МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

ВЫПУСК 20

Калининград
1989

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Калининградский государственный университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 20

Межвузовский тематический
сборник научных трудов

Калининград
1989

УДК 514.75; 514.76

Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1989.136с. Библиогр.117 назв.

В сборнике,подготовленном кафедрой высшей алгебры и геометрии,публикуются статьи,посвященные следующим разделам дифференциальной геометрии:многообразия квадрик в трехмерных и многомерных пространствах,геометрические структуры,теории поверхностей,полос,распределений и сетей,ассоциированные с многообразиями фигур дифференцируемые отображения и связности.

Предназначен для научных работников,аспирантов и студентов,специализирующихся в области геометрии.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 20

Межвузовский тематический сборник научных трудов

Редактор В.И.Васильева

Технич.редактор Н.Д.Шишкова

Сводный план 1989 года,поз. 620

Подписано в печать 12.06.89. КУ 04222. Формат 60 x 84 1/16

Бумага для глубокой печати.Печать офсетная.Усл.печ.л. 8,5.

Уч.изд.л. 8,25. Тираж 500 экз.Заказ № 812 Цена 1 руб.

Калининградский государственный университет

236041,Калининград обл.,ул.А.Невского,14.

Типография издательства "Калининградская правда",

236000,Калининград обл.,Карла Маркса,18.

Содержание

УДК 514.75

О ГРАФИКАХ ОСНОВНЫХ ТИПОВ БИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЕВКЛИДОВЫХ n-ПРОСТРАНСТВ

Л.И.А л е к с е е в а

(МГПИ им.В.И.Ленина)

В работе дана геометрическая характеристика основных типов биконформных отображений [1] евклидовых n-пространств с привлечением графика отображений [2].

1.Пусть f -диффеоморфизм области $\Omega \subset E_n$ на область $\bar{\Omega} \subset \bar{E}_n$, и поверхность V_n^* -график этого отображения. Область Ω отнесем к ортонормированному реперу $R^{x_1} = (x_1, \vec{e}_i)$ ($i,j,k = \overline{1,n}$),построенному на касательных к линиям основания σ_n отображения f [2],а область $\bar{\Omega}$ - к реперу $R^{x_2} = (x_2, \vec{e}_{n+i})$, причем $\vec{e}_{n+i} = f_{*x_1}(\vec{e}_i)$ (f_{*x_1} -индуцированное отображение).Тогда с графиком V_n^* инвариантно связан репер $R^x = (x, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\varepsilon}_{n+i})$,построенный на касательных к линиям соответствующей сети σ_n^* ,где

$$\vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i - \gamma_{ik}\bar{\gamma}^{kj}\vec{e}_{n+j}, \quad \vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \vec{e}_{n+i}, \quad \gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad \bar{\gamma}_{ij} = \vec{e}_{n+i} \cdot \vec{e}_{n+j},$$

$$g_{ij} = \vec{\varepsilon}_i \cdot \vec{\varepsilon}_j, \quad \bar{g}_{ij} = \vec{\varepsilon}_{n+i} \cdot \vec{\varepsilon}_{n+j},$$

при этом

$$\bar{\gamma}_{ij}\bar{\gamma}^{jk} = \delta_i^k, \quad g_{ij} = \gamma_{ij} + \bar{\gamma}_{ij}, \quad \bar{g}_{ij} = \gamma_{il}\bar{\gamma}^{lk}g_{kj}. \qquad (I)$$

Деривационные формулы этих реперов имеют вид:

$$\begin{cases} d\vec{x}_1 = \omega^i \vec{e}_i, & d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j, \\ d\vec{x}_2 = \bar{\omega}^i \vec{e}_{n+i}, & d\vec{e}_{n+i} = \bar{\omega}_i^j \vec{e}_{n+j}, \\ d\vec{x} = \theta^i \vec{\varepsilon}_i, & d\vec{\varepsilon}_i = \theta_i^j \vec{\varepsilon}_j + \theta_i^{n+j} \vec{\varepsilon}_{n+j}, \\ \quad d\vec{\varepsilon}_{n+i} = \theta_{n+i}^j \vec{\varepsilon}_j + \theta_{n+i}^{n+j} \vec{\varepsilon}_{n+j}, & \end{cases} \qquad (2)$$

где $\omega^i = \bar{\omega}^i$ - дифференциальные уравнения отображения f .

Так как репер R^{x_1} -ортонормированный,то из (I) имеем:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij}, \quad g_{ii} = 1 + \bar{\gamma}_{ii}, \quad \bar{g}_{ii} = \frac{1 + \bar{\gamma}_{ii}}{\bar{\gamma}_{ii}}, \quad \bar{\gamma}_{ij} = g_{ij} = \bar{g}_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \qquad (3)$$

и формы, входящие в формулы (2), удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} \omega_i^i = 0, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (i \neq j), \\ \bar\omega_i^i = \frac{1}{2}\, d\ln \bar\gamma_{ii}, \quad \bar\gamma_{ii}\bar\omega_j^i + \bar\gamma_{jj}\bar\omega_i^j = 0 \quad (i \neq j), \\ \theta_i^i = \frac{d\bar\gamma_{ii}}{2(1+\bar\gamma_{ii})}, \quad g_{ii}\theta_j^i + g_{jj}\theta_i^j = 0 \quad (i \neq j), \\ \theta_i^{n+i} = -\frac{d\bar\gamma_{ii}}{2(1+\bar\gamma_{ii})}, \quad \omega_i^j - \bar\omega_i^j = \frac{1+\bar\gamma_{jj}}{\bar\gamma_{jj}}. \end{cases} \tag{4}$$

В репере R^n поверхность V_n^* определяется системой уравнений $\theta^{n+i} = 0$, продолжение которой имеет вид:

$$\theta_i^{n+j} = b_{ik}^{n+j}\theta^k, \tag{5}$$

где функции $b_{ik}^{n+j} = b_{ki}^{n+j}$ определяют второй тензор поверхности V_n^*.

Формы ω_i^j, $\bar\omega_i^j$, θ_i^j $(i \neq j)$ -главные:

$$\omega_i^j = a_{ik}^j\omega^k, \quad \bar\omega_i^j = \bar a_{ik}^j\omega^k, \quad \theta_i^j = t_{ik}^j\theta^k. \tag{6}$$

При продолжении дифференциальных уравнений отображения f получим:

$$\omega_i^j - \bar\omega_i^j = h_{ik}^j\omega^k, \quad h_{ik}^j = h_{ki}^j. \tag{7}$$

В силу (4) и (5) имеем:

$$h_{ik}^j = \frac{1+\bar\gamma_{jj}}{\bar\gamma_{jj}}\, b_{ik}^{n+j}. \tag{8}$$

Откуда следует, что функции h_{ik}^j определяют поле тензора.

2. А.М.Васильев ввел естественное обобщение понятия конформного отображения римановых пространств - бикон/формное отображение.

О п р е д е л е н и е. Отображение $f: E_n \to \bar E_n$ называется биконформным, если в областях $\Omega \subset E_n$ и $\bar\Omega \subset \bar E_n$ существуют пары ортогональных распределений Δ_p и Δ_{n-p} в Ω и $\bar\Delta_p$ и $\bar\Delta_{n-p}$ в $\bar\Omega$ таких, что ограничения отображения f на плоскости $\Delta_p(x_1)$ и $\Delta_{n-p}(x_1)$ являются конформными.

Пусть распределение Δ_p натянуто на векторные поля $\bar e_1, \dots, \bar e_p$, а распределение Δ_{n-p} - на векторные поля $\vec e_{p+1}, \dots, \vec e_n$. Тогда в области $\bar\Omega$ им соответствуют взаимно ортогональные распределения $\bar\Delta_p(\vec e_{n+1}, \dots, \vec e_{n+p})$ и $\bar\Delta_{n-p}(\vec e_{n+p+1}, \dots, \vec e_{2n})$, а на графике V_n^* инвариантным образом определяются распределения $\Delta_p^*(\vec\varepsilon_1, \dots, \vec\varepsilon_p)$ и $\Delta_{n-p}^*(\vec\varepsilon_{p+1}, \dots, \vec\varepsilon_n)$.

Условие биконформности означает, что

$$\bar\gamma_{tt} = \alpha \quad (t, s, q = \overline{1,p}), \qquad \bar\gamma_{uu} = \beta \quad (u, v, w = \overline{p+1,n}), \tag{9}$$

где α и β -коэффициенты конформности. Формулы (3) для соответствующих наборов индексов запишутся в виде:

$$\begin{cases} g_{tt} = 1+\alpha, \qquad \bar g_{tt} = \frac{1+\alpha}{\alpha}, \\ g_{uu} = 1+\beta, \qquad \bar g_{uu} = \frac{1+\beta}{\beta}. \end{cases} \tag{10}$$

С помощью этих соотношений из (4) и (5) получим:

$$\begin{cases} b_{sj}^{n+s} = b_{tj}^{n+t} \quad (s \neq t), \qquad b_{uj}^{n+u} = b_{vj}^{n+v} \quad (u \neq v), \\ b_{tj}^{n+s} = -b_{sj}^{n+t} \quad (s \neq t), \qquad b_{vj}^{n+u} = -b_{uj}^{n+v} \quad (u \neq v), \end{cases} \tag{11}$$

$b_{tq}^{n+s} = 0$ (s, t, q -различ.), $b_{vw}^{n+u} = 0$ (u, v, w -различ.).

3. По аналогии с Б.Гланц [1] выделим основные типы биконформных отображений евклидовых n-пространств, используя тензор отображения h_{ij}^k. Но так как выполняются формулы (8), то требования можно накладывать на второй тензор графика V_n^*.

Систему (7) в биконформном случае запишем в виде:

$$\begin{cases} \omega_t^s - \bar\omega_t^s = \frac{1+\alpha}{\alpha}\left(b_{tq}^{n+s}\theta^q + b_{tu}^{n+s}\theta^u\right), \\ \omega_u^s - \bar\omega_u^s = \frac{1+\alpha}{\alpha}\left(b_{ut}^{n+s}\theta^t + b_{uv}^{n+s}\theta^v\right), \\ \omega_s^u - \bar\omega_s^u = \frac{1+\beta}{\beta}\left(b_{st}^{n+u}\theta^t + b_{sv}^{n+u}\theta^v\right), \\ \omega_v^u - \bar\omega_v^u = \frac{1+\beta}{\beta}\left(b_{vt}^{n+u}\theta^t + b_{vw}^{n+u}\theta^w\right). \end{cases} \tag{12}$$

Отсюда выделяются основные типы биконформных отображений:

$$\begin{cases} f_1: \; b_{tq}^{n+s} = 0, \quad f_2: \; b_{tu}^{n+s} = 0, \quad f_3: \; b_{st}^{n+u} = 0, \\ f_1': \; b_{vw}^{n+u} = 0, \quad f_2': \; b_{vt}^{n+u} = 0, \quad f_3': \; b_{uv}^{n+t} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Используя соотношения (4)-(6), (9)-(11) для соответствующего набора индексов, можно показать, что отображения f_1, f_2 имеют следующие геометрические характеристики.

Теорема I. Биконформное отображение будет отображением типа f_1

а) тогда и только тогда, когда $\alpha = const$ вдоль интегральных кривых распределения Δ_p [I];

б) тогда и только тогда, когда для любой кривой γ^* графика V^*_n, принадлежащей распределению Δ^*_p, соприкасающаяся плоскость $\Pi_2(x, \gamma^*)$ ортогональна инвариантной плоскости $(x, \vec{\varepsilon}_{n+1}, \dots, \vec{\varepsilon}_{n+p})$.

Теорема 2. Биконформное отображение будет отображением типа f_2 тогда и только тогда, когда распределение Δ_p (а значит, и распределения $\bar{\Delta}_p$ и Δ^*_p) вполне интегрируемо, и $\alpha = const$ вдоль интегральных кривых распределения Δ_p [I].

При этом на одномерных нормалях $(x, \vec{\varepsilon}_u)$ к поверхности V^*_p абсциссы псевдофокусов $\mathcal{F}^s_u$ совпадают с абсциссами соответствующих псевдофокусов на нормалях $(x_1, \vec{e}_u)$ к поверхности V_p (на нормалях $(x_2, \vec{e}_{n+u})$ к поверхности $\bar{V}_p$), где V_p, $\bar{V}_p$ и V^*_p -интегральные многообразия распределений $\Delta_p, \bar{\Delta}_p$ и Δ^*_p соответственно.

Теорема 3. Биконформное отображение будет отображением типа f_3 тогда и только тогда, когда линии ткани $\Sigma^*_p \subset \Delta^*_p$ сопряжены относительно конусов $\Phi^{n+u} = 0$, и псевдофокусы $\mathcal{F}^s_{n+u}$ на прямых $(x, \vec{\varepsilon}_{n+u})$ являются несобственными точками.

В этом случае имеем:

$$a^u_{ts} = \frac{(1+\alpha)\, b^{n+t}_{us}}{\beta - \alpha}, \quad a^u_{ts} = \bar{a}^u_{ts}.$$

Следствие I. Ткань Σ_p на распределении Δ_p (ткань $\bar{\Sigma}_p$ на распределении $\bar{\Delta}_p$) сопряжена тогда и только тогда, когда распределение Δ_p вполне интегрируемо.

Следствие 2. Ткань Σ_p на распределении Δ_p (ткань $\bar{\Sigma}_p$ на распределении $\bar{\Delta}_p$) состоит из асимптотических линий тогда и только тогда, когда $\alpha = const$ вдоль распределения Δ_{n-p}.

Аналогично можно сформулировать признаки для биконформных отображений типа f'_1, f'_2, f'_3, воспользовавшись формулами (4)-(6), (9)-(II) для соответствующего набора индексов.

Библиографический список

I. Гланц Б. Распределения и биконформные отображения римановых пространств: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. М., 1988.

2. Базылев В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств //Вопросы дифференциальной геометрии: Уч. зап. /МГПИ им. В.И. Ленина. М., 1970. Т. I №374. С. 41-51.

УДК 514.75

К ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Б.А. Андреев

(Калининградский ун-т)

Изучается дифференцируемое отображение $f: P_m \to P_n$ проективных пространств произвольных размерностей. Доказано, что фундаментальным объектом 2-го порядка отображения f для каждой точки $P \in P_m$ определяется отображение h, названное характеристическим отображением в точке P, которое определено на пространстве гиперплоскостей в P_n, не инцидентных точке $f(P)$, и принимает значение в пространстве линейных семейств гиперквадрик пространства P_m. Более подробно изучен случай субмерсии $(m \geqslant n)$. Получен ряд теорем, в которых показано, что характеристическое отображение в точке P определяет конус характеристических прямых в этой точке и характеристические гомографии на них. Исследование отображения f проводится с помощью метода продолжений и охватов и носит локальный характер. Индексы принимают следующие значения: $\mathcal{J}, \ldots = \overline{1,m}$; $i, \ldots = \overline{1,n}$; $\mathcal{J}', \ldots = \overline{0,m}$; $i', \ldots = \overline{0,n}$.

I. Фундаментальный объект 2-го порядка отображения f.

Пусть P_m и P_n -два проективных пространства, отнесенные соответственно к подвижным реперам $R = \{\bar{R}_{\mathcal{J}'}\}$, $\tau = \{\bar{\tau}_{i'}\}$, деривационные формулы которых имеют вид:

$$d\bar{R}_{\mathcal{J}'} = \Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'} \bar{R}_{\mathcal{K}'}; \quad d\tau_{i'} = \omega^{j'}_{i'} \bar{\tau}_{j'}, \tag{I}$$

причем выполняется:

$$\mathcal{D}\Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'} = \Omega^{\mathcal{L}'}_{\mathcal{J}'} \wedge \Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{L}'}; \quad \mathcal{D}\omega^{j'}_{i'} = \omega^{k'}_{i'} \wedge \omega^{j'}_{k'}. \tag{2}$$

Рассмотрим дифференцируемое отображение $f: P_m \to P_n$, имеющее максимальный возможный ранг в каждой точке области определения: $rang\, f = \min(m,n)$. Поместим вершину R_0 репера R в произвольную точку P области определения отображения f, а вершину τ_0 репера τ в соответствующую ей точку $p = f(P) \in P_n$. Указанные реперы будем называть реперами нулевого порядка отображения f. В этих реперах структурными формами пространств

P_m и P_n являются формы Пфаффа Ω^j_0, ω^i_0. В реперах нулевого порядка система дифференциальных уравнений отображения f запишется в виде:

$$\omega^i_0 = \Lambda^i_j \Omega^j_0. \tag{3}$$

Двукратное продолжение системы (3) приводит к уравнениям

$$\nabla \Lambda^i_j = \Lambda^i_{jk} \Omega^k_0, \tag{4}$$

$$\nabla \Lambda^i_{jk} + \Lambda^i_{(j} \Omega^0_{k)} - \Lambda^i_{(j} \Lambda^t_{k)} \omega^0_t = \Lambda^i_{jkl} \Omega^l_0. \tag{5}$$

Здесь ∇ -оператор, определенный в [3,с.29], а скобки означают циклирование.

Формулы (3)-(5) показывают, что системы величин $\Gamma_1 = \{\Lambda^i_j\}$ и $\Gamma_2 = \{\Lambda^i_j, \Lambda^i_{jk}\}$ являются фундаментальными объектами соответственно 1-го и 2-го порядков отображения f. Из определения отображения f получаем для матрицы $[\Lambda^i_j]$:

$$\operatorname{rang} [\Lambda^i_j] = \min (m,n). \tag{6}$$

2.Отображение h.

Пусть $\bar{P}_n$ -пространство, двойственное к P_n, и $\{p\}$ -связка гиперплоскостей в P_n, инцидентных точке p. Обозначим $A_n = \bar{P}_n \setminus \{p\}$. Как однородное пространство A_n изоморфно n-мерному аффинному пространству. Произвольный элемент $\pi \in A_n$ определяется уравнением

$$A_i x^i + x^0 = 0, \tag{7}$$

где x^0, x^i - однородные координаты точек в P_n. Обозначим символами $\pi^{j'}_{i'}$, $\Pi^{k'}_{j'}$ значения форм $\omega^{j'}_{i'}$, $\Omega^{k'}_{j'}$ при фиксированных первичных параметрах, а символом $\overset{*}{\nabla}$ -оператор, соответствующий при этом оператору ∇. Тогда закон изменения величин A_i запишется в виде

$$\overset{*}{\nabla} A_i = \pi_i. \tag{8}$$

Введем систему величин

$$\bar{\Lambda}^i_{jk} = \Lambda^i_{jk} - A_t \Lambda^t_{(j} \Lambda^i_{k)}. \tag{9}$$

Имеем:

$$\overset{*}{\nabla} \bar{\Lambda}^i_{jk} = - \Lambda^i_{(j} \Pi^0_{k)}. \tag{10}$$

Объект $\{\Lambda^i_j, \bar{\Lambda}^i_{jk}\}$ определяет в P_m для каждого $\pi \in A_n$ инвариантное алгебраическое многообразие J_π:

$$\bar{\Lambda}^i_{jk} X^j X^k - 2 \Lambda^i_j X^j X^0 = 0. \tag{11}$$

Здесь X^0, X^j -однородные координаты точек в P_m. Обозначим

$$F^i = \bar{\Lambda}^i_{jk} X^j X^k - 2 \Lambda^i_j X^j X^0. \tag{12}$$

Уравнение

$$a_i F^i = 0 \tag{13}$$

определяет в P_m инвариантное линейное семейство гиперквадрик, инцидентных точке P. Размерность этого многообразия гиперквадрик в случае $m \geqslant n$ при выполнении условия (6) равна n. Обозначим символом $E(L_k(Q))$ пространство всех k-мерных линейных семейств $L_k(Q)$ гиперквадрик $Q \subset P_m$, таких, что $P \in Q$. Имеем $0 < k \leq N = C^2_{m+2} - 2$. $E(L_k(Q))$ является пространством представления проективной группы, действующей в P_m. Получаем

Предложение 1. Иммерсия $f: P_m \to P_n$ порождает для каждой точки $P \in P_m$ отображение $h: \pi \in A_n \mapsto h(\pi) \in E(L_n(Q))$, где π и $h(\pi)$ определяются формулами (7) и (13).

Будем называть отображение h характеристическим отображением отображения f в точке P.

Пусть S -отображение, которое семейству (13) ставит в соответствие многообразие (11), являющееся пересечением всех гиперквадрик семейства (13).

Рассмотрим отображение $h^* = S \circ h$. Многообразие $h^*(\pi) = J_\pi \subset P_m$ содержит точку P и в общем случае является алгебраическим многообразием размерности $m-n$ и порядка 2^n. Частным случаем многообразия J_π является введенная автором в [4],[5] индикатриса J отображения пространства P_m в расширенное аффинное пространство, в котором π является несобственной гиперплоскостью. Действительно, помещая на π вершины z_i репера, получаем из (7): $A_i = 0$. Система (11) тогда принимает вид (1) [5] и, следовательно, определяет индикатрису J.

При $m < n$ отображение $h: A_n \to E(L_k(Q))$, определяемое формулами (7),(13), также будем называть характеристическим. В общем случае имеем: $k = \dim h(\pi) = \min(n, N)$. Таким образом, при $m < n$ отображение h нетривиально, если n меньше N. В специальных случаях значение k может понижаться, однако из (6),(9),(13) вытекает, что при этом всегда выполняется: $k \geqslant m$. Например, если $f(P)$ -планарная точка многообразия

$\mathcal{J}m\, f = f(P_m) \subset P_n$,то получаем: $k = m$.Вообще можно показать,что при $k < n$ размерность асимптотического конуса многообразия $\mathcal{J}m f$ в точке $f(P)$ больше,чем в общем случае. Отображение h^* при $m<n$ нетривиально (т.е. $h^*(\pi)$ не сводится к множеству,состоящему из точки P) только в специальных случаях.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением субмерсии.

3.Характеристический конус.

Характеристическим конусом χ будем называть множество прямых связки $\{P\}$,имеющих характеристические направления [1] в точке P . В соответствии с [1] будем различать нулевые и ненулевые характеристические прямые.Обозначим символом $[\mathcal{J}_\pi]$ множество прямых связки $\{P\}$,которые а)пересекают многообразие $\mathcal{J}_\pi$ в двух точках или б) касаются его в точке P .

Т е о р е м а I. Множество $[\mathcal{J}_\pi]$ для любого $\pi \in A_n$ является характеристическим конусом: $\chi = [\mathcal{J}_\pi]$,причем ненулевые характеристические прямые пересекают многообразие $\mathcal{J}_\pi$,а нулевые-касаются его в точке P .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольный элемент π пространства A_n .Рассмотрим расширенное аффинное пространство P_n ,в котором π является несобственной гиперплоскостью. $\mathcal{J}_\pi$ тогда становится индикатрисой отображения f , и доказываемое утверждение вытекает из теоремы I работы [4].

Т е о р е м а 2. Если h -характеристическое отображение в точке P и $h^* = s \circ h$,то выполняется : $\bigcup_{\pi \in A_n} h^*(\pi) = \overline{\chi}$, где $\overline{\chi}$ -множество всех точек ненулевых характеристических прямых.

Теорема 2 является следствием доказываемой ниже теоремы 3.

Теоремы I и 2 показывают,что отображение h определяет множество характеристических прямых отображения f .

4. $K(P_\mathcal{J})$-главные прямые.

Легко показать,что если исключить из рассмотрения нулевые характеристические прямые,то понятия,связанные с $K(P_\mathcal{J})$-главными прямыми отображения $P_m \to P_n$ ($m=n$), и соответствующие формулы без изменений переносятся на случай $m > n$. Пусть Λ - прямая связки $\{P\}$,а $K(\Lambda)$ -ее образ при коллинеациях,касательных к отображению f в точке P .Если Λ -ненулевая характеристическая прямая,то каждой из коллинеаций,для которых эта прямая является главной,определяется одно и то же проективное соответствие $\Lambda \to K(\Lambda)$,имеющее вид (I.19) в [2].Будем называть это соответствие характеристической гомографией на Λ .

Из (II) вытекает,что пересечение $\Lambda \cap h^*(\pi)$ состоит из пары точек,одна из которых совпадает с точкой P .Таким образом, отображение h для каждой ненулевой характеристической прямой Λ определяет точечное отображение $h^*_\Lambda : K(\Lambda) \to \Lambda$,которое точке пересечения прямой $K(\Lambda)$ с гиперплоскостью π ставит в соответствие отличную от P точку из $\Lambda \cap h^*(\pi)$,а точке $f(P)$ - точку P .

Т е о р е м а 3. Характеристическая гомография на Λ является отображением,обратным к отображению h^*_Λ , и,таким образом,характеристическое отображение h определяет характеристические гомографии на ненулевых характеристических прямых.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a - произвольная точка на $K(\Lambda)$,отличная от $f(P)$.Зафиксируем произвольную гиперплоскость π ,пересекающую прямую $K(\Lambda)$ в точке a .Фиксация π задает на P_n структуру расширенного аффинного пространства,а многообразие $\mathcal{J}_\pi$ является индикатрисой отображения f в это пространство.Из предложения I работы [4] теперь вытекает,что $A = h^*_\Lambda(a)$ является главной точкой на Λ ;но в соответствии с определением I [4] точка A является прообразом точки a при характеристической гомографии на Λ .Так как a -любая,отличная от $f(P)$ точка на $K(\Lambda)$,а характеристическая гомография на Λ является биекцией,то теорема доказана.

Заметим,что теоремы 2 и 3 дают полную геометрическую характеристику отображения h^* , таким образом,и характеристику отображения h .

Библиографический список

1.Р ы ж к о в В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n //Тр.геометр. семинара/ВИНИТИ.М., 1971.Т.3.С.235-242.

2.Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами// Геометрия,1963.Итоги науки/ ВИНИТИ.М.,1965.С.65-107.

3.А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т.Калининград,1971.Вып.2.С.28-37.

4. А н д р е е в Б.А. О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n\ (m>n)$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калнингр.ун-т.Калининград,1979.Вып.10.С.5-9.

5. А н д р е е в Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \widehat{P}_n\ (m>n)$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калнингр.ун-т.Калининград, 1987.Вып.18.С.5-9.

УДК 514.76

О ДВУХ СПОСОБАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ОТОБРАЖЕНИЯ

В.Т.Б а з ы л е в

(МГПИ им.В.И.Ленина)

В статье дано определение характеристических направлений отображения пространств аффинной связности без кручения.Доказано, что в случае отображения областей аффинных пространств это определение совпадает с классическим определением,идущим от О.Борувки [1].

1.Пусть $(\mathfrak{X}_n,\nabla)$ и $(\overline{\mathfrak{X}}_n,\overline{\nabla})$ -пространства аффинной связности без кручения (возможен случай,когда базы $\mathfrak{X}_n$ и $\overline{\mathfrak{X}}_n$ совпадают) и $f: \mathfrak{X}_n \to \overline{\mathfrak{X}}_n$ -диффеоморфизм (вообще говоря,рассмотрение локальное,так что речь может идти о некоторой области $\Omega \subset \mathfrak{X}_n$ и диффеоморфной ей области $\overline{\Omega} \subset \overline{\mathfrak{X}}_n$) .Связность ∇ $(\overline{\nabla})$ определяется 1-формами $\omega^i, \omega^i_j\ (i,j,k,\ell=\overline{1,n})\ (\theta^i, \theta^i_j)$,удовлетворяющими известным уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j\ ,\ \mathcal{D}\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \tfrac{1}{2} R^i_{jk\ell}\, \omega^k \wedge \omega^\ell, \tag{1}$$

$$\mathcal{D}\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j\ ,\ \mathcal{D}\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \tfrac{1}{2} \overline{R}^i_{jk\ell}\, \theta^k \wedge \theta^\ell. \tag{2}$$

Пусть $f(x)=\bar{x}$.К точкам x и $\bar{x}$ присоединим подвижные реперы $R^x=(x, X_i)$ и $R^{\bar{x}}=(\bar{x}, X'_i)$.Относительно такой пары реперов отображение f будет задаваться системой уравнений вида $\theta^i=\mu^i_j\,\omega^j$.Применение этих уравнений в изучении свойств отображения f приводит к значительным аналитическим осложнениям. Мы будем брать реперы R^x и $R^{\bar{x}}$ согласованными в индуцированном отображении $f_*: R^{\bar{x}}=f_{*x}(R^x)$.Имеем: $dx=\omega^i X_i$, $d\bar{x}=\theta^j X'_j$, $d\bar{x}=f_{*x}(dx)$. Учитывая,что отображение f_{*x} действует линейно на векторы из векторного пространства $T_x(\mathfrak{X}_n)$,мы теперь приходим к системе уравнений:

$$\theta^i=\omega^i. \tag{3}$$

Это есть система дифференциальных уравнений отображения f относительно согласованной пары реперов R^x и $R^{\bar{x}}$.

2.Продолжая систему уравнений (3),находим

$$\theta^i_j-\omega^i_j = h^i_{jk}\,\omega^k, \tag{4}$$

где h^i_{jk} - тензор,симметричный по нижним индексам (тензор аффинной деформации [2]).

Пусть $T(\mathfrak{X}_n)$-касательное расслоение на многообразии $\mathfrak{X}_n$. Поле тензора h^i_{jk} позволяет построить отображение

$$h: T(\mathfrak{X}_n) \times T(\mathfrak{X}_n) \to T(\mathfrak{X}_n)$$

по закону: если $\xi=\xi^i X_i$, $\eta=\eta^j X_j$,то

$$h(\xi,\eta)=h^i_{jk}\,\xi^j\eta^k X_i. \tag{5}$$

Отсюда следует,что $h(a\xi,b\eta)=ab\,h(\xi,\eta)$,и, значит,отображение h каждую пару 1-распределений $\Delta_1(\xi), \Delta'_1(\eta)$, определенных в расслоении $T(\mathfrak{X}_n)$, переводит в некоторое 1-распределение,определенное формулой (5).Из формулы (5) следует,что 1-распределение $\Delta_1=\Delta_1(\xi)$, удовлетворяющее условию

$$h(\Delta_1,\Delta_1)=\Delta_1, \tag{6}$$

не зависит от выбора репера R^x .

1-распределение Δ_1 ,удовлетворяющее условию (6),мы назовем характеристическим 1-распределением отображения f .Следовательно, характеристическое 1-распределение определяется векторным полем ξ ,которое удовлетворяет системе уравнений:

$$h^i_{jk}\,\xi^j\xi^k=\lambda\xi^i. \tag{*}$$

В этом случае направление (x,ξ) называется характеристическим направлением в точке x .

Легко подсчитать,что в общем случае отображения существуют $m=2^n-1$ характеристических направлений.Их интегральные кривые,называемые характеристическими линиями,образуют характеристическую m-ткань линий.На многообразии $\overline{\mathfrak{X}}_n$ ей соответствует m-ткань линий,которая является характеристической для отображения f^{-1}.

Распределение Δ_1 называется f-асимптотическим (или f-главным), если оно удовлетворяет условию $h(\Delta_1, \Delta_1) = 0$. Интегральная кривая такого распределения называется f-асимптотической (или f-главной). Справедлива следующая

Т е о р е м а I. Любая гладкая линия $\gamma \subset \mathfrak{X}_n$ является f-асиптотической тогда и только тогда, когда поле тензора h^i_{jk} -нулевое.

Два I-распределения Δ_1, Δ_1' назовем f-сопряженным, если $h(\Delta_1, \Delta_1') = 0$. Ясно, что тогда и $h(\Delta_1', \Delta_1) = 0$. Можно заметить, что f-асимптотическое распределение есть распределение f-самосопряженное. Справедлива

Т е о р е м а 2. В общем случае гладкого отображения f на многообразии $\mathfrak{X}_n$ существует по крайней мере одна f-сопряженная 2-ткань.

3. Гладкую линию $\gamma \subset \mathfrak{X}_n$ можно задать уравнениями $\omega^i = \theta \xi^i$, $\mathcal{D}\theta = \theta \wedge \theta_1$. Тогда $X = \xi^i X_i$ -касательный вектор к линии γ в ее точке x. В силу уравнений (3) линия $\bar{\gamma} = f(\gamma)$ определяется теми же уравнениями, что и линия γ. Как известно, линия γ называется геодезической, если $\nabla_X X = \lambda X$, то есть

$$d\xi^i + \xi^j \omega^i_j = \lambda \xi^i. \tag{7}$$

Линия $\bar{\gamma}$ будет геодезической, если она удовлетворяет условию:

$$d\xi^i + \xi^j \theta^i_j = \bar{\lambda} \xi^i. \tag{8}$$

Из уравнений (7), (8) находим: $h^i_{jk} \xi^j \xi^k = t \xi^i \quad (t = \dfrac{\bar{\lambda} - \lambda}{\theta})$. Таким образом, верна

Т е о р е м а 3. Если γ и $f(\gamma)$ -геодезические, то γ - характеристическая линия отображения f.

4. Пусть $n \geqslant 3$ и $(\mathfrak{X}_n, \nabla), (\bar{\mathfrak{X}}_n, \bar{\nabla})$-аффинные (в частности, евклидовы) пространства и гладкая линия γ касается в точке x прямой $(x, \vec{a})$. Тогда линия $\bar{\gamma} = f(\gamma)$ касается прямой $(y, \vec{b})$ в точке $y = f(x)$, где $\vec{b} = f_{*x}(\vec{a})$. Линия $\gamma' = f_{*x}(\gamma)$ также касается прямой $(y, \vec{b})$ в точке y.

Зададим линию $\gamma \subset \mathfrak{X}_n$ системой уравнений: $\omega^i = m^i \theta$, $\mathcal{D}\theta = \theta \wedge \theta_1$. Соприкасающиеся плоскости $\Pi_2(x,\gamma)$, $\Pi_2(y, \bar{\gamma})$ определяются так:

$$\Pi_2(x,\gamma) = (x, m^i X_i, (dm^i + m^j \omega^i_j) X_i), \tag{9}$$

$$\Pi_2(y,\bar{\gamma}) = (y, m^i X_i', (dm^i + m^j \theta^i_j) X_i'). \tag{10}$$

Соприкасающаяся плоскость $\Pi_2(\gamma') = f_{*x}(\Pi_2(\gamma))$ к линии γ' определяется следующими элементами:

$$\Pi_2(y,\gamma') = (y, m^i X_i', (dm^i + m^j \omega^i_j) X_i') \tag{11}$$

Выражение (10) можно записать так:

$$\Pi_2(y,\gamma') = (y, m^i X_i', (dm^i + m^j \theta^i_j) X_i' - m^j(\theta^i_j - \omega^i_j) X_i'). \tag{12}$$

Из равенств (10), (12) следует, что плоскости $\Pi_2(y,\gamma')$ и $\Pi_2(y,\bar{\gamma})$ совпадают, если $m^j(\theta^i_j - \omega^i_j) X_i' \in \Pi_2(y, \bar{\gamma})$. Следовательно, должны существовать такие I-форма α и скаляр β, которые удовлетворяют условию:

$$m^j(\theta^i_j - \omega^i_j) = \alpha m^i + \beta(dm^i + m^j \theta^i_j). \tag{13}$$

Потребуем, чтобы указанные плоскости совпадали при любом выборе линии γ, касающейся прямой $(x, \vec{a})$. Значит, надо рассматривать равенство (13) при любых параметрах m^i, удовлетворяющих условию: $m^1 : m^2 : \ldots : m^n = c^1 : c^2 : \ldots : c^n$, $c^i = \mathrm{Const}$.

При таком выборе параметров, определяющих прямую $(y, \vec{b})$, положение плоскости $\Pi_2(y, \bar{\gamma})$ зависит только от значений дифференциалов dm^i (см. формулу (10)).

Имеем: $m^i = c^i t$. При $t \to 0$ $(t \neq 0)$ точка m, определяемая вектором $\vec{xm} = c^i t X_i$, стремится по прямой $(x, \vec{b})$ к точке x, не совпадая с ней. Так как выбор γ произволен, то мы можем считать, что в этом предельном переходе из дифференциалов dm^i хотя бы один отличен от нуля (в противном случае из формулы (9) следует, что плоскость $\Pi_2(x,\gamma)$ не существует). Из формулы (13) в пределе находим:

$$(\lim_{m \to x} \beta) \lim_{m \to x} (dm^i) = 0.$$

Отсюда $\lim_{m \to x} \beta = 0$. Таким образом, пусть бесконечно малые значения параметров m^i (I-го порядка малости) определяют прямую $(x, \vec{a})$. Тогда верна

Т е о р е м а 4. Соприкасающиеся плоскости $\Pi_2(y, f(\gamma))$ и $\Pi_2(y, f_{*x}(\gamma))$ совпадают тогда и только тогда (с учетом лишь бесконечно малых значений параметров m^i), когда выполняются соотношения:

$$(\theta^i_j - \omega^i_j) m^j = \alpha m^i, \tag{14}$$

где α -некоторая I-форма.

Направление прямой $(x, \bar{x})$, параметры m^i которой удовлетворяют полученным уравнениям (I4), принято называть характеристическими направлениями отображения f в точке x.

Такое определение характеристических направлений отображения восходит к работе [1] Борувки 1926г. Он дал определение характеристических направлений в данной точке при рассмотрении отображения двумерных проективных плоскостей (используя элементы касания различных порядков в этой точке). Затем понятие характеристических направлений было перенесено на случай отображения областей пространств размерности $n \geqslant 3$ проективных, аффинных и евклидовых [3].

Это классическое определение, связанное при $n \geqslant 3$ с совпадением соприкасающихся плоскостей $\Pi_2(y, \bar{\gamma})$ и $\Pi_2(y, \gamma')$, хорошо работает в случае отображения одной плоской области в другую плоскую область (тогда существует линия γ' и соприкасающаяся плоскость $\Pi_2(y, \gamma')$). Если же мы рассматриваем отображение "кривых" пространств, то указанное выше определение характеристических направлений с помощью линии γ' (которой здесь не существует) не годится. Правда, в случае отображения областей, лежащих на гиперповерхностях евклидова n-пространства А.С.Добротворскому [4] удалось ввести на этих гиперповерхностях понятие характеристических направлений отображения, используя при этом классическое его определение. Но это было сделано за счет достаточно сложных вспомогательных построений.

5. Если исходить из алгебраической точки зрения, то определение характеристических направлений, данное нами в п.2 (и пригодное не только для отображения плоских областей, но и для отображения кривых областей), и классическое определение, выражающееся в выполнении равенств (I4), на самом деле совпадают.

Действительно, I-распределение $\Delta_1(\xi)$ можно задать отношением форм $\omega^i = \xi^i \theta$ $(D\theta = \theta \wedge \theta_1)$. Тогда систему $(*)$ п.2, которая определяет характеристическое I-распределение, можно записать в виде:

$$h^i_{jk}\,\omega^j \omega^k = \lambda^* \omega^i \quad (\lambda^* = \lambda\theta). \tag{I5}$$

Теперь рассмотрим классическое определение (I4). Заменив в этом равенстве $\theta^i_j - \omega^i_j$ на $h^i_{jk}\omega^k$ и m^j на m^j/θ, мы получим ту же систему равенств (I5) (где $\lambda^* = \alpha$). Поэтому можно ввести такое определение [5], обобщающее классическое.

О п р е д е л е н и е. При изучении отображений $f: (\mathfrak{X}_n, \nabla) \to (\bar{\mathfrak{X}}_n, \bar{\nabla})$ мы будем называть характеристическими такие I-распределения $\Delta_1 = \Delta_1(\xi)$, которые удовлетворяют условию (6). Векторное поле ξ, задающее такое I -распределение, удовлетворяет системе уравнений $(*)$.

Библиографический список

1. Bořůvka O. Sur les correspondances analytiques entre deux plans projectifs. I, II. Spisy přírodověd. fak. Brně, 1926. V. 27, 72, 85.

2. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

3. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами// Итоги науки, 1963/ ВИНИТИ. М., 1965. С.65-107.

4. Д о б р о т в о р с к и й А.С. Отображение гиперповерхностей евклидовых пространств//Геометрия погруженных многообразий: Сб.тр./МОПИ им.Н.К.Крупской. М., 1972. С.46-58.

5. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии отображений пространств аффинной связности/Восьмая Всесоюзная научная конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии: Тезисы докл. Одесса, 1984. С.10.

УДК 514.75.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ Δ_n НА МНОГООБРАЗИИ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТРАНСТВА P_n

Г.П.Б о ч и л л о
(Томский ун-т)

В работе рассматриваются распределения Δ_n на многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов пространства P_n. В смысле [1] Δ_n являются распределениями касательных элементов, порожденных n-мерными подмногообразиями гиперплоских элементов $x = \{A, \alpha\}$ пространства P_n. Здесь A -точка, α -инцидентная ей гиперплоскость пространства P_n. Регулярное (по аналогии с [2]) распределение Δ_n на M_{2n-1} порождает поле невырожденного тензора второй валентности $\hat{\Gamma}$ -главного фундаментального тензора распределения (г.ф.т.р), который несимметричен в общем случае. Геометрия г.ф.т.р. на M_{2n-1} рассмотрена в [3]. В данной работе изучается класс распределений Δ_n на M_{2n-1}, у которых г.ф.т.р. симметричен.

В работе индексы принимают следующие значения: $i,j,\ldots=\overline{1,n}$; $p,q,\ldots=\overline{1,n-1}$; $I,J,\ldots=0,\overline{1,n}$; а дифференциальный оператор ∇ обозначает известную операцию [4].

I. Главный фундаментальный тензор распределения.

Присоединим к каждому элементу $x=\{A,\alpha\}$ многообразия M_{2n-1} точечные $R=\{A_J\}$ и тангенциальные $\tau=\{\alpha^J\}$ подвижные реперы пространства P_n, деривационные формулы которых имеют вид $dA_J=\omega_J^K A_K$, $d\alpha^J=-\omega_K^J\alpha^K$, причем I-формы ω_J^K удовлетворяют условиям

$$d\omega_J^K=\omega_J^L\wedge\omega_L^K,\qquad \sum\omega_J^J=0.$$

Положив $A=A_0$, $\alpha=\alpha^n$, перейдем к реперам $R_0(\tau^0)$ со структурными формами $\omega_0^p,\ \omega_0^n,\ \omega_p^n$ многообразия M_{2n-1}. Тогда регулярное распределение Δ_n на M_{2n-1} можно определить [5] системой $(n-1)$-линейно независимых форм Пфаффа

$$\Theta_p\equiv\omega_p^n-\Lambda_{pi}^n\omega_0^i\qquad (R\,\|\Lambda_{pi}^n\|=n-1),$$

что приводит к заданию на M_{2n-1} поля объекта $\Gamma_0\equiv\hat{\Gamma}_0$ [5].

