\cdots\cdots$ 等 $n-1$ 信筒。其誤數亦相同。

由是　$F(n)=(n-1)\{F(n-1)+F(n-2)\}$。

$\therefore\ F(n)-nF(n-1)=-\{F(n-1)-(n-1)F(n-2)\}$。

依同理 $F(n-1)-(n-1)F(n-2)=-\{F(n-2)-(n-2)F(n-3)\}$。

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(3)-3F(2)=-\{F(2)-2F(1)\}。$$

但一書信一信筒。則無錯誤。故 $F(1)=0$。又二書信二信筒。則誤一次。故 $F(2)=1$。

由是　$F(3)-3F(2)=-\{1-2\times0\}=-1=(-1)^3$。

$\therefore\quad F(4)-4F(3)=-\{F(3)-3F(2)\}=-\{(-1)^3\}=(-1)^4$。

依同理推之　$F(n)-nF(n-1)=(-1)^n$。

由是　$$\frac{F(n)}{\underline{|n}}-\frac{F(n-1)}{\underline{|n-1}}=\frac{(-1)^n}{\underline{|n}}。$$

同法 $$\frac{F(n-1)}{\lfloor n-1}-\frac{F(n-2)}{\lfloor n-2}=\frac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n-1}。$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{F(3)}{\lfloor 3}-\frac{F(2)}{\lfloor 2}=\frac{(-1)^{3}}{\lfloor 3}。$$

$$\frac{F(2)}{\lfloor 2}-\frac{F(1)}{\lfloor 1}=\frac{(-1)^{2}}{\lfloor 2}。$$

上式之各兩邊相加。則得 $\frac{F(n)}{\lfloor n}=\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n}}{\lfloor n}$。

例題二十三

1. 有相異之物20個。分給5人。各得4個。求其分法有幾種。

〔解〕由251章第一例。得 $\frac{\lfloor 20}{(\lfloor 4)^5}$。即答。

2. 11人共乘一艇。用楫8枝。其內5人撵左舷。4人撵右舷。其餘2人。可左右移動。則其撵法之變化如何。 答185

〔解〕餘2人爲a, b。a, b不加於左邊。則左邊之撵法爲 ${}_5C_4$。而加於右邊。則爲 ${}_6C_4$。

$\therefore\ {}_5C_4\times{}_6C_4=5\times15=75$。若a在左邊用去一楫。則左邊之撵法爲 ${}_5C_3$。而b加入於右邊。右邊之撵法爲 ${}_5C_4$。即 ${}_5C_3\times{}_5C_4=10\times5=50$。又b在左邊用去一楫。亦得50。若a, b, 同在左邊各撵一楫。則得 $C_2\times{}_4C_4=10\times1=10$。 $\therefore$ 答 $=75+50+50+10$。

3. 12人爲選舉者。今於候補者3人之內選舉1名。其法有幾種。又候補者得等數投票之方法若何。 答 3^{12}, $\lfloor 12/(\lfloor 4)^3$。

〔解〕各選舉人於3人之內選舉一名之方法有3。故第一第二選舉人之方法爲 3^2。此各合於第三選舉人之3方法。其變化爲 3^3。以下準此。故12人選舉之方法爲 3^{12}。又候補者3人等分12枚之投票。即1名得 $12\div3=4$。故與1題同法。得 $\lfloor 12/(\lfloor 4)^3$。

4. ${}_{4n}C_{2n}:{}_{2n}C_n=1.3.5\ldots\ldots(4n-1):\{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\}^2$。

〔證〕 ${}_{4n}C_{2n}=\frac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n\lfloor 2n}$ 及 ${}_{2n}C_n=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}$。

但 $\underline{|4n}=1.2.3.4\ldots\ldots(4n-2)(4n-1)4n$

$$=\{1.3.5\ldots\ldots(4n-1)\}2^{2n}\{1.2.3\ldots\ldots(2n-1)2n\}$$

$$=\{1.3.5\ldots\ldots(4n-1)\}2^{2n}\underline{|2n}。$$

同法 $\underline{|2n}=\{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\}2^{n}\underline{|n}$。

$$\therefore\quad \frac{{}_{4n}C_{2n}}{{}_{2n}C_{n}}=\frac{\underline{|4n}(\underline{|n})^2}{(\underline{|2n})^2\underline{|2n}}=\frac{\{1.3.5\ldots\ldots(4n-1)\}2^{2n}\underline{|2n}(\underline{|n})^2}{\{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\}^2 2^{2n}(\underline{|n})^2\underline{|2n}}$$

$$=\frac{1.3.5\ldots\ldots(4n-1)}{\{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\}^2}。$$

5. 用0, 1, 2, 3, 4之五數字作任意之數。而不含同數字可得若干種， 答260。

〔解〕一位數 $=5-1=4$，二位數 $={}_5P_2-4=16$，

三位數 $={}_5P_3-{}_4P_2=48$，四位數 $={}_5P_4-{}_4P_3=96$，

五位數 $={}_5P_5-{}_4P_3=96$。 $\therefore\ 4+16+48+96+96=260$。

但於三位數之 ${}_5P_3$ 內如012, 013等首位爲0。即爲二位數。故此等之數 ${}_4P_2$ 當去之。以下同。

6. n物內取r個之排列。中含特別之p字之數。恆爲 ${}_{n-p}P_{r-p}\times{}_rP_p$ 試證之。

〔證〕$p>r$ 於n物中取含特別之p物之組合。則爲 ${}_{n-p}C_{r-p}$ 此各列取r物之排列 $\underline{|r}$。即得

所求之排列。即 ${}_{n-p}C_{r-p}\times\underline{|r}=\dfrac{\underline{|n-p}}{\underline{|r-p}\,\underline{|n-r}}\times\underline{|r}=\dfrac{\underline{|r}}{\underline{|r-p}}\times\dfrac{\underline{|n-p}}{\underline{|n-r}}$

$=r(r-1)\ldots\ldots(r-p+1)\times(n-p)(n-p-1)\ldots\ldots(n-r+1)={}_rP_p\times{}_{n-p}P_{r-p}$。

7. 平面上有n點。其內無三點同在一直線者。若取此二點，聯爲一直線。則直線之數若干。 答 $\frac{1}{2}n(n-1)$。

〔解〕A, B, C,………爲n點。則直綫AB, AC,………之數爲 ${}_nC_2$。

8. 平面上有n點。除其內m點同在一直線之外。更無三點同在一直線上者。求此各點聯爲直線之數。 答 $\frac{1}{2}n(n-1)-\frac{1}{2}m(m-1)+1$。

〔解〕先求 ${}_nC_2-{}_mC_2$ 再加1即m點連結之一直綫即得。

9. 平面上有n點。除其內m點同在一直線上之外。亦無三點同在一直線上者。求此各三點連結成三角形之數。

〔解〕$_nC_3-{}_mC_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$。

10. 平面上有n直線其內無三線會於一點者，此n直線所成多角形之數爲$\frac{1}{2}\underline{|n-1}$試證之。

〔證〕b, b, c,……之n直線如abc……acb……等所成之n多角形與242章例題7輪置8球同法故爲$\frac{1}{2}\underline{|n-1}$。

11. 平面上有n點。其內各二點連結之直線。皆非平行者，且無三線同會於一點，若將此等直線引長之。其相交之點在原n點之外有幾何。 答$\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$。

〔解〕各二點連結之直線。其數爲$\frac{1}{2}n(n-1)$。見(例題7)諸點之內。通過任意之二點相成之直線。爲連結其餘n−2點直線所可分截，而連結n−2點之直線之數。由例題7得$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$。故此即爲其分截點之數。而他之各直線。亦有此分截點，故總分截點爲$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)\frac{1}{2}n(n-1)$。即$\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$。但二直線會於一點，故上之得數當二分之。即所求之數爲$\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$。

12. 通過三角形之各角點。3m直線。其3m直線無一平行者。求此直線之交點， 答$3m^2$。

〔解〕各m線之一線與他之兩角點之2m線交於2m點。故總交點爲$2m, 3m=6m^2$然a與b交於1點。則a, b兩交點爲1點。而2倍之也，故$6m^2$當以2除之，即$6m^2\div 2=3m^2$。

13. 有一市街如棊盤形。以m條之線分割南北。以n條之線分割東西。其間皆通道路，某人自北西隅行至南東隅，欲取最近距離。則其行路之方法有幾種。 答$\underline{|m+n-2}/\underline{|m-1}\,\underline{|n-1}$。

〔解〕從北西隅行至南東隅，無論取如何之道路，其南北及東西之道路。皆須徑過南北道路。如m−1。東西道路爲n−1。故其行法之種數爲於m+n−2內。每次取m−1或n−1之組合數。

$$\therefore \quad \frac{\underline{|m+n-2}}{\underline{|m-1}\,\underline{|n-1}}。$$

14. 以n多角形之各角點爲角點,作三角形。惟無一邊合於此多角形之邊者。試求三角形之數.(本題與251章第四例全同).

答 $\frac{1}{6}n(n-4)(n-6)$。

15. 有2n人。其每n人圍坐二個圓桌之方法爲$\underline{|2n}/n^2$。試證之,

〔證〕n人從2n人內選出之方法爲${}_{2n}C_n=\frac{\underline{|2n}}{(\underline{|n})^2}$。

又由242章例題7。知n人換座之方法爲$\underline{|n-1}$。而在第二圓桌,其餘之n人換座之方法亦$\underline{|n-1}$。

∴ 所求之數$=\frac{\underline{|2n}}{(\underline{|n})^2}(\underline{|n-1})^2=\frac{\underline{|2n}}{n^2}$。

16. 與平行四邊形之各邊平行。引m直線,由是所成之平行四邊形之數,爲$\frac{1}{4}(m+2)^2(m+1)^2$。

〔證〕ABCD爲平行四邊形。AB,CD兩線與其平行線m,每次取2之組合。卽此等之m+2線爲對邊之平行四邊形。其數${}_{m+2}C_2$而他之二對邊BC,AD及其平行線m。每次取2所成之平行四邊形。亦得${}_{m+2}C_2$。

由是所求之數爲${}_{m+2}C_2\times{}_{m+2}C_2=\frac{(m+2)(m+1)}{\underline{|2}}\times\frac{(m+2)(m+1)}{\underline{|2}}$。

17. p個正符號。與n個負符號,置於一列,惟兩個負符號。不得連接。其列法如何。 答 $\underline{|p+1}/\underline{|n}\,\underline{|p+1-n}$

〔解〕p>n。置p個正符號於一列,則其中間爲p−1。而左右之外側各加1。則爲p+1。此p+1之處。置n個負符號.則其列法之數爲${}_{p+1}C_n=\frac{\underline{|p+1}}{\underline{|n}\,\underline{|p+1-n}}$。

18. 以m物任意置於n+1處,則其方法爲$\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\,\underline{|n}}$。試證之,

〔證〕因m物配置n+1處。並無定數,或m物皆置於一處,或某處置若干個,或置一個,或不置。故求n+1物取m個之等次積卽得,卽${}_{n+1}H_m=\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+m)}{\underline{|m}}\times\frac{\underline{|n}}{\underline{|n}}=\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\,\underline{|n}}$。

19. $2n$物分配n對。(2個為一對)其方法為$\lfloor 2n/2^n\lfloor n$。試證之。

〔證〕 如251章第一例求之。則得

$${}_{2n}C_2\times{}_{2n-2}C_2\times{}_{2n-4}C_2\times\cdots\cdots\times{}_2C_2=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor 2\lfloor 2n-2}\times\frac{\lfloor 2n-2}{\lfloor 2\lfloor 2n-4}\times\cdots\cdots\times\frac{\lfloor 2}{\lfloor 2}。$$

$=\dfrac{\lfloor 2n}{2^n}$然$2n$物為相異之物。則如上例。而本題為同物。故當以取n對之排列$\lfloor n$為列。故得$\lfloor 2n/2^n\div\lfloor n$.

20. mn物分為m羣。各羣為n其方法之數若何。 答 $\dfrac{\lfloor mn}{\lfloor m(\lfloor n)^m}$。

〔解〕 依251章得$\dfrac{\lfloor mn}{(\lfloor n)^m}$。但此例之$mn$為同物。故如前例。亦當以$\lfloor m$除之。

21. 通過球之中心。不同過一直徑之n平面。分球面為n^2-n+2試證之。

〔證〕截球之第n平面。為他之$n-1$截平面之各圓周。截於2點。故第n平面之圓周。由$n-1$平面分為$2(n-1)$部分。而第n平面之圓周。於其兩側分界球面。故其$2(n-1)$部分之各弧。於其兩側可分球面為$2(n-1)$部分。由是若去第n平面。則其餘之$n-1$平面分球之數可減$2(n-1)$。今n平面分球之數為$F(n)$。則

$$F(n)=F(n-1)+2(n-1)。$$

由同理 $$F(n-1)=F(n-2)+2(n-2)。$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(2)=F(1)+2(1)。\qquad 但\ F(1)=2.$$

由加法得 $F(n)=2+2\{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)\}$

$$=2+2\times\tfrac{1}{2}(n-1)(n-1+1)。$$

22. 以$m+n$直線分平面之數為$mn+2n-1$。但此內m直線通過一點。n直線通過他一點而諸直線無一平行者。試證之。

〔證〕m線通過自己之點。交於他之n線。則截為$n+2$部分。故如前例 $F(m,n)=F(m-1,n)+n+2$。

由同理 $F(m-1,n)=F(m-2,n)+n+2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$F(2,n)=F(1,n)+n+2,\qquad F(1,n)=F(0,n)+n+2-1\cdots\cdots\cdots\cdots$(A)

但僅有n線。則分平面爲2n分。 ∴ $F(0, n)=2n$ 又 (A)式爲n線截一線。則比$F(0, n)$多$n+1$。即多$n+2-1$部分。蓋減1者。即不計自己之點也。 ∴ 由加法得$F(m, n)=m(n+2)+2n-1$。

23. 有通過球之中心之$m+n$平面。求分截球面之數。但其內m平面通過一直徑。n平面通過他一直徑。 答 $2(mn+m+n-1)$。

〔解〕 AA'及BB'爲m及n平面通過之直徑。通過AA'之第m平面之圓周。由通過BB'之n平面而分截2n點。故此第m平面加以A, A'二點。共有$2n+2$分點。

此各分點之兩側爲球面之二部分。故若去第m平面。則可去一個$2n+2$部分。即全部分減少$2n+2$。

由是$F(m, n)=F(m-1, n)+2n+2$。

依同理$F(m-1, n)=F(m-2, n)+2n+2$。

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(2, n)=F(1, n)+2n+2,$$

$$F(1, n)=F(0, n)+2n+2-2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

但$F(0, n)=2n$ (A)式。爲通過AA'之一平面爲n平面所截。則祇爲$F(0, n)$增2n。故從$2n+2$減2。

由是$F(m, n)=m(2n+2)+2n-2=2(mn+m+n-1)$。

24. 通過中心之$a+b+c\cdots\cdots$平面分球之部分若何。但a爲第一直徑。b爲第二直徑。c爲第三直徑。以下依次通過第n直徑。

答 $2\sum a+2\sum ab-2(n-1)$。

〔解〕 與前例相同a, b, c……通過之直徑爲AA', BB', CC',……通過AA'之一平面爲$b+c+\cdots\cdots$所截之點爲$2(b+c+\cdots\cdots)$

故 $F(a, b, c\cdots\cdots)=F(a-1, b, c\cdots\cdots)+2(b+c+\cdots\cdots)+2,$

依同理$F(a-1, b, c\cdots\cdots)=F(a-2, b, c,\cdots\cdots)+2(b+c+\cdots\cdots)+2,$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(2, b, c\cdots\cdots)=F(1, b, c\cdots\cdots)+2(b+c+\cdots\cdots)+2,$$

$$F(1, b, c\cdots\cdots)=F(0, b, c\cdots\cdots)+2(b+c+\cdots\cdots),$$

∴ $F(a, b, c\cdots\cdots)=F(b, c\cdots\cdots)+2a(b+c+\cdots\cdots)+2a-2,$

同法 $F(b, c,\cdots\cdots)=F(c,\cdots\cdots)+2b(c+\cdots\cdots)+2b-2,$

逐次如此 ∴ $F(a, b, c\cdots\cdots)=2\sum ab+2\sum a-2(n-1)$。

但 $n-1$ 爲 AA', BB', CC',……之數,

25. n 平面分空間爲 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 部分。但在 n 面之內。必各四面不通過一點。試證之

〔證〕第 n 平面爲 $n-1$ 直線截於他之平面。由 251 章第三例。$n-1$ 直線分第 n 平面爲 $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ 部分。故

$$F(n)=F(n-1)+\tfrac{1}{2}n(n-1)+1,$$

同理 $F(n-1)=F(n-2)+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1,\ldots\ldots$

$F(2)=F(1)+\frac{1}{2}.2.1. \qquad F(1)=2$。

由是 $F(n)=\frac{1}{2}\{1.2+2.3+\ldots\ldots+(n-1)n\}+n+1$。

但 $1.2+2.3+\ldots\ldots+(n-1)n=\frac{1}{3}n(n^2-1)$。見此後 318 章。

26. 一直線上之 m 點,各與他一直線上之 n 點連結。則此等之連結線交於他點之點爲 $\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1)$。但各連結線不引長。

〔證〕$A_1, A_2, A_3,\ldots\ldots A_m$ 爲一直線上之 m 點。$B_1, B_2, B_3,\ldots\ldots B_n$ 爲他一直線之 n 點。$F(n.m)$ 爲 m 點與 n 點連結線所有交點之全數。B_1A_r 爲 B_2. B_3 …..B_n 之各交於 $r-1$ 點,故其交點共爲 $(r-1)(n-1)$。故通過 B_1 之線所有交點之和爲 $(n-1)\{1+2+\ldots\ldots+(m-1)\}$。

由是 $F(n,m)-F(n-1,m)=(n-1)\{1+2+\ldots\ldots+(m-1)\}$

$$=\tfrac{1}{2}(n-1)m(m-1)。$$

同法 $F(n-1,m)-F(n-2,m)=\frac{1}{2}(n-2)m(m-1)$,……………………… $F(2,m)-F(1,m)=\frac{1}{2}.1.m(m-1), \qquad F(1,m)=0$。

由是 $F(n,m)=\frac{1}{2}m(m-1)\{1+2+\ldots\ldots+(n-1)\}=\frac{1}{4}m(m-1).n(n-1)$

27. 平面有 n 點。其內無四點同在一圓周者。通過此各三點畫圓。此諸圓中每三個圓。於原點 n 點之外。別無公用之一點。若與他圓相交於二點。則其諸圓之交點之數。除原 n 點之外有

$$\frac{1}{72}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(2n-1)。試證之。$$

〔證〕圓之數 $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$,於原 n 點中之三點,無一點公用之一圓。與諸圓成各對之數爲 $\frac{1}{2}.\frac{1}{6}n(n-1)(n-2).\frac{1}{6}(n-2)(n-4)(n-5)\ldots(A)$

故如此諸圓之各對。爲有與 n 定點區別之二交點。如此交點之全數爲 $\frac{1}{36}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ 卽 $(A)\times 2$。

原點n之一個爲公共之圓。其各對之數爲

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\cdot3\cdot\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$。如此圖之各對與原點n相異者。祇有一點。故其交之全數爲

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)。$$

由是所求之數爲$\frac{1}{72}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{2(n-5)+9\}$。

查理斯密司氏
霍爾氏乃托氏

大代數學講義

第五卷

第貳拾編

二項式之定理

〔252〕.諸代數式之積等於第壹式每壹項第貳式每壹項第三式每壹項………所乘得各積之代數和。此於67章。已詳述之。

今由此方法推究貳項式之方乘積如次。

〔253〕.二項式之定理假定各因子。皆如$a+b$而有n個。即 $(a+b)(a+b)(a+b)$………………………

從各因子中每取壹字相乘。即得此連乘積之壹項。如法取之。將各積相加。即得此連乘積之壹切項。(詳67章)。

先從n因子中各取a字。此祇有壹法。故a^n爲此連乘積之壹項。

次從n因子中取壹b。從其餘$n-1$因子中各取a。惟從n因子中取壹b之方法。等於從n物中取1之組合法而得${}_nC_1$。故${}_nC_1a^{n-1}b$爲此連乘積之第貳項。

又次從n因子中取貳b。其法等於從n物中取2之組合法而得${}_nC_2$。故${}_nC_2a^{n-2}b^2$爲此連乘積之第三項。

總之於n因子中取r個b(r不大於n而爲正整數)。其法等於從n物中取r之組合法。即可求得其項爲${}_nC_ra^{n-r}b^r$。

$\therefore$ $(a+b)(a+b)(a+b)$………n因子

$$=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots$$

而其最後之項爲 $_nC_na^{n-n}b^n$ 卽 b^n。

由是n爲正整數,則

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n。$$

此公式謂之二項式之定理(Binomial Theorem)。

若由244章以 $_nC_1$, $_nC_2$, $_nC_3$……之值代入之。則上之公式爲

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n。$$

此右邊之級數。謂之 $(a+b)^n$ 之展開式(Expansion)。

[254]. 歸納法之證 用歸納法(Enduction),證明二項式之定理,

n爲任意之正整數。則

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\ \lfloor n-r}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n。$$

卽 $(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n$。

今假定此結果爲眞。乃以 $(a+b)$ 乘之。而歸併其同方乘之項,則得 $(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(1+{}_nC_1)a^nb+({}_nC_1+{}_nC_2)a^{n-1}b^2+\cdots\cdots\cdots$

$$+({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)a^{n-r+1}b^r+\cdots\cdots\cdots+b^{n+1}.$$

今 $1+{}_nC_1=1+n={}_{n+1}C_1$,

$$_nC_1+{}_nC_2=n+\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{(n+1)n}{1.2}={}_{n+1}C_2,$$

總之 $_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r$(見247章)。

由是得 $(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+{}_{n+1}C_1a^nb+{}_{n+1}C_2a^{n-1}b^2+\cdots\cdots$

$$+{}_{n+1}C_ra^{n+1-r}b^r+\cdots\cdots+b^{n+1}。$$

此定理對於n之任何值旣爲眞,則對於n任大之值亦必爲眞,今若 $n=1$。則易知此定理爲眞,故 $n=2$。亦必爲眞,如是 $n=3$, $n=4$,……卽無論n之值如何。此定理皆爲眞可知矣。

[第一例] 展開 $(a+b)^4$。

$$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+\frac{4.3}{2.1}a^2b^2+\frac{4.3.2}{1.2.3}ab^3+\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}b^4$$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

〔第二例〕 展開$(2x-y)^3$。

$$(2x-y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(-y)+\frac{3.2}{1.2}(2x)(-y)^2+(-y)^3$$

$$=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3。$$

〔第三例〕 展開$(a-b)^n$。

$$(a-b)^n=a^n+na^{n-1}(-b)+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}(-b)^2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}}a^{n-r}(-b)^r+\cdots\cdots+(-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2-\cdots$$

$$\cdots\cdots+(-1)^r\frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+(-1)^nb^n。$$

255. 公項 由二項式之定理。而得$(a+b)^n$展開式之公項爲

$$\frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}}a^{n-r}b^r。$$

而以適當之值代其r。可得其任意之項。故謂之公項。如令r爲0。卽得第一項。令r爲n。卽得第r+1項。故此公項爲自初項至第r+1項爲公項也。(見244章之註中)。

256. 等係數 與初末兩項等距離之項。其係數相等。

於$(a+b)^n$之展開式。自初項順計之第r+1項爲${}_nC_ra^{n-r}b^r$。自末項逆計之第r+1項(卽自首項順計之第n−r+1項)爲${}_nC_{n-r}a^rb^{n-r}$。

惟${}_nC_r={}_nC_{n-r}$　(由245章)。

又如次之證法可自了解。

將$(a+b)^n$互換其a, b而爲$(b+a)^n$。其展開式相同。$(a+b)^n$之第r+1項爲${}_nC_ra^{n-r}b^r$。而$(b+a)^n$之第r+1項爲${}_nC_rb^{n-r}a^r$。此其係數同爲${}_nC_r$。故相等也。

257. 簡式 於253章之公式。令a=1, b=x。則

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots+\frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}}x^r+\cdots\cdots+x^n。$$

此公式凡論二項式之定理多可用之。而二項式之形。如$(a+b)^n$者。亦包括於此公式。例如

$$(a+b)^n=\left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=a^n\left\{1+n\frac{b}{a}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots。$$

258. 二項式展開之最大項 $(1+x)^n$ 之第 $r+1$ 項，等於第 r 項以 $\frac{n-r+1}{r}x$ 乘之。

惟 $\frac{n-r+1}{r}x=\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$。而 $\frac{n+1}{r}$ 因 r 增大而減小，故 r 增大時。$\frac{n-r+1}{r}x$ 從而減小，若 $\frac{n-r+1}{r}x$ 對於 r 之任何值而小於 1 時。則第 $r+1$ 項，必比第 r 項為小。故若使第 r 項為最大，必其

$$\frac{n-r+1}{r}x<1 \text{ 及 } \frac{n-(r-1)+1}{r-1}x>1。$$

由是　　$$r>\frac{(n+1)x}{x+1} \text{ 及 } r<\frac{(n+1)x}{x+1}+1,$$

於 $(1+x)^n$ 之展開式，其各項之絕對值。(無關於其正負)不因其 x 之符號變化而異。故 $(1-x)^n$ 之 r 項，當 $r>\frac{(n+1)x}{x+1}$ 及 $r<\frac{(n+1)x}{x+1}+1$ 時。其第 r 項，亦為最大之項，

若 $r=\frac{(n+1)x}{x+1}$；則 $\frac{n-x+1}{r}=1$。其最大之項不止一項，其第 r 項與第 $r+1$ 項同大。故此二項俱謂之最大項。

又 $(a+x)^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$。故 $(a+x)^n$ 之第 r 項，當 $r>\dfrac{(n+1)\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}+1}$ 及

$r<\dfrac{(n+1)\frac{x}{a}}{\frac{x}{a}+1}+1$ 時為最大。

[第一例] 於 $(1+x)^{20}$ 之展開式，其 $x=\frac{1}{4}$。求其最大項。

以第r項爲最大,則必$r>\frac{(20+1)\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+1}=4\frac{1}{5}$及$r<4\frac{1}{5}+1$.由是知其第五項爲最大。

〔第二例〕 設$x=\frac{5}{6}$。試求$(1+x)^{10}$之最大項。

其第r項,當$r>\frac{(10+1)\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}+1}=5$及$r<5+1$爲最大。則5項6項爲最大。

〔第三例〕 求$(10+3x)^{15}$展開式之最大項,但$x=4$。

其第r項,當$r>\frac{(15+1)\frac{3x}{10}}{\frac{3x}{10}+1}=\frac{16\times\frac{6}{5}}{\frac{6}{5}+1}=8\frac{8}{11}$及$r<9\frac{8}{11}$爲最大,故知第9項爲最大。

最大係數 二項展開式之最大係數,亦可用同法求之。因$(1\pm x)^n$展開式第$r+1$項之係數,等於第r項之係數以$\pm\frac{n-r+1}{r}$乘之。由是第r項之係數。其絕對値爲最大者。則必

$$\frac{n-r+1}{r}<1 及 \frac{n-(r-1)+1}{r-1}>1。即 r>\frac{n+1}{2} 及 r<1+\frac{n+1}{2}。$$

若n爲偶數。則第r項之係數。當$r=\frac{n}{2}+1$爲最大。若n爲奇數。則$\frac{n+1}{2}$及$\frac{n-1}{2}$之兩項。俱爲最大係數之項。

例題二十四

求次之各展開式,

1. $(x+a)^5$。 答 $x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$。
2. $(2a-x)^5$。 答 $32a^5-80a^4x+80a^3x^2-40a^2x^3+10ax^4-x^5$。
3. $(1-x^2)^6$。 答 $1-6x^2+15x^4-20x^6+15x^8-6x^{10}+x^{12}$。
4. $(2a-3a^2)^4$。 答 $16a^4-96a^5+216a^6-216a^7+81a^8$。
5. $(2x^2-3)^4$。 答 $16x^8-96x^6+216x^4-216x^2+81$。
6. $(x^2-2y^3)^5$。 答 $x^{10}-10x^8y^3+40x^6y^6-80x^4y^9+80x^2y^{12}-32y^{15}$。

7. 求$(x-3y)^{10}$之第三項。 答 $405x^8y^2$。

〔解〕由255章之公式第三項$={}_{10}C_2x^8(-3y)^2$。

8. 求$(3x-4)^{20}$之第五項。 答 $\frac{\lfloor 20}{\lfloor 16 \lfloor 4}3^{16}4^4x^{16}$。

9. 求$(2-x)^{22}$之第二十一項。 答 $924x^{20}$。

10. 求$(x-y)^{42}$之第四十項。 答 $-\frac{\lfloor 42}{\lfloor 3 \lfloor 39}x^3y^{39}$。

11. 求$(1+x)^8$之中項。 答 $70x^4$。

〔解〕$(1+x)^8$之展開式有$8+1$即9項。故中項爲第五項。

由是可求得其第五項。即爲其中項。

12. 求$(1+x)^{21}$之中項。 答 $\frac{\lfloor 21}{\lfloor 10 \lfloor 11}x^{10}$ 及 $\frac{\lfloor 21}{\lfloor 11 \lfloor 10}x^{11}$。

〔解〕此展開式有22項。故中項爲第11項第12項。

13. 求$(x-3y)^n$之公項。 答 $(-1)^r\frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}3^rx^{n-r}y^r$。

〔解〕第$(r+1)$項$=\frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}x^{n-r}(-3y)^r$。

14. $(x^2+y^3)^n$之公項。 答 $\frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}x^{2n-2r}y^{3r}$。

15. 記$(3x-2y)^{15}$之最初三項及最後三項。

答 $(3x)^{15}-30(3x)^{14}y+420(3x)^{13}y^2\ldots\ldots-945x^2(2y)^{13}+45x(2y)^{14}-(2y)^{15}$。

16. 求$(1+x)^{12}$之最大係數之項。 答 $924x^6$。

17. 求$(1+x)^{15}$之最大係數之項。 答 $6435x^7, 6435x^8$。

18 試示$(1+x)^{2n}$展開式x^n之係數。等於$(1+x)^{2n-1}$展開式x^n之係數之2倍。

〔證〕$(1+x)^{2n}$其x^n之係數之項。爲第$(n+1)$項。即$\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}x^n$。

又$(1+x)^{2n-1}$其x^n之項。爲第$(n+1)$項。即$\frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n \lfloor n-1}x^n=\frac{\lfloor 2n}{2\lfloor n \lfloor n}x^n$。

故$(1+x)^{2n}$式其x^n之係數。等於$(1+x)^{2n-1}$式中x^n之係數之2倍。

19. $(1+x)^{2n}$ 之中項。為 $\dfrac{1.3.5\ \ldots\ldots(2n-1)}{\underline{|n}}2^n x^n$。

〔證〕中項為第 $(n+1)$ 項。故

$$\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n=\frac{1.2.3.4.5\ldots\ldots(2n-1)2n}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)2^n\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n。$$

20. 用二項式之定理。求 $(99)^4$, $(51)^4$ 及 $(999)^3$。

〔解〕 $(99)^4=(100-1)^4=(100)^4-4\times(100)^3+6\times(100)^2-4\times100+1$

$=100000000-4000000+60000-400+1=96059601$。

$(51)^4=(50+1)^4=(50)^4+4\times(50)^3+6\times(50)^2+4\times50+1$

$=6250000+500000+15000+200+1=6765201$。

$(999)^3=(1000-1)^3=(1000)^3-3\times(1000)^2+3\times1000-1=997002999$。

21. 於 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 展開式 x^r 之係數。為 $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|\tfrac{1}{2}(n+r)}\,\underline{|\tfrac{1}{2}(n-r)}}$。

〔證〕第 $(p+1)$ 項。為 $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|n-p}}x^{n-p}\left(\dfrac{1}{x}\right)^p=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|n-p}}x^{n-2p}$。

$r=n-2p$。 $\therefore$ $p=\dfrac{1}{2}(n-r)$。以此代入。即得所求之係數。為

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|\tfrac{1}{2}(n-r)}\,\underline{|n-\tfrac{1}{2}(n-r)}}。$$

22. 求 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ 之中項。 答 $(-1)^n\dfrac{\underline{|2n}}{(\underline{|n})^2}$

〔解〕中項即第 $(n+1)$ 項 $=\dfrac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n\left(-\dfrac{1}{x}\right)^n=(-1)^n\dfrac{\underline{|2n}}{(\underline{|n})^2}$。

23. $(1+x)^n$ 展開式。第五,第六,及第七項之係數。為等差級數求其 n 之值。 答 7 或 14

〔解〕設第五,第六,第七項為 a, b, c。則

$b=\dfrac{n-4}{5}a$, $c=\dfrac{n-5}{6}\times b=\dfrac{(n-4)(n-5)}{5.6}a$。由題意。$a+c=2b$。

即 $a+\dfrac{(n-4)(n-5)}{5.6}a=2\times\dfrac{n-4}{5}a$。 $\therefore$ $30+(n-4)(n-5)=12(n-4)$。

即 $n^2-21n+98=0$。 $\therefore$ $n=7$ 或 14。

24. $(1+x)^n$ 展開式第二，第三，及第四項之係數。爲等差級數。求其 n 之值。　　答 7。

25. $(1+x)^n$ 展開式奇數項之和爲 a。偶數項之和爲 b。則

$$(1-x^2)^n=a^2-b^2。$$

〔證〕 $(1+x)^n=\left(1+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}x^4+\dots\right)$

$+\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}x^3+\dots\right)=a+b。\quad \therefore\ (1-x)^n=a-b$

$\therefore\ (1-x^2)^n=(1+x)^n(1-x)^n=a^2-b^2。$

259。二項展開式係數之性質

如次之公式。

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots\dots+c_rx^r+\dots\dots+c_nx^n。\ (1)$$

但　$c_0=c_n=1,\ c_1=c_{n-1}=n$。總之 $c_r=c_{n-r}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$。

〔第一〕於(1)設 $x=1$。則 $2^n=c_0+c_1+c_2+c_3+\dots\dots+c_n$。

故 $(1+x)^n$ 展開式係數之和等於 2^n。

〔第二〕於(1)設 $x=-1$。則 $(1-1)^n=c_0-c_1+c_2-\dots\dots+(-1)^nc_n$。

$$\therefore\quad 0=(c_0+c_2+c_4+\dots\dots)-(c_1+c_3+c_5+\dots\dots)。$$

故二項式之展開式，其奇數項係數之和。等於其偶數項係數之和。

〔第三〕因 $c_r=c_{n-r}$。故 $c_0=c_n,\ c_1=c_{n-1}\dots\dots\dots$由是

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots\dots+c_rx^r+\dots\dots+c_nx^n。$$

及 $(1+x)^n=c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\dots\dots+c_{n-r}x^r+\dots\dots+c_0x^n$，

此二級數之積。其在右邊 x^n 之係數爲 $c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2+\dots\dots\dots+c_n^2$。其在左邊。即 $(1+x)^n\times(1+x)^n$。即 $(1+x)^{2n}$。惟 x^n 之係數。依 255 章得 $\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}$。故 $(1+x)^n$ 展開式係數平方之和。等於 $\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}$。

〔第四〕如第三 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots\dots+c_nx^n$。

而　$(1-x)^n=c_n-c_{n-1}x+c_{n-2}x^2-\dots\dots+(-1)^nc_0x^n$。

於此右邊兩級數積中 x^n 之係數。爲

$$(-1)^n\{c_0^2-c_1^2+c_2^2-\dots\dots+(-1)^nc_n^2\}。$$

而$(1+x)^n\times(1-x)^n$。即$(1-x^2)^n$其x^n之係數。如n係奇數則爲0。如n係偶數。則爲$(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}n \lfloor \frac{1}{2}n}$。

由是$c_0^2-c_1^2+c_2^2-\ldots\ldots+(-1)^n c_n^2$。因n之奇或偶而爲0。或$(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{\lfloor n}{(\lfloor \frac{1}{2}n)^2}$。

例　題

1. 試示$c_1+2c_2+3c_3+\ldots\ldots+rc_r+\ldots\ldots+nc_n=n2^{n-1}$。

〔證〕 $c_1+2c_2+3c_3+\ldots\ldots+rc_r+\ldots\ldots+nc_n$,

$$=n+2\frac{n(n-1)}{1.2.}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}+\ldots\ldots+r\frac{\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}+\ldots\ldots+n$$

$$=n\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}+\ldots\ldots+\frac{\lfloor n-1}{\lfloor r-1\lfloor n-r}+\ldots\ldots+1\right\}$$

$$=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}。$$

2. 試示$c_0-\dfrac{1}{2}c_1+\dfrac{1}{3}c_2-\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{c^n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$。

〔證〕 $c_0-\dfrac{1}{2}c_1+\dfrac{1}{3}c_2-\ldots\ldots=1-\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{3}\dfrac{n(n-1)}{1.2.}+\ldots\ldots\ldots$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{n+1-\frac{(n+1)n}{1.2.}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.}-\ldots\ldots+(-1)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\left\{1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1.2.}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.}+\ldots\ldots+(-1)^{n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1}=\frac{1}{n+1}。$$

3, n爲正整數,則$\dfrac{c_0}{x}-\dfrac{c_1}{x+1}+\dfrac{c_2}{x+2}-\ldots\ldots+(-1)^n\dfrac{c_n}{x+n}$

$=\dfrac{\lfloor n}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)}$試示明之。

〔證〕 此可用歸納法證明之。先假定本題x之一切值。及對於n之任何正整數而爲眞者。即

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_nC_1}{x+1}+\frac{{}_nC_2}{x+2}-\ldots\ldots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n}=\frac{\lfloor n}{x(x+1)\ldots\ldots(x+n)},$$

今以$n+1$代其x。則

$$\frac{1}{x+1}-\frac{{}_nC_1}{x+2}+\frac{{}_nC_2}{x+3}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n+1}=\frac{\lfloor n}{(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n+1)}。$$

由前之恆同式減此恆同式。則

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_nC_1+1}{x+1}+\frac{{}_nC_2+{}_nC_1}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{{}_nC_r+{}_nC_{r-1}}{x+r}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{1}{x+n+1}=\frac{\lfloor n+1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n+1)}。$$

但由247章對於r之任何正整數爲${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$。

由是上之恆同式。爲

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_{n+1}C_1}{x+1}+\frac{{}_{n+1}C_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{{}_{n+1}C_{n+1}}{x+n+1}=\frac{\lfloor n+1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n+1)}。$$

故本題對於n項之某值而爲眞者。則對於n任大之値亦爲眞。然$n=1$能合於本題。故$n=2$亦必合於本題。由斯推之。n爲3, 4,……凡對於一切之正整數。當無有不合者。本題之反證法。則詳於後之297章例題3。

〔餘論〕以x之特別值代入之。可得$c_0, c_1,\cdots\cdots$之關係。

若$x=1$。則$\frac{c_0}{1}-\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}-\cdots\cdots=\frac{1}{n+1}$。而$x=\frac{1}{2}$。則

$$\frac{c_0}{1}-\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{5}-\cdots\cdots=\frac{2^n\lfloor n}{1.3.5\cdots\cdots(2n+1)}。$$

4. $c_0a-c_1(a-1)+c_2(a-2)-c_3(a-3)\cdots\cdots+(-1)^nc_n(a-n)=0$。

及 $c_0a^2-c_1(a-1)^2+c_2(a-2)^2-c_3(a-3)^2+\cdots\cdots+(-1)^nc_n(a-n)^n=0$。

〔證〕由第二設n爲任意之正整數。則

$$1-n+\frac{n(n-1)}{1.2.}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}+\cdots\cdots+(-1)^n=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$n>1$。則$n-1$爲正整數。故於(1)用$n-1$以代其n。

$$1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)以a乘(2)以n乘而相加。得

$$a-n(a-1)+\frac{n(n-1)}{1.2.}(a-2)-\cdots\cdots+(-1)^n(a-n)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\therefore\quad c_0a-c_1(a-1)+c_2(a-2)-\cdots\cdots+(-1)^nc_n(a-n)=0。$$

但 $n>1$。$n>2$。則於(3)之 n 倘可減1。故於(3)以 $n-1$ 代 n，且以 $a-1$ 代 a。則 $a-1-(n-1)(a-2)+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}(a-n)=0$..............(4)

(3)以 a 乘(4)以 n 乘而相加。則

$$a^2-n(a-1)^2+\frac{n(n-1)}{1.2.}(a-2)^2-\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)^2=0。$$

$$\therefore\quad c_0a^2-c_1(a-1)^2+c_2(a-2)^2-\ldots\ldots+(-1)^nc_n(a-n)^2=0。$$ 但 $n>2$。

〔係論〕準此方法推之，則

$$a^p-n(a-1)^p+\frac{n(n-1)}{1.2.}(a-2)^p-\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)^p=0,$$

但 p 為小於 n 之正整數，見305章。

260. 二項因子之積 求 $x+a,\ x+b,\ x+c,\ldots\ldots n$ 因子之積。如次之記法爲便。

於諸字中每取壹字之和 $a+b+c+\ldots\ldots$ 以 S_1 代之。於諸字中每取二字相乘之和 $ab+ac+\ldots\ldots$。以 S_2 代之。總之於諸字中每取 r 字相乘之和。則以 S_r 代之。

今所求者。爲二項因數 $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots$ 之積，

自此二項因數之各項，每取一字相乘，即所求連乘積之一項故此連乘積。等於每取一字各相乘積之和。

先從各因子中取 x。此祇有一法。故 x^n 爲連乘積之一項。

又於 $a, b, c,\ldots\ldots\ldots$ 諸字中。任取一字，於其餘 $n-1$ 因子取 x。則得 $ax^{n-1},\ bx^{n-1},\ cx^{n-1},\ldots\ldots$ 其和爲 S_1x^{n-1}。

又於 $a, b, c,\ldots\ldots$ 諸字中任取二字。於其餘 $n-2$ 因子取 x。則得 $abx^{n-2},\ acx^{n-2},\ldots\ldots$ 其和爲 S_2x^{n-2}。

總之於 $a, b, c,\ldots\ldots$ 諸字中任取 r 個字。於其餘 $n-r$ 因子取 x。其各乘積之和爲 S_rx^{n-r}。

由是 $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\ldots\ldots+S_rx^{n-r}+\ldots\ldots+S_n。$$

此末項 S_n，即 $abc\ldots\ldots$ 至 n 因子之積也，

若 $a, b, c,\ldots\ldots$ 變爲負。則 $S_1, S_3, S_5\ldots\ldots$ 爲負。而 $S_2, S_4, S_6,\ldots\ldots$ 爲正，

由是 $(x-a)(x-b)(x-c)\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$=x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\ldots\ldots+(-1)^rS_rx^{n-r}+\ldots\ldots+(-1)^nS_n。$$

261.文覃蒙 Vandermonde 氏定理之證 此定理如249章所載。而次之證明。則考自 Cayley 氏(在 Messenger of Mathematics 第五卷)。

設 n 爲正整數。a 及 b 爲任意之數量。則由249章。

得 $(a+b)_n=a_n+na_{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2.}a_{n-2}b_2+\ldots\ldots+\frac{|\underline{n}}{|\underline{r}\,|\underline{n-r}}a_{n-r}b_r+\ldots+b_n$,

假定 n 爲任何正整數。而此定理恆爲眞。則於其左邊。即

$(a+b)_n=(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\ldots\ldots(a+b-n+1)$,以 $a+b-n$ 乘之。

得 $(a+b)_n\times(a+b-n)=(a+b)(a+b-1)\ldots\ldots(a+b-n+1)(a+b-n)$

$$=(a+b)_{n+1}。$$

又此右邊之級數。亦以 $a+b-n$ 乘之。惟此乘數可變成種種之形。以乘各項如次。

第一項以 $\{(a-n)+b\}$ 乘。

第二項以 $\{(a-n+1)+(b-1)\}$ 乘。

第三項以 $\{(a-n+2)+(b-2)\}$ 乘。

第 r 項以 $\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}$ 乘。

如是上之恆同式爲

$$\begin{aligned}(a+b)_{n+1}=a_n\{(a-n)+b\}&+{}_nc_1a_{n-1}b\{(a-n+1)+(b-1)\}\\&+{}_nc_2a_{n-2}b_2\{(a-n+2)(b-2)\}+\ldots\ldots\\&+{}_nc_{r-1}a_{n-r+1}b_{r-1}\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}\\&+{}_nc_ra_{n-r}b_r\{(a-n+r)+(b-r)\}\\&+\ldots\ldots+b_n\{a+(b-n)\}。\end{aligned}$$

但 $a_n\{(a-n)+b\}=a_n(a-n)+a_nb=a_{n+1}+a_nb_1$,

$${}_nc_1a_{n-1}b_1\{(a-n+1)+(b-1)\}={}_nc_1(a_nb_1+a_{n-1}b_2),$$

$${}_nc_{r-1}a_{n-r+1}b_{r-1}\{(a-n+r-1)+(b-r+1)\}={}_nc_{r-1}(a_{n-r+2}b_{r-1}+a_{n-r+1}b_r),$$

$${}_nc_ra_{n-r}b_r\{(a-n+r)+(b-r)\}={}_nc_r(a_{n-r+1}b_r+a_{n-r}b_{r+1}),$$

....

$$b_n\{a+(b-n)\}=a_1b_n+b_{n+1},$$

由是 $(a+b)_{n+1}=a_{n+1}+(1+{}_nc_1)a_nb_1+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$+({}_nc_{r-1}+{}_nc_r)a_{n+1-r}b_r+\ldots\ldots+b_{n+1},$$

惟 ${}_nc_{r-1}+{}_nc_r={}_{n+1}c_r$，

故 $(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+{}_{n+1}c_1a^nb^1+\ldots\ldots+{}_{n+1}c_ra^{n+1-r}b^r+\ldots\ldots+b^{n+1}$。

由是此定理。若對於 n 任何之正整數値爲眞。則對於 n+1 之値亦爲眞。惟 n=2 此定理知其爲眞。故 n=3 亦必爲眞。順次 4, 5,...... 亦無不眞矣。

262. 多項式之定理 多項式 a+b+c+...... 之 n 方乘。亦可由二項式之方法求得。但 n 爲正整數。

$(a+b+c+d+\ldots\ldots)^n$。即 $\{a+(b+c+d+\ldots\ldots)\}^n$ 其展開式之公項。

由二項式定理而得 $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}a^r(b+c+d+\ldots\ldots)^{n-r}$。

由同理 $(b+c+d+\ldots\ldots)^{n-r}$ 展開式之公項。爲

$$\frac{\lfloor n-r}{\lfloor s\,\lfloor n-r-s}b^s(c+d+\ldots\ldots)^{n-r-s}。$$

$(c+d+\ldots\ldots)^{n-r-s}$ 之公項。爲

$$\frac{\lfloor n-r-s}{\lfloor t\,\lfloor n-r-s-t}c^t(d+\ldots\ldots)^{n-r-s-t}，$$ 以下類推。

由是 $(a+b+c+d+\ldots\ldots)^n$ 展開式之公式，爲

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}\times\frac{\lfloor n-r}{\lfloor s\,\lfloor n-r-s}\times\frac{\lfloor n-r-s}{\lfloor t\,\lfloor n-r-s-t}\times\ldots\ldots a^rb^sc^t\ldots\ldots$$

即 $$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor s\,\lfloor t\ldots\ldots}a^rb^sc^t\ldots\ldots$$

但 r, s, t,...... 各値爲零或爲正整數。而 $r+s+t+\ldots\ldots=n$，

〔別證〕上之結果。可由 253 章之方法得之。

惟以連乘積 $(a+b+c+\ldots\ldots)(a+b+c+\ldots\ldots)\ldots\ldots$ 之任一項，等於從諸因子各取其任一項相乘之積。

故 $a^rb^sc^t\ldots\ldots$。先從 n 因子內之 r 因子取 a。其方法之數爲 ${}_nc_r$，然後從其餘 n−r 因子內之 s 因子取 b。其方法之數爲 ${}_{n-r}c_s$。又從其餘 n−r−s 因子內之 t 因子取 c，其方法之數爲 ${}_{n-r-s}c_t$，以下類推，如是其方法之全數，爲 ${}_nc_r\times{}_{n-r}c_s\times{}_{n-r-s}c_t\times\ldots\ldots$

即 $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}\times\dfrac{\underline{|n-r}}{\underline{|s}\,\underline{|n-r-s}}\times\dfrac{\underline{|n-r-s}}{\underline{|t}\,\underline{|n-r-s-t}}\times\cdots\cdots=\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t\cdots\cdots}}$.

由是$(a+b+c+\cdots\cdots)^n$展開式之公項。爲

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t\cdots\cdots}}a^rb^sc^t\cdots\cdots\cdots。$$

例　題

1. 求$(a+b+c)^3$展開式中abc之係數。

〔解〕以$n=3, r=s=t=1$代入公項之公式中。而得所求之係數。爲

$\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}}=6$。

2. 求$(a+b+c+d)^4$展開式中$a^2b^2, bcd^2, abcd$之係數。

〔解〕求得各項爲$\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}a^2b^2, \dfrac{\underline{|4}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|2}}bcd^2, \dfrac{\underline{|4}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}}abcd$。故其各項係數爲6, 12, 24。

263. 多項式公項之係數 用前章求公項之公式。則得$(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^n$展開式之公項。爲

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}\,\underline{|u\cdots\cdots}}a^r(bx)^s(cx^2)^t(dx^3)^u\cdots\cdots\cdots$$

即 $$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}\,\underline{|u\cdots\cdots}}a^rb^sc^td^u\cdots\cdots x^{s+2t+3u+}\cdots\cdots。$$

由是於此展開式中求其x之特別方乘。如x^a之係數。則可取其適合於次之方程式。所有$r, s, t, \cdots\cdots$各異之正整數值。

$$s+2t+3u+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=a,$$

$$r+s+t+u+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=n。$$

由此方程式。求得$r, s, t, \cdots\cdots$各相當值之和。即可求得其係數，

例　題

1. 求$(1+2x+3x^2)^4$展開式中x^5之係數。　　答312。

〔解〕$(1+2x+3x^2)^4$之公項爲$\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}}1^r2^s3^tx^{s+2t}$.

而所求爲x^5之項。故$s+2t=5$。$r+s+t=4$。求其適合於此兩式所有$r,s,t,$之值。以$s=5-2t$。故$t<3$。又$r+s+t=4$。故$s<4$。於$s=5-2t$不能$t=0$。故與$t=1,t=2$二值相應。$s=5-2t=3$。故$r=4-s-t=0$。

$\therefore\ r=0,\ s=3,t=1$。則$\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}}1^r2^s3^tx^{s+2t}=\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|3}\,\underline{|1}}2^33^1x^5=96x^5$。

又$r=1,s=1,t=2$。則$\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|2}}2^13^2x^5=216x^5$。

由是x^5之係數爲$96+216$爲312。

〔別法〕此例題甚簡單。故於實際可用次之法則。求得x^5之係數。

$(1+2x+3x^2)^4=\{1+(2x+3x^2)\}^4$

$$=1+4(2x+3x^2)+6(2x+3x^2)^2+4(2x+3x^2)^3+(2x+3x^2)^4。$$

於此展開式中最初之三項。x之次數低於x^5。而於第四項$4(2x+3x^2)^3$其x^5之係數爲216。又於末項$(2x+3x^2)^4$其x^5之係數爲96。

2. 求$(1+x+x^2)^3$展開式中x^4之係數。 答6。

〔解〕從$\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}}1^r1^s1^tx^{s+2t}$。 $s+2t=4,\ r+s+t=3$。

由是$r=0,\ s=2,t=1$,及$r=1,s=0,t=2$。故x^4之係數,爲

$\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|1}\,\underline{|2}\,\underline{|1}}+\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|1}\,\underline{|2}}=3+3=6$。

3. 求$(1+x+x^2)^4$展開式中x^5之係數。 答16。

〔解〕$r+s+t=4,s+2t=5$。故與例題1同

4. 求$(2+x-x^2)^5$展開式中x^8之係數。 答0。

〔解〕$(2+x-x^2)^5=(2+x)^5-5(2+x)^4x^2+10(2+x)^3x^4-10(2+x)^2x^6$
$+5(2+x)x^8-x^{10}$。

$\therefore\ x^8$之係數。爲$-10+5\times2=0$。

5. 求$(7+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$展開式中x^{10}之係數。 答39。

〔解〕$\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|r}\,\underline{|s}\,\underline{|t}\,\underline{|u}\,\underline{|p}\,\underline{|q}}1^r1^s1^t1^u1^p1^qx^{s+2t+3u+4p+5q}$。

$\therefore\ r+s+t+u+p+q=3,\ s+2t+3u+4p+5q=10$。

凡適合於此兩方程式之值。有五組如次。

$$r=0,\ s=0,\ t=0,\ u=2,\ p=1,\ q=0。$$
$$r=0,\ s=0,\ t=1,\ u=0,\ p=2,\ q=0。$$
$$r=1,\ s=0,\ t=0,\ u=0,\ p=0,\ q=2。$$
$$r=0,\ s=0,\ t=1,\ u=1,\ p=0,\ q=1。$$
$$r=0,\ s=1,\ t=0,\ u=0,\ p=1,\ q=1。$$

由是 x^{10} 之係數$=\dfrac{\lfloor\!\underline{3}}{\lfloor\!\underline{2}\lfloor\!\underline{1}}7^0+\dfrac{\lfloor\!\underline{3}}{\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{2}}7^0+\dfrac{\lfloor\!\underline{3}}{\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{2}}7^1+\dfrac{\lfloor\!\underline{3}}{\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{1}}7^0+\dfrac{\lfloor\!\underline{3}}{\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{1}}7^0$

$$=3+3+21+6+6=39。$$

6. 求 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^5$ 展開式中中項之係數。 答 381。

〔解〕此展開式中最高次之項。爲 x^{20}。故此式有 21 項。而中項爲第十一項。即有 x^{10} 之項。

由是 $\dfrac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{r}\lfloor\!\underline{s}\lfloor\!\underline{t}\lfloor\!\underline{u}\lfloor\!\underline{p}}x^{s+2t+3u+4p}$。

$r+s+t+u+p=5,\quad s+2t+3u+4p=10。$

由是 $r, s,$ 等之值得十二組如次。

$$r=0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0。$$
$$s=3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0。$$
$$t=0,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 0,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 5。$$
$$u=1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 1,\ 3,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2,\ 0。$$
$$p=1,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 1,\ 0。$$

故 x^{10} 之係數。爲

$$\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{3}\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{1}}+\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{2}\lfloor\!\underline{2}\lfloor\!\underline{1}}+\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{2}\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{2}}+\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{2}\lfloor\!\underline{2}}+\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{1}}+\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{3}\lfloor\!\underline{1}}+\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{3}}$$
$$+\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{3}\lfloor\!\underline{1}}+\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{2}\lfloor\!\underline{2}}+\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{2}\lfloor\!\underline{1}\lfloor\!\underline{2}}+\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{2}\lfloor\!\underline{2}\lfloor\!\underline{1}}+\frac{\lfloor\!\underline{5}}{\lfloor\!\underline{5}}。$$

例題二十五

1. 試示 $c_0-2c_1+3c_2-\dots\dots+(-1)^n(n+1)c_n=0$。

〔證〕$c_0-2c_1+3c_2-\dots\dots+(-1)^n(n+1)c_n$

$$=1-2\frac{n}{1}+3\frac{n(n-1)}{1.2}-\dots\dots+(-1)^n(n+1)$$

$$=\left\{1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\dots\dots+(-1)^n\right\}-n\left\{1-\frac{n-1}{1}+\dots\dots+(-1)^{n-1}\right\}$$

$$=(1-1)^n-n(1-1)^{n-1}=0。$$

2. 試示 $c_1-2c_2+3c_3-\dots\dots+(-1)^{n-1}nc_n=0$。

〔證〕 $n-2\frac{n(n-1)}{1.2}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}-\dots\dots+(-1)^{n-1}n$

$$=n\left\{1+\frac{n-1}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\dots\dots+(-1)^{n-1}\right\}=n(1-1)^{n-1}=0.$$

3. 試示 $c_0+2c_1+3c_2+\dots\dots+(n+1)c_n=2^{n-1}(n+2)$。

〔證〕 $1+2\frac{n}{1}+3\frac{n(n-1)}{1.2}+\dots\dots+(n+1).1$

$$=\left\{1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\dots\dots+1\right\}+n\left\{1+\frac{n-1}{1}+\dots\dots+1\right\}$$

$$=(1+1)^n+n(1+1)^{n-1}=2^n+n2^{n-1}=2^{n-1}(n+2)。$$

4. 試示 $c_2+2c_3+3c_4+\dots\dots+(n-1)c_n=1+(n-2)2^{n-1}$.

〔證〕 $\frac{n(n-1)}{1.2}+2\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}+\dots\dots+(n-1)$

$$=n\left\{1+\frac{n-1}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}+\dots\dots+1\right\}$$

$$-\left\{1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}+\dots\dots+1\right\}+1$$

$$=n(1+1)^{n-1}-(1+1)^n+1=n2^{n-1}-2^n+1。$$

5. 試示 $c_0+3c_1+5c_2+\dots\dots+(2n+1)c_n=(n+1)2^n$。

〔證〕 $1+3\frac{n}{1}+5\frac{n(n-1)}{1.2}+\dots\dots+(2n+1)1$

$$=\left\{1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\dots\dots+1\right\}+2n\{1+(n-1)+\dots\dots+1\}$$

$$=(1+1)^n+2n(1+1)^{n-1}=2^n+2n2^{n-1}=2^n(1+n)。$$

6. 試示 $3c_1+7c_2+11c_3+\dots\dots+(4n-1)c_n=1+(2n-1)2^n$。

〔證〕 $4(c_1+2c_2+3c_3+\dots\dots+nc_n)-(c_1+c_2+c_3+\dots\dots+c_n)$

$$=4n\left\{1+\frac{n-1}{1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}+\dots\dots+1\right\}-(2^n-1)$$ 由259章第一

$$=4n(1+1)^{n-1}-2^n+1=2n2^n-2^n+1=1+(2n-1)2^n。$$

7. 試示 $\frac{c_0}{1}+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$。

(證) $\frac{1}{1}+\frac{n}{1.2.}+\frac{n(n-1)}{1.2.3.}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}=$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{1+\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)n}{1.2.}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.}+\cdots\cdots+1-1\right\}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{(1+1)^{n+1}-1\right\}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}。$$

8. 試示 $\frac{c_0}{1}+\frac{c_2}{3}+\frac{c_4}{5}+\frac{c_6}{7}+\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{2^n}{n+1}$。

(證) $\frac{c_0}{1}-\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}-\frac{c_3}{4}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{c_n}{n+1}=$

$$=\frac{1}{1}-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{1.2.3.}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n+1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[1-\left\{1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1.2.}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\right\}\right]=$$

$=\frac{1}{n+1}(1-\{1-1\}^{n+1})=\frac{1}{n+1}$。此結果加前例7之恆同式而以2除之即得。

9. 試示 $\frac{c_1}{2}+\frac{c_3}{4}+\frac{c_5}{6}+\cdots\cdots=\frac{2^n-1}{n+1}$。

(證) 由7例之恆同式，減8例之恆同式，直得本例之恆同式。

10. 試示 $\frac{c_0}{2}+\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{4}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{n+2}=\frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$。

(證) $\frac{c_0}{2}+\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{4}+\cdots\cdots+\frac{c_n}{n+2}=\frac{1}{2}+\frac{n}{1.3.}+\frac{n(n-1)}{1.2.4.}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+2}$

$$=\frac{1}{1}+\frac{n}{1.2.}+\frac{n(n-1)}{1.2.3.}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}-$$

$$\left\{\frac{1}{1.2.}+\frac{n}{1.2.3.}+\frac{n(n-1)}{1.2.3.4.}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{n+1+\frac{n(n+1)}{1.2.}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.}+\cdots\cdots+1\right\}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\left\{\frac{(n+2)(n+1)}{1.2.}+\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3.}+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}+\cdots\cdots+1\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{1+\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)n}{1.2.}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.}+\ldots\ldots+1-1\right\}$$

$$-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left\{1+\frac{n+2}{1}+\frac{(n+2)(n+1)}{1.2.}+\frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3.}+\ldots+1-1-(n+2)\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)-\frac{1}{(n+2)(n+1)}(2^{n+2}-n-3)=\frac{1+n2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}。$$

11. 試證 $\frac{c_1}{1}-\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{3}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{c_n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}$。

〔證〕 $F_n=\frac{c_1}{1}-\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{3}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{c_n}{n}$

$$=\frac{n}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2.}+\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}。$$

則 $F_{n+1}=\frac{n+1}{1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)n}{1.2.}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}-\ldots$

$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{1}+(-1)^n\frac{1}{n+1}。$$

$\therefore$ $F_{n+1}-F_n=\frac{1}{1}-\frac{n}{1.2.}+\frac{n(n-1)}{1.2.3}-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}+(-1)^n\frac{1}{n+1}$

$$=-\frac{1}{n+1}\left[1-\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)n}{1.2.}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3.}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+(-1)^n\frac{n+1}{1}+(-1)^{n+1}-1\right]$$

$=-\frac{1}{n+1}\{(1-1)^{n+1}-1\}=\frac{1}{n+1}$。 $\therefore$ $F_{n+1}=F_n+\frac{1}{n+1}$。由是 $F_1=1$。

故 $F_2=1+\frac{1}{2}$。故 $F_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$………………

由是 $F_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}$。

12. 試證 $\frac{c_0}{1}-\frac{c_1}{4}+\frac{c_3}{7}+\ldots\ldots+(-1)^n\frac{c_n}{3n+1}=\frac{3^n\underline{|n}}{1.4.7\ldots\ldots(3n+1)}$。

〔證〕 於259章例題3 $\frac{c_0}{x}-\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2}{x+2}-\ldots\ldots+(-1)^n\frac{c_n}{x+n}$

$$=\frac{\underline{|n}}{x(x+1)\ldots(x+n)}。$$

令 $x=\frac{1}{3}$。則 $\frac{3c_0}{1}-\frac{3c_1}{4}+\frac{3c_2}{7}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{3c_n}{3n+1}=\frac{3^{n+1}\lfloor n}{1.4.7\cdots\cdots(3n+1)}$ 以3除之即得。

13. 試證 $c_0c_r+c_1c_{r+1}+\cdots+c_{n-r}c_n=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+r\lfloor n-r}$。

證 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_{n-r}x^{n-r}+\cdots\cdots+c_nx^n$,

及 $(1+x)^n=c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\cdots\cdots+c_rx^{n-r}+\cdots\cdots+c_0x^n$,

於此兩恆同式右邊之積中。其 x^{n-r} 之係數爲

$$c_0c_r+c_1c_{r+1}+\cdots\cdots+c_{n-r}c_n,$$

又於左邊之積 $(1+x)^n\times(1+x)^n$ 即 $(1+x)^{2n}$ 其 x^{n-r} 之係數爲

$$\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n-r\lfloor n-(n-r)} \text{ 即 } \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n-r\lfloor n+r}$$

14. 設 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n$ 則 $n(1+x)^{n-1}$
$=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots\cdots+nc_nx^{n-1}$ 及 $\{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1}$
$=c_0+2c_1x+\cdots\cdots+(n+1)c_nx^n$。

由是求其次之證 $c_1^2+2c_2^2+3c_3^2+\cdots\cdots+nc_n^2=\frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1\lfloor n-1}$

及 $c_0^2+2c_1^2+3c_2^2+\cdots\cdots(n+1)c_n^2=\frac{(n+2)\lfloor 2n-1}{\lfloor n\lfloor n-1}$。

〔證〕由255章於 $(1+x)^n$ 中 x^r 之係數爲 $\frac{\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}=c_r$,

又於 $n(1+x)^{n-1}$ 其 x^{r-1} 之係數爲 $n\frac{\lfloor n-1}{\lfloor r-1\lfloor n-r}=\frac{r\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}=rc_r$,

即得 $n(1+x)^{n-1}$ 一切之項。故 r 爲 $1,2,3,\cdots\cdots n$ 則

$n(1+x)^{n-1}=1c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots\cdots\cdots+nc_nx^{n-1}$ ……………………………(1)

(1) 以 x 乘。又加 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n$ 則

$\{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1}=c_0+2c_1x+\cdots\cdots\cdots+(n+1)c_nx^n$ ……………………(2)

又 $(1+x)^n=c_n+c_{n-1}x+\cdots\cdots+c_{n-r}x^r+\cdots\cdots+c_0x^n$ ……………………(3)

於(1)及(3)級數之積中 x^{n-1} 之係數爲 $c_1^2+2c_2^2+\cdots\cdots+nc_n^2$,

而於 $n(1+x)^{n-1}(1+x)^n$ 即 $n(1+x)^{2n-1}$ x^{n-1} 之係數爲 $\frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1\lfloor n-1}$。

$$\therefore\ c_1^2+2c_2^2+\ldots\ldots+nc_n^2=\frac{\lfloor\underline{2n-1}}{\lfloor\underline{n-1}\,\lfloor\underline{n-1}}。$$

又於(2)及(3)級數之積中 x^n 之係數為 $c_0^2+2c_1^2+3c_2^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\ldots+(n+1)c_n^2$, 而於 $\{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1}\times(1+x)^n$。

即 $\{1+(n+1)x\}(1+x)^{2n-1}$ 其 x^n 之係數為

$$\frac{\lfloor\underline{2n-1}}{\lfloor\underline{n-1}\,\lfloor\underline{n}}+(n+1)\frac{\lfloor\underline{2n-1}}{\lfloor\underline{n-1}\,\lfloor\underline{n}}=\frac{(n+2)\lfloor\underline{2n-1}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{n-1}}。$$

$$\therefore\ c_0^2+2c_1^2+\ldots\ldots+(n+1)c_n^2=\frac{(n+2)\lfloor\underline{2n+1}}{\lfloor\underline{n}\,\lfloor\underline{n-1}}。$$

15. 試由 $\{(1+x)^n-1\}^m$ 展開式。(但 m, n, 為正整數)表示

$${}_mC_1\cdot{}_nC_m-{}_mC_2\cdot{}_{2n}C_m+{}_mC_3\cdot{}_{3n}C_m-\ldots\ldots=(-1)^{m-1}n^m。$$

〔證〕 $\{(1+x)^n-1\}^m=(1+x)^{mn}-{}_mC_1(1+x)^{(m-1)n}+{}_mC_2(1+x)^{(m-2)n}-\ldots\ldots$

$\ldots+(-1)^{m-1}{}_mC_{m-1}(1+x)^n+(-1)^m$。

於此右邊 x^m 之係數為

$(-1)^{m-1}\{{}_mC_1\cdot{}_nC_m-{}_mC_2\cdot{}_{2n}C_m+{}_mC_3\cdot{}_{3n}C_m-\ldots\ldots+(-1)^{m-1}{}_mC_m\cdot{}_{mn}C_m\}$。

又 $\{(1+x)^n-1\}^m=\left\{nx+\frac{n(n-1)}{1.2.}x^2+\ldots\ldots\right\}^m$ 而 x^m 之係數 $=n^m$。

$$\therefore\quad n^m=(-1)^{m-1}\{{}_mC_1\cdot{}_nC_m-{}_mC_2\cdot{}_{2n}C_m+\ldots\ldots\}。$$

16. 設 $n>3$ 試示次之合證。

(1) $a-n(a-1)+\frac{n(n-1)}{1.2.}(a-2)-\ldots\ldots+(-1)^n(a-n)=0$。

(2) $ab-n(a-1)(b-1)+\frac{n(n-1)}{1.2.}(a-2)(b-2)-\ldots+(-1)^n(a-n)(b-n)=0$。

(3) $abc-n(a-1)(b-1)(c-1)+\frac{n(n-1)}{1.2.}(a-2)(b-2)(c-2)-\ldots\ldots$

$+(-1)^n(a-n)(b-n)(c-n)=0$。

〔證〕 $(1-1)^n=1-n+\frac{n(n-1)}{1.2.}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}+\ldots\ldots+(-1)^n=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$n>1$。則 n 變為 $n-1$。

$1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.}+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}=0\ldots\ldots\ldots(2)$

(1)以 a 乘。(2)以 n 乘而相加。則

$$a-n(a-1)+\frac{n(n-1)}{1.2.}(a-2)-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}(a-3)+\dots+(-1)^n(a-n)=0 \quad (3)$$

$n>2$。則 a 變爲 $a-1$。n 變爲 $n-1$。則

$$a-1-(n-1)(a-2)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}(a-3)-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.}(a-4)+\dots\dots$$
$$\dots\dots+(-1)^{n-1}(a-n)=0 \quad (4)$$

(3) 以 b 乘 (4) 以 n 乘而相加。則 $ab-n(a-1)(b-1)+\frac{n(n-1)}{1.2.}(a-2)(b-2)$
$-\dots+(-1)^n(a-n)(b-n)=0 \quad (5)$。

$n>3$。則 a 變爲 $a-1$。b 變爲 $b-1$。n 變爲 $n-1$。則

$$(a-1)(b-1)-(n-1)(a-2)(b-2)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}(a-3)(b-3)-\dots\dots$$
$$\dots\dots+(-1)^n(a-n)(b-n)=0 \quad (6)$$。

(5) 以 c 乘 (6) 以 n 乘而相加。則 $abc-n(a-1)(b-1)(c-1)+$
$\frac{n(n-1)}{1.2.}(a-2)(b-2)(c-2)-\dots\dots+(-1)^n(a-n)(b-n)(c-n)=0$。

17. 於二項展開式中有一中項。其係數爲偶數。

(證) 諸項之係數。除中項外。與初末兩項等距離之各兩項相等。故中項外。其他諸項之和。爲各等項之 2 倍。即偶數。

又凡二項式各項係數之和。由 259 章第一爲偶數。由是知中項之係數爲偶數。

18. $x^2+(a+b)x+ab$ 之 n 方乘。其 x^n 之係數。爲

$$a^n+{}_nc_1{}^2a^{n-1}b+{}_nc_2{}^2a^{n-2}b^2+\dots\dots+b^n$$。

(證) $\{x^2+(a+b)x+ab\}^n=(x+a)^n\times(x+b)^n=$
$=\{x^n+{}_nc_1x^{n-1}a+{}_nc_2x^{n-2}a^2+\dots\dots+{}_nc_rx^{n-r}a^r+\dots\dots+a^n\}$
$\times\{b^n+{}_nc_1b^{n-1}x+{}_nc_2b^{n-2}x^2+\dots\dots+{}_nc_rb^{n-r}x^r+\dots\dots+x^n\}$。

於此兩級數之積。x^n 之係數。爲 $a^n+{}_nc_1{}^2a^{n-1}b+\dots\dots+{}_nc_r{}^2a^rb^{n-r}+\dots$
$\dots+{}_nc_r{}^2ab^{n-1}+b^n$。

19. 設 n 爲正整數。而 P_n 爲 $(1+x)^n$ 展開式各係數之積。

試示 $\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{(n+1)^n}{\underline{|n}}$。

(證) $(1+x)^n$ 一切項之係數。爲 $\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$ 今 r 爲 1, 2, 3, ... n。則得各項

之係數，而其積爲P_n，

即 $$P_n=\frac{\lfloor n}{\lfloor 1\lfloor n-1}\times\frac{\lfloor n}{\lfloor 2\lfloor n-2}\times\ldots\ldots\times\frac{\lfloor n}{\lfloor n-2\lfloor 2}\times\frac{\lfloor n}{\lfloor n-1\lfloor 1}$$
$$=\frac{(\lfloor n)^{n-1}}{\{\lfloor 1\lfloor 2\lfloor 3\ldots\lfloor n-1\}^2}。$$

又 $P_{n+1}=\dfrac{(\lfloor n+1)^n}{\{\lfloor 1\lfloor 2\lfloor 3\ldots\ldots\lfloor n\}^2}$。由是 $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=\dfrac{\lfloor n\,(n+1)^n}{(\lfloor n)^2}=\dfrac{(n+1)^n}{\lfloor n}$。

20. 試示 $(1-x)^n=(1+x)^n-2nx(1+x)^{n-1}+\dfrac{2n(2n-2)}{1.2.}x^2(1+x)^{n-2}-\ldots$

〔證〕 $(1-x)^n=\{(1+x)-2x\}^n=(1+x)^n-n(1+x)^{n-1}2x+$
$\dfrac{n(n-1)}{1.2.}(1+x)^{n-2}(2x)^2-\ldots\ldots=(1+x)^n-2nx(1+x)^{n-1}+$
$\dfrac{2n(2n-2)}{1.2.}x^2(1+x)^{n-2}-\ldots\ldots$

21. n爲正整數，則

$$1-n\frac{1+x}{1+nx}+\frac{n(n-1)}{1.2.}\cdot\frac{1+2x}{(1+nx)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\cdot\frac{1+3x}{(1+nx)^3}+\ldots\ldots=0。$$

〔證〕此級數得變如次，

$$1-n\frac{1}{1+nx}+\frac{n(n-1)}{1.2.}\cdot\frac{1}{(1+nx)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\cdot\frac{1}{(1+nx)^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=\frac{nx}{1+nx}\left\{1-\frac{n-1}{1}\cdot\frac{1}{1+nx}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}\cdot\frac{1}{(1+nx)^2}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}$$
$$=\left(1-\frac{1}{1+nx}\right)^n-\frac{nx}{1+nx}\left(1-\frac{1}{1+nx}\right)^{n-1}=\left(1-\frac{1}{1+nx}\right)^n-\left(1-\frac{1}{1+nx}\right)^n=0。$$

22. 試示 $(a+b+c+d+e)^5=\sum a^5+5\sum a^4b+10\sum a^3b^2+20\sum a^3bc$
$+30\sum a^2b^2c+60\sum a^2bcd+120abcde$。

〔證〕$(a+b+c+d+e)^5$之一切項，爲$\dfrac{\lfloor 5}{\lfloor p\lfloor q\lfloor r\lfloor s\lfloor t}a^pb^qc^rd^se^t$。

但 p, q, r, s, t 爲正整數。則 $p+q+r+s+t=5$。

故由262章得如次。　　　a^5之係數爲1，

a^4b之係數$=\dfrac{\lfloor 5}{\lfloor 4\lfloor 1}=5$，　　　a^3b^2之係數$=\dfrac{\lfloor 5}{\lfloor 3\lfloor 2}=10$，

a^3bc之係數$=\dfrac{\lfloor 5}{\lfloor 3\lfloor 1\lfloor 1}=20$，　　　a^2b^2c之係數$=\dfrac{\lfloor 5}{\lfloor 2\lfloor 2\lfloor 1}=30$。

a^2bcd 之係數 $=\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2\lfloor 1\lfloor 1\lfloor 1}=60$, abcde 之係數 $=\frac{\lfloor 5}{\lfloor 1\lfloor 1\lfloor 1\lfloor 1\lfloor 1}=120$。

23. 設 $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 則

$$a_r-na_{r-1}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a_{r-2}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^r\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}a_0=0$$ 試證之。

但 r 非 3 之倍數，

〔證〕 $(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{1.2.}x^2-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}+\cdots\cdots$

及 $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^2+\cdots\cdots$

於此兩級數之積。x^r 之係數爲

$$a_r-na_{r-1}+\frac{n(n-1)}{1.2.}a_{r-2}-\cdots\cdots(-1)^r\frac{\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}a_0$$。

又於 $(1+x+x^2)^n(1-x)^n$ 卽 $(1-x^3)^n$。其 r 必爲 3 之倍數，今 r 非爲 3 之倍數。故 x^r 之係數爲 0。如題言。

24. 於 $(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^r)^n$ 展開式。n 爲正整數。其與初末項等距兩項之係數各相等。試示明之。

〔證〕 $(1+x+\cdots\cdots+x^r)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$
$$+a_{nr-2}x^{nr-2}+a_{nr-1}x^{nr-1}+a_{nr}x^{nr}\qquad(1)$$

又 $(1+x^{-1}+x^{-2}+\cdots\cdots+x^{-r})^n=a_0+a_1x^{-1}+\cdots\cdots$
$$+a_{nr-2}x^{-nr+2}+a_{nr-1}x^{-nr+1}+a_{nr}x^{-nr}$$。

以 x^{nr} 乘之。爲 $(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^r)^n=a_0x^{nr}+a_1x^{nr-1}+a_2x^{nr-2}+\cdots\cdots$
$$+a_{nr-2}x^2+a_{nr-1}x+a_{nr}\qquad(2)$$

由是 $a_0=a_{nr}$, $a_1=a_{nr-1}$, $a_2=a_{nr-2}$,$\cdots\cdots$

25. 於 $(1+x+x^2)^n$ 展開式中 x 之遞昇方乘之係數。順次爲 $a_0, a_1, a_2,\cdots\cdots$ 則 $a_0^2-a_1^2+a_2^2-\cdots\cdots+a_{2n}^2=a_n$。

及 $a_0^2-a_1^2+a_2^2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}^2=\frac{1}{2}\{a_n-(-1)^na_n^2\}$。試證之。

〔證〕 $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_rx^r+\cdots\cdots+a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n}x^{2n}$,

$(1-x+x^2)^n=a_0-a_1x+\cdots\cdots+(-1)^ra_rx^r+\cdots\cdots-a_{2n-1}x^{2n-1}+a_{2n}x^{2n}$。

由 24。$(1+x+x^2)^n=a_{2n}+a_{2n-1}x+\cdots\cdots+a_1x^{2n-1}+a_0x^{2n}$。

由是於 $(1+x+x^2)^n(1-x+x^2)^n=(1-x^2+x^4)^n$。

x^{2n}之係數。爲$a_0^2-a_1^2+a_2^2-\cdots\cdots+a_{2n}^2$。

而於$(1+x^2+x^4)^n$中x^{2n}之係數，等於$(1+x+x^2)^n$中x^n之係數a_n，

故 $a_0^2-a_1^2+a_2^2-\cdots\cdots+a_{2n}^2=a_n$. $a_0=a_{2n}$, $a_1=a_{2n-1}$, $a_2=a_{2n-2}$, $\cdots$

故 $a_0^2-a_1^2+a_2^2-\cdots\cdots+a_{2n}^2=2\{a_0^2-a_1^2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}^2\}$

$+(-1)^n a_n^2=a_n$，

26. 設$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$。則$a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-\cdots\cdots=0$。

〔證〕 $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_rx^r+\cdots\cdots+a_{2n}x^{2n}$。

由24。 $(1-x+x^2)^n=a_{2n}-a_{2n-1}x+\cdots\cdots+(-1)^r a_{2n-r}x^r+\cdots\cdots+a_0x^{2n}$。

由是於$(1+x+x^2)^n(1-x+x^2)^n=(1+x^2+x^4)^n$中$x^{2n-1}$之係數，爲

$-a_0a_1+a_1a_2-a_2a_3+\cdots\cdots-a_{2n+1}a_{2n}$，

而於$(1+x^2+x^4)^n$中僅有x之偶數方乘之項。故x^{2n-1}之係數爲0

由是$a_0a_1-a_1a_2+a_2a_3-\cdots\cdots\cdots\cdots=0$。

27. 於$(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_r)^n$之展開式，$n$爲小於$r$之整數。則僅含$a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots$諸數量各一個之項之係數爲$\underline{|n}$。

〔證〕 $(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_r)^n$之公項爲$\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}}a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots$。

但α, β, γ, 爲0。或爲正整數，而$\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots=n$，

今$n<r$於此$a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots\cdots a_r$內含有$n$個。其餘$n-r$個，則不含有於其內。故$\alpha, \beta, \gamma,\cdots\cdots\cdots$內含有1或爲0，

由是$a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots$各一個之項之係數爲$\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\cdots\cdots}$其分母之因子爲$\underline{|1}$或爲$\underline{|0}$而成者。故爲$\underline{|n}$，

28. $(1+x)$, $(1+x+x^2)\cdots\cdots\cdots(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)$之連乘積。其與初末二項等距各項之係數相等。又凡奇數項係類之和。等於偶數項係數之和。且各爲$\frac{1}{2}\underline{|(n+1)}$。

〔證〕 $(1+x)(1+x+x^2)\cdots\cdots\cdots(1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots+x^n)$

$$=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots+a_{\frac{1}{2}n(n+1)}x^{\frac{1}{2}n(n+1)} \quad (1)$$

於(1)以x^{-1}代其x。則

$$(1+x^{-1})(1+x^{-1}+x^{-2})\cdots\cdots(1+x^{-1}+x^{-2}+\cdots\cdots\cdots+x^{-n})$$

$$=a_0+a_1x^{-1}+a_2x^{-2}+\cdots\cdots\cdots+a_{\frac{1}{2}n(n+1)}x^{-\frac{1}{2}n(n+1)} \quad (2)$$

於(2)以 $x^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 乘之。則 $(1+x)(1+x+x^2)\cdots\cdots(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)$

$$=a_{\frac{1}{2}n(n+1)}+\cdots\cdots\cdots+a_0x^{\frac{1}{2}n(n+1)}\text{。}$$

由是 $a_0=a_{\frac{1}{2}n(n+1)}$, $a_1=a_{\frac{1}{2}n(n-1)}$, ...

於(1) $x=1$。則 $2.3.4\cdots\cdots\cdots(n+1)=a_0+a_1+\cdots\cdots\cdots+a_{\frac{1}{2}n(n+1)}$。則奇數項之係數和。加偶數項之係數和 $=\lfloor n+1$。

又 $x=-1$。則 $0=a_0-a_1+a_2\cdots\cdots\cdots$ 即奇數之係數和。減偶數項之和數和 $=0$。由是此各項之和 $=\frac{1}{2}\lfloor n+1$。

29. 於 $(1+x+x^2)^n$ 展開式。其 x^n 之係數爲

$$1+\frac{n(n-1)}{1^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2.2^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1^2.2^2.3^2}+\cdots$$

〔證〕 $(1+x+x^2)^n=\{x(1+x)+1\}^n$

$$=x^n(1+x)^n+\frac{n}{1}x^{n-1}(1+x)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2.}x^{n-2}(1+x)^{n-2}+\cdots$$

於此級數。其 x^n 之係數爲 $1+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}+\cdots\cdots$

$$=1+\frac{n(n-1)}{1^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2.\ 2^2}+\cdots\cdots$$

30. 設八個奇數之和爲18。則其方法之數。有792。但同一之數。不得重用。而計加法之順序。須以各異之方法入算。試證之。

〔證〕 八個奇數之和爲18。則其中之最大奇數爲11。何則。因最小之奇數爲1。而 $1+1+1+1+1+1+1+$ 最大奇數 $=18$。

故於 1, 3, 5, 7, 9, 11, 中任取八個數。使其和爲18。

由是於 $(x^1+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11})^8$ 之展開式。其 x^{18} 之係數。即爲所求方法之數。而 $(x^1+x^3+x^5+x^7+x^9+x^{11})^8=x^8(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})^8$。故可於 $(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})^8$ 中。求其 x^{10} 之係數。而

$$(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10})^8=\left(\frac{1-x^{12}}{1-x^2}\right)^8=(1-x^{12})^8(1-x^2)^{-8}$$

$$=(1-8x^{12}+\cdots\cdots\cdots)\left(1+8x^2+\cdots\cdots\cdots+\frac{8.9.10.11.12.}{\lfloor 5}x^{10}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=1+\cdots\cdots+\frac{8.9.10.11.12}{\lfloor 5}x^{10}+\cdots\cdots\cdots\quad\therefore\ x^{10}\text{ 之係數}=792\text{。}$$

第貳拾壹編

斂級數及發級數

264. **級數**(Series) 其各項之諸數量。依某定律順次而成者也。

例如1, 2, 3, 4, 以順次增1爲定律。

又如$\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$。以順次增2而開平方爲定律。凡若此者。皆謂之級數。

級數至第若干項而止。其項數有限者。謂之有限級數，級數之項以次連續而無有終止者。謂之無限級數。

凡等比級數之公比。其數小於1者。則其n項之和。不能無限增大。(此於前已詳述之)蓋以n增至極大時，其和雖亦次第增大，而能與一個定數量漸相切近，其和之大無論如何。總不能逾越其定數量，故級數雖無限。其和之大。非必無限也。

級數自首項以下至n項，其n漸增，其和漸近於其定限s。迨n充分增大時，其和與s之差甚微。則此級數。謂之斂級數(Convergent)。而s爲此級數之和。

例$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$其和爲2。此之謂斂級數。

凡級數自首項以下至n項。若n增至無限時。其和亦爲無限。則此級數謂之發級數。(Divergent)。

例$1+2+3+4+\cdots\cdots$此之謂發級數。

自級數首項至於n項，若n增至無限時。其和非爲無限大，而亦無切近之定數量者。此等級數。不得謂之斂級數，又不得謂之發級數，而稱謂不定級數。或中性級數(Oscillating)。

例$1-1+1-1+\cdots\cdots$。若n爲奇數，其和爲1。若n爲偶數，其和爲o，此之謂不定級數。

不定級數之各項有正亦有負。而决不能爲同符號。申明之如次。

凡各項之符號相同者。則此級數。必非不定級數。必爲斂級數或發級數。何則。有同符號之項。其級數n項之和。因n漸增而次第增大。迨n增至無限時。其和或無限大而爲發級數。或近於有限數量而爲斂級數。要不出乎此二者也。

265. 定理 級數之各項爲有限數量而符號相同者。則其級數必爲發級數。

何則。其各項爲有限數量。則可取最小項之有限數量a。而知此級數各項之和。必比na爲大。惟na。因n之增而增大。故此級數n增至無限時。其和亦增至無限。即爲發級數。

266. 記法 某級數連續之諸項。以$u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots\cdots$表之。即$u_1$爲首項。$u_2$爲第二項。$u_3$爲第三項。以下仿此。而凡爲無限級數。不能一一盡記。故以u_n表其壹切之項。即表其級數之第n項。

以U_n表其首項以下n項之和。而級數爲斂級數者。則以U表其全項之和。(即無限項之和)。由是

$$U=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots\cdots\cdots$$

及 $$U_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$$

267 斂級數之關係 設$u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots\cdots u_n\ u_{n+1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$其級數爲斂級數者。則有關係如次。

$U_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$當n增至無限時。則其和切近於U。

由是知n+1項之和U_{n+1}。較n項之和U_n。尤近於定限U。即$U_n, U_{n+1}, U_{n+2}, \cdots\cdots$次第漸近於U。其各和與U之差。能因n增大而遞次減小至於極微之數。

今 $$U_{n+1}=U_n+u_{n+1}$$

$$U_{n+1}-U_n=u_{n+1},$$

$$U_{n+2}-U_n=u_{n+1}+u_{n+2},$$

$$U_{n+3}-U_n=u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U-U_n=u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+u_{n+4}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故級數爲斂級數。必其n增至無限時。其第n+1項減小至無限。

又自其第(n+1)以下若干項之和。必更小於任何之小數。

例如級數$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$雖n增至無限時。其第n項亦減小至無限。然而非爲斂級數。

何則。第(n+1)項以下連續n項之和$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$。比其最小項$\frac{1}{2n}$之n倍即$\frac{1}{2}$爲大。則此級數之和。不能小於任何之小數。故此級數非爲斂級數。

268. 注意 本編中所論之級數。若其各項之符號。皆爲正者。則此等級數爲斂級。或爲發級。與皆爲負號者同。故各項之符號。俱爲正。與俱爲負。皆可用正符號以表示之。

級數之爲斂級數。抑爲發級數。可由次之定理而知之。

269. 定理一 若級數之各項。小於他斂級數相對應之項者。則此級數爲斂級數。

令第一級數爲$U=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

又 令第二級數爲$V=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

而 $u_1<v_1,\quad u_2<v_2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

總之其對於r之任何正整數。而得$u_n<v_n$,

由是$U<V$。

V爲有限。則U亦必有限。即得本定理之證。蓋以其和爲有限。而其各項之符號相同故也。

由同理。若級數之各項。大於他發級數相對應之項者。則可證得此級數爲發級數。

〔第一例〕級數$\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}\cdots\cdots$爲斂級數。試證明之。

$$U=\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots\cdots$$

$$V=\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.2}+\frac{1}{1.2.2.2}+\cdots\cdots$$

U之各項。比V之相對應之項爲小。而V爲等比級數。其公比爲$\frac{1}{2}$。故V爲斂級數。

惟V爲斂級數。而$U<V$。故U爲斂級數。

〔第二例〕級數$\frac{a+x}{b+x}+\frac{(a+x)(2a+x)}{(b+x)(2b+x)}+\frac{(a+x)(2a+x)(3a+x)}{(b+x)(2b+x)(3b+x)}+\cdots\cdots$

其a, b及x俱爲正。而$a<b$。則此級數爲斂級數。

此級數之各項。比$\frac{a+x}{b+x}+\frac{(a+x)^2}{(b+x)^2}+\frac{(a+x)^3}{(b+x)^3}+\cdots\cdots$之相應各項爲小。

何則。以a, b及x俱爲正。而$b>a$。玆設r爲大於1之任何正整數。則$\frac{ra+x}{rb+x}<\frac{a+x}{b+x}$。

而此第二級數爲斂級數。故原級數亦爲斂級數。

餘論 欲確定第一級數之爲斂級數。不必如本定理將其各項一一考其比第二級數之相應各項爲小而後知之。但從其有限之若干項以下之項。其比第二斂級數之相應項爲小者。即可定其級數爲斂級數。

何則。以級數有限項之和。其數既有限。而以後之項能爲斂級。即原級數爲斂級數。

〔例〕試證$1+\frac{4}{\underline{|2}}+\frac{4^2}{\underline{|3}}+\frac{4^3}{\underline{|4}}+\frac{4^4}{\underline{|5}}+\frac{4^5}{\underline{|6}}+\frac{4^6}{\underline{|7}}+\cdots\cdots$爲斂級數。

此級數之第六項及第六項以下之項。爲$\frac{4^5}{\underline{|6}}+\frac{4^6}{\underline{|7}}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

比第二級數。$\frac{4^5}{5\underline{|5}}+\frac{4^6}{5^2\underline{|5}}+\cdots\cdots$之相應項爲小。而此第二級數有公比$\frac{4}{5}$而爲斂級數。故原級數亦爲斂級數。

270. 定理二 兩級數相應項之比常爲有限。則此兩級數俱爲斂級數。或俱爲發級數。

設兩級數爲　　$U=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

及　　$V=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

其諸項皆爲正數量。故由113章。知$\frac{U}{V}$爲在諸分數$\frac{u_r}{v_r}$內最大及最小分數之間。故$\frac{U}{V}$爲有限。

惟因$\frac{U}{V}$爲有限。故U爲有限。V亦爲有限。U爲無限。則V亦爲無限。即U爲斂級數。V亦爲斂級數。U爲發級數。V亦爲發級數。

例如兩級數$\frac{8}{2.3}+\frac{16}{3.4}+\cdots\cdots+\frac{8n}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots\cdots$

及 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$二者俱爲斂級數。或俱爲發級數。

何則。其第r項之比爲$\frac{8r}{(r+1)(r+2)}:\frac{1}{r}=\frac{8r^2}{(r+1)(r+2)}$

$=8\left(1-\frac{1}{r+1}\right)\left(1-\frac{2}{r+2}\right)$而r爲1, 2, 3,………故此比之值不大於8。由是$\frac{U}{V}$爲有限。由267章。已知V爲發級數。故U亦爲發級數。

271. 定理三 於級數若干項之後。其各後項與其前項之比。恆小於某定數量。但某定數量爲小於1者。則其級數爲斂級數。

設自第r項之後。各項與前項之比。恆小於定數量k。但$k<1$。

則 $\frac{u_{r+1}}{u_r}<k,\quad \frac{u_{r+2}}{u_{r+1}}<k,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

即 $u_{r+1}<u_rk,\quad u_{r+2}<u_{r+1}k<u_rk^2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

由是$u_r+u_{r+1}+u_{r+2}+\cdots\cdots<u_r(1+k+k^2+\cdots\cdots)<\frac{u_r}{1-k}$。但k小於1。

此級數第r項以前r項之和原爲有限。而自r項至無限項之和。恆小於有限數$\frac{u_r}{1-k}$而爲斂級數。則其全級數爲斂級數可知。

272. 定理四 於級數若干項之後。其各後項與其前項之比。若等於1或大於1。則其級數爲發級數。

第一於第r項以後之各項。與其前項之比。爲等於1。

則 $u_r=u_{r+1}=u_{r+2}=u_{r+3}=\cdots\cdots\cdots\cdots$

故 $u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+\cdots\cdots+u_{r+n}=nu_r$,

而nu_r因n漸增而大。當n增至無限時。nu_r亦增至無限。故此級數爲發級數。

第二於第r項以後之各項。與其前項之比。爲大於1。

則 $u_{r+1}>u_r$, $u_{r+2}>u_{r+1}>u_r$,…………

由是 $u_{r+1}+u_{r+2}+u_{r+3}+\cdots\cdots+u_{r+n}>nu_r$.

而 nu_r 因n漸增而大。與第一同。故此級數爲發級數。

［第一例］級數 $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{4}+\cdots\cdots+\frac{2^{n-1}}{n}+\cdots\cdots$ 其第 $n+1$ 項。與其前第n項之比。爲 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^n}{n+1}\div\frac{2^{n-1}}{n}=\frac{2n}{n+1}$。惟以 $n>1$。所以

$2n>n+1$。 由是知此比 $\frac{2n}{n+1}>1$。

故此級數爲發級數。

［第二例］級數 $1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots\cdots$ 其第 $n+1$ 項與第n項之比。爲 $(n+1)^2x^n\div n^2x^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2x$,

今定 $x<1$。設一定數量爲k。但k爲在x與1之間。即 $x<k<1$。而設此k爲大於前之比。

即 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2x<k$。 $\therefore\ \left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{x}<\sqrt{k}$。

由是 $n>\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}-\sqrt{x}}$。

如上之關係。可得k之值。然以此級數r項以後各項之比爲小於k。故 $x<1$。此級數爲斂級數。

若 $x=1$。則此級數爲 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots$ 易知其爲發級數。

又若 $x>1$。則此級數比 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots$ 爲大。其爲發級數。自無待言。

273. 餘論 凡級數若干項後。其各項之比 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$。恆小於1。雖可由定理三而知此級數爲斂級數。然若此項數n增至無限。此比殆同於1。則不能由定理三。決定其爲斂級數抑爲發級數。

例 $\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

其比 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n^k}{(n+1)^k}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^k=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}$.

由是k爲正。則$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$大於1。故此比常小於1。然n增至無限時，此比殆等於1。

即不能由定理三決定此級數爲斂級數與否。凡若此者。不可不用別法。以推求之。

274. 定理 級數$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\cdots$若k大於1。則爲斂級數若k等於1或小於1。則爲發級數。

第一 $k>1$。此級數之各項。比其前項爲小。故有次之關係。

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}<\frac{2}{2^k}$$

$$\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}<\frac{4}{4^k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{nk}}+\frac{1}{(2^n+1)^k}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^k}<\frac{2^n}{2^{nk}}。$$

由是知全級數。比$\frac{1}{1^k}+\frac{2}{2^k}+\frac{4}{4^k}+\cdots\cdots+\frac{2^n}{2^{nk}}+\cdots\cdots$爲小。

即比 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{2(k-1)}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n(k-1)}}+\cdots\cdots$爲小。

後之級數$k>1$。即公比$\frac{1}{2^{k-1}}<1$。即爲公比小於1之等比級數。故原級數。爲斂級數。

第二 $k=1$。則原級數爲$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$如次集合之。

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\cdots\cdots$$
$$+\left[\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-2}+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right]+\cdots\cdots$$

於其括弧內各羣之値。皆比$\frac{1}{2}$爲大。何則。

以$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-2}+2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}>\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}。$$

由是 $1+\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\cdots\cdots$

$$+\left[\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-2}+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right]$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots \text{至 } n+1 \text{ 項,}$$

故 $k=1$。原級數 $>1+\frac{1}{2}n$。

令 n 爲無限,則 $1+\frac{1}{2}n$,亦爲無限。故其級數爲發級數。

第三 $k<1$。則以原級數 $\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\cdots\cdots$ 之各項,大於 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots$ 之相應項,則

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\cdots\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots$$

而 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$ 爲發級數。故原級數之 $k<1$。則爲發級數。

275. 注意 欲決定他種級數爲斂級或發級與否。可以前章之級數爲基本。由定理一及定理二之方法決定之。

〔第一例〕設級數之公項爲 $\frac{2n}{n^2+1}$。試決定此級數爲斂級數,抑爲發級數。

$n>1$。 則 $\frac{2n}{n^2+1}>\frac{1}{n}$。 即 $\Sigma\frac{2n}{n^2+1}>\Sigma\frac{1}{n}$,

但 $\Sigma\frac{1}{n}$ 爲發級數。故 $\Sigma\frac{2n}{n^2+1}$ 爲發級數。

〔第二例〕級數之公項爲 $\frac{n+2}{n^3+1}$。試決定此級數爲斂級數,抑爲發級數。

令 $\frac{n+2}{n^3+1}<\frac{n+2}{n^3}<\frac{3n}{n^3}=\frac{3}{n^2}$。由是 $\Sigma\frac{n+2}{n^3+1}<3\,\Sigma\frac{1}{n^2}$。

但由274章，可證知$\sum\frac{1}{n^2}$爲斂級數。故$\sum\frac{n+1}{n^3+1}$爲斂級數。

276. 項之符號 級數之諸項，其符號相同者。原可用前之法則。決定其爲斂級數或發級數，然使級數之各項有正有負，則將此級數之各項。均變爲正項。以決定之，若爲斂級數，卽定原級數爲斂級數，何則。凡級數全項皆正，而能爲斂級數者，則變其中一部分之項之符號，仍不失其爲斂級數也，

然變其級數之負項爲正而爲發級數者。則原級數未必爲發級數，

例　$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$爲斂級數(見277.章之例)。

而　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$爲發級數，

凡全項有同符號而爲斂級數者。謂之絕對斂級數。(Absolutely Convergent)，

若　$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$不得謂之絕對斂級數，

277. 定理五 凡級數之各項有正負相間者，則可由次之定理直知其爲斂級數。

級數之項正負相間，其各項比其前項爲小，而其項之絕對值。可小至無限者。則此級數爲斂級數，

設此級數爲$u_1-u_2+u_3-\cdots\cdots\cdots\cdots\pm u_n\mp u_{n+1}\pm\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

可記其級數如次之形，

$$U=u_1-u_2+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

及　$U=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-(u_6-u_7)-\cdots\cdots\cdots\cdots$

惟以$u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots$故(u_2-u_3)，(u_3-u_4)，(u_4-u_5)，$\cdots\cdots$俱爲正。

故於第一式$U>u_1-u_2$，於第二式$U<u_1$，

乃知其和U在u_1及u_1-u_2之間。故U爲有限值，

又從原級數減U_n。則爲

$U-U_n=\pm(u_{n+1}-u_{n+2})\pm(u_{n+3}-u_{n+4})\pm\cdots\cdots$。換其形。而爲

$U-U_n=\pm u_{n+1}\mp(u_{n+2}-u_{n+3})\mp(u_{n+4}-u_{n+5})\mp\cdots\cdots$，則知 $U-U_n$ 之絕對值，為在於 $u_{n+1}-u_{n+2}$ 與 u_{n+1} 之間，而 $U-U_n$ 當 n 增至無限時，其值為無限小。故此級數為歛級數。

例 $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ 為歛級數。

何則。以 $U=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots\cdots$

又 $U=\frac{1}{1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\cdots\cdots\cdots$

故其和 U 在 $\frac{1}{2}$ 與 1 之間，其值有限。

又 $U-U_n=\pm\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\pm\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)\pm\cdots\cdots$

及 $U-U_n=\pm\frac{1}{n+1}\mp\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\mp\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)\mp\cdots\cdots$

卽 $U-U_n$ 之絕對值，為在於 $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$ 與 $\frac{1}{n+1}$ 之間，當 n 增至無限時，其值無限小。故為歛級數，

又 $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots\cdots$ 非為歛級數。

何則，同前法，知其和為在 $\frac{2}{1}$ 及 $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}$ 之間為有限，然雖為有限，而其第 n 項 $\frac{n+1}{n}$，當 n 增至無限時，其值非無限小。故此級數非為歛級數，卽為不定級數，

278. **最要三級數**之歛級數，可用前章之法則考證之如次。

〔第一〕二項級數。

卽 $1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{\underline{|n}}x^n+\cdots\cdots$

m 為正整數，則此級數之項數為有限。若 m 非為正整數（為分數或負數），則其 $m, m-1, m-2, m-3,\cdots\cdots$ 之諸因子中，無一為 0 者，故此級數之項，連續至無限，

m非爲正整數。欲決定其爲斂級數與否。須推究其後項與前項之比。即$u_{n+1}:u_n$。

惟 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)(m-n+1)}{\underline{|n}}x^n:\frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{\underline{|n-1}}x^{n-1}$

$$=\frac{m-n+1}{n}x=-x\left(1-\frac{m+1}{n}\right)。$$

令n大於m+1。則$1-\frac{m+1}{n}$爲正數。故x爲正。則u_{n+1}及u_n符號相異。即其各項變爲正負相間者。若x爲負。則u_{n+1}及u_n符號相同。即全項之符號爲相同者。

惟n漸增大。$1-\frac{m+1}{n}$次第近於1。

故n充分增大時。$\frac{u_{n+1}}{u_n}$之絕對值。殆近於x。

若是x如小於1。則$\frac{u_{n+1}}{u_n}$自初項或若干項後。常小於1。由271章。此連次各項之絕對值相加所成之級數。爲斂級數。故此級數之項。無論其符號異同如何。要皆爲斂級數。

即凡二項級數x之值小於1者。爲斂級數。

〔註〕此級數$x=1$。則$n>-1$爲斂級數。而$x=-1$。則$n>0$爲斂級數。(見338章)。

〔第二〕指數級數即$1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\dots\dots\frac{x^n}{\underline{|n}}+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

其後項與前項之比。爲$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^n}{\underline{|n}}\div\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}=\frac{x}{n}$。

而此比至若干項以後。n比x爲大。其值乃小於1。故此級數對於x之任意值。皆爲斂級數。

〔第三〕對數級數即$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots\dots-(-1)^n\frac{x^n}{n}+\dots\dots\dots$

以 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\div(-1)^n\frac{x^n}{n}=-\frac{xn}{n+1}=-x\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$。

由是觀之。x小於1。則$\frac{u_{n+1}}{u_n}$之值爲小於1。

所以對數級數。凡x之値在 -1 及 $+1$ 之間者。則爲斂級數。

若 $x=1$。則此級數爲 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots$。由定理五而知爲斂級數。

若 $x=-1$。則此級數爲 $-(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots)$ 知爲發級數，(274章)。

279. 無限數因子之積 無限數因子之積之斂級數，及其他之斂級數所有諸定理，詳載於後編，(見337章)惟於次章所示之二定理爲最緊要。不可不先證明之。

280. 兩級數之積 設兩級數，爲

$$U=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V=v_0+v_1x+v_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+v_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此皆爲斂級數。而第三級數。爲

$$P=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)x+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)x^2+\cdots\cdots$$
$$+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots\cdots+u_nv_0)x^n+\cdots\cdots$$

其x之任意方乘係數，等於前兩級數，乘積中x之同方乘係數，若合於次之兩例。則P等於 $U\times V$ 而爲斂級數，

(1)兩級數U及V其各項皆爲正者，

(2)兩級數U及V雖有負項。設變爲正項仍不失爲斂級數者。

〔註〕此章及此編全體所載，蓋從可西(Caucy)氏解析幾何學。畧爲變更而得者。

〔第一〕U及V其各項俱爲正者。則

$$U_{2n}=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots\cdots+u_nx^n+\cdots\cdots+u_{2n}x^{2n},$$

及 $V_{2n}=v_0+v_1x+v_2x^2+\cdots\cdots+v_nx^n+\cdots\cdots+v_{2n}x^{2n},$

$\therefore\ U_{2n}\times V_{2n}=u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)x+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_0)x^2+\cdots\cdots+(u_0v_{2n}+u_1v_{2n-1}+\cdots\cdots+u_nv_n+\cdots\cdots+u_{2n-1}v_1+u_{2n}v_0)x^{2n}+x^{2n}$ 以上之項，

即 $U_{2n}\times V_{2n}=P_{2n}+x^{2n}$ 以上之項，

由是 $U_{2n}\times V_{2n}>P_{2n}$，

又 $P_{2n}=U_n\times V_n+$ 其他之項。

由是 $P_{2n}>U_n\times V_n$，

故知 P_{2n} 在於 $U_n\times V_n$ 與 $U_{2n}\times V_{2n}$ 之間。

今兩級數U及V爲斂級數。故n增至無限時。U_{2n}及U_n漸近於U。V_{2n}及V_n漸近於V。即知U_{2n}及U_n之極限爲U。V_{2n}及V_n之極限爲V.

由是$U_{2n}\times V_{2n}$及$U_n\times V_n$之極限爲$U\times V$。即此兩積之中間P_{2n}之極限爲$U\times V$。即$P=U\times V$。

是即證得U及V無限級數之積等於P。而爲斂級數。

〔第二〕U及V其各項非皆爲正者。

可使其負項爲正。而變U及V爲U′及V′。

P由於U及V所成之級數。依同法令P′爲由於U′及V′所成之級數。

由是$U_{2n}\times V_{2n}-P_{2n}=(U_{2n}\times V_{2n})$級數中$x^{2n}$以上之項。

同法$U'_{2n}\times V'_{2n}-P'_{2n}=(U'_{2n}\times V'_{2n})$級數中$x^{2n}$以上之項。

然以$U_{2n}\times V_{2n}$有負項。故$(U_{2n}\times V_{2n})$級數中x^{2n}以上之項。不大於$(U'_{2n}\times V'_{2n})$級數中x^{2n}以上之項。即$U_{2n}\times V_{2n}-P_{2n}$不大於$U'_{2n}\times V'_{2n}-P'_{2n}$

但變U及V之負項爲正。而U′及V′尙爲斂級數。

由是依第一之證法。n增至無限。P'_{2n}之極限。等於$U'_{2n}\times V'_{2n}$之極限。即$U'\times V'$。蓋n無限大時。$U'_{2n}\times V'_{2n}-P'_{2n}$爲無限小也。

然則不大於$U'_{2n}\times V'_{2n}-P'_{2n}$者之$U_{2n}\times V_{2n}-P_{2n}$。當n增至無限時。其小愈爲無限可知。

故$U'\times V'=P'$。則$U\times V=P$。

〔注意〕兩級數U及V爲斂級數。若變其負項爲正。而非爲斂級數者。則其級數P未必爲斂級數。若P非爲斂級數。則不能有$U\times V=P$之關係。何則。因P非爲有限値。故於P內x之某特別方乘之係數。雖等於$U\times V$內x之同方乘係數。而不能等於$U\times V$。

〔註〕U或V爲絕對的斂級數。則可證得P爲斂級數。(見庫利氏代數學第二卷127頁)。

281. 恆同兩級數之定理 設兩級數

$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$ 及 $b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots$

爲歛級數。而對於x之任何值.此兩級數恆相等。則 $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$,..................

何則,此兩級數俱爲歛級數,則其差亦爲歛級數可知。

由是 $a_0-b_0+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots\cdots=0$。 (1)

此級數對於x之任何值而爲 0,故此級數對於 x 之任何值爲歛級數。

若 $x=0$。則 $a_0-b_0=0$。 $\therefore\ a_0=b_0$。

由是 $x\{a_1-b_1+(a_2-b_2)x+(a_3-b_3)x^2+\cdots\cdots\}=0$。 (2)

惟(1)對於x之任何值。皆爲歛級數。設x任意之值爲 x_1。其級數 $a_2-b_2+(a_3-b_3)x_1+\cdots\cdots$等於有限值 L_1。

由是(2)爲 $x_1\{a_1-b_1+x_1L_1\}=0$。

而此方程式。對於x之任何值無不合理。故當x之值極小時 a_1-b_1 與 L_1 之差無限小。其極限 $a_1=b_1$。

由同法於 $x_1\{a_2-b_2+x_1L_2\}=0$。 $a_2=b_2$。

順次 $a_3=b_3$, $a_4=b_4$,..................................。

由是知兩歛級數。對於x之任何值而兩相等者。則此兩歛級數x之同方乘係數各相等。

此特例有限項之兩級數。已於91章證明之。

例題二十六

試決定次之各級數爲歛級數或發級數。

1. $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{3.4}+\dfrac{1}{5.6}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\cdots\cdots\cdots$

〔解〕將此級數變之 $\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\right)+\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+2}\right)+\cdots\cdots=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots$

由定理五之例解。此級數爲歛級數。

2. $\dfrac{1}{a(a+b)}+\dfrac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\dfrac{1}{(a+4b)(a+5b)}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕此級數變爲 $\frac{1}{b}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}+\cdots\cdots\cdots\right)$

故由定理五。此級數爲斂級數。

3. $\frac{3}{4}+\frac{3.4}{4.6}+\frac{3.4.5}{4.6.8}+\cdots\cdots+\frac{3.4\cdots\cdots(n+2)}{4.6\cdots\cdots(2n+2)}+\cdots\cdots\cdots$

〔解〕$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3.4\cdots\cdots(n+2)\ (n+3)}{4.6\cdots\cdots(2n+2)(2n+4)}\div\frac{3.4\cdots\cdots(n+2)}{4.6\cdots\cdots(2n+2)}=\frac{n+3}{2n+4}=\frac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{4}{n}}$。

故此比 n 爲 ∞。則其極限爲 $\frac{1}{2}$ 而常小於 1。由是由定理三。此級數爲斂級數。

4. $\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.7}+\frac{3.5.7}{4.7.10}+\cdots\cdots+\frac{3.5.7\cdots\cdots(2n+1)}{4.7.10\cdots\cdots(3n+1)}+\cdots\cdots\cdots$

〔解〕$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+3}{3n+4}$ 如前例證得爲斂級數。

5. $\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\cdots\cdots+\frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)}{3.6.9\cdots\cdots\cdots3n}+\cdots\cdots\cdots$

〔解〕$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+1}{3n+3}<\frac{2}{3}$ 故亦爲斂級數。

6. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\cdots\cdots$

〔解〕$U=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x+n-1}+\cdots\cdots\cdots$

又由定理二之例。$V=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ 爲發級數。

而 $\frac{u_n}{v_n}=\frac{n}{x+n-1}$ 其對於 n 之任何値皆小於 1。則其値有限。故由定理二。V 爲發級數。U 亦爲發級數。

7. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+3x}+\cdots\cdots\cdots$

〔解〕$x=\frac{1}{y}$ 則此級數爲 $y\left(\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+3}+\cdots\cdots\right)$ 而由前例

$\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y+3}+\cdots\cdots$ 爲發級數。故 y 爲有限。則原級數爲發級數。

8. $\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕此級數比 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots$ 爲小。若 $x>1$。則 $\frac{1}{x}<1$。故第二之級數爲斂級數。而原級數亦爲斂級數。

又若 $x=1$。則原級數爲 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$ 故爲發級數。

又若 $x<1$。則原級數比 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$ 爲大。故爲發級數。

9. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{1+x^{2n}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕此級數比 $1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots$ 爲小。

$x<1$ 則第二級數爲斂級數。故原級數亦爲斂級數。

$x=1$ 則原級數爲 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 故爲發級數。

$x>1$ 則原級數比 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ 爲大。故爲發級數。

10. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+3x^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+nx^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕$x=1$ 則此級數爲 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ 故爲發級數。

又 $x<1$ 則此級數比 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ 爲大。故爲發級數。

又此級數比 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots$ 爲小。而於 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots\cdots$ 若 $x>1$ 則爲斂級數。故 $x>1$ 原級數爲斂級數。

11. $\frac{1}{1.2}+\frac{x}{2.3}+\frac{x^2}{3.4}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕此級數比 $1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$ 爲小。而 $x<1$。此第二級數爲斂級數。故 $x<1$。此級數爲斂級數。

$x=1$ 則此級數爲 $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots=1$。

故 $x=1$。則此級數爲斂級數。

又 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}\div\frac{x^{n-1}}{n(n+1)}=\frac{xn}{n+2}=x-\frac{2x}{n+2}$。而 $x>1$ 則 x 之値爲有限。當 n 增至極大時。$x-\frac{2x}{n+2}$。殆等於 x。惟 x 大於 1。故

$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$。乃由定理四而知爲發級數。

12. $1-\frac{x}{1+a}+\frac{x^2}{1+2a}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{1+na}+\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 $x<1$ 及 $x=1$。則各項次第減小。且正負相間。故爲斂級數。又 $x>1$。則 n 爲無限大。其値亦無限大。故爲發級數。

13. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}>\frac{n}{n^2}$。 卽 $u_n>\frac{1}{n}$。而 n 爲 $1, 2, 3,\cdots\cdots\cdots$ 則此級數比 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$ 之發級數爲大。故爲發級數。

14. $1+\frac{2^2-1^2}{2^2+1^2}+\frac{3^2-2^2}{3^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n^2-(n-1)^2}{n^2+(n-1)^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 $u_n=\frac{2n-1}{2n^2-(2n-1)}>\frac{2n}{2n^2}$。 卽 $u_n>\frac{1}{n}$。故如前例證得此級數爲發級數。

15. $\frac{m}{x+m}+\frac{m^2}{x+2m}+\frac{m^3}{x+3m}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{m^{n+1}}{x+(n+1)m}\div\frac{m^n}{x+nm}=\frac{m(x+nm)}{x+(n+1)m}=\left\{1-\frac{m}{x+(n+1)m}\right\}m$。
$m<1$。則此比小於 1。故爲斂級數。
又 $m\nless 1$。則此比不小於 1。故爲發級數。

16. $\frac{1}{x+1}+\frac{m}{x+m}+\frac{m^2}{x+m^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 此級數比 $\frac{1}{x}+\frac{m}{x}+\frac{m^2}{x}+\cdots\cdots\cdots$ 爲小。而 $m<1$。則此第二級數爲斂級數。故原級數 $m<1$ 爲斂級數。

又 $m=1$。則原級數爲 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}+\cdots\cdots$ 而爲發級數。

又 $m>1$。則 $u_n=\frac{m^n}{x+m^n}$。以 n 無限大。其值亦無限大。故爲發級數。

17. $\frac{(1+a)(1+b)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{(2+a)(2+b)}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{(n+a)(n+b)}{n(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 $u_n=\frac{(n+a)(n+b)}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+(a+b)n+ab}{n^3+3n^2+2n}>\frac{n^2}{n^3+3n^2+2n}>\frac{n^2}{6n^3}$。

卽 $u_n>\frac{1}{6n}$。∴ 原級數 $>\Sigma\frac{1}{6n}$。卽 $>\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right)$

由是原級數爲發級數。

18. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{1+2\sqrt{3}}+\frac{3}{1+3\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{n}{1+n\sqrt{(n+1)}}+\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 $u_n=\frac{n}{1+n\sqrt{(n+1)}}>\frac{n}{2n\sqrt{(n+1)}}$。卽 $\frac{1}{2\sqrt{(n+1)}}>\frac{1}{2(n+1)}$。

∴ 此級數 $>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots\right)$。故爲發級數。

19. $\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{4}}{4+\sqrt{4}}+\cdots\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 $u_{n-1}=\frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}>\frac{\sqrt{n}}{2n}$。 卽 $>\frac{1}{2\sqrt{n}}>\frac{1}{2n}$。

∴ $U>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)$。故爲發級數。

20 $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\cdots\cdots$

〔解〕 n 若大於 4。則 $u_n=\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>\frac{1}{2(n+1)}$。

∴ $U>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots\cdots\right)$。故爲發級數。

21. $(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{5}-2)+\cdots\cdots+(\sqrt{n^2+1}-n)+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 $u_n=\sqrt{(n^2+1)}-n=\frac{1}{\sqrt{(n^2+1)}-n}>\frac{1}{2n+1}$。故爲發級數。

22. $\frac{1}{1^k}+\frac{x}{3^k}+\frac{x^2}{5^k}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{(2n+1)}k+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 $\frac{u_{n+1}}{u^n}=\frac{x^n}{(2n+1)^k}\div\frac{x^{n-1}}{(2n-1)^k}=x\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)^k$，x 若大於 1。則此比大

於1。x若小於1。則此比小於1。由是因$x>1$或$x<1$。定此級數爲發級數或斂級數。

若$x=1$。則此級數爲$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{7^k}+\cdots\cdots$而

$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{7^k}+\cdots\cdots<\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\cdots\cdots$ 故$k>1$。則此級數爲斂級數。

又$k=1$。則此級數$=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots$故爲發級數。

又$k<1$則$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{5^k}+\cdots\cdots$之各項比$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$之相應項爲大。故爲發級數。

23. $\frac{2}{2}+\frac{4x}{5}+\frac{6x^2}{10}+\cdots\cdots+\frac{2nx^n}{n^2+1}+\cdots\cdots$

(解) 此級數比$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$爲小。而$x<1$。則此第二級數爲斂級數。故$x<1$。則原級數爲斂級數。

$x=1$。則此級數爲$\frac{2}{2}+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\cdots\cdots+\frac{2n}{n^2+1}+\cdots\cdots$而比$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}$爲大。故爲發級數。

$x>1$。則比$\frac{2}{2}+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\cdots\cdots$爲大。故爲發級數。

24. $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+\cdots\cdots+\frac{2n-5}{x^3-5n}x^{n-1}+\cdots\cdots$

(解)$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2(n+1)-5}{(n+1)^3-5(n+1)}x^n\div\frac{2n-5}{n^3-5n}x^{n-1}$

$$=\frac{n(2n-3)(n^2-5)}{(n+1)(2n-5)(n^2+2n-4)}x=\frac{\left(2-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{5}{n}\right)\left(1-\frac{5}{n^2}\right)}x$$。n無限大。則

此比之極限爲$\frac{2.1}{1.2.1}x$。即等於x。故此比之大於1或小於1。因乎$x\lesseqgtr 1$而定。由是$x<1$。則爲斂級數。$x>1$。則爲發級數。$x=1$。則

$\sum\frac{2n-5}{n^3-5n}<\sum\frac{2}{n^2}$。惟$\sum\frac{2}{n^2}$爲歛級數。故 $x=1$。則原級數爲歛級數，

25. $\frac{1}{1^2-x}+\frac{1}{2^2-x}+\frac{2}{3^2-x}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2-x}+\cdots\cdots$。除 x 爲整平方數外，對於一切值爲歛級數，試證之。

〔證〕 x 爲不完全平方數之有限數，今設各項之分母爲 $1^2-\frac{1^2}{2}$

$2^2-\frac{2^2}{2}$, $3^2-\frac{3^2}{2}$, ...$n^2-\frac{n^2}{2}$, ...至若干項後，此諸分母，比原分母爲小。故原級數 $<\frac{1}{1^2-\frac{1^2}{2}}+\frac{1}{2^2-\frac{2^2}{2}}+\frac{1}{3^2-\frac{3^2}{2}}+\cdots+\frac{1}{n^2-\frac{n^2}{2}}+\cdots$

$$<2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots\right)。$$

由是此級數爲歛級數，

26. $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{(n-1)}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)n^m x^n$。

〔解〕$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{(n+1)}}\right)(n+1)^m x^{n+1}\div\left(\frac{1}{\sqrt{(n-1)}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)n^m x^n$

$=x\left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(n+1)}-\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$。n 增至極大時，此比殆等於 x，

故 $x<1$。則爲歛級數。$x>1$。則爲發級數。

$x=1$。而第一 $m=\frac{1}{2}$ 則 $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{(n-1)}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)n^{\frac{1}{2}}=\sum\frac{\sqrt{n}-\sqrt{(n-1)}}{\sqrt{(n-1)}}$

$=\sum\frac{1}{\sqrt{(n-1)}\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sum\frac{1}{\sqrt{(n-1)^2+(n-1)}+n-1}>\sum\frac{1}{2(n-1)}$,

而$\sum\frac{1}{2(n-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\right)$ 爲發級數。由是原級數 $x=1$,

而 $m=\frac{1}{2}$。則爲發級數。故$x=1$。而。$m>\frac{1}{2}$。亦爲發級數。

$x=1$。而第二 $m<\frac{1}{2}$，則$\sum\left(\frac{1}{\sqrt{(n-1)}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)n^m$

$=\sum\frac{1}{(\sqrt{n^2-n}+n-1)n^{\frac{1}{2}-m}}<\sum\frac{1}{2n^k}$。但 $k>1$,

而$\sum\frac{1}{2n^k}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\cdots\right)$爲歛級數。(274)章。

由是$x=1$。而$m<\frac{1}{2}$。則原級數爲歛級數。

27. $\sum n^k\{\sqrt{(n-1)}-2\sqrt{(n-2)}+\sqrt{(n-3)}\}x^n$。

〔解〕 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^k\{\sqrt{n}-2\sqrt{(n-1)}+\sqrt{(n-2)}\}x^{n+1}}{n^k\{\sqrt{(n-1)}-2\sqrt{(n-2)}+\sqrt{(n-3)}\}x^n}$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\left\{\frac{\sqrt{n}-2\sqrt{(n-1)}+\sqrt{(n-2)}}{\sqrt{(n-1)}-2\sqrt{(n-2)}+\sqrt{(n-3)}}\right\}x,$$

n爲無限大。則此比殆等於x。故$x<1$。則爲歛級數。而$x>1$。則爲發級數。若$x=1$。而$k=\frac{1}{2}$。則原級數爲

$$-\sum\sqrt{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{(n-2)}+\sqrt{(n-3)}}-\frac{1}{\sqrt{(n-1)}+\sqrt{(n-2)}}\right\}$$

$$=-\sum\sqrt{n}\left\{\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n-3}}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n-2}+\sqrt{n-3})}\right\}$$

$$>\sum\sqrt{n}\frac{1}{(2\sqrt{n-1})(2\sqrt{n-2})}>\sum\frac{\sqrt{(n-1)}}{4\sqrt{(n-1)}\sqrt{(n-2)}}$$。即 $\frac{1}{2}\sum\frac{1}{\sqrt{(n-2)}}$。

由274章 $\sum\frac{1}{\sqrt{(n-2)}}=\frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$爲發級數。

由是原級數$x=1$。$k=\frac{1}{2}$。則爲發級數。

又原級數$x=1$。$k>\frac{1}{2}$亦爲發級數。

若$x=1$。而$k>\frac{1}{2}$。則原級數爲

$$-n^k\left\{\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n-3}}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n-2}+\sqrt{n-3})}\right\}$$

$$=-\sum\frac{2n^k}{(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2})(\sqrt{n-2}+\sqrt{n-3})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n-3})}$$

$<\sum\frac{2n^k}{(\sqrt{n})(\sqrt{n})(\sqrt{n})}=2\sum\frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}-k}}$ 由274章。此級數爲歛級數。

故$x=1$，而$k<\frac{1}{2}$。則原級數爲歛級數。

第貳拾貳編

二項式之任意指數

282. 二項式之斂級數 如於第二十編所示n爲正整數。證得

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2.}x^2+\ldots\ldots+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{\lfloor\underline{r}}x^r+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

而於本編證明此公式。不獨限於n爲正整數。即對於n之任何數。(負數或分數)皆爲合理。但此公式右邊之級數爲斂級數。

n爲正整數。此公式右邊之級數。迄於第$n+1$項而止。而爲有限項之級數。若n非爲正整數。則$n, n-1, n-2, n-3,\ldots\ldots\ldots$等因子。皆不能爲0。故此級數各項連續至無限。

二項式之公項。即第$r+1$項。爲$\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{\lfloor\underline{r}}x^r$。而n非爲正整數。此式不能從簡記爲$\dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r}\lfloor\underline{n-r}}$。然可用241章之記法。記爲$\dfrac{n_r}{\lfloor\underline{r}}x^r$。

故對於n之任何值。二項式之定理爲

$$(1+x)^n=1+n_1x+\frac{n_2}{\lfloor\underline{2}}x^2+\frac{n_3}{\lfloor\underline{3}}x^3+\ldots\ldots\ldots+\frac{n_r}{\lfloor\underline{r}}x^r+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

283. 二項式定理之證明 從簡用$f(m)$表任意之級數。

$$1+\frac{m_1}{\lfloor\underline{1}}x+\frac{m_2}{\lfloor\underline{2}}x^2+\ldots\ldots\ldots+\frac{m_r}{\lfloor\underline{r}}x^r+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

故 $$f(m)=1+\frac{m_1}{\lfloor\underline{1}}x+\frac{m_2}{\lfloor\underline{2}}x^2+\ldots\ldots\ldots+\frac{m_r}{\lfloor\underline{r}}x^r+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f(n)=1+\frac{n_1}{\lfloor\underline{1}}x+\frac{n_2}{\lfloor\underline{2}}x^2+\ldots\ldots\ldots+\frac{n_r}{\lfloor\underline{r}}x^r+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

及 $f(m+n)=1+\frac{(m+n)_1}{\lfloor 1}x+\frac{(m+n)_2}{\lfloor 2}x^2+\ldots+\frac{(m+n)_r}{\lfloor r}x^r+\ldots\ldots$,

今求得於 $f(m)\times f(n)$ 中 x^r 之係數，爲

$$\frac{m_r}{\lfloor r}+\frac{m_{r-1}n_1}{\lfloor r-1\lfloor 1}+\frac{m_{r-2}n_2}{\lfloor r-2\lfloor 2}+\ldots\ldots+\frac{m_{r-s}n_s}{\lfloor r-s\lfloor s}+\ldots\ldots+\frac{n_r}{\lfloor r}.$$

即 $$\frac{1}{\lfloor r}\left\{m_r+\ldots\ldots\ldots+\frac{\lfloor r}{\lfloor r-s\lfloor s}m_{r-s}n_s+\ldots\ldots\ldots+n_r\right\}。$$

而由 Vandermonde 氏之定理(249 章及 261 章)，此係數等於 $\frac{(m+n)^r}{\lfloor r}$。即等於 $f(m+n)$ 中 x^r 之係數。

故 $f(m+n)$ 與 $f(m)\times f(n)$，其 x 之同方乘係數相等。而 $x<1$。則 $f(m)$，$f(n)$ 及 $f(m+n)$，對於 m 及 n 之任何值，皆爲斂級數。(278 章)。

由是依 280 章 $f(m)\times f(n)=f(m+n)$……………………(A)

即此恆同式，若 $x<1$。則對於 m 及 n 之任何值。無不合理。

今使於 $f(m)$ 其 $m=0$。則可知 $f(0)=1$。又使 $m=1$。則可知 $f(1)=1+x$。

又使於 $f(m)$ 其 $m=r$。但 r 爲正整數，則

$$f(r)=1+\frac{r_1}{\lfloor 1}x+\frac{r_2}{\lfloor 2}x^2+\ldots\ldots\ldots+\frac{r_r}{\lfloor r}x^r$$

$$=1+\frac{r}{\lfloor 1}x+\frac{r(r-1)}{\lfloor 2}x^2+\ldots\ldots\ldots+x^r=(1+x)^r。$$

由是從(A)得次之結果，

$$f(m)\times f(n)\times f(p)\times\ldots\ldots=f(m+n)\times f(p)\times\ldots\ldots=f(m+n+p+\ldots\ldots),$$

今 $m=n=p=\ldots\ldots=\frac{r}{s}$。但 r 及 s 爲正整數。

則上之恆同式有 s 個因子。

$$f\left(\frac{r}{s}\right)\times f\left(\frac{r}{s}\right)\times f\left(\frac{r}{s}\right)\times\ldots\ldots=f\left(\frac{r}{s}+\frac{r}{s}+\frac{r}{s}+\ldots\ldots\right),$$

則 $$\left\{f\left(\frac{r}{s}\right)\right\}^s=f\left(\frac{r}{s}\times s\right)=f(r),$$

惟以 r 爲正整數，故 $f(r)=(1+x)^r$。

$\therefore\quad \left\{f\left(\frac{r}{s}\right)\right\}^s=(1+x)^r \qquad \therefore\quad (1+x)^{\frac{r}{s}}=f\left(\frac{r}{s}\right)$。

由是證得於$(1+x)^n$。其n爲正分數者。亦能適合於二項式之定理，即證得二項式之指數。無論爲整數爲分數之任何正數。皆合於二項式之定理。

又次證明二項式之定理，對於任意之負指數。亦能合理。

由(A)得$f(-n)\times f(n)=f(-n+n)=f(0)=1$。

$$\therefore\quad f(-n)=\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{(1+x)^n}=(1+x)^{-n}。$$

由是證得於$(1+x)^n$。其n爲負數者。亦能適合於二項式之定理，至是乃證得二項式之指數，無論正與負之整數或分數。無不合於二項式之定理。

284. 尤拉(Euler)氏之證明 於二項式之定理，由尤拉氏所證明者如次。

以f(m)表級數。

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-r+1)}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots$$

即 $$f(m)=1+mx+\frac{m_2}{\underline{|2}}x^2+\cdots\cdots+\frac{m_r}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$f(n)=1+nx+\frac{n_2}{\underline{|2}}x^2+\cdots\cdots+\frac{n_r}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

及 $$f(m+n)=1+(m+n)x+\frac{(m+n)_2}{\underline{|2}}x^2+\cdots\cdots+\frac{(m+n)_r}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots$$

今將(1), (2)右邊之級數相乘，依x之遞昇方乘整列之，其m及n之值無論如何。而其積之形，常如

$$1+(m+n)x+\left(\frac{m_2}{\underline{|2}}+\frac{m}{\underline{1}}\cdot\frac{n}{\underline{1}}+\frac{n_2}{2}\right)x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

然m及n爲正整數，則知(1)及(2)級數之形，蓋從$(1+x)^m$及$(1+x)^n$而得。

即　$f(m)=(1+x)^m,\quad f(n)=(1+x)^n,$

而　$f(m)\times f(n)=(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}=f(m+n)$。

由是m及n爲正整數。則 $f(m)\times f(n)=f(m+n)$…………(A)

而此A不論m及n之值爲何數。皆能合理。但f(m)及f(n)爲絕對的斂級數(280章)。

此後證法與283章同。故不贅。

例題

1. $(1+x)^{-1}$ 展開之。

〔解〕 $$(1+x)^{-1}=1+(-1)x+\frac{(-1)(-2)}{1\cdot2}x^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots+\frac{(-1)(-2)(-3)\cdots\cdots(-r)}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots$$
$$=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^rx^r+\cdots\cdots$$

此例須解得x之極限值爲要。何則。由229章等比級數 $1-x+x^2-\cdots\cdots$ 其x若不在 -1 及 $+1$ 之間。不能等於 $\frac{1}{1+x}$。故此例x之值在 -1 及 $+1$ 之間爲合理。

2. $(1-x)^{-2}$ 展開之。

〔解〕 $$(1-x)^{-2}=1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-3)}{1\cdot2}(-x)^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{1\cdot2\cdot3}(-x)^3+\cdots+\frac{(-2)(-3)\cdots\cdots(-\overline{r+1})}{\underline{|r}}(-x)^r+\cdots\cdots$$
$$=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+(r+1)x^r+\cdots\cdots$$

此結果不能對於x之任何值皆爲合理。例若 $x=2$。則
$1=1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots\cdots$ 卽爲不合理。

3. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 展開之。

〔解〕 $$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\cdots\left\{\frac{1}{2}-(r+1)\right\}}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2r-3)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2r}x^r+\cdots$$

4. $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ 展開之。

〔解〕 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{1.2}(-x)^2+\cdots\cdots$

$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{2r-1}{2}\right)}{\underline{|r}}(-x)^r+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\cdots\cdots+\frac{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots\cdots2r}x^r+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其任何項皆爲正。何則。以一切項皆有 $2r$ 之負因子故也。

5. 將 $(a^3-3a^2x)^{\frac{5}{3}}$ 之展開式。列爲 x 之遞昇方乘。

〔解〕 $(a^3-3a^2x)^{\frac{5}{3}}=\left\{a^3\left(1-\frac{3x}{a}\right)\right\}^{\frac{5}{3}}=a^5\left(1-\frac{3x}{a}\right)^{\frac{5}{3}}$

$$=a^5\left[1+\frac{5}{3}\left(-\frac{3x}{a}\right)+\frac{\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}}{1.2}\left(-\frac{3x}{a}\right)^2+\frac{\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)}{1.2.3}\left(-\frac{3x}{a}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left\{\frac{5}{3}-(r-1)\right\}}{\underline{|r}}\left(-\frac{3x}{a}\right)^r+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right]$$

$$=a^5\left\{1-\frac{5}{\underline{|1}}\cdot\frac{x}{a}+\frac{5.2}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{5.2.1}{\underline{|3}}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{5.2.1.4.7\cdots\cdots(3r-8)}{\underline{|r}}\left(\frac{x}{a}\right)^r+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$

自第二項之次皆爲正項。何則因其一切項之負因子。有 $r-2+r$ 個。即有偶數負因子故也。

285. 項之符號 惟 $(1+x)^n$ 之第 $(r+1)$ 項。等於第 r 項。以 $\frac{n-r+1}{r}x$ 即 $\left(-1+\frac{n+1}{r}\right)x$ 乘之即得。

例如第 $(r+1)$ 項 $=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r$

$$=\frac{n(n-1)\cdots\cdots n-r+2)}{\underline{|r-1}}x^{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}x$$

$$=\text{第}\,r\,\text{項}\times\frac{n-r+1}{r}x=\text{第}\,r\,\text{項}\times\left(-1+\frac{n+1}{r}\right)x。$$

即 $\left(-1+\frac{n+1}{r}\right)x$ 爲第 $(r+1)$ 項與 r 項之比。

今若 $n+1$ 爲負數。則 $-1+\frac{n+1}{r}$ 必爲負數。又 $n+1$ 無論其爲正或負。迨至 $r>n+1$。則 $1>\frac{n+1}{r}$。而 $-1+\frac{n+1}{r}$。必爲負數。

由是 x 爲正。則其第 $(r+1)$ 項與第 r 項之比 $r>n+1$ 恆爲負。故於 $(1+x)^n$ 之展開式。至 r 大於 $n+1$ 之正整數。則自 r 項後之諸項。必正負相間。何則。因其 r 項以下前後兩項之比爲負。故其各兩項符號相異可知。

又 x 爲負。則第 $(r+1)$ 項與第 r 項之比 $r>n+1$ 恆爲正。可得而知之。

因 $-1+\frac{n+1}{r}$ 爲負。而 x 又爲負。其兩項之比 $\left(-1+\frac{n+1}{r}\right)x$。即爲兩負數之積。而恆爲正也。故於 $(1-x)^n$ 之展開式。r 大於 $n+1$ 之正整數。則自 r 項後之諸項。其符號悉相同。惟 n 爲負。則 $(1-x)^n$ 之各項。皆係正號而爲特別之例。

例 $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 之展開式。其自 r 項以下。與第 r 項同符號。而 r 大於 $\frac{3}{2}+1$。即 $2\frac{1}{2}$。其次之正整數爲3。

故 $r=3$。而第三項 $=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\underline{|2}}(-x)^2$ 爲正。則此展開式自第三項以下。皆爲正項。

又 $(1+x)^{\frac{15}{2}}$ 之展開式。自第九項以下。正負相間。何則。r 大於 $\frac{15}{2}+1$。即 $8\frac{1}{2}$。其次之正整數爲9。故 $r=9$。

286. 最大項於 $(1\pm x)^n$ 之展開式。

$$第(r+1)項=第r項\times\pm\frac{n-r+1}{r}x$$

$$=第r項\times\mp\left(1-\frac{n+1}{r}\right)x,$$

而n非爲正整數。其$(1\pm x)^n$之展開式爲歛級數者。必其x之絕對值。小於1而後可。

(第壹) 假定$n+1$爲負數。以$-m$代之、

則第$(r+1)$項與第r項。其比之絕對值爲$\left(1+\frac{m}{r}\right)x$。

即第$(r+1)$項之絕對值＝第r項$\times\left(1+\frac{m}{r}\right)x$。

由是因$x\left(1+\frac{m}{r}\right)\lesseqgtr 1$。從而第r項$\gtreqless$第$(r+1)$項。

惟從$x\left(1+\frac{m}{r}\right)\lesseqgtr 1$而得$r\gtreqless\frac{mx}{1-x}$。即$\frac{-(1+n)x}{1-x}$。

由是因$r\gtreqless\frac{-(1+n)x}{1-x}$從而第r項$\gtreqless$第$(r+1)$項。

於此$\frac{-(1+n)x}{1-x}$若爲整數。即得其正數r。凡若此者。則其第r項與第$(r+1)$項相等。共爲最大項。

若$\frac{-(1+n)x}{1-x}$非爲整數。則取其次大之整數r。即惟有第r項爲其最大項。何則。以其所取之r。比$\frac{-(1+n)x}{1-x}$爲大。故第r項比第$(r+1)$項爲大。

(第二) 假定$n+1$爲正數。而其次大之整數爲k。

然至r等於k或大於k時。則$\frac{n+1}{r}-1$比1爲小而爲負數。何則。以$n+1<k$。而$r\geqq k$。故$\frac{n+1}{r}<1$。

惟第$(r+1)$項＝第r項$\times\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$。而x小於1。所以第r項＞第$(r+1)$項。

即$r=k$或$r>k$。則第r項比其次項即$(r+1)$項爲大。由是第k項後之各項。其比前項爲小可知。即第k項以後。皆不得爲最大項。而其最大項迄第k項而止。

若r小於n+1。而$\frac{n+1}{r}-1$爲正。則因$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x\lesseqgtr 1$。從而第r項$\gtreqless$第(r+1)項。

惟從$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x\lesseqgtr 1$。而得$r\gtreqless\frac{(n+1)x}{1+x}$。

卽因$r\gtreqless\frac{(n+1)x}{1+x}$從而第r項$\gtreqless$第(r+1)項。

故若$\frac{(n+1)x}{1+x}$爲整數。第r項與第(r+1)項相等。而俱爲最大項。

若$\frac{(n+1)x}{1+x}$非爲整數。則取其次大之整數r。卽第r項爲最大項。

例題

1. 求$(1-x)^{-\frac{3}{2}}$之最大項。但$x=\frac{8}{9}$。

〔解〕 n+1爲負而$\frac{-(1+n)x}{1-x}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}}{1-\frac{8}{9}}=4$。

由是第4項及第5項相等而爲最大項。

2. $x=\frac{3}{4}$求於$(1-x)^{-\frac{17}{2}}$之展開式。從何項始爲斂級數。

〔解〕 n+1爲負。而$\frac{-(1+n)x}{1-x}=\frac{\frac{15}{2}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=22\frac{1}{2}$。

由是知從第23項始以後爲斂級數。

3. $4x=3a$求$(a+x)^{\frac{19}{2}}$展開式之最大項。

〔解〕 $(a+x)^{\frac{19}{2}}=a^{\frac{19}{2}}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{19}{2}}$。所求之最大項。爲與$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{19}{2}}$之最大項相應者。今$(n+1)\frac{x}{a}\div\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{21}{2}\cdot\frac{3}{4}\div\frac{7}{4}=\frac{9}{2}$。由是r爲次大於$\frac{9}{2}$之整數卽5。故第5項爲所求之最大項。

例題二十七

1. 由二項式之定理，求下列各展開式之公項。

(1) $(1-x)^{-2}$, (2) $(1-x)^{-3}$, (3) $(1-x)^{-n}$, (4) $(1+x)^{-\frac{2}{3}}$

(5) $(1-x)^{\frac{2}{3}}$, (6) $(1+x)^{\frac{5}{3}}$, (7) $(1-5x)^{-\frac{3}{5}}$ (8) $(1-5x)^{\frac{1}{5}}$,

(9) $(1-x)^{\frac{q}{p}}$, (10) $(2a+3x)^{-\frac{3}{5}}$, (11) $(a^2-2ax)^{\frac{5}{2}}$, (12) $(4-7x)^{\frac{2}{7}}$,

〔解〕(1) $\dfrac{(-2)(-3)\ldots\ldots\{-2-(r-1)\}}{\underline{|r}}(-x)^r=(r+1)x^r$。

(2) $\dfrac{(-3)(-4)\ldots\ldots\{-3-(r-1)\}}{\underline{|r}}(-x)^r=\dfrac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r$。

以下皆由公項之公式求得。

(3) $\dfrac{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(r+n-1)}{\underline{|n-1}}x^r$。 (4) $(-1)^r\dfrac{2.5.8\ldots\ldots(3r-1)}{3.6.9\ldots\ldots3r}x^r$.

