新中學文庫

數學全書

第二册 代數

韋柏 著
鄭太朴 譯

商務印書館發行

數學全書

第二册 代数

Von H. Weber 著

鄭太朴 譯

商務印書館發行

中華民國二十三年七月初版
中華民國三十六年四月四版

(55784B)

數學全書 第二册 代數

Enzyklopädie der Elementarmathematik
Zweites Buch, Algebra

定價國幣伍元
印刷地點外另加運費

原著者 Von H. Weber
譯述者 鄭太朴
發行人 朱經農
上海河南中路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館
各地

(本書校對者楊靜盦)

目次

第十二章

一次方程 行列式

第十三章

二次三次及四次之方程

第十四章

整函數

第十五章
對稱函數　錯列類之不變式

第十六章
數字方程之近似解法

第十七章
圓之分割

第十八章
不可能之證明

數學全書

第二册 代數

第十二章 一次方程 行列式

§74. 一元及二元一次方程

1. 前於第三章內,曾以如次之問題,確定除法之意義:設 a, b 爲已知數,則當求一數 x,使其適合下列之條件:

$$ax=b \tag{1}$$

吾人並知恆有一數,亦祇有一數 $x=\frac{b}{a}$ 能適合此條件,惟 a 須不爲 0 方可. 若 $a=0$ 而 b 不等於 0,則無有此項 x 可求. 若 a 與 b 俱爲 0,則 x 可取任何值,恆能適合此條件.

(1) 名爲一元一次方程, x 之任何值,凡能適合此方程者,名爲此方程之根.

尋常之課題書中,多採集有極多的問題,或爲日常生活上所可遇見之事,或則出於某種科學,令學者將其列爲方程以求其解. 此項問題中,每有來源極古,歷數千年而傳至今日者,且各時代之已開化民族,均是貢獻於此.[1] 古

1. 例如古埃及 Ahmes 之算書,古希臘之算術的歌謠, Muhammed ibn Musa 之代數, Leonardo von Pisa 之 Liber Abaci, Luca Paciuolo 及 Cossisten 之算書,等等. 古時傳下之此項問題,大多爲鍛鍊智性之用,故殊有價值,以云實際生活上之需要,則相去殊遠. 近時對於習題,多注重其能使人瞭然於方程之意義者,俾學者知代數方程於實際生活及科學之要求上,有何等重大之作用,其方針頗爲合宜也.

算書中之所謂"三數法"(Regeldetri),其所從事者實亦爲一次方程上之問題.

2. 今試由其他一較廣之觀點出發,以研究 **1.** 中之問題.(1)之左端可單獨取之,並用一字母表之如下:

$$y=ax \tag{2}$$

此中之 a 爲一定數,但 x 則視之爲可變動者. 今使 x 取若不同之値,則於 x 之每一値, y 亦有一確定之値. 如爲之量 y,其値決定於一其他的量 x 之値者,名爲一函數.[1] 如(2)中所表出者,y 名爲 x 之一次函數. x 既變動,則 y 自亦隨之而變. 故吾人稱 x 爲自變數,y 爲依變數. 爲表明 y 爲 x 之函數計,吾人亦用 $f(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ 等符號. 因之,**1.** 中之問題,亦可如次提出之:

自變數 x 取何値時,一次函數 $y=ax$ 取一定之値 $y=b$?

今仍保存字母 y,則

$$x=\frac{y}{a} \tag{3}$$

---

1. 例如車票之價目,爲距離之函數,所納的稅之多少爲所得之函數,一地方之平均溫度爲緯度及地高之函數,氣體之壓力爲體積及溫度之函數.

吾人恆可假定,所編之函數係用一確定的算式以表出之者,故 x 取某一値時,y 之値即可計算而得. 此項概念,實肇自 Leibniz,但經 Johann Bernoulli 及 Euler 始漸普及. 以上所用較廣之定義,源於 Dirichlet 氏,見 Repert. d. Phys. 1 (1837), Ostwalds Klassiker Nr. 116,但 Euler 亦曾先已用之 (Instit. calc. diff., Petrop. 1755, pag VI),其中並包有不能用確定的算式以表出之函數,例如有某種函數,於一切有理的 x 取 1 爲値,於一切無理的 x 則取 0 爲値. 參閱 Pringsheim, Grundlagen d. allg. Funktionenlehre (Enzyklopädie d. math. Wiss. 2, 1).

爲此問題之解. 故亦可云:解一方程之法,與將一已知函數倒轉之法相同,於此,原來之自變數,用依變數以表出之.

3. 倘於 (1) 內兩端各減 b, 則 **1.** 內之問題復可變其方式,而方程乃成爲如下之式:

$$ax-b=0 \tag{4}$$

此種方式,謂之將方程內之項遷於一端,使他端成爲0. 今以 y 表其左端,

$$y=ax-b \tag{5}$$

並視 x 爲變數,則此式仍爲 x 之函數,且仍爲一次函數.[1]因之,用 (1) 或 (4) 以表出之問題,亦可如是提出之:

自變數 x 取何值時,一次函數 $y=ax-b$ 之值爲0?

x 之此項值,名爲函數之零點. 廣之,吾人可云:

求解一端爲0之方程,與求一已知函數之零點之意義相同.

4. 今有二個二元一次方程,則吾人恆可將其寫成爲下式:

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1 \\ a_2x+b_2y&=c_2, \end{aligned} \tag{6}$$

於此, a_1, b_1, c_1 及 a_2, b_2, c_2 均爲已知數. 吾人可假定, b_1 與 b_2 二數中至少有一非爲0,否則未知數 y 將不存在矣. 今

1. (2) 內之函數,實爲一特例,即 $b=0$ 時之特例是.

如 b_1 非爲 0, 則由第一方程, 可得

$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}, \tag{7}$$

即 y 爲 x 之一次函數. 將 y 之式代入第二方程內, 即有

$$a_2x+\frac{b_2}{b_1}(c_1-a_1x)=c_2.$$

此爲一一元一次方程,故可云,吾人已將另一元 y 消去之.

由此,即不難得

$$x(a_1b_2-a_2b_1)=c_1b_2-c_2b_1,$$

故如 $a_1b_2-a_2b_1$ 一式非爲 0, 則即有

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

x 之值既得,即可由 (7) 以得 y 之值.

5. 以上之方法, 在用其一方程將一未知數用他未知數以表出之,然後將所得者代入其他方程內,以得其解,故謂之代入法. 於此,方程內之二未知數, 用法不能全同,故多有不用此法,而採取一對稱的方法者,即方程內之量,均同等的使用之. 今明其法如下:

先用 $b_2, -b_1$ 乘方程 (6), 再用 $-a_2, a_1$ 乘之, 並每次於除後加之,則第一次後 y 被消去,第二次後 x 被消去,而得

$$\begin{aligned} x(a_1b_2-a_2b_1)&=c_1b_2-c_2b_1 \\ y(a_1b_2-a_2b_1)&=a_1c_2-a_2c_1. \end{aligned} \tag{8}$$

此處 x 與 y 之因子

$$a_1b_2-a_2b_1=D, \tag{9}$$

名爲方程系統(6)之行列式,亦可如下寫之:

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

四數目 a_1, b_1, a_2, b_2 之此種結合法,謂之一二次的行列式. 方程(8)之右端,自亦可用行列式表之,故得一定理如下:

方程系統(6)之行列式 D 如非爲0, 則有一對數目,亦祇有此一對數目

$$x=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad y=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \tag{11}$$

能充適原來之方程.

6. 但如 $D=0$, 則可假定 a_1, b_1, a_2, b_2 諸數中無有爲0者蓋如 $b_1=0$ 或 $a_2=0$, 則亦必 $a_1b_2=0$, 卽 $a_1=0$ 或 $b_2=0$, 於是(6)中將祇有一方程或祇有一未知數矣. 由 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 可知

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1},$$

故如以 λ 表此分數之值,則得

$$a_2=\lambda a_1, \quad b_2=\lambda b_1.$$

於是(6)中之二方程,卽爲

$$a_1x+b_1y=c_1$$

$$\lambda(a_1x+b_1y)=c_2,$$

故若此二方程可相容,則必 $c_2=\lambda c_1$ 而後可,即

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}.$$

但如是則不僅 $D=0$, 且其他的行列式亦均爲 0:

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

因而 (6) 中二方程,相互間並非無關係者,蓋第二方程實由第一方程得之也. 於是吾人可使 x 任取一值, y 之值即由之而定. 總括之,可得一定理如下:

倘 (6) 之行列式 D 爲 0, 而 (12) 中之行列式有不等於 0 者,則 (6) 中二方程本身間有矛盾,故無有根可求. 倘 (12) 中二行列式同時亦等於 0, 則 (6) 之二方程中之一,可得自他方程,故有無限多之解.

7. 關於二次的行列式,可較詳的一論之.

a_1, b_1, a_2, b_2 諸數,名爲行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

之元素. 此行列式由二行二列所成,每一行或列內有二元素.

倘將 b_1 與 a_2 相易,行列式之值仍不變:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

此即是：行列式內行與列互易時，式之值仍不變.

8. 倘將二列互易之，則有

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

將二行互易時亦然，故：

二行或二列互易時，行列式變其號.

9. 倘行列式內某一列有公因子，即 $a_1 = m\alpha_1$, $b_1 = m\beta_1$, 則

$$\begin{vmatrix} m\alpha_1 & m\beta_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = m(\alpha_1 b_2 - \beta_1 a_2) = m\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

行內有公因子時亦然，故：

行內或列內之公因子，可將其置於行列式之前.

§75. 三元一次方程.

1. 三個三元一次方程之普通形式如下：

$$\begin{aligned} & a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ (1) \qquad & a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ & a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{aligned}$$

其中之 a_i, b_i, c_i, d_i $(i=1, 2, 3)$ 爲已知數.

求解此項方程時,可用培素(Bézout)之法[1],將二未知數同時消去之.今先用不定的數 u_1, u_2, u_3 依次乘三方程,並將其加之.於是再如是決定 u_1, u_2, u_3 之值,使 y 及 z 之係數爲 0,即

(2)
$$\begin{aligned} b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3&=0 \\ c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3&=0. \end{aligned}$$

按此二方程以決定 u_1, u_2, u_3 後,y 與 z 即被消去,故祇餘一個方程,其中僅有 x 者:

(3)
$$(a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3)x=d_1u_1+d_2u_2+d_3u_3.$$

今將方程(2)視爲 u_2, u_3 二未知數之方程,則按前節之 5., 8., 及 9., 有

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} u_2 = \begin{vmatrix} -b_1u_1 & b_3 \\ -c_1u_1 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} u_1$$

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} u_3 = \begin{vmatrix} b_2 & -b_1u_1 \\ c_2 & -c_1u_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} u_1.$$

爲簡便計,可設

(4)
$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1, \quad \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} = a_2,$$
$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = a_3,$$

則有
$$a_1u_2=a_2u_1, \quad a_1u_3=a_3u_1.$$

1. Bézout, Théorie générale des équations algébriques, 1779.

今如設[1]

$$u_1=a_1,\ u_2=a_2,\ u_3=a_3,$$

則此項方程即能充適，因而(2)亦被充適．於是按(3)，有

$$(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3)x=d_1\alpha_1+d_2\alpha_2+d_3\alpha_3. \tag{5}$$

仿此，吾人亦可將x與z消去，祇須用v_1, v_2, v_3乘方程(1)，加之，並按

$$\begin{aligned} c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3&=0\\ a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3&=0 \end{aligned} \tag{6}$$

以決定v_1, v_2, v_3三數．於是得一方程，以y爲未知數．爲簡便計，設

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3\\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}=\beta_1,\ \begin{vmatrix} c_3 & c_1\\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}=\beta_2,$$
$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2\\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=\beta_3, \tag{7}$$

則方程(6)可爲

$$v_1=\beta_1,\quad v_2=\beta_2,\quad v_3=\beta_3$$

所充適，故得y之式如下：

$$(b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3)y=d_1\beta_1+d_2\beta_2+d_3\beta_3. \tag{8}$$

最後，復用w_1, w_2, w_3乘方程(1)，並使

$$\begin{aligned} a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3&=0\\ b_1w_1+b_2w_2+b_3w_3&=0, \end{aligned} \tag{9}$$

1. 廣之，吾人亦可用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$之任何倍數於$u_1, u_2, u_3$，所得仍無不同．

以及設

(10)
$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\gamma_1, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}=\gamma_2,$$
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\gamma_3,$$

則方程(9)可為

$$w_1=\gamma_1, \quad w_2=\gamma_2, \quad w_3=\gamma_3$$

所充適,而得z之式為

(11) $$(c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+c_3\gamma_3)z=d_1\gamma_1+d_2\gamma_2+d_3\gamma_3.$$

2. (5)內x之因子,倘其$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$仍易以(4)中之值,則得

(12) $$D=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1.$$

如將(8)與(11)中y與z之因子算出,可知其值亦為D.吾人稱D為方程系統(1)之行列式,寫之作

(13) $$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

此為一第三次的行列式,由$3\cdot3=9$個元素所成.諸二次的行列式$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=1, 2, 3)$名為D之亞行列式.

(5)之右端,所與x之因子不同者,則a_1, a_2, a_3與d_1, d_2, d_3之差別是.(8)與(11)中之右端,與y及z之因子之差別,亦在b_1, b_2, b_3,以及c_1, c_2, c_3與d_1, d_2, d_3之不同.因之,(5),(8)及(11)之右端,亦為三次的行列式,吾人祇須於D中

將其第一行,第二行,第三行以 d_1, d_2, d_3 易之卽可. 今將其如次表之:

$$D_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

(14)

$$D_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

則得一定理如下:

倘方程系統 (1) 之行列式 D 非爲 0, 則有一系統之根, 亦祇有此系統之根:

(15) $$x=\frac{D_1}{D}, \quad y=\frac{D_2}{D}, \quad z=\frac{D_3}{D}.$$

3. 若 $D=0$, 則祇有 $D_1=0$, $D_2=0$, $D_3=0$ 時, 方程 (5), (8) 及 (11) 乃能成立. 於是 x 可隨取其值. 如 D 之諸亞行列式不完全爲 0, 而有非爲 0 者, 如 $a_1=b_2c_3-b_3c_2$ 非爲 0, 則 y 與 z 爲以下之方程所決定:

$$b_2y+c_2z=d_2-a_2x$$

$$b_3y+c_3z=d_3-a_3x$$

故於 x 之任何一值, y 與 z 有一定的値. 故可知:

倘方程系絕 (1) 之行列式 D 爲 0, 而 D_1, D_2, D_3 中有不等於 0 者, 則 (1) 中諸方程有矛盾, 故無有根可求. 倘 D_1,

D_2, D_3 與 D 同時爲0,但 D 之亞行列式非盡爲0,則其中有一未知數可隨意取其值.

如 D 之諸亞行列式亦均爲0,則吾人仍可假定,D 之一切元素不盡爲0,蓋否則方程系統(1)將全不存在矣.今如 c_3 非爲0,則由(1)之末一方程,可知

$$z=\frac{d_3-a_3x-b_3y}{c_3}, \tag{16}$$

將其代入(1)中第一二二方程後,得

$$\begin{aligned}\beta_2x-\alpha_2y&=d_1c_3-d_3c_1\\-\beta_1x+\alpha_1y&=d_2c_3-d_3c_2\end{aligned} \tag{17}$$

故如 $\alpha_1=\beta_1=\alpha_2=\beta_2=0$, 則亦必 $d_1c_3-d_3c_1=0$, $d_2c_3-d_3c_2=0$, 因而方程(17)於任何 x, y 均可充適,方程(1)亦然.於是對於 x, y 之每一對值,可由(16)以得 z 之值.故於此種狀況下,二未知數爲隨意者.

§76. n次之行列式. n元一次方程

1. 今試按前節中之式(12),詳細一觀三次行列式之構造定律.行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

由九元素所成,分配於三列三行內,作平方形之排列.平方形中自左上角至右下角之對角線,設之主要對角線,其

中元素之積爲

$$a_1 \quad b_2 \quad c_3,$$

名爲行列式中之主要項,其中之字母與數字,均順自然的次序.其他諸項,則可按(12)之式,將字母保存其原有之次序.而將1, 2, 3三標數錯列之以得之.因之,每一項爲一乘積.

$$a_\alpha \quad b_\beta \quad c_\gamma,$$

於此,$\alpha\beta\gamma$爲123之一錯列.此項之號之爲正爲負,則視$\alpha\beta\gamma$爲123之偶錯列或奇錯列而定.

2. 以上所云,可推廣至於任何多之元素,以爲n次行列式之概念.n次的行列式,由n^2個元素所成,以平方形排列之,有n行及n列.爲易於確定元素在行列式中之位置計,每一字母均用二標數[1]以標出之,其中第一標數指列,第二標數則指行.假如a_{23}爲第二列中之第三元素,或第三行中之第二元素,廣之,a_{ik}爲第i列中之第k元素.此處之標數i, k可各自取$1, 2, \cdots, n$爲值.如是,n次的行列式,可記之如下:

---

1. 行列式之採用,以及二標數之記法,可溯其源至於Leibniz(見其致l'Hôpital之信,1693年四月二十八日,Acta Erud. 1700).其用於一次方程之解法,G. Cramer實有重再提出之功,錯列理論之應用於此,亦爲Cramer所創始(見Introduction á l'analyse des Courbes algébrique, Genf, 1750).但其爲學者所通用,則Cauchy (Journ. de l'éc. polyt. cah. 17,1812)與Jacobi (Journ. f. Math. 22, 1841)(亦可參閱Ostwalds Klassiker Nr. 77 u. 78)之功爲多.

$$(1)\qquad D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

主要對角線中元素之積,爲

$$A=a_{11}a_{22}\cdots\cdots a_{nn},$$

名爲行列式之主要項.

由主要項,可得其他之項,其法在將各元素之第一標數保持之,而將其第二標數錯列之,所得諸乘積之總,卽爲行列式之值. 如是所作之乘積

$$(2)\qquad A_\pi=a_{1k_1}\,a_{2k_2}\cdots a_{nk_n},$$

其號之爲正爲負,視錯列 $\pi=k_1\,k_2\cdots k_n$ 之爲偶爲奇而定. 如此,吾人共得 $n!$ 個項 A_π (A 亦在內),行列式之值,則可以

$$(3)\qquad D=\Sigma\pm A_\pi$$

表之. 例如三次的行列式,爲

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ +a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33} \\ +a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

倘知其記法上之不同,則不難見其與 § **75**, (12) 實相同也.

每一個項 A_π 有 n 個因子,每個第一標數與第二標數,均一次發見於因子方面. 故行列式之每一項內,有每一

行及每一列之一元素.

3. 倘於乘積A_π內將因子互易之,則各乘積自仍不變;因之,吾人亦可將因子如是排列之,使第二標數在自然的順序內. 如是則第一標數經過一與π相倒之錯列π'. 按§**50**, **11**., π與π'同時爲偶或爲奇,故吾人計算行列式時,亦可將A之第一標數錯列之,第二標數保持其自然的順序,符號之例並不因此而有所改變.換言之:

行列式內之行與列互易後,式之值不變.

4. 倘於錯列π內將二數字互易之,則偶錯列成爲奇,奇錯列成爲偶,故每一個項A_π成爲一他項,其號不相同者. 將二個第二標數相易時,與二行之互易相當,按之**3**.,可知在列方面亦然,故有定理如下:

二行或二列互易後,行列式僅變其號.

5. 二平行的行或列內之相當元素如均相同,則此二行或二列互易後其值不變,但按之**4**.,其號又須變,故其值必爲0而後可:

行列式內如有二行或二列,其相當元素均相同,則此行列式之值爲0.

6. 今於D之諸項內,將含有a_{11}一因子者盡選出.欲得此時,可將第一標數$2, 3, \cdots\cdots, n$保存於其自然順序中,將第二標數$2, 3, \cdots\cdots, n$錯列之,並計及其符號之規律.今用

$a_{11}A_{11}$ 表此種項之總,則 A_{11} 爲一 $(n-1)$ 次的行列式,其標數中無有1. 吾人於 D 中將相交於 a_{11} 之行列去之,則卽得此行列式.

將行及列互易時,吾人可將任何一元素 a_{ik} 置於 a_{11} 之位置,其法祇須將第 i 列移過在其前之 $i-1$ 列,將第 k 行移過其前之 $k-1$ 行卽可. 但此時行列式已被 $(-1)^{i+k-2}=(-1)^{i+k}$ 所乘,故得定理如下:

設 D 之含有 a_{ik} 的一切項之總爲 $a_{ik}A_{ik}$,則 A_{ik} 爲 $(n-1)$ 次的行列式,可由 D 得之,其法在將相交於 a_{ik} 之行列式舍去之,並加以號 $(-1)^{i+k}$.

有定一號之行列式 A_{ik},爲 D 之亞行列式. A_{ik} 之各項內,無有第一標數 i,亦無第二標數 k.

7. 按 **2.**, D 之每一項含有每一行及每一列內之一元素,亦祇含有一元素,故如合取與第 i 列或第 k 行中元素相乘過之項,則行列式必可表出之如下:

(4a) $$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

(4b) $$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

此種方法,謂之將行i**列式按第**i**列或第**k**行之元素展開之.**

今將 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 諸元素易爲 $a_{h1},a_{h2},\cdots,a_{hn}$,則按 **5.**, 此行列式卽成爲0. 於此,亞行列式 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$ 並無變動,因其中無有第 i 列中之元素也. 故如 h,i 爲 $1,2,\cdots,n$ 中之二不

同的標數,則

(5a) $$a_{h1}A_{i1}+a_{h2}A_{i2}+\cdots+a_{hn}A_{in}=0 \quad (h\neq i).$$

仿此,倘於(4b)內將 $a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk}$ 易為 $a_{1h}, a_{2h}, \cdots, a_{nh}$, 即, h k 為 $1, 2, \cdots, n$ 中之二不同標數,則亦

(5b) $$a_{1h}A_{1k}+a_{2h}A_{2k}+\cdots+a_{nh}A_{nk}=0 \quad (h\neq k)$$

於三次行列式方面,與此項公式相當者,為前節中之(2),(6),(9)諸式.

8. 由(4a)及(4b),不難得如次之定理:

一行或一列內之諸元素,如有一公因子,則此因子可置於行列式之前.

以下之定理,亦不難直即由(4)以知之,但其應用殊多:

倘一行或一列內之一切元素除一個而外,均為0,則行列式之值等於此不等於0之元素,乘以相屬之亞行列式

今用一不定的因子 λ 乘(5a),將其與(4a)相加,則得

$$D=(a_{i1}+\lambda a_{h1})A_{i1}+\cdots+(A_{in}+\lambda a_{hn})A_{in},$$

因吾人並可將此法施於(5b)與(4b),故得如次之定理:

用任意的因子以乘一行或列內之元素,將其加於與之平行的行或列之相當元素後,行列式仍不變.

9. 今試應用此項定理,以計算代數上頗關重要的某種 n 次的行列式.

今設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲某項數目,試用之作如次之行列式[1]:

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots\cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots\cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = P(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$$

倘由第 i 行之元素上,減去第 k 行之相當元素,此行列式仍不變,故

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 0 & \cdots\cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_i - a_k & \cdots\cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots\cdots & a_i^2 - a_k^2 & \cdots\cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots\cdots & a_i^{n-1} - a_k^{n-1} & \cdots\cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

此處第 i 行中之一切元素,均有因子 $a_i - a_k$ (§ **20**, **10**.),故可知 P 可爲任何一差數 $a_i - a_k$ 所除,因而可設

1. n=3 之此項行列式,首先爲 Vandermonde 所研究及者(見 Hist. de l'acad., Paris 1771),但一般的論列,則爲 Cauchy 所提出(見 Journ. de l'éc. Polyt. cah. 17, 1812).

$$
\begin{aligned}
P=C\cdot(a_2-a_1)(a_3-a_1)&\cdots\cdots\cdots\cdots(a_n-a_1)\\
(a_3-a_2)&\cdots\cdots\cdots\cdots(a_n-a_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad(a_n-a_{n-1}),
\end{aligned}
$$

則尙須決定者爲C之値. 試設想將一切括弧均乘出,則有一項爲

(7) $$C\cdot a_2a_3{}^2a_4{}^3\cdots\cdots a_n{}^{n-1},$$

其他的項之a,其方數均不能如此. 倘將上下相列之括弧由右方開始乘出之,卽不難見此,且可知(7)爲每一括弧中之第一項之積.他方面,(6)之主要項爲

$$a_2a_3{}^2a_4{}^3\cdots\cdots a_n{}^{n-1},$$

且無有他項,其a之方數相同者. 因之,C必爲1.尋常於差數a_i-a_k中,恆將標數較小之數作爲被減數,故如於P內將一切差數倒轉之,則P被

$$(-1)^{1+2+\cdots+(n-1)}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

所乘,而(6)之値爲(§ **49, 5.**)

(8) $$
\begin{aligned}
P(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)\\
(a_2-a_3)\cdots(a_1-a_n)\\
\cdots\cdots\cdots\\
(a_{n-1}-a_n)
\end{aligned}
$$

10. 應用定理(4b)及(5b)時,n個n元的一次方程之系統,極易得其解.為醒目計,可以$x_1, x_2, \cdots, x_n$表未知數,其係數則用二重的標數:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=c_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=c_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=c_n
\end{aligned} \tag{9}
$$

a_{ik}所成之行列式D,名為此系統之行列式.

今用亞行列式$A_{1k}, A_{2k}, \cdots, A_{nk}$依次乘各方程,並將其加之,則按(4b)與(5b),可知一切x之係數均成為0,祇有x_k之係數為例外,等於D,故有

$$Dx_k=c_1A_{1k}+c_2A_{2k}+\cdots+c_nA_{nk}. \tag{10}$$

此處之右端,仍為一n次的行列式,可由D得之,祇須將第k行$a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk}$易為$c_1, c_2, \cdots, c_n$便可. 今用$D_k$表之,則得定理如下:

倘方程系統(9)之行列式D非為0,則有一系統的根,亦祇有一系統的根:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}. \tag{11}$$

若$D=0$,則有一個或多個未知數可隨意取其值,或方程本身間有矛盾. 關於此,吾人不再詳論.

11. 設(9)之第一方程內,其右端$c_1=0$,則此方程謂之

齊次的. 今有 n 個齊次方程

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\
(12)\qquad&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,
\end{aligned}
$$

則 $x_1\ x_2, \cdots, x_n$ 諸未知數均以 0 為值時, 此項方程自已被充適, 而如其行列式 D 非為 0, 則按 (10) 亦無有其他根可求. 因之, 有定理如下:

一系統之齊次方程, 如有不盡為 0 之根, 則必其行列式

$$(13)\qquad D=0$$

而後可.

今如 $D=0$, (12) 之根不盡為 0, 則此 n 個方程所決定者非為未知數本身, 而為其比. 故如 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 為其根, 則不難知

$$\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \cdots,\ \lambda x_n$$

亦為其根, 於此, λ 可為任何數.

若 $D=0$, 而有一亞行列式 A_{ik} 非為 0, 則按 (4a) 及 (5a) 可得一根之系統, 其中之根非盡為 0 者, 吾人可設

$$(14)\qquad x_1=\lambda A_{i1},\ x_2=\lambda A_{i2},\ \cdots,\ x_n=\lambda A_{in}.$$

此處之因子 λ 為隨意者, 此即是, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 係與 D 之某一列的亞行列式為相比者.

倘 D 以外一切亞行列式亦均為 0, 則 (14) 內之一切根

$x_1, \cdots, x_n$ 亦將盡爲 0. 但此處亦仍有不等於 0 之根,吾人須用亞行列式之亞行列時,方能表出之. 關於此,亦不克再詳論矣.

§ 77. 一次置換與數方 行列式之相乘

1. 今設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲不定的或變動的量. 試用 n 個一次方程

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\
x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n
\end{aligned}
$$

以得 n 個新的量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 其中之 n^2 個係數 a_{ik} 爲一定之數(常數), 則吾人稱之爲一次的置換. 倘係數已知,則置換亦卽被決定. 故吾人可不須將方程 (1) 寫出,祇將其係數列出便可,其式如下:

$$
\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.
$$

吾人稱之爲一數方(Matrix), 可用之以表一置換, 或亦可如下表出之:

$$
(2)\qquad x = \mathfrak{A}(y).
$$

此方程須視之爲一種符號的寫法,方程 (1) 已包括在內.

數方 $\mathfrak{A}$ 並非表一數目,僅爲 n^2 個數目之平方形的排列而已. 但每一數方均有一固定的數值與之相當,即此 n^2 個數目所構成之行列式是. 爲表明其相關計,可用羅馬字母表之如下:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 反之,用方程(1),吾人亦可將 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表出之. 於此,吾人自須假定行列式 A 非爲 0. 於是 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 與 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之間,其關係仍爲一一次的置換,而可寫之爲

$$(3)\qquad \begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1n}x_n \\ y_2 &= \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\cdots+\alpha_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\cdots+\alpha_{nn}x_n \end{aligned}$$

按 § **76**, (10), 有[1]

$$(4)\qquad \alpha_{ik}=\frac{A_{ki}}{A}$$

(3) 之數方,可表之爲

1. 注意此處標數之順序已兩端不同.

$$\mathfrak{A}^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

名爲與$\mathfrak{A}$相倒之數方. 用符號寫法時,有

$$y=\mathfrak{A}^{-1}(x). \tag{5}$$

3. 今再將一次置換施於 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 諸量, 用下列之方程將其易爲 $z_1, z_2, \cdots, z_n$:

$$\begin{aligned} y_1&=b_{11}z_1+b_{12}z_2+\cdots+b_{1n}z_n \\ y_2&=b_{21}z_1+b_{12}z_2+\cdots+b_{2n}z_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n&=b_{n1}z_1+b_{n2}z_2+\cdots+b_{nn}z_n \end{aligned} \tag{6}$$

或簡作

$$y=\mathfrak{B}(z) \tag{7}$$

亦可,其中之$\mathfrak{B}$,爲一數方

$$\mathfrak{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

其行列式

$$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

亦非爲0.

4. 吾人先將置換(1)施於$x_1, x_2, \cdots, x_n$,再將置換(6)施於$y_1, y_2, \cdots, y_n$,則其結果係將$x_1, x_2, \cdots, x_n$易爲$z_1, z_2, \cdots, z_n$. 此亦可一次爲之,其法在將(6)中$y_1, y_2, \cdots, y_n$之式代入(1)中卽可. 如是則所得者仍爲一一次置換,故可知:

相繼的二一次置換,可易以一一次置換.

此定理內所表出者,爲一次置換之類的屬性[1](參觀§52).

用$z_1, z_2, \cdots, z_n$以表出$x_1, x_2, \cdots, x_n$,之置換,可寫作爲

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1n}z_n\\
x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n &= c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \cdots + c_{nn}z_n
\end{aligned}
$$

或

$$
(9)\qquad x = \mathfrak{C}(z),
$$

於此,$\mathfrak{C}$爲c_{ik}之數方.

將(6)內$y_1, y_2, \cdots, y_n$之式代入(1),卽不難得c_{ik}之式如下:

$$
(10)\qquad c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots n\\ k = 1, 2, \cdots n \end{pmatrix}
$$

---

1. 就類之精準的定義而言,則除此屬性而外,尚須能適用結合律(6),有單位數方(7)以及倒數方(2)方可.

5. 此種相繼的置換,亦可於符號方程方面爲之. 由(2)及(7),可得

$$x=\mathfrak{A}\mathfrak{B}(z).$$

因之,吾人亦可設

(11) $$\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

並名 $\mathfrak{C}$ 爲 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 所合成之數方,但其實施方法,則可按(10)爲之. 爲簡單計,吾人亦設

$$c_{ik}=(ab)_{ik},$$

並得其構造之規律如下:

求 $(ab)_{ik}$ 之式時,可將 $\mathfrak{A}$ 之第 i 列內之元素,與 $\mathfrak{B}$ 之第 k 行內之相當元素相乘,取其總和.

6. 按(11)之式,吾人亦名 $\mathfrak{C}$ 爲 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 之乘積,但須注意者,則就一般而論,數方之結合,不能適用交易律. 蓋 $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ 之元素爲

$$(ba)_{ik}=b_{i1}a_{1k}+b_{i2}a_{2k}+\cdots+b_{in}a_{nk},$$

故如 a_{ik} 與 b_{ik} 間無有特殊之關係,則此元素與 $(ab)_{ik}$ 不相同.

倘 $\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{B}$ 有此屬性,即於一切的 i, k, 均 $(ab)_{ik}=(ba)_{ik}$, 則

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\mathfrak{B}\mathfrak{A}$$

於是吾人稱 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 爲可交易者.

但結合律於此卻可用,即 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ 爲數方,則

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}=\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}).$$

蓋 $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$ 之普通元素,爲

$$(ab)_{i1}c_{1k}+(ab)_{i2}c_{2k}+\cdots\cdots=\sum_{\mu}(ab)_{i\mu}c_{\mu k}=\sum_{\mu}\sum_{\nu}a_{i\nu}b_{\nu\mu}c_{\mu k},$$

與 $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ 之普通元素

$$a_{i1}(bc)_{1k}+a_{i2}(bc)_{2k}+\cdots\cdots=\sum_{\nu}a_{i\nu}(bc)_{\nu k}=\sum_{\mu}\sum_{\nu}a_{i\nu}b_{\nu\mu}c_{\mu k}$$

爲相同者.

7. 今將 $\mathfrak{A}$ 與其相倒之數方 $\mathfrak{A}^{-1}$ 結合之,則按 § **76** 之(4)及(5),可知 $(aa)_{ik}$ 之值,隨 i, k 之相等或不相等而爲 1 或 0. 故此二數方之積爲

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}=\mathfrak{E}.$$

此數方名爲單位數方,而有

(12) $$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}=\mathfrak{E}.$$

用 § **76** 中之式時,並可知 $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}=\mathfrak{E}$, 即:

數方與其倒數方可交易.

在數方之結合上,$\mathfrak{E}$ 之地位與單位相同,蓋按(10),可知

(13) $$\mathfrak{A}\mathfrak{E}=\mathfrak{E}\mathfrak{A}=\mathfrak{A}.$$

由(12)及(13),可知如二數方之積及其一數方爲已知,則其他一數方即可完全決定之.[1]　蓋由 $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$, 吾人用

1. 數方之算法,實爲 Frobenius 所建立,見 Journ. f. Math. 84 (1878).

$\mathfrak{A}^{-1}$ 與之作左方之結合時，得

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{C},$$

而如用 $\mathfrak{B}^{-1}$ 與之作右方之結合，則有

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{C}\mathfrak{B}^{-1}.$$

8. 將一數方與其本身相結合時，可寫作 $\mathfrak{A}\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^2$. 如再將其與 $\mathfrak{A}$ 相結合，則按結合律，有

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A})\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(\mathfrak{A}\mathfrak{A})$$

此即是，$\mathfrak{A}$ 與 $\mathfrak{A}^2$ 爲可交易者，故吾人可寫之作 $\mathfrak{A}^3$. 如是繼續類推，卽可得 $\mathfrak{A}$ 之各方數，其任何二者均可交易，而有

$$\mathfrak{A}^m\mathfrak{A}^n=\mathfrak{A}^{m+n}$$

$\mathfrak{A}^n$ 之倒數方，爲 $\mathfrak{A}^{-1}$ 之 n 次方，可記之作 $\mathfrak{A}^{-n}$.

9. $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ 之倒數方爲

$$\mathfrak{C}^{-1}=\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1},$$

蓋將此與 $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ 結合時，可得單位數方 $\mathfrak{E}$ 也. 故可知 $\mathfrak{C}^{-1}$ 中之元素爲

$$\gamma_{ik}=(\beta\alpha)_{ik}=\beta_{i1}\alpha_{1k}+\beta_{i2}\alpha_{2k}+\cdots+\beta_{in}\alpha_{nk},$$

而如按 (4)，將 α, β, γ 之値

$$\alpha_{ik}=\frac{A_{ki}}{A},\quad \beta_{ik}=\frac{B_{ki}}{B},\quad \gamma_{ik}=\frac{C_{ki}}{C}$$

代入，則有

$$\frac{C_{ki}}{C}=\frac{A_{k1}B_{1i}+A_{k2}B_{2i}+\cdots+A_{kn}B_{ni}}{AB}=\frac{(AB)_{ki}}{AB}.$$

由此,即可知

$$C_{ik}=\lambda(AB)_{ik}$$

$$C=\lambda AB,$$

此處之因子 λ, 係與 i 及 k 不相關者. 吾人所注意者,實在此末後之方程. 此式當爲一恆等式,即倘將 C 之元素 c_{ik} 用 a, b 表出之,並將其展開,則必逐項與右端者相同. C 之主要對角線 $c_{11}c_{22}\cdots c_{nn}$, 倘按 (10) 將 c_{ii} 之式代入,則其中有一項爲

$$a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}\cdots a_{nn}b_{nn}.$$

他方面,右端可由 A 與 B 之主要對角線之積,得

$$\lambda a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}$$

一項,故可知 $\lambda=1$, 而

$$C=AB. \tag{14}$$

於是有定理如下:

二數方之積之行列式,等於此二數方之行列式之積.

此定理之意義,亦即爲行列式相乘之定理:

同次的二行列式之積,亦爲一該次的行列式,可將二行列式之數方結合以得之.

10. 試一研究 § **76**, **9** 內之行列式 $P(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 之平方,以爲實例,即計算以下之積(其中第二因子係將行與列互易,但仍與第一因子相同):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots 3_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots a_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

乘積中之元素,為 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之同次方之和,而如設

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k = s_k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

則計及 $P(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 之值時,按 § 76 之 (8),有

$$\prod_{i<k}(a_i - a_k)^2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

於此,左端為一切差數 $a_i - a_k$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ k=2,\ 3,\ 4,\ \cdot\cdot,\ n)$ 之平方之積,$i<k$,亦即交錯乘積之平方(見 § 49 之 5.)也.

11. 以上推論乘法定理時,吾人曾假定行列式 A 與 B 非為 0 者. 吾人今可不用此假定,而以整函數之最簡單的屬性為依據(參觀第十四章). 今試證明,倘二行列式中有一,或二俱為 0,則按 (10) 所作之行列式 C 亦為 0.

今設 $A=0$,則可選擇數目 t,使行列式

$$A_t=\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12}\cdots\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+t\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots\cdots a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

非爲0. 蓋 A_t 爲一 n 次的 t 之整函數,故如於 t 之每一値爲0,則必每一係數爲0而後可. 然此爲不可能者,蓋 t^n 之係數爲1也. 同時,將 A_t 展開時,其常數項(即無有 t 之項)爲 $A=0$. 故 A_t 之形式當如下:

$$A_t=D_1t+D_2t^2+\cdots+D_nt^n,\quad D_n=1.$$

對於行列式 A_t 與 B, 吾人可應用乘法定律,惟可假定 $B\neq0$, 則不難見乘積式之任何一元素,爲 $c_{ik}+tb_{ik}$, 故有

$$A_tB=C_t=\begin{vmatrix} c_{11}+tb_{11} & c_{12}+tb_{12}\cdots c_{1n}+tb_{1n} \\ c_{21}+tb_{21} & c_{22}+tb_{22}\cdots c_{2n}+tb_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}+tb_{n1} & c_{n2}+tb_{n2}\cdots c_{nn}+tb_{nn} \end{vmatrix},$$

或按 t 之乎數展開之,得

$$C_t=C+E_1t+E_2t^2+\cdots+E_nt^n,\quad E_n=B.$$

他方面, $$C_t=BD_1t+BD_2t^2+\cdots+BD_nt^n,$$

而因此二式於任何之 t 均適用,故必逐項相同,於是得 $C=0$.

倘A與B均爲0,則吾人仍可先用一不等於0之行列式A_t以代A,於是$A_tB=C_t=0$,如上所證明者,且於任何t均如此,故其常數項C亦爲0.

第十三章

二次三次及四次之方程

§78. 實係數之二次方程

1. 一元二次方程之普通形式爲

(1) $$ax^2+bx+c=0.$$

此中之係數a, b, c,可先假定其爲實數.此方程之左端,實爲一x之二次函數:

(2) $$f(x)=ax^2+bx+c,$$

故求解此方程之法,與求得函數之零點爲一事.

第一項ax^2名爲二次項,第二項bx爲一次項,第三項c則爲常數項.

吾人恆可假定a非爲0,否則此方程將非爲二次者矣.

若$b=0$,則方程中即無有一次項,方程成爲

$$ax^2+c=0,$$

是爲純二次方程.此種方程,恆可用開方法以得其解,而如$c\neq0$,則有二解如下:

$$x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

故如a與c之號不同,則此二解均爲實數,若a與c號同,則其解即爲虛數.

若 $c=0$, 則得 $$ax^2+bx=0, \text{或}$$

$$x(ax+b)=0.$$

故設 $x=0$, 設 $ax+b=0$, 或則此方程卽被充適,此卽是此方程可分解成爲二一次方程,而如 $b\neq 0$, 則有二解:

$$x_1=0, \quad x_2=-\frac{b}{a}.$$

2. 若 b 非爲 0, 則方程謂之雜二次方程. 求解此方程時,可用 $4a$ 乘之,則得

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0.$$

再加 b^2-4ac 於兩端, 卽有

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac.$$

此式之左端等於 $(2ax+b)^2$, 而如爲簡單計,

(3) $$b^2-4ac=D,$$

則得

(4) $$(2ax+b)^2=D.$$

於是雜二次方程之解法,可歸結爲純二次方程之解法. 由 (4), 得

$$2ax+b=\pm\sqrt{D},$$

故 (1) 之解爲

(5) $$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

(3) 中之數 D 於二次方程之理論上有極重要之意義,名爲該方程或二次函數 ax^2+bx+c 之判定式. 方程之解之性質,實決定於此判定式之性質. 吾人不難見,於 D 之一切值,

除 $D=0$ 而外,方程均有二解[1].若 $D=0$,則 x 祇有一值 $-\frac{b}{2a}$.於是吾人設此方程之二解合成爲一,或曰方程有重根.故得一普通定理如下:

每個實係數的二次方程有二解:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}. \tag{6}$$

若判定式 $D>0$,則二解不同而均爲實數,

$D=0$,則二解合成爲一.亦爲實數:

$$x=-\frac{b}{2a},$$

$D<0$,則二解爲共軛複數.