Каждому одномерному многообразию $M_1=\{t^p,t^n,t_p\}\equiv\{t\}$ гиперплоских элементов в P_n соответствует пара $\{L_1,\ell_{n-2}\}$, где

$$L_1=[A_0,\ t^pA_p+t^nA_n],\qquad \ell_{n-2}=[\alpha^n,\ t_p\alpha^p+t_0\alpha^0],$$

$$t_0\equiv t^n,\quad \omega_0^p=t^p\theta,\quad \omega_0^n=t^n\theta,\quad \omega_p^n=t_p\theta,\quad d\theta=\theta\wedge\theta_1,$$

$\{t^p,t^n,t_p\}\equiv\{t\}$ -объект. Геометрически объект Γ_0 определяет [5] отображение h множества прямых L_1 на множество $(n-2)$-плоскостей ℓ_{n-2}, инцидентных A_0, α^n соответственно.

Перейдя к реперам $R_1(\tau^1)$, адаптированным регулярному распределению Δ_n на M_{2n-1}, получим, что система форм Θ_p приняла вид

$$\Theta_p\equiv\omega_p^n-\Lambda_{pq}^n\omega_0^q,\qquad \det\|\Lambda_{pq}^n\|\neq0.$$

Распределение Δ_n на M_{2n-1} порождает поле невырожденного тензора (г.ф.т.р.) $\hat{\Gamma}_0=\{\Lambda_{pq}^n\}$:

$$\nabla\Lambda_{pq}^n+\Lambda_{pq}^n\omega_0^0=\Lambda_{pqi}^n\omega_0^i+\Lambda_{pq}^{n\tau}\omega_\tau^n. \qquad (\mathrm{I})$$

Совокупность одномерных многообразий $M_1\{t\}\subset M_{2n-1}$, которым в P_n соответствуют инцидентные $\{L_1,\ell_{n-2}\}$, удовлетворяет условиям

$$t^n=0,\quad t^pt_p=0, \qquad (2)$$

определяющим асимптотический конус K_{2n-3} многообразия M_{2n-1}. В P_n (2) интерпретируются следующими системами условий (эквивалентными) двойственного характера

$$A_0\in\alpha^n,\quad [A_0\,dA_0]\subset\alpha^n,\quad [A_0\,dA_0\,d^2A_0]\subset\alpha^n; \qquad (2')$$

$$\alpha^n\ni A_0,\quad [\alpha^n\,d\alpha^n]\ni A_0,\quad [\alpha^n\,d\alpha^n\,d^2\alpha^n]\ni A_0. \qquad (2'')$$

2. Инвариантные одномерные многообразия гиперплоских элементов.

Система n форм Пфаффа

$$\omega_0^n,\quad \omega_p^n-\Lambda_{pq}^n\omega_0^q \qquad (3)$$

относительно инвариантна в силу уравнений подобъекта $\hat{\Gamma}_0\subset\Gamma_0$ и определяет главное подраспределение ${}^*\Delta_{n-1}\subset\Delta_n$ каждому интегральному многообразию ${}^*M_1=\{t^p,0,t_p-\Lambda_{pq}^nt^q=0\}$, которому в P_n соответствует пара подпространств $\{{}^*L_1,{}^*\ell_{n-2}\}$, инцидентных A_0, α^n одновременно. Система форм

$$\omega_0^n,\quad \omega_p^n+\Lambda_{qp}^n\omega_0^q \qquad (4)$$

также относительно инвариантна в силу уравнений $\hat{\Gamma}_0$ и определяет дополнительное к Δ_n распределение Δ_{n-1}^* интегральному одномерному многообразию $M_1^*=\{t^p,0,t_p+\Lambda_{qp}^nt^q=0\}$, которому в P_n соответствует пара подпространств $\{L_1^*,\ell_{n-2}^*\}$, также инцидентных A_0, α^n одновременно. При этом в каждой точке $x=\{A,\alpha\}$ касательного пространства T_xM_{2n-1} $\Delta_{n-1}^*(x)$ ортогонально $\Delta_n(x)$ относительно метрики, определяемой $K_{2n-3}(x)$.

Т е о р е м а 1. Если на M_{2n-1} задано регулярное распределение Δ_n и г.ф.т.р. несимметричен, то на M_{2n-1} в общем случае имеется $n-1$ пар одномерных многообразий $\{{}^*M_1^p,{}^pM_1^*\}$, касающихся K_{2n-3}, которым в P_n соответствуют совпадающие пары подпространств $\{{}^*L_1,{}^*\ell_{n-2}\}$ и $\{L_1^*,\ell_{n-2}^*\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из условий

$$\begin{cases}(\Lambda_{pq}^n+z\Lambda_{qp}^n)t^p=0, & \det\|\Lambda_{pq}^n+z\Lambda_{qp}^n\|=0,\\ {}^*M_1=\{t^p,0,t_p-\Lambda_{pq}^nt^q=0\}, & M_1^*=\{t^p,0,t_p+\Lambda_{qp}^nt^q=0\}\end{cases} \qquad (5)$$

или

$$\begin{cases}(\Lambda_0^{pq}+y\Lambda_0^{qp})t_q=0, & \det\|\Lambda_0^{pq}+y\Lambda_0^{qp}\|=0,\\ {}^*M_1=\{t^p-\Lambda_0^{pq}t_q=0,\ 0,\ t_p\}, & M_1^*=\{t^p+\Lambda_0^{qp}t_q=0,\ 0,\ t_p\},\end{cases} \qquad (5')$$

где $\Lambda_{p\tau}^n\Lambda_0^{\tau q}=\Lambda_{\tau p}^n\Lambda_0^{q\tau}=\delta_p^q$, совпадения пар $\{{}^*L_1,{}^*\ell_{n-2}\}$ и $\{L_1^*,\ell_{n-2}^*\}$ находим в общем случае $n-1$ пар одномерных многообразий

$\{{}^{*}M_1^p,\ {}^{p}M_1^{*}\}$ (инвариантных), которым в P_n соответствуют $n-1$
пар из инвариантных прямых ${}^{p}L_1$ и инвариантных $(n-2)$-плоскос-
тей ${}_{n-p}\ell_{n-2}$.

Рассмотрим пересечение $K_{2n-3}(x)$ и $\Delta_n(x)$:

$$K_{n-2}(x):\ t^n=0,\ t_p-\Lambda^n_{pq}t^q=0,\ \Lambda^n_{(pq)}t^pt^q=0. \tag{6}$$

Конусу $K_{n-2}(x)$ в P_n соответствует конус k_{n-2} прямых L_1

$$k_{n-2}:\ x^n=0,\ \Lambda^n_{(pq)}x^px^q=0,\ \Lambda^n_{(pq)}=\frac{1}{2}(\Lambda^n_{pq}+\Lambda^n_{qp}) \tag{6'}$$

и конус k^{n-2} $(n-2)$-плоскостей $\ell_{n-2}=k(L_1)$

$$k^{n-2}:\ \xi_0=0,\ \tilde{\Lambda}^{(pq)}\xi_p\xi_q=0,\ \tilde{\Lambda}^{(pq)}_0=\frac{1}{2}(\Lambda^{pq}_0+\Lambda^{qp}_0), \tag{6''}$$

где $x^J(\xi_J)$ -координаты тех точек (гиперплоскостей), которые инцидентны $L_1(\ell_{n-2})$, причем из (I) получаем

$$\tilde{\Lambda}^{(pq)}_0\Lambda^n_{p(r}\Lambda^n_{|q|s)}=\Lambda^n_{(rs)}. \tag{7}$$

3. Распределения Δ_n на M_{2n-1} при условии $\Lambda^n_{[pq]}\equiv 0$ ($n>3$).

Замыкая систему форм θ_p, а также (3) (или (4)), находим, что при этом условии инволютивное распределение Δ_n на M_{2n-1} имеет инволютивные ${}^{*}\Delta_{n-1}$ и Δ^{*}_{n-1} одновременно.

Т е о р е м а 2. Если на M_{2n-1} задано регулярное распреде-
ление Δ_n и $\Lambda^n_{[pq]}\not\equiv 0$, то конус $k^{n-2}(k_{n-2})$ касается конуса
$k_{n-2}(k^{n-2})$ вдоль инвариантных прямых (($n-2$)-плоскостей).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5)-(5′) вдоль инвари-
антных прямых ${}^{p}L_1$ (и только вдоль них при $\Lambda^n_{[pq]}\not\equiv 0$) подпрост-
ранства $\mathcal{L}({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{pq}t^q]$, $R({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{qp}t^q]$
совпадают друг с другом, а также с $\Pi({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{(pq)}t^q]$ и
$B({}^{p}L_1)=[\alpha^n,\alpha^p\Lambda^n_{[pq]}t^q]$ [6]. Но $\mathcal{L}({}^{p}L_1)=k({}^{p}L_1)$, а $\Pi({}^{p}L_1)$-
поляра прямой ${}^{p}L_1$ относительно конуса k_{n-2}. Поэтому $k({}^{p}L_1)$ ин-
цидентна ${}^{p}L_1$ и является образующей конуса k^{n-2}, касается ко-
нуса k_{n-2}, а в силу обратимости преобразований $\mathcal{L}$, R, Π -ин-
вариантной ($n-2$)-плоскостью на k^{n-2}.

Т е о р е м а 3. Если на M_{2n-1} задано регулярное распре-
деление Δ_n и $\Lambda^n_{[pq]}\equiv 0$, то конус $k^{n-2}(k_{n-2})$ огибает конус
$k_{n-2}(k^{n-2})$.

Для доказательства достаточно заметить, что в этом случае в уравнении (6″) имеем из (7) $\tilde{\Lambda}^{(pq)}_0=\Lambda^{(pq)}_0$, где $\Lambda^{(pr)}_0\Lambda^n_{(rq)}=\delta^q_p$.

Библиографический список

I. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,I97I.Т.3.С.29-48.

2. В а г н е р В.В. Теория поля локальных гиперполос//Тр. семинара по векторн.и тензорн.анализу.М.;Л.,I950.Вып.8.

3. Б о ч и л л о Г.П. Поля квадратичных конусов и распределения на многообразии всех гиперплоских элементов в P_n // Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб. науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,I988.Вып.I9.С.I5-I9.

4. А к и в и с М.А. Многомерная дифференциальная геометрия: Уч.пособие/Калининск.ун-т.Калинин,I977.84с.

5. Б о ч и л л о Г.П. Распределения на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т.Калининград,I984.Вып.I5.С.9-I3.

6. К а й з е р В.В. Расширения,сужения и сопряженные направления дифференцируемых распределений в многомерных проективных пространствах//Геометр.сб./Томский ун-т.Томск,I975.Вып.I5.

УДК 514.76.

КЛИФФОРДОВЫ СТРУКТУРЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

М.П. Б у р л а к о в
(Чечено-Ингушский ун-т)

Пусть M -дифференцируемое многообразие $\dim M=m$. Обозначим TM -тотальное пространство касательного расслоения над многообразием M и $\mathcal{F}(TM)$ -модуль векторных полей на TM. В координатной окрестности $U\subset M$ каждая точка $z\in TM$, $z=(x,y)$, $x\in M$, $y\in T_x$ имеет локальные координаты $x^1,x^2,\dots,x^m,y^1,y^2,\dots,y^m$, а векторное поле $\tau\in\mathcal{F}(TM)$ в локальной записи имеет вид:

$$\tau=\xi^i(x,y)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^j(x,y)\frac{\partial}{\partial y^j}. \tag{I}$$

Построим над модулем $\mathcal{F}(TM)$ бесконечномерную алгебру Грассмана $\Lambda(TM)$, элементами которой являются формальные суммы грассмановых (внешних) произведений элементов модуля $\mathcal{F}(TM)$. Алгебра $\Lambda(TM)$

представляет собой калибровочное расширение алгебры $\Lambda_z = \Lambda(TM)|_{z\in TM}$, где Λ_z -вещественная алгебра Грассмана, $\dim \Lambda_z = 4^m$.

Аналогично строится дуальная к $\Lambda(TM)$ алгебра $\Lambda^*(TM)$, элементами которой являются линейные агрегаты внешних дифференциальных форм порядка $p=\overline{0,m}$. Алгебра $\Lambda^*(TM)$ представляет собой грассманову оболочку модуля $\Omega(TM)$ линейных дифференциальных форм на многообразии TM. В координатной окрестности линейная форма имеет локальную запись вида:

$$\omega = \alpha_i(x,y)\,dx^i + \beta_j(x,y)\,dy^j. \tag{2}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(dx^j) = \frac{\partial}{\partial y^i}(dy^j) = \delta_i^j, \quad \frac{\partial}{\partial x^i}(dy^j) = \frac{\partial}{\partial y^i}(dx^j) = 0, \tag{3}$$

векторные поля ζ (I) можно рассматривать как операторы градуированного дифференцирования алгебры $\Lambda^*(TM)$.

Т е о р е м а I. Модуль $E(TM)=\mathcal{F}(TM)\oplus\Omega(TM)$ порождает бесконечномерную алгебру Клиффорда $C(TM)$ [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что свертки (3) индуцируют на модуле $E(TM)$ индефинитную псевдометрику g, определяемую для элементов $\zeta+\omega\in E(TM)$, $\zeta\in\mathcal{F}(TM)$, $\omega\in\Omega(TM)$ асимметричной поляризацией квадрата:

$$g(\zeta+\omega, \zeta+\omega) = \omega(\zeta), \tag{4}$$

то есть

$$g(\underset{1}{\zeta}+\underset{1}{\omega}, \underset{2}{\zeta}+\underset{2}{\omega}) = \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\omega}(\underset{2}{\zeta})+\underset{2}{\omega}(\underset{1}{\zeta})\right). \tag{5}$$

В каждой точке $x\in M$ псевдометрика g представляет собой псевдоевклидову метрику типа $(2m, 2m)$.

В координатной окрестности $U\subset M$ положим:

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + dx^i, \quad e_{m+i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - dx^i,$$

$$e_{2m+i} = \frac{\partial}{\partial y^i} + dy^i, \quad e_{3m+i} = \frac{\partial}{\partial y^i} - dy^i.$$

Легко видеть, что

$$e_\alpha\cdot e_\beta + e_\beta\cdot e_\alpha = 2g_{\alpha\beta}, \tag{6}$$

то есть элементы e_α представляют собой образующие алгебры Клиффорда, ассоциированной с псевдометрикой $g_{\alpha\beta}$.

Как модуль над кольцом функций на многообразии M алгебра Клиффорда $C(TM)$ является внешним произведением алгебр $\Lambda^*(TM)$ и $\Lambda(TM)$.

Т е о р е м а 2. Модуль $E(TM)=\mathcal{F}(TM)\oplus\Omega(TM)$ порождает на касательном расслоении бесконечномерную алгебру Вейля $W(TM)$ [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, кроме псевдометрики g, свертки (3) индуцируют на модуле $E(TM)$ симплектическую структуру:

$$h(\underset{1}{\zeta}+\underset{1}{\omega}, \underset{2}{\zeta}+\underset{2}{\omega}) = \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\omega}(\underset{2}{\zeta})-\underset{2}{\omega}(\underset{1}{\zeta})\right). \tag{7}$$

Тогда алгебра $W(TM)$ получается факторизацией тензорной (контрвариантной) алгебры модуля $E(TM)$ по идеалу, порожденному элементами вида

$$v\otimes u - u\otimes v - h(v,u); \quad u,v\in E(TM). \tag{8}$$

Алгебра Клиффорда $C(TM)$ позволяет определить на тотальном пространстве TM связность. Пусть $G\subset C(TM)$ -группа регулярных элементов алгебры $C(TM)$, либо некоторая подгруппа группы регулярных элементов. Спинорами группы G (коспинорами группы G) называются элементы $\xi\in C(TM)$ ($\eta\in C(TM)$), преобразующиеся под действием группы G по закону:

$$\xi' = a\cdot\xi \qquad (\eta' = \eta\cdot a^{-1}), \tag{9}$$

где $a\in G$. Векторами группы G называются элементы ζ алгебры $C(TM)$, преобразующиеся под действием группы G по закону

$$\zeta' = a\cdot\zeta\cdot a^{-1}. \tag{10}$$

Если ∂ -дифференцирование алгебры $C(TM)$, то элементы A из алгебры $C(MT)$, преобразующиеся под действием группы G по закону

$$A' = a\cdot A\cdot a^{-1} - \partial a\cdot a^{-1}, \tag{11}$$

называются связностью, ассоциированной с группой G и дифференцированием ∂. Связность A позволяет определить ковариантное продолжение дифференцирования ∂:

$$\nabla\xi = d\xi + A\cdot\xi \qquad (\nabla\eta = \partial\eta - \eta\cdot A) \tag{12}$$

для спиноров ξ (для коспиноров η) и

$$\nabla\zeta = \partial\zeta + A_1\cdot\zeta - \zeta\cdot A_2 \tag{13}$$

для векторов группы G [3].

Спиноры, коспиноры и вектора позволяют конструировать тензорные или спинтензорные объекты как прямые произведения спиноров, коспиноров и векторов, факторизованные по линейным эквивалентностям.

Если на дифференцируемом многообразии M задана риманова или псевдориманова метрика g, то клиффордова структура на касательном расслоении может быть определена при помощи этой метрики. Действительно, на тотальном многообразии TM метрика g порождает метрику g^c, полученную как полный лифт метрики g. Факторизуя тензорную алгебру

$$\mathcal{P}(TM) = \mathcal{F}^0(TM) \oplus \mathcal{F}^1(TM) \oplus \mathcal{F}^2(TM) \oplus \dots, \qquad (14)$$

где $\mathcal{F}^0(TM)$ кольцо функций $f: TM \to \mathbb{R}$ по идеалу, порожденному элементами вида

$$\zeta \otimes \zeta - g^c(\zeta, \zeta), \quad \zeta \in \mathcal{F}(TM), \qquad (15)$$

получим бесконечномерную алгебру Клиффорда, которую мы обозначим $C_g(TM)$. Аналогично, лифт симплектической структуры на многообразии M порождает симплектическую структуру на многообразии TM, что позволяет определить на тотальном пространстве касательного расслоения бесконечномерную алгебру $R(TM)$ [2] как факторалгебру тензорной алгебры (14) по идеалу, порожденному элементами вида

$$\xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi - h^c(\xi, \eta); \ \xi, \eta \in \mathcal{F}(TM), \qquad (16)$$

где h -симплектическая метрика (невырожденная 2-форма) на M, а h^c -полный лифт этой формы в касательное расслоение. Если h^c невырождена, то алгебра $R(TM)$ будет алгеброй Вейля на тотальном пространстве TM.

Описанные выше конструкции бесконечномерных алгебр Клиффорда и Вейля могут быть осуществлены и на тотальном многообразии кокасательного расслоения T^*M. Сумма Уитни касательного и кокасательного расслоений доставляет новую базу для построения бесконечномерных алгебр, ассоциированных с дифференцируемым многообразием.

Если вместо касательного расслоения первого порядка рассмотреть касательные расслоения высших порядков, то мы получим бесконечномерные алгебры Клиффорда $C(T^kM)$ и Вейля $W(T^kM)$ на тотальных многообразиях T^kM.

Библиографический список

1. Березин Ф.А. Метод вторичного квантования. М.:Наука, 1986. 319с.

2. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М.; Наука. 1972. 336с.

3. Бурлаков М.П. Клиффордовы расслоения и калибровочные поля//Гравитация и теория относительности/Казанский ун-т. Казань, 1986. Вып. 23. С. 30-36.

УДК 514.75

К ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ m-МЕРНЫХ ГИПЕРПОЛОС SH^r_m РАНГА r ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

С.Ю. Волкова

(Калининградское ВИУИВ)

В n-мерном проективном пространстве P_n изучаются m-мерные вырожденные гиперполосы SH^r_m ранга r $(r < m < n)$ [2], вдоль любой плоской образующей E_ℓ ($\ell = m-r$) базисной поверхности V^r_m каждой из которых касательная плоскость T_m не постоянна. Базисная поверхность V^r_m вырожденной гиперполосы $SH^r_m \subset P_n$ образована из ∞^r систем плоских $(m-r)$-мерных образующих E_ℓ [1]. Характеристика $\chi_{n-r-1}(A)$ гиперполосы SH^r_m в каждой точке $A \in V^r_m$ проходит через соответствующую этой точке плоскую образующую [3], т.е. $E_\ell(A) \subset \chi_{n-r-1}(A)$.

В работе дано задание гиперполосы $SH^r_m \subset P_n$ в репере первого порядка и доказана теорема существования. Используется следующая схема индексов:

$p, q, r, s, t = \overline{1, r}$; $i, j, k, \ell = \overline{r+1, m}$; $a, b, c = \overline{1, m}$; $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = \overline{0, n}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}$.

В проективном пространстве P_n наряду с точечным репером $\{A_\mathcal{J}\}$ рассмотрим двойственный ему тангенциальный репер $\{\tau^\mathcal{K}\}$, элементы которого $\tau^\mathcal{K}$ являются гранями репера $\{A_\mathcal{J}\}$:

$$(A_\mathcal{J}, \tau^\mathcal{K}) = \delta^\mathcal{K}_\mathcal{J}. \qquad (1)$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений данных реперов принимают вид

$$dA_\mathcal{J} = \omega^\mathcal{K}_\mathcal{J} A_\mathcal{K}, \quad d\tau^\mathcal{J} = -\omega^\mathcal{J}_\mathcal{K} \tau^\mathcal{K}. \qquad (2)$$

где формы ω_J^K имеют проективную структуру. Присоединим к изучаемому образу SH_m^τ подвижной репер, полагая $A_0=A$, $\tau^n=\tau(A)$, где $A\in V_m^\tau$, а $\tau(A)$ - главная касательная гиперплоскость гиперполосы SH_m^τ. Точки A_p репера $\{A_J\}$ поместим в касательную плоскость $T_m(A_0)$ базисной поверхности V_m^τ, точки A_i в плоскую образующую $E_\ell(A_0)\subset V_m^\tau(A_0)$; точки A_α в характеристику $\chi_{n-\tau-1}(A_0)$ гиперполосы SH_m^τ, а точка A_n пусть занимает произвольное положение, дополняя систему точек до полного репера $\{A_J\}$ пространства P_n. Выбранный таким образом репер $\{A_J\}$ является репером I-го порядка R_1 гиперполосы SH_m^τ.

Для гиперполосы SH_m^τ имеем

$$(d\tau^n, A_0)=0, \quad (d\tau^n, A_i)=0, \quad (d\tau^n, A_\alpha)=0. \tag{3}$$

Учитывая выбор репера R_1 и соотношения (I)-(3), получим

$$\omega_0^n=0, \quad \omega_0^\alpha=0, \quad \omega_i^n=0, \quad \omega_\alpha^n=0. \tag{4}$$

Если мы зафиксируем точку $A_0\in V_m^\tau$, то характеристика $\chi_{n-\tau-1}(A_0)$ гиперполосы SH_m^τ, а также образующая $E_\ell(A_0)$ и касательная плоскость $T_m(A_0)$ базисной поверхности V_m^τ останутся неподвижными. Откуда вытекает, что

$$\omega_i^\alpha = M_{iq}^\alpha\omega^q + M_{ij}^\alpha\omega^j, \tag{5}$$
$$\omega_p^\alpha = M_{pq}^\alpha\omega^q + M_{pj}^\alpha\omega^j, \tag{6}$$
$$\omega_i^p = M_{iq}^p\omega^q + M_{ij}^p\omega^j, \tag{7}$$
$$\omega_p^n = \Lambda_{pq}^n\omega^q + \Lambda_{pj}^n\omega^j, \tag{8}$$
$$\omega_\alpha^p = H_{\alpha q}^p\omega^q + H_{\alpha j}^p\omega^j \tag{9}$$

Замыкания уравнений (4) с учетом (5)-(9) приводят к условиям:

$$\Lambda_{pj}^n=0, \quad M_{ij}^p=0, \quad H_{\alpha j}^p=0, \tag{I0}$$
$$M_{[ij]}^\alpha=0, \quad M_{iq}^\alpha=M_{qi}^\alpha, \quad M_{[pq]}^\alpha=0, \quad \Lambda_{[pq]}^n=0, \tag{II}$$
$$M_{i[p}^t\Lambda_{q]t}^n=0, \quad H_{\alpha[p}^t\Lambda_{q]t}^n=0. \tag{I2}$$

Отметим, что касательная плоскость T_m вдоль плоской образующей E_ℓ базисной поверхности V_m^τ не постоянна, так как из уравнений (5) в этом случае следует, что $\omega_i^\alpha\not\equiv 0$ [2]. В силу (I0) уравнения (5)-(9) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \omega_p^n=\Lambda_{pq}^n\omega^q, & \omega_i^p = M_{iq}^p\omega^q, \\ \omega_\alpha^p = H_{\alpha q}^p\omega^q, & \omega_a^\alpha = M_{a\ell}^\alpha\omega^\ell, \end{cases} \tag{I3}$$

коэффициенты которых подчинены соотношениям (II),(I2). Продолжая уравнения (I3) и учитывая (4),(I3), находим

$$\nabla\Lambda_{pq}^n+\Lambda_{pq}^n\omega_0^0=\Lambda_{pqs}^n\omega^s-\Lambda_{pt}^n M_{iq}^t\omega^i, \tag{I4}$$
$$\nabla M_{iq}^p+M_{iq}^p\omega_0^0-\omega_i^0\delta_q^p=(M_{iqs}^p+M_{is}^\alpha H_{\alpha q}^p)\omega^s+(M_{ij}^\alpha H_{\alpha q}^p-M_{it}^p M_{jq}^t)\omega^j, \tag{I5}$$
$$\nabla H_{\alpha q}^p+H_{\alpha q}^p\omega_0^0-M_{iq}^p\omega_\alpha^i-\delta_q^p\omega_\alpha^0=H_{\alpha qs}^p\omega^s-H_{\alpha s}^p M_{jq}^s\omega^j, \tag{I6}$$
$$\nabla M_{ip}^\alpha+M_{ip}^\alpha\omega_0^0-M_{ij}^\alpha\omega_p^j=M_{ipa}^\alpha\omega^a, \tag{I7}$$
$$\nabla M_{ij}^\alpha+M_{ij}^\alpha\omega_0^0=M_{ija}^\alpha\omega^a, \tag{I8}$$
$$\nabla M_{pq}^\alpha+M_{pq}^\alpha\omega_0^0+\Lambda_{pq}^n\omega_n^\alpha-2M_{pj}^\alpha\omega_q^j=M_{pqa}^\alpha\omega^a, \tag{I9}$$
$$\nabla M_{pj}^\alpha+M_{pj}^\alpha\omega_0^0-M_{ij}^\alpha\omega_p^i=M_{pja}^\alpha\omega^a, \tag{20}$$

где $\Lambda_{p[qs]}^n=0$, $M_{i[qs]}^p=0$, $H_{\alpha[qs]}^p=0$, $M_{a[\ell c]}^\alpha=0$.

Таким образом, гиперполоса SH_m^τ относительно репера I-го порядка R_1 задается уравнениями (4),(I3),(I4-20) и соотношениями (II),(I2). Эта система находится в инволюции. Имеет место

Т е о р е м а существования. Вырожденные гиперполосы SH_m^τ ранга τ проективного пространства P_n существуют с произволом $\tau(n-\tau-1)+1$ функций τ аргументов и $n-m-1$ функций m аргументов.

Библиографический список

I. А т а н а с я н Л.С. К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства//Уч.зап./МГПИ им.В.И. Ленина.М.,1957.Т.I08.Вып.2.С.3-44.

2. П о п о в Ю.И. Внутренние оснащения вырожденной m-мерной гиперполосы H_m^τ ранга τ многомерного проективного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1975.Вып.6.С.I02-I42.

3. П о п о в Ю.И. Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1970.Вып.I.С.27-46.

УДК 514.75

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С $\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

М.Ф. Г р е б е н ю к

(Киевское ВВАИУ)

В $(n+1)$-мерном аффинном пространстве A_{n+1} в различных дифференциальных окрестностях изучаются неголономные композиции А.П.Нордена на оснащающих распределениях $\mathcal{H}$-распределения. Объектом, ассоциированным с неголономной композицией А.П.Нордена (χ,Λ), определяется плоскость Нордена-Тимофеева, полученная ранее в работе [2] с помощью фокальных многообразий. Отмечено, что на ассоциированных распределениях индуцируются f-структуры рангов $r+n$ и $m+n$ неголономными композициями А.П.Нордена, заданными на H-распределении. Настоящая работа является непосредственным продолжением работ [1],[2].

I. $H\Lambda$-виртуальную нормаль N_{n-r} первого рода Λ-распределения в репере нулевого порядка R^0 определим векторами $\vec{P}_u=\vec{e}_u+\nu^p_u\vec{e}_p$. Дифференциальные уравнения поля геометрического объекта $\{\nu^p_u\}$ имеют вид

$$\nabla\nu^p_u+\omega^p_u=\nu^p_{u\varkappa}\,\omega^\varkappa_0.$$

В окрестности первого порядка рассмотрим величины

$$\overset{*}{B}{}^s_u=-\Lambda_{pu}\Lambda^{sp},$$

которые в совокупности образуют квазитензор:

$$\nabla\overset{*}{B}{}^s_u+\omega^s_u=\overset{*}{B}{}^s_{u\varkappa}\,\omega^\varkappa,$$

определяющий $H\Lambda$-виртуальную нормаль $\{\overset{*}{B}{}^s_u\}$ элемента Λ-распределения, отличную от ранее построенной $\{\chi^p_u\}$[2]. Таким образом, в дифференциальной окрестности первого порядка к Λ-распределению внутренним инвариантным образом присоединяется поле однопараметрического пучка $(\chi,\overset{*}{B})$ $H\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода, которое определяется пучком квазитензоров $\chi^p_u(\varepsilon)=\chi^p_u+\varepsilon\,\overset{*}{S}{}^p_u$, где ε -абсолютный инвариант, а величины $\overset{*}{S}{}^p_u$ образуют тензор: $\overset{*}{S}{}^p_u=\chi^p_u-\overset{*}{B}{}^p_u$, $\nabla\overset{*}{S}{}^p_u=\overset{*}{S}{}^p_{u\varkappa}\,\omega^\varkappa$. В случае $\Lambda_{pu}=0$ поле однопараметрического пучка вырождается в поле $H\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода $\chi(\Lambda)$.

2. Векторы $\vec{R}_\varrho=H^\pi_\varrho\vec{e}_\pi$, где

$$H^q_p=\delta^q_p,\quad H^u_p=0,\quad H^p_u=\nu^p_u,\quad H^v_u=\delta^v_u, \tag{I}$$

линейно независимы. Поэтому существует обратная матрица $\|\overset{*}{H}{}^\pi_\varrho\|$ такая, что имеют место

$$H^\pi_\varrho\overset{*}{H}{}^\varrho_\tau=\delta^\pi_\tau,\quad H^\varrho_\pi\overset{*}{H}{}^\sigma_\varrho=\delta^\sigma_\pi. \tag{2}$$

Учитывая (I) и (2), находим, что

$$\|\overset{*}{H}{}^\pi_\varrho\|=\begin{Vmatrix}\delta^p_q & -\nu^p_u\\ 0 & \delta^v_u\end{Vmatrix} \tag{3}$$

Величины $P^\pi_\varrho=\delta^\pi_\varrho-2H^\pi_p\overset{*}{H}{}^p_\varrho$ образуют тензор. Используя компоненты матрицы $\|\overset{*}{H}{}^\pi_\varrho\|$, находим компоненты тензора P^π_ϱ:

$$P^p_q=-\delta^p_q,\quad P^p_u=2\nu^p_u,\quad P^v_q=0,\quad P^v_u=\delta^v_u. \tag{4}$$

Заметим, что тензор P^π_ϱ удовлетворяет уравнениям $P^\pi_\varrho P^\varrho_\sigma=\delta^\pi_\sigma$.

Известно, что всякая π-структура вполне определяется полем аффинора S^π_ϱ $(S^\pi_\varrho\neq\delta^\pi_\varrho)$, удовлетворяющего уравнениям [4]

$$S^\pi_\varrho S^\varrho_\sigma=\delta^\pi_\sigma.$$

Т е о р е м а 1. H-распределение несет однопараметрическое семейство инвариантных неголономных композиций А.П.Нордена $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$, внутренним образом связанных с H-распределением в дифференциальной окрестности первого порядка, базовыми распределениями которых являются распределения плоскостей $\chi(\varepsilon)$ и Λ, определенных пучком аффиноров $P^\pi_\varrho(\varepsilon)$, где

$$\|P^\pi_\varrho(\varepsilon)\|=\begin{Vmatrix}-\delta^p_q & 2\chi^p_u(\varepsilon)\\ 0 & \delta^v_u\end{Vmatrix}$$

$\chi(\varepsilon)$-плоскости пучка $(\chi(\varepsilon),\overset{*}{B})$, соответствуют пучку квазитензоров $\chi^p_u(\varepsilon)$.

З а м е ч а н и е. В случае $\Lambda_{pu}=0$ пучок $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$ неголономных композиций А.П.Нордена H-распределения вырождается в неголономную композицию А.П.Нордена (χ,Λ).

Т е о р е м а 2. В дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$ к H-распределению внутренним инвариантным образом присоединяются (при $\Lambda_{pu}\neq 0$) два однопараметрических семейства неголономных композиций А.П.Нордена. Если $\Lambda_{pu}=0$, то к H-

распределению в той же дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$ присоединяется одно поле однопараметрических семейств неголономных композиций А.П.Нордена.

3. Следуя А.П.Нордену и Г.Н.Тимофееву [3], введем системы величин

$$\begin{cases} \beta_\rho = \frac{1}{2} P^{\varkappa}_{\sigma} P^{\sigma}_{\rho\varkappa}, \quad \sigma_\rho = \frac{1}{2} P^{\varkappa}_{\rho\varkappa}, \\ j_\rho = \frac{1}{2(n-m)} (\sigma_\rho + \beta_\rho) - \frac{1}{2r} (\sigma_\rho - \beta_\rho). \end{cases} \tag{5}$$

В отличие от случая, рассмотренного в работе [3], $\{\beta_\rho\}$ и $\{\sigma_\rho\}$ самостоятельных объектов не образуют. С учетом формул (4) имеем

$$P^p_{q\varkappa} = -2\nu^p_u \Lambda^u_{q\varkappa}, \qquad P^q_{u\varkappa} = 2\nu^q_{u\varkappa},$$
$$P^u_{p\varkappa} = -2\Lambda^u_{p\varkappa}, \qquad P^u_{v\varkappa} = 2\nu^p_v \Lambda^u_{p\varkappa}.$$

Специализируем репер, совместив вектор $\vec{e}_{n+1}$ с инвариантной нормалью ν. При этом из формул (5) установим, что величины j_ρ принимают вид $j_p = \ell_p$, $j_u = \chi_u - \ell_p \chi^p_u$, где $\chi_u = -\frac{1}{r}(\chi^p_{up} - \chi^p_v \chi^t_u \Lambda^v_{tp})$.
Следовательно, объект $\{j_\rho\}$, ассоциированный с композицией (χ, Λ), определяет $H\Lambda$-виртуальную плоскость Нордена-Тимофеева, построенную в работе [2] с помощью фокальных многообразий.

4. HM-виртуальную нормаль $\mathcal{N}_{n-m}$ первого рода M-распределения в репере нулевого порядка R^0 определим векторами $\vec{P}_\alpha = \vec{e}_\alpha + \nu^a_\alpha \vec{e}_a$. Компоненты геометрического объекта $\{\nu^a_\alpha\}$, дифференциальные уравнения поля которого имеют вид $\nabla \nu^a_\alpha + \omega^a_\alpha = \nu^a_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa$, принимают следующие значения: $\nu^a_\alpha = \varphi^a_\alpha$

В окрестности первого порядка рассмотрим величины $F^b_\alpha = -F_{a\alpha} \overset{*}{F}{}^{ba}$, где $F_{a\alpha} = \{\Lambda_{p\alpha}, M_{i\alpha}\}$, которые в совокупности образуют квазитензор, определяющий HM-виртуальную нормаль $\{F^b_\alpha\}$ элемента M-распределения, отличную от нормали $\{\varphi^a_\alpha\}$. Таким образом, в дифференциальной окрестности первого порядка к M-распределению внутренним инвариантным образом присоединяется поле однопараметрического пучка (φ, F) HM-виртуальных нормалей первого рода, которое определяется пучком квазитензоров $\varphi^b_\alpha(\sigma) = \varphi^b_\alpha + \sigma \overset{*}{N}{}^b_\alpha$, где σ -абсолютный инвариант, а величины $\overset{*}{N}{}^b_\alpha$ образуют тензор

$$\overset{*}{N}{}^b_\alpha = \varphi^b_\alpha - F^b_\alpha, \quad \nabla \overset{*}{N}{}^b_\alpha = \overset{*}{N}{}^b_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa.$$

5. Векторы $\vec{R}_\rho = \Pi^\pi_\rho \vec{e}_\pi$, где $\Pi^b_a = \delta^b_a$, $\Pi^\alpha_a = 0$, $\Pi^c_\alpha = \varphi^c_\alpha$, $\Pi^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$, линейно независимы. Поэтому существует обратная матрица $\|\overset{*}{\Pi}{}^\pi_\rho\|$. Находим, что

$$\|\overset{*}{\Pi}{}^\pi_\rho\| = \begin{Vmatrix} \delta^a_b & -\varphi^a_\alpha \\ 0 & \delta^\beta_\alpha \end{Vmatrix}$$

Величины $\Phi^\tau_\sigma = \delta^\tau_\sigma - 2\Pi^\tau_a \overset{*}{\Pi}{}^a_\sigma$ образуют тензор, компоненты которого имеют вид: $\Phi^a_b = -\delta^a_b$, $\Phi^a_\alpha = 2\varphi^a_\alpha$, $\Phi^\beta_b = 0$, $\Phi^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha$.

Т е о р е м а 3. В дифференциальной окрестности первого порядка к H-распределению внутренним инвариантным образом присоединяется однопараметрическое семейство неголономных композиций А.П.Нордена $(\Phi(\sigma), M)$, определенных полем однопараметрического пучка аффиноров $\Phi^\tau_\sigma(\varepsilon)$, где

$$\| \Phi^\tau_\sigma(\varepsilon) \| = \begin{Vmatrix} -\delta^a_b & 2\varphi^a_\alpha(\varepsilon) \\ 0 & \delta^\beta_\alpha \end{Vmatrix}$$

6. В дифференциальной окрестности первого порядка к Λ-распределению внутренним инвариантным образом присоединяется поле однопараметрического пучка $M\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода, которое определяется пучком квазитензоров $\chi^p_i(\varepsilon) = \chi^p_i + \varepsilon \overset{*}{S}{}^p_i$, где ε -абсолютный инвариант, а величины $\overset{*}{S}{}^p_i = \chi^p_i - \overset{*}{B}{}^p_i$ образуют тензор.

Величины $\{P^a_b\}$, являющиеся подтензором тензора $\{P^\pi_\rho\}$, образуют тензор, причем выполняется условие $P^a_b P^b_c = \delta^a_c$. Следовательно, при $\Lambda_{pi} \neq 0$ M-распределение несет однопараметрическое семейство инвариантных неголономных композиций А.П.Нордена $(\mathcal{L}(\varepsilon), \Lambda)$, внутренним образом связанных с $\mathcal{H}$-распределением в дифференциальной окрестности первого порядка, базовыми распределениями которых являются распределения плоскостей $\mathcal{L}(\varepsilon)$ и Λ, определенных пучком аффиноров $P^a_b(\varepsilon)$, где $\mathcal{L}(\varepsilon)$ -плоскости пучка, соответствуют пучку квазитензоров $\chi^p_i(\varepsilon)$. Полученные неголономные композиции А.П.Нордена являются обобщениями π-структур на касательно r-оснащенной поверхности $M_{m,r}$ аффинного пространства A_{n+1}.

Доказано, что с каждой π-структурой, заданной на H-распределении тензором из пучка $P^\pi_\rho(\sigma)$, ассоциируется распределение, несущее f-структуру ранга $r+n$, а с каждой π-структурой, заданной на H-распределении тензором из пучка $\Phi^\pi_\rho(\sigma)$, ассоциируется распределение, несущее f-структуру ранга $m+n$.

Библиографический список

1. Г р е б е н ю к М.Ф. Поля геометрических объектов трехсоставного распределения аффинного пространства//Дифференциаль-

ная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч .тр./ Калинингр.ун-т.Калининград,1987.Вып.18.С.21-24.

2.Г р е б е н ю к М.Ф. Фокальные многообразия,ассоциированные с $H(M(\Lambda))$ -распределением аффинного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз. темат.сб.науч . тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1988.Вып.19.С.25-30.

3.Н о р д е н А.П.,Тимофеев Г.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств//Изв.вузов. Математика.1972.№8.С.81-89.

4.Ш и р о к о в А.П. Структуры на дифференцируемых многообразиях//Алгебра.Топология.Геометрия,1967/ ВИНИТИ.М.,1969. С.127-188.

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ СЕМЕЙСТВА СРЕДНИХ НОРМАЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ $V_p \subset E_n$

А.С.Г р и ц а н с
(МГПИ им.В.И.Ленина)

В работе изучаются двумерные линейчатые поверхности V_2 , образованные средними нормалями поверхности $V_p \subset E_n$.Данная работа является обобщением работы [3].

1.Рассмотрим поверхность $V_p \subset E_n$ и отнесем ее к подвижному реперу $R = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$ $(i,j,k = \overline{1,p};\ \alpha,\beta = \overline{p+1,n})$,где x - точка на поверхности V_p ,орты $\vec{e}_i$ лежат в касательной плоскости $T_p(x)$ к V_p ,а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормального пространства $N_{n-p}(x)$ поверхности V_p. Вектор $\vec{e}_0 = \vec{e}_{p+s+1}$ $(0 \le s \le p$, s -фиксировано) направим параллельно вектору средней кривизны поверхности V_p [1]: $\vec{M} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} b^\alpha_{ij} \vec{e}_\alpha$, который в силу неминимальности V_p ненулевой.

Деривационные формулы репера R имеют вид $d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i$, $d\vec{e}_i = \omega^j_i \vec{e}_j + \omega^\alpha_i \vec{e}_\alpha$, $d\vec{e}_\alpha = \omega^i_\alpha \vec{e}_i + \omega^\beta_\alpha \vec{e}_\beta$. Продолжая систему уравнений $\omega^\alpha = 0$ поверхности V_p ,получим $\omega^\alpha_i = b^\alpha_{ij}\omega^j$, $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$. Встречающиеся в дальнейшем индексы будут принимать следующие значения: $\hat{i},\hat{j} = \overline{0,p}$; $\hat{\alpha},\hat{\beta} = p+1,\dots,p+s,p+s+2,\dots,n$. Впредь во всех формулах вместо индекса $p+s+1$ будем писать 0.