(5) $(-1)^{r-1}\dfrac{2.1.4\ldots\ldots(3r-5)}{3.6.9\ldots\ldots3r}x^r$, (6) $(-1)^r\dfrac{5.2.1.4.7\ldots\ldots(3r-8)}{3.6.9\ldots\ldots3r}x^r$,

(7) $\dfrac{3.8.13\ldots\ldots(5r-2)}{1.2.3\ldots\ldots r}x^r$, (8) $-\dfrac{2.3.8.13\ldots\ldots(5r-7)}{1.2.3\ldots\ldots r}x^r$,

(9) $\dfrac{q(q+p)(q+2p)\ldots\ldots\{q+(r-1)p\}}{p^2\,\underline{|r}}x^r$。

(10) $(2a)^{-\frac{3}{5}}\dfrac{2.7.12\ldots\ldots(5r-3)}{\underline{|r}}\left(\dfrac{3x}{10a}\right)^r$,

(11) $-\dfrac{5.3.1.1.3.5\ldots\ldots(2r-7)}{\underline{|r}}x^ra^{5-r}$, $r>3$。

(12) $-\dfrac{2.5.12\ldots(7r-9)}{4.8.12\ldots\ldots4r}x^r4^{\frac{2}{7}}$。

2. 求於(1) $\left(1+\dfrac{4}{3}x\right)^{\frac{27}{4}}$ 及 (2) $\left(1+\dfrac{2}{3}x\right)^{\frac{21}{4}}$ 最初之負項。

〔解〕(1) 第 $(r+1)$ 項爲第 r 項 $\times\dfrac{n-r+1}{r}\left(\dfrac{4}{3}x\right)$。故求最初之負項，則以 $\dfrac{n-r+1}{r}$ 爲最初之負數。即 $\dfrac{\frac{27}{4}-r+1}{r}<0$。 $\therefore r>7\dfrac{3}{4}$,

由是 $r=8$ 故第 9 項。爲最初之負項。同法第 8 項爲(2)最初之負項。

3. $x=\frac{7}{9}$ 求$(1+x)^{-12}$展開式之最大項。

〔解〕因 $r\gtreqless\frac{-(1+n)x}{1-x}$ 即$\gtreqless\frac{11\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}}$ 即$\gtreqless 38\frac{1}{2}$。從而第r項$\gtreqless$第$(r+1)$項。

∴ 最大項爲39項。

4. 求$\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{-2}$展開式之最大項。但$x=\frac{3}{4}$。

〔解〕因 $r\gtreqless\frac{-(1+n)\frac{2}{3}x}{1-\frac{2}{3}x}$ 即$\gtreqless\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ 即$\gtreqless 1$從而第r項$\gtreqless$第$(r+1)$項。故最大項。爲第1項及第2項。

5. 設 $x=\frac{5}{6}$ 求於$(1-x)^{1\frac{2}{5}2}$之展開式中。自何項以後始爲斂級數。

〔解〕若第r項之次項。始比第r項爲小。而爲斂級數。斯時 $r>\frac{(n+1)x}{x+1}$ 即 $r>\frac{(1\frac{2}{5}2+1)\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}(1-x)}$ 即 $r>11\frac{6}{11}$。故第11項之後爲斂級數。

6. 試於$\frac{19-21x}{(1-x)^3}$展開式。示其最初19項皆爲正。而其內最大項之係數爲100。

〔證〕$(1-x)^{-3}=1+3x+\frac{3.4}{1.2}x^2+\frac{3.4.5}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$=\frac{1}{2}\left\{1.2+2.3x+3.4x^2+\ldots\ldots+(r+1)(r+2)x^r+\ldots\ldots\right\}$$

$$\frac{19-21x}{(1-x)^3}=\frac{1}{2}(19-21x)\left\{1.2+2.3x+\ldots\ldots+(r+1)(r+2)x^r+\ldots\ldots\right\}$$

∴ x^r之係數$=\frac{1}{2}\left\{19(r+1)(r+2)-21r(r+1)\right\}=100-(r-9)^2$。

由是$r<19$則爲正項。又x^r之係數$100-(r-9)^2$。則以$r=9$爲最大。

∴ 其係數$=100$。

7. 二項展開式連續四項之係數。順次爲a_1, a_2, a_3, a_4。則

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}$$。

〔證〕a_1爲$(1+x)^n$之第r項係數。則

$a_2=a_1\frac{n-r+1}{r}$, $a_3=a_2\frac{n-r}{r+1}$, $a_4=a_3\frac{n-r-1}{r+2}$。

由是 $\frac{a_1}{a_1+a_2}=\frac{r}{n+1}$, $\frac{a_2}{a_2+a_3}=\frac{r+1}{n+1}$, $\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{r+2}{n+1}$,

$\therefore\quad \frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{r}{n+1}+\frac{r+2}{n+1}=2\frac{r+1}{n+1}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}$。

8. 由二項式之定理,求次之各展開式中之公項。但展開式依 x 之遞昇方乘而列者。

(1) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2-x^2}}$, (2) $\frac{a+x}{a-x}$, (3) $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2$,

(4) $(a+x)^{\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}$, (5) $(a+x)^2(a-x)^{-3}$, (6) $(a-x)^4(a+x)^{-2}$。

〔解〕(1) $\frac{a}{\sqrt[3]{(a^2-x^2)}}=a(a^2-x^2)^{-\frac{1}{3}}=aa^{-\frac{2}{3}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$ 之第 $(r+1)$ 項爲 $\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})\cdots\cdots\{-\frac{1}{3}-(r-1)\}}{1.2\cdots\cdots r}\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^r$

$=(-1)^r\frac{1.4.7\cdots\cdots(3r-2)}{3.6.9\cdots\cdots 3r}(-1)^r a^{-2r}x^{2r}=\frac{1.4.7\cdots\cdots(3r-2)}{3.6.9\cdots\cdots 3r}a^{-2r}x^{2r}$。

$\therefore$ 公項 $=\frac{1.4.7\cdots\cdots(3r-2)}{3.6.9\cdots\cdots 3r}a^{-2r}x^{2r}$。

(2) $\frac{a+x}{a-x}=(a+x)(a-x)^{-1}$

$=(a+x)(a^{-1}+a^{-2}x+\cdots\cdots+a^{-r}x^{r-1}+a^{-1-r}x^r+\cdots\cdots\cdots\cdots)$

由是 x^r 之項即公項 $=x(a^{-r}x^{r-1})+a(a^{-1-r}x^r)=2a^{-r}x^r$。

(3) $(a+x)^2(a-x)^{-2}=(a^2+2ax+x^2)\{a^{-2}+2a^{-3}x+3a^{-4}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$
$+(r-1)a^{-r}x^{r-2}+ra^{-1-r}x^{r-1}+(r+1)a^{-2-r}x^r+\cdots\cdots\cdots\cdots\}$

$\therefore$ x^r 之項即公項 $=x^2(r-1)a^{-r}x^{r-2}+2ax\times ra^{-1-r}x^{r-1}+a^2(r+1)a^{-2-r}x^r$
$=4ra^{-r}x^r$。

(4) $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{x}{a}\right)\Big\{1+\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^4}{a^4}+\cdots$
$+\frac{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots\cdots 2r}\frac{x^{2r}}{a^{2r}}+\cdots\cdots\cdots\Big\}$

$\therefore$ x^{2r} 項 $=\frac{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots\cdots 2r}a^{-2r}x^{2r}$。

由是n爲偶數則其公項$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots n}a^{-n}x^n$。

又 x^{2r+1}之項$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2r-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots\cdots2r}a^{-2r-1}x^{2r+1}$。

由是n爲奇數。則$n=2r+1$。卽$2r=n-1$。

其公項$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(n-2)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(n-1)}a^{-n}x^n$。

(5) $(2r^2+2r+1)a^{-r-1}x^r$。

(6) $(-1)^r16(r-1)a^{2-r}x^r$。

9. 試於$(1+x^2)^3(1-x^3)^{-2}$展開式。證其x^{3n}之係數爲$2n$。

〔證〕原式$=(1+3x^2+3x^4+x^6)\{1+2x^3+3x^6+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$
$+(n-1)x^{3n-6}+nx^{3n-3}+(n+1)x^{3n}+\cdots\cdots\cdots\}$。

$\therefore$ x^{3n}之係數$=(n+1)+(n-1)=2n$。

10. 試於$(1+2x)^3(1-x)^{-2}$展開式。證x^n之係數爲$27(n-1)$。但$n\nless 3$

〔證〕$(1+6x+12x^2+8x^3)\{1+2x+3x^2+\cdots\cdots+(n+1)x^n+\cdots\cdots\cdots\}$。

由是x^n之係數$=(n+1)+6n+12(n-1)+8(n-2)=27(n-1)$。

287. 係數之和 欲求$(1-x)^n$展開式自初項至$r+1$項係數之和。可如次法求之。而n不拘於正整數。

因$(1-x)^n=1-\frac{n_1}{\lfloor 1}x+\frac{n_2}{\lfloor 2}x^2-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n_r}{\lfloor r}x^r-\cdots\cdots$

$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots+x^r+\cdots\cdots\cdots$

此右邊兩級數之積。其x^r之係數。爲$1-\frac{n_1}{\lfloor 1}+\frac{n_2}{\lfloor 2}-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n_r}{\lfloor r}$。

又以$(1-x)^n\times(1-x)^{-1}$。卽$(1-x)^{n-1}$。其展開式中x^r之係數爲$(-1)^r\frac{(n-1)_r}{\lfloor r}$。

由是知$(1-x)^n$展開式中。自初項至$r+1$項係數之和

$1-\frac{n_1}{\lfloor 1}+\frac{n_2}{\lfloor 2}-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n_r}{\lfloor r}$等於$(-1)^r\frac{(n-1)_r}{\lfloor r}$。

簡言之。於$(1-x)^n$展開式中。其自初項至$r+1$項係數之和。等於$\frac{(1-x)^n}{1-x}$卽$(1-x)^{n-1}$展開式中x^r之係數。

依同法任意之級數 $\phi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r+\cdots\cdots$

其 $a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_r$。等於$\frac{\phi(x)}{1-x}$展開式中 x^r 之係數，

故欲於 $\phi(x)$ 展開式中。求其自初項至 $r+1$ 項係數之和。可於$\frac{\phi(x)}{1-x}$展開式中。求其 x^r 之係數即得。

例 題

1. 於 $(1-x)^{-3}$ 展開式中。求其最初第 r 項係數之和。

(解) 可於$\frac{(1-x)^{-3}}{1-x}$。即 $(1-x)^{-4}$ 展開式中。求其 x^{r-1} 之係數。

即$\frac{1}{6}r(r+1)(r+2)$。

2. 求級數 $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots n$ 項之和。

(解) $(1-x)^{-4}=\frac{1}{1.2.3}(1.2.3+2.3.4x+3.4.5x^2+\cdots\cdots)$。故所求之和。等於 $(1-x)^{-4}$ 最初 n 項之和而 6 倍之。即等於$\frac{(1-x)^{-4}}{1-x}=(1-x)^{-5}$展開式中 x^{n-1} 之係數 6 倍。即$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$。

3. 求於$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^2}$展開式最初 $n+r$ 項係數之和。

(解) 所求之和。等於$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}$展開式 x^{n+r-1} 之係數。

令 $(1+x)^n=\{2-(1-x)\}^n$

$$=2^n-n.2^{n-1}(1-x)+\frac{n(n-1)}{1.2}2^{n-2}(1-x)^2+\cdots\cdots+(1-x)^n,$$

由是 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}=\frac{2^n}{(1-x)^3}-\frac{n.2^{n-1}}{(1-x)^2}+\frac{n(n-1)2^{n-3}}{1-x}+(1-x$ 之 $n-3$ 次整數式)。

而於 $(1-x)^{-3}$, $(1-x)^{-2}$, $(1-x)^{-1}$, x^{n+r-1} 之係數。順次爲

$\frac{1}{2}(n+r)(n+r+1)$, $n+r$, 1。由是於$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}$中 x^{n+r-1} 之係數，爲

$2^{n-1}(n+r)(n+r+1)-2^{n-1}n(n+r)+2^{n-3}n(n-1)$。即所求之和。

4. 求 $1+n+\frac{n(n+1)}{1.2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}+\cdots\cdots n$ 項之和。

〔解〕 $(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{1.2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$

又於 $(1-x)^{-n-1}$ 中 x^{n-1} 之係數，爲 $\frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n\lfloor n-1}$。即所求之和。

288. 二項級數 從 $(1+x)^n$ 之展開式內。以特別値代其 n 及 x 所成之級數，爲二項級數，苟知此級數爲二項級數。可由二項式之定理。直求得其和，

玆將二項式變化之。惟其指數爲正整數不適於用。若指數爲負整數。則

$$(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r+\cdots\cdots$$

於此展開式。變其形如次。

$$(1-x)^{-n}=\frac{1}{\lfloor n-1}\{1.2\cdots\cdots(n-1)+\{2.3\cdots\cdots n\}x+\cdots\cdots$$
$$+\{(r+1)\cdots\cdots(r+n-1)\}x^r+\cdots\cdots\}。$$

〔註〕由上之公式。

$$1.2\cdots\cdots(n-1)+(2.3\cdots\cdots n)x+\cdots\cdots+\{(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+n-1)\}x^r+\cdots\cdots$$
$$=(1-x)^{-n}\lfloor n-1,$$

上式之右邊爲斂級數。其無限項之和，等於左邊。故二項式之指數非爲正整數，而展開式爲斂級數者。方能合理。

若指數爲負分數。$-\frac{p}{q}$。則

$$(1\pm x)^{-\frac{p}{q}}=1\mp\frac{p}{\lfloor 1}\frac{x}{q}+\frac{p(p+q)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{q}\right)^2\mp\frac{p(p+q)(p+2q)}{\lfloor 3}\left(\frac{x}{q}\right)^3+\cdots\cdots\text{(A)}$$

或 $$=1\mp\frac{p}{q}x+\frac{p(p+q)}{q.2q}x^2\mp\frac{p(p+q)(p+2q)}{q.2q.3q}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

此級數(A)或(B)有次之性質，

(1) 各連接之項，其分子及分母有遞加因子，

(2) 分子之連次因子。成等差級數。而以其指數之分母爲公差，如 $p, p+q, p+2q,\cdots\cdots\cdots$

(3) 分母之連次因子爲 $1, 2, 3,\cdots\cdots$ 或爲其倍數 $q, 2q, 3q\cdots\cdots$

若適合於上之性質。則可用二項式之定理，直求得其和。

例　題

1. 求 $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{3\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{3\cdot6\cdot9}+\cdots\cdots\cdots$至無限項之和。

〔解〕 $S=\frac{1}{\underline{|1}}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1\cdot3}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdots\cdots\cdots$

於(A) $p=1,\ q=2$ 而 $\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$。　$\therefore\ x=\frac{2}{3}$。以代入於(A)而得

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\underline{|2}}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\cdots\cdots=1+S。$$

由是 $S=\sqrt{3}-1$。

2. 求 $1+\frac{2}{6}+\frac{2\cdot5}{6\cdot12}+\frac{2\cdot5\cdot8}{6\cdot12\cdot18}+\cdots\cdots\cdots$至無限項之和。

〔解〕 $S=1+\frac{2}{\underline{|1}}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{2\cdot5}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{2\cdot5\cdot8}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\cdots\cdots$

$p=2,\ q=3$。故 $\frac{1}{6}=\frac{x}{3}$。 $\therefore\ x=\frac{1}{2}$。

由是由(A)得 $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$。為所求之和。

3. 求 $\frac{3}{18}+\frac{3\cdot7}{18\cdot24}+\frac{3\cdot7\cdot11}{18\cdot24\cdot30}+\cdots\cdots\cdots$至無限項之和。

〔解〕 $S=\frac{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{3\cdot7}{3\cdot4}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{3\cdot7\cdot11}{3\cdot4\cdot5}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\cdots\cdots\cdots$

兩邊以 $\frac{(-5)(-1)}{1\cdot2}\left(\frac{1}{6}\right)^2$ 乘。且以 $1+\frac{-5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{(-5)(-1)}{1\cdot2}\left(\frac{1}{6}\right)^2$ 加之則

$$\frac{(-5)(-1)}{1\cdot2}\left(\frac{1}{6}\right)^2S+1+\frac{-5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{(-5)(-1)}{1\cdot2}\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$=1+\frac{-5}{\underline{|1}}\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{(-5)(-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{(-5)(-1)3}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$+\frac{(-5)(-1)3\cdot7}{\underline{|4}}\left(\frac{1}{6}\right)^4+\frac{(-5)(-1)3\cdot7\cdot11}{\underline{|5}}\left(\frac{1}{6}\right)^5+\cdots\cdots\cdots$$

即 $\frac{5}{72}S+\frac{17}{72}=1+\frac{-5}{\underline{|1}}\left(\frac{\frac{2}{3}}{4}\right)+\frac{(-5)(-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{\frac{2}{3}}{4}\right)^2+\frac{(-5)(-1)3}{\underline{|3}}\left(\frac{\frac{2}{3}}{4}\right)^3+\cdots\cdots$

$\therefore\ \frac{5}{72}S=-\frac{17}{72}+\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{-5}{4}}$。 由是 $S=\frac{1}{5}(8\sqrt[4]{27}-17)$。

4. 求 $\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$至無限項之和。

〔解〕由 $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$。即得所求之和為 $2\sqrt{2}-1$。

5. 求 $\frac{1}{2^3\lfloor 3}-\frac{1.3}{2^4\lfloor 4}+\frac{1.3.5}{2^5\lfloor 5}-\cdots\cdots$至無限項之和。

由 $(1+1)^{\frac{3}{2}}$。即得所求之和為 $\frac{23}{24}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$。

6. $1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\frac{1.4.7.10}{4.8.12.16}+\cdots\cdots$至無限項

$=1+\frac{2}{6}+\frac{2.5}{6.12}+\frac{2.5.8}{6.12.18}+\frac{2.5.8.11}{6.12.18.24}+\cdots\cdots$至無限項試證之。

〔證〕 $\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}$。

289. 相等係數 準281章。凡以x之遞昇方乘表兩級數。而此兩級數各為斂級數而相等者。則其x之同方乘係數各相等。今乃用此定理。以解次之諸例。

〔第一例〕n為任意之整數。試證

$$1-\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.2^2}-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2.2^2.3^2}+\cdots\cdots=0。$$

惟以 $(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$

$$+(-1)^n\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-n+1)}{1.2.3\cdots\cdots n}x^n。$$

又 $x>1$。則 $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-n}$ 之展開式為合理。故

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-n}=1+n\frac{1}{x}+\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{1}{x^2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n-1)}{1.2.3\cdots\cdots n}\frac{1}{x^n}+\cdots\cdots$$

於上兩級數相乘積中 x^0 之係數為

$$1\times1-nx\times n\frac{1}{x}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2\times\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{1}{x^2}+\cdots\cdots$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^2\times\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\frac{1}{x^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

即 $1-n^2+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.2^2}-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2.2^2.3^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

即等於 $(1-x)^n\times\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-n}$ 中 x^0 之係數。

而 $(1-x)^n\times\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-n}=(1-x)^n\times\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-n}$

$$=(-1)^n(x-1)^n\frac{x^n}{(x-1)^n}=(-1)^nx^n。$$

其 x^0 之係數為0。

由是 $1-\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.2^2}-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2.2^2.3^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0$。

〔第二例〕求 $(n+1)+n\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1.3}{2.4}+\ldots\ldots+1\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots2n}$ 之和。

惟以 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$+\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots2n}x^n+\ldots\ldots$$

又以 $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots+nx^{n-1}+(n+1)x^n+\ldots\ldots\ldots$,

故於上兩級數之積。其 x^n 之係數為

$(n+1)+n\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1.3}{2.4}+\ldots\ldots+1\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots2n}$,

又於 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}\times(1-x)^{-2}$。即 $(1-x)^{-\frac{5}{2}}$。其 x^n 之係數為 $\frac{-\frac{5}{2}.-\frac{7}{2}\ldots(\frac{5}{2}-n+1)}{1.2.3\ldots n}$。

即 $\frac{5.7.9\ldots(2n+3)}{2.4.6\ldots\ldots2n}$ 為所求之和也

〔第三例〕證 $1-3n+\frac{(3n-1)(3n-2)}{1.2}-\frac{(3n-2)(3n-3)(3n-4)}{1.2.3}+\ldots\ldots$ $=(-1)^n$。

惟因 $\frac{1+x}{1+x^3}=\frac{1}{1-x+x^2}=\frac{1}{1-x(1-x)}$。

即 $(1+x)(1+x^3)^{-1}=\{1-x(1-x)\}^{-1}$,

即 $(1+x)\{1-x^3+x^6-\ldots\ldots\ldots+(-1)^nx^{3n}+\ldots\ldots\ldots\}$

$$=1+x(1-x)+x^2(1-x)^2+\ldots\ldots+x^{3n+1}(1-x)^{3n+1}+\ldots\ldots$$

於上之左邊 x^{3n+1} 之係數爲 $(-1)^n$。

又於右邊所有含 x^{3n+1} 之項。爲在於 $x^{3n+1}(1-x)^{3n+1}$ 之項。及以上各項內。即在於次之諸項以內。

$x^{3n+1}(1-x)^{3n+1}+x^{3n}(1-x)^{3n}+x^{3n-1}(1-x)^{3n-1}+\ldots\ldots$

而 x^{3n+1} 之係數。於 $x^{3n+1}(1-x)^{3n+1}$ 內爲 1。於 $x^{3n}(1-x)^{3n}$ 內爲 $-3n$，於 $x^{3n-1}(1-x)^{3n-1}$ 內爲 $\frac{(3n-1)(3n-2)}{1.2}$。以下類推，

由是推求得 x^{3n+1} 之係數爲

$1-3n+\frac{(3n-1)(3n-2)}{1.2}-\frac{(3n-2)(3n-3)(3n-4)}{1.2.3}+\ldots\ldots$ 故如題言。

290. 多項式之展開式 用二項式之方法。可求得多項式之展開式。

設多項式 $(p+qx+rx^2+\ldots)^n$ 變其形記之。如 $p^n\left(1+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}x^2+\ldots\right)^n$。以其初項爲 1。則計算較便。乃令 $\frac{q}{p}=a$, $\frac{r}{p}=b,\ldots\ldots$ 則所設之式。爲 $p^n(1+ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots)^n$。

今用二項式之方法。展開 $(1+ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots)^n$。即展開 $\{1+(ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots)\}^n$。其公項爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{\underline{|r}}(ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots)^r.$$

但 n 非正整數。故此公項之係數。不能如 255 章記之。爲 $\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$。

又展開 $(ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots)^r$。其 r 爲項之次第數，其爲正整數可知。故由 262 章，

$(ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots)^r$ 之公項。爲 $\frac{\underline{|r}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\ldots}a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots x^{\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots\ldots}$。

但 $\alpha,\beta,\gamma,\ldots\ldots$ 爲零或爲正整數。而 $\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots=r$，

由是 $(1+ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots)^n$ 之公項，爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\ldots\ldots}a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots x^{\alpha+2\beta+3\gamma+\ldots}.$$

於多項式之展開式。求其 x 之某特別方乘即 x^k 之係數。而 $\alpha, \beta, \gamma,$ 爲 0 或爲正整數。任用何法取之。要使適合於方程式 $\alpha+2\beta+3\gamma+\cdots=k$。而其所得各種之值與 r 相應。而 r 之值。則從 $\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots=r$ 求得之。

而與 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots\cdots$ 之各組值相當諸係數之和。即爲所求之係數。此處俱與262章同樣。視下例當自明瞭。

［第一例］試於 $(1-x+2x^2-3x^3)^{-\frac{1}{2}}$ 求其 x^5 之係數。

凡適合於 $\alpha+2\beta+3\gamma=5$ 所有 α, β, γ 之值如次。

$$\left.\begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=1,\\ \gamma=1\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}2\\0\\1\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}1\\2\\0\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}3\\1\\0\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}5\\0\\0\end{matrix}\right\}$$

與上各組相應而得 r 之各值。即　$r=2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5.$

由是與此相應之係數(即 x^5 之係數)，爲

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{\underline{|1}\ \underline{|1}}(2)^1(-3)^1,\quad \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{\underline{|2}\ \underline{|1}}(-1)^2(-3)^1,\quad \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{\underline{|1}\ \underline{|2}}(-1)^1(2)^2,$$

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{\underline{|3}\ \underline{|1}}(-1)^3(2)^1,\qquad 及\qquad \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})}{\underline{|5}}(-1)^5,$$

即　$-\frac{9}{2},\ \frac{45}{16},\ \frac{15}{4},\ -\frac{35}{16},\ \frac{63}{256},$

由是所求之係數 $=-\frac{9}{2}+\frac{45}{16}+\frac{15}{4}-\frac{35}{16}+\frac{63}{256}=\frac{31}{256},$

291. 多項式之雜例 如上例展開多項式。求其第六項(即 x^5 之項)甚覺煩雜。有時於特別之多項式。可用簡便之方法求得之。

［第二例］試於 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{-2}$ 求其 x^{13} 之係數。

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^{-2}=\left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^{-2}=(1-x)^2(1-x^5)^{-2}$$

$$=(1-2x+x^2)(1+2x^5+3x^{10}+4x^{15}+\cdots\cdots\cdots)$$

於此兩級數之積中。無有 x^{13} 之項者。故所求之係數爲0。

［第三例］試於 $(1+x+x^2+x^3)^{-1}$ 求其 x^n 之係數。

$$(1+x+x^2+x^3)^{-1}=\frac{1}{1+x+x^2+x^3}=\frac{1-x}{1-x^4}=(1-x)(1-x^4)^{-1}$$
$$=(1-x)(1+x^4+x^8+\cdots\cdots+x^{4r-4}+x^{4r}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

由是 x^{4r} 之係數$=1$,　　　x^{4r+1} 之係數$=-1$,

x^{4r+2} 之係數$=0$,　　　x^{4r+3} 之係數$=-0$。

故n之值凡若4r者。則x^n之係數爲1。若$4r+1$者。則爲-1。又若$4r+2$及$4r+3$。則俱爲0。

〔第四例〕 試於$(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots$至無限$)^n$之展開式,求其$x^r$之係邈。

惟因$1+2x+3x^2+\cdots\cdots=(1-x)^{-2}$　∴　原式$=(1-x)^{-2n}$。

由是 x^r 之係數爲 $\dfrac{2n(2n+1)(2n+2)\cdots\cdots(2n+r-1)}{\underline{|r}}$。

292. 同物之組合 有若干種相同之物。如第一種有p個,第二種有q個,第三種有r個等。今於其總數n個中每次取a個。求其組合之數如次。

設有p個a,q個b,r個c,……而$a+b+c+\cdots\cdots=n$。則於n個物中每次取a個,可於次之積中求其x^a之係數,卽得

$$(1+ax+a^2x^2+\cdots\cdots+a^px^p)(1+bx+b^2x^2+\cdots\cdots+b^qx^q)$$
$$(1+cx+c^2x^2+\cdots\cdots+c^rx^r)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於此連乘積諸項x之次數。同於a, b, c,……各文字之次數可知。亦卽從a, b, c,……中取a個所有種種方法之數之和。但a之數限於p。b之數限於q。c之數限於r。……………卽所求組合之數。可令$a=b=c=\cdots\cdots\cdots=1$。而於

$$(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^p)(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^q)(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^r)\cdots\cdots$$

中求其x^a之係數卽得。

排列 如上例。於n物每次取a個。設其排列之數爲P_a。則

$$\left\{1+\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{x^p}{\underline{|p}}\right\}\left\{1+\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{x^q}{\underline{|q}}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=1+\frac{P_1}{\underline{|1}}x+\frac{P_2}{\underline{|2}}x^2+\cdots\cdots\cdots+\frac{P_n}{\underline{|n}}x^n。$$

何則。因於

$$\left\{1+\frac{ax}{\lfloor 1}+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\ldots\ldots+\frac{a^px^p}{\lfloor p}\right\}\left\{1+\frac{bx}{\lfloor 1}+\frac{b^2x^2}{\lfloor 2}+\ldots\ldots+\frac{b^qx^q}{\lfloor q}\right\}\ldots$$ 中 x^a 之係數。而以 $\lfloor a$ 乘之。則等於如

$\dfrac{\lfloor a}{\lfloor l\ \lfloor m\ldots\ldots} a^l b^m\ldots\ldots$ 形各項之和，而 $l+m+\ldots\ldots\ldots=a$ 即與 a 物內有 l 個 a, m 個 b,……… 每次取 a 個排列之公式 $\dfrac{\lfloor a}{\lfloor b\ \lfloor m\ldots\ldots}$ 相合。

例　　題

1. 從 a 五個，b 四個，c 二個每次取七個，求其組合。　　答 12

〔解〕所求組合之數。爲於 $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2)$。即 $(1-x^6)(1-x^5)(1-x^3)(1-x)^{-3}$ 中 x^7 之係數。即於 $(1-x^3-x^5-x^6+x^8+\ldots)(1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+21x^5+28x^6+36x^7+\ldots)$ 中 x^7 之係數。即 $36-15-6-3=12$,

2. 第一種 p 個，第二種 q 個，第三種 r 個……其選出之全數如何。

答 $(p+1)(q+1)(r+1)\ldots\ldots-1$

〔解〕此組合之全數。等於 $(1+x+x^2+\ldots\ldots\ldots+x^p)(1+x+\ldots\ldots\ldots+x^q)(1+x+\ldots\ldots+x^r)\ldots\ldots$ 中 $x^1, x^2,\ldots\ldots x^n$ 各係數之和。而此和以 1 代此積而減其內 x^0 之係數 1 即得。　　$\therefore\ (p+1)(q+1)(r+1)\ldots\ldots-1$。

〔別解〕從 p 個 a, q 個 b, r 個 c 等內。可求其取 1 取 2 取 3……方法之總數。以其取 a 之時有 $0, 1, 2,\ldots p$, 即 $p+1$。取 b 之時有 $q+1$。取 a, b 之時有 $(p+1)(q+1)$。同法推之。取 $a, b, c,\ldots$ 之時。有 $(p+1)(q+1)(r+1)\ldots$ 於此內減 1。即爲所求之數。　　$\therefore\ (p+1)(q+1)(r+1)\ldots\ldots-1$

3. 考驗三種科目。設各科之足分爲 m 分。則受驗生得三種科目之分數爲 $2m$ 者。其方法之數。爲 $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 試證明之。

〔證〕各科目所得之分。爲自 0 分至 m 分。故各科目之分。等於 $1+x+x^2+\ldots\ldots+x^m$ 中 x 之某指數，而於 $(1+x+x^2\ldots\ldots+x^m)^3$ 即 $\left(\dfrac{1-x^{m+1}}{1-x}\right)^3$。即 $(1-x^{m+1})^3(1-x)^{-3}$ 中。其 x^{2m} 之係數。爲所求方法之數，

$$\therefore (1-x^{m+1})^3(1-x)^{-3}=(1-3x^{m+1}+\ldots\ldots)\left(1+3x+\frac{3.4}{1.2}x^2+\frac{3.4.5}{1.2.3}x^3+\ldots\ldots\right)$$

$$=(1-3x^{m+1}+\ldots\ldots)\frac{1}{2}\Big\{1.2+2.3x+3.4x^2+\ldots\ldots\ldots+m(m+1)x^{m-1}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+(2m+1)(2m+2)x^{2m}+\ldots\ldots\Big\}$$

$\therefore$ x^{2m} 之係數 $=\frac{1}{2}\Big\{(2m+1)(2m+2)-3m(m+1)\Big\}=\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$。

293. 等次積 由 n 文字所成 r 乘元等次積之數。可以求得。其法已於250章詳述之。(凡等次積可以複用同文字)。而此結果可更用他法求得如次。

設 n 個文字 a,b,c,……而作連乘積

$(1+ax+a^2x^2+\ldots\ldots\ldots)(1+bx+b^2x^2+\ldots\ldots\ldots)(1+cx+c^2x^2+\ldots\ldots)\ldots\ldots\ldots$

此 x^r 之係數。其必爲諸文字 a,b,c,………之 r 乘元可知。即知此係數爲由此等文字。每次每 r 個諸方法之和。(等次積之和。其式如300.章第四例所示者是也。)

由是於上之連乘積 $a=b=c=\ldots\ldots\ldots=1$，其所求 r 乘元等次積之數。可從

$(1+x+x^2+\ldots\ldots)(1+x+x^2+\ldots\ldots\ldots)\ldots\ldots\ldots$ n因子即 $(1+x+x^2+\ldots\ldots\ldots)^n$。

即 $(1-x)^{-n}$ 求其 x^r 之係數即得。

$$\therefore {}_nH_r=\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+r-1)}{\lfloor r}=\frac{\lfloor n+r-1}{\lfloor r\lfloor n-1}。$$

此結果可得從 ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$ 表出之。

推論 $(a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n)^r$ 之展開式。其項數爲 $\frac{\lfloor n+r-1}{\lfloor r\lfloor n-1}$。

何則。以 $(a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots+a_n)^r$ 展開式之各項。皆爲 r 次項。即從 $a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots\ldots$ 之 n 個文字內取 r 個之等次積。故此展開式之項數爲 ${}_nH_r$。

294. 雜例 茲於此編之終。更示以下諸例。

〔第一例〕由二項式定理求 $\sqrt{14}$ 至小數六位止。

$$\sqrt{14}=\sqrt{(16-2)}=4\left(1-\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}=4\Big\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{8^2}-\frac{1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{8^3}-\ldots\ldots\ldots\Big\}$$

$$=4\{1-.0625-.001953-.0001220-.0000095-.0000010\}$$

$$=3.741657。$$

〔第二例〕當 x 甚小時 $\dfrac{(1-3x)^{-\frac{2}{3}}+(1-4x)^{-\frac{3}{4}}}{(1-3x)^{-\frac{1}{3}}+(1-4x)^{-\frac{1}{4}}}$。殆等於 $1+\dfrac{3}{2}x$。

惟 x 甚小。則其平方及其他高次之方乘愈小。可以捨去不計。故於 x 之一切方乘。可僅取其一次方乘。其餘悉捨去之。其原式如次。

$$\frac{1+\frac{2}{3}.3x+1+\frac{3}{4}.4x}{1+\frac{1}{3}.3x+1+\frac{1}{4}.4x}=\frac{2+5x}{2+2x}=\frac{1+\frac{5}{2}x}{1+x}$$

$$=\left(1+\frac{5}{2}x\right)(1+x)^{-1}=\left(1+\frac{5}{2}x\right)(1-x)=1+\frac{3}{2}x。$$

〔第三例〕證 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}$ 之整數部。爲 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$。

$\sqrt{3}-1$ 其值小於1。即爲常分數。故 $(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ 亦爲常分數。由是若 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ 爲整數。其整數當爲 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}$ 之整數部。

今 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$

$$=\left\{3^n\sqrt{3}+(2n+1)3^n+\frac{(2n+1)2n}{1.2}3^{n-1}\sqrt{3}+\text{............}+(2n+1)\sqrt{3}+1\right\}$$

$$-\left\{3^n\sqrt{3}-(2n+1)3^n+\frac{(2n+1)2n}{1.2}3^{n-1}\sqrt{3}-\text{............}+(2n+1)\sqrt{3}-1\right\}$$

$$=2\left\{(2n+1)3^n+\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3}3^{n-1}+\text{..............}+1\right\}$$

其所有無理之項悉消去。而 3^n, 3^{n-1},............ 之係數皆爲整數。故此式爲整數之2倍即爲偶數。是爲本題之證。

由次法可證明 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$。得以 2^{n+1} 整除之。

設 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ 以 L_{2n+1} 表之。

則 $L_1=2$, $L_3=20$, 以下類推。

又以 $(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2=8$。

由是 $8L_{2n+1}=\{(\sqrt{3}+1)^{2n+1}-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}\}\{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2\}$

$$=(\sqrt{3}+1)^{2n+3}-(\sqrt{3}-1)^{2n+3}+4\{(\sqrt{3}+1)^{2n-1}-(\sqrt{3}-1)^{2n-1}\}。$$

$\therefore \quad L_{2n+3}=8L_{2n+1}-4L_{2n-1}$ ....(A)

由(A) L_{2n+1} 及 L_{2n-1} 爲整數，則 L_{2n+3} 亦爲整數，今 L_3 及 L_1 爲整數。故 L_5 亦爲整數。故由歸納法知 $L_7, L_9, L_{11}, \ldots\ldots L_{2n+1}$ 皆爲整數，

於(A)若 L_{2n+1} 得以 2^{n+1} 整除，及 L_{2n-1} 得以 2^n 整除，則 $8L_{2n+1}$ 得以 2^{n+4} 整除。及 $4L_{2n-1}$ 得以 2^{n+2} 整除，即 L_{2n+3} 得以 2^{n+2} 整除。

今 L_3 得以 2^2 整除，L_1 得以 2^1 整除，故 L_5 得以 2^3 整除。由歸納法知 L_7 得以 2^4 整除，準此推之，可知 L_{2n-1} 得以 2^n 整除。及 L_{2n+1} 得以 2^{n+1} 整除之。

〔第四例〕試證 $a^n-n(a+b)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(a+2b)^n-\ldots\ldots=(-b)^n\underline{|n}$。但 n 爲任意之正整數。

命 $\frac{y+a}{b}=x$，則 $\frac{y+a+b}{b}=x+1$，$\frac{y+a+2b}{b}=x+2$ ....

$$\therefore \quad \frac{1}{x}=\frac{b}{y+a}, \quad \frac{1}{x+1}=\frac{b}{y+a+b}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{x+n}=\frac{b}{y+a+nb}。$$

惟因 $\frac{\underline{|n}}{x(x+1)\ldots(x+n)}=\frac{c_0}{x}-\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2}{x+2}-\ldots\ldots+(-1)^n\frac{c_n}{x+n}$。

(見 59. 章例題3)乃以同值代入之。而得

$$\frac{\underline{|n}\, b^n}{(y+a)(y+a+b)\ldots\ldots(y+a+nb)}=\frac{c_0}{y+a}+\frac{c_1}{y+a+b}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^r\frac{c_r}{y+a+rb}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

展開上式之兩邊，而爲 $\frac{1}{y}$ 之方乘如次，

$$左邊=\frac{\underline{|n}\, b^n}{y^{n+1}\left(1+\frac{a}{y}\right)\left(1+\frac{a+b}{y}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{a+nb}{y}\right)}$$
$$=\underline{|n}\, b^n.\frac{1}{y^{n+1}}\left(1+\frac{a}{y}\right)^{-1}\left(1+\frac{a+b}{y}\right)^{-1}\ldots\ldots\left(1+\frac{a+nb}{y}\right)^{-1}$$
$$=\underline{|n}\, b^n.\frac{1}{y^{n+1}}\left(1+\frac{a}{y}+\ldots\right)\left(1-\frac{a+b}{y}+\ldots\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{a+nb}{y}+\ldots\right)$$
$$=\underline{|n}\, b^n.\frac{1}{y^{n+1}}\left(1+\frac{1}{y}\text{ 及高次之項}\right)$$

$$=\underline{|n}\,b^n\left(\frac{1}{y^{n+1}}+\frac{1}{y^{n+2}}\text{及高次之項。}\right)$$

右邊 $=\frac{c_0}{y}\left(1+\frac{a}{y}\right)^{-1}-\frac{c_1}{y}\left(1+\frac{a+b}{y}\right)^{-1}+\cdots+(-1)^r\frac{c_r}{y}\left(1+\frac{a+rb}{y}\right)^{-1}+\cdots$

$$=\frac{c_0}{y}\left\{1-\frac{a}{y}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{a^n}{y^n}+\cdots\cdots\right\}$$

$$-\frac{c_1}{y}\left\{1-\frac{a+b}{y}+\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{(a+b)^n}{y^n}+\cdots\cdots\right\}+\cdots$$

$$+(-1)^r\frac{c_r}{y}\left\{1-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{(a+rb)^n}{y^n}+\cdots\cdots\cdots\right\}+\cdots\cdots\cdots$$

故於右邊 $\frac{1}{y^{k+1}}$ 之係數。爲

$$(-1)^k\{c_0a^k-c_1(a+b)^k+\cdots\cdots+(-1)^rc_r(a+rb)^k+\cdots\cdots\cdots\cdots\}。$$

又於左邊 $\frac{1}{y}$ 之最低次爲 $\frac{1}{y^{n+1}}$。故若 $n+1$ 比 $k+1$ 爲大。卽 $n>k$。則其左邊無有 $\frac{1}{y^{k+1}}$ 之項。又若 $n+1$ 等於 $k+1$。則其左邊 $\frac{1}{y^{k+1}}$ 之項之係數爲 $\underline{|n}\,b^n$。

由是 $n=k$。則 $(-1)^n\{c_0a^n-c_1(a+b)^n+\cdots\cdots\}=\underline{|n}\,b^n$。

卽 $a^n-\frac{n}{1}(a+b)^n+\cdots\cdots=(-1)^n\underline{|n}\,b^n$。

例題二十八

1. 求下列各級數無限項之和。

(1) $1+\frac{1}{\underline{|1}}\cdot\frac{3}{2^3}+\frac{1\cdot3}{\underline{|2}}\cdot\frac{3^2}{2^6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{\underline{|3}}\cdot\frac{3^3}{2^9}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 答 2。

(2) $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 答 $\sqrt{\frac{2}{3}}$。

(3) $1+\frac{4}{\underline{|1}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4\cdot7}{\underline{|2}}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{4\cdot7\cdot10}{\underline{|3}}\cdot\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 答 $4\sqrt[3]{4}$。

(4) $\frac{3\cdot5}{3\cdot6}+\frac{3\cdot5\cdot7}{3\cdot6\cdot9}+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9}{3\cdot6\cdot9\cdot12}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 答 $\sqrt{27}-2$。

(5) $\frac{3}{2.4}+\frac{3.4}{2.4.6}+\frac{3.4.5}{2.4.6.8}+\cdots\cdots$ 答 1。

(6) $1+\frac{2}{6}+\frac{2.5}{6.12}+\frac{2.5.8}{6.12.18}+\cdots\cdots$ 答 $\sqrt[3]{4}$。

(7) $1-\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}-\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$ 答 $\sqrt{\frac{8}{27}}$。

(8) $\frac{4}{18}+\frac{4.12}{18.27}+\frac{4.12.20}{18.27.36}+\cdots\cdots$ 答 $\frac{1}{2}$。

(9) $1+\frac{2}{9}+\frac{2.5}{9.18}+\frac{2.5.8}{9.18.27}+\cdots\cdots$ 答 $\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$。

(10) $\frac{1}{9.18}+\frac{1.3}{9.18.27}+\frac{1.3.5}{9.18.27.36}+\cdots\cdots$ 答 $\frac{10}{9}-\frac{1}{3}\sqrt{11}$.

(11) $\frac{1}{2.4.6}+\frac{1.3}{2.4.6.8}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8.10}+\cdots\cdots$ 答 $\frac{1}{24}$。

(12) $\frac{7}{72}+\frac{7.28}{72.96}+\frac{7.28.49}{72.96.120}+\cdots\cdots$ 答 $\frac{37}{245}$。

〔解〕本題可參考288章。

(1) $(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\cdots\cdots$ 若 $x=\frac{3}{4}$。

則 $\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{|\underline{1}}\frac{3}{2^3}+\frac{1.3}{|\underline{2}}\frac{3^2}{2^6}+\frac{1.3.5}{|\underline{3}}\frac{3^3}{2^9}+\cdots\cdots$

(2) $(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\cdots\cdots$ 若 $x=\frac{1}{2}$。

則 $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{2^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$

(3) $(1-x)^{-\frac{4}{3}}=1+\frac{4}{3}x+\frac{4.7}{3.6}x^2+\frac{4.7.10}{3.6.9}x^3+\cdots\cdots$

設 $x=\frac{3}{4}$。則 $\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{4}{3}}=1+\frac{4}{|\underline{1}}\,\frac{1}{4}+\frac{4.7}{|\underline{2}}\,\frac{1}{4^2}+\frac{4.7.10}{|\underline{3}}\,\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots$

(4) $(1-x)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}x+\frac{3.5}{2.4}x^2+\frac{3.5.7}{2.4.6}x^3+\cdots\cdots$ 若 $x=\frac{2}{3}$。

則 $\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{3}+\frac{3.5}{3.6}+\frac{3.5.7}{3.6.9}+\cdots\cdots$

(5) $S=\frac{3}{1.2}\,\frac{1}{2^2}+\frac{3.4}{1.2.3}\,\frac{1}{2^3}+\frac{3.4.5}{1.2.3.4}\,\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\left\{3.\frac{1}{2^2}+4.\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\right\}$。

而 $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}=1+1+3\frac{1}{2^2}+4.\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\therefore$ $S=1$。

(6) $(1-x)^{-\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}x+\frac{2.5}{3.6}x^2+\frac{2.5.8}{3.6.9}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 若 $x=\frac{1}{2}$。

則 $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{6}+\frac{2.5}{6.12}+\frac{2.5.8}{6.12.18}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

(7) $(1+x)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}x+\frac{3.5}{2.4}x^2-\frac{3.5.7}{2.4.6}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 設 $x=\frac{1}{2}$,

則 $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}-\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

(8) $(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{1}\frac{x}{2}-\frac{1.1}{1.2}\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1.1.3}{1.2.3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots\cdots$ 若 $x=\frac{8}{9}$。

則 $\left(1-\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{4}{9}-\frac{1}{1.2}\left(\frac{4}{9}\right)^2-\frac{1.3}{1.2.3}\left(\frac{4}{9}\right)^3-\cdots\cdots$

即 $\frac{1}{3}=1-\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\left(\frac{4}{18}+\frac{4.12}{18.27}+\cdots\cdots\cdots\right)=\frac{5}{9}-\frac{4}{9}S$。 $\therefore$ $S=\frac{1}{2}$,

(9) $(1-x)^{-\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}x+\frac{2.5}{3.6}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\therefore$ $S=\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$。

(10) $(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1.1}{2.4}x^2+\frac{1.1.3}{2.4.6}x^3-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^4+\cdots\cdots\cdots$

$\therefore$ $\left(1+\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{9}-S$。

(11) $(1-x)^{\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}x+\frac{3.1}{2.4}x^2+\frac{3.1.1}{2.4.6}x^3+\frac{3.1.1.3}{2.4.6.8}x^4+\cdots\cdots\cdots$

故 $(1-1)^{\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}+\frac{3.1}{2.4}+\frac{3.1.1}{2.4.6}+\frac{3.1.1.3}{2.4.6.8}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

即 $0=1-\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+3\ S$。 $\therefore$ $S=\frac{1}{24}$。

(12) $S=\frac{1}{3}\frac{7}{24}+\frac{1.4}{3.4}\left(\frac{7}{24}\right)^2+\frac{1.4.7}{3.4.5}\left(\frac{7}{24}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

若 $x=\frac{7}{8}$, 則 $\left(1-\frac{7}{8}\right)^{\frac{5}{3}}=1-\frac{5}{1}\frac{7}{24}+\frac{5.2}{1.2}\left(\frac{7}{24}\right)^2+\frac{5.2.1}{1.2.3}\left(\frac{7}{24}\right)^3$

$+\frac{5.2.1.4}{1.2.3.4}\left(\frac{7}{24}\right)^4+\frac{5.2.1.4.7}{1.2.3.4.5}\left(\frac{7}{24}\right)^5+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

由是 $\frac{1}{32}=1-\frac{35}{24}+\frac{5\cdot 7^2}{24^2}+5\left(\frac{7}{24}\right)^2 S$。 $\therefore\quad S=\frac{37}{245}$。

2. 試證 $\dfrac{1+n\frac{a}{a+b}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\cdots\cdots}{1+n\frac{b}{a+b}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\left(\frac{b}{a+b}\right)^2+\cdots\cdots}=\frac{a^n}{b^n}$。

〔證〕 分子 $=\left(1-\frac{a}{a+b}\right)^{-n}=\frac{(a+b)^n}{b^n}$。分母 $=\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^{-n}=\frac{(a+b)^n}{a^n}$。

由是 原式 $=\frac{(a+b)^n}{b^n}\div\frac{(a+b)^n}{a^n}=\frac{a^n}{b^n}$。

3. $$(1+x)^n=2^n\left\{1-n\frac{1-x}{1+x}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$

〔證〕 $$(1+x)^n=\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-n}=\left\{\frac{(1+x)+(1-x)}{2(1+x)}\right\}^{-n}=2^n\left\{1+\frac{1-x}{1+x}\right\}^{-n}$$
$$=2^n\left\{1-n\frac{1-x}{1+x}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}。$$

4. x 大於 $\frac{1}{2}$。則

$$\frac{x}{\sqrt{(x+1)}}=\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4+\cdots\cdots$$

〔證〕 $$\frac{x}{\sqrt{(x+1)}}=\frac{x}{1+x}(1+x)^{\frac{1}{2}}=\frac{x}{1+x}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{1+x}\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}。$$

5. $$(1-x^2)^n=(1+x)^{2n}-2nx(1+x)^{2n-1}+\frac{2n(2n-2)}{1\cdot 2}x^2(1+x)^{2n-2}-\cdots\cdots$$

〔證〕 惟因 $(1-x^2)^n=(1+x)^n\{(1+x)-2x\}^n$。由是可得本題之證。

6. $1+n\frac{a-x}{a+x}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2+\cdots\cdots=\left(\frac{a+x}{2x}\right)^n$。

〔證〕 左邊 $=\left(1-\frac{a-x}{a+x}\right)^{-n}=\left(\frac{2x}{a+x}\right)^{-n}=\left(\frac{a+x}{2x}\right)^n$。

7. $$(1+x)^{2n}=(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}x^2(1+x)^{n-2}$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3(1+x)^{n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(證) 惟因 $(1+x)^{2n}=(1+x)^n\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{-n}$。將此右邊展開之即得。

8. $a<b$。則 $a^2b^2=(a+b)^4\left\{\frac{a^2}{b^2}-\frac{4}{1}\frac{a^3}{b^3}+\frac{4.5}{1.2}\frac{a^4}{b^4}-\frac{4.5.6}{1.2.3}\frac{a^5}{b^5}+\cdots\cdots\right\}$。

(證) $a^2b^2=(a+b)^4\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b}{a+b}\right)^4=(a+b)^4\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a}{b}\right)^{-4}$。但 $\frac{a}{b}<1$。故展開 $\left(1+\frac{a}{b}\right)^{-4}$ 式，即可求得本題之證。

9. $$1-\frac{n+x}{1+x}+\frac{(n+2x)(n-1)}{\underline{|2}\,(1+x)^2}-\frac{(n+3x)(n-1)(n-2)}{\underline{|3}\,(1+x)^3}+\cdots\cdots=0。$$

(證) $$左邊=\left\{1-n\frac{1}{1+x}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\frac{1}{(1+x)^3}+\cdots\right\}$$
$$-\frac{x}{1+x}\left\{1-\frac{n-1}{1}\frac{1}{1+x}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{1}{(1+x)^2}-\cdots\cdots\right\}$$
$$=\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^n-\frac{x}{1+x}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{n-1}=0。$$

10. y之數值比x之數值之三分之一小，則
$$1+n\frac{2y}{x+y}+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{2y}{x+y}\right)^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{2y}{x+y}\right)^3+\cdots\cdots$$
$$=1+n\frac{2y}{x-y}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{2y}{x-y}\right)^2+\cdots\cdots$$

(證) $$1+n\frac{2y}{x+y}+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{2y}{x+y}\right)^2+\cdots\cdots=\left(1-\frac{2y}{x+y}\right)^{-n}=\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$
$$=\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^n=\left(1+\frac{2y}{x-y}\right)^n=1+n\frac{2y}{x-y}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{2y}{x-y}\right)^2+\cdots\cdots$$

但 $y=\frac{x}{3}$。則 $\frac{2y}{x-y}$ 等於1。故y爲常數，須比 $\frac{x}{3}$ 爲小。

11. 求 $r-(r-1)n+(r-2)\frac{n(n-1)}{1.2}-(r-3)\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots$ 至r項之和。

答 $(-1)^{r-1}\frac{(n-2)(n-3)\cdots(n-r)}{\underline{|r-1}}$。

(解) $(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2-\cdots+(-1)^r\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r+\cdots$

及 $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+rx^{r-1}+(r+1)x^r+\cdots\cdots$

於此兩級數之積。求其 x^{r-1} 之係數。爲

$$r-(r-1)n+(r-2)\frac{n(n-1)}{1.2}-(r-3)\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots \text{至 } r \text{ 項,}$$

又 $(1-x)^n\times(1-x)^{-2}$。即 $(1+x)^{n-2}$。其 x^{r-1} 之係數。爲

$$(-1)^{r-1}\frac{(n-2)(n-3)\cdots\cdots\{n-2-(r-1)+1\}}{\lfloor r-1}=(-1)^{r-1}\frac{\lfloor n-2}{\lfloor r-1\ \lfloor n-r-1}.$$

12. 設 n 爲正整數,則

$$n-\frac{n^2(n-1)}{\lfloor 1\ \lfloor 2}+\frac{n^2(n^2-1^2)(n-2)}{\lfloor 2\ \lfloor 3}-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n-3)}{\lfloor 3\ \lfloor 4}+\cdots\cdots=0。$$

〔證〕 $(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$

$$(1-x)^n=(-1)^n(x-1)^n=(-1)^n\left\{x^n-nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}\cdots\cdots\right\}。$$

於此兩級數之積。其 x^{n-1} 之係數,爲

$$(-1)^{n+1}\left\{n-\frac{n^2(n-1)}{\lfloor 1\ \lfloor 2}+\frac{n^2(n^2-1)(n-2)}{\lfloor 2\ \lfloor 3}-\cdots\cdots\right\}。$$

又 $(1-x)^{-n}\times(1-x)^n=(1-x)^0=1$。內 x^{n-1} 之係數爲0。由是得本題之證

〔注意〕本題之 n 若爲負數或分數。則如 $n^2(n-1)$, 與 $n^2(n^2-1^2)(n-2)$……各分子增大而爲發級數。故 n 爲正整數而大於1。

13. n 爲正整數。則 $n-\frac{n(n^2-1^2)}{\lfloor 1\ \lfloor 2}+\frac{n(n^2+1^2)(n^2+2^2)}{\lfloor 2\ \lfloor 3}-\cdots\cdots$

$$+(-1)^r\frac{n(n^2-1^2)\cdots\cdots(n^2-r^2)}{\lfloor r\ \lfloor r+1}+\cdots\cdots=(-1)^{n+1}.$$

〔證〕$(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$

及 $(1-x)^{n-1}=(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}=$

$$(-1)^{n-1}\left\{x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}x^{n-3}-\cdots\cdots\cdots\right\}$$

於此兩級數之積,其 x^n 之係數爲

$$(-1)^{n-1}\left\{n-\frac{n(n^2-1^2)}{\lfloor 1\ \lfloor 2}+\frac{n(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{\lfloor 2\ \lfloor 3}-\cdots\cdots\right\}。$$

又於 $(1-x)^{-n}\times(1-x)^{n-1}$。即 $(1-x)^{-1}$ 內 x^n 之係數爲 $(-1)^{2n}$。故得本題之證。

14. n不小於4而爲正整數，則

$$1-4n+\frac{4.5}{1.2}\frac{n(n-1)}{1.2}-\frac{4.5.6}{1.2.3}\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots=0。$$

〔證〕 $(1-x)^n=(-1)^n\left\{x^n-nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}+\cdots\right\}$。

及 $(1-x)^{-4}=1+4x+\frac{4.5}{1.3}x^2+\frac{4.5.6}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\cdots$

於此兩級數之積，x^n之係數爲$(-1)^n\left\{1-4x+\frac{4.5}{1.2}\frac{n(n-1)}{1.2}-\cdots\cdots\right\}$。

又於$(1-x)^n\times(1-x)^{-4}=(1-x)^{n-4}$。而$n-4$爲正。故$x^n$之係數爲0，由是得本題之證。

15. 試證 $1.n(n+1)+2(n-1)n+3(n-2)(n-1)+\cdots\cdots+n.1.2$

$$=\frac{1}{1.2}n(n+1)(n+2)(n+3)。$$

〔證〕 $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots\cdots$。

及 $(1-x)^{-3}=\frac{1}{1.2}\left\{1.2+2.3x+3.4x^2+\cdots\cdots+n(n+1)x^{n-1}+\cdots\cdots\right\}$。

於此兩級數之積，x^{n-1}之係數爲$\frac{1}{2}\{1.n(n+1)+2(n-1)n+\cdots+n.1.2\}$。

又$(1-x)^{-2}\times(1-x)^{-3}=(1-x)^{-5}$。內$x^{n-1}$之係數爲$\frac{1}{|\underline{4}}n(n+1)(n+2)(n+3)$。

16. $1.n(n+1)+\frac{n}{1}(n-1)n+\frac{n(n+1)}{1.2}(n-2)(n-1)$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}(x-3)(x-2)+\cdots\cdots=2\frac{|\underline{2n+1}}{|\underline{n-1}\,|\underline{n+2}}。$$

〔證〕 $(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{1.2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$

及 $2(1-x)^{-3}=1.2+2.3x+3.4x^2+\cdots\cdots+n(n+1)x^{n-1}+\cdots\cdots$

於此兩級數之積，x^{n-1}之係數爲$1.n(n+1)+\frac{n}{1}(n-1)n+\cdots\cdots$

又於$(1-x)^{-n}\times2(1-x)^{-3}=2(1-x)^{-n-3}$內$x^{n-1}$之係數，爲

$$2\frac{(n+3)(n+4)\cdots\cdots(2n+1)}{1.2\cdots\cdots(n-1)}=\frac{2\,|\underline{2n+1}}{|\underline{n+2}\,|\underline{n-1}}。$$

17. $p_r=\dfrac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots2r}$。則$p_n+p_{n-1}p_1+p_{n-2}p_2+\ldots+p_1p_{n-1}+p_n=1$。

(證) $(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+p_1x+p_2x^2+\ldots\ldots\ldots+p_nx^n+\ldots\ldots\ldots\ldots$

兩邊各平方之。$(1-x)^{-1}=(1+p_1x+p_2x^2+\ldots\ldots+p_nx^n+\ldots\ldots\ldots)^2$。於此級數$x^n$之係數爲$p_n1+p_{n-1}p_1+p_{n-2}p_2+\ldots\ldots+1.p_n$。而於$(1-x)^{-1}$。$x^n$之係數爲1。

18. $p_r=\dfrac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots\ldots2r}$及$q_r=\dfrac{5.7\ldots\ldots(2r+3)}{2.4\ldots\ldots2r}$。則

$p_r+p_{r-1}q_1+\ldots\ldots\ldots+q_r=\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$。

〔證〕 $(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+p_1x+p_2x^2+\ldots\ldots\ldots+p_rx^r+\ldots\ldots\ldots$

及 $(1-x)^{-\frac{5}{2}}=1+q_1x+q_2x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+q_rx^r+\ldots\ldots$

$\therefore$ $p_r.1+p_{r-1}q_1+p_{r-2}q_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+1.q_r=(1-x)^{-\frac{1}{2}}\times(1-x)^{-\frac{5}{2}}$。

即 $(1-x)^{-3}$中x^r之係數爲$\dfrac{1}{2}(r+1)(r+2)$。

19. $1+2(n-1)+2^2\dfrac{(n-2)(n-3)}{1.2}+2^3\dfrac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$=\dfrac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$。

〔證〕 $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+x^n+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$2x^2(1-x)^{-2}=2x^2+2.2x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+2(n-1)x^n+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2^2x^4(1-x)^{-3}=2^2x^4+2^2\frac{2.3}{1.2}x^5+2^2\frac{3.4}{1.2}x^6+\ldots\ldots+2^2\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}x^n+\ldots\ldots$$

$$2^3x^6(1-x)^{-4}=2^3x^6+2^3\frac{2.3.4}{1.2.3}x^7+\ldots+2^3\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^n+\ldots\ldots\ldots$$

$\therefore$ 此左邊之和

$$=(1-x)^{-1}\{1+2x^2(1-x)^{-1}+2^2x^4(1-x)^{-2}+2^3x^6(1-x)^{-3}+\ldots\ldots\ldots\}$$

$$=(1-x)^{-1}\{1-2x^2(1-x)^{-1}\}^{-1}=\frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x-2x^2}{1-x}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{1-x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{1-2x}+\frac{1}{1+x}\right)。$$

而此式中x^n之係數爲$\dfrac{1}{3}\{2^{n+1}+(-1)^n\}$。

又於此右邊之和。其x^n之係數爲

$$1+2(n-1)+2^2\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}+2^3\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

20. $\frac{a^n-b^n}{a-b}=(a+b)^{n-1}-(n-2)ab(a+b)^{n-3}$

$$+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-5}-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

〔解〕於$(1-ax)^{-1}-(1-bx)^{-1}$。其x^n之係數爲a^n-b^n。由是$\frac{a^n-b^n}{a-b}$爲

$\frac{1}{a-b}\left\{(1-ax)^{-1}-(1-bx)^{-1}\right\}$。即$\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}$中$x^n$之係數。

又　$\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}=x\left[\{1-(a+b)x\}+abx^2\right]^{-1}$

$$=x\{1-(a+b)x\}^{-1}-abx^3\{1-(a+b)x\}^{-2}+a^2b^2x^5\{1-(a+b)x\}^{-3}+\cdots$$

此級數中x^n之係數爲

$$(a+b)^{n-1}-(n-2)ab(a+b)^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-5}-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

21. 試從$(1+2x+x^2)^{2n}$之展開式。證

$$2^{2n}+\frac{2n(2n-1)}{\lfloor 1\,\lfloor 1}2^{2n-2}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{\lfloor 2\,\lfloor 2}2^{2n-4}+\cdots\cdots+\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\,\lfloor n}$$

$$=\frac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n\,\lfloor 2n}。$$

〔證〕　$(1+2x+x^2)^{2n}=(1+x^2)^{2n}\left\{\frac{2x}{1+x^2}+1\right\}^{2n}$

$$=2^{2n}x^{2n}+\frac{2n}{\lfloor 1}2^{2n-1}x^{2n-1}(1+x^2)+\frac{2n(2n-1)}{\lfloor 2}2^{2n-2}x^{2n-2}(1+x^2)^2+\cdots\cdots$$

$$+(1+x^2)^{2n}。$$

於此級數之第1項,第3項,第5項……有x^{2n}之項。故x^{2n}之係數爲

$$2^{2n}+\frac{2n(2n-1)}{\lfloor 2\,\lfloor 1}2^{2n-2}\frac{2}{\lfloor 1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\,\lfloor n}。$$

又於$(1+2x+x^2)^{2n}=(1+x)^{4n}$ 其x^{2n}之係數爲$\frac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n\,\lfloor 2n}。$

22. 設 $m>2n$ 或 $m=2n$。試證

$$\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+m-1)}{\lfloor m}-n\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+m-4)}{\lfloor m-3}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{n(n-1)\ldots(n+m-7)}{\lfloor m-6}-\ldots\ldots=0 \text{ 或 }=1。$$

〔證〕 $(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{r(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\ldots\ldots+\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{\lfloor m}x^m+\ldots.$

又 $(1-x^3)^n=1-nx^3+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^6-\ldots\ldots\ldots\ldots$

於此兩級數之積，其 x^m 之係數爲

$$\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+m-1)}{\lfloor m}-\frac{n(n+1)\ldots\ldots(n+m-4)}{\lfloor m-3}+\ldots\ldots\ldots$$

又於 $(1-x)^{-n}\times(1-x^3)^n=(1+x+x^2)^n$ 其 $m>2n$。則 x^m 之係數爲 0。

又 $m=2n$，則 x^m 等於 x^{2n}。故其係數爲 1，

23. 試於 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots\ldots\ldots$ 求其 x^n 之係數。 答 1

〔解〕 原式 $=\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots}{1-x}=\frac{1}{1-x}\frac{x^\infty}{}$。

$x<1$。則 $x^\infty=0$。∴原式 $=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+x^n+\ldots\ldots\ldots$

由是 x^n 之係數等於 1。

24. x 爲常分數。則 $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots}=(1+x)(1+x^2)\ldots\ldots$

〔證〕 左邊 =

$$\frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\ldots\ldots}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots\ldots(1-x^3)(1+x^3)(1+x^6)\ldots\ldots\ldots(1-x^5)(1+x^5)\ldots..}$$

$$=\frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots}{(1-x^{2n})(1-x^{3\cdot 2n})(1-x^{5\cdot 2n})\ldots}$$

$x<1$。故 n 爲 ∞ 則此分母爲 1，

25. 6 童分 12 物。欲使各童所得之物數，不能少於 1。亦不得多於 3。其配分之方法共有幾種， 答 141。

〔解〕 以 x 之指數表物。所求方法之數。可於 $(x+x^2+x^3)^6$。求其 x^{11} 之係數。而

$(x+x^2+x^3)^6=x^6(1+x+x^2)^6=x^6(1-x^3)^6(1-x)^{-6}$

$$=x^6(1-6x^3+15x^6-\ldots)\left(1+6x+\ldots+\frac{6.7.8}{\underline{|3}}x^3+\ldots\ldots+\frac{6.7.8.9.10.11}{\underline{|6}}x^6+\ldots\ldots\right)$$

其 x^{12} 之係數。為 $15-6.7.8+\frac{6.7.8.9.10.11}{\underline{|6}}=141$。

26. 於 n 物內。有同種之物 p 個。其他各相異。則此組合之全數。為 $(p+1)2^{n-p}-1$。試證明之。

〔證〕此例可與292章參看。設 n 物內有 p 個 a。而其他之物。為 b_1, b_2, b_3, ……b_{n-r}。則所求之組合全數。等於次之積中 x 之各異方乘係數之和。

$(1+ax+a^2x^2+\ldots\ldots\ldots+a^px^p)(1+b_1x)(1+b_2x)\ldots\ldots\ldots(1+b_{n-p}x)$。

故於此置 $a=b_1=b_2=\ldots=x=1$。則 $(1+p)(1+1)^{n-p}=(p+1)2^{n-p}$。於此內減其不含 x 之 1 項。即得所求。

27. 以 n 個同種之物分給 r 人。其各人無 1 物不得者。則其方法之數。為 ${}_{n-r-1}C_{r-1}$ 試證之。

〔證〕設同種之物為 a。則所求之方法。等於 $(1+ax+ax^2+\ldots+ax^n)^r$ 內 x^n 之係數。今 $a=1$。則所求之數。為於

$(1+x+x^2+\ldots\ldots\ldots+x^n)^r=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^r=(1-x^{n+1})^r(1-x)^{-r}$ 內 x^n 之係數。

而於 $(1-x^{n+1})^r$ 內。無有 x^n 之係數。故可於 $(1-x)^{-r}$ 內。求其 x^n 之係數即 $\frac{r(r+1)\ldots\ldots(r+n-1)}{\underline{|n}}={}_{n+r-1}C_{r-1}$。

28. 從 2n 物內取 n 個組合之數為 2^n。但於 2n 物內有 n 個同種。其餘 n 個各為異種。

〔證〕所求之數。等於 $(1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n)(1+x)^n$ 中 x^n 之係數。而此積即 $(1-x^{n+1})(1+x)^n(1-x)^{-1}=(1-x^{n+1})(1+x)^n(1+x+x^2+\ldots\ldots)$。故可於 $(1+x)^n$。求得其係數之和為 2^n。

29. 從 3n 物取 n 個組合之數為 $2^{2n-1}\frac{\underline{|2n-1}}{\underline{|n}\,\underline{|n-1}}$。但此內有 n 物為同種。其餘 2n 物為異種。

〔證〕 所求之數。等於$(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)(1+x)^{2n}$內$x^n$之係數。而此係數可如次求得。

$$(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)(1+x)^{2n}=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)(1+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots$$
$$+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n+c_{n+1}x^{n+1}+\cdots\cdots+c_2x^{2n-2}+c_1x^{2n-1}+x^{2n})。$$

於上之積。其x^n之係數$=1+c_1+c_2+\cdots\cdots+c_{n-1}+c_n$。

而$(1+x)^{2n}$之係數之和$=2^{2n}=1+c_1+c_2+\cdots\cdots+c_{n-1}+c_n+c_{n-1}+\cdots\cdots$
$+c_2+c_1+1$。

$$\therefore\quad 1+c_1+c_2+\cdots\cdots+c_{n-1}+c_n=\frac{1}{2}(2^n+c_n)=\frac{1}{2}\left(2^n+\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\ \lfloor n}\right)$$
$$=2^{n-1}+\frac{1}{2}\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\ \lfloor n}。$$

卽爲所求之數。

30. 設考驗四種科學。其各科足分之數爲 m 分。而所得之總分數。須平均各科得m之半者。則其方法之數。爲

$$\frac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+3)。$$

〔證〕 總分數4m之半得2m。其方法之數等於$(1+x+x^2\cdots+x^m)^4$內x^{2m}之係數。

由是 $(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^m)^4=(1-x^{m+1})^4(1-x)^{-4}$

$$=\frac{1}{6}(1-4x^{m+1}+\cdots\cdots)\{1\cdot2\cdot3+\cdots\cdots+m(m+1)(m+2)x^{m-1}+\cdots\cdots$$
$$+(2m+1)(2m+2)(2m+3)x^{2m}+\cdots\cdots\}。$$

由是所求之數。爲

$$\frac{1}{6}\{(2m+1)(2m+2)(2m+3)-4m(m+1)(m+2)\}=\frac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+3)。$$

31. 於$(1-2x-2x^2)^{\frac{7}{2}}$求其$x^4$之係數。 答 $-\frac{245}{8}$。

〔解〕 $(1-2x-2x^2)^{\frac{7}{2}}=1-7x(1+x)+\frac{7\cdot5}{1\cdot2}x^2(1+x)^2+\frac{7\cdot5\cdot3}{1\cdot2\cdot3}x^3(1+x)^3$

$$+\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}x^4(1+x)^4+\cdots\cdots=1+\cdots+x^4\left\{\frac{7\cdot5}{1\cdot2}-\frac{7\cdot5\cdot3}{1\cdot2\cdot3}3+\frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\right\}+\cdots$$

32. 於 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^6$ 及 $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^8$ 之展開式。求其x^5之係數。 答 246, 792。

〔解〕 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^6=(1-x^5)^6(1-x)^{-6}$

$$=(1-6x^5+\ldots\ldots)\frac{1}{\lfloor 5}(1.2.3.4.5+\ldots+6.7.8.9.10x^5+\ldots\ldots)$$

$$=1+\ldots\ldots+246x^5+\ldots\ldots$$

又 $(1+x+\ldots\ldots+x^5)^8(1-x^6)^8(1-x)^{-8}$。

$$=(1-8x^6+\ldots\ldots)\frac{1}{\lfloor 7}(1.2.3.4.5.6.7+\ldots\ldots+6.7.8.9.10.11.12x^5+\ldots\ldots)$$

$$=1+\ldots\ldots\ldots+792x^5+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

33. 設於紙面各記以5.4.3.2.1.0點。乃於此六種中。任取七枚而得30點。其方法之數如何。 答 462。

〔解〕 所求之數等於 $(x^0+x+^2+x^3+x^4+x^5)^7$。即 $(1-x^6)^7(1-x)^{-7}$ 內 x^{30} 之係數。

34. 骰子之各面。記以1.2.3.4 5.6。今將骰子四個。於一次擲出20點。其方法之數如何。 答 35。

〔解〕 所求之數等於 $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$ 中 x^{20} 之係數。

35. 以 x 之遞昇方乘。記 $(4a^2+6ax+9x^2)^{-1}$ 之展開式。求其 x^n 之係數。 答 x^{3r} 之係數爲 $3^{3r}2^{-3r-2}a^{-3r-1}$。x^{3r+1} 之係數爲 $-3^{3r+1}2^{-3r-2}a^{-3r-2}$，$x^{3r+2}$ 之係數爲 0。

〔解〕 $(4a^2+6ax+9x^2)^{-1}=\dfrac{1}{4a^2+6ax+9x^2}=\dfrac{2a-3x}{8a^3-27x^3}$

$$=2a\left(1-\frac{3x}{2a}\right)\frac{1}{8a^3}\left(1-\frac{27x^3}{8a^3}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{4a^2}\left(1-\frac{3x}{2a}\right)\left\{1+\left(\frac{3x}{2a}\right)^3+\left(\frac{3x}{2a}\right)^6+\ldots\ldots+\left(\frac{3x}{2a}\right)^{3r}+\ldots\ldots\ldots\right\}.$$

由是 x^n 之係數。若 $n=3r$。則爲 $\dfrac{1}{4a^2}\left(\dfrac{3x}{2a}\right)^{3r}$。$n=3r+1$。則爲 $-\dfrac{1}{4a^2}\left(\dfrac{3}{2a}\right)^{3r+1}$。$n=3r+2$ 則爲 0。

36. 於 $\dfrac{1+x}{(1+x+x^2)^2}$ 展開式 x^{3m} 之係數爲 $2m+1$。

〔證〕 $\dfrac{1+x}{(1+x+x^2)^2}=\dfrac{(1+x)(1-x)^2}{(1-x^3)^2}=(1-x-x^2+x^3)\{1+2x^3+3x^6+\ldots\ldots$

$$+mx^{3(m-1)}+(m+1)x^{3m}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$，

故 x^{3m} 之係數爲 $m+(m+1)$。

37. 於$(1+2x+3x^2+\ldots\ldots)^2$展開式$x^r$之係數爲$\frac{1}{6}(r+1)(r+2)(r+3)$。

〔證〕原式$=\{(1-x)^{-2}\}^2=(1-x)^{-4}=\frac{1}{\lfloor 3}\{1.2.3+2.3.4x+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+(r+1)(r+2)(r+3)x^r+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$。

38. 於$(1.2+2.3x+3.4x^2+\ldots\ldots$至無限$)^2$之展開式。求其$x^n$之係數。

〔解〕原式$=\{2(1-x)^{-3}\}^2=4(1-x)^{-6}$展開式。由此求其$x^n$之係數爲$\frac{1}{30}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$。

39. 於$\{1.2+2.3.2x+3.4.2^2x^2+\ldots\ldots+(n+1)(n+2)2^nx^n+\ldots\ldots\ldots$至無限$\}^n$之展開式。求其$x^r$之係數。 答 $2^{n+r}\lfloor 3n+r-1/\lfloor r\lfloor 3n-1$

〔解〕原式$=\{2(1-2x)^{-3}\}^n=2^n(1-2x)^{-3n}$。由此求其$x^r$之係數即得。

40. $(1+x+2x^2+3x^3+\ldots)^2$之展開式。其x^r之係數爲$\frac{1}{6}r(r^2+11)$。

〔證〕原式$=\{1+x(1-x)^{-2}\}^2=1+2x(1-x)^{-2}+x^2(1-x)^{-4}$

$=1+2x(1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$+\frac{1}{6}x^2\{1.2.3+2.3.4x+\ldots\ldots+(n-1)n(n+1)x^{n-2}+\ldots\ldots\}$。

由是所求之係數$=2r+\frac{1}{6}(r-1)r(r+1)=\frac{1}{6}r(r^2+11)$。

41. $p-q$比p或q爲小。則$\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$殆等於$\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}$。

〔證〕$$\sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\frac{\sqrt[n]{(p+q+p-q)}}{\sqrt[n]{(p+q+q-p)}}=\frac{\sqrt[n]{\left(1+\frac{p-q}{p+q}\right)}}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{q-p}{p+q}\right)}}=\frac{1+\frac{1}{n}\frac{p-q}{p+q}+\ldots\ldots\ldots}{1+\frac{1}{n}\frac{q-p}{p+q}+\ldots\ldots\ldots}。$$

$\frac{p-q}{p+q}$之平方及高次方乘均微小。故可捨去而爲$\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n+1)q+(n-1)p}$。

42. $(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}=N$設F爲此分數部。則$NF=20^{2n+1}$。

〔證〕$6\sqrt{6}-14$爲常分數。故$(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}$亦爲常分數。而

$(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}-(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}=2\{14^{2n+1}+\frac{(2n+1)2n}{1.2}14^{2n-1}.6^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+\frac{(2n+1)}{1}14.6^{3n}\}$。

$\therefore (6\sqrt{6}+14)^{2n+1}-(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}$ 爲任意之整數。而 $(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}$。爲常分數。故爲N之分數部。由是 $NF=(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}(6\sqrt{6}-14)^{2n+1}=20^{2n+1}$。

43. 於 $(3\sqrt{3}+5)^{2r+1}=I+F$ 其於 I 爲整數。F 爲常分數。則 $F(I+F)=2^{2r+1}$。

〔證〕 $(3\sqrt{3}+5)^{2r+1}-(3\sqrt{3}-5)^{2r+1}=2\left\{5^{2r+1}+\frac{(2r+1)2r}{1.2}5^{2r-1}.3^3+\cdots\cdots\right.$

$$\left.+\frac{2r+1}{1}5.3^{3r}\right\}=\text{或整數}=I。$$

又 $(3\sqrt{3}-5)^{2r+1}$ 爲常分數即 F。

由是 $F(I+F)=(3\sqrt{3}+5)^{2r+1}(3\sqrt{3}-5)^{2r+1}=2^{2r+1}$。

44. 較大於 $(3+\sqrt{7})^{2m}$ 之整數。可以 2^{m+1} 整除之。

〔證〕 $(3+\sqrt{7})^{2m}+(3-\sqrt{7})^{2m}=2\left\{3^{2m}+\frac{2m(2m-1)}{1.2}3^{2m-2}.7+\cdots\cdots+7^m\right\}$

=或整數。

$(3-\sqrt{7})^{2m}$ 爲常分數。故 $(3+\sqrt{7})^{2m}+(3-\sqrt{7})^{2m}$ 爲較大於 $(3+\sqrt{7})^{2m}$ 之整數。今 $(3+\sqrt{7})^{2r}+(3-\sqrt{7})^{2r}=I_{2r}$,

$$\text{則 } I_{2r-2}I_2=\{(3+\sqrt{7})^{2r-2}+(3-\sqrt{7})^{2r-2}\}\{(3+\sqrt{7})^2+(3-\sqrt{7})^2\}$$
$$=I_{2r}+(3+\sqrt{7})^2(3-\sqrt{7})^2\{(3+\sqrt{7})^{2r-4}+(3-\sqrt{7})^{2r-4}\}$$
$$=I_{2r}+2^2I_{2r-4}。\text{即 } I_{2r-2}.2^5=I_{2r}+2^2I_{2r-4}$$

$\therefore \quad I_{2r}=2^5I_{2(r-1)}-2^2I_{2(r-2)}$。

故若 $I_{2(r-2)}$ 得以 2^{r+2+1} 整除。及 $I_{2(r-1)}$ 得以 2^{r-1+1} 整除。則 I_{2r} 得以 2^{r+1} 整除。

然 I_2 得以 2^2 整除。I_4 得以 2^3 整除。故 I_6 得以 2^4 整除。以下可順次類推。

45. m 爲正整數則畧大於 $(3+\sqrt{5})^m$ 之整數。可以 2^m 整除之。

〔解〕 $I_{m-2}I_2=\{(3+\sqrt{5})^{m-2}+(3-\sqrt{5})^{m-2}\}\{(3+\sqrt{5})^2+(3-\sqrt{5})^2\}$

$=I_m+2^4I_{m-4}$。 $\therefore \quad I_m=28I_{m-2}-16I_{m-4}$。

而 $I_1=2.3$。$I_2=2^2.9$。$I_3=2^4.9$。$I_4=2^4.47$。

I_1 爲 2^1 之倍數及 I_3 爲 2^3 之倍數。故 I_5 爲 2^5 之倍數。然則 I^7 亦爲 2^7 之倍數。以下皆可順次類推。若 m 爲奇數。亦可由同理推得之。

46. $\frac{1+x+y+xy}{1+x+y}$之公項,為$(-1)^{m+n}\frac{\underline{|m+n-2}}{\underline{|m-1}\,\underline{|n-1}}x^my^n$試證之。

(證) 原式$=1+xy\{1+(x+y)\}^{-1}$之展開式。由斯求之。即可得本題之證。

47. 於$\frac{x}{(-x)^2-cx}$展開式中試證其x^r之係數為

$$r\left\{1+\frac{r^2-1^2}{\underline{|2}}c+\frac{(r^2-1^2)(r^2-2^2)}{\underline{|5}}c^2+\frac{(r^2-1^2)(r^2-2^2)(r^2-3^2)}{\underline{|7}}c^3+\dots\dots\right\}$$

(證) 原式 $=x(1-x)^{-2}\{1-cx(1-x)^{-2}\}^{-1}$

$=x(1-x)^{-2}+cx^2(1-x)^{-4}+c^2x^3(1-x)^{-6}+\dots\dots$

展開此各項,而取其x^r之係數即得。

48. $1.2.n+3.4\frac{n(n-1)}{1.2}+5.6\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\dots\dots$

$+(2n-3)(2n-2)n+(2n-1)2n.1=2^nn^2$。

(證) $2(1-x)^{-3}=1.2+2.3x+3.4x^2+\dots\dots+(2n-1)2nx^{2n-2}+\dots\dots$

及 $(1+x^2)^n=x^{2n}+nx^{2n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{2n-4}+\dots\dots+nx^n+1$。

∴ 於$2(1+x^2)^n(1-x)^{-3}$內x^{2n-2}之係數,即為原式之左邊。

又 $(1+x^2)^n=[2-(1-x)\{2-(1-x)\}]^n$

$=2^n-n2^{n-1}(1-x)\{2-(1-x)\}+n(n-1)2^{n-2}(1-x)^2\{2-(1-x)^2\}$

$+(1-x)^3$以上之項。

∴ $2(1+x^2)^n(1-x)^{-3}=\frac{2^n}{(1-x)^2}-\frac{n2^{n+1}}{(1-x)^2}+\frac{n^22^n}{1-x}+(2n-3)$次之整代數式。

故於$2(1+x^2)^n(1-x)^{-3}$內x^{2n-2}之係數,為原式之右邊。

49. 於$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^2}$之展開式。試證其x^{n-r+1}之係數。為$2^{n-1}(n+2r)$。

(證) $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^2}=\frac{\{2-(1-x)\}^n}{(1-x)^2}=\frac{2^n}{(1-x)^2}-\frac{n2^{n-1}}{1-x}+(n-2)$次之整代數式。

由是x^{n-r-1}之係數。為$2^n(n+r)-n2^{n-1}$。

50. 於$\frac{(1-3x)^n}{(1-2x)^2}$之展開式。試證其$x^{n+r-1}$之係數為$(-1)^n(r-2n)2^{r-1}$。

〔證〕與前題同法求之。

51 $n^n-n(n-2)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^n-\ldots\ldots$至$(n+1)$項$=2.4.6\ldots\ldots 2n$,

〔證〕於293.章第四例。令其$a=n, b=-2$。則易於求得,

52. $a^{n+1}-n(a+b)^{n+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(a+2b)^{n+1}-\ldots=\frac{1}{2}\underline{|n+1}(2a+nb)(-b)^n$,

〔證〕由290.章第四例。

$$\frac{c_0}{1+ay^{-1}}+\frac{c_1}{1+(a+b)y^{-1}}+\ldots\ldots=\frac{\underline{|n}\ b^ny^{-n}}{(1+ay^{-1})\{1+(a+b)y^{-1}\}\ldots\{1+(a+nb)y^{-1}\}},$$

左邊y^{-n-1}之係數$=(-1)^{n+1}\{c_0a^{n+1}-c_1(a+b)^{n+1}+\ldots\ldots\}$,

又右邊$=\frac{\underline{|n}\ b^ny^{-n}}{1+y^{-1}\{a+(a+b)+\ldots\ldots+(a+nb)\}+\text{含有}y^{-2}\text{之項}}$,

故右邊y^{-n-1}之係數爲$-\underline{|n}\ b^n\{(n+1)a+\frac{1}{2}n(n+1)b\}$,

53. 二項式任意方乘之展開式,若其連續三項,爲等差級數而指數爲有理者。則其形爲q^2-2,但p爲整數。

〔證〕$(1+x)^n$之第$(r+1)$項。第$(r+2)$項。第$(r+3)$項,爲等差級數。而令其第$(r+1)$項爲p_r,則$p_r+\frac{(n-r)(n-r-1)}{(r+1)(r+2)}p_r=2\frac{n-r}{r+1}p_r$化之。即

$(n-r)^2-(2r+5)(n-r)+\frac{1}{4}(2r+5)^2=\frac{1}{4}(8a+17)$,

上之方程式n爲有理數。則$8r+17$必爲平方數,

$\therefore\ 8r+17=(2q+1)^2$。即$r=\frac{1}{2}q(q+1)-2$。

$\therefore\ n=(q+1)^2-2$或q^2-2。

54. $(1+x+x^2)^n$展開式係數平方之和爲$\sum_0^n\frac{\underline{|2n}}{\underline{|r}\,\underline{|r}\,\underline{|2n-2r}}$,但n爲正整數。

〔證〕$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots\ldots+a_{2n}x^{2n}$。

由例題二十五24.

$(1+x+x^2)^{2n}=a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots\ldots+a_{2n}$,

故$\sum a_r^2$,爲$(1+x+x^2)^{2n}$內x^{2n}之係數。

又 $\{1+x(1+x)\}^{2n}=1+2nx(1+x)+\ldots\ldots+\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}x^n(1+x)^n+\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$+\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n+r}\,\underline{|n-r}}x^{n+r}(1+x)^{n+r}+\ldots\ldots\ldots$$

又 $x^{n+r}(1+x)^{n+r}$ 內 x^{2n} 之係數爲 $\underline{|n+r}/\underline{|n-r}\,\underline{|2r}$。故得本題之證。

55. n 爲正整數。則 $1+\frac{n(n-1)}{2(2r+1)}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2r+1)(2r+3)}+\cdots\cdots\cdots$

$$=2^n\frac{r(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+n-1)}{2r(2r+1)(2r+2)\cdots\cdots(2r+n-1)}。$$

(證) $(1-2x)^{-r}=(1-r)^{-2r}\left\{1-\frac{x^2}{(1-x)^2}\right\}^{-r}=(1-x)^{-2r}+\frac{r}{1}x^2(1-x)^{-2r-2}+\cdots$

於此恆同式內。求其相等 x^{2n} 之係數即得。

第貳拾叁編

分項分數及不定係數

295. 分項分數(Partial Fraction)於第八編。曾示求已知諸分數之代數和。即合併若干之散分數而爲一分數之法則也。而本編則示以與前反對之法則。即從已知之一分數分析爲若干散分數。此法則謂之分項分數。

296. 注意已知分數之分子。其所含某文字之次數。常比其分母爲低。若分子比分母爲高。則先以分母除其分子。即可以整代數式與分數式之代數和。表其原分數。而以所得之分數式分析之。

297. 一次因子之分母 設分母可分括爲若干一次因子之積。即知此一分數之分項分數有若干。而其各一次因子即爲各分數之分母。

若所設之一分數。可分括爲 $x-a, x-b, x-c$..........n 因子。而其分子 $F(x)$。但 $F(x)$ 中之高次項。不高於 x 之 $n-1$。次則可得其分項如次。其 $A, B, C,$......爲與 x 不相關。故可求得其值。

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots\cdots$$

兩邊以 $(x-a)(x-b)(x-c)$.........乘之。得

$$F(x)=A(x-b)(x-c)\cdots\cdots+B(x-a)(x-c)\cdots\cdots+C(x-a)(x-b)\cdots+\cdots(1)$$

〔第一法〕(1)爲恆同式。故於其兩邊 $x^0, x^1, x^2,\ldots\ldots x^{n-1}$ 之係數全相同。故可從其兩邊比較 x 之同方乘係數。而得 $A, B, C,$.........之各值。

〔第二法〕用別法求得 $A, B, C,$.........之值如次。

(1)爲恆同式。故對於 x 之任何值皆合理。

若 $x=a$，則 $F(a)=A(a-b)(a-c)\cdots\cdots$ 故 $A=\dfrac{F(a)}{(a-b)(a-c)\cdots\cdots}$。

又 $x=b$。由同法 $B=\dfrac{F(b)}{(b-a)(b-c)\cdots\cdots}$。以下類推，

惟因 $\dfrac{F(x)}{(x-a)(x-b)\cdots\cdots}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\cdots\cdots$。

故 $\dfrac{F(x)}{(x-a)(x-b)\cdots\cdots}=\sum\dfrac{F(a)}{(a-b)(a-c)\cdots\cdots}\cdot\dfrac{1}{x-a}$。

例題

1. 試化 $\dfrac{3x+7}{(x-1)(x-2)}$ 爲分項分數。

〔解〕 $\dfrac{3x+7}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$，由第一法 $3x+7=A(x-2)+B(x-1)$，

設 1，則 $10=-A$。 $\therefore\ A=-10$。若 $x=2$。則 $13=B$。

由是 $\dfrac{3x+7}{(x-1)(x-2)}=-\dfrac{10}{x-1}+\dfrac{13}{x-2}$，

又由第二法之公式，爲

$$\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)}=\frac{3.1+7}{1-2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{3.2+7}{(2-1)}\cdot\frac{1}{x-2}=-\frac{10}{x-1}+\frac{13}{x-2},$$

2. 試化 $\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ 爲分項分數，

〔解〕 $\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x+c}$。則

$(b-c)(c-a)(a-b)=A(x-b)(x-c)+B(x-a)(x-c)+C(x-a)(x-b)$，

如 $x=a$。則 $(b-c)(c-a)(a-b)=A(a-b)(a-c)$， $\therefore A=c-b$，

由是 $\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\dfrac{c-b}{x-a}+\dfrac{a-c}{x-b}+\dfrac{b-a}{x-c}$，

3. 試化 $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n)}$ 爲分項分數，

〔解〕 $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n)}=\dfrac{A_0}{x}+\dfrac{A_1}{x+1}+\cdots\cdots+\dfrac{A_r}{x+r}+\dfrac{A_n}{x+n}$，

$1=A(x+1)(x+2)\ldots(x+n)+A_1x(x+2)(x+3)\cdots\cdots(x+n)+\ldots+A_rx(x+1)$

$\cdots\cdots(x-r-1)(x+r+1)\cdots\cdots(x+n)+\cdots\cdots+A_nx(x+1)\ldots(x+n-1)$

設 $x=0$。則右邊除第1項外皆消盡。即 $1=A_0\lfloor n$。　∴ $A_0=\frac{1}{\lfloor n}$。

又 $x=-r$。則 $1=A_r(-r)(-r+1)\cdots\cdots(-1)(1)(2)\cdots\cdots(n-r)$。

∴ $A_r=(-1)^r\frac{1}{\lfloor r\,\lfloor n-r}$。

$$\therefore\quad \frac{1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}=\frac{1}{\lfloor n}\left\{\frac{1}{x}+\cdots\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^r\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}\cdot\frac{1}{x+r}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{x+n}\right\}。$$

見259章第三例。

4. 試化 $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ 爲分項分數。答 $\Sigma\frac{pa^2+qa+r}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{x-a}$。

〔解〕 $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}\equiv\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$。則

$px^2+qx+r\equiv A(x-b)(x-c)+B(x-a)(x-c)+C(x-a)(x-b)$。

設 $x=a$。則 $pa^2+qa+r\equiv A(a-b)(a-c)$。∴ $A=\frac{pa^2+qa+r}{(a-b)(a-c)}$。

5. 試化 $\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}$ 爲分項分數。

〔解〕 $x^2+2x+5=(x+1+2i)(x+1-2i)$。但 $i=\sqrt{-1}$。

$$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1+2i}+\frac{C}{x+1-2i}。$$

$$\therefore\quad x^2+15\equiv A(x+1+2i)(x+1-2i)+B(x-1)(x+1-2i)$$
$$+C(x-1)(x+1+2i)。$$

若 $x=1$。則 $16=A(2+2i)(2-2i)=8A$。　∴ $A=2$。

又 $x=-1-2i$。則 $(1+2i)^2+15=B(-2-2i)(-4i)$。∴ $B=-\frac{3+i}{2-2i}$。

$x=-1+2i$。則 $(1-2i)^2+15=C(-2+2i)(4i)$。∴ $C=-\frac{3-i}{2+2i}$。

$$\therefore\quad \frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{2}{x-1}-\frac{3+i}{2-2i}\cdot\frac{1}{x+1+2i}-\frac{3-i}{2+2i}\cdot\frac{1}{x+1-2i}。$$

298. 別法 上之末例。其分母含有虛數量者。然通例常求有理因子法如次。

$\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$，但其第二項之分母，爲二次式。故其分子取低於二次者爲一次式。而以 $Bx+C$ 表之，

由是 $x^2+15=A(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)$。

$x=1$。則 $1+15=8A$。 $\therefore\ A=2$。

由是於上之方程式 $A=2$，則

$x^2+15=2(x^2+2x+5)+(Bx+C)(x-1)$。

即 $-x^2-4x+5=(Bx+C)(x-1)$。 $\therefore\ Bx+C=-x-5$。

故 $\frac{x^2+15}{(x-1)(x^2+2x+5)}=\frac{2}{x-1}-\frac{x+5}{x^2+2x+5}$。

299. 同因子之分母 如上所述分項分數之分母。含有相異之因子者。若含有相同之因子。則如次。

〔第一例〕試化 $\frac{2x+5}{(x-1)^3(x-3)}$ 爲分項分數，

令 $\frac{2x+5}{(x-1)^3(x-3)}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x-3}$，去分母

$2x+5=A(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)^2(x-3)+D(x-1)^3$。

$x=1$。則 $7=A(1-3)$。 $\therefore\ A=-\frac{7}{2}$。而以 $-\frac{7}{2}$ 代上之方程式之 A。則

$2x+5=-\frac{7}{2}(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)^2(x-3)+D(x-1)^3$。

即 $\frac{11}{2}(x-1)=B(x-1)(x-3)+C(x-1)^2(x-3)+D(x-1)^3$。

兩邊以 $x-1$ 除之。得 $\frac{11}{2}=B(x-3)+C(x-1)(x-3)+D(x-1)^2$。

$x=1$ 則 $\frac{11}{2}=-2B$， $\therefore\ B=-\frac{11}{4}$。

以此代入上之方程式，則得

$\frac{11}{2}=-\frac{11}{4}(x-3)+C(x-1)(x-3)+D(x-1)^2$。

即 $\frac{11}{4}(x-1)=C(x-1)(x-3)+D(x-1)^2$。

兩邊以$x-1$除之，得$\frac{11}{4}=C(x-3)+D(x-1)$，

又$x=1$。則$\frac{11}{4}=-2C$。 $\therefore \quad C=-\frac{11}{8}$。

由是得$D=\frac{11}{8}$。

故$\frac{2x+5}{(x-1)^3(x-3)}=\frac{11}{8(x-3)}-\frac{7}{2(x-1)^3}-\frac{11}{4(x-1)^2}-\frac{11}{8(x-1)}$.

〔第二例〕試化$\frac{(1+x)^n}{(1-2x)^3}$爲分項分數。

$\frac{(1+x)^n}{(1-2x)^3}=\frac{A}{(1-2x)^3}+\frac{B}{(1-2x)^2}+\frac{C}{1-2x}+$整代數式。

$\therefore \quad (1+x)^n=A+B(1-2x)+C(1-2x)^2+(1-2x)^3+$整代數式。

令$1-2x=y$。則

$(1+x)^n=\left(\frac{3}{2}-\frac{y}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\left(3^n-n3^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1.2}3^{n-2}y^2+y\text{ 之高次項}\right)$。

又前式右邊$=A+By+Cy^2+y^3+y$之整代數式。

乃比較y^0, y^1, y^2，之係數。得

$A=\frac{3^n}{2^n}, \quad B=-\frac{n3^{n-1}}{2^n}, \quad C=\frac{n(n-1)3^{n-2}}{2^{n+1}}$.

故$\frac{(1+x)^n}{(1-2x)^3}=$整代數式$+\frac{3^n}{2^n(1-2x)^3}-\frac{n3^{n-1}}{2^n(1-2x)^2}+\frac{n(n-1)3^{n-2}}{2^{n+1}(1-2x)}$，

300. 分項分數之應用 爰舉數例如次。

〔第一例〕於$\frac{1}{1-5x+6x^2}$之展開式。求其x^n之係數。

$\frac{1}{1-5x+6x^2}=\frac{3}{1-3x}-\frac{2}{1-2x}$（由分數分項之法）

$=3\{1+3x+(3x)^2+\ldots\ldots+(3x)^n+\ldots\}-2\{1+2x+(2x)^2+\ldots+(2x)^n+\ldots\}$。

由是x^n之係數爲$3^{n+1}-2^{n+1}$。

〔第二例〕於$\frac{(1+x)^n}{(1-2x)^3}$之展開式。求其x^{n+r}之係數。

由299.章第二例。

$\frac{(1+x)^n}{(1-2x)^3}=\frac{3^n}{2^n}\frac{1}{(1-2x)^3}-\frac{n3^{n-1}}{2^n}\frac{1}{(1-2x)^2}+\frac{n(n-1)3^{n-2}}{2^{n+1}}\frac{1}{1-2x}+(n-3)$ 次之整代數式。

由是可得所求之係數。

〔第三例〕三文字 a, b, c 其所有 n 乘元等次積之和，爲

$$\frac{a^{n+2}(c-b)+b^{n+2}(a-c)+c^{n+2}(b-a)}{(b-c)(a-c)(a-b)}。$$

此乘元等次積之和。等於次之積中 x^n 之係數。

$(1+ax+a^2x^2+\ldots\ldots)(1+bx+b^2x^2+\ldots\ldots)(1+cx+c^2x^2+\ldots\ldots)$〔見293.章〕。

即 $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$ 化爲分項式，則爲

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}\frac{1}{1-ax}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}\frac{1}{1-bx}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\frac{1}{1-cx}。$$

而 x^n 之係數爲 $\frac{a^{n+2}}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^{n+2}}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^{n+2}}{(c-a)(c-b)}$，

即 $\frac{a^{n+2}(c-b)+b^{n+2}(a-c)+c^{n+2}(b-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$。

〔第四例〕r 文字 $a_1, a_2, a_3\ldots\ldots a_r$ 其所有 n 乘元等次積之和若何。

如前例從 $\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)(1-a_3x)}$。 即 $\Sigma\frac{a^{r-1}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots}\frac{1}{1-a_1x}$。

求其 x^n 之係數爲 $\Sigma\frac{a_1^{n+r-1}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots\ldots(a_1-a_r)}$，即得所求。

301。不定係數 (Indeterminate Coefficients) 欲變化某代數式時。豫定一代數式之形。於其各項附以未知之係數。乃從恆同方程式之理，以定其未知係數之值。如於92.章及281.章所示者。即由此法以證明之。玆示以二例如次。

〔第一例〕於 $(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\ldots\ldots(1+c^nx)$ 之遞昇方乘積。求其 x^r 之係數。

此連乘積爲 x 之 n 次式。故設恆同式如次。

$(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\ldots\ldots(1+c^nx)$

$=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots+A_rx^r+\ldots\ldots+A_nx^n$，

但 $A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ 不含有 x 者。

今以 cx 代入上之恆同式之 x。則得

$$(1+c^2x)(1+c^3x)(1+c^4x)\ldots\ldots(1+c^{n+1}x)$$
$$=A_0+A_1cx+A_2c^2x^2+\ldots\ldots+A_rc^rx^r+\ldots\ldots A_nc^nx^n,$$

此恆同式之兩邊以 $1+cx$ 乘之。

$$(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\ldots\ldots(1+c^{n+1}x)$$
$$=(1+cx)(A_0+A_1cx+A_2c^2x^2+\ldots\ldots+A_rc^rx^r+\ldots\ldots+A_nc^nx^n。$$

則 $(A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots+A_rx^r+\ldots\ldots+A_nx^n)(1+c^{n+1}x)$

$$=(1+cx)(A_0+A_1cx+A_2c^2x^2+\ldots\ldots+A_rc^rx^r+\ldots\ldots+A_nc^nx^n),$$

於此恆同式比較其 x^r 之係數，

$$A_r+c^{n+1}A_{r-1}=A_rc^r+A_{r-1}c^r,$$

$$\therefore\quad A_r=\frac{c^{n+1}-c^r}{c^r-1}A_{r-1}=c^r\frac{c^{n-r+1}-1}{c^r-1}A_{r-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

於 (a) 以 $r-1$ 易其 r。則 $A_{r-1}=c^{r-1}\dfrac{c^{n-r+2}-1}{c^{r-1}-1}A_{r-2}$,

又以 $r-2$ 易其 r。則 $A_{r-2}=c^{r-2}\dfrac{c^{n-r+3}-1}{c^{r-2}-1}A_{r-3}$,

逐次如此。至最後 $A_0=1$。

由是變化如次。

$$A_r=c^r\frac{c^{n-r+1}-1}{c^r-1}A_{r-1}=c^r\frac{c^{n-r+1}-1}{c^r-1}c^{r-1}\frac{c^{n-r+2}-1}{c^{r-1}-1}A_{r-2}$$
$$=c^rc^{r-1}\frac{(c^{n-r+1}-1)(c^{n-r+2}-1)}{(c^r-1)(c^{r-1}-1)}c^{r-2}\frac{c^{n-r+3}-1}{c^{r-2}-1}A_{r-3}$$
$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=c^rc^{r-1}c^{r-2}\ldots\ldots c^2c^1\frac{(c^{n-r+1}-1)(c^{n-r+2}-1)\ldots\ldots(c^{n-1}-1)(c^n-1)}{(c^r-1)(c^{r-1}-1)\ldots\ldots(c^2-1)(c-1)}A_0$$
$$=c^{\frac{1}{2}r(r+1)}\frac{(c^n-1)(c^{n-1}-1)\ldots\ldots(c^{n-r+1}-1)}{(c^r-1)(c^{r-1}-1)\ldots\ldots(c-1)}$$

［第二例］ 求 $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2$ 之和

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2=A_1n+A_2n^2+A_3n^3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

但 A_1, A_2, A_3 不含有 n。又於 (a) 所設之未知係數 A_3 以下 A_4, A_5 等皆爲 0。故迄於 A_3 而止，

於(a)用n+1代其n。則

$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+(n+1)^2=A_1(n+1)+A_2(n+1)^2+A_3(n+1)^3\ldots$(b)。

從此方程式減(a)，則得

$(n+1)^2=A_1+(2n+1)A_2+(3n^2+3n+1)A_3$,

於此方程式之兩邊。比較其n^2, n^1, n^0之係數。

$3A_3=1,\quad 3A_3+2A_2=2.\quad A_3+A_2+A_1=1$。

由是 $A_1=\frac{1}{6},\quad A_2=\frac{1}{2},\quad A_3=\frac{1}{3}$。

$$\therefore\quad 1^2+2^2+\ldots.+n^2=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

試驗上之結果。$n=1$爲合理，$n=2$亦爲合理，由斯推之。知$n=3$, $4,\ldots\ldots$即n爲任意之正整數。無不合理.

他之級數之和。亦可如斯求得之。(如於321.章所示者。可應用此種之解法)。

例題二十九

試化下列各分數爲分項式。

1. $\dfrac{3x}{x^2+7x+6}$, 答 $\dfrac{18}{5(x+6)}-\dfrac{3}{5(x+1)}$。

2. $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$. 答 $\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{3}{x-2}$,

3. $\dfrac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}$. 答 $\dfrac{3}{4(x+3)}-\dfrac{5}{8(x+5)}-\dfrac{1}{8(x+1)}$.

4. $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}$。 答 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$。

(解) $\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}$, 則 $x^2+1=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$,

若$x=0$。則$A=1$。以代入於上之方程式，得

$x^2+1=(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$。即$-2=B(x+1)+C$。若$x=-1$。則$C=-2$。以代入於上之方程式。得$-2=B(x+1)-2$。 $\therefore\quad B=0$。

5. $\dfrac{8-x}{(2-x)^2(1+x)}$, 答 $\dfrac{2}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+1}$。

6. $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+x+6}$。 答 $\dfrac{1}{12(x+1)}-\dfrac{7}{3(x-2)}+\dfrac{13}{4(x-3)}$。

7. $\dfrac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}$。 答 $\dfrac{1}{5(x+2)}+\dfrac{4x-8}{5(x^2+1)}$。

8. $\dfrac{1+7x-x^2}{(1+3x)^2(1-10x)}$。 答 $\dfrac{1}{1-10x}+\dfrac{1}{3(1+3x)}-\dfrac{1}{3(1+3x)^2}$。

9. $\dfrac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$。 答 $\dfrac{1}{2(x^2+1)}+\dfrac{1}{2(x-1)^2}$。

10. $\dfrac{5-9x}{(1-3x)^3(1+x)}$。 答 $\dfrac{3}{2(1-3x)^3}+\dfrac{21}{8(1-3x)^2}+\dfrac{21}{32(1-3x)}+\dfrac{1}{32(1+x)}$。

11. $\dfrac{6x^2+x-1}{(x^2+1)(x-2)(x+3)}$。 答 $\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+3}$。

〔解〕 $\dfrac{6x^2+x-1}{(x^2+1)(x-2)(x+3)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{x-2}+\dfrac{D}{x+3}$

$6x^2+x-1=(Ax+B)(x-2)(x+3)+C(x^2+1)(x+3)+D(x^2+1)(x-2)$。

比較 x^3 之係數。 $0=A$, $x=2$ 則 $25=25C$。 $\therefore$ $C=1$。

若 $x=-3$。 則 $50=-50D$。 $\therefore$ $D=-1$。終得 $B=1$。

12. $\dfrac{x^3+2}{(x-2)^2(x^2+1)}$。 答 $\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{4}{5(x-2)}+\dfrac{x+2}{5(x^2+1)}$。

13. $\dfrac{x^2+x}{(x-1)^2(x^2+4)}$。 答 $\dfrac{2}{5(x-1)^2}+\dfrac{11}{25(x-1)}-\dfrac{11x-4}{25(x^2+4)}$。

14. $\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2(x-2)(x^2+1)}$。 答 $\dfrac{3}{5(x-2)}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}-\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{x+2}{10(x^2+1)}$。

15. $\dfrac{1+2x}{x^2(x+2)^3(x+1)}$。

答 $\dfrac{1}{8x^2}-\dfrac{1}{16x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{17}{16(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{3}{4(x+2)^3}$。

16. $\dfrac{1+2x}{x^2(x+2)^3(x+1)}$。

答 $\dfrac{1}{4(x+2)^3}+\dfrac{1}{6(x+2)^2}+\dfrac{11}{144(x+2)}+\dfrac{1}{9(x-1)}-\dfrac{1}{8x^2}-\dfrac{3}{16x}$。

17. 於 $\dfrac{x+4}{x^2+5x+6}$ 之展開式，求 x^n 之係數。 答 $(-1)^n(2^{-n}-3^{-n-1})$。

〔解〕 $\frac{x+4}{x^2+5x+6}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}-\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-1}$ 其 x^n 之係數。

爲 $(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}-\frac{1}{3}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}$。即 $(-1)^n(2^{-n}-3^{-n-1})$。

18. 於 $\frac{x-2}{(x+2)(x-1)^2}$ 之展開式。求 x^n 之係數。

答 $\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{9}(3n+7)$。

19. 於 $\frac{x+5}{(x^2-1)(x+2)}$ 之展開式。證其 x^{2n-1} 之係數爲 $1-\frac{1}{2^{2n}}$。

20. 於 $\frac{3-2x}{1-2x-3x^2}$ 之展開式。求其最初n項係數之和。

〔解〕 由287. 章。$\frac{3-2x}{1-2x-3x^2}$ 展開式最初n項係數之和。等於

$\frac{3-2x}{(1-x)(1-2x-3x^2)}$ 展開式 x^{n-1} 之係數。而

$\frac{3-2x}{(1-x)(1-2x-3x^2)}=\frac{21}{8(1-3x)}-\frac{1}{4(1-x)}+\frac{5}{8(1+x)}$。由是 x^{n-1} 之係數。爲

$\frac{7}{8}(3)^n-\frac{1}{4}+\frac{5}{8}(-1)^{n-1}$。即爲所求之和。

21. 於 $\frac{2-5x}{(1-5x)(1-3x)(1-2x)}$ 之展開式。求其最初n項係數之和。

與前例同法。 答 $\frac{1}{24}(9+5^{n+2}-2 3^{n+2}-2^{n+4})$。

22. 於 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}$ 之展開式。求其 x^n 之係數。並最初n項係數之和。

答 $(n^2+7n+8)2^{n-3}$, $\frac{1}{3}(n^3+9n^2+14n)2^{n-4}$。

〔解〕 $(1+x)^n=\{2-(1-x)\}^n=2^n-n2^{n-1}(1-x)+\frac{n(n-1)}{1.2}2^{n-2}(1-x)^2+\dots$

$\therefore\ \frac{(1+x)^n}{(1-x)^3}=\frac{2^n}{(1-x)^3}-\frac{n2^{n-1}}{(1-x)^2}+\frac{n(n-1)2^{n-3}}{1-x}+x$ 之 $(n-3)$ 次之整代數式。

由是 x^n 之係數爲 $2^{n-1}(n+1)(n+2)-n2^{n-1}(n+1)+n(n-1)2^{n-3}$。

由第二之解答。則於 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^4}$ 求 x^{n-1} 之係數即得。

23. 於 $\dfrac{(1+3x)^n}{(1+2x)^2}$ 展開式，證其 x^{n+r} 之係數為 $(-2)^r(r-2n+1)$。

24. $$\frac{x^{n+1}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)}=x+a_1+a_2+\cdots\cdots$$

$$+a_n+\sum\frac{a_1^{n+1}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots\cdots}\cdot\frac{1}{x-a_1},$$

〔證〕 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)=x^n-\sum a_1x^{n-1}+$ 次數較 x^{n-1} 為低之項，

$\therefore\quad (x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)(x+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)=\{x^n-\sum a_1x^{n-1}+$ 次數較 x^{n-1} 為低之項$\}(x+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)=x^{n+1}-$ 次數較 x^n 為低之項。

將此恆同式移項，以 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)$ 除之，則

$$\frac{x^{n+1}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)}=x+a_1+a_2+\cdots+a_n+\frac{\text{次數較 }x^n\text{ 為低之項}}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)}$$

$$=x+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{x-a_n},$$

由分項分數法。$A_r=\dfrac{a_r^{n+1}}{(a_r-a_1)(a_r-a_2)\cdots\cdots(a_r-a_n)}$，

$$\therefore\quad \frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}=\sum\frac{a_1^{n+1}}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots\cdots}\cdot\frac{1}{x-a_1}。$$

25. 試證 $\{(1-z)(1-cz)(1-c^2z)(1-c^3z)\}^{-1}$ 展開式中 z^{n-1} 之係數為 $\dfrac{(1-c^n)(1-c^{n+1})(1-c^{n+2})}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)}$。

〔證〕 原式 $=\dfrac{1}{(1-z)(1-cz)(1-c^2z)(1-c^3z)}$

$$=\frac{A}{1-z}+\frac{B}{1-cz}+\frac{C}{1-c^2z}+\frac{D}{1-c^3z},$$

惟因 $A=\dfrac{1}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)}$, $B=-\dfrac{c}{(1-c)^2(1-c^2)}=-\dfrac{c(1+c+c^2)}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)}$

$$C=\frac{c^3}{(1-c)^2(1-c^2)}=\frac{c^3(1+c+c^2)}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)},\quad D=-\frac{c^6}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)},$$

又原式 $=A(1-z)^{-1}+B(1-cz)^{-1}+C(1-c^2z)^{-1}+D(1-c^3z)^{-1}$.