3. 倘使一次項有因子二,則往往可較便利,卽將方程寫爲如次之式:

$$Ax^2+2Bx+C=0. \tag{7}$$

於是其判定式卽成爲 $D=4B^2-4AC=4\Delta$,而

$$\Delta=B^2-AC, \tag{8}$$

按高斯之語法,吾人亦稱此爲二次函數之決定式.(7)之解,於是爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{A}, \tag{9}$$

其性質亦決定於 Δ 之性質,與前之 D 相同.

---

1. 方程之解,普通亦稱之爲根,但 F. Klein 殊反對此稱謂(見 Elementarmath. v. höh. Standpunkt 1, 316.).

4. x^2之係數既不能爲0,故可用之以除全方程,因而每一二次方程可使其成爲下式:

$$x^2+px+q=0, \tag{10}$$

是謂二次方程之標準式.此式之特殊處,在其二次項之係數爲1.其判定式成爲

$$D=p^2-4q=4\left(\frac{p^2}{4}-q\right),$$

而其解則爲

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \tag{11}$$

於此,其性質如下:

$p^2>4q$: 二解均爲實數,且不相同;

$p^2=4q$: 二解相同合成爲一,但爲實數:

$$x=-\frac{p}{2}.$$

$p^2<4q$: 二解爲共軛複數.

在第一事例方面,吾人倘可對於二解之號,作如次之說明:

倘$p<0$, $q>0$,則二解均爲正,倘$p>0$, $q>0$,則二解均爲負.倘$q<0$,則其一爲正,其他爲負(p之號於此無關).此亦可綜合之爲一定理:

倘判定式爲正,則方程$x^2+px+q=0$之正解之數,等於1, p, q內性質號改變之次數.

§79. 複係數之二次方程

1. 倘二次方程之係數爲複數,則前節之公式仍適用,惟就一般而論,其判定式亦爲一複數:

$$D=m+ni.$$

故即發生此要求,須將一複數開其方,或求解一純二次方程:

$$z^2=m+ni.$$

今設 $z=u+iv$, 則 $z^2=u^2-v^2+2iuv$, 故得二方程,用之以決 u, v 二數:

$$(1)\qquad \begin{aligned} u^2-v^2&=m,\\ 2uv&=n \end{aligned}$$

此爲二個二元二次方程,求解此二方程時,可將其平方,則有

$$u^4-2u^2v^2+v^4=m^2.$$

$$4u^2v^2=n^2.$$

將此二者相加時,得 $u^4+2u^2v^2+v^4=m^2+n^2$, 即 $(u^2+v^2)^2=m^2+n^2$, 故有.

$$u^2+v^2=\sqrt{m^2+n^2},$$

於此,吾人可取其正根.將此式與(1)中之第一方程並用之,可得

$$u^2=\frac{m+\sqrt{m^2+n^2}}{2},\quad v^2=\frac{-m+\sqrt{m^2+n^2}}{2}.$$

此二式於 m, n 之任何實數的值,均爲正者,故

$$(2)\qquad u=\pm\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2+n^2}}{2}},\quad v=\pm\sqrt{\frac{-m+\sqrt{m^2+n^2}}{2}}.$$

由此吾人可得四對 u, v 之值. 但因 (1) 中之第二方程, 故祇有二對可用, 卽當 n 爲正時, 用有符號相同之二對, 當 n 爲負時,則用符號不同者.故可知複數之平方根有二值,僅符號不同而已.

2. 此末後之結果, 吾人前於 § **46** 中實已知之. 今設

$$m+ni=r(\cos\phi+i\sin\phi),$$

則其平方根之值爲

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\phi}{2}+i\sin\frac{\phi}{2}\right)$$

及

$$\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\phi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\phi}{2}+\pi\right)\right]$$

$$=-\sqrt{r}\left(\cos\frac{\phi}{2}+i\sin\frac{\phi}{2}\right),$$

故

$$(3)\qquad \sqrt{m+ni}=\pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\phi}{2}+i\sin\frac{\phi}{2}\right),$$

其中之 $\sqrt{r}$ 爲正數. 按三角學上已知之公式, 有

$$\cos\frac{\phi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}},\quad \sin\frac{\phi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}},$$

此處之號須如是選擇之, 使其積之號與 $\sin\phi$ 或 n 相同(因 $2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}=\sin\phi$). 今將 $\cos\phi=\frac{m}{r}=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$ 代入, 則

即有
$$\cos\frac{\phi}{2}=\sqrt{\frac{m+\sqrt{m^2+n^2}}{2r}},$$

$$\sin\frac{\phi}{2}=\sqrt{\frac{-m+\sqrt{m^2+n^2}}{2r}},$$

故將其與$\sqrt{r}$相乘後,所得u與v之值,與前所得者同.

§ 80. 二次函數.

1. 二次方程

(1) $$ax^2+bx+c=0$$

之係數無論其為實數或複數,恆有二解x_1, x_2可得,祇當判定式為0時,乃合成為一,此為吾人所已知者.

今設x為一無定之數(變數),吾人可使其取任何值.於是二次函數

(2) $$f(x)=ax^2+bx+c$$

亦隨x之值而取不同之值,祇當$x=x_1$或$x=x_2$時,其值乃為0. 今姑假定,吾人所知之解,祇有一個,為$x=x_1$. 如是則

$$0=ax_1{}^2+bx_1+c.$$

今將此與(2)相減,即有

$$f(x)=a(x^2-x_1{}^2)+b(x-x_1),$$

因$x^2-x_1{}^2=(x+x_1)(x-x_1)$,故

$$f(x)=(x-x_1)[a(x+x_1)+b].$$

此處右端之二因子,均為x之一次函數,其第二因子並可寫之為

$$a(x+x_1)+b=a(x-x_2),$$

則

$$x_2=-x_1-\frac{b}{a},$$

而

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2). \tag{3}$$

因之,有定理如下:

每一二次函數可析成爲二一次函數之積.

(3)中之分解,實爲一恆等的分解法,此任何 x 之值均適用. 欲得之時,可先將方程 $f(x)=0$ 解之. 例如

$$f(x)=6x^2+19x-42,$$

則

$$D=19^2+4\cdot6\cdot42=1369=37^2,$$

故方程之解爲

$$x_1=\frac{-19+37}{12}=\frac{3}{2},\quad x_2=\frac{-19-37}{12}=-\frac{14}{3},$$

而

$$f(x)=6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{14}{3}\right)=(2x-3)(3x+14).$$

2. 前於推論得(3)中之分解時,曾假定 $f(x)=0$ 有一解,但此解之形式如何,則非所問. 吾人今可用 x_1 及 x_2 之式,以證明公式(3). 試將(3)中之括弧乘出,則有

$$f(x)=ax^2+bx+c=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2].$$

此式既於 x 之任何值均可用,故 x 之同次方之係數必相等,而得

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{4}$$

事實上,由§78之(6),吾人亦立即可得此項關係,並可知

$$(5)\qquad x_1-x_2=-\frac{\sqrt{D}}{a},$$

即 $$D=a^2(x_1-x_2)^2.$$

由此,可知祇當 $x_1=x_2$ 時,判定式乃成爲0.

3. 設二次方程作標準式

$$x^2+px+q=0,$$

則

$$(6)\qquad x_1+x_2=-p,\ \ x_1x_2=q,\ \ (x_1-x_2)^2=D,$$

故得定理如下:

在二次方程之標準式方面,二解之和,等於一次項之負的係數,其積等於常數項,其判定式等於二解之差之平方.

此定理之倒,用處尤多,即:

倘二數目 u, v 之和與積爲

$$u+v=m,\ \ uv=n,$$

則 u, v 爲二次方程

$$x^2-mx+n=0$$

之解.

§81. 三次方程之普通解法

1. 一元三次之方程,恆可使其成爲下式:

$$(1)\qquad x^3+ax^2+bx+c=0.$$

用入一新的未知數時,吾人恆可將其中之二次式消去.

蓋如設

(2) $$x=z-\frac{a}{3},$$

則 $$x^2=z^2-\frac{2a}{3}z+\frac{a^2}{9},$$

$$x^3=z^3-az^2+\frac{a^2}{3}z-\frac{a^3}{9},$$

將此代入(1)時,z^2之項即相消,故得以下形式之方程:

(3) $$z^3+pz+q=0,$$

於此, $$p=b-\frac{a^2}{3},\quad q=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c.$$

(3)中之式,名爲三次方程之標準式,恆可得之. 吾人今據此以求其解,並先設

(4) $$z=u+v,$$

於此,u與v暫時爲不定之數.

因 $$z^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$$

$$=u^3+v^3+3uv(u+v),$$

故(3)成爲

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0.$$

今使u, v服從如次之條件:

(5) $$3uv=-p,$$

則以上之方程成爲

(6) $$u^3+v^3=-q.$$

將(5)三方之,得

(7) $$u^3v^3=-\frac{p^3}{27}.$$

此(6)與(7)內之式,爲u^3, v^3之和與積,按之§**80**, **3**.,可知u^3與v^3爲二次方程

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0 \tag{8}$$

之解.

此方程名爲三次方程之二次推解式(Resolvente). 設t_1, t_2爲其解,則尚須解二個純三次方程

$$u^3=t_1, \quad v^3=t_2, \tag{9}$$

便可得u與v之值,因而得z. 吾人亦可由第一方程求得v. 再按(5)以求$v=-\frac{p}{3u}$. 因之,求解三次方程之法,可歸結爲求解一二次方程,以及一純三次方程.

2. 將t_1開其三次方時,即得u之值. 但三方根有三值(參觀§**46**, **8**.),故如吾人取其主要值爲u,則其餘二者爲εu及$\varepsilon^2 u$,於此,ε與ε^2爲複的三次單位根(參觀§**46**, **7**.).按之(5),u取一確定之值時,v亦有一確定之值,即$\sqrt[3]{t_2}$之確定值. 與εu相屬者,則有$\varepsilon^2 v$,與$\varepsilon^2 u$相屬者爲εv,俾相屬的值之積,恆爲$uv=-\frac{p}{3}$. 故得z之三值爲

$$\begin{aligned} z_1&=u+v, \\ z_2&=\varepsilon u+\varepsilon^2 v, \\ z_3&=\varepsilon^2 u+\varepsilon v, \end{aligned} \tag{10}$$

而有一定理如下:

每個三次的方程有三解.

此三解有時可全相同,或二個相同.

今將 ε 與 ε^2 之值

$$\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3},\quad \varepsilon^2=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}$$

代入 (10) 內,則有

$$z_2=-\frac{u+v}{2}+\frac{i(u-v)}{2}\sqrt{3},\quad z_3=-\frac{u+v}{2}-\frac{i(u-v)}{2}\sqrt{3}. \tag{11}$$

3. 欲將 (3) 之解用係數 p 與 q 以表出之,可先求 (8) 之解. 其判定式爲

$$q^2+\frac{4p^3}{27}=4\Delta,$$

於此,

$$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3, \tag{12}$$

故 (8) 之解爲

$$t_1=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad t_2=-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta},$$

而三次方程之解爲

$$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}. \tag{13}$$

倘將 $\sqrt[3]{\ }$ 視爲有三個値者,則此式含有三解,吾人取其二三次根用之,時恆須使其積爲 $-\frac{p}{3}$. 最初發表此式者爲 Cardano, 故亦稱卡氏之式(見其 Ars magna de rebus algebraicis, Nürnberg 1545). Cardano 實得自 Tartaglia, 惟當 1515 年時, Scipione del Ferro 已求得三次方程之解,雖未將其發表,但曾經爲若干數學家述及,亦未附以證明.

4. 卡氏之式,其意義在將三次方程之解,以自成的形式,用有限多之代數運算法表出之(§ **39**, **6**.). 故吾人可云:

三次方程可代數的解之.

在實際的應用上,欲計算數字係數的三次方程之解時,卡氏式之効用殊少. 姑不論此式於三解均爲實數時不適用,即在 p 與 q 爲有理數時,三次根普通多爲無理數[1],雖 z 爲有理數時亦然.故方程之有理的解,恆須作爲二無理數之和以表之. 因之,吾人不能不另闢一法,俾有理的解可用有理的方法以得之(§ **90**, **1**.). 倘其解爲無理數,則吾人可用近似法(見第十六章)以計算之,所得之精確程度相同,但遠較應用卡氏之式爲省事. 故在實用上,最敏捷之法,實爲圖形法.[2]

5. 設方程之係數爲實數,則由 Δ 之號,可知其解之性質.

1. 設 Δ 爲正,則 t_1, t_2 爲實數且不相同. 今取 $u=\sqrt[3]{t_1}$ 之實根,則 v 亦爲實,與 u 不相同,故由 (10) 及 (11),可知

$\Delta>0$ 時,三次方程有一實解,及二共軛複解.

2. 設 Δ 爲零,則 $t_1=t_2$ 爲實數,因而 $u=v$ 亦爲實數,等於 $-\sqrt[3]{\dfrac{q}{2}}$,故其解爲 $z_1=2u$, $z_2=z_3=-u$. 因之:

---

1. 無論如何於 $\sqrt{\Delta}$ 爲無理數時恆如此.

2. 參觀 H. v. Sanden, Praktische Analysis, Leipzig 1914. **R Mehmke, Leitfaden zum graptischen Rechnen,** Leipzig 1917.

$\Delta=0$ 時,三次方程有一實解,以及二相同之實解.[1]

3. 設 Δ 爲負,則 t_1, t_2 爲共軛複數,於是 u 與 v 亦爲共軛複數,[2] 故 $u+v$ 爲實數, $u-v$ 爲純虛數,而其三解均爲實數:

$\Delta<0$ 時,三次方程有三個不同的實解.

此事例當再論之.

此項定理不僅用於方程(3),亦可適用於方程(1),蓋其解與(3)之解僅差 $\frac{a}{3}$ 也.綜合以上所云,可得一定理如下:

凡係數爲實數之三次方程,至少有一實解,其餘之二解,可爲不相同之實數($\Delta<0$),或相同之實數($\Delta=0$),或共軛複數($\Delta>0$).

祇當 $p=0$, $q=0$ 時,(3)之三解乃同爲0,此則不難見者;如是則方程成爲 $z^3=0$,而(1)則成爲 $\left(x+\frac{a}{3}\right)^3=0$,或 $x^3+ax^2+\frac{a^2}{3}x+\frac{a^3}{27}=0$,其解爲 $x=-\frac{a}{3}$.

6. 由以上之定理,可知在三次方程方面,係數所成之量 Δ,其作用與二次方程方面之判定式同.今所欲指出者,則 Δ 可用三次方程之解,以簡單的表出之.試按(10)

---

1. 吾人不難見,其根可用係數有理的表出之,卽 $z_1=\frac{3q}{p}$, $z_2=z_3=-\frac{3q}{2p}$. 參觀 Weltzien, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 28, 1920.

2. 試取 t_1, t_2 之極式

$$t_1=\rho(\cos\phi+i\sin\phi),\qquad t_2=\rho(\cos\phi-i\sin\phi),$$

卽不難得之.在 $v=\sqrt[3]{t_2}$ 之三值中,可取其與 u 共軛者,蓋如是則 uv 爲實數也.

與(11),作差數

$$z_1-z_2=\frac{3}{2}(u+v)-\frac{i\sqrt{3}}{2}(u-v),$$

$$z_1-z_3=\frac{3}{2}(u+v)+\frac{i\sqrt{3}}{2}(u-v).$$

其積爲

$$(z_1-z_2)(z_1-z_3)=\frac{9}{4}(u+v)^2+\frac{3}{4}(u-v)^2=3(u^2+uv+v^2).$$

今再用 $z_2-z_3=i\sqrt{3}\,(u-v)$ 乘之,則有

$$(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_2-z_3)=\sqrt{-27}\,(u^3-v^3)=2\sqrt{-27\Delta},$$

因 $u^3-v^3=t_1-t_2=2\sqrt{\Delta}$ 也.

此積之平方

(14) $$D=(z_1-z_2)^2(z_1-z_3)^2(z_2-z_3)^2$$

名爲三次方程之判定式,故此式爲

(15) $$D=-108\Delta=-4p^3-27q^2.$$

標準式(3)之解之差,等於普通式之解之相當的差,故亦

$$D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2.$$

倘於(15)內將**1**.中 p, q 之値代人,則經簡易之計算後,可得普通三次方程之判定式如下:

(16) $$D=a^2b^2+18abc-4a^3c-4b^3-27c^2.$$

於是吾人可用 D 以代 Δ,而得定理如下:

以實數爲係數之三次方程,於 $D>0$ 時,有三個不同的實解.

$D=0$ 時,有三個實解,其中有二個相同,乃至三個全相同.

$D<0$ 時,有一個實解,二個共軛複解.

§ 82. 三解均爲實數之三次方程

1. 三次方程

$$z^3+pz+q=0$$

於

(1) $$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

時,亦祇於此時,其三解乃均爲實數. 如是則 p 必須爲負. 今設 $\Delta=-R$, 則 R 爲正,而 $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\sqrt{R}}$; 因之,用卡氏之式時,方程之解成爲三次根之和,此項三次根則爲共軛複數之三次根. 吾人或可設想,複數之三次根,可仿 § **78** 中求複數平方根之法以得之. 今設

(2) $$\sqrt[3]{m+ni}=\mu+\nu i,$$

並將其三方之,使兩端之實數部分與虛數部分各相等,則可得以下之方程,以決定 μ 與 ν:

(3) $$\mu^3-3\mu\nu^2=m,\quad 3\mu^2\nu-\nu^3=n.$$

由此,不難知 $(\mu^2+\nu^2)^3=m^2+n^2$, 故

$$\mu^2+\nu^2=\rho,$$

於此,爲簡單計,設

$$\sqrt[3]{m^2+n^2}=\rho$$

並取其正的實值,試將 $\nu^2=\rho-\mu^2$ 代入 (3) 之第一式內,則得

$$4\mu^3-3\rho\mu-m=0.$$

或如設 $2\mu=s$，則

(4) $$s^3-3\rho s-2m=0.$$

對於此 s 之三次方程，按 § 81 之 (12)，有

$$\Delta=m^2-\rho^3=-n^2,$$

故為一負數，因而 (4) 之解方面，仍須求複數之三次根 ($s=2\mu=\sqrt[3]{m+ni}+\sqrt[3]{m-ni}$)．因之，此問題不能有若何之進步，且用較高深之研究時，可知複數之三次根，不能用實的代數運算法以計算之[1]．關於此，以後當詳論之．

2. 因之，吾人求三次根

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\sqrt{R}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\sqrt{R}}$$

時，不能不用 §46 中所述之法．今設

(5)
$$-\frac{q}{2}+i\sqrt{R}=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$$
$$-\frac{q}{2}+i\sqrt{R}=\rho(\cos\phi-i\sin\phi)$$

則 $$\rho^2=\frac{q^2}{4}+R=-\frac{p^3}{27},$$

因 p 為負數，ρ 為正實數，故

(6) $$\rho=-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

---

1. 因之，普通將三解均為實數的三次方程稱為 casus irreducibis. 此項名稱自已陳舊不適用，蓋今日之所謂 irreducibel (不可約)，其意義已與此迥異矣．

其方向角可由

(7) $$\cos\phi=-\frac{q}{2\rho}=\frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{4}}}$$

得之,按 $\cos\phi$ 之號而落於第一或第二象限中,因

$$\sin\phi=\frac{\sqrt{R}}{\rho}$$ 爲正數也.

由(6),可得

(8) $$\sqrt[3]{\rho}=\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

故按(5):

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+i\sqrt{R}}=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\phi}{3}+i\sin\frac{\phi}{3}\right)$$

(9)

$$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-i\sqrt{R}}=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\phi}{3}-i\sin\frac{\phi}{3}\right).$$

乘積 uv 當爲 $-\frac{p}{3}$,於此亦可得之.三次根之其他的值,倘將 ϕ 易爲 $\phi+2\pi$ 與 $\phi+4\pi$,即可得之.同時,再計及

$$\cos\frac{\phi+2\pi}{3}=-\cos\frac{\phi-\pi}{3},$$

$$\cos\frac{\phi+4\pi}{3}=-\cos\frac{\phi+\pi}{3},$$

則將(9)中之式相加時,可得三次方程之解如下:

$$z_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\phi}{3}$$

(10) $$z_2=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_3=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

此外,尚有公式(7),用以決定ϕ,或亦可用下式:

$$\operatorname{tg}\phi=-\frac{2\sqrt{R}}{q}. \tag{11}$$

三解之和爲0,此則不難由§**81**,(10)以知之,因而此三解中至少有一爲正數,一爲負數,按之(10)並可知z_1恆爲正,z_2則恆爲負.由此,用公式$z_1z_2z_3=-q$(其證見§**83**, **2**.)時,並可見z_3與q之號恆相同.

3. 以上所論求複數之三次根之法,其內容實即爲著名的三等分角之問題[1].今設$\angle AOB=\phi$, AB爲弧,半徑爲1,

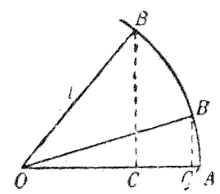
圖 16.

$OC=\cos\phi$,而如吾人能作線段

$$OC'=\cos\frac{\phi}{3},$$

則即可作$\angle AOB'=\frac{\phi}{3}$.因之,其問題在由$\cos\phi$之値以計算$\cos\frac{\phi}{3}$之値.此二値之間,其關係爲一三次方程,前於§**46**之(9)中已將其表出[2].今祇須將ϕ易爲$\frac{\phi}{3}$,

1. 關於此問題之歷史及解法,可閱 A. Mitzscherling, Das Problem der Kreisteilung, Leipzig 1913. Th. Vahlen Konstruktion und Approximation, Leipzig 1911. 三解均爲實的方程之解法與三等分角間之關係, Vieta 實已知之(De aequationum recognitione 1591, 1615 年時由其遺著中編訂而成,以及 Supplementum Geometriae 1593).

2. 該處所列$\sin\phi$與$\sin\frac{\phi}{3}$間之方程,亦有此効用.

則即得$z=\cos\frac{\phi}{3}$之方程如下:

$$z^3-\frac{3}{4}z-\frac{1}{4}\cos\phi=0.$$

或如設$2z=u$,則有

$$u^3-3u-a\cos\phi=0$$

於此.$\Delta=\cos^2\phi-1=-\sin^2\phi$爲負數,故方程有三實解,可由(10)得之.此問題既引出一三次方程,故可知除若干特例而外,欲將一角用直線與圓三等分之,實爲不可能之事.關於此,後當再論之(見§**110**).

§ 83. 三次函數.

1. 無論係數爲實數或複數,三次函數

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \tag{1}$$

於$x=x_1$時成爲0,卽

$$0=x_1{}^3+ax_1{}^2+bx_1+c.$$

今將此與(1)相減,則得

$$f(x)=(x^3-x_1{}^3)+a(x^2-x_1{}^2)+b(x-x_1).$$

此處每一括弧含有因子$(x-x_1)$,故可作

$$\begin{aligned}&f(x)=(x-x_1)[x^2+xx_1+x_1{}^2+a(x+x_1)+b], \text{或}\\&f(x)=(x-x_1)[x^2+(x_1+a)x+x_1{}^2+ax_1+b]\end{aligned} \tag{2}$$

故如$f(x)=0$之一解爲已知,則此三次函數可分解成爲一次與二次函數之積.二次函數之二零點爲三次方程之其他二解x_1, x_2.因之,吾人如已知方程(1)之一解,則其餘二解可由一二次方程得之.按§**79**,有

$$x^2+(x_1+a)x+x_1{}^2+ax_1+b=(x-x_2)(x-x_3).$$

今將此代入(2)內,則得定理如下:

用三次方程 $f(x)=0$ 之解 x_1, x_2, x_3 時, $f(x)$ 可分解成爲三個一次因子之積:

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3). \tag{3}$$

2. 今將此式乘出,並與(1)相較,使等高方數之係數相等,則得三次方程之係數與其解間之重要關係如下(Vieta 1591):

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=-a, \\ x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2&=b, \\ x_1x_2x_3&=-c. \end{aligned} \tag{4}$$

此項關係,於求解數字方程時,可用以證驗所得的解之正確與否.

3. 用(4)中之式,於 a, b, c 爲實數時,吾人不須先解方程卽可知其實根之號(見 H. Weber, Lehrb. d. Algebra, Braunschweig 1898, 1, § 83). 蓋如 Δ 爲正,卽 D 爲負,則其二解,如 x_2 與 x_3,爲共軛複數,故 x_2x_3 爲正, x_1 之號與 $-c$ 同.

設 D 爲正或 0,卽三根俱爲實,則 x_1, x_2, x_3 爲正時,按(4)有

$$a<0, \quad b>0, \quad c<0.$$

此條件必須成立,三根乃均爲正. 同時,此條件亦已爲充分者,蓋如無有一根爲0,有一根或三根均爲負,則 $c>0$. 若有二根爲負,如 x_2, x_3,而 $x_1>0$,則 $c<0$,而 $a\geqq 0$,或 $a<0$,

$x_1 > -(x_2+x_3)^2$,

$$b = x_2x_3 + x_1(x_2+x_3) < x_2x_3 - (x_2+x_3)^2 = -x_2^2 - x_2x_3 - x_3^2,$$

即$b<0$.又若其一解爲0,則c必爲0矣.

仿此,三根均爲負之必要的與充分的條件,可於

$$a>0, \quad b>0, \quad c>0$$

中得之.故如假定判定式爲正或0,則得以下之表,其中之π表正根之數:

a	b	c	π
−	+	−	3
−	+	+	2
−	−	+	2
+	−	+	2
+	+	−	1
+	−	−	1
−	−	−	1
+	+	+	0

此項結果,可總括之爲一定理如下[1]:

1. 此定理爲笛卡氏(Descartes)符號規律(§ 101)之特例.該律於二次及三次之方程,能使吾人知正根之確數,如上所示者,但於高次方程方面,祇能由此以得此數之最高限度而已.

倘判定式爲正或0,且三次方程之係數均非爲0,則正解之數等於$1, a, b, c$一數列內符號變動之次數.

按§**78**之**4**.,此定理於$c=0$時亦仍可用.於是於$a^2\geqq 4b$時,吾人祇須計及$1, a, b$內之符號變動.

倘a, b二係數中有爲0者,$c\neq 0$,則必$x_1+x_2+_3=0$,或$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=0$,故於$D\geqq 0$時不能一切根之號均相同,而有一個或二個負解(於$D=0$時合成爲一),隨$c$之爲正或爲負而定.

§84. 一個重要的三次方程

1. 今設

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & x_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

爲實數,其中每二個與主要軸(a_{11}, a_{22}, a_{33})相對稱者爲相等之數,即

$$a_{12}=a_{21}, \quad a_{13}=a_{31}, \quad a_{23}=a_{32}. \tag{1}$$

今用此項數目及一未知數ρ,作一三次的行列式,並使其等於0如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

將此式展開並用 -1 乘之,即得一 ρ 之三次方程:

$$\rho^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\rho^2+(A_{11}+A_{22}+A_{33})\rho-A=0,$$

於此,A 爲 a_{ik} 所成之行列式.A_{11}, A_{22}, A_{33} 則爲其重要的亞行列式:

$$A_{11}=a_{22}a_{33}-a^2{}_{23},\quad A_{22}=a_{33}a_{11}-a^2{}_{31},\quad A_{33}=a_{11}a_{22}-a^2{}_{12}.$$

此方程以及其推廣至於 n 次之式(用 n^2 個實數 a_{ik} 構成之,其中 $a_{ik}=a_{ki}$),於若干數學部門中至關重要,如解析幾何學上須用之以決定二次的面之主要軸,力學上之微振動理論以及天文學之計算百年變動,均用及之.

2. 此方程之主要屬性(以及與此相當的推廣式之主要屬性),在以下之定理內:

方程(2)之解均爲實數.

欲證明此定理,吾人可用 § **76**, **11**. 內所云關於齊次的一次方程之理論.方程(2)之能成立,實爲一條件,使方程系統

$$(a_{11}-\rho)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0$$
$$a_{21}x_1+(a_{22}-\rho)x_2+a_{23}x_3=0$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\rho)x_3=0$$

或

$$\begin{aligned}\rho x_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho x_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ \rho x_3&=a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{aligned}\tag{3}$$

能有不盡爲 0 之解 x_1, x_2, x_3.

對於此項解 x_1, x_2, x_3, 吾人可作其共軛複數 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$. 今用之以先後的乘(3), 並將其相加, 則計及(1)時, 可得

$$\rho(x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+x_3\bar{x}_3)=a_{11}x_1\bar{x}_1+a_{22}x_2\bar{x}_2+a_{33}x_3\bar{x}_3$$
$$+a_{23}(x_2\bar{x}_3+x_3\bar{x}_2)+a_{31}(x_3\bar{x}_1+x_1\bar{x}_3)+a_{12}(x_1\bar{x}_2+x_2\bar{x}_1)$$

此處 ρ 之因子爲一正實數, 祇於 x_1, x_2, x_3 同爲 0 時, 乃亦爲 0, 此則如上所云爲不可能者. 其右端亦爲實數, 故可知凡與 x_1, x_2, x_3 可相容之 ρ, 卽(2)之每一解, 必爲實數.

§ 85. 四次方程解法.

1. 四次方程

(1) $$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

經置換

(2) $$x=z-\frac{a}{4}$$

後, 可成爲較簡單之式

(3) $$z^4+pz^2+qz+r=0$$

其中無有三次的項, 其係數 p, q, r 不難由 a, b, c, d 得之.

求得此方程(3)時, 可按歐拉之法,[1] 仿三次方程之解法爲之. 今設

(4) $$2z=u+v+w,$$

1. Euler, Comm. Petrop. ad. ann. 1732/33. 普通四次方程之解, 最初得之者爲 Ludovico Ferrari, 係 Cardano 之門弟子, 見於其 Ars magna (1545) 內. 對於尋常之教學, 則 P. Epstein 之法較爲適用, 其中將四次方程之解法與三角形之面積, 外切圓及內切圓之公式相連繫(見 Ztchr. f. math. n. naturw. Unt. 33, 1902).

並作其平方四次方:

$$4z^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu),$$

$$16z^4=(u^2+v^2+w)^2+4(u^2+v^2+w^2)(uv+vw+wu)$$
$$+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+8uvw(u+v+w).$$

將此代入用16乘過的方程(3),則得

$$(5)\qquad (u^2+v^2+w^2)^2+4(uv+vw+wu)(u^2+v^2+w^2+2p)$$
$$+4p(u^2+v^2+w^2)$$
$$+8(uvw+q)(u+v+w)$$
$$+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+16r=0.$$

對於u, v, w三數,吾人可提出二條件. 今使

$$(6)\qquad u^2+v^2+w^2=-2p$$

$$(7)\qquad uvw=-q.$$

則由(5),得

$$(u^2+v^2+w^2)^2+4p(u^2+v^2+w^2)+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+16r=0.$$

應用(6)時,即有

$$(8)\qquad u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=p^2-4r.$$

今再將(7)平方之,則與(6),(8)並用時,按§**83**, **2**., 可知u^2, v^2, w^2為三次方程

$$(9)\qquad t^3+2pt^2+(p^2-4r)t-q^2=0$$

之解. 故此方程名為四次方程之三次推解式. 今設其解為t_1, t_2, t_3則可設

(10) $$u=\sqrt{t_1},\quad v=\sqrt{t_2},\quad w=\sqrt{t_3}.$$

此三平方根之號須按(7)選擇之,使其積爲$-q$,故僅有四種結合爲可用者.而如視$\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_3}$爲某種能充適(7)之結合,則得四次方程之解如下:

(11) $$\begin{aligned} z_1&=\frac{1}{2}(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3})\\ z_2&=\frac{1}{2}(\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3})\\ z_3&=\frac{1}{2}(-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3})\\ z_4&=\frac{1}{2}(-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3})\end{aligned}$$

從可知四次方程之解,可用有限多的代數運算法以得之,故吾人云:

四次方程可代數的解之.

關於此項解之數字的計算,則三次方程方面所云者(§ **81**. **4**.)於此均同,且加甚焉.

2 倘方程之係數爲實數,則因$t_1t_2t_3=q^2$爲正數,[1]故有以下之三事例爲可能者:

1. t_1, t_2, t_3爲正實數,則四次方程有四個實根.

2. (9)之一根,如t_1爲正數,其餘之二者t_2, t_3則爲負數.倘t_2與t_3不同,則四根z_1, z_2, z_3, z_4,均爲複數,且z_1與z_2共

1. $q=0$之事例,吾人可不計及,蓋如是則四次方程將成爲z^2之二次方程$z^4+pz^2+r=0$矣.

軛,z_3 與 z_4 共軛. 若 $t_2=t_3$,則 z_1 與 z_2 共軛複數,但 $z_3=z_4$ 爲實數.

3. (9)之二根,如 t_2, t_3 爲共軛複數,t_1 則爲正實數. 吾人可如是決定平方根,使 $\sqrt{t_2}$ 與 $\sqrt{t_3}$ 爲共軛複數,於是 $\sqrt{t_1}$ 之號可按(7)決定之. 如是,z_1 與 z_2 爲實數,z_3 與 z_4 爲共軛複數.

§86. 四次方程之判定式

1. 以上三例中,何者成爲事實,此可由方程之係數以知之,不必先解方程. 爲此應用,吾人可先作諸差數如下:

$$z_1-z_2=\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3},\qquad z_3-z_4=\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3},$$

$$z_1-z_3=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_3},\qquad z_2-z_4=\sqrt{t_1}-\sqrt{t_3},$$

$$z_1-z_4=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2},\qquad z_2-z_3=\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}.$$

相乘後,得

1) $$(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)(z_2-z_3)(z_2-z_4)(z_3-z_4)$$
$$=(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_2-t_3)$$

此乘積之平方名爲四次方程之判定式,故可知:

四次方程有重根之必要的與充分的條件,爲判定式等於0.

由(1),又可知:

四次方程之判定式,等於其三次推解式之判定式.

因之,吾人可仿§**81**,(16),將判定式用§**85**,(9)之係數表

出之,因而亦可用四次方程之係數表出之(參閱 §99, 之 **4**.).

2. 由此,按 §85, **2**. 中之第三事例,即可知:

倘判定式 D 爲負,則四次方程有二實解,二複解.

但如 $D \geqq 0$, 則將 §83 之 **3**. 應用於三次推解式時,可知:

四次方程如有四實解,其中有二個可相合成爲一(但不能多於二個),則其必要的與充分的條件爲

$$p<0, \quad p^2-4r>0.$$

在其他的情形下,如 D 爲正,則方程有四複解.

3. 若方程有二對相等之根,如 $z_1=z_2$, $z_3=z_4$, 則必 $t_2=0$, $t_3=0$. 此則祇於

$$q=0, \quad p^2-4r=0$$

時爲然,至於此二對根之爲實或爲複,此須視 p 爲負或正而定. 於是其根爲

$$z_1=z_2=\frac{1}{2}\sqrt{-2p}\,,\ z_3=z_4=-\frac{1}{2}\sqrt{-2p}.$$

祇當 $t_1=t_2=t_3$ 時,方程乃有三個相等之根 $z_2=z_3=z_4$, 均爲實數.如是則三次推解式爲

$$\left(t+\frac{2p}{3}\right)^3=t^3+2pt^2+\frac{4p^2}{3}t+\frac{8p^3}{27}=0,$$

將其與 §85. (9) 相較後,得 $p^2-4r=\dfrac{4p^2}{3}$, $-q^2=\dfrac{8p^3}{27}$, 或:

四次方程有三等根之必要的與充分的條件,爲

$$p^2+12r=0, \quad 8p^3+27q^2=0.$$

其根爲 $z_1=\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{2p}{3}}$, $z_2=z_3=z_4=-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2p}{3}}$.

又若 $q=p=r=0$, 則四根均相等, 且同爲零.

第十四章

整函數

§ 87. 整函數及其根之定義.

1. 整函數爲以下形式之式:

(1) $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

其中之 n 爲一整正數, $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲一定的已知數,名爲函數 $f(x)$ 之係數, x 則爲一不定的數(變數),可取任何數爲值.設 a_0 不等於 0, 則 n 爲 $f(x)$ 之次數.有時亦可 $n=0$, 如是則函數成爲不等於 0 之定數 a_0. 又如吾人無有其他之聲明,則係數可爲任何的實數或複數.

吾人亦可論及多變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之函數,則所設整函數者,爲由變數及某項定數用加,減及乘以成之函數.二整函數之商,名爲一有理函數.吾人亦可將整函數視爲有理函數之特例含於其中.

此處所欲論者,爲一個變數之整函數.

2. 整函數可加,減及乘之,多項式之運算規律於此可適用.此項運算之結果,仍爲一整函數.吾人可將此項函數排列之.將同次之項合成爲一,再將各項自左至右以升冪序或降冪序列之.例如

$$(a_0x^2+a_1x+a_2)(b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)$$
$$=a_0b_0x^5+(a_0b_1+b_0a_1)x^4+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^3$$
$$+(a_0b_3+b_2a_1+a_2b_1)x^2+(a_1b_3+a_2b_2)x+a_2b_3.$$

倘將二函數相乘,其一爲 n 次者 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$,其他爲 m 次者 $\phi(x)=b_0x^m+\cdots$,則其積 $f(x)\phi(x)$ 之首項爲 $a_0b_0x^{m+n}$,故

二函數之積之次數,等於二因子之次數之和.

3. 倘二個函數既同次,且同次方之係數均相同,則此二函數爲全等者.如是則二函數於 x 之任何值,其數值均等,反之,如二函數於 x 之任何值均相等,則此二者亦必全等,此不難知者.因之,必須一切係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均爲 0,函數 $f(x)$ 乃全等的爲 0.此項全等的爲 0 之函數,無一定的次數.

全等與相等 $f(x)=\phi(x)$ 有別,蓋後者僅於 x 之某種特殊值成立也.

全等的 $f(x)=0$.必須 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均爲 0 而後可,但吾人亦可提出此問題,即 $f(x)$ 之係數雖非盡爲 0,但於 x 之何項值,$f(x)$ 亦可爲 0.如是之值 x_1,名爲 $f(x)$ 之零點或根,或方程 $f(x)=0$ 之根.倘吾人如是提出此問題,則 x 亦稱爲方程之未知數,所求者爲其根 x_1,惟暫時不論及此問題,即此項值是否恆可求得者.

4. 倘係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 均爲實數,則 $f(x)$ 謂之實函數.倘此實函數有一複根,$x_1=\alpha+\beta i$,則

(2) $a_0(\alpha+\beta i)^n+a_1(\alpha+\beta i)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(\alpha+\beta i)+a_n=0.$

按之§**44**, **13**., 吾人可用 $-i$ 以代 i, 故可知亦必

(3) $a_0(\alpha-\beta i)^n+a_1(\alpha-\beta i)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(\alpha-\beta i)+a_n=0.$

因之, $\bar{x}_1=\alpha-\beta i$ 亦為 $f(x)$ 之根. 今將此結果作為一定理如下:

在實函數 $f(x)$ 方面,複根恆成為對, 且每對為共軛者.

§88. 整函數之相除. 引伸函數.

1. 整函數之運算法與整數之運算法多相似處, 關於除之規律, 尤為重要.

今設

$$f(x)=a_0x_n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

$$\phi(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$$

為二函數, 其次數為 n 與 m, 即 a_0 與 b_0 不等於0. 吾人始假定 $n\geqq m$.

倘能有一整函數 $Q(x)$, 使 $f(x)=\phi(x)Q(x)$, 則 $f(x)$ 謂之可為 $\phi(x)$ 所除.

按§**87**之**2**., $Q(x)$ 之次數必為 $n-m$. 倘 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 之次數同, 即 $n=m$, 則 $Q(x)$ 之次數為0, 故為一定數, 而 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 所不同者僅為一常數的因子.

若 $f(x)$ 不能為 $\phi(x)$ 所除, 則吾人仍可決定一整函數 $Q(x)$, 其次數為 $n-m$ 者, 使 $\phi(x)Q(x)$ 於開始的 $n-m+1$ 個係數與 $f(x)$ 相合.

蓋如

$$(2)\qquad Q(x)=q_0x^{n-m}+q_1x^{n-m-1}+\cdots+q_{n-m-1}x+q_{n-m},$$

並設 $\phi(x)\,Q(x)$ 之係數,自 a_0 上升,與 $f(x)$ 之係數相等,則得

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_0&=b_0q_0,\\ a_1&=b_0q_1+b_1q_0,\\ a_2&=b_0q_2+b_1q_1+b_2q_0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_\nu&=b_0q_\nu+b_1q_{\nu-1}+b_2q_{\nu-2}+\cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n-m}&=b_0q_{n-m}+b_1q_{n-m-1}+\cdots. \end{aligned}$$

此項方程之構造,極易見之,蓋 a_ν 之式內,b_iq_k 之標數 i, k 之和 $i+k$ 恆等於 ν 也.和數之繼續,以 b 之標數不大於 m 爲止.

此處所有者爲 $n-m+1$ 個一次方程,由此可決定 $n-m+1$ 個未知數 $q_0, q_1, \cdots, q_{n-m}$. 且此系統之方程,其構造尤爲簡單,蓋由第一方程,即可知 $q_0=a_0/b_0$, 既得 q_0 後,即可由第二方程得

$$q_1=(a_1-b_1q_0)/b_0=(a_1b_0-b_1a_0)/b_0^2,$$

等等,且分母恆爲 b_0 之方數,b_0 則按所設係不等於 0 者.

既決定此項數後,則 $\phi(x)\,Q(x)$ 與 $f(x)$ 之係數,於 $x^n, x^{n-1}, \cdots, x^m$ 爲相同者,其差 $f(x)-\phi(x)\,Q(x)$, 爲一整函數

(4) $$R(x)=r_0x^{m-1}+r_1x^{m-2}+\cdots+r_{m-2}x+r_{m-1},$$

其次數最高爲 $m-1$, 若 r_0 或 r_0 與 r_1 等於 0, 則其次數尚可較低 於是吾人有

(5) $$f(x)=\phi(x)\,Q(x)+R(x).$$

此種運算法,謂之 $f(x)$ 被 $\phi(x)$ 所除. $f(x)$ 爲被除式, $\phi(x)$ 爲除式, $Q(x)$ 爲商. $R(x)$ 爲餘式. 倘 $f(x)$ 與 $\phi(x)$ 爲已知者, 則因 $R(x)$ 之次數須小於 $\phi(x)$ 者, 故 $Q(x)$ 與 $R(x)$ 卽被決定.