Средние нормали поверхности V_p образуют $(p+1)$-мерную

линейчатую поверхность V_{p+1} ,уравнение которой

$$\vec{R} = \vec{x} + t\vec{e}_0 \qquad (1)$$

Дифференцируя (1),находим

$$\begin{gathered} d\vec{R} = \Omega^{\hat{i}}\vec{E}_{\hat{i}},\ \Omega^0 = dt,\ \Omega^i = \omega^i,\ \vec{E}_0 = \vec{e}_0,\ \vec{E}_i = \vec{e}_i + t\vec{a}_i, \\ d\vec{e}_0 = \vec{a}_i\omega^i,\ \vec{a}_i = -\gamma^{jk} b^0_{ki}\vec{e}_j + \varepsilon^{\hat{\alpha}}_i \vec{e}_{\hat{\alpha}},\ \bar{\gamma}_{ij} = \vec{a}_i\vec{a}_j, \\ \gamma_{ij} = \vec{e}_i\vec{e}_j,\ \gamma^{jk}\gamma_{ki} = \delta^j_i,\ \omega^{\hat{\alpha}}_0 = \varepsilon^{\hat{\alpha}}_k\omega^k,\ \varepsilon^{\hat{\alpha}}_k = \frac{\gamma^{ij} b^{\hat{\alpha}}_{ijk}}{\gamma^{ij} b^0_{ij}} \end{gathered} \qquad (2)$$

В дальнейшем будем предполагать,что $\dim \mathcal{N} = p$,где $\mathcal{N} = [\vec{a}_i]$ - касательное направление гиперсферического изображения $\bar{V}_p: \vec{x} = \vec{e}_0$ поверхности V_{p+1} [2].

Пространство $\mathcal{M} = [R, \vec{e}_0, \vec{E}_i, \vec{a}_j]$ называется касательным пространством вдоль образующей поверхности V_{p+1} и является наименьшим пространством,содержащим все касательные плоскости поверхности V_{p+1} в точках одной образующей [2].

Площадка $\tilde{\Delta}_r(x)$,порождающая распределение $\tilde{\Delta}_r$,вдоль которого переносится параллельно в нормальной связности направление вектора средней кривизны,определяется системой $\varepsilon^{\hat{\alpha}}_k\omega^k = 0$. Легко доказать следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Касательное пространство $\mathcal{M}$ вдоль образующей поверхности V_{p+1} имеет размерность $p+s+1$ $(0 \le s \le p)$ тогда и только тогда,когда $\dim \tilde{\Delta}_r = p - s$

2.Линейчатая подповерхность $V_2 \subset V_{p+1}$ называется псевдоторсом (подповерхностью нулевого внешнего параметра распределения, торсом),если параметр распределения $\tilde{p}$ (соответственно $\hat{p}$, p) равен нулю [2]. В нашем случае

$$\tilde{p}^2 = \frac{\bar{\varphi}\theta - (\varphi^0)^2}{\bar{\varphi}^2}, \quad \hat{p}^2 = \frac{\varphi - \theta}{\bar{\varphi}}, \quad p^2 = \frac{\varphi\bar{\varphi} - (\varphi^0)^2}{\bar{\varphi}^2},$$

$$p^2 = \tilde{p}^2 + \hat{p}^2, \quad \varphi = \gamma_{ij}\omega^i\omega^j, \quad \bar{\varphi} = \bar{\gamma}_{ij}\omega^i\omega^j,$$

$$\varphi^0 = b^0_{ij}\omega^i\omega^j, \quad \theta = b^0_{ik} b^0_{jr}\bar{\gamma}^{kr}\omega^i\omega^j, \quad \bar{\gamma}^{jk}\bar{\gamma}_{ki} = \delta^j_i.$$

Рассмотрим некоторую линию ℓ на поверхности V_p и вектор $\vec{e}_{i_0}$ направим по касательной к линии ℓ .Тогда уравнение линии ℓ : $\omega^{i_0} \ne 0$, $\omega^j = 0$ $(j \ne i_0)$.

Т е о р е м а 2. Следующие утверждения равносильны:
1) Средние нормали описывают псевдоторсы вдоль линии ℓ ;
2) $\vec{e}_{i_0}\vec{A}^j = 0$ $(j \ne i_0)$,где $\vec{A}^j = \bar{\gamma}^{jk}\vec{a}_k$;

3) $\overline{\gamma}_{i_0 i_0} b^{\circ}_{i_0 k} b^{\circ}_{i_0 \tau} \overline{\gamma}^{k\tau} - (b^{\circ}_{i_0 i_0})^2 = 0$.

Т е о р е м а 3. Следующие утверждения равносильны:
1) Средние нормали описывают подповерхности нулевого внешнего параметра распределения вдоль линии ℓ;
2) $\vec{e}_{i_0} \in \mathcal{N}$; 3) $b^{\circ}_{i_0 k} b^{\circ}_{i_0 \tau} \overline{\gamma}^{k\tau} = 1$.

Т е о р е м а 4. Следующие утверждения равносильны:
1) Средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ;
2) $\vec{e}_{i_0}$ является нормальным вектором гиперплоскости $\Pi^{i_0} = [\vec{A}^1, \dots, \vec{A}^{i_0-1}, \vec{A}^{i_0+1}, \dots, \vec{A}^p]$ в пространстве $\mathcal{N}$;
3) Касательный вектор $\vec{e}_{i_0}$ к линии ℓ параллелен своему гиперсферическому изображению $\vec{a}_{i_0}$, т.е. $\vec{e}_{i_0} \parallel \vec{a}_{i_0}$; 4) $\overline{\gamma}_{i_0 i_0} - (b^{\circ}_{i_0 i_0})^2 = 0$.

3. Пусть средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ: $\omega^{i_0} \neq 0$, $\omega^j = 0$ $(j \neq i_0)$. Тогда $\vec{e}_{i_0} \parallel \vec{a}_{i_0}$, откуда и из (2) получим

$$\lambda = -\gamma^{i_0 k} b^{\circ}_{k i_0} \neq 0, \quad \gamma^{jk} b^{\circ}_{k i_0} = 0 \ (j \neq i_0), \quad \varepsilon^{\alpha}_{i_0} = 0, \quad \vec{a}_{i_0} = \lambda \vec{e}_{i_0}. \qquad (3)$$

Рассмотрим проекцию вектора

$$d\vec{M} = m^{\circ} \omega^i_0 \vec{e}_i + m^{\circ} \varepsilon^{\alpha}_k \omega^k \vec{e}_{\alpha} + \frac{1}{p} \gamma^{ij} b^{\circ}_{ijk} \omega^k \vec{e}_0,$$

где $m^{\circ} = \frac{1}{p} \gamma^{ij} b^{\circ}_{ij} \neq 0$, $\omega^i_0 = -\gamma^{ik} b^{\circ}_{kj} \omega^j$, на касательную плоскость $T_{p(x)}$ в направлении линии ℓ:

$$\Pi p_{T_{p(x)}} d\vec{M} = -m^{\circ} \gamma^{ik} b^{\circ}_{kj} \omega^j \vec{e}_i = \mu \omega^{i_0} \vec{e}_{i_0},$$

где $\mu = m^{\circ}\lambda \neq 0$. Значит [1], ℓ-линия кривизны относительно средней нормали.

Обратно, если линия ℓ кривизны относительно средней нормали принадлежит распределению $\widetilde{\Delta}_{\tau}$, то имеют место формулы (3). Из теоремы 4 заключаем, что средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ. Доказано следующее

С л е д с т в и е. Средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ на поверхности V_p тогда и только тогда, когда ℓ – линия кривизны относительно средней нормали и $\ell \subset \widetilde{\Delta}_{\tau}$.

Заметим, что средние нормали могут описывать торсы только в случае $p-s>0$ [2].

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве//Лит.матем.сб./АН Лит.ССР.Вильнюс,1966.Т.6.№4. С.15-31.

2. Л у м и с т е Ю.Г. Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства//Матем.сб.М.,1961.Т.55.Вып.4.С.411-420.

3. Г р и ц а н с А.С. О семействе средних нормалей поверхности $V_2 \subset E_5$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986. Вып.17.С.21-25.

УДК 514.76

О РАССЛОЕНИИ $A_{n,m}$ $(n>m)$

Е.Т.И в л е в
(Томский политех. ин-т)

В статье изучаются некоторые поля инвариантных геометрических образов в аффинных слоях A_m расслоения $A_{n,m}$ $(n>m)$ с n-мерной базой M_n с заданным сечением и с заданной аффинной связностью C. Приводится пример аффинного расслоения $Q_{n,m}$ $(n>m)$ с аффинной связностью C, который дает возможность изучить специальный вид геометрических образов, изученных в случае расслоения $A_{n,m}$ $(n>m)$.

Все построения в данной статье носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими.

1. Рассматривается n-мерное гладкое многообразие M_n (класса C^{∞} или C^{ω}) с базисными формами θ^i $(i,j,k,\ell = \overline{1,n})$, удовлетворяющими структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j, \quad \mathcal{D}\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \theta^{\ell} \wedge \theta^i_{\ell j}, \quad \theta^i_{[\ell j]} = 0. \qquad (1)$$

Обозначим $L^1_n = (M_n, L_n)$ –присоединенное расслоенное пространство с базой M_n и n-мерными центроаффинными слоями L_n. Здесь слой отнесен к аффинному реперу $E = \{\bar{A}, \bar{e}_i\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{e}_i = \bar{\theta}^j_i \bar{e}_j, \quad \bar{\theta}^j_i = \theta^j_i \Big|_{\theta^{\ell}=0}, \quad \mathcal{D}\bar{\theta}^j_i = \bar{\theta}^k_i \wedge \bar{\theta}^j_k$$

и изоморфен касательному пространству $T_n(u)$ к M_n в точке (u), причем первые интегралы линейно независимых форм θ^i соответствуют главным параметрам $u^1, u^2, \dots, u^n$ точки $(u) \in M_n$. Заметим, что L_n является представлением дифференциальной группы $\mathcal{D}^1_n$ первого порядка в смысле [1, с.162-165].

2. Рассмотрим расслоенное пространство $A_{n,m}=(M_n, A_m)$, у которого базой является многообразие M_n, а слоем, соответствующим каждой точке $(u)\in M_n$, служит m-мерное аффинное пространство A_m, причем в пространстве $A_{n,m}$ задано точечное сечение: каждой точке $(u)\in M_n$ в слое $A_m(u)$ отвечает вполне определенная точка $M(u)$. Предполагается, что слой $A_m(u)$ отнесен к аффинному реперу $T=\{\bar{B}(u), \bar{\varepsilon}_\alpha(u)\}$ $(\alpha,\beta,\gamma,\sigma=\overline{1,m})$, причем $M(u)=B(u)$. В расслоении $A_{n,m}$ задается аффинная связность C, которая определяет отображение соседнего слоя $A_m(u+du)$ точки $(u+du)\in M_n$ на исходный слой при помощи следующего отображения аффинных реперов:

$$\begin{cases} \bar{B}(u+du)\to\bar{B}(u,du)\doteq\bar{B}(u)+\omega^\alpha(u)\bar{\varepsilon}_\alpha(u), \\ \bar{\varepsilon}_\alpha(u+du)\to\bar{\varepsilon}_\alpha(u,du)\doteq\bar{\varepsilon}_\alpha(u)+\omega^\beta_\alpha(u)\bar{\varepsilon}_\beta(u), \end{cases} \tag{2}$$

где I-формы ω^α и ω^β_α удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\begin{cases} \mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta+R^\alpha_{oij}\theta^i\wedge\theta^j, \quad R^\alpha_{o(ij)}=0, \\ \mathcal{D}\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma+R^\beta_{\alpha ij}\theta^i\wedge\theta^j, \quad R^\beta_{\alpha(ij)}=0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь компоненты тензора кручения R^α_{oij} и кривизны $R^\beta_{\alpha ij}$ связности C удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla R^\alpha_{\mathcal{J}ij}=R^\alpha_{\mathcal{J}ijk}\theta^k, \quad R^\alpha_{\mathcal{J}(ij)k}=0 \quad (\mathcal{J}=\overline{0,m}). \tag{4}$$

Заметим, что дифференциальные уравнения секущей n-поверхности M^o_n, диффеоморфной M_n, в силу (I)-(4) можно записать в виде:

$$\omega^\alpha=A^\alpha_i\theta^i, \quad \nabla A^\alpha_i=A^\alpha_{ij}\theta^j, \quad \nabla A^\alpha_{ij}-A^\alpha_\ell\theta^\ell_{ij}=A^\alpha_{ijk}\theta^k,$$
$$A^\alpha_{ij}=\Lambda^\alpha_{ij}-R^\alpha_{oij}, \quad \Lambda^\alpha_{[ij]}=0, \tag{5}$$

которым удовлетворяют компоненты геометрического объекта $\Gamma=\{A^\alpha_i, A^\alpha_{ij}\}$ в смысле Г.Ф.Лаптева [2].

3. Из (5) и (2) в соответствии с [3, с.80] следует, что $(n-m)$-плоскость L^2 в слое $L_n(u)$ точки $(u)\in M_n$ расслоения L^1_n, определяемая в аффинных координатах репера E уравнениями:

$$L^2: \quad A^\alpha_{oi}t^i=0 \quad (\alpha=\overline{1,m}; \ i=\overline{1,n}; \ n>m), \tag{6}$$

представляет собой множество всех направлений $\bar{t}=(\bar{A}\bar{e}_i)t^i$ в L_n, соответствующих касательным к кривым $k(t)$: $\theta^i=t^i\theta$, $\nabla t^i-t^i\theta_1=t^i_1\theta$, $\mathcal{D}\theta=\theta\wedge\theta_1$ в точке $(u)\in M_n$ таким, что вдоль них точка B параллельно переносится в аффинной связности C. При этом предполагается, что $\mathrm{Rang}\,[A^\alpha_{oi}]=m$, причем $n>m$ (этот случай и будет предметом нашего внимания).

Проведем в L_n с учетом (6) и (5) такую канонизацию аффинного репера E, при которой

$$\begin{cases} A^\alpha_{\hat\beta}=0, \quad A^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta, \quad \omega^\alpha=\theta^\alpha, \quad \omega^\alpha_\gamma-\theta^\alpha_\gamma=A^\alpha_{\gamma j}\theta^j, \\ \qquad \theta^\alpha_{\hat\gamma}=-A^\alpha_{\hat\gamma j}\theta^j, \quad L^2=(\bar{A}\bar{e}_{m+1}\dots\bar{e}_n). \end{cases} \tag{7}$$

В силу такой фиксации каждое направление $\bar{t}=(\bar{A}\bar{e}_i)t^i\in L_n$ при развертывании пространства $A_{n,m}$ $(n>m)$ на слой $A_m(u)$ вдоль кривой $k(t)$ переходит в направление $t=(\bar{B}\bar{\varepsilon}_\alpha)t^\alpha\in A_m$. В дальнейшем направление $t\in A_m$ будем называть разверткой направления $\bar{t}\in L_n$ на слой $A_m(u)$.

4. Каждой точке $(u)\in M_n$ в слое $L_n(u)$ расслоения L^1_n поставим в соответствие m-плоскость $L^1\ni A$ $(L^1\cap L^2=A, \ L^1\cup L^2=L_n)$:

$$L_1: \quad t^{\hat\alpha}=c^{\hat\alpha}_\beta t^\beta, \quad \nabla c^{\hat\alpha}_\beta+\theta^{\hat\alpha}_\beta=A^{\hat\alpha}_{\beta i}\theta^i \tag{8}$$

В следующих пунктах будет изучаться случай, когда величины $c^{\hat\alpha}_\beta$ выражаются через компоненты геометрического объекта Γ и тензора кручения-кривизны связности C расслоения $A_{n,m}$ $(n>m)$.

5. Из (7) и (8) в [4] и (8) следует, что каждой точке

$$X(u)\in A_m(u): \quad \bar{X}(u)=\bar{B}(u)+x^\alpha(u)\bar{\varepsilon}_\alpha(u)$$

и направлению

$$\bar{v}(u)=v^i(u)(\bar{A}(u)\bar{e}_i(u))\in L_n(u),$$

отвечающим точке $(u)\in M_n$, сопоставляется центроаффинное преобразование слоя $A_m(u)$ в себя с центром в точке $B(u)$:

$$\begin{cases} \Pi(X,\bar{v})=\{x^{\mathcal{J}}(R^\alpha_{\mathcal{J}\beta i}+R^\alpha_{\mathcal{J}\hat\beta i}c^{\hat\beta}_\beta)v^i\} \quad (x^o=1), \\ \Pi(X,\bar{v})\Gamma_{m-1}=\{W \mid R(\bar{v},\bar{w})X\in\Gamma_{m-1}\}\ni B, \end{cases} \tag{9}$$

где $\Gamma_{m-1}\ni B$ – гиперплоскость в слое $A_m(u)$; $W=(\bar{B}\bar{\varepsilon}_\alpha)w^\alpha\in A_m$ – развертка направления $\bar{w}=w^i(\bar{A}\bar{e}_i)\in L^1\subset L_n$ на слой $A_m(u)$; $R(\bar{v},\bar{w})$ – аффинное преобразование слоя $A_m(u)$ в смысле [4]. Из (9) следует, что каждой m-плоскости $L^1(u)$ и точке

$X(u) \in A_m(u)$ отвечает в $L_n(u)$ гиперплоскость:

$$E_{n-1}(X, L^1) = \{\bar{v} \mid \Pi(X,\bar{v}) \to W\} : x^{\jmath}(R^{\alpha}_{\jmath\alpha i} + R^{\alpha}_{\jmath\hat{\beta} i} C^{\hat{\beta}}_{\alpha}) v^i = 0 \quad (x^0=1). \tag{10}$$

Здесь $\Pi \to W$ означает, что преобразование (9) является преобразованием W в смысле [5] или преобразованием с нулевым следом.

Из (7) и (8) в [4] замечаем, что в слое $L_n(u)$ точки $(u) \in M_n$ существует линейный гиперкомплекс:

$$K_{n-1} = \{(\bar{v},\bar{w}) \mid R(\bar{v},\bar{w}) \to W\} \subset L_n : R^{\alpha}_{\alpha ij} v^i w^j = 0, \tag{11}$$

являющийся неопределенным в случае, когда связность C -эквиаффинная.

6. Линейное подпространство $L^1 \subset L_n$, отвечающее текущей точке $(u) \in M_n$, называется главным, если

$$E_{n-1}(X, L^1) \parallel L^2, \ \forall X \in A_m. \tag{12}$$

Из (10)-(12) следует, что подпространство $L^1 \subset L^n$ будет главным тогда и только тогда, когда

$$R^{\sigma}_{\alpha\hat{\beta}\sigma} + R^{\sigma}_{\alpha\hat{\beta}\hat{\sigma}} C^{\hat{\sigma}}_{\sigma} = 0. \tag{13}$$

Отсюда вытекает

Т е о р е м а 1. Текущей точке $(u) \in M_n$ расслоения $A_{n,m}$ $(n>m)$ в общем случае в $L_n(u)$ отвечает одна главная m-плоскость L^1.

7. Проведем с учетом (8) такую канонизацию аффинного репера в L_n, при которой

$$C^{\hat{\alpha}}_{\alpha} = 0, \ L^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m), \ \theta^{\hat{\alpha}}_{\alpha} = A^{\hat{\alpha}}_{\alpha k}\theta^k, \ \nabla A^{\hat{\alpha}}_{\alpha k} = A^{\hat{\alpha}}_{\alpha kj}\theta^j. \tag{14}$$

Из (7) и (15) следует, что подпространства L^p $(p=1,2)$ определяют на базе M_n распределения Δ^p, интегральные кривые которых на M_n, проходящие через точку (u), определяются дифференциальными уравнениями

$$\Delta^1: \ \theta^{\hat{\alpha}} = 0, \qquad \Delta^2: \ \theta^{\alpha} = 0, \tag{15}$$

вполне интегрируемыми тогда и только тогда, когда

$$\Delta^1: \ A^{\hat{\alpha}}_{[\alpha\beta]} = 0; \qquad \Delta^2: \ R^{\alpha}_{0\beta\gamma} = 0. \tag{16}$$

Обозначим C^p аффинные связности расслоения $A_{n,m}$, являющиеся ограничением аффинной связности C на распределения Δ^p.

Из (3) в силу (16) следует, что эти связности имеют следующие тензоры кручения-кривизны:

$$C^1: \ R^{\alpha}_{0\sigma\gamma}, \ R^{\beta}_{\alpha\sigma\gamma}; \quad C^2: \ R^{\alpha}_{0\hat{\sigma}\hat{\gamma}}, \ R^{\beta}_{\alpha\hat{\sigma}\hat{\gamma}}. \tag{17}$$

Из (14)-(17) вытекает

У т в е р ж д е н и е 1. Распределение Δ^2 инволютивно тогда и только тогда, когда точка $B(u)$ -ядро при аффинных преобразованиях $R(\bar{v},\bar{w})$, $\forall \bar{v},\bar{w} \subset L^2$.

8. Рассматривается m-мерное проективное пространство Q_m, отнесенное к подвижному проективному реперу $Q=\{A_{\jmath}\}$ $(\jmath,\jmath,k,l=\overline{0,m})$ с деривационными формулами и уравнениями

$$dA_{\jmath} = \Omega^{x}_{\jmath} A_x, \ \mathcal{D}\Omega^{x}_{\jmath} = \Omega^{y}_{\jmath} \wedge \Omega^{x}_{y}, \ \Omega^{\jmath}_{\jmath} = 0.$$

В расслоении $Q_{n,m} = M_n \times Q_m$ зададим сечение: каждой точке $(u) \in M_n$ в слое Q_m сопоставим точку A_0 и гиперплоскость $G_{m-1} = (A_1, \ldots, A_m)$. Тогда

$$\Omega^{\alpha}_0 = A^{\alpha}_{0i}\theta^i, \ \Omega^0_{\alpha} = A^0_{\alpha i}\theta^i, \ \nabla A^{\alpha}_{0i} + A^{\alpha}_{0i}\Omega^0_0 = A^{\alpha}_{0ij}\theta^j, \ \nabla A^0_{\alpha i} - A^0_{\alpha i}\Omega^0_0 = A^0_{\alpha ij}\theta^j. \tag{17}$$

Заметим, что в расслоении $Q_{n,m}$ с заданным сечением $(u) \to (A_0, G_{m-1})$ определена аффинная связность C с формами связности

$$\omega^{\alpha} = \Omega^{\alpha}, \ \ \omega^{\beta}_{\alpha} = \Omega^{\beta}_{\alpha} - \delta^{\beta}_{\alpha}\Omega^0_0,$$

удовлетворяющими структурным уравнениям (3), в которых

$$R^i_{0\alpha\beta} = 0, \ \ R^{\beta}_{\alpha ij} = A^0_{\alpha[i} A^{\beta}_{|0|j]} + \frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\alpha} A^0_{\gamma[i} A^{\gamma}_{|0|j]}. \tag{18}$$

Из (13) - (18) вытекает

У т в е р ж д е н и е 2. Связность C^2 расслоения $Q_{n,m}$ $(n>m)$ является локально плоской. Связность C^1 расслоения $Q_{n,m}$ $(n>m)$ имеет нулевое кручение. Линейное подпространство $L^2 \subset L_n$ принадлежит линейному гиперкомплексу $K_{n-1} \subset L_n$. В общем случае главной плоскости $L^1(u) \subset L_n(u)$ точки $(u) \in M_n$ расслоения $Q_{n,m}$ не существует.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр.геом.сем./ ВИНИТИ.М.,1966.Т.1.С.139-189.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий// Тр.моск.матем.о -ва.М.,1953.Т.2.С.275-382.
3. Е в т у ш и к Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1987.Т.9.С.7-270.
4. И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1984.Вып.15.С.32-37.
5. И в л е в Е.Т., Исабеков М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами // Материалы 3 науч.конф.по матем.и мех./Томский ун-т.Томск,1973.Вып.I.С.50-52.

УДК 514.75

КОМПЛЕКСЫ W КУБИК В P_3

В.Б.К и м
(Кемеровский ун-т)

В работах [1], [2] рассмотрены комплексы (трехпараметрические семейства) V_3 и однопараметрические семейства V_1 плоских кривых третьего порядка (кубик) в пространстве P_3 соответственно. В данной работе изучаются комплексы кубик, характеризующиеся свойствами своих однопараметрических семейств. Все используемые величины и обозначения приведены в [1] и [2]. Индексы i, j, k, ℓ принимают значения 1,2,3.

1. Выведем предварительно некоторые соотношения. Используя введенные в [1] и [2] величины, можно показать, что объекты

$$B^{ijk\ell} = b^{ijk\ell} - (a^{\ell(ij}\nu^{k)} - a^{ijk}\nu^{\ell}) \tag{1}$$

и

$$\beta^{ijk} = b^{ijk} - (a^{\ell(ij}\mu^{k)} - a^{ijk}\mu^{\ell})\, b_\ell \tag{2}$$

являются тензорами для комплекса V_3 и однопараметрического семейства V_1 кубик соответственно. Здесь и далее по индексам, заключенным в скобки, производится циклирование.

Пусть V_1 -произвольное однопараметрическое семейство кубик, принадлежащее комплексу V_3. Его можно задать уравнениями

$$\omega_i = b_i\,\theta\,; \quad \nabla a_{ijk} = a_{ijk}\,\omega_0^0 + b_{ijk}\,\theta, \tag{3}$$

где b_i удовлетворяют условию относительной инвариантности [3]. Вдоль этого семейства величины $b^{ijk\ell}$, b^{ijk}, b^ℓ связаны соотношениями

$$b^{ijk} = b^{ijk\ell}\, b_\ell\,. \tag{4}$$

Выражая $b^{ijk\ell}$ и b^{ijk} из (1) и (2) и подставляя полученные выражения в (4), находим

$$\beta^{ijk} + (a^{\ell(ij}\mu^{k)} - a^{ijk}\mu^{\ell})\,b_\ell = B^{ijk\ell} b_\ell + (a^{\ell(ij}\nu^{k)} - a^{ijk}\nu^{\ell})\,b_\ell\,. \tag{5}$$

Свернув (5) последовательно с b_k и b_ℓ, получим

$$B^{ijk\ell}\, b_j b_k b_\ell = a(\mu^i - \nu^i) - a^{\ell ik} b_k b_\ell (b_j\mu^j - b_j\nu^j)\,. \tag{6}$$

Наконец, свернув (6) с b_i, получим

$$B^{ijk\ell}\, b_i b_j b_k b_\ell = a(\beta - 2 b_i\nu^i)\,. \tag{7}$$

Обозначим через $P(V_1)$ оснащающую точку P семейства V_1, а через $\pi(V_1)$ -плоскость, проходящую через $P(V_1)$ и характеристику ℓ плоскости кубики вдоль семейства V_1.

2. О п р е д е л е н и е 1. Комплекс V_3 кубик, характеризующийся условием

$$B^{(ijk\ell)} = 0, \tag{8}$$

называется комплексом W_0.

Т е о р е м а 1. Комплекс V_3 будет комплексом W_0 тогда и только тогда, когда его оснащающая точка M [1] инцидентна плоскости $\pi(V_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для любого однопараметрического семейства V_1 комплекса плоскость $\pi(V_1)$ и точка M инцидентны. Тогда из [1] и [2] вытекает:

$$\beta_i \nu^i = \frac{\beta}{2}\,. \tag{9}$$

Из (9) и (7) следует

$$B^{ijk\ell}\, b_i b_j b_k b_\ell = 0\,. \tag{10}$$

Так как последнее условие должно выполняться для любых b_i, то согласно [4] получаем

$$B^{(ijkl)}=0, \tag{11}$$

то есть рассматриваемый комплекс является комплексом W_0. Напротив, если выполнено (11), то для всех b_i выполнено (10), откуда, в свою очередь, в силу (7) следует (9), что означает инцидентность точки M и плоскости $\pi(V_1)$.

3.Рассмотрим обращенный тензор a^{ijk} [1]. С ним ассоциируется уравнение Монжа [5]:

$$a^{ijk}\omega_i\,\omega_j\,\omega_k=0. \tag{12}$$

Каждой интегральной кривой уравнения (12) соответствует однопараметрическое семейство V_1 кубик комплекса, вдоль которого характеристика $\ell(V_1)$ плоскости кубики принадлежит кривой K^3 [1]. Интегральную кривую уравнения (12) назовем асимптотической, если для соответствующего семейства V_1 второй полюс прямой $\ell(V_1)$ относительно кривой K^3 совпадает с точкой возврата луча торса, огибаемого плоскостями кубик рассматриваемого семейства.

Асимптотические линии уравнения (12) определяются системой

$$\begin{cases} a^{ijk}\omega_i\,\omega_j\,\omega_k=0,\\ B^{ijkl}\omega_i\,\omega_j\,\omega_k\,\omega_l=0. \end{cases} \tag{13}$$

Т е о р е м а 2. Для комплексов W_0 и только для них асимптотические линии уравнения (12) не определены.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Асимптотические линии уравнения (12) будут не определены тогда и только тогда, когда уравнение системы (13) является следствием первого, т.е. когда выполняется соотношение

$$B^{(ijkl)}=a^{(ijk}\xi^{l)}. \tag{14}$$

Свернув (14) с a_{ijk} и учитывая (1), получим $\xi^l=0$, и, следовательно, $B^{(ijkl)}=0$.

3.О п р е д е л е н и е 2. Комплекс кубик, характеризующийся условием

$$B^{ijkl}=0, \tag{15}$$

называется комплексом W.

Т е о р е м а 3. Комплекс кубик будет комплексом W тогда и только тогда, когда для любого однопараметрического семейства V_1 комплекса точка $P(V_1)$ совпадает с оснащающей точ-

кой M комплекса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено (15). Тогда из (7) вытекает $b_i\nu^i=\frac{b}{2}$. В силу соотношения (10) из [2] получаем $b_i\mu^i=b_i\nu^i$. Тогда из (6) следует

$$\nu^i=\mu^i, \tag{16}$$

что равносильно совпадению точек M и $P(V_1)$. Напротив, пусть выполнено (16). Тогда $b_i\nu^i=b_i\mu^i=\frac{b}{2}$. Из (6) и (7) в этом случае получаем

$$B^{ijkl}b_i\,b_j\,b_k\,b_l=0,\quad B^{ijkl}b_j\,b_k\,b_l=0. \tag{17}$$

Уравнения (17) должны выполняться для любых b_i. Тогда согласно [4] имеем $B^{(ijkl)}=0$, $B^{i(jkl)}=0$. Отсюда в силу симметрии тензора B^{ijkl} по первым индексам получаем $B^{ijkl}=0$. Теорема доказана.

Библиографический список

1.К и м В.Б. О некоторых классах комплексов кубик в P_3. Кемерово, 1982. Деп.в ВИНИТИ 18.02.82. № 734.

2.К и м В.Б. Об одном классе однопараметрических семейств кубик в P_3//Теория функций и ее приложения. Кемерово, 1985.

3.М а л а х о в с к и й В.С. К геометрии касательно оснащенных подмногообразий//Изв.вузов.Матем.1972.№9.С.54-65.

4.Г у р е в и ч Г.Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.;Л.,1948.

5.С и н ц о в Д.М. Геометрия монжевых уравнений//Работы по неголономной геометрии. Киев:Высшая школа,1972.С.102-116.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ СЕТЕЙ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ ЕВКЛИДОВА n-ПРОСТРАНСТВА

Г.В.К у з н е ц о в
(МГПИ им В.И.Ленина)

В данной работе изучаются свойства сети линий кривизны относительно поля $\vec{e}_n$ вдоль распределения Δ_{n-1}, причем вектор $\vec{e}_n$ перпендикулярен Δ_{n-1}.

В евклидовом пространстве E_n даны область Ω и распределение Δ_{n-1} в этой области. Пусть $\Delta_{n-1}(x)$ -значение распределения Δ_{n-1} в точке $x \in \Omega$. Вектор $\vec{e}_n$ в точке x направим так, что $\vec{e}_n \perp \Delta_{n-1}(x)$, а остальные векторы репера расположим в плоскости $\Delta_{n-1}(x)$. Пусть $\vec{F} = \vec{x} + \lambda\vec{e}_n$ такой вектор, что $d\vec{F} \parallel \vec{e}_n$ при некотором смещении точки x вдоль $\Delta_{n-1}(x)$. (Это направление смещения и называется направлением кривизны относительно поля $\vec{e}_n$ вдоль $\Delta_{n-1}(x)$). Огибающие этих направлений и интегральные кривые поля $\vec{e}_n$ образуют сеть линий кривизны относительно поля $\vec{e}_n$ в области Ω.

Отнесем область Ω к подвижному реперу $R^x = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_n)$ ($i, j, k, s = \overline{1, n-1}$), где векторы $\vec{e}_i \in \Delta_{n-1}(x)$, а вектор $\vec{e}_n$ - единичный и $\vec{e}_n \perp \Delta_{n-1}(x)$. Деривационные формулы такого репера имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^n \vec{e}_n, \quad d\vec{e}_n = \omega_n^i \vec{e}_i.$$

Направления ω^i кривизны находятся из системы уравнений

$$(\gamma^{ij}\Lambda_{jk} - \mu\delta_k^i)\omega^k = 0 \qquad (\omega_j^n = \Lambda_{jk}\omega^k + \Lambda_{jn}\omega^n), \qquad (I)$$

где $\mu = \frac{1}{\lambda}$ и μ -корень уравнения: $\det \| \gamma^{ij}\Lambda_{jk} - \mu\delta_k^i \| = 0$. Величины Λ_{ij} образуют геометрический объект типа тензора, а $\{\Lambda_{in}\}$ -геометрический объект типа ковектора. Направления кривизны будут различны, когда μ -матрица $\| \gamma^{ij}\Lambda_{jk} - \mu\delta_k^i \|$ имеет все элементарные делители первой степени.

Обозначим сеть линий кривизны относительно $\vec{e}_n$ через Σ_n. В общем случае эта сеть не ортогональна. Оказывается, чтобы данная сеть была ортогональной в области Ω, необходимо и достаточно, чтобы распределение Δ_{n-1} было интегрируемо [1].

Каждому найденному направлению ω^i соответствует точка F_i на прямой $(x, \vec{e}_n)$. Такая точка называется фокусом прямой $(x, \vec{e}_n)$ относительно направления ω^i.

Здесь был рассмотрен случай, когда все μ_i -различны. Пусть теперь некоторые μ_i совпадают. Не нарушая общности, можно взять первые k значений μ равными ($\mu_1 = \ldots = \mu_k$), а остальные не равны между собой. Тогда и $F_1 = \ldots = F_k$. Построим следующую конструкцию. В точке $x \in \Omega$ возьмем два распределения: Δ_{n-k} и Δ_k. Распределению Δ_{n-k} принадлежат направления, которые соответствуют различным μ. Распределение Δ_k получим следующим образом. Из площадки $\Delta_{n-1}(x)$ мы выделим площадку $\Delta_{n-k}(x)$. Еще осталось $(k-1)$ направлений. Одно из них направим перпендикулярно $\Delta_{n-k}(x)$ и перпендикулярно $\vec{e}_n$. Так

проделаем для каждого оставшегося направления. Получим распределение Δ_k, ортогонально-дополнительное к Δ_{n-k}. При совпадении k фокусов присоединенная (фокусная) поверхность [2] распределения Δ_{n-k} в Δ_k распадается на $(n-k)$ -пересекающихся гиперплоскостей.

Пусть ℓ направлений кривизн, принадлежащих $\Delta_{n-1}(x)$, перпендикулярны. Сеть Σ_n будет частично ортогональной и распределение Δ_{n-1} не вполне интегрируемо. Ортогональные направления принадлежат распределению Δ_ℓ, а остальные - распределению $\Delta_{n-1-\ell}$. Если область Ω несет сеть линий кривизны, из которых ℓ ортогональны, то фокусная поверхность для Δ_ℓ, лежащая в плоскости $(x, \vec{e}_n, \Delta_{n-1-\ell}(x))$, распадается на ℓ гиперплоскостей. Уравнение фокусной поверхности для распределения Δ_ℓ запишется в виде:

$$\det \| \sum_{\bar{a}} \gamma_{ab} - y^{\bar{a}}\Lambda_{ab}^{\bar{a}} \| = 0, \qquad (2)$$

где $a, b = \overline{1, \ell}$; $\bar{a} = \overline{\ell+1, n}$; $\omega_a^{\bar{a}} = \Lambda_{aA}^{\bar{a}}\omega^A$ ($A = \overline{1, n}$). Верна следующая

Теорема 1. Точки пересечения прямой $(x, \vec{e}_n)$ с фокусной поверхностью (2) уходят в бесконечность тогда и только тогда, когда ℓ-ткань в области Ω состоит из ортогональных асимптотических семейств линий кривизны относительно нормали $(x, \vec{e}_n)$.

Уравнение фокусной поверхности для площадки $\Delta_{n-1-\ell}(x)$, а, как известно, данная фокусная поверхность будет лежать в плоскости $(x, \vec{e}_n, \Delta_\ell(x))$, запишется в виде:

$$\det \| \sum_u \gamma_{\bar{i}\bar{j}} - y^u \Lambda_{\bar{i}\bar{j}}^u \| = 0, \qquad (3)$$

где $\bar{i}, \bar{j} = \overline{\ell+1, n-1}$; $u = \overline{1, \ell}$; n. Отсюда следует

Теорема 2. Точки пересечения прямой $(x, \vec{e}_n)$ с фокусной поверхностью (3) уходят в бесконечность тогда и только тогда, когда линии кривизны, принадлежащие распределению $\Delta_{n-1-\ell}$ [3], характеризуются тем, что вдоль них переносится параллельно вектор $\vec{e}_{\bar{i}}$.

Для направления в точке $x \in \Omega$, определяемого параметрами $\bar{\omega}^a$, параметры ω^b сопряженного направления определяются из системы уравнений:

$$\Lambda_{ab}^\alpha \bar{\omega}^a \omega^b = 0, \qquad (4)$$

где $a, b = \overline{1, \ell}$; $\alpha = \overline{\ell+1, n}$, а величины Λ_{ab}^α образуют геометрический объект типа тензора, симметричного по нижним индексам. Систе- ма (4) есть система $n-\ell$ линейных однородных уравнений с ℓ неизвестными ω^b. Если $n-\ell=\ell$, т.е. $n=2\ell$, то матрица $\| \Lambda^{\alpha}_{ab} \overline{\omega}^a \|$ коэффициентов системы (4)-квадратная. Для направления $\{\omega^b\}$ существует сопряженное тогда и только тогда, когда направ- ление $\{\overline{\omega}^a\}$ удовлетворяет условию

$$\det \| \Lambda^{\alpha}_{ab} \overline{\omega}^a \| = 0. \tag{5}$$

Таким образом, при $n=2\ell$ в $\Delta_\ell(x)$ выделяется конус (5) порядка ℓ - место одно-направлений $\overline{\omega}^a$, для которых существуют сопря- женные направления ω^b, очевидно, также принадлежащие этому конусу.

Вполне интегрируемое распределение Δ_ℓ определяет интеграль- ное многообразие V_ℓ. Когда сеть линий кривизны на V_ℓ будет совпадать с сетью линий кривизны относительно нормали $(x, \vec{e}_n)$? Для этого необходимо и достаточно выполнение условий

$$\Lambda_{aa} = b^n_{aa}, \tag{6}$$

где b^n_{aa} - компоненты второго основного тензора поверхности V_ℓ.

Т е о р е м а 3. Сеть Σ_n является геодезической тогда и только тогда, когда $\Lambda_{ijj} = -\Lambda_{in} \cdot \Lambda_{jj}$ и $\sum_i \Lambda_{ii} = 0$, где

$$d\Lambda_{ij} - \Lambda_{kj}\omega^k_i - \Lambda_{ik}\omega^k_j - \Lambda_{in}\omega^n_j = \Lambda_{ijA}\omega^A \quad (A = \overline{1,n}).$$

Т е о р е м а 4. Сеть линий кривизны относительно поля $\vec{e}_n$ вдоль $\Delta_{n-1}(x)$ в области Ω является n-ортогонально-сопря- женной системой в смысле И.Н.Григорьева [4] тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$(\Lambda_{AC} + \Lambda_{CA})(a^A_{CC} - a^C_{AA}) + (\Lambda_{BC} + \Lambda_{CB})a^C_{BC} - (\Lambda_{AB} + \Lambda_{BA})a^A_{BA} = 0, \tag{7}$$

$$(\Lambda_{AB} + \Lambda_{BA})a^A_{BB} + (\Lambda_{BC} + \Lambda_{CB})(a^B_{CB} + a^C_{BC}) + (\Lambda_{AC} + \Lambda_{CA})a^A_{CC} = 0, \tag{8}$$

где $A \neq B \neq C$, а $\omega^B_A = a^B_{AC}\omega^C$ $(A, B, C = \overline{1,n})$.

Ковектор Λ_{in} определяет в распределении Δ_{n-1} подраспреде- ление Δ_{n-2}. Распределение Δ_{n-2} вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда $\Lambda_{i n \hat{j}} = \Lambda_{j n \hat{i}}$, где $\hat{i}, \hat{j} = \overline{1, n-2}$. В этом случае через каждую точку $x \in \Omega$ проходит интегральное многообразие V_{n-2} этого распределения. В общем случае это интегральное мно-

гообразие несет сопряженную сеть. Для того чтобы сопряженная сеть на V_{n-2} входила в состав сети линий кривизны Σ_n относи- тельно нормали $(x, \vec{e}_n)$, необходимо и достаточно выполнение равенств $\Lambda_{\hat{i}\hat{i}} = b^n_{\hat{i}\hat{i}}$, где $\omega^n_{\hat{i}} = \Lambda_{\hat{i}\hat{j}}\omega^{\hat{j}}$, $\Lambda_{\hat{i}\hat{i}}$ - компоненты тензора $\Lambda_{\hat{i}\hat{j}}$, а $b^n_{\hat{i}\hat{i}}$ -компоненты второго основного тензора поверхнос- ти V_{n-2}.

Пусть дано распределение Δ_{n-2}, заданное в распределении Δ_{n-1} полем ковектора Λ_{in}. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-2} \in \Delta_{n-2}(x)$ и дано распределение Δ_2, такое, что $\vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n \in \Delta_2(x)$. Оказывается, что если распределение Δ_2 минимально, то фокусная поверхность в плоскости $\Delta_{n-2}(x)$ является квадрикой вида:

$$\Lambda^n_{\hat{i}\, n-1} \cdot \Lambda^{n-1}_{\hat{i} n} (z^{\hat{i}})^2 = 1. \tag{9}$$

В этом случае верны следующие теоремы:

Т е о р е м а 5. Для голономного распределения Δ_2 фокус- ная поверхность в плоскости $\Delta_{n-2}(x)$ является эллипсоидом с центром в точке x.