於上之展開式，其 z^{n-1} 之係數為

$A+Bc^{n-1}+Cc^{2n-2}+Dc^{3n-3}$

$$=\frac{1}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)}\{1-c^n(1+c+c^2)+c^{2n+1}(1+c+c^2)-c^{3n+3}\}$$

$$=\frac{(1-c^n)(1-c^{n+1})(1-c^{n+2})}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)}。$$

26. 試證 $\frac{a(b-c)(bc-aa')(a^m-a'^m)}{a-a'}+\frac{b(c-a)(ca-bb')(b^m-b'^m)}{b-b'}$

$$+\frac{c(a-b)(ab-cc')(c^m-c'^m)}{c-c'}$$

$$=\frac{1}{abc}(b-c)(c-a)(a-b)(bc-aa')(ca-bb')(ab-cc')H_{m-3}。$$

但 $aa'=bb'$ 及 H_{m-3} 爲 a,b,c,a',b',c' 之 $m-3$ 乘元等次積之和。

〔證〕由300章第四例，$H_{m-3}=\sum\frac{a^{m+2}}{(a-b)(a-c)(a-a')(a-b')(a-c')}$。

此 $\sum$ 含分數六項，而其中之一對爲

$$\frac{a^{m+2}}{(a-b)(a-c)(a-a')(a-b')(a-c')}+\frac{a'^{m+2}}{(a'-a)(a'-b)(a'-c)(a'-b')(a'-c')}$$

$$=\frac{a^{m+2}}{(a-a')(a-b)(a-c)\left(a-\frac{cc'}{b}\right)\left(a-\frac{bb'}{c}\right)}$$

$$+\frac{a'^{m+2}}{(a'-a)\left(\frac{cc'}{a}-b\right)\left(\frac{bb'}{a}-c\right)\left(a'-\frac{aa'}{b}\right)\left(a'-\frac{aa'}{c}\right)}$$

$$=\frac{a^2bc(a^m-a'^m)}{(a-a')(a-b)(a-c)(ab-cc')(ac-bb')}，$$ 餘兩對準此類推。

由是 $\frac{1}{abc}(b-c)(c-a)(a-b)(bc-aa')(ca-bb')(ab-cc')H_{m-3}$

$$=\frac{a(b-c)(bc-aa')(a^m-a'^m)}{a-a'}+\cdots\cdots+\cdots\cdots$$

27. 級數 $1-c,\ 1-c^2,\ 1-c^3,\cdots\cdots$ 之任意連續 r 項之積，可以其初 r 項之積整除之，試求其證。

〔證〕由301章第一例，$(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\cdots\cdots(1+c^nx)$ 之展開式內，x^r 之係數爲 $c^{\frac{1}{2}r(r+1)}\frac{(c^n-1)(c^{n-1}-1)\cdots\cdots(c^{n-r+1}-1)}{(c^r-1)(c^{r-1}-1)\cdots\cdots(c-1)}$。

此係數爲 c 之整代數式，故 $(c^n-1)(c^{n-1}-1)\cdots\cdots\cdots\cdots(c^{n-r+1}-1)$，可以 $(c-1)(c^2-1)\cdots\cdots(c^r-1)$ 整除之。

28. c小於1，則$(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\cdots\cdots$至無限。

$$=1+\frac{c}{1-c}x+\frac{c^3}{(1-c)(1-c^2)}x^2+\cdots\cdots+\frac{c^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-c)\cdots\cdots(1-c^n)}x^n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

〔證〕 $(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\cdots\cdots$至無限$=A_0+A_1x+\cdots\cdots+A_rx^r+\cdots\cdots$

以cx代x。(但c比1小。故n為極大。則$1+c^nx^n=1$。)

$(1+c^2x)(1+c^3x)\cdots\cdots=A_0+A_1cx+\cdots\cdots+A_rc^rx^r+\cdots\cdots$

$\therefore\quad (1+cx)(A_0+A_1cx+\cdots\cdots+A_rc^rx^r+\cdots\cdots)=A_0+A_1x+\cdots+A_rx^r+\cdots$

於此兩邊比較x^r之係數，得$A_rc^r+A_{r-1}c^r=A_r$。

$\therefore\quad A_r=\frac{c^r}{1-c^r}A_{r-1}$，

同法 $A_r=\frac{c^r}{1-c^r}\cdot\frac{c^{r-1}}{1-c^{r-1}}\cdots\cdots\frac{c}{1-c}A_0$，但 $A_0=1$。

29. c小於1。則$(1+cx)(1+c^3x)(1+c^5x)\cdots\cdots$至無限

$$=1+\frac{c}{1-c^2}x+\frac{c^4}{(1-c^2)(1-c^4)}x^2+\frac{c^9}{(1-c^2)(1-c^4)(1-c^6)}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

〔證〕 $(1+cx)(1+c^3x)(1+c^5x)\cdots\cdots=A_0+A_1x+\cdots\cdots+A_rx^r+\cdots\cdots$

以cx代其x。與前題同法得$A_r=\frac{c^{2r-1}}{1-c^{2r}}\,\frac{c^{2r-3}}{1-c^{2r-2}}\cdots\cdots\frac{c}{1-c^2}A_0$，

30. c小於1。則$\frac{1}{(1-x)(1-cx)(1-c^2x)\cdots\cdots}$

$$=1+\frac{x}{1-c}+\frac{x^2}{(1-c)(1-c^2)}+\frac{x^3}{(1-c)(1-c^2)(1-c^3)}+\cdots\cdots\cdots$$

〔證〕 $\frac{1}{(1-x)(1-cx)(1-c^2x)\cdots\cdots}=A_0+A_1x+\cdots\cdots+A_rx^r+\cdots\cdots$

以cx易其x。則

$$\frac{1}{(1-cx)(1-c^2x)(1-c^3x)\cdots}=A_0+A_1cx+\cdots\cdots+A_rc^rx^r+\cdots\cdots\cdots$$

$\therefore\quad A_0+A_1cx+\cdots\cdots+A_rc^rx^r=(1-x)(A_0+A_1x+\cdots\cdots+A_rx^r+\cdots\cdots)$。

比較x^r之係數。得$A_rc^r=A_r-A_{r-1}$，

如前例 $A_r=\frac{1}{1-c^r}\cdot\frac{1}{1-c^{r-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{1-c}A_0$。

31. $\frac{(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\cdots\cdots}{(1-x)(1-cx)(1-c^2x)\cdots\cdots\cdots}=1+\frac{1+c}{1-c}x+\frac{(1+c)(1+c^2)}{(1-c)(1-c^2)}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔證〕 與前例同法求之。

32. $\frac{(1+cx)(1+c^2x)(1+c^3x)\dots}{(1-cx)(1-c^2x)(1-c^3x)\dots}$ 其 x^r 之係數爲 $c^r\frac{(1+1)(1+c)\dots(1+c^{r-1})}{(1-c)(1-c^2)\dots(c-c^r)}$。

〔證〕 原式 $=A_0+A_1x+\dots\dots$ 而以 cx 易其 x。與前例同法。

33. $\frac{1}{1-x}+\frac{y}{1-ax}+\frac{y^2}{1-a^2x}+\frac{y^3}{1-a^3x}+\dots\dots=\frac{1}{1-y}+\frac{x}{1-ay}+\frac{x^2}{1-a^2y}+\dots$

〔證〕 原恆同式左邊 x^r 之係數 $=1+ya^r+y^2a^{2r}+\dots\dots\dots=\frac{1}{1-ya^r}$,

$\therefore$ 左邊 $=\Sigma\frac{x^r}{1-ya^r}$。

34. $\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\frac{4x^4}{1-x^4}+\dots=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\dots\dots$

〔證〕 左邊

$=(x+x^2+x^3+\dots\dots)+(2x^2+2x^4+2x^6+\dots\dots)+(3x^3+3x^6+3x^9+\dots)+\dots$

$=(x+2x^2+3x^3+\dots\dots)+(x^2+2x^4+3x^6+\dots\dots)+(x^3+2x^6+3x^9+\dots)+\dots$

$=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{x^3}{(1-x^3)^2}+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

35. Lambert 氏之級數,即 $\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^4}{1-x^4}+\dots\dots\dots\dots$

等於 $x\frac{1+x}{1-x}+x^4\frac{1+x^2}{1-x^2}+x^9\frac{1+x^3}{1-x^3}+\dots\dots$試求其證。

〔證〕 第一之級數 $=x+x^2+x^3+x^4+\dots\dots$

$+x^2+x^4+x^6+x^8+\dots\dots\dots\dots$

$+x^3+x^6+x^9+x^{12}+\dots\dots\dots\dots$

$+x^4+x^8+x^{12}+x^{16}+\dots\dots\dots\dots$

$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$=(x+x^2+x^3+x^4+\dots\dots)+(x^2+x^3+x^4+\dots\dots)+(x^4+x^6+x^8+\dots\dots\dots)$

$+(x^6+x^9+x^{12}+\dots\dots)+(x^8+x^{12}+x^{16}+\dots\dots)+(x^{12}+\dots\dots)+\dots\dots\dots\dots$

$=\left(\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x}\right)+\left(\frac{x^4}{1-x^2}+\frac{x^8}{1-x^2}\right)+\left(\frac{x^9}{1-x^3}+\frac{x^{12}}{1-x^3}\right)+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$=x\frac{1+x}{1-x}+x^4\frac{1+x^2}{1-x^2}+x^9\frac{1+x^3}{1-x^3}+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

查理斯密司氏
霍爾氏,乃托氏

大代數學講義

第陸卷

第貳拾肆編

指數之定理,對數,對數級數

302. 指數之定理 $\frac{1}{n}$ 之值爲小於1者,則 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ 由二項式定理展開之式爲斂級數。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx\cdot\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{nx(nx-1)\cdots\cdots(nx-r+1)}{\underline{|r}}\cdot\frac{1}{n^r}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)}{\underline{|r}}+\cdots\cdots\cdots$$

令 $x=1$。則

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{\underline{|r}}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

但 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$。

故 $$\left\{1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor\underline{2}}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor\underline{3}}+\cdots\cdots\right\}^{x}$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor\underline{2}}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor\underline{3}}+\cdots\cdots$$

此式n爲任何値皆合理。而n爲無限大。則$\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots\cdots$俱同於0。乃得次式。

$$\left(1+1+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\lfloor\underline{r}}+\cdots\cdots\right)^{x}=1+x+\frac{x^2}{\lfloor\underline{2}}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{\lfloor\underline{r}}+\cdots\cdots$$

其 $1+1+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\lfloor\underline{r}}+\cdots\cdots$ 以e代之。則

$e^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor\underline{2}}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{\lfloor\underline{r}}+\cdots\cdots$。是之謂指數之定理。而$e^x$對於x之任何値爲斂級數。(參觀278章)。

303. e之性質 考此e之數量。可知其値。必比2爲大。又因

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots>1+1+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\underline{4}}+\cdots\cdots$$

而$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$之極限爲3。則知e之値。比3爲小。

由是e之値。必在2與3之間。實際計算之。得$e=2.71827\cdots\cdots$

此e之値。爲不可通度者。試證之如次。

假定$e=m/n$爲可通度者。則

$\frac{m}{n}=1+1+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\lfloor\underline{n}}+\frac{1}{\lfloor\underline{n+1}}+\frac{1}{\lfloor\underline{n+2}}+\cdots\cdots$。以$\lfloor\underline{n}$乘之。得

$$m\lfloor\underline{n-1}=\lfloor\underline{n}+\lfloor\underline{n}+\cdots\cdots+1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}+\cdots\cdots$$

然此右邊分數部之和。比$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\cdots$爲小。而

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\cdots=\frac{1}{n+1}\bigg/\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}。$$

卽分數部之和比$\frac{1}{n}$爲小。則是其右邊非爲整數可知。然其左邊則明明爲整數。夫以整數等於非整數。於理不合。故θ不能等於$\frac{m}{n}$。卽θ爲不可通度。

304. 別證 指數之定理。其法如次。(此爲 Prof. Hill 氏所證明。於其所著之 Cambridge Philosophical Society 第五卷 415 頁揭載之。然於 Cauchy 氏所著之 Analyse Algebrique。亦以同法證明)。

此證明先定二項式之定理。對於正整指數爲眞。卽

$$f(m)=1+m+\frac{m^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{m^r}{\lfloor r}+\cdots\cdots.$$

$$f(n)=1+n+\frac{n^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{n^s}{\lfloor s}+\cdots\cdots.$$

及 $$f(m+n)=1+(m+n)+\frac{(m+n)^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{(m+n)^p}{\lfloor p}+\cdots\cdots.$$

於 $f(m)\times f(n)$ 中 $m^r n^s$ 之係數爲 $\frac{1}{\lfloor r\lfloor s}$。

而於 $f(m+n)$ 中 $m^r n^s$ 之係數。則含於 $\frac{(m+n)^{r+s}}{\lfloor r+s}$ 以內。其係數爲

$\frac{\lfloor r+s}{\lfloor r\lfloor s}\times\frac{1}{\lfloor r+s}$ 卽 $\frac{1}{\lfloor r\lfloor s}$。

如是於 $f(m)\times f(n)$ 及 $f(m+n)$ 中 $m^r n^s$ 之係數相同。且 $f(m)$, $f(n)$ 及 $f(m+n)$。其 m 及 n 爲任何值。皆爲歛級數。故由 280. 章。得

$$f(m)\times f(n)=f(m+n)\cdots\cdots(1)$$

今以 x 爲正整數。由 (1) 得

$$f(1)\times f(1)\times f(1)\times\cdots\cdots\text{至 } x \text{ 因數}=f(1+1+1+\cdots\cdots\text{至 } x \text{ 項})。$$

$$\therefore\ \{f(1)\}^x=f(x)\cdots\cdots(2)$$

次命 x 爲正分數$\frac{p}{q}$。但 p 及 q 爲正數。則由 (1) 得

$$\left\{f\left(\frac{p}{q}\right)\right\}^q=f\left(\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots\cdots\text{至 } q \text{ 項}\right)=f(p)$$

由 (2) $$=\{f(1)\}^p。$$

$$\therefore\ f\left(\frac{p}{q}\right)=\{f(1)\}^{\frac{p}{q}}。$$

由是證得 $\{f(1)\}^x=f(x)$。其 x 爲任何之正值。皆爲合理。

更以 x 爲負數設爲 $-y$。但 y 爲正數。由 (1) 得

$f(-y)\times f(y)=f(-y+y)=f(0)$。但 $f(0)=1$。

由是 $f(x)=f(-y)=\dfrac{1}{f(y)}=\dfrac{1}{\{f(1)\}^y}$ (y 爲正數) $=\{f(1)\}^{-y}=\{f(1)\}^x$。

至是乃證得 $\{f(1)\}^x=f(x)$。其 x 之值。無論爲正數爲分數爲負數。無不爲眞。

但 $f(1)=1+\dfrac{1}{\lfloor 1}+\dfrac{1}{\lfloor 2}+\dfrac{1}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$。

$$\therefore\ e^x=f(x)=1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{\lfloor r}+\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

305. 定理 $n^n-n(n-1)^n+\dfrac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n-\cdots\cdots\cdots=\lfloor n$。試證明之如次。

由 304. 章。得 $(e^x-1)^n=\left(x+\dfrac{x^2}{\lfloor 2}+\dfrac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots\right)^n$,

由二項式之定理。得 $(e^x-1)^n=e^{nx}-ne^{(n-1)x}+\dfrac{n(n-1)}{1.2}e^{(n-2)x}-\cdots\cdots$,

於 $\left(x+\dfrac{x^2}{\lfloor 2}+\dfrac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots\right)^n$ 展開式中 x^r 之係數。若 $r<n$ 則爲 0。若 $r=n$ 則爲 1。

又於 $e^{nx}-n.\,e^{(n-1)x}+\dfrac{n(n-1)}{1.2}e^{(n-2)x}-\cdots\cdots$ 中 x^r 之係數。爲

$$\frac{1}{\lfloor r}\left\{n^r-n(n-1)^r+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^r-\cdots\cdots\right\}。$$

命 $r=n$。於兩展開式中比較其 x^n 之係數。得

$$\frac{1}{\lfloor n}\left\{n^n-n(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n-\cdots\cdots\right\}=1。$$

即 $n^n-n(n-1)^n+\dfrac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^n-\cdots\cdots\cdots\cdots=\lfloor n$,

此爲本定理證得之結果也。

將上之定理推廣之。

$$(e^{ax}-e^{bx})^n=e^{nax}-n\cdot e^{(\overline{n-1}a+b)x}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}e^{(\overline{n-2}a+2b)x}-\cdots\cdots\cdots。$$

及 $$(e^{ax}-e^{bx})^n=e^{nbx}(e^{(a-b)x}-1)^n=e^{nbx}\left\{(a-b)x+\frac{(a-b)^2x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots\right\}^n,$$

由是於$(e^{ax}-e^{bx})^n$之兩展開式中比較x^n之係數。得

$$\frac{1}{\underline{|n}}\left\{(na)^n-n(\overline{n-1}a+b)^n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\overline{n-2}\,a+2b)^n-\cdots\cdots\right\}=(a-b)^n。$$

若以x代其na。以y代其b−a。則得次式。

$$x^n-n(x+y)^n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(x+2y)^n-\cdots\cdots=(-1)^ny^n\underline{|n}。$$

若k小於n。而爲任何之正整數。

$$x^k-n(x+y)^k+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(x+2y)^k-\cdots\cdots至\ n+1\ 項=0。$$

因是得最要之特別公式如次，但$k<n$。

$$1^k-n\cdot 2^k+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}3^k-\cdots\cdots至\ n+1\ 項=0。$$

及 $$m^k-n(m-1)^k+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(m-2)^k-\cdots\cdots至\ n+1\ 項=0。$$

例題三十

1. n爲無限大。則$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$之極限爲$e^x$。

〔證〕 $$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+n\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{x^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot\frac{x^3}{n^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+x+\frac{1-\frac{1}{n}}{\underline{|2}}x^2+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\underline{|3}}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

n爲無限大。則$\frac{1}{n},\frac{2}{n},$………爲0。

故 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$之極限$=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots=e^x$。

2 n爲無限大。則$\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{b}}$之極限爲$e^{\frac{a}{b}}$。

〔證〕 $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{b}}=\left\{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right\}^{\frac{a}{b}}$。而 $n=\infty$。則 $\frac{a}{n}=0$。

故 $\left(1+\frac{n}{n}\right)^{\frac{n}{a}}$ 之極限為e。 ∴ 得 $e^{\frac{b}{a}}$。

3. $n^{n+1}-n(n-1)^{n+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+1}-\cdots\cdots=\frac{1}{2}n\lfloor\!\underline{n+1}$。

〔證〕 $\left(x+\frac{x^2}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{x^3}{\lfloor\!\underline{3}}+\cdots\right)^n=(e^x-1)^n=e^{nx}-ne^{(n-1)x}\frac{n(n-1)}{1.2}e^{(n-2)x}-\cdots\cdots$

比較 x^{n+1} 之係數。為

$$\frac{n}{\lfloor\!\underline{2}}=\frac{n^{n+1}}{\lfloor\!\underline{n+1}}-n\frac{(n-1)^{n+1}}{\lfloor\!\underline{n+1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(n-2)^{n+1}}{\lfloor\!\underline{n+1}}-\cdots\cdots\cdots。$$

∴ $\frac{1}{2}n\lfloor\!\underline{n+1}=n^{n+1}-n(n-1)^{n+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+1}-\cdots\cdots\cdots$,

4. $n^{n+2}-n(n-1)^{n+2}+\frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^{n+2}-\cdots\cdots=\frac{n}{24}(3n+1)\lfloor\!\underline{n+2}$。

〔證〕 將3之恆同式比較 x^{n+2} 之係數即得。

5. $\left(1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}-\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\cdots\cdots\right)=1$。

〔證〕 於 $e^x=1+\frac{x}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{x^2}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{x^3}{\lfloor\!\underline{3}}+\cdots\cdots$ 以1及−1代其x。得

$e=1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\cdots\cdots$ 及 $e^{-1}=1-\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}-\cdots\cdots$

6. $e^{-1}=\frac{2}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{4}{\lfloor\!\underline{5}}+\frac{6}{\lfloor\!\underline{7}}+\cdots\cdots$。

〔證〕 $e^{-1}=1-\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}-\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}-\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}+\cdots\cdots$

$$=\left(1-\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}-\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}-\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}\right)+\cdots\cdots=0+\frac{2}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{4}{\lfloor\!\underline{5}}+\cdots\cdots$$

7. $\frac{3}{2}e=1+\frac{1+2}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1+2+3}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1+2+3+4}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots$。

〔證〕 $3e=2e+e=\left(2+\frac{2}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{2}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{2}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{2}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots\right)$

$$+\left(1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots\right)$$

$$=2+\left(\frac{2}{\lfloor\!\underline{1}}+1\right)+\left(\frac{2}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}\right)+\left(\frac{2}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}\right)+\left(\frac{2}{\lfloor\!\underline{4}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}\right)+\cdots\cdots$$

$$=2+\frac{3}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{4}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{5}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{6}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots=2\left(1+\frac{3}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{2}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{5}{2\lfloor\!\underline{3}}+\frac{3}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots\right)$$

$$=2\left(1+\frac{3}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{6}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{10}{\lfloor\!\underline{4}}+\frac{15}{\lfloor\!\underline{5}}+\cdots\cdots\right)$$

$$=2\left(1+\frac{1+2}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1+2+3}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1+2+3+4}{\lfloor\!\underline{4}}+\frac{1+2+3+4+5}{\lfloor\!\underline{5}}+\cdots\cdots\right),$$

8. $\left(1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{6}}+\cdots\cdots\right)^2=1+\left(1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{7}}+\cdots\cdots\right)^2.$

〔證〕 $e=1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\cdots\cdots=\left(1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots\right)$

$$+\left(1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}+\cdots\right)。$$

$$e^{-1}=\left(1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\right)-\left(1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}+\cdots\right)。$$

由是 $e\times e^{-1}=1=\left(1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots\right)^2-\left(1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}+\cdots\cdots\right)^2$。

9. $e^{-1}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.2.3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{1.2.3\cdots\cdots(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$。

〔證〕 $e^{-1}=\left(1-\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}-\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}\right)+\left(\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}-\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}\right)+\cdots=0+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.2.3.5}+\cdots.$

10. $\frac{e-1}{e+1}=\left\{\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{6}}+\cdots\cdots\right\}\div\left\{\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}+\cdots\cdots\right\}$。

〔證〕 $e(1-e^{-1})=e-1$。 $\therefore\ \frac{e}{1}=\frac{e-1}{1-e^{-1}}=\frac{\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}+\cdots}{1-\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}-\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}-\cdots}.$

則 $\frac{e-1}{e+1}=\frac{\left(\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots\right)-\left(1-\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}-\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots\right)}{\left(\frac{1}{\lfloor\!\underline{1}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots\right)+\left(1-\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}-\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\cdots\cdots\right)}$。

11. $\frac{e^2+1}{e^2-1}=\left\{1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{4}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{6}}+\cdots\cdots\right\}\div\left\{1+\frac{1}{\lfloor\!\underline{3}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{5}}+\frac{1}{\lfloor\!\underline{7}}+\cdots\cdots\right\}.$

〔證〕 $\frac{e^2+1}{e^2-1}=\frac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}}=\frac{2\left(1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots\right)}{2\left(1+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\cdots\right)}$。

12. 於 $1+\frac{(1+2x)}{\lfloor 1}+\frac{(1+2x)^2}{\lfloor 2}+\frac{(1+2x)^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$之展開式$x^n$之係數爲$\frac{2^n e}{\lfloor n}$。

〔證〕 $1+\frac{(1+2x)}{\lfloor 1}+\frac{(1+2x)^2}{\lfloor 2}+\frac{(1+2x)^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots=e^{1+2x}=e.e^{2x}$。

於e^{2x}內x^n之係數爲$\frac{2^n}{\lfloor n}$。故所求之係數爲$\frac{2^n e}{\lfloor n}$。

對 數

306. 定義 第一數之某方乘。等於第二數時。乃稱其方乘之指數。爲以第一數作底數(Base)。而成第二數之對數(Logarithm)。例$a^x=y$。稱其x爲以a爲底數。而成y之對數。記以$x=\mathrm{Log}_a y$。

先示對數之根原性質。次示實際計算對數時所有簡捷之法則。

307. 對數之性質 茲示對數之根原性質如次。

〔第一〕 a之值不論如何。而$a^0=1$。 ∴ $\mathrm{Log}\,1=0$。

因是底數不論如何。而1之對數恆爲0。

〔第二〕 $\mathrm{Log}_a x=\alpha$, $\mathrm{Log}\,y=\beta$, $\mathrm{Log}_a z=\gamma$,……因$x=a^\alpha$, $y=a^\beta$, $z=a^\gamma$,…

∴ $xyz\cdots\cdots=a^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots}$

即得$\mathrm{Log}_a(xyz\cdots\cdots)=\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots=\mathrm{Log}_a x+\mathrm{Log}_a y+\mathrm{Log}_a z+\cdots$。

由是積之對數。等於其因子各對數之和。

〔第三〕 $\mathrm{Log}_a x=\alpha$, $\mathrm{Log}_a y=\beta$。因$x=a^\alpha$, $y=a^\beta$。 ∴ $x\div y=a^{\alpha-\beta}$。

即得$\mathrm{Log}_a(x\div y)=\alpha-\beta=\mathrm{Log}_a x-\mathrm{Log}_a y$。

由是商之對數。等於被除數與除數兩對數之代數差。

〔第四〕 $x=a^\alpha$。而$x^m=a^{m\alpha}$。(m爲任何值)。

∴ $\mathrm{Log}_a x^m=m\alpha=m\,\mathrm{Log}_a x$。

因是一數某方乘之對數。等於其數之對數。而以其指數乘之。

〔第五〕 $\text{Log}_a x=\alpha$, $\text{Log}_b x=\beta$, 則 $x=a^\alpha=b^\beta$。而 $a=b^{\frac{\beta}{\alpha}}$, 及 $b=a^{\frac{\alpha}{\beta}}$,

故 $\frac{\beta}{\alpha}=\text{Log}_b a$ 及 $\frac{\alpha}{\beta}=\text{Log}_a b$。

由是 $\text{Log}_a b\times\text{Log}_b a=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$。

$\therefore\ \beta=\alpha\,\text{Log}_b a$。即 $\text{Log}_b x=\text{Log}_a x.\text{Log}_b a$。

由是底數b任何數之對數,等於底數a同數之對數,而以 $\text{Log}_b a$ 乘之,

308. 對數級數 $a=e^k$。即 $k=\text{Log}_e a$。而 $a^x=e^{xk}=e^{x\text{Log}_e a}$。由304.章,得

$$a^x=e^{x\text{Log}_e a}=1+x\,\text{Log}_e a+\frac{(x\,\text{Log}_e a)^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{(x\,\text{Log}_e a)^r}{\lfloor r}+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

令 $a=1+y$。則 $(1+y)^x=1+x\,\text{Log}_e(1+y)+\frac{1}{\lfloor 2}\{x\,\text{Log}_e(1+y)\}^2+\cdots\cdots\cdots$。

此式中之y為小於1者。又 $(1+y)^x$ 由二項式之定理,得

$$(1+y)^x=1+xy+\frac{x(x-1)}{1.2}y^2+\cdots\cdots+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-r+1)}{\lfloor r}y^r+\cdots\cdots$$

$$=1+x\,\text{Log}_e(1+y)+\frac{1}{\lfloor 2}\{x\,\text{Log}_e(1+y)\}^2+\cdots\cdots,$$

此相等之兩級數為斂級數。但y為小於1者。

乃於此兩級數中比較其 x^1 之係數。

$\text{Log}_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots$ 是之謂對數級數。

〔第一例〕 試以a b及a+b為級數之各項,以表 a^n+b^n。

恆同式 $(1-ax)(1-bx)=1-(a+b)x+abx^2$

$$=1-sx+px^2。$$

但 $a+b=s$, $ab=p$。由是

$\text{Log}_e(1-ax)+\text{Log}_e(1-bx)=\text{Log}_e(1-sx+px^2)$。由上之對數級數,即得

$$\left(ax+\frac{a^2x^2}{2}+\frac{a^3x^3}{3}+\cdots\cdots\cdots\right)+\left(bx+\frac{b^2x^2}{2}+\frac{b^3x^3}{3}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=\left\{x(s-px)+\frac{x^2(s-px)^2}{2}+\frac{x^3(s-px)^3}{3}+\cdots\cdots\cdots\right\}。$$

於此方程式左邊x^n之係數爲$\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n}$。又於右邊$x^n$之係數。可從

$\frac{x^n(s-px)^n}{n}+\frac{x^{n-1}(s-px)^{n-1}}{n-1}+\frac{x^{n-2}(s-px)^{n-2}}{n-2}+\ldots\ldots$以內求得之。即

$$\frac{1}{n}s^n+\frac{1}{n-1}\{-(n-1)s^{n-2}p\}+\frac{1}{n-2}\left\{\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}s^{n-4}p^2\right\}+\ldots\ldots\ldots$$

此x^n之兩係數相等。又以$s=a+b$。$p=ab$。故

$$a^n+b^n=(a+b)^n-nab(a+b)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-4}-\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^r\frac{n(n-r-1)(n-r-2)\ldots\ldots(n-2r+1)}{\lfloor r}a^rb^r(a+b)^{n-2r}+\ldots\ldots\ldots,$$

〔第二例〕$a+b+c=0$。則$10(a^7+b^7+c^7)=7(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)$,

以$-p$代其$bc+ca+ab$,以q代其abc,又以$a+b+c=0$。故得恆同式。爲$(1-ax)(1-bx)(1-cx)=1-px^2-qx^3$。

乃如前例。取兩邊之對數,而於兩展開式中比較其x種種方乘之係數即得。

又如129.章可求得$\frac{1}{r}(a^r+b^r+c^r)$。以p及q表示之。

〔第三例〕$a+b+c=0$。則$a^n+b^n+c^n$。當可以abc及$bc+ca+ab$之項表示之。

$-p=bc+ca+ab,\quad q=abc$。則

$(1-ax)(1-bx)(1-cx)=1-px^2-qx^3$。

從其對數式比較其x同方乘之係數。則知$\frac{1}{n}(a^n+b^n+c^n)$等於

$\sum\frac{1}{r}x^{2r}(p+qx)^r$中所有$x^n$之係數。

設$n=6m\pm1$。則於$\sum\frac{1}{r}x^{2r}(p+qx)^r$中所含有$x^{6m+1}$之諸項,可由下式視察而知之。

$$\frac{1}{2m}x^{4m}(p+qx)^{2m}+\frac{1}{2m+1}x^{4m+2}(p+qx)^{2m+1}+\frac{1}{2m+2}x^{4m+4}(p+qx)^{2m+2}$$
$$+\ldots\ldots+\frac{1}{3m-1}x^{6m-2}(p+qx)^{3m-1}+\frac{1}{3m}x^{6m}(p+qx)^{3m}。$$

以此式之各項中所有 x^{6m-1} 之係數。皆含有 pq 之因子。又所有 x^{6m+1} 之係數。皆含有 p^2q 之因子。因此知 $a+b+c=0$。若 n 爲 $6m-1$。則 $a^n+b^n+c^n$ 得以 $abc(bc+ac+ab)$ 整除之。又若 n 爲 $6m+1$。則 $a^n+b^n+c^n$ 得以 $abc(bc+ca+ab)^2$ 整除之。

惟 $a+b+c=0$。則 $c=-(a+b)$。故 $bc+ca+ab$。卽 $-(a^2+ab+b^2)$。而依 Cauchy 氏之定理。卽知 $a^n+b^n-(a+b)^n$。若 n 爲 $6m-1$。則得以 $ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$ 整除。若 n 爲 $6m+1$。則得以 $ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$ 整除。

309. 對數之計算 求任何數對數之漸近值。可將前之對數級數。變爲收斂最速之級數。然後求其漸近値爲最便捷。

對數級數 $$\mathrm{Log}_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots\cdots(1)$$

變其 y 之符號 $$\mathrm{Log}_e(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\cdots\cdots\cdots(2)$$

由是 $$\mathrm{Log}_e\frac{1+y}{1-y}=\mathrm{Log}_e(1+y)-\mathrm{Log}_e(1-y)=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\right)\cdots\cdots(3)$$

令 $\frac{1+y}{1-y}=\frac{m}{n}$。則 $y=\frac{m-n}{m+n}$。卽變 (3) 爲

$$\mathrm{Log}_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots(4)$$

用此級數求底數 e 之對數甚易。例如 $m=2, n=1$。則

$$\mathrm{Log}_e2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\cdots\cdots\right\}=.693147\cdots\cdots。$$

又 $m=3, n=2$。由 (4) 得

$$\mathrm{Log}_e3-\mathrm{Log}_e2=2\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\cdots\cdots\right\}=.405465\cdots\cdots$$

由是 $\mathrm{Log}_e3=.693147+.405465=1.09861$。

用此方法。則凡底數 e 任何數之對數。其漸近値皆可求得之。

310. 訥白爾〔Napier〕氏之對數 卽自然對數。如前章所述以 e 爲底數之對數是也。

此對數爲研究學理時所用。若於實際計算時。則用以 10 爲底數之對數爲便。故稱以 10 爲底數之對數。爲常用對數。

求底數e之對數，已於前章詳述，而求底數10之對數。則先求底數e之對數。而以常因子$\mathrm{Log}_{10}e$或$\frac{1}{\mathrm{Log}_e 10}$乘之可也。〔見307.章第五〕此常因子名根數(Modulus)。其值爲.43429………。

例題三十一

1. $$\mathrm{Log}\,(x+n)=\mathrm{Log}\,x+\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)+\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{1+x}\right)$$
$$+\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{2+x}\right)+\cdots\cdots\cdots+\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{n-1+x}\right)$$

〔證〕 $$\mathrm{Log}\,(x+n)=\mathrm{Log}\left\{x.\frac{x+1}{x}.\frac{x+2}{x+1}.\frac{x+3}{x+2}\cdots\cdots\frac{x+n-1}{x+n-2}.\frac{x+n}{x+n-1}\right\}$$
$$=\mathrm{Log}\,x+\mathrm{Log}\frac{x+1}{x}+\mathrm{Log}\frac{x+2}{x+1}+\cdots\cdots+\mathrm{Log}\frac{x+n}{x+n-1}。$$

2. $$\mathrm{Log}_e\sqrt{12}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\frac{1}{4^3}$$
$$+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)\frac{1}{4^4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至無限。}$$

〔證〕 $$\mathrm{Log}_e\sqrt{12}=\mathrm{Log}\sqrt{\left(3^2\div\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{2}\left\{2\mathrm{Log}_e 3-\mathrm{Lox}_e\frac{3}{4}\right\}$$
$$=\mathrm{Log}_e\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)\div\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}-\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\left\{\mathrm{Log}_e\left(1+\frac{1}{2}\right)-\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}-\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left(1-\frac{1}{4}\right)\text{用公式(2)(3)}$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{4^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{4^3}+\cdots\cdots\cdots\right)$$
$$=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3. $$\mathrm{Log}_e\sqrt{10}=\left\{1+\frac{1}{3}\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\frac{1}{9^2}+\frac{1}{7}\frac{1}{9^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至無限}\right\}$$
$$+\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\frac{1}{9^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{9^5}+\frac{1}{7}\frac{1}{9^7}+\cdots\cdots\cdots\cdots\text{至無限}\right\}$$

〔證〕 $\mathrm{Log}_e\sqrt{10}=\frac{1}{2}\mathrm{Log}_e10=\frac{1}{2}\mathrm{Log}_e\left\{\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)^3\left(\frac{1+\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}\right)\right\}$

$$\mathrm{Log}_e\sqrt{10}=\frac{1}{2}\mathrm{Log}_e\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)^3+\frac{1}{2}\mathrm{Log}_e\frac{1+\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=3\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{3^5}+\cdots\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\frac{1}{9^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{9^5}+\cdots\cdots\right\}。$$

4. $\mathrm{Log}_e2-\frac{1}{2}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots\cdots$至無限，

〔證〕 由對數公式(1)。

$$\mathrm{Log}_e2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad 2\mathrm{Log}_e2=1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}-\cdots=1+\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4.5}+\frac{2}{5.6.7}+\cdots\cdots$$

因是 $\mathrm{Log}_e2=\frac{1}{2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots\cdots$

5. $\frac{5}{1.2.3}+\frac{7}{3.4.5}+\frac{9}{5.6.7}+\cdots\cdots$至無限$=3\mathrm{Log}_e2-1$，

〔證〕 原級數 $=\frac{3+2}{1.2.3}+\frac{5+2}{3.4.5}+\frac{7+2}{5.6.7}+\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots\cdots+2\left(\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots+2\left(\mathrm{Log}_e2-\frac{1}{2}\right)\ (\text{由 4 題})$$

$$=\mathrm{Log}_e2+2\left(\mathrm{Log}_e2-\frac{1}{2}\right)=3\mathrm{Log}_e2-1。$$

6. $\mathrm{Log}_e\frac{x}{1-x}=2\left\{\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2x-1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2x-1)^5}+\cdots\cdots\right\}$。

〔證〕 $\mathrm{Log}_e\frac{x}{1-x}=\mathrm{Log}_e\frac{1+(2x-1)}{1-(2x-1)}$

$$=\mathrm{Log}_e\{1+(2x-1)\}-\mathrm{Log}_e\{1-(2x-1)\}。$$

由此求其結果。即得

7. $\mathrm{Log}\ x=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\cdots\cdots$

〔證〕 $\operatorname{Log}_e x=\operatorname{Log}_e\left\{\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\div\left(1-\frac{x}{x+1}\right)\right\}$

$=\operatorname{Log}_e\left(1-\frac{1}{x+1}\right)-\operatorname{Log}_e\left(1-\frac{x}{x+1}\right)$

$=-\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^3}+\cdots\right\}+\left\{\frac{x}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{(x+1)^3}+\cdots\right\}$

$=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

8. $\operatorname{Log}_e\frac{a+x}{a-x}=\frac{2ax}{a^2+x^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)^5+\cdots\cdots\cdots\cdots$。

〔證〕 $\operatorname{Log}_e\frac{a+x}{a-x}=\operatorname{Log}_e\sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{Log}_e\frac{a^2+x^2+2ax}{a^2+x^2-2ax}$

$=\frac{1}{2}\operatorname{Log}_e\left(1+\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{Log}_e\left(1-\frac{2ax}{a^2+x^2}\right)$，由此求其結果即得，

9. $2\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots\cdots\right)=\frac{2x}{1-x^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^5-\cdots\cdots\cdots$

〔證〕 $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^2=\frac{1+\frac{2ix}{1-x^2}}{1-\frac{2ix}{1-x^2}}$ 之對數式爲

$2\{\operatorname{Log}_e(1+ix)-\operatorname{Log}_e(1-ix)\}=\operatorname{Log}_e\left(1+\frac{2ix}{1-x^2}\right)-\operatorname{Log}_e\left(1-\frac{2ix}{1-x^2}\right)$

$\therefore\quad 4i\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots\cdots\right)=2i\left\{\frac{2x}{1-x^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^5-\cdots\right\}$

10. $\{\operatorname{Log}_e(1+x)\}^2=2\left\{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)x^3+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^4-\cdots\cdots\right\}$

〔證〕 由308章，$1+yx+\frac{y(y-1)}{1.2}x^2+\cdots+\frac{y(y-1)(y-2)\cdots(y-r+1)}{\underline{|r}}x^r+$

$\cdots\cdots=1+y\operatorname{Log}_e(1+x)+\frac{1}{2}\{y\operatorname{Log}_e(1+x)\}^2+\cdots\cdots$

於此方程式中比較y^2之係數，

$\frac{x^2}{2}-\frac{1+2}{1.2.3}x^3+\frac{1.2+2.3+3.4}{1.2.3.4}x^4+\cdots\cdots=\frac{1}{\underline{|2}}\{\operatorname{Log}_e(1+x)\}^2$。

11. $\operatorname{Log}_e(1+x+x^2)$展開式中$x^n$之係數爲$\frac{1}{n}$或$\frac{-2}{n}$試推究之.

〔證〕 $\text{Log}_e(1+x+x^2)=\text{Log}_e(1-x^3)-\text{Log}_e(1-x)$

$$=\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\right)-\left(x^3+\frac{x^6}{2}+\cdots\cdots+\frac{x^{3m}}{m}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

令 $n=3m+1$。則 x^n 之係數 $=\frac{1}{n}$。

又令 $n=3m$。則 x^n 之係數 $=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}=\frac{1}{n}-\frac{1}{\frac{1}{3}n}=-\frac{2}{n}$。

12. $\text{Log}_e(1-x+x^2)$依 x 之遞升方乘展開之。得$a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$。則 $a_3+a_6+a_9+\cdots\cdots=\frac{2}{3}\text{Log}_e2$。

〔證〕 $\text{Log}_e(1-x+x^2)=\text{Log}_e(1+x^3)-\text{Log}_e(1+x)$

$$=\left(x^3-\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{3}-\cdots\cdots\cdots\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=-x+\frac{x^2}{2}+\left(1-\frac{1}{3}\right)x^3+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^6-\cdots\cdots\cdots$$

$$=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\cdots\cdots\cdots。$$

$$\therefore\quad a_3+a_6+a_9+\cdots\cdots=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\right)-\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots\cdots\right)=\frac{2}{3}\text{Log}_e2。$$

13. $\text{Log}_e\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$依 x 之遞升方乘展開之。

〔證〕$\text{Log}_e\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=\text{Log}_e\left\{\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right\}=\text{Log}_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\text{Log}_e\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\cdots\cdots\right)-2\left(x^3+\frac{x^9}{3}+\frac{x^{15}}{5}+\cdots\cdots\right)$$

$$=2\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{2x^9}{9}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

14. $\frac{1}{n}+\frac{x}{n(n+1)}+\frac{x^2}{n(n+1)(n+2)}+\frac{x^3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots\cdots$

$$=e^x\left\{\frac{1}{n}-\frac{x}{\underline{|1}(n+1)}+\frac{x^2}{\underline{|2}(n+2)}-\frac{x^3}{\underline{|3}(n+3)}+\cdots\cdots\cdots\right.$$

〔證〕 左邊 $=\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x+\left(\frac{1}{\underline{|2}}\frac{1}{n}-\frac{1}{\underline{|1}}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{\underline{|2}}\frac{1}{n+2}\right)x^2$

$$+\left(\frac{1}{|\underline{3}}\,\frac{1}{n}-\frac{1}{|\underline{2}}\,\frac{1}{n+1}+\frac{1}{|\underline{2}}\,\frac{1}{n+2}-\frac{1}{|\underline{3}}\,\frac{1}{n+3}\right)x^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{x}{|\underline{1}}+\frac{x^2}{|\underline{2}}+\frac{x^3}{|\underline{3}}+\cdots\cdots\right)-\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{x}{|\underline{1}}+\frac{x^2}{|\underline{2}}+\cdots\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{|\underline{2}}\,\frac{x^2}{n+2}\left(1+\frac{x}{|\underline{1}}+\frac{x^2}{|\underline{2}}+\cdots\cdots\right)+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{n}e^x-\frac{x}{n+1}e^x+\frac{1}{|\underline{2}}\,\frac{x^2}{n+2}e^x-\cdots\cdots=e^x\left(\frac{1}{n}-\frac{x}{n+1}+\frac{1}{|\underline{2}}\,\frac{x^2}{n+2}-\cdots\cdots\right)$$

15. $2\,\mathrm{Log}_e(1-x)=\mathrm{Log}_e(1-2x+x^2)$ 試證

$$2^n-n2^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-6}+\cdots\cdots=2\text{。}$$

〔證〕 將 $2\,\mathrm{Log}_e(1-x)=\mathrm{Log}_e\{1-x(2-x)\}$ 變之為

$$2\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots\right)=x(2-x)+\frac{x^2(2-x)^2}{2}+\frac{x^3(2-x)^3}{3}+\cdots\cdots$$

於左邊 x^n 之係數為 $\frac{2}{n}$ 又於右邊 x^n 之係數。為在於

$$\frac{x^n(2-x)^n}{n}+\frac{x^{n-1}(2-x)^{n-1}}{n-1}+\frac{x^{n-2}(2-x)^{n-2}}{n-2}+\cdots\cdots$$以內。即

$$\frac{2^n}{n}-2^{n-2}+\frac{n-3}{1.2}2^{n-4}-\frac{(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-6}+\cdots\cdots$$

16. $\mathrm{Log}_e\frac{1}{1-x-x^2+x^3}$ 依 x 之正整方乘展開之。其 x^n 之係數以 n 為奇數或偶數而得 $\frac{1}{n}$ 或 $\frac{3}{n}$。

〔證〕 $\mathrm{Log}_e\frac{1}{1-x-x^2+x^3}=\mathrm{Log}_e\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}=\mathrm{Log}_e(1-x)-\mathrm{Log}_e(1-x^2)$

$$=\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots\right)+\left(x^2+\frac{x^4}{2}+\cdots\cdots+\frac{x^{2m}}{m}+\cdots\cdots\right)$$

由是 n 為奇數。則 x^n 之係數為 $\frac{1}{n}$ 若 n 為偶數。則 x^n 之係數為

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{n}+\frac{1}{\frac{1}{2}n}=\frac{3}{n}\text{。}$$

17. 於 $\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}$ 之展開式中 x^r 之係數爲 $\frac{1}{\lfloor r}(1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r)$,

試由此求其 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots$ 及 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots$ 至 n 項之和,

(證) $\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}=e^x\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}=e^{nx}+e^{(n-1)x}+e^{(n-2)x}+\cdots\cdots+e^x$

於此展開式之各項 x^r 之係數爲 $\frac{1}{\lfloor r}\{n^r+(n-1)^r+(n-2)^r+\cdots+1^r\}$

又 $$\frac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}=\frac{nx+\frac{n^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots}{x-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}-\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

$$=\left(n+\frac{n^2x}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^2}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)\left\{1-\left(\frac{x}{\lfloor 2}-\frac{x^2}{\lfloor 3}+\frac{x^3}{\lfloor 4}-\cdots\cdots\right)\right\}^{-1}$$

$$=\left(n+\frac{n^2x}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^2}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)\left\{1-\left(\frac{x}{\lfloor 2}-\frac{x^2}{\lfloor 3}+\frac{x^3}{\lfloor 4}-\cdots\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x}{\lfloor 2}-\frac{x^2}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$

於此展開式中。求其 x^2 及 x^3 之係數,可得 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 及 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots$ 之和。

18. 於 e^{e^x} 展開式中 x^r 之係數爲 a_r。而 $a_r=\frac{1}{\lfloor r}\left(\frac{1^r}{\lfloor 1}+\frac{2^r}{\lfloor 2}+\frac{3^r}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)$

由此求得 $\frac{1^3}{\lfloor 1}+\frac{2^3}{\lfloor 2}+\frac{3^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots=5e$ 及 $\frac{1^4}{\lfloor 1}+\frac{2^4}{\lfloor 2}+\frac{3^4}{\lfloor 3}+\cdots\cdots=15e$ 試證之,

(證) $e^{e^x}=1+e^x+\frac{e^{2x}}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+\frac{e^{kx}}{\lfloor k}+\cdots\cdots$ 於此展開式中 x^r 之係數爲

$$a_r=\frac{1}{\lfloor r}\left(\frac{1^r}{\lfloor 1}+\frac{2^r}{\lfloor 2}+\frac{3^r}{\lfloor 3}+\cdots\cdots+\frac{k^r}{\lfloor k}+\cdots\cdots\right)$$

又 $e^{e^x}=e^{1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\cdots}=e.e^{x+\frac{1}{2}x^2+\cdots\cdots}$

$$=e\left\{1+\left(x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)+\frac{1}{\lfloor 2}\left(x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)^2+\frac{1}{\lfloor 3}\left(x+\frac{x^3}{\lfloor 2}+\cdots\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

於此展開式中求 x^3 之係數爲 $e\left(\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}\right)=\frac{5e}{3}$,

又於前之結果 $r=3$ 則 x^3 之係數爲 $a_3=\frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{1^3}{\lfloor 1}+\frac{2^3}{\lfloor 2}+\frac{3^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)$

$\therefore\quad \frac{1^3}{\lfloor 1}+\frac{2^3}{\lfloor 2}+\frac{3^3}{\lfloor 3}+\cdots=5e$ 又比較其 x^4 之係數而得最後之結果,

19. $$e\left\{1+\frac{n}{1^2}+\frac{n(n-1)}{1^2.2^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1^2.2^2.3^2}+\cdots\cdots\right\}$$
$$=1+(n+1)+\frac{(n+1)(n+2)}{1^2.2^2}+\cdots\cdots\cdots$$

(證) $(x+1)^n e^x=\frac{1}{e}\left\{(1+x)^n e^{1+x}\right\}$ 以其兩邊於同時展開之爲

$$\left\{x^n+nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}+\cdots\cdots\right\}\left\{1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right\}$$
$$=\frac{1}{e}\left\{(1+x)^n+(1+x)^{n+1}+\frac{(1+x)^{n+2}}{\lfloor 2}+\frac{(1+x)^{n+3}}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right\},$$

於此兩邊比較其 x^n 之係數。

$$1+\frac{n}{1^2}+\frac{n(n-1)}{1^2.2^2}+\cdots\cdots=\frac{1}{e}\left\{1+\frac{n+1}{1^2}+\frac{(n+1)(n+2)}{1^2.2^2}+\cdots\cdots\right\}$$

20 由級數 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$ 之第 $n+1$ 項,求其 n 項之和。若 n 爲無限。則等於 $\mathrm{Log}_e 2$。

(證) $$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$$ 將此恆

同式移項得 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots-\frac{1}{2n}$

若 n 爲無限大,則此右邊之級數。至無限而爲 $\mathrm{Log}_e 2$。

21. $$\mathrm{Log}_e(1+n)<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\mathrm{Log}_e(1+n)$$

(證) 假定 $e^{1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}}>1+n$。兩邊以 $e^{\frac{1}{1+n}}$ 乘之

$$e^{1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}>(1+n)e^{\frac{1}{n+1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但　$e^{\frac{1}{n+1}}=1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{\lfloor 2}\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

故 $(1+n)^{\frac{1}{1+n}}=1+n+1+\frac{1}{\lfloor 2}\frac{1}{n+1}1+\cdots\cdots\cdots$

$\therefore\quad e^{1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}}>(1+n)e^{\frac{1}{1+n}}>1+n+1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

如(1)爲眞，則(2)亦爲眞。即對於n爲眞，則對於n+1亦爲眞，然 $e>2$。即 $e>1+\frac{1}{1}$ 即 $n=1$ 則(1)爲合理，故 $n=2,3,4,\cdots\cdots\cdots$ 無不合理，由是知(1)之對數式與題意相合。

22. 試證次列之各題。

(1)　$(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$，

(2)　$(x+y)^{11}-x^{11}-y^{11}=11xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\{(x^2+xy+y^2)^3$
$+x^2y^2(x+y)^2\}$，

(3)　$(x+y)^{13}-x^{13}-y^{13}=13xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2(x^2+xy+y^2)^3$
$+2x^2y^2(x+y)^2\}$

〔證〕　$-x=a,\ -y=b$，及 $x+y=c$，則 $a+b+c=0$，
$xy(x+y)=abc$，及 $x^2+xy+y^2=-(bc+ca+ab)$。

$a+b+c=0$。故由308章第三例。$\frac{1}{r}(a^r+b^r+c^r)$。即爲含於

$(px^2+qx^3)+\frac{1}{2}(px^2+qx^3)^2+\frac{1}{3}(px^2+qx^3)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 中 x^r 之係數，

但 $p=-(bc+ca+ab)$，$q=abc$。由是

(1) $\frac{1}{7}(a^7+b^7+c^7)=\frac{1}{3}.\ (3p^2q=abc(bc+ca+ab)^2$。

惟以 $-x=a,\ -y=b,\ x+y=c$，

故　$\frac{1}{7}\{-x^7-y^7-(x+y)^7\}=xy(x+y)\{-y(x+y)-x(x+y)+xy\}^2$。

$\therefore$　$(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$。

(2)　$\frac{1}{11}(a^{11}+b^{11}+c^{11})=p^4q+pq^3=pq(p^3+q^2)$
$=abc(bc+ca+ab)\{(bc+ca+ab)^3+a^2b^2c^2\}$。

此可以前之法則求得其結果，

(3) $\frac{1}{13}(a^{13}+b^{13}+c^{13})=2p^2q^3+p^5q=p^2q(2p^3+q^4)$

$$=abc(bc+ca+ab)^2\{(bc+ca+ab)^4+2a^2b^2c^2\}。$$

23. $x^{2n}+y^{2n}+(x+y)^{2n}=2p^n+n(n-2)p^{n-3}q^2$

$$+\frac{n(n-3)(n-4)(n-5)}{3.4}p^{n-6}q^4+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-r+1)\cdots\cdots(n-3r+1)}{3.4\cdots\cdots 2r}p^{n-3r}q^{2r}+\cdots\cdots\cdots$$

但 $p=x^2+xy+y^2$ 及 $q=xy(x+y)$,

〔證〕 $-x=a$, $-y=b$, 及 $x+y=c$。則 $a+b+c=0$, $xy(x+y)=abc$

及 $x^2+xy+y^2=-(bc+ca+ab)$,

由是如308章第三例, $p=-(bc+ca+ab)$, $q=abc$。則

$\frac{1}{2n}(a^{2n}+b^{2n}+c^{2n})=\sum\frac{1}{r}(px^2+qx^3)^r$ 中所有 x^{2n} 之係數。

但 $\sum\frac{1}{r}(px^2+qx^3)=\frac{1}{n}x^{2n}(p+qx)^n+\frac{1}{n-1}x^{2n-2}(p+qx)^{n-1}$

$+\frac{1}{n-2}x^{2n-4}(p+qx)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n-r}x^{2n-2r}(p+qx)^{n-r}+\cdots\cdots\cdots$

由是 $\frac{1}{2n}(a^{2n}+b^{2n}+c^{2n})=\frac{1}{n}p^n+\frac{n-2}{\lfloor 2}p^{n-3}q^2$

$+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{\lfloor 4}p^{n-6}q^4+\cdots\cdots+\frac{(n-r+1)\cdots\cdots(n-3r+1)}{\lfloor 2r}p^{n-3r}q^{2r}+\cdots\cdots$

24. 試證明下式,

(1) n 爲奇數。則 $(b-c)^n+(c-a)^n+(a-b)^n$ 得以 $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$ 整除,(2)若 n 爲 $6m-1$。則此代數式。得以 $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ 整除。(3)又 n 爲 $6m+1$,則此代數式,得以 $(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4$ 整除。

〔證〕 $b-c=x$ $c-a=y$, $a-b=z$。則 $x+y+z=0$, 故由等勢式

$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)=3xyz$, 而

$(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=-2(yz+zx+xy)$, 及

$(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4=2(yz+zx+xy)^2$。

由308章第三例。$x+y+z=0$,

則 $x^2+y^2+z^2$ 之式。若 n 為 $6m-1$ 得以 $xyz(yz+zx+xy)$ 整除。

又若 n 為 $6m+1$ 得以 $xyz(yz+zx+xy)^2$ 整除。

由是得(2)及(3)之證。

次由88章之定理。$(b-c)^{2n+1}+(c-a)^{2n+1}+(a-b)^{2n+1}$ 為可以 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 整除。而 $(b-c)(c-a)(a-b)=\frac{1}{3}\{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3\}$。

由是得(1)之證。

常用對數

311. 常用對數 (Common Logarithms)。即以10為底數之對數也。通常記對數時。畧記為Log。不必以其底數10表出之。

兩數之各位。含有同一之數字。但異其小數點之位置者。即其大數等於小數乘10之某整方乘。由207章第二。知此兩數之對數。惟異其整數而已。

例 $\text{Log}421.5=\text{Log}(4.215\times100)=\text{Log}4.215+\text{Log}100=\text{Log}4.215+2$。

又如已知 $\text{Log}2=.301030$。

則 $\text{Log}.02=\text{Log}(2\div100)=\text{Log}2-\text{Log}100=.301030-2$。

由上之性質。常用對數之小數部。常可為正數。故 Log.02 為 $.301030-2$。原等於 -1.69897。但記此對數時。不記為 -1.69897。而記為 $\bar{2}.301030$。此記法其整數部 $\bar{2}$。即與 -2 之意同。而其小數部常為正數也。

定義 記對數時。其小數部常為正數。此小數部。稱曰假數 (Mantissa)。其整數部。稱曰指標 (Characteristic)。

312. 指標 凡任何數之對數。其指標可由視察得之。

何則。若一數為大於1之數。其整數部之位數為n位。則知其數小於 10^n。而大於 10^{n-1}。而其數之對數。則在 $\text{Log}10^n$ 及 $\text{Log}10^{n-1}$。即 n 與 $n-1$ 之間。故知其數之對數。為 $n-1+$ 小數部。

故凡大於1之數。其對數之指標。等於其數之整數位少一也。

若一數爲小於1之數。而其首位數字之前。有n個0者。則知此數大於10^{-n-1}。而小於10^{-n}。由是知記其對數之小數部爲正數時。此數之對數，爲$-(n+1)+$小數部， ∴ 此指標爲$-(n+1)$。

故凡小於1之數，其對數之指標，等於其首位以前之0數多1。但此指標爲負數，

例3571.4之指標爲3。而.00035714爲-4。即$\bar{4}$，

反之若已知任何數對數之指標。則其數之小數點，亦可決定。

例某數以數字3,5,7,1,4順列而成者。而其數之對數3.55283，因其指標爲3。乃知此數有四位整數，即3571.4也。

又列記數字35714之對數爲$\bar{2}$.55283。因其指標爲$\bar{2}$，此數首位以前有一個0。即.035714也，

313. 對數表 自1迄99999之各數，一一求其對數彙錄之，其對數之小數，求至七位爲止者。謂之七位對數表，然通常對數其小數至五位爲止。已足用矣。

表中所載者。僅有假數。而其指標可由視察而知之。

用對數表之法有二。第一從眞數求對數，第二從對數求眞數。

〔第一〕從眞數求對數，

若眞數不多於五位，則其對數可從表中檢得之。若在五位以上之數，則其對數爲表中所不載。於此欲求其對數，可以畧大畧小兩眞數之差。與原數及畧小數之差相比，若其差爲甚小時。則兩數之差，殆與對數之差成比例，用此原則，可求得原數之對數，

欲證明此原則。可直從308章解得，

即 $\mathrm{Log}_{10}(N+x)-\mathrm{Log}_{10}N=\mathrm{Log}_{10}\left(1+\frac{x}{N}\right)=\mu\mathrm{Log}_e\left(1+\frac{x}{N}\right)$

$$=\mu\left(\frac{x}{N}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{N^2}+\cdots\cdots\cdots\right)=\mu\frac{x}{N}(\text{畧近數}),$$

其μ爲對數之根數。所以代表$1/\mathrm{Log}_e10$者也。

上之原則稱比例差之原則。(Principle of Proportional Differences)，

〔例〕求357.247之對數，

從表中檢得Log357.24=2.5529601及Log357.25=2.5529722。而此

兩對數之差。爲.0000121。又(357.247－357.24)與(357.25－357.24)之比爲$\frac{7}{10}$。由是於357.24加以.0000121之$\frac{7}{10}$。其所得之數。即357.247之對數之畧近值。

但.0000121之$\frac{7}{10}$爲.00000847。因對數之小數迄七位而止。玆依四捨五入之法。將.00000847作爲.0000085。由是得357.247之對數。爲$2.5529601+.0000085=2.5529686$。

〔第二〕從對數求眞數。

例求與對數$\bar{4}.5529652$相當之眞數。

從表中檢得$\text{Log}3.5724=.5529601$，及$\text{Log}3.5725=.5529722$。而

$(.5529652-.5529601)$與$(.5529722-.5529601)$之比爲$\frac{51}{121}$。由是從比例差之原則。而得與對數.5529652相當之眞數。爲

$$3.5724+.0001\times\frac{51}{121}=3.5724+.00004=3.57244.$$

即 $.5529652=\text{Log}3.57244$。

$\therefore\ \bar{4}.5529652=\text{Log}.000357244$。

複利及年金

314. 複利法 計算長期間之複利及年金值。用對數法求之。易得其近似值。

(複利者。即利上加利之算法也)。

凡屬於複利之問題，則如下所述之三類是也，(學生解此種問題時。可參照算術上之方法。自易明白)。

〔第一〕知本金及年限及利率求本利和。

P爲本金。n爲年數，r爲利率，(即每年一圓所得之利息)。A爲所求之本利和。

第一年間P之利金爲Pr。而於第一年末。應得本利之和。爲$P+Pr$即$P(1+r)$。

此$P(1+r)$。即爲第二年之本金。而於第二年末。應得本利之和。爲$\{P(1+r)\}(1+r)$。即$P(1+r)^2$。依同法推之。第n年末。應得本利之和。爲$P(1+r)^n$。

故 $$A=P(1+r)^n。$$

由是 $$\operatorname{Log} A=\operatorname{Log} P+n\operatorname{Log}(1+r)。$$

若半年一轉利計算之，則此本利之和。爲 $P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}$。

〔例〕本金350圓。年利5分。問於25年間所得本利之和如何。

$$P=350,\quad r=\frac{5}{100},\ 及\ n=25。$$

由是 $$\operatorname{Log} A=\operatorname{Log} 350+25\operatorname{Log}\left(1+\frac{5}{100}\right)$$
$$=\operatorname{Log} 350+25(\operatorname{Log} 105-\operatorname{Log} 100)。$$

從表檢得 $\operatorname{Log} 350=2.544\ 680$, $\operatorname{Log} 105=2.0211893$.

由此求得 $\operatorname{Log} A=3.073805$.

又從表檢得與對數3.073805相當之眞數爲1185.22。

故 $A=1185.22$ 圓。

〔第二〕已知滿若干年限以後所得之期欵。求其現價(Present Value)。

A爲n年後之期欵。P爲現價。r爲利率。以P爲本金。n年後所得利之和爲A。故由第一得。 $$P=A(1+r)^{-n}。$$

〔第三〕求於n年間每年之終支取A圓之現價。

r爲利率。則由第二得

第一年支取之現價爲$A(1+r)^{-1}$,

第二年支取之現價爲$A(1+r)^{-2}$,

....

第n年支取之現價爲$A(1+r)^{-n}$。

故所求之現價爲 $$A\left\{\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(1+r)^n}\right\}=\frac{A}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}$$

〔例〕年利4分。求於20年間每年取金30圓之現價。

$$A=30,\ n=20,\ r=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}。$$

∴ 所求之現價$=30\times25\left\{1-\left(\frac{25}{26}\right)^{20}\right\}$。

今 $\text{Log}\left(\frac{25}{26}\right)^{20}=20(\text{Log}25-\text{Log}26)=20(1.3979400-1.4149733)$

$=20(-.0170333)=-.340666$

$=\bar{1}.659334=\text{Log}.456389$。

由是得所求之現價 $=30\times25(1-.456389)=407.7\cdots\cdots$圓。

例題三十二

用次之對數解各例題。

Log 1.02 =.0086002	Log 1.262 =.1010594	Log 3. =.4771213
Log 1.025 =.0107239	Log 1.4816=.1707310	Log 3.0832=.4890017
Log 1.033 =.0141003	Log 1.4817=.1707603	Log 4.4230=.6457169
Log 1.04 =.0170333	Log 1.6386=.2144730	Log 5.1 =.7075702
Log 1.05 =.0211893	Log 1.6387=.2144995	Log 5.577 =.7164006
Log 1.06 =.0253059	Log 1.7292=.2378452	Log 6.3862=.8052425
Log 1.1467=.0594498	Log 1.7349=.2392744	Log 7.4297=.8709713
Log 1.1468=.0594877	Log 2. =.3010300	Log 7.4298=.8709771
Log 1.2258=.0884196	Log 2.0809=.3186684	

1 求$\sqrt[20]{105}$。 答 1.262

(解) $\text{Log}\sqrt[20]{105}=\frac{1}{20}\text{Log}(1.05\times100)=\frac{1}{20}(\text{Log }1.05+\text{Log }100)$

$=\frac{1}{20}(.0211893+2)=.10105947=\text{Log }1.262$。

2. 求$\sqrt[10]{51}$。 答 1.48169

(解) $\text{Log}\sqrt[10]{51}=\frac{1}{10}\text{Log}(5.1\times10)=\frac{1}{10}(\text{Log }5.1+\text{Log }10)$

$=\frac{1}{10}(.7075702+1)=.17075702$。

但 Log 1.4816 = .1707310 及 Log 1.4817 = .1707603。

由是 $\text{Log}\sqrt[10]{51}-\text{Log}1.4816=1.7075702-1.707310=.0000260$,

及 $\text{Log } 1.4817 - \text{Log } 1.4816 = .1707603 - .1707310 = .0000293$，

$\therefore \sqrt[10]{51} = 1.4816 + \frac{260}{293} \times .0001 = 1.48169$。

3. 本金100圓。年利5分。求於50年間所得本利之和。

答 1146.74圓

〔解〕 $A = 100\left(1+\frac{5}{100}\right)^{50}$。 $\therefore$ $\text{Log } A = \text{Log } 100 + 50 \text{ Log } 1.05$
$= 2 + 50 \times .0211893 = 3.059465 = \text{Log } 1146.74$。

4. 年利5分。於15年間之本利和，及年利4分。於18年間之本利和，此二數皆大於本金2倍，試證之。

〔證〕 由第一。 $A = P(1+r)^n$。 其 $(1+r)^n = (1.05)^{15}$。
$\text{Log } (1.05)^{15} = 15 \text{ Log } 1.05 = .3178396 > \text{Log } 2$。 由是 $A = P(1.05)^{15} > 2P$，

又 $(1+r)^n = (1.04)^{18}$。 $\text{Log } (1.04)^{18} = 18 \text{ Log } 1.04 = .3065994 > \text{Log } 2$。

由是 $A = P(1.04)^{18} > 2P$。

5. 年利4分。每半年一轉利。問500圓於10年間之本利之總數幾何。

答 742.98圓

〔證〕 $A = 500\left(1+\frac{.04}{2}\right)^{10}$。

6. 某國每年於1000人中生出85人。於1000人中死亡52人。則其人口經22年後。過於以前人口之2倍。其證若何。

〔證〕 P為現在之人口數。A為22年後之人口數。

每年於1000人中增 $85 - 52 = 33$。故 $A = P\left(1+\frac{33}{1000}\right)^{22}$。

$\therefore \text{Log}\frac{A}{P} = 22 \text{ Log } 1.033 = 22 \times .0141003 = .3102066 > \text{Log } 2$。

由是 $A > 2P$。

7. 每年應支30圓。今不支。以年利 $2\frac{1}{2}$ 分計算之。至20年之終。一併支取。求其全數幾何。

答 785.5圓。

〔解〕 於20年之終。應得第一年之預金為 $30(1+.025)^{20}$。第二年之預金為 $30(1+.025)^{19}$……。第二十年之預金為 $30(1+.025)$，

故所求之金$=30\{(1.025)^{20}+(1.025)^{19}+\ldots+1.025\}=30\times\dfrac{(1.025)^{21}-1.025}{1.025-1}$。

8. 年利4分。於40年間支取年金100圓之現價如何。

答　1979.275圓。

〔解〕由314章第三 $\dfrac{100}{.04}\left\{1-\dfrac{1}{(1.04)^{40}}\right\}$。

9. 借款30000圓。年利4分。逐年以等金償之。至30年償清。問此等金若干。　答　約1735圓。

〔解〕$30000=\dfrac{A}{.04}\left\{1-\dfrac{1}{(1.04)^{30}}\right\}$。

10. 有房屋一座。每年可得賃金70圓。而支出房捐10圓。今預訂契約於26年以後，之14年間。此房劃歸某人。問此契約之現價如何。　答　約1735圓。

〔解〕自今以後27年起至40年終。此期限內劃歸某人。而此證書之現價其每年之收入款爲70－10。即60圓。

故由314章得　$60\left\{\dfrac{1}{(1.06)^{27}}+\dfrac{1}{(1.06)^{28}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(1.06)^{40}}\right\}$

$$=\frac{60}{(1.06)^{27}}\left\{\frac{1-\dfrac{1}{(1.06)^{14}}}{1-\dfrac{1}{1.06}}\right\}=1000(1.06)^{-26}\{1-(1.06)^{-14}\}。$$

第貳拾伍編

級數之和

315. 級數 級數之最要者。既已述明於前。如於第十七編所述者。爲等差,等比,調音級數。於第二十二編之288章所述者。爲二項級數。於第二十四編所述者。爲指數及對數級數。而於是編更述他種最要之級數如次,

316. 記法 以u_n表級數之第n項。以S_n表n項和。而以S_∞表斂級數無限項之和。

317. 公項之差 級數之和。要不能以同一之法則求得之。然大都可將其公項即第n項v_n分其項爲二式之差。一式含有n。一式含有n−1。如是依同法分其各項。而求級數之和。

例如級數爲$\frac{a}{x(x+a)}+\frac{a}{(x+a)(x+2a)}+\frac{a}{(x+2a)(x+3a)}+\cdots\cdots\cdots$

此級數之第n項$u_n=\frac{a}{(x+\overline{n-1}.a)(x+na)}=\frac{1}{x+(n-1)a}-\frac{1}{x+na}$,

依同法分其各項爲二式之差。則此級數爲

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}\right)+\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+2a}\right)+\left(\frac{1}{x+2a}-\frac{1}{x+3a}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left\{\frac{1}{x+(n-1)a}-\frac{1}{x+na}\right\}。$$

觀此可知其和僅存初項與末項。其餘悉消去也,

由是得$S_n=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+na}=\frac{na}{x(x-na)}$。

例題

1. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots$n項之和。　　答 $1-\frac{1}{n+1}$

〔解〕 $S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}$。

2. 求 $\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{2}{\underline{|3}}+\frac{3}{\underline{|4}}+\cdots\cdots n$ 項之和。 答 $1-\frac{1}{\underline{|n+1}}$。

〔解〕 $u_n=\frac{1}{\underline{|n}}-\frac{1}{\underline{|n+1}}$。

3. 求 $\frac{1}{3\underline{|1}}+\frac{1}{4\underline{|2}}+\frac{1}{5\underline{|3}}+\cdots\cdots$ 無限項之和。 答 $\frac{1}{2}$。

〔解〕 $u_n=\frac{1}{(n+2)\underline{|n}}=\frac{n+1}{\underline{|n+2}}=\frac{1}{\underline{|n+1}}-\frac{1}{\underline{|n+2}}$。

故 $S_\infty=\left(\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}\right)+\left(\frac{1}{\underline{|3}}-\frac{1}{\underline{|4}}\right)+\left(\frac{1}{\underline{|4}}-\frac{1}{\underline{|5}}\right)+\cdots\cdots=\frac{1}{\underline{|2}}$。

4. 求 $\frac{1}{1^2\cdot2^2}+\frac{5}{2^2\cdot3^2}+\frac{7}{3^2\cdot4^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots$ 至無限項之和。答 1。

〔解〕 $u_n=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$。

5. 求 $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n+1)}$ 至 n 項之和。

答 $\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n+1)}\right\}$。

〔解〕 $2U_n=\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)(2n+1)}$。

6 求 $\frac{2}{1\cdot3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{3\cdot5}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{4}{5\cdot7}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{3^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

至無限項之和。 答 $\frac{1}{4}$。

〔解〕 $\frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$。

故 $4u_n=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^n}$。

7. 求 $\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\cdots\cdots$ 至無限項之和。 答 $\frac{1}{2}$。

〔解〕 $S_\infty=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4-1}-\frac{1}{4+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6-1}-\frac{1}{6+1}\right)+\cdots$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots\cdots\right\}=\frac{1}{2}(1)$。

8. 求 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^2}{(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^3}{(1-x^3)(1-x^4)}+\cdots\cdots$ n項之和。

答 $\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)(1-x^{n+1})}$

〔解〕 $u_n=\frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{1-x^n}-\frac{1}{1-x^{n+1}}\right)$。

故 $S_n=\frac{1}{1-x}\left\{\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)+\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1-x^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1-x^n}-\frac{1}{1-x^{n+1}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{1-x}\left\{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{n+1}}\right\}$。

318. 問題 求次之級數n項之和。

$\{a(a+b)\cdots\cdots(a+\overline{r-1}.b)\}+\{(a+b)(a+2b)\cdots\cdots(a+rb)\}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}.b)\}+\cdots\cdots$

此級數之規率。(1)各項有r個因子。(2)任何項之諸因子爲等差級數,(3)連續諸項之第一因子。其次序與第一項之連續因子相同。而爲等差級數。

欲求此級數之和。先將原級數各項最後因子之次,附加一因子。而成一規率相同之新級數。乃以V_n表此新級數之第n項。

即 $V_n=\{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-1}.b)\}$。

而 $V_n-V_{n-1}=\{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-1}.b)\}$

$-\{(a+\overline{n-2}.b)(a+\overline{n-1}.b)\cdots\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}.b)\}$

$=\{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}.b)\}\{(a+\overline{n+r-1}.b)-(a+\overline{n-2}.b)\}$

$=(r+1)b\{(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}.b)\}$。

惟因原級數之第n項 $u_n=(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{nr-2}.b)$,

故 $V_n-V_{n-1}=(r+1)b\times u_n$,

依同法 $V_{n-1}-V_{n-2}=(r+1)b\times u_{n-1}$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$V_2-V_1=(r+1)b\times u_2$

$V_1-V_0=(r+1)b\times u_1$

但V_0爲V_1之前項。可由其規率以作之,故

$V_0=\{(a-b)a(a+b)\cdots\cdots(a+\overline{r-1}.b)\}$ 或從V_n以0易其n即得。

乃從加法。得 $(V_n-V_0)=(r+1)b\{u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n\}=(r+1)b\,S_n$,

$\therefore\quad S_n=(V_n-V_0)/(r+1)b$。

例題

1. 求 $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+n(n+1)$ 之和。　答 $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$。

〔解〕 $u_n=n(n+1)$, $V_n=n(n+1)(n+2)$, $V_0=0.1.2$, $r=2$, 及 $b=1$。由是 $S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$。

〔別法〕如次得簡易之解法。

$$n(n+1)=\frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\},$$

$$(n-1)n=\frac{1}{3}\{(n-1)n(n+1)-(n-2)(n-1)n\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1.2=\frac{1}{3}\{1.2.3-0.1.2\}。$$

由是 $$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)。$$

2. 求 $1.2.3+2.3.4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$ 之和。

答 $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$。

〔解〕 $u_n=n(n+1)(n+2)$, $V_n=n(n+1)(n+2)(n+3)$,

$\therefore\quad V_0=0.1.2.3=0$ 又 $r=3$, $b=1$。如上法卽得。

3. 求 $3.5.7.+5.7.9.+\cdots\cdots\cdots n$ 項之和。

〔解〕 $u_n=(2n+1)(2n+3)(2n+5)$, $V_n=(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)$,
$V_0=1.3.5.7$, $r=3$, $b=2$。

由是 $S_n=\frac{1}{4.2}\{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)-1.3.5.7\}$。

求多項級數之和，可變其級數之形以求之。如次所示之例，

4. 求 $1.3+2.4+3.5+\cdots\cdots n$ 項之和。

〔解〕 $u_n=n(n+2)=(n+1)+n$。

但 $1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$。

又 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$。

由是 $S=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{2}n(n+1)$。

5. 求 $2\cdot3\cdot1+3\cdot4\cdot4+4\cdot5\cdot7+\cdots\cdots+(n+1)(n+2)(3n-2)$ 至 n 項之和。

〔解〕 但 $u_n=(n+1)(n+2)(3n-2)=3n(n+1)(n+2)-2(n+1)(n+2)$。

$$\therefore\quad S_n=\frac{3}{4}\{n(n+1)(n+2)(n+3)-0\cdot1\cdot2\cdot3\}-\frac{2}{3}\{(n+1)(n+2)(n+3)-1\cdot2\cdot3\}$$

$$=\frac{1}{12}(9n-8)(n+1)(n+2)(n+3)+4。$$

319. 問題 有級數其公項如次，求其級數之和。

$$\frac{1}{(a+\overline{n-1}\cdot b)(a+nb)(a+\overline{n+1}\cdot b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}\cdot b)}。$$

此級數各項，卽前章所述級數各項之反商。欲求其級數之和。先去其分母之第一因子。而得新級數。其公項爲

$$V_n=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}\cdot b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}\cdot b)}。$$

而 $$V_n-V_{n-1}=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}\cdot b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}\cdot b)}-\frac{1}{(a+\overline{n-1}\cdot b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-3}\cdot b)}$$

$$=\frac{1}{(a+\overline{n-1}\cdot b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}\cdot b)}\{(a+\overline{n-1}\cdot b)-(a+\overline{n+r-2}\cdot b)\}。$$

$$\therefore\quad V_n-V_{n-1}=-(r-1)b\times u_n,$$

依同法 $V_{n-1}-V_{n-2}=-(r-1)b\times u_{n-1}$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_2-V_1=-(r-1)b\times u_2,$$

$$V_1-V_0=-(r-1)b\times u_1,$$

但 V_0 爲 V_1 之前項。可由其規率以作之。

故 $V_0=\dfrac{1}{a(a+b)\cdots\cdots\cdots(a+\overline{r-2}.b)}$。

乃從加法得 $V_n-V_0=-(r-1)b\{u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n\}=-(r-1)bS_n$,

$$\therefore \quad S_n=\frac{V_0-V_n}{(r-1)b}。$$

例 題

1. 求 $\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ 至n項之和。

〔解〕 $U_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)},\quad V_n=\dfrac{1}{n+2},\quad V_0=\dfrac{1}{2},\quad b=1,\quad r=2$。

$$\therefore \quad S_n=\frac{1}{1.1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}。$$

2. 求 $\dfrac{1}{1.2.3.4}+\dfrac{1}{2.3.4.5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ 至n項及無限項之和。

〔解〕 $U_n=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)},\quad V_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$。

$V_0=\dfrac{1}{1.2.3},\quad r=4,\quad b=1$。由是

$$S_n=\frac{1}{3.1}\left\{\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\}。$$

$n=\infty$。故 $S_\infty=\dfrac{1}{3.1}\left\{\dfrac{1}{1.2.3}-0\right\}=\dfrac{1}{18}$。

3. $\dfrac{1}{3.7.11}+\dfrac{1}{7.11.15}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$。

答 $\dfrac{1}{8}\left\{\dfrac{1}{3.7}-\dfrac{1}{(4n+3)(4n+7)}\right\}$。

求此種級數之和。可以他級數表之。其例如次。

4. $\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{3.5}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$。

〔解〕 $U_n=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{n+1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$。

即一般之項$\frac{1}{(n+1)(n+2)}$及$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$兩級數之和。

故$S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$。

5. $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{2.4.6}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+2)(n+4)}$。

〔解〕 $U_n=\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{(n+1)(n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$

$$=\frac{n(n+4)+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

$$\therefore S_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2.3}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right\}+\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{1.2.3.4}-\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right\}。$$

320. 分項 於前所述之級數。可用分項分數之方法。以求得其和。其方法示明如次。

例如級數爲$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$其第n項

$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}$。從第二十三編分項分數之法。而得

$A=\frac{1}{2}$, 及$B=-\frac{1}{2}$。

由是 $2u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$。

$\therefore$ $2u_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$, $2u_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$, $2u_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$, ……………………

$2u_{n-2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}$, $2u_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$, $2u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$。

乃從加法。得$2S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$,

$$\therefore S_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$。

321. 問題 求自然數r方乘之和。

凡 1,2,3,4,…… 連續之整數。謂之自然數。

〔第一〕 求 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ 之和。

$u_n=n^2=n(n+1)-n$。因是由**318**章

$$S_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)。$$

〔第二〕 求 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$ 之和。

$$u_n=n^3=n(n+1)(n+2)-3n^2-2n$$
$$=n(n+1)(n+2)-3n(n+1)+n, \quad \text{由 318 章。}$$

$$S_n=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-3\times\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{2}n(n+1)。$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{(n+2)(n+3)-4(n+2)+2\}=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2。$$

惟 $1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$。

故 $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+\cdots\cdots+n)^2$。

即自然數立方之和，等於自然數之和之平方。

〔別法〕又 $1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3$ 之和，可如次之法則求得之，

由恆同式 $\quad 4n^3=\{n(n+1)\}^2-\{(n-1)n\}^2$。

順次推之 $\quad 4(n-1)^3=\{(n-1)n\}^2-\{(n-2)(n-1)\}^2$，

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$4.2^3=(2.3)^2-(1.2)^2,$$
$$4.1^3=(1.2)^2-0.1)^2。$$

乃由加法得 $\quad 4S_n=n^2(n+1)^2$。 $\quad \therefore \quad S_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$。

〔第三〕 求 $1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r$ 之和。求r之特別值之和，可如前法求得之。

例如 $1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4$ 之和，變其第n項。

為 $n^4=n(n+1)(n+2)(n+3)-6n(n+1)(n+2)+7n(n+1)-n$。可依此變其各項。然後求得其和。

又r方乘之和。可用二項式之定理。以低於r次方乘之項表之。如次，

$$(n+1)^{r+1}=n^{r+1}+(r+1)n^{r}+\frac{(r+1)r}{1\cdot2}n^{r-1}+\cdots\cdots\cdots+1,$$

$$n^{r+1}=(n-1)^{r+1}+(r+1)(n-1)^{r}+\frac{(r+1)r}{1\cdot2}(n-1)^{r-1}+\cdots\cdots\cdots+1,$$

……………………………………………………

$$3^{r+1}=2^{r+1}+(r+1)2^{r}+\frac{(r+1)r}{1\cdot2}2^{r-1}+\cdots\cdots\cdots+1,$$

$$2^{r+1}=1^{r+1}+(r+1)1^{r}+\frac{(r+1)r}{1\cdot2}1^{r-1}+\cdots\cdots\cdots+1,$$

$$1^{r+1}=\qquad\qquad\qquad\qquad+1,$$

乃由加法得

$$(n+1)^{r+1}-(n+1)=(r+1)S_n^r+\frac{(r+1)r}{1\cdot2}S_n^{r-1}+\cdots\cdots+(r+1)S_n^1$$

但 $S_n^r=1^r+2^r+\cdots\cdots+n^r$, $S_n^{r-1}=1^{r-1}+2^{r-1}+\cdots\cdots+n^{r-1}$。其餘類推。

〔推論〕依上法則。如 a, $a+b$, $a+2b$,……之等差級數。可得其各項方乘之和。

例 $$(a+nb)^{r+1}-na^{r+1}-nb^{r+1}=(r+1)b\,S_n^r+\frac{(r+1)r}{1\cdot2}b^2S_n^{r-1}+\cdots\cdots+(r+1)b^nS_n^1,$$

但 $S_n^r=a^r+(a+b)^r+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}\cdot b)^r$。

322. 積彈 (Piles of Shot) 以彈丸疊成錐體。其底面之形式分三種。(1)等邊三角形。(2)正方形。(3)直方形。求其積彈之數。

〔譯者註〕積彈卽堆垛。其底面爲等邊三角形者。卽三角垛。爲正方形者。卽正方垛。爲長方形者。卽長方垛。

〔第一〕底面爲等邊三角形者。其底面以上之各層爲由底面每邊遞次減1所成之諸三角形。至其最上一層。祇有一個而其底面彈丸之數。爲

$$u_n=n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1=\frac{1}{2}n(n+1),$$

由是 $S_n=\frac{1}{2}1(1+1)+\frac{1}{2}2(2+1)+\frac{1}{2}3(3+1)+\cdots\cdots+\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{2}\{1.2+2.3+\cdots\cdots+n(n+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)。$$

〔第二〕底面爲正方形者，其底面以上之各層，爲由底面每邊遞次減一所成之正方形。故

$$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)。$$

此卽自然數平方之和。

〔第三〕底面爲長方形者，其長邊之彈數有n個，短邊之彈數有m個，其底面以上之各層。爲由底面之各邊遞次減1，所成之長方形。至第一層。其長方形之短邊祇有一個。其長邊有 $n-\overline{m-1}$ 個，卽 $n-m+1$ 個。

故 $S_n=(n-m+1)1+(n-m+2)2+\cdots\cdots\cdots\cdots$
$$+(n-2)(m-2)+(n-1)(m-1)+nm$$
$$=(\overline{n-m}+1)1+(\overline{n-m}+2)2+\cdots\cdots+(\overline{n-m}+m-2)(m-2)$$
$$+(\overline{n-m}+m-1)(m-1)+(\overline{n-m}+m)m$$
$$=(n-m)\{1+2+\cdots\cdots+(m-2)+(m-1)+m\}+1^2+2^2+\cdots\cdots+m^2$$
$$=(n-m)\frac{1}{2}m(m+1)+\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$
$$=\frac{1}{6}m(m+1)(3n-m+1)。$$

例題

1. 積彈丸爲三角形梁，共有八層，而底面之一邊爲12個，其總數若何。

〔解〕若積成錐體，則由第一得 $\frac{1}{6}12(12+1)(12+2)$，卽 $\frac{1}{6}.12.13.14$。

玆僅有8層，缺其上部 $\frac{1}{6}.4.5.6$。

故所求之總數爲 $\frac{1}{6}(12.13.14-4.5.6)$。

2. 以彈丸積成10層之長方形梁，而底面之兩邊爲20個及25個，求其總數幾何。 答 3260.

〔解〕 於 $\sum_n (n+5)$。其 n 自 20 以至 11。

故 $S=11\cdot16+12\cdot17+13\cdot18+14\cdot19+15\cdot20+\cdots\cdots+20\cdot25$。

〔別法〕由第三得 $\frac{1}{6}20(20+1)(3.25-20+1)-\frac{1}{6}10(10+1)(3.15-10+1)$。

323. 形數 (Figurate Numbers) 諸級數相連續。其第一級數之各項皆為 1。以次任何級數之第 n 項。等於其前之各級數 n 項之和。順是而得形數之次序。

第一次 1, 1, 1, 1, 1,…

第二次 1, 2, 3, 4, 5,…其第 n 項 $=1+1+\cdots$ 至 n 項 $=n$。

第三次 1, 3, 6, 10, 15,…其第 n 項 $=1+2+3+\cdots$ 至 n 項 $=\frac{1}{2}n(n+1)$。

第四次 1, 4, 10, 20, 35,…其第 n 項 $=1+3+6+\cdots$ 至 n 項

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)。$$

……………………………………………………

第五次之第 n 項 $=1+4+10+\cdots\cdots$ 至 n 項

$$=\frac{1}{6}\{n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)+\cdots\cdots+1.2.3\}$$

$$=\frac{1}{2.3.4}n(n+1)(n+2)(n+3)。$$

第 r 次之第 n 項為 $\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-2)}{\underline{|r-1}}$。

〔譯者註〕形數卽乘梁。第一次卽元梁。第二次卽一乘梁。第三次卽二乘梁。以下類推。

324. 多角數 (Polygonal Numbers) 等差級數。其前二項有如 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4),…… 者。乃將各等差級數。取其 1 項, 2 項, 3 項順次至於 n 項各相加。而以其和為新級數之各項。此種新級數。卽謂之多角數。如次所列者是也。

(1) 1, 2, 3,…n………………卽二角數 (Linear Numbers)。

(2) 1, 3, 6,…$\frac{1}{2}n(n+1)$……卽三角數 (Triangular Numbers)。

(3) 1, 4, 9,…n^2………………卽四角數 (Square Numbers)。

(4) 1, 5, 12, $\cdots n+\frac{3}{2}n(n-1)\cdots$ 卽五角數 (Pentagonal Numbers),

....

(r−1) 1, r, 3r−3, $\cdots n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)\cdots$ 卽 r 角數 (r-gonal Numbers)。

(1) 從 1, 1, 1, 1,.............. 取其 1 項, 2 項,.........至 n 項。而得
1, 1+1, 1+1+1,。... 卽 1, 2, 3,..............

(2) 從 1, 2, 3, 4,.............. 取其 1 項, 2 項,.........至 n 項, 而得
1, 1+2, 1+2+3,.... 卽 1, 3, 6,..............

(3) 從 1, 3, 5, 7,.............. 取其 1 項, 2 項,.........至 n 項。而得
1, 1+3, 1+3+5,.... 卽 1, 4, 9,............

....

(r−1) 從 1, r−1, 2r−3, 3r−5,...取其 1 項, 2 項,..至 n 項, 而得
1, r, 3r−3, 6r−8,..............................

r 多角數之第 n 項。爲 $n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)$。卽此以爲 r 多角數之公項, 其中 n 各項之和爲 $\frac{1}{2}n(n+1)$。又 $n(n-1)$ 各項之和, 由 318 章。得 $\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$, 故 r 多角數 n 項之和爲

$$\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)(r-2)。$$

例題三十三

求次之各級數 n 項之和。如爲斂級數。又求其無限項之和。

1. $4.7.10+7.10.13+10.13.16+\cdots\cdots$。

(解) $u_n=(3n+1)(3n+4)(3n+7)$,

$V_n=(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10)$, $V_0=1.4.7.10$, $b=3$,

$\therefore\ S_n=\frac{1}{12}\{(3n+1)(3n+4)(3n+7)(3n+10)-1.4.7.10\}$. (318 章)。

2. $\frac{1}{3.7.11}+\frac{1}{7.11.15}+\frac{1}{11.15.19}+\cdots\cdots$。

答 $\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3.7}-\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}\right\}S_\infty=\frac{1}{168}$。

(解) $u_n=\frac{1}{(4n-1)(4n+3)(4n+7)}$, $V_n=\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}$。

$V_0=\frac{1}{3.7}$, $r=3$, $b=4$。

3. $1.3.4+2.4.5.+3.5.6+\cdots\cdots\cdots$ 答 $\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+23n+46)$。

(解) $u_n=n(n+2)(n+3)=n(n+1)(n+2)+2n(n+1)+2n$,

∴ $S_n=\{1.2.3+2.3.4+\ldots+n(n+1)(n+2)\}+2\{1.2+2.3+\ldots+n(n+1)\}$

$+2(1+2+\cdots\cdots+n)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)+\frac{2}{3}n(n+1)(n+2)+n(n+1)$。

4. $1.5+3.7+5.9+7.11+\cdots\cdots$ 答 $\frac{4}{3}n(n+1)(n+2)-3n$。

(解) $u_n=(2n-1)(2n+3)=4n(n+1)-3$,

5. $1.2.3+2.3.5+3.4.7+4.5.9+\cdots\cdots\cdots$ 答 $\frac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$。

(解) $u_n=n(n+1)(2n+1)=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$。

6. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+4.5^2+\cdots\cdots$ 答 $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$。

(解) $u_n=n(n+1)^2=n(n+1)(n+2)-n(n+1)$。

7. $1.3^2+3.5^2+5.7^2+7.9^2+\ldots$ 答 $\frac{1}{24}(2n-1)(2n+1)(2n+3)(6n+7)+\frac{7}{8}$。

8. $\frac{1}{1.3.7}+\frac{1}{3.5.9}+\frac{1}{5.7.11}+\frac{1}{7.9.13}+\cdots\cdots\cdots$

答 $\frac{11}{180}-\frac{6n+11}{12(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$, $S\infty=\frac{11}{180}$。

(解) $u_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+5)}=\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$,

$=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}-\frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$,

與379例題五同。

9. $\frac{1}{1.3.4}+\frac{1}{2.4.5}+\frac{1}{3.5.6}+\frac{1}{4.6.7}+\cdots\cdots\cdots$

答 $\frac{5}{36}-\frac{3n+5}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$, $S\infty=\frac{5}{36}$

10. $\frac{4}{1.2.3}+\frac{5}{2.3.4}+\frac{6}{3.4.5}+\frac{7}{4.5.6}+\cdots\cdots$

答 $\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}$, $S\infty=\frac{5}{4}$

〔解〕 $u_n=\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$。

11. $\frac{1}{1.3.5}+\frac{2}{3.5.7}+\frac{3}{5.7.9}+\frac{4}{7.9.11}+\cdots\cdots\cdots$

答 $\frac{1}{8}-\frac{4n+3}{8(2n+1)(2n+3)}$, $S\infty=\frac{1}{8}$。

12. $\frac{3}{1.2.4}+\frac{4}{2.3.5}+\frac{5}{3.4.6}+\frac{6}{4.5.7}+\cdots\cdots\cdots$

答 $\frac{29}{36}-\frac{6n^2+27n+29}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$, $S\infty=\frac{29}{36}$,

〔解〕 與前例同法。

13. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots\cdots\cdots$ 答 $\frac{2n}{n+1}$, $S\infty=2$。

〔解〕 $u_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$。

14. $\frac{1^2}{1}+\frac{1^2+2^2}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3}+\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4}+\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 $u_n=\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n}=\frac{1}{3}n(n+1)+\frac{1}{6}(n+1)$,

$\therefore\quad S_n=\frac{1}{3}\{1.2+2.3+\cdots\cdots+n(n+1)\}+\frac{1}{6}\{2+3+4+\cdots\cdots+(n+1)\}$

$=\frac{1}{36}(n+1)(n+2)(4n+3)-\frac{1}{6}$

15. $1.1^2+2(1^2+2^2)+3(1^2+2^2+3^2)+\cdots\cdots\cdots\cdots$

答 $\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(8n^2+11n+1)$。

〔解〕 $u_n=\frac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)(n+3)-9(n+2)+6\}$

$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{3}{2}n(n+1)(n+2)+n(n+1)$。

$\therefore\quad S_n=\frac{1}{3}\sum n(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{3}{2}\sum n(n+1)(n+2)+\sum n(n+1)$,

16. $a^2+(a+b)^2+(a+2b)^2+\cdots\cdots$

答 $na^2+n(n-1)ab+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)b^2$,

〔解〕 $u_n=\{a+(n-1)b\}^2=a^2+2(n-1)ab+(n-1)^2b^2$。

$\therefore\quad S_n=\sum a^2+2ab\sum(n-1)+b^2\sum(n-1)^2$。

17. $a^3+(a+b)^3+(a+2b)^3+\cdots\cdots$

答 $na^3+\frac{3}{2}n(n-1)a^2b+\frac{1}{2}n(n-1)(2n-1)ab^2+\frac{1}{4}n^2(n-1)^2b^3$。

18. $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots\cdots$ 答 $\frac{1}{3}n(4n^2-1)$。

〔解〕 如 16 題 $a=1,\ b=2$。

19. $1^3+5^3+9^3+13^3+\cdots\cdots$ 答 $\frac{1}{3}n(16n^2-12n-1)$,

20. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots+(2n+1)^2=(n+1)(2n+1)$ 試證之。

〔證〕 左邊 $=1^2+(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+\cdots\cdots+\{(2n+1)^2-(2n)^2\}$

$=1+5+9+\cdots\cdots+(4n+1)=(n+1)(2n+1)$,

21. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots-(2n)^2=-n(2n+1)$。

〔證〕 由前例之結果 $(n+1)(2n+1)$ 減 $(2n+1)^2$。

22. $1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots+(2n+1)^3=4n^3+9n^2+6n+1$。

〔證〕 左邊等 $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+(2n+1)^3-2\{2^3+4^3+\cdots\cdots+(2n)^3\}$

$=\left\{\frac{1}{2}(2n+1)(2n+2)\right\}^2-16(1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3)$

$=(2n+1)^2(n+1)^2-16\times\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=4n^3+9n^2+6n+1$,

23. 求 $1.n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots\cdots+n.1$ 之和

答 $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$。

〔證〕 $S_n=1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots\cdots+n\{n-(n-1)\}$

$=n(1+2+3+4+\cdots\cdots+n)-\{1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+(n-1)n\}$。

24. $n\cdot n+(n-1)(n+1)+(n-2)(n+2)+\cdots\cdots+2(2n-2)+1(2n-1)$。

〔解〕 $S_n=n^2+(n^2-1^2)+(n^2-2^2)+\cdots\cdots+\{n^2-(n-2)^2\}+\{n^2-(n-1)^2\}$

$=n^2(1+1+\cdots\cdots+1)-\{1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-1)^2\}$

$=n^2\cdot n-\frac{1}{6}(n-1)(n-1+1)\{2(n-1)+1\}=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$。

25. $ab+(a-1)(b-1)+(a-2)(b-2)+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 $S_n=ab+\{ab-(a+b)+1^2\}+\{ab-2(a+b)+2^2\}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\{ab-(n-1)(a+b)+(n-1)^2\}=nab-(a+b)\{1+2+\cdots\cdots+(n-1)\}$

$+1^2+2^2+\cdots\cdots+(n-1)^2=nab-(a+b)\frac{1}{2}(n-1)n+\frac{1}{6}(n-1)(n-1+1)$

$\{2(n-1)+1\}=nab-\frac{1}{2}n(n-1)(a+b)+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$。

26. $S_n^r\equiv1^r+2^r+\cdots+n^r$ 則 (1) $5S_n^4=6S_n^1\times S_n^3-S_n^2$ (2) $S_n^7+S_n^5=2(S_n^3)^2$。

〔證〕 於 **321.** 章第三 $r=4$。則 $(n+1)^5-(n+1)=5S_n^4+10S_n^3+10S_n^2-5S_n^1$

$\therefore\quad 5S_n^4=(n+1)^5-(n+1)-10S_n^3+5S_n^1-10S_n^2$

$=n(n+1)(n+2)(n^2+2n+2)-\frac{5}{2}n^2(n+1)^2-\frac{5}{2}n(n+1)-10S_n^2$

$=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)(n^2+n+3)-10S_n^2=3n(n+1)S_n^3-S_n^2$

$=6S_n^1\times S_n^3-S_n^2$。 卽得(1)之證。

又用**321.**章第三之公式得(2)之證。

27. (1) $\frac{1}{2\cdot3}2+\frac{2}{3\cdot4}2^2+\frac{3}{4\cdot5}2^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

(2) $\frac{3}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2\cdot3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{5}{3\cdot4}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(3) $\frac{4}{1\cdot2}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{2\cdot3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{6}{3\cdot4}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots$ 答 $2-\frac{2}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$。

(4) $\frac{8}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{5}{7}\right)+\frac{9}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{5}{7}\right)^2+\frac{10}{3\cdot4\cdot5}\left(\frac{5}{7}\right)^3+\cdots\cdots\cdots$

答 $\frac{5}{4}-\frac{5}{2(n+1)(n-2)}\left(\frac{5}{7}\right)^n$;

(5) $\frac{9}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{10}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{11}{3\cdot4\cdot5}\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots\cdots$

答 $\frac{3}{2}-\frac{3}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^n$，

(6) $\frac{15}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{6}{7}\right)+\frac{16}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{6}{7}\right)^2+\frac{17}{3\cdot4\cdot5}\left(\frac{6}{7}\right)^3+\cdots\cdots$

答 $3-\frac{6}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{6}{7}\right)^n$。

〔解〕(1) $u_n=\frac{n}{(n+1)(n+2)}2^n=\frac{2^{n+1}}{n+2}-\frac{2^n}{n+1}$。

$\therefore\quad S_n=\left(\frac{2^2}{3}-\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{2^3}{4}-\frac{2^2}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{2^{n+1}}{n+2}-\frac{2^n}{n+1}\right)=\frac{2^{n+1}}{n+2}-1$。

(2) $u_n=\frac{n+2}{n(n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2^n}=\frac{1}{n\cdot2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)2^n}$，

$\therefore\quad S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2\cdot2^1}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot2^1}-\frac{1}{3\cdot2^2}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n\cdot2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)2^n}\right)$

$=1-\frac{1}{(n+1)2^n}$。

(3) $u_n=\frac{n+3}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{3(n+1)-2n}{n(n+1)}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{2}{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$。

(4) $u_n=\frac{n+7}{n(n+1)(n+2)}\left(\frac{5}{7}\right)^n=\frac{7(n+2)-5n}{2n(n+1)(n+2)}\left(\frac{5}{7}\right)^n$

$=\frac{5}{2n(n+1)}\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}-\frac{5}{2(n+1)(n+2)}\left(\frac{5}{7}\right)^n$。

(5) $u_n=\frac{n+8}{n(n+1)(n+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^n=\frac{3}{n(n+1)}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\frac{3}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{3}{4}\right)^n$，

(6) $u_n=\frac{n+14}{n(n+1)(n+2)}\left(\frac{6}{7}\right)^n=\frac{6}{n(n+1)}\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-\frac{6}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{6}{7}\right)^n$，

28. n個自然數取2個爲積之和，爲$\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$。

〔證〕 $(1+2+3+4+\cdots\cdots+n)^2=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2+2\{1\cdot2+1\cdot3+\cdots\cdots+2\cdot3+\cdots\cdots+(n-1)n\}$。

即 $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2S,$

$$\therefore\quad S=\frac{n}{24}(n+1)(n-1)(3n+2)。$$

29. n個自然數取三個爲積之和，爲 $\frac{1}{48}(n-2)(n-1)n^2(n+1)^2$。

〔證〕 1.2.3,……n 以 a, b, c,……表之。

$(a+b+c+\ldots\ldots)^3=\sum a^3+3\sum a^2b+6\sum abc,$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{6}\{(\sum a)^3-\sum a^3-3\sum a^2b\}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)。$$

$(\sum a)^3=(1+2+3+\ldots\ldots+n)^3=\frac{1}{8}n^3(n+1)^3,$

$\sum a^3=1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$

$\sum a^2b=(a^2+b^2+c^2+\ldots\ldots)(a+b+c+\ldots\ldots)-(a^3+b^3+c^3+\ldots\ldots\ldots)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\frac{1}{6}n^2(n+1)^2(n-1)$$

由是得(1)之結果。

30. n個自然數之平方取二個爲積之和，爲

$\frac{1}{360}n(n^2-1)(4n^2-1)(5n+6)$。

〔證〕 $(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)^2=1^4+2^4+\ldots\ldots+n^4+2(1^2.2^2+1^2.3^2+\ldots\ldots$
$+2^2.3^2+\ldots\ldots\ldots\ldots)$,

即 $\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\}^2=1^4+2^4+\ldots\ldots+n^4+2S$。

由26.例可得 $1^4+2^4+\ldots+n^4$。

325. 問題 求次之級數n項之和，

$$\frac{a}{b}+\frac{a(a+x)}{b(b+x)}+\frac{a(a+x)(a+2x)}{b(b+x)(b+2x)}+\ldots\ldots+\frac{a(a+x)\ldots\ldots(a+\overline{n-1}x)}{b(b+x)\ldots\ldots(b+\overline{n-1}x)}+\ldots\ldots\ldots$$

此級數之分母子逐次增一因子，其所增之因子，皆爲等差級數之項，而其公差相等。

今依此級數之規率，於其分子，增一因子而爲新級數，其公項以 V_n 表之，則

$$V_n=\frac{a(a+x)\cdots\cdots(a+\overline{n-1}x)(a+nx)}{b(b+x)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}x)}。$$

然 $V_n-V_{n-1}=\dfrac{a(a+x)\cdots\cdots(a+\overline{n-1}x)(a+nx)}{b(b+x)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}x)}-\dfrac{a(a+x)\cdots\cdots(a+\overline{n-1}x)}{b(b+x)\cdots\cdots(b+\overline{n-2}x)}$

$$=\frac{a(a+x)\cdots\cdots(a+\overline{n-1}x)}{b(b+x)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}x)}\{(a+nx)-(b+\overline{n-1}x)\},$$

$\therefore\quad V_n-V_{n-1}=u_n\times(a+x-b),$

$V_{n-1}-V_{n-2}=u_{n-1}\times(a+x-b),$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$V_2-V_1=u_2\times(a+x-b),$

又 $V_1=\dfrac{a(a+x)}{b}=(a+x)u_1=u_1\times(a+x-b)+bu_1=u_1\times(a+x-b)+a,$

相加得 $V_n=S_n\times(a+x-b)+a,$

$\therefore\quad S_n=\dfrac{1}{a+x-b}(V_n-a)=\dfrac{a}{a+x-b}\left\{\dfrac{(a+x)\cdots\cdots(a+nx)}{b(b+x)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}x)}-1\right\}。$

〔例〕 求次之級數之和,

$$\frac{a}{b}-\frac{a(a-x)}{b(b+x)}+\frac{a(a-x)(a-2x)}{b(b+x)(b+2x)}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此級數之分母子逐次所增之因子。其公差相同,但分子與分母公差之符號全相反。而此級數之和,可以 $-a$ 易其前之級數 a 卽得。

惟前之級數爲 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a(a+x)}{b(b+x)}+\dfrac{a(a+x)(a+2x)}{b(b+x)(b+2x)}+\cdots\cdots\cdots$

$$=\frac{a}{a+x-b}\left\{\frac{(a+x)\cdots\cdots\cdots(a+nx)}{b(b+x)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}x)}-1\right\}。$$

以 $-a$ 易其 a。得 $-\left\{\dfrac{a}{b}-\dfrac{a(a-x)}{b(b+x)}+\dfrac{a(a-x)(a-2x)}{b(b+x)(b+2x)}-\cdots\cdots\cdots\right\}$

$$=\frac{a}{a+b-x}\left\{\frac{(-1)^n(a-x)\cdots\cdots(a-nx)}{b(b+x)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}x)}-1\right\}。$$

卽 $-S_n=\dfrac{a}{a+b-x}\left\{\dfrac{(-1)^n(a-x)\cdots\cdots(a-nx)}{b(b+x)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}x)}-1\right\}$

$\therefore\quad S_n=\dfrac{a}{a+b-x}\left\{1-(-1)^n\dfrac{(a-x)\cdots\cdots(a-nx)}{b(b+x)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}x)}\right\}。$

例題

1. 求 $\frac{2}{3}+\frac{2\cdot5}{3\cdot6}+\frac{2\cdot5\cdot8}{3\cdot6\cdot9}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ n項之和。

〔解〕 $a=2, b=3, x=3$, 則 $S_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{2\cdot5\cdot8\cdots\cdots(3n+2)}{3\cdot6\cdot9\cdots\cdots3n}-\frac{2}{1}\right\}$。

〔註〕 此爲特別之級數，以其連次之項。等於$(1-x)^{-\frac{2}{3}}$展開式中$x, x^2, x^3\cdots\cdots$之係數。

例 $(1-x)^{-\frac{2}{3}}=1-\frac{-2}{3}x+\frac{(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{\lfloor 2}x^2-\frac{(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3})}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$=1+\frac{2}{3}x+\frac{2\cdot5}{3\cdot6}x^2+\frac{2\cdot5\cdot7}{3\cdot6\cdot9}x^3+\cdots\cdots\cdots$$

故$1+S_n=(1-x)^{-\frac{2}{3}}$展開式之最初$n+1$項之係數之和，由287章知其等於$(1-x)^{-\frac{2}{3}}\times(1-x)^{-1}$。即$(1-x)^{-\frac{5}{3}}$中$x^n$之係數。依此可求得其結果。

2. $\frac{2}{3}+\frac{2\cdot6}{3\cdot7}+\frac{2\cdot6\cdot10}{3\cdot7\cdot11}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 答 $\frac{2}{3}\left\{\frac{6\cdot10\cdots(4n+2)}{3\cdot7\cdots\cdots(4n-1)}-1\right\}$。

3. $1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

答 $(-1)^{n-1}\frac{(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdots\cdots(n-1)}$

〔解〕 於325章之例，$a=m, b=1, x=1$。

則 $\frac{m}{1}-\frac{m(m-1)}{1\cdot2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}-\cdots\cdots\cdots$

$$=\frac{m}{m+1-1}\left[1-(-1)^{n-1}\frac{(m-1)\cdots\cdots\{m-(n-1)\}}{1\cdot2\cdots\cdots(n-1)}\right],$$

$$\therefore 1-\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots=(-1)^{n-1}\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdots\cdots(n-1)}。$$

326. 問題 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots+a_nx^n$ 求其$n+1$項之和。但a_n爲n之r次整代數式。

$$S_n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nx^n,$$

$$(1-x)^{r+1}=1-(r+1)x+\frac{(r+1)r}{1\cdot2}x^2-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{r+1}x^{r+1}。$$

由是$S_n\times(1-x)^{r+1}=a_0+\{a_1-(r+1)a_0\}x+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$+\left\{a_p-(r+1)a_{p-1}+\frac{(r+1)r}{1.2}a_{p-2}-\cdots\cdots\cdots\right\}x^p+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}a_nx^{n+r+1}。$$

由題意。a_p為p之r次整代數式。

假定$a_p=A_rp^r+A_{r-1}p^{r-1}+A_{r-2}p^{r-2}+\cdots\cdots\cdots+A_0$,

由305章。級數$p^k-(r+1)(p-1)^k+\frac{(r+1)r}{1.2}(p-2)^k-\cdots\cdots\cdots$至$(r+2)$項之和。k為小於$(r+1)$之整數。則此級數恆為零。因是無論p之值如何。

$a_p-(r+1)a_{p-1}+\frac{(r+1)r}{1.2}a_{p-2}-\cdots\cdots\cdots$至$(r+2)$項之和恆為零。

故 $S_n\times(1-x)^{r+1}$之諸項中。除其最初r+1項及最後r+1項以外。其他皆可消去之,

何則,其積除最初r+1項及最後r+1項以外。其他諸項之係數。皆如$a_p-(r+1)a_{p-1}+\cdots\cdots\cdots$至n+2項恆為零故也。

由是S_n可從次式求得。

$$\begin{aligned}S_n\times(1-x)^{r+1}=a_0&+\{a_1-(r+1)a_0\}x+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\{a_{r-1}-(r+1)a_{r-2}+\cdots\cdots+(-1)^r(r+1)a_0\}x^r\\&+\left\{-(r+1)a_n+\frac{(r+1)r}{1.2}a_{n-1}-\cdots\cdots\cdots\right\}x^{n+1}\\&+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{r+1}a_nx^{n+r+1}\end{aligned}$$

例題

1. 求$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+(n+1)x^n$之和。

(解) $S_{n+1}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+(n+1)x^n$, $(1-x)^2=1-2x+x^2$。

$\therefore$ $(1-x)^2S_{n+1}\equiv1+x^{n+1}\{n-2(n+1)\}+(n+1)x^{n+2}$。其他諸項為恆同式 $k-2(k-1)+(k-2)\equiv o$,

故悉消去之,即為$(1-x)^2S_{n+1}=1-(n+2)x^{n+1}+(n+1)x^{n+2}$。

$$\therefore\ S_{n+1}=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}。$$

2. 求$1^3+2^3x+3^3x^2+4^3x^3+\cdots\cdots+(n+1)^3x^n$級數n+1項之和.

〔解〕 $S_{n+1}=1^3+2^3x+3^3x+\ldots\ldots+(n+1)^3x^n$。

$(1-x)^4=1-4x+6x^2-4x^3+x^4$。

$\therefore\quad S_{n+1}\times(1-x)^4=1+(2^3-4)x+(3^3-4.2^3+6.1^3)x^2$

$+(4^3-4.3^3+6.2^3-4.1^3)x^3+\{-4(n+1)^3+6n^3-4(n-1)^3+(n-2)^3\}x^{n+1}$

$+\{6(n+1)^3-4n^3+(n-1)^3\}x^{n+2}+\{-4(n+1)^3+n^3\}x^{n+3}+(n+1)^3x^{n+4}$

恆同式，$k^3-4(k-1)^3+6(k-2)^3-4(k-4)^3=0$。其他諸項，悉消去之，由是

$S_{n+1}=\{1+4x+x^2-(n^3+6n^2+12n+8)x^{n+1}+(3n^3+15n^2+21n+5)x^{n+2}$

$-(3n^3+12n^2+12n+4)x^{n+3}+(n+1)^3x^{n+4}\}/(1-x)^4$。若 x 之值小於 1，則此級數爲斂級數。故其無限項之和，爲 $S\infty=(1+4x+x^2)/(1-x)^4$。

327. 級數諸項成立之規率。無論何種級數，若能知其公項，即可明瞭其級數諸項成立之規率。如前章所示之級數是，若僅示初項以下之二三項，則其級數諸項，從何種規率而成立。尙未可決定也，例如 $x+x^2+x^3+\cdots$ 爲無限項之級數，此最簡單爲等比級數。而其公項爲 x^n。然其他之規率，有如 $\dfrac{x+x^2+x^3+\ldots\ldots x^9}{1-x^{10}}$ 之展開式，爲 $x+x^2+x^3+\ldots\ldots+x^9+x^{11}+9x^{12}+9x^{13}+\ldots\ldots$，此級數自第9項以下，與等比級數有異。

〔註〕 於本書所示之級數，如僅示以級數之前諸項，則其級數之規率，取其最簡單者以爲用，

逐差法

328. 逐差法 (Method of Differences) 將任何級數 $a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots\ldots+a_n$，取其連續各二項之差，而得新級數 $(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots\ldots+(a_n-a_{n-1})$ 爲第一差級數。又將第一差級數，取其連續各二項之差而得新級數爲第二差級數。以下類推，

例級數 2,7,15,26,40,……之第一差級數爲 5,8,11,14,…… 第二差級數爲 3,3,3,………。

329. 逐次推差 未知規率之級數，可先逐次推求其差級數，乃以後之差級數之規率，逐次導入於前之差級數，而得其規率，如是至終，可決定原級數之規率，

〔第一例〕求 $1+6+23+58+117+206+\dots\dots$ 之第n項。

第一差級數爲 $5+17+35+59+89+\dots\dots$,

第二差級數爲 $12+18+24+30+\dots\dots$,

第三差級數爲 $6+6+6+6+\dots\dots$,

乃知第二差級數爲等差級數。其第n項爲 $12+(n-1)6$,

即 $6(n+1)$。

今以 v_n 表第一差級數之第n項。而得

$$v_n-v_{n-1}=6n,$$

$$v_{n-1}-v_{n-2}=6(n-1),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$v_2-v_1=6.2,$$

及 $$v_1=6.1-1,$$

由加法得 $v_n=6(1+2+\dots\dots+n)-1=3n(n+1)-1$。

又以 u_n 表原級數之第n項。而得

$$u_n-u_{n-1}=v_{n-1}=3(n-1)n-1,$$

$$u_{n-1}-u_{n-2}=3(n-2)(n-1)-1,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$u_2-u_1=3.1.2-1,$$

及 $$u_1=1。$$

由加法得 $u_n=3\{(n-1)n+(n-2)(n-1)+\dots\dots+1.2\}-n+2$

$$=(n-1)n(n+1)-n+2。$$

〔第二例〕求 $6+9+14+23+40+\dots\dots$ 之第n項。

第一差級數爲 $3+5+9+17+\dots\dots$

第二差級數爲 $2+4+8+\dots\dots$

由是知第二差級數爲等比級數。其第 $(n-1)$ 項爲 2^{n-1}。今以 u_n 表第一差級數之第n項。而得

$$v_n-v_{n-1}=2^{n-1},$$

$$v_{n-1}-v_{n-2}=2^{n-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$v_2-v_1=2^1,$$

及 $$v_1=3。$$

由加法得$v_n=(2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})+3=2^n+1$。

由是可求得原級數之公項u_n如次。

$$u_n-u_{n-1}=u=2^{n-1}+1,$$
$$u_{n-1}-u_{n-2}=2^{n-2}+1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_2-u_1=2^1+1,$$

及 $v_1=6$,

由加法得$u_n=(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+2)+n+5=2^n+n+3$。

既知原級數之公項為2^n+n+3。則此級數n項之和,可如次求得。

$$(2+2^2+\cdots\cdots+2^n)+\{n+(n-1)+\cdots\cdots+1\}+3n$$
$$=2^{n+1}-2+\frac{1}{2}n(n+1)+3n,$$

〔註〕依前兩例得求級數規率之法則如次。

先將原級數。逐次推求其差級數。至求得之差級數,為等差或等比級數,乃以次之差級數導入前之差級數。以求其第n項,如是可求原級數之第n項。

循環級數

331. 定義 級數$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$其於連續$r+1$項之間。有$a_nx^n+px(a_{n-1}x^{n-1})+qx^2(a_{n-2}x^{n-2})+\cdots\cdots=0$之關係者。謂之r次循環級數,而以其$1+px+qx^2+\cdots\cdots$為級數率(Scale of Relation)。此關係不僅對於其第n項以前之r項為合理。即自初項至r項以後之諸項,皆適合於此關係也。

例級數$1+2x+4x^2+8x^3+\cdots\cdots$為一次循環級數,而其級數率為$1-2x$。

又級數$1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots\cdots$為二次循環級數。而其級數率為$1-2x+x^2$。

332. 問題 將已知之循環級數。求其n項之和。

級數$a_0+a_1x+\cdots\cdots a_nx^n+\cdots\cdots$假定其級數率為$1+px+qx^2$(此級數率為二次者,若為一次,則$q=0$,若二次以上,可由此關係類推之)

$S_n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$

$\therefore\quad S_n(1+px+qx^2)=a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2+\cdots\cdots$

$+(a_n+pa_{n-1}+q_{n-2})x^n+(pa_n+qa_{n-1})x^{n+1}+qa_nx^{n+2}$

$=a_0+(a_1+pa_0)x+(pa_n+qa_{n-1})x^{n+1}+qa_nx^{n+2}$

其間$(a_2+pa_1+qa_0)x^2+\cdots\cdots+(a_n+pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n$諸項。皆適合於$a_kx^k+px(a_{k-1}x^{k-1})+qx^2(a_{k-2}x^{k-2})=0$之關係。故悉消去之。(但此關係其k之值爲大於1)。

由是$S_n=\dfrac{a_0+(a_1+pa_0)x+(pa_n+qa_{n-1})x^{n+1}+qa_nx^{n+2}}{1+px+qx^2}$。

此已知級數。如爲斂級數。則n增至極大時。其第n項爲極小。故其無窮項之和，爲

$$S\infty=\frac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}。$$

若將代數式$\dfrac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$依x之遞昇方乘展開之。而爲斂級數者。其展開式中$x^n$之係數。與此循環級數中$x^n$之係數相同。

故此代數式$\dfrac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$稱爲二次循環級數之母函數(The generating function)。

333.定理 r次之循環級數。苟知其自初項至2r項。即可決定其級數率。

此級數爲$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots$以此級數爲r次之循環級數，而其級數率爲$1+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots+p_rx^r$。

由定義 $a_{r+1}+p_1a_r+p_2a_{r-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_ra_0=0,$

$a_{r+2}+p_1a_{r+1}+p_2a_r+\cdots\cdots\cdots+p_ra_1=0,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$a_{2r}+p_1a_{2r-1}+p_2a_{2r-2}+\cdots\cdots\cdots+p_ra_{r-1}=0。$

從此r個方程式。始可求得其r個未知數$p_1,p_2,\cdots\cdots\cdots p_r$以決定其級數率。而自2r項以下之諸項。即皆可推得矣。例a_{2r+1}可由方程式$a_{2r+1}+p_1a_{2r}+\cdots\cdots+p_ra_r$推得之。以下倣此。

若在循環級數之中間。知其任何之連續 $2r$ 項。其級數率可依同法決定之。

334. 餘論 由305. 章。而知 $p<r+1$。則

$k^p-(r+1)(k-1)^p+\frac{(r+1)r}{1.2}(k-2)^p-\cdots\cdots$ 至 $(r+2)$ 項 $=0$。其 k 爲任何值恆合於理。

由是觀之。級數 $1^r+2^rx+3^rx^2+\cdots\cdots+(n+1)^rx^n+\cdots\cdots$ 其級數率爲 $(1-x)^{r+1}$ 可知。

又級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$ 其 a_n 爲 n 之 r 次整代數式。則其級數率爲 $(1-x)^{r+1}$ 可知。

335. 公項 如332. 之法則。可求得循環級數若干項之和。然欲求其和不可不先求知其公項。茲從僅有級數最初之若干項。示以求公項之法如次。

由333. 章 r 次之級數率。可從初項至 $2r$ 項求得之。旣求得其級數率。乃從332. 章求其公項。

若級數率。可以一次因子表之者。則其母函數。可以分項分數之級數表之。其分項分數之形。爲 $\frac{A}{1-ax}$ 或 $\frac{A}{(1-ax)^k}$ 由二項式之定理。可將此母函數展開。求得 x 之任何方乘之係數。即可得其公項。

其 x 之值。原爲大小不定之數。故循環級數。爲斂級數或非爲斂級數。其母函數依 x 之遞昇方乘展開之式。必與原級數相等。

試取由332. 章所定之母函數。$\frac{a_0+(a_1+pa_0)y}{1+py+qy^2}$ 設想其 y 爲甚小時。乃依 x 之遞昇方乘展開之。而於此展開式中 y^0 及 y^1 之係數。順次以 a_0 及 a_1 明之。而其連續諸項。皆服從 $a_k+pa_{k-1}+qa_{k-2}=0$ 之規率。故此展開式之任何項。必與已知級數之相應係數同。

則是循環級數。無論其爲斂級數或非斂級數。皆可假定其 x 爲甚小。依 x 之遞昇方程式。記其母函數之展開式。而求得其公項。

〔第一例〕求 $3+4x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$ 之第 n 項。

於此例雖未知其循環級數之次數如何。然可用其最初之已知四項。決定其爲二次之循環級數。但同此已知之四項。而能爲高

於二次之循環級數者甚多。玆則僅取其最低者以爲用。(參觀327.章) 假定其級數率爲$1+px+qx^2$。從其最初之四項而作方程式。得$6+4p+3q=0$及$10+6p+4q=0$,

由是求得$p=-3$, $q=2$。∴ 級數率$=1-3x+2x^2$。

故此母函數爲$\dfrac{3+(4-9)x}{1-3x+2x^2}=\dfrac{3-5x}{1-3x+2x^2}=\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{1}{1-2x}$

$=2(1+x+\cdots\cdots\cdots+x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots)+(1+2x+\cdots\cdots+2^{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots)$。

由是得此級數之第n項爲$(2+2^{n-1})x^{n-1}$。

又此級數n項之和。可由332.章之法求得。然亦可用別法直求之如次。

於$\dfrac{2}{1-x}$之展開式,取其n項,爲

$$2(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})=\frac{2(1-x^n)}{1-x}。$$

於$\dfrac{1}{1-2x}$之展開式,取其n項,爲

$$1+2x+2^2x^2+\cdots\cdots+2^{n-1}x^{n-1}=\frac{1-2^nx^n}{1-2x}。$$

由是得$S_n=\dfrac{2(1-x^n)}{1-x}+\dfrac{1-2^nx^n}{1-2x}$。

此級數$x<\dfrac{1}{2}$。則爲斂級數。

若$x=\dfrac{1}{2}$則$1-2x=0$。而S_n爲不定數。

〔第二例〕求$1+3+7+13+21+31+\cdots\cdots$之第n項及n項之和。

先置級數$1+3x+7x^2+13x^3+21x^4+31x^5+\cdots\cdots\cdots$假定此級數爲循環級數。可用其已知之六項。爲三次之循環級數。乃假定其級數率爲$1+px+qx^2+rx^3$。作次之方程式。

$$13+7p+3q+r=0,$$
$$21+13p+7q+3r=0,$$
$$31+21p+13q+7r=0。$$

從此三個方程式。而得$p=-3$, $q=3$, $r=-1$,

即得級數率爲 $1-3x+3x^2-x^3$。

故此母函數爲 $\frac{1+x^2}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}$

$$=\{1.2+2.3x+\cdots\cdots+n(n+1)x^{n-1}\}-2\{1+2x+\cdots\cdots+nx^{n-1}\}$$
$$+\{1+x+\cdots\cdots+x^{n-1}\}。$$

由是此級數之第n項爲 $\{n(n+1)-2n+1\}x^{n-1}$。

即 n^2-n+1。即 $n(n-1)+1$。

而此級數n項之和。爲

$S_n=1\{2.1+1\}+\{3.2+1\}+\cdots\cdots+\{n(n-1)+1\}$

$$=n+\{1.2+2.3+\cdots\cdots+(n-1)n\}=n+\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)。$$

〔第三例〕求 $2+2+8+20+\cdots\cdots$ 之第n項。

先置級數 $2+2x+8x^2+20x^3+\cdots\cdots$ 假定其爲二次循環級數。其級數率爲 $1+px+qx^2$。

則 $8+2p+2q=0$, $20+8p+2q=0$。

$\therefore\ p=-2,\ q=-2$。

其母函數爲 $\frac{2-2x}{1-2x-2x^2}$(此以下原書所述有誤故訂正之)。

$$\frac{2-2x}{1-2x-2x^2}=\frac{1}{1-(1+\sqrt{3})x}+\frac{1}{1-(1-\sqrt{3})x}$$
$$=\{1+(1+\sqrt{3})x+\cdots\cdots\cdots+(1+\sqrt{3})^{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\}$$
$$+\{1+(1-\sqrt{3})x+\cdots\cdots\cdots+(1-\sqrt{3})^{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\},$$

故第n項爲 $\{(1+\sqrt{3})^{n-1}+(1-\sqrt{3})^{n-1}\}x^{n-1}$。

但 $(1+\sqrt{3})^{n-1}+(1-\sqrt{3})^{n-1}$ 爲有理數。因n任爲何數其方根均可相消而不見也。

〔譯者附述〕若欲求此級數之第n項,爲不含方根之數,則其級數率。必在二次以上。惟欲求二次以上之級數率,至少須知其連續之6項,(見333章)今則僅知四項。故不能求其二次以上之級數率。然可用推差法求之如次。

原級數 2, 2, 8, 20,………………

第一差 0, 6, 12,…………………

6, 6, ……………………

以u_n爲原級數之第n項。

則第一差之第n項$=u_{n+1}-u_n$

而第一差之級數爲等差級數，其初項爲0。公差爲6。故其第n項爲$0+(n-1)6$即$6(n-1)$。

故$u_{n+1}-u_n=6(n-1)$。

由是$u_n-u_{n-1}=6(n-2)$, $u_{n-1}-u_{n-2}=6(n-3)$,………

又$u_1=2$。由加法得

$u_n=6\{1+2+\cdots\cdots+(n-2)\}+2=3n^2-9n+8$。

故求得$2+2x+8x^2+20x^3+\cdots\cdots$之第n項。爲$(3n^2-9n+8)x^{n-1}$。

由334章而知此級數爲n之二次式。故此級數率必爲三次式。

歛級數及發級數

336. 歛級數 於第二十一編中所未經論及者。乃於此處積論之。

337. 無限乘積之歛式 由無限數諸因子而成之積。其諸因子之極限。非近於1。則不能爲歛式。何則，於積增一因子。其值亦增迨因子增至無限時。其值亦從而增至無限。

故須考察$\Pi(1-u_r)=(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\cdots\cdots(1+u_n)+\cdots\cdots$之形。其無限數因子中$u_1, u_2, u_3,\cdots\cdots$之關係若何。

其Π之記號。所以示連類諸文字所有之等次積。

例$\Pi(a+b-c)$爲$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$,

又Πa^2bc爲$a^2bc\times ab^2c\times abc^2$。

今於$\Pi(1+u_r)$其n增至無限時。此積爲歛式或爲發式。可由次之定理決定之。

定理 無限數因子之積。$\Pi(1+u_r)$。其任何因子爲大於1者。則可從無限級數$\sum u_r$爲歛級數或發級數，而決定$\Pi(1+u_r)$爲歛式或發式。

以$e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{\underline{|r}}+\cdots\cdots$。其x爲任何之正數。而$e^x>1+x$。

故 $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\cdots\cdots<e^{u_1}.e^{u_2}.e^{u_3}\cdots\cdots<e^{u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots}$

由是 $\sum u_r$ 若爲歛級數。則 $e^{u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots}$ 爲有限值。從而決定 $\Pi(1+u_r)$ 爲歛式。

又 $(1+u_1)(1+u_2)>1+u_1+u_2$,

$(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)>(1+u_1+u_2)(1+u_3)>1+u_1+u_2+u_3$

以下順次如斯，則 $\Pi(1+u_r)>1+\sum u_r$

由是 $\sum u_r$ 若爲發級數，則 $\Pi(1+u_r)$ 亦爲發式。

〔第一例〕 $\dfrac{a(a+1)(a+2)\cdots\cdots(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)\cdots\cdots(b+n-1)}$ 其 n 增至無限時。a 若大於 b。則其值無限大，a 若小於 b，則其值爲零。

何則 $a>b$。則 $a-b$ 爲正。

故 原式 $=\left(1+\dfrac{a-b}{b}\right)\left(1+\dfrac{a-b}{b+1}\right)\cdots\cdots\left(1+\dfrac{a-b}{b+n-1}\right)+\cdots\cdots\cdots,$

即 原式 $>1+\dfrac{a-b}{b}+\dfrac{a-b}{b+1}+\cdots\cdots+\dfrac{a-b}{b+n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

即 原式 $>1+(a-b)\left\{\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{b+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{b+n-1}+\cdots\cdots\cdots\right\}$。

但由274章而知 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b+1}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{b+n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 爲發級數，故原式 n 增至無限時。a 若大於 b，其值爲無限大。

又 $b>a$，則由前之同理。其原式之反商 $\dfrac{b(b+1)(b+2)\cdots\cdots}{a(a+1)(a+2)\cdots\cdots}$ 爲無限大。

故 $\dfrac{a(a+1)(a+2)\cdots\cdots}{b(b+1)(b+2)\cdots\cdots}=0$。

〔第二例〕 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a(a+x)}{b(b+x)}+\dfrac{a(a+x)(a+2x)}{b(b+x)(b+2x)}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 此爲歛級數抑爲發級數。試決定之。

由325章 $S_n=\dfrac{a}{a+x-b}\left\{\dfrac{a(a+x)(a+2x)\cdots\cdots(a+nx)}{b(b+x)(b+2x)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}x)}-1\right\}$。

今由第一例而知 $\dfrac{(a+x)(a+2x)\cdots\cdots(a+nx)}{b(b+x)(b+2x)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}x)}$，若 $a+x>b$。則其值爲無限大，若 $a+x<b$，則其值爲 0。

由是知$b>a+x$。則原級數爲斂級數。其無限項之和爲

$$\frac{a}{a+x-b}\left\{0-1\right\}=\frac{a}{b-a-x}$$。

又 $b<a+x$。則原級數爲發級數。

又 $b=a+x$。惟因$\frac{a}{b}+\frac{a}{b+x}+\frac{a}{b+2x}+\cdots\cdots$已知其爲發級數，故原級數爲發級數。

338. 二項式之級數 二項級數

$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$其m爲任何數。$x<1$。則此級數爲斂級數。$x>1$。則此級數爲發級數。

若$x=1$。則此級數。即$1+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots$乃設此級數之項數r爲大於$m+1$之正整數，則此級數第r項以下之諸項，必正負相間。何則。以r既大於$m+1$之正整數，則第$(r+1)$項$=\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-r+1)}{\underline{|r}}$，其$m-r+1$必爲負數故也。

且 $$u_{n+1}\Big/u_n=\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{\underline{|n}}\Big/\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+2)}{\underline{|n-1}}$$
$$=\frac{m-n+1}{n}$$。

故$n>m+1$時。若$m+1$爲正，則u_{n+1}/u_n爲小於1，若$m+1$爲負。則u_{n+1}/u_n爲大於1。

故由第二十一編定理五。而知此級數。$m+1$若爲正。其n增至無限時。爲斂級數。

令 $$\pm\frac{1}{u_n}=\frac{1.2\cdots\cdots n}{(-m)(1-m)\cdots\cdots(n-1-m)}$$。

$$\therefore\ \pm\frac{1}{u_n}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1+m}{1-m}\right)\left(1+\frac{1+m}{2-m}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1+m}{n-1-m}\right)$$。

若其$m+1$爲正。而小於r。則其第r項以上諸因子之積，

$\frac{1}{m}\left(1+\frac{1+m}{1-m}\right)\left(1+\frac{1+m}{2-m}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1+m}{r-1-m}\right)$，大於其第r項以下諸因子之積。

$$\left(1+\frac{1+m}{r-m}\right)\left(1+\frac{1+m}{r+1-m}\right)\left(1+\frac{1+m}{r+2-m}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即知 $\frac{1}{m}\left(1+\frac{1+m}{1-m}\right)\left(1+\frac{1+m}{2-m}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1+m}{r-1-m}\right)$

$$>(1+m)\left\{\frac{1}{r-m}+\frac{1}{r+1-m}+\cdots\cdots\cdots\right\}。$$

由是n增至無限時。則$1/u_n$爲無限大，即$1+m$爲正數而u_n爲無限小。

故二項級數，若$m>-1$而$x=1$。則爲斂級數。

又$x=-1$。則此級數，爲

$$1-m+\frac{m(m-1)}{1.2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots\cdots$$

上之級數之和，由287章或325章，而得

$$\frac{(1-m)(2-m)(3-m)\cdots\cdots(n-1-m)}{1.2.3\cdots\cdots(n-1)}。$$

乃由337章第一例，而知n爲無限大時。若m爲正。則其和爲0，若m爲負。則其和爲∞。

故二項級數m爲正。而$x=-1$。則爲斂級數。

339. 可西〔Cauchy〕氏之定理 級數$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$皆爲正項。其各項恆比其前項爲小者。則此級數。恆視他級數$u_1+au_a+a^2u_{a^2}+\cdots\cdots+a^nu_{a^n}+\cdots\cdots$若爲斂級數或發級數。從而決定其爲斂級數或發級數。但a爲任何之正整數。

因原級數之各項，旣比其前項爲小。則有次之關係，

$$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_a<au_1 \text{ 即 } (a-1)u_1+u_1,$$

$$u_{a+1}+u_{a+2}+\cdots\cdots+u_{a^2}<(a^2-a)u_a \text{ 即 } (a-1)au_a,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(u_{a^n+1}+u_{a^n+2}+\cdots\cdots+u_{a^{n+1}}<(a^{n+1}-a^n)u_{a^n} \text{ 即 } (a-1)a^nu_{a^n}$$

由加法得$S<(a-1)\sum+u_1$……………………………………………(1)

其 $(a-1)\sum=(a-1)(u_1+au_a+a^2u_{a^2}+\cdots\cdots+a^nu_{a^n})$

又以$a \not< 2$故$a(u_1+u_2+\cdots\cdots+u_a)>au_a$,

$$a(u_{a+1}+u_{a+2}+\cdots\cdots+u_{a^2})>a(a^2-a)u_{a^2}>a^2u_{a^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a(u_{a^{n-1}+1}+u_{a^{n-1}+2}+\cdots\cdots+u_{a^n})>a(a^n-a^{n-1})u_{a^n}>a^nu_{a^n}$$

由加法得 $aS>\Sigma-u_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

從(1)及(2)可見S爲有限。則Σ亦爲有限。若S爲無限大。則Σ亦爲無限大。

〔例〕級數$\Sigma\frac{1}{n(\mathrm{Log}\,a)^k}$若k大於1。則爲歛級數。若k小於1。則爲發級數。

由Cauchy氏之定理。此級數視他級數$\Sigma\frac{a^n}{a^n(\mathrm{Log}\,a^n)^k}$爲歛級數或發級數。從而決定其爲歛級數發級數。

今 $\Sigma\frac{a^n}{a^n(\mathrm{Log}\,a^n)^k}=\Sigma\frac{1}{n^k}\cdot\frac{1}{(\mathrm{Log}\,a)^k}=\frac{1}{(\mathrm{Log}\,a)^k}\Sigma\frac{1}{n^k}$

故由274.章。原級數$k>1$。則爲歛級數。$k \not> 1$。則爲發級數。

340. 附言 於是編所論歛級數。以次之二定理爲結論。其要旨蓋詳於Boole氏及Bertrand氏之微分書中。

341. 定理 某級數。從其某一項爲始。以及於次之諸項。其各項與其前項之比。較各項爲正之已知他歛級數相應項之比爲小者。則其級數爲歛級數。

將題中所云之某一項。記以u_1則得

$$U=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$$

及已知之他歛級數。其與原級數u_1相應之項。記以v_1則得

$$V=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n$$

若r爲任何値。而$\frac{u_{r+1}}{u_r}<\frac{v_{r+1}}{v_r}$。則

$$V=v_1+v_1\frac{v_2}{v_1}+v_1\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_2}{v_1}+v_1\frac{v_4}{v_3}\cdot\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_2}{v_1}+\cdots\cdots\cdots$$

$$>v_1+v_1\frac{u_2}{u_1}+v_1\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+v_1\frac{u_4}{u_3}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\cdots\cdots\cdots$$

$$>\frac{v_1}{u_1}(u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots\cdots)$$

$$>\frac{v_1}{u_1}U_{\circ}$$

若V爲斂級數。則U不得不爲斂級數矣。

原級數於U之初項以前爲有限若干項之和。惟其有限。故U爲斂級數。而原級數亦必爲斂級數可知。

由同理自其某一項以及次之諸項。若$u_{r+1}:u_r>v_{r+1}:v_r$而$\sum u_r$之諸項符號相同者。則$\sum u_r$爲發級數。而$\sum v_r$亦爲發級數。

342. 定理 某級數其各項皆爲正者。其$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$之極限。若大於1。則爲斂級數。若小於1。則爲發級數。

何則。設$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$之極限爲$\alpha$。而定級數$\sum\frac{1}{n^\beta}\equiv\sum v_n$則

$$n\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=n\left\{\frac{(n+1)^\beta-n^\beta}{(n+1)^\beta}\right\}=\frac{\beta n^\beta+n\text{ 之低次項}}{n^\beta+n\text{ 之低次項}}。$$

由是得$n\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$之極限(n爲無限大)爲$\beta$。

若$\alpha>1$。而β在於α及1之間。則$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$之極限。比$n\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$之極限爲大。卽前式常比後式爲大。然祇能從n爲有限値時考察之。而不能令n爲∞也。故將上二式

$$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>n\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)\text{ 變爲 }\frac{v_{n+1}}{v_n}>\frac{u_{n+1}}{u_n}。$$

如是可由前定理而知$\sum v_n$爲斂級數。則$\sum u_n$亦爲斂級數。惟$\beta>1$。故$\sum v_n$爲斂級數。

由同法$\alpha<1$。而β在α與1之間。$\sum v_n$爲發級數。則$\sum u_n$亦爲發級數。惟$\beta<1$故$\sum v_n$爲發級數。

若$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$之極限爲1。則此級數爲斂級數與否未可檢定。

〔第一例〕$\frac{a}{b}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}x+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}x^2+\cdots\cdots$此級數爲斂級數抑爲發級數。試檢定之。

$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{a+n}{b+n}x$。而n爲無限數，則$\frac{a+n}{b+n}=1$。故此極限爲x。

由是n即爲有限數。其前後項之比，若

$x>1$。則$\frac{v_{n+1}}{v_n}>1$。若$x<1$。則$\frac{v_{n+2}}{v_n}<1$。

乃知此級數$x>1$則爲發級數。$x<1$。則爲斂級數。

若$x=1$。則$\frac{v_{n+1}}{v_n}$之極限爲1。而

$n\left(1-\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=n\left(1-\frac{a+n}{b+n}\right)=n\left(\frac{b-a}{b+n}\right)$ 爲無限大。則$\frac{n}{b+n}=1$。故此極限爲$b-a$。

故若$b-a>1$。則爲斂級數。若$b-a<1$。則爲發級數。

若$b=a+1$。則此級數爲

$\frac{a}{b}+\frac{a}{b+1}+\frac{a}{b+2}+\cdots\cdots$即發級數。(此例即337章第二例之結果。)

例題三十四

1. 求次列各級數n項之和。若爲斂級數，並求其無限項之和。

(1) $\frac{4}{5}+\frac{4.7}{5.8}+\frac{4.7.10}{5.8.11}+\cdots\cdots$

(2) $\frac{2}{4}+\frac{2.5}{4.7}+\frac{2.5.8}{4.7.10}+\cdots\cdots$

(3) $\frac{3}{8}+\frac{3.5}{8.10}+\frac{3.5.7}{8.10.12}+\cdots\cdots$

(4) $\frac{11}{14}+\frac{11.13}{14.16}+\frac{11.13.15}{14.16.18}+\cdots\cdots$

〔解〕 (1) $\frac{4}{5}=\frac{1}{2}\left\{\frac{4.7}{5}-\frac{4}{1}\right\}$, $\frac{4.7}{5.8}=\frac{1}{2}\left\{\frac{4.7.10}{5.8}-\frac{4.7}{5}\right\}$, $\cdots\cdots$

$$\frac{4.7\cdots\cdots(3n+1)}{5.8\cdots\cdots(3n+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{4.7\cdots\cdots(3n+4)}{5.8\cdots\cdots(3n+2)}-\frac{4.7\cdots\cdots(3n+1)}{5.8\cdots\cdots(3n-1)}\right\}。$$

由加法 $S_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{4.7\cdots\cdots(3n+4)}{5.8\cdots\cdots(3n+2)}\right\}=\frac{4.7\cdots\cdots(3n+4)}{2.5\cdots\cdots(3n+2)}-2$,

(2) 同法 $S_n=\frac{2.5\cdots\cdots(3n+2)}{4.7\cdots\cdots(3n+1)}-2$。

(3) 同法 $S_n=1-\frac{5.7\cdots\cdots(2n+3)}{8.10\cdots\cdots(2n+6)}$, $S\infty=1$。

(4) 同法 $S_n=11\left\{1-\frac{13.15\cdots\cdots(2n+11)}{14.16\cdots\cdots(2n+12)}\right\}$, $S\infty=11$。

2. 由推差法。求次列各級數第n項及n項之和,

(1) $2+2+8+20+38+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(2) $7+14+19+22+23+22\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(3) $1+4+11+26+57+120+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(4) $1+0+1+8+29+80+193+\cdots\cdots\cdots\cdots$

(5) $1+5+15+35+70+126+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(6) $1+2+29+130+377+866+1717+\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 (1) 一次差爲0, 6, 12, 18,…… $\therefore\ v_n=0+(n-1)6=6(n-1)$,

$\therefore\ u_n-u_{n-1}=6(n-2),\ u_{n-1}-u_{n-2}=6(n-3)\cdots\cdots\cdots u_3-u_2=6,\ u_2=2$,

$\therefore\ u_n=2+6\{1+2+3+\cdots\cdots(n-2)\}=2+3(n-1)(n-2)$,

$\therefore\ S_n=2n+n(n-1)(n-2)$。

(2) 一次差爲7, 5, 3, 1, −1,…………… $\therefore\ v_n=7-(n-1)2$,

同法 $u_n=7n-(n-1)(n-2)$, $S_n=\frac{7}{2}n(n+1)-\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$,

(3) 一次差爲3, 7, 15, 31, 63,……二次差爲4, 8, 16, 32,……

$\therefore\ u^n=2^{n+1}$。 $\therefore\ v_n-v_{n-1}=2^n,\ v_{n-1}-v_{n-2}=2^{n-1}\cdots\cdots v_2-v_1=2^2,\ v_1=3$,

$\therefore\ v_n=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^n=2^{n+1}-n$。

由是 $u_n-u_{n-1}=2^n-1,\ u_{n-1}-u_{n-2}=2^{n-1}-1\cdots\cdots u_2-u_1=2^2-1$,

$u_1=2-1=1$

$\therefore\ u_n=(2+2^2+\cdots\cdots+2^n)-n=2^{n+1}-2-n$。

$\therefore\ S_n=(2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n+1})-\{3+4+5+\cdots\cdots+(n+2)\}$

$=2^{n+2}-1-\frac{}{2}(n+2)(n+3)$。

(4) 一次差爲−1, 1, 7, 21, 51, 113,……二次差爲2, 6, 14, 30, 62,…

三次差爲4, 8, 16, 32,……

$w_n-w_{n-1}=2^n$, $w_{n-1}-w_{n-2}=2^{n-1}$......... $w_2-w_1=2^2$, $w_1=2$。

$\therefore$ $w_n=2^{n+1}-2$。

$\therefore$ $v_n-v_{n-1}=2^n-1$, $v_{n-1}-v_{n-2}=2^{n-2}-2$,...... $v_2-v_1=2^2-2$, $v_1=1$,

$\therefore$ $v_n=(2^2+2^3+......+2^n)-2(n-1)-1=2^{n+1}-2(n+1)-1$。

由是$u_n-u_{n-1}=2^n-2_{n-1}$, $u_{n-1}-u_{n-2}=2^{n-1}-2(n-1)-1$............