以上所明, 與整數之除法 (§ **16** 之 **1**.) 初無大異, 惟餘式方面所重者不在較小的數値, 而在較低的次數. 除之方法, 亦可按十進數之法爲之. 今舉一例示之如下:

$$f(x)=3x^4+3x^3-5x^2+2x-8,\quad \phi(x)=x^2+2x-5,$$

$$\begin{array}{l}
3x^4+3x^3-5x^2+2x-8 : x^2+2x-5=3x^2-3x+16\\
\underline{-3x^4-6x^3+15x^2}\\
\qquad -3x^3+10x^2+2x\\
\qquad \underline{+3x^3+6x^2-15x}\\
\qquad\qquad 16x^2-13x-\ 8\\
\qquad\qquad \underline{-16x^2-32x+80}\\
\qquad\qquad\qquad -45x+72.
\end{array}$$

故 $$Q(x)=3x^2-3x+16,\quad R(x)=-45x+72.$$

2. 倘 $R(x)$ 全等的爲 0, 卽

$$r_0=0,\quad r_1=0,\ \cdots,\quad r_{m-1}=0,$$

則 $f(x)$ 可爲 $\phi(x)$ 所除, 亦祇於此時可爲 $\phi(x)$ 所除

茲亦舉例明之如下:

$$f(x)=x^4+x^3-4x^2-x+1,$$

$$\phi(x)=x^2-x-1.$$

$$\begin{array}{l}
x^4+x^3-4x^2-x+1 : x^2-x-1=x^2+2x-1 \\
\underline{-x^4+x^3+x^2} \\
\quad 2x^3-3x^2-x \\
\quad \underline{-2x^3+2x^2+2x} \\
\qquad -x^2+x+1 \\
\qquad \underline{+x^2-x-1} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

故 $$x^4+x^3-4x^2-x+1=(x^2-x-1)(x^2+2x-1),$$

3. 倘除式爲一一次的函數,則除法特爲簡單. 今設 $\phi(x)=x-\alpha$, 並用 $Q(x,\alpha)$ 表商式,以明其與 α 亦相關. 於是吾人可於(3)內設 $b_0=1$, $b_1=-\alpha$, 得

$$a_0=q_0,$$

$$a_1=q_1-\alpha q_0,$$

$$a_2=q_2-\alpha q_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n-1}=q_{n-1}-\alpha q_{n-2}$$

以決定諸 q. 由此,可得

$$q_0=a_0,$$

$$q_1=a_0\alpha+a_1,$$

$$q_2=a_0\alpha^2+a_1\alpha+a_2, \tag{6}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_{n-1}=a_0\alpha^{n-1}+a_1\alpha^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

此處所得之餘式，其次數爲0，卽與 x 無關者．今於 $f(x)=(x-a)Q(x,a)+R$ 內，使 x 取 a 爲值，則卽不難決定之，蓋如是則 $(x-a)Q(x,a)=0$，故 $f(a)=R$．因之，

(7) $$f(x)=(x-a)Q(x,a)+f(a).$$

若 $f(a)=0$，則 $f(x)$ 可爲 $x-a$ 所除，故得定理如下：

倘 a 爲 $f(x)$ 之根，則 $f(x)$ 可爲 $x-a$ 所除，亦祇於此時可爲其所除．

於是吾人稱 $x-a$ 爲 $f(x)$ 之根因子．

4．如 $f(x)$ 可爲 $(x-a)^2$ 所除，則必 $Q(x,a)$ 可爲 $(x-a)$ 所除，故 $Q(a,a)=0$．但按(6)，

$$Q(a,a)=q_0a^{n-1}+q_1a^{n-2}+\cdots+q_{n-1}$$
$$=na_0a^{n-1}+(n-1)a_1a^{n-2}+\cdots+2a_{n-2}a+a_{n-1}.$$

今設

(8) $$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+2a_{n-2}x+a_{n-1}$$

並稱之爲 $f(x)$ 之引伸函數，則可知

(9) $$Q(a,a)=f'(a).$$

因之，$f(x)$ 可爲 $(x-a)^2$ 所除之必要的與充分的條件，爲 $f(a)=0,\ f'(a)=0$：

倘 a 爲 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之共同根，則 $f(x)$ 可爲 $(x-a)^2$ 所除，亦祇於此時仍可爲其所除．

5．倘函數內 $a_0=1,\ a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，則按(8)，可知 $f(x)=x^n$ 之引伸函數爲

(10) $$f'(x)=nx^{n-1}.$$

倘 $$a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0,\quad a_n=c,$$

則 $f'(x)=0$, 故

常數之引伸函數爲 0

倘 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 有一公因子 c, 而

$$f(x)=c\phi(x),$$

則 $f'(x)$ 亦有此因子, 而

$$f'(x)=c\phi'(x).$$

如 $f(x)$ 爲二函數之和:

$$f(x)=\phi(x)+\psi(x)$$

即 $f(x)$ 每一係數爲 $\phi(x)$ 與 $\phi(x)$ 之相當係數之和, 則

(11) $$f'(x)=\phi'(x)+\psi'(x),$$

故: 和之引伸函數, 等於引伸函數之和.

6. 今於(9)內將 α 易爲 x. 則得

$$f'(x)=Q(x,x),$$

故可知: 求 $f(x)$ 之引伸函數時, 可先求

(12) $$Q(x,\alpha)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha},$$

將其算出, 然後使 $\alpha=x$.

吾人可寫之作

$$f'(x)=\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]_{a=x}.$$

例如 $f(x)=(x-c)^n$，則可用 § **20** 之 (18):

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1},$$

於其中以 $x-c$ 代 a，$a-c$ 代 b，即得 $Q(x,a)$. 再設 $a=x$ 時，有 $a=b=x-c$，故:

$(x-c)^n$ 之引伸函數為

(13) $$f'(x)=n(x-c)^{n-1}.$$

於 $c=0$ 時，此式與 (10) 相同.

7. 今於 (12) 內設 $a=x+h$，則得

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

倘將其計算出，並使 $h=0$，則所得者為 $f(x)$ 之引伸函數:

(14) $$f'(x)=\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]_{h=0}$$

但

(15) $$f(x+h)=a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+\cdots\cdots+a_n,$$

而如按二項定理將 $x+h$ 之方數展開，將 h 之同次項併合之，則得

(16) $$f(x+h)=f(x)+hf_1(x)+h^2f_2(x)+\cdots+h^nf_n(x),$$

其中之 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 均為 x 之函數，不含有 h 在內.

如是則

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f_1(x)+hf_2(x)+\cdots+h^{n-1}f_n(x)$$

今使$h=0$,則得

(17) $$f'(x)=f_1(x),$$

故有定理如下:

$f(x)$之引伸函數,等於將$f(x+h)$展開時h之係數.

因之,吾人可寫作

(18) $$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h^2F(x,h),$$

於此,$F(x,h)$爲x與h之整函數,就二者而論均爲$n-2$次者.

8. 設$f(x)$爲二函數之積:

$$f(x)=\phi(x)\psi(x).$$

則 $$f(x+h)=\phi(x+h)\psi(x+h).$$

今按(18),寫之作

$$\phi(x+h)=\phi(x)+h\phi'(x)+h^2\Phi(x,h)$$

$$\psi(x+h)=\psi(x)+h\psi'(x)+h^2\Psi(x,h)$$

則 $$f(x+h)=f(x)+h[\phi(x)\psi'(x)+\psi(x)\phi'(x)]+h^2F(x,h),$$

故:$f(x)=\phi(x)\psi(x)$之引伸函數爲

(19) $$f'(x)=\phi(x)\psi'(x)+\psi(x)\phi'(x).$$

9. 按(8),整函數之引伸函數$f'(x)$仍爲一整函數.因之,吾人可再求其引伸函數.則所得者爲$f(x)$之第二次引伸函數,以$f''(x)$表之.仿此,吾人並可求其第三,第四,等各次的引伸函數.反覆應用**5.**中之公式時,得一列函數如下,其

次數恆低減:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n,$$

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1},$$

(20)
$$f''(x)=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1\cdot a_0.$$

第 n 次的引伸函數爲一常數,故函數之列卽終止於是.

例:

$$f(x)=x^4-4x^2+3x+5,$$

$$f'(x)=4x^3-8x+3,$$

$$f''(x)=12x^2-8,$$

$$f'''(x)=24x,$$

$$f^{(4)}(x)=24.$$

今於(20)內設 $x=0$, 則得

$$f(0)=a_n,\quad f'(0)=a_{n-1},\quad f''(0)=2a_{n-2},\quad f'''(0)=3!a_{n-3},\cdots\cdots$$

廣之,　$$f^{(\nu)}(0)=\nu!a_{n-\nu}\qquad(\nu=0,1,2,\cdots n).$$

因之, $f(x)$ 之係數可用 $x=0$ 時引伸函數之値表之,而得

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

此爲一普通定理之特例,今試將該定理推論得之.

10. 今用 $1, h, \frac{h^2}{1\cdot2}, \frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}, \cdots\cdots, \frac{h^n}{1\cdot2\cdots n}$ 依次除(20)中之

方程.將其相加使同因子 a_k 之項合併,則得

$$f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

$$=a_0\left[x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}h^2+\cdots+h^n\right]$$

$$+a_1\left[x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right]$$

$$+a_2\left[x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}h+\cdots+h^{n-2}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+a_{n-1}(x+h)+a_n.$$

按之二項定理,此亦卽爲

$$a_0(x+h)^n+a_1(x+h)^{n-1}+a_2(x+h)^{n-2}+\cdots+a_n.$$

同時,亦可知此卽爲原來之函數,使 x 成爲 $x+h$ 而已,觀於(15)可知.因之,吾人得重要公式如下[1]:

$$(21)\qquad f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

(16) 內之函數 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$, 於是亦卽決定.

試於其中設 $x=0$, 再用 x 代 h, 則卽得 **9**. 之末之式.

11. 引伸函數有時亦用字母 D 並附一標數以表明之,卽

$$f'(x)=D_1f(x),\quad f''(x)=D_2f(x),\quad f'''(x)=D_3f(x),$$

$$\cdots\cdots,\quad f^{(\nu)}(x)=D_\nu f(x).$$

---

1. **此爲著名的泰勒 (Taylor) 定理之特例,卽 n 次的整函數之泰氏定理也.** (Brook Taylor, Methodus incrementorum, London 1715.)

例如 $f(x)=x^n$ 時,有

$$D_1x^n=nx^{n-1},\quad D_2x^n=n(n-1)x^{n-2},$$

廣之,

$$D_\nu x^n=n(n-1)\cdots(n-\nu+1)x^{n-\nu}$$

$$=\frac{n!}{(n-\nu)!}x^{n-\nu}.$$

此式之適用範圍,自須以 ν 不大於 n 爲條件.於 $n=\nu$ 時,$D_nx^n=n!$,若 ν 大於 n,則 $D_\nu x^n=0$.

12. 由 **5.** 中所知第一次引伸之屬性,不難知高次引伸之相當屬性:

$$D_\nu(c)=0,\ D_\nu[cf(x)]=cD_\nu f(x),$$

$$D_\nu[\phi(x)+\psi(x)]=D_\nu\phi(x)+D_\nu\psi(x),$$

廣之,倘 $f_1(x), f_2(x), \cdots$ 爲整函數,$c_0, c_1, c_2, \cdots$ 爲常數,則

$$D_\nu[c_0+c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots]=c_1D_\nu f_1(x)+c_2D_\nu f_2(x)+\cdots.$$

13. 公式(19)可使定理 **4** 更進一步.蓋如

$$f(x)=(x-\alpha)^mf_1(x),$$

$f_1(x)$ 不能再爲 $(x-\alpha)$ 所除,卽 $(x-\alpha)$ 爲 $f(x)$ 之 m 重的因子,則

$$f'(x)=(x-\alpha)^{m-1}\{(x-\alpha)f'_1(x)+mf_1(x)\}.$$

故可知:

倘 $x-\alpha$ 爲 $f(x)$ 之 m 重的根因子,則 $x-\alpha$ 爲 $f'(x)$ 之 $m-1$ 重的根因子.

由此,復可知 $x-\alpha$ 爲 $f''(x)$ 之 $m-2$ 重的根因子,爲 $f'''(x)$

之 $m-3$ 重的根因子,等等,乃至於為 $f^{(m-1)}(x)$ 之單純根因子. 於是得定理如下:

設 $x-a$ 為 $f(x)$ 之 m 重的根因子,則 $f(a)=f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$, 但 $f^{(m)}(a)\neq 0$.

14. 設 x_1 為 $f(x)$ 之根,則可設 $f(x)=(x-x_1)f_1(x)$, 於此, $f_1(x)$ 為 $n-1$ 次的函數. 由 **3**., 可知 $f_1(x)$ 內 x 之最高方數 x^{n-1}, 其係數仍為 a_0, 與 $f(x)$ 中之 x^n 者同. 倘 $f_1(x)$ 有一根 x_2, 則亦可設 $f_1(x)=(x-x_1)f_2(x)$, 等等. 故如此項函數 $f, f_1, f_2, \cdots$ 均有根,其末後者為 $f_{n-1}(x)=a_0(x-x_n)$, 則得

(22) $$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n).$$

由此可知 n 次的函數,其所有之根不能多於 n 個.

蓋如 $f(x)$ 有 n 個根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 則 x_2 為 $f_1(x)$ 之根, x_3 為 $f_2(x)$ 之根,等等,故 (22) 中之分解為可能之事. 今若 a 為 $f(x)$ 之任何一根,則必 $(a-x_1)(a-x_2)\cdots(a-x_n)=0$, 故 a 必與 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中之某一數相等.

因之,倘在某種特殊狀況下,有一 n 次的函數

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

能有 n 個以上 x 之值,使 $f(x)$ 成為 0, 則祇有一切係數 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均為 0, 即 $f(x)$ 全等的為 0. 以上所述之定理,吾人亦可予以如下之形式,在若干狀況下,頗能使吾人得一重要的論證之據:

倘 n 次的 x 之函數,能有多於 n 個的 x 之值成為 0, 則此

函數全等的爲0.

15. 由此,復可得定理如下:

設有二n次的函數,知其於多於n個的x之值相同,則於一切x之值均相同,即此二函數爲全等的.

蓋如是則二函數之差,能於多於n個的x之值成爲0,故必全等的爲0.

16. (22)之分解內之數目$x_1, x_2, \cdots, x_n$,可有相同者.但$f(x)$仍可分解成爲n個一次的因子,惟不同的根之數即小於n.爲語法上之一致計,吾人仍云有n個根,惟須將相同之根作爲若干個計算之.於是吾人有重根,而按**4.**,可知倘x_i爲$f(x)$與$f'(x)$之共同根,則即爲一重根.

設x_1爲一ν_1重,x_2爲ν_2重,廣之,x_i爲ν_i重的根,又設ρ爲不同的根之數,則

(23)
$$f(x)=a_0(x-x_1)^{\nu_1}(x-x_2)^{\nu_2}\cdots(x-x_\rho)^{\nu_\rho},$$

而
$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\rho=n.$$

§89. 最大公因式

1. 二整函數$f(x)$與$f_1(x)$(有時亦可簡之作f, f_1),如有共同根,則亦有公因式.蓋如x_1爲一共同根,則此二函數均可爲一次函數$x-x_1$所除.但$f(x)$與$f_1(x)$亦可有較高次公因式.如$f(x)$與$f_1(x)$無有公因式,即無有共同根,則此二函數謂之互質者.

整函數之除法規律與整數之除法規律相同,故吾人仍可用歐氏之法以決定其公因式.

今設 f, f_1 爲二已知函數,其次數爲 n 與 n_1,並設 $n \geqq n_1$. 於是吾人可按 §88 之 **1.**,求得一列商式 $Q, Q_1, Q_2, \cdots$ 及函數 $f_2, f_3, \cdots$,其次數 $n_2, n_3, \cdots$ 恆減少者,使

$$(1)\qquad \begin{aligned} f &= Qf_1+f_2,\\ f_1 &= Q_2f_2+f_3,\\ f_2 &= Q_2f_3+f_4,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

此項方程可繼續下去,至除法不能再繼續爲止. 但 $f_2, f_3, \cdots$,之次數恆低減,故除法必有終止時. 今設其末後之方程爲

$$(2)\qquad \begin{aligned} f_{\nu-2} &= Q_{\nu-2}f_{\nu-1}+f_\nu,\\ f_{\nu-1} &= Q_{\nu-1}f_\nu, \end{aligned}$$

則可知 f_ν 爲其前一切函數 $f_{\nu-1}, f_{\nu-2}, \cdots, f_1$ 之除式,f 與 f_1 之每一除式,同時亦即爲 $f_2, f_3, \cdots, f_\nu$ 之除式. 因之,f_ν 爲 f 與 f_1 之最大公因式(此處之所謂大小,係指次數而言).

末後之函數 f_ν,其次數亦可爲 0,即與 x 無關,而爲一不等於 0 之數. 但每一函數均可爲一數目所除,故吾人不視之爲除式. 如是,f 與 f_1 爲互質者.

因之,二函數之最大公因式,可用有理運算法,由已知函數之係數以推得之.

2. 吾人亦可用有理運算法,以決定一函數是否有重根,其法在探求 $f(x)$ 與其引伸函數間,是否有公因式. 今舉一例示之如下:

$$f(x)=x^6-2x^5+2x+1$$

$$f'(x)=6x^5-10x^4+2.$$

因最大公因式並不在於諸項所共有之數字因子,故為避免分數計,在施行歐氏之法 (1) 時,吾人可用任意的定數以乘 $f, f_1, f_2, \cdots$ 諸函數,或除之亦可. 此處吾人可用 9 以乘 $f(x)$, 用 2 以除 $f'(x)$, 則得

$$f=9x^6-18x^5+18x+9,$$

$$f_1=3x^5-5x^4+1.$$

經第一次相除後,有

$$f=(3x-1)f_1-5(x^4-3x-2);$$

再次除後,得

$$f_1=(3x-5)f_2+9(x^2-x-1),$$

第三次後,有

$$f_2=(x^2+x+2)f_3.$$

因之, x^2-x-1 為 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最大公因式,吾人不難知

$$f(x)=(x^2+1)(x^2-x-1)^2,$$

$$f'(x)=2(3x^3-2x^2+x-1)(x^2-x-1).$$

欲使 $f(x)$ 之重根可為吾人所見,可將 x^2-x-1 分解成

爲一次因子,即求解 $x^2-x-1=0$ 一方程. 其解爲

$$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2},\quad \omega'=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},$$

故 $$f(x)=(x^2+1)(x-\omega)^2(x-\omega')^2.$$

3. 倘將一函數 $f(x)$ 之單純的,二重的,三重的,… 因子列出之,則有

(3) $$f(x)=P_1P_2^2P_3^3P_4^4\cdots P_\nu^\nu,$$

此中之 $P_1, P_2, \cdots$ 爲整函數,無有重複因子及公因子者. 在 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ 諸函數中,亦可有不存在者,且大多不能均具備之. 至於此項函數之求法,則可用求最大公因式之法以得之,卽可由 $f(x)$ 之係數,用有理算法以得之. 按 § 88 之 **13.**,

$$f_1(x)=P_2P_3^2P_4^3\cdots$$

爲 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之最大公因式,故可知

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}=F(x)=P_1P_2P_3P_4\cdots$$

因之,$F(x)$ 與 $f_1(x)$ 之最大公因式爲

$$Q=P_2P_3P_4\cdots$$

故 $$P_1=\frac{f}{f_1Q}.$$

再將此法用於 $f_1(x)$,則卽可得 P_2 等等.

此處可注及者,則用此法時,吾人僅假定 $f(x)$ 可分解成爲一次的因子. 至於此項因子之爲何,此則於應用此法

時無須先知之．以後吾人可知，每一函數均可分解成為一次因子，故此法可普通的應用．若不先假定 $f(x)$ 之可分解，而欲建立此方法，此事較為困難，已不屬於簡易數學之範圍內矣（參閱 Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Auflage, 1, § 20）．

4. 由歐氏之法，可得定理如下：

設 $f(x)$ 與 $f_1(x)$ 為二互質的函數，則可決定二其他的互質函數 $F(x)$, $F_1(x)$，使

$$F(x)f(x)+F_1(x)f_1(x)=1. \tag{4}$$

此處先可說明，倘於(4)之右端不用 1 而用一其他不等於 0 之數 c，則此問題仍相同，故其一問題如能解，則其他問題亦隨之而解．

求(4)中之 F 與 F_1 時，可應用(1)與(2)，而因 f 與 f_1 為互質，故 f_ν 為一不等於 0 之數．今先由(1)中之第一方程得 f_2，將其代入第二與第三方程，再由第二方程得 f_3，將其代入以後之方程內，並繼續此法，則末後可由(2)之第一方程得(4)形式的方程，而問題於以解決．

試舉一簡單的例如下：

$$f=x^2-x-1, \quad f_1=x^2+1,$$

則

$$x^2-x-1=(x^2+1)-(x+2).$$

$$x^2+1=(x+2)(x-2)+5.$$

今用 $x-2$ 乘第一方程，與第二方程相加，則得

$$(x^2-x-1)(x-2)+(x^2+1)(3-x)=5.$$

因之, $F(x)=x-2$, $F_1(x)=3-x$.

在同樣的假定下,卽 f 與 f_1 爲互質,吾人亦可充適以下之方程:

(5) $$F(x)f(x)+F_1(x)f_1(x)=\Phi(x),$$

於此, $\Phi(x)$ 爲任意的 x 之函數. 吾人祇須將方程 (4) 與 $\Phi(x)$ 相乘,仍用 $F(x)$ 與 $F_1(x)$ 以表 $F(x)\Phi(x)$ 與 $F_1(x)\Phi(x)$ 卽可.

§90. 可分解與不可分解的函數

1. 今假定 n 次的整函數

(1) $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

內之係數均爲整數. 如是之函數,謂之整數的.

設 a_0 不等於 0, 則求 (1) 之根時,仍可以 $a_0=1$ 爲例. 蓋吾人用 a_0^{n-1} 乘 (1) 後,得

$$a_0^{n-1}f(x)=(a_0x)^n+a_1(a_0x)^{n-1}+a_2a_0(a_0x)^{n-2}+\cdots+a_na_0^{n-1},$$

故若設

$$a_0x=y,\quad a_1=b_1,\quad a_2a_0=b_2,\ \cdots,$$

$$a_na_0^{n-1}=b_n.\qquad a_0^{n-1}f(x)=\phi(y),$$

則

(2) $$\phi(y)=y^n+b_1y^{n-1}+b_2y^{n-2}+\cdots+b_n,$$

其中 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 亦均爲整數.

求 $f(x)$ 之根時,可將 $\phi(y)$ 之根用 a_0 除之.

吾人或可先問 $f(x)$ 或 $\phi(y)$ 有無有理的根. 今設 $^p/_q$ 為 $\phi(y)$ 之根, p, q 為互質數, 並假定 q 為正數, 則必

$$p^n+b_1p^{n-1}q+b_2p^{n-2}q^2+\cdots+b_nq^n=0.$$

由此可知 p^n 必可為 q 所除, 但因 p 與 q 為互質, 故祇有 $q=1$ 方可. 因之:

$\phi(y)$ 之有理根必為整數.

今設 p 為如是之根, 則

$$p^n+b_1p^{n-1}+b_2p^{n-2}+\cdots+b_{n-1}p+b_n=0,$$

因之, b_n 必可為 p 所除. 故吾人欲決定 $\phi(y)$ 是否有有理根時, 可先求 b_n 之一切除數, 將其試代入 $\phi(y)$ 中之 y 處. 設 p 為其中之一除數, 能 $\phi(p)=0$, 則 p 為 $\phi(y)$ 之有理根, 而 $\frac{p}{a_0}$ 為 $f(x)$ 之有理根.

如是則 $\phi(y)$ 可為 $y-p$ 所除, 其除後之結果為 $\phi(y)=(y-p)\phi_1(y)$, 於此, $\phi_1(y)$ 為 $n-1$ 次的整數函數, 其第一係數為 1 (參觀 § **88, 3.**).

2. 以有理數為係數的函數, 如用其主要分母乘之時, 則所得即為整數的函數. 一整數函數 $f(x)$ 之一切係數 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之最大公約數, 名為此函數之除數. 倘此除數為 1, 則此函數謂之單純的. 任何一整數或分數係數的函數 $f(x)$ 可化之成為 $kf_1(x)$ 之形式, 於此, $f_1(x)$ 為一單純的整數函數, k 則為一整數或分數. 倘 $f_1(x)$ 之最高項之係數為正, 則此項方法, 祇有一種可能的方式.

3. 以有理數爲係數的函數 $f(x)$, 倘能分解成爲二因式, $f_1(x)$, $f_2(x)$, 各以有理數爲係數, 且均有 x 在內, 則此函數謂之可分解者. 如此種分解不可能, 則謂之不可分解者.

二函數 $f(x)$ 與 $F(x)$ 之係數如爲有理數, 則其最大公約式之係數亦必爲有理數, 此不難由 § **89** 中之法以知之者. 故如 $f(x)$ 爲不可分解者, 則祇有二個事實可能: 或則 $F(x)$ 可爲 $f(x)$ 所除, 或則 $F(x)$ 與 $f(x)$ 互質. 倘爲後者之事例, 則 $f(x)$ 與 $F(x)$ 無有共同根. 由此, 可得方程論上極重的[1]主要定理:

倘 $F(x)$ 與不可分解的函數 $f(x)$ 有共同根, 則 $F(x)$ 可爲 $f(x)$ 所除, 故 $f(x)$ 之一切根同時爲 $F(x)$ 之根.

由此定理, 復可知:

不可分解的方程之根, 不能同時爲次數較低的有理係數的方程之根.

4. 倘整數函數

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \tag{1}$$

可分解, 則按 **2.**, 可決定二整數 h 與 m, 使

$$hf(x)=m\phi(x)\psi(x), \tag{2}$$

於此, $\phi(x)$ 與 $\psi(x)$ 爲單純的整數函數. 同時, 吾人並可假定

1. N. H. Abel, Sur une classe particulière d'équations resolubles algebriquement, Journ. f. Math. 4 (1829). Ostivalds Klass. Nr. 111.

h 爲正數,與 m 爲互質者. 今試證明,在此假定下,h 必等於 1. 設

$$
(3)\qquad \begin{aligned} \phi(x) &= b_0x^\mu + b_1x^{\mu-1} + \cdots + b_{\mu-1}x + b_\mu \\ \psi(x) &= c_0x^\nu + c_1x^{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-1}x + c_\nu, \end{aligned}
$$

於此,$\mu+\nu=n$,則由 (2),將乘法實施後,有

$$
(4)\qquad \begin{aligned} ha_0 &= mb_0c_0, \\ ha_1 &= m(b_0c_1+b_1c_0), \\ ha_2 &= m(b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0), \\ ha_3 &= m(b_0c_3+b_1c_2+b_2c_1+b_3c_0), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}
$$

此項方程之構造殊簡,蓋右端每項內 b, c 之標數之和,等於 a 之標數也. 故右端之任何項,b 之標數不能大於 μ. c 之標數不能大於 ν.

今設 p 爲 h 之任何一質因子,則按所設,ϕ 與 ψ 爲單純者,故此因子不能將一切 b 或一切 c 除盡. 試設 b_r 爲 b 中第一個,c_s 爲 c 中第一個不能爲 p 所除者,則

(5)
$b_0, b_1, \cdots, b_{r-1}$ 可爲 p 所除,
b_r 不能爲 p 所除,
$c_0, c_1, \cdots, c_{s-1}$ 可爲 p 除,
c_s 不能爲 p 所除.

事實上,或者 b_0 或 c_0 已可不能爲 p 所除,如是則 r 或 s 爲 0.

令由方程(4)中取其第$r+s+1$個,將其寫之如下:

$$(6)\qquad ha_{r+s}=m(b_rc_s+b_{r-1}c_{s+1}+\cdots+b_{r+1}c_{s-1}+b_{r+2}c_{s-2}+\cdots)$$

按之(5),b_rc_s不能爲p所除者,其他的項$b_{r-1}c_{s+1},\cdots,b_{r-1}c_{s-1},\cdots$,則可爲$p$所除,故括弧內之式不能爲$p$所除.但(6)之右端可爲$p$所除,故$m$必可爲$p$所除,此卽與所設$h$與$m$之互質相違.因而$h$不能爲$p$所除,故必$h=1$,而由(2),可知

$$(7)\qquad f(x)=m\phi(x)\psi(x).$$

5. 因之,如設$h=1$,則由(4),可知m能除一切a,故亦可除$f(x)$之除式.今如mk爲$f(x)$之除數,則可如前,由(6)推知$k=1$,故m爲$f(x)$之除數.若$f(x)$爲單純的,則$m=1$,而得定理如下:

單純可分解的整數函數,可分解成爲單純的整數因式.

6. 倘$\phi(x)$或$\psi(x)$本身仍爲可分解的,則按此定理,仍可將其分解,但因所得因式之次數繼續減低,故此項分解法有終止之時,而得定理如下:

單純可分解的整數函數,可分解成爲有限多不可分解的單純因式:

$$(8)\qquad f(x)=\phi_1(x)\phi_2(x)\cdots\phi_\nu(x)$$

$f(x)$之次數n,等於諸因式$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_\nu$之次數之和,故$\nu$決不能大於$n$,祇當各因式均爲一次時,乃能$\nu$等於$n$.

7　此項不可分解的因式,與整數方面之質數相似,故此處亦有一定理:

将單純的可分解的函數 $f(x)$ 作 (8) 之分解時,除因式 ϕ 之號而外,祇有一種可能的方式.

蓋由 **3.** 中所云者,可如數目方面(§ **18**, **1.**),推知二個(或多個)函數之積,祇當其中有一因式可爲不可分解的函數 ψ 所除,此積乃能爲 ψ 所除.故如 ψ 爲一不可分解的因式,能除盡乘積 (8),則必能除盡其中之一因式,例如 ϕ_1,故與 ϕ_1 相差者祇爲一常數.倘二函數均爲整數之單純的,則此常數必爲 ± 1.

8.　今設整數函數 $f(x)$ 內之係數 $a_0=1$,此函數可分解成爲二因式 ϕ_1, ψ_1,其係數爲有理的整數或分數,其最高係數亦爲 1,則可決定二正整數 h_1, h_2,使 $h_1\phi_1=\phi$, $h_2\psi_1=\psi$ 爲整數的並單純的.如是則 $h_1h_2f=\phi\psi$,而如 **4.**,可知 $h_1h_2=1$,因而 $h_1=h_2=\pm 1$.

於是得高斯之定理如下 (Disq., arithm. Art. 42):

設整數函數

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$$

可分解成爲二因式

$$\phi(x)=x^\mu+b_1x^{\mu-1}+\cdots+b_\mu$$

$$\psi(x)=x^\nu+c_1x^{\nu-1}+\cdots+c_\nu,$$

則 b_i, c_i 必爲整數.

9. 如有一已知的數字方程,則吾人可作有次序的證驗,以知其是否爲可分解者.關於此,Kronecker 曾有一法,後經 Runge 將其簡單化[1].但重要者爲 Schönemann 氏之定理[2],蓋由此可識別極多的方程之不可分解性也.此定理如下:

一函數 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 之整係數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,如均可爲一質數 p 所除,但 a_n 不能爲 p^2 所除(數目 0 視爲可爲任何質數所除),則 $f(x)$ 爲不可分解者.

欲證明此定理,可設

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

能分解成爲二函數:

$$\phi(x)=x^\mu+b_1x^{\mu-1}+\cdots+b_\mu,$$

$$\psi(x)=x^\nu+c_1x^{\nu-1}+\cdots+c_\nu.$$

如是則按 **8.**,如 $b_1, b_2, \cdots, b_\mu, c_1, c_2, \cdots, c_\nu$ 爲有理數,則亦爲整數,而將乘法實施時,可得如次之算式系統,吾人特將其次序倒之:

$$a_n=b_\mu c_\nu,$$

$$a_{n-1}=b_\mu c_{\nu-1}+b_{\mu-1}c_\nu,$$

---

1. Kronecker, Journ. f. Math. 94 (1883), Runge, ebenda 99 (1886).
2. Schönemann, Journ f. Math. 32, 100 (1846). 此定理亦曾爲 Eisenstein 所發見 (Journal f. Math. 39, 1850), 故亦稱爲 Eisenstein 之定理. 尚有其他的識別法, 見 Perron, Journ. f. Math. 132, 1907.

$$(9)\qquad a_{n-2}=b_\mu c_{\nu-2}+b_{\mu-1}c_{\nu-1}+b_{\mu-2}c_\nu,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_\nu=b_\mu c_{\nu-\mu}+b_{\mu-1}c_{\nu-\mu+1}+\cdots\cdots+b_1c_{\nu-1}+c_\nu$$

此項算式,自須假定$\nu>\mu$方可.如欲推至於$\nu\lesseqgtr\mu$,則須設$c_0=1$,而凡以負數爲標數之c,須設其爲0.

今如a_n可爲p所除,但不能爲p^2所除,則由$a_n=b_\mu c_\nu$,可知此二因子中,有一可爲p所除,例如b_μ,但其他c_ν則不能因$a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_\nu$均可爲$p$所除,故由(9),可知$b_{\mu-1}, b_{\mu-2}, \cdots, b_1$亦可爲$p$所除.然如是則由末後一方程,知$c_\nu$亦必可爲$p$所除,即有矛盾.因而吾人所假定$f(x)$之可分解,實爲不合而定理於以證明.

例如五次函數

$$f(x)=x^5-4x-2$$

之不可分解性,可由此知之.

10. 此定理之應用,於割圓方程方面最爲便利(§ **102**)

函數x^n-1有因子$x-1$,故爲可分解者.今將除法施行,則按§ **20** 之 **11**,有

$$X=\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1.$$

方程

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$$

名爲割圓方程,倘假此n爲一質數,則X函數爲不可分解

者.此重要的定理,最初爲高斯所證明,其後並經許多數學家以種種方法證明之[1],其中最簡單者厥爲Schönemann之證[2].蓋如設$x=z+1$,則按二項定理,有

$$\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{(z+1)^n-1}{z}$$

$$=z^{n-1}+\binom{n}{1}z^{n-2}\binom{n}{2}z^{n-3}+\cdots+\binom{n}{n-1}$$

按§**60**之**3**.,如n爲一質數,則二項係數$\binom{n}{1}$,$\binom{n}{2}$,$\cdots$,$\binom{n}{n-1}$均可爲n所除,且其末後者$\binom{n}{n-1}=n$不能爲n^2所除.故按Schönemann之定理:

X爲z之不可分解的函數,故亦爲x之不可分解的函數.

11. 可分解與不可分解之概念,尙可廣義的用之.

不可分解之函數,亦可分解成爲因子,其係數中除有理數而外,尙有無理數,如$\sqrt{-1}$或$\sqrt{2}$,或任何一其他的無理數.如是則函數在自然的有理性領域$\mathfrak{R}$內爲不可分解,而在添入此無理數後之新領域$\mathfrak{R}'$內則爲可分解者.其他的函數在此$\mathfrak{R}'$內亦不可分解,但添入其他的無理

1. 見 M. Ruthinger, Die Irreduzibilitätsbeweise der Kreisteilungsgleichung Diss. Strassburg 1907.

2. Schönemann, Journal für Mathematik 32,1846, §61. Eisenstein, Ebenda 39 (1850).

數後,亦即成爲可分解.因之,吾人云一函數不可分解時必須指出其有理性領域方可.

例如 x^2+1 在有理區域內爲不可分解者,但如將 $i=\sqrt{-1}$ 添入其中,則即可分解,蓋如是則吾人即可得

$$x^2+1=(x+i)(x-i)$$

又函數 x^4-8x^3-8x-8,於添入 $\sqrt{3}$ 後,亦成爲可分解者.即

$$x^4-8x^3-8x-8$$
$$=[x^2-4x-2+2\sqrt{3}(x+1)][x^2-4x-2-2\sqrt{3}(x+1)]$$

然如 x^4-2x^2+2 則雖添入 $\sqrt{2}$ 後,亦仍不可分解,必須再添入 $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$ 後方可分解:

$$x^4-2x^2+2$$
$$=(x^2-x\sqrt{2+2\sqrt{2}}+\sqrt{2})(x^2+x\sqrt{2+2\sqrt{2}}+\sqrt{2}).$$

在此推廣的不可分解之意義上,重要定理3.亦仍適用:

$F(x)$ 與 $f(x)$ 之係數如在推廣的有理性領域內,$f(x)$ 於此領域內不可分解,而如 $F(x)$ 與 $f(x)$ 有共同根,則 $F(x)$ 可爲 $f(x)$ 所除,$f(x)$ 之一切根同時亦即爲 $F(x)$ 之根.

§ 91. 拉格朗及牛頓之內插法.

1. n 次的函數 $y=\phi(x)$

(1) $$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n.$$

有 $n+1$ 個係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$. 此項係數可如是決定之,使函數於 x 之 $n+1$ 個已知值 $x_0, x_1, \cdots, x_n$, 取 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 爲值. 於是吾人云,吾人已將函數 $\phi(x)$ 由 $n+1$ 個已知的函數值內插之. 由 § **88** 之 **15.**, 知此項函數祇有一個.

爲決定 a_i 之用,吾人有 $n+1$ 個方程如下:

(2) $$\phi(x_0)=y_0,\ \phi(x_1)=y_1,\ \cdots,\ \phi(x_n)=y_n$$

此項方程就係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 而言,爲一次者,倘方程系統之行列式非爲 0, 則係數卽爲其完全決定. 吾人不難知,此行列式等於一切差數 x_i-x_k 之積 (參閱 § **76** 之 **9.**), 故非爲 0, 祇須 x_i 均不相等便可,此則無庸言者. 但吾人亦可不論此行列式,直接推得此函數 $\phi(x)$.

2. 今作一 $(n+1)$ 次的函數,以已知的 x 之值爲 0 點:

(3) $$f(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

並設

(4) $$\frac{f(x)}{x-x_0}=f_0(x),\quad \frac{f(x)}{x-x_1}=f_1(x),\ \cdots,\ \frac{f(x)}{x-x_n}=f_n(x),$$

則此項函數均爲 n 次者,而如 i 不等於 k, 則

$$f_i(x_k)=0.$$

按 § **88** 之 **6.** 及 **13.**:

(5) $$f_i(x_i)=f'(x_i)\neq 0,$$

故如設

(6) $$\frac{f_i(x)}{f'(x_i)}=g_i(x)\quad (i=0,1,2\cdots n)$$

則於 $i \neq k$ 時,

$$g_i(x_k)=0, \text{ 但 } g_i(x_i)=1,$$

故

$$y=y_0g_0(x)+y_1g_1(x)+\cdots+y_ng_n(x) \tag{7}$$

爲一函數,能充適條件(2)者.

用(3),(4),(5),(6)時,得

$$\begin{aligned} y=y_0&\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} \\ &+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} \\ &+\cdots+y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}. \end{aligned} \tag{8}$$

吾人不難見此式能解決此問題,即此爲一 n 次的函數,於 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 時以 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 爲值.

今於(7)內代入(4)與(6)中之值,則有

$$g_i(x)=\frac{f(x)}{f'(x_i)(x-x_i)},$$

並用 $\phi(x_i)$ 代 y_i, 即得

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\phi(x)}{f'(x_i)(x-x_i)}, \tag{9}$$

此式於任何一整函數 $\phi(x)$, 較之 $f(x)$ 次數爲低者,可適用.

(7),(8),(9)三式,在實質上意義相同,稱爲拉格朗之內插公式.[1] 用此式時,吾人對於某種函數,不知其實在的定

1. Lagrange, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berl. 1792/93 (Œuvres 5, 627); Leçons élémentaires 1795 (V. Leçon) (Œuvres 7, 285). 但以前 E. Waring 亦曾得之;見 Philos. Trans. 69 (1779).

律,僅知其若干個別之値者,可近似的用一整函數以表之.

3. (9) 之左端爲二整函數之商,吾人稱之爲一有理函數. 右端者爲極簡單的分數之和,其中每一分數之分子爲常數,分母爲 $f(x)$ 之根因子. 此項分數名爲部分分數,故拉氏之式能使吾人將有理函數分解成爲部分分數,其中分子之函數,次數較分母者爲低,且後者僅爲根因子.

吾人如設 $\phi(x)=1$ 以及 $\phi(x)=f'(x)$, 則得

$$(10)\qquad \frac{1}{f(x)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(x-x_i)f'(x_i)};\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{x-x_i}.$$

今試舉一例:

$$\phi(x)=x^2-3x+4$$

$$f(x)=x^3+x^2-57x+135=(x-3)(x-5)(x+9),$$

則

$$f'(x)=3x^2+2x-57,$$

$$x_0=3,\quad x_1=5,\quad x_2=-9,$$

$$f'(x_0)=-24,\quad \phi(x_0)=4,$$

$$f'(x_1)=28,\quad \phi(x_1)=14,$$

$$f'(x_2)=168,\quad \phi(x_2)=112,$$

故

$$\frac{x^2-3x+4}{x^3+x^2-57x+135}=-\frac{1}{6(x-3)}+\frac{1}{2(x-5)}+\frac{2}{3(x+9)}.$$

倘 $\phi(x)$ 之次數與 $f(x)$ 相等或較高,則可先用 $f(x)$ 除 $\phi(x)$, 以得商式 $Q(x)$ 及餘式 $\phi_1(x)$:

$$\phi(x)=Q(x)f(x)+\phi_1(x).$$

如是則 $\phi_1(x)$ 之次數卽較 $f(x)$ 者爲低，而

$$\frac{\phi(x)}{f(x)}=Q(x)+\frac{Q_1(x)}{f(x)},$$

乃可將 $\dfrac{\phi_1(x)}{f(x)}$ 分解成爲部分分數.

4. 若自變數之値，其距離相等，則牛頓已曾有一內插公式發見. 此種事項於實際的計算上尤爲重要，應用數學表時最爲有用. 求牛頓之公式時，最好由第 k 次的算術級數之普通項（§ **57** 之 **2.**）出發.