Т е о р е м а 6. Для плоского неголономного распределе- ния Δ_2 фокусная поверхность в плоскости $\Delta_{n-2}(x)$ является мни- мым эллипсоидом.

Обозначим вторую поляру точки x относительно фокусной поверхности (9) через Q [2]. Далее показано, что ранг Q по- нижается на t, когда выполнено условие

$$\nabla_{\vec{e}_{\hat{\alpha}}} \vec{e}_{\hat{i}} \in \Delta_{n-2} \qquad (\hat{\alpha} = n-1, n) \tag{10}$$

для t значений индекса $\hat{i}$. Если $t = n-2$, то ранг $Q = 0$, и в этом случае фокусная поверхность голономного распределения Δ_2 является дважды взятой несобственной гиперплоскостью в Δ_{n-2}.

Т е о р е м а 7. Если $0 <$ ранг $Q < n-2$ и распределение Δ_2 голономно, то в этом случае фокусная поверхность является эллиптическим цилиндром с $(t+1)$-мерными образующими.

Ранг $Q = n-2-t$ тогда и только тогда, когда

$$\text{пр}_{\vec{e}_{\hat{i}}} \vec{a}_{n-1,n} \cdot \text{пр}_{\vec{e}_{\hat{i}}} \vec{a}_{n,n-1} = 0$$

для t значений индекса $\hat{i}$.

Т е о р е м а 8. Если $0 <$ ранг $Q < n-2$, то фокусная поверхность является параболическим цилиндром с t-мерными образующими.

Если же Δ_2 минимальное,то фокусная поверхность не может быть конусом.Для не-минимального распределения Δ_2 будет верна

Т е о р е м а 9. Если распределение Δ_2 не-минимально, ранг $Q = n-2$ и верно $(\Lambda^{n-1}_{\tau\, n-1})^2 = -4\Lambda^{n-1}_{\tau n}\cdot\Lambda^{n}_{\tau\, n-1}$,то фокусная поверхность является конусом в Δ_{n-2} с точечной вершиной.

Библиографический список

I.Б а з ы л е в В.Т. Материалы по геометрии /МГПИ им.В.И. Ленина.М.,I978.Вып.I.

2.М а т и е в а Г.К. К геометрии минимальных распределений// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./ Калинингр. ун-т.Калининград,I984.Вып.I5.С.60-63.

3.К у з ь м и н М.К. Сети,определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n ,и их обобщения// Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М.,I975.Т.7.С.2I5-230.

4.Г р и г о р ь е в И.Н. Асимптотические преобразования p-ортогонально-сопряженных систем в n-мерном пространстве// Докл.АН СССР.I954.Т.97.№5.С.765-767.

УДК 5I4.75

О СЕМЕЙСТВАХ КОЛЛИНЕАЦИЙ МНОГОМЕРНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н.В.М а л а х о в с к и й
(Калининградский ун-т)

Исследуются n-параметрические семейства Π_n коллинеаций $\pi : \mathcal{P}_n \to P_n$ n-мерных проективных пространств,отображающих заданную точку $P^\circ \in \mathcal{P}_n$ в заданную точку $p^\circ \in P_n : \pi(P^\circ) = p^\circ$, причем точки P° и p° описывают n-мерные области.Построена последовательность фундаментальных объектов семейства Π_n , найдены и геометрически охарактеризованы некоторые тензоры,охватываемые ими.Определено фокальное многообразие коллинеации $\pi \in \Pi_n$ и порождаемые им фокальные гиперповерхности в пространствах $\mathcal{P}_n$ и P_n .

§I.Поля фундаментальных объектов семейства коллинеаций

Отнесем пространства $\mathcal{P}_n$ и P_n к подвижным реперам $R=\{A_{\mathcal{J}'}\}$ и $\tau=\{a_{i'}\}$ $(\mathcal{I}',\mathcal{J}',\mathcal{K}',i',j',k'=\overline{0,n})$,где $A_0=P^\circ$, $a_0=p^\circ$. Деривационные формулы реперов и уравнения структуры пространств $\mathcal{P}_n$ и P_n запишутся в виде:

$$dA_{\mathcal{J}'} = \Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'} A_{\mathcal{K}'}, \quad da_{i'} = \omega^{k'}_{i'} a_{k'} ; \qquad (I.I)$$

$$\mathcal{D}\Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{I}'} = \Omega^{\mathcal{J}'}_{\mathcal{I}'} \wedge \Omega^{\mathcal{K}'}_{\mathcal{J}'}, \quad d\omega^{k'}_{i'} = \omega^{j'}_{i'} \wedge \omega^{k'}_{j'}, \qquad (I.2)$$

причем $\Omega^{\mathcal{I}'}_{\mathcal{I}'} = 0$, $\omega^{i'}_{i'} = 0$. Обозначим через $\tilde{X}^{\mathcal{I}'}$, $\tilde{x}^{i'}$ однородные, а через $X^{\mathcal{I}} = \frac{\tilde{X}^{\mathcal{I}}}{\tilde{X}^0}$, $x^i = \frac{\tilde{x}^i}{x^0}$ -неоднородные координаты точек M и m в пространствах $\mathcal{P}_n$, P_n $(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},i,j,k=\overline{1,n})$. Тогда уравнения стационарности точек M и m запишутся в виде (см.[1], с.356)

$$\begin{cases} \nabla X^{\mathcal{I}} - X^{\mathcal{I}} X^{\mathcal{K}} \Omega^0_{\mathcal{K}} + \Omega^{\mathcal{I}} = 0, \\ \nabla x^i - x^i x^k \omega^0_k + \omega^i = 0 , \end{cases} \qquad (I.3)$$

где $\Omega^{\mathcal{I}} \overset{def}{=} \Omega^{\mathcal{I}}_0$, $\omega^i = \omega^i_0$,а символ ∇ означает абсолютное дифференцирование с учетом прибавления членов с диагональными формами Ω^0_0, ω^0_0 ,взятыми со знаком " - " для верхних индексов и со знаком "+" для нижних с кратностью,равной числу индексов.

Учитывая,что $a_0 = \pi(A_0)$,коллинеация $\pi \in \Pi_n$ определится формулой

$$x^i = \frac{M^i_{\mathcal{J}} X^{\mathcal{J}}}{1 - P_{\mathcal{J}} X^{\mathcal{J}}} . \qquad (I.4)$$

Дифференцируя (I.4) с использованием (I.3),убеждаемся,что формы Пфаффа

$$\Omega^{\mathcal{J}},\ \omega^i,\ \nabla M^i_{\mathcal{J}},\ \nabla P_{\mathcal{J}} + \Omega^0_{\mathcal{J}} - M^k_{\mathcal{J}} \omega^0_k \qquad (I.5)$$

являются структурными формами коллинеации $\pi \in \Pi_n$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только невырожденные коллинеации.Так как точки P° и p° описывают n-мерные области,то формы Пфаффа $\Omega^{\mathcal{J}}$ можно принять за базисные и записать систему дифференциальных уравнений семейства коллинеаций Π_n в виде.

$$\begin{cases} \omega^i = \lambda^i_{\mathcal{J}} \Omega^{\mathcal{J}}, \quad \nabla M^i_{\mathcal{J}} = M^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}} \Omega^{\mathcal{K}}, \\ \nabla P_{\mathcal{J}} + \Omega^0_{\mathcal{J}} - M^k_{\mathcal{J}} \omega^0_k = P_{\mathcal{J}\mathcal{K}} \Omega^{\mathcal{K}}, \end{cases} \qquad (I.6)$$

причем

$$\det(\lambda^i_{\mathcal{J}}) \neq 0, \quad \det(M^i_{\mathcal{J}}) \neq 0. \qquad (I.7)$$

Продолжая систему (I.6) два раза,находим:

$$
\begin{cases}
\nabla\lambda^i_j = \lambda^i_{jk}\Omega^k, \quad \Delta M^i_{jk} = M^i_{jkl}\Omega^l, \\
\Delta\lambda^i_{jk} = \lambda^i_{jkl}\Omega^l, \quad \Delta P_{jk} = P_{jkl}\Omega^l, \\
\Delta M^i_{jkl} = M^i_{jklh}\Omega^h, \quad \Delta P_{jkl} = P_{jklh}\Omega^h,
\end{cases}
\tag{I.8}
$$

где

$$
\begin{cases}
\Delta M^i_{jk} = \nabla M^i_{jk} + M^i_{(j}\Omega^0_{k)} - M^{(i}_j\lambda^{\kappa)}_k\omega^0_\kappa, \\
\Delta\lambda^i_{jk} = \nabla\lambda^i_{jk} + \lambda^i_{(j}\Omega^0_{k)} - \lambda^i_{(j}\lambda^\kappa_{k)}\omega^0_\kappa, \\
\Delta P_{jk} = \nabla P_{jk} + P_{(j}\Omega^0_{k)} - M^\kappa_{jk}\omega^0_\kappa, \\
\Delta M^i_{jkl} = \nabla M^i_{jkl} + M^i_{(kl)}\Omega^0_j + 2M^i_{j(k}\Omega^0_{l)} - \\
\qquad - (\lambda^{(i}_l M^{\kappa)}_{jk} + \lambda^{(i}_k M^{\kappa)}_{jl} + \lambda^{(i}_{kl} M^{\kappa)}_j)\omega^0_\kappa, \\
\Delta P_{jkl} = \nabla P_{jkl} + P_{(lk)}\Omega^0_j + 2P_{jl}\Omega^0_k + 2P_{jk}\Omega^0_l - \\
\qquad - (\lambda^\kappa_l P_{jk} + M^\kappa_{jkl})\omega^0_\kappa,
\end{cases}
\tag{I.9}
$$

а круглые скобки означают циклирование по соответствующим индексам. Здесь величины " λ " симметричные по любой паре нижних индексов, а величины " M " и " P " – по любой паре нижних индексов, начиная со второго. Системы величин

$$
\Gamma_0 = \{M^i_j, P_k\}, \quad \Gamma_1 = \{\Gamma_0, \lambda^i_j, M^i_{jk}, P_{jk}\},
$$

$$
\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \lambda^i_{jk}, M^i_{jkl}, P_{jkl}\}, \quad \Gamma_3 = \{\Gamma_2, \lambda^i_{jkl}, M^i_{jklh}, P_{jklh}\}
$$

образуют поля фундаментальных объектов семейства Π_n. Подобъект $\{\lambda^i_j\}$ определяет точечное отображение $\varphi: P^0 \in \mathcal{P}_n \mapsto p_0 \in p_n$, индуцируемое семейством Π_n.

§2. Тензорные поля на семействе Π_n

Из (1.6) и (1.8) следует, что системы величин $\{\lambda^i_j\}$ и $\{M^i_j\}$ являются тензорами типа (1.1). В силу (1.7) системы величин $\{\overset{*}{\lambda}{}^j_i\}$, $\{\overset{*}{M}{}^j_i\}$, определяемые соотношениями

$$
\overset{*}{\lambda}{}^j_i\lambda^i_k = \delta^j_k, \quad \overset{*}{M}{}^j_i M^i_k = \delta^j_k,
\tag{2.1}
$$

также образуют тензоры типа (I.I). Имеем:

$$
\begin{cases}
d\overset{*}{\lambda}{}^j_i = \overset{*}{\lambda}{}^j_{ik}\Omega^k - \overset{*}{\lambda}{}^k_i\Omega^j_k + \overset{*}{\lambda}{}^j_\kappa\omega^\kappa_i + \overset{*}{\lambda}{}^j_i(\Omega^0_0 - \omega^0_0), \\
d\overset{*}{M}{}^j_i = \overset{*}{M}{}^j_{ik}\Omega^k - \overset{*}{M}{}^k_i\Omega^j_k + \overset{*}{M}{}^j_\kappa\omega^\kappa_i + \overset{*}{M}{}^j_i(\Omega^0_0 - \omega^0_0),
\end{cases}
\tag{2.3}
$$

где

$$
\overset{*}{\lambda}{}^j_{ik} = -\overset{*}{\lambda}{}^j_\kappa\overset{*}{\lambda}{}^l_i\lambda^\kappa_{lk}, \quad \overset{*}{M}{}^j_{ik} = -\overset{*}{M}{}^j_\kappa\overset{*}{M}{}^l_i M^\kappa_{lk}.
\tag{2.4}
$$

Обозначим

$$
M_j = \overset{*}{M}{}^k_i M^i_{kj} - \overset{*}{\lambda}{}^k_i\lambda^i_{kj}.
\tag{2.5}
$$

Используя (I.8) и (2.3), находим:

$$
dM_j = M_k\Omega^k_j - M_j\Omega^0_0 + M_{jk}\Omega^k,
\tag{2.6}
$$

где $M_{jk} = \overset{*}{M}{}^l_{ik}M^i_{lj} + \overset{*}{M}{}^l_i M^i_{ljk} - \overset{*}{\lambda}{}^l_{ik}M^i_{lj} - \overset{*}{\lambda}{}^l_i\lambda^i_{ljk}$.

Следовательно, система величин $\{M_j\}$ и системы величин

$$
\lambda_i = M_k\overset{*}{\lambda}{}^k_i, \quad m_i = M_k\overset{*}{M}{}^k_i
\tag{2.8}
$$

образуют тензоры типа (0, I), позволяющие строить на семействе коллинеации Π_n тензорные поля различных типов.

Тензор $\{M_j\}$ определяет инвариантную гиперплоскость в пространстве $\mathcal{P}_n$, проходящую через точку A_0:

$$
M_j X^j = 0.
\tag{2.9}
$$

Тензоры $\{\lambda_i\}$ и $\{m_i\}$ определяют инвариантные гиперплоскости в пространстве p_n, проходящие через точку a_0:

$$
\lambda_i x^i = 0, \quad m_i x^i = 0.
\tag{2.I0}
$$

Рассмотрим тензор

$$
\tilde{\lambda}^i_k = M^i_k - \lambda^i_k.
\tag{2.II}
$$

Обозначим через τ -ранг матрицы $\{\tilde{\lambda}^i_k\}$. Условие $\tau = 0$ выделяет класс семейств Π_n, который обозначим Π^0_n. Для семейства Π^0_n тензоры $\{M_j\}, \{\lambda_i\}, \{m_i\}$ –нулевые, а системы величин

$$
H_j = (n+1)P_j - \overset{*}{\lambda}{}^k_i\lambda^i_{jk}, \quad h_i = \overset{*}{\lambda}{}^j_i H_j, \quad \tilde{h}_i = \overset{*}{M}{}^j_i H_j
\tag{2.I2}
$$

образуют тензоры.

Геометрически семейство Π^0_n характеризуется тем, что коллинеация π принадлежит связке коллинеаций $K(Q_j)$:

$$x^i = \frac{\Lambda^i_J X^J}{1-Q_x X^x}, \tag{2.13}$$

касательных к точечному отображению φ в точке P°.

Системы величин

$$A^x_J = \lambda^{*x}_i M^i_J, \quad B^x_J = M^{*x}_i \lambda^i_J, \tag{2.14}$$

$$a^i_k = \lambda^i_J M^{*J}_k, \quad b^i_k = M^i_J \lambda^{*J}_k \tag{2.15}$$

определяют поля аффиноров соответственно на $\mathcal{P}_n$ и p_n, причем:

$$A^x_J B^J_z = \delta^x_z, \quad a^i_k b^k_j = \delta^i_j. \tag{2.16}$$

§3. Ассоциированные геометрические образы.

Из (2.1) вытекает, что тензор $\{M^{*J}_i\}$ определяет связку коллинеаций $p_n \to \mathcal{P}_n$

$$X^J = \frac{M^{*J}_i x^i}{1-p_k x^k}, \tag{3.1}$$

каждая из которых имеет в точке p° касание I-го порядка с коллинеацией π^{-1}. Тензор $\{\lambda^{*J}_i\}$ определяет связку коллинеаций $p_n \to \mathcal{P}_n$

$$X^J = \frac{\lambda^{*J}_i x^i}{1-q_k x^k}, \tag{3.2}$$

обратных к коллинеациям $K(Q_k)$, касательным в точке P° к точечному отображению φ. Из (3.1) и (3.2) вытекает:

П р е д л о ж е н и е I. Аффиноры $\{A^x_J\}$ и $\{B^x_J\}$ определяют в точке P° связки проективных преобразований пространства $\mathcal{P}_n$, имеющих в P° касание I-го порядка соответственно с преобразованиями $K^{-1}(Q_J)\circ\pi$ и $\pi^{-1}\circ K(Q_J)$.

Аналогичный геометрический смысл имеют аффиноры $\{a^i_k\}$ и $\{b^i_k\}$. Если $0<z<n$, то тензор $\{\tilde\lambda^i_J\}$ определяет в пространстве $\mathcal{P}_n$ инвариантное подпространство $\mathcal{L}$

$$\tilde\lambda^i_J X^J = 0, \tag{3.3}$$

содержащее точку P° и имеющее размерность $n-z$.

П р е д л о ж е н и е 2. Подпространство $\mathcal{L}$ характеризуется тем, что сужение коллинеации π на $\mathcal{L}$ принадлежит связке коллинеаций $\mathcal{L}\to p_n$, являющихся сужениями на $\mathcal{L}$ коллинеаций $K(Q_J)$, касательных к точечному отображению φ.

Доказательство вытекает из (3.3), (2.11), (1.4), (1.6). Тензор $\{M_J\}$ определяет в $\mathcal{P}_n$ инвариантную гиперплоскость

$$M_J X^J = 0, \tag{3.4}$$

проходящую через точку P°. Распределение этих гиперплоскостей задается относительно инвариантной формой Пфаффа $\theta = M_J \Omega^J$, геометрический смысл которой вытекает из следующего результата.

П р е д л о ж е н и е 3. Форма Пфаффа θ определяется полем аффинора $\{A^x_J\}$

$$\theta = d\ln\det(A^x_J). \tag{3.5}$$

Доказательство вытекает из (2.14), (1.6), (1.8), (2.5).

З а м е ч а н и е. В случае, когда распределение гиперплоскостей (3.4) голономно, т.е. когда дифференциальное уравнение $\theta = 0$ вполне интегрируемо, гиперплоскости (3.4) огибают гиперповерхности в $\mathcal{P}_n$. Тогда семейство Π_n порождает точечное соответствие между гиперповерхностями проективных пространств $\mathcal{P}_n$ и p_n [2], [3].

В случае семейства Π°_n тензор H_J определяет в $\mathcal{P}_n$ инвариантную гиперплоскость

$$H_J X^J = 0. \tag{3.6}$$

Справедлив следующий результат:

П р е д л о ж е н и е 4. Гиперплоскость (3.6) является подпространством, сужение на которое коллинеации π и локальной коллинеации Чеха [4] точечного отображения φ совпадают.

С л е д с т в и е. Обращение тензора $\{H_J\}$ в тождественно нулевой тензор выделяет класс семейств Π_n коллинеаций π, являющихся локальными коллинеациями точечного отображения, т.е. в этом случае семейство Π_n порождается точечным отображением.

Гиперплоскости

$$h_i x^i = 0, \quad \tilde h_i x^i = 0 \tag{3.7}$$

являются образами гиперплоскости (3.6) соответственно при отображениях $K(Q_J)$ и π.

§4. Фокальные гиперповерхности, ассоциированные с семейством коллинеаций

Обозначим

$$f^i = M^i_J X^J + x^i(P_J X^J - 1). \tag{4.1}$$

Коллинеация $\pi: \mathcal{P}_n \to p_n$ семейства Π_n определяется уравнениями $f^i = 0$. Назовем точку $(X^J, x^k) \in \mathcal{P}_n \times p_n$ фокальной точкой коллинеации $\pi \in \Pi_n$, если существует направление $\Omega^x = t^x\theta$, где

θ -параметрическая форма [2 ,с.41], вдоль которого она принадлежит двум смежным коллинеациям. Из этого определения следует, что координаты X^j, x^k фокальной точки удовлетворяют системе уравнений

$$f^i = 0, \quad f^i + df^i = 0. \qquad (4.2)$$

Направление $\Omega^x = t^x \theta$ называется фокальным направлением семейства Π_n. Используя (1.3),(1.6), находим

$$df^i = \mu^i_k f^k + f^i_x \Omega^x, \qquad (4.3)$$

где

$$\mu^i_k = x^i \omega^0_k - \omega^i_k + \delta^i_k (\omega^0_0 + X^x \Omega^0_x), \qquad (4.4)$$

$$f^i_x = P_{jx} x^i X^j + (M^i_{jx} - \lambda^i_x P_j) X^j - x^i P_x - \tilde{\lambda}^i_x. \qquad (4.5)$$

Следовательно, фокальные точки и фокальные семейства определяются системой уравнений:

$$f^i = 0, \quad f^i_x \Omega^x = 0. \qquad (4.6)$$

Исключая из этих уравнений базисные формы Ω^j, получим систему уравнений для определения фокальных точек коллинеации $\pi \in \Pi_n$:

$$f^i = 0, \quad \det(f^i_x) = 0. \qquad (4.7)$$

Эта система содержит $n+1$ уравнение на $2n$ координат X^j, x^k. Определяя из уравнений $f^i = 0$ координаты x^k и подставляя их значения в оставшиеся уравнения системы (4.7), убеждаемся, что проекция множества фокальных точек на пространство $\mathcal{P}_n$ образует в нем алгебраическую гиперповерхность S порядка 2^n. Аналогично, исключая X^j, получим в пространстве P_n алгебраическую гиперповерхность σ порядка 2^n.

Назовем S и σ фокальными гиперповерхностями коллинеации $\pi \in \Pi_n$. Из (4.5),(4.7) непосредственно вытекает

П р е д л о ж е н и е 5. Фокальная гиперповерхность S коллинеации $\pi \in \Pi_n$ содержит точку P^0 тогда и только тогда, когда $r = \operatorname{rang}(\tilde{\lambda}^i_x) < n$, т.е. когда инвариантное подпространство (3.3) не вырождается в точку P^0.

Библиографический список

1.Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр.моск.матем.о-ва/ГИТЛ.М.,1953.Т.2.С.275-382.

2.Б о л о д у р и н В.С. О точечных соответствиях между гиперповерхностями проективных пространств//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1969.Т.2.С.55-79.

3.М а л а х о в с к и й Н.В. О двумерных многообразиях в прямом произведении проективных пространств//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр. ун-т.Калининград,1988.Вып.19.С.55-57.

4.Ч е х Э. Проективно-дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами.I//Чехосл.матем.ж.1952.V.2.№1. P.91-107.

5.Л а п т е в Г.Ф. Распределение касательных элементов// Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СЕТЕЙ НА ПАРЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

А.Ф.М а с а г у т о в а
(МГПИ им.В.И.Ленина)

В работе рассматриваются некоторые вопросы геометрии дифференцируемого отображения области Ω на область $\bar{\Omega}$ в евклидовом пространстве E_n с использованием тензора h^a_{bc}, свойства которого в значительной мере отражают геометрические свойства пары подмногообразий.

1.В n-мерном евклидовом пространстве E_n рассмотрим дифференцируемое отображение f некоторой области Ω на область $\bar{\Omega}$. Пусть произвольной точке $x \in \Omega$ соответствует при отображении f точка $y \in \bar{\Omega}$. Отнесем область Ω к подвижному реперу $R^x = \{x, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ так, что $\vec{e}_n \parallel \vec{xy}$, а область $\bar{\Omega}$ – к подвижному реперу $R^y = \{y, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$, где

$$R^y = f_{*x}(R^x), \qquad (1)$$

f_{*x} -индуцированное отображение.

Деривационные формулы реперов R^x и R^y имеют вид:

$$\begin{cases} d\vec{x} = \omega^a \vec{e}_a, & d\vec{e}_a = \omega^b_a \vec{e}_b, \\ d\vec{y} = \bar{\omega}^b \vec{a}_b, & d\vec{a}_a = \bar{\omega}^b_a \vec{a}_b \end{cases} \qquad (2)$$

(здесь и далее $a, b, c, \ldots = \overline{1,n}$; $i, j, k, \ldots = \overline{1,n-1}$).

Все дифференциальные формы ω удовлетворяют известным уравнениям структуры евклидова пространства E_n.

Отображение f определяют следующие уравнения:

$$\bar{\omega}^a = \omega^a. \tag{3}$$

Продолжая уравнения (3), получим

$$\bar{\omega}^c_b - \omega^c_b = h^c_{bd}\,\omega^d, \tag{4}$$

где h^c_{bd} -тензор, симметричный по нижним индексам.

Рассмотрим гиперплоскость $\pi(x) \ni x$, перпендикулярную прямой xy, заданную уравнением $\alpha_a x^a = 0$, где $\alpha_i = 0$, $\alpha_n = 1$, т.е. $x^n = 0$. Здесь α_a -ковектор, определяющий гиперплоскость $\pi(x)$. В области Ω мы получим распределение π гиперплоскостей $\pi(x)$. Свернем тензор h^a_{bc} с ковектором α_a: $\alpha_a h^a_{bc} = h_{bc}$. В каждой точке $x \in \Omega$ имеем конус, определяемый уравнением $h_{bc}x^b x^c = 0$, пересечение которого с гиперплоскостью $\pi(x)$ есть конус K:

$$h_{ij}\,x^i x^j = 0. \tag{5}$$

Направим векторы $\vec{e}_i$ по главным направлениям конуса K. Тогда репер R^x станет ортогональным и уравнение конуса K примет вид: $\Sigma\, h_{ii}\,(x^i)^2 = 0$, при этом $h_{ij} = 0$ $(i \neq j)$.

2. Линию ℓ в области Ω назовем характеристической линией отображения f, если в каждой точке $x \in \ell$ направление ее касательной является инвариантным в отображении f, определяемом тензором h^a_{bc} ($H: T_x \times T_x \to T_x$, где T_x -касательное пространство в точке x), и если $\vec{\xi} = \xi^a \vec{e}_a$, $\vec{\eta} = \eta^b \vec{e}_b$, то $H(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = h^a_{bc}\,\xi^b \eta^c \vec{e}_a$. Следующие уравнения являются аналитическими условиями характеристичности ℓ: $h^a_{bc}\,\ell^b \ell^c = \lambda \ell^a$, где ℓ^a -координаты касательного вектора $\vec{\ell}$ к линии ℓ. Отсюда следует

Т е о р е м а I. Главные направления конуса K и направление, определяемое вектором $\vec{e}_n$, будут характеристическими направлениями отображения f тогда и только тогда, когда выполняются соотношения:

$$h_{ij} = 0 \ (i \neq j), \ h^i_{aa} = 0 \ (i \neq a), \ h^a_{aa} \neq 0. \tag{6}$$

3. Дифференциальные формы ω^n_i являются главными формами (зависят только от ω^a). Следовательно,

$$\omega^n_i = \Lambda_{ia}\,\omega^a = \Lambda_{ij}\,\omega^j + \Lambda_{in}\,\omega^n. \tag{7}$$

Соответственно $\bar{\omega}^n_i = \bar{\Lambda}_{ia}\,\omega^a$. Продолжим уравнения (7):

$$d\Lambda_{ia} - \Lambda_{ja}\,\omega^j_i - \Lambda_{ib}\,\omega^b_a = \Lambda_{iab}\,\omega^b. \tag{8}$$

Фиксируем точку x ($\omega^b = 0$). Из системы (8) получим: $\delta\Lambda_{ia} - \Lambda_{ja}\pi^j_i - \Lambda_{ib}\pi^b_a = 0$, где δ -символ дифференцирования по вторичным параметрам и $\pi^b_a = \omega^b_a|_{\omega^c=0}$. Можно показать, что полученная система вполне интегрируема. По теореме Лаптева система величин $\{\Lambda_{ij}, \Lambda_{in}\}$ образует геометрический объект. Аналогично можно доказать, что системы величин $\{\Lambda_{ij}\}$, $\{\Lambda_{in}\}$ образуют геометрические объекты (тензоры). Распределение π вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда $\Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}$.

4. Пусть ℓ -произвольная гладкая линия в области Ω. Ее дифференциальные уравнения: $\omega^a = \ell^a\theta$, где θ -параметрическая форма и $D\theta = \theta \wedge \theta_1$. Если $\ell \subset \pi(x)$, то $\omega^n = 0$, $\omega^i = \ell^i\theta$.

Асимптотической линией распределения π называется такая линия γ, принадлежащая этому распределению, что в каждой точке $x \in \gamma$ соприкасающаяся плоскость $(x, d\vec{x}, d^2\vec{x}) \subset \pi(x)$. Находим, что $d^2\vec{x} \in \pi(x)$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_{ij}\,\ell^i \ell^j = 0$.

Т е о р е м а 2. Линия ω^i -асимптотическая на распределении π тогда и только тогда, когда $h_{ii} = \bar{\Lambda}_{ii}$. В самом деле, из выше сделанных выводов и формул (4), (7) следует: $\bar{\omega}^n_i - \omega^n_i = h_{ii}\omega^i$. С другой стороны $\bar{\omega}^n_i - \omega^n_i = \bar{\Lambda}_{ii}\,\omega^i$. Отсюда вытекает утверждение теоремы.

5. Пусть $\|\varphi^a_b\|$ -матрица перехода от базиса $\{\vec{e}_a\}$ к $\{\vec{a}_b\}$, т.е.

$$\vec{a}_b = \varphi^a_b\,\vec{e}_a \quad (\det\|\varphi^a_b\| \neq 0). \tag{9}$$

Отсюда $d\vec{a}_b = d\varphi^a_b\vec{e}_a + \varphi^a_b\,d\vec{e}_a$. Используя формулы (2), (9), находим:

$$d\varphi^a_b + \varphi^d_b\,\omega^a_d - \varphi^a_d\,\bar{\omega}^d_b = 0 \tag{10}$$

или $d\varphi^a_b + \varphi^d_b\,\omega^a_d - \varphi^a_d\,\omega^d_b = \varphi^a_{bc}\,\omega^c_n$, где $\varphi^a_{bc} = \varphi^a_d\,h^d_{bc}$.

Система из n линейно независимых полей направлений $\vec{e}_a$ определяет в области Ω ортогональную сеть Σ_n, которой соответствует сеть $\bar{\Sigma}_n$. Рассмотрим, когда сеть Σ_n будет основанием отображения f, т.е. в отображении f перейдет в ортогональную сеть. Тогда

$$\vec{a}_b \cdot \vec{a}_c = k_{bc}\cdot\delta_{bc}, \tag{11}$$

где $k_{bb} = \vec{a}^2_b$, $k_{bc} = 0$ $(b \neq c)$. Продифференцировав уравнения (11), получим $\bar{\omega}^c_b\,\vec{a}^2_c + \bar{\omega}^b_c\,\vec{a}^2_b = 0$ ($b \neq c$, нет суммирования), $\bar{\omega}^b_b = d\ln|\vec{a}_b|$.

Применив формулу (9), придем к следующему утверждению:

Т е о р е м а 3. Для того чтобы сеть Σ_n была основанием отображения f, необходимо и достаточно, чтобы для всех $b \neq c$ выполнялось равенство $\sum\limits_{a=1}^{n} \varphi^a_b \varphi^a_c = 0$.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Материалы по геометрии /МГПИ им.В.И. Ленина.М.,1978.Вып.1.

2. Б а з ы л е в В.Т. Сети на многообразиях//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1974.Т.6.С.189-205.

УДК 514.75

О ВТОРОЙ ПОЛЯРЕ Р-ПОВЕРХНОСТИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Н.И.М о с к а л е н к о

(МГПИ им.В.И.Ленина)

В статье рассматривается вторая поляра точки $x \in V_p \subset E_n$ относительно присоединенной поверхности и ее некоторые связи с геометрией самой поверхности V_p. Обобщаются результаты исследований по геометрии поверхностей коразмерности два [3] и коразмерности три [4].

Рассмотрим гладкую р-мерную поверхность $V_p\,(p \geqslant 2)$ в евклидовом пространстве E_n. Отнесем поверхность к подвижному реперу

$$R = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha)\ (i,j,k,t,\ell = \overline{1,p};\ \alpha,\beta = \overline{p+1,n}),$$

где орты e_i принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ к поверхности V_p в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ поверхности V_p. Деривационные формулы такого репера имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i\,;\quad d\vec{e}_i = \omega^j_i \vec{e}_j + \omega^\alpha_i \vec{e}_\alpha\,;\quad d\vec{e}_\alpha = \omega^i_\alpha \vec{e}_i + \omega^\beta_\alpha \vec{e}_\beta\,.$$

Продолжая систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений нашей поверхности, получим равенства $\omega^\alpha_i = b^\alpha_{ij}\omega^j$, $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$, где b^α_{ij} -система $n-p$ вторых основных тензоров поверхности $V_p \subset E_n$. При замене базиса $(\vec{e}_\alpha)$ в плоскости $N_{n-p}(x)$ величины b^α_{ij} (i,j фиксированы) преобразуются как координаты вектора.

Имеем систему $\frac{1}{2}\,p(p+1)$ векторов $\vec{b}_{ij} = b^\alpha_{ij}\vec{e}_\alpha$. В дальнейшем будем предполагать, что число независимых векторов этой системы равно $n-p$, т.е. размерность главной нормали р-поверхности максимальна.

Вектор $\vec{M} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} b^\alpha_{ij}\vec{e}_\alpha$ -есть вектор средней кривизны поверхности V_p в точке x, здесь γ^{ij} -контравариантные компоненты метрического тензора $\gamma_{ij} = \vec{e}_i\vec{e}_j$ поверхности $V_p \subset E_n$. Будем рассматривать неминимальную поверхность $(\vec{M} \neq \vec{0})\,V_p \subset E_n$. В этом случае к точке $x \in V_p$ инвариантным образом присоединена прямая $(x, \vec{M})$- средняя нормаль поверхности.

Уравнение

$$\det \| \sum_\alpha b^\alpha_{ij} y^\alpha - \gamma_{ij} \| = 0$$

определяет в плоскости $N_{n-p}(x)$ алгебраическую гиперповерхность порядка p (присоединенную поверхность), не проходящую через точку $x \in V_p$. Так как размерность главной нормали максимальна, то эта поверхность есть фокусная поверхность к поверхности V_p в данной точке x [1]. Если записать это уравнение в однородных координатах

$$F(y^{p+1}, y^{p+2}, \dots, y^n, y^0) = 0,$$

то в плоскости $N_{n-p}(x)$ уравнение второй поляры точки $x \in V_p$ относительно фокусной поверхности (в дальнейшем для краткости будем опускать слова "относительно фокусной поверхности") имеет вид $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^\sigma \partial y^\varrho}\right)_x y^\sigma y^\varrho = 0 \quad (\sigma, \varrho = p+1, p+2, \dots, n, 0),$

где частные производные вычисляются в точке x (0,0,0,...,0,1).

Пусть векторы $\vec{e}_i$ репера ортонормированы, тогда $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$. Запишем уравнение фокусной поверхности в виде

$$\det \| \sum_\alpha b^\alpha_{ij} y^\alpha - y^0 \delta_{ij} \| = 0\,.$$

Раскрывая этот определитель и располагая члены по степеням y^0, получим

$$(-1)^p (y^0)^p + (-1)^{p-1} \Delta_1 (y^0)^{p-1} + (-1)^{p-2} \Delta_2 (y^0)^{p-2} + \dots + (-1)\Delta_{p-1} y^0 + \Delta_p = 0,$$

где $\Delta_p = \det \| \sum_\alpha b^\alpha_{ij} y^\alpha \|$, а коэффициент при $(y^0)^{p-k}$ равен сумме всех главных миноров k-го порядка последнего определителя. Вычисляя вторые частные производные от левой части последнего уравнения, получим следующее уравнение второй поляры (в ортонормированном репере):

$$a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + 2 a_{\alpha 0} y^\alpha + a_{00} = 0,$$

где

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (b_{ii}^\alpha b_{jj}^\beta + b_{ii}^\beta b_{jj}^\alpha - 2 b_{ij}^\alpha b_{ij}^\beta),$$

$$a_{\alpha 0} = -(p-1) \sum_i b_{ii}^\alpha, \quad a_{00} = p(p-1).$$

Для инварианта $J = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha}$ второй поляры точки $x \in V_p$ имеем

$$J = \sum_\alpha \sum_{i,j} (b_{ii}^\alpha b_{jj}^\alpha - (b_{ij}^\alpha)^2) = \sum_{i,j} (\vec{b}_{ii} \vec{b}_{jj} - (\vec{b}_{ij})^2). \qquad (I)$$

Используя выражение [2] для координат тензора Римана-Кристоффеля

$$R_{ijk}^{\ell} = \delta^{\ell t} (\vec{b}_{ij} \vec{b}_{tk} - \vec{b}_{ik} \vec{b}_{tj}),$$

найдем скалярную кривизну поверхности $V_p \subset E_n$ в точке x. $R = \delta^{ij} R_{ij}$, где $R_{ij} = R_{ijk}^k$ -тензор Риччи. Имеем

$$R = \delta^{ij} \delta^{kt} (\vec{b}_{ij} \vec{b}_{tk} - \vec{b}_{ik} \vec{b}_{tj}) = \sum_{i,j} (\vec{b}_{ii} \vec{b}_{jj} - (\vec{b}_{ij})^2). \qquad (2)$$

Из (I) и (2) следует

Т е о р е м а I. Инвариант $J = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha}$ второй поляры точки $x \in V_p \subset E_n$ равен скалярной кривизне R поверхности в этой точке.

Рассмотрим сечение второй поляры гиперплоскостью $\vec{M}\,\vec{xy} = 0$, где $\vec{xy} = \vec{y} - \vec{x}$, которая инвариантным образом присоединена к точке $x \in V_p$. Вектор $\vec{e}_{p+1}$ направим по средней нормали. Тогда $\sum_i b_{ii}^{\tilde\alpha} = 0$ $(\tilde\alpha = p+2, p+3, \dots, n)$. С учетом этого $a_{\tilde\alpha\tilde\alpha} = -\sum_{ij} (b_{ij}^{\tilde\alpha})^2$. Случай, когда $a_{\tilde\alpha\tilde\alpha} = 0$, исключим из рассмотрения (при этом все $b_{ij}^{\tilde\alpha}$ равны нулю, коразмерность поверхности понижается). Направляя векторы $\vec{e}_{\tilde\alpha}$ по главным направлениям сечения и учитывая, что $a_{\tilde\alpha\tilde\alpha} < 0$, в сечении получим эллипсоид с центром в точке x.

Обратно, если сечение второй поляры есть эллипсоид с центром в точке $x \in V_p$, тогда координаты точки x удовлетворяют уравнениям

$$a_{\tilde\alpha\tilde\alpha} y^{\tilde\alpha} + a_{\tilde\alpha 0} = 0 \qquad \text{(по } \tilde\alpha \text{ нет суммирования).}$$

Отсюда, так как $a_{\tilde\alpha\tilde\alpha} \neq 0$, имеем $a_{p+2\,0} = 0$, $a_{p+3\,0} = 0, \dots, a_{n0} = 0$. Тогда $\vec{M} = \frac{1}{p} \sum_i b_{ii}^{p+1} \vec{e}_{p+1}$. Таким образом, верна

Т е о р е м а 2. Из $n-p$ взаимно ортогональных в точке x нормалей неминимальной поверхности $V_p \subset E_n$ одна будет средней нормалью этой поверхности тогда и только тогда, когда гиперплоскость, проходящая через остальные нормали, пересекает вторую поляру точки x по эллипсоиду с центром в этой точке.

С л е д с т в и е. Вторая поляра точки x поверхности $V_p \subset E_n$ не может быть мнимой квадрикой.

Для одномерной нормали $(x, \vec{n}) \subset N_{n-p}(x)$, где $\vec{n}$ -орт этой нормали, и всякого направления (ω^i) на поверхности V_p определен вектор $\vec{\tau} = \frac{d_T \vec{n}}{ds}$, где $ds^2 = \gamma_{ij} \omega^i \omega^j$, $d_T \vec{n}$ -ортогональная проекция вектора $d\vec{n}$ на касательную плоскость, который называется вектором Родрига для данного направления и данного орта $\vec{n}$ [2]. Векторы Родрига относительно ортов $\vec{e}_\alpha$ для направлений линий ω^i сети линий кривизны относительно средней нормали $(\vec{e}_{p+1} \parallel \vec{M})$ находятся следующим образом:

$$\vec{\tau}_i^\alpha = -\sum_j b_{ij}^\alpha \vec{e}_j.$$

Коэффициенты $a_{\alpha\beta} (\alpha \neq \beta)$ второй поляры при этом выражаются через векторы Родрига так:

$$a_{\alpha\beta} = -\sum_i \vec{\tau}_i^\alpha \vec{\tau}_i^\beta \quad (\alpha \neq \beta).$$

Если средняя нормаль имеет главное направление относительно второй поляры, то, направляя векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\vec{e}_{p+1} \parallel \vec{M})$ по главным направлениям второй поляры, имеем $a_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$, т.е.

$$\sum_i \vec{\tau}_i^\alpha \vec{\tau}_i^\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

Если же $a_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$, то известно, что уравнение второй поляры приведено к главным направлениям. Учитывая, что вектор $\vec{e}_{p+1} \parallel \vec{M}$, имеем теорему

Т е о р е м а 3. Средняя нормаль поверхности $V_p \subset E_n$ в точке $x \in V_p$ имеет главное направление относительно второй поляры этой точки тогда и только тогда, когда

$$\sum \vec{\tau}_i^\alpha \vec{\tau}_i^\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

Пусть средняя нормаль имеет главное направление относительно второй поляры. Уравнение второй поляры при этом можно привести к виду ($\vec{e}_\alpha$ направлены по главным направлениям, $\vec{e}_{p+1} \parallel \vec{M}$) $\sum_\alpha a_{\alpha\alpha} (y^\alpha)^2 + 2 a_{p+1\,0} y^{p+1} + a_{00} = 0.$

Если $\det \|a_{\alpha\alpha}\| \neq 0$, то вторая поляра имеет единственный центр. Так как $a_{\tau\tau} \neq 0$ и $a_{p+1 0} \neq 0$, то всегда

$$\operatorname{rang} \| a_{\alpha\alpha},\ a_{p+1 0} \| = n-p.$$

Если $\det \|a_{\alpha\alpha}\| = 0$, то тогда

$$\operatorname{rang} \| a_{\alpha\alpha} \| \neq \operatorname{rang} \| a_{\alpha\alpha},\ a_{p+1 0} \|,$$

т. е. вторая поляра не имеет центра. Ясно, что случая, когда

$$\operatorname{rang} \| a_{\alpha\alpha} \| = \operatorname{rang} \| a_{\alpha\alpha},\ a_{p+1 0} \| = r,$$

где $r < n-p$, быть не может, т.е. вторая поляра не может иметь $(p-r)$ -плоскость центров.