$u_2-u_1=2^2-2.2-1$。 $u_1=1=2-2.0-1$。

$\therefore$ $u_n=(2+2^2+...+2^n)-2(2+3+4+...+n)-n=2^{n+1}-n(n+1)-n$,

$$\therefore\quad S_n=(2^2+2^3+......+2^{n+1})-\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=2^{n+2}-4-\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1),$$

(5) 一次差爲4, 10, 20, 35, 56,......二次差爲6, 10, 15, 21,......
三次差爲4, 5, 6,............

$\therefore$ $w_n-w_{n-1}=n+2$, $w_{n-1}-w_{n-2}=n+1$,..... $w_2-w_1=4$, $w_1=1+2+3$。

$\therefore$ $v_n-v_{n-1}=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, $v_{n-1}-v_{n-2}=\frac{1}{2}n(n+1)$, $v_2-v_1=\frac{1}{2}.3.4$。

$v_1=4=\frac{1}{2}(1.2+2.3)$,

$$\therefore\quad v_n=\frac{1}{2}\{1.2+2.3+......+(n+1)(n+2)\}=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)。$$

$\therefore$ $u_n-u_{n-1}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$, $u_{n-1}-u_{n-2}=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$,......

$u_2-u_1=\frac{1}{6}2.3.4$, $u_1=\frac{1}{6}1.2.3$,

$$\therefore\quad u_n=\frac{1}{6}\{1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)\}=\frac{1}{24}n(n+1)(n+1)(n+3),$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)。$$

(6) 一次差爲1, 27, 101, 247, 489, 851,...........
二次差爲26, 74, 146, 242, 332,..............
三次差爲48, 72, 96, 120,......以下同法。

$\therefore$ $u_n=(n-2)(n-1)n(n+1)+(n-1)n-n+2$,

$$S_n=\frac{1}{5}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)+2n。$$

3. 假定次列各級數爲循環級數,求其母函數。

(1) $2+4x+14x^2+52x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

(2) $1+3x+11x^2+43x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

(3) $1+6x+49x^2+288x^3+\cdots\cdots\cdots$

(4) $1+x+2x^2+7x^3+14x^4+35x^5+\cdots\cdots\cdots\cdots$

(5) $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+5^2x^4+6^2x^5+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔解〕(1) 令級數率爲$1+px+qx^2$。則$14+4p+2q=0$,

$52+14p+4q=0$。 $\therefore\ p=-4, q=1$。

由是母函數$=\dfrac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}=\dfrac{2+(4-4.2)x}{1-4x+x^2}=\dfrac{2-4x}{1-4x+x^2}$

(2) 同法 $\dfrac{1-2x}{1-5x+4x^2}$　　(3) 同法 $\dfrac{1-6x}{1-12x+32x^2}$

(4) 令級數率爲$1+px+qx^2+rx^3$。則$7+2p+q+r=0$,

$14+7p+2q+r+0$, $35+14p+7q+2r=0$。

$\therefore\ p=-\dfrac{14}{15}$,　$q=-\dfrac{7}{3}$,　$r=-\dfrac{14}{5}$。

原級數爲$S=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$以$1+px+qx^2+rx^3$乘之。則

$$S=\frac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+pa_0)x^2}{1+px+qx^2+rx^3},\quad〔232章〕$$

$$=\frac{15+x-19x^2}{15-14x-35x^2-42x^3}\ \text{即母函數。}$$

(5) 同法母函數$=\dfrac{1+x}{(1-x)^8}$

4. 求次之循環級數第n項及n項之和。

(1) $2+6+14+30+\cdots$　(2) $2-5+29-89+\cdots$　(3) $1+2+7+20+\cdots$

〔解〕(1) 令級數$2+6x+14x^2+30x^3+\cdots\cdots$之級數率爲$1+px+qx^2$

而得$1-3x+2x^2$, $\therefore$ 此級數$=\dfrac{2+(6-3.2)x}{1-3x+2x^2}=\dfrac{4}{1-2x}-\dfrac{2}{1-x}$,

由此展開式之第n項$=2^{n+1}-2$, $\therefore\ S_n=2^{n+2}-2n-4$

(2) $u_n=\frac{1}{7}\{3^n+11(1-4)^{n-1}\}$, $S_n=\frac{1}{10}+\frac{3^{n+1}}{14}-\frac{11}{35}(-4)^n$。

(3) $u_n=\frac{1}{4}3n-(-1)^n\}$, $S_n=\frac{1}{8}\{3^{n+1}-3\}$, 但n爲偶數。

又等於$\frac{1}{8}\{3^{n+1}-3\}$而n爲奇數。

5. 級數1, 3, 4, 7,………其各項等於其前二項之和, 求此級數之第n項。

〔解〕 $S=1+3x+4x^2+7x^3+\cdots\cdots$ 由題意$u_n=u_{n-2}+u_{n-1}$,

∴ $u_n-u_{n-1}-u_{n-2}=0$。 即$1-x-x^2$爲級數率。

由是母函數爲$\frac{1+2x}{1-x-x^2}=\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{2+\alpha}{1-\alpha x}+\frac{2+\beta}{1-\beta x}\right)$,

但$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

∴ 第n項$=\frac{1}{\alpha-\beta}\{(2+\alpha)\alpha^{n-1}-(2+\beta)\beta^{n-1}\}=\frac{1}{2n}\{(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n\}$。

6. 於$\frac{a+bx+cx^2+dx^3}{(1-x)^4}$之展開式中$x^n$之係數爲$(n+1)^3$則a, b, c, d, 之值如何。 答 $a=1, b=4, c=1, d=0$。

〔解〕 $\frac{a+bx+cx^2+dx^3}{(1-x)^4}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$

但 $a_n=(n+1)^3$ ∴ $a_0=1^3$, $a_1=2^3$,………

由是$S=1^3+2^3x+3^3x^2+\cdots\cdots$此級數率爲$(1-x)^4$。故由332章求得母函數爲

$$\frac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+pa_0)x^2+(a_3+pa_2+pa_1+pa_0)x^3}{1-4x+6x^2+4x^3-x^4},$$

∴ $p=-4$, $q=6$, $r=-4$, 以此值及$a_0, a_1\ldots$之值代入上之函數爲$\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}$,

∴ $a=1$, $b=4$, $c=1$, $d=0$。

7. 證明$1^r+2^rx+3^rx^2+4^rx^3+\cdots\cdots$爲$\frac{a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_rx^r}{(1-x)^{r+1}}$之展開式,

又證$a_r=0$及$a_{r-s}=a_{s-1}$

〔證〕最初之證明同332章。而後之所證。以

$a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_rx^r=(1-x)^{r+1}(1^r+2^rx+3^rx^2+\cdots\cdot)$ 比較其 x^r 之係數。

$$a_r=(r+1)r(r+1)r^r+\frac{(r+1)^r}{1\cdot2}(r-1)^r-\cdots\cdots+(-1)^r(r+1)1^r=0。$$

由255章例題4。又比較 x^{r-s} 之係數。

$$a^{r-s}=(r-s+1)^r-(r+1)(r-s)+\cdots\cdots+(-1)r-s\frac{\lfloor r+1}{\lfloor r-s\ \lfloor r+1}1^r$$

又比較 x^{s-1} 之係數。

$$a_{s-1}=s^r-(r+1)(s-1)^r+\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{s-1}\frac{\lfloor r+1}{\lfloor r-s+2\ \lfloor s-1}1^r$$

由是 $a_{r-s}-a_{s-1}=(r-s+1)^r-(r+1)(r-s)^r+\cdots\cdots+(-1)^{r-s}\frac{\lfloor r+1}{\lfloor r-s\lfloor s+1}1^r$

$$-\left\{s^r-(r+1)(s-1)^r+\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{s-1}\frac{\lfloor r+1}{\lfloor r-s+2\ \lfloor s-1}1^r\right\}$$

$$=(r-s+1)^r(r+1)(r-s)^r+\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{r-s}\frac{\lfloor r+1}{\lfloor r-s\ \lfloor s+1}1^r$$

$$+(-1)^{r-s+1}\frac{\lfloor r+1}{\lfloor r-s+1\lfloor s}0^r+(-1)^{r-s+2}\frac{\lfloor r+1}{\lfloor r-s+2\ \lfloor s-1}(-1)^r=0。$$

由305章。 $\therefore\ a_{r-s}=a_{s-1}$

8. $2+5x+9x^2+15x^3+25x^4+43x^5+\cdots\cdots\cdots$ 爲斂級數。令其級數率爲 $1+px+qx^2+rx^3$。求其無限項之和。又此級數之第 $(n+1)$ 項爲 $(2^n+2n+1)x^n$。試證之。

〔解〕 $15+9p+5q+2r=0,\quad 25+15p+9q+5r=0,$

$43+25p+15q+9r=0,\qquad \therefore\ p=-4,\quad q=5,\quad r=-2。$

由是得母函數 $=\dfrac{2-3x-x^2}{1-4x+5x^2-2x^3}=S\infty$。

又將母函數分項得 $\dfrac{2}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-2x}$

$=2(1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots)-(1+x+x^2+\cdots\cdots\cdots)+(1+2x+2^2x^2+\cdots\cdots\cdots)$。

$\therefore$ 第 $(n+1)$ 項 $=\{2(n+1)-1+2^n\}x^n=(2^n+2n+1)x^n$。

9. 求級數 $1+4x+11x^2+26x^3+57x^4+120x^5+\cdots\cdots$ 無限項之和。其 x 小於 $\frac{1}{2}$。

〔解〕 $26+11p+4q+r=0,\quad 57+26p+11q+4r=0,$

$120+57p+26q+11r=0,\quad \therefore\ p=-4,\quad q=5,\quad r=-2。$

由是得母函數 $=\dfrac{1}{1-4x+5x^2-2x^3}=\dfrac{1}{(1-x^2)(1-2x)}=S\infty$。

10. 求 $1+\frac{x}{a}+\frac{x(x+a)}{ab}+\frac{x(x+a)(x+b)}{abc}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ n 項之和。

（解）$S_n=\frac{a+x}{a}\left\{1+\frac{x}{b}+\frac{x(x+b)}{bc}+\cdots\cdots\right\}=\frac{a+x}{a}\cdot\frac{b+x}{b}\left\{1+\frac{x}{c}+\cdots\cdots\cdots\right\}$

$=\frac{a+x}{a}\cdot\frac{b+x}{b}\cdot\frac{c+x}{c}\cdots\cdots\frac{l+x}{l}$。

11. 證 $\frac{1}{x+a}+\frac{a}{(x+a)(x+b)}+\frac{ab}{(x+a)(x+b)(x+c)}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\frac{abc\cdots\cdots k}{(x+a)(x+b)\cdots\cdots(x+k)(x+l)}=\frac{1}{x}-\frac{abc\cdots\cdots kl}{x(x+a)(x+b)\cdots\cdots(x+l)}$。

（證）左邊 $=\frac{1}{x}-\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}-\frac{a}{(x+a)(x+b)}-\frac{ab}{(x+a)(x+b)(x+c)}-\cdots\right\}$

$=\frac{1}{x}-\left\{\frac{a}{x(x+a)}-\frac{a}{(x+a)(x+b)}-\frac{ab}{(x+a)(x+b)(x+c)}-\cdots\right\}$

$=\frac{1}{x}-\left\{\frac{ab}{x(x+a)(x+b)}-\frac{ab}{(x+a)(x+b)(x+c)}-\cdots\cdots\right\}=\cdots\cdots$

$=\frac{1}{x}-\frac{abc\cdots\cdots kl}{x(x+a)(x+b)\cdots\cdots(x+l)}$。

12. 證 $\frac{1}{p+n}+\frac{1+n}{(p+n)(p+2n)}+\frac{(1+n)(1+2n)}{(p+n)(p+2n)(p+3n)}+\cdots\cdots\cdots$ 至無限

$=\frac{1}{n-1}$。　但 $p>1$ 及 $p+n>0$

（證）$\frac{1}{p+n}=\frac{1}{p-1}\left\{1-\frac{1+n}{p+n}\right\}$，

$\frac{1+n}{(p+n)(p+2n)}=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{1+n}{p+n}-\frac{(1+n)(1+2n)}{(p+n)(p+2n)}\right\}$，

$\frac{(1+n)(1+2n)}{(p+n)(p+2n)(p+3n)}=\frac{1}{p-1}\left\{\frac{(1+n)(1+2n)}{(p+n)(p+2n)}-\frac{(1+n)(1+2n)(1+3n)}{(p+n)(p+2n)(p+3n)}\right\}$，…

由加法。$S_r=\frac{1}{p-1}\left\{1-\frac{(1+n)(1+2n)\cdots\cdots(1+rn)}{(p+n)(p+2n)\cdots\cdots(p+rn)}\right\}$。

由題意。$n+p$ 爲正。則 $p>1$。故 r 爲無限大。而 $S\infty=\frac{1}{p-1}$。

13. 設 $m>1$ 則

$1+\frac{1}{m+1}+\frac{1\cdot2}{(m+1)(m+2)}+\frac{1\cdot2\cdot3}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\cdots$ 至無限 $=\frac{m}{m-1}$。

（證）$\frac{1}{m+1}=\frac{1}{m-1}\left\{\frac{1}{1}-\frac{1\cdot2}{m+1}\right\}$

$\frac{1\cdot2}{(m+1)(m+2)}=\frac{1}{m-1}\left\{\frac{1\cdot2}{m+1}-\frac{1\cdot2\cdot3}{(m+1)(m+2)}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\therefore \quad S_n=1+\frac{1}{m-1}\left\{\frac{1}{1}-\frac{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots n}{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+n-1)}\right\}$。

令$m>1$而n為無限大。則$S\infty=1+\frac{1}{m-1}$

14. 設$m+n$為正或n為正整數。則

$$\frac{1}{m+1}-\frac{n-1}{(m+1)(m+2)}+\frac{(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}-\cdots\cdots=\frac{1}{m+n}。$$

〔證〕 分各項為兩分數之差如前例。則

$S_r=\frac{1}{m+n}\left\{1+(-1)^{r-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r)}{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+r)}\right\}$ $m+n$為正而r增加至$r=n$。則於$\{\ \}$中分子之一因子$n-r$為0。

由是$S\infty=\frac{1}{m+n}$

15. n為正整數。則$\frac{n}{n+1}-\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots$

$$\pm\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots2\cdot1}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots2n}=\frac{1}{2}$$

〔證〕 由前例$\frac{1}{n}S_r=\frac{1}{n+n}\left\{1+(-1)^{r-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r)}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r)}\right\}$

$n=\infty$ 則$S\infty=\frac{1}{2}$

16. m為正整數。則$1-m\frac{2n+1}{2n+2}+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)}+\cdots\cdots$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2m-1)}{(2n+2)(2n+4)\cdots\cdots(2n+2m)}。$$

〔證〕 $m=1$。則$1-\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{1}{2n+2}$。

若$m=2$。則$1-2\frac{2n+1}{2n+2}+\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)}=\frac{1\cdot3}{(2n+2)(2n+4)}$。

由是可知$m=1$或2時。皆與題意相合。又對於n之任意值及m之特別值。如次亦能合理。

假定$1-{}_mC_1\frac{2n+1}{2n+2}+\cdots\cdots+(-1)^r{}_mC_r\frac{(2n+1)\cdots\cdots(2n+2r-1)}{(2n+2)\cdots\cdots\cdots(2n+2r)}+\cdots\cdots$

$+(-1)^m{}_mC_m\frac{(2n+1)\cdots\cdots(2n+2m-1)}{(2n+2)\cdots\cdots(2n+2m)}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2m-1)}{(2n+2)(2n+4)\cdots\cdots(2n+2m)}$。

設 n變爲n+1。則

$$1-{}_mC_1\frac{2n+3}{2n+4}+\cdots\cdots+(-1)^r{}_mC_r\frac{(2n+3)\cdots\cdots(2n+2r+1)}{(2n+4)\cdots\cdots(2n+2r+2)}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^m{}_mC_m\frac{(2n+3)\cdots\cdots(2n+2m+1)}{(2n+4)\cdots\cdots(2n+2m+2)}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2m-1)}{(2n+4)(2n+6)\cdots(2n+2m+2)}$$

第二級數以$\frac{2n+1}{2n+2}$乘而減第一級數。又因${}_mC_r+{}_mC_{r-1}={}_{m+1}C_r$。故得次式,

$$1-{}_{m+1}C_1\frac{2n+1}{2n+2}+\cdots\cdots+(-1)^r{}_{m+1}C_r\frac{(2n+1)\cdots\cdots(2n+2r-1)}{(2n+2)\cdots\cdots\cdots(2n+2r)}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{m+1}{}_{m+1}C_{m+1}\frac{(2n+1)\cdots\cdots(2n+2m+1)}{(2n+2)\cdots\cdots(2n+2m+2)}$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2m-1)}{(2n+2)\cdots\cdots(2n+2m)}-\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2m-1)}{(2n+4)\cdots\cdots(2n+2m+2)}$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2m-1)(2m+1)}{(2n+2)(2n+4)\cdots\cdots(2n+2m+2)}$$

此定理對於n之任何值及m之特別值爲合理。卽對於m爲任何大之值。亦能合理。以m=1, m=2爲合理,故m爲任何之正整數亦爲合理。

17. m, n及m−n+1爲正整數,則

$$1+n\frac{m}{m-n+1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{m(m-1)}{(m-n+1)(m-n+2)}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)}{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}+\cdots\cdots\text{至 }n+1\text{ 項}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+n)}{(m-n+1)(m-n+2)\cdots\cdots(m-n+m)}。$$

〔證〕 由**Vandermonde**氏之定理(**249**章)。

$$(a+b)_n=a_n-na_{n-1}b_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a_{n-2}b_2+\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}a_{n-r}b_r+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\ \frac{(a+b)_n}{a_n}=1+n\frac{a_{n-1}}{a_n}b_1+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_n}b_2+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+n\frac{b}{a-n+1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{b(b-1)}{(a-n+1)(a-n+2)}+\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}\cdot\frac{b(b-1)\cdots\cdots(b-r+1)}{(a-n+1)(a-n+2)\cdots\cdots(a-n+r)}+\cdots\cdots\cdots$$

今 $b=a=m$，則

$$\frac{(2m)_n}{m_n}=1+n\frac{m}{m-n+1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{m(m-1)}{(m-n+1)(m-n+2)}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}\cdot\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-r+1)}{(m-n+1)(m-n+2)\cdots\cdots(m-n+r)}$$

次求 $(2m)_n/m_n$。

$$\frac{(2m)_n}{m_n}=\frac{2m(2m-1)(2m-2)\cdots\cdot(2m-n+1)}{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)}\times\frac{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m-n+m)}{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m-n+m)}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(2m-n)(2m-n+1)\cdots\cdots(2m-2)(2m-1)2m}{(m-n+1)\cdots\cdots(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m-n+m)}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+n)}{(m-n+1)(m-n+2)\cdots\cdots(m-n+m)}$$ 即合題意。

18. $m+1>0$。則

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}m+\frac{1}{4}\cdot\frac{m(m-1)}{1\cdot2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots=\frac{1}{(m+1)(m+2)},$$

〔證〕 $$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)-(3-1)\frac{m}{\lfloor 3}+(4-1)\frac{m(m-1)}{\lfloor 4}-(5-1)\frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 5}+\cdots$$

$$=1-\frac{m}{\lfloor 2}+\frac{m(m-1)}{\lfloor 3}-\frac{m(m-1)(m-2)}{\lfloor 4}+\cdots\cdots-\left\{\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{m}{\lfloor 3}+\frac{m(m-1)}{\lfloor 4}-\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}(1-1)^{m+1}$$

$$+\left\{\frac{1}{(m+1)(m+2)}-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{(m+1)(m+2)}(1-1)^{m+2}\right\}。$$

因 $m+1>0$。故 $S=\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$。

19. 從最初 n 偶數中。取 r 個爲積之和爲 P_r。從最初 n 奇數中。取 r 個爲積之和爲 Q_r。證明

$$1+P_1+P_2+\cdots\cdots\cdots+P_n=1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n+1)$$

$$1+Q_1+Q_2+\cdots\cdots\cdots\cdot+Q_n=2\cdot4\cdot6\cdots\cdots\cdots2n$$

〔證〕 $$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots\cdots\cdots(1+a_n)$$

$$=1+\sum a_1+\sum a_1a_2+\sum a_1a_2a_3+\cdots\cdots\cdots+a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots a_n$$

今 $a_1=2,\quad a_2=4,\quad a_3=6,\ \cdots\cdots\cdots\ a_n=2n$

$$1+P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n=(1+2)(1+4)(1+6)\cdots(1+2n)=3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)。$$

又 $a_1=1,\quad a_2=3,\quad a_3=5,\ldots\ldots\ldots a_n=2_{n-1}$

$$1+Q_1+Q_2+Q_3+\cdots\cdots\cdots+Q_n=(1+1)(1+3)(1+5)\cdots\cdots(1+2n-1)$$
$$=2\cdot4\cdot6\ldots\ldots2n。$$

20. $\{a+(a+1)+(a+2)+\cdots\cdots+(a+n)\}\{a^2+(a+1)+(a+2)+\cdots\cdots+(a+n)\}=a^3+(a+1)^3+\cdots\cdots+(a+n)^3$。

〔證〕 左邊 $=\left\{(n+1)a+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}\left\{a^2+na+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

$$=(n+1)a^3+\frac{3}{2}n(n+1)a^2+\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)a+\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$=(n+1)a^3+3a^2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}+3a\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}+\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$=(n+1)a^3+3a^2(1+2+\cdots+n)+3a(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1^3+2^3+\cdots+n^3)$$

$$=a^3+(a^3+3a^2+3a+1)+(a^3+3a^2\cdot2+3a\cdot2^2+2^3)+\cdots\cdots$$

$$+(a^3+3a^2n+3an^2+n^3)=a^3+(a+1)^3+(a+2)^3+\cdots\cdots+(a+n)^3。$$

21. 證 $1-\frac{(1-a^n)}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{(1-a)(1-a^2)}-\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}+\cdots\cdots$ 若 n 爲奇數,則爲0。若爲偶數。則爲 $(1-a)(1-a^3)\cdots\cdots(1-a^{n-1})$ (Gauss)。

〔證〕 $S_n=1-\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{(1-a)(1-a^2)}-\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}+\cdots\cdots$

又 $S_{n+2}=1-\frac{1-a^{n+2}}{1-a}+\frac{(1-a^{n+2})(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-a^2)}+\frac{(1-a^{n+2})(1-a^{n+1})(1-a^n)}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}+\cdots$

原級數以 $1-a^{n+1}$ 乘之,得

$$(1-a^{n+1})S_n=(1-a^{n+1})-\frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)}{1-a}+\frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)(1-a^{n-1})}{(1-a)(1-a^2)}$$
$$-\frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}+\cdots\cdots$$

$$=(1-a^{n+1})-\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\left(1-a^n\frac{1-a^2}{1-a^2}\right)+\frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)}{(1-a)(1-a^2)}\left(1-a^{n-1}\frac{1-a^3}{1-a^3}\right)$$
$$-\frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)(1-a^{n-1})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}\left(1-a^{n-2}\frac{1-a^4}{1-a^4}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{a^{n+1}(1-a)+(1-a^{n+1})}{1-a}+\frac{(1-a^{n+1})\{a^n(1-a^2)+(1-a^n)\}}{(1-a)(1-a^2)}$$
$$-\frac{(1-a^{n+1})(1-a^n)\{a^{n-1}(1-a^3)+(1-a^{n-1})\}}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{1-a^{n+2}}{1-a}+\frac{(1-a^{n+2})(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-a^2)}-\frac{(1-a^{n+2})(1-a^{n+1})(1-a^n)}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)}+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad (1-a^{n+1})S_n=S_{n+2}$$

$$(1-a^{n-1})S_{n-2}=S_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad S_{n+2}=(1-a^{n+1})S_n=(1-a^{n+1})(1-a^{n-1})S_{n-2}=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=(1-a^{n+1})(1-a^{n-1})(1-a^{n-3})\cdots\cdots\cdots\cdots$$

卽得 $S_n=(1-a^{n-1})(1-a^{n-3})(1-a^{n-5})$

n 爲奇數，則上之諸因子中有一因子爲 $1-a^0=1-1=0$。$\therefore S_n=0$。

又 n 爲偶數，則 $S_n=(1-a^{n-1})(1-a^{n-3})\cdots\cdots(1-a)$。

22. 求 $\frac{n}{1\cdot2\cdot3}+\frac{n-1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{n-2}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 之和。

〔解〕 $S_n=\frac{(n+1)-1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{(n+1)-2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{(n+1)-3}{3\cdot4\cdot5}+\cdots\cdots+\frac{(n+1)-n}{n(n+1)(n+2)}$

$$=(n+1)\left\{\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right\}-\left\{\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=(n+1)\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}-\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right\}=\frac{n(n+1)}{4(n+2)}。$$

23. 求 $\frac{2x^2}{1\cdot3}-\frac{3x^3}{2\cdot4}+\frac{4x^4}{3\cdot5}-\cdots\cdots\cdots$ 無限項之和。

〔解〕 $S=\frac{1}{2}\left\{\frac{(1+3)x^2}{1\cdot3}-\frac{(2+4)x^3}{2\cdot4}+\frac{(3+5)x^4}{3\cdot5}-\cdots\cdots\cdots\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left[x\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\right\}+\frac{1}{x}\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right\}-1+\frac{x}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\mathrm{Log}(1+x)+\frac{1}{x}\mathrm{Log}(1+x)-1+\frac{x}{2}\right]$$ 由 309 章

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{Log}(1+x)+\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}。$$

24. $\frac{x}{1\cdot2}+\frac{x^2}{2\cdot3}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\cdots\cdots$ 爲歛級數。求其和。

〔解〕 $S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)x+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n+\cdots\cdots\cdots$

$$=\left\{x+\frac{x^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots\cdots\right\}-\frac{1}{x}\left\{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots\cdots\right\}+1$$

$$=-\mathrm{Log}(1-x)+\frac{1}{x}\mathrm{Log}(1-x)+1=1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{Log}(1-x)。$$

25. 求 $1\cdot2\cdot3+3\cdot4\cdot5x+5\cdot6\cdot7x^2+7\cdot8\cdot9x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+$無限項之和。但 x 小於1。

〔解〕 由334章其級數率爲 $(1-x)^4$。

卽得 $p=-4,\quad q=6,\quad r=-4,\quad a_0=1\cdot2\cdot3=6,\quad a_1=3\cdot4\cdot5=60,$

$a_2=5\cdot6\cdot7=210,\quad a_3=7\cdot8\cdot9=504$。

$$\therefore\quad S=\frac{a_0+(a_1+pa_0)x+(a_2+pa_1+qa_0)x^2+(a_3+pa_2+qa_1+ra_0)x^3}{(1-x)^4}$$

$$=\frac{6+(60-4\cdot6)x+(210-4\cdot60+6\cdot6)x^2+(504-4\cdot210+6\cdot60-4\cdot6)x}{(1-x)^4}$$

$$=\frac{6+36x+6x^2}{(1-x)^4}。$$

26. n 爲正整數。則 $1-3n+\frac{3n(3n-3)}{1\cdot2}-\frac{3n(3n-4)(3n-5)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots\cdots$ $=2(-1)^n$。試證之。

〔證〕 $S=(1-3n+1-1)+\frac{(3n-2+2)(3n-3)}{1\cdot2}-\frac{(3n-3+3)(3n-4)(3n-5)}{1\cdot2\cdot3}$ $+\cdots\cdots=1-(3n-1)+\frac{(3n-2)(3n-3)}{1\cdot2}+\frac{(3n-3)(3n-4)(3n-5)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ $-\left\{1-(3n-3)+\frac{(3n-4)(3n-5)}{1\cdot2}-\cdots\cdots\cdots\right\}$。

又 $(1+x)(1+x^3)^{-1}=(1-x+x^2)^{-1}=1+x(1-x)+x^2(1-x)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$ $+x^r(1-x)^r+\cdots\cdots$ 卽 $(1+x)(1-x^3+x^6-\cdots\cdots)=1+x+x^2(1-1)+x^3\left(1-\frac{2}{1}\right)$ $+x^r\left\{1-(r-1)+\frac{(r-2)(r-3)}{1\cdot2}-\cdots\cdots\cdots\right\}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 於此兩邊比較 x^{3n} 及 x^{3n-2} 之係數。

$(-1)^n=1-(3n-1)+\frac{(3n-2)(3n-3)}{1\cdot2}-\cdots\cdots$ 及

$-(-1)^n=1-(3n-3)+\frac{(3n-4)(3n-5)}{1\cdot2}-\cdots\cdots\cdots$ 由是

$S=(-1)^n-\{-(-1)^n\}=2(-1)^n$

27. a_1, a_2, a_3,………為正整數。$a_1+a_2+a_3+$………為發級數.則

$$\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}+\frac{a_3}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}+\cdots\cdots$$ 為斂級數等於1。

〔證〕 $$S_n=\left\{1-\frac{1}{a_1+1}\right\}+\left\{\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)}\right\}+\cdots\cdots$$

$$+\left\{\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_{n-1}+1)}-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_n+1)}\right\}$$

$$=1-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_n+1)}。$$

惟以 $(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_n+1)$ 為發級數.因比 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 為大也。故至無限項為無限大。 $\therefore\ S\infty=1$。

28. $\frac{1^m}{2^{m+x}}+\frac{2^m}{3^{m+x}}+\frac{3^m}{4^{m+x}}+\cdots\cdots+\frac{n^m}{(n+1)^{m+x}}+\cdots\cdots$ 若 $x>1$。則為斂級數。若 $x\not>1$。則為發級數。

〔證〕第n項 $=\frac{n^m}{(n+1)^{m+x}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^m(n+1)^x}$。

但 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$。其 $n=\infty$ 則為 1^m。其值有限,故原級數視其第n項 $\frac{1}{(n+1)^x}$ 級數之斂級數或發級數.從而決定原級數為斂級數或發級數。而於第n項 $\frac{1}{(n+1)^x}$ 之級數。由272章而知 $x>1$。即為斂級數。而 $x\not>1$。則為發級數。

29. $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ 為發級數。則

$$\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_1+u_2}+\cdots\cdots+\frac{u_n}{u_1+u_2+\cdots\cdots+u_{n-1}}+\cdots\cdots$$ 亦為發級數。

〔證〕設第二級數為 $v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$ 則

$$1+v_1=\frac{u_1+u_2}{u_1},\quad 1+v_2=\frac{u_1+u_2+u_3}{u_1+u_2},\ \cdots\cdots\ 1+v_n=\frac{u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n}{u_1+u_2+\cdots\cdots+u_{n-1}}。$$

由是 $(1+v_1)(1+v_2)\cdots\cdots(1+v_n)=\frac{u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n}{u_1}$

又由337章$(1+v_1)(1+v_2)\cdots\cdots(1+v_n)<e^{v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n}$

故 $(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\cdots\cdots$若爲發級數。則$v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots$亦爲發級數。卽如題所言。

30. 問x之値如何。則其無限積$(1+a)(1+ax)(1+ax^2)(1+ax^3)\cdots\cdots$爲有限值。

〔解〕 由337章。$a+ax+ax^2+ax^3+\cdots\cdots$若爲斂級數。則

$(1+a)(1+ax)(1+ax^2)\cdots\cdots$亦爲斂級數。但須$x<1$。則

$a+ax+ax^2+\cdots\cdots$爲斂級數。

由是所求x之値。必小於1。

31. v_n常爲有限値而大於1。n雖增至無限時。其値要近於1.則兩無限積$v_1v_2v_3v_4\cdots\cdots\cdots\cdots$及$v_1{}^1v_2{}^2v_4{}^4v_8{}^8\cdots\cdots\cdots\cdots$或俱爲有限。或俱爲無限。

〔證〕 由題意。$v_1>v_2>v_3>v_4\cdots\cdots\cdots$故

$$v_1v_2v_3v_4\cdots\cdots<v_1{}^1v_2{}^2v_4{}^4\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{1}$$

及

$$(v_1v_2v_3v_4\cdots)^2>v_1(v_1{}^1v_2{}^2v_4{}^4\cdots\cdots) \tag{2}$$

由(1) $v_1{}^1v_2{}^2v_4{}^4\cdots\cdots\cdots$爲有限.則$v_1v_2v_3v_4\cdots\cdots\cdots$爲有限。

由(2) $v_1v_2v_3v_4\cdots\cdots\cdots$爲有限。則$v_1{}^1v_2{}^2v_4{}^4\cdots\cdots\cdots$爲有限。

又由(1) $v_1v_2v_3v_4\cdots\cdots\cdots$爲無限。則$v_1{}^1v_2{}^2v_4{}^4\cdots\cdots\cdots$爲無限。

由(2) $v_1{}^1v_2{}^2v_4{}^4\cdots\cdots\cdots$爲無限。則$v_1v_2v_3v_4\cdots\cdots\cdots$爲無限。

32. 試驗次之級數爲斂級數與否。

(1) $\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2^2}{3^3}+\dfrac{3^3}{4^4}+\cdots\cdots+\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}+\cdots\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\sqrt{2^3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3^4}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}}+\cdots\cdots\cdots$

(3) $\dfrac{2}{3\cdot4}+\dfrac{2\cdot4}{3\cdot5\cdot6}+\dfrac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7\cdot8}+\cdots\cdots+\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)(2n+2)}+\cdots\cdots\cdots$

(4) $\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}+\dfrac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}+\cdots\cdots+\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(3n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n(2n+1)}+\cdots\cdots\cdots$

(5) $\dfrac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}+\dfrac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\cdots\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\cdots\cdots\cdots$

〔解〕 (1) $\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{1}{n+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$。將n任何增大而$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$要不能大於e。由是$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}>\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{e}$。 即 $e\sum\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}>\sum\frac{1}{n+1}$。

但 $\sum\frac{1}{n+1}$ 爲發級數。故原級數亦爲發級數。

(2) $e^n=1+n+\frac{n^2}{\underline{|2}}+\cdots\cdots\cdots$ $\therefore$ $e^n>n$, 即 $e>n^{\frac{1}{n}}$。

由是 $\sum\frac{1}{\sqrt[n]{n^{n+1}}}>\frac{1}{e}\sum\frac{1}{n}$。但 $\sum\frac{1}{n}$ 爲發級數。故原級數爲發級數。

(3) $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2n+2)}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+3)(2n+4)}\div\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdots(2n+1)(2n+2)}$$

$$=\frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+4)}。$$

$$\therefore\quad 1-\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{(2n+2)^2}{(2n+3)(2n+4)}=\frac{6n+8}{(2n+3)(2n+4)}。$$

由是 $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=n\frac{6n+8}{(2n+3)(2n+4)}=\frac{6+\frac{8}{n}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(2+\frac{4}{n}\right)}$。

$$n=\infty\quad=\frac{6}{2\cdot2}=\frac{3}{2}。$$

故由337章。而知爲斂級數。

(4) $U_n=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot8\cdots\cdots2n}$ 而 $u_n<\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)(2n+1)}$。

$\therefore$ $u_n>\frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}}>\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 故原級數爲斂級數

(5) $n\left(1+\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=n\left\{1-\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\right\}=\frac{n(1+\gamma-\alpha-\beta)+\gamma-\alpha\beta}{n^2+n(\gamma+1)+\gamma}$

$n=\infty$。則 $=1+\gamma-\alpha-\beta$。

故此級數$1+\gamma-\alpha-\beta>1$，即$\gamma>\alpha+\beta$爲斂級數，而$1+\gamma-\alpha-\beta<1$，即$\gamma<\alpha+\beta$爲發級數，

若$1+\gamma-\alpha-\beta=0$。則$1+\gamma=\alpha+\beta$。

故 $u_{n+1}=\dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots\cdots(\beta+n)}{1\cdot2\cdots\cdots(n+1)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots\cdots(\alpha+\beta+n)}$

$$=\frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{1\cdot2\cdots n}\div\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots(\alpha+\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\times\frac{\beta(\alpha+n)}{(n+1)(\alpha+\beta+n)},$$

但 $\dfrac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots\cdots(\beta+n)}{1\cdot2\cdots\cdots n}>\dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots\cdots(\alpha+\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+n-1)}$,

$\therefore$ $u_{n+1}>\dfrac{\beta(\alpha+n)}{(n+1)(\alpha+\beta+n)}$。

同法 $u_n>\dfrac{\beta(\alpha+n-1)}{n(\alpha+\beta+n-1)}=\dfrac{\beta}{2n}\left(1+\dfrac{\alpha-\beta+n-1}{\alpha+\beta+n-1}\right)$。

n 任意增加,其 $\dfrac{\alpha-\beta+n-1}{\alpha+\beta+n-1}$ 為正。

故 $\dfrac{\beta(\alpha+n-1)}{n(\alpha+\beta+n-1)}>\dfrac{\beta}{2n}$。

卽 $n_n>\dfrac{\beta}{2n}$。

由是 $\sum n_n>\sum\dfrac{\beta}{2n}$。 $\sum\dfrac{\beta}{2n}$ 爲發級數,故原級數亦爲發級數。

第貳拾陸編

不等式

343. 不等式 (Inequalities) 兩正數量之等差中項。大於其等比中項，即 $\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}$。此不等式之定理已述於232章，今將其他之諸定理屬於不等式者。進而考察之。

〔注意〕 是編代數式中之文字。皆表實數。且爲正整數。

344. 不等式之原則 如次所述之原則。皆易於證明者(即幾何學之公理)。

第一 $a>b$ 則 $a+x>b+x$, 及 $a-x>b-x$。

第二 $a>b$ 則 $-a<-b$。

第三 $a>b$ 則 $ma>mb$。 及 $-ma<-mb$。

第四 $a>b, a'>b', a''>b'', \cdots\cdots$ 則 $a+a'+a''+\cdots\cdots>b+b'+b''+\cdots$, 及 $aa'a''\cdots\cdots>bb'b''\cdots\cdots$。

第五 $a>b$ 則 $a^m>b^m$, 及 $a^{-m}<b^{-m}$。

〔第一例〕 試證 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$

$a-b$ 爲正。則 a^2-b^2 亦爲正。$a-b$ 爲負。則 a^2-b^2 亦爲負。故 $(a^2-b^2)(a-b)$ 必爲正而大於0。惟 $(a^2-b^2)(a-b)=a^3+b^3-a^2b-ab^2$。

故 $a^3+b^3-a^2b-ab^2>0$, 即 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$。

〔第二例〕 試證 $a^m+a^{-m}>a^n+a^{-n}$。 但 $m>n$。

$a>1$ 則 a^m-a^n 及 $1-a^{-m-n}$ 俱爲正。

$a<1$ 則 a^m-a^n 及 $1-a^{-m-n}$ 俱爲負，

故 $(a^m-a^n)(1-a^{-m-n})>0$, 即 $a^m-a^n-a^{-n}+a^{-m}>0$,

$$\therefore\ a^m+a^{-m}>a^n+a^{-n}。$$

［第三例］試證$(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)>(ll'+mm'+nn')^2$。

惟$(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)-(ll'+mm'+nn')^2$

$$=(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2$$。

此右邊常爲正。$\therefore\ (l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)>(ll'+mm'+nn')^2$。

［註］如其$mn'-m'n=0,\ nl'-n'l=0,\ lm'-l'm=0$。

則$l/l'=m/m'=n/n'$。而$(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)=(ll'+mm'+nn')^2$。

345. 定理一 知兩正數量之和爲常數。則其積惟兩數相等時爲最大。

設已知兩正數量之和爲$2a$，而其兩數爲$a+x$及$a-x$。則其積爲a^2-x^2。而此積以$x=0$爲最大。即兩數之最大積$=a^2$。

可見兩數$a+x,\ a-x$其$x=0$。而兩數各爲a則其積最大。

上之定理。與232章之結果同。

即a及b兩數之和爲$a+b$。設其兩數各爲$\frac{a+b}{2}$。則其積爲最大。

故 $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)>ab$，

即 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，此即232章之結果也。

346. 定理二 知諸正數量之和。其積以諸數相等爲最大

設於積中之任何二因子a及b爲不相等者。今從其和$a+b$變爲兩數之最大積，則a及b各以$\frac{a+b}{2}$代之。由上之定理而得

$$ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$。

因任何不等兩因子之和。變其兩因子爲互相等。則其積增大。從可知諸數量連乘積之最大者，其諸數悉相等。

設積之諸因子爲$a, b, c,\ldots\ldots$各不相等。則

$$abcd\ldots\ldots<\left(\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{n}\right)^n$$。

故 $$\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{n}>\sqrt[n]{(abcd\ldots\ldots)}$$

此結果爲若干項之等差中項及等比中項之關係。即於次所述之定理是也。

定理三 諸正數量之等差中項，比其等比中項爲大。

此定理已證明於前。玆更用別法證之如次.

已證得 $ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$、 $cd<\left(\frac{c+d}{2}\right)^2$,

$$\therefore \quad abcd<\left(\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}\right)^2。$$

惟以兩數爲 $\frac{a+b}{2}$、 $\frac{c+d}{2}$。依定理壹得

$$\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}<\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\right\}^2,$$

即 $\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}<\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2,$

$$\therefore \quad abcd<\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4。$$

由同法得 $abcdefgh<\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4\left(\frac{e+f+g+h}{4}\right)^4$,

即 $abcdefgh<\left(\frac{a+b+c+d}{4}\times\frac{e+f+g+h}{4}\right)^4,$

惟 $\frac{a+b+c+d}{4}\times\frac{e+f+g+h}{4}<\left(\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}\right)^2,$

$$\therefore \quad abcdefgh<\left(\frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}\right)^8。$$

以此方法逐次推之。其 m 爲 2 之整數方乘。得 abcd………至 m 因子 $<\left(\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots\text{至 } m \text{ 項}}{m}\right)^m$。

而 n 非爲 2 之整數方乘。設 $m=n+r$。

今 n 數量 a,b,c,d……至 n 凡相等。設 $\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}}{n}=k$。

而 $n+r$ 爲 2 之整數方乘,

故 abcd……至 n 因子 $\times k\times k\times k\times$……至 r 因子

$$<\left(\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots+rk}{n+r}\right)^{n+r}。$$

但$a+b+c+d+\cdots\cdots$至n項 $=nk$。以此代入上之不等式。爲

$$abcd\cdots\cdots\text{至 n 因子}\times k^r<\left(\frac{nk+rk}{n+r}\right)^{n+r}。$$

即 $$abcd\cdots\cdots\text{至 n 因子}\times k^r<k^{n+r}。$$

兩邊各以k^r除之。得$abcd\cdots\cdots$至n因子$<k^n$。

即證得 $abcd\cdots\cdots$至n因子 $<\left(\dfrac{a+b+c+d+\cdots\cdots\text{至 n 項}}{n}\right)^n$。

例　題

1. 試證$a^3+b^3+c^3>3\,abc$。

(證) $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}>\sqrt[3]{(a^3,b^3,c^3)}$ 即 $>abc$。

2. 試證$\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\dfrac{a_3}{a_4}+\cdots\cdots+\dfrac{a_n}{a_1}>n$。

(證) $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\dfrac{a_3}{a_4}+\cdots\cdots+\dfrac{a_n}{a_1}\right)>\sqrt[n]{\left(\dfrac{a_1}{a_2}\times\dfrac{a_2}{a_3}\times\dfrac{a_3}{a_4}\times\cdots\cdots\times\dfrac{a_n}{a_1}\right)}>\sqrt[n]{1}$。

3. 已知a,b,c爲正數量。而$a-x$, $b-y$亦爲正。

求$(a-x)(b-y)(cx+dy)$之最大值。

(解) $cd(a-x)(b-y)(cx+dy)$, 即 $(ac-cx)(bd-dy)(cx+dy)$,

而此三因子$ac-cx$, $bd-dy$, $cx+dy$之和。爲$ac+bd$。故此積之最大者。必

$$ac-cx=bd-dy=cx+dy=\frac{ac+bd}{3}。$$

即知$cd(a-x)(b-y)(cx+dy)$之最大值爲$\left(\dfrac{ac+bd}{3}\right)^3$。

$\therefore$ $(a-x)(b-y)(cx+dy)$之最大值爲$\dfrac{1}{cd}\left(\dfrac{ac+bd}{3}\right)^3$。

即 $\dfrac{(ac+bd)^3}{27\,cd}$。

4. x,y,z不相等。而$x+y+z$爲常數。求$x^\alpha y^\beta z^\gamma$爲最大之關係式。

(解) $\dfrac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{\alpha^\alpha\beta^\beta\gamma^\gamma}=\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^\alpha\left(\dfrac{y}{\beta}\right)^\beta\left(\dfrac{z}{\gamma}\right)^\gamma=\dfrac{x}{\alpha}\cdot\dfrac{x}{\alpha}\cdot\dfrac{x}{\alpha}\cdots\cdots\dfrac{y}{\beta}\cdot\dfrac{y}{\beta}\cdot\dfrac{y}{\beta}\cdots\cdots\dfrac{z}{\gamma}\cdot\dfrac{z}{\gamma}\cdot\dfrac{z}{\gamma}\cdots$

而$\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\alpha}+\cdots\cdots+\frac{y}{\beta}+\frac{y}{\beta}+\frac{y}{\beta}+\cdots\cdots+\frac{z}{\gamma}+\frac{z}{\gamma}+\frac{z}{\gamma}+\cdots\cdots\cdots$

$=\alpha\frac{x}{\alpha}+\beta.\frac{y}{\beta}+\gamma.\frac{z}{\gamma}=x+y+z$爲常數，

故由定理二$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\beta}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\gamma}$爲最大。則$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$。

即求得$x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}$爲最大之關係式爲$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$。

上之解法其α,β,γ爲整數。若爲分數。令其分母之最小公倍數爲n，則$n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$爲整數，乃與前同法求$x^{n\alpha}y^{n\beta}z^{n\gamma}$最大之關係式爲$\frac{x}{n\alpha}=\frac{y}{n\beta}=\frac{z}{n\gamma}$同以$\frac{1}{n}$約之，則$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$，

347. 定理四 諸正數量之積爲常數。其和以諸數量相等爲最小。

先設不等兩數量爲a及b。則$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$。故$a+b>\sqrt{ab}+\sqrt{ab}$，乃知不等兩數量a及b之和。恆大於同積之相等兩數量$\sqrt{ab}$及$\sqrt{ab}$之和。

今於諸數量中任取兩不等數a及b。而以$\sqrt{ab}$及$\sqrt{ab}$代之。則諸數量之積不變。而其和減小。

從可知諸數量之積爲常數。則以相等諸數量之和爲最小。即本定理之證。

348. 定理五 設m及r爲正整數，而$m>r$，

則 $\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots+a_n^m}{n}>\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots\cdots+a_n^r}{n}\times\frac{a_1^{m-r}+a_2^{m-r}+\cdots\cdots a_n^{m-r}}{n}$。

按題式如合理，則次式亦必合理，

$$n(a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots+a_n^m)>(a_1^r+a_2^r+\cdots\cdots+a_n^r)(a_1^{m-r}+a_2^{m-r}+\cdots\cdots a_n^{m-r})$$

於此兩邊各減去$a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots+a_n^m$則

$$(n-1)(a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots+a_n^m)>\sum(a_1^ra_2^{m-r}+a_1^{m-r}a_2^r)$$

前不等式之左邊爲n項之n倍共有n^2個文字。其右邊爲n項與n項之積。共有n^2項，而後之不等式之各邊。各減去$a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots+a_n^m$之n項。故知其左邊有$n^2-n$即$n(n-1)$個文字。其右邊有$n(n-1)$項。

而其左邊取二文字及右邊取二項之組合。如次。

$\sum(a_1^m+a_2^m-a_1^r a_2^{m-r}-a_1^{m-r}a_2^r)>0$，此式能合理。則題式亦爲合理。

惟 $a_1^m+a_2^m-a_1^r a_2^{m-r}-a_1^{m-r}a_2^r=(a_1^r-a_2^r)(a_1^{m-r}-a_2^{m-r})$。

而 $a_1^r-a_2^r$ 及 $a_1^{m-r}-a_2^{m-r}$ 正則俱正。負則俱負。故兩同號相乘之積。必恆爲正。

即 $\sum(a_1^m+a_2^m-a_1^r a_2^{m-r}-a_1^{m-r}a_2^r)>0$。即知題式爲合理。

〔推論〕從上之定理。

$$\frac{a_1^{m-r}+a_2^{m-r}+\cdots\cdots+a_n^{m-r}}{n}>\frac{a_1^s+a_2^s+\cdots\cdots+a_n^s}{n}\times\frac{a_1^{m-r-s}+a_2^{m-r-s}+\cdots+a_n^{m-r-s}}{n}。$$

令 $m-r-s=t$，則 $m=r+s+t$，而

$$\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots+a_n^m}{n}>\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots\cdots+a_n^r}{n}\times\frac{a_1^s+a_2^s+\cdots\cdots+a_n^s}{n}\times\frac{a_1^t+a_2^t+\cdots\cdots+a_n^t}{n}$$

又 $\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots=m$。則

$$\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots\cdots+a_n^m}{n}>\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots\cdots+a_n^\alpha}{n}\times\frac{a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta}{n}$$

$$\times\frac{a_1^\gamma+a_2^\gamma+\cdots\cdots+a_n^\gamma}{n}\times\cdots\cdots$$

即 $\dfrac{\sum a_1^m}{n}>\dfrac{\sum a_1^\alpha}{n}\cdot\dfrac{\sum a_1^\beta}{n}\cdot\dfrac{\sum a_1^\gamma}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots$

若 $\alpha=\beta=\gamma=\cdots\cdots=1$ 則 $\dfrac{\sum a_1^m}{n}>\left(\dfrac{\sum a_1}{n}\right)^m$。

例　題

1. 試證 $3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$。

〔證〕由定理五 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}>\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\times\dfrac{a+b+c}{3}$

故 $3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$。

2. 試證 $a^5+b^5+c^5>abc(a^2+b^2+c^2)$。

〔證〕由定理五 $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{3}>\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\times\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$

由定理五推論 $\qquad>\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\times\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$。

惟由定理三 $>\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\times abc$。

∴ $a^5+b^5+c^5>abc(a^2+b^2+c^2)$。

349. 定理六 $a, b, c,$…………及 $\alpha, \beta, \gamma,$…………為正數時。則

$$\left(\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+\cdots\cdots}{a+b+c+\cdots\cdots}\right)^{a+b+c+\cdots\cdots}>\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots\cdots\cdots\cdots$$

第壹 $a, b, c,$……為整數。而取 a 個 α, b 個 β, c 個 γ,……由定理三。得

$$\frac{(\alpha+\alpha+\alpha+\cdots\cdots a\text{項})+(\beta+\beta+\beta+\cdots\cdots b\text{項})+\cdots\cdots}{a+b+c+\cdots\cdots}>\sqrt[a+b+c+\cdots]{(\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots)},$$

即 $$\left(\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma+\cdots\cdots}{a+b+c+\cdots\cdots}\right)^{a+b+c+\cdots}>\alpha^a\beta^b\gamma^c\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{(A)}$$

第貳若 $a, b, c,$……非為整數。取其分母之最小公倍數為 m。則 $ma, mb, mc,$…………為整數。

故 $$\left(\frac{ma\alpha+mb\beta+\cdots\cdots}{ma+mb+\cdots\cdots}\right)^{ma+mb+\cdots}>\alpha^{ma}\beta^{mb}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

由是 $$\left\{\frac{a\alpha+b\beta+\cdots\cdots\cdots}{a+b+\cdots\cdots\cdots}\right\}^{a+b+\cdots}>\alpha^a\beta^b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

推論壹 有 n 個文字 $a, b, c,$………而 $\alpha=\frac{1}{a}$, $\beta=\frac{1}{b}$,………

由上之定理得 $$\left\{\frac{n}{a+b+\cdots\cdots}\right\}^{a+b+\cdots}>\frac{1}{a^ab^b\cdots\cdots},$$

∴ $$\left\{\frac{a+b+\cdots\cdots}{n}\right\}^{a+b+\cdots}<a^ab^b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

推論貳 將(A)以 a^r 代 a, 以 b^r 代 b,…………

又以 a^{m-r} 代 α, 以 b^{m-r} 代 β…… …… 而 $m>r$

則 $$\left\{\frac{a^m+b^m+\cdots\cdots}{a^r+b^r+\cdots\cdots}\right\}^{a^r+b^r+\cdots\cdots}>(a^{a^r}b^{b^r}\cdots\cdots)^{m-r} \qquad \text{(B)}$$

又以 $a^r, b^r,$………代 $a, b,$……又以 $a^{t-r}, b^{t-r},$……代 $\alpha, \beta,$……而 $t<r$。

則 $$\left\{\frac{a^t+b^t+\cdots\cdots}{a^r+b^r+\cdots\cdots}\right\}^{a^r+b^r+\cdots\cdots}<\{a^{a^r}b^{b^r}\cdots\cdots\}^{t-r},$$

∴ $$\left\{\frac{a^r+b^r+\cdots\cdots}{a^t+b^t+\cdots\cdots}\right\}^{a^r+b^r+\cdots\cdots}<\{a^{a^r}b^{b^r}\cdots\cdots\}^{r-t} \qquad \text{(C)}$$

由是m－r及r－t俱爲正。或俱爲負。從(B)及(C)得

$$\left\{\frac{a^m+b^m+\cdots\cdots}{a^r+b^r+\cdots\cdots}\right\}^{\frac{1}{m-r}}>\left\{\frac{a^r+b^r+\cdots\cdots}{a^t+b^t+\cdots\cdots}\right\}^{\frac{1}{r-t}}。$$

由是 $m>r>t$。則

$$(a^m+b^m+\cdots\cdots)^{r-t}\times(a^r+b^r+\cdots\cdots)^{t-m}\times(a^t+b^t+\cdots\cdots)^{m-r}>1。\qquad (D)$$

如次爲(D)之特例。

$m>r$, 而 $t=0$, 則 $a^0+b^0+\cdots\cdots=n$。變(D)爲

$$(a^m+b^m+\cdots\cdots)^r\times(a^r+b^r+\cdots\cdots)^{-m}\times n^m\times n^{-r}>1。$$

即 $$\left\{\frac{a^m+b^m+\cdots\cdots}{n}\right\}^r>\left\{\frac{a^r+b^r+\cdots\cdots}{n}\right\}^m。\qquad (E)$$

又 $t=0$, $m=1$, 則 $m>r>t$, 而 r 爲常分數。

由(E)得 $$\left\{\frac{a+b+\cdots\cdots}{n}\right\}^r>\frac{a^r+b^r+\cdots\cdots}{n}\qquad (F)$$

又 $t=0, r=1$, 則 $m>1$。 由(E)得。

$$\frac{a^m+b^m+\cdots\cdots}{n}>\left\{\frac{a+b+\cdots\cdots}{n}\right\}^m。\qquad (G)$$

今若 $m=1$, $r=0$,則 t 必爲負數,由(D)得。

$$(a+b+\cdots\cdots)^{-t}\times n^{t-1}\times(a^t+b^t+\cdots\cdots)>0,$$

$$\therefore\qquad \frac{a^t+b^t+\cdots\cdots}{n}>\left\{\frac{a+b+\cdots\cdots}{n}\right\}^t。\qquad (H)$$

由(F),(G),(H) x 若非爲常分數。則

$$\frac{a^x+b^x+\cdots\cdots}{n}>\left(\frac{a+b+\cdots\cdots}{n}\right)^x。$$

x 若爲常分數,則 $\dfrac{a^x+b^x+\cdots\cdots}{n}<\left(\dfrac{a+b+\cdots\cdots}{n}\right)^x$。

350. 雜例 次示雜例數條以爲是編之總結,

[第一例] 不等數量 $a_1, a_2,\cdots\cdots\cdots$ 而

$s=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ 則 $\dfrac{s}{s-a_1}+\dfrac{s}{s-a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{s}{s-a_n}>\dfrac{n^2}{n-1}$。

不等數量 $a_1, a_2,\cdots\cdots\cdots a_n$ 由定理二

$$\frac{1}{n}\left(\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots\cdots+\frac{s}{s-a_n}\right)>\sqrt[n]{\frac{s^n}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_n)}}$$

及$\frac{(s-a_1)+(s-a_2)+\cdots\cdots+(s-a_n)}{n}>\sqrt[n]{\{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_n)\}}$。

但 $(s-a_1)+(s+a_2)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(s-a_n)=ns-s$。故將上之兩不等式相乘。得

$$\frac{1}{n}\left(\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots\cdots+\frac{s}{s-a_3}\right)\times\frac{ns-s}{n}>\sqrt[n]{s^n}=s,$$

即 $\frac{n-1}{n^2}\left(\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots\cdots+\frac{s}{s-a^n}\right)>1$。

[第貳例] 設 $a+b+c+d=3s$，則 $abcd>81(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$，

何則，由定理二 $\frac{(s-b)+(s-c)+(s-d)}{3}>\sqrt[3]{\{(s-b)(s-c)(s-d)\}}$。

但 $(s-b)+(s-c)+(s-d)=3s-(b+c+d)=3s-(3s-a)=a$，

$\therefore$ $a>3\sqrt[3]{\{(s-b)(s-c)(s-d)\}}$，

由同理 $b>3\sqrt[3]{\{(s-c)(s-d)(s-a)\}}$，

$c>3\sqrt[3]{\{(s-a)(s-b)(s-d)\}}$，

$d>3\sqrt[3]{\{(s-a)(s-b)(s-c)\}}$，

由乘法得 $abcd>81(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$。

[第三例] 設不等正數量 x,y,z。則 $\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}>x^xy^yz^z$。

第壹若 x,y,z 爲整數。則以 $x^2+y^2+z^2$ 個數量中 x 有 x 個，y 有 y 個，z 有 z 個，由定理三

$$\frac{(x+x+\cdots\cdots x\text{項})+(y+y+\cdots\cdots+y\text{ 項})+(z+z+\cdots\cdots z\text{ 項})}{x+y+z}>(x^xy^yz^z)^{\frac{1}{x+y+z}}.$$

$$\therefore\quad \frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}>(x^xy^yz^z)^{\frac{1}{x+y+z}},$$

第式若 x,y,z 爲分數。而其分母之最小公倍數爲 m。則 mx, my, mz 爲整數。

由是與前之同理而得次之不等式。

$$\left(\frac{m^2x^2+m^2y^2+m^2z^2}{mx+my+mz}\right)^{mx+my+mz}>(mx)^{mx}(my)^{my}(mz)^{mz},$$

即 $\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{m(x+y+z)}\times m^{m(x+y+z)}>(x^xy^yz^z)^m\times m^{m(x+y+z)}$

由此定理任何諸數量可由同法證得。

即 $\left(\frac{x^2+y^2+z^2+\cdots\cdots}{x+y+z}\right)^{x+y+z+\cdots\cdots}>x^xy^yz^z\cdots\cdots$

例題三十五

於次之諸例。凡所表之文字。皆爲正數量。試證之。

1. $y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2 \nless xyz(x+y+z)$。

〔證〕 $y^2z^2+z^2x^2>2\sqrt{(y^2z^2.z^2x^2)}=2xyz^2$。

同法 $z^2x^2+x^2y^2>2x^2yz,\quad x^2y^2+y^2z^2>2xy^2z,$

由加法 $2(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)>2xyz(x+y+z)$。

若 $x=y=z$。則 $y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=xyz(x+y+z)$。

2. $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots\cdots \nless (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdots)^2$

〔證〕 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots)(b_1^2+b_2^2+b_3^3+\cdots\cdots)$

$=\sum a_1^2b_1^2+\sum(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2)$,

但 $a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2>2a_1b_1a_2b_2$

$\therefore\ (a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots\cdots)$

$>\sum a_1^2b_1^2+2\sum a_1b_1a_2b_2>(a_1b_1+a_2b_2+{}_3b_3+\cdots\cdots)^2$

若 $a_1=a_2=\cdots\cdots$ 及 $b_1=b_2=\cdots\cdots$ 則 $(\sum a_1^2)(\sum b_1^2)=(\sum a_1b_1)^2$

3. $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdots)\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\cdots\cdots\cdots\right)\nless(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots)^2$

〔證〕 $\sum a_1b_1\sum\frac{a_1}{b_1}=\sum a_1^2+\sum a_1a_2\left(\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_1}{b_2}\right)>\sum a_1^2+2\sum a_1a_2=(\sum a_1)^2$。

若 $a_1=a_2=\cdots\cdots b_1=b_2=\cdots\cdots$ 則 $\sum a_1b_1\sum\frac{a_1}{b_1}=(\sum a_1)^2$。

4. $a^6+b^6\nless a^5b+ab^5$。

〔證〕 $(a^5-b^5)(a-b)>0$。

5. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\nless 9$。

〔證〕 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}>3\sqrt[3]{\left(\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}\cdot\frac{z}{c}\right)},\ \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}>3\sqrt[3]{\left(\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}\cdot\frac{c}{z}\right)}$。

$\therefore\quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)>9$。

若 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$。則 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)=9$。

6. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \nless 9abc$。

〔證〕 $a+b+c>3\sqrt[3]{(abc)}$, $a^2+b^2+c^2>3\sqrt[3]{(a^2b^2c^2)}$,

由乘法得 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>9abc$。

7. $a^2cd+b^2ad+c^2ab+d^2bc \nless 4abcd$。

〔證〕 $\frac{a^2cd+b^2ad+c^2ab+d^2bc}{4}>\sqrt[4]{(a^2cd.\ b^2da.\ c^2ab.\ d^2bc)}=abcd$。

8. $(bc+ca+ab)^2 \nless 3abc(a+b+c)$。

〔證〕 由例題1。$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>abc(a+b+c)$。

又 $(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$

$>abc(a+b+c)+2abc(a+b+c)=3abc(a+b+c)$。

9. $a^4+b^4+c^4 \nless abc(a+b+c)$。

〔證〕 $b^4+c^4>2b^2c^2$, $c^4+a^4>2c^2a^2$, $a^4+b^4>2a^2b^2$。

$\therefore\quad 2(b^4+c^4+a^4)>2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)>2abc(a+b+c)$。

10. $a^5+b^5+c^5+d^5 \nless abcd(a+b+c+d)$。

〔證〕 $\frac{a^5+b^5+c^5+d^5}{4}>\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^5$ 由定理二。$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4>abcd$。

$\therefore\quad \frac{a^5+b^5+c^5+d^5}{4}>\frac{a+b+c+d}{4}.abcd$。

11. $x>a$。則 $\frac{a-x}{a+x}<\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$。

〔證〕 $a-x>0$。 $\therefore\quad (a-x)\{(a+x)^2-(a^2+x^2)\}=0$。

即 $(a+x)(a^2-x^2)-(a^2+x^2)(a-x)>0$。 $\therefore\quad \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}-\frac{a-x}{a+x}>0$。

12. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \nless \frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$。

〔證〕 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2\sqrt{\frac{1}{ab}}$, $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>2\sqrt{\frac{1}{bc}}$, $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}>2\sqrt{\frac{1}{ca}}$。

由加法即得所證之式。

13. $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=a$。則 $na>(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)^2>a$。

(證) $\frac{a}{n}=\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2}{n}>\left(\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}\right)^2$

$\therefore\quad na>(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)^2$。

又 $(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)^2>x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=a$,

14. $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$, 各大於 a。而 $(x_1-a)(x_2-a)\cdots\cdots(x_n-a)=b^n$。則 $x_1x_2x_3\cdots\cdots x_n$ 之最小值爲 $(a+b)^n$。但 a, b, 爲正數,

(證) $x_1=y_1+a,\ x_2=y_2+a, \cdots\cdots$ 則 $y_1y_2\cdots\cdots y_n=b^n$。

由題意求 $(a+y_1)(a+y_2)\cdots\cdots(a+y_n)$ 之最小值。先於 $y_1, y_2, \cdots\cdots$ 中任意取不等二數量 y_r, y_s 而定 $y_r\,y_s=y^2$,則 $y_r+y_s>2\sqrt{y_r\,y_s}=2y$,

由是 $(a+y_r)(a+y_s)=a^2+y^2+2a(y_r+y_s)>a^2+y^2+2ay=(a+y)^2$。

故於 $(a+y_1)(a+y_2)\cdots\cdots\cdots(a+y_n)$ 中任意取兩因子 $a+y_r, a+y_s$ 而以其等比中項 $a+y$ 代之。則仍不失其 $y_1y_2\cdots\cdot y_n=b_n$ 之關係,而其積減小。由是知諸因子各相等爲 $a+y$。則其積爲最小,故 $y^n=b^n$ 所求之最小值。爲 $(a+y)^n=(a+b)^n$。

15. $\frac{(a+b)xy}{ay+bx}\not>\frac{ax+by}{a+b}$。

(證) $x^2+y^2\not<2xy$。 $\therefore$ $ab(x^2+y^2)\not<2abxy$。以 $xy(a^2+b^2)$ 加於兩邊。則 $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)\not<xy(a+b)^2$。 即 $(ax+by)(ay+bx)\not<xy(a+b)^2$。

16. $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\not<\frac{9}{a+b+c}$

(證) $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\right)\not<\sqrt[3]{\left(\frac{2}{b+c}\cdot\frac{2}{c+a}\cdot\frac{2}{a+b}\right)}$。

又 $\frac{1}{3}\{(b+c)+(c+a)+(a+b)\}\not<\sqrt[3]{\{(b+c)(c+a)(a+b)\}}$。

由乘法 $\frac{1}{9}\left(\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\right)(2a+2b+2c)\not<2$。

17. $\frac{3}{b+c+d}+\frac{3}{c+d+a}+\frac{3}{d+a+b}+\frac{3}{a+b+c}\not<\frac{16}{a+b+c+d}$。

(證) 如前例 $\frac{1}{4}\Sigma\frac{3}{b+c+d}\not<\sqrt[4]{\Pi\frac{3}{b+c+d}}$ 及 $\frac{1}{4}\Sigma\frac{b+c+d}{3}\not<\sqrt[4]{\Pi\frac{b+c+d}{3}}$ 相乘,即得所證之式。

18.　$a>b>c$，則 $\left(\dfrac{a+c}{a-c}\right)^a<\left(\dfrac{b+c}{b-c}\right)^b$。

〔證〕 $\text{Log}\left(\dfrac{a+c}{a-c}\right)^a=a\left\{\text{Log}\left(1+\dfrac{c}{a}\right)-\text{Log}\left(1-\dfrac{c}{a}\right)\right\}=2a\left(\dfrac{c}{a}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{c^3}{a^3}+\cdots\right)$

$=2\left(c+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{c^3}{a^2}+\cdots\cdots\right)$。又 $\text{Log}\left(\dfrac{b+c}{b+c}\right)^b=2\left(c+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{c^3}{b^2}+\cdots\cdots\right)$

惟 $\dfrac{c^3}{a^2}<\dfrac{c^3}{b^2}\cdots\cdots$ 由是 $\left(\dfrac{a+c}{a-c}\right)^a<\left(\dfrac{b+c}{b-c}\right)^b$。

19.　$x^2=y^2+z^2$ 因 $n\gtreqless 2$ 而定 $x^n\gtreqless y^n+z^n$

〔證〕 x 大於 y 及 z，故因 $n-2\gtreqless 0$，從而定 $x^{n-2}-y^{n-2}\gtreqless 0$

及 $x^{n-2}-z^{n-2}\gtreqless 0$。由是 $x^2y^2(x^{n-2}-y^{n-2})+x^2z^2(x^{n-2}-z^{n-2})\gtreqless 0$

即 $x^n(y^2+z^2)-x^2(y^n+z^n)\gtreqless 0$　$\therefore\ x^n\gtreqless y^n+z^n$。

20.　$(abcd)^{\frac{1}{p+q+r+s}}$ 爲在 $a^{\frac{1}{p}}, b^{\frac{1}{q}}, c^{\frac{1}{r}}, d^{\frac{1}{s}}$，之最大及最小值之間，證明之。

〔證〕 設 $a^{\frac{1}{p}}$ 爲最大，而令 $a^{\frac{1}{p}}=\lambda$。則 $a=\lambda^p$ $\therefore$ $b^{\frac{1}{q}}<\lambda$，

即 $b<\lambda^q$。同法 $c<\lambda^r$, $d<\lambda^s$。由是 $abcd<\lambda^{p+q+r+s}$。

$\therefore$ $(abcd)^{\frac{1}{p+q+r+s}}<\lambda=a^{\frac{1}{p}}$ 又 $d^{\frac{1}{s}}$ 爲最小，則 $(abcd)^{\frac{1}{p+q+r+s}}>d^{\frac{1}{s}}$。

21.　$1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{2n}\not<(2n+1)x^n$。

〔證〕 $\dfrac{1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{2n}}{2n+1}\not<\sqrt[2n+1]{(1.x.x^2\cdots\cdots x^{2n})}$

$\not<\sqrt[2n+1]{x^{1+2+\cdots\cdots+2n}}=\sqrt[2n+1]{x^{n(2n+1)}}=x^n$.

22.　n 爲正整數而 $a>1$。則 $n\,\dfrac{a^{2n+1}+1}{a^{2n}-1}>\dfrac{a}{a-1}$。

〔證〕 從 $(a^{2n}-1)(a-1)>0$。而得 $a^{2n+1}+1>a^{2n}+a$,

從 $(a^{2n-1}-1)(a^2-1)>0$。而得 $a^{2n+1}+1>a^{2n-1}+a^2$,

………………………………………………

從 $(a-1)(a^{2n}-1)>0$。而得 $a^{2n+1}+1>a+a^{2n}$。由加法，

$2n(a^{2n+1}+1)>2a(a^{2n-1}+a^{2n-2}+\cdots\cdots+a+1)=\dfrac{2a(a^{2n}-1)}{a-1}$.

23.　$(m+1)(m+2)(m+3)\cdots\cdots(m+2n+1)<(m+n)^{2n-1}$.

〔證〕 $(m+1)(m+2n-1)<(m+n)^2$, $(m+2)(m+2n-2)<(m+n)^2$。
$(m+3)(m+2n-3)<(m+n)^2$,…… $(m+2n-1)(m+1)<(m+n)^2$。

由乘法 $\{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots\cdots(m+2n-1)\}^2<(m+n)^{2(2n-1)}$。

24. $abc \nless (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$,

〔證〕 $a^2>a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$,

$b^2>(b+c-a)(b-c+a)$, $c^2>(c+a-b)(c-a+b)$。

由乘法 $a^2b^2c^2>(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2$。

25. $abcd \nless (b+c+d-2a)(c+d+a-2b)(d+a+b-2c)(a+b+c-2d)$,

〔證〕 $\sqrt[3]{\{(c+d+a-2b)(d+a+b-2c)(a+b+c-2d)\}}$

$<\frac{1}{3}\{(c+d+a-2b)+(d+a+b-2c)+(a+b+c-2d)\}=a$。

同法 $\sqrt[3]{\{(b+c+d-2a)(d+a+b-2c)(a+b+c-2d)\}}<b$,

$\sqrt[3]{\{(b+c+d-2a)(c+d+a-2b)(d+a+b-2d)\}}<c$,

$\sqrt[3]{\{(b+c+d-2a)(c+d+a-2b)(d+a+b-2c)}<d$。

由乘法 $(b+c+d-2a)(c+d+a-2b)(d+a+b-2c)(a+b+c-2d)<abcd$。

26. $a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots a_n \nless (n-1)^n(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_n)$,

但 $(n-1)s=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_n$。

〔證〕 $\sqrt[n-1]{\{(s-a_2)(s-a_3)\cdots(s-a_n)\}}<\frac{(s-a_2)+(s-a_3)+\cdots+(s-a_n)}{n-1}=\frac{a_1}{n-1}$。

同法 $\sqrt[n-1]{(s-a_3)(s-a_4)\cdots\cdots(s-a_n)(s-a_1)\}}<\frac{a_2}{n-1}$。

……………………………………………

$\sqrt[n-1]{\{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_{n-1})\}}<\frac{a_n}{n-1}$。

由乘法 $(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_n)<\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_n}{(n-1)^n}$

27 a,b,c,爲不等數量。其二數之和,要比他一數爲大。

則 $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}>\frac{}{a+b+c}$。

〔證〕 $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}+\frac{1}{a+b-c}>3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{b+c-a}\cdot\frac{1}{c+a-b}\cdot\frac{1}{a+b-c}\right)}$

$>\frac{3}{\sqrt[6]{\{(b+c-a)^2(c+a-b)^2(a+b-c)^2\}}}$

$$>\frac{3}{\sqrt[3]{\{a^2-(b-c)^2\}\{b^2-(c-a)^2\}\{c^2-(a-b)^2\}}}>\frac{3}{\sqrt[6]{(a^2b^2c^2)}}=\frac{3}{\sqrt[3]{(abc)}}$$

而 $\sqrt[3]{abc}<\frac{1}{3}(a+b+c)$。　　　　故 $<\frac{9}{a+b+c}$。

28. a,b,c 爲不等數量，則

$(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b)+(a-b)^2(a+b-c)>0$。

〔證〕 $a>b>c$，則 $c+a-b$, $a+b-c$, 爲正。故 $b+c-a$，若爲正，則原數爲正數可知。若 $b+c-a$ 爲負。而以 $-x$ 代之，則 $a=b+c+x$。

原式 $=-(b-c)^2x+(-b-x)^2(2c+x)+(c+x)^2(2b+x)$

$=x\{b^2+c^2+8bc-(b-c)^2\}+2\{x^3+2x^2(b+c)+bc(b+c)\}$

$=10bcx+$正數量>0。

29. a, b, c, 爲不等正數量。

則 $a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)>0$。

〔證〕 原式 $=a^2(a-b)(a-c)-b^2(a-b)\{(a-c)-(a-b)\}$

$-c^2(a-c)\{(a-b)-(a-c)\}$

$=(a-b)(a-c)(a^2-b^2-c^2)+b^2(a-b)^2+c^2(a-c)^2$

$=(a-b)(a-c)\{a^2-(b-c)^2\}+b^2(a-b)^2+c^2(a-c)^2-2bc(a-b)(a-c)$

$=(a-b)(a-c)\{a^2-(b-c)^2\}+\{b(a-b)-c(a-c)\}^2$。

上式之 $a>b>c$ 即爲正。

30. x之值不等於1而 p, q, r, 各不相等，

則 $px^{q-r}+qx^{r-p}+rx^{p-q}>p+q+r$。

〔證〕 $\frac{1}{p+q+r}\{(x^{q-r}+x^{q-r}+\cdots\cdots p\text{項})+(x^{r-p}+x^{r-p}+\cdots\cdots q\text{項})$

$+(x^{p-q}+x^{p-q}+\cdots\cdots r\text{項})\}>\{x^{p(q-r)}.x^{q(r-p)}.x^{r(p-q)}\}^{\frac{1}{p+q+r}}=1$。

即 $px^{q-r}+qx^{r-p}+rx^{p-q}>p+q+r$。

31. $\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots2n}>\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$。

〔證〕 惟 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}>\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{2n}{2n+1}$。

∴ $\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\right\}^2>\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$。

32. $\frac{3.7.11\ldots\ldots(4n-1)}{5.9.13\ldots\ldots(4n+1)}<\sqrt{\frac{3}{4n+3}}$。

〔證〕 惟 $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{13}\cdots\cdots\frac{4n-1}{4n+1}<\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{13}{15}\cdots\cdots\frac{4n+1}{4n+3}$。

$\therefore\quad\left\{\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{11}{13}\cdots\cdots\frac{4n-1}{4n+1}\right\}^2>\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{9}\cdots\cdots\frac{4n-1}{4n+1}\cdot\frac{4n+1}{4n+3}=\frac{3}{4n+3}$。

33. $x, y, z,$ 爲不等數量，試從 $ax^\alpha+by^\beta+cz^\gamma=d$ 之關係，求 $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ 之最大值。

〔解〕 $ax^\alpha+by^\beta+cz^\gamma=d$。則 $ax^\alpha, by^\beta, cz^\gamma$ 以 $ax^\alpha=by^\beta=cz^\gamma$ 爲最大，

故 $abcx^\alpha y^\beta z^\gamma$ 之最大值。爲 $\left(\frac{1}{3}d\right)^2$ 由 $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ 之最大值。爲 $\frac{d^3}{27abc}$。

34. $n>2$。則 $(\underline{|n})^2>n^n$。

〔證〕 $1.n=n,\quad 2(n-1)>n,\cdots\cdots r\{n-(r-1)\}>n,\quad n.1=n$。

由乘法 $(1.2.3\cdots\cdots n)\{n.(n-1)\cdots\cdots 2.1\}>n.n.n\cdots\cdots n$ 因子。

$\therefore\quad(\underline{|n})^2>n^n$。

35. n 爲正，則 $(1+x)^n(1+x^n)>2^{n+1}x^n$。

〔證〕 $1+x>2\sqrt{x}$。 即 $(1+x)^n>2^n\sqrt{x^n}$。又 $1+x^n>2\sqrt{x^n}$。

$\therefore\quad(1+x)^n(1+x^n)>(2^n\sqrt{x^n})(2\sqrt{x^n})=2^{n+1}x^n$。

36. 於奇數項之等比級數。其奇數項之等差中項，比偶數項之等差中項爲大，試證明之。

〔證〕 於 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{2n-1}+ar^{2n}$。

由題意欲證明 $\frac{a+ar^2+\cdots\cdots+ar^{2n}}{n+1}>\frac{ar+ar^3+\cdots\cdots+ar^{2n-1}}{n}$。

即 $\frac{1+r^2+\cdots\cdots+r^{2n}}{r+r^3+\cdots\cdots+r^{2n-1}}>\frac{n+1}{n}$。但 $F(n)=\frac{1+r^2+\cdots\cdots+r^{2n}}{r+r^3+\cdots\cdots+r^{2n-1}}$。

則 $F(n+1)+\frac{1}{F(n)}=\frac{1+r^2+\cdots\cdots+r^{2n}+r^{2n+2}}{r+r^3+\cdots\cdots+r^{2n-1}+r^{2n+1}}+\frac{r+r^3+\cdots\cdots+r^{2n-1}}{1+r^2+\cdots\cdots+r^{2n}}$

$=\frac{(1+r^2)(1+r^2+\cdots\cdots+r^{2n})}{r(1+r^2+r^4+\cdots\cdots+r^{2n})}=r+\frac{1}{r}>2$。

故 $F(n+1)>2-\frac{1}{F(n)}$。惟 $F(n)>\frac{n+1}{n}$。

故 $F(n+1)>2-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)+1}{n+1}$。然 $F(1)>\frac{1+1}{1}$。

故 $F(2)>\frac{2+1}{2}\cdots\cdots$ 故 $F(n)>\frac{n+1}{n}$。

37. 等差級數及等比級數。有同一之初項。同一之末項,及同一之項數。則A.P.之和,恆比G.P.之和爲大。

〔證〕 $1+r^{n-1}=1+r^{n-1}$, $(1-r)(1-r^{n-2})>0$。

即 $1+r^{n-1}-r-r^{n-2}>0$。 $\therefore\ 1+r^{n-1}>r+r^{n-2}$,

同法 $1+r^{n-1}>r^2+r^{n-3}, \cdots\cdots 1+r^{n-1}>r^{n-2}+r^2$, $1+r^{n-1}=r^{n-1}+1$,

由加法 $n(1+r^{n-1})>2(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1})$,

由是 $\frac{n}{2}(a+ar^{n-1})>a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}$。

38. 從已知n正數量中。取r個作等比中項,其諸等比中項之等差中項爲p_r。則$p_1>p_2>p_3\cdots\cdots>p_n$

〔證〕 從n正整量$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$,中取r個,其取法有${}_nC_r$個,

故 $P_r=\frac{1}{{}_nC_r}\{\sqrt[r]{(a_1a_2\cdots\cdots a_r)}+\sqrt[r]{(a_2a_3\cdots\cdots a_{r+1})}+\cdots\cdots\}$。

及 $p_{r-1}=\frac{1}{{}_nC_{r-1}}\{\sqrt[r-1]{(a_1a_2\cdots\cdots a_{r-1})}+\sqrt[r-1]{(a_2a_3\cdots\cdots a_{r+1})}+\cdots\cdots\}$。求於$p_{r-1}$中含有r個特別文字。如$a_1, a_2, a_3\cdots\cdots a_r$而得${}_rC_{r-1}$個,即r個,以此諸項比較如次,

$$\sqrt[r-1]{(a_1a_2\cdots\cdots a_{r-1})}+\sqrt[r-1]{(a_2a_3\cdots\cdots a_r)}+\sqrt[r-1]{(a_3a_4\cdots\cdots a_ra_1)}+\cdots\cdots$$

$$>r\sqrt[r]{\{\sqrt[r-1]{(a_1a_2\cdots\cdots a_{r-1})}\sqrt[r-1]{(a_2a_3\cdots\cdots a_r)}\sqrt[r-1]{(a_3a_4\cdots\cdots a_ra_1)}\cdots\cdots\}}$$

$$>r\sqrt[r]{\{\sqrt[r-1]{(a_1^{r-1}a_2^{r-1}\cdots\cdots a_r^{r-1})}\}}=r\sqrt[r]{(a_1a_2\cdots\cdots a_r)}$$

上之不等式之第一邊。爲於n字中所含之特別文字。而於此r字中。取r−1個以爲因子。而有r項之式,逐次如斯取之。則於其各項中所不含有之文字,爲有n−r+1個,乃以此n−r+1中之一字。以次合於r−1之因子而取r字。則含於總項數中所有同一r−1因子之項,爲有n−r+1倍。

例於a, b, c, d, e, 內取特別之4字。如abcd, acde, bcde, 則凡含有acd之因子者。可取諸abcd內。又可取諸acde內。故所含同一之三因子。其項數有5−3=2倍,

由是從此不等式之第1項。爲從n字中逐次取特別之r字。而各次於r字取r−1個以爲因子。其項之總數。等於從n字取r−1個以爲因子之項數之n−r+1倍,又與此不等式之最後一項相應之式。爲從n字中取r字以爲因子之項數之r。故

$(n-r+1)\{\sqrt[r-1]{a_1a_2\cdots\cdots a_{r-1}}+\sqrt[r-1]{(a_2a_3\cdots\cdots a_r)}+\cdots\cdots\}$

$>r\{\sqrt[r]{(a_1a_2\cdots\cdots a_r)}+\sqrt[r]{(a_2a_3\cdots\cdots a_{r+1})}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}$

即 $\frac{1}{r}\{\sqrt[r-1]{(a_1a_2\cdots\cdots a_{r-1})}+\sqrt[r-1]{(a_2a_3\cdots\cdots a_r)}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}$

$>\frac{1}{n-r+1}\{\sqrt[r]{(a_1a_2\cdots\cdots a_r)}+\sqrt[r]{(a_2a_3\cdots\cdots a_{r+1})}+\cdots\cdots\}$。

但 $\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-1}}=\frac{n-r+1}{r}$。則 $\frac{1}{{}_nC_{r-1}}:\frac{1}{{}_nC_r}=\frac{1}{r}:\frac{1}{n-r+1}$,

以此代入前之不等式。得 $p_{r-1}>p_r$。

39. $S=a+b+c+\cdots\cdots\cdots$ 則 $\left(\frac{s-a}{n-1}\right)^a\left(\frac{s-b}{n-1}\right)^b\left(\frac{s-c}{n-1}\right)^c\cdots\cdots<\left(\frac{s}{n}\right)^s$。

但 a b, c……… 爲 n 個之不等數量。

(證) $\sqrt[s]{\left\{\left(\frac{s-a}{n-1}\right)^a\left(\frac{s-b}{n-1}\right)^b\left(\frac{s-c}{n-1}\right)^c\cdots\cdots\right\}}<\frac{1}{s}\left\{a\left(\frac{s-a}{n-1}\right)+b\left(\frac{s-b}{n-1}\right)\right.$

$\left.+c\left(\frac{s-c}{n-1}\right)+\cdots\cdots\cdots\right\}<\frac{s^2-a^2-b^2-c^2-\cdots\cdots\cdots}{(n-1)s}$

$<\frac{s}{n}-\frac{(n-s)\sum a^2+\sum(a-b)^2}{n(n-1)s}<\frac{s}{n}$。

$\therefore\ \left(\frac{s-a}{n-1}\right)^a\left(\frac{s-b}{n-1}\right)^b\left(\frac{s-c}{n-1}\right)^c<\left(\frac{s}{n}\right)^s$。

40. n 爲正整數。則 $2^{n(n+1)}>(n+1)^{n+1}\left(\frac{n}{1}\right)^n\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}\cdots\cdots\left(\frac{2}{n-1}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^1$。

(證) $2^n=(1+1)^n=1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor n}$。

又 $\frac{1}{n+1}\left\{1+\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor n}\right\}>\left\{1.\frac{n}{1}.\frac{n(n-1)}{1.2}\cdots\cdots\frac{\lfloor n}{\lfloor n}\right\}^{\frac{1}{n+1}}$。

即 $\frac{1}{n+1}(2^n)>\left\{\frac{n^n(n-1)^{n-1}(n-2)^{n-2}\cdots\cdots2^2 1^1}{1^n.2^{n-1}.3^{n-2}\cdots\cdots(n-1)^2n^1}\right\}^{\frac{1}{n+1}}$,

$\therefore\ 2^{n(n+1)}>(n+1)^{n+1}\left(\frac{n}{1}\right)^n\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots\left(\frac{2}{n-1}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^1$。

第貳拾柒編(上)

連分數

351. 連分數(Continued Fractions) 分數式之形。有如 $a\pm\cfrac{b}{c\pm\cfrac{d}{e\pm\cfrac{f}{g\pm\cdots\cdots}}}$ 者。謂之連分數。

但如上之記法。頗費紙幅。故記其式如次。

$a\pm\frac{b}{c\pm}\ \frac{d}{e\pm}\ \frac{f}{q\pm}\cdots\cdots$

352. 漸近分數 (Convergent Fraction) 連分數式，從前向後。任於何處截止之，而截取之各分數，謂之連分數之漸近分數，

例如 $a\pm\frac{b}{c\pm}\ \frac{d}{e\pm}\ \frac{f}{g\pm}\cdots\cdots$ 其

第一漸近分數 $=\frac{a}{1}$ 第二漸近分數 $=a\pm\frac{b}{c}=\frac{ac\pm b}{c}$,

第三漸近分數 $=a\pm\cfrac{b}{c\pm\cfrac{d}{e}}=a\pm\frac{be}{ce\pm d}=\frac{ace\pm ad\pm be}{ce\pm d}$，而第 r 漸近分數以 $\frac{p_r}{q_r}$ 表之，故 $\frac{p_3}{q_3}, \frac{p_4}{q_4}$ 謂之第三及第四漸近分數。

又分數 $\frac{a}{1}, \frac{b}{c}, \frac{d}{e}, \cdots\cdots$ 稱連分數之元 (Elements)。順次稱爲第一元，第二元，第三元，…………

353. 定理 連分數 $a+\frac{b}{c+}\ \frac{d}{e+}\cdots\cdots$ 其 $a, b, c, d, e, \cdots\cdots$ 皆爲正者。則各次之漸近分數。比連分數大小相間，

何則。第一漸近分數$\frac{a}{1}$。截去$\frac{b}{c+}\frac{d}{e+}$……諸正數。故其比原連分數爲小可知,

第二漸近分數$a+\frac{b}{c}$。其分母c比$c+\frac{d}{e+}$……爲小。故$a+\frac{b}{c}$比原連分數爲大。

又第三漸近分數$a+\frac{b}{c+}\frac{d}{e}$。其分母$c+\frac{d}{e}$。比$c+\frac{d}{e+}$………爲大。故$a+\frac{b}{c+}\frac{d}{e}$。比原連分數爲小。

從可知第四漸近分數,比原連分數爲大。以下順次比原連分數。大小相間。

354. 漸近分數之計算法 求漸近分數。同於算術,從其最下項計算之。

例 $\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1+\frac{a_2b_3}{b_2b_3+a_3}}=\frac{a_1b_2b_3+a_1a_3}{b_1b_2b_3+a_3b_1+a_2b_3}$。

但上之方法。祇能用以專求某次之漸近分數,若欲求累次漸近分數。仍須一一從其最下項以求之。其計算之法。甚爲緊冗。

然連分數之任何次漸近分數。與其前之漸近分數。有一定之關係,而累次之漸近分數。可從前之漸近分數推得之。示明如次。

355. 連次兩漸近分數 求其關係。

於連分數$a+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}$……其最初之三漸近分數爲$\frac{a}{1}$, $\frac{ab_1+a_1}{b_1}$

及 $\frac{ab_1b_2+aa_2+a_1b_2}{b_1b_2+a_2}$。

今記此第三漸近分數,爲$\frac{(ab_1+a_1)b_2+(a)a_2}{b_1b_2+1.a_2}$。

由是可見以最後元之分母乘前一次漸近分數之分母子。又以最後元之分子乘更前一次漸近分數之分母子,乃取乘得之兩分母及兩分子各相加,即爲本次漸近分數之分母子。

如第三元之分數。爲$\frac{a_2}{b_2}$即爲最後元。先以最後元之分母b_2乘第

二次漸近分數 $\frac{ab_1+a_1}{b_1}$。得 $\frac{(ab_1+a_1)b_2}{b_1b_2}$。又以最後元之分子 a_2 乘第一漸近分數 $\frac{a}{1}$。得 $\frac{aa_2}{a_2}$ 乃取乘得之兩分母相加，得 $b_1b_2+a_2$ 爲第三漸近分數之分母。取乘得之兩分子相加。得 $(ab_1+a_1)b_2+aa_2$ 爲第三漸近分數之分子。

又可見既得第二漸近分數。則以下各次之漸近分數，可由同法求得之，而此法對於任何之漸近分數。皆能合理。證明如次。

設於第 n 漸近分數。其最後之元爲 $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$。而 $\frac{p_r}{q_r}$ 爲第 r 漸近分數。

則第 n 漸近分數爲 $\frac{p_n}{q_n}$。第 n+1 漸近分數爲 $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$。用前法假定。

$$p_n=b_{n-1}p_{n-1}+a_{n-1}p_{n-2} \qquad q_n=b_{n-1}q_{n-1}+a_{n-1}q_{n-2} \qquad (1)$$

$$p_{n+1}=b_np_n+a_np_{n-1} \qquad q_{n+1}=b_nq_n+a_nq_{n-1} \qquad (2)$$

但第 n+1 漸近分數。可以 $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}+\frac{a_n}{b_n}$。即 $\frac{a_{n-1}b_n}{b_{n-1}b_n+a_n}$ 代第 n 漸近分數之最後元 $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ 以求之。

即於(1)用 $a_{n-1}b_n$ 代其 a_{n-1}。用 $b_{n-1}b_n+a_n$ 代其 b_{n-1}。則得

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=(b_{n-1}b_n+a_n)p_{n-1}+a_{n-1}b_np_{n-2}\\&=b_n(b_{n-1}p_{n-1}+a_{n-1}p_{n-2})+a_np_{n-1}\\&=b_np_n+a_np_{n-1}\end{aligned}$$

由同法。 $q_{n+1}=b_nq_n+a_nq_{n-1}$ 所得與(2)同。

由是證得此法對於第 n 漸近分數如爲合理，則對於第 n+1 漸近分數。亦爲合理。然第三漸近分數。於前亦係證明其爲合理。則由歸納法知第四，第五及以下任何之漸近分數。亦皆合理。

推論壹 連分數 $a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots\cdots$ 其

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2} \quad 及 \quad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$$

推論貳 連分數 $\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}-\cdots\cdots\cdots$ 其

$$p_n=b_np_{n-1}-a_np_{n-2} \quad 及 \quad q_n=b_nq_{n-1}-a_nq_{n-2}$$

例 題

試由連次漸近分數之關係,如上之法則,求次各連分數之第五漸近分數。

1. $1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4}$。　　答 $\frac{73}{43}$。

(解) $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{1},\quad \frac{p_2}{q_2}=1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1},\quad \frac{p_3}{q_3}=\frac{2\cdot2+1}{2\cdot1+1}=\frac{5}{3},\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{3\cdot5+2}{3\cdot3+1}=\frac{17}{10}$。

$\therefore\quad \frac{p_5}{q_5}=\frac{4\cdot17+5}{4\cdot10+3}=\frac{73}{43}$。

2. $\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4}+\cdots\cdots$　　答 $\frac{29}{140}$。

(解) $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{4},\quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{4+\frac{1}{1}}=\frac{1}{5},\quad \frac{p_3}{q_3}=\frac{4\cdot1+1}{4\cdot5+4}=\frac{5}{24},\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{1\cdot5+1}{1\cdot24+5}=\frac{6}{29}$。

$\therefore\quad \frac{p_5}{q_5}=\frac{4\cdot6+5}{4\cdot29+24}=\frac{29}{140}$。

3. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$。　　答 $\frac{597}{1522}$。

(解) $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{2},\quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{2+\frac{2}{3}}=\frac{3}{8},\quad \frac{p_3}{q_3}=\frac{4\cdot3+3\cdot1}{4\cdot8+3\cdot2}=\frac{15}{38},\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{5\cdot15+4\cdot3}{5\cdot38+4\cdot8}=\frac{87}{222}$。

$\therefore\quad \frac{p_5}{q_5}=\frac{6\cdot87+5\cdot15}{6\cdot222+5\cdot38}=\frac{597}{1522}$。

4. $3+\frac{2}{5+}\frac{2}{5+}\frac{2}{5+}\cdots\cdots$　　答 $\frac{2627}{779}$。

5. $\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{3}{1+}\frac{4}{1+}\frac{5}{1}$。　　答 $\frac{28}{48}$。

(解) $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{1},\quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{1+\frac{2}{1}}=\frac{1}{3},\quad \frac{p_3}{q_3}=\frac{1\cdot1+3\cdot1}{1\cdot3+3\cdot1}=\frac{4}{6},\quad \frac{p_4}{p_4}=\frac{1\cdot4+4\cdot1}{1\cdot6+4\cdot3}=\frac{8}{18}$。

$\therefore\quad \frac{p_5}{q_5}=\frac{1\cdot8+5\cdot4}{1\cdot18+5\cdot6}=\frac{28}{48}$。

將此答數 $\frac{28}{48}$ 約小之得 $\frac{7}{12}$,然於運算中間約其分母子。則不能合.試再演算如次。

$\frac{p_1}{p_1}=\frac{1}{1},\quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{1+\frac{2}{1}}=\frac{1}{3},\quad \frac{p_3}{q_3}=\frac{1\cdot1+3\cdot1}{1\cdot3+3\cdot1}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{1\cdot2+4\cdot1}{1\cdot3+4\cdot3}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$。

$\therefore\quad \frac{p_5}{q_5}=\frac{1.2+5.2}{1.5+5.3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$ 即誤。

更用算術繁分數求簡之法。如次之所得。必爲正答，

$$\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{3}{1+}\frac{4}{1+}\frac{5}{1}\qquad=\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{3}{1+}\frac{4}{6}\qquad=\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{9}{5}$$

$=\frac{1}{1+}\frac{10}{14}\quad=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$，可知 $\frac{3}{5}$ 決非正答，

6. $\frac{4}{4+}\frac{3}{3+}\frac{2}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$　　答 $\frac{120}{144}$

(解) $\frac{p_1}{q_1}=\frac{4}{4}$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{4}{4+\frac{3}{3}}=\frac{12}{15}$, $\frac{p_3}{q_3}=\frac{2.12+2.4}{2.15+2.4}=\frac{32}{38}$, $\frac{p_4}{q_4}=\frac{1.32+1.12}{1.38+1.15}=\frac{44}{53}$

$\therefore\quad \frac{p_5}{q_5}=\frac{2.44+1.32}{2.53+1.38}=\frac{120}{144}$。

7. $\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$　　答 $\frac{62}{63}$，

(解) $\frac{p_1}{q_1}=\frac{2}{3}$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{2}{3-\frac{2}{3}}=\frac{6}{7}$, $\frac{p_3}{q_3}=\frac{3.6-2.2}{3.7-2.3}=\frac{14}{15}$, $\frac{p_4}{q_4}=\frac{3.14-2.6}{3.15-2.7}=\frac{30}{31}$。

$\therefore\quad \frac{p_5}{q_5}=\frac{3.30-2.14}{3.31-2.15}=\frac{62}{63}$。

8. $\frac{1}{1-}\frac{1}{4-}\frac{1}{1-}\frac{1}{4-}\frac{1}{1-}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$　　答 $\frac{5}{3}$，

(解) $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{1}$, $\frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$, $\frac{p_3}{q_3}=\frac{1.4-1.1}{1.3-1.1}=\frac{3}{2}$, $\frac{p_4}{q_4}=\frac{4.3-1.4}{4.2-1.3}=\frac{8}{5}$,

$\therefore\quad \frac{p_5}{q_5}=\frac{1.8-1.3}{1.5-1.2}=\frac{5}{3}$。

356. 連分數之作法 連分數之形。如 $a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{d+}\cdots$ 其 $a, b, c, d,\cdots\cdots\cdots$ 爲正整數者。則此連分數有特別之性質。而此等性質。可從有理分數作成諸元有限之連分數。以考察之，

設 $\frac{m}{n}$ 爲已知分數，而 m 大於 n。則 n 除 m。以 a 爲其商。而以 p 爲其餘。即得 $\frac{m}{n}=a+\frac{p}{n}$。

乃用p除n。以b爲其商。而以q爲其餘。則$\frac{p}{n}=\frac{1}{\frac{n}{p}}=\frac{1}{b+\frac{q}{p}}$。

又q除p。以c爲其商。而以r爲其餘。則$\frac{q}{p}=\frac{1}{\frac{p}{q}}=\frac{1}{c+\frac{r}{q}}$。

由是$\frac{m}{n}=a+\frac{p}{n}=a+\frac{1}{b}+\frac{q}{p}=a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{r}{q}$,

即 $\frac{m}{n}=a\;\frac{1}{+b}\;\frac{1}{+c+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

m及n無有公約數者。則如上之法則遞次轉除。其次第所得之餘數p, q, r,……必漸減小。至最後之餘數必爲1。故此連分數之元爲有限。

例 $\frac{55}{24}$變爲連分數。

$\frac{55}{24}=2+\frac{7}{24}$, $\frac{7}{24}=\frac{1}{\frac{24}{7}}=\frac{1}{3+\frac{3}{7}}$, $\frac{3}{7}=\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$,

$\therefore \frac{55}{24}=2+\frac{7}{24}=2+\frac{1}{3+\frac{3}{7}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$。

若m及n爲有公約數者。其所作之連分數。與其既約分數所作之連分數相同。

即 $\frac{m}{n}=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots$

例 $\frac{mk}{nk}=a+\frac{pk}{nk}$, $\frac{pk}{nk}=\frac{1}{\frac{nk}{pk}}=\frac{1}{b+\frac{qk}{pk}}$,

$\frac{qk}{pk}=\frac{1}{\frac{pk}{qk}}=\frac{1}{c+\frac{rk}{qk}}$, ………

$\therefore \frac{mk}{nk}=a\;\frac{1}{+b}\;\frac{1}{+c+}\cdots\cdots\cdots$。

例　試將 $\frac{491}{1224}$ 及 3.14159 變爲漸近分數,而求其第四漸近分數,

答 $\frac{71}{177}$, $\frac{355}{113}$

〔解〕 $\frac{491}{1224}=\cfrac{1}{2+\cfrac{242}{491}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{7}{242}}}=\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{34+}\frac{4}{7}$

$=\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{34+}\frac{1}{1+}\frac{3}{4}$。

由是 $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{2}$, $\frac{p_2}{q_2}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{2}{5}$, $\frac{p_3}{q_3}=\frac{34.2+1}{34.5+2}=\frac{69}{172}$,

$\therefore\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{1.69+2}{1.172+5}=\frac{71}{177}$,

次求 3.14159 之第四漸近分數,

$3.14159=\frac{314159}{100000}=3+\frac{14159}{100000}=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{887}{14159}}=3+\frac{1}{7+}\frac{1}{15+}\frac{1}{1+}\frac{33}{854}$

由是 $\frac{p_1}{q_1}=3$, $\frac{p_2}{q_2}=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$, $\frac{p_3}{q_3}=\frac{15.22+3}{15.7+1}=\frac{333}{106}$,

$\therefore\quad \frac{p_4}{q_4}=\frac{1.333+22}{1.106+7}=\frac{355}{113}$,

〔註〕 直徑 1 之圓周爲 3.14159,故直徑 113 之圓周殆近於 355。連分數之性質,及關於連分數之理論,詳述於第七卷中。

查理斯密司氏

霍爾氏，乃托氏

大代數學講義

第柒卷

第貳拾柒編(續)

連分數續

357. 漸近分數之性質 連分數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

而以 $\frac{p_n}{q_n}$ 為其第 n 之漸近分數，茲示其性質如次。

〔第一〕由355章

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_{n-2}q_{n-1}-p_{n-1}q_{n-2}}{(a_nq_{n-1}+q_{n-2})q_{n-1}},$$

去分母得 $$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=-(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})。$$

由同理順次得

$$p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1}=-(p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2}),$$
$$p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2}=-(p_{n-3}q_{n-4}-p_{n-4}q_{n-3}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_3q_2-p_2q_3=-(p_2q_1-p_1q_2)。$$

但 $p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1a_2=1,$

由是 $$\begin{aligned}p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n&=-(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})\\&=(-1)^2(p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2})\\&=(-1)^3(p_{n-3}q_{n-4}-p_{n-4}q_{n-3})=\cdots\cdots\cdots\\&=(-1)^{n-3}(p_3q_2-p_2q_3)\\&=(-1)^{n-2}(p_2q_1-p_1q_2)=(-1)^n\div(-1)^2=(-1)^n。\end{aligned}$$

$\therefore \quad p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$ ......(1)

及 $\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}$ ......(2)

推論 連分數$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots$爲小於1者，則有次之關係。

$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}$, $\qquad \dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}$。

此關係如(1)及(2)。但$p_2q_1-p_1q_2=-1$。

〔第二〕 p_n及q_n之各公約數。亦爲$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$之公約數。而$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$爲± 1。由是知p_n及q_n無公約數，故連分數皆爲已約分數。

〔第三〕 $F=a_1+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}+\cdots\cdots$則於其第n漸近分數。

$\dfrac{p_n}{q_n}=a_1+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}$而以$\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+1}}+\cdots\cdots$代其$\dfrac{1}{a_n}$，即可得F。

故於$\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}$以$a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}+\cdots\cdots$代其$a_n$，則得

$$F=\frac{\left(a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}+\cdots\cdots\right)p_{n-1}+p_{n-2}}{\left(a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}+\cdots\cdots\right)q_{n-1}+q_{n-2}},$$

即 $$F=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}+\left(\dfrac{1}{a_{n+1}+}\cdots\cdots\cdots\cdots\right)p_{n-1}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}+\left(\dfrac{1}{a_{n+1}+}\cdots\cdots\cdots\cdots\right)q_{n-1}}=\frac{p_n+\lambda p_{n-1}}{q_n+\lambda q_{n-1}}。$$

但λ係代$\dfrac{1}{a_{n+1}+}\cdots\cdots\cdots\cdots$。即λ之值爲小於1之正數量。

由是 $F-\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{p_n+\lambda p_{n-1}}{q_n+\lambda q_{n-1}}-\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{\lambda(p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1})}{q_n(q_n+\lambda q_{n-1})}=\dfrac{(-1)^{n-1}\lambda}{q_n(q_n+\lambda q_{n-1})}$。

又 $F-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{p_n+\lambda p_{n-1}}{q_n+\lambda q_{n-1}}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n}{q_{n-1}(q_n+\lambda q_{n-1})}=\dfrac{(-1)^n}{q_{n-1}(q_n+\lambda q_{n-1})}$。

今λ小於1，而q_n大於q_{n-1}，由是知$F\sim\dfrac{p_n}{q_n}$比$F\sim\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$爲小。

故任何之漸近分數。比原連分數。必較前之漸近分數比原連分數爲近,其漸近分數次數愈多。則愈切近於原連分數,

推論 $F-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^{n-1}\lambda}{q_n(q_n+\lambda q_{n-1})}$, 及 $F-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_n(q_n+\lambda q_{n-1})}$。以 $(-1)^{n-1}$ 與 $(-1)^n$ 其正負各異,故 $F-\frac{p_n}{q_n}$, 與 $F-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 其一爲正者。其他必爲負。若F大於 $\frac{p_n}{q_n}$。則必小於 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$。若F小於 $\frac{p_n}{q_n}$。則必大於 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$。從可知F在於 $\frac{p_n}{q_n}$ 與 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 之間。

例 $\frac{491}{1224}$ 之漸近分數爲 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{69}{172}$, $\frac{71}{177}$,

而 $\frac{1}{2}>\frac{491}{1224}>\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}<\frac{491}{1224}<\frac{69}{172}$, 及 $\frac{69}{172}>\frac{491}{1224}>\frac{71}{177}$。

〔第四〕以任何之分數 $\frac{x}{y}$ 比原連分數,而較其第n漸近分數爲近者,則此分數之分母子,比第n漸近分數之分母子爲大。

即 $x>p_n$ 及 $y>q_n$。以 $\frac{p_n}{q_n}$ 比 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 較近於原連分數。而從第三之推論,知F在於此兩漸近分數之間,

即 $\frac{p_n}{q_n}>F>\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 或 $\frac{p_n}{q_n}<F<\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$。

而 $\frac{x}{y}$ 比 $\frac{p_n}{q_n}$ 及 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 更近於連分數。

故知 $\frac{x}{y}$ 必在 $\frac{p_n}{q_n}$ 與 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 之間。即 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\sim\frac{x}{y}<\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\sim\frac{p_n}{q_n}$。

即 $\frac{p_{n-1}y\sim q_{n-1}x}{q_{n-1}y}<\frac{p_{n-1}q_n\sim p_nq_{n-1}}{q_{n-1}q_n}$。

即 $\frac{p_{n-1}y\sim q_{n-1}x}{q_{n-1}y}<\frac{1}{q_nq_{n-1}}$ $\therefore$ $q_n(p_{n-1}y\sim q_{n-1}x)<y$,

$p_{n-1}y\sim q_{n-1}x$ 爲整數量。故 $y>q_n$

而 $\frac{x}{y}$ 爲在於 $\frac{p_n}{q_n}$ 與 $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 之間,凡 p_n 比 p_{n-1} 大。

q_n 比 q_{n-1} 大。今 y 比 q_n 大，故知 x 比 p_n 爲大.

〔第五〕由第三而知 $F \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{1}{q_{n-1}(q_n+\lambda q_{n-1})}$。而 λ 爲小於 1 之正數量，則是 q_n+q_{n-1} 比 $q_n+\lambda q_{n-1}$ 爲大，

故 $\frac{1}{q_{n-1}(q_n+q_{n-1})} < \frac{1}{q_{n-1}(q_n+\lambda q_{n-1})}$。

即 $F \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} > \frac{1}{q_{n-1}(q_n+q_{n-1})}$。

又以 $F \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{1}{q_{n-1}q_n}$。

故任何之漸近分數與原連分數之差。爲在於 $\frac{1}{d_1d_2}$ 與 $\frac{1}{d_1(d_1+d_2)}$ 之間。但 d_1 及 d_2 爲其漸近分數之分母及其次之漸近分數之分母。

例 $\frac{491}{1224}$ 之漸近分數爲 $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{69}{172}, \cdots\cdots\cdots$

而 $\frac{491}{1224}-\frac{2}{5}$ 爲在於 $\frac{1}{5\times172}$ 與 $\frac{1}{5(5+172)}$ 之間。

〔第一例〕p_r/q_r 爲連分數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\cdots$ 之第 r 項。

則 $\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{a_{n-2}+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+a_2+}\frac{1}{a_1}$。

何則 $p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$, $\quad p_{n-1}=a_{n-1}p_{n-2}+p_{n-3}$ $\quad \cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots$

$p_2=a_2p_1+1$, $\quad$ 又 $p_1=a_1$。

由是 $$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n+\frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = a_n+\cfrac{1}{\cfrac{p_{n-1}}{p_{n-2}}} = a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{p_{n-3}}{p_{n-2}}}$$

$$= a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{\cfrac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}} = a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_{n-2}+\cfrac{p_{n-4}}{p_{n-3}}}} = \cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots$$

$$= a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{a_{n-2}+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+a_2+}\frac{1}{a_1}。$$

由同法 $\frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{a_{n-2}+}\cdots\cdots\frac{1}{+a_3+}\frac{1}{a_2}$。

〔第二例〕以n+1除n至n商爲$\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\cdots$但n爲正整數，

$$\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2-\frac{n-1}{n}},\quad \frac{n-1}{n}=\frac{1}{2-\frac{n-2}{n-1}},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

而 $\frac{2}{3}=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}$。由是 $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2-\frac{n-1}{n}}=\frac{1}{2-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{n-2}}$

$$=\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\cdots\cdots\cdots \text{至 n 商。}$$

〔第三例〕$\frac{p_r}{q_r}$爲$\frac{a}{b+}\frac{a}{b+}\frac{a}{b+}\cdots\cdots$之第r漸近分數。則$p_{n+1}=aq_n$，

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{a}{b+\frac{p_n}{q_n}}=\frac{aq_n}{bq_n+p_n}。$$

惟 $q_{n+1}=bq_n+aq_{n-1}$，若 $aq_{n-1}=p_n$，則 $p_{n+1}=aq_n$，

令 $p_1=a$，$q_1=b$，$p_2=ab$，$q_2=b^2+a$，$p_3=a(b^2+a)$，………

則是$aq_1=p_2$，$aq_2=p_3$，由此遞推得$aq_3=p_4$……至$aq_n=p_{n+1}$即爲本例之證。

例題三十六

1. 連分數之各分子爲1而以$\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\frac{p_3}{q_3}$爲其連續三漸近分數。

則 $p_3-p_1:q_3-q_1=p_2:q_2$。

〔證〕由355推論一。$p_3=A\,p_2+p_1$及$q_3=A\,q_2+q_1$

$\therefore\ p_3-p_1=A\,p_2$及$q_3-q_1=A\,q_2$ $\therefore\ p_3-p_1:q_3-q_1=p_2:q_2$

2. 以$\frac{p_n}{q_n}$爲$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\cdots\cdots$之第n漸近分數，

則 $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_n$，

〔證〕$p_n=b_np_{n-1}+a_np_{n-2}$ 及 $q_n=b_nq_{n-1}+a_nq_{n-2}$

故 $p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(b_np_{n-1}+a_np_{n-2})q_{n-1}-(b_nq_{n-1}+a_nq_{n-2})p_{n-1}$

$$=-a_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1}),$$

同理 $p_{n-1}q_{n-2}-q_{n-1}p_{n-2}=-a_{n-1}(p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2})$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_2q_1-q_2p_1=-a_1a_2$$

由是 $p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-1)^2a_na_{n-1}(p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2})=\cdots\cdots$

$$=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots\cdots a_n。$$

3. 將兩種尺度比較，先使其零點相合。第一尺之第百分點，若與第二尺之第六十三分點相合。則其第二尺之第十七分點，必與第一尺之第二十七分點近合。試證明之。

〔證〕求63/100之漸近分數。

即 $\dfrac{63}{100}=\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{3}$

∴ 其漸近分數為 $\dfrac{1}{1},\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{8},\dfrac{12}{19},\dfrac{17}{27}$。

由是 $\dfrac{63}{100}$ 即為27與17近合。

4. 如 $a_1, a_2,\cdots\cdots a_n$ 為調和級數，則 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2-}\,\dfrac{1}{2-}\cdots\cdots\dfrac{1}{2-}\,\dfrac{a_2}{a_1}$。

〔證〕由題意 $\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}=\cdots\cdots=\dfrac{1}{a_{n-2}}-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_n}$。

∴ $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{a_{n-2}}{2a_{n-2}-a_{n-1}}=\dfrac{1}{2-}\,\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$。

同理 $\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\dfrac{1}{2-}\,\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}},\quad \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}=\dfrac{1}{2-}\,\dfrac{a_{n-3}}{a_{n-4}}\cdots\cdots\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{1}{2-}\,\dfrac{a_2}{a_1}$。

由是 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2-}\,\dfrac{1}{2-}\,\dfrac{1}{2-}\cdots\cdots\dfrac{a_2}{a_1}$。

5. $na_1+\dfrac{1}{na_2+}\,\dfrac{1}{na_3+}\,\dfrac{1}{na_4+}\cdots\cdots=n\left(a_1+\dfrac{1}{n^2a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+}\,\dfrac{1}{n^2a_4+}\cdots\cdots\right)$

〔證〕$\dfrac{1}{na_r+}\,\dfrac{1}{na_{r+1}+}\cdots\cdots=u_r$ 則

$$na_1+\frac{1}{na_2+}\,\frac{1}{na_3+}\,\frac{1}{na_4+}\cdots\cdots=na_1+\cfrac{1}{na_2+\cfrac{1}{na_3+u_4}}$$

$$=n\left(a_1+\cfrac{1}{n^2a_2+\cfrac{n}{na_3+u_4}}\right)=n\left(a_1+\frac{1}{n^2a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{u_4}{n}\right)。$$

$$\frac{u_4}{n}=\frac{1}{n}\left(\cfrac{1}{na_4+\cfrac{1}{na_5+u_5}}\right)=\frac{1}{n^2a_4+}\frac{1}{a_5+}\frac{u_5}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad na_1+\frac{1}{na_2+}\frac{1}{na_3+}\frac{1}{na_4+}\cdots\cdots=n\left(a_1+\frac{1}{n^2a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{n^2a_4+}\cdots\cdots\right)$$

〔注意〕本題之恆同式以n除之。即得

$$\left(na_1+\frac{1}{na_2+}\frac{1}{na_3+}\frac{1}{na_4+}\cdots\cdots\right)\div n=a_1+\frac{1}{n^2a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{n^2a_4+}\cdots\cdots。$$

6. $P=\frac{a}{a+}\frac{b}{b+}\frac{c}{c+}\cdots\cdots+\frac{k}{k+1}$ 及 $Q=\frac{a}{b+}\frac{b}{c+}\frac{c}{d+}\cdots\cdots+\frac{b}{k}$

則 $P(a+Q+1)=a+Q$。

〔證〕 $Q_2=\frac{a}{b}$, $P_2=\frac{a}{a+}\frac{b}{b+1}=\frac{1}{1+}\frac{b}{a(b+1)}=\frac{1}{1+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b}$

$$=\frac{1}{1+}\frac{1}{a+Q_2}=\frac{a+Q_2}{a+Q_2+1}。$$

$Q_3=\frac{a}{b+}\frac{b}{c}$, $P_3=\frac{a}{a+}\frac{b}{b+}\frac{c}{c+1}=\frac{1}{1+}\frac{b}{ba+}\frac{ca}{c+1}=\frac{1}{1+}\frac{1}{a+}\frac{ca}{b(c+1)}$

$$=\frac{1}{1+}\frac{1}{a+Q_3}=\frac{a+Q_3}{a+Q_3+1}。$$

今假定於P_{n-1}, Q_{n-1}亦有此關係 $P_{n-1}=\frac{a+Q_{n-1}}{a+Q_{n-1}+1}$。

則 $Q_n=\frac{a}{b+Q_{n-1}}$。而 $P_n=\frac{a}{a+P_{n-1}}=\frac{a}{a+}\frac{1}{1+}\frac{1}{b+Q_{n-1}}$

$$=\frac{1}{1+}\frac{1}{a+}\frac{a}{b+Q_{n-1}}=\frac{1}{1+}\frac{1}{a+Q_n}=\frac{a+Q_n}{a+Q_n+1}。$$

即於P_{n-1}, Q_{n-1}此關係爲合理。則於P_nQ_n，亦必爲合理，

故一般 $P=\frac{a+Q}{a+Q+1}$。即 $P(a+Q+1)=a+Q$，

7. 求 $\frac{n}{n+}\frac{n-1}{n-1+}\frac{n-2}{n-2+}\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{2}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$ 之值。 答 $\frac{n+1}{n+2}$

〔解〕 $u_1=\frac{1}{1+}\frac{1}{2}=\frac{2}{3}=\frac{1+1}{1+2}$, $u_2=\frac{2}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2+2}$,

今假定 $u_n=\frac{n+1}{n+2}$, 則 $u_{n+1}=\frac{n+1}{n+1+u_n}=\frac{n+1}{n+1+}\frac{n+1}{n+2}=\frac{(n+1)+1}{(n+1)+2}$,

u_n 若爲合理。則 u_{n+1} 亦爲合理。故即得所求之值,

8. n 爲偶數或奇數。則 $\frac{1}{1-}\frac{1}{4-}\frac{1}{1-}\frac{1}{4-}\cdots\cdots$ 至 n 商 $=\frac{2n}{n+1}$,

〔證〕 $u_1=\frac{1}{1}=\frac{2\,1}{1+1}$, $u_2=\frac{1}{1-}\frac{1}{4}=\frac{4}{3}=\frac{2.2}{2+1}$。今假定 $u_n=\frac{2n}{n+1}$,

則 $u_{n+2}=\frac{1}{1-}\frac{1}{4-u_n}=\frac{1}{1-}\frac{1}{4-}\frac{2n}{n+1}=\frac{2(n+2)}{(n+2)+1}$。

由是 u_n 爲合理。則 u_{n+2} 亦爲合理。而 u_1 爲合理。故對於 u_3, u_5, 等之奇數項,皆爲合理, 又 u_2 爲合理,故對於 u_4, u_6 等之偶數項。皆爲合理。

9. 遞昇連分數 $\frac{b_1+}{a_1}\frac{b_2+}{a_2}\frac{b_3+}{a_3}\cdots\cdots$ 等於 $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_1a_2}+\frac{b_3}{a_1a_2a_3}+\cdots\cdots$.