今用 Δx 以表 x 間之常數差：

$$x_1-x_0=x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=\Delta x,$$

則

$$(11)\qquad x_1=x_0+\Delta x,\quad x_2=x_0+2\Delta x,\quad \cdots,\quad x_n=x_0+n\Delta x.$$

按 § **57** 中之法，吾人用函數値 $y_0, y_1, y_2, \cdots$ 作其相繼的差數列，並用如次之記法：[1]

$$y_{i+1}-y_i=\Delta y_i,\quad \Delta y_{i+1}-\Delta y_i=\Delta^2 y_i,\quad \Delta^2 y_{i+1}-\Delta^2 y_i=\Delta^3 y_i,\ \cdots.$$

於是得一表如下：

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & . & . & . & & x_n \\
\hline
y_0 & & y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_4 & & . & . & . & & y_n \\
 & \Delta y_0 & & \Delta y_1 & & \Delta y_2 & & \Delta y_3 & & . & . & . & & & \\
 & & \Delta^2 y_0 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^2 y_2 & & . & . & . & & & & \\
 & & & \Delta^3 y_0 & & \Delta^3 y_1 & & . & . & . & & & & & \\
 & & & . & . & . & . & . & . & . & & & & &
\end{array}$$

1. $\Delta^2 y$ 之記法，其意義爲 $\Delta(\Delta y)$，卽差數之差數. 仿此，$\Delta^3 y$ 爲 $\Delta(\Delta^2 y)$，等等. 吾人不可將 $\Delta^2 y$ 與 Δy^2 相混，蓋後者爲 Δy 之平方，卽 $(\Delta y)^2$ 也.

任何一函數值 y_m, 決定於 y_0 及各差數列之首項,而按[1] §57之2., 於 $m=0, 1, 2, \cdots, n$, 有

$$y_m = y_0 + \frac{m}{1}\Delta y_0 + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \cdots$$
$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\Delta^n y_0.$$

按(11), 可設 $m=\frac{x_m-x_0}{\Delta x}$. 今用 x, y 代 x_m, y_m, 則

$$m=\frac{x-x_0}{\Delta x},\quad m-1=\frac{x-x_1}{\Delta x},\quad m-2=\frac{x-x_2}{\Delta x}, \cdots$$

而有

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1}\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \cdots \tag{12}$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{1\cdot 2\cdots n}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n}.$$

今視 x 爲變數,則得 n 次的整函數,於 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 時取 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 爲值. 公式(12)能解決此問題,稱爲牛頓之內插公式.[2]

5. 若 $n=1$, 則 y 爲一次函數,爲二函數值所決定,卽 y_0 與 y_1, 故有(吾人爲簡單計,以 Δy 代 Δy_0):

$$y = y_0 + (x-x_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{13a}$$

或

---

1. 設 $m<n$, 則至 $\Delta^m y_0$ 爲止,其下之項均成爲 0.
2. Newton, Philos. nat. principia math. (1687), 第三卷, 補題五.

$$(13b)\qquad y=y_0+(x-x_0)\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}.$$

按解析幾何學,可知此為經過二已知點的直線之方程,不難由所附之圖以知之.應用數學表時(對數表,三角函數表,等等),此為內插之基本公式.此項表內含有函數之值,至若干小數位為止,其自變數之值等距的如是相隔,使函數值在較長的段上,其差為常數.吾人可云:在充分小之區域內(其大小與小數位之多寡有關),函數之狀況與一次函數同[1](參觀§**103**之**2**.).

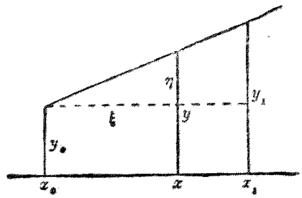

圖　17

在幾何上言之,即用以表出函數之曲線,在充分接近的二點之間,可用其弦以代之.

倘自變數由x_0出發,變動ξ,則按(13a)或按所附之圖,函數之變動為

$$(14)\qquad \eta=\xi\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

尋常吾人用Δx之十分之一以量ξ,故可作$\xi\frac{\Delta x}{10}$,而有

$$(15)\qquad \eta=\xi\frac{\Delta y}{10}.$$

此處之Δy與η可用表上數值之末位之單位以表之.

祇須$0\leqq\xi\leqq\Delta x$,所得者為眞正之內插.倘使ξ取負值或大於Δx之值,即超出(x_0, x_1)之間段以外,則即為外插矣.吾

1. 此處必要的假定,為函數在區域內之連續性(參觀§**92**).

人必須確知代表函數之曲線在此間段以外,亦可充分近似的用直線以代之,乃可作此外插.

6. 在若干多位小數之表方面(例如10位及多位的對數表),吾人恆可將自變數如是的取其距離,使函數值之第一次差數雖非爲常數,而第二次的差數則如是;否則表之篇幅將太大矣.按(12),此項事例之內插公式爲

$$(16)\qquad y=y_0+(x-x_0)\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2}\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}.$$

用此公式時,函數於某一區域內之第二次差如爲常,則可用一二次函數以代之.在幾何上言之,亦即代表函數之曲線,在此區域內可用拋物線以代之.

在實用上,吾人於(16)內仍設 $x-x_0=\xi\frac{\Delta x}{10}$, $y-y_0=\eta$; 如是則 $x-x_1=x-x_0-\Delta x=-\frac{(10-\xi)\Delta x}{10}$, 而得

$$(17)\qquad \eta=\xi\frac{\Delta y}{10}-\frac{\xi(10-\xi)}{2}\frac{\Delta^2 y}{100}.$$

7. 今試將此用於一實例:

試由 Vega 之十位的 Thesaurus Logarithmorum 用內插法以求

$$e=2,71828182846$$

之對數.吾人先由其中檢取五個數目之對數:

$$
\begin{array}{r|rrr}
27\,182 & 43428\ 14081 & & \\
 & & 159\,770 & \\
3 & 29\ 73851 & & 6 \\
 & & 764 & \\
4 & 31\ 33615 & & 6 \\
 & & 758 & \\
5 & 32\ 93373 & & 5 \\
 & & 753 & \\
6 & 34\ 53126 & &
\end{array}
$$

故
$$\Delta y=159770, \qquad \Delta^2 y=-6$$
$$\xi=8{,}182846, \quad 10-\xi=1{,}817154.$$

用簡縮的乘法時,得

$$
\begin{aligned}
\xi\frac{\Delta y}{10}&=130737.32\\
-\frac{\xi(10-\xi)}{2}\frac{\Delta^2 y}{100}&=\qquad 0.45\\
&\overline{\ 130737.8\ }\\
&\ \ 0.4342814081\\
\log e&=\overline{0.4342944819},
\end{aligned}
$$

可知其在十位小數內爲正確者.[1] 從可知第二次差數之影響,祇及於第十位小數之半個單位.

§ 92. 連續性

1. 今設 $f(x)$ 爲一函數,適用於某一間段 (ab) 內 x 之一切實値,x 則經過一收斂的數列 $x_1, x_2, \cdots$, 其極限値爲 $\lim x_n=\xi$.

倘每次其所屬的函數値之數列 $f(x_1), f(x_2), \cdots$ 亦爲收斂者,而

1. 在或種狀況下,末後之小數位可差一單位. 參觀 § 131 之 6.

$$\lim f(x_n)=f(\lim x_n)=f(\xi),$$

則此函數於 $x=\xi$ 爲連續者.

按 § **29** 之 **6**., 此種屬性爲整函數所具備,故有定理如下:

任何一整函數,於自變數之一切有限值爲連續者.

2. 每一實數 ξ 可視爲一列有理數 $\{x_n\}$ 之極限值, 故可知

吾人倘知一連續函數於某一間段内 x 之有理值之值則於此間段内 x 之一切實値,此函數亦已確定.

此定理尋常恆以如次之方式應用之:[1]

倘於某一間段内 x 之一切有理値,知一式 $f(x)$ 爲一連續函數,則此式於該間段内 x 之一切無理値亦仍適用.

3. 以下之定理,適用於任何一連續函數:

設 a, b 爲自變數之二值, $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$, 則當 x 由 a 至 b 時,函數取 α 與 β 間之每一值.

今如 $\alpha<\beta$, η 爲 α 與 β 間之任何一值:

$$\alpha<\eta<\beta,$$

則所欲證明者,爲 a 與 b 間有一數 ξ, 使

$$f(\xi)=\eta.$$

1. 參觀 § 26 之 8., 其中將此定理用於多變數之有理函數.

試取(ab)之中間數$\frac{a+b}{2}$,作其函數值,如[1]

1.　$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\eta$,　則設$\frac{a+b}{2}=a_1$,　$b=b_1$

2.　$f\left(\frac{a+b}{2}\right)>\eta$　則設　$a=a_1$, $\frac{a+b}{2}=b_1$,

以及　$f(a_1)=\alpha_1$,　$f(b_1)=\beta_1$.

於是無論如何有

$$\alpha_1<\eta<\beta_1$$

吾人可仿此繼續爲之,則得a_2, b_2; a_3, b_3; $\cdots$以及其所屬的函數值α_2, β_2; α_3, β_3; $\cdots$,而η恆在其中間:

$$\alpha_2<\eta<\beta_2,$$

(1)
$$\alpha_3<\eta<\beta_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此項間段$(a\ b)$, $(a_1\ b_1)$, $(a_2\ b_2)\cdots$構成一間段之相嵌,確定一數目ξ,而有

$$\lim a_n=\lim b_n=\xi.$$

因函數之連續性,故$\{\alpha_n\}$與$\{\beta_n\}$亦爲收歛者,其極限值爲

$$\lim \alpha_n=\lim \beta_n=f(\xi),$$

而因(1)中之不等式,此極限值必等於η.

4.　以下之定理,可作爲一特例含於以上之定理內:

1.　若$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\eta$,則此定理已經證明.

倘連續數於自變數之二值,其號不同,則此二值之間至少有一值,於此,函數成爲0.

試將函數幾何的表之,則得一曲線,故此定理之意義,亦即謂曲線上如有二點在x軸之兩旁,則此曲線至少有一次與x軸相遇.往昔每將此定理視爲可以自明者.首先求證此定理者,爲Bolzano氏[1],但未成功,因彼時連續函數之概念,尙未臻於明晰也.

5. 倘$f(x)$於x之二值,其號不同,而其間$f(x)$之0點爲數不止一個,則其多必爲奇數,蓋因經過二0點後,$f(x)$之號又相同也.於此,凡不改變$f(x)$之號之0點,必須以偶次數記之;簡單的0點,亦以偶數之多併合於此.

仿此,可知$f(x)$於x之二值,其號相同,則其間或則無有0點,或則所有0點之多爲偶數.

6. 在§29之定理6.內,連續性之概念亦已用及.吾人所欲云者如下:

設$F(x, y)$爲二變數之函數,$x=\xi$, $y=\eta$爲一對確定的值.倘變數之任何收歛數列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$以$\lim x_n=\xi$, $\lim y_n=\eta$爲極限值時,恆有函數值$F(x_n, y_n)$之收歛數列與之相屬,且

1. Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liegt. Prag 1817 (Ostwalds Klassiker Nr. 153).

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n) = F(\xi, \eta),$$

則此函數於$x=\xi, y=\eta$爲連續者.

由變數之一對值(x_1, y_1),至其他一對值(x_2, y_2)時,其方式可無限多.今如將變數(x, y)視爲直角坐標,則由一對值至其他一對值之連續的過渡,其意義亦即爲連結二點$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$之曲線.於此,有一定理如下:

設(a, b)與(a', b')爲x, y之二對值,$F(a, b)=\gamma$, $F(a', b')=\gamma'$,則函數於每一條連結(a, b)與(a', b')之曲線上,取γ與γ'間之每一值.

連結二點之任何一曲線,可用二連續函數表之,此二函數之變數爲t(例如吾人可視之爲時間):

$$x=\phi(t), \quad y=\psi(t),$$

於此,t遍取τ至τ'的間段內之一切值,

$$\phi(\tau)=a, \qquad \psi(\tau)=b,$$

$$\phi(\tau')=a', \qquad \psi(\tau')=b'.$$

對於t之每一值,有曲線上之一點(x, y)與之相當,因而亦有一確定的函數值.因之,函數可視爲t之連續函數,於$t=\tau$時,取γ爲值,於$t=\tau'$時則以γ'爲值.如是,吾人之定理即歸結之於定理3.,而當t由τ至τ'時,即(x, y)於曲線上移動時,函數取γ與γ'間之每一值.

7. 以下之定理,可作爲一特例含於此定理內:

倘連續函數 $F(x, y)$ 之號於二點不同，則每一條連結此二點的曲線上，至少有一點，於此，函數成爲0.

§93. 羅氏定理.

1. 按§88之7.，一整函數之引伸函數 $f'(x)$，等於

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

計算出後 $h=0$ 時之值.此商式爲 h 之整函數，因而亦爲其連續函數，故於充分小之 h，其號與 $f'(x)$ 同，因而可知：

若 $f'(x)$ 爲正，則於正的充分小的 h，恆有

$$f(x-h)<f(x)<f(x+h),$$

若 $f'(x)$ 爲負，則

$$f(x-h)>f(x)>f(x+h).$$

倘爲第一事例，則可云函數於 x 處爲增加者；如爲第二事例，則爲減小者.故可知：

$f'(x)$ 爲正時，$f(x)$ 爲增加者，$f'(x)$ 爲負時，$f(x)$ 爲減小者.

2. 今設 α, β 爲 $f(x)$ 之二相繼的實0點，$\alpha<\beta$.如是則在 α 與 β 之間，函數或則僅爲正，或僅爲負.倘爲第一事例，而 δ 爲一充分小的正數，則函數於 $\alpha+\delta$ 爲增加者，於 $\beta-\delta$ 爲減小者.如爲第二事例，則其狀況適相反.無論如何，可知引伸函數在 (α, β) 間段之開始與在其末後時之號不同.

今按 Kronecker 之法，用 $\mathrm{sg}\,a$ 表 a 之號，則可將此述之如下：

設δ爲充分小的正數,則

$$\operatorname{sg} f'(\alpha+\delta)=-\operatorname{sg} f'(\beta-\delta). \tag{1}$$

按§**92**之**3.**,因$f'(x)$亦爲一連續函數,故可得羅氏之重要定理(Rolles Satz)如下[1]:

函數之二個相繼的實0點之間,至少有其引伸函數之一0點.

試將函數$y=f(x)$幾何的表之,則得一曲線,故羅氏之定理,在圖形上係極明白者,蓋曲線與x軸之二交點之間,必有點存在,於此,曲線之切線,與x軸相平行.

由羅氏定理,可得一直接的結果如下:

$f'(z)$之二個相繼的實0點之間,至多有$f(z)$之一0點.

3. 今設$f(x)=0$僅有實根.試將此項實根按其大小次序列出之,如$x_1, x_2, \cdots, x_\rho$,且假定x_1爲ν_1重者,x_2爲ν_2重者,等等.如是則$f'(x)=0$有(ν_1-1)重的根x_1,(ν_2-1)重的根x_2,(ν_3-1)重的根x_3,等等(見§**88**之**13.**),且x_1與x_2之間,x_2與x_3之間,等等,至少有一實根.因之,其數爲

$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\rho-\rho+(\rho-1)=n-1,$$

而因$f'(x)$之次數爲$(n-1)$,故$f'(x)=0$之根已盡於是.因而有定理如下:

---

1. Rolle, Traité d'algbère 1690. 此定理僅假定$f(x)$與$f'(x)$在(a, b)間段內之連續性,故函數不必爲整者.事實上,吾人祇須假定$f(x)$之連續性以及$f'(x)$之存在便可(參閱 B. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 2. Aufl., Leipzig 1919).

若 $f(x)=0$ 僅有實根.則 $f'(x)=0$ 亦僅有實根,其中不與 $f(x)$ 之重根相同之根,爲單純根,被 $f(x)$ 之根所隔開.

今作 $f(x)$ 之高次引伸 $f''(x)$, $f'''(x)$, $\cdots$, 將以上之定理用於 $f'(x)$, $f''(x)$, 再用於 $f''(x)$, $f'''(x)$, 等等, 則得:

倘 $f(x)$ 僅有實根,則 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ 等等亦僅有實根.且每次引伸之根,凡不與 $f(x)$ 之重根相同者,均爲單純根,被在其前的引伸之根所隔開.

4. 今試將此定理,用於一類極重要的函數. $2n$ 次的函數

$$f(x)=(x^2-1)^n, \tag{2}$$

僅有二實0點 $+1$ 與 -1, 二者均爲 n 重的0點.因之,此二者於第一次引伸爲 $(n-1)$ 重的0點,於第二次引伸爲 $(n-2)$ 重的,等等,於第 $(n-1)$ 次引伸爲單純的零點.此外, $f'(x)$ 於 -1 與 $+1$ 之間有一單純的0點, $f''(x)$ 有二單純的0點, $f'''(x)$ 有三單純的0點.等等,均在於其前的函數之0點之間.第 n 次的引伸 $f^{(n)}(x)$ 爲 x 之 n 次的整函數,不再以 -1 與 $+1$ 爲0點.此函數僅有實的單純根,均在 -1 與 $+1$ 之間.

今將整函數

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}f^{(n)}(x)$$

用入,並按§68之11.,計及 $f(x)$ 之意義,寫之作

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}D_n[(x^2-1)^n] \qquad (n=1,2,3\cdots) \tag{3}$$

此項函數於數學之許多部分中,以及數理物理學上極關重要,名爲球形函數.故可得一定理如下:

球形函數僅有實的單純0點,均在-1與$+1$之間.

5. 如欲將$P_n(x)$以整函數之形式表出,則可將$f(x)=(x^2-1)^n$按二項式定理展開之:

$$f(x)=(x^2-1)^n=x^{2n}-\binom{n}{1}x^{2n-2}+\binom{n}{2}x^{2n-4}-\cdots$$

此函數之引伸爲

$$f'(x)=2nx^{2n-1}-\binom{n}{1}(2n-2)x^{2n-3}+\binom{n}{2}(2n-4)x^{2n-5}-\cdots$$

$$f''(x)=2n(2n-1)x^{2n-2}-\binom{n}{1}(2n-2)(2n-3)x^{2n-4}$$
$$+\binom{n}{2}(2n-4)(2n-5)x^{2n-6}-\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故可知$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)$或

$$2^nP_n(x)=\binom{2n}{n}x^n-\binom{n}{1}\binom{2n-2}{n}x^{n-2}+\binom{n}{2}\binom{2n-4}{n}x^{n-4}-\cdots \tag{4}$$

於n之開首的幾個值,有

$$P_1(x)=x,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

§ 94. 代數上之根本定理

1. 自一次至四次之方程，吾人已知其恆有解可求，且其解之多，與方程之次數同．任何一次的純方程，亦係如此，此亦爲吾人所已知者，蓋 $x^n=A$ 之解，爲 $\sqrt[n]{A}$ 之 n 個不同的值也．今試證明此定理適用於每一代數方程，即

每一 n 次的方程有 n 個根．

於此，每個根 α，須視根因子 $x-\alpha$ 在 $f(x)$ 之分解中發現幾次，作爲幾次用之．

此定理至爲重要，故被稱爲代數上之根本定理．

欲證明此定理，吾人祇須指出，每個 n 次的方程 $f(x)=0$，於任何 n，至少有一根便可．蓋如 α 爲如是之根，則 $(n-1)$ 次的函數 $\dfrac{f(x)}{x-\alpha}$ 亦必有一根，等等，故可知 $f(x)$ 可分解成爲 n 個根因子．

對於 $f(x)$，吾人不必限定其係數爲實數．然如能證明實係數的函數必有一根，則複係數的函數亦必如此．蓋如 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 爲二函數，其係數爲共軛複數，則 $f(x)=f_1(x)\,f_2(x)$ 之係數爲實數．如 $f(x)$ 有一根 α，則必 $f_1(\alpha)=0$ 或 $f_2(\alpha)=0$．今設 $f_1(\alpha)=0$，則 $f_2(\bar{\alpha})=0$，於此，$\bar{\alpha}$ 爲與 α 共軛之數．因之，$f_1(x)$ 與 $f_2(x)$ 均有一根．故吾人祇須將根本定理如是證明之便可：

每個實係數的整函數$f(x)$，祇少有一實或複的根.

吾人不妨假定x^n之係數爲1，此於問題之普遍性並無關係，故$f(x)$之形式如下:

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n.$$

若$a_n=0$，則方程有一根爲0，故亦可假定$a_n\neq0$.

2. 於若干類之方程，根之存在極易證明.吾人先有一定理如下:

凡次數爲奇之方程，至少有一實根，其號與常數項a_n之號不同.

蓋如n爲奇，則有一正數X，於$x<-X$時，$f(x)$爲負，於$x>X$時，$f(x)$爲正.故按§**92**之**4**.，至少有一值在$-X$與$+X$之間，於此，$f(x)$成爲0.於$x=0$時，$f(x)=a_n$，故如a_n爲正，則0與$-X$之間必有一根；若a_n爲負，則0與$+X$之間必有一根.

同時，又可知:

凡次數爲偶數而常數項爲負之方程，至少有一正的及負的實根.

蓋如n爲偶，則可有一正數X，於$x<-X$及$x>X$時，$f(x)$爲正.於$x=0$時，$f(x)=a_n$爲負，故0與$-X$之間，以及0與$+X$之間至少有一實根.

如是，吾人欲證明根本定理時，尚須證明偶次常數項爲正之方程亦必有根便可.但此事較之前二者困難萬

倍[1].最初普遍的證明此根本定理者,爲高斯氏,且有三證,其依據之基礎各不相同[2].此三證中之第一證,爲高氏二十歲時所成.後二年,曾作博士論文提出,其後復加以簡單化,故殊爲簡單明瞭,不須有高深之智識亦易了解之.今將其簡易化者試爲述之如下.[3]

3. 今用z表n次的整函數中之變數,即

(1) $$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n,$$

其中之係數$a_1, a_2, \cdots, a_n$爲已知的實數.今所欲證明者,即必有一實數或複數,代入此中之z處時,$f(z)$即成爲0.試設$z=x+iy$,並按§ **45**,將z作爲平面内之點表之.如是則於此平面内之任何一點,$f(z)$有一確定的值,故所欲證明者,即至少有一點存在,於此,$f(z)$之值爲0.如是之點,名爲$f(z)$之根點.今將$f(z)$中之實部分與虛部分分開,則有

(2) $$f(z)=X+iY.$$

此中之X與Y爲x與y之連續函數,吾人祇須將二項式定理應用於$x+iy$之方數,即不難得之.但如用極坐標,則

---

1. 參觀高斯之第二證(1816) § 20 以及 Gordan 之證, Math. Ann. 10 (1876).

2. Gauss, Werke Bd. 3. Ostwalds Klassiker Nr. 14.

3. 最初提出此根本定理者爲 Albert Girard (Invention nouvelle en l'algèbre 1629, 重版於 Leiden 1884). 十八世紀時之著名數學家,如 d'Alembert (1746), Euler (1749), Lagrange (1772) 等,均曾欲證明之,此項證法,高斯於其論文中評述之殊詳.參觀 G. Loria, Il teorema fondamentale, Rivista di mat. 1891; Bibl. math. 1891.

可由Moivre定理以得較簡單之式,今設

$$z=r(\cos\phi+i\sin\phi),$$

則
$$z^k=r^k(\cos k\phi+i\sin k\phi)$$

而有
$$X=r^n\cos n\phi+a_1r^{n-1}\cos(n-1)\phi$$
$$+a_2r^{n-2}\cos(n-2)\phi+\cdots+a_n,$$
$$Y=r^n\sin n\phi+a_1r^{n-1}\sin(n-1)\phi$$
$$+a_2r^{n-2}\sin(n-2)\phi+\cdots+a_{n-1}r\sin\phi.$$

4. 試再作X與Y之其他一式,由此吾人即可作一結論,極關重要者.

令設$\operatorname{tg}\dfrac{\phi}{2}=t$,則$\cos\phi$與$\sin\phi$即可有理的用$t$表之:

$$\cos\phi=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin\phi=\frac{2t}{1+t^2},$$

而
$$z=r\frac{(1+it)^2}{1+t^2}.$$

今將此代入(1),並用$(1+t^2)^n$乘之,則有

$$(1+t^2)^n(X+iY)=r^n(1+it)^{2n}+a_1r^{n-1}(1+it)^{2n-2}(1+t^2)$$
$$+\cdots+a_n(1+t^2)^n.$$

倘將二項定理應用於各項,並按t整列之,則X與Y成爲下式:

$$\mathrm{X}=\frac{F(t)}{(1+t^2)^n},\quad Y=\frac{\Phi(t)}{(1+t^2)^n},\tag{4}$$

此中之$F(t)$與$\Phi(t)$爲$2n$及$2n-1$次的t之整函數.同時,$F(t)$與$\Phi(t)$亦爲r之整函數,其次數爲n,至多祇能於有限多的值r對於t而言,全等的爲0.

5. xy 平面內之點,其 r 爲相同者,在一圓上,其半徑爲 r,圓心爲起點.吾人用 (r) 以表此圓.如欲確定該項點,能使 X 或 Y 於如是之圓上成爲 0 者,則須將方程 $F(t)=0$, $\Phi(t)=0$ 於已知之 r 解之,同時須注及,對於 t 之每一值, $\cos\phi$ 與 $\sin\phi$ 有一值與之相屬,亦即圓上有一點與之相屬.

函數 Y 於 $t=\infty$ 時,卽 $\phi=\pi$ 時,可成爲 0,而如 $F(t)$ 之次數小於 $2n$.則 X 亦然.故由 $F(t)$ 與 $\Phi(t)$ 之次數,可得定理如下:

X, Y 二函數中之任何其一,倘於圓 (r) 上非全等的爲 0,則於此圓上至多在 $2n$ 個點能成爲 0.

由此可知 X, Y 二函數均不能於一部分面上恆成爲 0, $f(z)$ 之根點,卽能使 X 與 Y 同時爲 0 之點.

6. 其餘的研究,可先自 Y 入手,提出以下之定理:

吾人可選擇 r 如是大,使 Y 在圓 (r) 上其號與 $\sin n\phi$ 同,至少於 $\sin n\phi$ 之絕對值超過一已知的任意小之數 δ 時爲然.

試使 Y 成爲下式:

$$Y=r^n\left[\sin n\phi+\frac{a_1}{r}\sin(n-1)\phi+\frac{a_2}{r_2}\sin(n-2)\phi+\cdots\right]$$

則卽不難見此,吾人於是可使 r 如是大,俾第二項以下諸項之和,其絕對值小於任何小之數,因而亦可小於 δ,於是其第一項卽可決定符號.

由此,即可得以下之方法:

於圓周(r)上作諸點,於此,

$$\phi=0,\quad \frac{\pi}{n},\quad \frac{2\pi}{n},\quad \frac{3\pi}{n},\quad \cdots,\quad \frac{(2n-1)\pi}{n},$$

並用　$0, 1, 2, \cdots, 2n-1$

表之.

如是,吾人於圓周上得$2n$個間段

$(0,1), (1,2), \cdots, (2n-1,0)$,

於此,$\sin n\phi$交替的爲正爲負(圖中以$n=5$爲例).

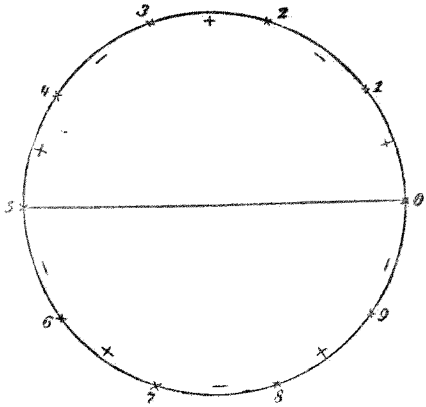

圖　18.

今將分點之鄰近的部分除外,並使r充分大,則在此項間段內Y亦交替的爲正爲負.[1]

由此可知(§ **92**, **7**.) Y於$2n$個分點之鄰近,必經過0,而按**5**.,亦可知除此而外,圓上別無他點能使Y爲0者.

於充分大之r, X之號亦爲第一項$r^n\cos n\phi$所決定,故並可知X於偶的分點$0, 2, 4, \cdots, 2n-2$之鄰近以及此項點

1. 此處所謂分點之鄰近,即(r)上之段,於此,

$$\frac{k\pi}{n}-\frac{\eta}{n}<\phi<\frac{k\pi}{n}+\frac{\eta}{n}$$

者,此中之η則決定於$\delta=\sin\eta$以及$0<\eta<\frac{\pi}{2}$.

之本身，爲正者，於奇的分點 $1,3,5,\cdots,2n-1$ 則爲負.

7. 前於 **5.** 中已知 Y 不能於一部分面積內恆成爲0. 因之，平面被分成爲區域，Y 於其中爲正及爲負，此項區域之界線，即爲 Y 成爲0之處.

由 (r) 上之一個間段 $(2h, 2h+1)$，Y 於其中爲正者，伸出一塊面積，Y 於其中亦仍爲正. 此塊先在 (r) 之外，與圓心相距愈遠，則愈與自 $\phi=2h\pi/n$ 至 $\phi=(2h+1)\pi/n$ 之扇形相近. 但此塊面積，Y 於其中爲正者，亦必繼續伸入圓之內部. 在圓內之部分，吾人以 H 表之. 於此，有若干形式可區分，其祇在個別點相接觸之面積部分，則視爲不相關連者:

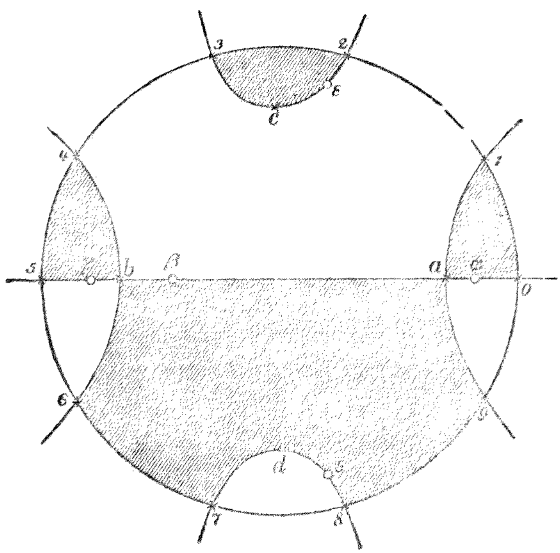

圖　19.

H 可終止於圓內,故除 $(2h, 2h+1)$ 而外,無有其他圓周上之部分爲界,H 亦可伸至於其他間段 $(2k, 2k+1)$,或亦可分爲若干部分,其每部分終止於一間段 $(2l, 2l+1)$.[1]

圖 19 中之面積 $(0, 1, a)$ 或 $(2, 3, c)$ 卽爲上所云的第一事例. 其 $(8, 9, a, b, 6, 7)$ 卽爲第二事例. 至於分成爲若干部分之事例,則此圖中未及之.

同時,吾人亦可設想到此項事例,卽在某一 H 之內部,有一部分面積,其狀況恰如一島,Y 於其中復爲負. 此種事例,實不能有,但卽使有之,亦不致影響及吾人之推論也.

8. 吾人今設想,巡歷此項面積 H 之邊界,其路向則如是選擇之,使 H 之內部恆在左方. 如是則圓之每一間段,爲其邊界者(Y 於其中爲正),亦將如是被巡歷過,卽圓之內部亦在左方,故順序上係由偶的分點向其後之奇的分點進行. 因之,繞 H 之道路,於奇的分點離開圓周,復於偶的分點遇之.

今設 S 爲此道路之一段,由 $2h+1$ 點經過內部至 $2k$ 點,則沿 S 段恆有 $Y=0$. 但在 $2h+1$ 點,X 爲負,於 $2k$ 則爲正,故 X 於 S 上至少在一點爲 0,而此點則卽爲根點,於是其存在已經證明.

1. 關於此項曲線在圓內之行程,A. Ostrowski 曾以算術方法完備而謹嚴的敘述之,見 Gött. Nachr. 1920, Beiheft.

爲易於明瞭計,可參閱圖 19, 此圖約略的與

$$f(z)=z^5-4z-2$$

相當. 此方程有三實根 α, β, γ, 以及二共軛複根 ε 與 $\overline{\varepsilon}$. $(1, a, 0)$ 道路上,有根點 α, $(9, a, b, 6)$ 上有 β, $(5, b, 4)$ 上有 γ, 而 ε 與 $\overline{\varepsilon}$ 則在 $(3, c, 2)$ 與 $(7, d, 8)$ 上.

第十五章
對稱函數 錯列類之不變式

§95. 對稱函數

1. 今設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲任意的不定數,則可用之以作一 n 次的函數,其根卽爲此項數:

(1) $$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

今將此式乘出,並按 x 之方數整列之.則有

(2) $$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n,$$

此中 $-a_1$ 爲 x_i 之和, a_2 爲每二個 x_i 之積之和, $-a_3$ 爲每三個之積之和,等等, $\pm a_n$ 爲一切 x_i 之積.今仿 §55, **1**. 內之法.寫之作

(3) $$\begin{aligned} -a_1&=S(x_1)\\ a_2&=S(x_1x_2)\\ -a_3&=S(x_1x_2x_3)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \pm a_n&=x_1x_2\cdots x_n \end{aligned}$$

從可知 $f(x)$ 之係數,可用其根有理的並整的表出之.[1]

---

1. 最初發見方程之係數與其根間之關係者,爲 Vieta 氏,見其所著 De aequationum recognitione et emendatione, 1591 (出版於 1615 年).

(3)之右端之和數,倘將 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 任意錯列之,不受影響,吾人稱之爲對稱的基本函數

2. 今推廣之作一定義如下:

n 個數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之函數 $S(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 倘將 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 任意錯列之,不致變動,則此函數謂之對稱函數. 因每一錯列可用若干對調,卽二元素之互易以構成之(§ 48, 5.), 故如將二數 x_i 與 x_k 對調, 且任意的爲之而不致有變動, 則已可知其爲對稱函數. 吾人所欲論者, 恆爲整的對稱函數.

3. 一對稱函數之任何一項,其形式爲

$$Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

此中之 A 爲常數的(卽與 $x_1, \cdots, x_n$ 無關的)係數, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 則爲整正數. 指數之和 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 名爲此項之次數. 若干同次數的項之總, 名爲齊次式.[1] 倘於一對稱函數內將一切同次項併列之,則凡齊次的部分,本身亦必爲對稱者,蓋將變數錯列後, 其次數仍無變動也. 因之, 吾人不難普通的構成一齊次的對稱函數, 其次數爲已知者. 例如三變數四次的齊次對稱函數之普通式, 爲

---

1. 齊次函數 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 之次數如爲 λ, 則其基本屬性如下: 倘用 $tx_1, tx_2, \cdots, tx_n$ (t 爲任意之數) 以代變數, 則函數被 t^λ 所乘, 故得

$$F(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^\lambda F(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&a(x_1^4+x_2^4+x_3^4)\\
&+b(x_1^3x_2+x_1^3x_3+x_2^3x_1+x_2^3x_3+x_3^3x_1+x_3^3x_2)\\
&+c(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)\\
&+d(x_1^2x_2x_3+x_2^2x_3x_1+x_3^2x_1x_2),
\end{aligned}
$$

於此, a, b, c, d 爲常數的係數.

此處同係數之部分亦自成爲一對稱函數,且由其第一項卽可完全知之. 倘用和號 S, 則上式亦可寫爲

$$aS(x_1^4)+bS(x_1^3x_2)+cS(x_1^2x_2^2)+dS(x_1^2x_2x_3).$$

4. 關於對稱函數, 吾人有 Waring 之定理, 於全部代數上極關重要者.[1] 此定理如下:

每一對稱函數 $S(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 可有理的, 整的用對稱的基本函數以表出之.

此定理之意義, 謂吾人可用加減及乘以得一式爲 $F(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 使

$$S(x_1, x_2, \cdots, x_n)=F(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

成爲一全等式, 於此, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲 (3) 中之式.

Waring 之證明此定理, 殊爲簡單, 其後高斯於其代數基本定理之第二證 (1816) 內, 亦曾有一證, 但其實質上實爲相同者.[2] 同時, 吾人卽可由此定理以知任何一對稱

1. Waring, Miscellanea analytica. Cambridge 1762.

2. Gauss, Werke 3, 36 (Ostwalds Klassiker Nr. 14). Cauchy 亦爲曾用極簡單的方法證明之, 但其法與此不同, 見 Exercices de mathematiques 4 (1829); Œuvres (2) 9, 132.

函數之構造,並用對稱的基本函數以表之.

試設想將對稱函數中,指數均相同之項合成爲一項,而如有二項

$$\mathfrak{A}=Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n},\quad \mathfrak{B}=Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n},$$

其指數之諸差數

$$\alpha_1-\beta_1,\ \alpha_2-\beta_2,\ \cdots,\ \alpha_n-\beta_n$$

中,第一個非爲0者有一正值,即$\alpha_1>\beta_1$,或$\alpha_1=\beta_1$,但$\alpha_2>\beta_2$,或$\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2=\beta_2$,但$\alpha_3>\beta_3$,等等,則吾人稱$\mathfrak{A}$爲較高之項.如是則不能再有同高之項,否則其指數均將相同矣.因之,必有一最高項

(5) $$\mathfrak{A}=Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

此中之指數,構成一減少的數列,至少爲不增加的數列,即

$$\alpha_1\geqq\alpha_2\geqq\alpha_3\cdots\geqq\alpha_n.$$

蓋如$\alpha_2>\alpha_1$,則將x_1與x_2互易後,由$\mathfrak{A}$所得之項

$$Ax_1^{\alpha_2}x_2^{\alpha_1}x_3^{\alpha_3}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

旣亦在S內,將高於$\mathfrak{A}$,而$\mathfrak{A}$非爲最高項矣.因之,

$$\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2-\alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_{n-1}-\alpha_n$$

諸差數中無有爲負者.

同時,吾人不難知α_1爲S內所有指數中之最高者;蓋如有一指數α更高,即$\alpha>\alpha_1$,則亦有一項含有x_1^{α}者,此項亦將高於$\mathfrak{A}$矣.因之,對稱函數內之一切項,除係數不計而

外,決定於最高項(5)或"次序"$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. 項數之多有限,可以一定的順序排列之,使每項較在其後者爲高.例如以前之對稱函數(4),其次序爲$(4, 0, 0)$,其各項可如下列之:

$$x_1^4,\ x_1^3x_2,\ x_1^3x_3,\ x_1^2x_2^2,\ x_1^2x_2x_3,\ x_1^2x_3^2,\ x_1x_2^3,\ x_1x_2^2x_3,$$

$$x_1x_2x_3^2,\ x_1x_3^3,\ x_2^4,\ x_2^3x_3,\ x_2^2x_3^2,\ x_2x_3^3,\ x_3^4.$$

設$Ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$與$Bx_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\cdots x_n^{\beta_n}$爲二對稱數函中之最高項,則其積亦較之此二函數中任何二項$A'x_1^{\alpha'_1}x_2^{\alpha'_2}\cdots x_n^{\alpha'_n}$, $B'x_1^{\beta'_1}x_2^{\beta'_2}\cdots x_n^{\beta'_n}$之積爲高,蓋第一個不等於0的差數$\alpha_i-\alpha_i'$及$\beta_i-\beta_i'$既爲正,則

$$(\alpha_i+\beta_i)-(\alpha'_i+\beta'_i)=(\alpha_i-\alpha_i')+(\beta_i-\beta_i')$$

亦必爲正也.從可知:

若干對稱函數的乘積中之最高項,爲各因子中最高項之積.

對稱的基本函數$a_1, a_2, \cdots, a_n$之最高項,按其順序排列之,爲

$$x_1,\ x_1x_2,\ x_1x_2x_3,\ \cdots,\ x_1x_2\cdots x_n.$$

今作乘積

$$P=\pm Aa_1^{\alpha_1-\alpha_2}a_2^{\alpha_2-\alpha_3}\cdots a_{n-1}^{\alpha_{n-1}-\alpha_n}a_n^{\alpha_n} \tag{6}$$

則可知此爲對稱函數,其最高項除須將號確定外,與S之最高項忍相同.差式

$$S-P=S'$$

仍爲一對稱函數,其最高項較之 S 者爲低.吾人可再作 $a_1, \cdots, a_n$ 之方數之積 P' (附以適當的常數係數),由 S' 減去之,俾 $S'-P'=S''$ 之最高項較之 S' 者爲低,如是往下類推,卽得一列對稱函數,其最高項恆低減,故末後可得一函數 $S^{(n)}$,其差 $S^{(n)}-P^{(n)}=0$. 如是則可知 S 可成爲以下之形式:

$$S=P+P'+P''+\cdots+P^{(n)}, \tag{7}$$

而以上之定理於以證明.

5. 今以對稱函數

$$S=S(x_1{}^2x_2{}^2x_3)$$

爲例,卽一切乘積 $x_\alpha{}^2x_\beta{}^2x_\gamma$ 之和,吾人可用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中任何三數以作之.

按 (6) 與 (3),有

$$P=-a_2a_3,$$

故
$$S=-a_2a_3+S'.$$

今將 $-a_2a_3$ 計算出之,則[1]

$$-a_2a_3=(x_1x_2+\cdots)(x_1x_2x_3+\cdots)$$

$$=S(x_1{}^2x_2{}^2x_3)+3S(x_1{}^2x_2x_3x_4)+10S(x_1x_2x_3x_4x_5). \tag{8}$$

---

1. 吾人須注意,將括弧內式相乘時,乘積 $x_1{}^2x_2{}^2x_3$ 祇有一個,但 $x_1{}^2x_2x_3x_4$ 則有三個,卽 $x_1x_2\times x_1x_3x_4$, $x_1x_3\times x_1x_2x_4$, $x_1x_4\times x_1x_2x_3$, 而 $x_1x_2x_3x_4x_5$ 則多至十個.

又 $$S(x_1^2x_2x_3x_4)=-a_1a_4+S''$$

$$-a_1a_4=(x_1+\cdots)(x_1x_2x_3x_4+\cdots)$$

$$=S(x_1^2x_2x_3x_4)+5S(x_1x_2x_3x_4x_5).$$

將 $S(x_1x_2x_3x_4x_5)=-a_5$ 代入,即得

$$S(x_1^2x_2x_3)=-a_1a_4+5a_5.$$

故按(8),有

$$S(x_1^2x_2^2x_3x_4)=3a_1a_4-a_2a_3-5a_5$$

6. (6)中之乘積 P,就 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 而言,其次數為 α_1,而按(7),可知用係數表出的函數 S,其次數亦為 α_1,蓋 P', P'',$\cdots$ 之次數均較為小也.

今如不用(2),而由

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

出發,則以上所證明的主要定理,其意義謂 $f(x)$ 之根之任何一對稱函數,可作為 $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0}$ 之整的有理函數以表之:

$$S=F\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \cdots, \frac{a_n}{a_0}\right).$$

此函數就 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 而言為齊次者,其次數為0(參觀**3.**中之註1),其中分母內最高之方數為 $a_0^{\alpha_1}$,故:

設對稱函數 S 內每一根之最高指數為 α_1,則 $a_0^{\alpha_1}S$ 為 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 之 α_1 次的整齊次函數.