Если вторая поляра имеет центр, то она будет вырожденной, если

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha 0} \\ a_{\alpha 0} & a_{00} \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель δ, получим

$$\delta = a_{nn}\, a_{n-1\, n-1} \dots a_{p+2\, p+2}\, (a_{p+1\, p+1}\, a_{00} - a^2_{p+1 0}). \tag{3}$$

Так как $a_{\tau\tau} \neq 0$, то $\delta = 0$, если

$$a_{p+1\, p+1}\, a_{00} - a^2_{p+1 0} = 0. \tag{4}$$

Если вторая поляра не имеет центра, то из (3), учитывая, что $a_{p+1 0} \neq 0$, следует, что вторая поляра не может быть нецентральной вырожденной. Из вышеизложенного вытекает следующий вывод.

Если средняя нормаль поверхности $V_p \subset E_n$ имеет главное направление относительно второй поляры точки $x \in V_p$, то вторая поляра этой точки может быть немнимой центральной как вырожденной (выполнено условие (4)), так и невырожденной, а также нецентральной невырожденной квадрикой.

Если вторая поляра - центральная, то справедлива

Т е о р е м а 4. Средняя нормаль $(x, \vec{M})$ поверхности V_p в точке $x \in V_p$ проходит через центр второй поляры этой точки (когда вторая поляра центральная) тогда и только тогда, когда ее направление является главным для второй поляры.

Библиографический список

I.Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом

пространстве //Лит.мат.сб./АН Лит.ССР.Вильнюс,1966.Т.6.№4. С.475-491.

2.Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства//Сиб.матем. журн. 1966.Т.7.§3.С.499-511.

3.Е с и н В.А. О поверхностях коразмерности два//Геометрия погруженных многообразий:Сб.науч.тр./МГПИ им В.И.Ленина. М.,1981.С.40-44.

4.Е ф р о с П.П. О поверхностях коразмерности три//Геометрия погруженных многообразий:Сб.науч.тр./МГПИ им.В.И.Ленина. М.,1986.С.26-30.

УДК 514.75

О НОРМАЛЬНО ОСНАЩАЮЩИХ ПОЛЯХ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЧТИ КВАТЕРНИОННОЙ И ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ

Е.В.Опольская, Р.Ф.Домбровский
(Черновицкий ун-т)

В настоящей статье развиваются некоторые тезисы докладов, сделанных авторами на Всесоюзной геометрической конференции в Кишиневе [7],[8].

I.Пусть $M_{2n}(\varphi,\psi)$ -вещественное многообразие почти кватернионной структуры (φ,ψ), определенной полями аффиноров φ и ψ. Если $T_x(M_{2n})$ слой касательного расслоения над M_{2n}, соответствующий точке $x \in M_{2n}$, и $T^*_x(M_{2n})$-сопряженное ему пространство, то φ, ψ и $\varphi\circ\psi$ принадлежат пространству $T_x(M_{2n}) \otimes T^*_x(M_{2n})$ и удовлетворяют соотношениям $\varphi^2 = -\underline{I}$, $\psi^2 = -\underline{I}$, $\varphi\circ\psi = -\psi\circ\varphi$.

Рассмотрим подмногообразие $\mathfrak{M}_n$ многообразия $M_{2n}(\varphi,\psi)$ такое, что слои касательного расслоения $T\mathfrak{M}_n = \bigcup_{x\in\mathfrak{M}_n} \Lambda_x$ имеют строение $\Lambda_x = \underset{x}{\Lambda}\varphi \otimes \underset{x}{\Lambda}\psi$, $\underset{x}{\Lambda}\varphi = \Lambda_x \cap \varphi(\Lambda_x)$, $\dim \underset{x}{\Lambda}\varphi = r$, $\underset{x}{\Lambda}\psi = \Lambda_x \cap \psi(\Lambda_x)$, $\dim \underset{x}{\Lambda}\psi = n-r$ для произвольного $x \in \mathfrak{M}_n$. Подмногообразия $\mathfrak{M}_n$ существуют в многообразиях почти кватернионной структуры. Например, они существуют для тех многообразий $M_{2n}(\varphi,\psi)$, каждая точка x_0 которых допускает такую окрестность $\mathcal{U}_{x_0}$, что для произвольного $x \in \mathcal{U}_{x_0}$ существует подпространство $V_x \subset T_x(M_{2n})$, $\dim V_x = n$, что $T_x(M_{2n}) = \varphi(V_x) \oplus \psi(V_x)$. $\underset{x}{\Lambda}\varphi$ и $\underset{x}{\Lambda}\psi$ - голоморфные касательные пространства подмногообразия $\mathfrak{M}_n$ [3]. Они на $\mathfrak{M}_n$ имеют постоянную размерность, следовательно, $\mathfrak{M}_n$ -родовое подмногообразие многообразия почти кватернионной структуры. Естественно определить понятия инвариантного, антиинвариантного, родового и др. подмногообразий многообразия почти кватернионной структуры $M_{2n}(\varphi,\psi)$ как соответственно инвариантного, антиинвариантного, родового и др. подмногообразий относительно каждой фундаментально оснащающей многообразие $M_{2n}(\varphi,\psi)$ почти комплексной структуры [1],[3].

Если $0<\tau<n$, то $\mathfrak{M}_n$ - f- подмногообразие многообразия почти кватернионной структуры (согласно определению Яно и Исихары [3]). Очевидно, что подмногообразие $\mathfrak{M}_n$ не может быть инвариантным (голоморфным) подмногообразием многообразия почти кватернионной структуры.

Т е о р е м а I. На подмногообразии $\mathfrak{M}_n$ почти кватернионная структура объемлющего многообразия $M_{2n}(\varphi,\psi)$ индуцирует поле нормалей ν.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{M}_n$ -собственно родовое подмногообразие многообразия кватернионной структуры $M_{2n}(\varphi,\psi)$. Тогда $0<\tau<n$ и подпространства $\underset{x}{\Lambda}_\varphi$ и $\underset{x}{\Lambda}_\psi$ векторного пространства Λ_x не нулевые. Образы их $\varphi(\underset{x}{\Lambda}_\psi)$ и $\psi(\underset{x}{\Lambda}_\varphi)$ не имеют общих направлений (т.к. $\Lambda_x=\underset{x}{\Lambda}_\varphi\oplus\underset{x}{\Lambda}_\psi$) и являются подпространствами пространства $T_x R(M_{2n})$. Поле нормалей ν на $\mathfrak{M}_n$ определяется распределением элементов $\nu_x=\varphi(\underset{x}{\Lambda}_\psi)\cup\psi(\underset{x}{\Lambda}_\varphi)$. Если $\tau=0$, то $\mathfrak{M}_n$- ψ-инвариантное подмногообразие и тогда нормально оснащающим полем, индуцированным почти кватернионной структурой объемлющего многообразия, будет распределение $\varphi(\Lambda_x)$. При $\tau=n$ $\mathfrak{M}_n$ - φ-инвариантное подмногообразие и $\nu_x=\psi(\Lambda_x)$.

Т е о р е м а 2. Каждое собственно родовое подмногообразие $\mathfrak{M}_n$ многообразия почти кватернионной структуры является многообразием $(f\xi\eta g)$ -структуры [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из основной теоремы [1]. В силу "независимости" оснащающих многообразие почти кватернионной структуры почти комплексных структур φ и ψ на собственно родовом подмногообразии $\mathfrak{M}_n$ нормально оснащающее поле ν индуцирует две $(f\xi\eta g)$ -структуры.

2. В многообразии $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ почти контактной структуры с линейной симметрической связностью, определенной объектом Γ^J_{KL} $(J,K,L,\ldots=1,\ldots,n+1)$, рассмотрим поверхность M_m типа 3 [6], заданную системой уравнений

$$\omega^J=\Lambda^J_i\theta^i \quad (i,j,\ldots=\overline{1,m}),$$

где θ^i -параметрические формы, ω^J -структурные формы дифференцируемого нечетномерного многообразия M_{n+1}, а функции Λ^J_i удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$d\Lambda^J_i-\Lambda^J_j\theta^j_i+\Lambda^K_i\omega^J_K=\Lambda^J_{ij}\theta^j.$$

Элемент η_x распределения η зададим относительно локального репера $\{\vec{e}_J\}$ параметрическими уравнениями

$$x^J=H^J_A u^A,$$

где u^A -независимые переменные (параметры), H^J_A -координаты векторов $\vec{H}_A$, определяющих элемент η_x, для которых выполнены условия инвариантности $\delta\vec{H}_A=\vartheta^B_A\vec{H}_B$ элемента.

Так как многообразие $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ оснащено различными полями геометрических объектов, на поверхности M_m естественным образом возникают поля аналитических объектов, которые являются ограничением на поверхность полей, оснащающих многообразие M_{n+1} [8]. Поля структурных объектов φ,ξ,η порождают на M_m следующие поля:

$$d\varphi^J_K-\varphi^J_L\omega^L_K+\varphi^L_K\omega^J_L=\hat{\varphi}^J_{Ki}\theta^i,$$

$$d\xi^J+\xi^K\omega^J_K=\hat{\xi}^J_i\theta^i,$$

$$d\eta_J-\eta_K\omega^K_J=\hat{\eta}_{Ji}\theta^i,$$

где $\hat{\varphi}^J_{Ki}=\varphi^J_{KL}\Lambda^L_i$, $\hat{\xi}^J_i=\xi^J_L\Lambda^L_i$, $\hat{\eta}_{Ji}=\eta_{JK}\Lambda^K_i$.

Для распределения η поле векторов

$$\vec{L}_{n+1}=\vec{e}_{n+1}+L^A_{n+1}\vec{e}_A,$$

где компоненты

$$L^A_{n+1}=-\overset{*}{H}{}^{AB}_{n+1}H^{n+1}_{B\,n+1},$$

будет нормально оснащающим [5].

Если в $M_{n+1}(\varphi\xi\eta)$ задать поле гиперквадрик, имеющих касание второго порядка с кривыми, принадлежащими соответствующему элементу распределения η [4] и проходящими через центр элемента η_x, то они в пересечении с η_x определяют в нем гиперконус второго порядка:

$$(\eta_{JK}+\eta_{KJ})H^J_A H^K_B u^A u^B=0.$$

Относительно этого конуса определяется подпространство, сопряженное касательной плоскости $T_x(M_m)$. Поле таких подпространств является η-виртуальным нормально оснащающим полем распределения $T(M_m)$. Ограничение на поверхности любого поля, нормально оснащающего распределение η, и построенное нами η-виртуальное поле определяют инвариантное нормально оснащающее поле поверхности M_m в $\overset{\circ}{M}_{n+1}$ $(\varphi\xi\eta)$.

Библиографический список

I.Евтушик Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1979.Т.9.247с.

2.Л а п т е в Г.Ф.,О с т и а н у Н.М. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1975.Т.7.С.5-22.

3.Б а л а з ю к Т.Н.,О с т и а н у Н.М. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях,наделенных дифференциально-геометрическими структурами.IУ.Подмногообразия коразмерности I в многообразиях почти комплексной структуры//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1983.Т.15.С.127-164.

4.О с т и а н у Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.49-94.

5.А л ш и б а я Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1974.Т.5.С.169-194.

6.П о л я к о в Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях,наделенных дифференциально-геометрическими структурами.III. $N(\sigma)$-антиинвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1982.Т.13.С.77-117.

7.Д о м б р о в с к и й Р.Ф. Об одном классе подмногообразий многообразия почти кватернионной структуры// IX Всесоюзн. геом.конф:Тез.сообщ.Кишинев,1988.С.101-102.

8.О п о л ь с к а я Е.В. О нормально- оснащающем поле поверхности типа III в многообразии почти контактной структуры// IX Всесоюз.геом.конф.:Тез.сообщ.Кишинев,1988.С.231-232.

УДК 514.76

РАССЛОЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ f-СТРУКТУРЫ

Н.Д.П о л я к о в
(Чувашский пед.ин-т)

I.Рассмотрим n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^∞. Локальные координаты текущей точки x некоторой окрестности $U\subset M$ обозначим x^J $(J,j=1,\dots,n)$. Известно [1], что на M возникает бесконечная последовательность линейных дифференциальных форм $\omega^J,\omega^J_x,\dots$, симметричных по нижним индексам и имеющих расслоенную структуру по базовым формам ω^J:

$$d\omega^J=\omega^j\wedge\omega^J_j,\qquad d\omega^J_x=\omega^j_x\wedge\omega^J_j+\omega^j\wedge\omega^J_{xj},\ \dots,\tag{1}$$

формы $\bar\omega^J_j=\omega^J_j|_{\omega^x=0}$ образуют совокупность инвариантных форм группы Ли $\mathcal{D}^1_n$-группы, представленной как группа преобразований векторного репера $\vec e_J$ в касательной плоскости $T_x(M)$, т.е. $\delta\vec e_J=\bar\omega^j_J\vec e_j$.

Пусть на M задана f-структура ранга τ со структурным объектом f: $f^3+f=0$. Ранг τ постоянен на M и $0<\tau=2q<n$. Дифференциальные уравнения поля объекта $\{f^J_j\}$ имеют следующий вид:

$$df^J_j-f^J_x\omega^x_j+f^x_j\omega^J_x=f^J_{jx}\omega^x.\tag{2}$$

Известно, что f-структура ранга τ на M порождает π-структуру, определенную распределениями линейных элементов η и ξ, причем в каждой точке $x\in M$ справедливо: 1) $\dim\eta_x=\tau$; $\dim\xi_x=n-\tau=m$; 2) $\operatorname{Im}f_x=\eta_x$, $\operatorname{Ker}f_x=\xi_x$. Пусть элемент распределения η натянут на τ линейно независимых векторов $\vec H_i=H^J_i\vec e_J$ $(i,j,\dots=1,\dots,\tau)$, а элемент распределения ξ -на m линейно независимых векторов $\vec V_\alpha=\xi^J_\alpha\vec e_J$ $(\alpha,\beta,\dots=\tau+1,\dots,n)$. Охват компонент объектов $\{H^J_i\}$, $\{\xi^J_\alpha\}$ и их дифференциальные уравнения приведены в работе автора ([2], §I, п.3). Дифференциальные уравнения распределений η и ξ имеют соответственно вид:

$$dH^J_i-H^J_j\theta^j_i+H^j_i\omega^J_j=H^J_{ix}\omega^x,\tag{3}$$

$$d\xi^J_\alpha-\xi^J_\beta\vartheta^\beta_\alpha+\xi^j_\alpha\omega^J_j=\xi^J_{\alpha x}\omega^x.\tag{4}$$

Формы $\bar\theta^i_j=\theta^i_j|_{\omega^x=0}$ являются инвариантными формами полной линейной группы $GL(\tau,R)$ и $\delta\vec H_i=\bar\theta^j_i\vec H_j$, а формы $\bar\vartheta^\beta_\alpha=\vartheta^\beta_\alpha|_{\omega^x=0}$-инвариантные формы группы $GL(m,R)$ и $\delta\vec V_\alpha=\bar\vartheta^\beta_\alpha\vec V_\beta$.

Векторы $\{\vec{H}_i, \vec{V}_\alpha\}$ определяют репер в $T_x(M)$, и, следовательно, можно ввести обращенные объекты h^i_J, η^α_J:

$$H^J_i h^j_J = \delta^j_i, \quad \varepsilon^J_\alpha \eta^\beta_J = \delta^\beta_\alpha, \quad H^J_i \eta^\alpha_J = 0,$$
$$\varepsilon^J_\alpha h^i_J = 0, \quad H^J_i h^i_J + \varepsilon^J_\alpha \eta^\alpha_J = \delta^J_J. \tag{5}$$

Дифференциальные уравнения полей введенных объектов имеют вид:

$$dh^i_J - h^i_J \omega^J_J + h^j_J \theta^i_j = h^i_{JJ} \omega^J, \tag{6}$$
$$d\eta^\alpha_J - \eta^\alpha_J \omega^J_J + h^\beta_J \vartheta^\alpha_\beta = \eta^\alpha_{JJ} \omega^J. \tag{7}$$

Поля геометрических объектов f, ε, η определяют на M $(f\varepsilon\eta\rho)$-структуру коранга 0 [2]:

$$\begin{cases} f^J_J f^J_K = -\delta^J_K + \varepsilon^J_\alpha \eta^\alpha_K, & f^J_J \varepsilon^J_\alpha = 0, \\ f^J_J \eta^\alpha_J = 0, & \varepsilon^J_\alpha \eta^\beta_J = \delta^\beta_\alpha. \end{cases} \tag{8}$$

2. Известно (см. [2]), что распределение линейных элементов ε на M интегрируемо, если выполнены условия:

$$\tau^J_{\alpha\beta} = \varepsilon^J_{\alpha J} \varepsilon^J_\beta - \varepsilon^J_{\beta J} \varepsilon^J_\alpha = 0, \tag{9}$$

где $\tau^J_{\alpha\beta}$ -объект неголономности распределения ε. Из (5), (9) следует

$$(h^i_{JJ} - h^i_{JJ}) \varepsilon^J_\alpha \varepsilon^J_\beta = 0. \tag{10}$$

В настоящей работе будем считать, что распределение ε интегрируемо. При этом многообразие M расслаивается на τ-параметрическое семейство m-мерных поверхностей $\bar{M}$ и в каждой точке $x \in \bar{M}$: $T_x(\bar{M}) = \varepsilon_x$. Поверхность $\bar{M}$ этого семейства будем называть листом голономного распределения ε. Обозначим координаты текущей точки y листа $\bar{M}$ через y^α. В этом случае формы $\vartheta^\alpha = a^\alpha_\beta dy^\beta$ $(\det \| a^\alpha_\beta \| \neq 0)$ подчинены уравнениям $d\vartheta^\alpha = \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\alpha_\beta$ и являются структурными формами поверхности $\bar{M}$. Дифференциальные уравнения поверхности $\bar{M}$ в M имеют вид:

$$\omega^J = \varepsilon^J_\alpha \vartheta^\alpha.$$

3. Введем в рассмотрение τ линейных линейно независимых форм:

$$\theta^i = h^i_J \omega^J. \tag{11}$$

Формы $\{\theta^i, \vartheta^\alpha\}$ являются базисными формами на многообразии M. При этом на M справедливо:

$$\omega^J = \varepsilon^J_\alpha \vartheta^\alpha + H^J_i \theta^i. \tag{12}$$

Система форм θ^i образует вполне интегрируемую систему в силу условий (10). Первые интегралы z^i вполне интегрируемой системы форм θ^i можно рассмотреть как абсолютные координаты некоторого геометрического объекта (точки). Этот геометрический объект является образующим объектом m-мерного дифференцируемого многообразия $\widetilde{M}$. Текущую точку многообразия $\widetilde{M}$ обозначим $z = \{z^i\}$. При этом $\theta^i = b^i_j dz^j$ $(\det \| b^i_j \| \neq 0)$.

Таким образом, если распределение m-мерных линейных элементов f-структуры ранга τ на M интегрируемо, то естественным образом возникает субмерсия $\pi: M \to \widetilde{M}$, определенная формулами $z^i = z^i(x^J)$. Уравнения (11) являются дифференциальными уравнениями этой субмерсии. Следовательно, дифференцируемое многообразие M можно интерпретировать как присоединенное расслоенное многообразие, базой которого является многообразие $\widetilde{M}$, слоями – m-мерные листы голономного распределения ε, а структурной группой – полная линейная группа $GL(m,R)$. В этом случае вертикальным распределением расслоенного пространства M является распределение ε, а горизонтальным распределением – распределение η. Из (11) следует, что при субмерсии $\pi: M \to \widetilde{M}$ каждый лист $\bar{M}$ распределения ε отображается в точку $z \in \widetilde{M}$.

4. В геометрии известно понятие проектируемости тензорных полей, заданных на расслоенном многообразии M (см. напр. [4], [3]). Функция $\varphi(x^J)$ на M называется проектируемой, если она может быть представлена в виде $\varphi = \widetilde{\varphi}\pi$, где $\widetilde{\varphi}$ -некоторая функция на базе $\widetilde{M}$. Проектируемая функция характеризуется тем, что она постоянна на слоях. Векторное поле $\vec{A} = A^J \vec{e}_J$ на M называется проектируемым, если существует векторное поле $\vec{a} = \pi_* \vec{A}$ на $\widetilde{M}$ (π_* - дифференциал отображения π). Во множестве реперов в $T_x(M)$ известен класс проектируемых реперов [3]. Будем считать, что репер $R(\vec{H}_i, \vec{V}_\alpha)$ является проектируемым репером. В этом случае инвариантные формы группы $GL(m,R)$ зависят от базисных координат, т.е. $\bar{\theta}^i_j = \bar{\theta}^i_j(z^k)$. Тензорное поле называется проектируемым, если его значения на произвольных проектируемых аргументах являются проектируемыми функциями [3]. В частности, аффинор f^J_J структурного объекта f-структуры на M проектируемый, если функции

$$\psi^i_j = h^i_J f^J_J H^J_j \tag{13}$$

являются проектируемыми, т.е. $\psi^i_{jL} \varepsilon^L_\alpha = 0$, где функции ψ^i_{jL} получены из дифференциальных уравнений

$$d\psi^i_j - \psi^i_k \theta^k_j + \psi^k_j \theta^i_k = \psi^i_{jL} \omega^L = \psi^i_{jL} \varepsilon^L_\alpha \vartheta^\alpha + \psi^i_{jL} H^L_k \theta^k. \tag{14}$$

Пусть $\tilde{f}=\{\psi^i_j\}$ является проекцией тензора f из M на $\tilde{M}$. При этом $\pi_* f=\tilde{f}\pi_*$. Из (I3) следует, что $\tilde{f}^2=-\tilde{I}$. Следовательно, справедлива

Т е о р е м а I. Если распределение m-мерных линейных элементов ξ f-структуры ранга r интегрируемо на дифференцируемом многообразии M, то M является присоединенным расслоенным многообразием, база которого снабжена почти комплексной структурой со структурным объектом $\tilde{f}$, являющимся проекцией тензора f.

Если на M задана риманова метрика G, согласованная с f-структурой

$$G_{ij} f^i_l f^j_x = G_{lx} \tag{I5}$$

и проектируемая на $\tilde{M}$, то база $\tilde{M}$ снабжена метрической почти комплексной структурой со структурными тензорами $\tilde{f}$, $\tilde{G}$, где $\tilde{G}$ - проекция тензора G. Субмерсия $\pi: M\to\tilde{M}$ является при этом римановой субмерсией [4]. Следовательно, справедлива

Т е о р е м а 2. Если распределение m-мерных линейных элементов ξ метрической f-структуры ранга r на M интегрируемо, то M является расслоенным римановым многообразием, база которого снабжена метрической почти комплексной структурой со структурными объектами $\tilde{f}, \tilde{G}$, являющимися проекциями тензоров f и G соответственно.

Почти контактная структура на M является частным классом f-структуры. Для почти контактного многообразия $r=n-1$ (n-нечетное), размерность элементов распределения η равна $n-1$, а размерность элементов распределения ξ равна 1. Так как распределение одномерных линейных элементов всегда интегрируемо, то из теорем I и 2 следует справедливость следующих теорем:

Т е о р е м а 3. Почти контактное многообразие $M(f\xi\eta)$ является присоединенным расслоенным многообразием, база которого снабжена почти комплексной структурой со структурным объектом $\tilde{f}$, являющимся проекцией тензора f.

Т е о р е м а 4 [4]. Метрическое почти контактное многообразие $M(f\xi\eta G)$ является расслоенным римановым многообразием, база которого снабжена метрической почти комплексной структурой со структурными объектами $\tilde{f}, G$, являющимися проекциями тензоров f и G.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии//Тр.геметр.семинара/ВИНИТИ. М., 1966.Т.1.С.139-190.

2. П о л я к о в Н.Д. Дифференциальная геометрия многообразий f-структуры//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., I983.Т.I5.С.95-I25.

3. Ш а п у к о в Б.Н. Связности на дифференцируемых расслоениях//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., 1983.Т.15.С.61-93.

4. Tashiro Yoshihiro, Kim Byung Hax. Almost complex and almost contact structures in fibred Rieamannian spaces. || Hiroshima Math. J. 1988. №18. P. 161-188.

УДК 514.75

СКОМПОНОВАННЫЕ ТРЕХСОСТАВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.П о п о в
(Калининградский ун-т)

Изучается специальный класс $\mathcal{H}$-распределений проективного пространства P_n [1]-скомпонованные (по терминологии А.П.Нордена [2]) трехсоставные распределения проективного пространства $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ $(r<m<n-1)$. Распределение $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ имеет следующую структуру: а) оснащающее M-распределение скомпоновано из двух распределений $\mathcal{H}_r$ и $\mathcal{H}_\ell$ ($\ell=m-r$) (соответственно Λ-распределение и L-распределение); б) H-распределение скомпоновано из трех распределений $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-m-1}$, где $\mathcal{H}_{n-m-1}$-распределение - есть распределение характеристик X_{n-m-1} (Φ-распределение) [1]. Кроме того, мы требуем, чтобы все основные структурные распределения данного распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ были взаимны [3], [1]. Дано задание распределения в репере $\mathcal{R}(H)$ нулевого порядка [4] и доказана теорема существования. Выяснена аналитическая характеристика выбранного репера $\mathcal{R}(H)$, рассмотрен вопрос о голономности распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ и найдены поля основных геометрических объектов распределения в окрестности I-го порядка. Найдены нормализации Нордена-Чакмазяна всех основных структурных распределений данного распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$. Построены квазинормали трех типов в различных дифференциальных окрестностях, которые затем применяются для построения нормалей распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$. Вводятся в рассмотрение фокальные образы распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$, с помощью которых выясняется геометрический смысл построенных ранее квазинормалей. Для основных структурных распределений $\mathcal{H}_r, \mathcal{H}_\ell, \mathcal{H}_{n-1}$ введены оснащения в смысле Э.Картана.

Во всей работе используется следующая схема индексов:

$\mathcal{J}, \bar{\mathcal{K}}, \bar{L}, \ldots = \overline{0,n}$; $\mathcal{J}, \mathcal{K}, L, \ldots = \overline{1,n}$; $p, q, \tau, s, t, f = \overline{1,\tau}$;

$\bar{p}, \bar{q}, \bar{\tau}, \bar{s}, \bar{t} = \overline{0,\tau}$; $i, j, k, \ell, h = \overline{\tau+1, m}$; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}$;

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} = \overline{0,m}; n$; $u, v, w = \overline{\tau+1, n-1}$; $\varepsilon, \varrho, \sigma, \tau, \pi = \overline{1, n-1}$; $a, b, c, d = \overline{1,m}$; $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w} = \overline{\tau+1, n}$; $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} = (\overline{1,\tau}; \overline{m+1, n-1})$; $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} = \overline{1,m}; n$; $\hat{p}, \hat{q}, \hat{s}, \hat{t} = \overline{1,\tau}; n$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}, \hat{\ell} = \overline{\tau+1, m}; n$

§1. Дифференциальные уравнения скомпонованного трехсоставного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ проективного пространства

1. Рассмотрим такие трехсоставные $\mathcal{H}$-распределения [4], для которых оснащающее M-распределение (распределение $\mathcal{H}_m$) скомпоновано из двух распределений $\mathcal{H}_\tau$ (распределение плоскостей $\Lambda \overset{def}{=} \Pi_\tau$) и $\mathcal{H}_\ell$ (распределение плоскостей $L \overset{def}{=} \Pi_\ell$) [4], т.е. в каждом центре X имеем соотношения: $[\Pi_\tau, \Pi_\ell] = \Pi_m$, $\Pi_\tau \cap \Pi_\ell = X$. Кроме того, оснащающее распределение $\mathcal{H}_{n-\ell}$ (распределение гиперплоскостей $\Pi_{n-1} = H$ или H-распределение) также является скомпонованным из трех распределений $\mathcal{H}_\tau, \mathcal{H}_\ell, \mathcal{H}_{n-m-1}$, где распределение $\mathcal{H}_{n-m-1}$ - есть распределение характеристик χ_{n-m-1} (Φ-распределение) гиперплоскостей Π_{n-1}. Таким образом, если центр X $\mathcal{H}$-распределения зафиксирован, то фиксируются три плоскости

$$\Lambda(X) \overset{def}{=} \Pi_\tau(X), \quad L(X) \overset{def}{=} \Pi_\ell(X), \quad \Phi(X) \overset{def}{=} \Pi_{n-m-1}(X),$$

где $[\Lambda, L] = M$, $[M, \Phi] = H$, $[\Lambda, L, \Phi] = H$, $\Lambda \cap L = X$, $\Phi \cap M = X$.

Рассматриваемое скомпонованное трехсоставное регулярное распределение [1] проективного пространства P_n обозначим символом $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$. Потребуем, чтобы при смещении центра X вдоль кривых, принадлежащих одному из распределений $\mathcal{H}_\tau, \mathcal{H}_\ell, \mathcal{H}_{n-m-1}$, соответствующая этому смещению характеристика гиперплоскости $H_{n-1}(X)$ в каждом центре X была натянута на линейные элементы двух других распределений. Выберем репер нулевого порядка $\mathcal{R}(H)$ [4] следующим образом. Вершину A_0 репера $\{A_{\mathcal{J}}\}$ совместим с центром X $\mathcal{H}$-распределения, вершины $\{A_p\}$ поместим в плоскости $\Lambda(A_0)$, вершины $\{A_i\}$ - в плоскость $\Pi_\ell(A_0) \overset{def}{=} L(A_0)$; вершины $\{A_\alpha\}$ - в плоскость $\chi(A_0) \overset{def}{=} \Phi(A_0)$. Относительно репера нулевого порядка $\mathcal{R}(H)$ дифференциальные уравнения распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ имеют вид:

$$\begin{cases} \omega^n_p = \Lambda^n_{p\hat{q}}\, \omega^{\hat{q}}_0, & \omega^\alpha_p = \Lambda^\alpha_{p\mathcal{K}}\, \omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \omega^i_p = \Lambda^i_{p\mathcal{K}}\, \omega^{\mathcal{K}}_0, \\ \omega^n_i = M^n_{i\hat{j}}\, \omega^{\hat{j}}_0, & \omega^\alpha_i = M^\alpha_{i\mathcal{K}}\, \omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \omega^p_i = M^p_{i\mathcal{K}}\, \omega^{\mathcal{K}}_0, \\ \omega^n_\alpha = H^n_{\alpha\hat{\beta}}\, \omega^{\hat{\beta}}_0, & \omega^p_\alpha = H^p_{\alpha\mathcal{K}}\, \omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \omega^i_\alpha = H^i_{\alpha\mathcal{K}}\, \omega^{\mathcal{K}}_0. \end{cases} \tag{I.I}$$

Продолжение уравнений (I.I) приводит к следующим дифференциальным уравнениям и соотношениям, которым подчинены компоненты фундаментального объекта первого порядка $\Gamma_1 = \{\Lambda^n_{p\hat{q}}, \Lambda^\alpha_{p\mathcal{K}}, \Lambda^i_{p\mathcal{K}}, M^n_{i\hat{j}}, M^\alpha_{i\mathcal{K}}, M^p_{i\mathcal{K}}, H^n_{\alpha\hat{\beta}}, H^a_{\alpha\mathcal{K}}\}$ распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$:

$$\nabla\Lambda^n_{pq} + \Lambda^n_{pq}\,\omega^0_0 = \Lambda^n_{pq\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \tag{I.2}$$

$$\nabla\Lambda^n_{pn} + \Lambda^n_{pn}\,\omega^0_0 - \Lambda^n_{pq}\,\omega^q_n - \omega^0_p = \Lambda^n_{pn\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \tag{I.3}$$

$$\nabla M^n_{ij} + M^n_{ij}\,\omega^0_0 = M^n_{ij\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \tag{I.4}$$

$$\nabla M^n_{in} + M^n_{in}\,\omega^0_0 - M^n_{ij}\,\omega^j_n - \omega^0_i = M^n_{in\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \tag{I.5}$$

$$\nabla H^n_{\alpha\beta} + H^n_{\alpha\beta}\,\omega^0_0 = H^n_{\alpha\beta\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \tag{I.6}$$

$$\nabla H^n_{\alpha n} + H^n_{\alpha n}\,\omega^0_0 - H^n_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_n - \omega^0_\alpha = H^n_{\alpha n\mathcal{K}}\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \tag{I.7}$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{p\mathcal{K}} + \Lambda^\alpha_{p\mathcal{K}}\,\omega^0_0 + \Lambda^n_{p\mathcal{K}}\,\omega^\alpha_n - \delta^\alpha_{\mathcal{K}}\,\omega^0_p = \Lambda^\alpha_{p\mathcal{K}L}\,\omega^L_0, \tag{I.8}$$

$$\nabla M^\alpha_{i\mathcal{K}} + M^\alpha_{i\mathcal{K}}\,\omega^0_0 + M^n_{i\mathcal{K}}\,\omega^\alpha_n - \delta^\alpha_{\mathcal{K}}\,\omega^0_i = M^\alpha_{i\mathcal{K}L}\,\omega^L_0, \tag{I.9}$$

$$\nabla H^p_{\alpha\mathcal{K}} + H^p_{\alpha\mathcal{K}}\,\omega^0_0 + H^n_{\alpha\mathcal{K}}\,\omega^p_n - \delta^p_{\mathcal{K}}\,\omega^0_\alpha = H^p_{\alpha\mathcal{K}L}\,\omega^L_0, \tag{I.10}$$

$$\nabla\Lambda^i_{p\mathcal{K}} + \Lambda^i_{p\mathcal{K}}\,\omega^0_0 + \Lambda^n_{p\mathcal{K}}\,\omega^i_n - \delta^i_{\mathcal{K}}\,\omega^0_p = \Lambda^i_{p\mathcal{K}L}\,\omega^L_0, \tag{I.11}$$

$$\nabla M^p_{i\mathcal{K}} + M^p_{i\mathcal{K}}\,\omega^0_0 + M^n_{i\mathcal{K}}\,\omega^p_n - \delta^p_{\mathcal{K}}\,\omega^0_i = M^p_{i\mathcal{K}L}\,\omega^L_0, \tag{I.12}$$

$$\nabla H^i_{\alpha\mathcal{K}} + H^i_{\alpha\mathcal{K}}\,\omega^0_0 + H^n_{\alpha\mathcal{K}}\,\omega^i_n - \delta^i_{\mathcal{K}}\,\omega^0_\alpha = H^i_{\alpha\mathcal{K}L}\,\omega^L_0, \tag{I.13}$$

где

$$M^n_{k[i}\,\Lambda^k_{|p|j]} + \Lambda^n_{pq}\,M^q_{[ij]} + \Lambda^n_{pn}\,M^n_{[ij]} = 0,$$

$$H^n_{\beta[\alpha}\,\Lambda^\beta_{|p|\gamma]} + \Lambda^n_{pq}\,H^q_{[\alpha\gamma]} + \Lambda^n_{pn}\,H^n_{[\alpha\gamma]} = 0,$$

$$H^n_{\alpha\beta} M^\beta_{[ij]} + M^n_{k[i} H^k_{|\alpha|j]} + H^n_{\alpha n} M^n_{[ij]} = 0,$$
$$H^n_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_{[pq]} + \Lambda^n_{t[p} H^t_{|\alpha|q]} + H^n_{\alpha n} \Lambda^n_{[pq]} = 0, \qquad (1.14)$$
$$\Lambda^n_{t[p} M^t_{|i|q]} + M^n_{ij} \Lambda^j_{[pq]} + M^n_{in} \Lambda^n_{[pq]} = 0,$$
$$\Lambda^n_{\gamma[\alpha} M^\gamma_{|i|\beta]} + M^n_{ij} H^j_{[\alpha\beta]} + M^n_{in} H^n_{[\alpha\beta]} = 0.$$

Коэффициенты в правых частях уравнений (1.2) - (1.13), вообще говоря, не симметричны по нижним индексам. Например,

$$\Lambda^n_{p[qs]} = \Lambda^n_{pn}\Lambda^n_{[qs]}, \quad \Lambda^n_{p[ij]} = \Lambda^n_{pn}\Lambda^n_{[ij]} + \Lambda^n_{pq} M^q_{[ij]}, \quad \Lambda^n_{p[iq]} = \Lambda^n_{pt} M^t_{[iq]}.$$

Учитывая связи (1.14) на компоненты фундаментального объекта первого порядка Γ_1 распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$, приходим к выводу:

Т е о р е м а 1. Трехсоставные распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ существуют с произволом $2(n-m-1)m + 2r(m-r) + (n-1) - [(n-\ell-1)C^2_\ell + (n-r-1)C^2_r + m\,C^2_{n-m-1}]$ функций n аргументов.

2. Выясним геометрическую характеристику введенного репера нулевого порядка. Рассмотрим тангенциальный репер $\{\tau^{\bar J}\}$, взаимный точечному $\{A_{\bar K}\}$: $(A_{\bar K}, \tau^{\bar J}) = \delta^{\bar J}_{\bar K}$, $d\tau^{\bar J} = -\omega^{\bar J}_{\bar K}\tau^{\bar K}$ $(\tau^n = \Pi_{n-1})$.
Так как по условию (рассматривается специальный класс $\mathcal{H}$-распределений) при смещении центра A_0 вдоль кривых

$$\mathcal{L}:\ \omega^{\hat K}_0 = 0,\ \omega^p_0 = \mu^p\theta,\ D\theta = \theta\wedge\theta^0_0,\ \nabla\mu^p - \mu^p(\theta^0_0 + \omega^0_0) = \bar\mu^p\theta, \qquad (1.15)$$

принадлежащих базисному распределению $\mathcal{H}_r$, точки $\{A_\alpha\}$ и $\{A_i\}$ принадлежат $(n-r-1)$ -мерной характеристике $\chi_{n-r-1}(A_0) = [L(A_0), \Phi(A_0)]$, то имеем

$$\begin{cases} (A_i, d\tau^n) = 0 \pmod{\mathcal{L}} \Leftrightarrow M^n_{ip} = 0, \\ (A_\alpha, d\tau^n) = 0 \pmod{\mathcal{L}} \Leftrightarrow H^n_{\alpha p} = 0. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Аналогично получаем

$$\begin{cases} (A_\alpha, d\tau^n) = 0 \pmod{\hat\ell} \Leftrightarrow H^n_{\alpha i} = 0, \\ (A_p, d\tau^n) = 0 \pmod{\hat\ell} \Leftrightarrow \Lambda^n_{pi} = 0, \end{cases} \qquad (1.17)$$

в силу того, что точки $\{A_\alpha\}$ и $\{A_p\}$ принадлежат характеристике $\chi_{n-\ell-1}(A_0) = [\Phi(A_0), \Lambda(A_0)]$ гиперплоскости $H(A_0)$ при смещении центра A_0 вдоль кривых

$$\hat\ell:\ \omega^n_0 = \omega^\alpha_0 = \omega^p_0 = 0;\ \omega^i_0 = \mu^i\theta,\ D\theta = \theta\wedge\theta^0_0;\ \nabla\mu^i - \mu^i(\theta^0_0 + \omega^0_0) = \mu^i_1\theta, \qquad (1.18)$$

принадлежащих распределению $\mathcal{H}_\ell$. Точки $\{A_p\}, \{A_i\}$ принадлежат характеристике $\overset{*}{\chi}_m(A_0) = [\Lambda, L]$ гиперплоскости $H(A_0)$ при смещении центра A_0 вдоль кривых

$$\overset{*}{\gamma}:\ \omega^n_0 = 0,\ \omega^a_0 = 0,\ \omega^\alpha_0 = \mu^\alpha\theta,\ D\theta = \theta\wedge\theta^0_0;\ \nabla\mu^\alpha - \mu^\alpha(\theta^0_0 + \omega^0_0) = \bar\mu^\alpha_1\theta, \qquad (1.19)$$

принадлежащих распределению $\mathcal{H}_{n-m-1}$ характеристик χ_{n-m-1}.
Следовательно,

$$\begin{cases} (A_p, d\tau^n) = 0 \pmod{\overset{*}{\gamma}} \Leftrightarrow \Lambda^n_{p\alpha} = 0, \\ (A_i, d\tau^n) = 0 \pmod{\overset{*}{\gamma}} \Leftrightarrow M^n_{i\alpha} = 0. \end{cases} \qquad (1.20)$$

Известно [3],[1], что условия

$$\Lambda^n_{pi} = 0, \quad \Lambda^n_{p\alpha} = 0 \qquad (1.21)$$

необходимы и достаточны для того, чтобы $\Lambda(A_0) = \overset{*}{\chi}_r(A_0)$, где $\overset{*}{\chi}_r(A_0)$- характеристика гиперплоскости $H(A_0)$ при смещении центра A_0 вдоль кривых $\overset{*}{\mathcal{L}}$, принадлежащих распределению $\mathcal{H}_{n-r-1}$ характеристик χ_{n-r-1}. В силу (1.17) и (1.20) условия (1.21) выполняются, и, следовательно, распределение $\mathcal{H}_r$ взаимно. Аналогично, убеждаемся, что условия

$$M^n_{i\alpha} = 0,\ M^n_{ip} = 0; \quad (1.22) \qquad H^n_{\alpha i} = 0,\ H^n_{\alpha p} = 0; \quad (1.23)$$
$$H^n_{\alpha p} = 0,\ M^n_{ip} = 0; \quad (1.24) \qquad H^n_{\alpha i} = 0,\ \Lambda^n_{pi} = 0; \quad (1.25)$$
$$M^n_{i\alpha} = 0,\ \Lambda^n_{p\alpha} = 0 \qquad (1.26)$$

необходимы и достаточны, чтобы соответственно распределения $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-m-1}$, $\mathcal{H}_{n-r-1}$, $\mathcal{H}_{n-\ell-1}$, $\mathcal{H}_m$ были взаимны.