〔證〕 $\frac{b_1+}{a_1}\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_1+\frac{b_2}{a_2}}{a_1}=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_1a_2}$。

又 $\frac{b_1+}{a_1}\frac{b_2+}{a_2}\frac{b_3}{a_3}=\frac{b_1+\frac{b_2+\frac{b_3}{a_3}}{a_2}}{a_1}=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_1a_2}+\frac{b_3}{a_1a_2a_3}+\cdots\cdots$ 以下順次推之。

10. 以 p_n 爲連分數 $\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\cdots\cdots\cdots$ 第 n 漸近分數之分子, 試證其線關係爲從級數 p_1^2, p_2^2, p_3^2,$\cdots\cdots\cdots$ 之各連續四項而成之者。又問此關係如何。

〔解〕 於本題所謂線關係 Linear Relation) 者。即一次之恆同式也, (譯者補註) 線爲幾何學上之名詞, 於代數學, 謂之一次式,

$p_n=b_np_{n-1}+a_np_{n-2}$ 及 $p_{n+1}=b_{n+1}p_n+a_{n+1}p_{n-1}$

由是 $(p_n-b_np_{n-1})^2=a_n^2p^2_{n-2}$ 及 $(b_{n+1}p_n+a_{n+1}p_{n-1})^2=p^2_{n+1}$

$\therefore\quad b_{n+1}a_{n+1}(p_n-b_np_{n-1})^2+b_n(b_{n+1}p_n+a_{n+1}p_{n-1})^2$

$\quad=b_{n+1}a_{n+1}a^2{}_np^2{}_{n-2}+b_np^2{}_{n+1}$

即 $b_{n+1}a_{n+1}(p^2{}_n-2b_np_np_{n-1}+b^2{}_np^2{}_{n-1})$

$\qquad\qquad+b_n(b^2{}_{n+1}p^2{}_n+2a_{n+1}b_{n+1}p_np_{n-1}+a^2{}_{n+1}p^2{}_{n-1})$

$=b_{n+1}a_{n+1}a^2{}_np^2{}_{n-2}+b_np^2{}_{n+1}$

則 $b_n p^2_{n+1} - (b_{n+1}a_{n+1} + b^2_{n+1}b_n)p^2_n$

$$-a_{n+1}b_n(b_{n+1}b_n + a_{n+1})p^2_{n-1} + a_{n+1}b_{n+1}a^2_n p^2_{n-2} = 0.$$

由同理 $b_{n-1}p^2_n - (b_n a_n + b^2_n b_{n-1})p^2_{n-1} - a_n b_{n-1}(b^n b_{n-1} + a_n)p^2_{n-2}$

$$+ a_n b_n a^2_{n-1} p^2_{n-3} = 0。$$

11. 以 $\frac{p_r}{q_r}$ 爲 $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}$……之第r漸近分數。

則 $p_{2n+2} = p_{2n} + bq_{2n}$, 及 $q_{2n+2} = ap_{2n} + (ab+1)q_{2n}$ 試證明之。

〔證〕 $\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} = \frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n}+bq_{2n}}{(ab+1)q_{2n}+ap_{2n}}$。

由是 $p_{2n+2} = p_{2n} + bq_{2n}$, 及 $q_{2n+2} = ap_{2n} + (ab+1)q_{2n}$

12. 以 $\frac{p_r}{q_r}$ 爲 $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}$………之第r漸近分數。

則 $p_{3n+3} = bp_{3n} + (bc+1)q_{3n}$, 試證之,

〔證〕 $\frac{p_{3n+3}}{q_{3n+3}} = \frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{p_{3n}}{q_{3n}} = \frac{(bc+1)q_{3n}+bp_{3n}}{(abc+a+c)q_{3n}+ap_{3n}}$。

由是 $p_{3n+3} = bp_{3n} + (bc+1)q_{3n}$

13. 以 $\frac{p_r}{q_r}$ 爲 $\frac{a}{1+}\frac{b}{1+}\frac{a}{1+}\frac{b}{1+}$………之第r漸近分數。

則 $p_{2n}q_{2n-1} - q_{2n}p_{2n-1} = -a^n b^n$。

〔證〕 $p_{2n} = p_{2n-1} + bp_{2n-2}$, 及 $q_{2n} = q_{2n-1} + bq_{2n-2}$,

$\therefore$ $p_{2n}q_{2n-1} - q_{2n}p_{2n-1} = (p_{2n-1} + bp_{2n-2})q_{2n-1} - (q_{2n-1} + bq_{2n-2})p_{2n-1}$

$= -b(p_{2n-1}q_{2n-2} - q_{2n-1}p_{2n-2})$ ……………………………………(1)

同法 $p_{2n-1}q_{2n-2} - q_{2n-1}p_{2n-2} = a(p_{2n-2}q_{2n-3} - q_{2n-2}p_{2n-3})$……………(2)

(1) 及 (2) 兩邊相乘而以 $p_{2n-1}q_{2n-2} - q_{2n-1}p_{2n-2}$ 除之得

$p_{2n}q_{2n-1} - q_{2n}p_{2n-1} = ab(p_{2n-2}q_{2n-3} - q_{2n-2}p_{2n-3})$。

由同理 $p_{2n-2}q_{2n-3} - q_{2n-2}p_{2n-3} = ab(p_{2n-4}q_{2n-5} - q_{2n-4}p_{2n-5})$。

……………………… = ………………………

$$p_2q_1 - p_1q_2 = -ab。$$

由乘法得 $p_{2n}q_{2n-1} - p_{2n-1}q_{2n} = -a^n b^n$。

14. 以 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲 $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}$………之第n漸近分數。

則 $q_{2n} = p_{2n+1}$, 及 $bp_{2n+1} = ap_{2n} + abp_{2n+1}$

(證) $\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\frac{p_{2n}+bq_{2n}}{ap_{2n}+(ab+1)q_{2n}}$。

由是 $p_{2n+2}=p_{2n}+bq_{2n}$, 及 $q_{2n+2}=ap_{2n}+(ab+1)q_{2n}$

但 $p_{2n+2}=bp_{2n+1}+p_{2n}$, 及 $q_{2n+2}=bq_{2n+1}+q_{2n}$

則 $p_{2n}+bq_{2n}=bp_{2n+1}+p_{2n}$ $\qquad\therefore\quad q_{2n}=p_{2n+1}$

又 $ap_{2n}+(ab+1)q_{2n}=bq_{2n+1}q_{2n}$

∴ $bq_{2n+1}=ap_{2n}+abq_{2n}=ap_{2n}+abp_{2n+1}$

15. $\frac{p}{q}=a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+k}\frac{1}{+l}$ 則 $\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\cdots\cdots\cdots$

$\frac{1}{+c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a}\sim\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b}=\frac{1}{pq}$。

(證) 以 $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, $\cdots\cdots\frac{p_n}{q_n}$ 爲 $\frac{p}{q}$ 之漸近分數,

則 $p=lp_n+p_{n-1}$, $p_n=kp_{n-1}+p_{n-2}$, $\cdots\cdots$ $p_3=cp_2+p_1$, $p_2=ab+1$, $p_1=a$,

然則 $\frac{p}{p_n}=l+\frac{1}{\frac{p_n}{p_{n-1}}}$, $\frac{p_n}{p_{n-1}}=k+\frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}$, $\frac{p_3}{p_2}=c+\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}}$, $\frac{p_2}{p_1}=b+\frac{1}{a}$。

由是 $\frac{p_n}{p}=\frac{1}{\frac{p}{p_n}}=\frac{1}{l}+\frac{1}{k+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a}$。

又 $q=lq_n+q_{n-1}$, $q_n=kq_{n-1}+q_{n-2}$, $\cdots\cdots\cdots q_3=cq_2+q_1$, $q_2=b$, $q_1=1$,

由是 $\frac{q_n}{q}=\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b}$。

由357章(1)之公式而知 $pq_n-p_nq=(-1)^n$。

∴ $\frac{p_n}{p}\sim\frac{q_n}{q}=\frac{1}{pq}$。即 $\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a}\sim\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b}=\frac{1}{pq}$。

16. 試作 $\frac{P}{Q}$ 之連分數,其第一次除得商爲a,而其最後之漸近分數爲 $\frac{p}{q}$,則作 $\frac{Q}{q}$ 之連分數,其最後之漸近分數爲 $(P-aQ)/(p-pq)$,

(證) $\frac{P}{Q}=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+k+}\frac{1}{l}$ 而以 $\frac{p}{q}$ 爲此最後之漸近分數,故由15題證得 $\frac{Q}{q}=l+\frac{1}{k+}\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b}$

及 $\frac{P}{p}=1+\frac{1}{k+}\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a}$。

若以 x/y 爲 Q/q 最後之漸近分數。則 $P=aQ+x,\ p=aq+y$。

由是 $\frac{x}{y}=\frac{P-aQ}{p-aq}$。

17. x之值。爲接近於連分數。連續兩漸近分數 $\frac{p}{q}$ 及 $\frac{p'}{q'}$。

則因 $\frac{p}{q}\gtreqless\frac{p'}{q'}$ 而得 $\frac{pp'}{qq'}\gtreqless x^2$。

〔證〕 由357章第三而得 $x=\frac{p'+\lambda p}{q'+\lambda q}$。但 λ 爲小於1之正數。

由是 $pp'-qq'x^2=pp'-qq'\left(\frac{p'+\lambda p}{q'+\lambda q}\right)^2$。

即 $pp'-qq'x^2=\frac{pp'(q'+\lambda q)^2-qq'(p'+\lambda p)^2}{(q'+\lambda q)^2}=\frac{(p'q'-\lambda^2pq)(pq'-p'q)}{(q'+\lambda q)^2}$。

而 $\lambda<1,\ p<p',\ q<q'$。故 $p'q'-\lambda^2pq$ 爲正數。因是 $pp'-qq'x^2$。當視 $pq'-p'q$ 爲正或負而定其爲正或負。故因 $\frac{p}{q}\gtreqless\frac{p'}{q'}$ 而得 $\frac{pp'}{qq'}\gtreqless x^2$。

一般之漸近分數

358. 問題求第n漸近分數。

於355. 章所述之漸近分數。均從連續三漸近分數之關係式求之。即此連續三漸近分數中知其二。乃可決定其第三漸近分數。且可決定其次之漸近分數。然有時求第n漸近分數。可不必用其前之漸近分數以求得之。爰示其例如次。

〔第一例〕求連分數 $\frac{1}{3+}\frac{1.3}{4+}\frac{3.5}{4+}\frac{5.7}{4+}\cdots\cdots$之第n漸近分數。

第n次之元爲 $\frac{(2n-3)(2n-1)}{4}$。故 $p_n=4p_{n-1}+(2n-3)(2n-1)p_{n-2}$。於其兩邊各減以 $(2n+1)p_{n-1}$。

則 $p_n-(2n+1)p_{n-1}=-(2n-3)p_{n-1}+(2n-3)(2n-1)p_{n-2}$,

即 $p_n-(2n+1)p_{n-1}=-(2n-3)\{p_{n-1}-(2n-1)p_{n-2}\}$。

由同法 $p_{n-1}-(2n-1)p_{n-2}=-(2n-5)\{p_{n-2}-(2n-3)p_{n-3}\}$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_3-7p_2=-3\{p_2-5p_1\},$$

而 $\frac{p_1}{q_1}=\frac{1}{3}$, 及 $\frac{p_2}{q_2}=\frac{1}{3}+\frac{1.3}{4}=\frac{4}{15}$. 故 $p_1=1$, $p_2=4$,

則 $p_2-5p_1=-1$。

由是 $p_n-(2n+1)p_{n-1}=-(2n-3)\{p_{n-1}-(2n-1)p_{n-2}\}$

$$=(-1)^2(2n-3)(2n-5)\{p_{n-2}-(2n-3)p_{n-3}\}$$

$$=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=(-1)^{n-1}(2n-3)(2n-5)\cdots\cdots3.1.$$

此兩邊以 $1.3\cdots\cdots(2n-5)(2n-3)(2n-1)(2n+1)$ 除之,得

$$\frac{p_n}{1.3\cdots\cdots(2n+1)}-\frac{p_{n-1}}{1.3\cdots\cdots(2n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)},$$

而以 $n-1$ 代其 n 逐次如斯,得

$$\frac{p_{n-1}}{1.3\cdots\cdots(2n-1)}-\frac{p_{n-2}}{1.3\cdots\cdots(2n-3)}=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n-3)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_2}{1.3.5}-\frac{p_1}{1.3}=\frac{(-1)^1}{3.5}$$

及

$$\frac{p_1}{1.3}=\frac{1}{1.3}。$$

由加法得

$$\frac{p_n}{1.3.5\cdots\cdots(2n+1)}=\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)}。\qquad(1)$$

又 $q_n=4q_{n-1}+(2n-3)(2n-1)q_{n-2}$ 與前之求 p_n 同法,

得 $q_n-(2n+1)q_{n-1}=-(2n-3)\{q_{n-1}-(2n-1)q_{n-2}\}$

同理 $q_{n-1}-(2n-1)q_{n-2}=-(2n-5)\{q_{n-2}-(2n-3)q_{n-3}\}$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_3-7q_2=-3\{q_2-5q_1\}$$

但 $q_1=3$, $q_2=15$ 故 $q_2-5q_1=0$。

由是 $q_n-(2n+1)q_{n-1}=(-1)^{n-2}3.5\cdots\cdots(2n-3)\{q_2-5q_1\}=0$。

兩邊以$1.3.5\ldots\ldots(2n-3)(2n-1)(2n+1)$除之。得

$$\frac{q_n}{1.3.5\ldots\ldots(2n+1)}-\frac{q_{n-1}}{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}=0,$$

即 $$\frac{q_n}{1.3.5\ldots\ldots(2n+1)}=\frac{q_{n-1}}{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}$$

同法 $$=\frac{q_{n-2}}{1.3.5\ldots\ldots(2n-3)}$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=\frac{q_2}{1.3.5}=\frac{q_1}{1.3}=1, \qquad (2)$$

(1)以(2)除之，得 $\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\ldots\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$。

即爲所求之第n漸近分數。

[第二例] 求 $\frac{1}{1+}\frac{2}{2+}\frac{3}{3+}\frac{4}{4+}\ldots\ldots$之第n漸近分數。

$p_n=np_{n-1}+np_{n-2}$, $\therefore\ p_n-(n+1)p_{n-1}=-\{p_{n-1}-np_{n-2}\}$。

同法 $p_{n-1}-np_{n-2}=-\{p_{n-2}-(n-1)p_{n-3}\}$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_3-4p_2=-\{p_2-3p_1\}$$

但 $p_1=1$, $p_2=2$, 故 $p_2-3p_1=-1$,

$$\therefore\ p_n-(n+1)p_{n-1}=(-1)\{p_{n-1}-np_{n-2}\}$$
$$=(-1)^2\{p_{n-2}-(n-1)p_{n-3}\}$$
$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=(-1)^{n-1}.$$

兩邊以$\underline{|n+1}$除之。得 $\frac{p_n}{\underline{|n+1}}-\frac{p_{n-1}}{\underline{|n}}=\frac{(-1)^{n-1}}{\underline{|n+1}}$,

同理 $$\frac{p_{n-1}}{\underline{|n}}-\frac{p_{n-2}}{\underline{|n-1}}=\frac{(-1)^{n-2}}{\underline{|n}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{p_2}{\underline{|3}}-\frac{p_1}{\underline{|2}}=\frac{(-1)^1}{\underline{|3}},$$

$$\frac{p_1}{\underline{|2}}=\frac{1}{\underline{|2}},$$

$\therefore \quad \dfrac{p_n}{\lfloor n+1} = \dfrac{1}{\lfloor 2} - \dfrac{1}{\lfloor 3} + \cdots\cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n+1}$。

又 $\dfrac{q_n}{\lfloor n+1} = 1 - \dfrac{1}{\lfloor 2} + \dfrac{1}{\lfloor 3} - \cdots\cdots + \dfrac{(-1)^n}{\lfloor n+1}$。

由是可得$\dfrac{p_n}{q_n}$。

若n爲無限大，則由第廿四編指數之定理，得

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}$$

故 $\dfrac{1}{1+}\dfrac{2}{2+}\dfrac{3}{2+}\dfrac{4}{4+}\cdots\cdots$至無限項 $= \dfrac{1}{e-1}$。

359. 循環連分數 (Periodic Continud Fractions) 連分數之諸元，依相同之順序連續而下者。謂之循環連分數。

而循環連分數。亦如算術之循環小數。分純循環混循環兩種。

例 $a + \dfrac{1}{b+}\dfrac{1}{c+}\dfrac{1}{a+}\dfrac{1}{b+}\dfrac{1}{c+}\dfrac{1}{a+}\cdots\cdots$爲純循環連分數。

$\dfrac{1}{a+}\dfrac{1}{b+}\dfrac{1}{b+}\dfrac{1}{b+}\cdots\cdots$爲混循環連分數。

360. 問題 循環連分數。其循環之元。祇有一個者。求其第n漸近分數。此連分數。爲

$a + \dfrac{b}{c+}\dfrac{b}{c+}\dfrac{b}{c+}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$。

其第二以下之漸近分數。有$p_n = cp_{n-1} + bp_{n-2}$之關係，其c及b爲常數。故n爲任何値皆合理，茲設循環級數，

$u_1 + u_2x + u_3x^2 + \cdots\cdots + u_nx^{n-1} + \cdots\cdots$爲

由 $\dfrac{A+Bx}{1-cx-bx^2}$之展開式而成。而其第二項以下連次之係數，爲由其級數率$u_n = cu_{n-1} + bu_{n-2}$之關係而連結者，由是令$u_1 = p_1$，$u_2 = p_2$及一切之項$u_n = p_n$，即可得A及B之値。

何則循環級數。$p_1 + p_2x + p_3x^2 + \cdots\cdots + p_nx^{n-1} + \cdots\cdots$之級數率爲$1-cx-bx^2$。而其母函數爲$\dfrac{p_1+(p_2-cp_1)x}{1-cx-bx^2}$。

而 $A=p_1=a,\quad B=p_2-cp_1=(ac+b)-ac=b,$

故 $\dfrac{a+bx}{1-cx-bx^2}=p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots\cdots+p_nx^{n-1}+\cdots\cdots$ 其 x^{n-1} 之係數。爲 p_n,

惟 p_n 爲 $a+\dfrac{b}{c+}\dfrac{b}{c+}\cdots\cdots$ 之第 n 漸近分數 $\dfrac{p_n}{q_n}$ 之分子。而 p_n 即等於 $\dfrac{a+bx}{1-cx-bx^2}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。

由同法第 n 漸近分數 $\dfrac{p_n}{q_n}$ 之分母。q_n 等於 $\dfrac{q_1+(q_2-cq_1)x}{1-cx-bx^2}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。因 $q_1=1,\ q_2-cq_1=c-c.1=0,$

故 q_n 等於 $\dfrac{1}{1-cx-bx^2}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。由是得第 n 漸近分數。

〔第一例〕求 $1+\dfrac{3}{2+}\dfrac{3}{2+}\dfrac{3}{2+}\cdots\cdots$ 之第 n 漸近分數。

第 n 漸近分數之分子。爲等於 $\dfrac{a+bx}{1-cx-dx^2}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。

今 $a=1,\quad b=3,\quad c=2,$

故第 n 漸近分數之分子。爲等於 $\dfrac{1+3x}{1-2x-3x^2},$

即 $\dfrac{3}{2(1-3x)}-\dfrac{1}{2+2x}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數，即 $p_n=\dfrac{1}{2}\{3^n+(-1)^n\},$

又 q_n 等於 $\dfrac{1}{1-2x-3x^2}$ 即 $\dfrac{3}{4(1-3x)}+\dfrac{1}{4(1+x)}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。

即 $q_n=\dfrac{1}{4}\{3^n-(-1)^n\}$。

由是求得第 n 漸近分數，爲 $\dfrac{2\{3^n+(-1)^n\}}{3^n-(-1)^n}$。

〔第二例〕求 $\dfrac{a}{b+}\dfrac{c}{d+}\dfrac{a}{b+}\dfrac{c}{d+}\cdots\cdots$ 之第 n 漸近分數。其關係式。爲 $p_{2n}=dp_{2n-1}+cp_{2n-2},\quad p_{2n-1}=bp_{2n-2}+ap_{2n-3}$ 及 $p_{2n-2}=dp_{2n-3}+cp_{2n-4},$

由此三方程式消去 p_{2n-1} 及 p_{2n-3} 而得

$p_{2n}-(a+c+bd)p_{2n-2}+acp_{2n-4}=0,$

此結果a及c為等勢式。又b及d為等勢式。則是$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$互換，其值不變，

故 $p_{2n-1}-(a+c+bd)p_{2n-3}+acp_{2n-5}=0$，

其n為任何值，皆合於理，依此作級數率而得

$$1-(a+c+bd)x^2+acx^4。$$

由是知p_n為 $\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}$ 展開式中 x^{n-1} 之係數，

惟於循環級數$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$之母函數。為$\frac{a_0+(a_1+pa_0)x}{1+px+qx^2}$。

茲循環級數$p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots\cdots$其級數率為$1-(a+c+bd)x^2+acx^4$。即 $1+0.x-(a+c+bd)x^2+0.x^3+acx^4$。則由同理可求得其A, B, C, D之值如次，

$A=p_1=\frac{a}{b}$之分子$=a$, $B=p_2+0.p_1=\frac{a}{b+}\frac{c}{d}$之分子$=ad$,

$C=p_3+0.p_2+\{-(a+c+bd)\}p_1=\frac{a}{b+}\frac{c}{d+}\frac{a}{b}$之分子。$-(a+c+bd)a$

$=a(bd+a)-(a+c+bd)a=-ac$,

$D=p_4+0.p_3+\{-(a+c+bd)\}p_2+0.p_1$

$=\frac{a}{b+}\frac{c}{d+}\frac{a}{b+}\frac{c}{d}$之分子 $-(a+c+bd)\frac{a}{b+}\frac{c}{d}$之分子。

$=a(bd^2+cd+ad)-(a+c+bd)ad=0$，

由是 $\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}=\frac{a+adx-acx^2}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}$。

乃得p_n為$\frac{a+adx-acx^2}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}$展開式中$x^{n-1}$之係數。

由同法而得q_n為$\frac{b+(bd+c)x-acx^2}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}$展開式中$x^{n-1}$之係數，

由是可求得第n漸近分數$\frac{p_n}{q_n}$之值，

361. 連分數之歛級 連分數之元，其個數多至無限者。則欲決定歛級數。抑為發級數。其法亦當研究之。

若求得一式。能實表第n漸近分數，則其連分數爲歛級與否。固可用前所述之規則以考定之。然於n增大時。欲實求其第n漸近分數之値。頗非易易。

連分數$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+$由357章而得

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_n}{q_{n-1}q_n}。$$

由此推之。$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=(-1)^{n-2}\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}}{q_{n-2}q_{n-1}}$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_2}{q_2}-\frac{a_1}{q_1}=\frac{a_1a_2}{q_1q_2}。$$

以上相加 $\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_1}{q_1}-\frac{a_1a_2}{q_1q_2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_n}{q_{n-1}q_n}$。

可見連分數之元俱爲正。則此右邊之各項正負相間。又各項均比前項爲小。試將第r項與前項比。如

$$\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_r}{q_{r-1}q_r}:\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_{r-1}}{q_{r-2}q_{r-1}}=\frac{a_rq_{r-2}}{q_r}。$$

而此$\frac{a_rq_{r-2}}{q_r}$爲小於1。因$q_r=b_rq_{r-1}+a_rq_{r-2}$而以$q_r$除之。爲

$1=\frac{b_rq_{r-1}}{q_r}+\frac{a_rq_{r-2}}{q_r}$。 $\therefore\quad 1>\frac{a_rq_{r-2}}{q_r}$。

故此右邊由277章定理五。而知其爲歛級數。

即 $\frac{p_n}{q_n}$爲歛級數。

又據突翰多爾(Todhunter)氏大代數學之783章所述，得連分數歛級之定理。

$b_nb_{n-1}:a_n$其比常大於某有限數量。則此連分數爲歛級數。證明之如次。

設k爲某有限數量。則$\frac{b_nb_{n-1}}{a_n}>k$。 即 $b_nb_{n-1}>a_nk$。

而以前所得級數之第n項爲u_n 則 $u_n=\frac{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{n-1}a_n}{q_{n-1}q_n}$。

但 $q_n=b_nq_{n-1}+a_nq_{n-2}$

故 $u_n=\dfrac{a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}a_n}{q_{n-1}q_n}=\dfrac{a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}a_n}{q_{n-1}(a_nq_{n-2}+b_nq_{n-1})}$

$$=\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}}{q_{n-1}\left(q_{n-2}+\dfrac{b_n}{a_n}q_{n-1}\right)}。$$

但 $b_nb_{n-1}>ka_n$ 則 $\dfrac{b_n}{a_n}>\dfrac{k}{b_{n-1}}$

$\therefore\ \dfrac{b_n}{a_n}q_{n-1}>\dfrac{k}{b_{n-1}}q_{n-1}=\dfrac{k}{b_{n-1}}(b_{n-1}q_{n-2}+a_{n-1}q_{n-2})>kq_{n-2}$

由是 $u_n=\dfrac{a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}}{q_{n-1}\left(q_{n-2}+\dfrac{b_n}{a_n}q_{n-1}\right)}<\dfrac{a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}}{q_{n-1}(q_{n-2}+kq_{n-2})}$,

即 $u_n<\dfrac{a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}}{q_{n-2}q_{n-1}(1+k)}$。

惟因 $u_1=\dfrac{a_1}{q_1},\quad u_2=\dfrac{a_1a_2}{q_1q_2},\quad u_3=\dfrac{a_1a_2a_3}{q_2q_3},\cdots\cdots\cdots u_n=\dfrac{a_1a_1\cdots\cdots a_n}{q_{n-1}q_n}$。

及得
$$u_3<\frac{a_1a_2}{q_1q_2(1+k)}=\frac{u_2}{1+k},$$
$$u_4<\frac{a_1a_2a_3}{q_2q_3(1+k)}=\frac{u_3}{1+k},$$
$$\cdots<\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n<\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_{n-1}}{q_{n-2}q_{n-1}(1+k)}=\frac{u_{n-1}}{1+k}$$

由乘法得 $u_n<\dfrac{a_1a_2}{q_1q_2(1+k)^{n-2}}$

但以 $(1+k)^{n-2}$ 其 k 爲有限數量。則 n 增至極大時。$(1+k)^{n-2}$ 必爲無限大,

由是 u_n 當 n 增至極大時。必爲無限小。故得次之定理,

無限連分數 $\dfrac{a_1}{b_1+}\dfrac{a_2}{b_2+}\dfrac{a_3}{b_3+}$ ……………諸文字所表者。皆爲正數量,則 $b_nb_{n-1}:a_n$ 其比常大於某有限數量者。必爲斂級數。

無限連分數 $a+\dfrac{1}{b+}\dfrac{1}{c+}$……… 諸文字所知者。皆爲正數量。則

此連分數。必爲歛級數。當注意之。何則。若以此連分數之元表示$b_n b_{n-1}$；a_n常爲有限數量故也。

362. 注意 以下五章連分數中所代之文字a,b,c……皆爲正整數，而其連分數之形。常若$a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots$

用此形之連分數有兩大便利。一因各漸近分數。皆爲已約分數。(視357.章第二)二因此連分數之眞值。與任何漸近分數之差。其界限甚狹小。可由視察而知之。

363. 定理 凡純循環連分數。恆等於含有理係數二次方程式之一正根。而此方程式之兩根。其符號正相反。其一根大於1。一根小於1。又其負根之反商。恆等於原連分數。每節循環各元。依其反對之順序而成連分數之數值。

設定原連分數。爲

$$x=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots$$

而以$\frac{P'}{Q'}$及$\frac{P}{Q}$爲第一次循環連分數。最後之兩漸近分數。

即 $\frac{P'}{Q'}=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+k}$, $\frac{P}{Q}=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+k+}\frac{1}{l}$

又 $x=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots$

$$=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{x}。$$

由355.章得 $x=\frac{xP+P'}{xQ+Q'}$。

$\therefore\quad x^2Q+x(Q-P)-P'=0$ ……………………………………………(1)

此方程式(1)之第三項$-P'$爲負。則其兩根之符號相反可知。而其正根即爲原連分數之值明矣。

今由357.章第一例。

$\frac{P}{P'}=l+\frac{1}{k}+\cdots\frac{1}{+b+}\frac{1}{a}$, 及 $\frac{Q}{Q'}=l+\frac{1}{k}+\cdots\cdots\frac{1}{+b}$。

由是 $y=l+\frac{1}{k+}\cdots\cdots\frac{1}{+a+}\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\cdots\cdots\cdots$

與前同法。得 $y=\frac{Py+Q}{P'y+Q'}$

$\therefore\quad y^2P'+y(Q'-P)-Q=0\cdots\cdots\cdots$ (2)

此方程式(2)之兩根。其符號相反可知。而其正根爲 $l+\frac{1}{k+}\cdots\cdots\frac{1}{+a+}\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\cdots\cdots$ 之值又可知矣。

而(1)之方程式 $x^2Q+x(Q'-P)-P'=0$,

變之爲 $\left(-\frac{1}{x}\right)^2P'+\left(-\frac{1}{x}\right)(Q'-P)-Q=0$,

即與(2)之方程式相同,而y與 $-\frac{1}{x}$ 相當。

故(1)之負根之反商,恆等於第二連分數之數值,亦即

$x=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$x=\frac{1}{-\left(l+\frac{1}{k+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\cdots\cdots\cdots\right)}。$$

又(1)及(2)之正根。可由視察而知其爲大於1。故(1)之負根必小於1。

推論 連分數 $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+l+}\frac{1}{a+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

亦可如本定理,證得其爲合理,何則,此連分數爲本定理,連分數之反商。故可以用 $\frac{1}{x}$ 代前之x。用 $\frac{1}{y}$ 代前之y。

即 $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+l+}\frac{1}{a+}\cdots\cdots\cdots$ 等於 $P'x^2-(Q'-P)x-Q=0$ 之正根,又 $-\left\{\left(l+\frac{1}{k+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{a+}\frac{1}{l+}\cdots\cdots\right\}\right.$ 爲等於 $P'x^2-(Q'-P)x-Q=0$ 之負根,亦等於 $Qy^2-(Q'-P)y-P=0$ 之正根,

由是此連分數之兩根。亦如本定理,其x之二次方程式之一根爲大於1。其他之一根爲小於1也,

364. 定理 凡混循環連分數。其不在循環部分以內之元爲多於1者。此種連分數。爲等於含有理係數二次方程式之一根。而此二次方程式之二根，爲同符號者。

設原連分數爲 $x=a+\frac{1}{b+}\cdots\cdots\frac{1}{+k}+\frac{1}{\alpha+}\frac{1}{\beta+}\cdots\cdots\frac{1}{+\mu}+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\cdots\cdots$

及循環部分爲 $y=\alpha+\frac{1}{\beta+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+\mu}+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

而以 $\frac{A'}{B'}$ 及 $\frac{A}{B}$ 爲非循環部分 $\left(\text{即 } a+\frac{1}{b+}\cdots\cdots\frac{1}{+k}\right)$ 之最後兩漸近分數。如前章之定理。得 $x=\frac{yA+A'}{yB+B'}$ ……………………………… (1)

又以 $\frac{P'}{Q'}$ 及 $\frac{P}{Q}$ 爲於第一次循環部分 $\left(\text{即 } \alpha+\frac{1}{\beta+}\cdots\cdots\frac{1}{+\mu}+\frac{1}{\nu}\right)$ 之最後二漸近分數。則得 $y=\frac{yP+P'}{yQ+Q'}$ ……………………………… (2)

由(1)及(2)消去其y。即得含有有理係數x之二次方程式，

今若以(2)之正根代於(1)，則所得爲x之正數值可知。而此正數值。即爲原連分數實際之值。又可知矣。

又從前章 $\frac{1}{y}$ 之負值爲 $-\left\{\nu+\frac{1}{\mu+}\cdots\cdots\frac{1}{+\alpha}+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\mu+}\cdots\cdots\right\}$ 以之代入於(1)，則得 $x=a+\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+k-\nu}-\frac{1}{\mu-}\cdots\cdots\cdots$。

此右邊必爲正，如次之證明。

若 $k>\nu$，則易知此x之值爲正。

若 $k<\nu$。則 $\frac{1}{k-\nu}-\frac{1}{\mu}\cdots\cdots\cdots$ 爲負。而小於1。惟k之前至少有一元。故知x之值亦必爲正。

何則以 $\frac{1}{k-\nu}-\frac{1}{\mu}\cdots\cdots$ 爲小於1之負數。而 $\frac{1}{J}+\frac{1}{k-\nu}-\frac{1}{\mu}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 必爲正數也。

又k原爲不等於ν。若 $k=\nu$。則其連分數之循環部。變爲自k始。不自α始矣。

由是知x之兩值俱爲正。

連分數之二次不盡根

365. 二次不盡根 其根不能等於有限元之連分數。何則。有限元之連分數。其分母子可通度，即爲通常之分數。

而二次不盡根。可成循環連分數，如 $a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots$ 之形。但 $a, b, c, \cdots\cdots$ 皆爲正整數。

茲舉例如次。

［例］試變 $\sqrt{8}$ 爲連分數。

畧小於 $\sqrt{8}$ 而與 $\sqrt{8}$ 最近之整數爲 2。而於 $\sqrt{8}$ 同時以 2 加減之，即得

$$\sqrt{8}=2+\sqrt{8}-2=2+\frac{(\sqrt{8}-2)(\sqrt{8}+2)}{\sqrt{8}+2}=2+\frac{4}{\sqrt{8}+2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4}},$$

又畧小於 $\frac{\sqrt{8}+2}{4}$ 而與 $\frac{\sqrt{8}+2}{4}$ 最近之整數爲 1，

故 $$\frac{\sqrt{8}+2}{4}=1+\frac{\sqrt{8}-2}{4}=1+\frac{4}{4(\sqrt{8}+2)}=1+\frac{1}{\sqrt{8}+2}$$

又畧小於 $\sqrt{8}+2$ 而與 $\sqrt{8}+2$ 最近之整數爲 4，

故 $$\sqrt{8}+2=4+\sqrt{8}-2=4+\frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4}}。$$

其 $\frac{\sqrt{8}+2}{4}$ 與前之分數同，故可得循環連分數，爲

$$\sqrt{8}=2+\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $\sqrt{8}$ 等於混循環連分數。但其最初一元非爲循環，而此一元之值。等於循環部末商之半。

若反求之。試求 $2+\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\cdots\cdots\cdots\cdots$ 之值。

$$x=2+\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\cdots\cdots \text{則} \quad x-2=\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即 $x-2=\frac{1}{1}+\frac{1}{4+x-2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+x}}=\frac{2+x}{3+x}$,

$\therefore\ (x-2)(3+x)=2+x$, 即 $x^2-8=0$,

而此方程式之正根,$x=\sqrt{8}$爲所求之値。

366. 二次不盡根作連分數。示其變化之法如次。

設$\sqrt{N}$爲任意之二次不盡根.而以a爲畧小於$\sqrt{N}$之整數。則

$$\sqrt{N}=a+(\sqrt{N}-a)=a+\frac{N-a^2}{\sqrt{N}+a}=a+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a}{r_1}}$$ 但 $N-a^2=r_1$。

惟a爲畧小於$\sqrt{N}$之整數,故$\sqrt{N}-a$爲正。而小於1。

而 $\sqrt{N}-a=\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a}{r_1}}$。故$\frac{\sqrt{N}+a}{r_1}$爲大於1,

今以b爲畧小於$\frac{\sqrt{N}+a}{r_1}$之整數。則

$$\frac{\sqrt{N}+a}{r_1}=b+\frac{\sqrt{N}-(br_1-a)}{r_1}=b+\frac{N-(br_1-a)^2}{r_1\{\sqrt{N}+(br_1-a)\}}=b+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}},$$

但 $a_2=br_1-a$, 及 $r_2=\frac{N-a_2^2}{r_1}$。

與前同理。可知$\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$爲大於1,而以c爲畧小於$\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$之整數。則

$$\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}=c+\frac{\sqrt{N}-(cr_2-a_2)}{r_2}=c+\frac{N-(cr_2-a_2)^2}{r_2\{\sqrt{N}+cr_2-a_2\}}=c+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a_3}{r_3}}$$

但 $a_3=cr_2-a_2$, 及 $r_3=\frac{N-a_3^2}{r_2}$。

依此方法次第推之。則得

$$\sqrt{N}=a+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此連分數無有限止。而爲循環連分數。其所以能爲循環者。詳述於次之定理。

367. 定理 任意之二次不盡根，可化爲循環連分數，

先於前章所示之 $a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots$ 及 $r_1,r_2,r_3,\ldots\ldots$ 證明其爲正整數。

當 $\sqrt{N}$ 爲連分數時。依前章之法則，而得 $a\,a_2,a_3,\ldots\ldots$ 及 $r_1,r_2,r_3,\ldots\ldots$ 之關係。

$$r_1=N-a^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$a_2=br_1-a,\quad r_1r_2=N-a_2^2\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$a_3=cr_2-a_2,\quad r_2r_3=N-a_3^2\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$a_4=dr_3-a_3,\quad r_3r_4=N-a_4^2\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

N及a爲正整數。而a爲畧小於 $\sqrt{N}$ 之整數。故 $N-a^2$ 爲正整數，即由(1)可知 r_1 爲整數。

由(2) $r_2=\dfrac{N-a_2^2}{r_1}=\dfrac{N-(br_1-a)^2}{r_1}=\dfrac{(N-a^2)+2abr_1-b^2r_1^2}{r_1}$

$$=\frac{r_1+2abr_1-b^2r_1^2}{r_1}=1+2ab-b^2r_1,$$

故 $a_2=br_1-a$, 及 $r_2=1+2ab-b^2r_1$ 但 r_1 爲整數。故知 a_2 及 r_2 亦必爲整數。

同法由(3)得 $a_3=cr_2-a_2$ 及 $r_3=1+2a_2c-c^2r_2$, 但 a_2 及 r_2 已知其爲整數。則 a_3 及 r_3 亦可知其爲整數。

又由(4)得 $a_4=dr_3-a_3$ 及 $r_4=r_2+2a_3d-d^2r_3$, 但 a_3 及 r_3 已知其爲整數。則 a_4 及 r_4 亦可知其爲整數

準此推之。a_n 及 r_n 對於n之任何值，皆爲整數可知矣。

且由此可證明 a_n 及 r_n 對於n之任何值，其各整數皆爲正。

既知 $a,b,c,\ldots\ldots\ldots$ 爲畧小於 $\sqrt{N},\dfrac{\sqrt{N}+a}{r_1},\ \dfrac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$ 之正數。則

$\sqrt{N}-a,\sqrt{N}-a_2\ldots\ldots\ldots$ 爲正數可知。故 $N-a^2,\ N-a_2^2,\ N-a_3^2,\ldots\ldots\ldots$ 皆爲正。即 $r_1,\ r_2,\ r_3,\ldots\ldots$ 皆爲正也。

又b爲畧小於 $\dfrac{\sqrt{N}+a}{r_1}$ 之整數，即 $\dfrac{\sqrt{N}+a}{r_1}>b$，而 $\dfrac{\sqrt{N}+a}{r_1}<b+1$。

即 $\sqrt{N}+a<br_1+r_1$ 而 $a<br_1$ 何則，假定 $a\geqq br_1$，則上之不等式爲 $\sqrt{N}<r_1$，而a小於 $\sqrt{N}$，是 $a<r_1$ 惟b與 r_1 均爲正數。以b乘其右邊

仍爲$a<br_1$,如是則與假定式相反,故知a不能大於br_1,又不能等於br_1也,

由是從(2) $a_2=br_1-a$。而知a_2爲正數,

又c爲畧小於$\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$之整數。即$\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}>c$,而$\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}<c+1$,

即 $\sqrt{N}+a_2<cr_2+r_2$,而$a_2<cr_2$,可與前同法證之,而知a_2不能等於cr_2,又不能大於cr_2也,由是從(3)而知a_3爲正數。

準此推之。a_n對於n爲任何值皆爲正。

至是諸數量r_1, r_2, r_3……及a_1, a_2, a_3,……已證得爲整數且爲正。

從上之關係式而得$r_nr_{n-1}=N-a_n^2$。其$a_n<\sqrt{N}$而$a_n \ngtr a$,

何則。因$r_1=N-a^2$, $r_1r_2=N-a_2^2$。故$r_1 \ngtr r_1r_2$, 即$N-a^2 \ngtr N-a_2^2$。

$\therefore$ $a_2 \ngtr a$,而$r_nr_{n-1}=N-a_n^2$爲正整數,故$a_n<\sqrt{N}$,即$a_n \ngtr a$,

由是知a_n之值。祇限於1,2,3,……a以內,

又由(1),(2),(3)之關係式。

$a_2+a=br_1$, $a_3+a_2=cr_2$,……至$a_{n+1}+a_n=kr_n$,

但k爲正整數。故r_n不能大於kr_n,

又a_{n+1}及a_n於前已證得爲不能大於a。

故$a_{n+1}+a_n \ngtr 2a$,即$r_n \ngtr 2a$,

由是可知$\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$其所有異值。至多不過於$2a\times a$。即$2a^2$種,

故不盡根化連分數時。至第$2a^2$商以後。不能不爲循環矣。

368. 定理 任意二次不盡根。所變得之循環連分數。其有一元非爲循環者。而此一元之二倍,等於其循環一節中最後之商,又於循環一節中之各商,除最後一商以外。無論順讀與逆讀,得同一之順序,(如365章所述,此其特例也)。

$\sqrt{N}$爲二次不盡根,由前章而知$\sqrt{N}$。必可化爲循環連分數,又知任意之循環連分數。等於含有理係數二次方程式之一根,而其含有理係數x之二次方程式之一根爲$\sqrt{N}$。

則此方程式必爲$x^2-N=0$,

今$x^2-N=0$其兩根之絕對值皆大於1。而此兩根之符號相異,

故由363及364章而知等於$\sqrt{N}$之連分數。爲混循環連分數，其非爲循環之項，祇有一元也。

由是 $\sqrt{N}=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots$

即 $\sqrt{N}-a=\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots$

令 $\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots$爲含有理係數二次方程式之一根。而此正根爲$\sqrt{N}-a$。負根爲$-\sqrt{N}-a$。

由是由353章得 $\frac{1}{\sqrt{N}+a}=\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\frac{1}{h+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{l+}\cdots\cdots\cdots$。

$\therefore\ \sqrt{N}+a=l+\frac{1}{k+}\frac{1}{h+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{l+}\cdots\cdots\cdots$

故 $\sqrt{N}=l-a+\frac{1}{k+}\frac{1}{h+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{l+}\cdots\cdots\cdots$

$=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots$。

由此知$l-a=a$。即$l=2a$, $k=b$, $h=c$,…………

即證得$\sqrt{N}=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{2a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots$

連分數之級數

369. 任意之級數。可以連分數表之。設定級數。

$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1)

此級數(1)n項之和。恆等於次之連分數(2)第n漸近分數。

$\frac{u_1}{1-}\frac{u_2}{u_1+u_2-}\frac{u_1u_3}{u_2+u_3-}\frac{u_2u_4}{u_3+u_4-}\cdots\cdots\cdots\frac{u_{n-2}u_n}{-u_{n-1}+u_n-}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2)

此定理可用歸納法證明之。

先假定(1)之最初n項之和。等於連分數(2)之第n漸近分數。

即假定 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n=\frac{u_1}{1-}\frac{u_2}{u_1+u_2-}\frac{u_1u_3}{u_2+u_3-}\cdots\cdots\frac{u_{n-2}u_n}{-u_{n-1}+u_n}$,

今變其u_n爲u_n+u_{n+1}，則變$\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1}+u_n}$爲$\frac{u_{n-2}(u_n+u_{n+1})}{u_{n-1}+u_n+u_{n+1}}$。

而 $\frac{u_{n-2}(u_n+u_{n+1})}{u_{n-1}+u_n+u_{n+1}}$ 等於 $\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1}+u_n-}\frac{u_{n-1}u_{n+1}}{u_n+u_{n+1}}$。

因 $$\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1}+u_n-}\frac{u_{n-1}u_{n+1}}{u_n+u_{n+1}}=\frac{u_{n-2}u_n(u_n+u_{n+1})}{(u_{n-1}+u_n)(u_n+u_{n+1})-u_{n-1}u_{n+1}}$$

$$=\frac{u_{n-2}(u_n+u_{n+1})}{u_{n-1}+u_n+u_{n+1}}$$

由是 $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+u_{n+1}$,

$$=\frac{u_1}{1-}\frac{u_2}{u_1+u_2-}\cdots\cdots\frac{u_{n-2}u_n}{-u_{n-1}+u_n-}\frac{u_{n-1}u_{n+1}}{u_n+u_{n-1}}。$$

即 (1)之最初$(n+1)$項之和，等於(2)之第$(n+1)$漸近分數。

若 (1)之最初n項之和，等於(2)之第n漸近分數爲眞者，則(1之最初$(n+1)$項之和，等於(2)之第$(n+1)$漸近分數亦爲眞。

惟令n爲1或2或3易證得(1)之和，爲等於(2)之漸近分數，故知對於n之任何值皆爲眞也，

玆示例如次，

$$1+3+5=\frac{1}{1-}\frac{3}{1+3-}\frac{1.5}{3+5}=\frac{1}{1-}\frac{3}{4-}\frac{5}{8},$$

$$1+2^2+3^2=\frac{1}{1-}\frac{2^2}{1+2^2-}\frac{1.3^2}{2^2+3^2}=\frac{1}{1-}\frac{4}{5-}\frac{9}{13},$$

$$a+ar+ar^2=\frac{a}{1-}\frac{ar}{a+ar-}\frac{a^2r^2}{ar+ar^2}=\frac{1}{1-}\frac{r}{1+r-}\frac{ar}{1+r},$$

故此定理，爲 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$

$$=\frac{u_1}{1-}\frac{u_2}{u_1+u_2-}\frac{u_1u_3}{u_2+u_3-}\cdots\cdots\frac{u_{n-2}u_n}{-u_{n-1}+u_n}。\qquad(A)$$

若(A)級數之各項正負相間，則得

$$u_1-u_2+u_3-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}u_n$$

$$=\frac{u_1}{1+}\frac{u_2}{u_1-u_2+}\frac{u_1u_3}{u_2-u_3+}\cdots\cdots\frac{u_{n-2}u_n}{+u_{n-1}-u_n}.\qquad(B)$$

370. 兩定理 如次之(C)及(D)之兩定理爲最緊要。

$$\frac{a_1}{b_1}\pm\frac{a_1a_2}{b_1b_2}\ \ \frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3}\pm\cdots\cdots\text{至 n 項}$$

$$=\frac{a_1}{b_1}\mp\frac{b_1a_2}{b_2\pm a_2}\mp\frac{b_2a_3}{b_3+a_3}\mp\cdots\cdots\text{至 n 商}\qquad(C)$$

$$\frac{1}{a_1}\pm\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\pm\frac{1}{a_4}+\cdots\cdots\text{至 n 項}$$

$$=\frac{1}{a_1}\mp\frac{a^2{}_1}{a_2\pm a_1}\mp\frac{a^2{}_2}{a_3\pm a_2}\mp\cdots\cdots\text{至 n 商}\qquad(D)$$

上二式之複號。或取其上之符號，或取其下之符號。此兩定理可如前章用歸納法證明之。

次示C之證法。

設於(C)級數n項之和而爲n+1項之和。

則可以$\frac{a_n}{b_n}\pm\frac{a_na_{n+1}}{b_nb_{n+1}}$代其$\frac{a_n}{b_n}$。

故變$\frac{b_{n-1}a_n}{b_n\pm a_n}$爲$\dfrac{b_{n-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\pm\frac{a_na_{n+1}}{b_nb_{n+1}}\right)}{1\pm\left(\frac{a_n}{b_n}\pm\frac{a_na_{n+1}}{b_nb_{n+1}}\right)}$。即等於$\frac{b_{n-1}a_n}{b_n\pm a_n}\mp\frac{b_na_{n+1}}{b_{n+1}\pm a_{n-1}}$。

故(C)對於n爲眞。則對於n+1亦爲眞。今於C令其n爲2可由觀察而知其爲眞。故(C)對於n之任何值。皆爲眞也。

於次所示者。爲(C)之特例。

$$a_1\pm a_1a_2+a_1a_2a_3\pm a_1a_2a_3a_4+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{a_1}{1}\mp\frac{a_3}{1\pm a_2}\mp\frac{a_1a_3}{1\pm a_3}\mp\frac{a_2a_4}{1\pm a_4}\mp\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad(E)$$

及 $$\frac{1}{a_1}\pm\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2a_3}\pm\frac{1}{a_1a_2a_3a_4}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{a_1}\mp\frac{a_1}{a_2\pm1}\mp\frac{a_2}{a_3\pm1}\mp\frac{a_3}{a_4\pm1}\mp\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad(F)$$

令(C)之分母皆爲1。即等於E。令(C)之分子皆爲1。而以a代其分母之b。即等於(F)。

〔第一例〕試證$\frac{1}{1+}\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\cdots\cdots$至無限

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\text{至無限}$$（Brouncker 氏）。

令 $a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\cdots\cdots$以代於(D)而用其下之符號。爲

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots=\frac{1}{1+}\frac{1^2}{3-1+}\frac{3^2}{5-3+}\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{1+}\frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\cdots\cdots。$$

〔第二例〕試證 $\frac{1}{1+}\frac{1^2}{1+}\frac{2^2}{1+}\frac{3^2}{1+}\cdots$至無限 $=\mathrm{Log}\ 2$(Euler氏)。

令 $a_1=1;\ a_2=2,\ a_3=3,\cdots\cdots$ 以代於(D)而用其下之符號。

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots=\frac{1}{1+}\frac{1^2}{2-1+}\frac{2^2}{3-2+}\frac{3^2}{4-3+}\cdots\cdots。$$

惟由308.章 $\mathrm{Log}_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots$。

令 $y=1$。則 $\mathrm{Log}_e\,2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$。

而 $\frac{1}{1+}\frac{1^2}{2-1+}\frac{2^2}{3-2+}\frac{3^2}{4-3+}\cdots\cdots=\frac{1}{1+}\frac{1^2}{1+}\frac{2^2}{1+}\frac{3^2}{1+}\cdots\cdots\cdots$。

故得題之證。

〔第三例〕求 $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{2+}\frac{3}{3+}\frac{4}{4+}\cdots\cdots$至無限之值。

令 $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=4,\cdots\cdots$ 以代於(F)而用其下之符號。

$$\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{2+}\frac{3}{3+}\frac{4}{4+}\cdots\cdots=\frac{1}{1}-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\cdots\cdots=1-e^{-1}。$$

〔第四例〕求 $\frac{1}{3+}\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}\cdots\cdots$之第n漸近分數。

令 $a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=3$ 以代於(F)。

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{3.3.3}-\frac{1}{3.3.3.3}+\cdots\cdots=\frac{1}{3+}\frac{3}{3-1+}\frac{3}{3-1+}\cdots\cdots=\frac{1}{3+}\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}\cdots$$

而 $\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{3.3.3}-\frac{1}{3.3.3.3}+\cdots\cdots$至n項之和。爲

$$\frac{\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$。即爲所求之第n漸近分數。

〔第五例〕 試證 $1+\frac{r}{1-}\frac{1r}{r+2-}\frac{2r}{r+3-}\frac{3r}{r+4-}\cdots\cdots=e^r$。

命 $a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=r$, 又 $b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=3,\cdots\cdots$以代於(C)。

$$\frac{1}{1-}\frac{r}{2+r-}\frac{2r}{3+r-}\frac{3r}{4+r-}\cdots\cdots$$

$$=\frac{r}{1}+\frac{rr}{1.2}+\frac{rrr}{1.2.3}+\frac{rrrr}{1.2.3.4}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{r}{1}+\frac{r^2}{|\underline{2}}+\frac{r^3}{|\underline{3}}+\frac{r^4}{|\underline{4}}+\cdots\cdots=e^r-1。$$

故 $1+\frac{r}{1-}\frac{r}{r+2-}\frac{2r}{r+3-}\frac{3r}{r+4-}\cdots\cdots=e^r$。

例題三十七

1. 試將二次不盡根各化爲連分數。

(1) $\sqrt{17}$。 (2) $\sqrt{140}$,

(3) $\sqrt{33}$, (4) $\sqrt{43}$,

(5) $\sqrt{(a^2+1)}$, (6) $\sqrt{(a^2+2a)}$。

〔解〕 (1) $\sqrt{17}=4+\sqrt{17}-4=4+\frac{1}{\sqrt{17}+4}$, $\sqrt{17}+4$

$=8+\sqrt{17}-4=8+\frac{1}{\sqrt{17}+4}$, $\therefore\ \sqrt{17}=4+\frac{1}{8+}\frac{1}{8+}\cdots\cdots$

(2) $\sqrt{140}=11+\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{22+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

(3) $\sqrt{33}=5+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{10+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

(4) $\sqrt{43}=6+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{5+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{12+}\cdots\cdots\cdots$

(5) $\sqrt{(a^2+1)}=a+\sqrt{(a^2+1)}-a=a+\frac{1}{a+\sqrt{(a^2+1)}}$

$=a+\frac{1}{2a+}\frac{1}{2a+}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(6) $\sqrt{(a^2+2a)}=a+\sqrt{(a^2+2a)}-a=a+\frac{1}{\sqrt{(a^2+2a)}+a}$,

又 $$\frac{\sqrt{(a^2+2a)}+a}{2a}=1+\frac{\sqrt{(a^2+2a)}-a}{2a}=1+\frac{1}{\sqrt{(a^2+2a)}+a}\text{。}$$

∴ $\sqrt{(a^2+2a)}=a+\frac{1}{1+}\frac{1}{2a+}\frac{1}{1+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

2. 試證 $\sqrt{N}=a+\frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\cdots\cdots$但 a 爲任意之值而 $b=N-a^2$。

〔證〕 $\sqrt{N}=a+\sqrt{N}-a=a+\frac{N-a^2}{\sqrt{N}+a}=a+\frac{b}{a+\sqrt{N}}$

$$=a+\cfrac{b}{a+a+\cfrac{b}{a+\sqrt{N}}}=a+\frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3. 求次之連分數之值，

(1) $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\cdots\cdots\cdots\cdots$至無限。

(2) $1+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots$至無限，

(3) $\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\cdots\cdots\cdots\cdots$至無限。

〔解〕(1) $x=1+\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{2+}\cdots\cdots$ 即 $x-1=\frac{1}{3+}\frac{1}{2+x-1}$

$3x^2-5=0$。 ∴ $x=\sqrt{\frac{5}{3}}$。

(2) $x=1+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\cdots\cdots$ 即 $x=1+\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{x}$。

∴ $7x^2-8x-3=0$。 ∴ $x=\frac{1}{7}(4+\sqrt{37})$。

(3) $x=\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\cdots\cdots$介 $\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\frac{1}{4+}\frac{1}{5+}\cdots\cdots=y$。

則 $\frac{1}{4+}\frac{1}{5+y}=y$。 ∴ $y=\frac{1}{2}(\sqrt{30}-5)$。

由是得 $x=\frac{1}{2+}\frac{1}{3+y}=\frac{1}{2+}\frac{1}{3+\frac{1}{2}(\sqrt{30}-5)}$。

即 $x=\frac{\sqrt{30}+1}{2\sqrt{30}+4}=\frac{1}{52}(28-\sqrt{30})$。

4. 試證 $7+\frac{1}{14+}\frac{1}{14+}\cdots\cdots$ 至無限 $=5\left(1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots\cdots\right.$ 至無限$\left.\right)$,

惟以 $7+\frac{1}{14+}\frac{1}{14+}\cdots\cdots=\sqrt{50}$, $1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots=\sqrt{2}$, 故得此題之證。

5. 試證 $\left(\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{d+}\frac{1}{a+}\cdots\cdots\right)\left(d+\frac{1}{c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{d+}\cdots\cdots\right)=\frac{b+d+bcd}{a+c+acb}$。

〔證〕 $x=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{d+}\frac{1}{a+}\cdots\cdots=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{d+x+}\cdots\cdots$

即 $x=\frac{bcd+d+b+(bc+1)x}{abcd+ab+cd+ad+1+(abc+c+a)x}$。

$\therefore\ x^2+\frac{abcd+ab+cd+ad-bc}{abc+c+a}x-\frac{bcd+b+d}{abc+c+a}=0$。

此方程式之正根爲 α。其負根爲 $-\beta$。則 $\alpha\beta=\frac{bcd+b+d}{abc+c+a}$。

又由363章此二根之積，即 $-\alpha\beta$,

故證得 $-\left(\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{d+}\frac{1}{a+}\cdots\cdots\right)\left(d+\frac{1}{c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{d+}\cdots\cdots\right)$。

6. $x=y+\frac{1}{2y+}\frac{1}{2y+}\cdots\cdots$ 至無限，則 $y=x-\frac{1}{2x-}\frac{1}{2x-}\cdots\cdots$ 至無限，試證之。

〔證〕 $x=y+\frac{1}{2y+x-y}$ $\therefore$ $x^2-y^2=1$ $\therefore$ $y=x-\frac{1}{x+y}$

$$=x-\cfrac{1}{x+x-\cfrac{1}{x+y}}=x-\cfrac{1}{2x-\cfrac{1}{x+y}}=x-\frac{1}{2x-}\frac{1}{2x-}\cdots\cdots$$

7. $x=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots$ 至無限，$y=\frac{1}{2a+}\frac{1}{2b+}\frac{1}{2a+}\frac{1}{2b+}\cdots\cdots$ 至無限。

及 $z=\frac{1}{3a+}\frac{1}{3b+}\frac{1}{3a+}\frac{1}{3b+}\cdots\cdots$ 至無限。

則 $x(y^2-z^2)+2y(z^2-x^2)+3z(x^2-y^2)=0$, 試證之。

〔證〕 $x=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+x}$ 故 $ax^2+abx-b=0$, 由同法從第二及第三，得

$2ay^2+4aby-2b=0$ 及 $3az^2+9abz-3b=0$,

由此三方程式消去 a 及 b 而得 $x(y^2-z^2)+2y(z^2-x^2)+3z(x^2-y^2)=0$,

8. n為任意之正整數，則 $n=1+\frac{n^2-1^2}{3+}\frac{n^2-2^2}{5+}\frac{n^2-3^2}{7+}\cdots\cdots$

〔證〕 $n=1+n-1=1+\frac{n^2-1}{n+1}=1+\frac{n^2-1}{3+n-2}=1+\cfrac{n^2-1}{3+\cfrac{n^2-2^2}{n+2}}$

$$=1+\cfrac{n^2-1}{3+\cfrac{n^2-2^2}{5+n-3}}=1+\cfrac{n^2-1}{3+\cfrac{n^2-2^2}{5+\cfrac{n^2-3^2}{n+3}}}=1+\frac{n^2-1^2}{3+}\frac{n^2-2^2}{5+}\frac{n^2-3^2}{7+}$$

9. $\frac{1+a^2+a^4+\cdots\cdots+a^{2n}}{a+a^3+a^5+\cdots\cdots+a^{2n-1}}=a+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+\frac{1}{a}-}\,\frac{1}{a+\frac{1}{a}-}\cdots\cdots$ 至n商，

〔證〕 $\frac{1+a^2+a^4+\cdots\cdots+a^{2n}}{a+a^3+a^5+\cdots\cdots+a^{2n-1}}=\frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}\div\frac{a-a^{2n+1}}{1-a^2}=\frac{1-a^{2n+2}}{a-a^{2n+1}}$

$$=a+\frac{1}{a}-\frac{a-a^{2n-1}}{1-a^{2n}}=a+\frac{1}{a}-\cfrac{1}{\cfrac{1-a^{2n}}{a-a^{2n-1}}}=a+\frac{1}{a}-\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}-\cfrac{a-a^{2n-3}}{1-a^{2n-2}}}=\cdots\cdots$$

$$=a+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+\frac{1}{a}-}\,\frac{1}{a+\frac{1}{a}-}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

10. $x=\frac{a}{b+}\frac{c}{d+}\frac{a}{b+}\frac{c}{d+}\cdots\cdots$ 及 $y=\frac{c}{d+}\frac{a}{b+}\frac{c}{d+}\frac{a}{b+}\cdots\cdots\cdots$

則 $bx-dy=a-c$。

〔證〕 $x=\frac{a}{b+y}$ 及 $y=\frac{c}{d+x}$ $\therefore$ $bx+xy=a$, $dy+xy=c$,

由是 $bx-dy=a-c$。

11. $a+\frac{1}{1+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{1+}\cdots\cdots$ 比於 $b+\frac{1}{1+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{1+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

若 $1+a:1+b$。

〔證〕 $x=a+\frac{1}{1+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{1+}\cdots\cdots$

$\therefore$ $x=a+\frac{1}{1+}\frac{1}{b+}\frac{1}{x}=\frac{(ab+a+b)x+(a+1)}{(b+1)x+1}$。

由是 $x^2(b+1)-x(ab+a+b-1)-(a+1)=0$。 (1)

同法 $y=b+\frac{1}{1+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{1+}\cdots\cdots=b+\frac{1}{1+}\frac{1}{a+}\frac{1}{y}$。

$\therefore\quad y^2(a+1)-y(ab+a+b-1)-(b+1)=0$。

比較(1)及(2)得 $x=\frac{a+1}{b+1}y$。 $\therefore\quad x:y=a+1:b+1$。

12. $\frac{1}{3-}\frac{4}{3-}\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\cdots\cdots$之第n漸近分數爲$\frac{2^n-1}{2^n+1}$。

〔證〕原連分數自第二元以後。其循環元凡爲$-\frac{2}{3}$。故由358章之例。$n>2$，則$p_n=3p_{n-1}-2p_{n-2}$，移項。得

$$p_n-2p_{n-1}=p_{n-1}-2p_{n-2}$$

由同理 $=p_{n-2}-2p_{n-3}=p_{n-3}-2p_{n-4}=\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=p_3-2p_2=7-2\cdot3=1$。

但以 $p_2=3,\ p_3=7$。

故 $(p_n-2p_{n-1})+2(p_{n-1}-2p_{n-2})+2^2(p_{n-2}-2p_{n-3})+\cdots\cdots+2^{n-3}(p_3-2p_2)$
$=1+2\cdot1+2^2\cdot1+\cdots\cdots+2^{n-3}\cdot1$。

即 $p_n-2^{n-2}p_2=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-3}$。

$\therefore\quad p_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-3}+2^{n-2}\cdot3=1+2+2^2+\cdots+2^{n-3}+2^{n-2}+2^{n-1}$
$=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$。

由同法 $q_n=2^n+1$。 $\therefore\quad \frac{p_n}{q_n}=\frac{2^n-1}{2^n+1}$。

〔別法〕又用360章之法。其第$(n-1)$漸近分數爲$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$。

然p_{n-1}爲等於$\frac{3-2x}{1-3x+2x^2}=\frac{4}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$展開式中$x^{n-2}$之係數。

即 $4(2^{n-2})-1=2^n-1$。

又 q_{n-1}爲等於$\frac{1}{1-3x+2x^2}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$展開式中$x^{n-2}$之係數。

即 $2(2^{n-2})-1=2^{n-1}-1$

$\therefore\quad \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}$。由是 $\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{3-\frac{4}{\frac{2^n-1}{2^{n-1}-1}}}=\frac{2^n-1}{2^n+1}$。

13. $2+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots\cdots$之第n漸近分數。為

$\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}$。

〔證〕由360章。$p_n=2p_{n-1}+p_{n-2}$。故第n漸近分數之分子為於

$\frac{2+x}{1-2x-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{(1+\sqrt{2})^2}{1-x(1+\sqrt{2})}-\frac{(1-\sqrt{2})^2}{1-x(1-\sqrt{2})}\right\}$展開式中$x^{n-1}$之係數。

卽$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}\}$也。

又分母為於$\frac{1}{1-2x-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{1+\sqrt{2}}{1-x(1+\sqrt{2})}-\frac{1-\sqrt{2}}{1-x(1-\sqrt{2})}\right\}$展開式

中x^{n-1}之係數。卽$\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\}$也。

∴ 第n漸近分數為$\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}$。

14. $\frac{1}{1-}\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\cdots\cdots$之第n漸近分數為$2^n-1$。

〔證〕$p_n=3p_{n-1}-2p_{n-2}$。故$p_n-2p_{n-1}=p_{n-1}-2p_{n-2}$。

同理$=p_{n-2}-2p_{n-3}=\cdots\cdots=p_2-2p_1=1$。

但$p_1=1, p_2=3$。

$\therefore\ (p_n-2p_{n-1})+2(p_{n-1}-2p_{n-2})+2^2(p_{n-2}-2p_{n-3})+\cdots\cdots+2^{n-2}(p_2-2p_1)$

$=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-2}$。如前例$p_n=2^n-1$。又$q_n=1$。

15. $\frac{1}{a+b-}\frac{ab}{a+b-}\frac{ab}{a+b-}\cdots\cdots$之第n漸近分數為$\frac{a^n-b^n}{a^{n+1}-b^{n+1}}$。

〔證〕$p_n=(a+b)p_{n-1}-abp_{n-2}$。故$p_n-ap_{n-1}=b(p_{n-1}-ap_{n-2})$。

同理$=b^2(p_{n-2}-ap_{n-3})=\cdots\cdots\cdots\cdots=b^{n-2}(p_2-ap_1)=b^{n-2}\cdot b=b^{n-1}$。

但$p_1=1, p_2=a+b$。

$\therefore\ (p_n-ap_{n-1})+\frac{a}{b}\cdot b(p_{n-1}-ap_{n-2})+\frac{a^2}{b^2}\cdot b^2(p_{n-2}-ap_{n-3})+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}b^{n-2}(p_2-ap_1)=b^{n-1}+\frac{a}{b}b^{n-1}+\frac{a^2}{b^2}b^{n-1}+\cdots\cdots+\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}b^{n-1}$。

即 $p_n-a^{n-1}p_1=b^{n-1}\left\{\dfrac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}}{1-\frac{a}{b}}\right\}=\dfrac{b(a^{n-1}-b^{n-1})}{a-b}$。

$\therefore\ p_n=\dfrac{a^n-b^n}{a-b}$。由同法 $q_n=(a+b)q_{n-1}-abq_{n-2}$ 得 $q_n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$。

16 求 $\dfrac{2}{1-}\,\dfrac{3}{5-}\,\dfrac{8}{7-}\cdots\cdots\cdots\cdots\dfrac{r^2-1}{2r+1}\cdots\cdots$ 之第n漸近分數。

〔解〕惟 $P_n=(2n+1)P_{n-1}-(n^2-1)P_{n-2}$

故 $P_n-nP_{n-1}=(n+1)\{P_{n-1}-(n-1)P_{n-2}\}$。

由同理 $p_{n-1}-(n-1)p_{n-2}=n\{p_{n-2}-(n-2)p_{n-3}\}$。

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$p_3-3p_2=4\{p_2-2p_1\}$。

由是 $p_n-np_{n-1}=(n+1)\{p_{n-1}-(n-1)p_{n-2}\}=(n+1)n\{p_{n-2}-(n-2)p_{n-3}\}$

$=(n+1)n\ldots4\{p_2-2p_1\}=\dfrac{\lfloor n+1}{\lfloor 3}(10-4)=\lfloor n+1$。

但 $p_1=2,\ p_2=10$。 $\therefore\ \dfrac{p_n}{\lfloor n}-\dfrac{p_{n-1}}{\lfloor n-1}=n+1$。

同理 $\dfrac{p_{n-1}}{\lfloor n-1}-\dfrac{p_{n-2}}{\lfloor n-2}=n$。

$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\quad \dfrac{p_3}{\lfloor 3}-\dfrac{p_2}{\lfloor 2}=4,\quad \dfrac{p_2}{\lfloor 2}-\dfrac{p_1}{\lfloor 1}=3$。

由加法得 $\dfrac{p_n}{\lfloor n}-\dfrac{p_1}{\lfloor 1}=3+4+\cdots\cdots+(n+1)$。

$\therefore\ p_n=\lfloor n\{2+3+4+\cdots\cdots+(n+1)\}=\frac{1}{2}n(n+3)\lfloor n$。

由同法 $q_n=\lfloor n$ $\therefore$ 所求之漸近分數為 $\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{n(n+3)}{2}$。

17. 於諸分數 $\dfrac{p_1}{q_1},\ \dfrac{p_2}{q_2}\cdots\cdots$ 其 $p_r=q_{r-1}$, $q_r=(n^2-1)p_{r-1}+2q_{r-1}$,

若n至無限大時。則 p_n/q_n 之極限為 $1/(1+n)$。

〔證〕 $\dfrac{p_r}{q_r}=\dfrac{q_{r-1}}{(n^2-1)p_{r-1}+2q_{r-1}}=\dfrac{1}{(n^2-1)\dfrac{p_{r-1}}{q_{r-1}}+2}$。若n增至無限大時。

$\frac{p_r}{q_r}$殆等於$\frac{p_{r-1}}{q_{r-1}}$而此極限之值爲L。則$L=\frac{1}{(n^2-1)L+2}$。

$\therefore\quad n^2L^2-(L-1)^2=0$。 $\therefore\quad L=\frac{1}{n+1}$。

18. 連分數$\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\cdots\cdots\cdots\frac{a_n}{+b_n+}\cdots\cdots$之第n漸近分數。比於第$(n-1)$漸近分數爲$b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{a_3}{b_2}:b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{a_2}{b_1}$。

〔證〕 $p_n=b_np_{n-1}+a_np_{n-2}$, $\therefore\quad \frac{p_n}{p_{n-1}}=b_n+\frac{a_n}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}$,

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}=b_{n-1}+\frac{a_{n-1}}{\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}},\ \cdots\cdots\ \frac{p_3}{p_2}=b_3+\frac{a_3}{\frac{p_2}{p_1}},\quad \frac{p_2}{p_1}=b_2。$$

由是 $$\frac{p_n}{p_{n-1}}=b_n+\frac{a_n}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}=b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}+}\frac{a_{n-1}}{\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}=\cdots\cdots$$

$$=b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}+}\frac{a_{n-1}}{b_{n-2}+}\frac{a_{n-2}}{b_{n-3}+}\cdots\cdots+\frac{a_3}{b_2}。$$

由同法。$\frac{q_n}{q_{n-1}}=b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}+}\frac{a_{n-1}}{b_{n-2}+}\cdots\cdots+\frac{a_3}{\frac{q_2}{q_1}}$, 而$\frac{q_2}{q_1}=b_2+\frac{a_2}{b_1}$。

故 $$\frac{q_n}{q_{n-1}}=b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}+}\frac{a_{n-1}}{b_{n-2}+}\cdots\cdots+\frac{a_3}{b_2}+\frac{a_2}{b_1}。$$

$$\therefore\quad \frac{p_n}{q_n}\div\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_n}{p_{n-1}}\div\frac{q_n}{q_{n-1}}=b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}+}\cdots\cdots+\frac{a_3}{b_2}:b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}+}\cdots\cdots+\frac{a_2}{b_1}。$$

19. 純循環連分數取其循環之一節,二節,……令其各漸近分數爲$y_1, y_2,\cdots\cdots$而於y_1之前兩漸近兩分數爲$P/Q, P'/Q'$。

則 $y_n=(P'y_{n-1}+P)/(Q'y_{n-1}+Q)$。

〔證〕 純循環連分數爲$a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots+\frac{1}{h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{a+}\cdots\cdots$

$$y_1=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l},$$

$$y_2=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots+\frac{1}{l},$$

$$y_n = a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\frac{1}{+l+}\cdots\cdots$$ 至n回之循環。

今以 $y_1, y_2, \cdots\cdots$ 代 $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$……而其第一次循環中最後之三漸近分數爲 $\frac{A}{B}$ $\frac{A'}{B'}$ 及 $\frac{A''}{B''}$,

即 $$\frac{A}{B} = a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+h}。$$

$$\frac{A'}{B'} = a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+h+}\frac{1}{k}。$$

及 $\frac{A''}{B''} = a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{+h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l}$, 而 $p_1 = lA' + A$, 及 $q_1 = lB' + B$。

又 $y_n = a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{l+}\frac{1}{y_{n-1}}$。

$$\therefore\ y_n = \frac{\left(l+\frac{1}{y_{n-1}}\right)A' + A}{\left(l+\frac{1}{y_{n-1}}\right)B' + B} = \frac{A''y_{n-1} + A'}{B''y_{n-1} + B'}。$$

但 $\frac{A'}{B'}$ 及 $\frac{A''}{B''}$ 爲於 y_1 之前兩漸近分數。故即爲題中之 $\frac{P'}{Q'}$ 及 $\frac{P}{Q}$。

20. 設不爲完平方之整數z。將 $\sqrt{z}$ 化爲連分數。而得

$a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+k+}\frac{1}{2a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots$ 又取其循環之一節,二節,………

而其各漸近分數爲 $P_1, P_2, \cdots\cdots\cdots P_i$, 則 $\frac{P_i+\sqrt{z}}{P_i-\sqrt{z}} = \left(\frac{P_1+\sqrt{z}}{P_1-\sqrt{z}}\right)^i$。

〔證〕 以 $P_1 = a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+k}$ 之最後三漸近分數爲

$\frac{A''}{B''}$, $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A}{B}$, 而 $\frac{A}{B} = P_1$, $p_r = a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+k+}\frac{1}{a+p_{r-1}}$。

及 $\sqrt{Z} = a + \frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+k+}\frac{1}{a+\sqrt{z}}$。

由是 $$P_r = \frac{\left(k+\frac{1}{a+p_{r-1}}\right)A' + A''}{\left(k+\frac{1}{a+p_{r-1}}\right)B' + B''} = \frac{A(a+p_{r-1})+A'}{B(a+p_{r-1})+B'},$$

又 $\sqrt{Z}\dfrac{\left(k+\dfrac{1}{a+\sqrt{z}}\right)A'+A''}{\left(k+\dfrac{1}{a+\sqrt{z}}\right)B'+B''}=\dfrac{A(a+\sqrt{z})+A'}{B(a+\sqrt{z})+B'}$。

化之爲 $Aa+A'-Bz-(Ba+B'-A)\sqrt{z}=0$,

$\sqrt{z}$ 爲無理數。故上之關係不可不如次。

$$Ba+B'-A=0 \quad 及 \quad Aa+A'-Bz=0。$$

以此代入於 P_r 之式爲 $P_r=\dfrac{Aa+A'+AP_{r-1}}{Ba+B'+BP_{r-1}}=\dfrac{BZ+AP_{r-1}}{A+BP_{r-1}}$。

而 $\dfrac{A}{B}=P_1$, 故 $P_r=\dfrac{Z+PP_{r-1}}{P_1+P_{r-1}}$,

由是 $\dfrac{P_r}{\sqrt{Z}}=\dfrac{Z+P_1P_{r-1}}{(P_1+p_{r-1})\sqrt{Z}}$,

$$\therefore \quad \frac{P_1+\sqrt{Z}}{P_1-\sqrt{Z}}=\frac{(Z+P_1P_{r-1})+(P_1+P_{r-1})\sqrt{Z}}{(Z+P_1P_{r-1})-(P_1+P_{r-1})\sqrt{Z}}=\left(\frac{P_1+\sqrt{Z}}{P_1-\sqrt{Z}}\right)\left(\frac{P_{r-1}+\sqrt{Z}}{P_{r-1}-\sqrt{Z}}\right),$$

r 爲任意之正整數爲合理。故以 $r-1$ 代其 r。亦爲合理。

$$\frac{P_1+\sqrt{Z}}{P_1-\sqrt{Z}}=\left(\frac{P_1+\sqrt{Z}}{P_1-\sqrt{Z}}\right)\left(\frac{P_{r-2}+\sqrt{Z}}{P_{r-2}-\sqrt{Z}}\right),$$

由是 $\dfrac{P_1+\sqrt{Z}}{P_1-\sqrt{Z}}=\left(\dfrac{P_1+\sqrt{Z}}{P_1-\sqrt{Z}}\right)^2\left(\dfrac{P_{r-2}+\sqrt{Z}}{P_{r-2}-\sqrt{Z}}\right)=\left(\dfrac{P_1+\sqrt{Z}}{P_1-\sqrt{Z}}\right)^3\left(\dfrac{P_{r-3}+\sqrt{Z}}{P_{r-3}-\sqrt{Z}}\right)=\cdots$

21. 求 $\dfrac{1}{a+a^{-1}}-\dfrac{1}{a+a^{-1}}-\dfrac{1}{a+a^{-1}}-\cdots\cdots$ 之第 n 漸近分數，而 n 增至無限時。其第 n 漸近分數之極限 a 之數若小於 1。則等於 a。若大於 1。則等於 a^{-1}。

(證) $P_n=(a+a^{-1})P_{n-1}-P_{n-2}$ 故由 **360** 章。

P_n 等於 $\dfrac{1}{1-(a+a^{-1})x+x^2}=\dfrac{1}{a-a^{-1}}\left(\dfrac{a}{1-ax}-\dfrac{a^{-1}}{1-a^{-1}x}\right)$ 展開式 x^{n-1} 之係數。

由是 $P_n=\dfrac{1}{a-a^{-1}}(a^n-a^{-n})$,

又 Q_n 等於 $\dfrac{a+a^{-1}}{1-(a+a^{-1})x+x^2}=\dfrac{1}{a-a^{-1}}\left(\dfrac{a^3}{1-ax}-\dfrac{a^{-1}}{1-a^{-1}x}\right)$ 展開式中 x^{n-1} 之係數。由是 $Q_n=\dfrac{1}{a-a^{-1}}(a^{n+1}-a^{-n-1})$。

$\therefore\ \frac{P_n}{Q_n}=\frac{a^n-a^{-n}}{a^{n+1}-a^{-n-1}}$ 即得所求。

若 a 大於 1。則 $\frac{P_n}{Q_n}$ 之極限爲 $\frac{a^n}{a^{n+1}}=a^{-1}$。何則。以 n 爲無限大。則 a^{-n}, a^{-n-1} 爲 0 故也。

又若 a 小於 1。則 $\frac{P_n}{Q_n}$ 之極限爲 $\frac{-a^{-n}}{-a^{-n-1}}=a$。

22. $\frac{1}{2+}\frac{2}{2+}\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}\cdots\cdots$ 之第 n 漸近分數。爲 $\frac{3}{8}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$。

〔證〕 370 章之公式 (F) 於

$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2a_3}-\cdots\cdots=\frac{1}{a_1+}\frac{a_1}{a_2-1+}\frac{a_2}{a_3-1+}\frac{a_3}{a_4-1}+\cdots\cdots$ 中其 $a_1=2$, $a_2=a_3=a_4=\cdots\cdots=3$。則得

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.3}-\cdots\cdots=\frac{1}{2+}\frac{2}{2+}\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}\cdots\cdots\cdots\cdots$ 故第 n 漸近分數

$=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\cdots\cdots=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1-(-\frac{1}{3})^n}{1-(-\frac{1}{3})}\right\}$。

23. $e^{-x}=\frac{1}{1+}\frac{x}{1-x+}\frac{x}{2-x+}\frac{2x}{3-x+}\cdots\cdots+\frac{(n-1)x}{n-x}+\cdots\cdots$ 至無限。

〔證〕 $e^{-x}=\frac{1}{1}-x+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots\cdots$

$=\frac{1}{1+}\frac{x}{1-x+}\frac{x}{2-x+}\frac{2x}{3-x+}\cdots\cdots+\frac{(n-1)x}{n-x}+\cdots$ 由 370 章 (G)。

24. $\frac{x}{a}-\frac{x^2}{ab}+\frac{x^3}{abc}-\cdots\cdots=\frac{x}{a+}\frac{ax}{b-x+}\frac{cx}{c-x+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔證〕 $a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=x$ 及 $b_1=a$, $b_2=b$, $b_3=c,\cdots\cdots$ 以代於 370 章 (C) 即可證得。

25. $\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{3+}\frac{4}{5+}\frac{6}{7+}\cdots\cdots\cdots=e^{-\frac{1}{2}}$.

〔證〕 由 370 章 (F)

$\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{3+}\frac{4}{5+}\frac{6}{7+}\cdots\cdots=\frac{1}{1}-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.4}-\frac{1}{1.2.4.6}+\cdots\cdots=e^{-\frac{1}{2}}$

26. 求 $\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{3}{5+}\frac{6}{8+}\cdots+\frac{3(n-2)}{3n-4}+\cdots\cdots$ 至無限之值。

〔解〕由370章(E) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{6}{8}\cdots\cdots+\frac{3(n-2)}{3n-4}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{1.3}-\frac{1}{1.3.6}-\frac{1}{1.3.6.9}+\cdots\cdots=e^{-\frac{1}{2}}$。

27. $\frac{1}{3}+\frac{1^2.3^2}{5}+\frac{2^2.4^2}{7}+\frac{3^2.5^2}{9}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{(n-1)^2(n+1)^2}{2n+1}$

$=\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+2)}$。

〔證〕由370章(D) $\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+2)}$

$=\frac{1}{1.3}+\frac{1^2.3^2}{2.4-1.3}+\frac{2^2.4^2}{3.5-2.4}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)^2(n+1)^2}{n(n+2)-(n-1)(n+1)}+\cdots\cdots$

$=\frac{1}{3}+\frac{1^2.3^2}{5}+\frac{2^2.4^2}{7}+\cdots\cdots+\frac{(n-1)^2(n+1)^2}{2n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

28. $\frac{2}{1-}\frac{2}{9-}\frac{2}{1-}\frac{2}{9-}\cdots\cdots\cdots$之第n漸近分數為$6\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$

〔證〕先以$\frac{A}{B}$為$-\frac{2}{9-}\frac{2}{1-}\frac{2}{9-}\cdots\cdots\cdots\cdots$之第$(n-1)$漸近分數。如於360章第式例$a=-2,\ b=9,\ c=-2,\ d=1$。

則 $\frac{a+adx-acx^2}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}=\frac{-2(1+x+2x^2)}{1-5x^2+4x^4}$,

及 $\frac{b+(bd+c)x-acx^2}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}=\frac{9+7x-4x^3}{1-5x^2+4x^4}$。

而A等於前之分數展開式中x^{n-2}之係數。B等於後之分數展開式中x^{n-2}之係數。

而 $\frac{-2(1+x+2x^2)}{1-5x^2+4x^4}=-2\left\{-\frac{2}{3(1-x)}-\frac{1}{3(1+x)}+\frac{4}{3(1-2x)}+\frac{2}{3(1+2x)}\right.$於此展開式中$x^{n-2}$之係數為

$-2\left\{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(-1)^{n-2}+\frac{1}{3}2^n+\frac{1}{3}(-1)^{n-2}2^{n-1}\right\}=-\frac{2}{3}(2^{n-1}-1)\{2+(-1)^{n-2}\}=A$,

又 $\frac{9+7x-4x^3}{1-5x^2+4x^4}=-\frac{2}{1-x}-\frac{1}{1+x}+\frac{8}{1-2x}+\frac{4}{1+2x}$,於此展開式中$x^{n-2}$之係數為

$-2-(-1)^{n-2}+8.2^{n-2}+4(-1)^{n-2}2^{n-2}=(2^n-1)\{2+(-1)^{n-2}\}=B$。

由是 $\frac{A}{B}=-\frac{2(2^{n-1}-1)}{3(2^n-1)}$。

故所求之漸近分數 $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{2}{1-}\frac{2(2^{n-1}-1)}{3(2^n-1)}=\frac{6(2^n-1)}{2^{n+1}-1}$。

29. $\frac{1}{3-}\frac{4}{3-}\frac{1}{3-}\frac{4}{3-}$………之第n漸近分數爲 $\frac{6n-1+(-1)^n}{6n+7+(-1)^n}$。

〔證〕 如前例。先求其 $-\frac{4}{3-}\frac{1}{3-}\frac{4}{3-}$………之第 $n-1$ 漸近分數，而 $\frac{1}{3+}\frac{A}{B}$。即得所求之漸近分數也，

但 $\frac{A}{B}$ 爲所設 $-\frac{4}{3-}\frac{1}{3-}\frac{4}{3-}$…………之第 $n-1$ 之漸近分數，

30. $\frac{1^2}{3}-\frac{2^2}{5}-\frac{3^2}{7}-$…………至無限 $=1$。

〔證〕 由 370 章 (D) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots=\frac{1}{1-}\frac{1^2}{2+1-}\frac{2^2}{3+2-}\frac{3^2}{4+3-}\cdots\cdots$

$\cdots=\frac{1}{1-}\frac{1^2}{3-}\frac{2^2}{5-}\cdots\cdots$ 但 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$………至無限 $=\infty$。

由是 $1-\frac{1^2}{3}-\frac{2^2}{5}-\frac{3^2}{7}-\cdots\cdots=\cfrac{1}{\frac{1}{1-}\frac{1^2}{3-}\frac{2^2}{5-}\frac{3^2}{7-}\cdots\cdots}=\frac{1}{\infty}=0$，

$\therefore\ \frac{1^2}{3-}\frac{2^2}{5-}\frac{3^2}{7-}$…………$=1$，

31. $\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\frac{1.2}{3+}\frac{3.4}{3+}\frac{5.6}{3+}$………至無限，

〔證〕 $\sqrt{2}=(1+1)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1.1}{2.4}+\frac{1.1.3}{2.4.6}-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}+\cdots\cdots$

由 370 章 (C) $=1+\frac{1}{2+}\frac{2.1}{4-1+}\frac{4.3}{6-3+}\frac{6.5}{8-5+}$………………

$=1+\frac{1}{2+}\frac{1.2}{3+}\frac{3.4}{3+}\frac{5.6}{3+}$…………

32. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2+}\frac{2.3}{1+}\frac{4.5}{1+}\frac{6.7}{1+}$………至無限，

〔證〕 $\frac{1}{\sqrt{2}}=(1+1)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}-\cdots\cdots$

由是 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+\cdots\cdots$

$=\frac{1}{2+}\frac{2.3}{4-3+}\frac{4.5}{6-5+}\frac{6.7}{8-7+}\cdots\cdots=\frac{1}{2+}\frac{2.3}{1+}\frac{4.5}{1+}\frac{6.7}{1+}\cdots\cdots$

33. $\frac{1}{4-}\frac{3.4}{9-}\frac{5.6}{13-}\frac{7.8}{17-}\frac{9.10}{21-}\cdots\cdots$ 至無限 $=1$。

(證) 由370章(C) $\frac{1}{4-}\frac{3.4}{9-}\frac{5.6}{13-}\frac{7.8}{17-}\frac{9.10}{21-}\cdots\cdots$

$=\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.6}+\frac{1.3.5}{4.6.8}+\frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}+\cdots\cdots$

又由325章 $\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.6}+\frac{1.3.5}{4.6.8}+\frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}+\cdots\cdots=\frac{1}{1+2-4}(-1)=1$。

34. $(1+x)^n=1+\frac{nx}{1-}\frac{(n-1)x}{2+(n-1)x-}\frac{2(n-2)x}{3+(n-2)x-}\frac{3(n-3)x}{4+(n-3)x-}\cdots\cdots$

(證) $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$

$=1+\frac{nx}{1-}\frac{1(n-1)x}{(n-1)x+2-}\frac{2(n-2)x}{(n-2)x+3-}\frac{3(n-3)x}{(n-3)x+4-}\cdots$ 370章(C),

35. n爲整數,則 $2^n=1+\frac{n}{1-}\frac{n-1}{n+1-}\frac{2(n-2)}{n-1-}\frac{3(n-3)}{n+1-}\cdots\cdots\frac{(n-1)1}{n+1}$。

(證) 於前例 $x=1$,即可爲本題之證,

36. $\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a'}\right)\left(1+\frac{x}{a''}\right)\cdots\cdots=1+\frac{x}{a-}\frac{a(x+a)}{x+a+a'-}\frac{a'(x+a')}{x+a'+a''-}\cdots$

(證) $\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a'}\right)\left(1+\frac{x}{a''}\right)\cdots=1+\frac{x}{a}+\frac{x(x-a)}{aa'}+\frac{x(x+a)(x+a')}{aa'a''}+\cdots$

由370章 $=1-\frac{x}{a-}\frac{a(x+a)}{x+a+a'-}\frac{a'(x+a')}{x+a'+a''-}\cdots\cdots$

37. 試證 $\frac{1}{n-}\frac{n}{2n+1-}\cdots$ 至無限 $=\frac{1}{n-1+}\frac{n}{2n-1+}\frac{2n}{3n-1+}\cdots$ 至無限。

(證) $\frac{1}{n-}\frac{n}{2n+1-}\frac{2n}{3n+1-}\cdots\cdots=\frac{1}{n}+\frac{1}{n.2n}+\frac{1}{n.2n.3n}+\cdots\cdots=e^{\frac{1}{n}}-1$,

又 $e^{-\frac{1}{n}}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n.2n}-\frac{1}{n.2n.3n}+\cdots\cdots=1-\frac{1}{n+}\frac{n}{2n-1+}\frac{2n}{3n-1+}\cdots\cdots$

$$\therefore\quad \frac{1}{1-c^{-\frac{1}{n}}}=n+\frac{1}{2n-1}+\frac{2n}{3n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad n-1+\frac{n}{2n-1}+\frac{2n}{3n-1}+\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{1-c^{-\frac{1}{n}}}-1=\frac{1}{c^{-\frac{1}{n}}-1}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{n-1}+\frac{n}{2n-1}+\frac{2n}{3n-1}+\cdots\cdots\cdots=c^{-\frac{1}{n}}-1。$$

第貳拾捌編

數之法則

371. 注意 於本編專論數之性質。所用之數限於正整數，編中所云可除者。皆爲除盡而無餘者也。

記號 M(p) 所以表示 p 之倍數也，如 65, 125 等。皆爲 5 之倍數。可記爲 M(5)

定義 除 1 及本數外。更無他數可以除盡者。此種數謂之素數 (Prime)。若更有他數可以除盡者。此種數謂之複數 (Composite)。

有兩數不能以他一數同時除盡者。則此兩數謂之相互素數。或僅謂之互素 (Relatively Prime)。

372. 耶列多蘇 Eratosthenes 氏之攗法 此法用以檢定各異之素數也，

先從 1 起順次列其連續數如次。

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,
21,	22,	23,	24,	25,	26,	27,	28,	29,	30,
31,	32,	33,	34,	35,	36,	37,	38,	39,	40,

....

如上所列之數。其第一之素數爲 2. 自 2 以下每間一數所有 4, 6, 8, 10, 12,.........皆爲 2 之倍數，故爲複數，乃於其各數字之上附一小點以記之。

其第二之素數爲 3。自 3 以下每間 2 數。所有 6, 9, 12, 15, 18,.........皆爲 3 之倍數，故爲複數，乃於其各數字之上。亦附一小點以記之。

其第三之素數爲5，自5以下每間4數。附小點於其各數字之上。則凡5之倍數。皆有點以爲記。

其第四之素數爲7。自7以下每間6數。附小點於其各數字之上，則凡7之倍數。皆有點以爲記，

依次於11, 13, 17,………之倍數，皆如上法附點記之。

於是從所列之連續數中。除其附點之諸數外。所有1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37,………皆爲素數也，

任何之壹數。欲檢定其素數與否。可如次之法則推究之。

設複數由兩因子而成。而其數非爲完平方數，則其數之平方根。比其壹因子爲大。而比其他壹因子爲小。例$\sqrt{15}$比3爲大。而比5爲小，

由是知凡爲複數必含有小於其平方根之素因子。如某數爲小於121。欲檢定其數爲素數與否。則可以小於$\sqrt{121}=11$之素數。即2, 3, 5, 7逐次除之。如皆不能盡，即可決定此數爲素數也。

何則，某數爲小於121之數。假定此數爲複數。則必含有小於$\sqrt{121}=11$之素因子。而小於11之素數祇有2, 3, 5, 7四數。若逐次以2, 3, 5, 7除之，而皆不能除盡，則此數非爲複數而爲素數可知，

例欲檢283爲素數與否。則以283爲小於$17^2=289$之數。假定此數爲複數。則必含有小於17之素因子，而小於17之素數。惟限於2, 3, 5, 7, 11, 13，今逐次以各素數除283而皆不能除盡。則知283必爲素數。

373. 定理 素數之數無限

素數之數如有限，則諸素數中必有一數爲最大者。茲假定最大之數爲p。

$1\times2\times3\times4\times\cdots\cdots\times p=\underline{|p}$。此$\underline{|p}$爲p或小於p之各素數皆可除盡之，故$\underline{|p}+1$。以p或小於p之各素數除之皆餘1。則是$\underline{|p}+1$如爲複數。必含有大於p之素因子。否則$\underline{|p}+1$。即爲素數，如是p非爲最大之素數可知。故曰素數之數無限。

〔例〕求連續之n個數皆爲複數者。

則以$|\underline{n+1}+r$爲n個數中之壹數。但r爲2,3,4,……n+1以內任意之壹數。即$|\underline{n+1}+r$可以r除盡而皆爲複數。

例 $|\underline{4+1}+r=120+r$。而r爲2,3,4,5以內之任一數。故得連續四複數爲122, 123, 124, 125。

374. 定理 凡有理整代數式。對於未知元之任何值，不能僅表素數，

何則。假定有理整代數式$a\pm bx\pm cx^2\pm dx^3\pm\cdots\cdots$對於x之任何值而爲素數。其$a,b,c,d,\cdots\cdots$爲常數。設以m易x而其全式之值爲p時。(但p非爲1。亦非爲0)

則 $p=a\pm bm\pm cm^2\pm dm^3\pm\cdots\cdots\cdots$

又令$x=m+np$以代於原代數式，(但n爲任意之整數)則爲$a\pm b(m+np)\pm c(m+np)^2\pm d(m+np)^3\pm\cdots\cdots\cdots\cdots=a\pm bm\pm cm^2\pm\cdots\cdots\cdots\cdots\pm(bn+2mn+n^2+3m^2n+\cdots\cdots)p=p\pm M(p)$。此式爲p之倍數即複數，而非素數。由是知前所假定者不能僅表素數也，

如次之公式祇能對於x之適宜之值而爲素數。

(1) $x<40$。則 x^2+x+41 爲素數尤拉(Euler氏)。

(2) $x<16$。則 x^2+x+17 爲素數鮑洛(Barlow氏)。

(3) $x<29$。則 $2x^2+29$ 爲素數鮑洛(Barlow氏)。

375. 數之因子 凡算術上所述因子之諸性質。皆歸屬於次之定理。

定理 壹數可除盡兩因子之積。而對於其壹因子爲互素者。則其壹數必可以除盡他壹因子。

何則。設以x除ab而得除盡。而x對於a爲互素。今化$\frac{a}{x}$爲連分數，而以$\frac{p}{q}$爲於$\frac{a}{x}$前之漸近分數。(凡連分數之漸近分數，皆爲已約分數)則由357章第壹而得$qa-px=\pm1$。 $\therefore\ qab-pxb=\pm b$。

惟以所設之ab爲可以x除得。則$qab-pxb$必可以x除得。即b可以x除得。

既知上之定理,而於次之定理自易推求。

〔第壹〕 諸因子之積,如可以壹素數除者。則諸因子中至少有一因子。可以此一素數除。

〔第貳〕 如a^n可以壹素數除者。則a亦可以此壹素數除。

〔第三〕 a對於$a\ \beta,\gamma,\cdots\cdots\cdots\cdots$爲互素。則對於其積$a,\beta,\gamma,\cdots\cdots\cdots$亦爲互素。

〔第四〕 a對於b爲互素,則a^n對於b^u亦爲互素。

〔第五〕 壹數可各以諸素數除者。則亦可以諸素數之積除。

376. 定理 將各個複數分割其素因子。無論如何分割,其所得之素因子必爲同壹,

設N非爲素數除N及1外他數x可以除得。而其商爲y,則$N=xy$。又x,y非爲素數。而$x=zw,y=uv$ 則$N=zwuv$。

依此積次分解之。至分出之諸因子。皆爲素數而止。今定$a,\beta,\gamma,\delta,\cdots\cdots\cdots$爲其分出之素因子,則$N=a\beta\gamma\delta\cdots\cdots\cdots$若其各素因子有同因子者。則$N=a^p\beta^q\gamma^r\delta^s\cdots\cdots$但$a,\beta,\gamma,\delta,\cdots\cdots$爲其各異之素因子。

乃證將N分割其素因子。不能用別法於$a,\beta,\gamma,\delta\cdots\cdots\cdots$以外。分出特異之素因子。

假定將N分割其素因子。用前之法則,分得其各素因子爲$a,\beta,\gamma,\delta,\cdots\cdots\cdots\cdots$更用別法可分得其各素因子爲$a,b,c,d,\cdots\cdots\cdots\cdots$則$N=abcd\cdots\cdots\cdots$。

即 $abcd\cdots\cdots\cdots=a\beta\gamma\delta\cdots\cdots\cdots$。

因N可被a除,即$a\beta\gamma\delta\cdots\cdots\cdots$亦可被a除。而$a,\beta,\gamma,\delta,\cdots\cdots\cdots$皆爲素數,故a必爲$a\beta\gamma\delta\cdots\cdots\cdots$內之壹因子。若其$a=a$ 則$bcd\cdots\cdots\cdots=\beta\gamma\delta\cdots\cdots\cdots$同法可得$b=\beta,\ c=\gamma,\ d=\delta,\cdots\cdots$

由是$a,b,c,d,\cdots\cdots\cdots$與$a,\beta,\gamma,\delta\cdots\cdots\cdots$其各素數相同。

故將N分割其素因子。無論若何分割,其分出之各素因子,必爲同壹也。

〔例〕 將 29645, 13689, 90508 分割其素因子。

答 $5.\ 7^2.\ 11^2$, $3^4.\ 13^2$, 及 $2^2.\ 11^3.\ 17$.

377. 問題 求含於$\lfloor\underline{n}$內壹素數之最高方乘。

$x>y$ 其$\frac{x}{y}$之整數部，可用$I\left(\frac{x}{y}\right)$之記號表之。

例 $\frac{20}{6}=3\frac{2}{6}$ 可以$I\left(\frac{20}{6}\right)$表其整數部3也

如a爲任意之素數。而於$\lfloor\underline{n}$之因子內。可以a除者。其因子爲

$a, 2a, 3a, \ldots\ldots I\left(\frac{n}{a}\right)$，a即有$I\left(\frac{n}{a}\right)$個因子。可以a除。

由同法於$\lfloor\underline{n}$內可被a^2除得者。其因子有$I\left(\frac{n}{a^2}\right)$個，以下類推，由是素數a含於$\lfloor\underline{n}$內者。其全數爲有

$$I\left(\frac{n}{a}\right)+I\left(\frac{n}{a^2}\right)+I\left(\frac{n}{a^3}\right)+\ldots\ldots \text{個。}$$

〔第壹例〕 求於$\lfloor\underline{50}$內含有2及7之最高方乘。

$I\left(\frac{50}{2}\right)=25,\quad I\left(\frac{50}{2^2}\right)=12,\quad I\left(\frac{50}{2^3}\right)=6,\quad I\left(\frac{50}{2^4}\right)=3,\quad I\left(\frac{50}{2^5}\right)=1$。

$\therefore\ 25+12+6+3+1=47$。即求得含於$\lfloor\underline{50}$內2之最高方乘。爲$2^{47}$。

又 $I\left(\frac{50}{7}\right)=7,\quad I\left(\frac{50}{7^2}\right)=1$。

$\therefore\ 7^{7+1}$即7^8爲所求之最高方乘。

〔第貳例〕 求於$\lfloor\underline{80}$內含有3及5之最高方乘。

答 $3^{36}, 5^{19}$。

〔第三例〕 求於$\lfloor\underline{1000}$內含7之最高方乘。

答 7^{164}。

378. 定理 任意r個連續數之積，可以$\lfloor\underline{r}$除之。

設以n爲連續數之第壹數。其積爲$n(n+1)(n+2)\ldots\ldots\ldots\ldots(n+r-1)$

$=\frac{\lfloor\underline{n+r-1}}{\lfloor\underline{n-1}}$。

由244章於$n+r-1$個中取r個之組合。爲${}_{n+r-1}C_r=\frac{\lfloor\underline{n+r-1}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{n-1}}$ 其

對於n及r之任何值,已知其皆爲整數,故 $\dfrac{\underline{|n+r-1}}{\underline{|n-1}}$,

即　$n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)$。可以$\underline{|r}$除之。

〔別證〕此定理又可用前章之法則證之。

今以a除n+r−1所得之整商,恆不小於以a分除n−1及r所得整商之和。

$$\text{即}\qquad I\left(\frac{n+r-1}{a}\right)\nless I\left(\frac{n-1}{a}\right)+I\left(\frac{r}{a}\right),$$

$$\text{同法}\qquad I\left(\frac{n+r-1}{a^2}\right)\nless I\left(\frac{n-1}{a^2}\right)+I\left(\frac{r}{a^2}\right),$$

$$I\left(\frac{n+r-1}{a^3}\right)\nless I\left(\frac{n-1}{a^3}\right)+I\left(\frac{r}{a^3}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

兩邊相加得。

$$I\left(\frac{n+r-1}{a}\right)+I\left(\frac{n+r-1}{a^2}\right)+\cdots\cdots\nless I\left(\frac{n-1}{a}\right)+I\left(\frac{n-1}{a^2}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+I\left(\frac{r}{a}\right)+I\left(\frac{r}{a^2}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由前章知於$\underline{|n+r-1}$內所有a之倍數。決不小於$\underline{|n-1}$及$\underline{|r}$內所有a之倍數之和。而a爲任意之素數,故無論任何素數,含於$\underline{|n+r-1}$內者。其倍數比含於$\underline{|n-1}$及$\underline{|r}$各倍數之和爲大,則是各素數,凡含於$\underline{|n-1}\times\underline{|r}$內者。無不含於$\underline{|n+r-1}$。故$\underline{|n+r-1}$可以$\underline{|n-1}\times\underline{|r}$除之。即$\underline{|n+r-1}$可以$\underline{|r}$除之。

〔推論〕$\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots=n$。則 $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\cdots\cdots}$ 爲整數。

何則,由前之證法。可知$I\left(\dfrac{a}{n}\right)$不小於其各部分$I\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)+I\left(\dfrac{\beta}{n}\right)+\cdots$

379. 定理n爲素數於$(a+b)^n$之展開式,除初項末項外。其他各項可以n整除之。

由二項式定理,而知$(a+b)^n$之展開式,其任壹項之係數,爲$\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}$。但此式爲第r+1項之係數,而r爲任意之整

正數。爲在於0與n之間。即r大於0而小於n。何則。如r=0，則此式爲初項之係數其值爲1，如r=n則此式爲末項之係數。其值亦爲1。今以r表0與n間任意之整數。即以上式表初項與末項間任一項之係數。

於前章既證明$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}$爲整數，惟以n大於r而爲素數。則n對於r而爲互素。故可知$\frac{(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}$。必爲整數，即上式$=n\times$整數。

由是證得二項式，除首末兩項外。其他各項可以n除之。

由同理n爲素數，於$(a+b+c+\cdots\cdots)^n$展開式之各項。凡爲含有二個及二個以上文字之係數，皆可以n整除之。

何則。由多項式之定理，其各項中含有二個及二個以上文字之係數。爲$\frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\cdots\cdots}$。但$\alpha+\beta+\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=n$。而n之值。常比$\alpha,\beta,\gamma,\cdots\cdots$之各值爲大。今n爲素數則n對於$\underline{|\alpha}$，$\underline{|\beta}$，$\underline{|\gamma}\cdots\cdots$爲互素。由是知$\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\cdots\cdots$可以整除$\underline{|n-1}$，

即 $\frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\cdots\cdots}=\frac{n\underline{|n-1}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\cdots\cdots}=n\times$整數。

故上式可得以n整除之。

例題

1. $n(n+1)(2n+1)$爲6之倍數。

〔證〕 $n(n+1)(2n+1)=n(n+1)\{(n+2)+(n-1)\}$

$=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)=1\times2\times3$之倍數$+1\times2\times3$之倍數。

2. n爲奇數，則$(n^2+3)(n^2+7)=M(32)$，

〔證〕 $n=2m+1$。則$(n^2+3)(n^2+7)=\{(2m+1)^2+3\}\{(2m+1)^2+7\}$

$=16(m^2+m+1)(m^2+m+2)=16\times$連續兩數之積$=16\times2$之倍數。

3. n爲奇數。則$n^4+4n^2+11=M(16)$，

〔證〕 $n^4+4n^2+11=(n^2-1)(n^2+5)+16$

$=\{(2m+1)^2-1\}\{(2m+1)^2+5\}+16$

$=8(2m^2+2m+3)m(m+1)+16=8M(2)+16=M(16)$。

4. $1+7^{2n+1}=M(8)$,

〔證〕 $1+7^{2n+1}$ 可以 $1+7$。即 8 除得。

5. $19^{2n}-1=M(360)$,

〔證〕 $19^{2n}-1=361^n-1$ 可以 $361-1$。即 360 除得,

6. n 爲大於 3 之素數,則 $n(n^2-1)(n^2-4)=M(360)$,

〔證〕 $n(n^2-1)(n^2-4)=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)=M(1.2.3.4.5)=M(120)$,

又 $n=3m+1$。 $n(n^2-1)(n^2-4)=9m(m+1)(3m-1)(3m+1)(3m+2)$,

∴ 此式爲360之倍數。

380. 勿而馬 Fermat 氏之定理 n 爲素數。而 m 對於 n 爲互素。則 $m^{n-1}-1$ 可以 n 除之。

於前章旣證得於 $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_m)^n$ 展開式其各項中含有二個及二個以上文字之係數,可以 n 除得,

即 $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_m)^n=a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots\cdots+a_m{}^n+M(n)$。

今 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_m=1$ 則 $m^n=m+M(n)$,

∴ $m^n-m=m(m^{n-1}-1)=M(n)$。惟 m 對於 n 爲互素,

即 m 非爲 n 之倍數, 則 $m^{n-1}-1$ 爲 n 之倍數明矣。

例題

1. $1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}+\cdots\cdots+(n-1)^{n-1}+1=M(n)$,

〔證〕 原式 $=(1^{n-1}-1)+(2^{n-1}-1)+(3^{n-1}-1)+\cdots+\{(n-1)^{n-1}-1\}+n$,

$=M(n)+M(n)+M(n)+\cdots\cdots+M(n)+n=M(n)$,

2. a 及 b 爲素數而對於 n 各爲互素則 $a^{n-1}-b^{n-1}$ 爲 n 之倍數。

〔證〕 $a^{n-1}-b^{n-1}=(a^{n-1}-1)-(b^{n-1}-1)=M(n)-M(n)=M(n)$。

3. $n^5-n=M(30)$,

〔證〕 $n^5-n=n(n^4-1)=M(5)$,

又 $n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)=M(6)$, ∴ $n^5-n=M(5\times 6)$。

4. $n^7-n=M(42)$。

〔證〕 $n^7-n=n(n^6-1)=M(7)$,

及 $n^7-n=(n-1)n(n+1)(n^4+n^2+1)=M(6)$, $\therefore$ $n^7-n=M(7\times6)$。

5. x及y各對於1365而爲互素。則 $x^{12}-y^{12}=M(1365)$。

〔證〕 $1365=3\times5\times7\times13$。則x及y對於3, 5, 7, 13, 爲互素。

又 $x^{12}-y^{12}$ 必含有 x^2-y^2, x^3-y^3, x^4-y^4, x^6-y^6, $x^{12}-y^{12}$ 之因子。

由是 $x^2-y^2=(x^2-1)-(y^2-1)=M(3)-M(3)=M(3)$, $x^3-y^3=M(4)$,

$x^4-y^4=M(5)$, $x^6-y^6=M(7)$, $x^{12}-y^{12}=M(13)$。

$\therefore$ $x^{12}-y^{12}=M(3\times5\times7\times13)$。

6 m及n爲素數,則 $m^{n-1}+n^{m-1}-1=M(mn)$。

〔證〕 $m^{n-1}+n^{m-1}-1=m^{m-1}+M(m)=M(m)$。

又 $m^{n-1}+n^{m-1}-1=n^{m-1}+M(n)=M(n)$。 $\therefore$ 原式 $=M(mn)$。

7. m, n及p皆爲素數,則 $(np)^{m-1}+(pm)^{n-1}+(mn)^{p-1}-1=M(mnp)$。

〔證〕 原式 $=\{(np)^{m-1}+(pm)^{n-1}\}+\{(mn)^{p-1}-1\}=M(p)+M(p)=M(p)$。

由同法。原式爲 $M(m)$, $M(n)$, $\therefore$ $M(mnp)$。

8. 任何數之四方乘爲5m或5m+1。

〔證〕 任意之數以5除,其餘數總不外乎0, 1, 2, 3, 4, 以內,故任意之數爲5m, 5m+1, 5m+2, 5m+3, 5m+4。而此四方乘,可以5m, 5m+1概之,

〔別證〕 一數爲5之倍數,則其四方乘,亦爲5之倍數卽5m。又設任何數a爲非5之倍數。則由Fermat氏之定理。$a^4-1=M(5)$ 卽 5m。

$\therefore$ $a^4=5m+1$。

9. 任意數之12方乘爲13m或13m+1。

〔證〕 任意數爲13m, 13m+1, 13m+2.........13m+12,而此12方乘,可以13m, 13m+1概之,

10. 任意之8方乘爲17m或17m±1,

〔證〕 如前例。

381. 問題 求於已知數內所有整除數之數,

設已知數爲N。而從N約得各異之素因子。爲a, b, c,......。

則 $N=a^xb^yc^z.........$。

故N可以次之連乘積之各項整除之。其連乘積爲

$(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^x)(1+b+b^2+\cdots\cdots+b^y)(1+c+c^2+\cdots\cdots+c^z)$。

由是得整除N之除數，並N及1。共爲$(x+1)(y+1)(z+1)\cdots\cdots\cdots$。

例　題

1. 問600有若干種整除數。　　答　24。

〔解〕$600=2^3.3.5^2$。　$\therefore\ (3+1)(1+1)(2+1)=24$。

2. 試從已知數求其整除數之和。

〔解〕$N=a^xb^yc^z\cdots\cdots$而其整除數之和爲

$$(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^x)(1+b+b^2+\cdots\cdots+b^y)(1+c+c^2+\cdots\cdots+c^z)\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{(1-a^{x+1})(1-b^{y+1})(1-c^{z+1})\cdots\cdots}{(1-a)(1-b)(1-c)\cdots\cdots}。$$

3. 1000, 3600, 及 14553 求其整除數之數。　　答　16, 45, 24。

4. 6, 28, 及 496 皆爲完數(Perfect numbers)試證之。

〔證〕完數者爲除本數外其他各整除數之和，等於其數也。例如6之整除數之和。除本數6外其他爲1+2+3。

即　$6=2\times3$。　$\therefore$　6之整除數之和。爲$\dfrac{(1-2^2)(1-3^2)}{(1-2)(1-3)}-6=6$。

而　$28=2^2\times7$。　$\therefore$　28之整除數之和。爲$\dfrac{(1-2^3)(1-7^2)}{(1-2)(1-7)}-28=28$。

及　$496=2^4\times31$。　$\therefore$ 496之整除數之和。爲$\dfrac{(1-2^5)(1-31^2)}{(1-2)(1-31)}-496=496$。

5. 求含有6種整除數之最小數。　　答　12。

〔解〕$N=a^xb^yc^z\cdots\cdots$其$a, b, c,\cdots\cdots$大於1而爲各異之素因子。惟以N之整除數之數。爲$(x+1)(y+1)(z+1)\cdots\cdots=6=2\times3$。

$\therefore\ x+1=2,\ y+1=3,\quad \therefore\ x=1,\ y=2,$

由是$N=3^1\times2^2=12$。

6. 整除數有15種其最小數如何。　　答　144。

〔解〕$(x+1)(y+1)(z+1)\cdots\cdots=15=3\times5$，

$x+1=3,\ y+1=5,\quad \therefore\ x=2,\ y=4,$

由是$N=2^4\times3^2=144$。

7. 有整除數20種求其最小數，　　答 240，

〔解〕 $(x+1)(y+1)(z+1)\ldots\ldots=20=2\times2\times5$，

$x=1,\ y=1,\ z=4,\quad \therefore\quad N=2^4\times3^1\times5^1=240$，

8. 4725以如何之最小數乘之，而得(1)爲平方數。(2)爲立方數。
答 21, 245。

〔解〕 $4725=5^2\times3^3\times7$

故 (1)之乘數 $=3\times7=21$。 (2)之乘數 $=5\times7^2=245$，

382. 問題 將已知數分括爲壹對因子，而爲互素者，求其方法有幾，

例如360分括爲 $1\times360,\ 8\times45,\ 9\times40,\ 5\times72$，其1對於360，8對於45，9對於40，5對於72各壹對之因子。皆爲互素，至若360分括爲 18×20，其18對於20。非爲互素，故不取。

若將360求其各壹對互素數之對數。則以

$360=2^3\times3^2\times5$，而 $(1+2^3)(1+3^2)(1+5)$ 之項數。

即 $(1+1)(1+1)(1+1)=8$ 半之。即 $8\div2=4$，即爲所求之對數，

何則 $(1+2^3)(1+3^2)(1+5)$

$$=1+2^3+3^2+5+2^3\times3^2+3^2\times5+2^3\times5+2^3\times3^2\times5$$

$$=1+8+9+5+72+45+40+360，$$

即 1對於360爲互素，　　$360=1\times360$，

8對於45爲互素，　　$360=8\times45$，

9對於40爲互素，　　$360=9\times40$，

5對於72爲互素，　　$360=5\times72$。

由是可證明如次。

設已知數爲 $N=a^xb^yc^z\ldots\ldots$

分割上式之因子爲壹對，則其壹因子中含有a者。他之壹因子不能含有a。壹因子含有b者。他之壹因子不能含有b，以下類推。故互爲素數各壹對之因子。不外乎次之連乘積各項以內。

$(1+a^x)(1+b^y)(1+c^z)\ldots\ldots\ldots\ldots$

若a, b, c$\ldots\ldots\ldots\ldots$有n字。則上之積有n因子。而其項數爲 $(1+1)(1+1)(1+1)\ldots\ldots=2^n$。故所求各對之數爲 $2^n\div2=2^{n-1}$。但此內含有 $1\times N$ 之壹對。

383.問題 凡小於已知數之正整數。而對於已知數爲互素者。求其正整數之數。

設已知數爲N。而$N=a^x b^y c\cdots\cdots\cdots\cdots$。但a, b, c……爲N之各異之素因子。

凡有正整數不大於N。而可以a整除者，不外乎a之$1, 2, 3, \ldots \frac{N}{a}$倍。卽$a, 2a, 3a, \ldots\ldots\ldots \frac{N}{a}a$。故凡不大於N，而可以a整除者。其數共有$\frac{N}{a}$個，由同理，凡可以b整除者。其數有$\frac{N}{b}$個，

凡可以ab整除者。其數有$\frac{N}{ab}$個。又可以abc整除者。其數有$\frac{N}{abc}$個，以下類推。

今考得小於N而與N非爲互素者。其各種正整數。在次所示之式中。每種祇有壹個。卽凡小於N而與N有公因子者。其所有種數，在次所示之(a)式中。每種祇有壹個。而無有重複也。

$$\Sigma\frac{N}{a}-\Sigma\frac{N}{ab}+\Sigma\frac{N}{abc}-\Sigma\frac{N}{abcd}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

但此式爲略記之式。詳之，卽

$$\left(\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}+\cdots\cdots\right)-\left(\frac{N}{ab}+\frac{N}{bc}+\cdots\cdots\right)+\left(\frac{N}{abc}+\cdots\right)-\left(\frac{N}{abcd}+\cdots\right)+\cdots$$

推求其故。可先假定壹整數爲小於N，而可以N之壹素因子a整除者。卽假定此壹整數爲小於N。而與N有公因子a而非爲互素者。

則此壹整數。卽爲(a)式$\frac{N}{a}$個（卽$a, 2a, 3a, \ldots\ldots \frac{N}{a}a$）內之壹數，

次假定壹整數爲小於N而可以N之二素因子a, b整除者，卽假定壹整數爲小於N。而與N有公因子a, b而非爲互素者。

則此一整數可於(a)式$\Sigma\frac{N}{a}$之$\frac{N}{a}$個內及$\frac{N}{b}$個內各取得壹個，

又可於$\Sigma\frac{N}{ab}$之$\frac{N}{ab}$個內取得壹個，

卽$2-1=1$個，卽此假定之壹整數，在(a)式中祇有壹個，

又次假定壹整數爲小於N。而得以N之素因子 a,b,c,……之 r 個整除者。

則此壹整數可於(a)式 $\sum\frac{N}{a}$ 之 $\frac{N}{a},\frac{N}{b},\frac{N}{c},\cdots\cdots$ 內各取得壹個即 r 個。

又可於 $\sum\frac{N}{ab}$ 之 $\frac{N}{ab},\frac{N}{ac},\frac{N}{ad},\cdots\cdots\frac{N}{bc},\frac{N}{bd}$ 內各取得壹個。即 $\frac{r(r-1)}{1.2}$ 個。

(即於 a,b,c,………r 個中取二個之順列數)。

又可於 $\sum\frac{N}{abc}$ 內取得 $\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}$ 個。以下同理,

由是此壹整數之個數在(a)式內共得

$$r-\frac{r(r-1)}{1.2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{r(r-1)\cdots\cdots1}{\underline{|r}}$$

$$=1-\left\{1-r+\frac{r(r-1)}{1.2}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots-(-1)^{r-1}\frac{r(r-1)\cdots\cdots1}{\underline{|r}}\right\}$$

$$=1-(1-1)^r=1。$$

由是可見與N非爲互素之各整數,計其各種之個數在(a)式內。祇各有壹個,即小於N而與N不爲互素者。計其相異正整數之個數。適如(a)式之値。

即知小於N而與N爲互素之正整數,其個數等於從N個內減(a)式之値。即

$$N-\sum\frac{N}{a}+\sum\frac{N}{ab}-\frac{N}{abc}+\cdots\cdots$$

$$=N\left\{1-\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{1}{ab}-\frac{1}{abc}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(260\text{ 章})。$$

例題

1. 問小於100而與100爲互素者。其數有幾個, 答 39.

(解) $100=2^2\times5^2$。故 $100\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=40$ 但此內當除去不用之1。故所求之個數爲 $40-1=39$.

2. 問小於1575而與1575爲互素者。其數有幾個。 答 719.