§96. 判定式

1. 判定式實為對稱函數中之極重要者,其於方程理

論上之意義,前於第十三章中已知之矣.以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 為根的 n 次函數之判定式,為一切根差之平方之積:

$$
\begin{aligned}
D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2\cdots(x_1-x_n)^2 \\
(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2\cdots(x_2-x_n)^2 \\
(x_3-x_4)^2\cdots(x_3-x_n)^2 \\
\vdots \\
(x_{n-1}-x_n)^2
\end{aligned} \tag{1}
$$

此即為 § **49**, **5**. 內所論過的差數乘積 P 之平方.

用乘積以表判定式時,可使吾人易知其最重要的屬性,即:

倘 $f(x)=0$ 有二根相同,則判定式為 0, 亦祇於此時為 0.

按 Waring 之定理,此判定式可僅用有理運算法以方程之係數表出之,故吾人無須先解方程,即可知其有無重根.在二,三及四次的方程方面,吾人已施行之,但如欲用 Waring 之方法,以表出判定式,則在簡單的事例方面,例如三次方程,已須極煩之運算,故吾人不能不用其他的方法於此.

2. 倘方程 $f(x)=0$ 有重根 x_i, 則 $f'(x)$ 於 $x=x_i$ 亦必成為 0 (§ **88**, **4**.), 即於 $x=x_i$ 時,同時有

$$
\begin{aligned}
x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0 \\
nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0
\end{aligned} \tag{2}
$$

令由此二方程將 x 消去,則得係數間之關係如下:

(3) $$F(a_1, a_2, \cdots a_n)=0,$$

倘此二方程能同時成立,即 $f(x)=0$ 有一重根,則此關係亦必成立.

由方程(2)以消去 x,可有理的爲之,且爲(3)中之 F 得一 $(2n-1)$ 次的行列式,而此則不難歸結之成爲 $(n-1)$ 次者.[1] 今以三次方程爲例,試將此行列式求出之.

3. 今試由

(4) $$\begin{aligned} f &= x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \\ f' &= \phantom{x^3+{}} 3x^2+2a_1x+a_2=0 \end{aligned}$$

將 x 消去之. 先用 3 乘第一方程, 用 x 乘第二方程, 則經相減後得

(5) $$3f-xf'=a_1x^2+2a_2x+3a_3=0$$

由(4),(5)二方程,可得二一次方程,其法先用 a_1 乘方程(4),再用 3 乘(5),並相減之,則得

(6) $$2(a_1{}^2-3a_2)x+a_1a_2-9a_3=0.$$

又用 $3a_3$ 乘(4), a_2 乘(5),則相減後得一二次方程,無有常數項者.因 a_2, a_3 爲普通的值, $f=0$ 與 $f'=0$ 無有爲 0 之根,故吾人不妨用 x 以除方程,而得

(7) $$(a_1a_2-9a_3)x+2(a_2{}^2-3a_1a_3)=0.$$

如 $f=0$ 與 $f'=0$ 須同時成立,則(6)與(7)亦必須同時成

1. Euler, Introductio in anal. infinit. (1748), 2, Cap. 19. Bézout, Mém. Acad. de Paris 1764; Sylvester, Phil. Mag. 16 (1840).

立,其條件爲

$$
(8)\qquad \begin{vmatrix} 2(a_1^2-3a_2) & a_1a_2-9a_3 \\ a_1a_2-9a_3 & 2(a_2^2-3a_1a_3) \end{vmatrix}=0
$$

在三次方程方面,此卽爲上所云之關係(3),爲方程有重根之必要條件,因之,行列式(8)必同時與判定式俱爲0.將行列式計算出後,有

$$
\begin{aligned}
&4(a_1^2-3a_2)(a_2^2-3a_1a_3)-(a_1a_2-9a_3)^2\\
&=3a_1^2a_2^2+54a_1a_2a_3-12a_1^3a_3-12a_2^3-81a_3^2.
\end{aligned}
$$

按(1),判定式之最高項(按 § **95**, **4**. 內之意義)爲 $x_1^{2n-2}x_2^{2n-4}\cdots x_{n-1}^2$,故按 § **95** 之(6),乘積 $a_1^2a_2^2x_3^2\cdots x_{n-1}^2$,卽此處之 $a_1^2a_2^2$ 必爲判定式之一項,因而可知上式爲判定式之三倍,而三次方程之判定式,與 § **81**,(16)中者同爲[1]

$$
(9)\qquad D=a_1^2a_2^2+18a_1a_2a_3-4a_1^3a_3-4a_2^3-27a_3^2
$$

4. 每一根在判定式內所有之最高指數爲 $2n-2$,故按(1)及 § **95** 之 **6**.,可知:

設 P 爲整函數

$$
(10)\qquad f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n
$$

之根之差數乘積,則

$$
(11)\qquad \Delta=a_0^{2n-2}P
$$

爲 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 之 $(2n-2)$ 次的齊次函數.吾人稱之爲 $f(x)$ 之齊次的判定式.

1. 參閱 § 99, (9).

在三次函數方面,吾人由 (9), 可得其齊次的判定式如下:

$$\Delta = a_1^2a_2^2 + 18a_0a_1a_2a_3 - 4a_1^3a_3 - 4a_0a_2^3 - 27a_0^2a_3^2.$$

5. 判定式尚有一根本的屬性,試一論之.

今於(10)內將 x 易爲 $\frac{x}{y}$, 並用 y^n 乘此函數,則得一 x 與 y 之 n 次的齊次函數如下:

(12) $$f(x,y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_ny^n.$$

此式亦稱爲 n 次的二元式,恆可用以代不齊次的函數 $f(x)$,於不變式論上,尤以此爲研究之根據.不變式論由此出發,即用一次的置換

(13) $$x = \alpha\xi + \beta\eta, \quad y = \gamma\xi + \delta\eta$$

(α, β, γ, δ 爲常數的係數), 將(12)內之 x, y 易爲 ξ, η. 置換之行列式

(14) $$\alpha\delta - \beta\gamma = r,$$

則假定其非爲0.經此置換後, $f(x, y)$ 即成爲 ξ, η 的 n 次二元式:

(15) $$\phi(\xi, \eta) = b_0\xi^n + b_1\xi^{n-1}\eta + b_2\xi^{n-2}\eta^2 + \cdots + b_n\eta^n.$$

此中之新係數 b_0, b_1, $\cdots$, b_n 可由原來之係數 a_0, a_1, $\cdots$, a_n 及置換係數 α, β, γ, δ 得之,例如

$$b_0 = f(\alpha, \gamma), \quad b_n = f(\beta, \delta),$$

此則不難見者.

6. $f(x, y)$ 之判定式,爲(11)內之 Δ, 而用 b_0, b_1, $\cdots$, b_n 以

構成此式時,則所得之 Δ', 即爲置換後的 $\phi(\xi,\eta)$ 之判定式. 此式必可用 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 及置換係數以表之,吾人今可指出,Δ 與 Δ' 間之關係,至爲簡單.

用根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 時,$f(x,y)$ 可作爲一乘積寫出:

$$f(x,y)=a_0(x-yx_1)(x-yx_2)\cdots(x-yx_n).$$

今將 x_i 亦易爲二數之比 $\dfrac{x_i}{y_i}$, 並爲簡易計,採取如次之寫法:

$$xy_i-yx_i=(xy_i) \qquad i=1,2,\cdots,n.$$

則卽有

$$f(x,y)=A(xy_1)(xy_2)\cdots(xy_n), \tag{16}$$

於此,

$$A=\frac{a_0}{y_1y_2\cdots y_n}.$$

按 (11), $f(x,y)$ 之判定式爲

$$\Delta=a_0{}^{2n-2}\left(\prod_{i<k}\frac{x_i}{y_i}-\frac{x_k}{y_k}\right)^2 \qquad \left(\begin{matrix}i=1,2,\cdots,n-1\\ k=2,3,\cdots,n\end{matrix}\right)$$

此處每一 y_i 發見於右端之 $2(n-1)$ 個因子中,故如設

$$x_iy_k-y_ix_k=(x_i\,y_k),$$

則

$$\Delta=A^{2n-2}\prod_{i<k}(x_iy_k)^2. \tag{17}$$

於此,乘積號下所有因子之數,共爲 $2\dfrac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$ 個.

今用 (13) 將 x, y 易爲 ξ, η, 並用

$$x_i=\alpha\xi_i+\beta\eta_i, \quad y_i=\gamma\xi_i+\delta\eta_i$$

將 x_i, y_i 易爲 ξ_i, η_i, 則按行列式之乘法定律(§ **77, 9.**):

$$(xy_i)=r(\xi\eta_i);\quad (x_iy_k)=r(\xi_i\eta_k).$$

(16) 內之 $f(x,y)$ 於是成爲

$$\phi(\xi,\eta)=A'(\xi\eta_1)(\xi\eta_2)\cdots(\xi\eta_n),$$

而 $A'=r^nA$. $\phi(\xi,\eta)$ 之判定式, 按 (17) 爲

$$\Delta'=A'^{2n-2}\prod_{i<k}(\xi_i\eta_k)^2$$

$$=\frac{r^{n(2n-2)}}{r^{n(n-1)}}A^{2n-2}\prod_{i<k}(x_iy_k)^2$$

或

(18) $$\Delta'=r^{n(n-1)}\Delta.$$

故得定理如下:

設 $f(x,y)$ 作一次置換時, 以 r 爲行列式, 則經置換後, 其判定式除一因子 $r^{n(n-1)}$ 而外, 無所變動.

$f(x,y)$ 之係數所構成的如是之函數 $\mathfrak{I}(a_0,a_1,\cdots,a_n)$, 經一次甚換後祇差一置換行列式之方數 r^λ, 因而置換後成爲

$$\mathfrak{I}'=r^\lambda\mathfrak{I}$$

者, 名爲 f 之不變式, λ 爲其分量. 從可知:

n 次的二元式之判定式, 爲一不變式, 其分量爲 $n(n-1)$.

§ 97. 根之方數和.

1. 尚有一類較簡單的對稱函數, 亦可一論之, 是即所

謂根之方數和,惟爲等高的方數之和:

(1) $$s_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k+\cdots+x_n^k \qquad (k=1,2,3,\cdots).$$

欲將其用對稱的基本函數表出之,可自 § **91** 之 (10) 中第二式出發:

(2) $$f'(x)=\frac{f(x)}{x-x_1}+\frac{f(x)}{x-x_2}+\cdots+\frac{f(x)}{x-x_n}.$$

此式之左端爲

(3) $$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1},$$

其右端有

(4) $$\frac{f(x)}{x-x_1}=x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\cdots+q_{n-1}$$

而按 § **88** 之 (6), 可知

$$q_1=x_1+a_1,$$

$$q_2=x_1^2+a_1x_1+a_2,$$

$$q_3=x_1^3+a_1x_1^2+a_2x_1+a_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_{n-1}=x_1^{n-1}+a_1x_1^{n-2}+a_2x_1^{n-3}+\cdots+a_{n-1}$$

(2) 內之其他的項,亦可用同法爲之,然後再取其和,則 $x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, \cdots$ 之係數,按其順序列之,爲

$$n;\quad s_1+na_1,\quad s_2+a_1s_1+na_2,$$

$$s_3+a_1s_2+a_2s_1+na_3,\cdots\cdots\cdots$$

將其與 (3) 中之係數相較,卽可得以下之若干式:

$$s_1+a_1=0$$

$$s_2+a_1s_1+2a_2=0$$

(5) $$s_3+a_1s_2+a_2s_1+3a_3=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_{n-1}+a_1s_{n-2}+a_2s_{n-3}+\cdots+(n-1)a_{n-1}=0$$

由此，吾人卽不難將 $s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}$ 用 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 以表之：

(6) $$\begin{aligned} s_1 &= -a_1 \\ s_2 &= a_1^2-2a_2 \\ s_3 &= -a_1^3+3a_1a_2-3a_3 \\ s_4 &= a_1^4-4a_1^2a_2+4a_1a_3+2a_2^2-4a_4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

2. 欲求高次方之和 $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots$，吾人衹須注及，於任何一根 x_i 及任何一數 k，有

$$x_i^k f(x_i)=0=x_i^{n+k}+a_1x_i^{n+k-1}+\cdots+a_nx_i^k.$$

今作一切 x_i 之和，則於 $k=0, 1, 2, 3, \cdots$，有

(7) $$\begin{aligned} s_n+a_1s_{n-1}+a_2s_{n-2}+\cdots+na_n &= 0 \\ s_{n+1}+a_1s_n+a_2s_{n-1}+\cdots+a_ns_1 &= 0 \\ s_{n+2}+a_1s_{n+1}+a_2s_n+\cdots+a_ns_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

由此，卽不難將 $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots$ 計算出.[1]

倘設 $a_{n+1}=a_{n+2}=a_{n+3}=\cdots=0$，則公式 (7) 卽可與 (5) 相連接.

1. 方數和之最初的公式，見於 Albert Girard 之 Invention nouvelle en l'algèbre (1629) 內. 以上之式肇自牛頓，見其 Arithmetica universalis (1707).

由公式(5)及(7)之第一式,吾人亦可反之,將 $a_1, \cdots, a_n$ 用 $s_1, \cdots, s_n$ 表出之,故可知任何一對稱函數,可作爲方數和之整函數(但係數不必爲整數)以表之.

§ 98. 錯列類之不變式
葛氏理論之大要

1. 今設 $f(x)=0$ 爲一 n 次的方程,其根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均不相同.吾人稱之爲基本方程.此項根之對稱函數,將 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 作一切錯列後,不致變動.此 $n!$ 個錯列,構成第八章內所論過的類羣.今推廣 § **96**, **6**. 內所採用之概念,凡整的理函數,[1]改變(置換)其變數後,不致有變動者,吾人卽稱此函數爲對於此項置換而言係不變者,或曰爲其不變式.因之,吾人可云:

n 次方程之根對稱函數,爲 n 個元素之一切錯列所成之類之不變式.

如吾人所已知者,此項對稱函數可有理的用方程之係數以表出之,反之,係數之有理函數,亦爲根之對稱函數.

方程之係數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 確定一數目之體或有理性領域(參觀 § **90**, **11**.),卽用有理運算法於 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所可得之一切數目.今用 $\Omega(a_1, \cdots, a_n)$ 以表此數目體,或簡作 Ω

---

1. 本節內所論,僅以整函數爲限.

亦可,並稱之爲基本數目體.如是則可云:

根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之每一對稱函數,爲基本數目體 Ω 中之數目,反之,數目體內每一數目,爲根之對稱函數,因而爲一切錯列所成的類 $\mathfrak{P}$ 之不變式.

因之,吾人亦稱 $\mathfrak{P}$ 爲 n 次的普通方程之類,或曰對稱類,或亦稱爲葛氏之類,因最初發見此者爲數學家葛羅亞(Galois)氏,故名之以資紀念也.[1]

2. 類之不變式,同時亦卽爲其屬類之不變式.但屬類 $\mathfrak{H}$ 之不變式,則爲如是之函數,僅能對於 $\mathfrak{H}$ 中之錯列爲不變者.有時爲避免誤會計,吾人亦稱之爲 $\mathfrak{H}$ 之獨有的不變式.例如差數乘積 P(參觀 § **49** 之 **5**.)(其平方爲判定式[2])爲偶錯列之類所獨有之不變式,蓋經偶錯列後,可以不變,但經奇錯列後,則其號卽變.偶錯列之類亦稱爲交錯類,其所有之不變式,謂之交錯函數.於此,有定理如下:

每一交錯函數,可整的,有理的用 P 及方程之係數以表之.

1. 必須其係數無定且相互間無關係之普通方程,或特殊的某類方程,其葛氏類乃與一切錯列所成的類 $\mathfrak{P}$ 相同.在其他的方程方面,或於 Ω 內添入新數目後,葛氏類卽成爲 $\mathfrak{P}$ 之屬類.(參觀 3. 及 4.)

2. 平方根 $\sqrt{D}=P$ 之號,決定於 § 49 內之(1).

蓋如有一如是之函數Q,經一對調(x_1, x_2)後成爲Q',則再經一對調後,Q'又復成爲Q,因二次對調與一偶錯列相當也.但此函數除Q與Q'而外,不能有其他值,因每一奇錯列,可由一偶錯列加以對調(x_1, x_2)以得之.因之,$Q+Q'$爲一對稱函數,$Q-Q'$經(x_1, x_2)後則改變其號,故如$x_1=x_2$,則成爲0.因此,如將$Q-Q'$視爲x_1之整函數,則可爲x_1-x_2所除,仿此,並可知其可爲其餘一切差數x_i-x_k所除,故亦可爲$P=\sqrt{D}$所除.商式$\frac{Q-Q'}{P}$仍爲一對稱函數.故如設

$$Q+Q'=2A,\quad Q-Q'=2B\sqrt{D},$$

則A與B均爲係數之整有理函數,而

$$Q=A+B\sqrt{D}. \tag{1}$$

3. 將$\sqrt{D}$添加入基本數目體Ω後,得一新數目體Ω',於是以上之定理亦可如是表之:

每一交錯函數爲Ω'內之數目,Ω'內之每一數目,亦爲交錯函數,卽對於交錯類而言爲不變者.

因之,吾人亦稱交錯類爲方程之葛氏類,對數目體Ω'而言.

倘不用$\sqrt{D}$而添加一交錯類所獨有之不變式於Ω中,則所得者亦爲Ω'.如是之不變式,按(1),爲二次方程

$$y^2+\alpha y+\beta=0 \tag{2}$$

之根，其係數爲 Ω 中之數．因之，基本方程之葛氏類(即一切錯列之類 $\mathfrak{P}$)，將(2)之一根添加入後，即成爲交錯類．

4．今試將此項研究，推廣之至於任何錯列類，並由一基本方程 $f(x)=0$ 出發，其係數不必爲無定的相互間無關的數目，而可爲任意的數值．又不變式之意義，今亦將略改之，所謂錯列類 $\mathfrak{G}$ 之不變式，爲根之如是的函數，用 $\mathfrak{G}$ 中錯列時，數值不致變動者．蓋根之函數，往往有經某項錯列後，其形式雖變，但因根與根間有某種關係，故其數值可不變[1]者．

今設 Θ 爲方程係數之有理性領域，則可作一定義如下：

設 $\mathfrak{G}$ 爲一錯列類，其每個數值的不變式爲 Θ 中之數，反之，Θ 中之每一數，作爲根之函數時，對於此類而言亦爲數值上不變者，則 $\mathfrak{G}$ 爲(對於 Θ 而言)方程之葛氏類．

5．今設 $\mathfrak{H}$ 爲 $\mathfrak{G}$ 之屬類．如是則按 § **52** 之 **4**.，可知 $\mathfrak{G}$ 之等級 g 爲 $\mathfrak{H}$ 之等級 h 之倍數：

$$g=hk,$$

k 則爲 $\mathfrak{H}$ 之標數．$\mathfrak{G}$ 之 g 個錯列，可分配於 k 個共軛系統 $\mathfrak{H}, \mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_{k-1}$，每系統內有 h 個錯列．由之，吾人可仿 § **52**，

1．例如 $x^3-2x-5=0$ 方面，函數

$$x_1^2-x_2x_3,\ x_2^2-x_3x_1,\ x_3^2-x_1x_2$$

之值同爲 2，故 $x_1^2-x_2x_3$ 爲環列類(1 2 3)之數值的不變式．

5. 以得與$\mathfrak{H}$共軛之屬類$\mathfrak{H}_1, \cdots, \mathfrak{H}_{k-1}$.

今設y爲$\mathfrak{H}$之獨有的不變式，此卽是，用$\mathfrak{H}$中一切錯列時，y之數値不變，但用$\mathfrak{G}$中不屬於$\mathfrak{H}$之錯列時，其數値卽變.如是則用一共軛系統$\mathfrak{A}_i$中之一切錯列時，y成爲一確定的値y_i，而用$\mathfrak{G}$中一切錯列時，y祇能有k個値

$$y, y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}.$$

此項y_i爲與$\mathfrak{H}$共軛的屬類之不變式，名爲共軛値，彼此間均不相同.今設用錯列P由y所得之値爲y_P，H爲$\mathfrak{H}$中錯列，A_i爲$\mathfrak{A}_i$中之錯列，則

$$y=y_H, y_1=y_{HA_1}=y_{A_1}, y_2=y_{HA_2}=y_{A_2}.$$

倘若$y_1=y_2$，則必$y_{A_1}=y_{A_2}$，故$y=y_{A_2A_1^{-1}}$，而$A_2A_1^{-1}$爲$\mathfrak{H}$中之錯列H，於是有$A_2=HA_1$，此卽是，A_2爲共軛系統$\mathfrak{A}_1$中之錯列，此則不可能者(§ **52**, **4**.).

y之對稱的基本函數:

$$\begin{aligned} y+y_1+y_2+\cdots+y_{k-1} &= -b_1, \\ yy_1+yy_2+\cdots \qquad &= \quad b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ yy_1y_2\cdots y_{k-1} &= \pm\, b_k \end{aligned}$$

對於$\mathfrak{G}$之一切錯列爲不變者，故按**4**.爲Θ之數目.因而有一定理如下:

$\mathfrak{G}$之標數爲k的屬類之每一不變式，爲k次的方程之根，其係數可有理的用基本方程之係數以表出之.

能爲 $y, y_1, \cdots, y_{k-1}$ 所充適之方程，名爲 $f(x)=0$ 之推解式，其式如下：

$$\phi(y)=y^k+b_1y^{k-1}+\cdots+b_k=0, \tag{3}$$

或如用一變數 t 時，則亦可作

$$\phi(t)=(t-y)(t-y_1)\cdots(t-y_{k-1}). \tag{4}$$

6. 方程(3)於 Θ 中爲不可分解者. 蓋如 $\phi(t)$ 可分解成爲二因式 $\psi(t)$ 與 $X(t)$，其係數均爲 Θ 中之數，並設 $y, y_1, \cdots, y_q$ 爲 $\psi(t)=0$ 之根，則此諸根之對稱基本函數將爲 Θ 中之數，故對於 $\mathfrak{G}$ 之一切錯列不致有變動. 但吾人可用 $\mathfrak{G}$ 中之一錯列於此項函數上，經此錯列後，y 成爲 $y_1, \cdots, y_q$ 以外之根 y_m，於是 y_m 亦將爲 $\psi(t)$ 之根. 因而 $\psi(t)$ 必有 $\phi(t)$ 之一切根，是卽 $\phi(t)$ 爲不可分解者.

7. 以下之定理，實爲 **2.** 中所證明的定理之推廣[1]：

凡 $x_1, \cdots, x_n$ 之有理函數，對於一屬類之錯列，數值上爲不變者，可有理的用屬類之獨有的不變式及基本方程之係數以表出之.

蓋如 z 爲如是之函數，y 爲屬類之不變式，則與共軛值

$$y, y_1, \cdots, y_{k-1}$$

相當者，有

$$z, z_1, \cdots, z_{k-1}.$$

今於 $\mathfrak{G}$ 中取一錯列 P，用於此二列值，則此項值卽經一

1. Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Mém. de l'acad. de Berlin (1770/71).

錯列,且其錯列相同,蓋如 y_μ 經 P 後成爲 y_ν 則同時 z_μ 亦成爲 z_ν. 今用(3)中左端之函數,作一函數如下:

$$\phi(t)\left(\frac{z}{t-y}+\frac{z_1}{t-y_1}+\cdots+\frac{z_{k-1}}{t-y_{k-1}}\right)=\psi(t).$$

此爲 t 之 $(k-1)$ 次的整函數,同時,亦爲 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之有理函數,對於 $\mathfrak{G}$ 之一切錯列爲不變者,因之,其係數可用 n 次方程之係數有理的表出之. 因 $\phi(t)$ 無有相同之根,故對於 $\frac{\psi(t)}{\phi(t)}$ 可應用 § **91**, (9) 中拉格朗之內插公式,而得

$$z=\frac{\psi(y)}{\phi'(y)},$$

於是 z 已用 y 及方程之係數有理的表出之矣.

8. 按此定理,凡對於一屬類 $\mathfrak{H}$ 之錯列數值上爲不變的函數,屬於一數目體 Θ', 此體係由添加 $\mathfrak{H}$ 之獨有的不變式於 Θ 中以得之. 反之,凡 Θ' 中之數目,對於 $\mathfrak{H}$ 自亦不變,故按 **4**., 可知 $\mathfrak{H}$ 爲方程之葛氏類,對於 Θ' 而言者. 因之,有一定理如下:

倘將 $\mathfrak{G}$ 之屬類 $\mathfrak{H}$ 所獨有的不變式添加入基本數目體 Θ 內,則葛氏類即成爲 $\mathfrak{H}$ 類.

9. 今設 $\mathfrak{H}$ 爲一特殊的屬類,則一切共軛的屬類與 $\mathfrak{H}$ 相同 (§ **52**, **5**.), 因之,共軛值 $y, y_1, \cdots\cdots, y_{k-1}$, 亦即 (3) 之根,均爲 $\mathfrak{H}$ 之不變式,而由定理 **7**., 可知:

若 $\mathfrak{H}$ 爲特殊的屬類,則方程(3)之每一根,可有理的

用其中之一以表出之.[1]

§99. 錯列類在三四次方程解法上之應用

1. 錯列類之理論，使吾人對於代數方程之解法，能灼見其本質.其根本思想在將方程之類逐步的低減之,而其法則在陸續將屬類之不變式添入基本數目體內,此項不變式，決定於(3)性質之推解式.倘能將其類減至如是低,其中祇有一全等的置換,即主要錯列 E,則方程即視爲已解.於是此類即完全被分解，而每一根爲此類之不變式,且吾人已知一有理性領域一切根均屬於其中.今將此法用於三四次之方程.[2]

2. 普通三次方程

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$$

之類，爲三元素之錯列類.將 $\sqrt{D}$ 添入後,即成爲交錯類

(1)　　(1), (1 2 3), (1 3 2),

同時,此亦即爲唯一的特殊屬類.

1. 關於葛氏理論之入門著作,以 O. Bolza 之 On the theory of substitutionsgroups and its applications to algebric equations 爲最簡明(見 Amer. Journ. of Math. 13. 1891).

2. 此處所云方程解法之見解,肇自葛羅亞氏(1832). 與此見解相當之方法,用以解三四次之方程,則 Lagrange 已曾用之,見 Nouv. mém. de l'acad. de Berlin (1770/71), Œuvres 3. 因之,吾人亦可謂此方法已先由 Lagrange 築其基, Abel 與 Galois 氏則於此基礎上建立近世代數學之體系.

今用複的三次單位根 ε 作以下之量:[1]

$$3u=x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon^2 x_3, \tag{2}$$

$$3v=x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon x_3,$$

則應用三對調時, u 與 v 轉成爲(爲簡易計,以 $\sim$ 一號代"轉成爲"一語):

$$\text{用}\ (x_2x_3)\ \text{時}:\quad u\sim v,\quad v\sim u$$

$$\text{用}\ (x_1x_2)\ \text{時}:\quad u\sim \varepsilon v,\quad v\sim \varepsilon^2 u$$

$$\text{用}\ (x_1x_3)\ \text{時}:\quad u\sim \varepsilon^2 v,\ v\sim \varepsilon u.$$

因之,用一切對調時,乘積 uv 爲不變者,但 u^3 與 v^3 則互相轉成,此卽是, uv 爲 x_1, x_2, x_3 之對稱函數,而 u^3, v^3 則爲共軛的交錯函數.故吾人可設

$$u^3=A+B\sqrt{D},\ v^3=A-B\sqrt{D}, \tag{3}$$

於此, A 與 B 爲 a_1, a_2, a_3 之整有理函數,而得

$$\left.\begin{aligned} x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon^2 x_3 &= 3\sqrt[3]{A+B\sqrt{D}} \\ x_1+\varepsilon^2 x_2+\varepsilon x_3 &= 3\sqrt[3]{A-B\sqrt{D}} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

今將二三次根中之一添入之,則其他一個亦屬於有理性領域,因 uv 爲對稱函數也,且因 u, v 對於每一錯列,除主要錯列而外,均須變動,故該類亦已完全被分解.除(4)而外,再添入方程

1. 因之,吾人將單位根 ε 添入,或亦卽添入無理性 $\sqrt{-3}$

$$x_1+x_2+x_3=-a_1,$$

則得

$$x_1=-\frac{a_1}{3}+\sqrt[3]{A+B\sqrt{D}}+\sqrt[3]{A-B\sqrt{D}}$$

(5) $$x_2=-\frac{a_1}{3}+\varepsilon^2\sqrt[3]{A+B\sqrt{D}}+\varepsilon\sqrt[3]{A-B\sqrt{D}}$$

$$x_3=-\frac{a_1}{3}+\varepsilon\sqrt[3]{A+B\sqrt{D}}+\varepsilon^2\sqrt[3]{A-B\sqrt{D}}.$$

此諸式之構造與卡氏公式相同,但吾人幾未用運算,即知此項形式為不可少者.

今尚須將 u, v 作為 a_1, a_2, a_3 之函數以表出之.為此目的,可作對稱函數 uv 與 u^3+v^3. 吾人不難知

(6) $$9uv=S(x_1{}^2)-S(x_1x_2)=(a_1{}^2-2a_2)-a_2=a_1{}^2-3a_2.$$

又 $$u^3+v^3=(u+v)(u+\varepsilon v)(u+\varepsilon^2 v),$$

以及 $$3\,(u+v)=2x_1-x_2-x_3=3x_1+a_1,$$

$$3\,(u+\varepsilon v)=\varepsilon^2(-x_1-x_2+2x_3)=(3x_3+a_1)\varepsilon^2$$

$$3\,(u+\varepsilon^2 v)=\varepsilon(-x_1+2x_2-x_3)=(3x_2+a_1)\varepsilon,$$

故

(7) $$2A=u^3+v^3=\left(\frac{a_1}{3}+x_1\right)\left(\frac{a_1}{3}+x_2\right)\left(\frac{a_1}{3}+x_3\right)$$

$$=\left(\frac{a_1}{3}\right)^3-a_1\left(\frac{a_1}{3}\right)^2+a_2\left(\frac{a_1}{3}\right)-a_3$$

$$=-\frac{2a_1{}^3}{27}+\frac{a_1a_2}{3}-a_3.$$

由 (6) 與 (7), 可知:

$27\,u^3$ 與 $27\,v^3$ 爲二次推解式

$$t^2+(2a_1{}^3-9a_1a_2+27a_3)t+(a_1{}^2-3a_2)^3=0 \tag{8}$$

之解,故

$$u=\frac{1}{3}\sqrt[3]{t_1}, \quad v=\frac{1}{3}\sqrt[3]{}$$

而三次根則須如是選擇之,使 $9uv=a_1{}^2-3a_2$.

但吾人亦可不用此二次方程,直接求 u^3 與 v^3,如是則除 (7) 而外,尙須作

$$u^3-v^3=(u-v)(u-\varepsilon v)(u-\varepsilon^2 v).$$

於是有

$$27\,(u^3-v^3)=(\varepsilon-\varepsilon^2)(1-\varepsilon)(\varepsilon^2-1)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)$$

$$=\sqrt{-27D}.$$

此式之平方, 爲 (8) 之判定式, 因而三次方程之判定式 D 可由下式得之:

$$-27D=(2a_1{}^3-9a_1a_2+27a_3)^2-4\,(a_1{}^2-3a_2)^3. \tag{9}$$

3. 求解四次方程

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$$

時, 可由 §52, 8. 中所已述及的屬類 (等級爲 8) 出發:

$$(\mathfrak{S}) \qquad (1),\quad (1\,2)(3\,4),\quad (1\,3)(2\,4),\quad (1\,4)(2\,3),$$

$$(1\,2),\quad (3\,4),\quad (1\,4\,2\,3),\quad (1\,3\,2\,4).$$

今將此項錯列與兩個另外者相組合, 例如與 (14) 及 (13), 於組合時置之於第二位, 則卽得共軛的系統:

$(\mathfrak{A}_1)$ $(1\,4),\quad (1\,2\,4\,3),\quad (1\,3\,4\,2),\quad (2\,3),$

$(1\,2\,4),\quad (1\,4\,3),\quad (2\,3\,4),\quad (1\,3\,2),$

$(\mathfrak{A}_2)$ $(1\,3),\quad (1\,2\,3\,4),\quad (2\,4),\quad (1\,4\,3\,2),$

$(1\,2\,3),\quad (1\,3\,4),\quad (1\,4\,2),\quad (2\,4\,3).$

此二系統合 $\mathfrak{H}$ 卽爲 24 個錯列所成之全類.

$\mathfrak{H}$ 之一不變式爲

(10) $$y=x_1x_2+x_3x_4.$$

用 $\mathfrak{A}_1$ 與 $\mathfrak{A}_2$ 時,卽轉成爲

$$y_1=x_1x_3+x_2x_4,$$

$$y_2=x_1x_4+x_2x_3,$$

此三共軛值 y, y_1, y_2 爲一三次方程

$$y^3+b_1y^2+b_2y+b_3=0$$

之根,其係數爲 x_i 之對稱函數. 吾人不難知:

$$-b_1=S(y)=S(x_1x_2)=a_2,$$

$$b_2=S(yy_1)=S(x_1{}^2x_2x_3)$$

$$=S(x_1)S(x_1x_2x_3)-4x_1x_2x_3x_4$$

$$=a_1a_3-4a_4,$$

$$-b_3=yy_1y_2=S(x_1{}^3x_2x_3x_4)+S(x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2),$$

$$S(x_1{}^3x_2x_3x_4)=x_1x_2x_3x_4\,S(x_1{}^2)=a_4(a_1{}^2-2a_2),$$

$$S(x_1{}^2x_2{}^2x_3{}^2)=(Sx_1x_2x_3)^2-2S(x_1{}^2x_2{}^2x_3x_4)$$

$$=a_3{}^2-2a_2a_4,$$

$$-b_3=a_1{}^2a_4-4a_2a_4+a_3{}^2.$$

從可知三次推解式爲

(11)　$$y^3-a_2y^2+(a_1a_3-4a_4)y-(a_1{}^2a_4-4a_2a_4+a_3{}^2)=0.$$

今再作

$$t_1=\frac{1}{4}(x_1+x_2-x_3-x_4)^2$$

(12)　$$t_2=\frac{1}{4}(x_1-x_2+x_3-x_4)^2$$

$$t_3=\frac{1}{4}(x_1-x_2-x_3+x_4)^2$$

則可知 t_1 亦爲 $\mathfrak{H}$ 之不變式, t_2 與 t_3 爲其共軛值(或曰共軛屬類之不變式). 因之, t_1, t_2, t_3 必可有理的各用 y, 及 y_1, y_2 以表出之:

$$t_1=\frac{a_1{}^2}{4}-a_2+y$$

(13)　$$t_2=\frac{a_1{}^2}{4}-a_2+y_1$$

$$t_3=\frac{a_1{}^2}{4}-a_2+y_2$$

今將此諸數之平方根添入之,則該類已完全被分解,蓋 $\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, \sqrt{t_3}$,除主要錯列而外,對於任何一錯列均須變動. 此三平方根中,其一爲其他二者所决定,故僅須添入二個便可,蓋

$$\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}$$
$$=\frac{1}{8}(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$$

為一對稱函數也. 今將其乘出, 則得

$$8\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}=S(x_1{}^3)-S(x_1{}^2x_2)+2S(x_1x_2x_3)$$

(14) $$=(-a_1{}^3+3a_1a_2-3a_3)+(a_1a_2-2a_3)-2a_3$$

$$=-a_1{}^3+4a_1a_2-8a_3.$$

再求 (12) 中之平方根, 並加入方程

$$-a_1=x_1+x_2+x_3+x_4,$$

則得四次方程之根如下:

(15)
$$x_1=\frac{1}{2}(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3})-\frac{a_1}{4}$$

$$x_2=\frac{1}{2}(\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3})-\frac{a_1}{4}$$

$$x_3=\frac{1}{2}(-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3})-\frac{a_1}{4}$$

$$x_4=\frac{1}{2}(-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3})+\frac{a_1}{4}$$

又於三次方程 (11) 中設

$$y=t-\frac{a_1{}^2}{4}+a_2,$$

則得四次方程歐氏解法之推解式; 於 $a_1=0$ 時, 即成為 §85, **1**. 中所得之推解式.

4. 欲使方程 (11) 內無有未知數之二次方, 可設

(16) $$3y=u+a_2,$$

經計算後, 即有

(17) $$u^3-3Au-B=0,$$

於此，

$$
(18)\qquad \begin{aligned} A&=a_2^2-3a_1a_3+12a_4 \\ B&=27a_1^2a_4+27a_3^2+2a_2^3-72a_2a_4-9a_1a_2a_3. \end{aligned}
$$

此項對稱函數 A 與 B，名爲四次方程之第一二不變式.[1]

方程(17)爲四次方程之最簡單的三次推解式，其根 u, u_1, u_2 亦爲 $\mathfrak{G}$ 之共軛値，與 y, y_1, y_2 同，吾人不難按(16)用四次方程之根以表之. 今如設

$$
(19)\qquad \begin{aligned} v\ &=y_1-y_2=(x_1-x_2)(x_3-x_4) \\ v_1&=y_2-y\ =(x_1-x_3)(x_4-x_2) \\ v_2&=y\ -y_1=(x_1-x_4)(x_2-x_3) \end{aligned}
$$

則

$$
(20)\qquad u=v_2-v_1,\quad u_1=v-v_2,\quad u_2=v_1-v.
$$

按(19)，四次方程之判定式 D，等於三次推解式(11)之判定式. 但按(16)，

$$
u_1-u_2=3(y_1-y_2),\quad u_2-u_1=3(y_2-y_1),
$$

$$
u_1-u=3(y_1-y),
$$

故(17)之判定式爲 26^2D，而按 § **81** 之(15)(於 $p=-3A$, $q=-B$)，亦爲 $4\cdot 27A^3-27B^2$，故：

---

1. 倘將其化爲齊次，則有 $a_2^2-3a_1a_3+12a_0a_4$ 以及 $27a_1^2a_4+27a_0a_3^2+2a_2^3-72a_0a_2a_4-9a_1a_2a_3$. 按之 §96, 6. 之意義，蓋爲四次二元式之不變式其分量爲 4 及 6.

四次方程之判定式 D 方面，有

$$27D = 4A^3 - B^2. \tag{21}$$

5. 倘不用屬類 $\mathfrak{G}$，則亦可由特殊的屬類，交錯類出發，此即是，將 $\sqrt{D}$ 添加入之. 其中之四子類

$$(1),\quad (1\ 2)(3\ 4),\quad (1\ 3)(2\ 4),\quad (1\ 4)(2\ 3)$$

仍爲一特殊的屬類，標數爲 3 (參觀 §**52** 之 **8.**)，而以前所提出之 v, v_1, v_2 三值，則爲共軛不變式，故必可充適一三次方程，其係數可有理的用四次方程之係數及 $\sqrt{D}$ 以表出之. 吾人不難知[1]:

$$v + v_1 + v_2 = 0$$

$$vv_1v_2 = -\sqrt{D}\,,$$

以及

$$\begin{aligned} vv_1 + vv_2 + v_1v_2 &= yy_1 + yy_2 + y_1y_2 - y^2 - {y_1}^2 - {y_2}^2 \\ &= 3(yy_1 + yy_2 + y_1y_2) - (y + y_1 + y_2)^2 \end{aligned}$$

或按 (11) 與 (18):

$$vv_1 + vv_2 + v_1v_2 = 3(a_1a_3 - 4a_4) - {a_2}^2 = -A.$$

故得三次推解式如下:

$$v^3 - Av + \sqrt{D} = 0. \tag{22}$$

按之 §**98** 之 **8.**，此式必有此屬性，卽其每個根可有理的於該類內用其中之一以表之. 吾人不難證實之如下. 按 (20) 與 (17)，有

$$(v - v_1)(v - v_2)(v_1 - v_2) = uu_1u_2 = B,$$

$$v_1v_2=-\frac{\sqrt{D}}{v}=v^2-A,$$

故
$$(v-v_1)(v-v_2)=v^2-(v_1+v_2)v+v_1v_2=3v^2-A$$

$$(v_1-v_2)^2=(v_1+v_2)^2-4v_1v_2=4A-3v^2.$$

今將後二式相乘之,則計及(22)時,有

$$B(v_1-v_2)=(3v^2-A)(4A-3v^2)$$
$$=-9v^4+15Av^2-4A^2$$
$$=6Av^2+9v\sqrt{D}-4A^2.$$

將此與 $v_1+v_2=-v$ 並用時,可知 v_1 與 v_2 可作爲 v 之二次函數以表之,其係數在該類內.

因之,除 $\sqrt{D}$ 而外,吾人祇須再添入(22)之一根 v 便可,於是即可按(20)與(16)得 y, y_1, y_2, 再按(13)得 t_1, t_2, t_3, 然後由(15)以得四次方程之根.

1. 關於第二式內平方根之號,可參觀§98, 2. 中之註.

第十六章

數字方程之近似解法

§100. 整函數之函數值計算法

實根之上下界

1. 對於實用的算家,方程是否可用代數方法以求其解之問題,不若求方程之近似根之問題爲重要,此項方程之係數,自須爲已知的數值.例如吾人所欲之根,苟能計算至五倍小數,卽已足用,此卽是,吾人須求二有理數,其差爲 $\frac{1}{10^5}$,根則介於其間.此種問題恆可解決,且其方法殊爲簡單有效,故雖在三四次之方程方面,亦每以應用此法較之求代數式(如卡氏公式)爲省便.但此處所論方程,其係數恆須爲實數,且主要任務,在求方程之實根.[1]

2. 方程之數字解法,在於作有計劃的試驗.吾人可使 $f(x)$ 內之 x 取各種值,檢出其中之二個 α, β, 使 $f(\alpha)$ 與

1. 關於近似法之史,可參觀 F. Cajori, A History of the arithmetical methods of approximation to the roots of numerical equations. Colorado College Publ. 12 (1911). 關於數字方程之古史,可參閱 Fourier, Analyse des équations déterminées, Paris 1831, 德譯本內並附有 A. Loewy 之補註多條 (Ostwalds Klassiker Nr. 127).