3. Так как распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$, $\mathcal{H}_m$, $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-m-1}$ регулярны, то тензоры $\{\Lambda^n_{pq}\}, \{M^n_{a\ell}\}, \{M^n_{ij}\}, \{H^n_{\alpha\beta}\}$ невырожденные [1],[3], т.е.

$$\begin{cases} \Lambda \overset{def}{=} \det\|\Lambda^n_{pq}\| \ne 0, \quad M \overset{def}{=} \det\|M^n_{ij}\| \ne 0, \quad H \overset{def}{=} \det\|H^n_{\alpha\beta}\| \ne 0, \\ F \overset{def}{=} \det\begin{Vmatrix} \Lambda^n_{pq} & 0 \\ 0 & M^n_{ij} \end{Vmatrix} = \det\|M^n_{a\ell}\| = \Lambda M \ne 0 \end{cases} \qquad (1.27)$$

Главный фундаментальный тензор $\{S^n_{\sigma\rho}\}$ H-распределения невырожденный:

$$S \overset{def}{=} \det\|S^n_{\sigma\rho}\| = \det\begin{Vmatrix} \Lambda^n_{pq} & 0 & 0 \\ 0 & M^n_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & H^n_{\alpha\beta} \end{Vmatrix} \ne 0.$$

Для тензоров первого порядка $\{\Lambda^n_{pq}\}, \{M^n_{ij}\}, \{H^n_{\alpha\beta}\}$ можно ввести обращенные тензоры $\{\Lambda^{pq}_n\}, \{M^{ij}_n\}, \{H^{\alpha\beta}_n\}$, компоненты которых удовлетворяют соответственно условиям:

$$\begin{cases} \Lambda^{pq}_{n}\Lambda^{n}_{qt}=\Lambda^{qp}_{n}\Lambda^{n}_{tq}=\delta^{p}_{t}, & \nabla\Lambda^{pq}_{n}-\Lambda^{pq}_{n}\omega^{0}_{0}=\Lambda^{pq}_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \\ M^{ik}_{n}M^{n}_{kj}=M^{ki}_{n}M^{n}_{jk}=\delta^{i}_{j}; & \nabla M^{ij}_{n}-M^{ij}_{n}\omega^{0}_{0}=M^{ij}_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \\ H^{\alpha\beta}_{n}H^{n}_{\beta\gamma}=H^{\beta\alpha}_{n}H^{n}_{\gamma\beta}=\delta^{\alpha}_{\gamma}; & \nabla H^{\alpha\beta}_{n}-H^{\alpha\beta}_{n}\omega^{0}_{0}=H^{\alpha\beta}_{n\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}. \end{cases} \qquad (1.28)$$

§2. Основные геометрические объекты регулярного распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$ в окрестности первого порядка. О голономности распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$

1. Из дифференциальных уравнений (1.2), (1.4), (1.6), (1.8)-(1.13) следует, что величины $\{\Lambda^{\hat{\alpha}}_{pq}\}$, $\{\Lambda^{\alpha}_{pi}\}$, $\{M^{\alpha}_{ip}\}$, $\{M^{\hat{\alpha}}_{ij}\}$, $\{\Lambda^{\hat{i}}_{pq}\}$, $\{\Lambda^{i}_{p\alpha}\}$, $\{H^{\hat{p}}_{\alpha\beta}\}$, $\{H^{p}_{\alpha j}\}$, $\{H^{i}_{\alpha q}\}$, $\{H^{\hat{i}}_{\alpha\beta}\}$, $\{M^{\hat{p}}_{ij}\}$, $\{M^{p}_{i\alpha}\}$ образуют тензоры 1-го порядка распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$, вообще говоря, не симметричные по нижним индексам. Построим с помощью этих тензоров следующие охваты.

а) Охваты симметрических тензоров $\{b^{\hat{u}}_{pq}\}$, $\{m^{\hat{A}}_{ij}\}$, $\{h^{\hat{a}}_{\alpha\beta}\}$ первого порядка

$$b^{\hat{u}}_{pq}=\frac{1}{2}(\Lambda^{\hat{u}}_{pq}+\Lambda^{\hat{u}}_{qp}),\ \nabla b^{\hat{u}}_{pq}+b^{\hat{u}}_{pq}\omega^{0}_{0}=b^{\hat{u}}_{pq\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.1)$$

$$m^{\hat{A}}_{ij}=\frac{1}{2}(M^{\hat{A}}_{ij}+M^{\hat{A}}_{ji}),\ \nabla m^{\hat{A}}_{ij}+m^{\hat{A}}_{ij}\omega^{0}_{0}=m^{\hat{A}}_{ij\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.2)$$

$$h^{\hat{a}}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(H^{\hat{a}}_{\alpha\beta}+H^{\hat{a}}_{\beta\alpha}),\ \nabla h^{\hat{a}}_{\alpha\beta}+h^{\hat{a}}_{\alpha\beta}\omega^{0}_{0}=h^{\hat{a}}_{\alpha\beta\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.3)$$

где

$$b^{\hat{u}}_{pq\varkappa}=\frac{1}{2}(\Lambda^{\hat{u}}_{pq\varkappa}+\Lambda^{\hat{u}}_{qp\varkappa}),\ m^{\hat{A}}_{ij\varkappa}=\frac{1}{2}(M^{\hat{A}}_{ij\varkappa}+M^{\hat{A}}_{ji\varkappa}),\ h^{\hat{a}}_{\alpha\beta\varkappa}=\frac{1}{2}(H^{\hat{a}}_{\alpha\beta\varkappa}+H^{\hat{a}}_{\beta\alpha\varkappa}). \qquad (2.4)$$

Из уравнений (2.1)-(2.3) следует, что величины $\{b^{n}_{pq}\}$, $\{b^{\hat{i}}_{pq}\}$, $\{b^{\hat{\alpha}}_{pq}\}$, $\{m^{n}_{ij}\}$, $\{m^{\hat{\alpha}}_{ij}\}$, $\{h^{n}_{\alpha\beta}\}$, $\{h^{\hat{i}}_{\alpha\beta}\}$, $\{h^{\hat{p}}_{\alpha\beta}\}$ являются тензорами первого порядка - подобъектами соответственно тензоров $\{b^{\hat{u}}_{pq}\}$, $\{m^{\hat{A}}_{ij}\}$, $\{h^{\hat{a}}_{\alpha\beta}\}$.

в) Охваты кососимметрических тензоров $\{r^{\hat{u}}_{pq}\}$, $\{r^{\hat{A}}_{ij}\}$, $\{r^{\hat{a}}_{\alpha\beta}\}$ первого порядка

$$r^{\hat{u}}_{pq}=\frac{1}{2}(\Lambda^{\hat{u}}_{pq}-\Lambda^{\hat{u}}_{qp}),\ \nabla r^{\hat{u}}_{pq}+r^{\hat{u}}_{pq}\omega^{0}_{0}=r^{\hat{u}}_{pq\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.5)$$

$$r^{\hat{A}}_{ij}=\frac{1}{2}(M^{\hat{A}}_{ij}-M^{\hat{A}}_{ji}),\ \nabla r^{\hat{A}}_{ij}+r^{\hat{A}}_{ij}\omega^{0}_{0}=r^{\hat{A}}_{ij\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.6)$$

$$r^{\hat{a}}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(H^{\hat{a}}_{\alpha\beta}-H^{\hat{a}}_{\beta\alpha}),\ \nabla r^{\hat{a}}_{\alpha\beta}+r^{\hat{a}}_{\alpha\beta}\omega^{0}_{0}=r^{\hat{a}}_{\alpha\beta\varkappa}\omega^{\varkappa}_{0}, \qquad (2.7)$$

где

$$r^{\hat{u}}_{pq\varkappa}=\frac{1}{2}(\Lambda^{\hat{u}}_{pq\varkappa}-\Lambda^{\hat{u}}_{qp\varkappa}),\ r^{\hat{A}}_{ij\varkappa}=\frac{1}{2}(M^{\hat{A}}_{ij\varkappa}-M^{\hat{A}}_{ji\varkappa}),\ r^{\hat{a}}_{\alpha\beta\varkappa}=\frac{1}{2}(H^{\hat{a}}_{\alpha\beta\varkappa}-H^{\hat{a}}_{\beta\alpha\varkappa}) \qquad (2.8)$$

Отметим, что

$$\Lambda^{\hat{u}}_{pq}=b^{\hat{u}}_{pq}+r^{\hat{u}}_{pq},\ M^{\hat{A}}_{ij}=m^{\hat{A}}_{ij}+r^{\hat{A}}_{ij},\ H^{\hat{a}}_{\alpha\beta}=h^{\hat{a}}_{\alpha\beta}+r^{\hat{a}}_{\alpha\beta}. \qquad (2.9)$$

2. Система уравнений

$$\omega^{\hat{u}}_{0}=0, \qquad (2.10)$$

ассоциированная [5] с базисным распределением $\mathcal{H}_r$, вполне интегрируема тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор $\{r^{\hat{u}}_{pq}\}$. В этом случае базисное распределение $\mathcal{H}_r$ определяет $(n-r)$-параметрическое семейство r-мерных поверхностей (плоскости Π_r огибаются r-мерными поверхностями V_r $(n-r)$-параметрического семейства). При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_r уравнения (1.1), (2.10) в выбранном репере 1-го порядка являются дифференциальными уравнениями m-вырожденной распадающейся гиперполосы $\mathcal{H}^{r}_{m}$ ранга r [6].

О п р е д е л е н и е 1. Вырожденная гиперполоса $\mathcal{H}^{r}_{m}$ называется распадающейся, если ее характеристика χ_{n-r-1} распадается на две плоскости Π_{ℓ} и Π_{n-m-1}:

$$\Pi_{n-m-1}(A_0)\cap\Pi_{\ell}(A_0)=A_0,\ [\Pi_{n-m-1}(A_0),\Pi_{\ell}(A_0)]=\chi_{n-r-1}(A_0),$$

где плоскость $\Pi_{\ell}(A_0)$ - плоская образующая базисной поверхности V^{r}_{m} гиперполосы $\mathcal{H}^{r}_{m}$, $A_0\in V^{r}_{m}$.

О п р е д е л е н и е 2. Вырожденная гиперполоса $\mathcal{H}^{r}_{m}$ называется m-вырожденной или развертывающейся, если базисная поверхность гиперполосы $\mathcal{H}^{r}_{m}$ является m-вырожденной (или развертывающейся) поверхностью [7], [8].

Итак, обращение в нуль тензора $\{r^{\hat{u}}_{pq}\}$ есть условие, при котором пространство P_n расслаивается на $(n-r)$-параметрическое семейство m-вырожденных гиперполос $\mathcal{H}^{r}_{m}$ так, что плоскость $\Pi_r(A_0)$ в своем центре A_0 является касательной плоскостью поверхности V_r (V_r - направляющая поверхность базисной поверхности V^{r}_{m} вырожденной гиперполосы [9], [4]). Плоскость Π_m является касательной плоскостью базисной поверхности V^{r}_{m} вырожденной гиперполосы $\mathcal{H}^{r}_{m}$, а плоскость $\Pi_{n-1}(A_0)\overset{def}{=}H(A_0)$ является ее главной касательной гиперплоскостью. По аналогии с работами [10], [3] тензор $\{r^{\hat{u}}_{pq}\}$ назовем тензором неголономности трехсоставного распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$. Распределение $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$ будем называть голономным, если его базисное распределение голономно $(r^{\hat{u}}_{pq}=0)$.

Последовательное продолжение дифференциальных уравнений (I.2) приводит к фундаментальному объекту $\{\Lambda^n_{pq}, \dots, \Lambda^n_{pq_1\dots q_{s-1}}; \Lambda^n_{pq_1\dots q_s}\}$ – подобъекту фундаментального объекта порядка s распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$. Поэтому в той части геометрии распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$, которая определяется фундаментальными подобъектами, должна быть некоторая аналогия с геометрией вырожденных распадающихся гиперполос $\mathcal{H}^{\tau}_m \subset P_n$ [6].

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\omega^{\hat{\alpha}}_0 = 0, \qquad (2.11)$$

ассоциированную с оснащающим распределением $\mathcal{H}_m$ плоскостей Π_m. Система (2.11) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда

$$\tau^{\hat{\alpha}}_{pq} = 0, \ \tau^{\hat{\alpha}}_{ij} = 0, \ M^{\alpha}_{ij} = 0. \qquad (2.12)$$

В этом случае распределение плоскостей Π_m определяет $(n-m)$-параметрическое семейство m-мерных поверхностей (плоскости Π_m огибаются m-мерными поверхностями V_m $(n-m)$-параметрического семейства). При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_m уравнения (2.12),(1.1) в выбранном репере 1-го порядка являются дифференциальными уравнениями регулярной гиперполосы H_m, базисная поверхность V_m которой несет двухкомпонентную сопряженную систему [11]. Следовательно, при выполнении условий (2.12) пространство P_n расслаивается на $(n-m)$-параметрическое семейство регулярных гиперполос H_m так, что плоскость $\Pi_m(A_0)$ в своем центре A_0 является касательной плоскостью базисной поверхности V_m гиперполосы H_m, а плоскость $H(A_0)$ является ее главной касательной гиперплоскостью. Отметим, что полученное $(n-m)$-параметрическое семейство регулярных гиперполос H_m является семейством особого типа: базисные поверхности V_m семейства несут двухкомпонентную сопряженную систему [11].

Таким образом, проективно-дифференциальную геометрию скомпонованного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ можно применить для изучения геометрии, как вырожденных гиперполос $\mathcal{H}^{\tau}_m \subset P_n$, так и регулярных гиперполос $H_m \subset P_n$ (общего и специального типов).

Оснащающее распределение $\mathcal{H}_m$ плоскостей Π_m назовем голономным, если выполнены условия (2.12).

Уравнение $\omega^n_0 = 0$, ассоциированное с оснащающим распределением $\mathcal{H}_{n-1}$ гиперплоскостей Π_{n-1}, вполне интегрируемо тогда

и только тогда, когда выполняются условия

$$\tau^n_{ij} = 0, \quad \tau^n_{pq} = 0, \quad \tau^n_{\alpha\beta} = 0. \qquad (2.13)$$

В этом случае оснащающее распределение $\mathcal{H}_{n-1}$ определяет однопараметрическое семейство гиперповерхностей V_{n-1} (плоскости Π_{n-1} огибаются гиперповерхностями однопараметрического семейства), причем распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ является вполне взаимным.

3. Построим ряд основных геометрических объектов в окрестности 1-го порядка образующего элемента распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$. Прежде всего заметим, что величины Λ, M, H (1.27) являются относительными инвариантами

$$\begin{cases} d\ln\Lambda = 2\omega^p_p - \tau(\omega^0_0 + \omega^n_n) + \tilde{\Lambda}_x \omega^x_0, \\ d\ln M = 2\omega^i_i - \ell(\omega^0_0 + \omega^n_n) + \tilde{M}_x \omega^x_0, \\ d\ln H = 2\omega^\alpha_\alpha - (n-m-1)(\omega^0_0 + \omega^n_n) + \tilde{H}_x \omega^x_0, \end{cases} \qquad (2.14)$$

где

$$\tilde{\Lambda}_x = \Lambda^{qp}_n \Lambda_{pqx}, \quad \tilde{M}_x = M^{ji}_n M_{ijx}, \quad \tilde{H}_x = H^{\beta\alpha}_n H_{\alpha\beta x}. \qquad (2.15)$$

В общем случае

$$b \overset{def}{=} \det \|b^n_{pq}\| \neq 0, \quad \hat{m} \overset{def}{=} \det \|m^n_{ij}\| \neq 0, \quad h \overset{def}{=} \det \|h^n_{\alpha\beta}\| \neq 0.$$

В силу этого можно найти обращенные симметрические тензоры 1-го порядка $\{b^{pq}_n\}, \{m^{ij}_n\}, \{h^{\alpha\beta}_n\}$. С помощью этих тензоров, а также обращенных тензоров (1.28) введем в рассмотрение следующие три группы квазитензоров первого порядка:

$$H^p_n = \frac{1}{n-m-1} H^p_{\alpha\beta} H^{\beta\alpha}_n, \quad M^p_n = \frac{1}{\ell} M^p_{ij} \Lambda^{ji}_n, \quad N^p_n = \frac{1}{n-m-1} H^p_{\alpha\beta} h^{\beta\alpha}_n, \qquad (2.16)$$

$$h^p_n = \frac{1}{n-m-1} h^p_{\alpha\beta} h^{\beta\alpha}_n, \quad m^p_n = \frac{1}{\ell} m^p_{ij} m^{ji}_n, \quad \ell^p_n = \frac{1}{\ell} M^p_{ij} m^{ji}_n;$$

– –

$$\Lambda^i_n = \frac{1}{\tau} \Lambda^i_{pq} \Lambda^{qp}_n, \quad H^i_n = \frac{1}{n-m-1} H^i_{\alpha\beta} H^{\beta\alpha}_n, \quad L^i_n = \frac{1}{\tau} \Lambda^i_{pq} b^{qp}_n, \qquad (2.17)$$

$$N^i_n = \frac{1}{n-m-1} H^i_{\alpha\beta} h^{\beta\alpha}_n, \quad b^i_n = \frac{1}{\tau} b^i_{pq} b^{qp}_n, \quad h^i_n = \frac{1}{n-m-1} h^i_{\alpha\beta} h^{\beta\alpha}_n;$$

– –

$$\Lambda^\alpha_n = \frac{1}{r}\Lambda^\alpha_{pq}\Lambda^{qp}_n, \quad M^\alpha_n = \frac{1}{\ell}M^\alpha_{ij}\Lambda^{ji}_n, \quad L^\alpha_n = \frac{1}{r}\Lambda^\alpha_{pq}B^{qp}_n,$$

$$\ell^\alpha_n = \frac{1}{\ell}M^\alpha_{ij}m^{ji}_n, \quad B^\alpha_n = \frac{1}{r}B^\alpha_{pq}B^{qp}_n, \quad m^\alpha_n = \frac{1}{\ell}m^\alpha_{ij}m^{ji}_n \qquad (2.18)$$

Квазитензоры (2.16) - (2.18) удовлетворяют соответственно одному из дифференциальных уравнений

$$\nabla\nu^p_n + \omega^p_n = \nu^p_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0, \quad \nabla\nu^i + \omega^i_n = \nu^i_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0, \quad \nabla\nu^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \nu^\alpha_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0. \qquad (2.19)$$

Далее находим квазитензоры 1-го порядка

$$M_i = \frac{1}{n-m-1}M^\alpha_{i\alpha}, \qquad \nabla M_i + M_i\omega^0_0 - \omega^0_i = M_{i\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.20)$$

$$L_i = \frac{1}{r}M^p_{ip}, \qquad \nabla L_i + L_i\omega^0_0 - \omega^0_i = L_{i\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.21)$$

$$M_p = \frac{1}{n-m-1}\Lambda^\alpha_{p\alpha}, \qquad \nabla M_p + M_p\omega^0_0 - \omega^0_p = M_{p\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.22)$$

$$L_p = \frac{1}{\ell}\Lambda^i_{pi}, \qquad \nabla L_p + L_p\omega^0_0 - \omega^0_p = L_{p\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.23)$$

$$H_\alpha = \frac{1}{r}H^p_{\alpha p}, \qquad \nabla H_\alpha + H_\alpha\omega^0_0 - \omega^0_\alpha = H_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.24)$$

$$N_\alpha = \frac{1}{\ell}H^i_{\alpha i}, \qquad \nabla N_\alpha + N_\alpha\omega^0_0 - \omega^0_\alpha = N_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.25)$$

$$W_p = \Lambda^n_{pn} + \Lambda^n_{pq}\nu^q_n, \qquad \nabla W_p + W_p\omega^0_0 - \omega^0_p = W_{p\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.26)$$

$$W_i = M^n_{in} + M^n_{ij}\nu^j_n, \qquad \nabla W_i + W_i\omega^0_0 - \omega^0_i = W_{i\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.27)$$

$$W_\alpha = H^n_{\alpha n} + H^n_{\alpha p}\nu^p_n, \qquad \nabla W_\alpha + W_\alpha\omega^0_0 - \omega^0_\alpha = W_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.28)$$

$$\mathcal{W}_p = \frac{1}{r+2}\tilde{\Lambda}_p + \Lambda^n_{qp}\nu^q_n, \qquad \nabla\mathcal{W}_p + \mathcal{W}_p\omega^0_0 + \omega^0_p = \mathcal{W}_{p\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.29)$$

$$\mathcal{W}_i = \frac{1}{r}\tilde{\Lambda}_i + M^n_{ji}\nu^j_n, \qquad \nabla\mathcal{W}_i + \mathcal{W}_i\omega^0_0 + \omega^0_i = \mathcal{W}_{i\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.30)$$

$$\mathcal{W}_\alpha = \frac{1}{r}\tilde{\Lambda}_\alpha + H^n_{p\alpha}\nu^p_n, \qquad \nabla\mathcal{W}_\alpha + \mathcal{W}_\alpha\omega^0_0 + \omega^0_\alpha = \mathcal{W}_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.31)$$

$$\mathcal{V}_p = \frac{1}{\ell}\tilde{M}_p + \Lambda^n_{qp}\nu^q_n, \qquad \nabla\mathcal{V}_p + \mathcal{V}_p\omega^0_0 + \omega^0_p = \mathcal{V}_{p\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.32)$$

$$\mathcal{V}_i = \frac{1}{\ell+2}\tilde{M}_i + M^n_{ji}\nu^j_n, \qquad \nabla\mathcal{V}_i + \mathcal{V}_i\omega^0_0 + \omega^0_i = \mathcal{V}_{i\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.33)$$

$$\mathcal{V}_\alpha = \frac{1}{\ell}\tilde{M}_\alpha + H^n_{p\alpha}\nu^p_n, \qquad \nabla\mathcal{V}_\alpha + \mathcal{V}_\alpha\omega^0_0 + \omega^0_\alpha = \mathcal{V}_{\alpha\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (2.34)$$

где в качестве величин $\{\nu^p_n\}$, $\{\nu^i_n\}$, $\{\nu^\alpha_n\}$ берем любой из соответствующих квазитензоров (2.16)-(2.18). Построения основных фундаментальных геометрических объектов с использованием квазитензоров (2.16)-(2.18), (2.20)-(2.23) в окрестностях 1-го - 3-го порядков проводятся для скомпонованного распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ аналогично, как и для $\mathcal{H}$-распределения [1].

§3. Инвариантные оснащения распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$

1. Нормализации Нордена-Чакмазяна основных структурных распределений, ассоциированных с распределением $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$

Под двойственной нормализацией [12] (нормализацией Нордена-Чакмазяна) базисного Λ-распределения (по аналогии с гиперполосным распределением [3]) мы будем понимать нормализацию базисного Λ-распределения (распределения $\mathcal{H}_r$) в смысле А.П.Нордена [13], причем в каждом центре A_0 нормаль 1-го рода $N_{n-r}(A_0)$ проходит через характеристику $X_{n-r-1}(A_0)$ текущего элемента $\Pi_{r-1}(A_0) \stackrel{def}{=} H(A_0)$ оснащающего распределения $\mathcal{H}_{n-1}$ гиперплоскостей Π_{n-1}. Требование инвариантности нормали $N_{n-r}(A_0) = [X_{n-r-1}, \hat{\mathcal{X}}_n]$, где

$$\hat{\mathcal{X}}_n(\nu) = A_n + \nu^p_n A_p + \nu^i_n A_i + \nu^\alpha_n A_\alpha, \qquad (3.1)$$

приводит к условиям

$$\nabla\nu^p_n + \omega^p_n = \nu^p_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad (3.2)$$

причем на величины ν^i_n, ν^α_n это требование никаких условий не накладывает. Если еще потребовать, чтобы прямая $N_1 = [A_0, \hat{\mathcal{X}}_n]$ была инвариантна, то, кроме условий (3.2), мы находим, что величины ν^i_n, ν^α_n должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\nabla\nu^i_n + \omega^i_n = \nu^i_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0, \qquad \nabla\nu^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \nu^\alpha_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0. \qquad (3.3)$$

Поле нормалей 1-го рода N_{n-r} внутренним образом определено в окрестности 1-го порядка, если охват объекта $\{\nu^p_n\}$ осуществить с помощью любого из квазитензоров 1-го порядка (2.16). Если, кроме того, охват объектов $\{\nu^i_n\}$, $\{\nu^\alpha_n\}$ осуществить с помощью соответствующих квазитензоров (2.17), (2.18), то внутренним инвариантным образом определяется в окрестности 1-го порядка поле прямых $N_1=[A_0,\hat{\mathcal{X}}_n]$ -поле нормалей 1-го рода оснащающего распределения $\mathcal{H}_{n-1}$.

Нормаль 2-го рода $\mathcal{N}_{r-1}$ базисного распределения $\mathcal{H}_r$ определим точками

$$\mathcal{L}_p = A_p + \nu_p^0 A_0 . \qquad (3.4)$$

Требование инвариантности поля плоскостей $\mathcal{N}_{r-1}$ приводит к условиям

$$\nabla \nu_p^0 + \omega_p^0 = \nu_{pK}^0 \omega_0^K . \qquad (3.5)$$

Следовательно, поле любого из квазитензоров $\{-M_p^0\}$ (2.22), $\{-L_p^0\}$ (2.23), $\{-W_p^0\}$ (2.26), $\{\mathfrak{M}_p^0\}$ (2.29), $\{\mathfrak{D}_p^0\}$ (2.32) задает в окрестности 1-го порядка поле внутренних нормалей 2-го рода $\mathcal{N}_{r-1}$ базисного Λ-распределения, а поле любого из квазитензоров $\{f_p^0\}$, $\{\hat{f}_p^0\}$ [1, §3] определяет поле нормалей 2-го рода $\mathcal{N}_{r-1}$ базисного Λ-распределения в окрестности 2-го порядка.

Аналогично вводим двойственную нормализацию в смысле Нордена-Чакмазяна для оснащающего распределения $\mathcal{H}_m$ (M-распределения): нормаль 1-го рода - плоскость $N_{n-m}(A_0)=[\chi_{n-m-1},\hat{\mathcal{X}}_n]$, нормаль 2-го рода - плоскость $\mathcal{N}_{m-1}(A_0)\subset \Pi_m(A_0)$, $A_0 \notin \mathcal{N}_{m-1}$, которую определим точками $\{\mathcal{L}_a\}$:

$$\mathcal{L}_p = A_p + \nu_p^0 A_0 , \quad \mathcal{L}_i = A_i + \nu_i^0 A_0 . \qquad (3.6)$$

Условия инвариантности нормалей 1-го и 2-го рода оснащающего распределения $\mathcal{H}_m$ имеют соответственно вид

$$\nabla \nu_n^p + \omega_n^p = \nu_{nK}^p \omega_0^K , \qquad \nabla \nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i \omega_0^K , \qquad (3.7)$$

$$\nabla \nu_p^0 + \omega_p^0 = \nu_{pK}^0 \omega_0^K , \qquad \nabla \nu_i^0 + \omega_i^0 = \nu_{iK}^0 \omega_0^K . \qquad (3.8)$$

Охваты объектов $\{\nu_n^p\}$, $\{\nu_p^0\}$ указаны выше. Охват объекта $\{\nu_n^i\}$ можно осуществить с помощью любого из квазитензоров 1-го порядка (2.17), а объекта $\{\nu_i^0\}$ - с помощью любого из квазитензоров 1-го порядка $\{-M_i^0\}$(2.20), $\{-L_i^0\}$ (2.21), $\{-W_i^0\}$ (2.27), $\{\mathfrak{M}_i^0\}$ (2.30), $\{\mathfrak{D}_i^0\}$ (2.33) или с помощью любого из квазитензоров 2-го порядка $\{f_i^0\}$, $\{\hat{f}_i^0\}$ [1, §3].

Для остальных основных структурных распределений $\mathcal{H}_{n-r-1}$, $\mathcal{H}_{n-m-1}$, $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-\ell-1}$ определим двойственные нормализации в смысле Нордена-Чакмазяна следующим образом.

а) Для распределения $\mathcal{H}_{n-r-1}$: плоскость $N_{r+1}(A_0)=[A_0,\mathcal{L}_p,\hat{\mathcal{X}}_n]$ — нормаль 1-го рода, а плоскость $\mathcal{N}_{n-r-2}(A_0)=[\mathcal{L}_\alpha,\mathcal{L}_i]$ — нормаль 2-го рода, условия инвариантности которых соответственно имеют вид:

$$\nabla \nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i \omega_0^K , \qquad \nabla \nu_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \nu_{nK}^\alpha \omega_0^K , \qquad (3.9)$$

$$\nabla \nu_i^0 + \omega_i^0 = \nu_{iK}^0 \omega_0^K , \qquad \nabla \nu_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \nu_{\alpha K}^0 \omega_0^K . \qquad (3.10)$$

Здесь охват объекта $\{\nu_n^\alpha\}$ можно осуществить с помощью любого из квазитензоров 1-го порядка (2.18), а охват объекта $\{\nu_\alpha^0\}$ - с помощью любого из квазитензоров 1-го порядка $\{-H_\alpha^0\}$ (2.24), $\{-N_\alpha^0\}$ (2.25), $\{-W_\alpha^0\}$ (2.28), $\{\mathfrak{M}_\alpha^0\}$ (2.31), $\{\mathfrak{D}_\alpha^0\}$ (2.34) или с помощью любого из квазитензоров $\{f_\alpha^0\}$, $\{\hat{f}_\alpha^0\}$ [1, §3] 2-го порядка.

в) Для распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$: плоскость $N_{m+1}(A_0)=[A_0,\mathcal{L}_a,\hat{\mathcal{X}}_n]$ - нормаль 1-го рода; плоскость $\mathcal{N}_{n-m-2}(A_0)=[\mathcal{L}_\alpha]$ -нормаль 2-го рода. Поле нормалей 1-го рода $N_{m+1}(A_0)$ распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ определяется заданием поля квазитензора $\{\nu_n^\alpha\}$, а поле нормалей 2-го рода $\mathcal{N}_{n-m-2}(A_0)$ определяется заданием поля квазитензора $\{\nu_\alpha^0\}$.

с) Для распределения $\mathcal{H}_\ell$: плоскость $N_{n-\ell}=[\chi_{n-\ell-1},\hat{\mathcal{X}}_n]$-нормаль 1-го рода; плоскость $\mathcal{N}_{\ell-1}(A_0)=[\mathcal{L}_i]$ -нормаль 2-го рода. Поля нормалей 1-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_\ell$ определяются соответственно заданием полей квазитензоров $\{\nu_n^i\}$ и $\{\nu_i^0\}$.

d) Для распределения $\mathcal{H}_{n-\ell-1}$: плоскость $N_{\ell+1}(A_0)=[A_0,\mathcal{L}_i,\hat{\mathcal{X}}_n]$-нормаль 1-го рода. Поле нормалей 1-го рода $N_{\ell+1}$ для распределения $\mathcal{H}_{n-\ell-1}$ определяется заданием полей квазитензоров $\{\nu_n^p\}$, $\{\nu_n^\alpha\}$, а поле нормалей 2-го рода $\mathcal{N}_{n-\ell-2}$ распределения $\mathcal{H}_{n-\ell-1}$ определяется заданием полей квазитензоров $\{\nu_p^0\}$, $\{\nu_\alpha^0\}$.

е) Для распределения $\mathcal{H}_{n-1}$: прямая $N_1(A_0)=[A_0,\hat{\mathcal{X}}_n]$-нормаль 1-го рода, а в качестве нормали 2-го рода можно взять плоскость $\mathcal{N}_{n-2}(A_0)=[\mathcal{L}_a,\mathcal{L}_\alpha]$, где

$$\mathcal{L}_\alpha = A_\alpha + \nu_\alpha^0 A_0 , \quad \nabla \nu_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \nu_{\alpha K}^0 \omega_0^K . \qquad (3.11)$$

2. Поля квазинормалей и нормалей основных структурных распределений данного распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^r$

Определение 3 ([10],[3]). Систему величин $\{x_p\}$ назовем квазинормалью базисного распределения $\mathcal{H}_r$, если в выбранном репере 1-го порядка при преобразованиях стационарной подгруппы элемента распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^r$ имеем один из следующих законов преобразования:

$$\nabla_\delta \mathcal{K}_p + \mathcal{K}_p \pi_0^0 = \lambda b_{pq}^n \pi_n^q + \sigma \pi_p^0, \tag{3.12}$$

$$\nabla_\delta \mathcal{K}_p + \mathcal{K}_p \pi_0^0 = \lambda \Lambda_{pq}^n \pi_n^q + \sigma \pi_p^0, \tag{3.13}$$

$$\nabla_\delta \mathcal{K}_p + \mathcal{K}_p \pi_0^0 = \lambda \Lambda_{qp}^n \pi_n^q - \sigma \pi_p^0, \tag{3.14}$$

где λ, σ -постоянные числа,отличные от нуля.

Каждая из этих трех типов квазинормалей устанавливает биекцию между нормалями 1-го и 2-го рода базисного распределения $\mathcal{H}_\tau$ таким образом:

$$\text{a)}\ \nu_p^0 = -\frac{1}{\sigma}(\mathcal{K}_p + \lambda b_{pq}^n \nu_n^q), \quad \nu_n^t = -\frac{1}{\lambda}(\mathcal{K}_p + \sigma \nu_p^0) b_n^{pt}, \tag{3.15}$$

если $\{\mathcal{K}_p\}$ -квазинормаль 1-го типа (3.12).

$$\text{в)}\ \nu_p^0 = -\frac{1}{\sigma}(\mathcal{K}_p + \lambda \Lambda_{pq}^n \nu_n^q), \quad \nu_n^t = -\frac{1}{\lambda} \Lambda_n^{tp}(\mathcal{K}_p + \sigma \nu_p^0), \tag{3.16}$$

если $\{\mathcal{K}_p\}$ -квазинормаль 2-го типа (3.13).

$$\text{c)}\ \nu_p^0 = -\frac{1}{\sigma}(\mathcal{K}_p + \lambda \Lambda_{qp}^n \nu_n^q), \quad \nu_n^t = -\frac{1}{\lambda}(\mathcal{K}_p + \sigma \nu_p^0) \Lambda_n^{pt}, \tag{3.17}$$

если $\{\mathcal{K}_p\}$ -квазинормаль 3-го типа (3.14).

В разных дифференциальных окрестностях определим следующие квазинормали базисного распределения $\mathcal{H}_\tau$ [3]:

а) в окрестности 1-го порядка

$$\mathcal{K}_p^1 = \frac{1}{n-\tau} \Lambda_{p\hat{u}}^{\hat{u}}, \ \mathcal{K}_p^2 = \frac{1}{\ell+1} \Lambda_{p\hat{c}}^{\hat{c}}, \ \mathcal{K}_p^3 = \frac{1}{n-m} \Lambda_{p\hat{\alpha}}^{\hat{\alpha}}, \ \mathcal{K}_p^4 = \Lambda_{pn}^n; \tag{3.18}$$

в)в окрестности 2-го порядка

$$\mathcal{K}_p^5 = \frac{1}{\tau+2} \widetilde{\Lambda}_p, \ \hat{\mathcal{K}}_p^5 = \frac{1}{\ell} \widetilde{M}_p, \ \mathcal{K}_p^6 = b_p; \tag{3.19}$$

с)в окрестности 3-го порядка

$$\mathcal{K}_p^7 = C_p; \ \hat{\mathcal{K}}_p^7 = C_p + 3B_p. \tag{3.20}$$

Учитывая дифференциальные уравнения (1.3),(1.8),(1.11) и дифференциальные уравнения для величин $\widetilde{\Lambda}_p, \widetilde{M}_p, b_p, C_p, B_p$ [3,§§3-4], убеждаемся в том,что квазинормали (3.18)- (3.20) удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\nabla_\delta \mathcal{K}_p^1 + \mathcal{K}_p^1 \pi_0^0 = \frac{1}{n-\tau} \Lambda_{pq}^n \pi_n^q + \pi_p^0, \tag{3.21}$$

$$\nabla_\delta \mathcal{K}_p^2 + \mathcal{K}_p^2 \pi_0^0 = \frac{1}{\ell+1} \Lambda_{pq}^n \pi_n^q + \pi_p^0, \tag{3.22}$$

$$\nabla_\delta \mathcal{K}_p^3 + \mathcal{K}_p^3 \pi_0^0 = \frac{1}{n-m} \Lambda_{pq}^n \pi_n^q + \pi_p^0, \tag{3.23}$$

$$\nabla_\delta \mathcal{K}_p^4 + \mathcal{K}_p^4 \pi_0^0 = \Lambda_{pq}^n \pi_n^q + \pi_p^0, \tag{3.24}$$

$$\nabla_\delta \mathcal{K}_p^5 + \mathcal{K}_p^5 \pi_0^0 = \Lambda_{qp}^n \pi_n^q - \pi_p^0, \tag{3.25}$$

$$\nabla_\delta \hat{\mathcal{K}}_p^5 + \hat{\mathcal{K}}_p^5 \pi_0^0 = \Lambda_{qp}^n \pi_n^q - \pi_p^0, \tag{3.26}$$

$$\nabla_\delta \mathcal{K}_p^6 + \mathcal{K}_p^6 \pi_0^0 = b_{ps}^n \pi_n^s - \pi_p^0, \tag{3.27}$$

$$\nabla_\delta \mathcal{K}_p^7 + \mathcal{K}_p^7 \pi_0^0 = -\Lambda_{qp}^n \pi_n^q - \pi_p^0, \tag{3.28}$$

$$\nabla_\delta \hat{\mathcal{K}}_p^7 + \hat{\mathcal{K}}_p^7 \pi_0^0 = 2 b_{pq}^n \pi_n^q - 4\pi_p^0. \tag{3.29}$$

Следуя работе [3] , будем определять нормали $\{\nu_n^p\}, \{\nu_p^0\}$ I-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_\tau$,используя способ нахождения общих нормалей (в общем случае - единственных) двух квазинормалей.

I)В окрестности I-го порядка.

а)Пара $(\mathcal{K}_p^1, \mathcal{K}_p^4)$ определяет инвариантные нормали I-го и 2-го рода следующего вида:

$$\mathcal{L}_n^p = -\frac{n-\tau}{n-\tau-1} \Lambda_n^{pq} (\mathcal{K}_q^4 - \mathcal{K}_q^1), \ \mathcal{L}_p^0 = -\frac{1}{n-\tau-1} [(n-\tau)\mathcal{K}_p^1 - \mathcal{K}_p^4]. \tag{3.30}$$

Далее мы коротко это соответствие будем обозначать так:

$$(\mathcal{K}_p^1, \mathcal{K}_p^4) \longrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}_n^p = -\frac{n-\tau}{n-\tau-1} \Lambda_n^{pq} (\mathcal{K}_q^4 - \mathcal{K}_q^1), \\ \mathcal{L}_p^0 = -\frac{1}{n-\tau-1} [(n-\tau)\mathcal{K}_p^1 - \mathcal{K}_p^4]. \end{cases} \tag{3.31}$$

в)

$$(\mathcal{K}_p^2, \mathcal{K}_p^4) \longrightarrow \begin{cases} \mathcal{B}_n^p = -\frac{\ell+1}{\ell} \Lambda_n^{pq} (\mathcal{K}_q^4 - \mathcal{K}_q^2), \\ \mathcal{B}_p^0 = -\frac{1}{\ell} [(\ell+1)\mathcal{K}_p^2 - \mathcal{K}_p^4] \end{cases} \tag{3.32}$$

c) $(\varkappa_p^3, \varkappa_p^4) \longrightarrow \begin{cases} L_n^p = -\frac{n-m}{n-m-1}(\varkappa_q^4 - \varkappa_q^3)\Lambda_n^{pq}, \\ L_p^0 = -\frac{1}{n-m-1}[(n-m)\varkappa_p^3 - \varkappa_p^4]. \end{cases}$ (3.33)

2) В окрестности 2-го порядка при $\tau_{pq}^n = 0$

$$(\varkappa_p^4, \varkappa_p^5) \longrightarrow \begin{cases} H_n^p = -\frac{1}{2} b_n^{pq}(\varkappa_q^4 + \varkappa_q^5), \\ H_p^0 = \frac{1}{2}(\varkappa_p^5 - \varkappa_p^4). \end{cases} \quad (3.34)$$

$$(\varkappa_p^4, \hat{\varkappa}_p^5) \longrightarrow \begin{cases} \widetilde{H}_n^p = -\frac{1}{2} b_n^{pq}(\varkappa_q^4 + \hat{\varkappa}_q^5), \\ \widetilde{H}_p^0 = \frac{1}{2}(\hat{\varkappa}_p^5 - \varkappa_p^4). \end{cases} \quad (3.35)$$

Каждая из пар квазитензоров $(\varkappa_p^4, \varkappa_p^5)$, $(\varkappa_p^4, \hat{\varkappa}_p^5)$ при $\tau_{pq}^n \neq 0$ общей нормали 2-го рода не имеет.

3)В окрестности 3-го порядка.

а)Пара $(\varkappa_p^6, \hat{\varkappa}_p^7)$ задает инвариантные нормали I-го и 2-го рода вида

$$\Phi_n^p = \frac{1}{2} b_n^{pq}(\hat{\varkappa}_q^7 - 4\varkappa_q^6), \quad \Phi_p^0 = \frac{1}{2}(\hat{\varkappa}_p^7 - 2\varkappa_p^6). \quad (3.36)$$

Заметим,что в случае регулярной гиперполосы,а также для регулярного гиперполосного распределения [3] нормали (3.36) являются аналогами нормалей Фубини. В силу этого нормали (3.36) мы назовем первыми аналогами нормалей Фубини базисного распределения $\mathcal{H}_\tau$ или,что то же,первыми аналогами нормалей Фубини распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^\tau$,ассоциированными с базисным распределением $\mathcal{H}_\tau$.