(解) $1575=5^2\times3^2\times7$。 $\therefore$ $1575\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)-1=719$,

3. 小於n(但n>2)而與n爲互素其數(此內含有1)之個數。爲偶數。而此各數中有二分之壹。爲大於$\frac{1}{2}$N試證之。

(證) 壹數A。對於N爲互素。其又壹數N−A。亦對於N爲互素,如是對於N而爲互素者。各有壹對,故爲偶數,

又此各數內$A>\frac{N}{2}$。則N−A爲$<\frac{N}{2}$。故知此等數內其半爲大於$\frac{N}{2}$。

384. 平方數之形 平方數有種種之形狀。何者可以成立。何者不可以成立。玆舉其要例如次。

〔第壹例〕 凡各平方數。爲3m或爲3m+1,

設各根數。爲3之倍數或非3之倍數。

則各數不外乎3m或3m±1,

故其平方數。爲$(3m)^2=9m=3m$,

$$(3m\pm1)^2=(3m)\pm2(3m)+1=3m+1。$$

〔第貳例〕 凡各平方數。爲5m或5m±1。

各根數不外乎5m, 5m±1, 5m±2,

故其平方數。爲$(5m)^2=5m$,

$$(5m\pm1)^2=(5m)^2\pm2(5m)+1=5m+1,$$
$$(5m\pm2)^2=(5m)^2\pm4(5m)+4=5m-1。$$

〔第三例〕 $a^2+b^2=c^2$但a, b, c爲整數,則abc可以60整除。

準第壹例各平方數,爲3m或3m+1。

若使a^2, b^2,俱爲3m+1。則從$a^2+b^2=c^2$。得$c^2=3m+2$。然平方數,不能成3m+2之形。

由是a^2, b^2。或俱爲3m,或其壹爲3m其壹爲3m+1,

則從$a^2+b^2=c^2$。得$c^2=3m$或3m+1,即知abc爲3m,

次準第二例，各平方數爲$5m$或$5m\pm1$，

若使a^2,b^2俱爲$5m+1$或俱爲$5m-1$。則從$a^2+b^2=c^2$。得$c^2=5m+2$。或$c^2=5m-2$。然平方數，不能成$5m\pm2$之形。

由是a^2,b^2或俱爲$5m$。或其一爲$5m+1$。其他之一爲$5m-1$。或其一爲$5m$。其他之一爲$5m\pm1$。以上各種。於a^2,b^2,c^2，內必有一個平方數爲$5m$之形。

故知於a,b,c內必有一數爲5之倍數，

又各數爲$4m$或$4m+1$或$4m+2$或$4m+3$。則其平方數爲$16m$或$8m+1$或$16m+4$。

若使a^2,b^2爲$8m+1$，$16m+4$。則從$a^2+b^2=c^2$。得$c^2=8m+1+16m+4=8m+5$。不能成平方數之形，

又使a^2,b^2俱爲$8m+1$。則$c=8m+2$。亦不能成平方數之形，

由是a^2,b^2或俱爲$16m$。或俱爲$16m+4$。或其一爲$16m$。其他之一爲$16m+4$。故a,b,c內必有一數爲4之倍數，

從上之證明。而得abc有$3\times5\times4$之倍數，卽可以60整除之，

〔第四例〕 各立方數爲$7m$或$7m\pm1$。又各立方數爲$9m$或$9m\pm1$。

各根數爲$7m$或$7m\pm1$或$7m\pm2$或$7m\pm3$。

故其立方數爲 $(7m)^3=7m$,

$$(7m\pm1)^3=(7m)^3\pm3(7m)^2+3(7m)\pm1=7m\pm1,$$

同法 $(7m\pm2)^3=7m\pm2^3=7m\pm7\pm1=7m\pm1,$

$$(7m\pm3)^3=7m\pm27=7m\pm28\mp1=7m\mp1,$$

又各數爲$3m$或$3m\pm1$。故其立方爲$(3m)^3=27m=9m$,

$$(3m\pm1)^3=(3m)^3\pm3(3m)^2\pm3(3m)\pm1=9m\pm1,$$

〔第五例〕 各四方乘數爲$5m$或$5m+1$。

各根數爲$5m$或$5m\pm1$或$5m\pm2$。故其四方乘爲

$(5m)^4=5m$, $(5m\pm1)^4=5m+1$, $(5m\pm2)^4=5m+16=5m+1$。

〔第六例〕平方數之末位數。不能有2, 3, 7, 8四數。

各數爲$10m+a$(但a爲1, 2, 3,.........9, 0以內之數)。

故$(10m+a)^2=10m+a^2$，而a^2爲1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 0以內之數。即其末位之數字。祇有1, 4, 5, 6, 9或0。而無2, 3, 7, 8四個數字。

〔第七例〕平方數末位之數字爲奇數者。則其十位之數字必爲偶數。

奇數1, 3, 5, 7, 9之平方爲01, 09, 25, 49, 81。其十位之數字爲0或偶數。

而a爲在1, 3, 5, 7, 9以內之壹數字。則以

$(10m+a)^2=100m+20m+a^2$。其$20m$爲偶數。而以a^2之十位數字。(即偶數)加於$20m$其仍爲偶數可知。

〔第八例〕任何數末位之數字。與其$(4n+1)$方乘，末位之數字相同。

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9順次之各四方乘爲1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561。其末位之數字。不外乎1, 5, 6。而末位之數字1, 5, 6任乘至若干方乘。其末位仍爲1, 5, 6。

故任何數$4n$乘方之末位。不外乎1, 5, 6以內之數。

而$4n+1$方乘之末位數字$1\times1=1$, $1\times3=3$, $1\times7=7$, $1\times9=9$。

又$5\times5=25$, 又$6\times2=12$。$6\times4=24$, $6\times6=36$, $6\times8=48$。故末位有1, 3, 7, 9其數$4n+1$方乘之末位。亦有1, 3, 7, 9。又末位有2, 4, 6, 8。其數$4n+1$方乘之末位。亦有2, 4, 6, 8。又末位有5。其數$4n+1$方乘之末位。亦有5。故如題所云。

〔第九例〕連續四數之積。決不能成立爲平方數。

設連續四數爲$a, a+1, a+2, a+3$。

則
$$\begin{aligned}a(a+1)(a+2)(a+3)&=(a^2+3a)(a^2+3a+2)\\&=\{(a^2+3a+1)-1\}\{(a^2+3a+1)+1\}\\&=(a^2+3a+1)^2-1\end{aligned}$$

即連續四數之積。其形如N^2-1。故不能成立爲平方形。

例題三十八

1. 凡大於3之任意兩素數。其平方差可以24整除。

〔證〕設x,y爲兩素數。由Fermat氏之定理。
$x^2-1=M(3)$, 又 $x=2m+1$, ∴ $x^2-1=(2m+1)^2-1=4m(m+1)=M(8)$,
由是 $x^2-1=M(24)$。由同法 $y^2-1=M(24)$。∵ $x^2-y^2=M(24)$。

2. n爲奇數而大於3。則 $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)=M(2^7.\ 3^2.\ 5.\ 7)$。

〔證〕 $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)=(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$
$=M(\underline{|7})=M(2^4,\ 3^2,\ 5,\ 7$
又 $n=2m+1$。故 $(n-3)(n-1)(n+1)(n+3)=8m(m+1)(m+2)(m+3)$
$=8M(\underline{|4})=M(2^7)$。由是 $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)=M(2^7.\ 3^2.\ 5,\ 7.)$。

3. n爲奇數,則 $(n+2m)^n-(n+2m)=M(24)$。

〔證〕 $(n+2m)^n-(n+2m)=(n+2m)\{(n+2m)^{n-1}-1\}$。而n爲奇數。則 $(n+2m)^{n-1}-1$。可以 $(n+2m)^2-1$ 整除。
故 $(n+2m)^n-(n+2m)=M(n+2m-1)(n+2m)(n+2m+1)$。
而 $n+2m-1$ 爲偶數。∴ $(n+2m)^n-(n+2m)=M(2.3.4)=M(24)$。

4. $a^{4m+p}-a^{4n+p}=M(30)$。

〔證〕 $a^{4m+p}-a^{4n+p}=a^{4n+p}(a^{4(m-n)}-1)$,而
$a^{4(m-n)}-1=(a^4)^{m-n}-1$。故得以 a^4-1 整除。
又由 384.章第五例,a^4爲 $5m$ 或 $5m+1$。故設 $a^4=5m$,則 $a=M(5)$
又以原式爲有 $(a-1)a(a+1)$ 之因子故 $M(1.2.3)=M(6)$。∴ 原式 $=M(5.6)=M(30)$,次設 $a^4=5m+1$。則 $a^4-1=M(5)$,∴ 原式 $=M(5.6)=M(30)$

5. $N-a^2=x$ 及 $(a+1)^2-N=y$。而x及y爲正數,則 $N-xy$ 爲平方數。

〔證〕 $N-xy=N-(N-a^2)\{(a+1)^2-N\}$
$$=N^2-2a(a+1)N+a^2(a+1)^2=\{N-a(a+1)\}^2$$。

6. 〔問〕1000以下之數,不能以2,3或5整除者共有幾種。

〔解〕1000以下之數。凡有2,3,5之因子。其最大數爲990。故求990以下之數對於990爲素數者。其種數有 $990\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=264$ 種,又於990與1000之間,惟991與997二種爲無2,3,5之因子者。由是所求之數。爲 $264+2=266$ 種。

7. P, Q, R, p, q, r, 爲整數。而 p, q, r, 相互爲素數,然 $\frac{P}{p}+\frac{Q}{q}+\frac{R}{r}$ 爲整數,則 $\frac{P}{p}, \frac{Q}{q}, \frac{R}{r}$ 亦爲整數。

〔證〕 $\frac{P}{p}+\frac{Q}{q}+\frac{R}{r}=$ 整數 $=a$, 然 $\frac{Pqr}{p}+Qr+Rq=aqr$。故 $\frac{Pqr}{p}$ 不可不爲整數。而 p, q, 相互爲素數,故知 $\frac{qr}{p}$ 不能爲整數,由是 $\frac{P}{p}$ 決爲整數。

同法 $\frac{Q}{q}, \frac{R}{r}$ 亦爲整數。

8. 284 與 220 爲不完伴數(Amicable Numbers)。所謂不完伴數者。即其各整除數之和。等於他壹數也。

〔證〕 $284=2^2\times 71$。故 284 之整除數之和,爲

$(1+2+2^2)(1+71)-284=220$。

又 $220=2^2\times 5\times 11$。故 220 之整除數之和。爲

$(1+2+2^2)(1+5)(1+11)-220=284$。

9. 證 2^n-1 爲素數。則 $2^{n-1}(2^n-1)$ 爲完數(Perfect Number)。所謂完數者。即其整除數之和等於本數也。

〔證〕 2^n-1 爲素數。則 $2^{n-1}(2^n-1)$ 之素因子。爲 2 及 2^n-1。

故 $2^{n-1}(2^n-1)$ 之整除數之和。爲

$(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})\{1+(2^n-1)\}-2^{n-1}(2^n-1)$

$=\frac{1-2^n}{1-2}(2^n)-2^{n-1}(2^n-1)=2^{n-1}(2^n-1)$。

10. $x^{16}-1$ 爲可以 680 整除者。求其 20 以下 x 之任何整數值,

〔解〕 由 Fermat 氏之定理。$x^{16}-1=M(17)$, $x^4-1=M(5)$,

又由題意而知 x 爲奇數,故 $x^2-1=M(8)$,

故 x 爲奇數而非爲 5, 17 之倍數。則 $x^{16}-1=M(17.5.8)=M(680)$。

由是所求 x 之值。爲於 20 以下除 5, 17 外如 3, 7, 9, 11, 13, 19。

11. 凡數字之和爲 15。其數不能爲完平方數及完立方數,

〔證〕 凡數等於 9m+數字之和,即 9m+15。即 9m+6。然凡平方數 $(9m)^2, (9m\pm 1)^2, (9m\pm 2)^2, (9m\pm 3)^2 (9m\pm 4)^2$。不外乎 9m, 9m+4, 9m+7。故知 9m+6 不能爲完平方數。

又完立方數為$(9m)^3$, $(9m\pm1)^3$, $(9m\pm2)^3$, $(9m\pm3)^3$, $(9m\pm4)^3$。不外乎$M(9)$, $M(9)\pm1$, 故知$9m+15$即$M(9)+6$不能為完立方數。

12. 各平方數得以兩平方數之差表之。

〔證〕 各平方數為偶數。則$(2n)^2=4n^2=(n^2+1)^2-(n^2-1)^2$。

又各平方數為奇數。則$(2n+1)^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$,

而$a+b=(2n+1)^2$, $a-b=1$。 則 $a=2n^2+2n+1$, $b=2n^2+2n$,

由是$(2n+1)^2=(2n^2+2n+1)^2-(2n^2+2n)^2$。

13. 以7, 8, 9除一數。順次餘1, 2, 3。試示此等數一般之形。且證此等之最小數為498。

〔解〕 所求之數為$M(7)+1=M(7)+7-6=M(7)-6$,

$M(8)+2=M(8)+8-6=M(8)-6$; $M(9)+3=M(9)+9-6=M(9)-6$.

由是得所求之數為$M(7\cdot8\cdot9)-6=M(504)-6$。

故其一般之形為$504m-6$。而最小數為$504-6=498$。

14. n為素數。而N對於n為互素。則$N^{n^2-n}-1=M(n^2)$,

及 $N^{n^r-n^{r-1}}-1=M(n^r)$。

〔證〕 由Fermat氏之定理$N^{n-1}-1=M(n)$。

$\therefore$ $N^{n^2-n}=(N^{n-1})^n=\{1+M(n)\}^n=1+nM(n)+\cdots\cdots=1+M(n^2)$。

由是$N^{n^2-n}-1=M(n^2)$。

又 $N^{n^3-n^2}=\{N^{n^2-n}\}^n=\{1+M(n^2)\}^n=1+nM(n^2)+\cdots\cdots=1+M(n^3)$。

由是$N^{n^3-n^2}-1=M(n^3)$。 由同法推得$N^{n^r-n^{r-1}}-1=M(n^r)$。

15. n為素數,而N對於n為互素。則$N^{1+2\cdots\cdots+(n-1)}\pm1=M(n^2)$。

〔證〕 準前例$N^{n(n-1)}-1=M(n^2)$。

即 $(N^{\frac{1}{2}n(n-1)}+1)(N^{\frac{1}{2}n(n-1)}-1)=M(n^2)$。

而 $N^{1+2+\cdots\cdots+(n-1)}\pm1=N^{\frac{1}{2}n(n-1)}\pm1$。

又 $N^{\frac{1}{2}n(n-1)}+1$與$N^{\frac{1}{2}n(n-1)}-1$之差為2。其積不能以n^2整除。故此兩因子。其一必可以n^2整除。

16. p為素數。而$(1+x)^{p-2}=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

則a_1+2, a_2-3, a_3+4, $\cdots\cdots$為p之倍數。

〔證〕 於$(1+x)^{p-2}$展開式第$(r+1)$項之係數。為

$$\frac{(p-2)(p-3)\cdots\cdots\{p-(r+1)\}}{\underline{|r}}=\frac{M(p)+(-2)(-3)\cdots\cdots\{-(r+1)\}}{\underline{|r}}$$

$$=\frac{M(p)+(-1)^r\underline{|r+1}}{\underline{|r}}=\frac{M(p)}{\underline{|r}}+(-1)^r(r+1)。$$

又於 $1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$ 第 $r+1$ 項之係數爲 a_r。

$\therefore\ a_r=M(p)+(-1)^r(r+1)$，即 $a_r-(-1)^r(r+1)=M(p)$. $r=1$，

則 $a_1+2=M(p)$，$r=2$, $a_2-3=M(p)$, $r=3$。則 $a_3+4=M(p)\cdots\cdots\cdots$

17. 三個素數爲A. P. 其任壹數非爲3。則其公差必爲6之倍數，

〔證〕 三個素數爲 $x, x+a, x+2a$，由例題1 $x>3$。

則 $(x+a)^2-x^2=M(24)$，及 $(x+2a)^2-(x+a)^2=M(24)$。

即 $2ax+a^2=M(24)$，及 $2ax+3a^2=M(24)$，

由是 $(2ax+3a^2)-(2ax+a^2)=M(24)$，即 $2a^2=M(24)$。

$\therefore\ a^2=M(12)$。故 $a=M(6)$。

18. 試示 $\dfrac{\underline{|2a}\,\underline{|2b}}{\underline{|a}\,\underline{|b}\,\underline{|a+b}}$ 爲整數，

〔證〕 設如本題於其分母所有任意之素因子爲p。

證得 $I\left(\frac{2a}{p}\right)+I\left(\frac{2b}{p}\right)\not<I\left(\frac{a}{p}\right)+I\left(\frac{b}{p}\right)+I\left(\frac{a+b}{p}\right)$，由378章先定

$a=mp+\alpha$, $b=np+\beta$ 而 α, β 爲0。或爲小於p之正整數，以此代用於前之關係式，而得

$$I\left(\frac{2mp+2\alpha}{p}\right)+I\left(\frac{2np+2\beta}{p}\right)\not<I\left(\frac{mp+\alpha}{p}\right)+I\left(\frac{np+\beta}{p}\right)+I\left(\frac{mp+np+\alpha+\beta}{p}\right),$$

即 $2m+I\left(\frac{2\alpha}{p}\right)+2n+I\left(\frac{2\beta}{p}\right)\not<m+I\left(\frac{\alpha}{p}\right)+n+I\left(\frac{\beta}{p}\right)+m+n+I\left(\frac{\alpha+\beta}{p}\right)$，

但 $\frac{\alpha}{p}$, $\frac{\beta}{p}$，爲小於1。故 $I\left(\frac{\alpha}{p}\right)=0$。 $I\left(\frac{\beta}{p}\right)=0$。

由是 $I\left(\frac{2\alpha}{p}\right)+I\left(\frac{2\beta}{p}\right)\not<I\left(\frac{\alpha+\beta}{p}\right)$ 惟 α, β 爲小於p。故 $\alpha+\beta$，若小於p。則 $I\left(\frac{\alpha+\beta}{p}\right)=0$。故於前之關係爲能合理，

又 $\alpha+\beta$ 若大於p。要比2p爲小。故 $I\left(\frac{\alpha+\beta}{p}\right)$ 至大不能多於1。

而 $I\left(\frac{2a}{p}\right)$ 或 $I\left(\frac{2\beta}{p}\right)$至小必有壹數爲1。故於前之關係亦能合理，如是於$\underline{|a}\,\underline{|b}\,\underline{|a+b}$內所有之素因子。於$\underline{|2a}\,\underline{|2b}$內無不有之。故如題所云。

19. $\dfrac{\underline{|2n}}{\underline{|n+1}\,\underline{|n}}$爲整數。試證明之。

〔證〕 如前例可知 $I\left(\frac{2n}{p}\right) \nless I\left(\frac{n+1}{p}\right)+I\left(\frac{n}{p}\right)$。而 $n=mp+a$。

則 $2m+I\left(\frac{2a}{p}\right) \nless 2m+I\left(\frac{a+1}{p}\right)$。惟2a爲小於a+1。故前之關係爲合理。

20. 試示$\dfrac{\underline{|nr}}{\underline{|n}\,\{\underline{|r}\}^n}$爲整數。

〔證〕 由**378**章$\dfrac{\underline{|nr-1}}{\underline{|(n-1)r}\,\underline{|r-1}}$爲整數。其分母子以nr乘之爲

$\dfrac{\underline{|nr}}{n\,\underline{|(n-1)r}\,\underline{|r}}$=整數。同法 $\dfrac{\underline{|(n-1)r}}{(n-1)\,\underline{|(n-2)r}\,\underline{|r}}$，及$\dfrac{\underline{|(n-2)r}}{(n-2)\,\underline{|(n-3)r}\,\underline{|r}}$………

$\dfrac{\underline{|2r}}{2\,\underline{|1r}\,\underline{|r}}$爲整數。凡此連乘之。卽得$\dfrac{\underline{|nr}}{\underline{|n}\,(\underline{|r})^n}$爲整數。

21. 兩數各爲n項平方數之和。其積可以$\frac{1}{2}n(n-1)+1$項平方數之和表之。

〔證〕兩數$a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2$及$b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2$。則其積爲
$(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots\cdots+b_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)^2$
$+\sum(a_rb_s-a_sb_r)^2$。但$\sum$之項數爲於n物取二個之組合。

卽 ${}_nC_2=\frac{1}{2}n(n-1)$。故此積等於$\frac{1}{2}n(n-1)+1$項平方數之和。

22. a及b非俱爲3之倍數。則a^2+b^2決非爲3之倍數。

又7及11亦得同樣之結果證之。

〔證〕 凡數爲3m及3m±1。其平方數爲M(3)及M(3)+1。

故a及b非俱爲3m。則$a^2+b^2=(3m)^2+(3m+1)^2=M(3)+1$。

或$a^2+b^2=(3m+1)^2+(3m+1)^2=M(3)+2$。二者皆不能以3整除。

又凡數爲7m,7m±1,7m±2,7m±3其平方數。爲M(7),M(7)+1,M(7)+2,M(7)+4。故a,b非俱爲7m。則a^2+b^2決非爲M(7)。如以11試之亦合。

23. $a^2+b^2=c^2$。則$ab(a^2-b^2)$爲84之倍數。

〔證〕由384章第三例$ab=M(12)$若a,b爲7之倍數。則$a^2-b^2=M(7)$,

∴　$ab(a^2-b^2)=M(12.7)$又a,b。若非爲7之倍數。則由前例a^2, b^2,爲$7m+1$, $7m+2$, $7m+4$,以內之數。使a^2, b^2或俱爲$7m+1$。或俱爲$7m+2$。或俱爲$7m+4$。則$a^2+b^2=c^2$爲$7m+1$。或$7m+2$。或$7m+4$。

故$a^2-b^2=M(7)$,　由是$ab(a^2-b^2)=M(12.7)$。

24. a,b,c,d之有理値爲$a^2+b^2=3(c^2+d^2)$, $a^2+b^2=7(c^2+d^2)$或$a^2+b^2=11(c^2+d^2)$其關係若何。

〔證〕於$a^2+b^2=3(c^2+d^2)$可知a及b。皆爲3之倍數。(例題22.)

由是$a=3m$及$b=3n$。　∴　$9(m^2+n^2)=3(c^2+d^2)$。

則　$c^2+d^2=3(m^2+n^2)$。故c及d。亦俱爲3之倍數。是則a, b, c, d凡爲3之倍數者。皆可成立爲$a^2+b^2=3(c^2+d^2)$。

又　$a^2+b^2=7(c^2+d^2)$及$a^2+b^2=11(c^2+d^2)$亦可以7及11代上式之3。而同法證得之。

25. $a^2+c^2=2b^2$。則$a^2-b^2=M(24)$。

〔證〕平方數爲$3m$或$3m+1$。故$2b^2$爲$3m$,或$3m+2$。而$a^2+c^2=2b^2$。故c^2不可與a^2同時爲$3m$或$3m+1$。

由是$2(a^2-b^2)=a^2-(2b^2-a^2)=a^2-c^2=3m$。　∴　$a^2-b^2=M(3)$。

又　a^2爲$16m$, $16m+4$,或$8m+1$,而$2b^2$爲$16m$, $16m+18$或$8m+2$。且c^2與a^2同時爲$16m$, $16m+4$, $8m+1$。

∴　$a^2-b^2=M(8)$。　於是$a^2-b^2=M(3.8)$。

恆同餘數

385. 定義 兩數a及b而以第三數c除之。其所得之餘數爲同壹者。則稱此兩數爲對於其模數(Modulus)c而成之恆同餘數(Congruent)。

而此記法爲$a\equiv b$(Mod. c),

例如$a=mc+r$,　$b=nc+r$。　即記爲$a\equiv b$(Mod. c),

又 21 及 1 各以 10 除。其所得之餘數同爲 1。

$\therefore\ 21 \equiv 1 (\mathrm{Mod.}\ 10)$。

又 $(a+1)^2$ 及 1 以 a 除之。其所得之餘數同爲 1。

$\therefore\ (a+1)^2 \equiv 1 (\mathrm{Mod.}\ a)$,

於恆同餘數式 $a \equiv b (\mathrm{Mod.}\ c)$。其 $a-b$ 必爲 c 之倍數,

何則。以 $a = mc + r$, $b = nc + r$。 故 $a - b = c(m-n)$。

即 $a-b$ 爲有 c 之倍數即可記爲 $a - b \equiv 0 (\mathrm{Mod.}\ c)$。

386. 定理 $a_1 \equiv b_1 (\mathrm{Mod.}\ x)$ 及 $a_2 \equiv b_2 (\mathrm{Mod.}\ x)$。

則 $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 (\mathrm{Mod.}\ x)$。及 $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 (\mathrm{Mod.}\ x)$。

假設 $a_1 = m_1 x + r_1$, $a_2 = m_2 x + r_2$, 及 $b_1 = n_1 x + r_1$, $b_2 = n_2 x + r_2$,

故 $a_1 + a_2 - (b_1 + b_2) = (m_1 + m_2 - n_1 - n_2) x$,

即 $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 (\mathrm{Mod.}\ x)$。

又 $a_1 a_2 = (m_1 x + r_1)(m_2 x + r_2) = M(x) + r_1 r_2$,

$b_1 b_2 = (n_1 x + r_1)(n_2 x + r_2) = M(x) + r_1 r_2$,

由是 $a_1 a_2 - b_1 b_2 = M(x)$, $\therefore\ a_1 a_2 \equiv b_1 b_2 (\mathrm{Mod.}\ x)$。

凡各兩數對於同壹模數而爲恆同餘數式者。此恆同餘數式任多至若干。皆合於本定理。(恆同餘數式。簡稱等餘式)。

387. 等餘之性質 等餘式與方程式。有許多類似之性質。例如等餘式 $Ax^2 + Bx + C \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p)$ 而 A, B, C 爲常數。其對於 x 之三值 a, b c 爲能適合者。且 $a-b$ 爲 1 或對於 p 而爲素數。其他 $b-c$, $c-a$ 亦然。則此等餘式對於 x 之壹切整數值。可以適合。而 A, B, C 皆爲 p 之倍數。

何則以 $Aa^2 + Ba + C \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p)$。

$Ab^2 + Bb + C \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p)$。

由減法 $(a-b)\{A(a+b) + B\} \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p)$,

惟因 $a-b$ 爲 1。或對 p 而爲素數。故以 $a-b$ 除上之等餘式。而得

$A(a+b) + B \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p)$。

由同法 $A(a+c) + B \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p)$。

相減 $A(b-c) \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p)$。

惟因 $b-c$ 爲 1 或對於 p 而爲素數。

故 $A\equiv 0(\text{mod. } p)$。同法 $B\equiv 0(\text{mod. } p)$。

由斯法則可證得其壹般之定理。即等餘式含有 x 之 n 次。其對於 x 之整數值。而能適合者。其值多於 n。且此等任何兩值之差為 1。或對於模數而為素數者。則此等餘式對於 x 之各整數值均能適合。而 x 之各異方乘之係數。必為模數之倍數。

388. 定理 a 及 b 為互素。則 $a, 2a, 3a, \ldots\ldots (b-1)a$ 而以 b 除之。其所餘之數各異。

試於 a 之若干倍 $a, 2a, 3a, \ldots\ldots (b-1)a$ 以內。取其 a 之 s 倍及 r 倍。即 sa 及 ra。假定此 sa 及 ra 以 b 除之。而其餘為相等。則 $ra-sa=M(b)$。然 a 與 b 為互素。而 r 及 s 取諸 $a, 2a, 3a, \ldots\ldots\ldots (b-1)a$ 以內。其數小於 b。則 $r-s$ 決非可以 b 除之。故 $ra-sa=M(b)$ 為不合理。

即 $a, 2a, 3a, \ldots\ldots (b-1)a$ 以 b 除之。其餘數各異。

反定理 a 及 b 非為互素。則 $a, 2a, 3a, \ldots\ldots (b-1)a$ 而以 b 除之。其所餘之數。必有相同者。

何則。設以 k 為 a 及 b 之公因子。$a=k\alpha$, $b=k\beta$。則於 $a, 2a, 3a, \ldots\ldots\ldots (b-1)a$ 以內之二數 $(r+\beta)a$ 及 ra。而以 b 除之。其餘數必相等。其故以 $(r+\beta)a=ra+\beta a=ra+\beta ka=ra+ba$ 以 b 除之。得 $a+\frac{ra}{b}$。又 ra 以 b 除之。其餘數兩相等。但 $r+\beta$ 在 $a, 2a, 3a\ldots\ldots ra\ldots\ldots(r+\beta)a\ldots\ldots b-1)a$ 諸倍數之內。故 $b-1>r+\beta$。

即 $r+\beta$ 為 a 與 $(b-1)a$ 間 a 之倍數。

推論 a 與 b 為互素。n 為任意之整數。則 $n, n+a, n+2a, \ldots\ldots\ldots\ldots n+(b-1)a$ 以 b 除之。其所得之餘數各異。其諸餘數任意之順次為 $0, 1, 2, \ldots\ldots (b-1)$。此證法與本定理同。

389. 勿而馬 Fermat 氏之定理 前 380 章 Fermat 氏之定理。可用前章之定理以證明之。

a 與 b 為互素。則 $a, 2a, 3a, \ldots\ldots (b-1)a$ 以 b 除之。其各異之餘數。為 $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots (b-1)$。

由是 $a.2a.3a\ldots\ldots\ldots(b-1)a=M(b)+1.2.3\ldots\ldots\ldots(b-1)$。

即 $1.2.3\ldots\ldots\ldots(b-1)a.a\ldots\ldots\ldots a=M(b)+\underline{|b-1}$。

即 $\qquad \underline{|b-1}\,a^{b-1}=M(b)+\underline{|b-1}$。

$\therefore \qquad \underline{|b-1}(a^{b-1}-1)=M(b)$。

若b爲素數。則b與$\underline{|b-1}$爲互素。故得Fermat氏之定理。

$a^{b-1}-1=M(b)$。

即恆同餘數式爲$a^{b-1}-1\equiv 0$ (Mod. b)。

390. 維而孫Wilson氏之定理 n爲素數。則$1+\underline{|n-1}$可以整除之。

凡小於n之數。如$1, 2, 3 \ldots\ldots (n-1)$ ....(1)

而a爲小於n之任壹數。逐次以乘(1)得

$$1.a,\ 2.a,\ 3.a, \ldots\ldots (n-1)a \ \ldots\ldots (2)$$

惟a小於n。而n爲素數。則a與n必爲互素，由388章。而以n除(2)。其各異之餘數。可順序列之爲$1, 2, 3, \ldots\ldots (n-1)$。其餘數爲1者，祇有一個。

設於(2)之內有ma以n除。而其餘數爲1。

即 $\quad ma=M(n)+1$ ....(3)

而於(3)惟a等於$n-1$或1時。其m與a必相等。何則。若由(3)令其m等於a。則得$a^2=M(n)+1$。 即 $(a+1)(a-1)=M(n)$。

然n爲素數。而a又小於n。故必$a=n-1$，或$a=1$，否則不能適合此關係。所以惟a等於$n-1$或1時。其m與a必相等。

今於$2, 3, 4 \ldots\ldots (n-3)(n-2)$內取相異之二數。其積爲$M(n)+1$者。以此各異之積連乘之。而得

$2.3.4 \ldots\ldots (n-2)=(M(n)+1)(M(n)+1)\ldots\ldots =M(n)+1$。

於此以$n-1$乘之。得$\underline{|n-1}=(n-1)\{M(n)+1\}$。

即 $\qquad \underline{|n-1}=M(n)+n-1=M(n)-1$，

$\therefore \qquad \underline{|n-1}+1=M(n)$。

〔別證〕由305章得

$$(n-1)^{n-1}-(n-1)(n-2)^{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-3)^{n-1}-\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2}{\underline{|n-2}}1^{n-1}=\underline{|n-1}。$$

今n爲素數，故n對於$n-1, n-2, \ldots\ldots$爲互素，準Fermat氏之定理，$(n-1)^{n-1}=1+M(n)$，$(n-2)^{n-1}=1+M(n), \ldots\ldots\ldots$由是知上之級數。爲

$$1+M(n)-(n-1)\{1+M(n)\}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\{1+M(n)\}-\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-2}\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots2}{|\underline{n-2}}\{1+M(n)\}=|\underline{n-1}\text{。}$$

即 $1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\ldots\ldots+(-1)^{n-2}(n-1)+M(n)=|\underline{n-1}$。

即 $(1-1)^{n-1}-(-1)^{n-1}+M(n)=|\underline{n-1}$。

即 $-(-1)^{n-1}+M(n)=|\underline{n-1}$。

惟n爲大於2之素數，故$n-1$爲偶數。故$-(-1)^{n-1}=-1$。

即得$M(n)=1+|\underline{n-1}$。

此維而孫Wilson之定理，所以表示素數之特性者也，

故於此定理正言之曰。n爲素數，則$1+|\underline{n-1}$可以n整除之。

又可反言之曰。n非爲素數，則$1+|\underline{n-1}$，決不可以n整除之。

何則。n非爲素數，則n之因子悉含於$1, 2, 3, \ldots n-1$以內。則是n非爲素數，必可以整除$|\underline{n-1}$。故$1+|\underline{n-1}$，決不能以n整除之，

391. **定理** 凡小於n而對於n爲互素，其所有整數之總數。以$\phi(n)$表之。而$a, b, c, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$其各爲互素，則

$$\phi(abc\ldots\ldots)=\phi(a)\phi(b)\phi(c)\ldots\ldots\text{。}$$

但1對於任何大之整數，而爲互素，

說明ϕ之記號如1, 2, 3, 4四數。其各對於5。而爲互素，故$\phi(5)=4$。又1, 3, 5, 7四數，其各對於8。而爲互素。故$\phi(8)=4$，

先設兩數a, b以證之。而積爲ab。

試自1迄ab，將各數以次列之。

$$\begin{array}{lll}
1 & 2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k\ldots\ldots\ldots\ldots & a \\
a+1 & a+2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a+k\ldots\ldots\ldots\ldots & 2a \\
2a+1 & 2a+2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2a+k\ldots\ldots\ldots\ldots & 3a \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
(b-1)a+1 & (b-1)a+2\ldots\ldots\ldots(b-1)a+k\ldots\ldots\ldots\ldots & ba
\end{array}$$

如上之列法，於其縱行第k行之各整數爲$k, a+k, 2a+k, \cdots\cdots (b-1)a+k$。若k對於a而爲素數。則$a+k, 2a+k, \cdots\cdots (b-1)a+k$，各對於a而爲素數，若k對於a而非爲素數。則各對於a亦非爲素數，故於諸縱行中。凡對於a而爲素數，其行數應有$\phi(a)$行。（第一縱行亦含於此內）。

又從388章。a與b爲互素，而知以b除$k, a+k, 2a+k \cdots (b-1)a+k$，其餘數爲$0, 1, 2, \cdots\cdots (b-1)$，

而以b除$k, a+k, 2a+k, \cdots\cdots (b-1)a+k$內之任一數時，如其餘數對於b爲素數，則此一數對於b亦爲素數可知，若其餘數對於b而非爲素數，則此一數對於b亦非爲素數可知，

由是於$0, 1, 2, \cdots\cdots (b-1)$內所有對於b爲素數之數，卽爲於任一行內所有對於b爲素數之數，故凡對於b而爲素數，其含於各行以內，其數有$\phi(b)$。

惟對於a而爲素數，其行數有$\phi(a)$。而於各行中。其對於b而爲素數，其數有$\phi(b)$。

今對於a爲素數，又對於b爲素數，則亦必對於$a \times b$而爲素數，故凡小於ab而對於ab爲素數。其數爲$\phi(a) \times \phi(b)$。

卽 $\phi(ab) = \phi(a) \times \phi(b)$。

由上之證法，可推及兩數以上之諸數如次。

$\phi(abc\cdots\cdots) = \phi(a \times bc\cdots\cdots) = \phi(a) \times \phi(bc\cdots\cdots) = \phi(a) \times \phi(b)\,\phi(c)\cdots\cdots$。

392. 例題 求小於已知數而對於其數爲素數之總數，此卽383章之問題。直可由前章之定理求得之。

已知數爲$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \cdots\cdots$但$a, b, c \cdots\cdots$爲其各異之素因子。

先求小於a^{α}而對於a^{α}爲素數之數如次。

以小於a^{α}而對於a^{α}非爲素數者。如$a, 2a, 3a, \cdots\cdots aa, \cdots\cdots a^{\alpha-1}$。其數凡$a^{\alpha-1}$個，故求得小於$a^{\alpha}$而對於$a^{\alpha}$爲素數之數，等於$a^{\alpha}$內減$a^{\alpha-1}$。

卽 $\phi(a^{\alpha}) = a^{\alpha} - a^{\alpha-1} = a^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{a}\right)$，

同理$\phi(b^{\beta}) = b^{\beta}\left(1 - \frac{1}{b}\right)$， $\phi(c^{\gamma}) = c^{\gamma}\left(1 - \frac{1}{c}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots$

由前章之定理。即得

$\phi(a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots)=\phi(a^\alpha)\phi(b^\beta)\phi(c^\gamma)\ldots\ldots$

$$=a^\alpha\left(1-\frac{1}{a}\right)b^\beta\left(1-\frac{1}{b}\right)c^\gamma\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots。$$

由是得 $\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots$。

393. 勿而馬 Fermat 氏定理之擴張 a與m為互素。$\phi(m)$為小於m而對於m為素數之數。(但1亦含於其內)。則

$a^{\phi(m)}-1\equiv 0(\text{Mod.}m)$。

設小於m而對於m為素數。其所有ϕm個之數。為$1,\alpha,\beta,\gamma,\ldots\ldots\ldots(m-1)$逐次將各數以a乘之。得$a.1,\ a.\alpha,\ a.\beta,\ a.\gamma,\ldots\ldots a(m-1)$。然此之各數以m除之。其所得之餘數各異。何則試假定此各數內任意之二數a.r及a.s。以m除之。其餘數若相同。則必$a(r-s)$為m之倍數而後可。今a對於m而為素數。

又$r-s$小於m。則是$a(r-s)$不能為m之倍數可知。故$a.1,\ a.\alpha,\ a.\beta,\ a.\gamma,\ldots\ldots a(m-1)$之各數以m除之。其餘數各異。

且於$a.1,\ a.\alpha,\ a.\beta,\ a.\gamma,\ldots\ldots a.(m-1)$內其各數之兩因子。皆對於m。而為素數。則以m除其各數，所得各異之餘數。亦皆對於m而為素數。故此$\phi(m)$個之餘數。必為$1,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots\ldots(m-1)$。

由是知 $a.a\alpha.\ a\beta.\ a\gamma\ldots\ldots a(m-1)\equiv 1.\alpha.\beta.\gamma\ldots\ldots(m-1)(\text{Mod.}m)$,

即 $a^{\phi(m)}.1.\alpha.\beta.\gamma\ldots\ldots\ldots\ldots(m-1)\equiv 1.\alpha.\beta.\gamma\ldots\ldots(m-1)(\text{Mod.}m)$,

$\therefore\ \{a^{\phi(m)}-1\}1.\alpha.\beta.\gamma\ldots.(m-1)\equiv 0(\text{Mod.}m)$。

但 $1.\alpha.\beta.\gamma\ldots\ldots(m-1)$對於m而為素數。故$a^{\phi(m)}-1\equiv 0(\text{Mod.}m)$。

若m為素數。則凡小於m者。其各對於m為素數。因是$\phi(m)=m-1$,

如是上之式為$a^{m-1}-1\equiv 0(\text{Mod.}m)$此即 Fermat 氏之定理也。

394. 拉果蘭諸 Lagrange 氏之定理 p為素數。則於$1,2,3,\ldots\ldots p-1$中取r個以為積。其諸積之和可以p除之。但r不大於$p-2$。

恆同式$(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-\overline{p-1})\equiv x^{p-1}-S_1x^{p-2}+S_2x^{p-3}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$+(-1)^{p-1}S_{p-1}。$$

而以x−1易上式之x,則得

$$(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-p)=(x-1)^{p-1}-s_1(x-1)^{p-2}+\ldots\ldots+(-1)^{p-1}s_{p-1},$$

由是得 $(x-p)\{x^{p-1}-s_1x^{p-2}+s_2x^{p-3}-\ldots\ldots+(-1)^{p-1}s_{p-1}\}$

$$=(x-1)\{(x-1)^{p-1}-s_1(x-1)^{p-2}+\ldots\ldots+(-1)^{p-1}s_{p-1}\}。$$

由上之定理。將x之異方乘諸項。比較其係數。而得

1. $s_1=\frac{p(p-1)}{1.2}$。

2. $s_2=\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}+s_1\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$。

3. $s_3=\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}+s_1\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3}+s_2\frac{(p-2)(p-3)}{1.2}$。

....

$(p-2).s_{p-2}=\frac{p(p-1)\ldots 2}{1.2\ldots(p-1)}+s_1\frac{(p-1)(p-2)\ldots 2}{1.2\ldots(p-2)}+s_2\frac{(p-2)\ldots\ldots 2}{1.2\ldots(p-3)}+\cdot\cdot+s_{p-1}\frac{3.2}{1.2}$

p爲素數。故各右邊之第壹項可以p整除之。依第壹之方程式而知s_1爲p之倍數。然則s_2。亦爲p之倍數可知。且順是以下至s_{p-2}皆爲p之倍數。亦可知矣。

但準260章s_1爲於1, 2, 3……p−1中取壹個之和。s_2爲取貳個各積之和……至s_{p-2}爲取p−2個各積之和,由是上之證明,適與題意相合,

又既知Fermat氏之定理,而Lagrange氏之定理。可由387章之定理導得之。如次所記之恆同餘數式。

$$(x-1)(x-2)\ldots\ldots\ldots(x-p+1)\equiv 0(\text{mod. } p)。$$

此爲x之p−2次式。而準Fermat氏之定理。此式適合於x之(p−1)個之值,1, 2,……p−1。但此中任兩值之差。對於1或p爲素數。

故由387章上之恆同餘數式、對於x之各值爲適合時。則其x之各異方乘之係數,必爲p之倍數。

又x=0可直從Wilson氏之定理推得之,

395. 循環小數之分數變化 分數之分母。僅含有2及5之因子。則此分數化爲小數。其小數之位數有限,其故以

$$\frac{a}{2^p5^q}=\frac{a.5^p2^q}{10^{p+q}},$$

若分數之分母。其有因子對於10而爲素數者，則此分數。可化爲循環分數。

今有已約分數$\frac{a}{2^p.5^q.b}$，其b對於10而爲素數者。命其循環壹節中。所有之數字有α個，其非爲循環之數字。有β個，則

$$\frac{a}{2^p.5^q.b}=\frac{a.5^p.2^q}{10^{p+q}b}=\frac{N}{10^\beta(10^\alpha-1)},$$

$$\therefore\quad 10^{p+q}.b.N=a.5^p.2^q.10^\beta(10^\alpha-1),$$

惟b對於a及10爲素數。故$10^\alpha-1=M(b)$。

而此α爲以能合於此關係式中10之最低方乘之指數。何則，將分數化爲循環小數。其循環壹節中之位數。雖可增多。然常取其位數之最少者。例化$\frac{23}{99}$爲$.\dot{2}\dot{3}$，亦即爲$.\dot{2}3232\dot{3}$，然常用$.\dot{2}\dot{3}$。

循環壹節中之位數，惟與b爲有關係而與2^p及5^q無涉，何則。以循環壹節中之位數爲α。而α爲等於$M(b)+1$之10之最低方乘數故也。

今以α爲等於$\phi(b)$或$\phi(b)$之若干部分。試證明之如次，

準393章Fermat氏定理之擴張，

$10^{\phi(b)}-1=M(b)$，又以$10^\alpha-1=M(b)$，

假令α不等於$\phi(b)$或$\phi(b)$之若干部分。即$\phi(b)=k\alpha+r$（但$r<\alpha$），

則 $10^{\phi(b)}-1=10^{k\alpha}.10^r-1=\{M(b)+1\}^k.10^r-1$

$$=M(b)+10^r-1。$$

$$\therefore\quad 10^r-1=M(b)。$$

惟以α爲等於$M(b)+1$之10之最低方乘數，今$r<\alpha$爲不合理、

故b對於10爲素數。而爲分數分母之因子。

則此分數化爲循環小數，其循環壹節中之位數爲等於$\phi(b)$或$\phi(b)$之若干部分。

396. 雜例 雜舉數例以爲此編之終結。

〔第壹例〕$3^{2n+2}-8n-9$爲64之倍數。

$$3^{2n+2}-8n-9=9^{n+1}-8n-9=(1+8)^{n+1}-8n-9$$
$$=1+(n+1)8+\frac{(n+1)n}{1.2}8^2+\ldots\ldots-8n-9$$
$$=8n+9+M(8^2)-8n-9=M(8^2)。$$

〔第二例〕 $3^{2n}-32n^2+24n-1\equiv0(\mathrm{Mod}.512)$。

設 $u_n=3^{2n}-32n^2+24n-1$,

則 $u_{n+1}=3^{2(n+1)}-32(n+1)^2+24(n+1)-1$,

又 $9u_n=3^{2(n+1)}-288n^2+216n-9$,

由是 $u_{n+1}-9u_n=256n^2-256n=256n(n-1)$

$=256M(2)=M(512)$。

若 $n=1$, 則 $u_1=3^2-32+24-1=0$。

故 $u_{n+1}-9u_n=M(512)$, $\therefore$ $u_2=M(512)$。

同理推之 u_3, u_4, u_5………u_n 亦爲 $M(512)$。

〔第三例〕 於 n^2+1 之素因子中,無有如 $4m-1$ 之形.

2 以外其他之素數,皆如 $2k+1$ 之形,

假定 $2k+1$ 爲 n^2+1 中之壹素因子。則 n^2 不可以 $2k+1$ 整除之即 n 對於 $2k+1$ 爲素數。故準 Fermat 氏之定理, $n^{2k}-1=M(2k+1)$….(A)

由前之假定 $n^2+1=M(2k+1)$。

$\therefore$ $n^{2k}=\{M(2k+1)-1\}^k=M(2k+1)+(-1)^k$。

以比 (A) 式 $n^{2k}=M(2k+1)+1$,

則是 $(-1)^k=+1$。即 k 必爲偶數,

故 n^2+1 之素因子。有 $2k+1$ 之形,而不能有 $4m-1$ 之形,

諸因子皆如 $4m+1$ 之形,其連乘積亦如 $4m+1$ 之形。故 n^2+1 之約數爲奇數者,亦必如 $4m+1$ 之形。

〔第四例〕 各整數爲連 9 數末附 0 者之約數。(連 9 數者,即以若干 9 字連續之數例 99,999,………)。

將 10, 10^2, 10^3………以任壹數 n 約之爲 0,或得各異之餘數,而此各餘數中。無論何者。皆爲循環,週而復始。

設 10^x 及 10^y,以 n 除之,得同餘數。

則 $10^x-10^y=M(n)$,即連 9 數末附 0 者之數。如 $10^5-10^2=99900$ 而爲 n 之倍數也,

例題三十九

1. 試示次之各證,

(1) $2^{2n+1}-9n^2+3n-2=M(54)$,

(2) $5^{2n+1}+n^5-5n^3+4n-5=M(120)$。

(3) $4^{2n+1}+3^{n+2}\equiv 0(\text{mod. }13)$,

(4) $3^{4n+2}+2.4^{3n+1}\equiv 0(\text{mod. }17)$,

〔證〕 (1) 設 $u_n=2^{2n+1}-9n^2+3n-2$。

則 $u_{n+1}=2^{2n+3}-9(n+1)^2+3(n+1)-2$,

由是 $u_{n+1}-4u_n=27n^2-27n=M(54)$。然 $u_1=0$。

∴ $u_2=M(54)$ 以下準此推之,

(2) $5^{2n+1}+n^5-5n^3+4n-5=5(24+1)^n+n^5-5n^3+4n-5$

$=5\{M(24)+1\}+n^5-5n^3+4n-5=M(120)+n^5-5n^3+4n$

$=M(120)+(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)=M(120)+M(1.2.3.4.5)$

$=M(120)$,

(3) $4^{2n+1}+3^{n+2}=4(13+3)^n+9.3^n=4\{M(13)+3^n\}+9.3^n$

$=4M(13)+13.3^n=M(13)$,

(4) $3^{4n+2}+2.4^{3n+1}=9(81)^n+8(64)^n=9(85-4)^n+8(68-4)^n$

$=9\{M(17)-4\}^n+8\{M(17)-4\}^n$

$=9\{M(17)+(-4)^n\}+8\{M(17)+(-4)^n\}=M(17)+17(-4)^n=M(17)$,

2. a為素數。b與a為互素。則 $1^2b^2,\ 2^2b^2,\ldots\ldots\left(\frac{a-1}{2}\right)^2b^2$。以 a 除之。可得各異之餘數。

〔證〕 取題中諸數之任二個 $r^2b^2,\ s^2b^2$,假定此 r^2b^2, s^2b^2。以 a 除之。得同餘數。則 $(r^2-s^2)b^2=M(a)$,

即 $(r+s)(r-s)b^2=M(a)$。然 r^2 及 s^2 無論何數,皆小於 a。故 $r+s, r-s$ 必小於 a。而 b 與 a 為互素,由是此假定為不合理,故如題云云。

3. $4n+1$ 為素數,必為 $\{\underline{|2n}\}^2+1$ 之因子,又 $4n-1$ 為素數。必有 $\{\underline{2n-1}\}^2-1$ 之因子。

〔證〕 $4n+1$ 為素數,準 Wilson 氏之定理,得 $\underline{|4n}+1=M(4n+1)$,

即 $\{(4n+1)-1\}\{(4n+1)-2\}\cdots\cdots\{(4n+1)-2n\}|\underline{2n}+1=M(4n+1)$。

即 $M(4n+1)+(-1)^{2n}\cdot1\cdot2\cdots\cdots\cdots\cdots2n|\underline{2n}+1=M(4n+1)$。

即 $M(4n+1)+(|\underline{2n})^2+1=M(4n+1)$。 ∴ $(|\underline{2n})^2+1=M(4n+1)$。

又 $4n-1$ 爲素數，則 $|\underline{4n-2}+1=M(4n-1)$。

即 $\{(4n-1)-1\}\{(4n-1)-2\}\cdots\{(4n-1)-(2n-1)\}|\underline{2n-1}+1=M(4n-1)$。

即 $M(4n-1)+(-1)^{2n-1}(|\underline{2n-1})^2+1=M(4n-1)$。

∴ $(|\underline{2n-1})^2-1=M(4n-1)$。

4. n 爲素數。而 r 小於 n。則 $|\underline{r-1}\,|\underline{n-r}+(-1)^{r-1}=M(n)$.

〔證〕 $|\underline{n-1}=|\underline{n-r}(n-r+1)(n-r+2)\cdots\cdots\cdots(n-1)$

$=|\underline{n-r}\{n-(r-1)\}\{n-(r-2)\}\cdots\cdots\cdots(n-1)$

$=|\underline{n-r}\{M(n)+(-n)^{r-1}|\underline{r-1}\}=M(n)+(-1)^{r-1}|\underline{r-1}\,|\underline{n-r}$。

又 n 爲素數。故 $|\underline{n-1}+1=M(n)$。 即 $|\underline{n-1}=M(n)-1$。

由是 $M(n)-1=M(n)+(-1)^{r-1}|\underline{r-1}\,|\underline{n-r}$。

即 $(-1)^{r-1}|\underline{r-1}\,|\underline{n-r}+1=M(n)$。以 $(-1)^{r-1}$ 乘之。得

$|\underline{r-1}\,|\underline{n-r}+(-1)^{r-1}=M(n)$。

5. m 及 n 爲互素。則 m^2+n^2 之約數爲奇數者。必如 $4k+1$ 之形。

〔證〕 $2r+1$ 爲 m^2+n^2 之素因子。以 m 及 n 爲互素。故 $2r+1$ 對於 m 及 n 爲素數。

由是 $m^{2r}=1+M(2r+1)$。而 $m^2+n^2=M(2r+1)$。

故 $\{M(2r+1)-n^2\}^r=m^{2r}=1+M(2r+1)$。 ∴ $(-1)^r n^{2r}=1+M(2r+1)$。

但 $n^{2r}=1+M(2r+1)$。故 $(-1)^r\{1+M(2r+1)\}=1+M(2r+1)$。

故 $(-1)^r=1$ 而知其 r 爲偶數。 即 $r=2k$。

由是 m^2+n^2 之約數爲奇數者。必如 $4k+1$ 之形。

6. $\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots\cdots$ 至無限 $=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)^{-1}\cdots$

但 2, 3, 5……順次以素數連續。

〔證〕 $S=\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$。

若$n>1$。則此級數可如次取得.

$$\frac{1}{2^n}S=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\frac{1}{10^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad\left(1-\frac{1}{2^n}\right)S=\frac{1}{1^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

卽消去含有因子2之分母,

同法 $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)S=\frac{1}{1^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

卽消去含有因子2,3之分母。

逐次如此消去含有2,3,5,7……之分母。

卽得 $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)S\cdots\cdots\cdots\cdots=1$,

7. 小於n而對於n爲素數。則其各數(含1於內)之等差中項爲$\frac{1}{2}n$。試證之。

〔證〕 a小於n而對於n爲素數。則其壹數$n-a$對於n亦爲素數。而此壹對之等差中項爲$\frac{1}{2}(a+n-a)$卽$\frac{1}{2}n$。

又b爲小於n而對於n爲素數。則其各壹對之等差中項。由同法而得$\frac{1}{2}n$。如此各壹對之等差中項爲$\frac{1}{2}n$。故知其各數之等差中項爲$\frac{1}{2}n$。

8. N爲任意之數。而a, b, c……爲其各異之素因子。則凡小於N而對於N爲素數者。其各數之和。爲$\frac{N^2}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots$

而此等數平方之和。爲$\frac{N^3}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)+\cdots\cdots+\frac{N}{6}(1-a)(1-b)\cdots\cdots$

〔證〕 小於N而對於N爲素數者。其數之個數。爲

$N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\cdots$而此個數之等差中項。由前例而得$\frac{1}{2}N$。

又於等差中項以其項數(卽個數)乘之。卽得其和。

由是所求之和。爲$\frac{1}{2}N\times N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots$

又小於N而對於N不爲素數者。其數之平方之和爲S。試於

383章(a)式,即個數為 $\sum\frac{N}{a}-\sum\frac{N}{ab}+\sum\frac{N}{abc}-\sum\frac{N}{abcd}+\cdots\cdots$求其各個數平方之和。

但 $\sum\frac{N}{a}$ 之壹部 $\frac{N}{a}$ 項為 $a, 2a, 3a, \cdots\cdots\left(\frac{N}{a}\right)a$,

由是 $S=\sum\left\{a^2+2^2a^2+\cdots+\left(\frac{N}{a}\right)^2a^2\right\}-\sum\left\{a^2b^2+2^2a^2b^2+\cdots+\left(\frac{N}{ab}\right)^2a^2b^2\right\}$

$$+\sum\left\{a^2b^2c^2+2^2a^2b^2c^2+\cdots\cdots+\left(\frac{N}{abc}\right)^2a^2b^2c^2\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

令 $a^2+2^2a^2+\cdots\cdots+\left(\frac{N}{a}\right)^2a^2=\frac{1}{6}a^2\frac{N}{a}\left(\frac{N}{a}+1\right)\left(\frac{2N}{a}+1\right)$

$$=\frac{1}{6}\frac{N}{a}(N+a)(2N+a)$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\frac{2N^3}{a}+3N^2+Na\right\}。$$

由是 $6S=2N^3\left\{\sum\frac{1}{a}-\sum\frac{1}{ab}+\sum\frac{1}{abc}-\cdots\cdots\right\}$

$$+3N^2\left\{r-\frac{r(r-1)}{1.2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}-\cdots\cdots\right\}+N\left\{\sum a-\sum ab+\sum abc\cdots\cdots\right\}$$

$$=2N^3\left\{1-\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots\right\}$$

$$+3N^2+N\{1-(1-a)(1-b)(1-c)\cdots\cdots\}。$$

令自1迄N數平方之和。為 $\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$

由是小於N而對於N為素數者。其各數平方之和,為等於從(A)減(S)。即 $\frac{1}{3}N^3\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{6}N(1-a)(1-b)\cdots\cdots$

9. 小於m而對於m為素數。其數之個數為 $\phi(m)$,而n之諸約數為 $d_1, d_2, d_3, \cdots\cdots\cdots\cdots$則 $\sum\phi(d)=n$。

〔證〕 $n=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots\cdots\cdots$而 $a, b, c\cdots\cdots\cdots$為其素因子。其任意之約數為 $d=a^pb^qc^r\cdots\cdots\cdots$但 $p, q, r\cdots\cdots\cdots$不大於 $\alpha, \beta, \gamma\cdots\cdots\cdots$可得如次

$$\phi(d)=d\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots=a^{p-1}(a-1)b^{q-1}(b-1)c^{r-1}(c-1)\cdots\cdots$$

今於$\phi(d)$所有各異之值。(即對於p, q, r…………所由成立之值)可由次之連乘積各異之項明之。

$$1+(a-1)+a(a-1)+a^2(a-1)+\cdots\cdots+a^{\alpha-1}(a-1)。$$

$$1+(b-1)+b(b-1)+b^2(b-1)+\cdots\cdots+b^{\beta-1}(b-1)。$$

$$1+(c-1)+c(c-1)+c^2(c-1)+\cdots\cdots+c^{\gamma-1}(c-1)。$$

…………………………………………………………………………

但 $1+(a-1)+a(a-1)+a^2(a-1)+\cdots\cdots+a^{\alpha-1}(a-1)$

$$=1+(a-1)(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^{\alpha-1})$$

$$=1+(a-1)\cdot\frac{a^\alpha-1}{a-1}=1+a^\alpha-1=a^\alpha。$$

由是$\sum\phi(d)$等於a^α, b^β, c^γ,………之連乘積 $\sum\phi(d)=n$,

10. 分數$\frac{a}{b}$其b爲素數。且對於10而爲素數。而其循環之位數爲偶數。則此等數位之前半與後半之和爲連九數。

〔證〕 $\frac{a}{b}=\frac{N}{10^{2p}-1}$, 但N爲整數。

$\therefore$ $a(10^{2p}-1)=bN=M(b)$。a對於b爲素數。

故 $10^{2p}-1=M(b)$。即 $(10^p+1)(10^p-1)=M(b)$。

但連九數$10^{2p}-1$爲最低循環位。故凡小於$10^{2p}-1$之連九數。非爲b之倍數。即10^p-1非爲$M(b)$。由是$10^p+1=M(b)$。

今 $\frac{a}{b}=\cdot\dot{c}_1c_2c_3\cdots\cdots c_pc_{p+1}c_{p+2}\cdots\cdots\dot{c}_{2p}$, 但$c_1$, c_2, c_3,……爲數字。

$\therefore$ $10^p\times\frac{a}{b}=c_1c_2c_3\cdots\cdots c_p\cdot\dot{c}_{p+1}c_{p+2}\cdots\cdots c_{2p}c_1c_2c_3\cdots\cdots\dot{c}_p$,

由是 $(10^p+1)\frac{a}{b}=c_1c_2c_3\cdots\cdots c_p\cdot\dot{c}_{p+1}c_{p+2}\cdots\cdots c_{2p}c_1c_2c_3\cdots\cdots\dot{c}_p$

$$+\cdot\dot{c}_1c_2c_3\cdots\cdots c_pc_{p+1}c_{p+2}\cdots\cdots\dot{c}_{2p}$$

但 10^p+1爲$M(b)$, 故$(10^p+1)\frac{a}{b}$爲整數。所以

$$\dot{c}_{p+1}c_{p+2}\cdots\cdots c_{2p}c_1c_2\cdots\cdots\dot{c}_p+\cdot\dot{c}_1c_2\cdots\cdots c_pc_{p+1}c_{p+2}\cdots\cdots\dot{c}_{2p}=\text{整數}。$$

即 $\frac{c_{p+1}c_{p+2}\cdots\cdots c_{2p}c_1c_2\cdots\cdots c_p}{999\cdots\cdots9}+\frac{c_1c_2\cdots\cdots c_pc_{p+1}c_{p+2}\cdots\cdots c_{2p}}{999\cdots\cdots9}=$整數。

$\therefore$ $c_{p+1}c_{p+2}\cdots\cdots c_{2p}+c_1c_2\cdots\cdots c_p=\cdot9999\cdots\cdots=\cdot\dot{9}=1$。

11. $\frac{1}{p}$ 爲有 $p-1$ 位之循環位。則 p 爲素數。又此循環小數。若以 $2,3\cdots\cdots(p-1)$ 乘之。則其循環之數位。依其順序逐次輪換之。

〔證〕 例 $\frac{1}{7}=\dot{1}4285\dot{7}$ 以 2, 3, 4, 5, 6 乘之。順次得

$\cdot\dot{2}8571\dot{4}$, $\cdot\dot{4}2857\dot{1}$, $\cdot\dot{5}7142\dot{8}$, $\cdot\dot{7}1428\dot{5}$, $\cdot\dot{8}5714\dot{2}$

先設 $\frac{1}{p}=\dot{c}_1c_2c_3\cdots\cdots\dot{c}_{p-1}$ 而 $p)1.\ (.\dot{c}_1c_2c_3\cdots\cdots\dot{c}_{p-1}$,

由是 $\frac{c_1p}{r_1}$ $10=c_1p+r_1$ $\frac{c_2p}{r_2}$ $10r_1=c_2p+r_2$ $\frac{c_3p}{r_3}$ $10r_2=c_3p+r_3\cdots$

p 對於 10 爲素數。故對於 $r_1, r_2, r_3\cdots\cdots r_{p-1}$ 亦爲素數。故 p 爲素數而 $r_1, r_2, r_3,\cdots\cdots r_{p-1}$, 其 $p-1$ 個之數各相異。而皆小於 p。故其各值即爲 $1, 2, 3,\cdots\cdots p-1$ 內之各值。今於此 $1, 2, 3,\cdots\cdots p-1$ 內之任壹數 k。則 $\frac{k}{p}=\frac{1}{p}\times k$ 爲循環小數。即以 p 除 k。而 k 爲 $r_1, r_2, r_3\cdots\cdots r_{p-1}$ 內之壹數。則順次連續除之。其餘諸數至 r_{p-1} 而後復爲 $r_1, r_2,\cdots\cdots$ 故所得之商即爲循環之數字。且依其順序而逐次輪換之。

12 $\frac{1}{P}$ $\frac{1}{Q}$ $\frac{1}{R}$,……順次爲 p 位, q 位, r 位之循環小數。其 $P, Q, R\ldots$ 爲素數。則 $1/PQR\cdots\cdots$ 爲有 n 位之循環位。但 n 爲 $p, q, r,\cdots\cdots$ 之最低公倍數。

〔證〕 $10^p-1=M(P)$, $10^q-1=M(Q)$, $10^r-1=M(R)\cdots\cdots n$ 爲 $p, q, r\cdots\cdots$ 之 LCM。則 10^n-1 爲 10^p-1, 10^q-1, $10^r-1\cdots\cdots$ 之倍數。

即 $10^n-1=M(PQR\cdots\cdots)$。而 10 之任意方乘要比 10^n 爲低爲能適合。故如題云云。

第貳拾玖編

不定方程式

397. 不定方程式 (Indeterminate Equation) 祇有壹個方程式，其中含有多個之未知數。則其未知數之値。不能壹定，而可得無限之答數。前論通同方程式，已將此理說明之。即 n 個未知數而有 n 個方程式。其答數爲有壹定。若其方程式之數少於 n，則其答數爲無定。

然未知數之値。若以正整數爲限制，有時其答數亦爲有限，

例 $x+y=3$。其 x 及 y 之値。若兼分數及負數。其答數爲無限。若以正整數爲限制，則此方程式，x 及 y 之値。其答數祇有 $x=2, y=1$ 或 $x=1, y=2$ 或 $x=0, y=3$ 或 $x=3, y=0$ 四對而已。

是編所求未知數之値。皆以正整數爲限制，

398. 二未知數之壹次方程式 有 x, y 二未知數之壹次方程式。可得以 $ax+by=\pm c$，或 $ax-by=\pm c$ 之形包括之，但 a, b, c 爲正整數。

若將此方程式之形，分別詳記之則爲 $ax+by=c$, $ax+by=-c$, $ax-by=c$, $ax-by=-c$ 簡省之。不外乎 $ax+by=c$, $ax-by=c$ 之兩種。何則。若爲 $ax+by=-c$ 而 a, b 爲正數，則 x, y 不得不爲負數，故不合，

若爲 $ax-by=-c$。即 $by-ax=c$，不過將 $ax-by=c$ 之 x, y 互換而已，若將前兩式。更簡省之，不外 $ax\pm by=c$。

〔係數之關係〕 於 $ax\pm by=c$，其 a, b, c 無公因子者，則 a 與 b 必爲互素，如謂 a, b 非爲互素。而有公因子爲 m。則 $a=mA$, $b=mB$。原方程式爲 $c=m(Ax\pm By)$。而 x, y 爲整數。則 $m(Ax\pm By)=M(m)$。

即 $c=M(m)$。則是 a, b, c 有公因子爲 m 與所言者不合。故 a, b, c 無公因子。則 a 與 b 必爲互素可知矣。

399. 定理 如 $ax \pm by$ 之 a 及 b 為互素。則凡合於此方程式內 x 及 y 之整數值。可以求得之。

試將 $\frac{a}{b}$ 作連分數。而以 $\frac{p}{q}$ 為切近於 $\frac{a}{b}$ 之漸近分數。設以 $\frac{a}{b}$ 當作連分數之第 n 漸近分數。

而 $\frac{p}{q}$ 為第 $n-1$ 漸近分數。則由357章。得

$aq-pb=\pm 1$。故以 $\pm c$ 乘之。得

$$a(\pm cq)-b(\pm cp)=c\cdots\cdots(1)$$

及 $$a(\pm cq)+b(\mp cp)=c\cdots\cdots(2)$$

而原方程式 $$ax \quad -by \quad =c\cdots\cdots(a)$$

及 $$ax \quad +by \quad =c\cdots\cdots(b)$$

將(1)與原方程式(a)比較。得

$$x=cq,\ y=cp \text{ 或 } x=-cq,\ y=-cp。$$

又(2)與原方程式(b)比較。得

$$x=cq,\ y=-cp。\text{或 } x=-cq,\ y=cp。$$

於上之各組中。至少有壹組其 x 及 y 之值。皆為正整數。適合於 $ax\pm by=c$。

若 a 及 b 兩數中其有壹數為1者。則不必如上之求法用 $\frac{a}{b}$ 之連分數求之。

但於方程式 $ax\pm y=c$ 任設壹整數 α 為 x 之值。則

$$x=\alpha,\quad \pm y=c-a\alpha,$$

又於方程式 $x\pm by=c$ 如前之法則。$x=c\pm b\beta,\quad y=\beta$。

無論如何可求得 x,y 之正整數。

由是方程式 $ax\pm by=c$。其根之值，至少有壹組為正整數。

400. 問題 於方程式 $ax-by=c$。所有各組正整數之根中。知其壹組之根。求其他組之根。

設於 $ax-by=c$。所有壹組正整數之根。為

$$x=\alpha,\ y=\beta。\text{則得 } a\alpha-b\beta=c。$$

由減法得 $a(x-\alpha)-b(y-\beta)=0$。

卽 $a(x-\alpha)=b(y-\beta)$。a可整除$a(x-\alpha)$。故亦可整除$b(y-\beta)$，

惟a對於b爲素數，故a可以整除$y-\beta$。

今命$y-\beta=ma$。但m爲任意之整數。

故 $a(x-\alpha)=b(y-\beta)=mab$。

故 $x-\alpha=mb$。

卽得 $x=\alpha+mb$， $y=\beta+ma$。

由是$x=\alpha$，$y=\beta$適合於$ax-by=c$。

而m爲任意之整數。$x=\alpha+mb$，$y=\beta+ma$亦適合於$ax-by=c$。

m爲正整數。可任意擇定之。故知方程式$ax-by=c$。其正整數之根爲無限。

401. 問題 於方程式$ax+by=c$。所有各組正整數之根中。知其壹組之根。求其他組之根。

設於$ax+by=c$。所有壹組正整數之根。爲$x=\alpha$，$y=\beta$。

則得$a\alpha+b\beta=c$， 由減法$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$。a可得整除$a(x-\alpha)$。

卽可得整除$-b(y-\beta)$。而a對於b爲素數。故a可得整除$y-\beta$。

今命$y-\beta=ma$。但m爲任意之整數。

故 $a(x-\alpha)=-b(y-\beta)=-mab$。 $\therefore$ $x-\alpha=-mb$。

由是 $x=\alpha-mb$，$y=\beta+ma$。

以 $\alpha>mb$，$\beta>-ma$。

卽 $\frac{\alpha}{b}>m>-\frac{\beta}{a}$。

卽 m爲小於$\frac{\alpha}{b}$而大於$-\frac{\beta}{a}$。故知方程式$ax+by=c$。其正整數之根爲有限，

402. 問題 凡適合於方程式$ax+by=c$。所有x，y之値爲正整數者。求其答之總數。

於399章已證得$x=cq$， $y=-cp$或$x=-cq$， $y=cp$爲適合於方程式$ax+by=c$。但$\frac{p}{q}$爲切近於$\frac{a}{b}$之漸近分數。

先假定$x=cq$，$y=-cp$爲適合於原方程式。而其他適合於原方程式所有x，y之値。由401章。得

$x=cq-mb,\ \ y=-cp+ma$ ……………………………………………………(1)

但 m 爲任意之整數，

於 (1) x, y 之值大於 0 而爲正整數，所以 m 必爲正整數。

即由 (1) 得 $cq-mb>0$ 及 $-cp+ma>0$。

故 $m<\frac{cq}{b}$ 及 $m>\frac{cp}{a}$。

故 m 之最大整數值爲 $I\left(\frac{cq}{b}\right)$，又 m 之最小整數值爲 $I\left(\frac{cp}{a}\right)+1$。

即得 m 之整數值。其總數爲有

$I\left(\frac{cq}{b}\right)-\left\{I\left(\frac{cp}{a}\right)+1\right\}+1=I\left(\frac{cq}{b}\right)-I\left(\frac{cp}{a}\right)$ 個。

由是與 m 之值相應所得 x 及 y 各組之值。其答之總數爲有 $I\left(\frac{cq}{b}\right)-I\left(\frac{cp}{a}\right)$。

試以 I 示整數部。f 示分數部，

$\frac{cq}{b}=I_1+f_1$ 及 $\frac{cp}{a}=I_2+f_2$，

則 $\frac{c}{ab}=\frac{a(cq)-b(cp)}{ab}=\frac{cq}{b}-\frac{cp}{a}=I_1-I_2+f_1-f_2$，

但若 $f_1\nless f_2$，則 f_1-f_2 爲正。其於 $I_1-I_2+f_1-f_2$ 內之正數部爲 I_1-I_2，

若 $f_1<f_2$，則 f_1-f_2 爲負。其於 $I_1-I_2+f_1-f_2$ 內之正數部爲 I_1-I_2-1，

即 $f_1\nless f_2$，則 $I\left(\frac{c}{ab}\right)$ 爲 I_1-I_2，若 $f_1<f_2$，則 $I\left(\frac{c}{ab}\right)$ 爲 I_1-I_2-1，

故 $ax+by=c$ 之解答。因 $\frac{cq}{b}$ 之分數部。比 $\frac{cp}{a}$ 之分數部小與不小，而決定解答之總數。爲 $I\left(\frac{c}{ab}\right)+1$ 或 $I\left(\frac{c}{ab}\right)$。

又 $x=-cq,\ y=cp$。可由同法求得其答之總數．其總數因 $\frac{cp}{a}$ 之分數部比 $\frac{cq}{b}$ 之分數部小與不小。而決定爲 $I\left(\frac{c}{ab}\right)+1$ 或 $I\left(\frac{c}{ab}\right)$。

〔第壹例〕求適合於方程式 $7x-13y=26$，所有 x 及 y 之正整數值。

$\frac{7}{13}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{6}$，其切近於 $\frac{7}{13}$ 之漸近分數爲 $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$。

然 $7.2-13.1=1$。 $\therefore\ 7(2\times 26)-13(1\times 26)=26$。

故其壹個答數爲 $x=52,\ y=26$。

而其壹般之答數，爲 $x=52+13m,\ y=26+7m$。即於此題式之答數爲無限。

又由視察得 $x=0, y=-2$。亦適合於原方程式。故答數之總式，又爲 $x=13m,\ y=-2+7m$。

〔第貳例〕求適合於 $7x+10y=280$，所有正數值之解答。

$\frac{7}{10}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$。而取其漸近分數。爲 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$。

由是 $7.3-10.2=1$。 $\therefore\ 7(3\times 280)-10(2\times 280)=280$，

即得其壹個之答數。爲 $x=840,\ y=-560$，

故共有之答數爲 $x=840-10m,\ y=-560+7m$。而 $m \not> 84$ 及 $m \not< 80$

由是順次 $m=84, 83, 82, 81, 80$。而得

$$\left.\begin{matrix}x=0\\y=28\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=10\\y=21\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=20\\y=14\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=30\\y=7\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=40\\y=0\end{matrix}\right\}。$$

以上共有五組，

〔第叄例〕求於 $3x+5y=1306$，所有正整數解答之總數。

$\frac{3}{5}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$， 故 $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$。

$\therefore\ 3(2\times 1306)+5(-1306)=1306$，

由是得壹般之解答。爲 $x=2612-5m,\ y=3m-1306$。惟因 x 及 y 爲正整數。

故 $5m \not> 2612$。即 $m \not> 522\frac{2}{5}$。即 $m \not> 522$，

$3m \not< 1306$。即 $m \not< 435\frac{1}{3}$。即 $m \not< 435$，

由是求得解答之總數爲 $522-435=87$。

403. 三未知數量之兩方程式

$ax+by+cz=d$, $a'x+by'+c'z=d'$ 求其正整數之解答。

先從兩式消去其壹未知數。而爲含二個未知數之壹方程式。

即 $(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c$ ……………………………………(1)

於此方程式 $ac'-a'c$ 與 $bc'-b'c$ 如非爲互素。則其公因子。即爲 $dc'-d'c$ 之因子。可將(1)式，以其公因子約之，今假定 $ac'-a'c$ 與 $bc'-b'c$ 爲互素。則由前章之定理而得壹切之解答。

$x=\alpha+(bc'-b'c)n$, $y=\beta-(ac'-a'c)n$ ……………………………………(2)

但 $x=\alpha$, $y=\beta$ 爲任意之整根。n 爲任意之整數。

今以(2)之 x,y 壹切之值，代入於原方程式之第壹式。而得

$a\{\alpha+(bc'-b'c)n\}+b\{\beta-(ac'-a'c)n\}+cz=d$,

則 $cz+\{a(bc'-b'c)-b(ac'-a'c)\}n=d-a\alpha-b\beta$, 此即爲 $Az+Bn=C$。

A與B如有公因子。則其公因子。即爲C之因子。可以其公因子約其全式。今假定A與B爲互素。則可求得。如 $z=\gamma+Bm$, $n=\delta-Am$ 爲壹切之解答。

乃由(2)得 $x=\alpha+(bc'-b'c)(\delta-Am)$,

$y=\beta-(ac'-a'c)(\delta-Am)$,

$z=\gamma+Bm$。

〔例〕 $5x+7y+2z=24$, $3x-y-4z=4$ 求其正整數值之解答。

從兩方程式消去 z。而得 $13x+13y=52$,

$\therefore$ $x+y=4$。 由是 $x=2+n$, $y=2-n$。

故由第壹式得 $5(2+n)+7(2-n)+2z=24$。 即 $z-n=0$。

由是得解答之總式，$x=2+n$, $y=2-n$, $z=n$。x, y, z 之正整數之值如次。

$n=0$ 則 $x=2$, $y=2$, $z=0$。

$n=1$ 則 $x=3$, $y=1$, $z=1$。

$n=2$ 則 $x=4$, $y=0$, $z=2$。

如欲得 x, y, z 之正整數值皆大於0，則其適合於原方程式者。祇有壹個答數。爲 $x=3$, $y=1$, $z=1$。

404. 雜例　次揭數例以補上文之闕略。其所用之法。或有不同之處。係據鮑洛(Barlow)氏所著數之理論一書。

〔第壹例〕　方程式$3x+2y+8z=40$。求其正整數之解答。(除去答數中有0者)。

x, y皆大於0。故x, y爲最小時各等於1。由此得$3+2+8z=40$。

即　$z=\frac{35}{8}$　即　$z \ngtr 5$。

由是從方程式。則得

$$z=4,\quad 3x+2y=8,$$
$$z=3,\quad 3x+2y=16,$$
$$z=2,\quad 3x+2y=24,$$
$$z=1,\quad 3x+2y=32。$$

由此四方程式。求得x, y, z之值如次。

$x=$	2	4	2	6	4	2	10	8	6	4	2
$y=$	1	2	5	3	6	9	1	4	7	10	13
$z=$	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1

〔第貳例〕　方程式$6x^2-13xy+6y^2=16$。求其正整數之解答。

將原式分括之。爲$(3x-2y)(2x-3y)=16$。以x, y爲整數時。其$2x-3y$不得不爲整數。而此$2x-3y$不得不爲16之因子。此因子必與$2x-3y$爲同符號。由是記以16之因子。而得下列各通同方程式。

$$3x-2y=\pm16,\quad 2x-3y=\pm1 \cdots\cdots(1)$$
$$3x-2y=\pm8,\quad 2x-3y=\pm2 \cdots\cdots(2)$$
$$3x-2y=\pm4,\quad 2x-3y=\pm4 \cdots\cdots(3)$$
$$3x-2y=\pm2,\quad 2x-3y=\pm8 \cdots\cdots(4)$$
$$3x-2y=\pm1,\quad 2x-3y=\pm16 \cdots\cdots(5)$$

從(1)得$5x=\pm(48-2)$。　從(2)得$5x=\pm(24-4)$。

從(3)得$5x=\pm(12-8)$。　從(4)得$5x=\pm(6-16)$。

從(5)得$5x=\pm(3-32)$。

以上所得之諸式中。其x之值爲正整數者。

惟　$5x=+(24-4)$　及　$5x=-(6-16)$。

卽 $x=4$ 或 2。而與 x 相應所有 y 之値爲 2 或 4。

〔第三例〕 $3x^2+7xy-2x-5y-35=0$。求其正整數之解答。

變原式爲 $y(7x-5)+3x^2-2x-35=0$。

則 $y+\dfrac{3x^2-2x-35}{7x-5}=0$。以 7 乘之，$7y+\dfrac{21x^2-14x-245}{7x-5}=0$。

$\therefore\ 7y+3x+\dfrac{x-245}{7x-5}=0$。以 7 乘之。$49y+21x+\dfrac{7x-1715}{7x-5}=0$。

$\therefore\ 49y+21x+1-\dfrac{1710}{7x-5}=0$。　由是知 $\dfrac{1710}{7x-5}$ 必爲整數，

而 $7x-5$ 必爲 1710 之因子。今 $1710=1\times2\times3\times3\times5\times19$。其中之因子，等於 $7x-5$ 而 x 爲正整數者。惟 $2\times3\times19$, 3×3, 2, 卽 114, 9, 2 三個因子。

然 $7x-5=114$。則 $x=17$。以之代入於方程式。得 y 之値爲負數。故祇有 $7x-5=9$, $7x-5=2$ 爲合理。卽得 $x=2, y=3$, 或 $x=1$, $y=17$。

例題四十

1. 試將次列方程式。求其正整數之解答。

(1) $7x+15y=59$　　(2) $8x+13y=138$。

(3) $7x+9y=100$　　(4) $15x+71y=10653$。

〔解〕 本例用特別之解法如次。

(1) 由原方程式。$x=-2y+\dfrac{59-y}{7}$。　故 $\dfrac{59-y}{7}=m$ 卽整數。

故 $59-y=7m$。　$\therefore\ y=59-7m$。

$\therefore\ x=-2y+m=-2(59-7m)+m=15m-118$。

故 $m \nless 8$ 及 $m<9$。　$\therefore\ m=8,\ \ x=2,\ \ y=3$。

(2) 由原方程式 $x=1+\dfrac{13(10-y)}{8}=1+13m$。 但 $\dfrac{10-y}{8}=m$。

$\therefore\ y=10-8m$, 及 $x=1+13m$。由是 $10-8m>0$ 及 $1+13m>0$。而得 $m<2$, $m>-1$。 故 $m=1$, 及 $m=0$。

則 $x=14$, $y=2$, 及 $x=1$, $y=10$。

(3) $x=13-\dfrac{9(y-1)}{7}=13-9m$。 但 $\dfrac{y-1}{7}=m$。

$\therefore$　由 $x=13-9m$，　$y=7m+1$。則 $m<2$ 及 $m>-1$。

故　$m=1$ 或 0。則 $x=4$，　$y=8$ 或 $x=13$，　$y=1$。

(4)　用連分數求之卽如下。

$\frac{15}{71}=\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3}$。　　$\therefore$　$\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1}=\frac{4}{19}$。

由是 $15\cdot19-71\cdot4=1$。　$\therefore$　$15(19\cdot10653)-71(4\cdot10653)=10653$。

又原方程式　　　　$15x\qquad+71y\qquad=10653$。

由減法 $15(x-202407)+71(y+42612)=0$。

$\therefore$　$x=202407-71m$。$y=-42612+15m$。故 $m \ngtr 2850$ 及 $m \nless 2841$。

$\therefore$　m 爲 2850，2849，……，2841。而 x 之值爲 696，625，554……57。y 之值爲 3，18，33，…………138。

2.　$2x+3y=133$ 及 $7x+11y=2312$。求其正整數解答之數。

〔解〕　由 $2x+3y=133$ 得 $2(-1)+3\cdot1=1$。卽 $2(-133)+3\cdot133=133$。

由減法。$2(x+133)+3(y-133)=0$。　$\therefore$　$x=3m-133$，$y=133-2m$。

由是 m 之值。爲自 45 至 66。卽 22 個正整數解答。

又由 $7x+11y=2312$ 得 $7(-3)+11\cdot2=1$。

故　$7(-3\cdot2312)+11(2\cdot2312)=2312$。

$\therefore$　$x=11m-6936$，　$y=4624-7m$。而 m 之值爲自 631 至 660。卽得 30 個正整數解答。

3.　求次之各方程式壹般之解答。

(1)　$7x-13y=15$。　　(2)　$9x-11y=4$。

(3)　$119x-105y=217$。　　(4)　$49x-69y=100$。

〔解〕　(1)　$7\cdot2-13\cdot1=1$。故 $7\cdot30-13\cdot15=15$。由原方程式減之。得 $7(x-30)-13(y-15)=0$。　$\therefore$　$x=30+13n=4+13(2+n)=4+13m$。

及　$y=15+7n=1+7(2+n)=1+7m$。

(2)　$9\cdot5-11\cdot4=1$。故 $9\cdot20-11\cdot16=4$。

由原方程式減之。得 $9(x-20)=11(y-16)$。

$\therefore$　$x=20+11n=9+11(1+n)=9+11m$。

及　$y=16+9n=7+9(1+n)=7+9m$。

(3)　原方程式以 7 除之。得 $17x-15y=31$。

由是容易求得 $x=15m-7$，及 $y=17m-10$。

(4) $49.31-69.22=1$。 $\therefore$ $49(3100)-69(2200)=100$。

故 $x=3100+69n=64+69(44+n)=64+69m$。

及 $y=2200+49n=44+49(44+n)=44+49m$。

4. 求次列各方程式自0以上之正整數解答。

(1) $2x+3y+7z=23$。 答 3, 1, 2 及 5, 2, 1 及 2, 4, 1。

(2) $7x+4y+18z=109$。 答 1, 21, 1 及 5, 14, 1 及 9, 7, 1 及 3, 13, 2 及 7, 6, 2 及 5, 5, 3 及 5, 5, 3 及 3, 4, 4 及 1, 12, 3 及 1, 3, 5。

(3) $5x+y+7z=39$, $2x+4y+9z=63$。 答 2, 8, 3。

(4) $3x+2y+3z=250$, $9x-4y+5z=170$。 答 8, 38, 50 及 19, 44, 35 及 30, 50, 20 及 41, 56, 5。

〔解〕 (1) 於 $2x+3y+7z=23$。其z在1, 2, 3之內。

設 $z=3$。則由 $2x+3y=2$ 不能得x, y之正整值。

若 $z=2$。則由 $2x+3y=9$ 可得x, y之正整值。

又若 $z=1$。則由 $2x+3y=16$ 亦可得x, y之正整值。

(2) 於 $7x+4y+18z=109$, $7x+4y \nless 1$。

$\therefore$ $18z \ngtr 109-1$。 故z爲1, 2, 3, 4, 5。

(3) 將 $5x+y+7z=39$ 及 $2x+4y+9z=63$ 消去其y。得 $18x+19z=93$。由此可得x, z之各值。

(4) 由原方程式消去y。得 $15x+11z=670$。

由是 $x=2010-11m$, $z=15m-2680$ 及 $y=1130-6m$ 而 $m \ngtr 182$,

及 $m \nless 179$。

5. 求次列各方程式。自0以上之正整數解答。

(1) $2xy-3x+2y=1329$ 答 1325, 2, 及 441, 3, 及 101, 8, 及 77, 10, 及 33, 21, 及 25, 27, 及 5, 112, 及 1, 333。

(2) $x^2-xy+2x-3y=11$。 答 5, 3。

(3) $2x^2+5xy-12y^2=28$。 答 8, 5。

(4) $2x^2-xy-y^2+2x+7y=84$。 答 6, 1, 及 13, 14。

〔解〕 (1) $(x+1)(2y-3)=1326$。

故 $x+1$ 爲1326之因子。而 $2y-3$ 非等於奇數。則y不爲整數。

由是 $x+1$ 爲 2. 6, 26, 34, 78, 102, 442, 1326。

(2)　$(x+3)(x-y-1)=8$。　　$\therefore$　$x+3=8$,　$x-y-1=1$。

(3)　$(2x-3y)(x+4y)=28$。　　$\therefore$　$x+4y$ 爲 28 之因子。而 $x+4y \not< 5$。

$\therefore$　$x+4y=7$,　$2x-3y=4$ 或 $x+4y=14$,　$2x-3y=2$,

或 $x+4y=28$,　$2x-3y=1$,

(4)　$(2x+y-4)(x-y+3)=72$。

由是 $2x+y-4$ 爲 72, 36, 24, 18, 12, 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1 其相應之各因子 $x-y+3$ 爲 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 72。

6. 於 $ax+by+cz=d$。其 x, y, z 之各整數值，爲三個之等差級數。試證明之。

〔證〕設 $ax+by+cz=d$ 之整數解答，爲 $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$。

則 $a\alpha+b\beta+c\gamma=d$，而 $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$。

故 $am(b-c)+bm(c-a)+cm(a-b)=0$。

由加法 $a\{\alpha+m(b-c)\}+b\{\beta+m(c-a)\}+c\{\gamma+m(a-b)\}=d$。與原方程式比較。得 $x=\alpha+m(b-c)$,　$y=\beta+m(c-a)$,　$z=\gamma+m(a-b)$,

故 m 爲 0, 1, 2, 3……而得 x, y 如次。

$x=\alpha$,　$\alpha+(b-c)$,　$\alpha+2(b-c)$,　$\alpha+3(b-c)$……即 A P。

$y=\beta$,　$\beta+(c-a)$,　$\beta+2(c-a)$,　$\beta+3(c-a)$……即 A P。

$c=\gamma$,　$\gamma+(a-b)$,　$\gamma+2(a-b)$,　$\gamma+3(a-b)$……即 A P。

7. 將 316 分爲二分。使其壹分可以 13 整除。而他壹分可以 11 整除。　　答　195, 121, 52, 264,

〔解〕二分爲 $13x$, $11y$。則 $13x+11y=316$。由斯求 x, y, 而得 $13x$, $11y$ 之值。

8. 用 2.5「先令」及 2「先令」之銀幣。兌換 1「鎊」6「先令」6「本士」其方法有幾種。　　答　3,

〔解〕2.5「先令」即 30「本士」，又 2「先令」即 24「本士」。今令此兩種銀幣之數爲 x 及 y。又以 1「鎊」6「先令」6「本士」=318「本士」,

故 $30x+24y=318$。即　$5x+4y=53$。$\therefore$　$x=53-4m$,　$y=5m-53$。

故 $m \not> 13$　又　$m \not< 10$。即得 m 之數爲 3 個,

9. 用 21「先令」與 5「先令」之銀幣。兌換金額百鎊。間可有幾法。

答　20.

〔解〕令此兩種銀幣之數爲 x 及 y。而100「鎊」，即 2000「先令」，
故 $21x+5y=2000$。由此得 $x=21m-8000$，$y=2000-5m$。
故定 m 之值。自381迄400之各數爲適合。
即得所求之數。爲 $400-381+1$。即 20。

10. 甲欲付乙銀11「先令」而僅有5「先令」之幣8個。乙則僅有2「先令」之幣若干。問其調換之法則有幾何。 答 3。

〔解〕令甲付乙以5「先令」之銀幣個數爲 x。乙還甲以2「先令」銀幣之個數爲 y。故 $5x-2y=11$。
即得 $x=11-2m$，$y=22-5m$，惟 $x \not> 8$。
故 $x=7$，$y=12$，或 $x=5$，$y=7$，或 $x=3$，$y=2$。即有三個方法。

11. 以2.5「先令」及2「先令」二種銀幣。兌換銀欵可有8種，求其最大數。及最小數。

答 3「鎊」14「先令」6「本士」，4「鎊」10「先令」。

〔解〕令此兩種銀幣之個數爲 x 及 y。所兌換之銀欵 $6z$「本士」。
則 $30x+24y=6z$。 $\therefore$ $5x+4y=z$。 又以 $5z-4z=z$，
由是 $5(x-z)+4(y+z)=0$， $\therefore$ $x=z-4m$，$y=5m-z$。
故 $m<\frac{z}{4}$ 及 $m>\frac{z}{5}$。即 $m=\frac{z-\alpha}{4}$ 及 $m=\frac{z+\beta}{5}$。α 及 β 爲正整數，但不大於4，5而上二個 m 之值，其中間之整數。由題意得

$$\frac{z-\alpha}{4}-\frac{z+\beta}{5}=8-1。\quad \therefore\ z=140+5\alpha+4\beta。$$故 z 爲最大之數，
則 $\alpha=4$，$\beta=5$。 $\therefore$ $z=180$「本士」。
又 z 爲最小之數，則 $\alpha=1$，$\beta=1$。 $\therefore$ $z=149$「本士」。
由是得 $6z=6\times180=4$「鎊」10「先令」最大數。
又 $6z=6\times149=3$「鎊」14「先令」6「本士」最小數。

12. 以4「本士」及3「本士」二種幣兌銀欵。祇有3種。求此各種之值。

〔解〕令此二種幣之個數爲 x，y。其兌得之銀數爲 z。
則得 $4x+3y=z$，又以 $4z-3z=z$。故 $4(x-z)+3(y+z)=0$。
$\therefore$ $x=z-3m$ 及 $y=4m-z$。

由是 $m<\frac{z}{3}$ 及 $m>\frac{z}{4}$。即 $m=\frac{z-\alpha}{3}$ 及 $m=\frac{z+\beta}{4}$。

但 α,β 不大於3,4因題云祇有三種,故得 $\frac{z-\alpha}{3}-\frac{z+\beta}{4}=3-1$。

由是得 $z=24+4\alpha+3\beta$。故 $\alpha=1,2,3$ 及 $\beta=1,2,3,4$。

由是 $\alpha=1,\ \beta=1$。 $\therefore\ z=24+4+3=31$〔本士〕=2〔先令〕7〔本士〕。

$\alpha=1,\ \beta=2$。 $\therefore\ z=24+4+6=34$〔本士〕=2〔先令〕10〔本士〕。

$\alpha=1,\ \beta=3$。 $\therefore\ z=24+4+9=37$〔本士〕=3〔先令〕1〔本士〕。

$\alpha=1,\ \beta=4$。 $\therefore\ z=24+4+12=40$〔本士〕=3〔先令〕4〔本士〕。

$\alpha=2,\ \beta=1$。 $\therefore\ z=24+8+3=35$〔本士〕=2〔先令〕11〔本士〕。

$\alpha=2,\ \beta=2$。 $\therefore\ z=24+8+6=38$〔本士〕=3〔先令〕2〔本士〕。

$\alpha=2,\ \beta=3$。 $\therefore\ z=24+8+9=41$〔本士〕=3〔先令〕5〔本士〕。

$\alpha=2,\ \beta=4$。 $\therefore\ z=24+8+12=44$〔本士〕=3〔先令〕8〔本士〕。

$\alpha=3,\ \beta=1$。 $\therefore\ z=24+12+3=39$〔本士〕=3〔先令〕3〔本士〕。

$\alpha=3,\ \beta=2$。 $\therefore\ z=24+12+6=42$〔本士〕=3〔先令〕6〔本士〕。

$\alpha=3,\ \beta=3$。 $\therefore\ z=24+12+9=45$〔本士〕=3〔先令〕9〔本士〕。

$\alpha=3,\ \beta=4$。 $\therefore\ z=24+12+12=48$〔本士〕=4〔先令〕。

〔餘論〕本題可為造設不定方程式問題之本例。如此題之12個解答。即可設為12個問題。茲示其(1)(2)如次。即以三方法解答之也。

(1) 以4〔本士〕與3〔本士〕之二種幣,兌換2〔先令〕7〔本士〕之幣,其方法之數幾何。

從 $4x+3y=2$〔先令〕7〔本士〕$=31$。而得 $x=31-3m,\quad y=4m-31$。

$\therefore\ m>7$ 及 $m<10$。 $\therefore$ 方法之數為 $10-7=3$。

(2) 以4〔本士〕與3〔本士〕之二種幣買價值2〔先令〕10〔本士〕之物,其配用二種幣之方法。有幾種。

從 $4x+3y=2$〔先令〕10〔本士〕$=34$。即得 $x=34-3m,\quad y=4m-34$。

$\therefore\ m>8$ 及 $m<11$。故其方法之數為 $11-8=3$。

以上可得同樣之解答。

13. 有二位之數,等於其二數字之積之倍數,其數有幾種。

〔解〕 二位之數爲 $10x+y=mxy$，即 $10+\frac{y}{x}=my$。故 $\frac{y}{x}$ 爲整數。

由是 $y=x$。則 $11=my$。 $\therefore\ m=11$。 $y=x=1$。故所求之數爲 11。

又 $y=2x$。則 $12=my$。 $\therefore\ m=2$ 或 3 或 6。 $\therefore\ y=6$ 或 4 或 2。

$\therefore\ x=3$ 或 2 或 1。故所求之數爲 36 或 24 或 12。

又 $y=4x$。則 $14=my$。即 $7=2mx$ 不能解答。

又 $y=5x$。則所求之數爲 15。

又 $y=6x$，或 $7x$，或 $8x$，或 $9x$，…………皆不能解答。

14. 有兩數。各爲二位之數。其末位之數字相同。而此兩數若各以 9 除之。則任一個之商。互等於他之餘數。求此兩數如何。

〔解〕 兩數爲 $10x+z$， $10y+z$。

由題意得 $10x+z=9\alpha+\beta$， $10y+z=9\beta+\alpha$。

由減法 $10(x-y)=8(\alpha-\beta)$。即 $5(x-y)=4(\alpha-\beta)$ α,β 爲 9 除之殘數。故比 9 爲小。

由是 $\alpha-\beta<9$。由是 $x-y=4$ 及 $\alpha-\beta=5$。

若 $\alpha=8$，則 $\beta=3$。 $\therefore\ 10x+z=9\times8+3=75$，及 $10y+z=9\times3+8=35$，

又 $\alpha=7$。則 $\beta=2$。 $\therefore\ 10x+z=9\times7+2=65$，及 $10y+z=9\times2+7=25$，

又 $\alpha=6$。則 $\beta=1$。 $\therefore\ 10x+z=9\times6+1=55$，及 $10y+z=9\times1+6=15$

而 $\alpha\nless5$。故如上之所求得三對之解答。

15. 於西歷 1887 年。某人之年齡。等於其生時西歷年數之數字之和。問此人年幾何。 答 21 歲。

〔解〕 此人之年齡。無論如何。必小於 100，故爲二位之數爲 $10x+y$。而其生時之西歷年數爲 1 千 8 百 $(8-x)$ 拾 $(7-y)$ 年。

故由題意得 $1+8+(8-x)+(7-y)=10x+y$。即 $11x+2y=24$。

由是 $x=24-2m$， $y=11m-120$。故 $m=11$。而 $x=2$， $y-1$。

16. $$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\cdots\cdots(1-x^{a_n})}=1+A_1x+\cdots\cdots\cdots+A_nx^n+\cdots\cdots\cdots$$

則方程式 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots\cdots+a_nx_n=m$ 正整數解答之數。爲 A_m（含有零）。但 a_1，a_2，………a_n 皆爲整數方程式 $x+2y=n$ 解答之數爲 $\frac{1}{4}\{2n+3+(-1)n\}$。

以銀1000鎊買物品三種，其每個之各價為1〔先令〕，2〔先令〕，5〔鎊〕。則各物品個數分配之方法。其數有1005201。

〔證〕 $$\frac{1}{1-x^{a_1}}=1+x^{a_1}+x^{2a_1}+\cdots\cdots+x^{x_1a_1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1-x^{a_2}}=1+x^{a_2}+x^{2a_2}+\cdots\cdots+x^{x_2a_2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1-x^{a_3}}=1+x^{a_3}+x^{2a_3}+\cdots\cdots+x^{x_3a_3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由是原方程式為

$$(1+x^{a_1}+x^{2a_1}+\cdots\cdots+x^{x_1a_1}+\cdots\cdots)(1+x^{a_2}+x^{2a_2}+\cdots\cdots+x^{x_2a_2}+\cdots\cdots)$$

$$(1+x^{a_3}+\cdots\cdots)\cdots\cdots=1+A_1x+A_2x^2+\cdots\cdots+A_mx^m+\cdots\cdots,$$

但 $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=m$。故上之右邊之積，其 $x^{x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3}\cdots\cdots$ 之係數。等於右邊 x^m 之係數 A_m，

故 $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+\cdots\cdots=m$。解答之數為 A_m，

又 $x+2y=n$，解答之數，如前證於 $\frac{1}{(1-X)(1-X^2)}$ 求其 X^n 之係數，

而由 $\frac{1}{(1-X)(1-X^2)}=\frac{1}{4(1+X)}+\frac{1}{4(1-X)}+\frac{1}{2(1-X)^2}$。求得 X^n 之係數為 $\frac{1}{4}\{2n+3+(-1)^n\}$。

證明最後之題意，即求 $x+2y+100z=20000$ 之解答，於 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^{100})}$，即 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}\{1+x^{100}+x^{200}+\cdots\cdots\}$ 求其 x^{20000} 之係數，

由前證於 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ 其 x^n 之係數。為 $\frac{1}{4}\{2n+3+(-1)^n\}$。

故由此結果，求 x 之方乘，即 x^{20000}，x^{19900}，$x^{19800}\cdots\cdots$ 之係數，順次乘 $1+x^{100}+x^{200}+\cdots\cdots$ 之各項，其 x^{20000} 之係數。為 $\frac{1}{4}(2.20000+3+1)$

$$+\frac{1}{4}(2.19900+3+1)+\cdots\cdots+\frac{1}{4}(2.100+3+1)+\frac{1}{4}(2.0+3+1),$$

$=\frac{1}{4}\{2(20000+19900+\cdots\cdots+100)+(3+3+\cdots+3)+(1+1+\cdots+1)\}+1$

$=\frac{1}{4}\{2\cdot\frac{200}{2}(20000+100)+3\cdot200+200\}+1=1005201$。

17. 以300鎊買物品三種。其每個各值。爲5「先令」,3「先令」,1「先令」,則其個數分配之方法。共有1201801。

〔證〕 $5x+3y+z=6000$。 故 $3y+z$ 爲5之倍數。 故 $3y+z=5k$。

但 $5k$ 可從0至6000選得。

卽 k 可從0至1200任意選得。

由是 $3y+z=5k$ 壹般之解答。爲 $y=5k-m$, $z=3m-10k$。

$\therefore$ $m \ngtr 5k$ 及 $m \nless \frac{10k}{3}$。

故解答之個數。m 爲 $5k-\frac{10}{3}k+1=\frac{5k}{3}+1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

設 $k=3p$。則k卽3p。其值爲從0至1200。故p爲0至400。而以 $k=3p$ 代於(1)爲 $5p+1$。

由是 $\sum^{400}_{0}(5p+1)=1+(5\cdot1+1)+(5\cdot2+1)+\cdots\cdots+(5\cdot400+1)$

$$=\frac{1}{2}\cdot401(1+2001)=401401。$$

又 $k=3p+1$。 則 $3p+1$ 爲從0至1200。故p爲從0至399。而(1)之整數部爲 $5p+2$。

由是 $\sum^{399}_{0}(5p+2)=\frac{1}{2}\cdot400(2+1997)=399800$。

又 $k=3p+2$。 則 p爲從0至399。

故 $\sum^{399}_{0}(5p+4)=\frac{1}{2}\cdot400(4+1999)=400600$。

故所求之解答。爲 $401401+399800+400600=1201801$。

第貳拾玖編補

霍爾氏乃托氏第二十八編摘要

二次不定方程式

1. 壹般二次方程式 求適合於$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$。所有x及y之正整數值。

以a乘原方程式而移其項。$a^2x^2+2ax(hy+g)=-a(by^2+2fy+c)$,

兩邊加以$(hy+g)^2$。開平方得

$$ax+hy+g=\pm\sqrt{\{(h^2-ab)y^2+2(hg-af)y+(g^2-ac)\}} \quad\cdots\cdots(1)$$

惟因x及y之值爲正整數。則此平方根號內之式。不得不爲完平方。乃令$(h^2-ab)y^2+2(hg-af)y+(g^2-ac)=py^2+2qy+r=z^2$。

將$py^2+2qy+r=z^2$。以p乘之而移其項。

$p^2y^2+2pqy=-pr+pz^2$。兩邊加以q^2。開平方。得$py+q=\pm\sqrt{q^2-pr+pz^2}$。此根號內之式。亦不得不爲完平方數。又令$q^2-pr+pz^2=t^2$.

卽$t^2-pz^2=q^2-pr$。但t及z爲正整數。p, q, r爲常數。

此方程式之t及z。若非爲正整數。則原方程式之x及y。不能爲正整數。

a, b, h皆爲正者。則其解答之數有限。何則。若x及y之正整數值爲極大時。則原方程式之$ax^2+2hxy+by^2$亦必極大。如是原方程式之左邊。不能等於0矣。

又h^2-ab爲負。則其解答之數有限。何則。於(1)式中h^2-ab爲y^2之係數。若y之值爲極大時。根號內之值變爲負故也。

〔例〕求方程式$x^2-4xy+6y^2-2x-20y=29$之正整數解答。

將此方程式變爲$x^2-4xy+4y^2-2x+4y+1=30+24y-2y^2$。開平方。

得 $x-2y-1=\pm\sqrt{30+24y-2y^2}$。

即 $x=2y+1\pm\sqrt{30+24y-2y^2}$。

但 $30+24y-2y^2=102-2(y-6)^2$。由是知 $(y-6)^2$。不大於 51,

故 $(y-6)^2=1$ 或 49。則 $30+24y-2y^2=100$ 或 4。

即 $y^2-12y=-35$ 或 13。其正根為 6 ± 1 或 $6+7$。

由是求得 $y=5$, $x=21$。又 $y=5$, $x=1$。又 $y=7$, $x=25$。

又 $y=7$, $x=5$。又 $y=13$, $x=29$。又 $y=13$, $x=25$。

2. 雜例 試揭二次不定方程式之雜例如次。

〔第壹例〕兩正整數各平方之和,與其積之差。等於完平方數。求此兩數所有之值。

x 及 y 為兩正整數。由題列式為 $x^2+y^2-xy=z^2$。

$\therefore$ $x(x-y)=(z+y)(z-y)$。即 $mxn(x-y)=n(z+y)m(z-y)$,

則 $mx=n(z+y)$ 及 $n(x-y)=m(z-y)$,

但 m 及 n 為正整數。

由是 $mx-ny-nz=0$ (1) $nx+(m-n)y-mz=0$ (2),

以 m 乘 (1), n 乘 (2) 相減,得 $(m^2-n^2)x=(2mn-n^2)y$。

又以 n 乘 (1), m 乘 (2) 相減,得 $(m^2+n^2-mn)y=(m^2-n^2)z$,

$$\therefore\quad \frac{x}{2mn-n^2}=\frac{y}{m^2-n^2}=\frac{z}{m^2-mn+n^2},$$

$\therefore$ $x=2mn-n^2$, $y=m^2-n^2$, $z=m^2-mn+n^2$。

以 m 及 n 為任意之數。即可求得 x 及 y 之值。

例如 $m=7$, $n=4$, 則得 $x=40$, $y=33$, $z=37$,

〔第貳例〕三個正整數為等差級數。而取其任意之二數相加為平方數。試求正整數之值。

設等差級數之三個正整數,為 $x-y$, x, $x+y$。

而 $(x-y)+x=p^2$, $(x-y)+(x+y)=q^2$, $x+(x+y)=r^2$。

即 $p^2=2x-y$, $q^2=2x$, $r^2=2x+y$。

故 $p^2+r^2=2q^2$。即 $r^2-q^2=q^2-p^2$。

由是得 $m(r-q)=n(q-p)$ 及 $n(r+q)=m(q+p)$。

從此兩方程式得$\frac{p}{n^2+2mn-m^2}=\frac{q}{m^2+n^2}=\frac{r}{m^2+2mn-n^2}$,

即得$p=n^2+2mn-m^2$, $q=m^2+n^2$; $r=m^2+2mn-n^2$。

$\therefore \quad x=\frac{1}{2}(m^2+n^2)^2$, $y=4mn(m^2-n^2)$。

3. 問題 求$x^2-Ny^2=\pm1$之正整數解答。

此解法於司密司氏第二十七編連分數366章已說明之。今不厭煩複。乃從霍爾氏所說明者。述之如次。

〔第壹〕將$\sqrt{N}$作連分數。(即司密司氏366章之所述,茲復畧述之)。

$\sqrt{N}=a_1+\frac{r_1}{\sqrt{N}+a_1}$。但$r_1=N-a_1^2$。

又 $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}=b_1+\frac{\sqrt{N}-a_2}{r_1}=\frac{r_2}{\sqrt{N}+a_2}$。

但 $a_2=b_1r_1-a_1$ 及 $r_1r_2=N-a_2^2$,(此處畧)其壹般之形。若

$\frac{\sqrt{N}+a_{n-1}}{r_{n-1}}=b_{n-1}+\frac{r_n}{\sqrt{N}+a_n}$。

但 $a_n=b_{n-1}r_{n-1}-a_{n-1}$ 及 $r_{n-1}r_n=N-a_n^2$.

由是得$\sqrt{N}=a_1+\frac{1}{b_1+}\frac{1}{b_2+}\frac{1}{b_3+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

此$\sqrt{N}$, $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$, $\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$, $\frac{\sqrt{N}+a_3}{r_3}$,…………諸商名為第壹,第貳,第三,…………之完商。

〔第貳〕$\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$為$\sqrt{N}$之連續三漸近分數。其$\frac{p''}{q''}$為與壹部之商b_n相應之漸近分數,而於此運算時。所得之完商,為$\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$

由是$\sqrt{N}=\frac{\left(\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}\right)p'+p}{\left(\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}\right)q'+q}=\frac{p'\sqrt{N}+a_np'+r_np}{q'\sqrt{N}+a_nq'+r_nq}$,去分母。得

$Nq'+(a_nq'+r_nq)\sqrt{N}=a_np'+r_np+p'\sqrt{N}$。

惟各文字皆為有理數。故將兩邊比較。得

$Nq'=a_np'+r_np$ 及 $a_nq'+r_nq=p'$,

由此兩方程式,得 $r_n(pq'-p'q)=Nq'^2-p'^2$..........................(1)

求$\sqrt{N}$之連分數時。遞次所得連分數之各商中。可得r_n爲1,

故令 $r_n=1$。 則 $pq'-p'q=Nq'^2-p'^2$..................................(2)

(至是可爲本題之證) $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$爲與$\frac{p''}{q''}$相應之完商,由此以求得(2)式。

故得$r_n=1$。則 $p'^2-Nq'^2=p'q-pq'$。

而 $p'q-pq'=\pm1$ $\therefore$ $p'^2-Nq'^2=\pm1$,

又原方程式爲 $x^2-Ny^2=\pm1$。

比較得 $x=p'$ 及 $y=q'$。

〔注意〕 $\frac{p'}{q'}$爲任何循環期之漸近分數。

〔例〕 求$x^2-13y^2=\pm1$之正整數解答。

$\sqrt{13}=3+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\cdots\cdots$以下循環。

取其最初循環部之漸近分數爲$\frac{18}{5}$

$\therefore$ $x=18$, $y=5$ 而 $18^2-13\cdot5^2=-1$。

由是得$x^2-13y^2=-1$之解答,爲$x=18$, $y=5$。

又取其貳個循環部之漸近分數,爲$\frac{649}{180}$。

而得$x^2-13y^2=1$之解答爲$x=649$。 $y=180$。

此種證法爲司密司原本所無。玆取霍爾氏所證者。述其大畧。未能詳備也。

例題二十八

20. 欲得直角三角形。其三邊皆爲整數者,試示以壹般之方法。

〔解〕 令直角兩邊爲x, y。斜邊爲z。則

$x^2+y^2=z^2$。 即 $x^2=(z+y)(z-y)$。

由是得 $mx=n(z+y)$ 及 $nx=m(z-y)$。

由此兩方程式。得 $\frac{x}{2mn}=\frac{y}{m^2-n^2}=\frac{z}{m^2+n^2}$。

$\therefore\quad x=2mn,\quad y=m^2-n^2,\quad z=m^2+n^2$。

〔別解〕惟三角形貳邊之和必大於他之壹邊。

故 $x+y>z$。今命 $x+\frac{n}{m}y=z$，但 $m>n$，

又以 $x^2+y^2=z^2$。　由是 $x^2+y^2=\left(x+\frac{n}{m}y\right)^2$。

即 $y^2=\frac{2n}{m}xy+\frac{n^2}{m^2}y^2$。　$\therefore\quad y(m^2-n^2)=2mnx$。

由是得 $x=m^2-n^2,\quad y=2mn$。

又 $z=x+\frac{n}{m}y=m^2-n^2+\frac{n}{m}(2mn)=m^2+n^2$。

21. 予有三友。皆新結婚。一日各攜其妻來見予。行相見禮。旣畢。三友乃各述其妻之名曰 Geertruij，曰 Catriin 曰 Anna。而此三友之名。曰 Hendrick, Claas, 及 Cornelius。予以年老事煩。閱時竟忘却友人某某之配爲某某。

但記得彼等相語曰。予等六人往市。各買得多數之豕。其每頭之値以〔先令〕計之。其數各等於所買豕之頭數。但云 Hendrick 比 Catriin 夫人。多買得豕 23 頭。Claas 比 Geertruij 夫人多 11 頭。而夫比其妻皆多費 3〔鎊〕3〔先令〕。予因是推得各友人之妻爲何人矣。

(是題在千七百四十三年。刊行於數學問題集)。

命 x 爲三人內任壹人所買之豕數。

又以每頭之値爲 x〔先令〕。故各壹人所買豕之總價爲 x^2〔先令〕。

同法。此各人之妻所買豕之總價。爲 y^2〔先令〕。

而 $x^2-y^2=63$，　　〔$\because$ 3〔鎊〕3〔先令〕=63〔先令〕〕。

即 $(x+y)(x-y)=63\times 1$ 或 21×3 或 9×7.

$\therefore\quad x+y=63,\quad x-y=1$，則 $x=32,\quad y=31,$

$x+y=21,\quad x-y=3$。則 $x=12,\quad y=9,$

$x+y=9,\quad x-y=7$。則 $x=8,\quad y=1$。

故知三友人買得之豕，爲 32, 12, 8 頭，

其妻買得之豕，爲　　31,　9, 1 頭。

惟以 Hendriek 氏比 Catriin 夫人多買 23 頭。故知 Hendriek 氏買得豕 32 頭。Catriin 夫人買得豕 9 頭，

又以 Claas 氏比 Geertruij 夫人多買 11 頭，故 Claas 氏買得豕 12 頭，Geertruij 夫人買得豕 1 頭。

由是知 Cornelius 氏買得豕 8 頭。Anna 夫人買得豕 31 頭，

於是可推得各夫婦及各買豕之數如次。

Hendriek	32	Claas	12	Cornelius	8
Anna	31	Catriin	9	Geertruij	1

查理斯密司氏
霍爾氏，乃托氏

大代數學講義

第捌卷

第叁拾編

適遇法

405. **適遇法**(Probability或Chance)述其定義如次。

定義 設有壹事。其獲成功也有a次。其遭失敗也有b次。乃取其折中之數。謂其成功之適遇。爲$\frac{a}{a+b}$其失敗之適遇。爲$\frac{b}{a+b}$。

適遇者。事出於或然而適相遇之謂。原文(Probability)有不確不實之意義。

英文(Equally likely)日文譯爲同樣二字。今改爲折中二字。雖與原文稍有出入。然大旨不差。取其容易講解故也。

欲充足上之定義。須先將折中二字之意義釋明之。凡有若干事。其各事之成就不分難易。則任取諸事中之壹事。而豫定其成就之率。必皆相等。即每事之適遇。均爲若干分之壹。是爲折中之意義。再設例以明之。

如筒內有籌百枝。每籌記以第一至第一百之號數。則於筒內任掣一籌。欲得第六號籌。或欲得第七號籌。或欲得第九十九號籌。其適遇皆相等。即欲掣得百籌內某號之籌。其適遇皆相等。故取其折中之數。每一籌之適遇。皆爲百分之一。又如囊中盛黑白球二種。各不知其數。於無心任取其一球。則其所取出者爲黑球、

抑爲白球，夫固不可預知。而其黑球與白球之適遇。皆爲$\frac{1}{2}$。何則。以其所取出者是黑球。或不是黑球，貳者必居壹於此。故得黑之適遇，取其折中之數爲 $\frac{1}{2}$。又以非黑球，即是白球，是黑球。即非白球。故得白之適遇，亦爲$\frac{1}{2}$。

若於囊中僅盛白球壹種，則任何取出其壹球皆爲白。故其適遇爲1。而適遇爲1者，其適遇已爲定遇矣。

又盛黑白赤三種球於囊中。各不知其數，而無心取其壹球，其所取出者爲黑爲白及爲赤，固不可知之。而其各色之適遇。皆爲$\frac{1}{3}$。何則。以其所取出者。或黑或白或赤。三者必居壹於此。故取其折中之數爲$\frac{1}{3}$。若求所取之球或白或赤而不爲黑，則其適遇易知爲$\frac{2}{3}$。因非赤則或黑或白。三者之中居其二，故其折中數亦爲$\frac{2}{3}$。

然如上解釋折中之意義。不無漏畧。故再爲解釋之如次。

設盛白球四個。黑球貳個於囊中。任取其壹球。求其出黑之適遇與出白之適遇。則以出黑之折中數。每取壹次爲 $\frac{2}{4+2}$。

故 $\frac{2}{4+2}$。即出黑之適遇。(所謂出黑之折中數者。因4+2個球中有黑球貳個，若連取4+2次。應得黑球2次，故每取壹次，其出黑之折中數，爲4+2分之2)。

而出白之折中數，爲$\frac{4}{4+2}$，故 $\frac{4}{4+2}$。即出白之適遇，

然如次例，其折中數。必由於永久之經驗而後知之。

例如錢有表裏貳面。其投出時。表面之適遇，與裏面之適遇同爲$\frac{1}{2}$。然所投之次數不多，其得表面之次數。與裏面之次數，未必相同。有投八次。而出表面五次。出裏面三次者。有投十九次而出表面九次。出裏面十次者。而必由永久之經驗。則其出表面之適

遇與出裏面之適遇，大概相等。即投之次數愈增，而其適遇之比愈近於$\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}=1$。如是折中數。乃由於永久之經驗而知之者也，

今設有一事。其得成功也有a次，其遭失敗也有b次，即由於永久之經驗。而知於a+b次中獲成功也a次。遭失敗也b次，因是取其折中數。得成功之適遇爲$\frac{a}{a+b}$，失敗之適遇爲$\frac{b}{a+b}$。與最初之定義相合，即由是得次之定義，

壹事成或敗之適遇，爲由於永久經驗中成或敗之次數，與其總次數之比。

例如計算人口生育之數，由永久之經驗，而知生育41人中，男子21人，女子20人，則知生育男子之適遇爲$\frac{21}{41}$。

又二人射的由永久之經驗，而知於八次中，甲中5次，故得八次內，甲中之適遇爲$\frac{5}{8}$。

406. 餘論 凡百發百中者其適遇爲1。又由適遇之定義，設其中之適遇爲p，則其不中之適遇，爲1−p，何則，若其中之適遇$=\frac{a}{a+b}=p$。則其不中之適遇，爲$1-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{a+b}=1-p$。

某事成功之適遇與其失敗之適遇，其比同於a之與b。若其a大於b。則稱此事件爲a對於b而成功者。若a小於b，則稱此事件爲b對於a而失敗者。

例如謀畫某事。其成功之適遇與其失敗之適遇。其比爲10：5，則云此事10對於5而成功者。若其比爲5：10。則云此事10對於5而失敗者。蓋適遇之値，取其數之多者以名之，

407. 不能同時並立之諸事 諸事中若有一事成立而他事均歸失敗者。則諸事爲不能同時並立。

例如有骰子壹個（六面體），其於擲出1時。其他2, 3, 4, 5, 6不能同時擲出，必須有貳以上個之骰子。方可擲出貳以上個之數也，

若有相異諸事。不能於同時並立。則其相異諸事中任壹事成立之適遇。等於各異事成立適遇之和，證明如次。

設有三件相異之事。而此三異事中各一事成立之適遇，以同分母之分數表之。爲$\frac{a_1}{d}$，$\frac{a_2}{d}$，$\frac{a_3}{d}$。

即d次內。各異事成立之次數。爲a_1，a_2，a_3。惟各異事不能同時成立，故知d次內。三異事共能成立之次數爲$a_1+a_2+a_3$，則得三異事中任壹事之適遇爲$\frac{a_1+a_2+a_3}{d}$ 即 $\frac{a_1}{d}+\frac{a_2}{d}+\frac{a_3}{d}$。

若考三個以上之相異事(但各異點不能同時並立者)可由同法推之。

玆設實例以證明之。

設盛球12個於囊中。其中赤者2個。黑者3個。白者4個。今任取其壹。求取赤黑白三種以內之適遇。

惟於12個中赤黑白三種之球數爲2+3+4。則所求之適遇爲$\frac{2+3+4}{12}$ 即 $\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{4}{12}$，

即赤黑白任壹色出來之適遇爲$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$。其不出來之適遇爲$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$。

例題

1. 六面體之骰子擲一度時，求其擲出3之適遇，

〔解〕凡壹個骰子其擲出此數之適遇。與擲出他數之適遇相同，即擲出3之適遇與擲出1, 2, 4, 5, 6各壹數之適遇相同，故出3之適遇爲$\frac{1}{6}$。

2. 骰子一顆求擲出奇數之適遇。

〔解〕骰子之六面中。有三面爲奇數，故所求之適遇爲$\frac{3}{6}$ 即 $\frac{1}{2}$。

3. 囊中盛白玉5,赤玉7,任取其壹。求其出赤之適遇。

〔解〕 出赤之次數可有7。不出赤之次數(即出白之次數)可有5,而共有$7+5=12$次,故於壹次取壹個其出赤之適遇爲$\frac{7}{12}$,

4. 囊中盛赤玉5,白玉7任取其貳,求其所出者皆爲白之適遇,

〔解〕 玉之數共12個,而從此12個中取出2個之組合。爲${}_{12}C_2$ $\frac{12.11}{1.2}=66$。而其中於白玉7中取出2個之組合。爲${}_7C_2=\frac{7.6}{1.2}=21$,

故所求之適遇爲$\frac{21}{66}$即$\frac{7}{22}$,

5. 囊中盛赤玉3,白玉2,任取貳個,若以取出貳赤爲勝,則其適遇爲7對於3而敗,

〔證〕 從總數5中取出貳個之組合爲${}_5C_2=10$。而此中取出貳赤之組合爲${}_3C_2=3$,即取出貳赤之適遇爲$\frac{3}{10}$,其不出貳赤之適遇爲$1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$,

故由406章。其出與不出適遇之比。爲$\frac{7}{10}:\frac{3}{10}=\frac{7}{3}$。即7對於3而敗,

6. 囊中盛黑白赤三種玉各貳個。任取三個,若欲取出三色完全者。則其適遇爲3對於2而敗,若欲所取中有貳個爲白者,則其適遇爲4對於1而敗,試證之。

〔證〕 從總數6中取出三個之組合爲${}_6C_3=20$,其中三色完全者,其數等於(黑+黑)(赤+赤)(白+白)連乘積之項數。即$2\times2\times2=8$,

由是得取出三色完全之適遇,爲$\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$,其不出之適遇爲

$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$。而其比爲$\frac{2}{5}:\frac{3}{5}=2:3$,即3對於2而敗。

若欲取出三個,其中有二個爲白者,則除此二白外,從其餘四個中。取出壹個之組合。以加於二白即得,而從四中取壹之組合

爲$_4C_1=4$。故取出三個中有二白之適遇爲$\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$。其不出之適遇爲$1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$。而其比爲$\frac{1}{5}:\frac{4}{5}$。即$1:4$。即4對於1而敗。

7. 有n個人。同坐於圓桌之周圍。其中甲乙二人相鄰與不相鄰適遇之比。若2比$n-3$。試證之。

〔解〕席次之變化爲$_{n-1}P_{n-1}=\lfloor n-1$。而以此相鄰之二人。當作壹人。則其席次之變化爲$\lfloor n-2$。惟以甲乙二人相鄰。甲在於乙之右或左。故於席次二人相鄰之全數爲$2\lfloor n-2$。

由是得甲乙二人鄰坐之適遇爲$\frac{2\lfloor n-2}{\lfloor n-1}=\frac{2}{n-1}$。其不鄰坐之適遇爲$1-\frac{2}{n-1}=\frac{n-3}{n-1}$。而其比爲$\frac{2}{n-1}:\frac{n-3}{n-1}$。即$2:n-3$。

408. 無關係之諸事 設有二事不相關係而可以同時並立者。則二事同時成立之適遇。等於各事成立適遇之乘積。

例如從甲囊出赤玉之適遇爲$\frac{2}{5}$。從乙囊出赤玉之適遇爲$\frac{3}{4}$。而從甲乙二囊。於同時各出赤玉壹個之適遇。爲$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$。

證明其公例如次。

假定第壹事於a_1+b_1次中。其成就有a_1次。其失敗有b_1次。又假定第二事。於a_2+b_2次中。其成就有a_2次。其失敗有b_2次。惟a_1+b_1與a_2+b_2兩事組合之。總爲$(a_1+b_1)(a_2+b_2)$而其中祇有a_1a_2爲二事同時成就者。故其適遇爲$\frac{a_1a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$。即$\frac{a_1}{a_1+b_1}\times\frac{a_2}{a_2+b_2}$。

〔推論〕設以二件無關係之事。其成就之各適遇爲p_1及p_2。則其於同時並敗之適遇爲$(1-p_1)(1-p_2)$。

又第壹成第二敗之適遇爲$p_1(1-p_2)$。第壹敗第二成之適遇爲$(1-p_1)p_2$。

此三者相加爲$(1-p_1)(1-p_2)+p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2=1-p_1p_2$。

由是兩事不相關係者。其同時並成之適遇爲p_1p_2。其非同時並成之適遇爲$1-p_1p_2$。

由同法無關係之若干事。其成就之各適遇爲 p_1、p_2、p ………則其於同時並成之適遇爲 $p_1p_2p_3$…………而同時並敗之適遇爲 $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$…………

409. 有關係之諸事 若有二事互相關係，則第二事之成敗。必因第壹事之成敗而異。凡若此者。亦可應用前章之定理，

若以第壹事成就之適遇爲 p_1。則於第壹成就以後，假定與第壹事相應。而得第二事成就之適遇爲 p_2。如是第一第二兩者俱成之適遇，亦必爲 $p_1\times p_2$。

二以上之出來事。可由同法推之。

408章與409章 其所有之適遇相等。其算法亦相等。但第一事與第二事。有相關係與無相關係之不同耳。

例　題

1. 將錢擲二次皆出表面。其適遇如何，

〔解〕 錢有表裏兩面，則各壹次擲出表面之適遇，爲 $\frac{1}{2}$。

故由408章。得所求之適遇爲 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。

2. 壹個骰子每擲六次。求其中至少有一次出6之適遇，

〔解〕 此題意謂每擲六次。其中或有一次出6。或有二次出6或有三次，四次，五次，六次出6者。其諸適遇之和。即爲本題所求之適遇。即除全次皆不出6之適遇外。其餘諸適遇之和，即爲所求之適遇。

惟以擲一次不出6之適遇爲 $1-\frac{1}{6}$。而由408章，擲六次不出6之適遇爲 $\left(1-\frac{1}{6}\right)^6=\left(\frac{5}{6}\right)^6$。由是所求之適遇，爲 $1-\left(\frac{5}{6}\right)^6$。

3. 囊中納赤玉五。白玉七。連次取一玉者二次。求其取出之玉。皆爲白之適遇。

〔解〕 第一次取出白玉一之適遇爲 $\frac{7}{5+7}=\frac{7}{12}$，因第一次取出

之白玉不再入於囊中。則囊中存赤玉五白玉六，故第二次取出白玉一之適遇為 $\frac{6}{5+6}=\frac{6}{11}$。

∴ 所求之適遇為 $\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}=\frac{7}{22}$。

4. 今將赤玉五白玉七納於甲囊，赤玉三白玉十二納於乙囊，於無心時在任一囊中。取出一玉。求其出赤之適遇。

囊有二而取得一囊之適遇為 $\frac{1}{2}$。

而從第一囊出赤玉一之適遇為 $\frac{5}{12}$。以 $\frac{1}{2}$ 乘之。得 $\frac{5}{12}\times\frac{1}{2}$。

又從第二囊出赤玉一之適遇為 $\frac{3}{15}$。以 $\frac{1}{2}$ 乘之。得 $\frac{3}{15}\times\frac{1}{2}$。

惟此事不能並成。故所求之適遇為 $\frac{5}{12}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{15}\times\frac{1}{2}$。即 $\frac{37}{120}$。

5. 將赤玉2白玉10分貯二囊。(每囊至少有一玉)乃於任一囊中。取出赤玉一。欲令其為最小之適遇。或為最大之適遇。問此二囊中之玉。宜若何分配。

〔解〕 設第一囊中所納赤玉之數為x。白玉之數為y。

則第二囊中所納赤玉之數為2−x，白玉之數為10−y。

又設所求之適遇為u。

由前例 $$u=\frac{x}{2(x+y)}+\frac{2-x}{2(2-x+10-y)}=\frac{6x-(x-1)(x+y)}{(x+y)\{12-(x+y)\}}。\quad (A)$$

惟任一囊至少有一玉。故不能 $x=y=0$. 或 $2-x=10-y=0$，

即x與y不能同時為0。

又不能於同時 $x=2$, $y=10$。

故 $0\ngtr x\ngtr 2$ 及 $0\ngtr y\ngtr 10$。

今 $x=0$ 則 (A) 為 $u=\frac{1}{12-y}$ ……………………………………(B)

$x=1$ 則 (A) 為 $u=\frac{6}{(1+y)(11-y)}$ ……………………………(C)

$x=2$ 則 (A) 為 $u=\frac{1}{2+y}$ ……………………………………(D)

於(B)及(D)其$y=1$及$y=9$。則$u=\frac{1}{11}$即極小。又於(C)其$y=0$。則$u=\frac{6}{11}$即極大。

由是得最小之適遇，其壹囊中有白玉壹，另壹囊中有赤玉貳白玉九。又最大之適遇，其壹囊中祇有赤玉壹也。

410. 多次試驗之適遇 既知壹次試驗時成就之適遇，則於x次試驗時。其間有壹次，貳次，三次，迄n次成就之適遇。亦可推得之。

何則，設壹事成就之適遇爲p。則其不成之適遇爲$1-p=q$。由408章於n次中有r次成。即有$n-r$不成。而其適遇爲p^rq^{n-r}。

惟於n中取其r次，其方法之全數爲${}_nC_r$個。

由是知於n次試驗時。其中有r次成就之適遇爲${}_nC_rp^rq^{n-r}$。

故將貳項式$(p+q)^n$展開之。其連次之項。即可爲於n次試驗時。其有n次，$n-1$次，$n-2$次，………成就之適遇，如

$$(p+q)^n=p^n+{}_nc_1p^{n-1}q+{}_nc_2p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+{}_nc_rp^rq^{n-r}+\cdots\cdots$$

其連次之項如p^n。爲於n次中有n次成就之適遇，${}_nc_1p^{n-1}q$，爲於n次中有$n-1$次成就之適遇，${}_nc_2p^{n-2}q^2$爲於n次中有$n-2$次成就之適遇，以下類推，

〔推論壹〕於n次試驗中。其成者與不成者之最大適遇，可於$(p+q)^n$展開式中求其最大項即得，

〔推論貳〕於n次試驗時。其至少有r次成就之適遇，爲

$$p^n+np^{n-1}q+\frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}p^rq^{n-r}。$$

何則。於$(p+q)^n$展開式中。其在$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}p^rq^{n-r}$以上之項，爲等於n次中有r以上次成就之適遇，其在$\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}p^rq^{n-r}$以下之項，等於n次中有r以下成就之適遇，

例　題

1. 求以四個骰子擲出得10之適遇。(即四個骰子表面點數之和爲10者)。

〔解〕骰子有六面。第壹骰子之每壹面。可與第貳骰子之任壹面配合。故貳個骰子配合。其法爲6^2。同法四個骰子配合。其法爲6^4。

各骰子記以自1迄6之點數。而於此四個骰子之表面。其點數之和爲10者。等於$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^4$展開式中$x^{10}$之係數。何則。$x^{10}$之係數。即爲於1, 2, 3, 4, 5, 6六數中取四數。而其和爲10之全數。惟$(x+x^2+x^3+x^4+^5+x^6)^4$展開式中x^{10}之係數爲80。此易於求得之。

故所求之適遇$=\frac{80}{6^4}=\frac{5}{81}$。

2. 求以貳個骰子擲出，得8之適遇。

〔解〕貳個骰子配合之法。爲有6^2種。而於$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$展開式中$x^8$之係數爲5。

由是得所求之適遇$=\frac{5}{6^2}=\frac{5}{36}$。

3. 求以貳個骰子擲出得10之適遇。

〔解〕 於$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$展開式中$x^{10}$之係數爲3。

故所求之適遇$=\frac{3}{6^2}=\frac{1}{12}$。

4. 求以三個骰子擲出得15之適遇。

〔解〕 於$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$展開式中$x^{15}$之係數爲10。

故所求之適遇$=\frac{10}{6^3}=\frac{5}{108}$。

5 甲乙貳人各擲壹骰。甲勝於乙。不能大於7與5之比，試證之。

〔證〕 甲乙各擲壹骰。即擲貳骰。其方法之數爲6^2。即36。

而貳個骰子擲出時。有六個同數不分勝負。

故甲與乙擲出同數之適遇為$\frac{1}{6}$。

而擲出不同數之適遇為$1-\frac{1}{6}$。即$\frac{5}{6}$。

甲乙貳人同時相擲。故其得勝之數為$\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}$。即$\frac{5}{12}$。