$f(\beta)$ 之號成爲相反者.如是則可知 α 與 β 之間,至少有一根存在(§92, 4.).於是可設法使 (α, β) 間段縮小,俾末後僅有一根在內.倘能對於一切實根求得如是之間段,則可云已將根隔開.再繼續將間段縮小後,卽可將根包入更窄的界內.

3. 因之,第一個重要問題,在得一種簡單方法,俾吾人於 x 之已知值,可計算其函數值.今設

(1) $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n.$$

a_0 爲正數,並可假定其爲1,於問題之普遍性不

試作

$$f_0(x)=a_0,$$

$$f_1(x)=a_0x+a_1,$$

(2) $$f_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_k(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots\cdots+a_k$$

$$(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n).$$

諸函數,名之爲 $f(x)$ 之部分函數.此中之末後一個 $f_n(x)$ 亦卽爲 $f(x)$ 本身.吾人用以下之式時,不難依次計算此項部分函數:

(3) $$f_k=xf_{k-1}+a_k$$

4. 例如

$$f(x)=x^4+3x^3-7x^2-4x-5,$$

則 ($f_0=1$ 可不計):

$$f_1=x+3$$

$$f_2=xf_1-7$$

$$f_3=xf_2-4$$

$$f\ =f_4=xf_3-5.$$

故於 x 之諸值,得下表:

(5)

x	f_1	f_2	f_3	f
0	3	-7	-4	-5
1	4	-3	-7	-12
2	5	3	2	-1
3	6	11	29	82

於此,於 $x=3$ 時,一切部分函數均爲正者.

5. 由 (3), 可知:

倘於 x 之某一正值, 開始的 k 個部分函數 $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_k$ 爲正,則於 x 之較大的值仍爲正,且爲增加的.

由此,可得拉九爾 (Laguerre) 之定理[1] 如下:

倘於一正值 α, 一切部分函數

(6) $$f_1(\alpha),\ f_2(\alpha),\ \cdots\cdots,\ f_{n-1}(\alpha),\ f(\alpha)$$

均爲正, 則於 $x>\alpha$ 時, $f(x)$ 不能爲 0, 此即是, α 爲 $f(x)=0$ 之實根之上界.

1. Laguerre, Nouv. Ann. de math. (2) 19 (1180).

6. 今將此定理用於$f(-x)$,則亦可得根之下界.今設

$$(-1)^n f(-x)=\bar{f}(x),$$

則

$$\bar{f}(x)=a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\cdots\cdots, \tag{7}$$

其部分函數為

$$\begin{aligned} &\bar{f}_1=a_0x-a_1\\ &\bar{f}_2=x\bar{f}_1+a_2\\ &\bar{f}_3=x\bar{f}_2-a_3\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{8}$$

而有定理如下:

倘於一正值β,一切部分函數

$$\bar{f}_1(\beta),\ \bar{f}_2(\beta),\ \cdots\cdots,\ \bar{f}_{n-1}(\beta),\ \bar{f}(\beta) \tag{9}$$

均為正,則$-\beta$為$f(x)=0$之根之下界.

7. 以前例而言:

$$\bar{f}(x)=x^4-3x^3-7x^2+4x-5,$$

$$\bar{f}_1=x-3,$$

$$\bar{f}_2=x\bar{f}_1-7,$$

$$\bar{f}_3=x\bar{f}_2+4,$$

$$\bar{f}=\bar{f}_4=x\bar{f}_3-5.$$

於x之各正值,有

(10)

x	$\bar{f}_1$	$\bar{f}_2$	$\bar{f}_3$	$\bar{f}$
0	-3	-7	4	-5
1	-2	-9	-5	-10
2	-1	-9	-14	-33
3	0	-7	-17	-56
4	1	-3	-8	-37
5	2	3	19	90

由 (5) 與 (10), 可知方程之一切實根在 -5 與 $+3$ 之間, 且 -5 與 -4 之間,以及 $+2$ 與 $+3$ 之間,至少有一根存在.

§101. 笛卡爾之符號規律.

1. 在以上之例內,吾人固已求得根所在其內的間段,所未知者,則每一間段內有若干根.斯多姆 (Sturm) 氏定理 (見 §102), 卽係對此重要問題作一詳細答覆者.在此定理未發見之前,亦已有種種規律,雖不精準普遍,然以其簡單,故用之者極多.其中最著名而最簡單者,爲笛卡爾 (Descartes) 之符號規律,[1] 吾人可由此以得正根數之最高限度.

---

1. 此規律或已於 1549 年時爲 (Cardano 所知, 但首先明白提出之者,則爲笛氏.惟亦未附以證(見其 Géometrie, 1637). John Wallis 之 Treatise of Algebra (1685) 內,曾將此定理視爲 Harriot 所發見, 故以前多稱之爲哈氏定理. 參閱 (Gauss, Beweis eines algebraischen Lehrsatzes, Werke 3, 67.

2. 今設$f(x)=0$爲一n次的方程,其係數均爲實數,並假定其絕對項非爲0,因而$x=0$不在根之列.以x之降冪序整列後之$f(x)$,試計點其係數方面符號改變之次數.所缺少的x之方數,可以不計,不必視爲係數等於0而加入之.如是則笛卡爾之符號規律如下:

正根之數,至多等於方程係數方面符號改變之次數或較之少若干,所少之數則爲偶數.於此,重根須按其次數計算之.

今將拉九爾氏所作此定理之極佳的證法錄下,[1]所用方法,爲完全歸納法,並先證其第一部分,即正根之數,至多等於符號改變之次數.

3. 今設V爲符號改變之次數,π爲正根之數.倘一切係數均爲正,則方程不能有正根,故

$$\text{於 } V=0 \text{ 時},\ \pi=0.$$

在此事例內($V<1$),笛氏規律爲正確者.今試證明,倘此定理於$V<v$爲正確,則於$V=v$亦必正確.

設α, β爲$f(x)=0$之二相繼的正根.今用$f'(x)$作以下之函數

$$\phi(x)=xf'(x)-kf(x),$$

於此,k爲暫時不定的實數.如是則

1. Laguerre, Journ. de Math. (3), 9 (1883), Oeuvres 1, 3.

$$\phi(\alpha)=\alpha f'(\alpha), \qquad \phi(\beta)=\beta f'(\beta)$$

故

$$\operatorname{sg}\phi(\alpha)=\operatorname{sg}f'(\alpha),\ \operatorname{sg}\phi(\beta)=\operatorname{sg}f'(\beta),$$

而按 § **93** 之 (1), 可知於充分小之正 δ, 有

$$\operatorname{sg}\phi(\alpha+\beta)=-\operatorname{sg}\phi(\beta-\delta).$$

由此,可知 $f(x)=0$ 相繼的二正根之間, 至少有 $\phi(x)=0$ 之一根.

今設 π' 爲 $\phi(x)=0$ 之正根數,則

$$\pi'\geqq\pi-1. \tag{1}$$

若 $f(x)=0$ 有正的重根, 此式亦仍可用, 蓋 $f(x)=0$ 之 m 重的根,爲 $\phi(x)=0$ 之 $(m-1)$ 重的根也.

今如

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-\mu}x^\mu+a_{n-\nu}x^\nu+\cdots\cdots+a_n,$$

則

$$\begin{aligned}\phi(x)&=(n-k)\,a_0x^n+(n-1-k)\,a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\\&\qquad+(\mu-k)\,a_{n-\mu}x^\mu+(\nu-k)\,a_{n-\nu}x^\nu+\cdots\cdots\\&=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-\mu}x^\mu+b_{n-\nu}x^\nu+\cdots\cdots\end{aligned}$$

設 x^μ 與 x^ν 爲 $f(x)$ 內相繼的二方數,並設其間有一符號改變,卽 $\operatorname{sg}a_{n-\mu}=-\operatorname{sg}a_{n-\nu}$. 今可如是選擇 k,使其在 ν 與 μ 之間:

$$\nu<k<\mu$$

如是則 $\mu-k$ 爲正而 $\nu-k$ 爲負, 故在 $b_{n-\mu}$, $b_{n-\nu}$ 方面, 不再有符號之改變, 而 $\phi(x)$ 內自 $b_0, b_1, \cdots\cdots$ 至 $b_{n-\mu}$ 各係數, 與 $f(x)$

內之相當係數同號,但自 b_{n-v} 以下者則異號,故除一個而外,其餘的符號改變及不改變,均仍其舊,而 $\phi(x)$ 所有之符號改變次數,較 $f(x)$ 少一.今設 v 爲 $f(x)$ 方面符號改變之次數, v' 爲 $\phi(x)$ 方面者,則可知

(2) $$v'=v-1.$$

按所設,笛氏規律於 $V<v$ 爲正確者,即於 $\phi(x)=0$ 爲正確者:

$$\pi'\leqq v',$$

則按(1)與(2),有

$$\pi-1\leqq v-1,\ 故\ \pi\leqq v,$$

此即是,笛氏規律於 $V=v$ 亦爲正確者.

4. 欲證明定理之第二部分時,可注意一個事實,即於充分大的 $x>c$ 時,函數 $f(x)$ 之號恆與 a_0 同,故一切正根均在間段 $(0,c)$ 內.今如 $\mathrm{sg}\,f(0)=\mathrm{sg}\,f(c)$,或 $\mathrm{sg}\,a_n=\mathrm{sg}\,a_0$,則按 § 92 之 **5**.,正根之數 π 爲偶,而如 $\mathrm{sg}\,a_n=-\mathrm{sg}\,a_0$,則 π 爲奇,故可寫作

$$\mathrm{sg}\,(a_0a_n)=(-1)^\pi.$$

他方面,倘 $a_0, a_\lambda, a_\mu, a_\nu, \cdots\cdots, a_\rho, a_n$ 爲 $f(x)$ 之相繼的係數,則

$$\mathrm{sg}\,(a_0a_n)=\mathrm{sg}\,(a_0a_\lambda)\,\mathrm{sg}\,(a_\lambda a_\mu)\,\mathrm{sg}\,(a_\mu a_\nu)\cdots\mathrm{sg}\,(a_\rho a_n)=(-1)^V,$$

故 $\pi\equiv V \bmod 2$,而因 $\pi\leqq V$,可知 π 祇能以偶數小於 V.

5. 由此定理,吾人並可知負根數之最高限度,蓋 $f(x)$ 之負根,與 $f(-x)$ 之正根相當,故吾人祇須將笛氏規律用

於 $f(-x)$ 或 $\bar{f}(x)$ (§ **100** 之 **6**.), 卽可知:

$f(x)$之負根之數,至多等於$\bar{f}(x)$之係數方面所有符號改變之次數,或較之少若干,所少之數爲偶.

6. 試以前所舉之方程爲例:

$$f(x)=x^4+3x^3-7x^2-4x-5=0,$$

$$\bar{f}(x)=x^4-3x^3-7x^2+4x-5,$$

故 $f(x)$ 祇有一符號改變,而 $\bar{f}(x)$ 則有三個,因而方程祇能有一正根,按之 § **100**, **7**., 在 2 與 3 之間,其負根則有一個或三個, 按之 § **100**, **7**., 當均在 -5 與 -4 之間, 如是則按羅氏定理,該間段內至少有 $f'(x)$ 之二根.但

$$f'(x)=4x^3+9x^2-14x-4$$

方面 $$V=1,$$

$$\bar{f}'(x)=4x^3-9x^2-14x+4$$

方面 $$V=2,$$

故 $f'(x)=0$ 有一正根,負根則無有或有二個.然

$$於\ x=0\ 時,\ f'(x)=-4,$$

$$x=-1\quad f'(x)=+15,$$

故 $f'(x)=0$ 有一根在 0 與 -1 之間. 因而 -5 與 -4 之間不能有 $f'(x)=0$ 之二根,而此間段內祇有 $f(x)=0$ 之一根.此方程有二實根,故尙有一對爲共軛複數.

§102. 斯多姆之定理

1. 代數方程之近似解法,實以斯多姆氏(Sturm)之定理,[1]爲其科學的基礎,由此,吾人可確知一方程之根,有若干在某一間段內.此定理之根本思想至爲簡單,實不出整函數之連續性,蓋凡整函數於x作連續的變動時,决不能不經過0而其值可由正至負也.

2. 設a爲$f(x)$之一根,則$f(x)$可爲a所除.今設

(1) $$f(x)=(x-a)\ F(x),$$

並以$\phi_1(x)$表$f(x)$之引伸,則按§88之(9),有

$$F(a)=\phi_1(a).$$

吾人可假定$f(x)$與$\phi_1(x)$無有共同根.如是則$\phi_1(a)$不能爲0,而可爲正或負,$F(a)$同此.當x充分接近a時,$F(x)$之號與$\phi_1(x)$同.

於是由(1),可知:

倘$\phi_1(a)$爲正,x增加的通過a,則$f(x)$亦增加的通過0,即由負值至於正值.

反之,若$\phi_1(a)$爲負,則$f(x)$即由正值至於負值.

總括之,吾人可云:

x增加的通過$f(x)$之一根時,$f(x)$與$\phi_1(x)$之號由不同

---

1. Ch. Sturm, Bull. des sciences mathém. 11 (1829). Mém. de l'acad. des sciences de Paris. Savants-étrang. 6 (1835). Ostwalds Klassiker Nr. 143.

而至於同.

3. 今按求 $f(x)$ 與 $\phi_1(x)$ 之公因式之法,施行相除,惟餘式以 $-\phi_2, -\phi_3, \cdots$ 表之. 倘 $Q, Q_1, Q_2, \cdots$ 爲其商,則得

$$
\begin{aligned}
f &= Q\phi_1 - \phi_2,\\
\phi_1 &= Q_1\phi_2 - \phi_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\phi_{m-2} &= Q_{m-2}\phi_{m-1} - \phi_m
\end{aligned} \tag{2}
$$

因 $f, \phi_1, \phi_2, \cdots$ 之次數恆減小,故至 ϕ_m 與 x 無關後,即可終止此法. 按所設, f 與 ϕ_1 無公因式,故 ϕ_m 不能爲0. 由此假定,並可知在

$$f, \ \phi_1, \ \phi_2, \ \cdots, \ \phi_m \tag{3}$$

內,不能有二項 $\phi_\nu, \phi_{\nu+1}$ 於 x 之某一值同時爲0, 蓋否則 f 與 ϕ_1 亦將爲 0 矣. 吾人名(3)爲斯氏之列.

4. 對於 x 之任何一值,(3)中相繼的二項之號如不同,則得一符號之改變,如相同,則得符號之相承. 如 $\phi_1, \cdots, \phi_{m-1}$ 中有一爲0, 則於計算符號之改變時,可捨之不問.

因之,對於 x 之每一值,吾人有一定多之符號改變. 斯氏定理之內容即可如下述之:

設 α, β 爲 x 之二值, $f(x)$ 於此不等於 0, $\alpha<\beta$, 則 α 與 β 間所有 $f(x)$ 之根數,等於由 $x=\alpha$ 至 $x=\beta$ 時斯氏列(3)內所失去的符號改變之數.[1]

1. 按2., 吾人已假定 $f(x)$ 祇有單純根, 但斯氏亦曾將其定理,推廣之至於有重根之方程.

5. 此定理之證明,於是殊爲簡單:如有符號改變次數之增加或失去,則斯氏列內之某一函數,必經過0而後可.今如$0<\nu<m$,而$\phi_\nu(x_0)=0$,則按(2),$\phi_{\nu-1}(x_0)=-\phi_{\nu+1}(x_0)$.故於$x=x_0$時,$\phi_{\nu-1}$與$\phi_{\nu+1}$之號不同,於此值之附近處亦然.因之,在

$$(4)\qquad \phi_{\nu-1}(x),\quad \phi_\nu(x),\quad \phi_{\nu+1}(x),$$

三個函數方面[$\nu=1$時之第一函數卽爲$f(x)$],於經過x_0之前後,均有符號改變,故無有增加或失去可言.倘$\phi_\nu(x)$於$x=\alpha$或$x=\beta$時成爲0,此亦仍適用.如是則於α或β,$\phi_{\nu-1}$與$\phi_{\nu+1}$間有一符號改變,而在α之後或β之前,$\phi_{\nu-1}$,ϕ_ν,$\phi_{\nu+1}$三函數間亦仍有此改變.

因ϕ_m不能經過0,故衹有x經過$f(x)$之根時,乃能有符號改變之次數上的變動發生.至於每次失去一個符號改變,此則已於**2**.內知之,因而斯氏定理已完全證明.

6. 細檢證明此定理時所需之假定,可知:

$\phi_1(x)$不必爲$f(x)$之引伸,惟須在$f(x)$之零點(於間段內)其號與引伸同.又對於斯氏列內之函數,吾人不必定用除法,衹須假定:

1. 不能有相繼的二函數,於(α,β)間段內之同一點爲0.

2. 在函數之每一0點,其前後之函數須號不同.

3. 末後之函數 ϕ_m，當於間段內不變其號.

應用除法時，於構成相繼的函數之際，正的數字因子可隨意加入或捨去，蓋此與號無關者也. 倘能得一函數 ϕ_m，於間段內不變其號，例如判定式爲負之二次函數，則運算即可終止.

7. 試以
$$f(x)=x^5-4x-2$$
爲例，則可得[1]:
$$\phi_1(x)=5x^4-4,$$
$$\phi_2(x)=8x+5,$$
$$\phi_3(x)\ \text{爲正},$$
而有表如下 (V 爲符號改變之次數):

x	f	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	V
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
0	$-$	$-$	$+$	$+$	1
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

因之，x 經過負值時，失去二符號改變，經過正值時，失去一個，故函數有二負根，一正根.

試再作一表:

1. ϕ_3 之數值無須計算，吾人祇須知其爲常數即可，而因於 ϕ_2 之 0 點 $x=-\frac{5}{8}$，ϕ_1 [illegible]，故 ϕ_2 亦不等於 0 而爲正.

x	f	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	V
-2	$-$	$+$	$-$	$+$	3
-1	$+$	$+$	$-$	$+$	2
0	$-$	$-$	$+$	$+$	1
1	$-$	$+$	$+$	$+$	1
2	$+$	$+$	$+$	$+$	0

此處 $x=-2$ 與 $x=+2$ 方面之符號分配.與以前 $-\infty$ 及 $+\infty$ 方面者同,故可知一切實根均在 $(-2, +2)$ 間段內,分配於 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(+1, +2)$ 諸間段中.其餘二根爲共軛複數.

§103. 假設法

1. 倘能如 **§100, 4**. 內得相繼的二整數,其間有 $f(x)=0$ 之一根,則其問題自須再詳細的計算函數值 $y=f(x)$,俾得確定根之所在.吾人可使 x 之差逐漸小至於 0.1,再小至於 0,01, 0,001 等,則不難陸續得根至於第一,二,三位小數.試卽舉一例以明之.今試求解方程

$$x^3-7x-7=0. \tag{1}$$

按笛氏規律,可知其可有一正根.

於 $x=3$ 時, $f(x)=-1$,

$x=4$ $f(x)=+29$,

故根當在 3 與 4 之間,且可推想其較與 3 相接近.今計算得

x	x^3	$7x+7$	$f(x)$
3,0	27,000	28,0	$-1,000$
3,1	29,791	28,7	$+1,091$

故可知該根約在 3,0 與 3,1 之中間.

又計算得

x	x^3	$7x+7$	$f(x)$
3,04	28,094	28,28	$-0,186$
3,05	28,373	28,35	$+0,023$

故可知在 3,04 與 3,05 之間,且與後者較接近. 今以 0,001 爲差,且由 3,05 出發向後退:

(2)

x	x^3	$7x+7$	$f(x)$	
3,050	28,3726	28,3500	$+0,0226$	
				209
3,049	3447	3430	$+0,0017$	
				209
3,048	3168	3360	$-0,0192$	
				208
3,047	2890	3290	$-0,0400$	

故可知在 3,048 與 3,049 之間,且可推想其與後者較接近.

2. 用插入法時,所得 x 之值尙可較正之. 觀於 (2), 可知函數値之差已將近爲常數.此其原因,蓋由於吾人之計算,僅以四位小數爲精準之度.在實際上,倘吾人計及一切

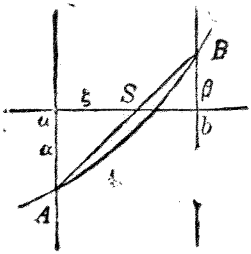

圖 20

小數位,卽用至九位小數,則函數值成爲一第三次的算術級數(§57之3.). 於此處所用精確之度, 吾人可用一次函數以代$f(x)$,就幾何的意義言之,亦卽在充分接近的二點A, B間,曲線$y=f(x)$可用其弦代之.故所求曲線與x軸之交點,可易爲弦之交點,而此則不難求得者.

今設a, b爲A, B之x值,其所屬的函數值爲$-\alpha$, β,卽

$$f(a)=-\alpha,\ f(b)=\beta.$$

x在A與B間之變動,以

$$\Delta x=b-a$$

表之.函數之同時的變動,爲

$$\Delta y=\alpha+\beta.$$

S爲弦與x軸之交點, 於此, 設$x=a+\xi$. 如是則近似值a經ξ大的修正後, 函數亦變動α, 故按§91之(14), 或按圖,可知$\alpha=\xi\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 卽

$$(3)\qquad \xi=\alpha\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

上例內倘欲用第四位小數之單位以表ξ, 則可設$\Delta x=10$, 其α及Δy亦可用該項單位表之.如是則按(2):

$$a=3{,}048,\ \alpha=192,\ \Delta y=209,$$

故 $$\xi=1920:209=9,2,$$

而方程(1)之正根之近似值爲

$$x=3,04892.$$

倘用七位小數時,可知 $x=3,0489173$,故吾人所得,係精確至於五位小數者.

3. 今於(3)內將 Δx 與 Δy 之值代入,則得

$$\xi=\frac{\alpha(b-a)}{\alpha+\beta}=-f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}, \tag{4}$$

而 x 之修正值則爲

$$a+\xi=\frac{a\beta+b\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{5}$$

此式卽所謂"假設法"或"Regula falsi",自古以來卽已用之.[1] 其名稱之由來,則因吾人先將"假"值 a, b 用於方程中,以得"錯數" $f(a), f(b)$ 暫代 0,再按其比修正 a, b,卽由 $\frac{x-a}{x-b}=\frac{f(a)}{f(b)}$ 以決定 x,所得卽爲(5).

§104. 牛頓之近似法

1. 上節內之公式(4),倘用§88, 3.內之記法,亦可作

$$\xi=-\frac{f(a)}{Q(a,b)}, \tag{1}$$

1. 此法可回溯至於古埃及 Ahme(紀元前 1800 年)所著之算書. 印度(紀元後 500 年時之 Aryabhatta)及亞拉伯人用之尤多(如 Liber augmenti et diminutionis, 出於 1100 年,或係 Muhammed ibn Musa 所傳,約當 825 年時;又如 1300 年時之 Ibn Albannâ 亦用之). 參閱 L. Mathiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra, Leipzig 1878, §84 ff. 關於應用 Regula falsi 時所可有之差誤,可閱 Lüroth, Vorl. üb. num. Rechnen, Leipzig 1900.

其所表爲 AB 割線與 x 軸之交點. 今將 A 點固着不動,而使 B 在曲線上向 A 移動.最後至 B 與 A 相合時,則割線成爲曲線上 A 點之切線,而由 (1), 按 § 88 之 (9), 可知:

$$\xi=-\frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{2}$$

因之,

$$a+\xi=a-\frac{f(a)}{f'(a)} \tag{3}$$

所表者爲 A 點之切線與 x 軸之交點. 倘 a 已爲根之極佳的近似值,則就大多數事例而論,用 (3) 後可得更佳之近似值,而繼續用之時,吾人可極快的得充分近似的根之值.

此法爲牛頓所創,[1] 吾人亦可由 § 88 之 (18) 出發以得之. 蓋如 $a+\xi$ 爲 $f(x)=0$ 之根,則 $f(a+\xi)=0$, 或

$$f(a)+\xi f'(a)+\xi^2 F(a,\xi)=0.$$

倘假定所修正者 ξ 極爲小,因而祇須用其一次方,則得

$$f(a)+\xi f'(a)=0,$$

與 (2) 相同.

2. 今將此法用於方程

1. Newton, Analysis per aequationes 1669 (出版於 1704). 其根本思想已見於 Vieta 之 De numerosa …… revolutione 1595 (出版於 1600 年). 關於適用此項方法之條件, 可閱 Fourier, Analyse des équations déterminées, Paris 1831 (Ostwalds Klassiker Nr. 127). Weber, Algebra 1, Laguerre, Oeuvres 1, Faber Journ. f. Math. 138 (1910), 146 (1916).

$$x^5-4x-2=0.$$

吾人已於§**102**之**7**.中,知此方程於1與2之間有一正根.

$$於\ x=1,5\ 時,\ f(x)=-0,406,$$

$$x=1,6\qquad f(x)=+2,086,$$

故可由$a=1,5$出發,函數之引伸爲

$$f'(x)=5x^4-4.$$

吾人於計算時不妨用算尺,俾較省便,而得下表:

a	$f(a)$	$f'(a)$	ξ
1,5	$-0,406$	21,31	$+0,019$
1,519	$+0,011$	22,62	$-0,00049$
1,51851	$-0,000048$	22,585	$+0,000002$

末列之數目,係用七位的對數計算得之,故就此處之精確程度而言,有

$$x=1,\ 518512.$$

3. 牛頓之法,在若干事例方面,吾人無須多耗運算之勞,便可將其改善之.今設a爲相當佳的近似值,例如經一次用此法而得者,則$f(a)=f$已與0相當的接近[此處特將函數號下之a略去,以後用其引伸$f'(a)$, $f''(a)$時,亦仿此].吾人假定f之三次以上的方數,可不須用及.用牛頓之法時,先得進一步的近似值如下:

$$a_1=a-\frac{f}{f'},$$

由此,復可得

$$a_2=a_1-\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

但 $f(a_1)=f\left(a-\frac{f}{f'}\right)$, 故按 §88 之 (21), 於其中將 x 易爲 a, $-\frac{f}{f'}$ 代 h 時, 得

$$f(a_1)=f-\frac{f}{f'}\cdot f'+\frac{f^2}{2f'^2}f''=\frac{f^2}{2f'^2}f''.$$

按此公式, 倘將其用於 $f'(x+h)=f'\left(a-\frac{f}{f'}\right)$, 即有

$$f'(a_1)=f'-\frac{f}{f'}f''+\cdots\cdots,$$

於此,吾人祇須用其第一項便可.於是得

$$\frac{f(a_1)}{f'(a_1)}=\frac{f^2f''}{2f'^3},$$

而
$$a_2=a-\frac{f}{f'}-\frac{f''f^2}{2f'^3}.$$

故如以

(4)
$$\xi=-\frac{f}{f'}-\frac{f''f^2}{2f'^3}$$

爲近似值 a 之修正,則所得與第二次應用牛頓法時同,但計算工作已較少,蓋在多數事例內,(4)中之第二項祇須一檢即得也.

試以
$$x^3-2x-5=0$$

爲例,[1] 則

1. 此例牛頓已曾用之,其後之代數家用之者尤多

$$f'(x)=3x^2-2,\quad f''(x)=6x.$$

$$\text{於 } x=2 \text{ 時,}\quad f(x)=-1,\quad f'(x)=10$$

$$x=3\qquad f(x)=+16,$$

故如由近似值2出發,則進一步的近似值爲 $a=2,1$. 用以計算時,得

$$f(a)=0{,}061,\quad f'(a)=11{,}23,\quad f''(a)=12{,}6,$$

因而
$$\xi=-0{,}005432-0{,}000017=-0{,}005449,$$

而
$$x=2{,}094551,$$

正確至六位小數.

4. 今再將此法應用於 m 次的純方程:

$$x^m=D,$$

於此, D 爲一正的實數. 此處 $f(x)=x^m-D$, $f'(x)=mx^{m-1}$, 故由一近似值 x_0, 可得進一步的近似值

$$x_1=x_0-\frac{{x_0}^m-D}{m{x_0}^{m-1}},$$

仿此,並可得其後之近似值 $x_2, x_3, \cdots\cdots$, 廣之,有

$$x_{n+1}=x_n-\frac{{x_n}^m-D}{m{x_n}^{m-1}}. \tag{5}$$

於 $m=2$ 時,此法與 Heron 之計算平方根法相同(§23, 7.).

今可指出,任何一正數可作爲出發時之值 x_0, 即可得一收斂數列 $x_1, x_2, \cdots$ 以 $\sqrt[m]{D}$ 之正值爲極限值. 今設 $\sqrt[m]{D}=w$, 得

$$x_1-w=x_0-w-\frac{x_0{}^m-w^m}{mx_0{}^{m-1}},$$

或 (§**20**, **10**.):

$$x_1-w=(x_0-w)\left[1-\frac{x_0{}^{m-1}+wx_0{}^{m-2}+w^2x_0{}^{m-3}+\cdots\cdots}{mx_0{}^{m-1}}\right]$$

$$=(x_0-w)\left[1-\frac{\phi(x_0,w)}{mx_0{}^{m-1}}\right],$$

此處將分子用 $\phi(x_0, w)$ 以表之. 今如

1. $\qquad x_0>w$, 則 $0<\phi(x_0, w)<mx_0{}^{m-1}$,

故 $\qquad 0<x_1-w<x_0-w,$

而 $\qquad \sqrt[m]{D}<x_1<x_0.$

因 $x_1>w$, 故亦可得 $\sqrt[m]{D}<x_2<x_1$, 等等, 而可知:

數目 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ 構成一有界的單調下降數列, 亦即收斂數列.

但如

2. $\qquad 0<x_0<w$, 則 $\phi(x_0, w)>mx_0{}^{m-1}$,

故 $1-\frac{\phi(x_0, w)}{mx_0{}^{m-1}}$ 爲負, 而因 x_0-w 亦爲負, 故 x_1-w 爲正, 故自 x_1 以下仍得前例. 故不問吾人由何正數 x_0 出發, 以上之定理仍可用.

至於 $\{x_n\}$ 之極限値爲正的 $\sqrt[m]{D}$, 此則可直接由 (5) 知之, 蓋按此, 有

$$x_n{}^m-D=mx_n{}^{m-1}(x_n-x_{n+1})<mx_1{}^{m-1}(x_n-x_{n+1}),$$

而因數列之收斂性, 故

$$\lim_{n\to\infty} x_n{}^m = D,$$

因而此點亦已證明.今再用入一數列

$$x_1{}' = \frac{D}{x_1{}^{m-1}}, \quad x_2{}' = \frac{D}{x_2{}^{m-1}}, \ldots\ldots,$$

則不難知其爲單調向上者,差數 $x_n - x_n{}'$ 均爲正,且末後可至於任何小,故可知[1]:

數列 $\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & \ldots\ldots \\ x_1{}', & x_2{}', & x_3{}', & \ldots\ldots \end{matrix}$ 爲相關數列,決定 $\sqrt[m]{D}$ 之正値:

$$\lim x_n{}' = \lim x_n{}' = \sqrt[m]{D}.$$

---

1. 此項數列尙可以他法研究之,不須假定 $\sqrt[m]{D}$ 之存在,見 A. Loewy, Lehrbuch d. Algebra 1, 196.

第十七章

圓之分割

§105. 割圓方程之概念及其幾何的意義

1. 前於第七章中,已知

$$x^n-1=0 \tag{1}$$

之解,或即 n 次的單位根,在幾何上可用點表之,此項點將單位圓由 $x=1$ 出發分成爲 n 等分. 因之,方程(1)名爲割圓方程. 其根爲(§**46** 之 **6**.)

$$\omega^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1) \tag{2}$$

或

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \cdots\cdots,\ \omega^{n-1}, \tag{3}$$

於此,
$$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

共軛複數 ω^{n-k}

或
$$\omega^{-k}=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

亦與 ω^k 同屬於單位根.

2. 對於任何一整數 k, $\omega^{kn}=1$, 故(3)內如不用 $0,1,2,3,\cdots,n-1$ 爲指數,則亦可以任何一完全餘數系統 $(\mathrm{mod}\ n)$ 中之數(§**58**)代之,於是 ω^α 與 ω^β 二單位根,祇當 $\alpha\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ n)$ 時,乃能相等.

倘 k 與 n 有一最大公因子 d, 如 $k=dk'$, $n=dn'$, 則

$$\omega^k=\cos\frac{2k'\pi}{n'}+i\sin,\ \frac{2k'\pi}{n'},$$

此數同時亦即爲 $n'<n$ 次的單位根.

倘 k 與 n 互質, 則 $(\omega^k)^h=\cos\frac{2kh\pi}{n}+i\sin\frac{2kh\pi}{n}$ 於 $h=n$ 或 n 之倍數時, 乃能等於1, 故 ω^k 不能同時爲低於 n 次的單位根. 如是, 吾人稱 ω^k 爲單純的 n 次單位根. 倘於 ω^k 內使 k 遍歷一已約餘數系統 $(\mathrm{mod}\ n)$, 則卽得一切單純的 n 次單位根, 故其多爲 $\phi(n)$. 吾人亦可用一其他的單純 n 次單位根以代 ω, 將一切 n 次的單位根作爲其方數表出之.

設 n 爲一質數 p, 則每一方數 $\omega, \omega^2, \cdots\cdots, \omega^{p-1}$ 爲單純的單位根.

3. 將根因子 $x-1$ 分解出後, 可由(1)得以下之 $(n-1)$ 次的方程:

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1=0. \tag{4}$$

此方程之解, 爲 n 次的單位根 $\omega, \omega^2, \omega^3, \cdots\cdots, \omega^{n-1}$. 今將任何一方數 ω^h (h 不能爲 n 所除) 代入(4)中之 x 處, 則得

$$1+\omega^h+\omega^{2h}+\cdots\cdots+\omega^{(n-1)h}=0. \tag{5}$$

若 h 可爲 n 所除, 則此和數中之每一項爲1, 故和數爲 n.

倘 n 爲質數, 則方程(4)爲眞正意義的割圓方程.

4. 公式(2)內已將割圓方程之根, 用三角函數表出

之,故其形式為超絕的(非代數的).此種方法,與代數的解法全不相同,後者之大意前於§**99**, **1**. 中已略言之矣.蓋代數解法之實質,在將方程之解,儘可能的用代數的方法以得之,亦即將方程歸結至於次數較低的方程.割圓方程論上之眞正的問題,亦卽在於是.其最簡單的事例($n=2, 3, 4$),吾人於§**46** 之 **7**. 內已將其解決.至於從事於此普遍的問題,得有結果,此則不能不謂高斯之大貢獻.[1]

5. 在求割圓方程之解法之前,可先一及其理論之幾何的意義.與單位根 ω^k 相當的點,吾人稱之為有法 n 角形之第 k 角.

由 n 角形,吾人可用幾何作法以得 $2n$ 角形,再得 $4n$ 角形,等等.就代數上言之,即用開方法由 s_n 以得 s_{2n}:

$$s_{2n}=\sqrt{1+\frac{1}{2}s_n}-\sqrt{1-\frac{1}{2}s_n}\,. \tag{6}$$

因之,吾人之研究多角形,不妨以邊數為奇者為限.

但如 n 為奇,s_n 可直接用第 n 次的單位根以表之:

$$s_n=2\sin\frac{\pi}{n}=2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{n}\right)$$

---

1. Disquisitiones arithmeticae, Sectio septima. 當 1795 年時(高斯於時僅十八歲,初入大學之第一學期),高氏已從事於割圓方程;其發見十七角形之可作性,在 1796 年之三月廿九日(見其致 Gerling 之信, 1819 年一月六日).關於 Gauss 之先驅者 Vandermonde,又閱 A. Loewy, Jahrb. d. Math.—Ver. 27 (1918).

$$=2\sin\left(\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right),$$

故

(7) $$s_n=-i\left(\omega^{\frac{n-1}{2}}-\omega^{-\frac{n-1}{2}}\right).$$

有法 $2n$ 角形之邊 s_{2n}, 爲

$$s_{2n}=2\sin\frac{\pi}{2n}=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{n-1}{4}\cdot\frac{2\pi}{n}\right)=-2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$=-2\cos\left(\frac{n+1}{4}\cdot\frac{2\pi}{n}\right),$$

故隨 n 之形式爲 $4m+1$ 或 $4m-1$, 而有:

(8) $$\begin{aligned} n&=4m+1, \quad s_{2n}=\omega^{\frac{n-1}{4}}+\omega^{-\frac{n-1}{4}} \\ n&=4m-1, \quad s_{2n}=-\omega^{\frac{n+1}{4}}-\omega^{-\frac{n+1}{4}}. \end{aligned}$$

6. 設 n 爲二個互質數之積, $n=ab$,則可決定二正整數 k, l, 使

$$bk-al=1$$

(見 § **61**). 如是則

$$\frac{2\pi}{n}=\frac{2k\pi}{a}-\frac{2l\pi}{b},$$

而將 a 角形之第 k 點與 b 角形之第 l 點相連, 則卽得 n 角形之邊. 例如將五角形之第二角與三角形之第一角相連,卽得 15 角形之邊.

因之,以下祇須研究該項多角形,其邊數為奇的質數或其方數者.

7. 有法多邊形是否可作之問題,可由割圓方程之代數的解法以決定之.初等的幾何作法上,除直線與圓而外,不能用其他的工具,故其法限於作有限多的直線與圓.但圓與圓以及圓與直線之交點,在代數上言之,係決定於二次方程之根,反之,已知數之平方根,倘將該項數目用線段表之,則在幾何上亦可用直線與圓求得,此為解析幾何學上所已知者.故可知:

有法多角形之邊,如可用代數的若干二次方程式決定之,則該多角形可單用直線與圓以作出之,反之,倘有法n角形可單用直線與圓作出之,則n次的單位根之代數的求法,即相當的割圓方程之解法,可歸之於若干二次方程式.

§106. 十一次以下之割圓方程

1. 方程

(1)
$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1=0$$

($n-1$為一偶數),為所謂倒數方程,即其根兩兩相倒,故如α為其一根,則$\frac{1}{\alpha}$亦為其根.如是之方程,可歸為一二次方程及一次數減半之方程.試注意割圓方程之解方面,有

$$x^{n-1}=\frac{1}{x},\ x^{n-2}=\frac{1}{x^2},\ \cdots\cdots,\ x^{\frac{n+1}{2}}=\frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}},$$

並設 $\frac{n-1}{2}=\nu$, 則可知方程(1)與以下之方程同:

(2) $$\left(x^\nu+\frac{1}{x^\nu}\right)+\left(x^{\nu-1}+\frac{1}{x^{\nu-1}}\right)+\cdots\cdots+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

今設

(3) $$x+\frac{1}{x}=z,$$

則不難知

(4)
$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2,$$
$$x^3+\frac{1}{x^3}=z^3-3z$$
$$x^4+\frac{1}{x^4}=z^4-4z^2+2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

廣之, $x^k+\frac{1}{x^k}$ 可作爲 z 之 k 次的整函數表之,而方程(2)可成爲 z 之 $\frac{(n-1)}{2}$ 次的方程.此方程之解爲

$$\omega+\frac{1}{\omega},\ \omega^2+\frac{1}{\omega^2},\ \cdots\cdots,\ \omega^\nu+\frac{1}{\omega^\nu}$$

或

(5) $$2\cos\frac{2\pi}{n},\ 2\cos\frac{4\pi}{n},\ \cdots\cdots,\ 2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

試設想此項值可由解 z 之方程以得之,則 n 次的單位根可由二次方程(3)得之.

此項方法對於好多割圓方程頗可用,尤以 $n=11$ 以下之低次方程爲適當.[1]

2. 於 $n=5$ 時,方程(2)爲

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0.$$

設

$$z=x+\frac{1}{x}$$

時,得

$$z^2+z-1=0, \tag{6}$$

其解爲

$$\begin{aligned} z&=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=2\cos\frac{2\pi}{5}=2\sin\frac{\pi}{10} \\ z'&=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=2\cos\frac{4\pi}{5}=-2\cos\frac{\pi}{5} \\ &=-2\sin\frac{3\pi}{10}. \end{aligned} \tag{7}$$

在 z 方面,吾人須用平方根之正號,因 $\cos\frac{2\pi}{5}$ 爲正也.

吾人可見 z 爲十角形之邊,$-z'$ 則爲折疊的十角形之邊,可由單純的十角每次越過二點以得之.

1. 較詳言之,當爲 $p=2q+1$ 形式的質次數之割圓方程,於此,$q=\frac{p-1}{2}$ 仍爲一質數,例如 $p=5, 7, 11, 23, 47, \ldots\ldots$ 以及 $n=9$.

由方程(6),可知

$$1:z=z:(1-z)$$

此卽是,十角形之邊等於半徑作黃金分法(§38, 6.)後之大的一段

由(7),並計及(6)時,可得

$$2\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{4-z^2}=\sqrt{z+3}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}=f',$$

(8)

$$2\sin\frac{4\pi}{5}=\sqrt{4-z'^2}=\sqrt{z'+3}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}=f$$

並可知f爲有法五角形之邊,f'則爲折疊的五角形(五芒形)之邊.

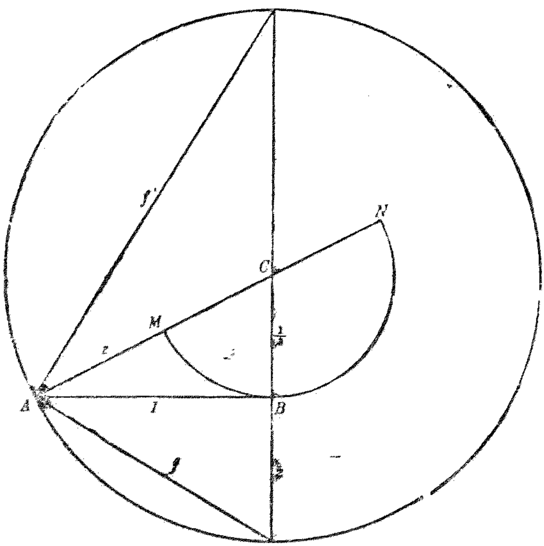

圖 21

五次的單位根爲

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}(z+if')$$

$$\omega^2=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{1}{2}(z'+if)$$

及其共軛複數.