в) $(\varkappa_p^7, \varkappa_p^5) \longrightarrow \begin{cases} T_n^p = \frac{1}{2}\Lambda_n^{qp}(\varkappa_q^7 - \varkappa_q^5), \\ T_p^0 = \frac{1}{2}(\varkappa_p^5 + \varkappa_p^7). \end{cases}$ (3.37)

с) $(\varkappa_p^7, \hat{\varkappa}_p^5) \longrightarrow \begin{cases} \hat{T}_n^p = \frac{1}{2}\Lambda_n^{qp}(\varkappa_q^7 - \hat{\varkappa}_q^5), \\ \hat{T}_p^0 = \frac{1}{2}(\hat{\varkappa}_p^5 + \varkappa_p^7). \end{cases}$ (3.38)

Известно [1,§5] ,что квазитензоры 2-го порядка $\{m_n^p\}$, $\{m_p^0\}$, где

$$m_n^p \stackrel{def}{=} -\frac{1}{2(\tau+2)}\Lambda_n^{ps} b_n^{qt}(\Lambda_{sqt}^n + \Lambda_{sq}^n \varkappa_t^4 + \Lambda_{st}^n \varkappa_q^4 + \Lambda_{tq}^n \varkappa_s^4), \quad (3.39)$$

$$m_p^0 \stackrel{def}{=} -[\varkappa_p^4 - \frac{1}{2(\tau+2)} b_n^{qt}(\Lambda_{pqt}^n + \Lambda_{pq}^n \varkappa_t^4 + \Lambda_{pt}^n \varkappa_q^4 + \Lambda_{tq}^n \varkappa_p^4)], \quad (3.40)$$

задают для $\mathcal{H}$-распределения вторые аналоги нормалей Михэйлеску.Так как для скомпонованного распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^\tau$ квазитензоры $\{\hat{\varkappa}_p^3\}$, $\{\hat{\varkappa}_p^4\}$ [1;§5] совпадают соответственно с квазитензорами $\{\varkappa_p^3\}$, $\{\varkappa_p^4\}$ (3.18),то для него первые и вторые аналоги нормалей Михэйлеску совпадают.Следовательно,охваты компонент нормалей Михэйлеску I-го и 2-го рода для скомпонованного распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^\tau$ определяются соответственно по формулам (3.38) , (3.39).Для распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^\tau$ при $\tau_{pq}^n = 0$ нормали 1-го и 2-го рода Михэйлеску имеют вид:

$$m_n^p = -\frac{1}{2} b_n^{pt}(\varkappa_t^6 + \varkappa_t^4), \quad m_p^0 = \frac{1}{2}(\varkappa_p^6 - \varkappa_p^4). \quad (3.41)$$

Приведем примеры построения двойственных нормалей распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^\tau$,пользуясь биекциями (3.15)-(3.17),устанавливаемыми квазинормалями в окрестности 3-го порядка элемента распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^\tau$.Квазитензоры $\{-W_n^p\}$, $\{F_n^p\}$ [1,§4] 3-го порядка при $\tau_{pq}^n = 0$ удовлетворяют уравнениям (3.7).Следовательно,квазитензоры $\{-W_n^p\}$,$\{F_n^p\}$ определяют поля инвариантных нормалей I-го рода распределения $\mathcal{H}_{m,n-1}^\tau$ в окрестности 3-го порядка.В биекции,определенной,например,квазинормалью $\{\varkappa_p^6\}$, этим нормалям согласно (3.27),(3.15)(при $\sigma=-1$, $\lambda=1$)соответствуют инвариантные нормали 2-го рода $\{W_p^0\}$, $\{F_p^0\}$,где

$$\begin{cases} W_p^0 = \varkappa_p^6 - b_{pq}^n W_n^q, \quad F_p^0 = \varkappa_p^6 + b_{pq}^n F_n^q, \\ \nabla W_p^0 + \omega_p^0 = W_{px}^0 \omega_0^x, \quad \nabla F_p^0 + \omega_p^0 = F_{px}^0 \omega_0^x. \end{cases} \quad (3.42)$$

Пара нормалей $\{-W_n^p, W_p^0\}$ в случае регулярной гиперполосы $H_\tau \subset P_n$, а также в случае регулярного гиперполосного распределения $\mathcal{H}_{n-1}^\tau$ [3],определяет аналог нормалей Вильчинского,а пара $\{F_n^p, F_p^0\}$ - аналог нормалей Фубини.Учитывая это,мы назовем нормали $\{-W_n^p, W_p^0\}$ нормалями Вильчинского распределения $\mathcal{H}_\tau$,а нормали $\{F_n^p, F_p^0\}$ - вторыми аналогами нормалей Фубини распределения $\mathcal{H}_\tau$ (в отличие от первых аналогов нормалей Фубини (3.36)).

Для распределений $\mathcal{H}_{m,n-1}^\tau$ также,как и для гиперполосных распределений [3] ,имеет место предложение: на голономных распределениях $\mathcal{H}_{m,n-1}^\tau$ и на распределениях $\mathcal{H}_{m,n-1}^\tau$ с нулевым тензором $\{\tau_{pq}^n\}$ обе нормализации Фубини совпадают.

Совершенно аналогичные построения (§3,п.2) можно провести, используя квазинормали,ассоциированные с основными структурными распределениями $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-m-1}$ данного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$. Здесь мы приведем только охваты характерных квазинормалей, ассоциированных с распределениями $\mathcal{H}_\ell, \mathcal{H}_{n-m-1}$. Для распределения $\mathcal{H}_\ell$ имеем:

I) В окрестности I-го порядка

$$\begin{cases} \mathcal{K}^1_i = \frac{1}{n-m}(M^{\alpha}_{i\alpha} + M^{n}_{in}), \nabla_\delta \mathcal{K}^1_i + \mathcal{K}^1_i \pi^0_0 = \frac{1}{n-m} M^n_{ij}\pi^j_n + \pi^0_i; \\ \mathcal{K}^2_i = \Lambda^n_{in}; \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^2_i + \mathcal{K}^2_i \pi^0_0 = M^n_{ij}\pi^j_n + \pi^0_i. \end{cases} \quad (3.43)$$

2) В окрестности 2-го порядка

$$\mathcal{K}^3_i = \frac{1}{n-\ell} M^{\hat{\lambda}}_{i\hat{\lambda}}, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^3_i + \mathcal{K}^3_i \pi^0_0 = \frac{1}{n-\ell} M^n_{ij}\pi^j_n + \pi^0_i, \quad (3.44)$$

$$\mathcal{K}^4_i = \frac{1}{\tau+1} M^{\hat{p}}_{i\hat{p}}, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^4_i + \mathcal{K}^4_i \pi^0_0 = \frac{1}{\tau+1} M^n_{ij}\pi^j_n + \pi^0_i, \quad (3.45)$$

$$\mathcal{K}^5_i = e_i, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^5_i + \mathcal{K}^5_i \pi^0_0 = m^n_{ik}\pi^k_n - \pi^0_i. \quad (3.46)$$

3) В окрестности 3-го порядка

$$\mathcal{K}^6_i = \frac{1}{\tau}\tilde{\Lambda}_i, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^6_i + \mathcal{K}^6_i \pi^0_0 = M^n_{ji}\pi^j_n - \pi^0_i, \quad (3.47)$$

$$\hat{\mathcal{K}}^6_i = \frac{1}{\ell+2}\widetilde{M}_i, \quad \nabla_\delta \hat{\mathcal{K}}^6_i + \hat{\mathcal{K}}^6_i \pi^0_0 = M^n_{ji}\pi^j_n - \pi^0_i, \quad (3.48)$$

$$\hat{\mathcal{K}}^7_i = \mathcal{D}_i, \quad \nabla_\delta \hat{\mathcal{K}}^7_i + \hat{\mathcal{K}}^7_i \pi^0_0 = -\Lambda^n_{ji}\pi^j_n - \pi^0_i, \quad (3.49)$$

$$\mathcal{K}^7_i = \mathcal{D}_i + 3E_i, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^7_i + \mathcal{K}^7_i \pi^0_0 = 2(m^n_{ik}\pi^k_n - 2\pi^0_i). \quad (3.50)$$

Квазитензоры, ассоциированные с распределением $\mathcal{H}_{n-m-1}$, имеют следующий вид:

1) В окрестности 1-го порядка

$$\mathcal{K}^1_\alpha = H^n_{\alpha n}, \quad \nabla \mathcal{K}^1_\alpha + \mathcal{K}^1_\alpha \pi^0_0 = H^n_{\alpha\beta}\pi^\beta_n + \pi^0_\alpha. \quad (3.51)$$

2) В окрестности 2-го порядка

$$\mathcal{K}^2_\alpha = \frac{1}{m+1} H^{\hat{a}}_{\alpha\hat{a}}, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^2_\alpha + \mathcal{K}^2_\alpha \pi^0_0 = \frac{1}{m+1} H^n_{\alpha\beta}\pi^\beta_n + \pi^0_\alpha, \quad (3.52)$$

$$\mathcal{K}^3_\alpha = \frac{1}{\tau+1} H^{\hat{p}}_{\alpha\hat{p}}, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^3_\alpha + \mathcal{K}^3_\alpha \pi^0_0 = \frac{1}{\tau+1} H^n_{\alpha\beta}\pi^\beta_n + \pi^0_\alpha, \quad (3.53)$$

$$\mathcal{K}^4_\alpha = \frac{1}{\ell+1} H^{\hat{\tau}}_{\alpha\hat{\tau}}, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^4_\alpha + \mathcal{K}^4_\alpha \pi^0_0 = \frac{1}{\ell+1} H^n_{\alpha\beta}\pi^\beta_n + \pi^0_\alpha, \quad (3.54)$$

$$\mathcal{K}^5_\alpha = h_\alpha, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^5_\alpha + \mathcal{K}^5_\alpha \pi^0_0 = h^n_{\alpha\beta}\pi^\beta_n - \pi^0_\alpha. \quad (3.55)$$

3) В окрестности 3-го порядка

$$\mathcal{K}^6_\alpha = \frac{1}{\tau}\tilde{\Lambda}_\alpha, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^6_\alpha + \mathcal{K}^6_\alpha \pi^0_0 = H^n_{\beta\alpha}\pi^\beta_\alpha - \pi^0_\alpha, \quad (3.56)$$

$$\hat{\mathcal{K}}^6_\alpha = \frac{1}{\ell}\widetilde{M}_\alpha, \quad \nabla_\delta \hat{\mathcal{K}}^6_\alpha + \hat{\mathcal{K}}^6_\alpha \pi^0_0 = H^n_{\beta\alpha}\pi^\beta_\alpha - \pi^0_\alpha, \quad (3.57)$$

$$\hat{\mathcal{K}}^7_\alpha = \hat{B}_\alpha, \quad \nabla_\delta \hat{\mathcal{K}}^7_\alpha + \hat{\mathcal{K}}^7_\alpha \pi^0_0 = -H^n_{\beta\alpha}\pi^\beta_n - \pi^0_\alpha, \quad (3.58)$$

$$\mathcal{K}^7_\alpha = \hat{B}_\alpha + 3\hat{H}_\alpha, \quad \nabla_\delta \mathcal{K}^7_\alpha + \mathcal{K}^7_\alpha \pi^0_0 = 2(h^n_{\alpha\gamma}\pi^\gamma_n - 2\pi^0_\alpha). \quad (3.59)$$

3. Инвариантные оснащения в смысле Э.Картана.

а) Построим оснащение в смысле Картана для базисного распределения $\mathcal{H}_\tau$ плоскостей Π_τ. Предварительно проведем следующие вычисления. Продолжив уравнения (3.2) и полагая $\mathcal{K} = q$, получим дифференциальные уравнения для величин

$$\nabla \nu^p_{nq} + \nu^p_{nq}\omega^0_0 + \nu^p_n \Lambda^n_{sq}\omega^s_n + \nu^s_n \Lambda^n_{sq}\omega^p_n - \nu^s_n \delta^p_q \omega^0_s - \omega^0_n \delta^p_q - \omega^u_n M^p_{uq} \equiv 0. \quad (3.60)$$

Величина

$$\nu^0_n \stackrel{def}{=} -\frac{1}{\tau}(\nu^p_{np} - \Lambda^n_{pq}\nu^p_n \nu^q_n) \quad (3.61)$$

в силу (3.60), (1.2), (2.19), (2.21), (2.24) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla \nu^0_n + \nu^p_n \omega^0_p + H^0_\alpha \omega^\alpha_n + M^0_i \omega^i_n + \omega^0_n = \nu^0_{n\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_0. \quad (3.62)$$

Итак, построим инвариантную оснащающую плоскость $\mathcal{B}_{n-\tau-1}(\nu^p_n)(A_0)$, принадлежащую нормали I-го рода $\mathcal{N}_{n-\tau}(\nu^p_n)(A_0)$ базисного распределения $\mathcal{H}_\tau$. Плоскость $\mathcal{B}_{n-\tau-1}(\nu^p_n)$ зададим точками

$$\mathcal{K}_u(\nu^p_n) = x^0_u A_0 + A_u; \quad \mathcal{K}_n(\nu^p_n) = x^0_n A_0 + X_n(\nu^p_n),$$

где

$$X_n(\nu^p_n) = A_n + \nu^p_n A_p + \underline{\nu^\alpha_n} A_\alpha + \underline{\nu^i_n} A_i,$$

а фиксированные квазитензоры $\{\underline{\nu^i_n}\}, \{\underline{\nu^\alpha_n}\}$ – любые из построенных квазитензоров (2.17), (2.18). Из условия инвариантности плоскости $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$ приходим к следующим уравнениям:

$$\nabla x^0_n + \nu^p_n \omega^0_p + \underline{\nu}^\alpha_n \omega^0_\alpha + \underline{\nu}^i_n \omega^0_i + \omega^0_n \equiv 0, \quad \nabla x^0_u + \omega^0_u = x^0_{uK}\omega^K_0. \qquad (3.63)$$

Учитывая (3.62),(2.21),(2.24), убеждаемся, что уравнения (3.63) выполняются, если положить

$$x^0_n = \nu^0_n - \underline{\nu}^\alpha_n H^0_\alpha - \underline{\nu}^i_n L^0_i\,; \quad x^0_i = -L^0_i\,, \quad x^0_\alpha = -H^0_\alpha\,.$$

Таким образом, инвариантная оснащающая плоскость $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$ натянута на точки

$$K_\alpha = A_\alpha - H^0_\alpha A_0\,,\ K_i = A_i - L^0_i A_0\,; K_n(\nu^p_n) = (\nu^0_n - \underline{\nu}^\alpha_n H^0_\alpha - \underline{\nu}^i_n L^0_i)A_0 + X_n(\nu^p_n) \quad (3.64)$$

и определяется уравнениями

$$x^p - \nu^p_n x^n = 0, \quad x^0 - \nu^0_n x^n + H^0_\alpha x^\alpha + L^0_i x^i = 0. \qquad (3.65)$$

Плоскость $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$(3.64) пересекает характеристику $X_{n-r-1}(A_0)$ гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A_0)$ по $(n-r-2)$-мерной плоскости π_{n-r-2}:

$$x^n = x^p = 0\,; \quad x^0 + L^0_i x^i + H^0_\alpha x^\alpha = 0. \qquad (3.66)$$

Так как задание (3.66) плоскости π_{n-r-2} не зависит от выбора нормали I-го рода $N_{n-r}(\nu^p_n)$ (от выбора квазитензора $\{\nu^p_n\}$) в данной точке A_0, то, следовательно, в каждом центре A_0 распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ инвариантные оснащающие плоскости $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$ (3.65) принадлежат одному пучку, осью которого служит плоскость $\pi_{n-r-2}(A_0) \subset X_{n-r-1}(A_0)$. Отметим, что инвариантная точка $K_n(\nu^p_n)$ является точкой пересечения оснащающей плоскости $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$ с инвариантной прямой $N_1(\nu^p_n)=[A_0, X_n]$, соответствующей данной нормали $N_{n-r}(\nu^p_n)$, т.е. для распределения $\mathcal{H}_r$ точка $K_n(\nu^p_n)$ (3.64) представляет собой аналог обобщенной точки Кенигса [14], соответствующей нормали $N_{n-r}(\nu^p_n)$.

в) Аналогичным образом убеждаемся, что инвариантная оснащающая плоскость $\Pi_{n-\ell-1}(\nu^i_n)$ (плоскость Картана), принадлежащая нормали I-го рода $N_{n-\ell}(\nu^i_n)(A_0)$ распределения $\mathcal{H}_\ell$, определена точками

$$\hat{K}_\alpha = A_\alpha - \nu^0_\alpha A_0\,,\ \hat{K}_p = A_p - L^0_p A_0\,, \hat{K}_n(\nu^i_n) = (\varphi^0_n - \underline{\nu}^\alpha_n N^0_\alpha - \underline{\nu}^p_n L^0_p) + \underline{\nu}^{\hat u}_n A_{\hat u} + A_n\,, \quad (3.67)$$

где $\hat{K}_n(\nu^i_n)$ -аналог обобщенной точки Кенигса [14] соответствующей нормали $N_{n-\ell}(\nu^i_n)$. Кроме того, в каждом центре A_0 распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ инвариантные оснащающие плоскости $\Pi_{n-\ell-1}(\nu^i_n)$ всех нормалей 1-го рода $N_{n-\ell}(\nu^i_n)$ распределения $\mathcal{H}_\ell$ принадлежат одному пучку, осью которого служит плоскость $\pi_{n-\ell-2}(A_0) \subset X_{n-\ell-1}(A_0)$. Плоскость $\pi_{n-\ell-2}(A_0)$ относительно локального репера задается уравнениями [1, §5]:

$$x^i = x^n = 0, \quad x^0 + L^0_p x^p + N^0_\alpha x^\alpha = 0, \qquad (3.68)$$

плоскость $\Pi_{n-\ell-1}(\nu^i_n)(A_0)$ -уравнениями

$$x^i - \nu^i_n x^n = 0\,, \quad x^0 - \varphi^0_n x^n + L^0_p x^p + N^0_\alpha x^\alpha = 0, \qquad (3.69)$$

где

$$\varphi^0_n = -\frac{1}{\ell}\,(\nu^i_{ni} - M^n_{ki}\nu^k_n \nu^i_n).$$

с) Наконец, в каждом центре A_0 оснащающую плоскость $\Pi_m(\nu^\alpha_n)(A_0)$ (плоскость Картана), принадлежащую нормали 1-го рода $N_{m+1}(A_0)$ распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ характеристик X_{n-m-1}, зададим точками

$$\begin{cases} \tilde{K}_p = A_p - M^0_p A_0\,, \quad \tilde{K}_i = A_i - M^0_i A_0\,, \\ \tilde{K}_n(\nu^\alpha_n) = (\psi^0_n - \underline{\nu}^i_n M^0_i - \underline{\nu}^p_n M^0_p)A_0 + \nu^\alpha_n A_\alpha + \underline{\nu}^a_n A_a + A_n\,, \end{cases} \qquad (3.70)$$

где $\psi^0_n = -\frac{1}{n-m-1}(\nu^\alpha_{n\alpha} - H^n_{\gamma\alpha}\nu^\gamma_n \nu^\alpha_n)$, а $\{\underline{\nu}^p_n\}, \{\underline{\nu}^i_n\}$ -любые фиксированные квазитензоры из (2.16),(2.17). Можно показать [1, §5], что в каждом центре A_0 распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ инвариантные оснащающие плоскости $\Pi_m(\nu^\alpha_n)(A_0)$ всех нормалей 1-го рода $N_{m+1}(\nu^\alpha_n)$ распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ (Φ -распределения) принадлежат одному пучку, осью которого является плоскость $\pi_{m-1}(A_0) \subset X_m(A_0)$. Кроме того, точка $\tilde{K}_n(\nu^\alpha_n)$ (3.70) является аналогом обобщенной точки Кенигса [14] соответствующей нормали $N_{m+1}(\nu^\alpha_n)(A_0)$ распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$. Относительно локального репера плоскость $\pi_{m-1}(A_0)$ задается уравнениями

$$x^\alpha = x^n = 0, \quad x^0 + M^0_p x^p + M^0_i x^i = 0, \qquad (3.71)$$

а плоскость $\Pi_m(\nu^\alpha_n)(A_0)$ уравнениями

$$x^\alpha - \nu^\alpha_n x^n = 0\,, \quad x^0 - \psi^0_n x^n + M^0_p x^p + M^0_i x^i = 0. \qquad (3.72)$$

Геометрическая интерпретация плоскостей $\Pi_{n-r-1}(\nu^p_n)$ (3.65),

$\mathcal{L}_{n-\ell-1}(\nu^i_n)$ (3.69), $\mathcal{L}_m(\nu^\alpha_n)$ (3.72).

§4. Фокальные образы распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$.

1.Следуя работе [10], выясним геометрический смысл квазинормалей (§3), используя фокальные образы распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$. Фокальное многообразие, соответствующее смещениям центра A_0 по кривым, принадлежащим распределению $\mathcal{H}_r$, задается уравнениями:

$$x^{\hat u}=0,\quad \det\|x^0\delta^{\hat u}_{\hat v}+x^p\Lambda^{\hat u}_{p\hat v}+x^p\Lambda^{\hat u}_{pq}\nu^q_n\delta^n_{\hat v}\|=0. \qquad (4.1)$$

В общем случае мы получаем алгебраическое многообразие размерности $r-1$ порядка $n-r$, которое обозначим символом $\mathfrak{A}^{n-r}_{r-1}(\nu^p_n)$.

Найдем уравнения линейной поляры центра A_0 распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ относительно фокального многообразия $\mathfrak{A}^{n-r}_{r-1}(\nu^p_n)$ в плоскости $\Pi_r(A_0)$:

$$x^{\hat u}=0,\quad x^0-\nu^0_p x^p=0, \qquad (4.2)$$

где

$$\nu^0_p=-\left(\mathcal{K}^1_p+\frac{1}{n-r}\Lambda^n_{pq}\nu^q_n\right). \qquad (4.3)$$

Таким образом, линейная поляра (4.2) совпадает с нормалью 2-го рода $\mathcal{N}_{r-1}(\nu^0_p)(A_0)$ плоскости $\Pi_r(A_0)$, соответствующей нормали 1-го рода $N_{n-r}(\nu^p_n)(A_0)$ в биекции (4.3), устанавливаемой квазинормалью $\{\mathcal{K}^1_p\}$.

2.Фокальное многообразие $\mathcal{L}^{m+1}_{n-m-2}(\nu^\alpha_n)$ [1, §6] в плоскости $\chi_{n-m-1}(A_0)$ задается относительно локального репера $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ системой уравнений

$$x^{\hat a}=0,\quad \det\|x^0\delta^{\hat a}_{\hat b}+x^\alpha(H^{\hat a}_{\alpha\hat b}+H^{\hat a}_{\alpha\beta}\nu^\beta_n\delta^n_{\hat b})\|=0. \qquad (4.4)$$

Уравнения линейной поляры центра A_0 относительно многообразия $\mathcal{L}^{m+1}_{n-m-2}(\nu^\alpha_n)$ имеют вид:

$$x^{\hat a}=0,\quad x^0-\nu^0_\alpha x^\alpha=0, \qquad (4.5)$$

где

$$\nu^0_\alpha=-\left(\mathcal{K}^2_\alpha+\frac{1}{m+1}H^n_{\alpha\beta}\nu^\beta_n\right). \qquad (4.6)$$

Отсюда вытекает, что квазинормаль $\{\mathcal{K}^2_\alpha\}$ определяет проективитет Бомпьяни-Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ характеристик χ_{n-m-1}.

3.Уравнения

$$x^{\hat A}=0,\quad \det\|x^0\delta^{\hat A}_{\hat B}+x^i(M^{\hat A}_{i\hat B}+M^{\hat A}_{ij}\nu^j_n\delta^n_{\hat B})\|=0 \qquad (4.7)$$

в общем случае определяют $(\ell-1)$-мерное алгебраическое многообразие порядка $n-\ell$, принадлежащее плоскости $\Pi_\ell(A_0)\subset\mathcal{H}_\ell$ – фокальное многообразие $\mathfrak{A}^{n-\ell}_{\ell-1}(\nu^i_n)$, соответствующее инвариантной нормали $N_{n-\ell}(\nu^i_n)(A_0)$. Линейная поляра центра A_0 относительно фокального многообразия $\mathfrak{A}^{n-\ell}_{\ell-1}(\nu^i_n)$ распределения $\mathcal{H}_\ell$ задается уравнениями:

$$x^{\hat A}=0,\quad x^0-\nu^0_i x^i=0, \qquad (4.8)$$

где

$$\nu^0_i=-\left(\mathcal{K}^3_i+\frac{1}{n-3}M^n_{ij}\nu^j_n\right). \qquad (4.9)$$

Из соотношений (4.8),(4.9) вытекает, что квазинормаль $\{\mathcal{K}^3_i\}$ определяет аналог проективитета Бомпьяни-Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_\ell$.

4.Аналогичным образом выясняется геометрический смысл квазинормалей $\{\mathcal{K}^2_p\},\{\mathcal{K}^4_\alpha\},\{\mathcal{K}^4_i\},\{\mathcal{K}^3_\alpha\},\{\mathcal{K}^3_p\},\{\mathcal{K}^1_i\}$:

а) Квазинормали $\{\mathcal{K}^2_p\},\{\mathcal{K}^3_p\}$ определяют еще два аналога поляритета Бомпьяни-Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_r$ (в отличие от найденного ранее (4.3));

в) Квазинормали $\{\mathcal{K}^4_\alpha\},\{\mathcal{K}^3_\alpha\}$ устанавливают аналоги проективитета Бомпьяни-Пантази для распределения $\mathcal{H}_{n-m-1}$ (в отличие от проективитета (4.6));

с) Квазинормали $\{\mathcal{K}^4_i\},\{\mathcal{K}^1_i\}$ задают аналоги поляритета Бомпьяни-Пантази нормалей 1-го и 2-го рода распределения $\mathcal{H}_\ell$ (в отличие от поляритета (4.9)).

Библиографический список

1.П о п о в Ю.И. Трехсоставные регулярные распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ проективного пространства /Калинингр.ун-т.Калининград, 1982.126с.Библиогр.20 назв.Деп.в ВИНИТИ.16.12.82.№ 6192-82.

2.Н о р д е н А.П. Теория композиций //Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М.,1978.Т.10.С.117-145.

3.С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1975.Т.7,С.117-151.

4.Попов Ю.И. Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства.I/ Калинингр. ун-т.Калининград,1984.93с.Библиогр.21 назв. Деп. в ВИНИТИ.2.07.84.№ 4481-84.

5.Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

6.Попов Ю.И. О полях геометрических объектов многомерной распадающейся гиперполосы проективного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1977.Вып.8.С.43-70.

7.Атанасян Л.С. К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства//Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина.М.,1957.Т.108.Вып.2.С.3-44.

8.Попов Ю.И. Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n //Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр/ Калинингр.ун-т.Калининград,1970.Вып.6.С.27-46.

9.Попов Ю.И. Внутренние оснащения вырожденной m-мерной гиперполосы H^r_m ранга r многомерного проективного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб. науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1975.Вып.6.С.102-142.

10.Лаптев Г.Ф.,Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ,М.,1971.Т.3.С.49-94.

11.Акивис М.А. О строении двухкомпонентных сопряженных систем//Тр.геометр.семинара/ ВИНИТИ.М.,1966.Т.1.С.7-31.

12.Чакмазян А.В. Двойственная нормализация/Докл. АН Арм.ССР.1959.Т.28.№4.С.151-157.

13.Норден А.П. Пространства аффинной связности.М.: Наука,1976.

14.Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве//Тр.геометр.семинара / ВИНИТИ.М.,1973.Т.4.С.71-120.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ МНОГООБРАЗИЯ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ

М.М.Похила,Т.Н.Балазюк
(Черновицкий ун-т)

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы геометрии подмногообразий M_n многообразия почти комплексной структуры $M_n(J)$,оснащенных таким полем нормалей N ,что в каждой точке $x \in M_m$ соответствующая нормаль N_x пересекает образ $J T_x(M_m)$ касательного к подмногообразию пространства $T_x(M_m)$ по подпространству постоянной размерности r .
Считаем,что $0 < r < n-m < m$.

Пусть $M_n(J)$ n-мерное многообразие почти комплексной структуры со структурными формами ω^I $(I,K,L=\overline{1,n})$. Зададим на многообразии $M_n(J)$ поле объекта линейной связности $\Gamma=\{\Gamma^I_{KL}\}$, присоединенного к группе $\mathcal{D}^2_n$:

$$d\Gamma^I_{JK} - \Gamma^I_{LK}\omega^L_J - \Gamma^I_{JL}\omega^L_K + \Gamma^L_{JK}\omega^I_L - \Gamma^M_{JK}\Gamma^I_{ML}\omega^L + \omega^I_{JK} = \Gamma^I_{JKL}\omega^L. \qquad (1)$$

Если m-мерное подмногообразие M_m многообразия $M_n(J,\Gamma)$ задано системой дифференциальных уравнений

$$\omega^I = \Lambda^I_i\theta^i \qquad (i,j\ldots=\overline{1,m}), \qquad (2)$$

то $\{\Lambda^I_i\}$ является фундаментальным объектом первого порядка подмногообразия M_m ,который удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$d\Lambda^I_i - \Lambda^I_j\theta^j_i + \Lambda^K_i\omega^I_K = \Lambda^I_{ij}\theta^j. \qquad (3)$$

В каждой точке $x \in M_m$ касательное пространство $T_x(M_m)$ определяется векторами

$$\Lambda_i = \Lambda^I_i e_I, \qquad (4)$$

а группа $\mathcal{D}^1_m$ с инвариантными формами $\bar\theta^j_i = \theta^j_i|_{\theta^i=0}$ в каждом касательном пространстве представлена как группа преобразований векторного репера Λ_i :

$$\delta\Lambda_i = \bar\theta^j_i\Lambda_j. \qquad (5)$$

Пусть подмногообразие M_m нормально оснащено полем объекта $\{N^I_\alpha\}$ $(\alpha,\beta=\overline{m+1,n})$:

$$dN^I_\alpha - N^I_\beta\theta^\beta_\alpha + N^K_\alpha\omega^I_K = N^I_{\alpha i}\theta^i. \qquad (6)$$

В каждой точке $x \in M_m$ нормально оснащающее подпространство определяется $n-m$ линейно независимыми векторами

$$N_\alpha = N_\alpha^J e_J, \tag{7}$$

для которых

$$\delta N_\alpha = \overline{\theta}_\alpha^\beta N_\beta. \tag{8}$$

Так как в M_n задана линейная связность Γ, то, как известно, такое нормально оснащающее поле $N(M_m)$ может быть присоединено к M_m внутренним образом [1].

Будем считать, что нормальное оснащение $N(M_m)$ характеризуется тем, что в каждой точке $x \in M_m$ нормаль $N_x(M_m)$ пересекает образ $\mathcal{J}T_x(M_m)$ касательного пространства $T_x(M_m)$ по τ-мерному подпространству $\nu_x(M_m)$ $(0<\tau<n-m)$.

Пусть подпространство ν_x в каждой точке $x \in M_m$ определяется линейно независимыми векторами

$$\nu_{\alpha_1} = \nu_{\alpha_1}^\alpha N_\alpha \quad (\alpha_1, \beta_1, \ldots = \overline{m+1, m+\tau}), \tag{9}$$

для которых

$$\delta \nu_{\alpha_1} = \overline{\vartheta}_{\alpha_1}^{\beta_1} \nu_{\beta_1}. \tag{10}$$

Таким образом, поле ν – τ-мерных подпространств ν_x задается полем объекта $\{\nu_{\alpha_1}^\alpha\}$, компоненты которого удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$d\nu_{\alpha_1}^\alpha - \nu_{\beta_1}^\alpha \vartheta_{\alpha_1}^{\beta_1} + \nu_{\alpha_1}^\beta \theta_\beta^\alpha = \nu_{\alpha_1 i}^\alpha \theta^i. \tag{11}$$

Каждое нормально оснащающее поле $N(M_m)$ подмногообразия M_m многообразия $M_n(\mathcal{J})$ естественным образом определяет на M_m $(f\xi\eta\rho)$-структуру [2] со структурными объектами $\{f_i^j\}$, $\{\xi_\alpha^i\}$, $\{\eta_i^\alpha\}$, $\{\rho_\alpha^\beta\}$. В общем случае линейный объект $\{\xi_\alpha^i\}$ определяет $(n-m)$ линейно независимых векторов

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha^i \Lambda_i, \tag{12}$$

которые в каждой точке $x \in M_m$ определяют $(n-m)$-мерное подпространство $\xi_x \subset T_x(M_m)$, а объект $\{\eta_i^\alpha\}$ определяет в $T_x(M_m)$ $(2m-n)$-мерное $\mathcal{J}$-инвариантное подпространство $\eta_x \overset{def}{=} T_x \cap \mathcal{J}T_x$ такое, что

$$\xi_x \oplus \eta_x = T_x(M_m). \tag{13}$$

П р е д л о ж е н и е. Образ подпространства ν_x в каждой точке $x \in M_m$ принадлежит подпространству ξ_x.

Действительно, т.к. $\nu_x \subset \mathcal{J}T_x$, то $\mathcal{J}\nu_x \subset T_x$. В то же время $\mathcal{J}\nu_{\alpha_1} = \mathcal{J}(\nu_{\alpha_1}^\alpha N_\alpha) = \nu_{\alpha_1}^\alpha(-\xi_\alpha^i \Lambda_i + \rho_\alpha^\beta N_\beta)$. Следовательно, $\nu_{\alpha_1}^\alpha \rho_\alpha^\beta = 0$, $\mathcal{J}\nu_{\alpha_1} = -\nu_{\alpha_1}^\alpha \xi_\alpha$, т.е. $\mathcal{J}\nu_x \subset \xi_x$.

Обозначим через B_x образ подпространства ν_x. Это подпространство B_x определяется векторами

$$B_\sigma = B_\sigma^i \Lambda_i \quad (\tau, \sigma, \ldots = \overline{1, \tau}), \tag{14}$$

где

$$B_\sigma^i = -\nu_{m+\sigma}^\alpha \xi_\alpha^i \quad (\alpha_1 = m+\sigma = \overline{m+1, m+\tau}), \tag{15}$$

а поле B подпространств B_x задается системой дифференциальных уравнений:

$$dB_\sigma^i - B_\tau^i \vartheta_{m+\sigma}^{m+\tau} + B_\sigma^j \theta_j^i = B_{\sigma j}^i \theta^j, \tag{16}$$

где

$$B_{\sigma j}^i = \nu_{m+\sigma}^\alpha \xi_{\alpha j}^i - \nu_{m+\sigma j}^\alpha \xi_\alpha^i \tag{17}$$

Известно [3], что каждое нормальное оснащение N подмногообразия M_m многообразия $M_n(\mathcal{J}, \Gamma)$ индуцирует в касательном и нормальном расслоениях тангенциальную $\overset{1}{\gamma} = \{\overset{1}{\gamma}{}_{jk}^i\}$ и нормальную $\{\overset{2}{\gamma}{}_{\beta k}^\alpha\} = \overset{2}{\gamma}$ линейные связности соответственно. Линейные связности $\overset{0}{\gamma}$ и $\overset{*}{\gamma}$, которые определяются формулами

$$\overset{0}{\gamma}{}_{jk}^i = -\overset{*}{\Lambda}{}_{\varkappa}^i(\Lambda_{jk}^\varkappa - \Lambda_j^L \Gamma_{Lk}^\varkappa), \tag{18}$$

$$\overset{*}{\gamma}{}_{\beta k}^\alpha = -\overset{*}{N}{}_\varkappa^\alpha(N_{\beta k}^\varkappa - N_\beta^L \Gamma_{Lk}^\varkappa), \quad \Gamma_{Lk}^\varkappa = \Gamma_{LJ}^\varkappa \Lambda_k^J, \tag{19}$$

называют [3] индуцированной и вертикальной связностями.

Т е о р е м а. Если распределение ξ инволютивно и плоскость $\nu_x \subset N_x$ переносится параллельно в вертикальной связности $\overset{*}{\gamma}$ вдоль кривых, принадлежащих распределению B, то распределение B инволютивно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия инволютивности распределений ξ и B в репере $R(\Lambda_i, N_\alpha)$ имеют вид [4]:

$$\xi_{\alpha j}^i \xi_\beta^j - \xi_{\beta j}^i \xi_\alpha^j = 0, \tag{20}$$

$$B_{\sigma j}^i B_\tau^j - B_{\tau j}^i B_\sigma^j = 0. \tag{21}$$

Для упрощения доказательства теоремы произведем частичную канонизацию репера $R(\Lambda_i, N_\alpha)$, положив

$$\xi_\alpha^i = \xi_{m+u}^i = \delta_u^i \quad (u, v, \ldots = \overline{1, n-m}). \tag{22}$$

Полученный репер характеризуется тем, что $\xi_{m+u} = \Lambda_u$. Учитывая (22) и (15), получаем

$$B_\sigma^a = 0 \quad (a, b, \ldots = \overline{n-m+1, m}). \tag{23}$$

Произведем дальнейшую канонизацию репера $R(\Lambda_i, N_\alpha)$, положив

$$B_\sigma^u = \delta_\sigma^u. \tag{24}$$

Репер $\widetilde{R}(\Lambda_i, N_\alpha)$, для которого выполняются равенства (22) и (24), характеризуется тем, что векторы Λ_u репера $R(\Lambda_i, N_\alpha)$ помещены в подпространство ξ_x, причем векторы Λ_σ принадлежат подпространству B_x.

Условия инволютивности (20) и (21) распределений ξ и B в репере $\widetilde{R}(\Lambda_i, N_\alpha)$ имеют соответственно вид:

$$\xi^i_{m+u v} - \xi^i_{m+v u} = 0, \qquad (20)$$

$$(\xi^u_{m+\tau\sigma} - \xi^u_{m+\sigma\tau}) + (\nu^{m+u}_{m+\sigma\tau} - \nu^{m+u}_{m+\tau\sigma}) = 0, \quad \xi^a_{m+\tau\sigma} - \xi^a_{m+\sigma\tau} = 0. \qquad (21)$$

Плоскость ν_x переносится параллельно в вертикальной связности $\overset{*}{\gamma}$ при смещении точки $x \in M_m$ по кривым, принадлежащим распределению B, если в репере $\widetilde{R}(\Lambda_i, N_\alpha)$ выполняются соотношения:

$$\nu^\alpha_{\alpha,\sigma} = 0. \qquad (25)$$

Так как по условию теоремы выполнены соотношения (20) и (25), то выполнены также и соотношения (21), т.е. распределение B инволютивно.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности//Докл.АН СССР.1959.Т.126,№3. С.490-493.

2. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. $(f \varepsilon \eta \rho)$-структура на дифференцируемом многообразии// Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1975. Т.7.С.5-22.

3. Остиану Н.М., Домбровский Р.Ф., Поляков Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами.II.Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях// Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1982.Т.13.С.27-76.

4. О с т и а н у Н.М. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами.У. CR-подмногообразия в многообразии почти комплексной структуры // Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1987.Т.19.С.59-100.

УДК 514.76

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ Т-СВЯЗНОСТИ

А.К.Р ы б н и к о в

(Московский ун-т)

В настоящей работе продолжено изучение дифференциально-геометрических структур, ассоциированных с совокупностью аффинных связностей, получаемых друг из друга путем так называемых Т-преобразований (см. [1]), соответствующих тензорному полю T^{im}_{jk} ($T^{im}_{jk} = T^{im}_{kj}$, $T^{tm}_{tk} = 0$). Класс Т-преобразований довольно широк: в нем, в частности, содержатся проективные, конформные, некоторые почти проективные преобразования связностей. Ранее [1] мы изучали структуры (Т-связности), при рассмотрении которых требовалась симметрия тензора T^{im}_{jk} не только по нижним, но также по верхним индексам. В этой работе указан способ обобщения понятия Т-связности, при котором можно отказаться от симметрии тензора T^{im}_{jk} по верхним индексам и расширить, таким образом, круг изучаемых структур.

1. При преобразовании аффинных связностей (без кручения), определенных на многообразии M_n, происходит преобразование проективных нормалей, определенных заданием объекта Π^i_{jk} ($i,j,k = 1,\dots,n$), и преобразование касательных оснащений, определенных заданием объекта π_j [2]. Снабдив проективные нормали оснащениями (оснащенные проективные нормали определяются заданием расширенного объекта Π^i_{jk}, Π^0_{jk}), получим структуру, которую назовем дополненной аффинной связностью. В дополненной аффинной связности содержится аффинная связность, определенная объектом (Π^i_{jk}, π_j). Будем рассматривать преобразования дополненной аффинной связности, при которых изменение оснащенных проективных нормалей и касательных оснащений происходит согласованно, причем тензор деформации оснащенных проективных нормалей с компонентами N^i_{jk}, N^0_{jk} ($N^i_{jk} = \widetilde{\Pi}^i_{jk} - \Pi^i_{jk}$, $N^0_{jk} = \widetilde{\Pi}^0_{jk} - \Pi^0_{jk}$) и ковектор P_j ($P_j = \widetilde{\pi}_j - \pi_j$), определяющий преобразование касательных оснащений, связаны соотношениями $N^i_{jk} = T^{im}_{jk} P_m$, $N^0_{jk} = T^{om}_{jk} P_m$. Такие преобразования дополненной аффинной связности будем называть Т-преобразованиями.

Коэффициенты T^{im}_{jk} ($T^{im}_{jk} = T^{im}_{kj}$, $T^{tm}_{tk} = 0$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dT^{im}_{jk} + T^{tm}_{jk}\theta^i_t + T^{it}_{jk}\theta^m_t - T^{im}_{tk}\theta^t_j - T^{im}_{jt}\theta^t_k = T^{im}_{jk,\ell}\theta^\ell_0,$$

где $\theta_0^{\hat{\imath}}, \theta_j^{\hat{\imath}}, \theta_{jk}^{\hat{\imath}}, \dots$ ($\hat{\imath}=0,\hat{1},\dots,n$) – структурные формы в расслоениях проективных реперов, т.е. в главных расслоениях проективной структуры, построенных над M_n как над базой [3]. Коэффициенты T_{jk}^{om} ($T_{jk}^{om}=T_{kj}^{om}$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dT^{om}_{jk} + T^{tm}_{jk}\theta^o_t + T^{ot}_{jk}\theta^m_t - T^{om}_{tk}\theta^t_j - T^{om}_{jt}\theta^t_k + T^{om}_{jk}\theta^o_o = T^{om}_{jk,\ell}\theta^\ell_o.$$

Объект с компонентами T^{im}_{jk} является тензором, а расширенный объект (T^{im}_{jk}, T^{om}_{jk}) проективным тензором, содержащим подтензор с компонентами T^{im}_{jk}.

Величины $q^i_{jk}=\Pi^i_{jk}-T^{im}_{jk}\pi_m$, $q^o_{jk}=\Pi^o_{jk}-T^{om}_{jk}\pi_m$ не изменяются при Т-преобразованиях дополненной аффинной связности. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dq^i_{jk} + q^m_{jk}\theta^i_m - q^i_{mk}\theta^m_j - q^i_{jm}\theta^m_k + q^i_{jk}\theta^o_o - \theta^i_{jk} + T^{im}_{jk}\theta^o_m = q^i_{jk,\ell}\theta^\ell_o,$$

$$dq^o_{jk} + q^m_{jk}\theta^o_m - q^o_{mk}\theta^m_j - q^o_{jm}\theta^m_k + 2q^o_{jk}\theta^o_o - \theta^o_{jk} + T^{om}_{jk}\theta^o_m = q^o_{jk,\ell}\theta^\ell_o.$$

2. С совокупностью дополненных аффинных связностей, получаемых друг из друга с помощью Т-преобразований, ассоциируется дифференциально-геометрическая структура специального типа. Эту структуру, определяемую заданием объекта с компонентами $T^{im}_{jk}, T^{om}_{jk}, q^i_{jk}, q^o_{jk}$, мы назовем обобщенной Т-связностью в отличие от рассматривавшейся нами ранее [1] структуры, ассоциированной с совокупностью аффинных связностей (не дополненных), связанных преобразованиями такими, что $N^i_{jk}=T^{im}_{jk}P_m$, которую мы называли Т-связностью. При рассмотрении (обычных) Т-связностей мы были вынуждены требовать симметрии тензора T^{im}_{jk} не только по нижним, но также по верхним индексам. Для обобщенных Т-связностей симметрия T^{im}_{jk} по верхним индексам не обязательна.