即甲勝於乙之數.不大於$1-\frac{5}{12}:\frac{5}{12}$，即$7:5$

6. 甲乙貳人各擲貳骰，求其得數各相等之適遇，

〔解〕 擲貳骰時。其擲出點數之和。有2, 3, 4,………12之十一種，故兩骰擲出各種之全數。等於次之展開式係數之和。

$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$

$$=x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+5x^8+4x^9+3x^{10}+2x^{11}+x^{12}$$。

由是各於其全數6^2即36內各擲出2, 3, 4,………… 12之適遇，為

$\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{1}{36}$。

即貳骰擲出2者。則以x^2之係數1為分子。擲出3者。則以x^3之係數2為分子。以下類推。

由是得甲乙同時擲出貳點之適遇為$\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{36}$同時擲出三點之適遇為$\frac{2}{36}\cdot\frac{2}{36}$。以下遞推，惟$\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{36}$與$\frac{2}{36}\cdot\frac{2}{36}$不能同時成立。

故甲乙擲出各相等之適遇，為

$$\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{36}+\frac{2}{36}\cdot\frac{2}{36}+\frac{3}{36}\cdot\frac{3}{36}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{36}$$

$$=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2)\div(36)^2=\frac{73}{648}。$$

7. 甲乙兩人打球，每回勝敗之適遇相等。而以先得勝六次者為全勝。今於(1)甲勝5回，乙勝4回時。(2)甲勝5回，乙勝3回時。(3)甲勝4回，乙勝2回時。求甲均得全勝之適遇。

〔解〕 若乙於(1)欲得全勝，須再勝貳回。故乙勝之適遇，為

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。

由是知乙負(即甲勝)之適遇爲$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$。

若乙於(2)欲得全勝。須再勝三回，故乙勝之適遇爲

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$。

由是知乙負(即甲勝)之適遇爲$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$。

若甲於(3)欲得全勝。其於次之貳回。甲得勝之適遇爲

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。其於次之貳回間。甲或僅勝壹回之適遇爲$\frac{1}{2}$。然此時甲勝五回。乙勝三回。其境遇與(2)同。

故此時甲勝之適遇爲$\frac{7}{8}$。

若於次之貳回間。甲皆爲負。則其適遇爲$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。然此時甲勝四回。乙勝四回。其以後甲勝貳回之適遇爲$\frac{1}{2}$。

故於(3)甲得全勝之適遇爲 $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{16}$,

甲於(3)全勝之適遇。可如次之法則求之。凡貳人共打十一次，必有壹人得勝六次。故於甲勝4回乙勝2回時。此後競爭之勝負。可於次之五回間決定之。惟於五回間。甲至少勝貳回爲全勝。

今假定甲與乙特別競爭壹事。其各人之勝適遇爲a及b。其於五回間。甲勝貳回或貳回以上之適遇，等於$(a+b)^5$展開式中。含有a^2及a^2以上之項。 即 $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3$。

由是 $a=\frac{1}{2}$。 $b=\frac{1}{2}$。則甲得全勝之適遇爲

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5+5\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)+10\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2+10\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{13}{16},$$

此與前求得之結果同。

8. 甲乙競爭。其每回勝負之適遇相等。今於爭勝間。甲須再勝貳回。乙須再勝三回。可得全體之勝。此時甲之適遇爲11對於5而勝。試證之。

〔證〕 以甲須再勝貳回。乙須再勝三回。則此後競爭之勝負。總可於次之四回間決定之。而於此四回間。甲至少勝貳回為全勝。

今假定甲及乙於特別之競爭。其各人之勝適遇為 a 及 b。其於四回間。甲勝貳回或貳回以上之適遇。等於 $(a+b)^4$ 展開式中。含有 a^2 及 a^2 以上之各項。 即 $a^4+4a^3b+6a^2b^2$。

由是 $a=\frac{1}{2}$。 $b=\frac{1}{2}$。則甲得全體之勝為

$\left(\frac{1}{2}\right)^4+4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)+6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{11}{16}$, 其負之適遇為 $1-\frac{11}{16}=\frac{5}{16}$,

故甲為 11 對於 5 而勝。

9. 甲乙競爭。其每回勝負之適遇相等。今於爭勝間甲須再勝 n 回為全勝。乙須再勝 n+1 回為全勝。此時甲之適遇。為

$1+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}$。對於 $1-\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}$ 而勝。試證之。

〔證〕 此後競爭之勝負。總可於次之 2n 回內決定之。而於此 2n 回。甲至少勝 n 回為全勝。

今假定甲乙特別競爭壹事。而兩人之勝適遇為 a 及 b。其於 2n 回間。甲勝 n 回或 n 回以上之適遇。等於 $(a+b)^{2n}$ 展開式中。含有 a^n 及 a^n 以上之各項。

即 $a^{2n}+2na^{2n-1}b+\frac{\lfloor 2n}{\lfloor 2\lfloor 2n-2}a^{2n-2}b^2+\ldots\ldots+\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}a^nb^n$。

令甲全勝之適遇為 x。乙全勝之適遇為 y。

則 $x=a^{2n}+2na^{2n-1}b+\frac{\lfloor 2n}{\lfloor 2\lfloor 2n-2}a^{2n-2}b^2+\ldots\ldots+\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}a^nb^n$。

$$y=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+1\lfloor n-1}a^{n-1}b^{n+1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+b^{2n}.$$

由是 $a=b=\frac{1}{2}$。 則 $x+y=1$,

又 $x-y=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}\cdot\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots2n}$。

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots2n}\right\},\qquad y=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots2n}\right\},$$

10. 甲乙競爭。每回甲勝之適遇爲$\frac{3}{5}$。求甲於三回間極少勝貳回之適遇。

〔解〕惟甲勝之適遇爲$\frac{3}{5}=a$，則乙勝之適遇爲$\frac{2}{5}=b$，若甲於三回間勝貳回或三回。其適遇等於$(a+b)^3$展開式內取其a^3+3a^2b。

即得所求之適遇爲$\left(\frac{3}{5}\right)^3+3\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{81}{125}$，

11. 甲乙競爭。每回甲勝之適遇爲$\frac{2}{3}$。求甲於5回間至少勝3回之適遇。

〔解〕與前例同法求之。其適遇等於$(a+b)^5$展開式中取其a^3及a^3以上之各項，而$a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$。

即 $\left(\frac{2}{3}\right)^5+5\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{5.4}{1.2}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{192}{243}$，

12. 將壹骰擲6回。求其至少擲出六點2回之適遇。

〔解〕任壹骰每擲壹回。其出六之適遇爲$\frac{1}{6}$，故其擲出貳個六點及貳個以上六點之適遇如次。

$$\left(\frac{1}{6}\right)^6+6\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)+\frac{6.5}{1.2}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{6.5.4}{1.2.3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3$$
$$+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{12281}{46656}，$$

13. 將壹個錢擲五回。求其間有三回連出表面(或裏面)之適遇，

〔解〕於第貳回及第三回所擲出者。如與第壹回同面。則此適遇爲$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。

如第貳回與第壹回同面。而第三第四第五各回與第壹回相異(即第三第四第五各回連出同面)之適遇。爲$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$。

如第貳第三第四各回與第壹回相異之適遇，爲$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$。

第貳回與第壹回相異。而第三第四第五各回與第壹回同面之適過，爲 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$。

由是得三回連出同面之適過，爲 $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$。

14. 三人輪番擲錢。其以最初出表面者爲勝，求此三人順次得勝之適過。

〔解〕甲乙丙三人。最初得勝之各適過爲同一。而求最初甲勝，次乙勝。又次丙勝之適過如次，

以任何壹人擲錢，出表面之適過。(迄任何回擲出表面適過之數)爲 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\cdots\cdots$ 至無窮

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\right)=1,$$

故甲乙兩人。輪番擲錢出表面之適過，可將上之無窮級數。取其相間之各項，即得

$$甲=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots\right)=\frac{2}{3},$$

$$乙=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots\right)=\frac{1}{3}。$$

甲乙丙三人。輪番擲錢出表面之適過，可將上無窮級數。取其每相間貳項之各項，即得

$$甲=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots\cdots\right)=\frac{4}{7},$$

$$乙=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\cdots\cdots\right)=\frac{2}{7},$$

$$丙=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\cdots\cdots\right)=\frac{1}{7}。$$

由是順次得所求之適過爲 $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{7}$ 及 $\frac{1}{7}$。

411. 豫期 (Expectation) 欲得何種權利，而希望某事之成就。此成就適過之值。謂之豫期。

例如能成就某事。可得銀壹圓。其豫期即從某事成就之適遇如何而定其值。

設某事成就時。所得之金額爲M，其某事成就之適遇爲$\frac{a}{a+b}$。

則其豫期爲$M\times\frac{a}{a+b}$。

何則，設於壹次試驗時。所得豫期之金額爲E。則E(a+b)爲於a+b回試驗時。所得豫期之金額。而事成就之適遇爲$\frac{a}{a+b}$，其值即將M平分爲a+b分。而取其a分。故於a+b回試驗其豫期之金額爲Ma，

由是$E(a+b)=Ma$。　　　$\therefore\quad E=M\times\frac{a}{a+b}$。

即其所豫期者。等於以金額乘適遇。

例　題

1. 囊中有白玉五。黑玉七。令人從此囊內取壹玉。若取出者爲黑，則給與英金壹[先令]。若取出者爲白。則給與五[先令]，求其所豫期。

〔解〕出黑之適遇爲$\frac{7}{12}$，故其豫期爲1[先令]$\times\frac{7}{12}=7$[本士]。

出白之適遇爲$\frac{5}{12}$，故其豫期爲5[先令]$\times\frac{5}{12}=2$[先令]1[本士]。

由是所求豫期之總 =7[本士]+2[先令]1[本士]

=2[先令]8[本士]，

2. 囊中有[鎊]幣貳枚，貳[先令]半之幣3枚。[先令]幣7枚，令人從此囊內。(1)祇許取出壹枚，(2)祇許取出貳枚，各求其所豫期。

〔解〕三種貨幣之各值。爲20[先令]，$2\frac{1}{2}$[先令]，1[先令]。

(1) 貨幣之數凡十貳個。故取壹個其各種之適遇。順次得$\frac{2}{12}$，$\frac{3}{12}$及$\frac{7}{12}$。

由是所求之豫期。爲$\left(20\times\frac{1}{6}+2\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+1\times\frac{7}{12}\right)$[先令]$=4$[先令]$6\frac{1}{2}$[本士]。

(2) 從20[先令]，$2\frac{1}{2}$[先令]，1[先令]三種貨幣中。取出貳枚，其值不外乎40[先令]，$22\frac{1}{2}$[先令]，21[先令]，5[先令]，$3\frac{1}{2}$[先令]及2[先令]六種。

〔第壹〕其值爲40[先令]者，即取出[鎊]幣貳枚，而其適遇可由409章例題3而得$\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}=\frac{1}{66}$。

〔第貳〕其值爲$22\frac{1}{2}$[先令]者。即取出[鎊]幣及$2\frac{1}{2}$[先令]之幣各壹枚。而此貳種內有先出後出貳法。故其適遇爲$2\times\frac{2}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{6}{66}$。

〔第三〕其值爲21[先令]者。即出[鎊]幣及[先令]幣各壹枚，故同法得$2\times\frac{2}{12}\times\frac{7}{11}=\frac{14}{66}$。

〔第四〕其值爲5[先令]者。即取出$2\frac{1}{2}$[先令]之幣貳枚。故其適遇爲$\frac{2}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{3}{66}$。

〔第五〕其值爲$3\frac{1}{2}$[先令]者，即取出$2\frac{1}{2}$[先令]之幣及[先令]幣各壹枚，故其適遇爲$2\times\frac{3}{12}\times\frac{7}{11}=\frac{21}{66}$。

〔第六〕其值爲2[先令]者。即取出[先令]幣貳枚，故其適遇爲$\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}=\frac{21}{66}$。

由是得所求之豫期。爲

$40\times\frac{1}{66}+22\frac{1}{2}\times\frac{6}{66}+21\times\frac{14}{66}+5\times\frac{3}{66}+3\frac{1}{2}\times\frac{21}{66}+2\times\frac{21}{66}=9$[先令]1[本士]。

3. 貳人交互擲錢,豫約初出表面者。給與壹[先令]。問貳人之豫期如何。

〔解〕 惟次擲者。望初擲者不出表面。猶可得勝。否則卽已見敗,故初擲者之適遇,等於次擲者適遇之貳倍,

由是初擲者之適遇爲$\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$, 次擲者之適遇$=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$。

∴ 所求之豫期爲$\frac{2}{3}\times 12$ [本士]$=8$[本士]。

及 $\frac{1}{3}\times 12$ [本士]$=4$[本士]。

4. 貳人交互擲壹骰,豫約先出六者。得11[先令]。問各人之豫期如何。

〔解〕 出六之適遇爲$\frac{1}{6}$。不出六之適遇爲$\frac{5}{6}$。

由是得初擲者之適遇爲$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4+\cdots\cdots$至無窮,

次擲者之適遇爲 $\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5+\cdots\cdots$至無窮。

則初擲者與次擲者之比。若6與5。

由是將11[先令]分爲貳分。其比若6:5。則得6[先令]。卽所求之豫期。

412. 反適遇 (Inverse Probability) 設有某事。可由種種原因而成,今於事之已成時。欲於種種原因中。決定此事從何壹原因而成,其決定壹原因之適遇,卽謂之反適遇,

玆示反適遇之例如次。

設從兩囊之任一囊內取出黑玉1。但知第壹囊有黑玉2。白玉7。第貳囊有黑玉5。白玉4,求其所取之黑玉出自第壹囊之適遇,

假定於兩囊中各取出玉N個。則從第壹囊內出黑之數,平均當有$\frac{2}{9}$N個。從第貳囊中出黑之數,平均當有$\frac{5}{9}$N個,

由是從兩囊內取出黑玉之個數爲$\frac{2}{9}N+\frac{5}{9}N$。而其中從第壹囊取出黑玉之個數爲$\frac{2}{9}N$個。

故出自第壹囊之適遇，爲$\frac{2}{9}N\div\left(\frac{2}{9}N+\frac{5}{9}N\right)=\frac{2}{7}$。

壹般之命題 設從n個原因中。欲決定成就某事之壹原因，而各原因數之適遇爲$P_1,P_2,\cdots\cdots P_n$。但此等原因。不能同時成立。(即某事僅能由壹原因而成。不能由於貳原因，或貳以上原因而成，則某事必從$P_1,P_2,P_3,\cdots\cdots\cdots P_n$中之壹原因而成。若各原因能成某事之適遇。順次爲$p_1,p_2,\cdots\cdots p_n$，則第r原因，能成某事之適遇。爲$P_rp_r\div(P_1p_1+P_2p_2+\cdots\cdots+P_np_n)$。

〔證明〕假令試驗多至N次。則第壹原因之數。當有NP_1次。而事之成於第壹原因者。有NP_1p_1次。同法事之成於第貳原因者。有NP_2p_2次。以下準此。

由是其事之成於第r原因者。當有NP_rp_r次。而此NP_rp_r次，爲出全數$N(P_1p_1+P_2p_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+P_np_n)$內而生。故第r原因之適遇爲

$$P_rp_r\div(P_1p_1+P_2p_2+\cdots\cdots+P_np_n) \qquad (A)$$

略記之即爲 $\frac{P_rp_r}{\sum Pp}$。

例題

1. 置黑白貳種玉於三囊中。第壹囊有白貳黑三，第貳囊有白四黑壹。第三囊有白三黑七。今於無心中從任壹囊內。取出壹個。試求決其從第三囊內取出黑玉之適遇。

〔解〕囊有三。故出黑玉原因之適遇爲$P_1=P_2=P_3=\frac{1}{3}$。

又從P_1,P_2,P_3出黑玉之適遇，順次爲 $p_1=\frac{3}{5}$, $p_2=\frac{1}{5}$, $p_3=\frac{7}{10}$,

由是得所求之適遇爲$\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}}=\frac{7}{15}$。

2. 但知囊中有玉四塊，曰白，曰黑，其適遇相等。今於無心時，取出白玉一。其於囊中含有白三黑一之適遇如何，

〔解〕 此囊中含有玉四塊，其各種配合。有如(1) 白 4。(2) 白 3 黑 1。(3) 白 2，黑 2。(4) 白 1，黑 3。(5) 黑 4。五類，

由 410章。此各適遇。順次得$\frac{1}{16}$，$\frac{4}{16}$，$\frac{6}{16}$，$\frac{4}{16}$。

又從其各種配合出白之適遇，順次得 1，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，0。

由是得所求之適遇，爲$\dfrac{\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{16}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{16}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{16}}=\frac{3}{8}$。

413. 證據之適遇 (Probability of Testimony) 卽關於證據人信用之適遇也，

此種解例。視次之解例。卽可知之。

例　題

1. 囊中有黑玉 99 塊。白玉 1 塊，於無心中。取出一玉時。旁有人云。所出之玉爲白。而此人之證言。十次中有九次確實。求其果爲白之適遇。

〔解〕 玉爲白之適遇爲$\frac{1}{100}$。不爲白之適遇爲$\frac{99}{100}$。

又證言確實之適遇爲$\frac{1}{100}\times\frac{9}{10}$，不確實之適遇爲$\frac{99}{100}\times\frac{1}{10}$，

故由412章，所求之適遇爲$\dfrac{\frac{1}{100}\times\frac{9}{10}}{\frac{1}{100}\times\frac{9}{10}+\frac{99}{100}\times\frac{1}{10}}=\frac{1}{12}$。

2. 囊中置百簽。簽上記以自1迄百之號數。今於無心中。取出壹簽。旁有人云。所出者爲某號簽，而此證言十有九中。其出此簽之適遇如何。

〔解〕 試驗多至1000N回時。此某號之簽。應出10N回，而以其中9N爲此人確當之證言。又此某號之簽不出之過合。應有990N回。而以其中99N。爲此人不當之證言。

但此問題與前例1異。前例祗有玉之黑白貳種。證言者祗有誤黑爲白而已，於本例有自1迄百各號數之簽。其誤處有99端，此所以與前例相異也，

故出某簽時。其證言之不確者。爲99N÷99，即N回，

於前解得此人證言之確實者，爲9N回，此又解得此人證言之不確者N回。

由是得所求之適遇爲$\frac{9N}{9N+N}$。即 $\frac{9}{10}$，

3. 甲之證言4次。可中3次。乙之證言6次。可中5次。今囊中有白玉1，黑玉9，於無心中取出壹玉。甲乙二人皆云取出者爲白玉。求其出白玉之適遇。

〔解〕 惟以此出白玉之適遇爲 $\frac{1}{10}$。故甲乙二人皆云出白玉，其正確之適遇爲$\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$。

又出黑玉之適遇爲$\frac{9}{10}$，故甲乙二人皆云白玉，其不當之適遇爲 $\frac{9}{10}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}$。

由412章得所求之適遇爲 $\dfrac{\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}}{\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}}=\frac{5}{6}$。

4. 甲之證言4次可中3次，乙之證言6次可中5次，今囊中有白玉壹塊，各異色之玉9塊，於無心中取出壹玉。甲乙二人皆云取出者爲白玉，求其出白玉之適遇。

〔解〕惟以此出白玉之適遇爲$\frac{1}{10}$，故甲乙二人皆云出白玉。其正確之適遇爲$\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{16}$，不出白玉之適遇爲$\frac{9}{10}$。而甲證言所誤之適遇爲$\frac{1}{4}$。但甲誤言各色之玉有9。故甲證言所誤之適遇當爲$\frac{1}{4}\times\frac{1}{9}$。同法乙證言所誤之適遇當爲$\frac{1}{6}\times\frac{1}{9}$。故甲乙二人共誤言出白之適遇爲$\frac{9}{10}\times\frac{1}{4\times9}\times\frac{1}{6\times9}=\frac{1}{2160}$。

由是所求之適遇爲$\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+\frac{1}{2160}}=\frac{135}{136}$。

5. 甲乙丙三人之各證言。甲4次可中3次。乙5次可中4次。丙7次可中6次。今有某事成就之適遇爲$\frac{1}{2}$。當試驗時。甲乙云成。丙云不成。問此事果能成就之適遇如何。

〔解〕云此事爲成者。甲證之適遇爲$\frac{3}{4}$。乙證之適遇爲$\frac{4}{5}$。丙證之適遇爲$1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}$。

由是此事成之適遇爲$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}$。

又此事之不成者。其各人證言之適遇爲甲$\frac{1}{4}$，乙$\frac{1}{5}$，丙$\frac{6}{7}$。

由是此事不成之適遇爲$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{6}{7}$。

$\therefore$ 所求之適遇$=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{6}{7}}=\frac{2}{3}$。

414. 雜例 示以次之諸例。即爲本編之結局。但於是編所述之適遇法。未能詳備。如欲深爲研究。可參考英國學術辭書

(Encyclopaedia Britannica)及突翰多爾氏所著適遇法之數學歷史(History of the Mathematical Theory of Probability)。

〔第壹例〕囊中容玉n塊，其所容之玉，或全非白，或白1，或白2，…………或全白，此各種之適遇相同。今從此中每次取出壹塊，求得連續r次爲白玉之適遇，但壹玉取出後，不得再入囊內。

〔解〕囊內所容白玉之塊數，可爲0,1,2………n。共有$n+1$種之不同，故決定此中有白玉若干塊之適遇爲$\frac{1}{n+1}$。今以S表從0迄n之正整數。而易本題爲囊內含有白玉S個與他玉$n-S$個，求其連續r次取出白玉之適遇。

其初次取出白玉之適遇爲$\frac{S}{n}$次，則囊內存玉$n-1$。而含有白玉$S-1$，故第二次取出白玉之適遇爲$\frac{S-1}{n-1}$。同法推之，第三次取出白玉之適遇爲$\frac{S-2}{n-2}$。至r次取出白玉之適遇爲$\frac{S-r+1}{n-r+1}$。

故n個中含有S個白玉，其連續r次取出白玉之適遇爲

$$\frac{S(S-1)(S-2)\cdots\cdots(S-r+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)},$$

惟S爲自0迄n之正整數，故將上之分數，以$n, n-1, n-2, \ldots\ldots 2, 1, 0$逐次代其S相加而以$\frac{1}{n+1}$乘之，即得所求之適遇，爲

$$\frac{1}{n+1}\left\{\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}+\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r)}{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\cdots\cdots+\frac{r(r-1)\cdots\cdots 1}{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}\right\}。$$

$$=\frac{1}{(n+1)n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}\{1.2\cdots\cdots r+2.3\cdots\cdots(r+1)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots+(n-r+1)\cdots\cdots(n-1)n\},$$

但由318章上之分子，即

$$1.2\cdots\cdots r+2.3\cdots\cdots(r+1)+\cdots\cdots+(n-r+1)\cdots\cdots(n-1)n$$
$$=\frac{(n-r+1)(n-r+2)\cdots\cdots n(n+1)}{r+1}.$$

由是得所求之適遇爲$\frac{1}{r+1}$。此與囊中之全數n不相關，故囊內之玉。任爲何數，其答數相同。

〔推論〕如前從囊中取出r塊白玉後。又更取出白玉壹塊，其適遇可逕由前之結果求得之。

何則，設試驗多至於n回（或設有n囊）則取出r塊白玉之適遇爲$\frac{N}{r+1}$種。（前之結果$\frac{1}{r+1}$。即爲試驗一回之適遇）又取出r+1塊白玉之適遇爲$\frac{N}{r+2}$。而連得r+1塊白玉之回數，包含於連得r塊白玉回數之內。故得所求之適遇$=\frac{N}{r+2}\div\frac{N}{r+1}=\frac{r+1}{r+2}$，

〔第貳例〕甲乙二人爲遊戲競爭。甲持a籌，乙持b籌，以記勝負。負者與勝者壹籌，迨壹人取盡他壹人之籌爲全勝。而於每回之勝負。甲勝之適遇比乙，若p：q，求甲乙各得全勝之適遇，

〔解〕設於競爭之中間。甲持n籌而令其全勝之適遇爲u_n。

因甲得勝之適遇爲$\frac{p}{p+q}$。故甲於次回得全勝之適遇爲u_{n+1}

若次回得負。其適遇爲$\frac{q}{p+q}$。故甲於次回得全勝之適遇爲u_{n-1}

由是 $u_n=\frac{p}{p+q}u_{n+1}+\frac{q}{p+q}u_{n-1}$，

$\therefore\quad pu_{n+1}-(p+q)u_n+qu_{n-1}=0$。

由第廿五編循環級數上之方程式，可令等於$\frac{A+Bx}{p-(p+q)x+qx^2}$之展開式。其$x^n$之係數爲$u_n$可知。而其A，B爲所取適當之値，

乃由分項分數爲$\frac{A+Bx}{p-(p+q)x+qx^2}=\frac{C}{p+qx}+\frac{D}{1-x}$。

由是x^n之係數$=D+\frac{c}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n=u_n$，

今試求C，D之値，惟以甲全負時$u_0=0$，甲全勝時$u_{a+b}=1$。

故得如次 $0=D+\frac{C}{p}$，$1=D+\frac{C}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}$，

因求得$C=p\div\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}-1\right\}$, $D=1\div\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right\}$,

$u_n=\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n\right\}\div\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right\}$。

由是甲得全勝之適遇爲$\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a\right\}\div\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right\}$,

同法乙得全勝之適遇爲$\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^b\right\}\div\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right\}$。

例題四十一

1. 甲乙二人交互擲二骰。以得八者爲勝。甲先擲時。求各勝之適遇,

〔解〕 擲貳骰時,其第壹骰與第貳骰點數之和爲8者,有2+6 3+5, 4+4, 5+3, 6+2五個方法。

而將貳骰擲出各點數所有之方法。爲等於$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$各係數之和36。

由是擲出8之適遇爲$\frac{5}{36}$。不出8之適遇爲$\frac{31}{36}$,

故甲第壹勝之適遇爲

$\frac{5}{36}+\frac{5}{36}\left(\frac{31}{36}\right)^2+\frac{5}{36}\left(\frac{31}{36}\right)^4+\cdots\cdots$至無窮$=\frac{36}{67}$,

又乙第貳勝之適遇爲

$\frac{5}{36}\left(\frac{31}{36}\right)+\frac{5}{36}\left(\frac{31}{36}\right)^3+\frac{5}{36}\left(\frac{31}{36}\right)^5\cdots\cdots$至無窮$=\frac{31}{67}$。

2. 甲乙丙三人交互擲三骰,以得六者爲勝,求甲乙丙順次得勝之適遇,

〔解〕 擲三骰得6方法之數等於$(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^3$展開式中$x^6$之係數。而此係數爲10。

由是得6之適遇爲$\frac{10}{6^3}$。

甲勝之適遇，爲$\frac{10}{6^3}+\frac{10}{6^3}\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^3+\frac{10}{6^3}\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^6+\cdots\cdots$至無窮$=\frac{11664}{33397}$，

乙勝之適遇，爲

$$\frac{10}{6^3}\left(1-\frac{10}{6^3}\right)+\frac{10}{6^3}\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^4+\frac{10}{6^3}\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^7+\cdots\cdots\text{至無窮}=\frac{11124}{33397}，$$

丙勝之適遇，爲

$$\frac{10}{6^3}\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^2+\frac{10}{6^3}\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^5+\frac{10}{6^3}\left(1-\frac{10}{6^3}\right)^8+\cdots\cdots\text{至無窮}=\frac{10609}{33397}。$$

3. 將白玉3黑玉5入於囊中。甲乙丙三人順次取出壹玉。以取出白者爲勝。則其各適遇之比，順次若27：18：11.(但取出後，不再入囊)試證之。

〔證〕於初之幾次取出者或非白玉。然至第五次以後，必有白玉取出，

由是自第壹迄第六次出白玉之適遇，順次爲$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}$，$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}$。$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}$，$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$，$\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$，由是三人適遇之比。爲

$$\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}\right):\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\right):\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\right)。$$

4. 壹骰擲至50回。其間擲出六點之回數最容易得者有幾回，

〔解〕出六之適遇爲$\frac{1}{6}$。不出六之適遇爲$\frac{5}{6}$。

故擲至50回時。其間擲出六者或0回，或1回，或2回，或3回，…或50回。此擲出六所有之回數。同於$\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)^{50}$展開式中含有$\left(\frac{1}{6}\right)^0$，$\left(\frac{1}{6}\right)^1$，$\left(\frac{1}{6}\right)^2$，$\cdots\cdots\cdots\cdots\left(\frac{1}{6}\right)^{50}$，各項$\frac{1}{6}$之指數，

而於50回間，擲出六者，其最易得之適遇。可將上之展開式。求其最大項，

由是以$\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\right)^{50}$之最大項爲$r+1$。則$\dfrac{50-r-1}{r}\cdot\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}}>1$。

$\therefore\ r=8\frac{1}{2}$ 即 $r+1=9$。即知第9項爲最大項。其 $\frac{1}{6}$ 之指數爲8。

由是得出六最易之回數。當有8回。

5. 貳骰擲出大於七點之適遇，等於小於七點之適遇，其證如何。

〔證〕於 $(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2$ 展開式中。含有 x^7 之項爲中項。而在中項以上之諸項。與在中項以下之諸項，其係數相等，故如題所云。

6. 筩內有三簽。簽上記以1,2,3號數。今無心取出壹簽。重復入於筩內而取之，如是取至四次。則前後取出各簽號數之和，其偶數之適遇。與奇數適遇之比，若41∶40,試證之。

〔證〕奇數之簽有2。偶數之簽有1。故每壹次間。出奇數之適遇爲 $\frac{2}{3}$。出偶數之適遇爲 $\frac{1}{3}$。

而四次號數之和爲奇數者。或三簽爲奇數。壹簽爲偶數者，或以三簽爲偶數。壹簽爲奇數者。

由是於 $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^4$ 之展開式。

其出奇數之適遇 $=4\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)+4\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{40}{81}$。

其出偶數之適遇 $=\left(\frac{2}{3}\right)^4+6\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{41}{81}$，

故出偶數與出奇數各適遇之比。爲 $\frac{41}{81}:\frac{40}{81}$ 即 41∶40。

7. 筩中入百簽。簽上記以自1迄百各號數。乃於無心中取出貳簽，其貳號之和得奇數之適遇。比於得偶數之適遇，若50∶49。

〔證〕百簽內奇偶各五十。於奇數之簽中取出貳簽之方法。爲 ${}_{50}C_2=\frac{50.49}{1.2}$。於偶數之簽中取出貳簽之方法。亦爲 $\frac{50.49}{1.2}$。

而於百簽中。取出貳簽方法之數爲 ${}_{100}C_2=\frac{100.99}{1.2}=50.99$。

惟以兩奇數及兩偶數之各和，皆爲偶數。故凡兩簽之和爲偶

數者之適遇爲 $\frac{1}{50.99}\left(\frac{50.49}{1.2}+\frac{50.49}{1.2}\right)=\frac{49}{99}$,

又兩簽之和爲奇數者之適遇 $=1-\frac{49}{99}=\frac{50}{99}$,故出奇數與偶數之比若50 : 49。

8. 有n簽記以自1迄n之號數,令人於無心中。取出貳簽。乃憑其取出貳號之相乘數。給付以錢。問其人得錢之豫期如何,

〔解〕 設p,q爲任意之兩數。今從n簽中。取出貳簽方法之數。有 ${}_nC_2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 個。

而任意貳簽之相乘積得pq,其適遇爲 $\frac{pq}{\frac{1}{2}n(n-1)}=\frac{2pq}{n(n-1)}$,

故其豫期爲 $\frac{2\sum pq}{n(n-1)}$ 錢。

但由題意p,q爲自1迄n各異之數,而 $\sum pq$ 爲自1迄n兩個各異之數之組合。

$$\therefore\quad 2\sum pq=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$$

$$=\frac{n}{2}(n+1)^2-\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)=\frac{1}{12}n(n-1)(3n+2)(n+1),$$

由是所求之豫期,爲 $\frac{2\sum pq}{n(n-1)}=\frac{1}{6}(n+1)(3n+2)$ 錢。

9. 既知壹事於n年內。共有n回發起。則其於特別之壹年間,此事不發起之適遇爲 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$。試證明之。

〔證〕 於n年內有壹年此事不發起之適遇爲 $\frac{n-1}{n}$。即 $1-\frac{1}{n}$。

貳年不發起之適遇。爲 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$。三年不發起之適遇爲 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^3$ 以下準此。

而此事之發起。無論何壹年皆可。

故所求之適遇爲 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$。

10. 於無心中將p個物分配p個人不足。則其中之壹人未經受取之適遇為$\frac{p^p-\lfloor p}{p^p}$。試證明之。

〔證〕 本題於無心中分配不足時。求其中之壹人。不得壹物之適遇。

則於無心中分配時。於p個人中。至多可有p−1個人。不得壹物者。

設p人為A, B, C,………………則$(A+B+C+\cdots\cdots)^p$之各項。皆為p次式。而A, B, C,……………之指數。即所以示A,B,C,………各人受取之物數。而上式為p項式，故此p個人共受取p物之方法有p^p個。

又A, B, C,…………各壹人各得物之方法。由排列法。得${}_pP_p=\lfloor p$。

故p個人中不得受取壹物之遇合為$p^p-\lfloor p$。

由是所求之適遇為$\frac{p^p-\lfloor p}{p^p}$。

11. 甲作信郵送與乙。乙得甲信後必有還信。今通信m次中。約有壹次被郵局失誤。則乙得接收甲信之適遇為$\frac{m-1}{2m-1}$。試求其證。

〔證〕 甲與乙信多至m^2a次時。其被郵局之失誤者。為有ma次。故乙得接收甲信之次數為$ma(m-1)$。

由是甲信與乙之還信。共數為$m^2a+ma(m-1)$。即$ma(2m-1)$。其中乙接收$ma(m-1)$次。

故所求之適遇為$\frac{ma(m-1)}{ma(2m-1)}=\frac{m-1}{2m-1}$。

12. 甲囊內有壹鎊之金幣與一先令之銀幣各3枚。於無心中取出四枚。納入於乙空囊。又於乙囊內取出貳枚，而為金幣。則此乙囊內所存。其豫期當為11〔先令〕6〔本士〕。其證若何

〔證〕 從乙囊中取出貳個鎊幣。則乙囊中所入之四幣。為鎊幣3枚，與先令幣1枚。或為鎊幣與先令幣各貳枚。

而令入於乙囊內所有鎊幣3枚。先令幣1枚之適遇爲P_1，惟於甲囊中鎊幣與先令幣各3枚內。取出4枚方法之數爲

${}_6C_4=\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}=15$。而其中取出鎊幣3枚。與先令幣1枚方法之數

爲${}_3C_3\times{}_3C_1=\frac{3.2.1}{1.2.3}\times\frac{3}{1}=3,\qquad\therefore\quad P_1=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$。

又令入於乙囊內所有鎊幣與先令幣各貳枚之適遇爲P_2。而從甲囊中鎊幣與先令幣各3枚內，取出鎊幣與先令幣各貳枚方法之數爲${}_3C_2\times{}_3C_2=\frac{3.2}{1.2}\times\frac{3.2}{1.2}=9,\qquad\therefore\quad P_2=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$。

又於鎊幣3枚。先令幣1枚內。取出鎊幣2枚。設其適遇爲p_1，則

$p_1=\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$。

又於鎊幣與先令幣各貳枚內取出鎊幣2枚。設其適遇爲p_2，則

$p_2=\frac{{}_2C_2}{{}_4C_4}=\frac{1}{6}$。

故有鎊幣3枚。先令幣1枚，其由**412**章實計其適遇如次。

$\frac{P_1p_1}{P_1p_1+P_2p_2}=\frac{1}{2}$。

又有鎊幣與先令幣各貳枚。實計其適遇如次。$\frac{P_2p_2}{P_1p_1+P_2p_2.}=\frac{1}{2}$。

而於乙囊內取出鎊幣2枚。其餘所存者。爲鎊幣與先令幣各壹枚，即21〔先令〕或爲2〔先令〕，

由是所求之豫期爲$\frac{1}{2}\times21$〔先令〕$+\frac{1}{2}\times2$〔先令〕。即11〔先令〕6本士〕。

13. 甲囊內有鎊幣與先令幣各4枚，無心取出4枚，另入乙空囊，即於乙囊內取出貳枚而爲鎊幣者，則甲囊內所存之豫期爲$29\frac{1}{3}$〔本士〕，試證之。

如前例用同法求其所存全額之豫期。

從乙囊內取出2枚而爲鎊幣者，則乙囊內所有之貨幣或爲鎊幣4枚，或爲鎊幣3枚，與先令1枚，或爲鎊幣與先令幣各2枚。

由前例 $P_1=\frac{{}_4C_4}{{}_8C_4}=\frac{1}{70}$, $P_2=\frac{{}_4C_3\times{}_4C_1}{{}_8C_4}=\frac{16}{70}$, $P_3=\frac{{}_4C_2\times{}_4C_2}{{}_8C_4}=\frac{36}{70}$,

又 $p_1=\frac{{}_4C_2}{{}_4C_2}=1$, $p_2=\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$, $p_3=\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$。

各實計其適遇爲

$$\frac{P_1p_1}{P_1p_1+P_2p_2+P_3p_3}=\frac{1}{15},\quad \frac{P_2p_2}{P_1p_1+P_2p_2+P_3p_3}=\frac{8}{15},\quad \frac{P_3p_3}{P_1p_1+P_2p_2+P_3p_3}=\frac{6}{15}。$$

而於乙囊中取出鎊幣2枚後。其中所存爲40〔先令〕，或爲21〔先令〕。或爲2〔先令〕。

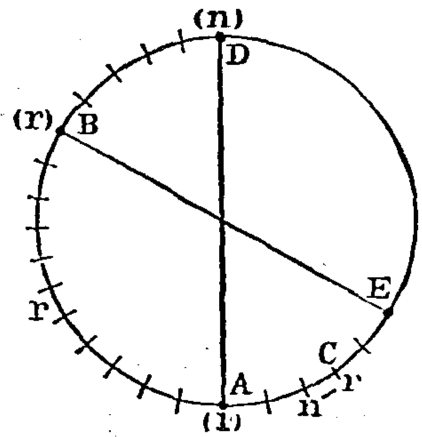
∴ 乙囊中所存之豫期，爲

$\frac{1}{15}\times40$〔先令〕$+\frac{8}{15}\times21$〔先令〕$+\frac{6}{15}\times2$〔先令〕$=14\frac{2}{3}$〔先令〕。

若以最初取出之2〔鎊〕，加於前所得之豫期$14\frac{2}{3}$〔先令〕。得$54\frac{2}{3}$〔先令〕。從4〔鎊〕4〔先令〕減去$54\frac{2}{3}$〔先令〕。其餘爲$29\frac{1}{3}$〔先令〕。即得所求。

14. 於圓周上無心設三點，則其三點皆在於半圓周上之適遇爲$\frac{3}{4}$。試求其證。

〔證〕 先無心設A點於圓周上。從A點過圓心引直徑AD。又無心設二點B及C於圓周上，此二點或皆在於AD之右(一)，或皆在於AD之左(貳)，或B點在AD之左。C點在AD之右(三)，或B點在AD之右。C點在AD之左(四)，即無心設二點B及C時，可有四個方法。



由是B及C貳者在AD同傍之適遇 $=\frac{1}{2}$。 (a)

又B及C在AD異傍者，可將全圓等分爲2n分。令其各部分爲極小。故B常在於分點之上，如圖以A爲起點之處，而B點之所在。

爲在第r點，乃從B點過圓心。引直徑BE。則AE所有之部分爲 $n-r$。而C若在於AE弧之內。則A,B,C三點在於半圓周上。故凡B點在第r分點時。A,B,C三點在於半圓周上之適遇爲 $\frac{n-r}{n}$。惟欲使B點在第r分點。即在於半圓周ABD上，其適遇爲 $\frac{1}{n}$。

由是B, C在AD異傍。而A,B,C在半圓周上之適遇，爲

$$\frac{n-r}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{n-r}{n^2}。$$

而所取之r爲從1迄n之數。故B,C在AD異傍而A,B,C在半圓周上，其一切之適遇爲

$$\Sigma\frac{n-r}{n^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{n-1}{n^2}$$

$$=\frac{1}{n^2}\{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\times\frac{n-1}{2}(1+n-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}。$$

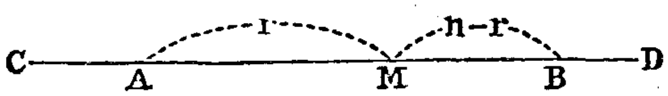
因 $n=\infty$ $\qquad =\frac{1}{2}$。

但B,C二點在AD之左或右，其適遇爲 $\frac{1}{2}$。故三點在半圓周上之適遇 $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。 (b)

由是(a)及(b)相加爲 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$。即得本題之證。

15. 無心截棒，其壹部分不大於他貳部分之和，其適遇如何，

〔解〕棒之長爲CD。以M爲其中點，分CD爲2n等分。(但n爲至大之數)。



而以M爲起點之處，於其任意之點，即第r點之處A。爲所截之分點。則棒之第壹截分點之適遇爲 $\frac{1}{2n}$ 而其所截之處，在於M

之左或右。故所截之分點A。其適遇爲$\frac{2}{2n}$。

又於M之右方第n－r分點之處記以B。則AB等於棒之長CD之半。

又第貳所截之分點若在於BM之間。則其一截分比他貳截分之和爲小。且於此三截分內任何貳截分之和。比他之壹截分爲大。

而第貳截分點在於M之間。其適遇爲$\frac{n-r}{2n}$。

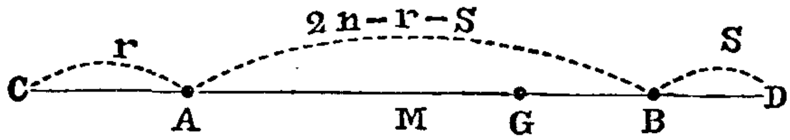
由是r爲從1迄n之各數。如前例得

$$\sum\frac{2}{2n}\times\frac{n-r}{2n}=\sum\frac{n-r}{2n^2}=\frac{1}{2n^2}(1+2+3+\cdots\cdots+n-1)$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}(\because\ n=\infty)=\frac{1}{4}.$$

16. 無心截棒爲四部分。其中之任壹部分不大於他三部分之和。試求其適遇。

〔解〕 如題將棒截爲四部分。其所截之處任取三點。若此三點在棒之中央M之同傍。則此三截分之和。小於他之壹截分。而其適遇爲$\frac{1}{4}$。 (α)



又將三截分點分置於M之左右。或爲三截分點中之壹點。在M之左。其他貳點在M之右者。或爲三截分點中之貳點在M之左。其他壹點在M之右者。惟有貳截分點在M之同傍。可交換其位置。故此三截分點分置M之左右。其方法有四種。而其適遇爲$\frac{3}{4}$。 (β)

將棒之長CD分爲2n等分。(但n爲至大之數)截M之左於A。截M之右於B。而A爲自C之第r分點。B爲自D之第s分點。但第三

分點G。在於A, B之間，則此壹截分大於棒之半部分之適遇爲$\frac{2n-r-s}{n}$。

而其兩端所截之分點A, B。自C之第r分點及自D之第s分點。其適遇各爲$\frac{1}{n}$。

而一端截於A。同時其他之壹端截於B。此其適遇爲$\frac{1}{n^2}$。

如前所述。其一截分大於棒之半部分。則此壹截分大於其他三截分之和。而此適遇可如前法。於$\sum\frac{1}{n^2}\times\frac{2n-r-s}{2n}$。其s爲自1迄n－r之數。

故 $\sum\frac{2n-r-s}{2n^3}=\frac{1}{2n^3}\left\{n+(n+1)+(n+2)+\cdots\cdots+(2n-r-1)\right\}$

$=\frac{(n-r)(3n-r-1)}{4n^3}$。

又其r爲自1迄n之數。

故 $\sum\frac{(n-r)(3n-r-1)}{4n^3}$

$=\frac{1}{4n^3}\left\{1.2n+2(2n+1)+3(2n+2)+\cdots\cdots+(n-1)(3n-2)\right\}$

$=\frac{1}{4n^3}\left\{2n(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{n-1})+1.2+2.3+\cdots\cdots+(n-2)(n-1)\right\}$

$=\frac{1}{4n^3}\left\{n^2(n-1)+\frac{n}{3}(n-1)(n-2)\right\}=\frac{1}{4}\left\{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$。

因$n=\infty$。則前之值$=\frac{1}{4}\left\{1+\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$。……………………………$(\gamma)$

由是三截分點在M之左右。其適遇從(β) (γ)得$\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$。加$(\alpha)$得$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$……………………………………………………………$(\delta)$

上所得之(δ)。爲棒之三截分之和比他壹截分爲小之全適遇。由是棒之三截分之和。比他壹截分爲大之適遇爲$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$。

17. 無心取4n邊之正多角形之三邊。引長之以包括其多角

形而得銳角三角形。則其適遇爲$\frac{(n-1)(n-2)}{(4n-1)(4n-2)}$。試求其證。

〔證〕 正4n多角形之各角，爲$\frac{8nR\llcorner-4R\llcorner}{4n}=\left(2-\frac{1}{n}\right)R\llcorner$，今取三邊作三角形，其第壹邊與第貳邊之交角。要不大於直角者。乃以所取之第壹邊爲此正多角形之首邊，以次計至第m之壹邊，取爲第貳邊。則此兩邊之引長線。與多角形之m－2邊，成爲m凹多角形。其總角爲$(2m-4)R\llcorner$。設此兩邊引長線之交角爲θ，則

$$\theta=(2m-4)R\llcorner-2\left\{2R\llcorner-\left(2-\frac{1}{n}\right)R\llcorner\right\}-(m-3)\left\{4R\llcorner-\left(2-\frac{1}{n}\right)R\llcorner\right\}$$

$$=\left(2+\frac{1}{n}-\frac{m}{n}\right)R\llcorner,$$

$$\therefore\quad \left(2+\frac{1}{n}-\frac{m}{n}\right)R\llcorner \not> R\llcorner,\quad \therefore\quad m\not< n+1。$$

故取第貳邊與第壹邊距離最少者。必取其從第壹邊爲始之第m，即第n+1之壹邊。

今定第貳邊。取其從第壹邊爲始之第n+r之壹邊。又第三邊與第貳邊距離最少者。必取其從第貳邊爲始之第n+1之壹邊。即從第壹邊爲始之第n+r+n+1之壹邊，又從第三邊計至第壹邊。至少亦必有n+1之邊。故第三邊至多取至第壹邊爲始之第4n－(n+1)，即第3n－1之壹邊。由是可以取得第三邊之數。當有(3n－1)－(n+r+n+1)+1。即n－r－1個，

而於無心取第壹邊與其第n+r相當之壹邊。取爲第貳邊，則是選取其第三邊之數，當有4n－2個，(其中含有貳邊平行不能成爲三角形者)。

由是選取第壹第貳兩邊。其適遇爲$\frac{n-r-1}{4n-2}$。

又於無心定得第壹邊而其他之邊數有4n－1。

又第貳邊。如前所述從第壹邊之第n+1之壹邊爲始，至第2n之壹邊。而與第壹邊平行。故所取之第貳邊至第2n－1而止，

由是r爲自1迄n－1之數。順次r=n－1, n－2 n－3,………2, 1其所求之適遇如次，

$$\frac{1}{4n-1}\cdot 2\sum\frac{n-r-1}{4n-2}=\frac{1}{4n-1}\cdot 2\cdot\frac{1}{4n-2}\{1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n-2)\}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{(4n-1)(4n-2)}。$$

18. 有 m 人列坐於壹圓周，從其內任選三人。其三人不鄰坐之適遇為 $\frac{(m-4)(m-5)}{(m-1)(m-2)}$。試求其證。

〔證〕除去第壹人。於其餘諸人中選取第貳人。其適遇為 $\frac{1}{m-1}$。

惟第壹人與第貳人互換其位置。故其適遇為 $\frac{2}{m-1}$。又除去第壹人而於餘諸人中選取第貳人，此第貳人非列於第壹人之次者。斯時之適遇為(除第壹人之左右四座及第壹人之座) $\frac{m-5}{m-1}$。

而於前之兩方法。第三人非列於第壹及第貳人之次者。其適遇順次得 $\frac{m-5}{m-2}$ 及 $\frac{m-6}{m-2}$。

由是所求之適遇為 $\frac{2}{m-1}\cdot\frac{m-5}{m-2}+\frac{m-5}{m-1}\cdot\frac{m-6}{m-2}=\frac{(m-4)(m-5)}{(m-1)(m-2)}$。

19. 無心記奇數 m 個，偶數 n 個。則奇數與偶數不鄰接之適遇為 $\frac{\underline{|n}\ \underline{|n+1}}{\underline{|m+n}\ \underline{|n-m+1}}$。但 $m\not> n+1$。試求其證。

〔證〕記 n 偶數之方法有 $\underline{|n}$ 個，此左右及各中間記 m 奇數，有 $n+1$ 處。故記 m 奇數方法之數為 ${}_{n+1}P_m=\frac{\underline{|n+1}}{\underline{|n-m+1}}$。

又記全數方法之數為 $\underline{|m+n}$。

由是所求之適遇為 $\frac{\underline{|n}\ \underline{|n+1}}{\underline{|n-m+1}\ \underline{|m+n}}$。

20. 將 m 個物分給 a 男及 b 女，則男組得物成奇數之適遇，為 $\frac{(b+a)^m-(b-a)^m}{2(b+a)^m}$。試證之。

〔證〕男得任壹物之適遇為 $\frac{a}{a+b}$。由是男得 $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots m$ 個

之適遇，如次之展開式之各項，

$$\left(\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\right)^m=C_0+C_1+C_2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又 $$\left(\frac{b}{a+b}-\frac{a}{a+b}\right)^m=C_0-C_1+C_2-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由是 $\frac{(b+a)^m-(b-a)^m}{(a+b)^m}=2(C_1+C_3+C_5+\cdots\cdots)=2\times$(男得奇數之適遇)，

21. 有兩整數其和 100，而其積比 1000 爲大，求其適遇，

〔解〕 兩數中之壹數爲 $1, 2, 3, \ldots\ldots 99$，而其積大於 1000，則其壹數 >11 及 <89。

由是所求之適遇爲 $\frac{77}{99}=\frac{7}{9}$。

22. 既知兩正數量之和，而其積不小於其最大積之 $\frac{3}{4}$，其適遇爲 $\frac{1}{2}$。又其積小於最大積之半，其適遇爲 $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$，試各證明之，

〔證〕 設既知之和 $=4a$，兩數之最大積 $=2a\times 2a=4a^2$。又令其壹數 $=x$，則他之壹數 $=4a-x$。

由題之前節 $x(4a-x)\not<\frac{3}{4}(4a^2)$，即 $x^2-4ax+3a^2\not>0$，

即 $(x-a)(x-3a)\not>0$。是 x 之值在 a 與 $3a$ 之間，故其適遇爲 $\frac{3a-a}{4a}=\frac{1}{2}$。

又由題之後節，$x(4a-x)<\frac{1}{2}(4a^2)$，

即 $x^2-4ax+2a>0$，即 $\{x-a(2+\sqrt{2})\}\{x-a(2-\sqrt{2})\}>0$，

故 x 之值不小於 $(2-\sqrt{2})a$，又不大於 $(2+\sqrt{2})a$，

由是所求之適遇爲 $\frac{4a-2\sqrt{2}.a}{4a}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$，

23. 甲乙貳人爲爭競之戲，甲持 a 籌，乙持 b 籌，以記勝負。而甲乙每回勝負之適遇相等。每回必分勝負。而勝者取負者壹籌，迨壹人取盡他壹人之籌，則爲全體之勝，如是甲得全體之勝，其適遇爲 $\frac{a}{a+b}$ 試證明之。

〔證〕設於勝負中間甲持 n 籌，其得全體之勝之適遇爲 u_n

然甲於次回得勝之適遇爲 $\frac{1}{2}$。故甲於次得全體之勝之適遇爲 u_{n+1}

若甲於次回得負之適遇爲 $\frac{1}{2}$。則甲於次得全體之勝之適遇爲 u_{n-1}

由是 $u_n=\frac{1}{2}u_{n+1}+\frac{1}{2}u_{n-1}$ 即 $u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}=0$。

惟 $u_0=0$。故由循環級數 u_n 等於 $\frac{u_1x}{(1-x)^2}$ 展開式中 x^n 之係數，

$\therefore\quad u_n=nu_1\quad\therefore\quad \frac{u_n}{n}=u_1$

由是 $\frac{u_a}{a}=\frac{u_b}{b}=\frac{1}{a+b}$。 即 $u_a=\frac{a}{a+b}$。

24. 於瓶內入玉若干。知此玉爲白或黑。今取出 $p+q$ 個。(但取出之玉不再入於瓶內)其中白 p 個。黑 q 個，則於次取出黑壹個之適遇，爲 $(q+1)\div(p+q+2)$。試證明之。

〔證〕既取出白 p 個黑 q 個。其後再取出壹個。不知爲白抑爲黑，如爲白。則得白 $p+1$ 個，如爲黑，則得黑 $q+1$ 個，如是則於次出黑壹個之適遇，爲 $\frac{q+1}{p+1+q+1}=\frac{2+1}{p+q+2}$ 即得題證。

25. 甲乙爭競。各分勝負。每勝壹回得壹點，以 $2m+1$ 點決定全體之勝負。甲得 x 點乙得 y 點後，其次之壹點得勝之適遇，甲與乙之比。若 $2m+1-x$ 與 $2m+1-y$，而於最初之壹回甲得勝。於末後 $2m$ 回內。甲勝 m 回之適遇爲 $\frac{(\underline{|2m}\,\underline{|2m+1})^2}{2(\underline{|m})^3\,\underline{|m+1}\,\underline{|4m+1}}$ 試求其證。

〔證〕甲得 x 點乙得 y 點後，甲得次之壹點之適遇爲 $\frac{2m+1-x}{4m+2-x-y}$，乙得又次之壹點之適遇爲 $\frac{2m+1-y}{4m+1-x-y}$，(但此分母比甲得前勝適遇之分母 $4m+2-x-y$ 減少壹回故得 $4m+1-x-y$)，由是甲得 x 點，乙得 y 點後。甲得次之壹點，乙得又次之壹點，其適

遇為 $\dfrac{(2m+1-x)(2m+1-y)}{(4m+2-x-y)(4m+1-x-y)}$ (α)

而乙得次之壹點。甲得又次之壹點。其適遇亦如上之值。

由此理推之。於任意之順序。q點內甲得p點之適遇。比於他之順序。q點內甲得p點之適遇。其值爲同壹。即無論任何之順序。其於定數之勝負間。勝之度數不變。則其適遇必爲同壹也。

由題意甲於最初勝壹點。故於2m回內勝m－1回。其終又勝壹回。(如前所述。無論如何順序甲勝m＋1回)。

即於2m－1回間。甲勝m－1回之適遇。等於最初m回之終勝m－1回之適遇。

而甲初負m回終勝m－1回之適遇。可連用(α)式。得

$$\frac{2m+1}{4m+1}\cdot\frac{2m}{4m}\cdot\frac{2m-1}{4m-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{m+2}{3m+2}\cdot\frac{2m}{3m+1}\cdot\frac{2m-1}{3m}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{m+2}{2m+3}。$$

從2m－1回內。取m－1方法之數爲${}_{2m-1}C_{m-1}$。而於最後之勝負。甲勝之適遇爲$\dfrac{m+1}{2m+2}$。(何則。如上之連乘積。最勝之因子$\dfrac{m+2}{2m+3}$爲於第2m回勝之適遇。故於第2m+1回後勝之適遇爲$\dfrac{m+1}{2m+2}$)。

由是所求之適遇爲

$$\frac{\lfloor 2m-1}{\lfloor m-1\lfloor m}\cdot\frac{\{(2m+1)(2m)\cdots\cdots(m+2)\}\{2m(2m-1)\cdots\cdots(m+2)\}}{(4m+1)4m\cdots\cdots(3m+2)(3m+1)\cdots\cdots(2m+3)}\cdot\frac{m+1}{2m+2}$$

$$=\frac{\lfloor 2m-1}{\lfloor m-1\lfloor m}\cdot\frac{\lfloor 2m+1}{\lfloor m+1}\cdot\frac{\lfloor 2m+1\lfloor 2m}{\lfloor m\lfloor 4m+1}=\frac{(\lfloor 2m\lfloor 2m+1)^2}{2(\lfloor m)^3\lfloor m+1\lfloor 4m+1}。$$

第叁拾壹編

定　準　數

415. 定準數 (Determinate) 其意爲有一定之排列也

譯註。定準數我國或譯爲排列定數。

先說明定準數之排列定位法。

試將九個數量列爲正方形。除同行同列不計外。取其三個數量相乘而得次之六個積數。爲

a_1	a_2	a_3	(第壹列)
b_1	b_2	b_3	(第貳列)
c_1	c_2	c_3	(第三列)
(第壹行)	(第貳行)	(第三行)	

$a_1b_2c_3$, $a_1b_3c_2$, $a_2b_3c_1$, $a_2b_1c_3$, $a_3b_1c_2$, $a_3b_2c_1$,

此六個乘積各文字下所標之小數字1,2,3,其次序有順逆之不同,乃從其逆次序之奇偶,而定其積之正負,凡逆次序之數爲偶者,則其積爲正,若逆次序之數爲奇者。則其積爲負.如法將上之六個乘積定其正負而連爲一式如次,

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

試考$a_1b_2c_3$其小數字1,2,3之次序皆爲順,故其逆次序之數爲0,而定此積爲正。

$a_1b_3c_2$小數字之次序1,3,2。其2在3後。逆次序之數爲1,故此積爲負,

$a_2b_3c_1$小數字之次序2,3,1。其1在2後,又1在3後,逆次序之數有2,故此積爲正,

$a_2b_1c_3$小數字之次序2,1,3。其1在2後,逆次序之數爲1,故此積爲負,

$a_3b_1c_2$小數字之次序3,1,2。其1在3後,又2在3後,逆次序之數有2。故此積爲正。

$a_3b_2c_1$ 小數字之次序3,2,1。其2在3後。又1在3後。又1在2後。逆次序之數有3。故此積爲負。

如(A)式稱爲含有 $a_1,a_2,a_3,b_1,\ldots\ldots$ 諸元(elements)之定準數。如從所記之正方形而得 $a_1b_2c_3$ 等之各積。稱爲此定準數之項。

416。定義 如次將 n^2 個數量。列爲正方形。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots\cdots\cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots\cdots\cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\cdots\cdots\cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots\cdots\cdots\cdots & m_n \end{vmatrix}$$

而同列之數量用同文字。(如第一列用a。第貳列用b。)同行之數量。用相同之小數字。(如第一行 $a,b,c,\ldots\ldots\ldots$ 下標以1。第貳行標以2。)即文字可表列數。小數字可表行數,例如 c_2 試計文字之次序 a,b,c。其c列在第三。即知此列爲第三列.又以所標之小數字爲2。即表在第貳行。故知 c_2 爲在第三列第貳行。

今將上之正方形。除同行同列不計外。於其每行每列各取壹數量相乘。而得諸積。從其所標小數字逆次序之數。奇者爲負。偶者爲正。如是求其積之代數和。此爲 n^2 元之定準數。

有 n^2 元如上列爲正方形。於其兩側引直線。

於此正方形從左上隅引至右下隅之對角線。稱爲主對角線。(Principal diagonal)而與主對角線相當之元 $a_1, b_2, c_3, \ldots\ldots m_n$ 之積。稱爲定準數之主項。(Principal term)。

主項以外。其餘諸項所列文字之次序與主項同。但各文字下。所標之小數字。其次序各異。例如表某項。則置 abc………m 於其各文字之下。標以自1迄n之小數字爲 $a_1b_2c_4\ldots\ldots m_n$ 或 $a_2b_1c_5\ldots\ldots m_{n-1}$ 其他種種。可用1, 2, 3……n之錯列諸數標記之。

故既知主項爲 $a_1b_2c_3\ldots\ldots m_n$。其餘諸項。自易求得之。而記定準數之畧法。往往僅記其主項於括弧內以代表其全式者。即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3)。$$

又記定準數之畧法。或以 $\sum(\pm a_1b_2c_3\cdots\cdots m_n)$ 表之。而定準數之記號通例用 △ 表之。

有 n^2 元之定準數。即可列成 n 行，n 列而稱爲 n 次之定準數。

417. 項 凡 n 次之定準數。其各項有 n 個文字。而文字下所標之數字爲 $1,2,3,\cdots\cdots\cdots n$ 之各錯列數。故 ${}_nP_n$ 即 $\underline{|n}$ 爲 n 次定準數之項數。

例如三次之定準數。有 $\underline{|3}=6$ 項。

418. 項之符號 定準數之任意壹項。其符號視所標數字之次序順逆而定。其逆次序之數偶者爲正。奇者爲負。既已述明於前。然如次之法則。以行數代其列數。其結果仍與前之結果同。

法則 從第壹列順次及於諸列各取壹元。而爲任意之項。其符號則視行之次序如何。其逆次序之數。偶者爲正。奇者爲負。

上之法則。所以示行與列交換。而得同壹之結果。

如於六次之定準數內。第壹列取 c_1。第貳列取 f_2。第三列及第三列以下。順次取 $b_3\ d_4\cdots\cdots$ 而得任意之項。爲 $c_1f_2b_3d_4a_5e_6$，此積仍與 $a_5b_3c_1d_4e_6f_2$ 同值。而其符號亦相同。釋明如次。

如前章所述者。先依羅馬文字之次序順列之。而其下所標之小數字。用 $1,2,3\cdots\cdots\cdots\cdots$ 之錯列數。如 $a_5b_3c_1d_4e_6f_2$。茲則用羅馬文字 $a,b,c\cdots\cdots\cdots$ 之錯列數。而其下所標之小數字。依自然數之次序。如 $c_1f_2b_3d_4a_5e_6$，試於 $a_5b_3c_1d_4e_6f_2$。取其 f_2 計之。其 f 字下所標之 2。列於 5, 3, 4, 6 四數之後。(此數字之逆序有四) 而於 $c_1f_2b_3d_4a_5e_6$。亦取 f_2 計之。其 b, d, a, e 四文字。列於 f 之後。(依羅馬文字之次序 f。當列於 b, d, a, e 之後) 一則從所標之小數字 2 以前。有大於 2 之四個數字。(即列之逆次序) 一則從羅馬文字之錯列數。其 f 以後有前列之四個文字。(即行之逆次序)，故文字逆序之數。與所標小數字逆序之數相同。餘可類推。

由是行與列。可以交換而得次之定理。

〔定理〕定準數行與列交換。其値不變。

例如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

例　題

1. 計2314, 3142, 及 4231之逆次序。

〔解〕 2314其次序2, 1與3, 1。即逆次序有2。

3142.其次序3, 1與3, 2與4, 2。即逆次序有3。

4231其次序4, 2與4, 3與4, 1與2, 1與3, 1。即逆次序有5,

2. 計4132, 35142, 531264之逆次序。

〔解〕 4132其次序4, 1與4, 3與4, 2與3, 2。即逆次序有4,

35142其次序3, 1與3, 2與5, 1與5, 4與5, 2與4,2, 即逆次序有6,

531264其次序5, 3與5, 1與5, 2與5, 4與3, 1與3, 2與6, 4。即逆次序有7。

3. 於 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ 其bfg, cdh, ceg各項之符號如何。

答 +, +, −,

〔解〕 bfg爲取第2行。第3行。第1行之元,其行數之次序爲231, 計其逆次序有2,故爲正。

cdh其行數之次序爲312。計其逆次序有2,故爲正。

ceg其行數之次序爲321,計其逆次序有3,故爲負。

4. 於 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & r & q \end{vmatrix}$ 其bgiq, celn, dfkm各項之符號如何.

答 +, −, −,

〔解〕 bgiq其行數之次序2314。即逆次序2。 ∴ 正,

celn其行數之次序3142。即逆次序3。 ∴ 負。

dfkm其行數之次序4231。即逆次序5。∴ 負,

419.定理壹 凡定準數之任壹項。交換其所標兩數字可得又壹項(1)。而此又壹項與原項，必變其符號(2)。

先證(1)。設 $Ph_\alpha k_\beta$ 爲定準數之壹項，但 P 爲 h_α, k_β 貳元外其他諸元之積。(例如 $a_1b_3c_4d_2$ 記爲 Pc_4d_2 其 P 即 a_1b_3)，

此 $Ph_\alpha k_\beta$。以其所標之兩數字互換，而爲 $Ph_\beta k_\alpha$。必爲定準數中之又壹項，

何則。$Ph_\alpha k_\beta$ 爲定準數之壹項。則 P 所含有之元。決不在於 h 行及 k 行之內，亦決不在於 α 列及 β 列之內。故 $Ph_\beta k_\alpha$。其中無同行同列之元。其爲定準數之又壹項可知。

次證(2)。假設交換之兩數字。其標此數字之貳元爲鄰接者。如 $Ah_\alpha k_\beta B$ 爲定準數之任壹項。其 A, B 爲在於 $h_\alpha k_\beta$ 前後諸元之積，若 α, β 互換。則爲 $Ah_\beta k_\alpha B$。如(1)所證而知 $Ah_\beta k_\alpha B$ 無同行同列之元在內者，故亦爲定準數之壹項。

惟交換 $\alpha\beta$ 之次序爲 $\beta\alpha$。則此項必增一逆次序或減一逆次序。例如變 h_1k_3 爲 h_3k_1，即變13之次序爲31。則此項必增一逆次序。若變 h_3k_1 爲 h_1k_3，即變31之次序爲13，則此項必減一逆次序。而 hk 前後諸元所標之數字。不因此貳數字交換而增減其逆次序之數，故 $Ah_\alpha k_\beta B$ 與 $Ah_\beta k_\alpha B$。必異其符號。

若交換之兩數字 α, β。其標此數字之貳元。不相鄰接。而其間隔以 r 個元者。

先將 α 向右順次交換其鄰接兩元所標之數字至 $r+1$ 次。而 α 至於 β 處。再將 β 向左。順次交換鄰接之數字至 r 次。而 β 至於 α 之原處。

由是 α 與 β 交換。同於交換其鄰接數字至 $2r+1$ 次。其次數恆爲奇數。故與原項必變其符號。

例如 $a_1b_3c_2d_5e_4$ 交換其 b_3 與 e_4 所標之數字。則逐次將3與右一元數字互換。至於4之處。後又逐次將4與左一元數字互換，至於3之處。

原項	$a_1b_3c_2d_5e_4$,	第壹	$a_1b_2c_3d_5e_4$,	第貳	$a_1b_2c_5d_3e_4$,
第三	$a_1b_2c_5d_4e_3$,	第四	$a_1b_2c_4d_5e_3$,	第五	$a_1b_4c_2d_5e_3$,

故交換五次$a_1b_3c_2d_5e_4$變爲$a_1b_4c_2d_5e_3$。

420. 定理貳 定準數交換其任貳行或任貳列，則其符號變而其絕對值不變。

設以h及k兩文字。表某定準數之任兩列。今以此兩列交換之。而爲第壹及第貳之兩定準數。

而於第壹定準數之任壹項$Ah_\alpha Bk_\beta C$。其h,k交換，得$Ak_\alpha Bh_\beta C$。爲在第貳定準數與前同位諸元所成之項。考此兩項。爲第壹第貳兩定準數。同行同列之各元而成者。故各自同其符號。然由419章而知$Ak_\alpha Bh_\beta C$。亦爲第壹定準數之壹項。其符號與$Ah_\alpha Bk_\beta C$相反。

由是知第貳定準數之任壹項。均爲第壹定準數之壹項。但其符號各異耳。

故第壹第貳之兩定準數，其絕對值相等。而其符號相反。

既證得貳列交換此定理爲眞。由418章知列與行爲同樣。故貳行交換，此定理亦必爲眞。

例如三元之定準數。逐次變其行列，由本定理而得如次。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \end{vmatrix}$$

421. 定理三 定準數有貳列或貳行相等。則其值爲0。

貳列(或貳行)相等。則交換其貳列(或貳行)。仍與前無異。而由定理貳交換其貳列(或貳行)。其絕對值不變而變其符號。今其值與符號皆相等。是必爲0而後可。故此定準數之值必爲0。

例 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_1 \\ b_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} = 0$。又 $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$。

例題

1. 求 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ 之值.

(解) 設此定準數a=b則 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=0$。(由定理三)

故 $a-b$ 爲此定準數之壹因子。由同法 $b-c$, $c-a$ 亦爲此定準數之壹因子。而其各項爲三次式。

$\therefore\quad \Delta=L(a-b)(b-c)(c-a)$, 其 Δ 含有 bc^2 之係數爲 1。

而 $L(a-b)(b-c)(c-a)$ 含有 bc^2 之係數爲 L。 $\therefore\quad L=1$。

由是 $\Delta=(a-b)(b-c)(c-a)$。

2. 求 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$ 之值。

(解) 設 $a=b$。則 $\Delta=0$。由同法得。

$\Delta=L(a-b)(b-c)(c-a)(a-d)(b-d)(c-d)$。

於 Δ 含有 bc^2d^3 之係數爲 1。又於右邊 bc^2d^3 之係數爲 $-L$。

由是 $L=-1$。

$\therefore\quad \Delta=-(a-b)(b-c)(c-a)(a-d)(b-d)(c-d)$。

3. 求 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$ 之值。

答 $-(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$。

422. 定理四 定準數之任壹列或任壹行。以某數乘之。等於某數乘定準數之全體。

何則。定準數之各項。皆含有每行每列之壹元。故以某壹數乘任壹列或任壹行。即以某壹數乘各項。故同於以某壹數乘定準數之全體。

例 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\times m=\begin{vmatrix} a_1 & ma_2 & a_3 \\ b_1 & mb_2 & b_3 \\ c_1 & mc_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ma_1 & ma_2 & ma_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

又 $\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ na_2 & nb_2 & nc_2 \\ pa_3 & pb_3 & pc_3 \end{vmatrix} = mnp \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & nb_1 & pc_1 \\ ma_2 & nb_2 & pc_2 \\ ma_3 & nb_3 & pc_3 \end{vmatrix}$

推論 由本定理及定理三推得如次，

定準數之貳列或貳行。其各元及係數相同者。則此定準數之値爲0。

例如 $\begin{vmatrix} ma & na & 1 \\ mb & nb & 1 \\ mc & nc & 1 \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & b & 1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix} = mn \times 0 = 0$。

423. 小定準數 將定準數除去其同數之行與列。而以其餘諸元作正方形。此謂之小定準數，(Minor determinants)，

除去定準數之第壹行壹列。其餘部分之小定準數，謂之第壹小定準數。又除去定準數之第貳行貳列。其餘部分之小定準數謂之第貳小定準數，餘做此。

或取通過某行某列之壹元。則其餘部分之小定準數，稱爲某壹元之小定準數。如其壹元爲x。則爲x之小定準數，而以Δ_x表示之。

例如 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, 及 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 爲 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

之小定準數如次。記爲Δ_{c_3}, Δ_{b_2}, Δ_{a_1}。

424. 定準數之展開式 設四次之定準數爲

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$ 將此定準數展開而以a_1A_1爲於Δ之諸項

中所含有a_1之諸項之和。同法以a_2A_2, a_3A_3及a_4A_4爲含有a_2, a_3及a_4諸項之和，

然於Δ之全項中。無論何壹項。必含有a_1, a_2, a_3, a_4內之壹元，故可以a_1A_1, a_2A_2, a_3A_3, a_4A_4包括Δ之全項。

由是 $\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

於Δ之諸項中。凡含有a_1者。決不含有與a_1同行同列之元。而Δ_{a_1}爲a_1之小定準數。於Δ_{a_1}之各項。皆無有含a_1者。故於Δ之諸項中。凡含有a_1之項。即爲a_1與Δ_{a_1}之某壹項之積。

反言之。Δ_{a_1}之壹項T與a_1之積。即得Δ之壹項。而Δ之壹項a_1T。其符號與Δ_{a_1}之壹項T之符號相同。何則。於Δ之壹項a_1T。其a所標之小數字爲最小數1。故與T之諸元所標之數字。其逆次序無所增減。由是凡含有a_1之諸項之和爲$+a_1\Delta_{a_1}$。

又於Δ之各項中。凡含有a_2之項。等於a_2與Δ_{a_2}之某壹項之積。

反言之a_2與Δ_{a_2}之某壹項T之積。等於Δ之某壹項。而於Δ之壹項a_2T。其a所標之小數字爲2。惟於T之諸元所標之小數字有1在內。而1列於2之次。即增壹個逆次序。故a_2T與T其符號相異。由是凡含有a_2之諸項之和。爲$-a_2\Delta_{a_2}$。

由同法a_3T其3列於2, 1之前。故比T增2個逆次序。由是凡含有a_3之諸項之和爲$+a_3\Delta_{a_3}$。

以是推之。凡含有a_4之諸項之和爲$-a_4\Delta_{a_4}$。

$\therefore\quad \Delta = a_1\Delta_{a_1} - a_2\Delta_{a_2} + a_3\Delta_{a_3} - a_4\Delta_{a_4} + \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

又由**419**及**420**章而得如次。

$$\Delta = -b_1\Delta_{b_1} + b_2\Delta_{b_2} - b_3\Delta_{b_3} + b_4\Delta_{b_4}$$
$$= a_1\Delta_{a_1} - b_1\Delta_{b_1} + c_1\Delta_{c_1} - d_1\Delta_{d_1} = \cdots\cdots\cdots\cdots$$

何則。b_1爲第貳列。若行與列交換。其$b_1\Delta_{b_1}$恰如$a_2\Delta_{a_2}$。故得$-b_1\Delta_{b_1}$。其餘類推。

〔推論〕(1)及(2)比較。而知諸元a_1, a_2, a_3, a_4之係數。其絕對值等於各元之小定準數。

即 $A_1=\Delta_{a_2}$, $A_2=-\Delta_{a_2}$,……………………………

425. 展開式之公例 於前章所示為四次定準數之展開式。今從此法而得展開式之公例。

於n次之定準數，其第一列之元為 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$，

由前章(2)得 $\Delta=a_1\Delta_{a_1}-a_2\Delta_{a_2}+a_3\Delta_{a_3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_n\Delta_{a_n}$。

又第r列之元為 $k_1, k_2, k_3\cdots\cdots\cdots k_n$，

則 $\Delta=(-1)^{r-1}\{k_1\Delta_{k_1}-k_2\Delta_{k_2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}k_n\Delta_{k_n}\}$。

例Δ用第貳列之小定準數表之。則$(-1)^{n-1}$為-1，即與前章所示之$-b_1\Delta_{b_1}+b_2\Delta_{b_2}-b_3\Delta_{b_3}+\cdots\cdots$同

又第三列。則$(-1)^{n-1}$為$+1$。以次類推，

例展開次之三次定準數，

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)。$$

例　題

求次之各證。

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=4$　　**2.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=27$。

(證) 於 1. $\Delta=1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$=1(1-2)-1(2-1)+2(4-1)=4$，

又於 2. $\Delta=1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$=-(1-4)-2(-2-4)+2(4+2)=27$。

3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=18$，　　**4.** $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix}=16$，

5. $\begin{vmatrix} a & o & c \\ a & b & o \\ o & b & c \end{vmatrix}=2abc$,　　6. $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}=a(b-c)(a-b)$,

〔證〕 5 之$\Delta=a\begin{vmatrix} b & o \\ b & c \end{vmatrix}-o\begin{vmatrix} a & o \\ o & c \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a & b \\ o & b \end{vmatrix}$

$=a(bc)-o+c(ab)=2abc$。

6 之$\Delta=a\begin{vmatrix} b & b \\ b & c \end{vmatrix}-a\begin{vmatrix} a & b \\ a & c \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$

$=a(bc-b^2)-a(ac-ab)=a(b-c)(a-b)$。

7. $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}=4abc$,　　8. $\begin{vmatrix} b+c & c & b \\ c & c+a & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix}=4abc$,

9. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=9$　　10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}=1$。

〔證〕 9 之 $\Delta=3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$=3.7-2.2+2(-2)-2.2=9$

11. 試於$\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$直記 a,f,c 之係數。

又 a,b……之係數為 A,B……而於

$\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}$ 其 A,B……之係數為 A′,B′,……則

$\frac{A'}{a}=\frac{B'}{b}=\cdots\cdots\cdots=\Delta$

〔解〕最初之解答 a,f,c 之係數可直得次形,

$\begin{vmatrix} b & f \\ f & c \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & g \\ h & f \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$.

於次之證 $B=ac-g^2$, $C=ab-h^2$, $F=af-gh$,

$\therefore\quad A'=BC-F^2=(ac-g^2)(ab-h^2)-(af-gh)^2$

$\qquad=a\{a(bc-f^2)-h(hc-gf)+g(hf-bg)\}$

$\qquad=a\{aA-hH+gG\}=a\Delta$。

由是 $\frac{A'}{a}=\Delta$ 由同法證得 $\frac{B'}{b}=\frac{C'}{c}=\frac{G'}{g}\cdots\cdots\cdots=\Delta$。

426. 定理五 凡定準數任壹行之元。與他行相應元之係數相乘積之和等於0。

設第r行之元 $a_r, b_r,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 各與第s行相應之元之係數 $A_s, B_s\cdots\cdots\cdots\cdots$ 相乘。其積之和爲 $a_rA_s+b_rB_s+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

若將此式而爲一新定準數。又假定新定準數中 $a'_s, b'_s\cdots\cdots\cdots$ 爲與係數 $A_s, B_s\cdots\cdots\cdots$ 相應之元，則其値爲 $a'_sA_s+b'_sB_s+\cdots\cdots\cdots\cdots$

此式與前式均等於新定準數之全値。故 $a_r=a'_s$, $b_r=b'_s\cdots\cdots\cdots\cdots$ 因是知此定準數第r行之元與第s行之元相等。惟從定理三有貳行相同。其定準數之値爲0。故此新定準數必爲0。

即 $a_rA_s+b_rB_s+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0$。

故於 $\Delta=(a_1b_2c_3d_4)$。如次推得 $\quad\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4$,

又 $\quad 0=b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+b_4A_4,\quad 0=a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3+d_1D_3$,

以下類推。

427. 定理六 定準數之任壹列或任壹行。爲兩數量之和者。可以同次之兩定準數表之。

證明如次。

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha'_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha'_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

其第壹行之係數爲 A_1, A_2, A_3，則由424章得

$\Delta=(a_1+\alpha'_1)A_1+(a_2+\alpha'_2)A_2+(a_3+\alpha'_3)A_3$

$\quad=(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)+(\alpha'_1A_1+\alpha'_2A_2+\alpha'_3A_3)$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha'_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha'_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

由同法可證得如次，

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1-\beta_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2-\beta_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3-\beta_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}。$$

428. 定理七 凡定準數之任壹行。或任壹列之諸元。加他之任壹行。或任壹列相應諸元之同倍數者。其值不變，

試證次之三次定準數。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+mb_1+nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2+nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3+nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

由定理五。上式之右邊等於

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} mb_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nc_1 & b_1 & c_1 \\ nc_2 & b_2 & c_2 \\ nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}。$$

惟上之最後貳項。準422章可證知其為0。故知(A)之等式為恆等式。此即為本題之證。

例 題

1. 試證 $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0。$

〔證〕 以第二行加於第三行。得

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+c+a \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0。$$

2. 證 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 8abcd，$

〔證〕 以第一列加於他之各列得

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix}=aA_1+0A_2+0A_3+0A_4=aA_1=a\begin{vmatrix} 2b & 2c & 2d \\ 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2d \end{vmatrix}$$

$$=2ab\begin{vmatrix} 1 & 2c & 2d \\ 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2d \end{vmatrix}=2ab\begin{vmatrix} 2c & 2d \\ 0 & 2d \end{vmatrix}=4abd\begin{vmatrix} 2c & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=8abcd。$$

3. 試證 $\begin{vmatrix} a+2b & a+4b & a+6b \\ a+3b & a+5b & a+7b \\ a+4b & a+6b & a+8b \end{vmatrix}=0$。

〔證〕 $\Delta=\begin{vmatrix} a+2b & 2b & a+6b \\ a+3b & 2b & a+7b \\ a+4b & 2b & a+8b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+2b & 2b & 4b \\ a+3b & 2b & 4b \\ a+4b & 2b & 4b \end{vmatrix}=0$。

4. $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}=8abc$。

〔證〕 若 $a=0$。則 $\Delta=\begin{vmatrix} b+c & -c & -b \\ b-c & c & b \\ c-b & c & b \end{vmatrix}=0$。 ∴ a 爲一因子。

由同法 b,c 亦爲因子。 ∴ $\Delta=Aabc$, $a=b=c=1$。 則 $8=A$。

5. 求 $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$ 之值。

〔解〕 $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ 12 & -12 & -12 & 12 \end{vmatrix}=48\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$。

6. 求 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ 及 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 之值。

〔解〕第一 $= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 5 & 1 \\ -4 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 10 & 5 \\ -4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$。

第二 $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= -(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 9$。

429. 乘法之原則 如次所示為最要之一例。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l & m & n \\ a_2 & b_2 & c_2 & p & q & r \\ a_3 & b_3 & c_3 & s & t & u \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

〔證〕原式為六次式，而 $(a_1\,b_2\,c_3)$ 及 $(\alpha_1\beta_2\gamma_3)$ 各任壹項之積，亦為六次式可知。

惟 $(a_1b_2c_3)\times(\alpha_1\beta_2\gamma_3)$ 其各項中無有含 $l, m, n, \ldots\ldots$ 之項者。故 $\Delta = (a_1b_2c_3)\times(\alpha_1\beta_2\gamma_3) +$ 含 $l, m, n,$ 等之項。而此含 $l, m, n,$ 等之項皆為 0。何則，凡含有 l, m, n 等任壹元 l 之項，即 l 乘 l 之小定準數之各項，今 l 之小定準數為 Δ'。則

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & q & r \\ a_3 & b_3 & c_3 & t & u \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

此Δ'之任壹項,例如含有a_2之項爲

$$a_2\times\begin{vmatrix} b_3 & c_3 & t & u \\ 0 & 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

此式爲0。 $\therefore$ $\Delta'=0$,由是凡含有l, m, n等元之項,皆爲0,

$$\therefore \quad \Delta=(a_1b_2c_3)\times(\alpha_1\beta_2\gamma_3)。$$

依同法可推得凡於$2n$次之定準數,其中有壹個n次之小定準數其元爲零者。則此定準數爲兩個n次定準數之積,

430. 定準數乘法 今就兩個三次之定準數考之,其他任何次定準數之乘法,仍可由同理推得,

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}。$$

由前章易得其相乘積爲六次定準數若從前章式中合$l=-1$, $m=o$, $n=0$, $p=0$, $q=-1$, $r=0$, $s=0$, $t=0$, $u=-1$,則可化爲三次定準數。

$$\Delta_1\times\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

α_1乘第壹列,β_1乘第貳列,γ_1乘第三列,以之加於第四列。又α_2乘第壹列,β_2乘第貳列,γ_2乘第三列,以之加於第五列,α_3乘第壹列,β_3乘第貳列,γ_3乘第三列,以之加於第六列而得次式,仍與(A)同值,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1\alpha_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_1\alpha_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

此式由427章等於次之兩式之積。

即 $-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 與

$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1 & b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1 & c_1\alpha_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2 & c_1\alpha_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3 & b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3 & c_1\alpha_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$ 之積。而

$-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1$。故此第貳式即為所求之積。(即積之公式)

例　　題

1. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$ 以 $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$ 乘之。

〔解〕 所求之積 $=\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix}$ 由上之公式。

則 $X=ax+by+cz,\quad Y=ay+bz+cx,\quad Z=az+bx+cy$。

$\therefore$ 所求之積 $=X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$

$$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)(a^3+b^3+c^3-3abc),$$

2. 證 $\begin{vmatrix} 3bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix}=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$。

〔證〕 視積之公式 $\Delta=\begin{vmatrix} a & -b & c \\ c & -a & b \\ b & -c & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & c & a \end{vmatrix}$

$$=-(a^3+b^3+c^3-3abc)\times-(a^3+b^3+c^3-3abc)=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2,$$

3. 〔證〕 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2$。但 $A, B,\ldots\ldots$ 爲於 $(a_1b_2c_3)$ 中 $a_1, b_1,\ldots\ldots\ldots\ldots$ 之係數。

〔證〕 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} A_1a_1+A_2a_2+A_3a_3 & B_1a_1+B_2a_2+B_3a_3 & C_1a_1+C_2a_2+C_3a_3 \\ A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3 & B_1b_1+B_2b_2+B_3b_3 & C_1b_1+C_2b_2+C_3b_3 \\ A_1c_1+A_2c_2+A_3c_3 & B_1c_1+B_2c_2+B_3c_3 & C_1c_1+C_2c_2+C_3c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} (a_1b_2c_3) & 0 & 0 \\ 0 & (a_1b_2c_3) & 0 \\ 0 & 0 & (a_1b_2c_3) \end{vmatrix}=(a_1b_2c_3)^3$$

兩邊以 $(a_1b_2c_3)$ 除之。即得 $(A_1B_2C_3)=(a_1b_2c_3)^2$。但由 426 章。

$A_1a_1+A_2a_2+A_3a_3=B_1b_1+B_2b_2+B_3b_3=C_1c_1+C_2c_2+C_3c_3=(a_1b_2c_3)$,

又 $A_1b_1+{}_2A_2b_2+A_3b_3=\ldots\ldots\ldots\ldots=0$。

431.複縱線式 $\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{matrix}\right\|$

如此式爲四次定準數而欠少壹列者。乃用複縱線記之。

此式通例。可化爲少一次之定準數。而原書中。未有說明，惟於後之例題四十二26示明壹例，而其值大都爲0者。

432.通同壹次方程式 今用定準數以解壹次通同方程式。

先解壹次之三元方程式。

$$a_1x+b_1y+c_1z=k_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=k_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=k_3$$

此三元方程式順次以 A_1, A_2, A_3 乘之而相加，得

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)y+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)z$$
$$=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3,$$

但 A_1, A_2, A_3 爲於 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 各項中 a_1, a_2, a_3 之係數。由426章，

得 $a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=(a_1b_2c_3)$。

又 $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=c_1A_1+c_1A_2+c_3A_3=0$。

故上之方程式如次。$(a_1b_2c_3)x=(k_1b_2c_3)$，

由同法 $(a_1b_2c_3)y=(a_1k_2c_3)$， $(a_1b_2c_3)z=(a_1b_2k_3)$，

次解普通之壹次方程式。即有n個之未知量者。

$$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+\cdots\cdots=k_1,$$
$$a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+\cdots\cdots=k_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_nx_1+b_nx_2+c_nx_3+\cdots\cdots=k_n,$$

如前之法則，將上之方程式。順次以 $A_1, A_2, A_3\cdots\cdots$ 乘之而相加，得 $(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+\cdots\cdots)x=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+\cdots\cdots$，

但 $A_1, A_2, A_3,\cdots\cdots$ 爲 $(a_1b_2c_3\cdots\cdots)$ 各項中 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots$ 之係數。

由426章其 $x_2, x_3, x_4\cdots\cdots$ 之係數皆爲0。故

$$x_1=\frac{(k_1b_2c_3\cdots\cdots)}{(a_1b_2c_3\cdots\cdots)},\text{ 同法 }\quad x_2=\frac{(a_1k_2c_3\cdots\cdots)}{(a_1b_2c_3\cdots\cdots)},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

例　題

1. 解 $x+2y+3z=6$, $2x+4y+z=7$, $3x+2y+9z=14$ 之方程式。

〔解〕 由本章之公式

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}}=1,\quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 14 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}}=1,\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}}=1,$$

2. 解次之方程式 $x+y+z+w+k=0$。

$$a x+b y+c z+d w+k^2=0$$
$$a^2x+b^2y+c^2z+d^2w+k^3=0$$
$$a^3x+b^3y+c^3z+d^3w+k^4=0$$

〔解〕 $x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ b & c & d & k^2 \\ b^2 & c^2 & d^2 & k^3 \\ b^3 & c^3 & d^3 & k^4 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \dfrac{k(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$

433. 消去法 次之三方程式。爲同時合理者。求其係數之關係式。

$$a_1 x+b_1 y+c_1=0,$$
$$a_2 x+b_2 y+c_2=0,$$
$$a_3 x+b_3 y+c_3=0,$$

於 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 各項中 c_1, c_2, c_3 之係數爲 C_1, C_2, C_3 以此係數順次乘原三式而相加。得

$(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)x+(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)y+c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3=0$。

惟 x 及 y 之係數，由 **426** 章得 0。 $\therefore c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3=0$。

即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$。 即所求之關係式。

次之通同方程式，可用同法直得關係式。

$a_1x+b_1y+c_1z=a_2x+b_2y+c_2z=a_3x+b_3y+c_3z=0$。

於此方程式，其 x, y, z 皆非爲 0，則得其關係式爲 $(a_1b_2c_3)=0$。

何則，由前例得 $(c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3)z=0$.

然 $z\neq0$， $\therefore$ $c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3=0$。

即 $(a_1b_2c_3)=0$，

由同法有 n 個方程式其形如 $a_1+b_1y+\cdots\cdots+k_1=0$，而有 $n-1$ 個未知數量者。則其關係式，爲 $(a_1b_2c_3\cdots\cdots\cdots k_n)=0$，

434. 賽爾維司端 Sylvester 氏之消去法 此法就 x 之有理整式之任意兩方程式消去其 x。如次所示之例。

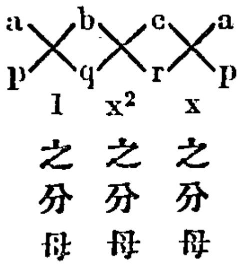
〔第壹例〕試就兩方程式 $ax^2+bx+c=0$。$px^2+qx+r=0$ 消去其 x。

於第壹之方程式，以 x 乘之，得	$ax^3+bx^2+cx=0,$
第壹之方程式。	$ax^2+bx+c=0,$
於第貳之方程式，以 x 乘之，得	$px^3+qx^2+rx=0,$
第貳之方程式。	$px^2+qx+r=0$。

將上之四個方程式消去 x^3,x^2,x 未知數量。與 433 章同法，

而得 $\begin{vmatrix} a & b & c & o \\ o & a & b & c \\ p & q & r & o \\ o & p & q & r \end{vmatrix}=0$。

〔通法〕通法用十字法如次，



$$\frac{1}{aq-pb}=\frac{x^2}{br-qc}=\frac{x}{cp-ra}$$

$$\therefore \frac{x^2}{(cp-ra)^2}=\frac{x^2}{br-qc}\times\frac{1}{aq-pb}$$

由是 $(cp-ra)^2=(br-qc)(aq-pb)$，

〔第貳例〕試就 $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $px^2+qx+r=0$ 消去其 x。

$$\begin{aligned} ax^4+bx^3+cx^2+dx \quad &=0, \\ ax^3+bx^2+cx+d &=0, \\ px^4+qx^3+rx^2 \quad &=0, \\ px^3+qx^2+rx \quad &=0, \\ px^2+qx+r &=0, \end{aligned}$$

消去 x^4, x^3, x^2, x 之四個未知數量，爲

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & o \\ o & a & b & c & d \\ p & q & r & o & o \\ o & p & q & r & o \\ o & o & p & q & r \end{vmatrix}=0。$$

例題四十二

1. 試示 $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix}=4a^2b^2c^2。$

〔證〕 $\Delta=(b^2+c^2)\begin{vmatrix} c^2+a^2 & bc \\ cb & a^2+b^2 \end{vmatrix}-ab\begin{vmatrix} ab & ac \\ cb & a^2+b^2 \end{vmatrix}+ca\begin{vmatrix} ab & ac \\ c^2+a^2 & bc \end{vmatrix}$

$=a^2(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2)-a^2b^2(a^2+b^2-c^2)+c^2a^2(b^2-c^2-a^2)=4a^2b^2c^2,$

2. 試示 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}=0。$

〔證〕 自第二列及第三列減第一列

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 0 & b-a & (b-a)(a+b+c) \\ 0 & c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} b-a & (b-a)(a+b+c) \\ c-a & (c-a)(a+b+c) \end{vmatrix}$

$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a+b+c \\ 1 & a+b+c \end{vmatrix}=(b-c)(c-a)\times 0=0。$

3. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$

〔證〕 $\Delta=\begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b' & c'+a' & a'+b' \\ b'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c' & c'+a' & a'+b' \\ c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}$

但 $\begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ b' & c'+a' & a'+b' \\ b'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b & c & a+b \\ b' & c' & a'+b' \\ b'' & c'' & a''+b'' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & a & a+b \\ b' & a' & a'+b' \\ b'' & a'' & a''+b'' \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} b & c & a \\ b' & c' & a' \\ b'' & c'' & a'' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c & b \\ b' & c' & b' \\ b'' & c'' & b'' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & a+b & a+b \\ b' & a'+b' & a'+b' \\ b'' & a''+b'' & a''+b'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}。$$

又 $\begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ c' & c'+a' & a'+b' \\ c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ $\therefore\ \Delta=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$。

4. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}=2(a+b+c)^3$.

〔證〕 自第一列及第二列減第三列。

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+b+c & 0 & -a-b-c \\ 0 & a+b+c & -a-b-c \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ c & a & 2c+a+2b \end{vmatrix}=(a+b+c)^2(2c+a+2b+a)$$

$$=2(a+b+c)^3。$$

5. 試示 $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}=4a^2b^2c^2$。

〔證〕 $\Delta=abc\begin{vmatrix} a & c & a+c \\ a+b & b & a \\ b & b+c & c \end{vmatrix}$ 此以下略。

6. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2(bc+ca+ab)^3$.

〔證〕 $\Delta=(b+c)^2\{(c+a)^2(a+b)^2-a^4\}-c^2\{c^2(a+b)^2-a^2b^2\}$

$+b^2\{c^2a^2-b^2(c+a)^2\}=(ab+bc+ca)$

$\{(b+c)^2(ab+bc+ca+2a^2)-c^2(ca+bc-ab)+b^2(ca-bc-ab)\}$

$=(ab+bc+ca)\{(ab+bc+ca)(\overline{b+c}^2-c^2-b^2)+2a^2(b+c)^2+2abc^2+2cab^2)\}$

$=(ab+bc+ca)\{(ab+bc+ca)2bc+2a(b+c)(ab+bc+ca)\}=2(ab+bc+ca)^3$.

7. $\begin{vmatrix} -bc & bc+b^2 & bc+c^2 \\ ca+a^2 & -ca & ca+c^2 \\ ab+a^2 & ab+b^2 & -ab \end{vmatrix}=(bc+ca+ab)^3$。

〔證〕 $\Delta=-bc\{a^2bc-(ab+b^2)(ca+c^2)\}-(ca+a^2)$
$\{-ab(bc+b^2)-(ab+b^2)(bc+c^2)\}+(ab+a^2)\{(bc+b^2)(ca+c^2)+ca(bc+c^2)\}$
$=b^2c^2(ab+bc+ca)+ab(b+c)(c+a)(ab+bc+ca)+ac(a+b)(b+c)(ab+bc+ca)$
$=(ab+bc+ca)\{b^2c^2+ab(b+c)(c+a)+ac(a+b)(b+c)\}=(ab+bc+ca)^3$。

8. $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3$。

〔證〕 $a=0$ 則 $\Delta=\begin{vmatrix} b^2 & 0 & bc \\ 0 & (b+c)^2 & 0 \\ bc & 0 & c^2 \end{vmatrix}=bc\begin{vmatrix} b & 0 & b \\ 0 & (b+c)^2 & 0 \\ c & 0 & c \end{vmatrix}=0$。

∴ a爲Δ之因子。由同法 b, c 亦爲Δ之因子。又以Δ之第一列加於第二及第三列，以第一行加於第二及第三行。則

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2(a+b+c)^2 & (b+c)(a+b+c) & (c+a)(a+b+c) \\ (b+c)(a+b+c) & (b+c)^2 & ab \\ (c+a)(a+b+c) & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2 & b+c & c+a \\ b+c & (b+c)^2 & ab \\ c+a & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

由是 $abc(a+b+c)^2$ 爲Δ之因子，而Δ爲六次式。

$\Delta=Labc(a+b+c)^3$，　$a=b=c=1$　則　$L=2$。

9. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3$。

10. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$

$=-(a+b+c)(-a+b+c)(-b+c+a)(-c+a+b)$。

〔證〕將第一式之第二行第三行及第四行順次以bc, ca及ab乘之。然後將第一列第二列第三列及第四列順次以abc, a, b, 及c除之。而得第二式其値不變。由是第一式等於第二式。次於第一式以其他之三列加於第一列。皆爲a+b+c。故a+b+c爲第一式之因子。又第一列以第二列加之。而減第三第四列之和。則皆爲$-a+b+c$。故$-a+b+c$爲第一式之因子。其他用同樣之法而得$a-b+c$及$a+b-c$之因子。

11. $$\begin{vmatrix} o & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & o & \gamma^2 & \beta^2 \\ b^2 & \gamma^2 & o & \alpha^2 \\ c^2 & \beta^2 & \alpha^2 & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & a\alpha & b\beta & c\gamma \\ a\alpha & o & c\gamma & b\beta \\ b\beta & c\gamma & o & a\alpha \\ c\gamma & b\beta & a\alpha & o \end{vmatrix}.$$

〔證〕第一式各列順次以$\alpha\beta\gamma$, abc, $a\beta c$, $ab\gamma$乘之。其各行順次以abc, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta c$除之而得第二式。

12. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc。$$

〔證〕a=0。則 $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = 0。$$

故a爲△之因子。由是$\Delta = Labc$。比較abc之係數爲$1=L$。

13. $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

〔證〕$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ -b & b & 0 & 1 \\ 0 & -c & c & 1 \\ 0 & 0 & -d & 1+d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & 0 & 1 \\ -c & c & 1 \\ 0 & -d & 1+d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -c & c & 1 \\ c & -d & 1+d \end{vmatrix}$$

$$= b\{c(1+d)+d\} + ac(+d) + bc(+d) = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

14. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c)$。

(證) 於第一列加他三列而得$a+b+c+d$。又從第一列加第二列而減第三第四列，得$a+b-c-d$，以下由同法得

$\Delta=L(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c)$。又 $1=L$。

15. $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}=x^3(x+10)$。

(證) $\Delta=\begin{vmatrix} 10+x & 2 & 3 & 4 \\ 10+x & 2+x & 3 & 4 \\ 10+x & 2 & 3+x & 4 \\ 10+x & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}=(10+x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}$

$=(x+10)\begin{vmatrix} 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & x & -x & 0 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}=(x+10)(-1)\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ x & -x & 0 \\ 0 & x & -x \end{vmatrix}$

$=(x+10)(-1)\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}=(x+10)(-1)(-x)^3=x^3(x+10)$。

16. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$。

(證) $\Delta=\dfrac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & da \\ -b^2 & ab & -bd & bc \\ -c^2 & cd & ca & -bc \\ -d^2 & -cd & bd & ad \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ -b^2 & ab & -bd & bc \\ -c^2 & cd & ca & -bc \\ -d^2 & -cd & bd & ad \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a}(a^2+b^2+c^2+d^2)\begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2。$$

17. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^2+abc \end{vmatrix}=0。$

(證) $\triangle=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & cda \\ 1 & c & c^2 & dab \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix}$

上之第二式之各列。順次以a, b, c, d乘之。而第四行以abcd除之。其值不變。其絕對值等於第一式而符號爲負。由是原式爲0。

18. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix}=a(b-a)^3。$

(證) $\triangle=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & b-a & 0 & a \\ 0 & 0 & b-a & b \\ a-b & a-b & a-b & b \end{vmatrix}=-(a-b)\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ b-a & 0 & a \\ 0 & b-a & a \end{vmatrix}$

$=-(a-b)\times-(b-a)\{0-a(b-a)\}=a(b-a)^3$

19. $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{vmatrix}=-(a-b)^4。$

〔證〕 $\Delta=\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & b \\ 0 & b-a & 0 & a \\ 0 & 0 & a-b & b \\ a-b & a-b & a-b & b \end{vmatrix}=(a-b)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix}$

$=(a-b)^3\begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix}-(a-b)^3\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix}=-(a-b)^3a+(a-b)^3b$。

20. $\begin{vmatrix} ax-by-cz & ay+bx & cx+az \\ ay+bx & by-cz-ax & bz+cy \\ cx+az & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix}$

$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)(ax+by+cz)$。

〔證〕 各行順次以a, b, c乘之，各列順次以x, y, z乘之。而於第一行加以第二第三行，然後於第一列加以第二第三列如次。

$\Delta=\frac{1}{abcxyz}\begin{vmatrix} (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) & b^2(x^2+y^2+z^2) & c^2(x^2+y^2+z^2) \\ (a^2+b^2+c^2)y^2 & by(by-cz-ax) & cy(bz+cy) \\ (a^2+b^2+c^2)z^2 & bz(bz+cy) & cz(cz-ax-by) \end{vmatrix}$

$=\frac{1}{ax}(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ y & by-cz-ax & bz+cy \\ z & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix}$

但 $\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ y & by-cz-ax & bz+cy \\ z & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & o & c \\ y & -cz-ax & bz+cy \\ z & cy & cz-ax-by \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 1 & o & o \\ y & -cz-ax & bz \\ z & cy & -ax-by \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} bz & -ax-by \\ -cz-ax & cy \end{vmatrix}$

$=-bcyz+(cz+ax)(ax+by)=(ax+by+cz)ax$，

由是 $\Delta=\frac{1}{ax}(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)ax(ax+by+cz)$

21. $\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix}=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

〔證〕 $\Delta=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2-(b-c)^2 & 2bc \\ 2b^2 & b^2-(c-a)^2 & 2ca \\ 2c^2 & c^2-(a-b)^2 & 2ab \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2a^2 & -(a^2+b^2+c^2) & 2bc \\ 2b^2 & -(b^2+c^2+a^2) & 2ca \\ 2c^2 & -(c^2+a^2+b^2) & 2ab \end{vmatrix}=-(a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} a^2 & 1 & bc \\ b^2 & 1 & ca \\ c^2 & 1 & ab \end{vmatrix}$$

$=-(a^2+b^2+c^2)\{a^2(ab-ca)-b^2(ab-bc+)c^2(ca-bc)\}$

$=(a^2+b^2+c^2)(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$。

22. $\begin{vmatrix} (b-c)^2 & (a-b)^2 & (a-c)^2 \\ (b-a)^2 & (c-a)^2 & (b-c)^2 \\ (c-a)^2 & (c-b)^2 & (a-b)^2 \end{vmatrix}=-2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^3$。

〔證〕 於第一行加以第二第三行得

$$\Delta=\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\begin{vmatrix} 1 & (a-b)^2 & (a-c)^2 \\ 1 & (c-a)^2 & (b-c)^2 \\ 1 & (c-b)^2 & (a-b)^2 \end{vmatrix}$$

$=-\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\{\sum(a-b)^4-\sum(b-c)^2(c-a)^2\}$

$=-\frac{1}{4}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}^4$

23. 某定準數爲0。其任意一列之小定準數。與他之任意一列之小定準數。其比例之記法如何。

〔證〕 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\cdots\cdots\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3\cdots\cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3\cdots\cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}=0$。

然 $a_1A_1+a_2A_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nA=0$.

由426章 $c_1A_1+c_2A_2+\cdots\cdots\cdots+c_nA_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

此 $n-1$ 個之方程式。以 $B_1B_2\cdots\cdots\cdots\cdots$ 代 $A_1A_2\cdots\cdots\cdots\cdots$ 爲能適合。故 $A_1:B_1=A_2:B_2=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

24. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1,$

(證) $\Delta = abcd \begin{vmatrix} a+\frac{1}{a} & b & c & d \\ a & b+\frac{1}{b} & c & d \\ a & b & c+\frac{1}{c} & d \\ a & b & c & d+\frac{1}{d} \end{vmatrix}$

$= abcd \begin{vmatrix} a+\frac{1}{a} & b & c & d \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = a^2+1+b^2+c^2+d^2$。

25. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2+\alpha^2 & ab+\alpha\beta & ac+\alpha\gamma \\ 1 & ab+\alpha\beta & b^2+\beta^2 & bc+\beta\gamma \\ 1 & ac+\alpha\gamma & bc+\beta\gamma & c^2+\gamma^2 \end{vmatrix} = (b\gamma-c\beta+c\alpha-a\gamma+a\beta-b\alpha)^2$

(證) 由第二列減第三列。由第三列減第四列。且令

$a-b=A,\ \ b-c=B,\ \ \alpha-\beta=\lambda,\ \ \beta-\gamma=\mu$ 如次。

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & aA+\alpha\lambda & bA+\beta\lambda & cA+\gamma\lambda \\ 0 & aB+\alpha\mu & bB+\beta\mu & cB+\gamma\mu \\ 1 & ac+\alpha\gamma & bc+\beta\gamma & c^2+\gamma^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ aA+\alpha\lambda & bA+\beta\mu & cA+\gamma\lambda \\ aB+\alpha\mu & bB+\beta\mu & cB+\gamma\mu \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ aA+\alpha\lambda & -A^2-\lambda^2 & -AB-\lambda\mu \\ aB+a\mu & -AB-\lambda\mu & -B^2-\mu^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -A^2-\lambda^2 & -AB-\lambda\mu \\ -AB-\lambda\mu & -B^2-\mu \end{vmatrix}$

$=(A^2+\lambda^2)(B^2+\mu^2)-(AB-\lambda\mu)^2=(A\mu-B\lambda)^2=(b\gamma-c\beta+c\alpha-a\gamma+a\beta-b\alpha)^2$

26. 證 $\begin{vmatrix} o & o & o & a & b & c \\ o & o & z & a & b & o \\ o & y & o & a & o & c \\ x & o & o & o & b & c \\ x & y & z & o & o & o \end{vmatrix}=0$。

〔證〕於第五列加第一列之倍。於第四列加第二列及第三列。

則 $\begin{vmatrix} o & o & o & a & b & c \\ o & o & z & a & b & o \\ o & y & o & a & o & o \\ x & y & z & 2a & 2b & 2c \\ x & y & z & 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$ 第四列與第五列相等由是此值爲0。

27. $\begin{vmatrix} x^2-yz & y^2-zx & z^2-xy \\ z^2-xy & x^2-yz & y^2-zx \\ y^2-zx & z^2-xy & x^2-yz \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}^2$。試證之。

〔證〕 $\Delta=(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\begin{vmatrix} 1 & y^2-zx & z^2-xy \\ 1 & x^2-yz & y^2-zx \\ 1 & z^2-xy & x^2-yz \end{vmatrix}$

$$=(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\begin{vmatrix} 1 & y^2-zx & z^2-xy \\ 0 & (x-y)(x+y+z) & (y-z)(y+z+x) \\ 0 & (z-x)(x+y+z) & (x-y)(x+y+z) \end{vmatrix}$$

$$=(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)(x+y+z)^2\{(x-y)^2-(z-x)(y-z)\}$$

$$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2=\{-x(yz-x^2)+y(y^2-zx)-z(xy-z^2)\}^2$$

$$=\left\{x\begin{vmatrix} z & x \\ x & y \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} y & z \\ x & y \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} y & z \\ z & x \end{vmatrix}\right\}^2=\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}^2.$$

28. $\begin{vmatrix} \lambda & c & -b \\ -c & \lambda & a \\ b & -a & \lambda \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a^2+\lambda^2 & ab-\lambda c & ac+\lambda b \\ ab+\lambda c & b^2+\lambda^2 & bc-\lambda a \\ ac+\lambda b & bc+\lambda a & c^2+\lambda^2 \end{vmatrix}$

$=\lambda^3(\lambda^2+a^2+b^2+c^2)^3$。

〔證〕由430章。兩式之積爲

$$\begin{vmatrix} \lambda(a^2+\lambda^2)-c(ab-\lambda c)+b(ac+\lambda b) & c(a^2+\lambda^2)+\lambda(ab-\lambda c)-a(ac+\lambda b) & -b(b^2+\lambda^2)+a(ab+\lambda c)+\lambda(ac+\lambda b) \\ \lambda(ab+\lambda c)-c(b^2+\lambda^2)+b(bc-\lambda a) & c(ab+\lambda c)+\lambda(b^2+\lambda^2)-a(bc-\lambda a) & -b(ab+\lambda c)+a(b^2+\lambda^2)+\lambda(bc-\lambda a) \\ \lambda(ac-\lambda b)-c(bc+\lambda a)+b(c^2+\lambda^2) & c(ac-\lambda b)+\lambda(bc+\lambda a)-a(c^2+\lambda^2) & -b(ac-\lambda b)+a(bc+\lambda a)-\lambda(c^2+\lambda^2) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda^3+(a^2+b^2+c^2)\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3+(a^2+b^2+c^2)\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+(a^2+b^2+c^2)\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3(\lambda^2+a^2+b^2+c^2)^3。$$

29. $\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ w & z & y & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x-w & y-z \\ a-d & b-c \end{vmatrix}$。

〔證〕由第四行減第一行,又由第三行減第二行,得

$$\begin{vmatrix} x & y & z-y & w-x \\ a & b & c-b & d-a \\ d & c & b-c & a-d \\ w & z & y-z & x-w \end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2x & 2y & z-y & w-x \\ 2a & 2b & c-b & d-a \\ 2d & 2c & b-c & a-d \\ 2w & 2z & y-z & x-w \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} x+w & y+z & z-y & w-x \\ a+d & b+c & c-b & d-a \\ 0 & 0 & 2(b-c) & 2(a-d) \\ 0 & 0 & 2(y-z) & 2(x-w) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} b-c & a-d \\ y-z & x-w \end{vmatrix}.$$

第叁拾貳編

論理方程式

435. 函數 (Function) 凡含有x之任何代數式，謂之x之函數，而以其類似者，分別記以$f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$等各個之記號，

凡含有x之n次有理整代數式，其公式爲

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n$。

但$a_0, a_1, a_2,\cdots\cdots$不含有x者。又n爲任意之整數。

凡方程式。往往將其諸項盡集於壹邊。而令又壹邊爲0。故凡含有x之n次有理整方程式，其公式可爲

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n=0$。

方程式以不含x之任壹數除其各項，其值不變。故以a_0除上之方程式，而得x之n次方程式，爲

$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_n=0$。

但 $p_1=\dfrac{a_1}{a_0}$, $p_2=\dfrac{a_2}{a_0}$,$\cdots\cdots$亦皆不含x者。而$p_1, p_2, p_3,\cdots\cdots$任爲何數。

436. 根原之定理 各方程式，必有壹實根或虛根。

n次方程式。必有n根。其理可得證明如次。

設方程式爲$f(x)=0$。卽 $f(x)\equiv x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n$。

由根原之定理。此方程式必有壹根。設此壹根爲a_1。由88章此$f(x)$可以$x-a_1$除盡之，

故 $f(x)=(x-a_1)\phi(x)$。但$\phi(x)$爲x之整函數。而爲$n-1$次式。

又$\phi(x)=0$。亦必有壹根。設此一根爲a_2。故$\phi(x)=(x-a_2)\varphi(x)$，

但$\varphi(x)$爲x之整函數。而爲$n-2$次式。故$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\varphi(x)$

順是推之，得$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots(x-a_n)$，

如是可知$a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots a_n$爲$f(x)=0$之各根。而以任壹根代其$x$，無不適合。

上之根數量$a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_n$爲各相異者。

若含於$f(x)$之各因子。其$x-a_1$有p個，$x-a_2$有q個，$x-a_3$有r個，其他因子。亦不止壹個者。則$f(x)=(x-a_1)^p(x-a_2)^q(x-a_3)^r\cdots\cdots\cdots\cdots$

但此式爲n次式，故$p+q+r+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=n$。

故凡n次方程式$f(x)=0$。若其根有p個a_1，q個a_2，r個$a_3\cdots\cdots\cdots\cdots$則$p+q+r+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=n$。

437. 根及係數之關係 設$a_1, a_2, a_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$爲方程式$f(x)=0$之各根，

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(x-a_n)。$$

由260章得
$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+p_n$$
$$=x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^nS_n,$$

於上之恆同式，比較x各方乘之係數。爲

$$S_1=-\sum a_1=-p_1,\quad S_2=\sum a_1a_2=p_2,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_r=(-1)^rp_r,\cdots\cdots S_n=(-1)^np_n,$$

438. 根之等勢式 由前章之法。將方程式各項之係數示以根之等勢函數，而若干根函數之值。可得以各係數表之，

〔第壹例〕 設方程式$x^3+px^2+qx+r=0$之根爲a, b, c，求其(1) $\sum a^2$，(2) $\sum a^2b^2$之值。

惟因$a+b+c=-p,\quad ab+bc+ca=q,\quad abc=-r$。

由是$\sum a^2=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=p^2-2q,$

又$\sum a^2b^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)=q^2-2pr$。

〔第貳例〕 設方程式$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$之根爲$a, b, c\cdots\cdots$。求$\sum a^2$及$\sum a^3$之值，

惟因$\sum a=-p_1,\quad \sum ab=p_2$及$\sum abc=-p_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

今$(\sum a)^2=(a+b+c+\cdots\cdots)^2=\sum a^2+2\sum ab$。

$\therefore\quad \sum a^2=(\sum a)^2-2\sum ab=p_1{}^2-2p_2$。

又$\quad \sum a^2\sum a=\sum a^3+\sum a^2b,$

而 $\sum a^2b=\sum ab\sum a-3\sum abc$,

(何則於 $\sum ab\cdot\sum a$ 其中含有 a^2b 及 abc 等之項。惟其中 a^2b 或 ab^2 等各祇有壹項。而以 ab, bc, ca 等乘 a, b, c 等則有 $3abc$。

$\therefore\quad \sum ab.\sum a=\sum a^2b+3\sum abc$)。

由是 $\sum a^3=\sum a^2\sum a-\sum ab\cdot\sum a+3\sum abc$

$$=(p_1{}^2-2p_2)(-p_1)-p_2(-p_1)-3p_3。$$

439. 定理 設有 n 個數量 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots$。其 m 爲小於 n 之任何整數量。則

$$\sum a_1{}^m=\sum a_1{}^{m-1}\cdot\sum a_1-\sum a^{m-2}\cdot\sum a_1a_2+\sum a_1{}^{m-3}\bullet\sum a_1a_2a_3-\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mp\sum a_1\cdot\sum a_1a_2\cdots\cdots a_{m-1}\pm m\cdot\sum a_1a_2\cdots\cdots a_m。$$

此式有次之關係,

$$\left.\begin{array}{r}\sum a_1{}^m=\sum a_1\cdot\sum a_1{}^{m-1}-\sum a_1{}^{m-1}a_2,\\ \sum a_1{}^{m-1}a_2=\sum a_1a_2\cdot\sum a_1{}^{m-2}-\sum a_1{}^{m-2}a_2a_3,\\ \sum a_1{}^{m-2}a_2a_3=\sum a_1a_2a_3\cdot\sum a_1{}^{m-3}-\sum a_1{}^{m-3}a_2a_3a_4,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum a_1{}^2a_2a_3\cdots\cdots a_{m-1}=\sum a_1a_2\cdots\cdots a_{m-1}\cdot\sum a_1-m\sum a_1a_2\cdots\cdots a_m\end{array}\right\}\cdots\cdots(A)$$

先證第壹之關係。其於 $\sum a_1\cdot\sum a_1{}^{m-1}$ 中。含有 $a_1{}^m$ 及 $a_1{}^{m-1}a_2$ 等項。而其各項之係數爲一。故 $\sum a_1\cdot\sum a_1{}^{m-1}=\sum a_1{}^m+\sum a_1{}^{m-1}a_2$。

除最後之關係式外。其他之關係亦可用同法證得之。

次證最後之關係。其於 $\sum a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_{m-1}\cdot\sum a_1$ 中之各項含有如 $a_1{}^2a_2a_3\cdots\cdots\cdots a_{m-1}$ 之形。及 $a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_m$ 之形之貳種。而此第壹種如 $a_1a_2\cdots\cdots\cdots a_m\times a_1$ 之形者。祇各有壹項。其第貳種以 $\sum a_1$ 之各項乘於 $\sum a_1a_2\cdots\cdots a_{m-1}$ 而得如 $a_1a_2\cdots\cdots a_m$ 之形者有 m 倍,

由是 $\sum a_1a_2\cdots\cdots a_{m-1}\cdot\sum a_1=\sum a_1{}^2a_2\cdots\cdots a_{m-1}+m\cdot\sum a_1a_2\cdots\cdots a_m$。

乃由關係式(A)。直得次式。

$$\sum a_1{}^m=\sum a_1{}^{m-1}\cdot\sum a_1-\sum a_1{}^{m-2}\cdot\sum a_1a_2+\sum a_1{}^{m-3}\cdot\sum a_1a_2a_3-\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm m\sum a_1a_2\cdots\cdots a_m\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

設 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots$ 爲方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$ 之 n 根。

故 $\sum a_1=-p_1$, $\sum a_1a_2=p_2$, $\sum a_1a_2a_3=-p_3\cdots\cdots\cdots\cdots$ 以代入於 B。而得

$$\sum a_1{}^m+p_1\cdot\sum a_1{}^{m-1}+p_2\cdot\sum a_1{}^{m-2}+\cdots\cdots+p_{m-1}\sum a_1+p_m\cdot m=0\cdots\cdots\cdots(C)$$

(C) 為n次方程式各根m乘冪$(m \not> n)$之和，而以係數及根之低乘冪之和表示之。由是可得次之諸公式，

$$\begin{aligned}
&\sum a_1+p_1=0,\\
&\sum a_1^2+p_1\sum a_1+2p_2=0,\\
&\sum a_1^3+p_1\sum a_1^2+p_2\sum a_1+3p_3=0,\\
&\sum a_1^4+p_1\sum a_1^3+p_2\sum a_1^2+p_3\sum a_1+4p_4=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

今欲消去$\sum a_1^2$及$\sum a_1$，將上之最初之三方程式列之如次，

$$\begin{aligned}
p_1\sum a_1^2+p_2\sum a_1+3p_3+\sum a_1^3&=0,\\
\sum a_1^2+p_1\sum a_1+2p_2\qquad&=0,\\
\sum a_1+p_1\qquad&=0,
\end{aligned}$$

由434章 $$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 3p_3+\sum a_1^3 \\ 1 & p_1 & 2p_2 \\ 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix}=0,$$

即 $$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 3p_3 \\ 1 & p_1 & 2p_2 \\ 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \sum a_1^3 \\ 1 & p_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 3p_3 \\ 1 & p_1 & 2p_2 \\ 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix}+\sum a_1^3=0,$$

如欲求$\sum a_1^m$。則取前之最初方程式消去其$\sum a_1^{m-1}$, $\sum a_1^{m-2}$,……………$\sum a_1$。由前之法則，推得

$$\begin{vmatrix}
p_1 & p_2 & p_3\cdots\cdots\cdots\cdots p_{m-1} & m\cdot p_m+\sum a_1^m \\
1 & p_1 & p_2\cdots\cdots\cdots\cdots p_{m-2} & (m-1)p_{m-1} \\
0 & 1 & p_1\cdots\cdots\cdots\cdots p_{m-3} & (m-2)p_{m-2} \\
0 & 0 & 1\cdots\cdots\cdots\cdots p_{m-4} & (m-3)p_{m-3} \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
0 & 0 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots 1 & p_1
\end{vmatrix}$$

即 $$\begin{vmatrix}
p_1 & p_2 & p_3\cdots\cdots p_{m-1} & mp_m \\
1 & p_1 & p_2\cdots\cdots p_{m-2} & (m-1)p_{m-1} \\
0 & 1 & p_1\cdots\cdots p_{m-3} & (m-2)p_{m-2} \\
0 & 0 & 1\cdots\cdots p_{m-4} & (m-3)p_{m-3} \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 & p_1
\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}
p_1 & p_2 & p_3\cdots\cdots p_{m-1} & \sum a_1^m \\
1 & p_1 & p_2\cdots\cdots p_{m-2} & 0 \\
0 & 1 & p_1\cdots\cdots p_{m-3} & 0 \\
0 & 0 & 1\cdots\cdots p_{m-4} & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 & 0
\end{vmatrix}=0.$$

則 $\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3\cdots\cdots p_{m-1} & mp_m \\ 1 & p_1 & p_2\cdots\cdots p_{m-2} & (m-1)p_{m-1} \\ 0 & 1 & p_1\cdots\cdots p_{m-3} & (m-2)p_{m-2} \\ 0 & 0 & 1\cdots\cdots p_{m-4} & (m-3)p_{m-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 & p_1 \end{vmatrix} + \sum a_1^m = 0$。

由是 $\sum a_1^m$ 爲 $p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots\cdots$ 之整函數。

若 m 大於 n，其與 (C) 相應之關係式，亦容易求得。何則，設 $a_1, a_2\cdots$ 爲 $f(x)=0$ 之根。故得次之 n 方程式，

$$a_1^n+p_1a_1^{n-1}+p_2a_1^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n=0,$$
$$a_2^n+p_1a_2^{n-1}+p_2a_2^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n^n+p_1a_n^{n-1}+p_2a_n^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n=0,$$

將上之諸方程式順次以 a_1^{m-n}, a_2^{m-n}, $\cdots\cdots\cdots$ 乘之，而得

$$a_1^m+p_1a_1^{m-1}+p_2a_1^{m-2}+\cdots\cdots\cdots+p_na_1^{m-n}=0,$$
$$a_2^m+p_1a_2^{m-1}+p_2a_2^{m-2}+\cdots\cdots\cdots+p_na_2^{m-n}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n^m+p_1a_n^{m-1}+p_2a_n^{m-2}+\cdots\cdots\cdots+p_na_n^{m-n}=0,$$

由加法得 $\sum a_1^m+p_1\sum a_1^{m-1}+p_2\sum a_1^{m-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n\sum a_1^{m-n}=0\cdots$(D)。

(C) 爲奈端〔Newton〕氏之考察。由 (D) 可得以任何方程式各根 m 乘冪之和。表示其方程之有理整函數。但 m 爲任意之正整數。

440。根之等勢函數 凡方程式各根之有理整等勢函數。可用次之關係式表示其係數之項。

$$\sum a_1=-p_1,\ \sum a_1a_2=p_2,\ \sum a_1a_2a_3=-p_3,$$

先推究三次之等勢函數。由前之關係易知

$$-p_1^3=\sum a_1^3+3\sum a_1^2a_2+6\sum a_1a_2a_3,$$
$$-p_1p_2=\sum a_1^2a_2+3\sum a_1a_2a_3,$$
$$-p_3=\sum a_1a_2a_3。$$

由上之三方程式。可求得 $\sum a_1^3$, $\sum a_1^2a_2$, $\sum a_1a_2a_3$ 而此三者之外更無他種三次之等勢函數。

同法可得以p_1^4, $p_1^2p_2$, p_1p_3, p_2^2, p^4表示四次之等勢函數,而四次之等勢函數。可得同值之方程式。

五次及五次以上之等勢函數值,可用同法推得之,

於p字下之右隅所表示數字之和,等於等勢函數之次數,

例p_1^4即$p_1\cdot p_1\cdot p_1\cdot p_1$其所表數字之和爲$1+1+1+1=4$。則爲四次之等勢函數。

441. 等勢函數之例 方程式根之有理整等勢函數可得以其各根某乘羃之項表示之。而用奈端氏所定之考案爲便。此方法視次例可知。

〔第壹例〕試以$\sum a_1^p$, $\sum a_1^q$, 及$\sum a_1^{p+q}$之項表示$\sum a_1^pa_2^q$。

$$\sum a_1^p=a_1^p+a_2^p+a_3^p+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum a_1^q=a_1^q+a_2^q+a_3^q+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $$\sum a_1^p\cdot\sum a_1^q=a_1^{p+q}+a_2^{p+q}+\cdots\cdots+a_1^pa_2^q+\cdots\cdots+a_1^qa_2^p+\cdots\cdots$$
$$=\sum a_1^{p+q}+\sum a_1^pa_2^q。$$

由是 $$\sum a_1^pa_2^q=\sum a_1^p\cdot\sum a_1^q-\sum a_1^{p+q}。$$

若 $p=q$。則

$$\sum a_1^p\cdot\sum a_1^p=a_1^{2p}+a_2^{2p}+\cdots\cdots+a_1^pa_2^p+\cdots\cdots+a_1^pa_2^p+\cdots\cdots$$
$$=\sum a_1^{2p}+2\sum a_1^pa_2^p,$$

由是 $$\sum a_1^pa_2^p=\frac{1}{2}(\sum a_1^p)^2-\frac{1}{2}\sum a_1^{2p}。$$

〔第貳例〕試以各根某乘羃和之項,表示$\sum a_1^pa_2^qa_3^r$。

$$\sum a_1^p=S_p=a_1^p+a_2^p+a_3^p+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\sum a_1^q=S_q=a_1^q+a_2^q+a_3^q+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\sum a_1^r=S_r=a_1^r+a_2^r+a_3^r+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由是 $$S_p\cdot S_q\cdot S_r=\sum a_1^{p+q+r}+\sum a_1^{p+q}a_2^r+\sum a_1^{p+r}a_2^q$$
$$+\sum a_1^{q+r}a_2^p+\sum a_1^pa_2^qa_3^r。$$

由第壹例。得

$$\sum a_1^pa_2^qa_3^r=S_p\cdot S_q\cdot S_r-S_{p+q}\cdot S_r-S_{p+r}\cdot S_q-S_{q+r}\cdot S_p+2S_{p+q+r},$$

前式惟p,q,r之値各相異者。能合於理,若$p=q=r$。則

$$S_p^3=(a_1^p+a_2^p+a_3^p+\cdots\cdots)^3=\sum a_1^{3p}+3\sum a_1^{2p}a_2^p+6\sum a_1^pa_2^pa_3^p。$$

由第壹例得 $\sum a_1^{2p}a_2^p = \sum a_1^{2p}\cdot\sum a_1^p - \sum a_1^{3p}$。

故 $S_p^3 = \sum a_1^{3p} + 3(\sum a_1^{2p}\cdot\sum a_1^p - \sum a_1^{3p}) + 6\sum a_1^p a_2^p a_3^p$。

由是 $\sum a_1^p a_2^p a_3^p = \frac{1}{6}\{S_p^3 - 3S_{2p}S_p + 3S_{3p}\}$。

方程式之變化

442. 方程式之變化 推究壹方程式之根與他之已知方程式之根。有特別關係者。

〔第壹〕 求與已知方程式之根符號反對者之方程式，

設已知方程式爲 $f(x)=0$。則所求之方程式爲 $f(-y)=0$，

何則，設 $f(x)=0$ 之壹根爲 a，則 $f(a)=0$，而 $-a$ 爲 $f(-y)=0$ 之壹根。

例已知方程式 $p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots\cdots + p_n = 0$，則所求之方程式爲 $p_0(-y)^n + p_1(-y)^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots\cdots + p_n = 0$，以 -1 乘之，即得 $p_0y^n - p_1y^{n-1} + p_2y^{n-2} - \cdots\cdots (-1)^n p_n = 0$。

由是知欲求一方程式。與已知方程式各根之符號相反者。將已知方程式從第二項起變其相間項之符號即得。

〔第貳〕 以壹數量乘已知方程式之各根，求以乘得數爲根之方程式。

設已知方程式爲 $f(x)=0$。以壹數量乘其各根。令 $y=cx$，故 $\frac{y}{c}=x$。

以是所求之方程式爲 $f\left(\frac{y}{c}\right)=0$。

何則，設 $f(x)=0$ 之壹根爲 a，則 $f(a)=0$。而 ac 爲 $f\left(\frac{y}{c}\right)=0$ 之壹根，

例已知方程式爲 $p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \cdots\cdots + p_n = 0$。

則所求之方程式，爲 $p_0\left(\frac{y}{c}\right)^n + p_1\left(\frac{y}{c}\right)^{n-1} + p_2\left(\frac{y}{c}\right)^{n-2} + \cdots\cdots + p_n = 0$，

即 $p_0y^n + p_1cy^{n-1} + p_2c^2y^{n-2} + \cdots\cdots + p_nc^n = 0$。

〔注意〕 上之變化。爲去方程式各項係數分母之要法，

〔例〕以c乘$x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x+\frac{1}{18}=0$之根而爲根。其方程式如何。

所求之方程式。爲$y^3-\frac{1}{2}cy^2+\frac{1}{12}c^2y+\frac{1}{18}c^3=0$。

由是去已知方程式之分數。以c之最小數6乘之。即得所求之方程式。爲$y^3-3y^2+3y+12=0$。

〔第三〕從已知方程式之各根同減一數，求以減餘者爲根之方程式。

從已知方程式$f(x)=0$之各根減c。即$y=x-c$，故$x=y+c$，而$f(y+c)=0$，爲所求之方程式。

何則。設以a爲$f(x)=0$之壹根。則$f(a)=0$，而$a-c$爲$f(y+c)=0$之壹根。

求$f(y+c)$之簡法。詳示於後之472章。

〔注意〕上之變化法。用以求數係數方程根之漸近數。或用以消去已知方程式之特別壹項者。

〔例〕求其根爲從$x^3-3x^2-9x+5=0$減c之方程式。

所求之方程式爲$f(y+c)=0$，

即 $(y+c)^3-3(y+c)^2-9(y+c)+5=0$,

即 $y^3+(3c-3)y^2+(3c^2-6c-9)y+c^3-3c^2-9c+5=0$,

如欲消去其第貳項即y^2之係數而爲0，則令$3c-3=0$，$\therefore c=1$，

如欲消去其第三項即y之係數而爲0，則令$3c^2-6c-9=0$，

即 $(c-3)(c+1)=0$，$\therefore$ $c=3$ 或 $c=-1$。

〔第四〕以已知方程式各根之反商爲各根。其方程式如何。

設已知方程式爲$f(x)=0$，則其所求之方程式爲$f\left(\frac{1}{x}\right)=0$，

此變化法。用以求已知方程根負乘冪之和者。蓋以$f\left(\frac{1}{x}\right)$

即 $f(x^{-1})$ 爲 $f(x)=0$之根之負乘冪故也。

443. 反商方程式 方程式任壹根之反商，亦爲此方程式之根者，則此方程式。謂之反商方程式

例 $2x^2-5x+2=0$ 之貳根為 2 及 $\frac{1}{2}$。而此反商 $\frac{1}{2}$，2。亦為此方程式之根。故謂之反商方程式。

方程式為反商方程式者。可求其關係，

設方程式為 $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$。

而以其根之反商為根作方程式，為

$$p_0\left(\frac{1}{x}\right)^n+p_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0。$$

以 x^n 乘之。為 $p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_nx^n=0$，

若原方程式為反商方程式。則此方程式之根。與原方程式之根相同。故此方程式與原方程式 x 等冪之係數。其比相同。

即 $\frac{p_0}{p_n}=\frac{p_1}{p_{n-1}}=\frac{p_2}{p_{n-2}}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{p_n}{p_0}$。

從上式之首末貳等比而得 $p_n^2=p_0^2$。 即 $p_n=\pm p_0$。

由同法 $p_{n-1}=\pm p_1$， $p_{n-2}=\pm p_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$。

$p_n=+p_0$，則自左向右，與自右向左，各項係數之次序相等。此謂反商方程式之第壹種。

$p_n=-p_0$，則向左向右。各項係數之絕對值仍相等。惟異其符號而已。此謂反商方程式之第貳種。

444.反商方程式之性質 反商方程式之性質。其最要者如次，學者可自明瞭也。

〔第壹〕第壹種之反商方程式。其次數為奇數者。則必含有 -1 之壹根。

例 $2x^3+5x^2+5x+2$ 之壹根為 -1。

〔第貳〕第貳種之反商方程式。其次數為奇數者。則必含有 $+1$ 之壹根。

例 $2x^3-5x^2+5x-2$ 之壹根為 $+1$。

〔第三〕第貳種之反商方程式。其次數為偶數者。則必含有 ±1 之貳根。

例 $2x^4-5x^3+5x-2=0$ 之貳根為 ±1。

此方程式可令等於$2x^4-5x^3+ax^2-ax^2+5x-2=0$而推究之。即$x^2$之係數爲零者。

〔第四〕旣知第壹第貳第叁之性質。乃將上所述之反商方程式。除去其與根$(-1,\ +1,\ \pm 1)$相應之因子。則其餘之方程式。必爲第壹種之反商方程式。而其次數爲偶數者。

〔第五〕第壹種之反商方程式。其次數爲偶數，可以y代其$x+x^{-1}$。而所得之方程式。其次數必爲原方程式次數之半。

設反商方程式爲$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$,

然 $a_0(x^{2n}+1)+a_1(x^{2n-1}+x)+\cdots\cdots\cdots=0$,

以x^n除之得 $a_0(x^n+x^{-n})+a_1(x^{n-1}+x^{-n+1})+\cdots\cdots\cdots=0$,

令 $x+x^{-1}=y$。則$x^2+x^{-2}=y^2-2$,

其關係之公式爲$x^n+x^{-n}=(x^{n-1}+x^{-n+1})(x+x^{-1})-(x^{n-2}+x^{-n+2})$,

若是x^n+x^{-n}可得以y之n次之整代數式表示之，故知原方程式爲y之n次方程式。

〔例〕解$6x^6-25x^5+31x^4-31x^2+25x-6=0$。

由第三而知此方程式有± 1之貳根，故以x^2-1除之。得

$6x^4-25x^3+37x^2-25x+6=0$。

以x^2除之得 $6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-25\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+37=0$。

令 $x+\dfrac{1}{x}=y$ 則 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$,

由是 $6y^2-25y+25=0$。 $\therefore\ y=\dfrac{5}{2}$ 或 $\dfrac{5}{3}$。

從 $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ 則得 $x=2$ 或 $\dfrac{1}{2}$。

從 $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{3}$ 則得 $x=\dfrac{1}{6}(5\pm\sqrt{-11})$。

由是得所求之根爲$\pm 1,\ 2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{6}(5\pm\sqrt{-11})$。

445. 應用 上所述之例。爲應用於反商方程式者。玆更示方程式變化他種應用之例。

〔第壹例〕設 a, b, c 爲方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根，今以 bc, ca, ab 爲三根。其方程式如何，

惟以 $abc=-r$ (437章第壹例)，

則 $bc=\frac{abc}{a}=\frac{-r}{a}$。但 bc 爲所求方程式之壹根，即 $y=bc$，

又以 $x=a$， $y=\frac{-r}{x}$ 而 y 之三根 bc, ca, ab 與 x 之三根 a, b, c 相應，

故於原方程式以 $-\frac{r}{y}$ 代其 x。則 $\left(\frac{-r}{y}\right)^3+p\left(\frac{-r}{y}\right)^2+q\left(\frac{-r}{y}\right)+r=0$。

即 $-r^2+pry-qy^2+y^3=0$.