3. 求作 z 與 $-z'$ 時, 可先作一直角三角形 ABC, 其勾股爲 $\frac{1}{2}$ 及 1, 其弦爲 $\frac{1}{2}\sqrt{5}$. 倘於其上截去一段 $\frac{1}{2}$, 則所餘者爲 z, 倘將 $\frac{1}{2}$ 加於其上, 則得 $-z'$. 圖內之 AM 爲 z, $AN=-z'$.

v. Staudt 氏曾有一極佳的作法, 能同時將諸角表出.[1]

4. 於 $n=7$ 時, 有方程

$$\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

設
$$z=x+\frac{1}{x}$$

時, 有

$$z^3+z^2-2z-1=0. \tag{9}$$

其根爲
$$z=2\cos\frac{2\pi}{7}$$

$$z_1=2\cos\frac{4\pi}{7}=-2\sin\frac{\pi}{14}$$

1. v. Staudt, Journ. f. Math. 24 (1842). Schröter, ebda 75 (1873). 並參閱所著內容極豐富的 Das Problem der Kreisteilung 一書, Leipzig 1913, 第二十四頁.

$$z_2=2\cos\frac{6\pi}{7}=-2\cos\frac{\pi}{7}.$$

此處之$-z_1$爲有法十四邊形之邊.故方程有三個實的無理根[1],而爲不可分解者.以後於§110中將指出七角形不能用直線與圓以作之.

5. 於$n=9$時,僅有六個單純的單位根,即ω, ω^2, ω^4, ω^5, ω^7, ω^8. 其ω^3與ω^6二者,同時亦爲三次單位根.因之,九次單位根之方程內,必含有三次單位根之方程,即$x^2+x+1=0$. 事實上,吾人可知

$$x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2+x+1)(x^6+x^3+1),$$

其單純的九次單位根,能充適方程

$$x^6+x^3+1=0,$$

或

$$x^3+\frac{1}{x^3}+1=0.$$

設
$$x+\frac{1}{x}=z$$

時,即得不可分解的方程[2]

$$z^3-3z+1=0, \tag{10}$$

其根爲

$$z=2\cos\frac{2\pi}{9}$$

1. 倘有有理根,則必爲整數(§90, 1.),此則不能有者.
2. 此方程與三等分角之方程相同(§8, 3.).

$$z_1=2\cos\frac{4\pi}{9}=-2\sin\frac{\pi}{18}$$

$$z_2=2\cos\frac{8\pi}{9}=-2\cos\frac{\pi}{9}.$$

z_1爲有法十八角形之邊.九角形亦不能用直線與圓以作之(§ **110**).

其餘十一角形之問題,亦與以上同,設$z=x+\frac{1}{x}$時,即可得五次的方程如下:

$$z^5+z^4-4z^3-3z^2+3z+1=0.$$

§107. 高斯之割圓方程解法

1. 今試將高斯割圓方程解法之基本原理一敍述之,並以質次數$n=p$者爲限.

前於§**90**之**10**.內,已用Schoenemann之定理,指出割圓方程.

(1) $$x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots\cdots+x+1=0$$

爲不可分解者.其解爲

(2) $$\omega, \omega^2, \omega^3, \cdots\cdots, \omega^{p-1},$$

其中無有一解,能充適一有理係數的較低次方程(§**90**, **3**.).(1)之係數所成之數目體,爲自然有理性領域$\Re$.

2. 高斯方法之基本,在其卓異的根本思想,將(2)中之解以其他順序排列之.蓋按照§ **105**之**2**.,吾人可將指數$1, 2, \cdots\cdots, p-1$易以一已約餘數系統$r_1, r_2, \cdots\cdots, r_{p-1} \pmod p$.

又按§65, 如是之已約餘數系統, 可用p之單純根之方數以表之:

$$1, g, g^2, g^3, \cdots\cdots, g^{p-2}.$$

因之, (2)中之解, 如換其次序, 則亦可列之如下:

(3) $$\omega, \omega^g, \omega^{g^2}, \omega^{g^3}, \cdots\cdots, \omega^{g^{p-2}}.$$

按此順序, 可知每一解為其前一解之g次方, 而末後之解之g次方, 則因$g^{p-1}\equiv 1 \pmod p$, 故復與第一個同: 如是, 吾人將諸解組成為一環列.

3. (3)中之g^α, 亦可用其最小(正或負)餘數$\pmod p$代之.為簡單計, 今採用以下之記法:[1]

(4) $$g^\alpha \equiv [\alpha] \bmod p,$$

則(3)中之解可寫作下式

(5) $$\omega^{[0]}, \omega^{[1]}, \omega^{[2]}, \cdots\cdots, \omega^{[p-2]}.$$

關於符號$[\alpha]$, 適用以下之規律:

1. 祇當$\alpha \equiv \alpha' \bmod (p-1)$時, 乃能$[\alpha]=[\alpha']$.

2. $[\alpha][\beta]=[\alpha+\beta]$.

3. $[p-1]=[0]\equiv 1 \bmod p$.

(5)之和與(2)之和同, 按(1), 可知其為-1, 故

(6) $$\omega^{[0]}+\omega^{[1]}+\omega^{[2]}+\cdots\cdots+\omega^{[p-2]}=-1$$

---

1. 為避免誤會計, 此處須說明一點, 卽高斯之用此號$[\alpha]$, 其意義與此不同, 為ω^α之代.

4. 今證明一定理如下:

凡係數爲有理數的 ω 之整函數,用置換 $(\omega, \omega^{[1]})$ 時數值上爲不變者,[1] 其值爲有理的.

凡 ω 之整函數,如計及 $\omega^p=1$ 及方程 (1) 時,均可使其成爲下式:

$$h(\omega)=a_1\omega+a_2\omega^2+\cdots\cdots+a_{p-1}\omega^{p-1}. \tag{7}$$

除順序而外,方數 ω^μ 與 $\omega^{[\lambda]}$ 相同,故可作爲後者之齊次的一次函數表出之,即

$$h(\omega)=c_0\omega^{[0]}+c_1\omega^{[1]}+\cdots\cdots+c_{p-2}\omega^{[p-2]},$$

而如原來的整函數之係數爲有理的,則 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{p-1}$ 與 $c_0, c_1, \cdots\cdots, c_{p-2}$ 亦然.今將 ω 易爲 $\omega^{[1]}$, 則 $h(\omega)$ 之值不變,故

$$h(\omega)=c_0\omega^{[1]}+c_1\omega^{[2]}+\cdots\cdots+c_{p-2}\omega^{[0]}$$

而

$$0=(c_{p-2}-c_0)\omega^{[0]}+(c_0-c_1)\omega^{[1]}$$
$$+(c_1-c_2)\omega^{[2]}+\cdots\cdots+(c_{p-3}-c_{p-2})\omega^{[p-2]}$$

倘用 ω 以除之,則將餘一 ω 之 $(p-2)$ 次的方程,其係數爲有理數.但因割圓方程之不可分解,此爲不可能者,故必方程之係數均爲 0,

$$c_0=c_1=c_2=\cdots\cdots=c_{p-2},$$

而函數之值爲

$$h(\omega)=c_0(\omega^{[0]}+\omega^{[1]}+\cdots\cdots+\omega^{[p-2]})=-c_0.$$

---

1. 即將 ω 易爲 $\omega^{[1]}=\omega^g$ 時,仍無變動.

倘 $h(\omega)$ 之原式內之係數爲整數,則 $h(\omega)$ 之值亦爲整數.

5. 經置換 $(\omega, \omega^{[1]})$ 後. $\omega^{[0]}, \omega^{[1]}, \cdots\cdots, \omega^{[p-2]}$ 易成爲 $\omega^{[1]}, \omega^{[2]}, \cdots\cdots, \omega^{[0]}$, 故此置換與環錯列

$$\pi=(0, 1, 2, \cdots\cdots, p-2)$$

同其意義.由此錯列之反復的使用,可得週期(§ **52**, **2**.)

$$(\mathfrak{C}) \qquad 1, \pi, \pi^2, \cdots\cdots, \pi^{p-2},$$

構成一 $(p-1)$ 級的錯列類,名爲環列類 $\mathfrak{C}$. 因之,倘用 § **98** 中之概念,則定理 4. 亦可以如次之形式述之:

環列類之每一不變式,[1] 其值爲有理的.

反之,亦不難知:

凡係數爲有理數的單位根之整函數,其值爲有理者,亦爲環列類之不變式.

蓋如是之函數,可使其成爲(7)之形式,倘其值爲有理數 c, 則因割圓方程之不可分解,可知

$$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_{p-1}=-c.$$

因而函數之式爲

$$-c(\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{p-1})=-c(\omega^{[0]}+\omega^{[1]}+\cdots+\omega^{[p-2]}),$$

而此則爲環列類之不變式.

1. 此處所謂不變式,其意義與§98, 4. 內者同,爲數值上之不變式,故爲方程之根之有理函數,對於一類之一切錯列,其數值不變者.

由此二定理,按§98之4.,可知

<u>環列類$\mathfrak{C}$爲割圓方程之葛氏類.</u>

6. 求解割圓方程時,可按§99, 1.中之法爲之,由推解式以決定屬類之不變式,將其添加入$\mathfrak{R}$內.

$\mathfrak{C}$之等級數$p-1$恆爲偶數,故非爲質數.今設

$$p-1=ef, \tag{8}$$

則

$$1,\ \pi^e,\ \pi^{2e},\ \cdots\cdots,\ \pi^{(f-1)e} \tag{$\mathfrak{C}_e$}$$

爲f級的$\mathfrak{C}$之環列亞類,而按§52,不難知[1]其爲特殊的屬類.與錯列π^e相當者,爲置換$(\omega, \omega^{[e]})$.

按(8)之分解法,可將(5)中之解分爲e類,每類f個,其法在由一解出發,取其後之第e個用之.倘求每類內之解之和,則得f項的週期

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \omega^{[0]}+\omega^{[e]}+\omega^{[2e]}+\cdots\cdots+\omega^{[(f-1)e]}\\
\eta_1 &= \omega^{[1]}+\omega^{[e+1]}+\omega^{[2e+1]}+\cdots\cdots+\omega^{[(f-1)e+1]}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_{e-1} &= \omega^{[e-1]}+\omega^{[2e-1]}+\cdots\cdots+\omega^{[p-2]}
\end{aligned} \tag{9}$$

此爲各不相同者,[2]而由3.中之規律,不難知其構成一

1. 吾人可注意,在環錯列之組合方面,交易律可以適用.
2. 此可由割圓方程之不可分解性以知之.

系統的共軛不變式,屬於屬類 $\mathfrak{C}_e$ 者.故按 § **98** 之 **5.** 及 **9.**, 可知:

e 個週期 $\eta_0, \eta_1, \cdots\cdots, \eta_{e-1}$ 爲一 e 次不可分解的方程之解,其係數爲整數,且每一週期可有理的用其中之一以表之.

7. 欲作此方程時,不必先求 $\eta_0, \eta_1, \cdots\cdots, \eta_{e-1}$ 之對稱函數,而可用以下之定理:

屬類 $\mathfrak{C}_e$ 之不變式,可作爲週期之齊次的一次函數表之,其係數爲有理數.

蓋如是之不變式,爲 ω 之整函數,其係數爲有理數,故按 **4.** 可作如次之式:

$$\begin{aligned}\phi(\omega)=c_0\omega^{[0]}+c_1\omega^{[1]}+\cdots+c_{e-1}\omega^{[e-1]}\\ +c_e\omega^{[e]}+c_{e+1}\omega^{[e+1]}+\cdots+c_{2e-1}\omega^{[2e-1]}\\ +c_{2e}\omega^{[2e]}+c_{2e+1}\omega^{[2e+1]}+\cdots+c_{3e-1}\omega^{[3e-1]}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +c_{[f-1]e}\omega^{[(f-1)e]}+\cdots+c_{p-2}\omega^{[p-2]}.\end{aligned}$$

今用 $\omega^{[e]}$ 以代 ω, 則得

$$\begin{aligned}\phi(\omega^{[e]})=c_0\omega^{[e]}+c_1\omega^{[e+1]}+\cdots+c_{e-1}\omega^{[2e-1]}\\ +c_e\omega^{[2e]}+c_{e+1}\omega^{[2e+1]}+\cdots+c_{2e-1}\omega^{[3e-1]}\\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +c_{[f-1]e}\omega^{[e]}+\cdots+c_{p-2}\omega^{[e-1]}.\end{aligned}$$

用置換 $(\omega, \omega^{[e]})$ 時, $\phi(\omega)$ 之值不變,故可知

$$\phi(\omega^{[e]})-\phi(\omega)=0=(c_0-c_e)\,\omega^{[e]}+(c_1-c_{e+1})\,\omega^{[e+1]}+\cdots\cdots+(c_e-c_{2e})\,\omega^{[2e]}+(c_{e+1}-c_{2e+1})\,\omega^{[2e+1]}+\cdots\cdots$$

因割圓方程之不可分解性,故可由此知

$$c_0=c_e=c_{2e}=\cdots=c_{[f-1]e},$$
$$c_1=c_{e+1}=c_{2e+1}=\cdots=c_{[f-1]e+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

廣之,$c_\alpha=c_{ke+\alpha}$. 今於 $\phi(\omega)$ 之式內將同係數之項合併之,則即得

$$\phi(\omega)=c_0\eta_0+c_1\eta_1+\cdots+c_{e-1}\eta_{e-1}, \tag{10}$$

如定理內所肯定者.

倘 $\phi(\omega)$ 之原來係數爲整數,則 η_α 之係數亦爲整數.

8. 根據此定理,每二週期之積,可用(10)之形式以表之,其係數爲整數.

例如:[1]

$$\begin{aligned}\eta_0\eta_0&=a_{00}\eta_0+a_{01}\eta_1+\cdots+a_{0,e-1}\eta_{e-1}\\ \eta_0\eta_1&=a_{10}\eta_0+a_{11}\eta_1+\cdots+a_{1,e-1}\eta_{e-1}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta_0\eta_{e-1}&=a_{e-1,0}\eta_0+a_{e-1,1}\eta_1+\cdots\cdots+a_{e-1,e-1}\eta_{e-1}\end{aligned} \tag{11}$$

1. 構成方程時,可計及 $\eta_0+\eta_1+\cdots\cdots+\eta_{e-1}=-1$,此與(6)係同意義者.

或

$$(a_{00}-\eta_0)\eta_0+a_{01}\eta_1+\cdots\cdots+a_{0,e-1}\eta_{e-1}=0$$

$$a_{10}\eta_0+(a_{11}-\eta_0)\eta_1+\cdots\cdots+a_{1,e-1}\eta_{e-1}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{e-1,0}\eta_0+a_{e-1,1}\eta_1+\cdots\cdots+(a_{e-1,e-1}-\eta_0)\eta_{e-1}=0$$

因割圓方程之不可分解, $\eta_0, \eta_1, \cdots\cdots, \eta_{e-1}$ 不能有為0者, 故此系統之齊次方程,必須其行列式為0, 乃能成立(§**76**,**11**.), 因之:

週期 η_0 為方程

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} a_{00}-z & a_{01}\cdots\cdots\cdots\cdots a_{0,e-1}\cdots\cdots \\ a_{10} & a_{11}-z\cdots\cdots\cdots a_{1,e-1}\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{e-1,0} & a_{e-1,1}\cdots\cdots\cdots a_{e-1,e-1}-z \end{vmatrix}=0$$

之解,而因此為 e 次的方程, 又因不可解之故, 故一切週期 $\eta_0, \eta_1, \cdots\cdots, \eta_{e-1}$ 均為其解.

9. 倘用此方程將週期決定, 則割圓方程之根, 即可用以下之定理以得之:

構成週期的 f 個單位根, 能充適一 f 次的方程, 其係數為週期之一次的整數函數.

此定理可直接由**7**. 得之, 因 f 個單位根之對稱基本函數為 $\mathfrak{G}_e$ 之不變式也.

因之，$p-1$ 個單位根方面，有 e 個 f 次的方程:

$$F_1(z)=0,\ F_2(z)=0,\ \cdots\cdots,\ F_e(z)=0,$$

而

$$z^{p-1}+z^{p-2}+\cdots\cdots+z+1=F_1(z)F_2(z)\cdots\cdots F_e(z),$$

此即是，在自然有理性領域內爲不可分解之割圓方程，經添入週期後，成爲可分解者．按之定理6，吾人祇須添入一週期便可，而求單位根時，亦祇須解一個方程 $F_a(z)=0$，蓋旣得一單位根後，即可求其方數以得其餘者．

10. 方程 $F_a(z)=0$ 亦可按(1)之法從事之．今設 f 亦可分解成爲因子

$$f=e'f',$$

則
$$1,\ \pi^{ee'},\ \pi^{2ee'},\ \cdots\cdots,\ \pi^{(f'-1)ee'} \qquad (\mathfrak{C}_{ee'})$$

爲 $\mathfrak{C}_e$ 之特殊的屬類，其等級爲 f'，而每一週期分解成爲 e' 個亞週期，爲 $\mathfrak{C}_{ee'}$ 之共軛不變式，例如 η_0 可分解成爲以下諸亞週期:

$$\eta_0{}'=\omega^{[0]}+\omega^{[ee']}+\omega^{[2ee']}+\cdots\cdots+\omega^{[(f'-1)ee']}$$

$$\eta_e{}'=\omega^{[e]}+\omega^{[e(e'+1)]}+\omega^{[e(2e'+1)]}+\cdots\cdots+\omega^{[e(\overline{f'-1}\cdot e'+1)]}$$

…………………………………………………………………

$$\eta'_{e(e'-1)}=\omega^{[e(e'-1)]}+\omega^{[e(2e'-1)]}+\cdots\cdots+\omega^{[e(f-1)]}.$$

用置換 $(\omega,\ \omega^{[e]})$ 時，此項亞週期作一環錯列，故其對線基本函數爲 $\mathfrak{C}_e$ 之不變式，而按**7.**，可知其可一次的齊次的用 $\eta_0,\cdots\cdots,\eta_{e-1}$ 表之．因之:

構成週期η_a的e'個亞週期,能充適一e'次的方程,其係數可一次的且整數的用$\eta_0, \cdots\cdots, \eta_{e-1}$以表之.

按§98之**6.**,此方程於有理性領域$\mathfrak{R}(\eta_a)$內[1]爲不可分解者,而按§98之**7.**,則ee'個亞週期中,其每個可用其中之一以表之.

此外,並可知亞週期內之單位根,爲一f'次的方程之解,其係數爲亞週期所組成.

11. 倘f'尙可分解成爲因子,則吾人仍仿前法爲之,將亞週期η'再加以分解.此法可繼續應用,至不能分解爲止.於是末後即可得高斯之法:[2]

設
$$p-1=\alpha\beta\gamma\cdots\cdots\nu$$
爲所得之質因子分解,並設
$$\frac{p-1}{\alpha}=a, \quad \frac{p-1}{\alpha\beta}=b, \quad \frac{p-1}{\alpha\beta\gamma}=c, \cdots\cdots$$

今選取p之一單純根,將$p-1$個單位根分配於α個週期η,每個有a項,再於此項週期分解爲β個週期η',每週期有b項,並再繼續分解之,使每個週期成爲γ個週期η'',有c項,等等.

1. 週期η決定於整係數的α次方程.

---

1. 此即是,將η_a添入自然有理性領域後所得之有理性領域.
2. Disqu. arithm. §352.

2. 將此方程之一根η添入後,週期η'爲α個β次的方程所決定,其係數爲$\Re(\eta)$內之數.

3. 再添入此項方程之一根η'後,週期η''爲$\alpha\beta$個γ次的方程所決定,其係數爲$\Re(\eta, \eta')$內之數.

如是繼續用此法,則末後可得一ν次的方程,僅以單位根爲解.

12. 用高斯此法,倘$p-1$爲2之方數,則割圓方程之解法,可歸爲若干二次方程之解.倘$p-1$尚有其他的質數含於其內,則割圓方程之解法須歸爲高於二次的不可分解之方程,不能用若干平方根以求其解者(參閱§109,4.).因之,倘計及§105之7.時,得定理如下:

將圓分爲n等分,或求作有法n角形,祗當n不含有奇的質因子或僅含有2^m+1形式者,且僅單純的含之時,乃能用直線與圓以作之.

高氏此定理,實爲自古以來初等數學上之重要進步,能使吾人於向所知之可作的多角形而外,確知尚有何項多角形可作,何項則不可作.

欲使2^m+1爲一質數,則必m爲2之方數而後可,蓋如m含有奇因子μ,如$m=q\mu$,則$2^m+1=(2^q)^\mu+1$可爲2^q+1所除.因之,吾人所可論及者,爲$2^{2^\nu}+1$形式之數目,事實上,此於$\nu=0, 1, 2, 3, 4$時爲質數:

$$\begin{array}{ll} \nu=0 & 2^1+1=3 \\ 1 & 2^2+1=5 \\ 2 & 2^4+1=17 \\ 3 & 2^8+1=257 \\ 4 & 2^{16}+1=65537. \end{array}$$

范瑪曾臆測 $2^{2^\nu}+1$ 形式之數均爲質數,但歐拉[1]曾證明 $\nu=5$ 時,有

$$2^{32}+1=4294967297=641\cdot 6700417.$$

於 $\nu=6$ 及 $\nu=7$ 時,所得亦爲非質數;[2] 因之,奇邊數的多角形之可作者,其數之多究爲有限或無限,此問題尙未能解答.

§108. 十三次與十七次的割圓方程

1. 於 $p=13$ 時, $g=2$ 爲單純根 (參閱 § **56, 3.**). § **170** (5) 內之單純根,倘將其指數約爲絕對最小餘數 (mod 13) 時,爲

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^4,\ \omega^{-5},\ \omega^3,\ \omega^6,\ \omega^{-1},\ \omega^{-2},\ \omega^{-4},\ \omega^5,\ \omega^{-3},\ \omega^{-6}.$$

按照 $12=3\cdot 4$ (卽 $e=3,\ f=4$) 之分解法,吾人可將其分配於三個週期:

$$\eta_0=\omega+\omega^{-5}+\omega^{-1}+\omega^5$$

1. Euler, Comm. Petrop. 1732-33.
2. Lucas, Comptes rendus 1877 (2) S. 136.

$$\eta_1=\omega^2+\omega^3+\omega^{-2}+\omega^{-3} \tag{1}$$

$$\eta_2=\omega^4+\omega^6+\omega^{-4}+\omega^{-6},$$

並作乘積 $\eta_0\eta_0$, $\eta_0\eta_1$, $\eta_0\eta_2$. 倘設 $\omega^k+\omega^{-k}=\gamma_k$, 則不難知:

$$\eta_0\eta_0=\gamma_2+\gamma_3+2\gamma_4+2\gamma_6+4$$

$$\eta_0\eta_1=\gamma_1+2\gamma_2+2\gamma_3+\gamma_4+\gamma_5+\gamma_6$$

$$\eta_0\eta_2=2\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4+2\gamma_5+\gamma_6$$

或於第一方程內將 4 易為 $-4(\eta_0+\eta_1+\eta_2)$, 則有

$$\eta_0\eta_0=-4\eta_0-3\eta_1-2\eta_2$$

$$\eta_0\eta_1=\eta_0+2\eta_1+\eta_2 \tag{2}$$

$$\eta_0\eta_2=2\eta_0+\eta_1+\eta_2$$

由此, 按 §**107, 8.**, 可知 η_0, η_1, η_2 為三次方程

$$\begin{vmatrix} -4-z & -3 & -2 \\ 1 & 2-z & 1 \\ 2 & 1 & 1-z \end{vmatrix}=0$$

或

$$z^3+z^2-4z+1=0 \tag{3}$$

之根.

今於 (1) 內將 ω 之值代入, 即

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{13}+i\sin\frac{2\pi}{13},$$

則有[1]

1. 以下常須用及公式

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\eta_0=2\left(\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}\right)=4\cos\frac{4\pi}{13}\cos\frac{6\pi}{13},$$

(4) $$\eta_1=2\left(\cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}\right)=4\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{5\pi}{13},$$

$$\eta_2=2\left(\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}\right)=4\cos\frac{2\pi}{13}\cos\frac{10\pi}{13}$$

$$=-4\cos\frac{2\pi}{13}\cos\frac{3\pi}{13}.$$

由此可知方程(3)僅有實解,且因後者之式中一切 cos 均爲正,故有二正解及一負解.倘將其按大小之次序排列之,則爲

$$\eta_2<0<\eta_0<\eta_1.$$

按 §**107** 之 **6.**, η_1 與 η_2 可有理的用 η_0 表出之.因

$$\eta_1+\eta_2=-1-\eta_0,$$

而按(2)中之第一方程

$$3\eta_1+2\eta_2=-4\eta_0-\eta_0^2,$$

故可得

(5) $$\begin{aligned}\eta_1&=-\eta_0^2-2\eta_0+2\\ \eta_2&=\eta_0^2+\eta_0-3\end{aligned}$$

2. 今將 η_0 添加入之,並將其分解爲亞週期:

(6) $$\begin{aligned}\eta_0'&=\omega+\omega^{-1}=2\cos\frac{2\pi}{13}\\ \eta_3'&=\omega^5+\omega^{-5}=2\cos\frac{10\pi}{13}=-2\cos\frac{3\pi}{13},\end{aligned}$$

如是則

$$\eta_0{}' + \eta_3{}' = \eta_0, \quad \eta_0{}'\eta_3{}' = \eta_2,$$

故 $\eta_0{}'$ 與 $\eta_3{}'$ 爲二次方程

(7) $$t^2 - \eta_0 t + \eta_2 = 0$$

或 $$t^2 - \eta_0 t + \eta_0{}^2 + \eta_0 - 3 = 0$$

之根. 按 (6), 可知其二解中之一爲正, 其他爲負. 正者爲 $\eta_0{}'$.

今再將 $\eta_0{}'$ 添加入之, 則單位根 ω 決定於方程

(8) $$\omega^2 - \eta_0{}'\omega + 1 = 0.$$

其解爲共軛複數, ω 之虛數部分爲正者.

如是, 十三次的割圓方程, 按照 $12=3\cdot2\cdot2$ 之分解法, 已歸爲一三次方程與二二次方程, 固爲理論上所已知者.

3. 於 $p=17$ 時, $g=6$ 爲一單純根. 單位根爲

$$\omega,\ \omega^6,\ \omega^2,\ \omega^{-5},\ \omega^4,\ \omega^7,\ \omega^8,\ \omega^{-3},\ \omega^{-1},\ \omega^{-6},\ \omega^{-2},$$
$$\omega^5,\ \omega^{-4},\ \omega^{-7},\ \omega^{-8},\ \omega^3.$$

今作二週期:

(9) $$\begin{aligned}\eta_0 &= \omega + \omega^2 + \omega^4 + \omega^8 + \omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4} + \omega^{-8},\\ \eta_1 &= \omega^6 + \omega^{-5} + \omega^7 + \omega^{-3} + \omega^{-6} + \omega^5 + \omega^{-7} + \omega^3.\end{aligned}$$

η_0 中之指數與偶方數 $g^0, g^2, g^4, \cdots$ 相等餘 (mod 17), η_1 中者則與奇方數 $g^1, g^3, g^5, \cdots$ 等餘. 由此可知 (參閱 §**67** 之 **2.**):

η_0 內之指數遍歷 17 之平方餘數, η_1 內者則遍歷平方非餘數.

此於 $\frac{p-1}{2}$ 項的週期均適用之.

今用 ρ 表平方餘數, 用 ν 表非餘數, 則可寫作:

$$\eta_0=\sum_{\rho}\omega^{\rho},\quad \eta_1=\sum_{\nu}\omega^{\nu}.$$

週期之和爲 $\eta_0+\eta_1=-1$.

其乘積可作

$$\eta_0\eta_1=\sum\omega^{\rho+\nu}.$$

此爲 64 項之和數, 吾人並可知在 64 個指數 $\rho+\nu$ 中, 已約餘數系統 (mod 17) 之每一數目, 均以四次發現. 例如指數 1, 其四次爲 $\omega^4\cdot\omega^{-3}$, $\omega^8\cdot\omega^{-7}$, $\omega^{-2}\cdot\omega^3$, $\omega^{-4}\cdot\omega^5$. 故若

$$1\equiv\rho+\nu\equiv\rho'+\nu'\equiv\rho''+\nu''\equiv\rho'''+\nu''' \pmod{17},$$

則於任何一與 17 相互質之數 k, 有

$$k\equiv k\rho+k\nu\equiv k\rho'+k\nu'\equiv k\rho''+k\nu''\equiv k\rho'''+k\nu''',$$

而因 $k\rho$ 與 $k\nu$ 不能同爲餘數或非餘數, 故此四者在 $\rho+\nu$ 之內. 因之, 事實上, 每一指數 k 以四次發現, 而

$$\eta_0\eta_1=4\sum\omega^k=-4.$$

於是吾人對於 η_0, η_1 得一二次方程如下:

$$z^2+z-4=0, \tag{10}$$

其判定式爲 $D=17$. 今於 (9) 內將

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}$$

代入,則有

$$\eta_0=2\left(\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17}+\cos\frac{16\pi}{17}\right)$$

$$=4\left(\cos\frac{3\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17}+\cos\frac{12\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\right)$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{3\pi}{17}-\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{5\pi}{17}\right)>0.$$

但

$$\eta_1=2\left(\cos\frac{12\pi}{17}+\cos\frac{10\pi}{17}+\cos\frac{14\pi}{17}+\cos\frac{6\pi}{17}\right)$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{11\pi}{17}+\cos\frac{10\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\right)$$

$$=-4\left(\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{6\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{7\pi}{17}\right)<0.$$

故可知 η_0 爲 (10) 之正解, η_1 爲其負解:

$$\eta_0=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\qquad \eta_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$$

4. 今再將 η_0 分解成爲亞週期:

$$\eta_0'=\omega+\omega^4+\omega^{-1}+\omega^{-4}=4\cos\frac{3\pi}{17}\cos\frac{5\pi}{17}$$

(11)

$$\eta_2'=\omega^2+\omega^8+\omega^{-2}+\omega^{-8}=-4\cos\frac{6\pi}{17}\cos\frac{7\pi}{17}$$

則有

$$\eta_0'+\eta_2'=\eta_0,\qquad \eta_0'\eta_2'=\eta_0+\eta_1=-1,$$

故 η_0' 與 η_2' 爲方程

$$(12) \qquad z^2-\eta_0 z-1=0$$

之根,且 η_0' 爲正者,η_2' 爲負者.

仿此,並有

$$\eta_1'=\omega^6+\omega^7+\omega^{-6}+\omega^{-7}=-4\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}$$

$$\eta_3'=\omega^{-5}+\omega^{-3}+\omega^5+\omega^3=4\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}$$

以及方程

$$(13) \qquad z^2-\eta_1 z-1=0.$$

於此,η_1' 爲其負解,η_3' 則爲正解.

5. 此四個亞週期必可有理的用其中之一(及 η_0)以表出之.今用 η_0' 以表 η_3',因吾人即須用之也.先所得者爲

$$\eta_0'\eta_3'=2(\omega+\omega^{-1}+\omega^4+\omega^{-4})+\omega^2+\omega^{-2}+\omega^8$$

$$+\omega^{-8}+\omega^6+\omega^{-6}+\omega^7+\omega^{-7}$$

$$=2\eta_0'+\eta_2'+\eta_1'=\eta_0'+\eta_0+\eta_1'$$

$$=\eta_0'+\eta_0+\eta_1-\eta_3'=\eta_0'-1-\eta_3',$$

故

$$\eta_3'=\frac{\eta_0'-1}{\eta_0'+1}.$$

η_0' 之此種分數函數式,尚可化之爲 η_0' 與 η_0 之整函數式.用 (12) 與 (10) 時,有

$$\eta_3'=\frac{(\eta_0'-1)^2}{\eta_0'^2-1}=\frac{\eta_0'^2-2\eta_0'+1}{\eta_0\eta_0'}$$

$$=\frac{\eta_0\eta_0'-2\eta_0'+2}{\eta_0\eta_0'}=1-\frac{2}{\eta_0}+\frac{2}{\eta_0\eta_0'}$$

$$=1-\frac{\eta_0+1}{2}+\frac{1}{2}(\eta_0+1)(\eta_0'-\eta_0)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\eta_0}{2}+\frac{1}{2}\eta_0\eta_0'+\frac{\eta_0'}{2}-\frac{\eta_0}{2}-\frac{1}{2}(4-\eta_0)$$

或

(14) $$\eta_3'=\frac{1}{2}(\eta_0\eta_0'+\eta_0'-\eta_0-3).$$

6. 今再將 η_0' 分解之爲

(15) $$\eta_0''=\omega+\omega^{-1}=2\cos\frac{2\pi}{17}$$
$$\eta_4''=\omega^4+\omega^{-4}=2\cos\frac{8\pi}{17}$$

則 $$\eta_0''+\eta_4''=\eta_0',\qquad \eta_0''\eta_4''=\eta_3',$$

故 η_0'' 與 η_4'' 爲

(16a) $$z^2-\eta_0'z+\eta_3'=0$$

之根,而按 (14), 此方程亦可作

(16b) $$z^2-\eta_0'z+\frac{1}{2}(\eta_0\eta_0'+\eta_0'-\eta_0-3)=0,$$

並可知 η_0'' 爲二解中之較大者.

末後,吾人卽可由方程

(17) $$\omega^2-\eta_0''\omega+1=0$$

以得單位根 ω. 此方程有二共軛根, ω 之虛數部分爲正者.

7. 如是, 十七次的割圓方程之解法, 可歸爲四個二

次方程之解,與 $16=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ 之分解相當.求作十七角形時,祇須至 $\eta_0''=2\cos\frac{2\pi}{17}$ 為止.至於初等幾何的作法,則為數殊多,所可提及者,為 Staudt 氏之法,其所用者除外切圓而外,僅直線而已.[1]

1 v. Staudt, Journ. f. Math. 24 (1842), Schröter, ebda 75 (1873). 關於種種作法之概觀,見 R. Goldenring 所著之 Die elementargeometrischen Konstruktionen des regelmässigen Siebzehnecks, Leipzig 1915. 並參閱 Enriques, Fragen der Elementargeometrie 2, Leipzig 1907; Mitzscherling, Das Problem der Kreisteilung, ebda 1913. 關於純粹的幾何分析,見 Vahlen, Konstruktionen und Approximationen, Leipzig 1911. 倘可用平方根以求解之割圓方程 $x^{257}-1=0$ 曾由 F. J. Richelot, A. Cayley 及 J. Schumacher 等研究之(見 Journ. f. Math. 9,1833, 41,1851; Arch. d. Math. u. Phys. [3] 20, 1913).

第十八章

不可能之證明

§109. 可用平方根以求解之方程

1. 有若干著名的幾何作法問題，自古以來，久未有結果可言，直至後來方證明其不可能，即不能用直線與圓以作之[1]例如三等分角，求立方體之倍，作有法七角形，以及求圓之面積等問題是.

幾何上之可作性，在代數上言之，爲所求之量，可由已知者用若干平方根以推得之.吾人亦可簡述之如下:

凡可作之量 x，必在一有理性領域內，此領域係將若干平方根陸續添加入已知量所成之領域而成.

此項平方根之添加順序，有時可以不同.例如求 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ 時,吾人可隨意先求其中之一根，再求其他者.但如 $\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{\gamma}}$ 一式，則須先求 $\sqrt{\gamma}$，然後方可求 $\sqrt{\alpha+\beta\sqrt{\gamma}}$.吾人今用 $\mathfrak{R}$ 以表原來之有理性領域，並設想決定一種順序，將平方根按此順序添加入之.末後所添加入之平方根，以 $\sqrt{\theta}$ 表之.尚未將 $\sqrt{\theta}$ 添加入之有理性領域，名爲末

1. 據 Plutarch 之言，則謂柏拉圖已曾提出此規則，即在嚴格的幾何作法上，除直線與圓而外，不得用其他之工具．關於直線與圓之作法理論，見 Enriques, Fragen der Elementargeometrie 2, Leipzig, 1907

後之次一個有理性領域,如是則$\sqrt{\theta}$雖不在其中,而$\sqrt{\theta}$之一切偶次方數均在其內,故凡可作之量x,均可作如次之形式表之:

$$x=\frac{a+b\sqrt{\theta}}{c+d\sqrt{\theta}},$$

於此,a, b, c, d爲末後之次一個領域内之量.倘$d\neq0$,則可用$c-d\sqrt{\theta}$乘此分數,得

$$x=\frac{(a+b\sqrt{\theta})(c-d\sqrt{\theta})}{c^2-d^2\theta},$$

而如設

$$y=\frac{ac-bd\theta}{c^2-d^2\theta},\quad z=\frac{bc-ad}{c^2-d^2\theta},$$

則

(1) $$x=y+z\sqrt{\theta},$$

於此,y與z在末後之次一個有理性領域内.$c^2-d^2\theta$決不能爲0,因θ非爲末後次一個領域内之量之平方.

2. 由(1),可知$\sqrt{\theta}$之號如變動而x之值不變,則x必在末後次一個領域内.蓋由$x=a+b\sqrt{\theta}=a-b\sqrt{\theta}$,可知$b=0$而$x=a$也.由此,並可知倘有一數目,對於一切添加入的平方根之符號改變,不受影響者,此數必屬於原來之有理性領域内,反之,倘有一數目,不能如是者,即不能有理的在原有數目之中.

3. 按(1),亦可知x爲二次方程之根:

$$f(x)=x^2-2yx+(y^2-\theta z^2)=0,$$

其係數在末後次一個有理性領域内.除$x=y+z\sqrt{\theta}$而

外,尚有其他一解爲$x_1=y-z\sqrt{\theta}$. 倘$\sqrt{\theta_1}$爲末後次一個添加入的平方根,則方程$f(x)=0$亦可表之如下:

$$f(x)=\phi(x)+\sqrt{\theta_1}\,\psi(x)=0.$$

今用$\phi-\sqrt{\theta_1}\,\psi$乘之,則得一四次方程:

$$f_1(x)=\phi(x)^2-\theta_1\,\psi(x)^2=0$$

其中已無有$\sqrt{\theta_1}$. 倘用$\sqrt{\theta}=r$, $\sqrt{\theta_1}=r_1$以表平方根之正值,並以$x(r,r_1)$表明x之與此二值有關,則四次方程之根爲

$$x(r,r_1);\quad x(-r,r_1);\quad x(r,-r_1);\quad x(-r,-r_1).$$

此方程復可化爲如次之形式:

$$f_1(x)=\phi_1(x)+\sqrt{\theta_2}\,\psi_1(x)=0,$$

於此,$\sqrt{\theta_2}$爲$\sqrt{\theta_1}$前之平方根.由此,復可得八次之方程:

$$f_2(x)=\phi_1(x)^2-\theta_2\psi_1(x)^2=0.$$

如是往後類推,至一切添加入的平方根用盡爲止.

4. 如是,倘添加入的平方根有m個,則末後得一2^m次的方程$F(x)=0$,其係數在$\mathfrak{R}$內,除x而外,$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\mu$亦爲其根,而此項值則可由$x$以得之,其法在將其中所有平方根之號以種種方式變之,且按方程之構成方法,亦可知其無有他根.事實上,根之數$\mu+1$[1]亦恰爲2^m,惟其

1. 除x而外,尚有其他的根如下:每一個平方根改變其號所得之$\binom{m}{1}$個根,每二個同時改變其號所得之$\binom{m}{2}$個,等等,故共有

$$1+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\cdots\cdots=2^m \text{ 個根}$$

值不必盡異.例如$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$一式,於$\sqrt{b}$之號改變時,並不發生變動.今如$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\nu$為不同之根,$x$為一不定之變數,則按**2.**,可知

$$\Phi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_\nu)$$

之係數為$\mathfrak{R}$中之數目,蓋$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\nu$之對稱函數,於平方根之一切符號改變無關也.

同時,又可知$\Phi(x)$於$\mathfrak{R}$內為不可分解者,蓋如有一因式$\Phi_1(x)$,僅有$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\nu$中之一部分數為根,則其係數不能為$\mathfrak{R}$中之數,因此項根之對稱函數,不能對於平方根之一切符號變動不受影響(參閱§98之6.).

此外,亦可知$x_1, \cdots\cdots, x_\nu$中每一根,於$F(x)$中必等多的含於其內,蓋不能$F(x)$之根之對稱函數,不能對於平方根之一切符號改變不受影響,因而不屬於$\mathfrak{R}$矣.由此可知$F(x)$為$\Phi(x)$之方數,$F(x)$之次數2^m為$\Phi(x)$之次數之倍數,而得定理如下:[1]

倘一不可分解的方程,可僅用平方根以求其解,則其次數必為2之方數.

1. L. Wantzel, Journ. de math. 2 (1837), J. Petersen, Theorie d. algebr. Gleichungen, Kopenhagen 1878. 此定理實為以下定理之一特例:倘一不可分解的n次方程,可用h_1次,h_2次,$\cdots\cdots h_k$次的諸方程以解之,則n必為$h_1, h_2, \cdots\cdots, h_k$之除數.於

$$h_1=h_2=\cdots\cdots=h_k=2$$

時,卽得以上之定理.

此定理自不可反之,蓋四次的普通方程之解,已須用三次根,而八次方程則普通已不能用求根法以解之矣.

但在質次數 p 之割圓方程方面,則按高斯之法,此定理可反之,故方程可單用平方根以求其解之必要的與充分的條件,爲不可分解的割圓方程之次數 $p-1$ 係 2 之方數.

§110. 三次方程不能用平方根以解之

1. 由以上之定理,即可知不可分解的三次方程,不能用平方根以解之.此亦可直接證明之.

前已云過,凡三次之方程,均可用有理算法,使其成爲

(1) $$x^3+px+q=0$$

形式,於此, p 與 q 爲已知的有理數.倘其根爲 x_1, x_2, x_3, 則

(2) $$x_1+x_2+x_3=0.$$

今設其中之一,例如 x_1, 可用平方根以求得之,又設 $\sqrt{\theta}$ 爲末後之平方根,則按前節:

(3) $$x_1=y+z\sqrt{\theta},$$

此處之 y, z, θ, 爲末後次一個有理性領域内之數,但 $\sqrt{\theta}$ 則可假定其不在此領域内,且 z 非爲 0.

將 (3) 代入 (1), 則得一方程,其形式如下:

$$A+B\sqrt{\theta}=0,$$

於此,

$$A=y^3+3yz^2\theta+py+q,\quad B=3y^2z+z^3\theta+pz,$$

故已有理的用以前之平方根表出之.但因$\sqrt{\theta}$不能如是表之,故必$A=0$, $B=0$,從可知$y-z\sqrt{\theta}$亦為(1)之根,且因z非為0,故與x_1不同;今設其為x_2,則由(2),可得

$$x_3=-(x_1+x_2)=-2y.$$

因之,x_3僅與以前的平方根有關.