〔別法〕以 $a+b+c=-p$， $bc+ca+ab=q$， $abc=-r$。

所求之方程式爲 $(y-bc)(y-ca)(y-ab)=0$。

即 $y^3-(bc+ca+ab)y^2+abc(a+b+c)-a^2b^2c^2=0$，

即 $y^3-qy^2+pry-r^2=0$。

〔第貳例〕方程式爲 $x^3+px^2+qx+r=0$。乃以其各根之平方爲根。求其方程式。

從原方程式化得 $x(x^2+q)=-(px^2+r)$。

$\therefore\quad x^2(x^2+q)^2=(px^2+r)^2$。

今 $y=x^2$。 則 $y(y+q)^2=(py+r)^2$。

即 $y^3+(2q-p^2)y^2+(q^2-2pr)y-r^2=0$。

〔第三例〕設 a, b, c 爲 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根，乃以 $a(b+c)$， $b(c+a)$， $c(a+b)$ 爲三根。其方程式如何。

惟以 $a+b+c=-p$，故 $a(b+c)=a(-p-a)$，

同法 $b(c+a)=b(-p-b)$， $c(a+b)=c(-p-c)$，

由是 $y=x(-p-x)$， $\therefore\quad x^2+px+y=0$，

又從原方程式得 $x(x^2+px)+qx+r=0$，

即 $x(-y)+qx+r=0$。

$\therefore\quad x=\frac{r}{y-q}\quad\therefore\quad\left(\frac{r}{y-q}\right)^2+p\left(\frac{r}{y-q}\right)+y=0$。

即 $r^2+px(y-q)+y(y-q)^2=0$。

例題四十三

1. $a_1,\ a_2,\ a_3$ 爲 $x^3+px+q=0$ 之三根，求次之各値如何。

(i) $(a_2+a_3)(a_3+a_1)(a_1+a_2)$。

(ii) $(a_2+a_3-2a_1)(a_3+a_1-2a_2)(a_1+a_2-2a_3)$，

(iii) $\sum a_1^2$，　(iv) $\sum a_1^3$，　(v) $\sum a_1^4$，

(vi) $\sum a_1^2a_2$，　(vii) $\sum a_1^3a_2$，　(viii) $\sum(a_2^2-a_3a_1)(a_3^2-a_1a_2)$，

(ix) $(a_1^2-a_2a_3)(a_2^2-a_1a_3)(a_3^2-a_2a_1)$。　(x) $\sum\dfrac{1}{a_2+a_3}$。

(xi) $\sum\dfrac{1}{a_2+a_3-a_1}$。　(xii) $\sum\dfrac{1}{a_1{}^2+a_2a_3}$。

〔解〕 $a_1+a_2+a_3=0,\quad \sum a_1a_2=p,\quad a_1a_2a_3=-q$。

(i) 原式 $=(-a_3)(-a_2)(-a_1)=-a_1a_2a_3=q$，

(ii) 原式 $=(-a_1-2a_1)(-a_2-2a_2)(-a_3-2a_3)=-27a_1a_2a_3=27q$，

(iii) 原式 $=(\sum a_1)^2-2\sum a_1a_2=-2p$，

(iv) 原式 $=\sum a_1(\sum a_1^2-\sum a_1a_2)+3a_1a_2a_3=-3q$。

(v) 原式 $=(\sum a_1^2)^2-2\sum a_1^2a_2^2=(\sum a_1^2)^2-2\{(\sum a_1a_2)^2-2a_1a_2a_3\sum a_1\}=2p^2$。

(vi) 原式 $=\sum a_1\sum a_1a_2-3a_1a_2a_3=3q$，

(vii) 原式 $=\sum a_1^3(a_2+a_3)=-\sum a_1^4=-2p^2$。

(viii) 原式 $=\sum a_2^2a_3^2-\sum a_1a_2^3+a_1a_2a_3\sum a_1$。由 (v) 及 (vii)

$$=\frac{1}{2}\{(\sum a_1^2)^2-\sum a_1^4\}-(-2p^2)=3p^2。$$

(ix) 原式 $=a_1^2a_2^2a_3^2-\sum a_1^3a_2^3+a_1a_2a_3\sum a_1^3-a_1^2a_2^2a_3^2$

$$=-\{(\sum a_1a_2)^3-3a_1a_2a_3(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_1)\}+a_1a_2a_3\sum a_1^3$$

$$=-\{p^3-3(-q)(-a_3)(-a_1)(-a_2)\}-(-q)(-3q)=-p^3。$$

(x) 原式 $=\sum\dfrac{1}{-a}=-\dfrac{a_2a_3+a_3a_1+a_1+a_2}{a_1a_2a_3}=-\dfrac{p}{-q}=\dfrac{p}{q}$。

(xi) 原式 $=\sum\dfrac{1}{-2a_1}=\dfrac{p}{2q}$。

(xii) 原式 $=\sum\dfrac{1}{-a_1(a_2+a_3)+a_2a_3}=\sum\dfrac{1}{2a_2a_3-p}$。

$$=\frac{\sum(2a_3a_1-p)(2a_2a_3-p)}{(2a_2a_3-p)(2a_3a_1-p)(2a_1a_2-p)}。$$

$$=\frac{4a_1a_2a_3\sum a_1-4p\sum a_1a_2+3p^2}{8a_1^2a_2^2a_3^2-4pa_1a_2a_3\sum a_1+2p^2\sum a_1a_3-p_3}=\frac{-p^2}{8q^2-p^2}。$$

2. 求 $x^4+px+q=0$ 各根之(i)平方和(ii)立方和(iii)四乘和。

〔解〕 以 a_1, a_2, a_3, a_4 爲其四根。

則 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$, $\sum a_1a_2=0$, $\sum a_1a_2a_3=-p$, $a_1a_2a_3a_4=q$,

(i) $\sum a_1^2=(\sum a_1)^2-2\sum a_1a_2=0$,

(ii) 用439章之公式，則 $\sum a_1^3=-\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 3p_3 \\ 1 & p_1 & 2p_2 \\ 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=3p.$

(iii) $\sum a_1^4=-\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 4p_4 \\ 1 & p_1 & p_2 & 3p_3 \\ 0 & p & p_1 & 2p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 0 & 0 & p & 4q \\ 1 & 0 & 0 & 3p \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-4q,$

3. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根爲 a, b, c，則次之值若何。

(i) $(b+c-3a)(c+a-3b)(a+b-3c)$,

(ii) $\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$。

(iii) $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{ca}\right)\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{ab}\right)$,

〔解〕 $a+b+c=-p$, $\sum ab=q$, $abc=-r$,

(i) 原式 $=(-p-4a)(-p-4b)(-p-4c)$

$$=-(p^3+4p^2\sum a+16p\sum ab+64abc)$$
$$=-(p^3-4p^2+16pq-64r)=3p^3-16pq+64r,$$

(ii) 如以 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 爲三根，其方程式爲 $\frac{1}{x^3}+\frac{p}{x^2}+\frac{q}{x}+r=0$,

即 $x^3+\frac{q}{r}x^2+\frac{p}{r}x+\frac{1}{r}=0$, $\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=-\frac{p}{r}$,

$\sum\frac{1}{ab}=\frac{p}{r}$, $\frac{1}{abc}=-\frac{1}{r}$。 原式 $=\left(-\frac{q}{r}-\frac{2}{a}\right)\left(-\frac{q}{r}-\frac{2}{b}\right)\left(-\frac{q}{r}-\frac{2}{c}\right)$

$$=-\frac{q^3}{r^3}+\frac{2q^2}{r^3}\sum\frac{1}{a}-4\frac{q}{r}\sum\frac{1}{ab}-\frac{8}{abc}$$

$$=-\frac{q^3}{r^3}+\frac{2q^3}{r^3}-\frac{4q}{r^2}+\frac{8}{r}=\frac{q^3-4qr+8r^2}{r^3}$$

(iii) 原式 $=\frac{3}{a^2b^2c^2}-\sum\frac{1}{a^3b^3}+\frac{1}{abc}\sum\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^2b^2c^2}=\frac{q^3-p^3r}{r^4}$。

4. 求次之方程式各根平方之和及立方之和。

(i) $x^3-14x+8=0$, (ii) $x^4-22x^2+84x-49=0$,

(解) 由2及3得(i)平方之和28。立方之和-24。(ii) 44, -252,

5. 設 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$ 之根爲 $a, b, c\cdots\cdots$,則次之值如何。

(i) $\sum a^2$。 (ii) $\sum a^3$。 (iii) $\sum\frac{1}{a^2}$, (iv) $\sum\frac{a^2}{b}$。 (v) $\sum\frac{a^3}{b}$, (vi) $\sum\frac{a^3}{b^2}$,

(解) $a+b+c+\cdots\cdots=-p_1$, $\sum ab=p_2$, $\sum abc=-p_3\cdots$, $abc\cdots=(-1)^np_n$;

(i) $\sum a^2=(\sum a)^2-2\sum ab=p_1^2-2p_2$。

(ii) 由 $\sum a^3+p_1\sum a^2+p_2\sum a+3p_3=0$,

$\sum a^3=-p_1(p_1^2-2p_2)-p_2(-p_1)-3p_3=3p_1p_2-p_1^3-3p_3$,

(iii) $\sum\frac{1}{a^2}=\sum\frac{b^2c^2\cdots\cdots}{p^2_n}=\frac{1}{p^2_n}\{(\sum bc\cdots\cdots)^2-2abc\cdots\cdots\sum bc\cdots\cdots\}$

$=\frac{1}{p^2_n}\{p^2_{n-1}-2(-1)^np_n(-1)^{n-2}p_{n-2}\}=\frac{p^2_{n-1}+2p_np_{n-2}}{p^2_n}$,

(iv) $\sum\frac{a^2}{b}=\frac{\sum a^2-b^2}{b}+\frac{\sum a^2-a^2}{a}+\frac{\sum a^2-c^2}{c}+\cdots\cdots+=\sum a^2\sum\frac{1}{a}-\sum a$,

但 $\sum\frac{1}{a}=-\frac{p_{n-1}}{p_n}$　故 $=(p_1^2-2p_2)\left(-\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)-(-p_1)$

$=p_1+\frac{p_{n-1}(2p_2-p_1^2)}{p_n}$

(v) $\sum\frac{a^3}{b}=\frac{\sum a^3-b^3}{b}+\frac{\sum a^3-a^3}{a}+\frac{\sum a^3-c^3}{c}+\cdots\cdots=\sum a^3\sum\frac{1}{a}-\sum a^2$

$=(3p_1p_2-p_1^2-3p_3)\left(-\frac{p_{n-1}}{r_n}\right)-(p_1^2-2p_2)=(p_1^3+3p_3-3p_1p_2)\frac{p_{n-1}}{p_n}+2p_2-p_1^2$。

(vi) $\sum\frac{a^3}{b^2}=\frac{\sum a^3-b^3}{b^2}+\frac{\sum a^3-a^3}{a^2}+\cdots\cdots\cdots=\sum a^3\sum\frac{1}{a^2}-\sum a$

$=\sum a^3\left\{\left(\sum\frac{1}{a}\right)^2-2\sum\frac{1}{ab}\right\}-\sum a$　惟 $\sum\frac{1}{ab}=\frac{p_{n-2}}{p_n}$ 故

$=\frac{1}{p^2_n}(3p_1p_2-p_1^3-3p_3)(p^2_{n-1}-2p_{n-2}p_n)+p_1$。

6. 以方程式$x^3-4x^2+3x-1=0$之各根加2而爲根,其方程式如何。

(解) $x+2=y$。則 $x=y-2$。由是所求之方程式爲
$(y-2)^3-4(y-2)^2+3(y-2)-1=0$。即 $y^3-10y^2+31y-31=0$。

7. 以$6x^3-5x^2-\frac{1}{4}=0$各根之c倍爲各根,求其方程式,又最高方乘之係數爲1,而得整方程式,求c之最小整數值。

(解) $cx=y$。則 $\frac{6y^3}{c^3}-\frac{5y^2}{c^2}-\frac{1}{4}=0$。即 $y^3-\frac{5c}{6}y^2-\frac{c^3}{24}=0$。 $\therefore$ $c=6$。

8. 設x^3+px^2+qx+r之各根爲a,b,c。求其有下列各根之方程式。

(i) $ab,\ bc,\ ca$, (ii) $b+c,\ c+a,\ a+b$。

(iii) $\frac{a}{b+c},\ \frac{b}{a+c},\ \frac{c}{a+b}$. (iv) $a(b+c),\ b(c+a),\ c(a+b)$。

(v) $b^2+c^2,\ c^2+a^2,\ a^2+b^2$。 (vi) $bc-a^2,\ ca-b^2,\ ab-c^2$。

〔解〕 $a+b+c=-p$, $\sum ab=q$, $abc=-r$。

(i) 與445章第一例同法求之即得,

(ii) $b+c=a+b+c-a=-p-a$, 即 $y=-p-x$ $\therefore$ $x=-(y+p)$
以此代入原式而整列之。得 $y^3+2py^2+(p^2+q)y-r+pq=0$。

(iii) $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{-p-a}$ 即 $y=\frac{x}{-p-x}$ $\therefore$ $x=\frac{-py}{y+1}$.

由是 $-\frac{p^3y^3}{(y+1)^3}+\frac{p^3y^2}{(y+1)^2}-\frac{pqy}{y+1}+r=0$,

即 $y^3(r-pq)+y^2(3r-2pq+p^3)+y(3r-pq)+r=0$。

(iv) $a(b+c)=a(-p-a)$。即 $y=x(-p-x)$。 $\therefore$ $x^2+px=-y$。
從原方程式 $x(x^2+px)+qx+r=0$, 即 $x(-y)+qx+r=0$。

$\therefore$ $x=\frac{r}{y-q}$ 由是 $\frac{r^2}{(y-q)^2}+\frac{pr}{y-q}=-y$。

$\therefore$ $y^3-2qy^2+y(q^2+rp)+r^2-pqr=0$,

(v) $b^2+c^2=(a+b+c)^2-2\sum ab-a^2=p^2-2q-a^2$。
即 $y=p^2-2q-x^2$, $\therefore$ $x^2=p^2-2q-y$。
以代入原式得 $x(p^2-2q-y)+p(p^2-2q-y)+qx+r=0$。

$$x^2=\frac{(2pq-p^3-r+py)^2}{(p^2-q-y)^2}=p^2-2q-y。$$

(vi)　$bc-a^2=\frac{abc}{a}-a^2=\frac{-r}{a}-a^2$,　即　$y=-\frac{r}{x}-x^2$。

由是 $x^3+xy+r=0$。原方程式爲 $x^3+px^2+qx+r=0$,

由此兩方程式消去其x。則 $y^3-(3p-p^2)y^2+(3q^2-qp^2)y+rp^3-q^3=0$。

9.　$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之根爲 a, b, c, d。求其有次之各根之方程式。

(i)　$b+c+d,\ c+d+a,\ d+a+b,\ a+b+c$,

(ii)　$b+c+d-2a,\ c+d+a-2b,\ d+a+b-2c,\ a+b+c-2d$,

(iii)　$b^2+c^2+d^2-a^2,\ c^2+d^2+a^2-b^2,\ d^2+a^2+b^2-c^2,\ a^2+b^2+c^2-d^2$。

〔解〕　$\sum a=-p,\ \sum ab=q,\ \sum abc=-r,\ abcd=s$,

(i)　$b+c+d=-p-a$,　即　$y=-p-x$,

∴　由原方程式 $(y+p)^4-p(y+p)^3+q(y+p)^2-r(y+p)+s=0$,

(ii)　$b+c+d-2a=-p-3a$,　即　$y=-p-3x$,

∴　由原方程式 $\left(\frac{y+p}{3}\right)^4-p\left(\frac{y+p}{3}\right)^3-q\left(\frac{y+p}{3}\right)^2-r\left(\frac{y+p}{3}\right)+s=0$。

(iii)　$b^2+c^2+d^2-a^2=(\sum a)^2-2\sum ab-2a^2$,　即　$y=p^2-2y-2x^2$。

此式與原方程式消去其x即得,

10.　以 $x^3+px^2+qx+r=0$ 各根之立方爲各根。求其方程式。

〔解〕　由原方程式 $(x^3+r)^3=-(px^2+qx)^3$

$$=-p^3x^6-q^3x^3-3pqx^3(px^2+qx)$$

$$=-p^3x^6-q^3x^3+3pqx^3(x^3+r),$$

$x^3=y$,　則　$(y+r)^3=-p^3y^2-q^3y+3pqy(y+r)$。

446. 虛數 凡方程式。其係數爲實數而含有虛根者。則其虛根之數。必爲偶數。

設 $f(x)=0$ 之壹根爲 $a+b\sqrt{-1}$。則 $x-a-b\sqrt{-1}$ 必爲 $f(x)=0$ 之壹因子。由193章而知 $x-a+b\sqrt{-1}$ 亦必爲 $f(x)=0$ 之壹因子。故 $a-b\sqrt{-1}$ 亦爲 $f(x)=0$ 之壹根。

因是 $f(x)=0$ 之貳根。若爲 $a\pm b\sqrt{-1}$。則此 $f(x)$ 必含有 $(x-a-b\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})$。即 $(x-a)^2+b^2$ 之實數二次因子.

447.不盡根 凡方程式。其係數爲有理數而含有不盡根者。則其不盡根之數必爲偶數。

設$f(x)=0$之壹根爲$a+\sqrt{b}$。則$x-a-\sqrt{b}$必爲$f(x)=0$之壹因子。由179章而知$x-a+\sqrt{b}$亦必爲其壹因子。故$a-\sqrt{b}$亦爲$f(x)=0$之壹因子。

由是$f(x)=0$若有$a\pm\sqrt{b}$之二根。則此$f(x)$必含有$(x-a)^2-b$之有理二次因子。

例　題

1. 既知$x^4b-2x^3-22x^2+64x-15=0$之一根爲$2+\sqrt{3}$試解此方程式。

〔解〕 $2+\sqrt{3}$爲此方程式之一根。故$2-\sqrt{3}$亦爲此方程式之一根。故以$(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})=x^2-4x+1$除原方程式。得
$x^2+2x-15=0.$　　$\therefore$　$x=3$或-5。

由是此方程式之各根爲$2\pm\sqrt{3}$, 3, -5.

2. 既知$2x^3-15x^2+46x-42=0$之一根爲$3+\sqrt{-5}$。試解此方程式。

〔解〕$3+\sqrt{5}$爲此方程式之一根。故$3-\sqrt{5}$。亦爲此方程式之一根。故以$(x-3-\sqrt{-5})(x-3+\sqrt{-5})=x^2-6x+14$除原方程式。得
$2x-3=0$。　$\therefore$　$x=\frac{3}{2}$。故此方程式之根爲$3\pm\sqrt{5}$, $\frac{3}{2}$。

3. 既知$x^6-4x^5-11x^4+40x^3+11x^2-4x-1=0$之壹根爲$\sqrt{2}+\sqrt{3}$。試解此方程式。

〔解〕 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$爲有理係數方程式之一根。而含有$\sqrt{a}$及$\sqrt{b}$之不盡根。當有$\pm\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$之四根。由是知本題爲有$\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$之四根。故以$(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})$
$=x^4-10x^2+1$除原方程式。得$x^2-4x-1=0$。由是$x=2\pm\sqrt{5}$。

故所求之根爲$\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$, $2\pm\sqrt{5}$。

4. 解$x^4-x^3-9x^2-14x+8=0$。但其一根爲$-1+\sqrt[3]{3}$。

〔解〕 $x+1-\sqrt[3]{3}$爲原方程式之壹因子。而有$x+1-\sqrt[3]{3}$之因子者。其有理式爲$(x+1)^3-3$。

由是方程式爲$\{(x+1)^3-3\}(x-4)=0$。

故原方程式之根爲$4,\ -1+\sqrt[3]{3},\ -1+\omega\sqrt[3]{3},\ -1+\omega^2\sqrt[3]{3}$。

但ω爲1之立方根。

448. 兩方程式之公根 兩方程式$f(x)=0$, $\phi(x)=0$, 如有壹或壹以上之公共根者。則其公根必爲$f(x)$, $\phi(x)$之公因子，故用98章之方法。即可求得其公根。

〔例〕 求$x^3-3x^2-10x+24=0$及$x^3-6x^2-40x+192=0$之公根。

此H.C.F.爲$x-4$。 $\therefore$ 公根爲4,

449. 根之關係 知方程式貳根之關係。可求得其根。

〔第壹例〕 $x^3-3x^2-10x+24=0$之壹根，爲他壹根之貳倍。試解此方程式。

設此方程式之貳根爲a, b。而$a=2b$。以a爲此方程式之壹根，

故 $$a^3-3a^2-10a+24=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

又以b即$\frac{1}{2}a$，亦爲此方程式之壹根。

故 $$\left(\frac{1}{2}a\right)^3-3\left(\frac{1}{2}a\right)^2-10\left(\frac{1}{2}a\right)+24=0,$$

即 $$a^3-6a^2-40a+192=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

求 (1), (2) 左邊之公因子得$a-4$。 $\therefore$ $a=4$, $b=2$,

旣知其貳根爲4, 2。則其餘之壹根。亦易於求得爲-3,

〔第貳例〕 $2x^3-15x^2+37x-30=0$之三根爲等差級數。試解此方程式。

三根爲等差級數。故其和等於中央壹根之三倍。而三根之和爲$+\frac{15}{2}$，今命a爲中央之壹根，則$3a=\frac{15}{2}$ 即$a=\frac{5}{2}$。故原方程式之壹因子爲$2a-5$。以除原方程式得$x^2-5x+6=0$。 $\therefore$ $x=2, 3$。

〔貳根之關係〕 凡方程式$f(x)=0$之貳根爲a及b。此關係式$b=\phi(a)$，則$f(x)=0$及$f\{\phi(x)\}=0$必有壹根爲此貳式所公有者。故由448章可求得其公根。

〔例〕 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根(i)等差級數,(ii)等比級數。其關係如何。

(i) $a+b+c=3b$, $\therefore\ b=\frac{1}{3}(a+b+c)=-\frac{1}{3}p$。

b 為壹根。故 $\left(-\frac{p}{3}\right)^3+p\left(-\frac{p}{3}\right)^2+q\left(-\frac{p}{3}\right)+r=0$。

即 $2p^3-9pq+27r=0$。

(ii) $abc=b^3$。 $\therefore\ b=\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{-r}$。b 為原方程式之壹根。

故 $-r+p(-r)^{\frac{2}{3}}+q(-r)^{\frac{1}{3}}+r=0$。即 $p^3r=q^3$。

450. 可通度之根 凡方程式各項之係數悉為有理者。其可通度之根。易於求得之。

第壹項之係數為1。而他項之係數悉為整數者。則其方程式無有分數之根,

何則。若以 $\frac{a}{b}$ 為 $f(x)=0$ 之壹根。$\left(\text{但}\ \frac{a}{b}\ \text{為已約分數}\right)$。

則 $\left(\frac{a}{b}\right)^n+p_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_n=0$。

以 b^{n-1} 乘之,得 $\frac{a^n}{b}+p_1a^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+b^{n-1}p_n=0$。

惟以 a 與 b 為互素,則 a^n 與 b 亦為互素,

今第壹項為分數。其他項之係數為整數。是與題意相反,故方程式其第壹項之係數為1,其他各項之係數悉為整數者。則無分數之根。

由442章第貳。任意之方程式可得變化之。使其第壹項之係數為1。而他項之係數悉為整數。由是方程式若無有可通度之根。而其根為分數者。可依442章第貳變化之法。變其方程式,以求其根。

設 a 為 $f(x)=0$ 之整根,則 $x-a$ 為 $f(x)$ 之壹因子。故此 a 為於 $f(x)$ 中不含 x 項之壹因子。若將 p_n 之諸因子一一代入於 $f(x)$ 而其式為0者。則此因子,即為所求之根,

〔例〕 求 $x^4-27x^2+42x+8=0$ 之可通度之根。

此可通度之根，爲8之因子。故此根必在± 3, ± 4, ± 2, ± 1之內。以是順次代入於原方程式。而其式之値爲0者。惟4及2。故知其貳根爲4及2。由原方程式得$(x-2)(x-4)(x^2+6x+1)=0$。

$\therefore\ x=2,\ 4,\ -3\pm 2\sqrt{2}$。

例題四十四

1. $x^4+2x^3-16x^2-22x+7=0$之一根爲$2+\sqrt{3}$。試解此方程式。

〔解〕以$\{x-(2+\sqrt{3})\}\{x-(2-\sqrt{3})\}=x^2-4x+1$除原方程之左邊。得$x^2+6x+7=0$, $\therefore\ x=-3\pm\sqrt{2}$。由是所求之根爲$2\pm\sqrt{3}$, $-3\pm\sqrt{2}$。

2. $3x^3-23x^2+72x-70=0$之一根爲$3+\sqrt{-5}$。試解此方程式。

答 $3\pm\sqrt{-5}$。

3. $3x^5-4x^4-42x^3+56x^2+27x-36=0$之一根爲$\sqrt{2}-\sqrt{5}$求其他之根，

〔解〕原方程式有$\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{5}$之四根。故

$(x-\sqrt{2}-\sqrt{5})(x-\sqrt{2}+\sqrt{5})(x+\sqrt{2}-\sqrt{5})(x+\sqrt{2}+\sqrt{5})=x^4-14x^2+9$。

以除原式。得$3x-4=0$ $\therefore\ x=\frac{4}{3}$。

4. $2x^6-3x^5+5x^4+6x^3-27x+81=0$之一根爲$\sqrt{2}+\sqrt{-1}$求其他根。

〔解〕原方程式之根爲$\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-1}$, $\frac{3}{4}(1\pm\sqrt{-7})$。

5. 求有$\sqrt{3}-\sqrt{5}$之一根而爲有理係數之準二次方程式。

〔解〕$(x-\sqrt{3}-\sqrt{5})(x-\sqrt{3}+\sqrt{5})(x+\sqrt{3}-\sqrt{5})(x+\sqrt{3}+\sqrt{5})=0$。

即$x^4-16x^2+4=0$。爲所求之方程式。

6. 求有$\sqrt{2}+\sqrt{-3}$之一根而爲有理係數之準二次方程式。

答 $x^4+2x^2+25=0$。

7. 試示$x^3-2x^2-2x+1=0$及$x^4-7x^2+1=0$之二個公共根。

〔解〕求$x^3-2x^2-2x+1=0$及$x^4-7x^2+1=0$之H.C.F爲x^2-3x+1。故有二個公共根。

8. 既知$x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0$之二根爲如$\alpha+\beta\sqrt{-1}$及$\alpha+2\beta\sqrt{-1}$之形。試解此方程式。

〔解〕原方程式四根之和 $=4\alpha=-(-4)$. $\therefore\ \alpha=1$。

又 $\alpha+\beta\sqrt{-1}=a$, $\alpha+2\beta\sqrt{-1}=b$。則 $b=2a-\alpha$。即 $b=2a-1$。

由是由原方程式。得 $a^4-4a^3+11a^2-14a+10=0$......................(1)

又 $(2a-1)^4-4(2a-1)^3+11(2a-1)^2-14(2a-1)+10=0$。

即 $4a^4-16a^3+29a^2-26a+10=0$......................................(2)

由 (1)(2) $a^2-2a+2=0$。 $\therefore\ a=1\pm\sqrt{-1}$, $b=1\pm2\sqrt{-1}$。

9. $x^3+px^2+qx+r=0$ 之三根為 H.P 求其關係。

(解) a,b,c, 為三根。則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$, $\therefore\ a+c=\frac{2ac}{b}$。

即 $a+b+c=\frac{2abc}{b^2}+b$ 即 $-p=\frac{-2r}{x^2}+x$。 $\therefore\ x^3+px^2-2r=0$。

由原方程式減之。得 $qx+3r=0$。 $\therefore\ x=\frac{3r}{q}$。

以代於原方程式而簡之，得 $2q^3-9pqr+27r^2=0$。

10. $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之四根為 A.P 其關係如何。

〔解〕 設 a, b, c, d 為四根。則 $\sum a=-p$, $\sum ab=q$, $\sum abc=-r$, $abcd=s$

惟其四根為 A.P。故 $a+d=b+c=-\frac{p}{2}$。

由 $\sum abc=r$。 $bc\left(-\frac{p}{2}\right)+ad\left(-\frac{p}{2}\right)=-r$。 $\therefore\ bc+ad=\frac{2r}{p}$。

又由 $\sum ab=q$, $ad+bc+a\left(-\frac{p}{2}\right)+d\left(-\frac{p}{2}\right)=q$, $\therefore\ ad+bc=q-\frac{p^2}{4}$。

由是 $\frac{2r}{p}=q-\frac{p^2}{4}$, $\therefore\ p^3-4pq+8r=0$ (所求之第一關係)

$a=m-3n$, $b=m-n$, $c=m+n$, $d=m+3n$。則 $\sum a=4m=-p$。

$\therefore\ m=-\frac{p}{4}$, $\sum ab=6m^2-10n^2=q$, $\therefore\ n^2=\frac{3p^2-8q}{80}$。

又由 $abcd=m^4-10m^2n^2+9n^4=s$。

$$\left(-\frac{p}{4}\right)^4-10\left(-\frac{p}{4}\right)^2\left(\frac{3p^2-8q}{80}\right)+9\left(\frac{3p^2-8q}{80}\right)^2=s$$

即 $(p^2+4q)(36q-11p^2)-1600s=0$ (所求之第二關係)。

11. $x^3-3x^2-13x+15=0$ 之三根為 A.P。試解此方程式。

〔解〕 三根爲a, b, c。則 $2b=a+c$。即 $3b=a+b+c=3$,

$\therefore$ $b=1$, $abc=-15$。$\therefore$ $ac=-15$, $a+b+c=3$, $\therefore$ $a+c=2$。

由是 $a=5, c=-3$。故所求之根爲 $5, 1, -3$。

12. $x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$ 之四根爲A.P。試解此方程式。

〔解〕 由10題 $m=-\frac{p}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$,

$$n^2=\frac{3p^2-8q}{80}=\frac{3.2^2-8(-21)}{80}=\frac{9}{4}, \quad \therefore \quad n=\frac{3}{2}。$$

$\therefore$ $m-3n=-\frac{1}{2}-3.\frac{3}{2}=-5$, $m-n=-2$, $m+n=1$, $m+3n=4$,

$\therefore$ 所求之根爲 $-5, -2, 1, 4$。

13. 求次之方程式可通度之根。

(i) $x^3-7x^2+17x-15=0$。　　(ii) $x^4-x^3+13x^2+16x-48=0$。

(iii) $3x^3-26x^2+34x-12=0$。

〔解〕 (i) 所求之根爲在 $\pm15, \pm5, \pm3, \pm1$ 之內。而以3代其 x 爲適合。$\therefore$ $x=3$。

(ii) 與前同法。得所求之根爲 $+4, -4$。

(iii) $y=cx$ 而變原方程式爲 $3\left(\frac{y}{c}\right)^3-26\left(\frac{y}{c}\right)^2+34\left(\frac{y}{c}\right)-12=0$。

即 $3y^2-26cy+34c^2y-12c^3=0$。設 $c=3$ 則 $y^3-26y+102y-180=0$。

$\therefore$ $y=2$ 故 $x=\frac{y}{c}=\frac{2}{3}$。

14. 既知 $4x^3-32x^2-x+8=0$ 二根之和爲0。試解此方程式。

〔解〕 二根爲a, b則 $a+b=0$。即 $a=-b$,

由是 $-4b^3-32b^2+b+8=0$, 又 $4b^3-32b^2-b+8=0$。

由此兩方程式 $-64b^2+16=0$, $\therefore$ $b=\frac{1}{2}$。$\therefore$ $a=-\frac{1}{2}$。

乃以 $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=4x^2-1$ 除原方程式。得 $x-8=0$,

$\therefore$ $x=8$, 故所求之根爲 $\pm\frac{1}{2}, 8$。

15. 已知 $x^4+4x^3-5x^2-8x+6=0$ 二根之和爲0。試解此方程式

〔解〕設二根爲x及$-x$。則得又一方程式$x^4-4x^3-5x^2-8x+6=0$。
與原方程式相消得$8x^3-16x=0$。 $x^2-2=0$。 $\therefore\ x=\pm\sqrt{2}$。
故以x^2-2除原方程式，得$x^2+4x-3=0$。 $\therefore\ x=-2\pm\sqrt{5}$。
故所求之根爲$\pm\sqrt{2}$, $-2\pm\sqrt{5}$。

16. 既知$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$二根之和爲0。則其關係如何。

〔解〕二根之和爲0。則其二根數量相等。而符號相反，故以$-x$代$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$之x。而得$x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$。

由加法得$x^4+qx^2+s=0$。由減法得$px^3+rx=0$。 $\therefore\ x^2=-\frac{r}{p}$。

$\therefore\ \left(-\frac{r}{p}\right)^2+q\left(-\frac{r}{p}\right)+s=o$。 $\therefore\ r^2-pqr+p^2s=0$。爲所求之關係，

17. 既知$x^3-79x+210=0$二根之關係爲$\alpha=2\beta+1$。試解此方程式。

〔解〕$\alpha+\beta+\gamma=0$。 $\therefore\ \gamma=-(\alpha+\beta)=-(3\beta+1)$ $\alpha\beta\gamma=-210$。
即 $-(2\beta+1)\beta(3\beta+1)=-210$。即 $6\beta^3+\beta^2+\beta-210=0$。
$\therefore\ 6x^3+5x^2+x-210=0$。原方程式爲$x^3-79x+210=0$。
求得上兩方程式之公共根爲3。 $\therefore\ \alpha=2\beta+1=2.3+1=7$。
$\therefore$ 由原方程式$(x-7)(x-3)(x+10)=0$。$\therefore$ 所求之根爲$7, 3, -10$，

18. 既知$3x^3-32n^2+33x+108=0$之一根。爲他一根之平方。試解此方程式，

〔解〕以x^2代於原方程式之x。得$3x^6-32x^4+33x^2+108=0$。
此式與原方程式。求其公共根而得$x=3$。
故所求之根爲$3, 9, -\frac{3}{4}$。

19. $x^n+npx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}qx^{n-2}+\cdots\cdots\cdots=0$之根爲A. P。如n爲偶數，則於$-p+r\left\{\frac{3(p^2-q)}{n+1}\right\}^{\frac{1}{2}}$以$1, 3, 5\cdots\cdots\cdots$代其r，即得各根。如n爲奇數。則以$2, 4, 6\cdots\cdots\cdots$代其r。即得各根。試證之。

〔證〕設最小數爲a，公差爲b，則$\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=-np$，

$\therefore\ d=-\dfrac{2(p+a)}{n-1}$。又各二根之積之和 $=-\dfrac{n(n-1)}{1.2}q$。

即 $(-np)^2-2\dfrac{n(n-1)}{1.2}q=a^2+(a+d)^2+\cdots\cdots+\{a+(n-1)d\}^2$,

由321章求上之右邊之級數,而得

$n^2p^2-n(n-1)q=na(a+nd)+\dfrac{nd^2}{3}(n^2-1)-\dfrac{nd}{2}\{2a+(n-1)d\}$。以

$d=-\dfrac{2(p+a)}{n-1}$ 代入上式且變化之,得

$$np^2-n(n-1)q=a^2-\frac{2an(p+a)}{n-1}+\frac{4(n+1)(p+a)^2}{3(n-1)}+\frac{2p(p+a)}{n-1}。$$

$$\therefore\ a^2(x+1)+2ap(n+1)-p^2(3n^2-7n+2)+3q(n-1)^2=0。$$

$$\therefore\ a=-p+(n-1)\left\{\frac{3(p^2-q)}{n+1}\right\}^{\frac{1}{2}}。即\ r=n-1。$$

若 n 爲偶數。則 r 爲 1, 3, 5……… 又 n 爲奇數。則 r 爲 2, 4, 6………
其各根順次得

$-p+\left\{\dfrac{3(p^2-q)}{n-1}\right\}^{\frac{1}{2}},\ -p+3\left\{\dfrac{3(p^2-q)}{n-1}\right\}^{\frac{1}{2}},\ -p+5\left\{\dfrac{3(p^2-q)}{n-1}\right\}^{\frac{1}{2}}\cdots\cdots$ 何則,以

$d=-\dfrac{2(p+a)}{n-1}=-2\left\{\dfrac{3(p^2-q)}{n-1}\right\}^{\frac{1}{2}}$ 故也,

20. $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之四根 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 有次之關係者。則其係數之關係如何。

(i) $\alpha\beta=\gamma\delta$。 (ii) $\alpha\beta+\gamma\delta=0$。

(解) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p,\ \sum\alpha\beta=q,\ \sum\alpha\beta\gamma=-r,\ \alpha\beta\gamma\delta=s$,

(i) 以 $\alpha\beta=\gamma\delta$, 故 $\alpha^2\beta^2=s$, 又以 $\sum\alpha\beta\gamma=-r$, 則 $\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=-r$

即 $\alpha\beta(-p)=-r$, $\therefore\ \alpha^2\beta^2p^2=r^2$, 即 $sp^2=r^2$, $\therefore\ p^2s-r^2=0$。

(ii) $\alpha\beta+\gamma\delta=0$ $\therefore\ \alpha^2\beta^2=-s$,

又以 $\sum\alpha\beta\gamma=\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=-r$, $\alpha\beta\{(\gamma+\delta)-(\alpha+\beta)\}=-r$。

由是 $\alpha^2\beta^2\{(\gamma+\delta+\alpha+\beta)^2-4(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\}=r^2$, 惟 $\sum\alpha\beta=q$,

即 $(\gamma+\delta)(\alpha+\beta)=q$, $\therefore\ -s\{(-p)^2-4q\}=r^2$, 即 $r^2-4sq+p^2s=0$。

21. $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 之四根。有 $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ 之關係,則 $4abc-b^3-8a^2d=0$。

〔解〕 $\sum\alpha=-\frac{b}{a}$, $\sum\alpha\beta=\frac{c}{a}$, $\sum\alpha\beta\gamma=\frac{d}{a}$。

由上之關係。$\alpha+\beta=\gamma+\delta=-\frac{b}{2a}$。又 $\sum\alpha\beta\gamma=\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=-\frac{d}{a}$。

即 $\alpha\beta\left(-\frac{b}{2a}\right)+\gamma\delta\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{d}{a}$, $\therefore$ $\alpha\beta+\gamma\delta=\frac{2d}{b}$。

又由 $\sum\alpha\beta=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta+\gamma\delta+(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=\frac{c}{a}$。

即 $\frac{2d}{b}+\left(-\frac{b}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{c}{a}$。 $\therefore$ $4abc-b^3-8a^2d=0$。

22 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n=0$ 之根為 $a, b, c\cdots\cdots\cdots$
則 $(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\cdots\cdots=A^3+B^3+C^3-3ABC$。
但 $A=p_n+p_{n-3}+\cdots\cdots$, $B=p_{n-1}+p_{n-4}+\cdots\cdots$, $C=p_{n-2}+p_{n-5}+\cdots\cdots$

〔證〕 $(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots=x^n+p_1x^{n-1}+\cdots\cdots+p_n$。如 $x=1$。

則 $(1-a)(1-b)(1-c)\cdots\cdots=1+p_1+\cdots\cdots+p_n$

$=(p_n+p_{n-3}+\cdots\cdots)+(p_{n-1}+p_{n-4}+\cdots\cdots)+(p_{n-2}+p_{n-5}+\cdots\cdots)$。

$\therefore$ $(1-a)(1-b)(1-c)\cdots\cdots=A+B+C$。

$(1-\omega a)(1-\omega b)(1-\omega c)\cdots\cdots=A+\omega B+\omega^2C$。

$(1-\omega^2a)(1-\omega^2b)(1-\omega^2c)\cdots\cdots=A+\omega^2B+\omega C$。

由是 $(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\cdots\cdots=A^3+B^3+C^3-3ABC$。

451. 變函數 (Derived Function) 於次之恆同式。

$f(x)\equiv p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n$。以 $x+h$ 代其 x。

則 $f(x+h)\equiv p_0(x+h)^n+p_1(x+h)^{n-1}+p_2(x+h)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n$,

由貳項式之定理。將其右邊各項展開之,得

$$p_0(x+h)^n=p_0x^n+p_0nx^{n-1}h+p_0\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^{n-2}h^2+\cdots\cdots\cdots$$

$$p_1(x+h)^{n-1}=p_1x^{n-1}+p_1(n-1)x^{n-2}h+p_1\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}x^{n-3}h^2+\cdots\cdots$$

$$p_2(x+h)^{n-2}=p_2x^{n-2}+p_2(n-2)x^{n-3}h+p_2\frac{(n-2)(n-3)}{\underline{|2}}x^{n-4}h^2+\cdots\cdots$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

由是 $f(x+h)=\{p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n\}$

$+h\{np_0x^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}+\cdots\cdots+p_{n-1}\}$

$$+\frac{h^2}{\lfloor 2}\{n(n-1)p_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)p_1x^{n-3}+\cdots\cdots\cdots+p_{n-2}\}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)+\frac{h^3}{\lfloor 3}f'''(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔註〕此 $f(x+h)$ 之展開式。由微分學中戴勞(Taylor)氏之法則。整列爲h之遞昇方乘式。

將上之法則推考之。知 $f(x)$ 之各項。與 $f'(x)$ 之關係。爲將 $f(x)$ 各項x之指數。乘其本項。而以原指數減1爲其指數。以下 $f''(x)$ 與 $f'(x)$ 之關係。及 $f'''(x)$ 與 $f''(x)$ 之關係等。亦可如是推得之。

〔定義〕函數 $f'(x)$ 爲 $f(x)$ 之壹次變函數, $f''(x)$ 爲 $f(x)$ 之貳次變函數。以下準此。

例 $f(x)=p_0x^4+p_1x^3+p_2x^2+p_3x+p_4$,

則 $f'(x)=4p_0x^3+3p_1x^2+2p_2x+p_3$。

$f''(x)=12p_0x^2+6p_1x+2p_2$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

452. 定理 若 $f(x)$ 爲x之任何有理整函數。$f'(x)$ 爲其第壹變函數。而方程式 $f(x)=0$ 之n根。(實根或虛根)爲 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots\cdots\cdots$

則 $f'(x)=\frac{f(x)}{x-a_1}+\frac{f(x)}{x-a_2}+\frac{f(x)}{x-a_3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

以 $f(x)=0$ 之各根爲 $a_1, a_2, a_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

故知 $f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

由是 $f(x+h)=p_0(x-a_1+h)(x-a_2+h)(x-a_3+h)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=p_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(x-a_n)$

$+h$ {從 $(x-a_1)$, $(x-a_2)$,……$(x-a_n)$ 內取各異之 $n-1$ 因子相乘積之和} + 含有 h^2 及 h^2 以上之項。

即 $f(x+h)=f(x)+h\left\{\frac{f(x)}{x-a_1}+\frac{f(x)}{x-a_2}+\frac{f(x)}{x-a_3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$

+{含有 h^2 及 h^2 以上之項}。

惟 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+$(h^2 及 h^2 以上之項)。

於此兩恆同式比較其右邊h之係數爲

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a_1}+\frac{f(x)}{x-a_2}+\frac{f(x)}{x-a_3}+\cdots\cdots\cdots$$

上之恆同式。其$a_1, a_2, a_3\cdots\cdots$之值互相異者。若$a_1$有r個，$a_2$有s個。即其因子如$x-a_1$有r個，$x-a_2$有s個，則得次式，

$$f'(x)=\frac{rf(x)}{x-a_1}+\frac{sf(x)}{x-a_2}+\cdots\cdots\cdots$$

453. 等根 設$f(x)=0$之n根爲$a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$。

即 $f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)$，

惟 $f'(x)=p_0\times$(n數量$x-a_1, x-a_2, \cdots x-a_n$之每$n-1$個乘積之和)。

於$f(x)=0$諸根中。如a_1者祇有壹。則$f(x)$所含諸因子中。如$x-a_1$亦祇有壹。而$f'(x)$之各項內有壹項不含$x-a_1$。其餘諸項皆含$x-a_1$。故$f'(x)$不能有$x-a_1$之因子。

由是知$f(x)=0$之各相異者。則與$f'(x)=0$。不能有如$x-a$之公因子

若$f(x)=0$其根如a_1者有r個，則於$f'(x)$之各項內。其壹項如$\frac{f(x)}{x-a_1}$者含有$r-1$個$x-a_1$，其他含有r個$x-a_1$。故$f'(x)$有$r-1$個$x-a_1$之因子。即知於$f(x)=0$之等根有r個者。則於$f'(x)=0$其根必有$r-1$個。

故求$f(x)$及$f'(x)$之H.C.F.可得$f(x)=0$之等根，而以其H.C.F.除$f(x)$得商爲ϕx。則$\phi(x)=0$之各根。必含有於$f(x)=0$之內而各相異者也，

〔第壹例〕 求$x^4-5x^3-9x^2+81x-108=0$之等根，

$f(x)=x^4-5x^3-9x^2+81x-108$, $f'(x)=4x^3-15x^2-18x+81$。

求$f(x)$及$f'(x)$之H.C.F.而得x^2-6x+9。即$(x-3)^2$。以x^2-6x+9除$f(x)$得x^2+x-12。 即 $(x-3)(x+4)$。 故 $f(x)=(x-3)^3(x+4)$。

由是$f(x)=0$之各根爲$3, 3, 3, -4$。

〔第貳例〕 三次方程式有等根者。則其各根皆爲可通度之根。試證之。

三次方程式有三根。而由446及447章。若其中有不可通度之根，則必有不等之兩根。其餘之壹根爲可通度之根。

故有等根者。其各根皆爲可通度之根明矣。

〔第三例〕有等根之方程式爲$x^5-15x^3+10x^2+60x-72=0$,試解之。

$f(x)=x^5-15x^3+10x^2+60x-72,\quad f'(x)=5x^4-45x^2+20x+60$。

求$f(x)$及$f'(x)$之H.C.F.而得$x^3-x^2-8x+12$。乃以$x^3-x^2-8x+12$除$f(x)$。得商爲x^2+x-6。

即 $\phi(x)=x^2+x-6=0$。 $\therefore\quad x=2,\ -3$。

因是知原方程式有貳個相異之根爲2, −3。

又以$x^3-x^2-8x+12=(x-2)^2(x+3)$。 故 $f(x)=(x-2)^3(x+3)^2$。

∴ 原方程式之根。爲2, 2, 2, −3, −3,

454. 有理整函數之變化

x之有理整函數,爲$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n$,

x之值有限。項數亦有限,則其諸項之和。必爲有限,

x之值充分增大時,第壹項即x之最高羃之項。可大於其次諸項之和。(又於函數中間之任壹項。可大於其次諸項之和),

依同理x之值充分減小時。最後項即不含x之項。可大於其前之諸項之和,(又於函數中間之任壹項可大於其前之諸項之和)。

例 x充分增大時p_0x^n大於$p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n$,證明如次。

先命k爲$p_1, p_2,\cdots\cdots p_n$諸係數中之最大係數,則

$$\frac{p_0x^n}{p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n}>\frac{p_0x^n}{k(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+1)}\text{ 即 }\frac{p_0x^n(x-1)}{k(x^n-1)}$$

$$>\frac{p_0x^n(x-1)}{kx^n}\text{ 即 }\frac{p_0(x-1)}{k}。$$

x充分增大。則$\frac{p_0(x-1)}{k}$可得任大之值。故由前之不等式,得

$$p_0x^n>\frac{p_0}{k}(x-1)(p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n)。$$

則p_0x^n比$p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n$之若干倍爲大,

由同理x充分減小。可證得$p_n>p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots\cdots+p_{n-1}x$,

x變爲$x+h$,則由451章。得$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)+\cdots\cdots$。

但x之值有限,而$f(x)$爲x之整函數。故$h, h^2,\cdots\cdots\cdots$之係數$f'(x)$, $f''(x),\cdots\cdots$其值爲有限。

然當h充分減小時,知上式右邊之第壹項$hf'(x)$(與前所述最

後項之p_n相當)可大於其次諸項之和,但$f'(x)$如對於x之特別值而爲0者。則取其次之項。若次項亦爲0。則取其又次之項。

h充分減小時。$hf'(x)$從而減小。而其次諸項之和亦從而減小。故此右邊當h充分減小時。可得任小之值。即$f(x+h)-f(x)$當h充分減小時。可得任小之值。

由是知$f(x)$與$f(x+h)$之差。可至於極微小之數。

由此理乃知x之變化自a迄b時。其$f(x)$爲自$f(a)$迄$f(b)$漸次變化無有間斷也,

又$f(x)$爲自$f(a)$迄$f(b)$。其間函數之值或增或減而無壹定。

例於$f(x)=x^2-6x+1$其$x=2$則$f(2)=-7$, $x=3$則$f(3)=-8$, $x=10$則$f(10)=41$。其增減無定。若f爲不整方程式。如$f(x)=\frac{1}{x-2}$,其$x=3$則$f(3)=1$, 又 $x=2$則$f(2)=\infty$。

455. 定理 x自α變於β之際。而$f(\alpha)$及$f(\beta)$爲異符號。則$f(x)=0$。至少有壹根在於α與β之間。

何則$f(x)$爲自$f(\alpha)$迄$f(\beta)$漸次變化無或間斷。而$f(\alpha)$及$f(\beta)$其符號相異。則$f(\alpha)$及$f(\beta)$之間。必有壹值爲0。因正負兩數互變之間。必經過一個0也。故$f(x)=0$其x之值,至少有壹根在於α與β之間。

例 於$f(x)=x^3-4x+2$, $f(1)=-1$ 及 $f(2)=2$,

由是知$x^3-4x+2=0$之壹根,在於1與2之間。

456. 定理 奇次之方程式至少有壹實根。

方程式$f(x)=0$ 即 $f(x)=x^{2n+1}+p_1x^{2n}+\cdots\cdots+p_{2n+1}$。

x充分增大時x^{2n+1}之值比$p_1x^{2n}+\cdots\cdots+p_{2n+1}$爲大。故$x=+\infty$。但$f(+\infty)$爲正。而$f(-\infty)$爲負,

故 $f(+\infty)=$正。 $f(0)=p_{2n+1}$。 $f(-\infty)=$負。

由是知於$+\infty$與$-\infty$之間。至少有壹實根存在。若p_{2n+1}爲正者。則壹實根爲負。而在於0與$-\infty$之間。若p_{2n+1}爲負。則壹實根爲正而在於$+\infty$與0之間,

457. 定理 偶次之方程式,其第壹項之係數爲1。最後之項爲負者。至少有貳實根。而此貳實根符號各異。

於 $x^{2n}+p_1x^{2n-1}+\cdots\cdots+p_{2n}=0$。其$p_{2n}$爲負者如次。

$f(+\infty)=$正, $f(0)=p_{2n}$, $f(-\infty)=$正。

由是p_{2n}爲負者。則其壹根在於$+\infty$與0之間而爲正根。其他之壹根。在於$-\infty$與0之間而爲負根。

458. 要例 a,b,c,f,g,h爲實數。則次式之根皆爲實根。試證明之。

$(x-a)(x-b)(x-c)-f^2(x-a)-g^2(x-b)-h^2(x-c)-2fgh=0$。

〔證〕 $a>b>c$記原方程式爲

$(x-a)\{(x-b)(x-c)-f^2\}-\{g^2(x-b)+h^2(x-c)+2fgh\}=0$。

今於$(x-b)(x-c)-f^2$以$+\infty, b, c, -\infty$代其x。則此式爲$+,-,-,+$。

故二次方程式$(x-b)(x-c)-f^2=0$有貳實根。設此貳實根爲α,β。而α爲在於$+\infty$與b之間。β爲在於c與$-\infty$之間。則$\alpha>b>c>\beta$。

今於原方程式以$+\infty,\alpha,\beta,-\infty$代其$x$。則原方程式爲$+\infty$,

$-\{g\sqrt{\alpha-b}+h\sqrt{\alpha-c}\}^2,+\{g\sqrt{b-\beta}+h\sqrt{c-\beta}\}^2,-\infty$。

如上以α代原方程式之x。其化法如次。

$x=\alpha$。則 $f^2=(\alpha-b)(\alpha-c)$。故原方程式爲

$-\{g^2(\alpha-b)+h^2(\alpha-c)+2gh\sqrt{(\alpha-b)(\alpha-c)}=-\{g\sqrt{\alpha-b}+h\sqrt{\alpha-c}\}^2$

$x=\beta$。亦如法化之。

由是原方程式之實根。爲在於$+\infty$與α之間。又在於α與β之間。又在於β與$-\infty$之間。故皆爲實根。

若$\alpha=\beta$。則前之證明爲無効。何則。以$+\infty$, α, α, $-\infty$代其x。則原方程式爲$+\infty$, $-\{g\sqrt{\alpha-c}+h\sqrt{\alpha-c}\}^2$, $-\{g\sqrt{\alpha-c}+h\sqrt{\alpha-c}\}^2$, $-\infty$。其實根不能有三種發見也。

然$\alpha=\beta$。則$(x-b)(x-c)-f^2$爲完平方式。故$b=c, f=0$。

由是原方程式爲$(x-a)(x-b)^2-(g^2+h^2)(x-b)=0$。

$\therefore$ $x=b$或$(x-a)(x-b)-(g^2+h^2)=0$。

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}(a+b)\pm\sqrt{\frac{1}{4}(a-b)^2+g^2+h^2}$。 故皆爲實根。

若α爲原方程式之實根。則以$+\infty$, a, β, $-\infty$代原方程式之x。而得$+\infty$, 0, $+\{g\sqrt{b-\beta}+h\sqrt{c-\beta}\}^2$, $-\infty$。

α之外。知其他之壹實根，爲在於β與$-\infty$之間；而其餘之壹根。決不爲虛數。因方程式如有虛根者。其虛根之個數。必成偶數故也，

此三次方程式，於解析立體幾何學中最爲要用，而謂之解析立方式(Discriminations Cubic)，

459. 定理 $f(\alpha)$及$f(\beta)$爲異符號，則$f(x)=0$之根。其在α與β之間者有奇數。若爲同符號，則其根在α與β之間者，或無或爲偶數

設$f(x)=0$之根。在α與β之間者。爲$a, b, c, \dots\dots\dots k$，

則 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\dots\dots\dots(x-k)\phi(x)$，

但$\phi(x)$其所含之根，不在$a,b,c\dots\dots\dots k$諸實根以內者，即$\phi(x)$由於偶數虛數及其他之實根所成實數因子之積。

然 $f(\alpha)=(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)\dots\dots\dots\dots(\alpha-k)\phi(\alpha)$，

及 $f(\beta)=(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)\dots\dots\dots(\beta-k)\phi(\beta)$，

今$\alpha>\beta$。則$\alpha-a,\ \alpha-b, \dots\dots\dots\dots \alpha-k$皆爲正，

$\beta-a,\ \beta-b, \dots\dots\dots\dots \beta-k$皆爲負。

又$\phi(\alpha)$及$\phi(\beta)$與$\phi(x)$之符號不變。故各符號相同，

故若$f(\alpha)$及$f(\beta)$爲異符號者。則$a, b, c, \dots\dots k$爲奇數，$f(\alpha)$及$f(\beta)$爲同符號者。則$a, b, c, \dots\dots\dots\dots k$爲偶數，

460. 洛兒〔Rolle〕氏之定理 $f'(x)=0$之實根。有在於$f(x)=0$鄰接貳實根之間者。

設將$f(x)=0$之實根，自大至小順次列之，如$a, b, c, \dots\dots\dots\dots\dots\dots k$，而$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\dots\dots\dots\dots\dots(x-k)\phi(x)$，

但 $\phi(x)$爲由二次實數因子(與偶數虛根相應之數)而成者。此二次因子。無論以何之實數代x。其符號不變。

由452章變爲$f(x+\lambda)=(x-a+\lambda)(x-b+\lambda)\dots\dots\dots(x-k+\lambda)$

$\times\{\phi(x)+\lambda\phi'(x)+\lambda$之高次項$\}$

$$=f(x)+\lambda\left\{\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\dots\dots+\frac{f(x)}{x-k}+\frac{f(x)\phi'(x)}{\phi(x)}\right\}+\dots\dots\dots$$

由是$f'(x)=\dfrac{f(x)}{x-a}+\dfrac{f(x)}{x-b}+\dots\dots+\dfrac{f(x)}{x-k}+\dfrac{f(x)\phi'(x)}{\phi(x)}$。

即 $f'(x)=(x-b)(x-c)\cdots\cdots\cdots\cdots(x-k)\phi(x)$

$+(x-a)(x-c)\cdots\cdots\cdots\cdots(x-k)\phi(x)$

$+(x-a)(x-b)\cdots\cdots\cdots\cdots(x-k)\phi(x)$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

乃順次以 $a, b, c\cdots\cdots\cdots\cdots$代 x 得

$$f'(a)=(a-b)(a-c)\cdots\cdots\cdots\cdots(a-k)\phi(a),$$
$$f'(b)=(b-a)(b-c)\cdots\cdots\cdots\cdots(b-k)\phi(b),$$
$$f'(c)=(c-a)(c-b)\cdots\cdots\cdots\cdots(c-k)\phi(c),$$
$$\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

今 $\phi(a), \phi(b), \phi(c),\cdots\cdots\cdots$爲同符號。而 $a>b>c>\cdots\cdots\cdots$。

故 $f'(a), f'(b), f'(c),\cdots\cdots\cdots$正負相間。

由是知 $f'(x)=0$ 之壹根。在於 a 與 b 之間。又在於 b 與 c 之間。以下準此。

例 $f(x)=x^2-8x+12=0$。則 $f'(x)=2x-8$。

惟 $2x-8=0$ 之根爲 4。爲在於 $f(x)=0$ 之貳根 2 與 6 之間。

461.代加德〔Descartes〕氏之符號規則 於 $f(x)=0$。所有正實根之數。不能多於各項符號變化之數。又所有負實根之數。不多於 $f(-x)$ 各項符號變化之數。

例 $5x^9+6x^8-2x^7+3x^6+8x^5-3x^4-11x^3-9x^2+10x-12=0$。

記其各項之符號。爲 $++-++---+-$。

即 $+-$ 變化之數爲五。故正實根之數不多於五。

又 $f(-x)=-5x^9+6x^8+2x^7+3x^6-8x^5-3x^4+11x^3-9x^2-10x-12=0$。

記其符號爲 $-+++--+---$。

即 $+-$ 變化之數爲四。故 $f(x)=0$ 負實根之數。不多於四。

今若於任何多項式以 $x-a$(a 爲正數)乘之。其各項符號變化之數。至少比原方程式增一次。

假定多項式各項之符號。爲 $++-++---+-$。(如前所述其變化之數有五)於此以 $x-a$ 即 $+-$ 乘之。而考其符號變化之次數如下式。

乘{+ + − + + − − − + −
　{+ −

加{+ + − + + − − − + −
　{　− − + − − + + + − +

積………+ ± − + ± − ∓ ∓ + − +。

因 x 爲正。故以 x 乘之。其分積如第壹列。其符號悉與原式同。又因 $-a$ 爲負。故以 $-a$ 乘之。其分積如第貳列。其符號悉與原式相異。乃將第貳列置於第壹列同次元項之上。而此第壹列之第貳項爲正。第貳列之第壹項爲負。故全積之第貳項正負不能判定。然其第三項可定爲負。故全積第二項之符號爲正或負。必與原式變化之次數無所增減。又於全積之第五項亦然。

自第六項迄第九項爲 − ∓ ∓ +。若取 − + − + 則其符號之變化增壹。又取 − + + + 或 − − − +。則其符號之變化無所增減。則因此複號而積中符號之變化。與原式有增無減可知。

而原式之最後項爲負。故第壹列最後項爲負。於其下所置第貳列之項亦爲負。故積之第末貳項爲負。

又積之最後項負以負乘之爲正。

故於積之最後項符號之變化增壹。若原式之最後項爲正。則積之最後項爲負。其符號之變化亦增壹。

由是任何多項式以 $x-a$ 乘之。其積之符號變化之數。至少比原方程式增壹。

若純爲虛根及負根所成實數係數之方程式。其符號必無變化。而以正根因子 $x-a$ 乘之。可增一符號變化之數。故於 $f(x)=0$ 正根之數。不能多於 $f(x)$ 各項符號變化之數。

此規則之第貳部。可從前所說明者而知之。即以負根代 $f(-x)=0$ 之正根。則與前同。

(例) $x^7+2x^6-x^4+4x^3+3x-1$ 以 $x-1$ 乘之。則

+ +　− +　+ −
+ −
+ +　− +　+ −
　− −　+ −　− +
+ ± − − + − + − +。

原式符號之變化有三，而積之符號之變化有六。

462. 應用 用前章符號之規則，方程式實根增減之數。可得而知之，然欲確知其實根之數，須視後斯土莫 (Starm) 氏之定理。今於其定理之前，先示以解三次及四次式之公法。

阿培爾 (Abel) 氏曰，四次以上之方程式。無解開之公法。惟於特別形，如反商方程式，迄於五次，常可得而解之。

例題四十五

1. 下列方程式為有等根者試解之。

(i) $4x^3-12x^2-15x-4=0$。 答 $-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},4$。

(ii) $x^4-6x^3+13x^2-24x+36=0$。 答 $3,3,\pm2\sqrt{-1}$。

(iii) $16x^4-24x^2+16x-3=0$。 答 $\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$。

(iv) $2x^4-23x^3+84x^2-80x-64=0$。 答 $4,4,4,-\frac{1}{2}$。

〔解〕 皆可由453章以解之。

2. $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 為有二等根者。試求其關係，

〔解〕 三根為 α,α,β，則 $2\alpha+\beta=-\frac{3b}{a}$，$\alpha^2+2\alpha\beta=\frac{3c}{a}$。

由是消去其 β。即為 $a\alpha^2+2b\alpha+c=0$……(1)

又變原方程式。為 $a\alpha^3+3b\alpha^2+3c\alpha+d=0$。

即 $\alpha(a\alpha^2+2b\alpha+c)+b\alpha^2+2c\alpha+d=0$。

∴ $b\alpha^2+2c\alpha+d=0$……(2)

由(1)(2)消去 α。故所求之關係為 $(bc-ad)^2=4(bd-c^2)(ca-b^2)$。

3. $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 為有二等根者。則其等根為 $\frac{bc-ad}{2(ac-b^2)}$。

〔證〕 由前例可直求得之。

4. 證次之方程式皆為實根。

$$\frac{a^2}{x-a'}+\frac{b^2}{x-b'}+\frac{c^2}{x-c'}+\cdots\cdots+\frac{k}{x-k'}-\lambda=0。$$

〔證〕 若有虛根，假定其一根爲$p+q\sqrt{-1}$而其又一根爲$p-q\sqrt{-1}$。由是

$$\frac{a^2}{(p-a')+q\sqrt{-1}}+\frac{b^2}{(p-b')+q\sqrt{-1}}+\cdots\cdots+\frac{k^2}{(p-k')+q\sqrt{-1}}-\lambda=0。$$

$$\frac{a^2}{(p-a')-q\sqrt{-1}}+\frac{b^2}{(p-b')-q\sqrt{-1}}+\cdots\cdots+\frac{k^2}{(p-k')-q\sqrt{-1}}+\lambda=0，$$

由減法 $2q\sqrt{-1}\left\{\frac{a^2}{(p-a')^2+q^2}+\frac{b^2}{(p-b')^2+q^2}+\cdots\cdots+\frac{k^2}{(p-k')^2-q^2}=0。\right.$

於上之方程式。其括弧內之正數量非爲0。則是q不得不爲0。故原方程式決無虛根。

5. 證次之方程式皆爲實根，

$$\frac{a^2}{x-\alpha}+\frac{b^2}{x-\beta}+\frac{c^2}{x-\gamma}+\cdots\cdots\cdots\cdots=m+n^2x。$$

〔證〕 若有虛根，如前題得

$$\frac{a^2}{(p-\alpha)+q\sqrt{-1}}+\frac{b^2}{(p-\beta)+q\sqrt{-1}}+\cdots\cdots\cdots=m+n^2(p+q\sqrt{-1})$$

$$\frac{a^2}{(p-\alpha)-q\sqrt{-1}}+\frac{b^2}{(p-\beta)-q\sqrt{-1}}+\cdots\cdots\cdots=m+n^2(p-q\sqrt{-1})。$$

由減法 $2q\sqrt{-1}\left\{\frac{a^2}{(p-\alpha)^2+q^2}+\frac{b^2}{(p-\beta)^2+q^2}+\cdots\cdots\cdots+n^2\right\}=0。$

由是$q=0$。故如題云云，

6. $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$依大小之順序次第列之。而b爲正整數。則次之方程式皆爲實根。試證之。

$$(x-a_1)(x-a_3)\cdots\cdots\cdots(x-a_{2n-1})+b(x-a_2)(x-a_4)\cdots\cdots(x-a_n)=0，$$

又求此方程式根之位置。

〔證〕 $a_1>a_2>a_3\cdots\cdots>a_{2n}$，故於原方程式$f(x)=0$。逐次以$a_1, a_2, a_3\cdots\cdots a_{2n}$代其x而正負相間。$f(a_1)$爲正。$f(a_2)$爲負。$f(a_3)$爲正……。則是x之根在$a_1, a_2, a_3\cdots\cdots a_n$之間。故有n個之實根。即所有根皆爲實根也。

7. 設a, b, c, d爲不等之正數量。試証次之方程式之根。皆爲實數。

$$\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}+\frac{x}{x-c}+x+d=0，$$

又此四根爲$\alpha, \beta, \gamma, \delta$。則

$$\frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}+\frac{b^2}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)}$$
$$+\frac{c^2}{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)(c-\delta)}=0。$$

〔解〕去原方程式之分母爲

$x(x-b)(x-c)+x(x-c)(x-a)+x(x-a)(x-b)+(x-a)(x-b)(x-c)(x+d)=0$。

$a>b>c$則此方程式順次以$a,b,c,o,-d$代x。即得

$f(a)=+a(a-b)(a-c)$, $f(b)=-b(b-c)(a-b)$,

$f(c)=+c(a-c)(b-c)$, $f(0)=-abcd$,

$f(-d)=-d\{(b-d)(c-d)+(c-d)(a-d)+(a-d)(b-d)\}$。

故x之根在a,b及b,c及c,o及$o,-d$之間，故共有四實根。

又$\alpha, \beta, \gamma, \delta$爲其四根。以$\alpha$代$x$。則得

$$\frac{a}{\alpha-a}+\frac{a}{\alpha-b}+\frac{a}{\alpha-c}+\alpha+d=0。$$

又以$\beta, \gamma\ \delta$順次代x，則得如上之等勢式，

此四方程式順次將二式相減而簡單之。則

$$\sum\frac{a}{(a-\alpha)(a-\beta)}-1=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\sum\frac{a}{(a-\beta)(a-\gamma)}-1=0\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\sum\frac{a}{(a-\gamma)(a-\delta)}-1=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

(1) (2)相加又(2) (3)相加如次，

$$\sum\frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)}-(\alpha+\gamma)\sum\frac{a}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)}-2=0,$$

$$\sum\frac{a^2}{(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}-(\beta+\delta)\sum\frac{a}{(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}-2=0。$$

由減法 $(\beta-\gamma)\sum\frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}$

$$+(\alpha\beta-\gamma\delta)\sum\frac{a}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}=0。$$

由 (1)(3) 得 $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)\sum\frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}$

$$+(\alpha\beta-\gamma\delta)\sum\frac{a}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}=0。$$

由加法 $(\alpha+2\beta-2\gamma-\delta)\sum\frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}=0$。

但 $\alpha+2\beta-2\gamma-\delta=(\alpha-\gamma)+(\beta-\gamma)+(\beta-\delta)$。而 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 不相等。

故 $\alpha+2\beta-2\gamma-\delta\neq0$。 $\therefore\ \sum\frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}=0$。

8. 次之方程式，其有理根爲 $p\omega+q\omega^{-1}$ 試證之。

$x^5-4pqx^3+5p^2q^2x-p^5-q^5=0$，但 ω 爲 1 之五方根。

〔證〕 $\omega^5=1$, 又 $x=p\omega+q\omega^{-1}$。 $\therefore\ x^2=p^2\omega^2+q^2\omega^{-2}+2pq$，

$\therefore\ (x^2-2pq)=(p^2\omega^2+q^2\omega^{-2})^2$。 $\therefore\ x^4-4pqx^2+2p^2q^2=p^4\omega^4+p^4\omega^{-4}$

由是 $x(x^4-4pqx^2+2p^2q^2)=(p\omega+q\omega^{-1})(p^4\omega^4+q^4\omega^{-4})$。

即 $x^5-4pqx^3+2p^2q^2x=p^5\omega^5+q^5\omega^{-5}+pq(p^3\omega^3+q^3\omega^{-3})$。

$\therefore\ x^5-4pqx^3+2p^2q^2x-p^5-q^5$

$$=pq\{(p\omega+q\omega^{-1})^3-3pq(p\omega+q\omega^{-1})\}=pq\{x^3-3pqx\},$$

$\therefore\ x^5-5pqx^3+5p^2q^2x-p^5-q^5=0$。

9. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 爲 $x^4+4px^3+6qx^2+4rx+s=0$ 之四根。求有次之各根之方程式。

(i) $\alpha\beta+\gamma\delta,\quad \alpha\gamma+\beta\delta,\quad \alpha\delta+\beta\gamma$。

(ii) $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta),\quad (\alpha+\gamma)(\beta+\delta),\quad (\alpha+\delta)(\beta+\gamma)$。

〔解〕 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-4p,\quad \sum\alpha\beta=6q,\quad \sum\alpha\beta\gamma=-4r,\quad \alpha\beta\gamma\delta=s$，

(i) $(\alpha\beta+\gamma\delta)+(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)=6q$,

$(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)+(\alpha\delta+\beta\gamma)(\alpha\beta+\gamma\delta)$

$=\alpha(\sum\alpha\beta\gamma-\beta\gamma\delta)+\beta(\sum\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma\delta)+\gamma(\sum\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\delta)+\delta(\sum\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\gamma)$

$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sum\alpha\beta\gamma-4\alpha\beta\gamma\delta=4(4pr-s)$,

$(\alpha\beta+\gamma\delta)(\alpha\gamma+\beta\delta)(\alpha\delta+\beta\gamma)=\alpha\beta\gamma\delta\sum\alpha^2+\sum\alpha^2\beta^2\gamma^2$

$=\alpha\beta\gamma\delta\{(\sum\alpha)^2-2\sum\alpha\beta\}+(\sum\alpha\beta\gamma)^2-2\alpha\beta\gamma\delta\sum\alpha\beta=8(2p^2s-3qs+2r^2)$,

由是所求之方程式爲 $y^3-6qy^2+4(4pr-s)y-8(2p^2s-3qs+2r^2)=0$。

(ii) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2=16p^2$。

即　$2(\alpha\beta+\gamma\delta)+2(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2\sum\alpha\beta=16p^2$。

$\therefore$　$2y+2z+16p^2-12q=16p^2$。　$\therefore$ $y=-(z-6q)$，

以 $y=-(z-6q)$ 代入(i)方程式，即得所求之方程式為0，

即　$(z-6q)^3+6q(z-6q)^2+4(4pr-s)(z-6q)+8(2p^2s-3qs+2r^2)=0$，

10. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 為 $x^4+4px^3+6qx^2+4rx+s=0$ 之四根，若變其根為 $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2$，$(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2$，$(\alpha-\beta-\gamma+\delta)^2$。則其方程式如何。

〔證〕　$(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2=(\sum\alpha)^2+4(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$。

將前例(ii)之方程式比較之。得 $y=16p^2-4z$，

$\therefore$　$z-6q=\dfrac{1}{4}(7-16p^2+24q)$ 以代入(ii)之方程式而去其分母，得

$$(y-16p^2+24q)^3-24q(y-16p^2+24q)^2$$
$$+64(4pr-s)(y-16p^2+24q)-512(2p^2s-3qs+2r^2)=0,$$

11. a_1，a_2，a_3，為 $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$ 之三根，

則　$\sum a_1^3a_2^2=2p_1^2p_3-p_1p_2^2+p_2p_3$ 試證之，

〔證〕　$a_1+a_2+a_3=-p_1$，　$a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3=p_2$，　$a_1a_2a_3=p_3$，

由是 $\sum a_1^3a_2^2=a_1^2a_2^2(a_1+a_2)+a_2^2a_3^2(a_2+a_3)+a_3^2a_1^2(a_3+a_1)$

$=(a_1+a_2+a_3)(a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+a_3^2a_1^2)-a_1a_2a_3\sum a_1a_2$

$=-p_1\{(\sum a_1a_2)^2-2a_1a_2a_3\sum a_1\}+p_3p_2$

$=-p_1(p_2^2-2p_3p_1)+p_2p_3=2p_1^2p_3-p_1p_2^2+p_2p_3$，

三 次 方 程 式

463. 普通三次方程式 其形如 $x^3+ax^2+bx+c=0$，

此方程式由442章第二，於其各根增以 $\frac{a}{3}$，乃得消去有 x^2 之項如次形。　　$x^3+px+q=0$。

由是解此形之方程式。

464. 解法 解 $x^3+px+q=0$。

$$x^3+px+q=0\text{..........................}(1)$$

及　　$$x^3-3abx+a^3+b^3=0\text{..........}(2)$$

由(2) $(x+a+b)(x+\omega a+\omega^2b)(x+\omega^2a+\omega b)=0$。

但 ω 為1之立方根之虛根。

$\therefore$ 於(2) x之根。爲 $-a-b,\ -\omega a-\omega^2 b,\ -\omega^2 a-\omega b$。

比較(1)與(2)之係數，得 $p=-3ab,\ q=a^3+b^3$。

由此求得 a^3, b^3 爲 $\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$。

乃從a, b之值。而得 $-a-b,\ -\omega a-\omega^2 b,\ -\omega^2 a-\omega b$ 各值。即爲所求之根。

465. 餘論上之解法。名迦但Carden氏之解法。不過稍爲變通耳。

然以p及q表a及b。而得 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ 爲負者。則不能求其值。

何則。如 $(3+5\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ 之形。不能記爲 $\alpha+\beta\sqrt{-1}$。

例 $(3+5\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=\alpha+\beta\sqrt{-1}$。則

$$3+5\sqrt{-1}=(\alpha^3-3\alpha\beta^2)+(3\alpha^2\beta-\beta^3)\sqrt{-1}$$

即得三次式。仍不能求得 α, β 之值。

故 a^3, b^3 之值而爲 $\frac{q}{2}\pm\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$ 者。則不能用此解法。

凡若此者。如後467章第三例所示，即證明三次方程式如 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ 爲負者。則其根皆爲實根。

即迦但氏之解法。僅可解有 $-a-b$ 之壹實根，與 $-\omega a-\omega^2 b,\ -\omega^2 a-\omega b$ 之貳虛根者。故有三實根方程式之解法，不能適合。

求三次方程式實根之漸近數，則用忽拏(Horner)氏之解法(見475章)爲便。

〔例〕解 $x^3+4x-5=0$。

令原方程式爲 $x^3-3abx+a^3+b^3=0$。則 $-3ab=4$，及 $a^3+b^3=-5$。

由是求得a及b之值。爲 $\left\{-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{18}\sqrt{2793}\right\}^{\frac{1}{3}}$。

既求得a及b之近似值。則可求得其根爲 $-a-b,\ -\omega a-\omega^2 b,\ -\omega^2 a-\omega b$。

本題可用簡法解得。即如479章所示。其可通度之根。可得知之。即原方程式爲 $(x-1)(x^2+x+5)=0$。

故求得x之根爲$1, -\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-19})$。

〔別法〕令$x=y-\frac{4}{3y}$。則原方程式爲.

$$\left(y-\frac{4}{3y}\right)^3+4\left(y-\frac{4}{3y}\right)-5=0,\quad \text{即}\ y^3-\frac{64}{27y^3}-5=0。$$

$$\therefore\quad y^6-5y^3-\frac{64}{27}=0,\qquad y^3=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{931}{108}}。$$

四次方程式

466. 四次方程式之解法,須從三次方程式之解法得之。而其種種解法中稱最簡便者。莫如弗拉利(Ferrari)氏之解法,

〔弗拉利氏之例解〕設原方程式爲$x^4+px^3+q^2x+rx+s=0$。
於此兩邊各加以$(\alpha x+\beta)^2$。

則 $x^4+px^3+(q+\alpha^2)x^2+(r+2\alpha\beta)x+s+\beta^2=(\alpha x+\beta)^2$

令左邊爲完平方式。如$\left(x^2+\frac{p}{2}x+\lambda\right)^2$而比較其$x^2$及$x^2$以下各項之係數,爲$2\lambda+\frac{p^2}{4}=q+\alpha^2,\quad p\lambda=r+2\alpha\beta,\quad \lambda^2=s+\beta^2$。

由此三方程式消去其α,β,如次得λ之三次方程式爲

$$4(\lambda^2-s)\left(2\lambda+\frac{p^2}{4}-q\right)-(p\lambda-r)^2=0,$$

求得此三方程式之實根,而α及β之值亦可決定之,

又因 $\left(x^2+\frac{p}{2}x+\lambda\right)^2=(\alpha x+\beta)^2$。

則 $x^2+\frac{p}{2}x+\lambda\pm(\alpha x+\beta)=0$。

但α,β,λ爲既知之值。故方程式之四根,可完全求得之。

〔例〕解$x^4+6x^3+14x^2+22x+5=0$,
兩邊加以$(\alpha x+\beta)^2$。

則 $x^4+6x^3+(14+\alpha^2)x^2+(22+2\alpha\beta)x+5+\beta^2=(\alpha x+\beta)^2$。

令左邊爲$(x^2+3x+\lambda)^2$。而比較x^2及x^2以下各項之係數。爲

$9+2\lambda=14+\alpha^2$, $6\lambda=22+2\alpha\beta$, $\lambda^2=5+\beta^2$。

由是$(\lambda^2-5)(2\lambda-5)-(3\lambda-11)^2=0$。

$\therefore$ $\lambda^3-7\lambda^2+28\lambda-48=0$。

此方程式之壹實根爲3。

然以$\lambda=3$。則$\alpha^2=1$, $2\alpha\beta=-4$, $\beta^2=4$。

由是$(x^2+3x+3)^2=(x-2)^2$。

故所求之根爲$-2\pm\sqrt{3}$, $-1\pm2\sqrt{-1}$。

斯土莫Sturm氏之定理

467. 斯土莫氏之定理 設$f(x)=0$。爲不含等根之方程式。(如有等根。則可由453章去其等根。)$f_1(x)$爲$f(x)$之第壹變函數。

今將$f(x)$及$f_1(x)$用求最高公因子之法則。轉輾相除而變其各次餘式之符號。

惟$f(x)=0$無有等根者。故$f(x)$, $f_1(x)$無有公因子。其最後之餘式。爲不含x之式。而此餘式亦變其符號。

既變其各次餘式之符號。而以其所得之各式。假定爲$f_2(x)$, $f_3(x)$, ………$f_m(x)$。但$f_m(x)$不含有x者。

乃使$f(x)=0$實根之數。爲在於α及β之間。(但$\beta>\alpha$)則於$x=\alpha$時。其$f_1(x)$, $f_2(x)$,………$f_m(x)$相接符號變化之數。多於$x=\beta$時符號變化之數。

〔證明〕何則。試以$q_1, q_2,\cdots\cdots q_{m-1}$爲所得之商。$-f_2(x)$, $-f_3(x)$,……$-f_m(x)$爲其餘式。由是如次。

$$f(x)=q_1f_1(x)-f_2(x),$$
$$f_1(x)=q_2f_2(x)-f_3(x),$$
$$f_2(x)=q_3f_3(x)-f_4(x).$$
$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{m-2}(x)=q_{m-1}f_{m-1}(x)-f_m(x)。$$

(1)上之諸函數中。其連續貳函數。對於x之任壹值決不爲0。何則。若其連續貳函數於同時爲0。則其他各函數亦皆爲0。

例 $f_2(x)=f_3(x)=0$。則 $f(x)=0$, $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$,………。

(2)除$f(x)$之外其他任壹函數之值而爲0者,則與此函數連續之貳函數,其符號相異。

例 $f_2(x)=0$。則 $f_1(x)=-f_3(x)$。

由(1)及(2)乃得次之法則,

將x之值次第增變。$f(x)$非爲0時,即將x增變尙未經過$f(x)=0$之實根時。則與前記斯士莫氏連續諸函數,其符號變化之數無所增減。

因各函數之值未經過0時。其符號不變。而於任壹函數經過0時。其連接之貳函數必異其符號,故集此三個函數,其中生符號之變化者。祇有壹而已。

次假定a爲$f(x)=0$之壹實根。則

$f(a\mp\lambda)=f(a)\mp\lambda f'(x)$…………而$f(a)=0$。此右邊級數之總符號,當$\lambda$極微小時。則與$\mp\lambda f'(x)$之符號相同。因斯時第三項以下之和小於$\lambda f'(x)$故也,

由是λ之值當微小時。$f(a-\lambda)$之符號,與$f'(a)$異,$f(a+\lambda)$之符號與$f'(a)$同。

更爲詳說之,由**451**章以$f(x)=0$之壹實根爲a,

則 $$f(a-\lambda)=f(a)-\lambda f'(a)+\cdots\cdots$$

及 $$f(a+\lambda)=f(a)+\lambda f'(a)+\cdots\cdots$$

故x變爲$a-\lambda$時。$f(a-\lambda)$與$f'(a)$爲異符號,x變爲$a+\lambda$時,$f(a+\lambda)$與$f'(a)$爲同符號,

即x從$a-\lambda$迄於$a+\lambda$。其間必經過其壹實根a。故兩函數符號變化之數必減少一次,

將x增變。其連續諸函數,除x經過$f(x)=0$之實根外,其符號變化無所增減,於前既證明之。而於x經過壹實根時。其符號變化之數減壹亦既證明之,所以於$x=\alpha$時。符號變化之數多於$x=\beta$時。符號變化之數。而其差等於在α及β之間所有實根之數。

求方程式實根之全數。則於斯士莫氏之諸函數。用$-\infty$及$+\infty$代x。然用$+\infty$其符號變化之數,比用$-\infty$其符號變化之數減少,

而其差即爲實根之全數。

〔第壹例〕求 $x^4+4x^3-4x-13=0$ 之實根，其數有幾。

$$f(x)=x^4+4x^3-4x-13,$$

$$f_1(x)=4(x^3+3x^2-1),$$

〔注意〕求最高公因子之法則，可於演算間以正數量乘或除。故以正數量4除 $f'(x)$，以下遞次轉除，乃反其各次之餘式，而得次之函數。

$$f_2(x)=x^2+x+4,$$

$$f_3(x)=2x+3,$$

$$f_4(x)=-19。$$

乃用 $-\infty$, 0, $+\infty$ 順次代入諸函數之x，其根號之級數列之如次。 ＋－＋－－，－－＋＋－，＋＋＋＋－。

以＋－＋－－其正負變化之數，比－－＋＋－爲多，

又以－－＋＋－其正負變化之數，比＋＋＋＋－爲多。

故知於 $-\infty$ 與0之間有壹實根。又於0與 $+\infty$ 之間有壹實根。

〔第貳例〕求 $x^5-5x+1=0$ 實根之數，及其位置。

$$f(x)=x^5-5x+1,$$

$$f_1(x)=5(x^4-1),$$

$$f_2(x)=4x-1,$$

$$f_3(x)=+255.$$

於上之函數	$f(x)$,	$f_1(x)$,	$f_2(x)$,	$f_3(x)$,
x變爲 $-\infty$ 時，則	－	＋	－	＋，
x變爲 -2 時，則	－	＋	－	＋，
x變爲 -1 時，則	＋	0	－	＋，
x變爲 0 時，則	＋	－	－	＋，
x變爲 1 時，則	－	0	＋	＋，
x變爲 2 時，則	＋	＋	＋	＋。

由是知於 -2 及 -1 之間，有壹負實根，於0及1之間，有壹正實根。又於1及2之間，有壹正實根，而其餘之貳根爲虛根。何則，x變

爲2時。諸函數符號之級數爲++++。則x變爲2以上之數。其符號之級數相等。

〔第三例〕$x^3+px+q=0$知其皆爲實根，求其關係。

$$f(x)=x^3+px+q,$$
$$f_1(x)=3x^2+p,$$
$$f_2(x)=-2px-3q,$$
$$f_3(x)=-(27q^2+4p^3)。$$

$x=-\infty$	則	$-$	$+$	$+2p$	$-(27q^2+4p^3)$,
$x=+\infty$	則	$+$	$+$	$-2p$	$-(27q^2+4p^3)$。

若此三根悉爲實根，則$x=-\infty$，其諸函數符號變化之數應有三。而$x=+\infty$其諸函數符號變化之數應爲0。故p及$27q^2+4p^3$貳者。必皆爲負數。

468，特別之解法 用斯土莫氏之定理，以決定方程式之實根數及其位置。雖爲完全之解法。而須先求得其諸函數。再考其諸函數符號之變化，演算頗覺繁冗。有時可不由此定理，徑以某數量代入原函數。即可解得方程式之實根數及其位置。此爲特別之解法，揭例如次。

〔第壹例〕求$x^4-41x^2+40x+126=0$之實根數及其位置。

以1, 2, 3, 4, 5, 6代f(x)之x。順次記以f(x)之値之符號，爲++−−−+。由是知於2, 3之間，及5, 6之間，各至少有壹根而準代加德氏之規則，考得原方程式各項符號變化之數有貳，即知正根不多於貳，故原方程式祇有在2與3及5與6之間兩個正根。

又以0, −1, −2, −3, −4, −5代f(x)之x。由同法知負根在−1, −2之間及−6, −7之間。

〔第貳例〕求$x^4-14x^2+16x+9=0$之實根數及其位置。

於此例，其負根有貳個。在於0與−1之間，及−4與−5之間，此固易於求得之。

其正根亦有貳個，皆在於2與3之間，而f(2)與f(3)皆爲正，故不能顯出。然細考之，即得f(2)爲正，$f(2\frac{1}{4})$爲負，f(3)爲正。

由是知貳正根爲在於2與$2\frac{1}{4}$之間及$2\frac{1}{4}$與3之間,

〔第三例〕用任意之方法,求 $x^6-5x^5-7x^2+8x+20=0$ 之實根數及其位置。

準代加德氏符號之規則,知此方程式之正根不多於貳,其負根亦不多於貳。

今$f(1)$爲正,$f(2)$爲負。故知1與2之間有壹實根,而$f(\infty)$爲正,故其他壹實根,以正數量代入之。求得其壹實根在5與6之間。

x變爲$-x$。則原方程式變爲 $x^6+5x^5-7x^2-8x+20=0$。此方程式之正根,即原方程式之負根,

今此方程式之左邊$f(x)$,用0與1間之數代入之皆得正值,

而 $x>1$, 則 $f(x)>6x^4-15x^2+20$。

而 $6x^4-15x^2+20$。其x之值。無論如何常爲正數量,

何則,以$4\times6\times20-15^2>0$。 即 $f(x)$常爲正數量。

由是知原方程式不能有負根。

469. 差之方程式 設$f(x)=0$之貳根爲α,β。而 $y=\alpha-\beta$,則 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$。 惟 $\alpha=y+\beta$。 故 $f(y+\beta)=0$,此方程式與$f(\beta)=0$消去其β。由是所成之方程式,其根等於$f(x)=0$各貳根之差,

此所成之方程式有$\alpha-\beta$及$\beta-\alpha$貳根。故合僅有y之偶數方乘。而此y^2之方程式內。其y^2之根。爲由$f(x)=0$之壹對實根組合之數。又 $f(x)=0$其根若皆爲實根者,則y^2之方程式內。其y^2必皆爲正實之值。

今試舉方程式$x^3+px+q=0$以考察之,

求將$x^3+px+q=0$。以其根之差爲根而作方程式。

$y=\alpha-\beta$ 或$\beta-\alpha$ $\therefore$ $y^2=(\alpha-\beta)^2$。

但 α,β,γ爲原方程式之三根。

以$\alpha+\beta+\gamma=0$。 $\therefore$ $\alpha+\beta=-\gamma$, $\alpha\beta\gamma=-q$, $\therefore$ $\alpha\beta=-\frac{q}{\gamma}$,

故 $y^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\gamma^2+\frac{4q}{\gamma}$, $\therefore$ $\gamma^3-y^2\gamma+4q=0$。 又 $\gamma^3+p\gamma+q=0$

由是得　$\gamma=\frac{3q}{y^2+p}$,

$\therefore\ 27q^3+3pq(y^2+p)^2+q(y^2+p)^3=0$。

即　$y^6+6py^4+9p^2y^2+4p^3+27q^2=0$。此即所求之方程式也。

準代加德氏之符號規則，上之y^2之方程式。其p及$4p^3+27q^2$非俱爲負。則不能有三正根。又若$4p^3+27q^2$爲負，則y^2之方程式之三正根，當在$+\infty$, $-2p$, $-p$, 0之間。何則，試以$+\infty$, $-2p$, $-p$, 0代入此方程式之y^2順次記$f(y^2)$之值之符號爲$+$, $-$, $+$, $-$。

由是方程式如$x^3+px+q=0$爲有三實根者，其關係全在$4p^3+27q^2$之值爲負也。

470. 任何方程式之實根 示以推求實根近似之值以作本編之結局。求近似值之方法有種種，玆僅示以忽拏氏之法。特將可爲是法之準備者先爲說明之。

471. 綜合除法〔Synthetic Division〕如次所示。

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots\dots\dots\dots+a_n$,

以$x-\lambda$除之。其商爲

$Q=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\dots\dots\dots\dots+b_{n-1}$。

假定其餘爲R。但R不含有x者。

如是則　$f(x)=Q\times(x-\lambda)+R$,

但$Q\times(x-\lambda)+R$等於次式。

$b_0x^n+(b_1-\lambda b_0)x^{n-1}+(b_2-\lambda b_1)x^{n-2}+\dots\dots+(b_{n-1}-\lambda b_{n-2})x+R-\lambda b_{n-1}$。

試將此式與$f(x)$比較x同方乘之係數。

$b_0=a_0$, $b_1-\lambda b_0=a_1$, $b_2-\lambda b_1=a_2\dots\dots$, $b_{n-1}-\lambda b_{n-2}=a_{n-1}$, $R-\lambda b_{n-2}=a_n$。

由上之關係$b_0, b_1, b_2, b_3\dots\dots$之值。可如次之所示直求得之，

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3\dots\dots\dots\dots & a_{n-1} & a_n \\ & \lambda b_0 & \lambda b_1 & \lambda b_2\ \dots\dots\dots\dots & \lambda b_{n-2} & \lambda b_{n-1} \\ \hline b_0 & b_1 & b_2 & b_3\dots\dots\dots\dots & b_{n-1} & R. \end{array}$$

第壹$b_0=a_0$第貳b_0以λ乘之加a_1而得b_1。第三b_1以λ乘之加a_2。而得b_2以下準此。

〔例〕$x^5-6x^4+2x^3+15x^2+7$以$x-2$除之。求其商及其餘。

$$\begin{array}{r} 1-6+2+15+0+7 \\ 2-8-12+6+12 \\ \hline 1-4-6+3+6+19 \end{array}$$

故所求之商爲$x^4-4x^3-6x^2+3x+6$。其除爲19。

上之方法,謂之綜合除法。即解析除之方法而後綜合之。以成此規則者也。

此法擴充之可用於多項式之除法,因非要例故畧之。

472. 係數之關係 $b_0, b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots$之值可以$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$及$\lambda$表示之。

$b_0=a_0,\quad b_1=a_1+\lambda a_0,\quad b_2=a_2+\lambda a_1+\lambda^2 a_0,$

$b_3=a_3+\lambda a_2+\lambda^2 a_1+\lambda^3 a_0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$b_{n-1}=a_{n-1}+\lambda a_{n-2}+\lambda^2 a_{n-3}+\lambda^3 a_{n-4}+\ldots\ldots\ldots+\lambda^{n-1}a_0,$

及 $R=a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2 a_{n-2}+\lambda^3 a_{n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots=f(\lambda),$

故 $\dfrac{f(x)}{x-\lambda}=a_0x^{n-1}+(a_1+\lambda a_0)x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

由上諸式。可得439章之公式,

何則,設$a, b, c, \ldots\ldots\ldots$爲$f(x)=0$之根,則

$f'(x)=\dfrac{f(x)}{x-a}+\dfrac{f(x)}{x-b}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$(見452章)

$$=\{a_0x^{n-1}+(a_1+aa_0)x^{n-2}+(a_2+aa_1+a^2a_0)x^{n-3}+\ldots\ldots\ldots\}$$

$$+\{a_0x^{n-1}+(a_1+ba_0)x^{n-2}+(a_2+ba_1+b^2a_0)x^{n-3}+\ldots\ldots\ldots\}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$=na_0x^{n-1}+(na_1+a_0\sum a)x^{n-2}+(na_2+a_1\sum a+a_0\sum a^2)x^{n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

但 $f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+(n-2)a_2x^{n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$。

比較兩式同方乘之係數爲

$$na_0=na_0,$$

$$(n-1)a_1=na_1+a_0\sum a,$$

$$(n-2)a_2=na_2+a_1\sum a+a_0\sum a^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

473. 問題從$f(x)=0$之各根減λ以爲根，求其方程式。已於**442**章第三示明其法。以$y+\lambda$代入$f(x)$之x而得之。今更示以簡法如次。

設從$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+a_n=0$之各根減$\lambda$以爲根。其方程式。爲 $b_0y^n+b_1y^{n-1}+b_2y^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+b_n=0$。

然$y=x-\lambda$。故上之方程式。

即 $b_0(x-\lambda)^n+b_1(x-\lambda)^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_{n-1}(x-\lambda)+b_n=0$。

由是$f(x)=b_0(x-\lambda)^n+b_1(x-\lambda)^{n-1}+\cdots\cdots\cdots+b_{n-1}(x-\lambda)+b_n$。

此右邊以$x-\lambda$除。則餘b_n，

又此第壹商以$x-\lambda$除。則餘b_{n-1}，

又此第貳商以$x-\lambda$除。則餘b_{n-2}，

以下順次餘b_{n-3}，$b_{n-4}\cdots\cdots\cdots\cdots b_2$，$b_1$，$b_0$，

故以$x-\lambda$逐次除$f(x)$。即得其餘爲b_n $b_{n-1}\cdots\cdots\cdots b_1$，$b_0$，

〔第壹例〕求從$x^4-2x^3+3x-5=0$之各根減2而作方程式。

以累除所得之餘數。(演式中之粗字)爲所求方程式之係數。用**471**章之法。

$$
\begin{array}{lllll}
1-2+0+3-5 \\
\quad\ 2 & 0 & 0 & 6 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 3 & \mathbf{1} \\
 & 2 & 4 & 8 \\
\hline
1 & 2 & 4 & \mathbf{11} \\
 & 2 & 8 \\
\hline
1 & 4 & \mathbf{12} \\
 & 2 \\
\hline
\mathbf{1} & \mathbf{6}
\end{array}
$$

第壹以$x-2$除$f(x)$得商x^3+3而餘**1**。

第貳以$x-2$除x^3+3得商x^2+2x+4而餘**11**。

第三以$x-2$除x^2+2x+4得商$x+4$而餘**12**。

第四以$x-2$除$x+4$得商1而餘6,

由是得所求之方程式。爲

$$y^4+6y^3+12y^2+11y+1=0,$$

〔第貳例〕求從$x^3-x^2-x+4=0$之各根加3而作方程式。

其除式爲$x+3$。由是

$$\begin{array}{l}
1-1-\ 1+\ 4\\
\ \ -3+12-33\\
\hline
1-4+11-29\\
\ \ -3+21\\
\hline
1-7+32\\
\ \ -3\\
\hline
1-10。
\end{array}$$

由是得所求之方程式爲$y^3-10y^2+32y-29=0$。

474。拾之倍數 若將$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$。各根十倍之。而作方程式。

以$\frac{y}{10}$代x。則$a_0y^n+10a_1y^{n-1}+10^2a_2y^{n-2}+\cdots\cdots+10^na_n=0,$

即y^n之項1倍。y^{n-1}之項10倍。y^{n-2}之項10^2倍。……………迄於末項爲10^n倍。

〔例〕試將$x^4-2x^3+5x+8=0$之各根十倍之而作方程式。

所作之方程式爲$y^4-20y^3+5000y+80000=0$。此後欲其應用便利,不用y而用x,

即 $x^4-20x^3+5000x+80000=0$。

475。忽拏Horner氏之法 有數字係數之方程式,求其實根之漸近值。

由斯土莫氏之定理,知方程式之壹正實根。在於連續兩整數之間。而第壹從其各根減兩整數中之小者以爲根而作方程式。則此變得之方程式,其根必在於0與1之間矣,

乃將此方程式之根十倍之,(474章)則新方程式之根。爲在於0與10之間,

今驗此新方程式之根。爲在於10以內兩整數之間。乃如前法從其各根減此兩整數中之小者而變化之。亦將變得之方程式以其根十倍之。驗得其根在連續某兩整數之間,又從其根減其兩整數之小者而變化之。如法遞推將連次所減之各整數依次列之。即爲殆近於原方程式之壹實根。

從原方程式減所求壹實根之整數部後。將其各根十倍之,所得次之整數部。爲所求根之十分位。即小數第壹位。次從各根減其整數部後,又以其根十倍之。所得又次之整數部,爲所求根之百分位,即小數第貳位。以下準此,

惟施此方法所當注意者。從各次之根減某整數時。方程式已知項(即最後之項)之符號,須無更變。若此已知項之符號更變。則此方程式之根。已超過原方程式之根矣,

如欲求負根。令x變爲$-x$。然後如前法求之。

〔第壹例〕求$x^3-3x-4=0$之正實根迄小數二位止。

考此方程式之正根祇有壹。而此正根在於2與3之間,

第壹從各根減2而變化之,得

$$x^3+6x^2+9x-2=0,$$

次將此方程式之各根十倍之。得

$$x^3+60x^2+900x-2000=0,$$

考此根在1與2之間。由是從此各根減1而變化之。

$$x^3+63x^2+1023x-1039=0,$$

又將此根十倍之,考其根在9與10之間,

故所求之根爲2.19…………………

若欲更求以下之小數。可將此方程式之各根減9而變化之。

$$x^3+657x^2+113883x-66541=0,$$

將此根十倍之。以求其小數位。

其演算法如次。

1	0	−3	−4	(2.19………
	2	+4	2	
	2	+1	−2000	
	2	8		
	4	+900		
	2			
	60			
	1	+ 61	+ 961	
	61	+961	−1039000	
	1	+ 62		
	62	+102300		
	1			
	630			
	9	+ 5751	+ 972459	
	639	+108051	− 66541	
	9	+ 5832		
	648	+113883		
	9			
	657			

〔簡法〕將上列之演算式簡記如次。

0	−3	−4	(2.19……
2	+1	−2000	
4	900	−1039000	
60	961		
61	102300	−66541	
62	108051		
630	113883		
639			
648			
657			

〔第貳例〕求30之立方根,

```
1    0      0        -30  (3.107...........

     3      9     | -3000
          --------
          | 2700
     6    | 2791        | -209000000
   -------  ------------
     90   | 28830000
     91   |
     92   |
   -------             -----------
     9300   28895149 | -6733957
          ------------
     9307 | 28960347
     9314 |
   -------
     9321
```

次示以畧法。

於演算時,變其方程式之根而又倍之。至二回三回而後,其最後之試項。(即x之一次項及已知數之項)比之他項甚大。

由是可用畧法。即從左項至右項之諸係數。原應順次附加以1, 2, 3.........個0者。今不附加以0。而於其係數末位之數字。從右項向左項逐次捨去其1, 2, 3,.........個數字。

玆將上之演算式。已得3.107之後,施用此畧法更求以下之小數。

```
1      9321      28960347    -6733957(3.1072325
       93        2896220
                 2896406     - 941517
                             -  72597
                             -  14669
                             -    189
```

從原有3.107之後得次位之新數字爲2。迨求得2以後。斯時各項所有之係數。爲

93, 2896406, −941517。其第壹項已消去。

乃從下列之第貳項捨去壹數字。第壹項捨去貳數字。如是可徑以289640除941517。但其除法用畧除法。每除壹次將除數捨去壹數字。其連次所得之商。即其次所得各位之小數也。

476. 虛根 方程式虛根之數值。於理論上可以次之方法求得之。然此爲最簡單之法。而其他則甚煩雜也。

例求$x^3+3x-1=0$虛根之數值。

試於$f(x)$以$\alpha+\beta i$代x。則得$(\alpha+\beta i)^3+3(\alpha+\beta i)-1=0$。

即 $\alpha^3+3\alpha-1-3\alpha\beta^2+(3\alpha^2\beta-\beta^3+3\beta)i=0$。

$\therefore$ $\alpha^3+3\alpha-1-3\alpha\beta^2=0$, $3\alpha^2\beta-\beta^3+3\beta=0$。

第貳方程式以β除之。爲$3\alpha^2-\beta^2+3=0$。與第壹方程式消去其β。而得$8\alpha^3+6\alpha+1=0$。

此方程式之壹實根其値爲$-.16109\ldots\ldots\ldots\ldots$

又 $\beta^2=3(\alpha^2+1)$。 $\therefore$ $\beta=\pm1.75438\ldots\ldots\ldots\ldots$

由是得所求之根爲$-.16109\ldots\ldots\pm1.75438\ldots\ldots\ldots\sqrt{-1}$。

例題四十六

1. 解次之各方程式。

(i) $x^3-12x+65=0$。 (ii) $x^3-9x+28=0$。

(iii) $x^3-48x-520=0$。 (iv) $x^3-21x-344=0$。

(v) $x^3-2x+5=0$。 (vi) $x^3-6x-11=0$。

(答) (i) -5, $-\omega-4\omega^2$, $-\omega^2-4\omega$, 即 -5, $\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{-3}$。

(ii) -4, $-\omega-3\omega^2$, $-\omega^2-3\omega$。

(iii) 10, $2\omega+\omega^2$, $2\omega^2+8\omega$。

(iv) 8, $\omega+7\omega^2$, $\omega^2+7\omega$。

(v) $-2.094\ldots$, $-1.703\ldots\ldots\omega$, $-.391\ldots\ldots\omega^2$, $-1.703\ldots\ldots\omega^2$, $-.391\ldots\ldots\omega$。

(vi) 3.0913, $2.1699\omega+.9214\omega^2$, $2.1699\omega^2+.9214\omega$。

上之解法由465章。

2. 解次之各方程式。

(i) $x^4+2x^3+14x+15=0$。 答 -1, -3, $1\pm 2i$,

(ii) $x^4-12x-5=0$。 答 $1\pm\sqrt{2}$, $-1\pm 2\sqrt{-1}$。

(iii) $x^4-12x^2+24x+140=0$。 答 $3\pm\sqrt{-5}$, $-3\pm\sqrt{-1}$。

(iv) $4x^4+4x^3-7x^2-4x-12=0$。 答 -2, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}\left(-1\pm\sqrt{-25}\right)$,

上之解法由466章。

3. 用Sturm氏之定理,求次之方程式實根之數及其位置。

(i) $x^3-3x+6=0$。 (ii) $x^3-x^2-33x-61=0$,

(iii) $2x^4-x^2-10x+3=0$。 (iv) $x^4-14x^2+16x+9=0$。

(v) $x^4-7x^2+3x-20=0$。

(答) (i) 於 -3 與 -2 之間有一實根,

(ii) 於 -7 與 -6 之間及 1 與 2 之間各有一實根。

(iii) 於 0 與 1 之間及 1 與 2 之間各有一實根,

(iv) 於 2 與 3 之間有二實根。及 0 與 -1 之間有一實根,及 -4 與 -5 之間有一實根,

(v) 於 2 與 3 及 -3 與 -4 之間各有一實根,

上之解法由467章。

4. $x^3+3px^2+3qx+r=0$。求Sturm氏之各函數。又 $p^2<q$ 則有二虛根,試表示之。

〔解〕
$$f(x)=x^3+3px^2+3qx+r。$$
$$f_1(x)=3(x^2+2px+q)。$$
$$f_2(x)=2(p^2-q)x+pq-r。$$
$$f_3(x)=(2p^3-3pq+r)^2+4(p^2-q)^2(q-p^2),$$

由是 $p^2<q$ 則以 $+\infty$, $-\infty$ 代 x。其諸函數順次得 $++-+$。及 $-+++$。即有一實根,其他之二根爲虛根。

5. p 或 r 爲負而 $-4p^3r>27r^3$。則 $x^3+px^2+r=0$。皆爲實根,試證明之。

〔證〕 $f(x)=x^3+px^2+r$。 $f_1(x)=3x^2+2px$。

$f_2(x)=2p^2x-9r$, $f_3(x)=+9(-4p^3r+27r^2)$。

p 或 r 有一爲負。則 $-4p^3r$ 爲正。故 $f_3(x)$ 爲正,以 $-\infty$ 及 $+\infty$ 代之而得上之諸函數。順次爲 $-+-+$ 及 $++++$ 故其實根有三。

6. 方程式 $f(x)=0$ 其係數皆爲整數。而 $f(0)$ 及 $f(1)$ 皆爲奇數，則此方程式決無整根。試證明之。

〔證〕 於 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$。

$f(0)=a_n=$ 奇數， $f(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=$ 奇數。

故 $\frac{a_n}{a_0}$ 爲奇數，即凡根之積皆爲奇數。設或 $f(x)=0$ 之根爲整數。而以 $2\alpha+1$ 代 x。則 $f(2\alpha+1)=a_0(2\alpha+1)^n+a_1(2\alpha+1)^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$。

即偶數 $+a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=0$。

即偶數 + 奇數 $=0$。是不合於理，故知原方程式決無整根。

7. $x^3-2x-5=0$ 之一正實根爲 2.09455143 試示之。

〔證〕 如475章第一例。

8. 求次之各方程式之正實根，迄小數四位止。

(i) $x^3-7x+7=0$。 (ii) $x^3-8x-40=0$。

(iii) $x^3-6x^2+9x-3=0$。 (iv) $x^4+x^3-4x^2-16=0$。

(v) $x^4-14x^2+16x+9=0$。 (vi) $x^5-2=0$。

(答) (i) 1.3569, 1.6920。 (ii) 4.1891。 (iii) .4679, 1.6527, 3.8793。 (iv) 2.2317。 (v) 2.1622, 2.4142。 (vi) 1.1487。

9. 求次之方程式之實根。及其位置。

(i) $x^4+2x^3-23x^2-24x+144=0$。 (ii) $x^4-26x^2+48x+9=0$。

(答) (i) 3, 3, −4, −4。 (ii) 3, 3, $-3\pm\sqrt{8}$。

10. $x^5-7x^3+15x^2+3x-4=0$ 之實根。不多於四，又其四根在 1 與 −1 之間，試證之。

〔證〕 此可由467章證得之。

11. 知 $2x^5-7x^4+6x^3-11x^2+4x+6=0$。有可通度之根。試解之。

〔解〕 $y=mx$， 即 $x=\frac{y}{m}$。

則 $2y^5-7my^4+6m^2y^3-11m^3y^2+4m^4y+6m^5=0$。

如 $m=2$。 則 $y^5-7y^4+12y^3-44y^2+32y+96=0$。

以96之因子 −1, 2, 6 代 y 爲能適合。

故 $y=-1, 2, 6$。 即 $x=-\frac{1}{2}, 1, 3$。

由是知其他之根爲$\pm\sqrt{-2}$。

12. 試以$x^3-3px^2-3(1-p)x+1=0$各根之平方爲根而作方程式，由此方程式對於p之任何實根而有三實根。試示之。

〔解〕 $x^3-3(1-p)x=3px^2-1$。兩邊平方之。

則 $x^6-6(1-p)x^4+9(1-p)^2x^2=9p^2x^4-6px^2+1$。

$\therefore$ $x^6-3(3p^2-2p+2)x^4+3(3p^2-4p+3)x^2-1=0$。

$x^2=y$。則$y^3-3(3p^2-2p+2)y^2+3(3p^2-4p+3)y-1=0$。

y之三根。皆爲實根。可由**467**章證得之。

13. $x^3-3px^2-3(1-p)x+1=0$之三根，對於p之任何實數皆爲實根，試證之。又此三根爲α,β,γ。則

$\beta(1-\gamma)=\gamma(1-\alpha)=\alpha(1-\beta)=1$。或$\beta(1-\alpha)=\gamma(1-\beta)=\alpha(1-\gamma)=1$。

〔證〕 $f(x)=x^3-3px^2-3(1-p)x+1$, $f'(x)=x^2-2px-(1-p)$,

$f''(x)=x-p$, $f'''(x)=+1$。

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	
$x=+\infty$	+	+	+	+	卽符號之變化爲0。
$x=-\infty$	−	+	−	+	卽符號之變化爲3,

由是知有實根三。又以$x^3-3px^2-3(1-p)x+1=0$之三根爲α,β,γ。則$\alpha\beta\gamma=-1$。而令$\beta(1-\gamma)$, $\gamma(1-\alpha)$, 及$\alpha(1-\beta)$爲y。則

$$y=\beta(1-\gamma)=\beta-\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}=\beta+\frac{1}{\alpha}。\qquad\therefore\quad \alpha=\frac{1}{y-\beta}。$$

$$y=\gamma(1-\alpha)=\gamma-\frac{\alpha\beta\gamma}{\beta}=\gamma+\frac{1}{\beta}。\qquad\therefore\quad \gamma=\frac{\beta y-1}{\beta}。$$

$$y=\alpha(1-\beta)=\alpha-\frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma}=\alpha+\frac{1}{\gamma}。$$將α,γ相當之值代入之。

卽 $y=\frac{1}{y-\beta}+\frac{\beta}{\beta y-1}$。 $\therefore$ $(y^2-1)(\beta^2-\beta y+1)=0$。

由是$y-1=0$。 $\therefore$ $y=1$。 卽 $\beta(1-\gamma)=\gamma(1-\alpha)=\alpha(1-\beta)=1$。

由同法$\beta(1-\alpha)=\gamma(1-\beta)=\alpha(1-\gamma)=1$。

14. 以$x^5+px+q=0$之根各一對之和爲根，則得方程式如次。

$x^{10}-3px^6-11qx^5-4p^2x^2+4pqx-q^2=0$。

〔證〕 設$x^5+px+q=0$之五根爲a, b, c, d, e.

則 $\sum a=0$, $\sum ab=0$, $\sum abc=0$, $\sum abcd=p$, $abcde=q$。

又所求方程式之根有 $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $b+c$, $b+d$, $b+e$, $c+d$, $c+e$, $d+e$ 之十根。

乃從 $\sum(a+b)=0$, $\sum(a+b)(a+c)=0$ 等之關係。可求得第二之十次方程式。此演式甚繁。且多占紙幅。故略之。

15. $x^4+4ax^3+6a^2x^2+4ax+1=0$。若非 $1>a^2>\frac{1}{9}$ 則決無實根。又 a^2 在此極限內。則此方程式有二實根。試各證明之。

〔證〕 $f(x)=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4ax+1$,

$f'(x)=x^3+3ax^2+3a^2x+a$,

$f''(x)=-(1-a^2)(3ax+1)$,

$f'''(x)=-\left(a^2-\frac{1}{9}\right)$。

於上之四個函數。若其 $1>a^2>\frac{1}{9}$。

以 $x=+\infty$ 代入之。順次得 $++--$

以 $x=-\infty$ 代入之。順次得 $+-+-$

即符號變化之差為2。故x有二實根。

若 $1<a^2$。

則以 $x=+\infty$ 代入之。順次得 $+++-$

以 $x=-\infty$ 代入之。順次得 $+---$

即符號變化之差為0。故x無一為實根。

又 $a^2<\frac{1}{9}$。

則以 $x=+\infty$ 代入之。順次得 $++-+$

以 $x=-\infty$ 代入之。順次得 $+-++$

即符號變化之差為0。故x無一為實根。

16. α 為 $x^4+ax^3-4x^2-ax+1$ 之一根。則 $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ 亦為根。又其他之根為 $-\frac{1}{\alpha}$ 及 $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ 並證明之。

〔證〕 將 $x^4+ax^3-4x^2-ax+1=0$。括之為 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x-\frac{1}{x}\right)-4=0$。

$\therefore \quad x-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}(-a\pm\sqrt{a^2+16})$。

若 $x=\alpha$。 則 $\alpha-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2}(-a\pm\sqrt{a^2+16})$。

由是 $x-\frac{1}{x}=\alpha-\frac{1}{\alpha}$。 卽 $(x-\alpha)\left(1+\frac{1}{x\alpha}\right)=0$。

$\therefore \quad 1+\frac{1}{x\alpha}=0 \qquad \therefore \quad x=-\frac{1}{\alpha}$。

又他之二根爲 β,γ。則從原方程式得 $\alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\beta\gamma=1$。

卽 $-\beta\gamma=1$ ……………………………………………………(1)

又 $\alpha\left(-\frac{1}{\alpha}\right)+\alpha\beta+\alpha\gamma+\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\beta-\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\gamma+\beta\gamma=-6$ …………(2)

從(1)(2)求得 β,γ 爲 $\beta=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$, $\gamma=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$。

17. α,β,γ …………爲 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$ 之根。

則 $\sum\alpha^2\beta^2\gamma=-p_2p_3+3p_1p_4-5p_5$ 試證明之。

(證) 用440章及441章之公式,可直證得之。

18. a_1, a_2 …………………爲 $x^5-5px^3+5p^2x-q=0$ 之根。

則 $\sum a_1^4a_2^3a_3^2a_4+5q^2+500p^5=0$。

(證) 與前題同法。

頁	行	原文	訂正
18	26	乘 $5a^2xy^2$	乘 $-5a^2xy^2$
45	27	$-8c^3-24a^2c$	$-8c^3-36a^2b-24a^2c$
48	21	$(b^2+c^2)^2\ (ab+ac)^2$	$(b^2+c^2)^2+(ab+ac)^2$
57	13	$(1+1+1-4$	$(1+1+1+1-4$
80	2	$+ba^{n-}$	$+ba^{n-1}$
,,	5	$+ba^{-1}$	$+ba^{n-1}$
91	1	Labc	$L(b-c)(c-a)(a-b)$
,,	2	$-abc$	$-(b-c)(c-a)(a-b)$
102	2	$(x+6$	$(x+6y$
132	7	$=\frac{z}{a+b-c}$	$=\frac{z}{a+b-c}=k$
155	26	$\frac{c}{a}x^2\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right\}$	$\frac{c}{a}x^2-\left\{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right\}$
169	4	$=2$	$=-2$
,,	15	$(xa-b)$	$(x-a-b)$
,,	25	$=2c^2x$	$=-2c^2x$
209	4	$+(z-1)$	$+n(z-1)$
239	18	$\frac{1}{20}(1+.25)$	$\frac{1}{20}x(1+.25)$
252	12 13 14	$+abc$	$+2abc$
254	2	則除	則除 $x=0,\ y=5$, 及
258	20	$-(-zx)$	$-y(-zx)$
259	1	$+\frac{c}{z}0$	$+\frac{c}{z}=0$
,,	11	$a+b+c$	$-(a+b+c)$
273	8	$-abc$	$-3abc$
276	10	$a^3b^3+c^3$	$a^3+b^3+c^3$
277	8	$(bd+ac)$	$-(bd+ac)$
293	19	$+(x+y+z)^3$	$+3(x+y+z)$
317	13	$(a^2-12)x^2$	$(a^2-12b)x^2$
318	19	$q+\frac{q^2}{10^{2n}p}+\frac{q^3}{10^{4n}p^2}$	$q+\frac{q^2}{10^{n}p}+\frac{q^3}{3\times10^{2n}p^2}$
334	7	$ax-by-cz$	$a(ax-by-cz)$
,,	,,	$by-cz-ax$	$b(by-cz-ax)$
,,	,,	$cz-ax-by$	$c(cz-ax-by)$
345	14	$8\times\frac{1}{2}$	$8\times-\frac{1}{2}$
347	7	$ar^{m}\frac{ar^{m+1}}{1-r}$	$ar^{m}-\frac{ar^{m+1}}{1-r}$
353	11	$=\frac{c(1+b^2)}{1-bc}$	$=-\frac{c(1+b^2)}{1-bc}$
358	3	$+(b^{m-3}-a^{m-3})$	$+a(b^{m-3}-a^{m-3})$
364	2	以 r 除盡	以 $r-1$ 除盡
384	14	(n^2-2)	(n^2-2^2)
,,	16	$(n+1)$ 部分	$(n+1)+1$ 部分
398	13	$n-x+1$	$(n-r+1)x$
399	13	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}+1$
478	4	$(1-x^6)^8$	$=(1-x^6)^8$
503	4	$\frac{n(n-1)}{1\cdot2}$	$+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}$
513	14	$=\log_e(1-x)$	$=-\log_e(1-x)$
527	19	$(a+\overline{nr-2}.b)$	$(a+\overline{n+r-2}.b)$
528	23	$=(n+1)+n$	$=n(n+1)+n$
546	6	$(k-4)^3=0$	$(k-3)^3+(k-4)^3=0$
548	3	$=u$	$=v_{n-1}$
549	3	$+q_{n-2}$	$+qa_{n-2}$

頁	行	原文	訂正
552	8	$1\{2\cdot1+1\}$	$1+\{2\cdot1+1\}$
„	28	6, 6,…	第二差6, 6,…
559	19	$\left.\frac{(3n+4)}{(3n+2)}\right\}$	$\left.\frac{(3n+4)}{(3n+2)}-\frac{4}{1}\right\}$
585	16	$+_3b_3$	$+a_3b_3$
603	3	$q_nq_n+\lambda q_{n-1})$	$q_{n-1}(q_n+\lambda q_{n-1})$
609	18	$=a$	$=-a$
616	21	斂級	斂級數
617	8	$=\frac{a_1a_2}{q_1q_2}$	$=-\frac{a_1a_2}{q_1q_2}$
647	14	$(bn+2mn+n^2+?m^2n+\ldots)p$	$M(p)$
661	9	$n=2m+1$	$n-3=2m$
„	„	$=8m(m+1)$	$=16m(m+1)$
661	10	$=8M(\underline{\|4})$	$=16M(\underline{\|4})$
677	24	$\left(1\frac{1}{2^n}\right)^{-1}$	$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{-1}$
677	24	$\left(1\frac{1}{3^n}\right)^{-1}$	$\left(1-\frac{1}{3^n}\right)^{-1}$
„	„	$\left(1-\frac{1}{5^n}\right)^{-1}$	$\left(1-\frac{1}{5^n}\right)^{-1}$
700	10	$=\frac{r_2}{\sqrt{N}+a_2}$	$=b_1+\frac{r_2}{\sqrt{N}+a_2}$
752	23	$\Delta=1$	$\Delta=-1$
762	29	如 a_1+b_1y	如 a_1x+b_1y
767	13	$\alpha\beta\gamma,\ \alpha\beta c$	$a\beta\gamma,\ ab\gamma,\ \alpha\beta c$
786	22	$=\frac{1}{-a}$	$=\Sigma\frac{1}{-a}$
787	2	四乘和	四乘方和
791	17 19	$\sqrt{5}$	$\sqrt{-5}$
795	15	$\Sigma abc=r$	$\Sigma abc=-r$
796	2	$abc=15$	$abc=-15$
803	11	若f為	若f(x)為

Complete Instructions on Advanced Algebra
Commercial Press, Limited

己酉年六月初版
中華民國十年八月八版

(大代數學講義一冊)
(每冊定價大洋叁元)
(外埠酌加運費匯費)

原著者　日本上野清
譯述者　吳江王家葵
　　　　吳興張廷華
　　　　平湖王積沂
校訂者　紹興駱師曾
　　　　諸暨趙秉良
　　　　紹興壽孝天
發行者　商務印書館
印刷所　上海北河南路北首寶山路　商務印書館
總發行所　上海棋盤街中市　商務印書館
分售處　北京 天津 保定 奉天 吉林 龍江 濟南 太原 開封 洛陽 西安 南京 杭州 蘭谿 安慶 蕪湖 南昌 漢口 長沙 常德 成都 重慶 瀘縣 福州 廣州 潮州 香港 桂林 梧州 雲南 貴陽 張家口 新嘉坡　商務印書分館

三六八六自