因x_3非為有理數,故必有一在$\sqrt{\theta}$前之數$\sqrt{\theta_1}$,而可有

$$x_3=y_1+z_1\sqrt{\theta_1}.$$

吾人於是可仿前,推知其餘二根中之一,例如x_1,等於$-2y_1$,故與$\sqrt{\theta}$(及$\sqrt{\theta_1}$)無關,此即與所設相違.因之,吾人有定理如下:

有理係數的三次方程,無有有理根者,不能用平方根以解之.

2. 此定理可直接應用於求立方之倍之問題,蓋此問題係與方程$x^3=2$相關者(參閱§38, 5.),亦可用於有法七角形及九角形之問題,因其相關之方程,按§106,為

$$y^3+y^2-2y-1=0,\quad y^3-3y+1=0,$$

而此項方程則無有有理根可求.

3. 三等分角之問題,與方程

$$x^3-3x=2\cos\mathfrak{d} \tag{4}$$

相關(參閱§82, 3.).

今如設$\cos\mathfrak{d}=a$,則此方程成為

$$x^3-3x-2a=0, \tag{5}$$

而此問題之意義亦可如下:由二任意的線段,即長之單位及a,求作線段$x=2\cos\frac{\vartheta}{3}$.對於$a$之無數的特殊值,此問題可解,例如$a=0$(直角分爲三等角),$a=\frac{1}{2}\sqrt{2}$(三等分$45^\circ$之角),或$a=\cos\frac{2\pi}{17}$(有法十七角形之圓心角之三分法)時.倘欲求其他可作的事例,則祇須取可由單位用作法以得之線段α,設$2a=\alpha^3-3\alpha$,如是則$x=\alpha$爲該方程之根.

倘使a爲無定之數,則如以上所證明,方程(5)必須有一根,可有理的用a表之,乃能用平方根以解之.

就一般而論,此爲不可能者,蓋a可有無限多的有理值,使此方程不能有有理根.例如$a=-\frac{1}{2}$即爲如是之值,於此,$\vartheta=\frac{2\pi}{3}$,$x=2\cos\frac{2\pi}{9}$,蓋在此假定下,所得者爲有法九角形,而此則爲不可作者,固爲吾人所已知.

欲得其他的此項事例時,可設

$$\cos\vartheta=\frac{m}{n},\quad nx=y,$$

於此,m,n爲整數,無有公因子.如是則方程(4)成爲

$$y^3-3n^2y=2mn^2, \tag{6}$$

而如(4)有一有理的解,則(6)必有整數的解.但如n可爲一奇質數p所除,而不能爲其平方所除,則此即爲不能者,蓋如是則y可爲p所除,因而(6)之左端可爲p^3所

除，而右端則僅可爲 d^2 所除.[1]

§111. 用添加法以分解不可分解之函數

1. 今設 $\phi(x)$ 在有理性領域 Ω 內爲不可分解者，其次數爲 n，r 爲其一根．倘 $X(x)$ 爲有理性領域內之整函數，則祇當 $X(x)$ 可爲 $\phi(x)$ 所除時，$X(r)$ 乃能成爲 0 (§**90, 11.**)．若 $X(r)$ 非爲 0，即 $X(x)$ 與 $\phi(x)$ 爲互質者，$\psi(x)$ 爲有理性領域內之另一整函數，則按 §**89, 4.**，可決定二整函數 $F(x)$ 與 $F_1(x)$，俾

$$F(x)X(x)+F_1(x)\phi(x)=\psi(x),$$

故如設 $x=r$，即 $\phi(r)=0$，則有

$$\frac{\psi(r)}{X(r)}=F(r).$$

因之，每一數目 $\eta=\dfrac{\psi(r)}{X(r)}$，可用有理運算法由 r 及有理性領域內之數目以推得之者，可作爲 r 之整函數 $F(r)$ 以表之，其係數爲有理數．又因方數 r^k 於 $k\geqq n$ 時，可按方程 $\phi(x)=0$ 用 $(n-1)$ 次以下者表之，故可知添加入 r 後擴大的有理性領域內之數目 η，可如下表出之：

$$\eta=a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots\cdots+a_{n-1}r^{n-1},\tag{1}$$

於此，$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 屬於 Ω 內．此種方法僅有一種，蓋如

---

1. 關於三等分角問題之歷史，以及許多應用曲線及近似作法之解法，可參閱 Enriques, Fragen der Elementargeometrie 2; Mitzscherling, Das Problem der Kreisteilung.

有二,則經相減後,可得 r 之 $(n-1)$ 或較低次的方程.此則因 $\phi(x)$ 之不可分解,爲不可能者.

2. 今設

$$r,\ r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_{n-1}$$

爲 $\phi(x)$ 之根.倘將 (1) 內之 r 易爲 $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$,則得(連 η 在內) n 個數

$$(2)\qquad \eta,\ \eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_{n-1},$$

吾人名之爲共軛數.倘 $r, r_1, \cdots, r_{n-1}$ 經一錯列,則 $\eta, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$ 亦經一錯列,反之亦然.從可知 $\eta, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}$ 經調動後不致受影響之函數,亦卽 $\eta, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1}$ 之任何對稱函數,同時並爲 $r, r_1, \cdots, r_{n-1}$ 之對稱函數,故爲 Ω 中之數.如

$$S(\eta)=\eta+\eta_1+\eta_2+\cdots\cdots+\eta_{n-1}$$

與
$$N(r)=\eta\eta_1\eta_2\cdots\cdots\eta_{n-1}$$

均是.

3. 倘在特殊狀況下

$$\eta=\eta_1=\eta_2=\cdots\cdots=\eta_{n-1},$$

則 $S(\eta)=n\eta$,故 η 本身在有理性領域內.反之,對於一有理性領域內之數目 $\eta=a_0$,共軛值亦均相等.故可知:

η 本身在 Ω 內之必要的與充分的條件,爲 η 之共軛值均相等.

4. 此外,尙有一定理,可由 §**90, 11**. 得之,卽任何一方

程 $F(r)=0$ 倘能成立，其係數在有理性領域內，則亦必

$$F(r_1)=0,\ F(r_2)=0,\ \cdots\cdots,\ F(r_{n-1})=0.$$

5. 今設 $f(x)$ 爲一整函數，其次數 m 爲質數，在有理性領域內爲不可分解者，但將 $\phi(x)$ 之一根 r 添加入後，卽成爲可分解者．$f(x)$ 內 x 之最高方數之係數，並假定其等於 1.

$f(x)$ 於擴充後的有理性領域內，可分解成爲二因子，並如次表之：

$$f(x)=f_1(x,r)f_2(x,r),$$

於此，$f_1(x,r)$，$f_2(x,r)$ 爲 m_1 及 m_2 次的整函數，其係數有理的與 r 相關，故爲 (1) 形式之數．吾人並假定 f_1 與 f_2 內 x 之最高方數之係數亦爲 1.

按定理 **4.**，可知[1] 並有

$$f(x)=f_1(x,r_1)f_2(x,r_1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x)=f_1(x,r_{n-1})f_2(x,r_{n-1})$$

倘將此項方程相乘，並設

$$f_1(x,r)f_1(x,r_1)\cdots\cdots f_1(x,r_{n-1})=Nf_1(x,r)=F_1(x),$$

$$f_2(x,r)f_2(x,r_1)\cdots\cdots f_2(x,r_{n-1})=Nf_2(x,r)=F_2(x),$$

---

1. 蓋如設 $f_1(x,r)f_2(x,r)-f(x)=F(r)$，則於 x 之任何值，有 $F(r)=0$，對於 Ω 內之值自亦如此．因之，定理 4. 可應用於方程 $F(r)=0$，而 $F(r_i)=0$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n-1)$ 對於 Ω 內的 x 之值均成立．但如是則按 §92, 2.，此項方程於任何 x 亦均成立．

則

(3) $$f(x)^n = F_1(x)\,F_2(x).$$

於此, $F_1(x)$, $F_2(x)$ 為 nm_1, nm_2 次的整函數,其係數為 $\phi(x)$ 之根之對稱函數,故在有理性領域內.

因 $f(x)$ 為不可分解者,故按 (3), 可知 $F_1(x)$ 與 $F_2(x)$ 均為 $f(x)$ 之方數. 今設

$$F_1(x) = f(x)^{p_1}, \quad F_2(x) = f(x)^{p_2},$$

則 $$mp_1 = nm_1, \quad mp_2 = nm_2,$$

$$m_1 + m_2 = m,$$

因 m_1 與 m_2 均小於 m, 不能為其所除,故必 n 可為 m 所除,而得定理如下[1]:

質次數 m 的不可分解之函數 $f(x)$, 必須添入次數可為 m 所除的方程之根後,乃能成為可分解.

§112. 三實根的三次方程

$x^n - a = 0$ 形式之方程,謂之純方程,其根 $\sqrt[n]{a}$ 為 a 之有理性領域內之 n 次的根數.

在三實根的三次方程方面,卡氏公式所表出之根,為二共軛根數之和 (§82). 由前節之定理,今可推得一定理如下:

1. 此定理亦可視為 Loewy 所證明的定理之特例(見 §109, 4.).

三實根以及係數爲有理數的三次不可分解之方程，不能用實根數以解之.

倘有一不可分解的三次方程 $f(x)=0$，其係數爲有理數，其一根可用實根數以表之，則相繼的根指數，可假定其爲質數．蓋如 $r=\sqrt[m]{\theta}$，而 $m=pq$，則可易之爲 $r=\sqrt[p]{\sqrt[q]{\theta}}$，即代以幾次的質指數之開方法．今按其次序，將此項根數，至末後一個爲止，盡添入有理性領域內，則方程尚未分化，故必須將末後之根數 r 添入，乃能如此．因之，其一根之形式爲

$$x_1=a+br+cr^2.$$

於此，a, b, c 可用以前之根數有理的表之，但 $r=\sqrt[3]{\theta}$ 則不能．從可知 θ 非爲有理性領域內一數 α 之三方；蓋在 r 所可有之 $\alpha, \varepsilon\alpha, \varepsilon^2\alpha$ 三值中（ε 爲三次單位根），祇有 α 爲實數，故 r 將與 α 相等，此即與所設相違矣．由此可知

$$x_2=a+\varepsilon rb+\varepsilon^2r^2c$$

$$x_3=a+\varepsilon^2rb+\varepsilon r^2c$$

亦爲三次方程之根，蓋由 §**111** 之 **4**.，知 $f(x_2)$，$f(x_3)$ 與 $f(x_1)$ 必同時爲 0．惟

$$\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$

而因 a, b, c 爲實數，故 x_2 與 x_3，祇當

$$rb=r^2c$$

時,乃能爲實數. 倘若 b 與 c 爲 0, 則 $x_1=a$, 故 $f(x)$ 可爲 $x-a$ 所除, 此則在添入 r 之前已爲可解, 卽與所設相違. 因之, 必 $r=\frac{b}{c}$, 卽 r 可用以前之根數有理的表之, 亦與所設相違.

§113. 用根數以表單位根

1. 設 a 爲有理性領域 Ω 內之數, $x^n-a=0$ 爲 Ω 內不可分解之純方程, 則根數 $\sqrt[n]{a}$ 自不能在有理性領域內. 反之, 亦有亞培爾 (Abel) 之定理[1] 如下:

設 n 爲質數, 而欲 $\phi(x)=x^n-a$ 於 Ω 內爲可分解者, 則至少須 $\sqrt[n]{a}$ 中有一數屬於有理性領域內, 因而 a 爲有理性領域內一數目之 n 次方.

於 $n=2$ 時, 此定理之可靠極爲明瞭, 蓋如 $n=2$, 則 $\phi(x)=(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$, 故祇當 $\sqrt{a}$ 爲有理時, 此項因子乃能爲有理的.

今設 n 爲奇數, $\sqrt[n]{a}=r$ 爲 n 次根中之一, 例如 (倘 a 爲實數) 其實根, ω 則爲 n 次的單位根 $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$, 則 $\phi(x)=0$ 之一切根爲

$$(1) \qquad r,\ \omega r,\ \omega^2 r,\ \cdots\cdots,\ \omega^{n-1} r.$$

今如 $\phi(x)$ 分解成爲二因式之積, 如 $\phi_1(x)\phi_2(x)$, $\phi_1(x)=x^\mu+b_1x^{\mu-1}+\cdots\cdots+b_\mu$ 之次數 μ 小於 n, 則 $\phi_1(x)$ 之根盡在

1. N. H. Abel, Journ. f. Math. 1 (1826), Œuvres éd. Sylow et Lie 1,72.

$\phi(x)$ 之根中，而因 $(-1)^{\mu}b_{\mu}=b$ 等於 $\phi_1(x)$ 之諸根之積，故 $b=\omega^k r^{\mu}$，於此，k 爲一整數，b 則在有理性領域內．今將此式方至 n 次，則計及 $r^n=a$ 時，有

$$(2) \qquad b^n=a^{\mu}.$$

因 μ 小於 n，故 μ 與 n 必爲互質，而可決定 p, q 二數，使 $pn+q\mu=1$ (§**61**)．因 (2)，即有

$$a=a^{pn}a^{q\mu}=(a^p b^q)^n,$$

故可知 a 爲有理性領域內數目之 n 次方．因之，倘 a 非爲如是之數，則 $\phi(x)$ 即不能分解，於是吾人謂每一根數 $\sqrt[n]{a}$ 於 Ω 內爲不可分解者．

2．倘有一數目屬於一有理性領域內，此領域係由有理數的領域逐次添入其以前有理性領域之不可分解的根數而成，則此數目謂之可用根數以表出之者．

倘有一方程，可用有限多的根數以解之，即可歸爲純方程，則此方程謂之可代數的以解之者．[1]

3．割圓方程亦爲代數的可解者[2]，並可證明以下之定理：

無論 m 爲質數或非質數，一切 m 次的單位根可用低於 m 次的根數以表之．

1．H. Weber，於 Lehrburch der Algebra 中，亦將此項方程稱爲 metazyklisch 者，因其理論直接與 zyklische 方程相啣接也．

2．此處所指，爲單純的 m 次單位根之方程 (§105 之 2.)．

於 $m=1$ 及 $m=2$ 時，此定理之適用極易見，蓋此處僅有有理的單位根 $+1$ 及 -1，於 $m=3$ 時，有

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

故可由純二次方程 $x^2+3=0$ 以得之. 四次的單位根 $+i$，$-i$，則可由純方程 $x^2+1=0$ 以得之.

今試用完全歸納法於此，假定此定理於次數 m_1 小於 m 的一切單位根均已證明. 倘能在此假定下證明之，則已普遍的證明此定理，茲就 m 之爲質數或非質數分之爲二事例.

4. 設 m 爲非質數，

$$m=pm_1,$$

於此，p 爲 m 之質因子，$m_1>1$，則 $m_1<m$，$p<m$.

今如 r 爲 m 次的單位根，則 $r^p=a$ 爲 m_1 次的單位根，故按所設，可用低於 m_1 次的根數以表之. 因之，r 爲純方程 $x^p-a=0$ 之根，而如 a 在迄此爲止的有理性領域內，非爲該領域內一量之 p 次方，則按 **1.**，此爲不可分解者. 從可知 r 爲 a 之有理性領域之不可分解的根數，而可用低於 m 次的根數以表之.

但如 $a=b^p$ 爲領域內一量之 p 次方，ρ 爲 p 次單位根，則 $r=\rho b$，而按所設，因 $p<m$，故 ρ 亦可用低於 m 次的根數以表之.

5. 今尙須論 $m=p$ 爲質數之事例. 如是則一切 p 次的單位根,除 1 而外,爲單純的(§ **105**, **2**.), 而如用 ω 表其中之一,如

$$\omega=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p},$$

則 p 次的單純單位根爲

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \cdots\cdots,\ \omega^{p-1}.$$

今按 § **107** 內之法,用一單純根 g, 將其排列之如下:

(3) $$\omega^{[0]},\ \omega^{[1]},\ \cdots\cdots,\ \omega^{[p-1]},$$

並設 ε 爲一 $(p-1)$ 次的單位根,則因 $p-1<p$, 故按所設,可用低於 $p-1$ 次的根數以表之.

玆將 ε 添入有理性領域內, 並一研究函數[1]

(4) $$\psi(\omega)=\omega^{[0]}+\varepsilon\omega^{[1]}+\varepsilon^2\omega^{[2]}+\cdots\cdots+\varepsilon^{p-2}\omega^{[p-2]}.$$

倘於其中將 ω 易爲 $\omega^{[1]}$, 則 $\psi(\omega)$ 成爲

$$\psi(\omega^{[1]})=\omega^{[1]}+\varepsilon\omega^{[2]}+\varepsilon^2\omega^{[3]}+\cdots\cdots+\varepsilon^{p-2}\omega^{[0]},$$

而因 $\varepsilon^{p-1}=1$, 故 $\psi(\omega)=\varepsilon\psi(\omega^{[1]})$, 以及

$$\psi(\omega^{[1]})=\varepsilon\psi(\omega^{[2]}),\ \psi(\omega^{[2]})=\varepsilon\psi(\omega^{[3]}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此,得

$$\psi(\omega)^{p-1}=\psi(\omega^{[1]})^{p-1}=\psi(\omega^{[2]})^{p-1}=\cdots\cdots=\psi(\omega^{[p-2]})^{p-1},$$

---

1. 此項形式之式, 最初用於解方程者, 爲 Lagrange 氏 (Mém. de l'ac. de Berlin 1770/71). 因此, 吾人稱之爲拉氏推解式. 從可知"推解式"一語, 其意義有二重, 其用於三四次方程之解法的式, 如 § 99, (2) 中之 u, v 及 § 99, (12) 中之 $\sqrt{t_1}$, $\sqrt{t_2}$, $\sqrt{t_3}$ 均爲拉氏推解式.

故 $\psi(\omega)^{p-1}=\frac{1}{p-1}[\psi(\omega)^{p-1}+\psi(\omega^{[1]})^{p-1}+\cdots+\psi(\omega^{[p-2]})^{p-1}]$.

此式之右端爲 $\omega, \omega^{[1]}, \cdots\cdots, \omega^{[p-2]}$ 之對稱函數,故可有理的表出之.但此式內除有理數而外,尙有 ε 含於其中.今設 A 爲用 ε 擴大後的有理性領域內之量,則

$$\psi(\omega)^{p-1}=A,$$

而 $\psi(\omega)$ 之求法可歸爲若干根數,其次數爲 $p-1$ 之質因子 q. 倘此處繼續獲得的純方程 $x^q-a=0$ 中有一爲可分解者,卽 $a=b^q$, 則按 4., 可有一 q 次的單位根以代 $\sqrt[q]{a}$, 按所設可用根數以表之.由此可知:

數目 $\psi(\omega)$ 可用低於 $p-1$ 次的根數以表之.[1]

6. 按 § **105** 之 (5), 單位根 ε 方面,有以下之式:

$$\sum\varepsilon=0,\ \sum\varepsilon^2=0,\ \cdots\cdots,\ \sum\varepsilon^{p-2}=0. \tag{5}$$

爲表與 ε 之相關計,試寫作

$$\omega+\varepsilon\omega^{[1]}+\varepsilon^2\omega^{[2]}+\cdots+\varepsilon^{p-2}\omega^{[p-2]}=\psi(\omega, \varepsilon),$$

並於其中將 ε 之 $p-1$ 個不同的值代入之, 求其和數 $\Sigma\psi(\omega, \varepsilon)$, 則因 (5):

$$\omega=\frac{1}{p-1}\sum_{\varepsilon}\psi(\omega, \varepsilon), \tag{6}$$

故可知 ω 亦可爲根數所表出,其次數爲 $p-1$ 之質因子,而

1. 祇於 $p=3$ 時, $\psi(\omega)$ 爲 $p-1$ 次的根數, 蓋此處 $p-1$ 爲一質數也.

定理3.乃以證明.

7. 於是吾人可將定義2.擴充之如下:

倘有一數目,可因迭次添入質次數的純方程之根以表之,則不問此項根爲可分解或不可分解者,此數謂之可用根數以表出之者.

蓋如 $a=b^n$ 爲在前的有理性領域内之量之 n 次方,並設 $x=by$, 則方程 $x^n-a=0$ 成爲 $y^n-1=0$, 而此則可用根數以解之.

§114. 五次方程之代數的不可解

第一證

1. 今設 $f(x)$ 爲一不可分解的函數,其次數 n 爲奇質數,其係數則爲有理數,吾人並假定其可用根數(不必假定其爲實根)以分解之.函數内最高項之係數,亦假定其爲1. 試作一有理性領域,凡分解 f 所需要之根數,除末後一個而外,均納入之,如是則 $f(x)$ 在此有理性領域内,尚爲不可分解者.倘此有理性領域内,尚未含有 n 次的單位根 ε, 則可將其加入,仍不致使函數成爲可分解.蓋按 §**113**, ε 可用低於 n 次的根數以表之,而按 §**111** 之 **5**., 可知 n 次的函數 $f(x)$, 不致因此而成爲可分解.至於添入一不甚必要之根數,此則自可隨意爲之.

如是,吾人可將 ε 計入"以前之根數"内.末後之根數 r,

可使分解發生者,按§**111**之**5.**,其次數必爲n.因之,吾人可設$r=\sqrt[n]{\theta}$,此數不能用以前之根數有理的表之.倘如是,則θ不能爲有理性領域內一量a之n次方,蓋否則$r=\varepsilon^k a$亦將在有理性領域內矣.

2. $x^n-\theta$既爲不可分解者,故按§**111**之**4.**,凡方程內含有r者,可用$\varepsilon r, \varepsilon^2 r, \varepsilon^3 r, \cdots\cdots, \varepsilon^{n-1} r$以代之.

例如於任何一有理函數ψ方面,有

$$\psi(r)=\psi(\varepsilon r),$$

則亦$\psi(\varepsilon r)=\psi(\varepsilon^2 r)=\psi(\varepsilon^3 r)=\cdots\cdots=\psi(\varepsilon^{n-1} r)$,故$\psi(r)$本身在有理性領域內(§**111**, **3.**).

3. 如是,$f(x)$經添入r後,將成爲可分解者,吾人並假定$f(x, r)$爲$f(x)$之因子,即經添入r亦不能再分解.最高方數之係數,恆假定其爲1.

$f(x, r)$既爲$f(x)$之因子,則按§**111**之**5.**, n個因子

$$(1)\qquad f(x, r),\ f(x, \varepsilon r),\ f(x, \varepsilon^2 r),\ \cdots\cdots,\ f(x, \varepsilon^{n-1} r)$$

均可除盡$f(x)$.同時,此項因子亦均爲不可分解者,且無有二個相同,否則按之**2.**,將均相同,而爲有理者,此即與所設相違矣.因之,(1)中亦無有二函數,能有公因子者,蓋如有之,則此項因子將可有理的用r以表之,但同時又將含於(1)中之不可分解的函數內.乘積

$$(2)\qquad F(x)=Nf(x, r)=f(x, r)f(x, \varepsilon r)f(x, \varepsilon^2 r)\cdots\cdots f(x, \varepsilon^{n-1} r)$$

爲有理者,故可爲不可分解的函數$f(x)$所除,而因無有其

他因子故爲$f(x)$之方數.

然吾人亦可知此方數爲一次方,蓋如有一次的因子,多數含於$F(x)$內,則必爲(1)中二函數之公因子矣.故如設$\varepsilon^k r=r_k$,則

$$f(x)=f(x,r)f(x,r_1)f(x,r_2)\cdots\cdots f(x,r_{n-1}), \tag{3}$$

而此諸$f(x,r)$,就x而言,均爲一數者.因之,倘使$f(x,r)$等於0,則可得$f(x)$之根,而按§**111**之**1**.,其形式均爲

$$x_i=\alpha_0+\alpha_1 r+\alpha_2 r^2+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}r^{n-1}, \tag{4}$$

於此,α_0, α_1, α_2, $\cdots\cdots$, α_{n-1}爲末後前一個的有理性領域內之量.

4. n次的函數$f(x)$,至少必有一實根,因n爲奇數,而複根恆成對的發現.因之,倘非一切根均爲實數,則可有二複數,$n-2$個實數,或四複數,$n-4$實數,等等.

吾人今設想,陸續添加入根數時,每當添加複根數ρ時[尙不能使$f(x)$分解者],同時並將共軛根數$\bar{\rho}$亦添入之.此自爲可行者,蓋縱卽添加入一不必要之根數,於事亦無損也.

按此方法,倘$r=\sqrt[n]{\theta}$爲第一個能分解的根數,則可能的事例如下:

1. 倘θ爲實數,則因n數單位根ε在有理性領域內,故亦可假定r爲實根.

如是,倘 x_1 爲 $f(x)$ 之實根,則係數 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_{n-1}$ 亦爲實數,蓋其共軛複數 $\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots\cdots, \overline{a_{n-1}}$,按所設亦在有理性領域内,而

$$x_1=\overline{a_0}+\overline{a_1}r+\overline{a_2}r^2+\cdots\cdots+\overline{a_{n-1}}r^{n-1},$$

故

$$(a_0-\overline{a_0})+(a_1-\overline{a_1})r+(a_2-\overline{a_2})r^2+\cdots\cdots+(a_{n-1}-\overline{a_{n-1}})r^{n-1}=0.$$

因 $x^n-\theta$ 爲不可分解者,故祇有

$$a_0-\overline{a_0}=0,\ a_1-\overline{a_1}=0,\ a_2-\overline{a_2}=0,\ \cdots\cdots,\ a_{n-1}-\overline{a_{n-1}}=0,$$

是卽 a_i 爲實數.

$f(x)$ 之其他 $n-1$ 個根爲

$$(5)\quad \begin{aligned} x_2&=a_0+\varepsilon a_1r+\varepsilon^2a_2r^2+\cdots\cdots+\varepsilon^{n-1}a_{n-1}r^{n-1},\\ x_3&=a_0+\varepsilon^2a_1r+\varepsilon^4a_2r^2+\cdots\cdots+\varepsilon^{2(n-1)}a_{n-1}r^{n-1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n&=a_0+\varepsilon^{n-1}a_1r+\varepsilon^{2(n-1)}a_2r^2+\cdots\cdots+\varepsilon^{(n-1)^2}a_{n-1}r^{n-1}, \end{aligned}$$

按 3.,可知其均不相同,且與 x_1 不同.

但 $\qquad \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \cdots\cdots,\ \varepsilon^{\frac{n-1}{2}}$

與 $\qquad \varepsilon^{n-1},\ \varepsilon^{n-2},\ \cdots\cdots,\ \varepsilon^{\frac{n+1}{2}}$

爲共軛複數,故 $\qquad x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots\cdots,\ x_{\frac{n+1}{2}}$

與 $$x_n,\ x_{n-1},\ \cdots\cdots,\ x_{\frac{n+3}{2}}$$

亦爲共軛複數.

從可知:

倘分解的根數爲實數,則$f(x)$有一個實根,$n-1$個成對的共軛複根.[1]

2. 若θ爲複數,$\overline{\theta}$爲與之共軛的複數,則$x^n=\theta$之一切根均爲複數,而對於其中之每一個,r,有一固定的數目$\overline{r}$,爲$x^n-\overline{\theta}=0$之根,其

(6) $$r\overline{r}=r_1\overline{r}_1=r_2\overline{r}_2=\cdots\cdots=r_{n-1}\overline{r}_{n-1}=\sqrt[n]{\theta\overline{\theta}}-R$$

爲實數.故如用極坐標式

$$\theta=a(\cos\alpha+i\sin\alpha),\quad \overline{\theta}=a(\cos\alpha-i\sin\alpha),$$

a爲正數,則

$$r=\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}\right),\quad \overline{r}=\sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{\alpha}{n}-i\sin\frac{\alpha}{n}\right),$$

$$R=\sqrt[n]{a^2}.$$

吾人今先將實數R添加入之(倘尚未在有理性領域內),則又可有二事例:

2a. 經R之添入後,已可分解$f(x)$.如是則r可無須再添加入之,而因R爲實根數,故仍得事例1.

---

1. 由此,復可知不可分解的三次方程,其三根均爲實數者,不能用實根數以解之.

$2b$. 經R之添入後,尚未能分解$f(x)$,不問R是否爲有理數均如此(例如三次方程方面,卡氏公式內者).

如是則r之添入,於解方程上尚爲必要者.但r之添入,同時亦已將$\overline{r}=\dfrac{R}{r}$添入.

倘$x_1=\psi(r)$爲實數,則

$$\psi(r)=\overline{\psi}(\overline{r})=\overline{\psi}\left(\frac{R}{r}\right), \tag{7}$$

此處$\overline{\psi}$之意義,在表明ψ內所有一切屬於有理性領域內之複數,均用該領域內與之相共軛的複數以代之.

倘將(7)內之r代以$r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots, r_{n-1}$中之任何一個,此方程仍可成立,而因按(6),$\dfrac{R}{r_1}=\overline{r}_1, \cdots\cdots$,故

$$\psi(r_1)=\overline{\psi}(\overline{r}_1),\ \psi(r_2)=\overline{\psi}(\overline{r}_2), \cdots\cdots, \psi(r_{n-1})=\overline{\psi}(\overline{r}_{n-1}),$$

此即是,n個數目$\psi(r), \psi(r_1), \psi(r_2), \psi(r_3), \cdots\cdots, \psi(r_{n-1})$均爲實數,

因而:

倘分解的根數爲複數,則$f(x)$僅有實根.

總括之有定理如下:

次數爲質數n的方程,如可代數的解之,則其實根僅有一個,或有n個.[1]

5. 於$n=5$時,有如次之定理:

1. 此定理爲Kronecker所首先發見(Monatsber. Berl. Akad. 1856).

不可分解而可用根數以解之之五次方程,其係數爲有理數者,倘非有五實根,則有一實根及四複根,不能有三實根而二複根:

如是,倘欲證明五次之方程,並非每一個均可用根數以解之者,祇須指出有不可分解的五次方程(係數爲有理數)存在,其三根爲實而二根則爲複.此則不難舉無數多的實例以證明之.

例如 $$f(x)=x^5-4x-2$$

一函數,爲不可分解者,此由Schönemann之定理可以知之(見§**90**, **9**.),而按§**102**之**7**.,則可知其有三實根及二複根.因之,方程$f(x)=0$不能用根數以解之.

§115. 第二證

1. 對於以上之定理,吾人茲再作一證,由此,吾人可明瞭,何以四次以下的方程,可代數的解之,而次數較高者,則就一般而言,多不可能.

今設

(1) $$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots a_n=0$$

爲n次的普通方程,即其根$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$間,不必有何種關係,故可視之爲自變數.吾人可設想,凡以後推演上所需要之單位根,均已事先添入係數之有理性領域內,並以$\Re$表之.

2. 今假定陸續添入根數$\rho, \sigma, \tau, \cdots\cdots$後,此方程已可代數的解之.末後所須添入之根數,假定其爲η與θ,並設θ爲質次數的純方程

$$\theta^p = A \tag{2}$$

之根.如是則A爲末後前一個有理性領域$\Re(\rho, \sigma, \tau, \cdots, \eta)$內之數,此有理性領域今以$\Re_\eta$表之.按§**111**, **1**.,方程之一解,於是可以

$$x = \alpha_0 + \alpha_1\theta + \alpha_2\theta^2 + \cdots\cdots + \alpha_{p-1}\theta^{p-1} \tag{3}$$

之形式表出之,此中之$\alpha_0, \cdots\cdots, \alpha_{p-1}$爲$\Re_\eta$中之數.

吾人恆可決定一其他的根數θ'以代θ,俾用θ'以表x時,θ'之係數爲1.蓋如α_μ爲(3)中不等於0之係數,並設

$$\alpha_\mu\theta^\mu = \theta', \tag{4}$$

則$\theta'^p = \alpha_\mu{}^p A^\mu$,故$\theta'$仍爲$\Re_\eta$之根數.

因μ與p爲互質,故可決定r與s二數,俾

$$\mu r + ps = 1,$$

如是則

$$\theta = \theta^{\mu r} \cdot \theta^{ps} = \frac{\theta'^r}{\alpha_\mu{}^r} A^s = \alpha_r'\theta'^r, \tag{5}$$

於此,$\alpha_r' = \alpha_\mu{}^{-r}A^s$仍爲$\Re_\eta$中之數.

將(5)代入(3)時,即可得

$$x = \beta_0 + \theta' + \beta_2\theta'^2 + \cdots\cdots + \beta_{p-1}\theta'^{p-1}.$$

3. 吾人可設想,已如是選擇θ,使(3)中之θ,其係數

爲1. (2) 之其他的解,假定其爲 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{p-1}$, 故

$$\theta_1=\omega\theta,\ \theta_2=\omega^2\theta,\ \cdots\cdots,\ \theta_{p-1}=\omega^{p-1}\theta,$$

於此, ω 爲 p 次的單位根. 試設想將 (3) 中 x 之式代入方程 (1), 則 $f(x)$ 成爲 $(p-1)$ 次的函數 $F(\theta)$, 其係數爲 $\mathfrak{R}_\eta$ 中之數. 但按 §**113** 之 **1.**, 方程 (2) 於 $\mathfrak{R}_\eta$ 中爲不可分解者,[1] 故按 §**111** 之 **4.**, 同時有方程

$$F(\theta)=0,\ F(\theta_1)=0,\ F(\theta_2)=0,\ \cdots\cdots,\ F(\theta_{p-1})=0.$$

由此可知方程 (1) 亦可爲諸值 x_i $(i=1, 2, \cdots, p-1)$ 所充適, 此諸值可於 (3) 中將 θ 易爲 θ_i 以得之. 因之, 吾人得 (1) 之 p 個根:

$$\begin{aligned}
x&=a_0+\theta+a_2\theta^2+\cdots\cdots+a_{p-1}\theta^{p-1},\\
x_1&=a_0+\theta_1+a_2\theta_1{}^2+\cdots\cdots+a_{p-1}\theta_1{}^{p-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{p-1}&=a_0+\theta_{p-1}+a_2\theta^2{}_{p-1}+\cdots\cdots+a_{p-1}\theta_{p-1}{}^{p-1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

今按次序用 $\omega^p, \omega^{p-1}, \omega^{p-2}, \cdots, \omega$ 乘此項方程, 則每一方程內之第二項等於 θ, 而如將其加之, 則按 §**105** 之 (5), 因 $\omega^{p-\nu}=\omega^{-\nu}$, 故可得

$$\theta=\frac{1}{p}\sum_{\nu}\omega^{-\nu}x_\nu, \tag{7}$$

此即是, 根數 θ 爲 (1) 之根之整有理函數.

---

1. A 爲 $\mathfrak{R}_\eta$ 內一數目之 p 次方之事例爲不可能者, 蓋如是則 θ 亦將爲 $\mathfrak{R}_\eta$ 內之數矣.

4. 今於 (7) 內不用 $x, x_1, \cdots, x_{p-1}$ 而用 p 個根之一切可能的錯列,則得根之其他的整函數 $\theta', \theta'', \cdots$, 而如作函數

$$(8)\qquad g(y)=(y-\theta^p)(y-\theta'^p)(y-\theta''^p)\cdots\cdots,$$

則其係數爲 (1) 之根之對稱函數,故爲 $\mathfrak{R}$ 內之數. $g(y)=0$ 之一解爲 $y=\theta^p=A$, 係 $\mathfrak{R}_\eta$ 內之數,而如未後次一個根數 η, 能

$$(9)\qquad \eta^q=B,$$

(q 爲質數),則相當的選擇 η 時, y 可表之如下:

$$(10)\qquad y=\beta_0+\eta+\beta_2\eta^2+\cdots\cdots+\beta_{q-1}\eta^{q-1}$$

今將 (9) 之其他的根 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{q-1}$ 代 η, 則如 3. 中所已知,可得 $g(y)$ 之其他的根 $y_1=\theta'^p$, $y_2=\theta''^p, \cdots$, 而 η 爲 $y, y_1, y_2, \cdots$ 之整函數,故亦爲 (1) 之根之整函數.

仿此法繼續爲之,則後未可得一定理如下:

在代數的可解方程方面,求解時所需要的一切根數,均爲根之整有理函數.

5. 今設 ρ 爲首須添入之根數,而

$$(11)\qquad \rho^a=M.$$

如是則 M 爲 $\mathfrak{R}$ 內之量(尙在添入單位根之前),故爲根之對稱函數. 指數 a 可假定其爲質數.

根數 ρ 視爲根之函數時,不能爲對稱函數,否則亦將屬於 $\mathfrak{R}$, 故不須再添入之矣. 因之,可有對調如 $T=(x_1x_2)$

者,能使 a 次根 ρ 成爲 $\rho'=\omega\rho$, 於此, ω 爲 a 次的單位根. 吾人可寫之作

$$\rho_T=\omega\rho.$$

試再將 T 應用於此,則得

$$\rho_{T^2}=\omega\rho_T=\omega^2\rho.$$

但 $T^2=E$ 爲主要錯列,故 $\rho_{T^2}=\rho$, 而 $\omega^2=1$, 因之, $a=2$, 而可知:

首先添入的根數恆爲平方根.

倘用根以表對稱函數 M, 則按 **4**. 平方根 $\rho=\sqrt{M}$ 可有理的計算之,而 ρ 對於每一對調 $(x_\alpha x_\beta)$ 必改其號,蓋以上吾人所知於 x_1, x_2 者,於任何一對 x_α, x_β 均可適用也. 故復可知 (§98, **2.**):

在代數的可解方程方面,恆將判定式之平方根作爲第一個根數首先添入之.

6. 添入 ρ 後擴大的有理性領域,以 $\Re(\rho)$ 表之. 其中所含之量,爲對稱及交錯函數,故對於交錯類中之一切錯列,即對於偶數多的對調,可不致變. 於此,有定理如下:

偶數多的對調,恆可用若干三項的環列以代之.

蓋每二個對調,倘非有一共同的數字,則卽無之,故在此二事例方面,有

$$(\alpha\beta)(\alpha\gamma)=(\alpha\beta\gamma);\quad (\alpha\beta)(\gamma\delta)=(\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma).$$

反之,如第一式所示,每一三項的環列與偶數多的對調相當.此處自須假定,至少有三根存在.

今設 σ 為次一個添入的根數,能充適方程

$$\sigma^b=N, \tag{12}$$

則 N 為 $\Re(\rho)$ 內之量,對於任何三項的環錯列不變,但 σ 則不然,否則 σ 亦將在 $\Re(\rho)$ 內矣.因之,有一三項的環列 S,能使 σ 成為 $\varepsilon\sigma$,於此,ε 為 b 次的單位根.於是有

$$\sigma_S=\varepsilon\sigma,\quad \sigma_{S^2}=\varepsilon^2\sigma,\quad \sigma_{S^3}=\varepsilon^3\sigma,$$

而因 $S^3=E$,故必 $\varepsilon^3=1$,而 $b=3$.因之:

在普通可解的三次及高次方程方面,第二個添入的根數為一三次根.

7. 倘至少有五個根,則 (12) 中之 N,對於每個五項的環列 U 可不致變,蓋

$$(1\,2\,3\,4\,5)=(1\,2\,3)(1\,4\,5)$$

也.但 σ 則不變,或轉成為 $\varepsilon\sigma$ 或 $\varepsilon^2\sigma$.倘為後二者之事例,則因 $U^5=E$,故將有 $\varepsilon^5=1$ 或 $\varepsilon^{10}=1$,而此則為不可能者,因 ε 為三次複單位根之故.因之,祇有一事例可能,即 σ 對於每一五項的環列為不變者.但每一三項的環列可由二個五項的組成之,例如

$$(1\,2\,3)=(5\,4\,2\,1\,3)(1\,3\,2\,4\,5),$$

故 σ 亦將對於每一三項的環列為不變者,而此則按之

6. 爲不可能之事. 從可知事實上無此函數 σ, 方程 (12) 爲不可能者,而四次以上之普通方程,不能用根數以解之理,於此證明.

同時,並可知三次及四次方程之可解,蓋在於是,即此方面無有交錯函數 σ, 其三次方爲一交錯函數. 在三次方程方面,

$$\sigma=x_1+\varepsilon x_2+\varepsilon^2 x_3$$

爲如是之函數 (§99, 2.), 於四次方程方面,倘用 §99, 3. 中之記法時,有

$$\sigma=y+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2.$$

8. 於是吾人已證明,不能用有限多的代數運算法,作 n 個不定量 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 之函數 x, 能全等的充適方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0.$$

但此點則仍未解決, 即是否對於一切 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 之有理的值,數目 x 可由求有理數之根以推得之,俾能充適方程. 然此問題亦已由 §114 中之第一證以否定式解答之矣.

9. 十六世紀時既得三四次方程之解法後,一時數學研究上最重要問題之一,在求五次方程之代數的解法.十七八世紀時之名數學家, 如 Leibniz, Tschirnhaus, Euler, Lagrange, 等諸人,均曾致力於此,由此而代數學乃有極大之進步,但此問題則依然未解決.直至十八世紀之末,始有

人致疑於此項解法之是否可能. Gauss 氏於 1799 年所作之博士論文中,曾明白的提出之,謂向所用之解法,實在將方程歸爲純方程,故吾人不能假定此項方法可普遍的適用. Gauss 雖曾提及其對此問題之探討,[1] 惜其遺稿中未能發見之,然同時意大利之數學家,已開始研究,求證五次方程之不可解. Paolo Ruffini 之 Teoria generale delle equazioni (Bologña, 1799), 主旨在證明此理,其後並續有五篇著作發表,其末篇出於 1813 年.[2] Ruffini 之工作極堪注意,其成爲類論之第一個創作者,蓋亦由此.其 1813 年所發表之證,亦即爲本節內 **5**. 以後之證法之張本,惟其中所缺者,則未指明根數爲根之有理函數. 此缺點首由 Niels Hendrik Abel 所補苴, 故至是而此定理乃完全證明 (見 Journ. f. Math. 1, 1826). 以上 **2**., **3**., **4**. 內所用者, 爲經 Kronecker 氏簡易化後[3] 之證法.此證法中尚不能不應用代數的運算,但如用葛羅亞之理論,則可完全歸爲類論的研究,因而其原則最爲簡單.關於此層,讀者可閱代數學專籍.[4]

---

1. Gauss, Disq arithm. Art. 359. 或 Werke 10, 1. S. 505, 507.
2. 參閱 Burkhardt, Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini, Zeitschrift f. Math. u. Phys., Hist.-liter. Abt. 37 (1892).
3. Kronecker, Berl. Monatsber. 1879.
4. 參閱 Weber, Algebra, 2. Aufl. 1, § 183 以下.