Введем формы $\tilde\theta^i_j = \theta^i_j + q^i_{jk}\theta^k_o$, $\tilde\theta^o_j=\theta^o_j+q^o_{jk}\theta^k_o$. Можно убедиться в том, что

$$\begin{cases} \mathcal{D}\theta^i_o = \theta^o_o\wedge\theta^i_o + \theta^k_o\wedge\tilde\theta^i_k, \\ \mathcal{D}\theta^o_o = \theta^k_o\wedge\tilde\theta^o_k, \\ \mathcal{D}\tilde\theta^i_j = \tilde\theta^o_j\wedge\theta^i_o + \tilde\theta^m_j\wedge\tilde\theta^i_m - T^{im}_{jk}\tilde\theta^o_m\wedge\theta^k_o + R^i_{jk\ell}\theta^k_o\wedge\theta^\ell_o, \\ \mathcal{D}\tilde\theta^o_j = \tilde\theta^o_j\wedge\theta^o_o + \tilde\theta^m_j\wedge\tilde\theta^o_m - T^{om}_{jk}\tilde\theta^o_m\wedge\theta^k_o + R^o_{jk\ell}\theta^k_o\wedge\theta^\ell_o, \end{cases} \quad (I)$$

где

$$\begin{cases} R^i_{jk\ell} = -\frac12\left(q^i_{j[k,\ell]} + q^m_{j[k}q^i_{\ell]m} + q^o_{j[k}\delta^i_{\ell]} + T^{im}_{j[k}q^o_{\ell]m}\right), \\ R^o_{jk\ell} = -\frac12\left(q^o_{j[k,\ell]} + q^m_{j[k}q^o_{\ell]m} + T^{om}_{j[k}q^o_{\ell]m}\right). \end{cases} \quad (2)$$

При этом $R^m_{mk\ell}=0$, $R^i_{[jk\ell]}=0$, $R^o_{[jk\ell]}=0$. Формы $\tilde\theta^i_j, \tilde\theta^o_j$ будем называть структурными формами, а уравнения (I) структурными уравнениями обобщенной Т-связности.

Рассматривая дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют $R^i_{jk\ell}$ и $R^o_{jk\ell}$, мы видим, что в случае, если будет выполнено условие

$$T^{im}_{j[k,\ell]} + T^{tm}_{j[k}q^i_{\ell]t} + q^t_{j[k}T^{im}_{\ell]t} + T^{it}_{j[k}q^m_{\ell]t} + T^{om}_{j[k}\delta^i_{\ell]} + T^{it}_{j[k}T^{om}_{\ell]t} = 0, \quad (3)$$

величины $R^i_{jk\ell}$ превратятся в компоненты тензора, а также, что объект с компонентами $R^i_{jk\ell}, R^o_{jk\ell}$ будет проективным тензором (содержащим подтензор с компонентами $R^i_{jk\ell}$), если, в дополнение к условию (3), будет выполнено условие

$$T^{om}_{j[k,\ell]} + T^{tm}_{j[k}q^o_{\ell]t} + q^t_{j[k}T^{om}_{\ell]t} + T^{ot}_{j[k}q^m_{\ell]t} + T^{ot}_{j[k}T^{om}_{\ell]t} = 0.$$

Тензор $R^i_{jk\ell}$ мы условимся называть тензором кривизны, а проективный тензор с компонентами $R^i_{jk\ell}$, $R^o_{jk\ell}$ –расширенным тензором кривизны обобщенной Т-связности.

Наложим на тензор T^{im}_{jk} дополнительное условие, потребовав, чтобы

$$\det\|\tau^{uv}_{jk}\|\ne 0, \quad (4)$$

где $\tau^{uv}_{jk}=\frac12\left(T^{(uv)}_{jk} + (n-1)\delta^u_{(j}\delta^v_{k)}\right)$.

Если в (3) мы произведем свертывание по i и ℓ, то придем к соотношениям, из которых следует

$$T^{om}_{jk} = -\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{jk}\left(T^{sm}_{uv,s} - T^{sm}_{tu}q^t_{vs} - T^{sm}_{tv}q^t_{us} + T^{st}_{uv}q^m_{st}\right),$$

где $\|\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{jk}\| = \|\tau^{uv}_{jk}\|^{-1}$.

Еще одно важное соотношение можно получить в результате свертывания по i и ℓ в первом из уравнений (2) и последующего разрешения относительно q^o_{jk} :

$$q^{\circ}_{jk} = \overset{*}{\tau}{}^{uv}_{jk} \left(q^m_{tu}\, q^t_{vm} - q^m_{uv,m} - 2R^m_{uvm} \right).$$

Справедливо следующее

П р е д л о ж е н и е. В случае, когда тензор T^{im}_{jk} удовлетворяет условию (4) и, кроме того, условию

$$T^{tm}_{j[k} T^{ia}_{l]t} + T^{ta}_{j[k} T^{im}_{l]t} - T^{am}_{j[k} \delta^i_{l]} - T^{ma}_{j[k} \delta^i_{l]} + (n-1) T^{im}_{j[k} \delta^a_{l]} + \tag{5}$$
$$+ (n-1) T^{ia}_{j[k} \delta^m_{l]} + n\, \delta^m_j \delta^a_{[k} \delta^i_{l]} + n\, \delta^a_j \delta^m_{[k} \delta^i_{l]} +$$
$$+ \left(\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{j[k} \delta^i_{l]} + T^{iq}_{j[k} \overset{*}{\tau}{}^{uv}_{l]q} \right) \left(T^{sm}_{t(u} T^{ta}_{v)s} - n(n-1)\, \delta^m_{(u} \delta^a_{v)} \right) = 0,$$

а его ковариантные производные $T^{im}_{jk|l}$ по отношению к одной из аффинных связностей, определенных на многообразии, удовлетворяют условиям

$$T^{im}_{j[k|l]} - \left(\overset{*}{\tau}{}^{uv}_{j[k} \delta^i_{l]} + T^{it}_{j[k} \overset{*}{\tau}{}^{uv}_{l]t} \right) T^{sm}_{uv|s} = 0, \tag{6}$$

то имеют место соотношения (3) (и, следовательно, величины R^i_{jkl} являются компонентами тензора).

3. Наиболее интересный подкласс обобщенных T-связностей представляют нормальные обобщенные T-связности, которые удовлетворяют условию $R^m_{jkm} = 0$ (одновременно предполагается, что имеют место условия (5) и (6)). Для нормальных обобщенных T-связностей

$$q^{\circ}_{jk} = \overset{*}{\tau}{}^{uv}_{jk} \left(q^m_{tu}\, q^t_{vm} - q^m_{uv,m} \right).$$

Нормальная обобщенная T-связность полностью определяется заданием объекта (T^{im}_{jk}, q^i_{jk}) и, следовательно, может быть ассоциирована (подобно нормальной T-связности, которую мы рассматривали ранее [1]) с совокупностью аффинных связностей без кручения, получаемых друг из друга с помощью T-преобразований (при соответствующих дополнительных условиях). Для любой такой аффинной связности можно построить следующий тензор R^i_{jkl}, который мы будем называть тензором T-кривизны:

$$R^i_{jkl} = K^i_{jkl} + \frac{1}{n+1} \delta^i_j K_{[kl]} - \frac{1}{2(n+1)} \left(K_{j[k} \delta^i_{l]} + \delta^i_{[k} K_{l]j} \right) +$$
$$+ \frac{1}{2(n+1)} \left(T^{ia}_{j[k} K_{l]a} + K_{a[k} T^{ia}_{l]j} \right) - \frac{1}{2} \left(T^{ia}_{j[k} \delta^b_{l]} + \delta^a_j \delta^b_{[k} \delta^i_{l]} \right) \overset{*}{\tau}{}^{uv}_{ab} \left(K_{(uv)} + \frac{2}{n+1} T^{st}_{uv} K_{[st]} \right),$$

где K^i_{jkl} – тензор кривизны аффинной связности, K_{jk} – тензор Риччи (здесь исправлена неточность в последнем слагаемом, которая была допущена в [4]).

Имеет место следующая теорема, из которой следует инвариантность тензора T-кривизны относительно T-преобразований аффинной связности.

Т е о р е м а. Для всех аффинных связностей без кручения, которым соответствует общая нормальная обобщенная T-связность, тензор T-кривизны – один и тот же и совпадает с тензором кривизны нормальной обобщенной T-связности.

Библиографический список

1. Р ы б н и к о в А.К. Об одном специальном типе дифференциально-геометрических структур (T-связности)//Всесоюзная конференция по геометрии "в целом": Тез.докл. Новосибирск, 1987. С. 106.

2. Р ы б н и к о в А.К. Проективные и конформные нормали и связности//Изв.вузов. Математика. 1986. №1. С. 60–69.

3. Л а п т е в Г.Ф. Основные дифференциальные структуры на гладком многообразии//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ. М., 1966. Т. I. С. 139–189.

4. Р ы б н и к о в А.К. Обобщенные T-связности//Всесоюзная геометр. конф.: Тез.сообщений. Кишинев, 1988. С. 273–274.

УДК 514.75

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ГРАФИКА ОДНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

А.А. Р ы л о в

(МГПИ им. В.И. Ленина)

В работе рассматриваются случаи частичного отображения p-мерных поверхностей, погруженных в евклидовы пространства E_n и $\bar{E}_n$, когда график отображения несет геодезические специального вида или допускает параллельное перенесение единичного векторного поля в нормальной связности по любому направлению.

1. В собственно евклидовом пространстве E_{2n} рассмотрим две вполне ортогональные евклидовы плоскости E_n и $\bar{E}_n$, имеющие общую точку O. Пусть V_p и $\bar{V}_p$ – гладкие поверхности в E_n и $\bar{E}_n$ соответственно. Диффеоморфизму f области $\Omega \subset V_p$ на область

$\overline{\Omega} \subset \overline{V}_p$ соответствует поверхность в пространстве E_{2n}

$$V_p^* = \{x \mid \vec{Ox} = \vec{Ox}_1 + \vec{Ox}_2,\ x_1 \in \Omega,\ x_2 = f(x_1) \in \overline{\Omega}\},$$

называемая графиком отображения f. На протяжении изложения

$$i,j,k = \overline{1,p};\quad a,b = \overline{p+1,n};\quad A,B = \overline{p+1,2n}.$$

Отнесем области $\Omega, \overline{\Omega}$ и график V_p^* соответственно к реперам $R^{x_1} = \{x_1, \vec{e}_i, \vec{e}_a\}$, $R^{x_2} = \{x_2, \vec{e}_{n+i}, \vec{e}_{n+a}\}$, $R^x = \{x, \vec{\mathcal{E}}_i, \vec{\mathcal{E}}_a, \vec{\mathcal{E}}_{n+i}, \vec{\mathcal{E}}_{n+a}\}$, где $\vec{e}_i \in T_p(x_1)$, $\vec{e}_{n+i} = f_{*x_1}(\vec{e}_i) \in T_p(x_2)$, $\vec{\mathcal{E}}_i = \vec{e}_i + \vec{e}_{n+i} \in T_p(x)$,

причем $T_p(x_1), T_p(x_2), T_p(x)$ -касательные плоскости к поверхностям $V_p, \overline{V}_p, V_p^*$ в соответствующих точках x_1, x_2, x, а векторы $\vec{e}_a$ и $\vec{e}_{n+a}$ составляют ортонормированные базисы ортогональных дополнений к $T_p(x_1)$ и $T_p(x_2)$ в пространствах E_n и $\overline{E}_n$ соответственно. Обозначаем: $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$; $\overline{\gamma}_{ij} = \vec{e}_{n+i} \cdot \vec{e}_{n+j}$, $g_{ij} = \vec{\mathcal{E}}_i \cdot \vec{\mathcal{E}}_j = \gamma_{ij} + \overline{\gamma}_{ij}$ метрические тензоры поверхностей $V_p, \overline{V}_p$ и V_p^* соответственно.

Векторы

$$\vec{\mathcal{E}}_{n+i} = \vec{e}_i - \gamma_{ij}\overline{\gamma}^{jk}\vec{e}_{n+k},\quad \vec{\mathcal{E}}_a = \vec{e}_a,\quad \vec{\mathcal{E}}_{n+a} = \vec{e}_{n+a} \qquad (1)$$

лежат в ортогональном дополнении $N_{2n-p}(x)$ к плоскости $T_p(x)$ в пространстве E_{2n}. Деривационные формулы этих реперов имеют вид:

$$R^{x_1}:\ d\vec{x}_1 = \omega^i\vec{e}_i,\ d\vec{e}_i = \omega_i^j\vec{e}_j + \omega_i^a\vec{e}_a,\ d\vec{e}_a = \omega_a^i\vec{e}_i + \omega_a^b\vec{e}_b; \qquad (2)$$

$$R^{x_2}:\ d\vec{x}_2 = \overline{\omega}^i\vec{e}_{n+i},\ d\vec{e}_{n+i} = \overline{\omega}_i^j\vec{e}_{n+j} + \overline{\omega}_i^a\vec{e}_{n+a},\ d\vec{e}_{n+a} = \overline{\omega}_a^i\vec{e}_{n+i} + \overline{\omega}_a^b\vec{e}_{n+b}; \qquad (3)$$

$$R^x:\ d\vec{x} = \theta^i\vec{\mathcal{E}}_i,\ d\vec{\mathcal{E}}_i = \theta_i^j\vec{\mathcal{E}}_j + \theta_i^A\vec{\mathcal{E}}_A,\ d\vec{\mathcal{E}}_A = \theta_A^j\vec{\mathcal{E}}_j + \theta_A^B\vec{\mathcal{E}}_B. \qquad (4)$$

Реперы R^{x_1}, R^{x_2}, R^x согласованы, что приводит к следующим соотношениям на формы:

$$\omega^i = \overline{\omega}^i = \theta^i, \qquad (5)$$

$$\omega_i^k = \theta_i^k + \theta_i^{n+k},\quad \overline{\omega}_i^k = \theta_i^k - \gamma_{j\ell}\overline{\gamma}^{\ell k}\theta_i^{n+j}, \qquad (6)$$

$$\omega_i^a = \theta_i^a,\quad \overline{\omega}_i^a = \theta_i^{n+a}, \qquad (7)$$

$$\omega_a^b = \theta_a^b,\quad \theta_a^{n+b} = 0, \qquad (8)$$

$$\omega_i^a = \theta_{n+i}^a,\quad \theta_{n+i}^{n+a} = -\gamma_{ij}\overline{\gamma}^{jk}\overline{\omega}_k^a, \qquad (9)$$

$$\theta_{n+i}^a = -\overline{g}_{ij}\theta_a^{n+j},\quad \theta_{n+i}^{n+a} = -\overline{g}_{ij}\theta_{n+a}^{n+j}, \qquad (10)$$

где $g_{ij} = \vec{\mathcal{E}}_{n+i}\cdot\vec{\mathcal{E}}_{n+j}$.

Продолжение уравнений Пфаффа поверхностей $V_p, \overline{V}_p, V_p^*$:

$$\omega^a = 0,\quad \overline{\omega}^a = 0,\quad \theta^a = 0,\ \theta^{n+i} = 0,\ \theta^{n+a} = 0$$

дает соотношения:

$$\omega_i^a = b_{ij}^a\omega^j,\quad b_{ij}^a = b_{ji}^a; \qquad (11)$$

$$\overline{\omega}_i^a = \overline{b}_{ij}^a\omega^j,\quad \overline{b}_{ij}^a = \overline{b}_{ji}^a; \qquad (12)$$

$$\theta_i^a = t_{ij}^a\theta^j,\ t_{ij}^a = t_{ji}^a;\quad \theta_i^{n+a} = t_{ij}^{n+a}\theta^j,\ t_{ij}^{n+a} = t_{ji}^{n+a}; \qquad (13)$$

$$\theta_i^{n+k} = t_{ij}^{n+k}\theta^j,\quad t_{ij}^{n+k} = t_{ji}^{n+k}.$$

В силу формул (7) имеем: $b_{ij}^a = t_{ij}^a$; $\overline{b}_{ij}^a = t_{ij}^{n+a}$, т.е. среди $2n-p$ вторых квадратичных форм графика V_p^* формы $\Phi^a = t_{ij}^a\theta^i\theta^j$; $\Phi^{n+a} = t_{ij}^{n+a}\theta^i\theta^j$ соответственно перенесены с поверхностей V_p и $\overline{V}_p$ без изменения. Будем считать, что главные нормали поверхностей V_p и $\overline{V}_p$ в точках $x_1 \in \Omega$ и $x_2 = f(x_1)$ соответственно совпадают с ортогональными дополнениями $N_{n-p}(x_1)$ и $N_{n-p}(x_2)$.

2. Пусть линия γ^*: $\theta^i = \ell^i\theta$ (θ -1-форма: $D\theta = \theta\wedge\theta_1$) является геодезической на графике V_p^*. Соприкасающаяся плоскость линии γ^* в точке $x \in V_p^*$ определяется следующим образом:

$$\Pi_2(x,\gamma^*) = [x, \vec{a}, (d\ell^i + \ell^j\theta_j^i)\vec{\mathcal{E}}_i + \ell^j\theta_j^a\vec{\mathcal{E}}_a + \ell^j\theta_j^{n+k}\vec{\mathcal{E}}_{n+k} + \ell^j\theta_j^{n+a}\vec{\mathcal{E}}_{n+a}],$$

где $\vec{a} = \ell^i\vec{\mathcal{E}}_i$. Приняв длину дуги линии в качестве параметра, имеем условие того, что линия $\gamma^* \subset V_p^*$ -геодезическая: $d\ell^i + \ell^j\theta_j^i = 0$.

Выделим следующие подслучаи:

1. Линию $\gamma^* \subset V_p^*$ назовем геодезической I рода, если в каждой точке $x \in \gamma^*$ $\Pi_2(x,\gamma^*)$ пересекает поднормаль $N'_{n-p}(x) = [x, \vec{\mathcal{E}}_a]$ по прямой.
2. Линию $\gamma^* \subset V_p^*$ назовем геодезической II рода, если в каждой точке $x \in \gamma^*$ $\Pi_2(x,\gamma^*)$ пересекает поднормаль $N''_{n-p}(x) = [x, \vec{\mathcal{E}}_{n+a}]$ по прямой.
3. Линию $\gamma^* \subset V_p^*$ назовем геодезической III рода, если в каждой точке $x \in \gamma^*$ $\Pi_2(x,\gamma^*)$ пересекает поднормаль $N_p(x) = [x, \vec{\mathcal{E}}_{n+k}]$ по прямой.

Справедлив критерий геодезических I-III родов на графике V_p^*:

Т е о р е м а 1. Линия $\gamma^* \subset V_p^*$ является геодезической I рода тогда и только тогда, когда ее проекция $\gamma \subset V_p$ является геодезической, а образом $f(\gamma)$ служит прямая $\overline{\gamma} \subset \overline{V}_p$. Линия $\gamma^* \subset V_p^*$ является геодезической II рода тогда и только тогда, когда ее проекцией $\gamma \subset V_p$ служит прямая, а образом $f(\gamma)$ является геодезическая $\overline{\gamma} \subset \overline{V}_p$. Линия $\gamma^* \subset V_p$ является геодезической III рода в том и только в том случае, если она непременно геодезическая, а ее проекциями $\gamma \subset V_p$ и $\overline{\gamma} \subset \overline{V}_p$ являются асимптотические.

Отнесем область $\Omega \subset V_p$ к основанию отображения σ_p [1] и векторы $\vec{e}_{n+i}$ репера R^{x_2} возьмем ортами. Тогда имеем:

$$\omega_i^k = a_{ij}^k\,\omega^j, \quad \overline{\omega}_i^k = \overline{a}_{ij}^k\,\omega^j, \quad \overline{\omega}_i^i = 0, \quad \theta_i^k = t_{ij}^k\,\theta^j. \qquad (14)$$

Допустим, что семейство θ^1 $(\theta^{\jmath}=0,\ \jmath\neq 1)$ линий сети σ_p^* на графике $\mathcal{V}_p^*$ состоит из геодезических I рода. Тогда по теореме I семейство $\overline{\omega}^1$ линий сети $\overline{\sigma}_p$ состоит из прямых. Нетрудно убедиться, что $\overline{\mathcal{V}}_p$ представляет собой линейчатую поверхность, которая становится цилиндрической с образующими вдоль вектора $\vec{e}_{n+1}$ при условии $\overline{b}_{\jmath 1}^a=0\ (\jmath\neq 1)$, т.е. когда поле $\vec{e}_{n+1}$ обладает сопряженным и ортогональным ему полем $(p-1)$-направлений на поверхности $\overline{\mathcal{V}}_p$.

Можно показать, что если p_1 $(1<p_1<p)$ семейств θ^{i_1} линий сети $\sigma_p^* \subset \mathcal{V}_p^*$ состоит из геодезических I рода и подсеть $\overline{\sigma}_{p_1} \subset \overline{\sigma}_p$ сопряжена на $\overline{\mathcal{V}}_p$ $(\overline{b}_{i_1 j_1}^a = 0;\ i_1, j_1 = \overline{1, p_1})$, то $\overline{\mathcal{V}}_p$ является тангенциально вырожденной поверхностью ранга $p-p_1$ при условии, что p_1-мерное поле $[\vec{e}_{n+1}, \dots, \vec{e}_{n+p_1}]$ направлений на $\overline{\mathcal{V}}_p$, определяемое касательными к линиям подсети $\overline{\sigma}_{p_1}$, обладает сопряженным ему полем $(p-p_1)$-направлений $(\overline{b}_{i_1 i_2}^a = 0;\ i_2 = \overline{p_1+1, p})$. Аналогичные утверждения формулируются для геодезических II рода.

3. В нормальных расслоениях $N(\mathcal{V}_p), N(\overline{\mathcal{V}}_p), N(\mathcal{V}_p^*)$ могут быть определены нормальные связности [2] $\mathcal{D}, \overline{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^*$ соответственно с формами $\omega_b^a, \overline{\omega}_b^a, \theta_B^A$ и тензорами R_{bij}^a, $\overline{R}_{bij}^a$, R_{Bij}^{*A}.

При фиксации нормального векторного поля $\vec{e}_{p+1}$ в расслоении $N(\mathcal{V}_p)$ в силу равенств (I) фиксируется векторное поле $\vec{\mathcal{E}}_{p+1}$ в расслоении $N(\mathcal{V}_p^*)$. Значит, формы ω_{p+1}^a, θ_{p+1}^a и θ_{p+1}^{n+j} соответственно главные:

$$\omega_{p+1}^a = \lambda_k^a\,\omega^k \quad (\lambda_k^{p+1} \equiv 0), \qquad (15)$$

$$\theta_{p+1}^a = \Lambda_k^a\,\theta^k \quad (\Lambda_k^a = \lambda_k^a), \qquad \theta_{p+1}^{n+j} = \Lambda_k^{n+j}\,\theta^k. \qquad (16)$$

В силу соотношений (9), (10), (13) получаем: $\Lambda_k^{n+j} = -\overline{g}^{ij}\,t_{ik}^{p+1}$.
С помощью соотношений (8)-(10) доказывается

Т е о р е м а 2. Векторное поле $\vec{\mathcal{E}}_{p+1}$ параллельно по любому направлению в связности $\mathcal{D}^*$ в том и только в том случае, если локально график $\mathcal{V}_p^*$ принадлежит гиперплоскости E_{2n-1}, ортогональной к вектору $\vec{\mathcal{E}}_{p+1}$ в E_{2n}. При этом локально поверхность $\mathcal{V}_p$ лежит в гиперплоскости E_{n-1}, ортогональной к вектору $\vec{e}_{p+1}$ в E_n.

В случае, описываемом теоремой 2, продолжение систем уравнений (15) и (16) соответственно дает выражения для компонентов

тензоров кривизны связностей $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^*$:

$$R_{p+1\,ij}^a = 0, \quad R_{p+1\,ij}^{*a} = 0, \quad R_{p+1\,ij}^{*n+k} = -R_{n+k\,ij}^{*p+1} = 0.$$

Аналогичную теорему можно сформулировать для фиксированного нормального поля $\vec{e}_{n+p+1}$ в расслоении $N(\overline{\mathcal{V}}_p)$ и соответствующего ему векторного поля $\vec{\mathcal{E}}_{n+p+1}$ в расслоении $N(\mathcal{V}_p^*)$.

4. Отнесем область $\Omega \subset \mathcal{V}_p$ к основанию отображения σ_p и векторы $\vec{e}_i$ репера R^{x_1} возьмем ортами. Тогда

$$\gamma_{ij} = \overline{\gamma}_{ij} = g_{ij} = \overline{g}_{ij} = 0 \quad (i\neq j), \quad \gamma_{ii} = 1. \qquad (17)$$

Пусть векторное поле $\vec{\mathcal{E}}_{n+1}$ параллельно в связности $\mathcal{D}^*$ по любому направлению. Значит, во всякой точке $x \in \mathcal{V}_p^*$ имеем:

$$\theta_{n+1}^a = 0, \quad \theta_{n+1}^{n+j} = 0; \quad \theta_{n+1}^{n+a} = 0. \qquad (18)$$

Продолжение системы (18) приводит к выражениям для компонентов тензоров кривизны связности $\mathcal{D}^*$:

$$R_{n+1\,ij}^{*a} = -R_{aij}^{*n+1} = 0, \quad R_{n+1\,ij}^{*n+k} = 0, \quad R_{n+1\,ij}^{*n+a} = -R_{n+a\,ij}^{*n+1} = 0.$$

Можно показать, что в этом случае векторы $\vec{e}_{n+1}$, $\vec{\mathcal{E}}_1$ и $\vec{\mathcal{E}}_{n+1}$ имеют постоянные длины, поверхности $\mathcal{V}_p$ и $\overline{\mathcal{V}}_p$ - развертывающиеся с прямолинейными образующими вдоль векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_{n+1}$ соответственно. График $\mathcal{V}_p^*$ представляет собой линейчатую поверхность, описываемую касательной к линии θ^1 сети σ_p^*.

Библиографический список

I. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств//Вопросы дифференциальной геометрии: Уч.зап./МГПИ им.В.И.Ленина.М., 1970. №374. С. 41-51.

2. Л у м и с т е Ю.Г., Чакмазян А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространствах постоянной кривизны//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., Т.12. С.3-30.

УДК 514.76

ПРИЛОЖЕНИЕ ДВОЙСТВЕННОЙ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ К ПОСТРОЕНИЮ ИХ ИНВАРИАНТНЫХ НОРМАЛИЗАЦИЙ

А.В.С т о л я р о в
(Чувашский пед.ин-т)

В работах [1], [2] автором в разных дифференциальных окрестностях приведены примеры построения полей инвариантных двойственных нормалей регулярного гиперполосного распределения $\mathcal{H}$ m-мерных линейных элементов $(m < n-1)$ и регулярного распределения $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов, причем оба многообразия $\mathcal{H}$ и $\mathcal{M}$ погружены в n-мерное пространство проективной связности $P_{n,n}$; исходной предпосылкой этого являются результаты, доказанные нами в работах [1],[3]: распределение $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ ($\mathcal{M} \subset P_{n,n}$) во 2-й дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует пространство проективной связности $\overline{P}_{n,n}$, двойственное $P_{n,n}$ относительно инволютивного преобразования $\mathfrak{J}: \omega^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathfrak{J}}} \to \overline{\omega}^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathfrak{J}}}$ ($\bar{\mathfrak{J}}, \bar{\mathcal{K}}, \bar{\mathfrak{L}} = \overline{0,n}$) форм проективной связности по закону (I), а также многообразие $\overline{\mathcal{H}} \subset \overline{P}_{n,n}$ ($\overline{\mathcal{M}} \subset \overline{P}_{n,n}$), двойственное исходному.

В случае $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ формы $\overline{\omega}^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathfrak{J}}}$ связности пространства $\overline{P}_{n,n}$ имеют вид (см.[1]):

$$\left\{\begin{aligned}
&\overline{\omega}^0_0 = \omega^0_0 - \tfrac{1}{n+1}(\Lambda_{\mathcal{K}} + A_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_0, \quad \overline{\omega}^n_n = \omega^n_n - \tfrac{1}{n+1}(\Lambda_{\mathcal{K}} + A_{\mathcal{K}})\,\omega^{\mathcal{K}}_0,\\
&\overline{\omega}^i_0 = \omega^i_0 + \Lambda^{ij}_n \Lambda^n_{j\alpha}\,\omega^\alpha_0, \quad \overline{\omega}^0_i = \Lambda^n_{ki}\,\omega^k_n, \quad \overline{\omega}^n_0 = \omega^n_0, \qquad \text{(a)}\\
&\overline{\omega}^n_i = -\Lambda^n_{ki}\,\omega^k_0, \quad \overline{\omega}^0_n = \omega^0_n, \quad \overline{\omega}^i_n = -\Lambda^{ik}_n\,\omega^0_k,\\
&\overline{\omega}^j_i = \omega^j_i + \left[\Lambda^{js}_n \Lambda^n_{si\mathcal{K}} - \delta^j_i \tfrac{1}{n+1}(\Lambda_{\mathcal{K}} + A_{\mathcal{K}})\right]\omega^{\mathcal{K}}_0; \qquad \text{(I)}\\
&\overline{\omega}^v_0 = \omega^v_0 + A^n_{un} A^{vu}_n\,\omega^n_0, \quad \overline{\omega}^v_i = -\Lambda^n_{ki} A^{vu}_n\,\omega^k_u,\\
&\overline{\omega}^v_n = -A^{vu}_n\,\omega^0_u, \quad \overline{\omega}^0_v = A^n_{uv}\,\omega^u_n, \qquad \text{(б)}\\
&\overline{\omega}^i_v = -A^n_{uv}\Lambda^{ik}_n\,\omega^u_k, \quad \overline{\omega}^n_v = -A^n_{uv}\,\omega^u_0,\\
&\overline{\omega}^w_v = \omega^w_v + \left[A^{wu}_n A^n_{uv\mathcal{K}} - \delta^w_v \tfrac{1}{n+1}(\Lambda_{\mathcal{K}} + A_{\mathcal{K}})\right]\omega^{\mathcal{K}}_0;
\end{aligned}\right.$$

здесь $\Lambda^n_{ij}, \Lambda^{ij}_n$ – основные взаимные тензоры I-го порядка распределения и $i,j,k,\ell,s = \overline{1,m}$; $u,v,w = \overline{m+1,n-1}$; $\alpha = \overline{m,n}$; $\mathfrak{J}, \mathcal{K}, \mathfrak{L} = \overline{1,n}$. В случае $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ в соотношениях (I) отсутствуют выражения (I-б) и $m = n-1$.

В работах [1]-[3] нами доказано следующее утверждение: зная закон охвата объекта нормали первого (второго) рода ν^i_n (ν^0_i) распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ (или $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$) строим охват квазитензора $\overline{\nu}^i_n$ ($\overline{\nu}^0_i$) двойственного образа $\overline{\mathcal{H}} \subset \overline{P}_{n,n}$ (или $\overline{\mathcal{M}} \subset \overline{P}_{n,n}$), аналогичный охвату ν^i_n (ν^0_i), после чего по закону

$$\overline{\nu}^i_n = -\Lambda^{ik}_n \nu^0_k, \quad \overline{\nu}^0_i = \Lambda^n_{ki}\nu^k_n \qquad (2)$$

найдем соответствующую двойственную нормаль ν^0_i (ν^i_n).

Ниже приведем примеры построения полей инвариантных двойственных нормалей распределений $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ и $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ описанным выше способом.

П р и м е р I. Согласно работе [4], нормаль Михэйлеску I-го рода распределения $\overline{\mathcal{H}} \subset \overline{P}_{n,n}$ определяется охватом

$$\begin{aligned}
\overline{M}^\ell_n \overset{def}{=} -\frac{1}{2(m+2)}\overline{\Lambda}^{\ell i}_n \overline{a}^{jk}_n [\overline{\Lambda}^n_{ijk} + \overline{\Lambda}^n_{ij}(\overline{\Lambda}^n_{kn} + \overline{\Lambda}^n_{kv}\overline{a}^v_n) +\\
+ \overline{\Lambda}^n_{ik}(\overline{\Lambda}^n_{jn} + \overline{\Lambda}^n_{jv}\overline{a}^v_n) + \overline{\Lambda}^n_{kj}(\overline{\Lambda}^n_{in} + \overline{\Lambda}^n_{iv}\overline{a}^v_n)];
\end{aligned} \qquad (3)$$

после замены функций с черточкой через компоненты полей объектов распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ имеем:

$$\begin{aligned}
\overline{M}^\ell_n = -\frac{1}{2(m+2)}[a^{sk}_n \Lambda^{\ell t}_n \Lambda^n_{tsk} - (2a^{\ell k}_n \Lambda^n_{tk}\Lambda^{ts}_n + m\Lambda^{\ell s}_n) \times\\
\times (\Lambda^n_{sn} - \Lambda^n_{sv} A^{vw}_n A^n_{wn} + \Lambda^n_{sv} A^{vw}_n a^0_w)].
\end{aligned}$$

Теперь из $\overline{M}^\ell_n = -\Lambda^{\ell j}_n M^0_j$ (см.(2)) находим поле квазитензора M^0_j, определяющее поле нормалей Михэйлеску второго рода распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ и являющееся двойственным полю M^i_n:

$$\begin{aligned}
M^0_i = \frac{1}{2(m+2)}[a^{sk}_0 \Lambda^n_{isk} - (2\Lambda^n_{i\ell} a^{\ell k}_n \Lambda^n_{tk}\Lambda^{ts}_n + m\delta^s_i) \times\\
\times (\Lambda^n_{sn} - \Lambda^n_{sv} A^{vw}_n A^n_{wn} + \Lambda^n_{sv} A^{vw}_n a^0_w)].
\end{aligned} \qquad (4)$$

Для распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ с полем симметрического тензора Λ^n_{ij} компоненты полей нормалей Михэйлеску имеют следующие строения:

$$\left\{\begin{aligned}
&M^\ell_n = -\frac{1}{2(m+2)}[\Lambda^{\ell k}_n b_k + (m+2)\Lambda^{\ell k}_n(\Lambda^n_{kn} + \Lambda^n_{kv} a^v_n)],\\
&M^0_i = \frac{1}{2(m+2)}\{b_i - (m+2)[\Lambda^n_{in} - \Lambda^n_{iv} A^{vu}_n (A^n_{un} - a^0_u)]\}.
\end{aligned}\right. \qquad (5)$$

Так как условием взаимности нормализации $\{\nu^i_n, \nu^0_i\}$ распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (см. [4])

$$2x^0x^n = a^n_{ij}x^ix^j + \frac{2b_i}{m+2}x^ix^n + B^n_{uv}x^ux^v + 2b_v x^v x^n + T_n(x^n)^2 \qquad (6)$$

является выполнение соотношений

$$b_k = (m+2)(\nu^0_k - a^n_{ks}\nu^s_n), \qquad (7)$$

то в случае $\Lambda^n_{[ij]} = 0$ нормализация Михэйлеску, определяемая полями двойственных нормалей (5),взаимна тогда и только тогда, когда обращается в нуль тензор $T^n_k \overset{def}{=} \Lambda^n_{kv}[a^v_n + A^{vu}_n(A^n_{un} - a^0_u)]$; в частности,этот тензор обращается в нуль для взаимного распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$ ($\Lambda^n_{kv} \equiv 0$).

Отметим,что в случае распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ гиперплоскостных элементов поле нормалей Михэйлеску второго рода M^0_i, двойственное поле M^i_n ,получено в работе [2].

П р и м е р 2. Согласно работе [5],компоненты поля нормалей первого рода H^i_n распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ определяются во 2-й дифференциальной окрестности и имеют строение

$$H^i_n = -\frac{1}{2(n+1)} a^{ik}_n [\Lambda_k + (n+1)\Lambda^n_{kn}], \quad \Lambda_k = \Lambda^{ji}_n \Lambda^n_{ijk}. \tag{8}$$

Следовательно,имеем $\bar{H}^i_n = -\frac{1}{2(n+1)} \bar{a}^{ik}_n [\bar{\Lambda}_k + (n+1)\bar{\Lambda}^n_{kn}]$, откуда находим $\bar{H}^i_n = \frac{1}{2(n+1)} a^{ik}_n [(n+1)\Lambda^n_{sk}\Lambda^n_{en}\Lambda^{se}_n - \Lambda_k]$; из $\bar{H}^i_n = -\Lambda^{ik}_n H^0_k$ (см. (2)) получим нормаль 2-го рода H^0_i ,двойственную по отношению H^i_n:

$$H^0_i = \frac{1}{2(n+1)} \Lambda^n_{is} a^{sk}_n [\Lambda_k - (n+1)\Lambda^n_{tk}\Lambda^n_{en}\Lambda^{te}_n]. \tag{9}$$

Если $\Lambda^n_{[ij]} = 0$,то из (8),(9) следует $H^i_n = -\frac{1}{2(n+1)} \Lambda^{ik}_n [\Lambda_k + (n+1)\Lambda^n_{kn}]$, $H^0_i = \frac{1}{2(n+1)} [\Lambda_i - (n+1)\Lambda^n_{in}]$; при этом нормализация $\{H^i_n, H^0_i\}$ распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ является взаимной тогда и только тогда, когда квазинормали Λ_i и $\mathcal{B}_i$ совпадают,т.е. когда она представляет собой нормализацию Михэйлеску.

З а м е ч а н и е. В случае пространств $P_{n,n}$ и $\bar{P}_{n,n}$ без кручения при $\Lambda^n_{[ij]} = 0$ имеем $\Lambda_i = \mathcal{B}_i$.

П р и м е р 3. Поле квазитензора 2-го порядка

$$S^i_n \overset{def}{=} -\frac{1}{2(n+1)} a^{ik}_n [a^{st}_n a^n_{stk} + (n+1)\Lambda^n_{kn}]$$

определяет поле нормалей первого рода распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$. Так как

$$\bar{S}^i_n \overset{def}{=} -\frac{1}{2(n+1)} \bar{a}^{ik}_n [\bar{a}^{st}_n \bar{a}^n_{stk} + (n+1)\bar{\Lambda}^n_{kn}] =$$
$$= -\frac{1}{2(n+1)} a^{ik}_n \Lambda^{ej}_n [a^{st}_n \Lambda^n_{es}\Lambda^n_{jtk} - (n+1)\Lambda^n_{ek}\Lambda^n_{jn}],$$

то нормаль 2-го рода S^0_i ,двойственная S^i_n ,имеет следующее строение:

$$S^0_i = \frac{1}{2(n+1)} \Lambda^n_{ip} a^{pk}_n \Lambda^{et}_n [a^{sj}_n \Lambda^n_{es}\Lambda^n_{tjk} - (n+1)\Lambda^n_{ek}\Lambda^n_{tn}].$$

Отметим,что в случае $\Lambda^n_{[ij]} = 0$ справедливо $S^i_n = H^i_n$, $S^0_i = H^0_i$. Две инвариантные внутренним образом определенные двойственные нормализации в каждом центре A_0 распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ определяют однопараметрический пучок инвариантных нормалей первого рода с вершиной в точке A_0 и двойственный однопараметрический пучок нормалей второго рода с $(n-3)$-мерной вершиной в текущей плоскости Π_{n-1} элемента многообразия $\mathcal{M}$.Например, если в случае распределения $\mathcal{M} \subset P_{n,n}$ с полем симметрического тензора Λ^n_{ij} в качестве исходных нормализаций взять нормализации Фубини F^i_n и Вильчинского W^i_n (см. 2),то в 3-й дифференциальной окрестности пучки инвариантных нормалей первого и второго родов определяются,соответственно,пучками квазитензоров $\nu^i_n(\tau) = \tau F^i_n + (\tau-1)W^i_n$, $\nu^0_i(\tau) = \tau F^0_i - (\tau-1)W^0_i$,где τ – инвариантный параметр. Уравнения $(n-3)$-мерной вершины нормалей $\nu^0_i(\tau)$ относительно репера 0-го порядка $\{A_{\bar{J}}\}$ имеют вид:

$$\left(\Lambda^n_{ij}F^j_n + \frac{\mathcal{B}_i}{n+1}\right)x^i - x^0 = 0, \quad \Lambda^n_{ij}(F^j_n + W^j_n)x^i = 0, \quad x^n = 0.$$

Следовательно,($n-3$)-мерная вершина есть пересечение трех гиперплоскостей,а именно, ξ_0, $(F^i_n + \Lambda^{ij}_n \frac{\mathcal{B}_j}{n+1})\xi_i - \xi_n$, $(F^i_n + W^i_n)\xi_i$; гиперплоскости $\xi_{\bar{J}}$ имеют строение

$$\xi_0 = \frac{1}{\sqrt[n+1]{|\Lambda^n_{ij}|}}[A_0 A_1 \dots A_{n-1}], \quad \xi_n = \frac{1}{\sqrt[n+1]{|\Lambda^n_{ij}|}}[A_n A_1 \dots A_{n-1}],$$
$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt[n+1]{|\Lambda^n_{ij}|}} \sum_{j=1}^{n-1} \Lambda^n_{ji}[A_0 A_1 \dots A_{j-1} A_n A_{j+1} \dots A_{n-1}].$$

Библиографический список

1.С т о л я р о в А.В. Двойственная теория гиперполосного распределения и ее приложения //Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1982.Вып.13.С.95-102.

2.С т о л я р о в А.В. Двойственная геометрия оснащенного распределения гиперплоскостных элементов//Чуваш.гос.пед.ин-т. Чебоксары,1982.38с. Деп. в ВИНИТИ,№ 6454.

3.С т о л я р о в А.В. Двойственная теория регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности//Тез.докл.7-й Всес.конф.по современным проблемам геометрии.Минск.1979.С.192.

4.С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1975.Т.7.

5.О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ. М.,1973.Т.4.С.71-120.

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПАРОЙ ТОЧЕК

Т.П.Ф у н т и к о в а

(Калининградский ун-т)

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные [1] конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$, порожденные парой точек P и P^*, когда многообразие (P) -поверхность, (P^*) -линия. Соответствие между элементами многообразий таково, что полным прообразом точки P^* линии (P^*) является линия Γ_{P^*} на поверхности (P). Получены свойства, дающие геометрическую характеристику конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$.

Отнесем конгруэнцию $(PP^*)_{2,1}$ к реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, где точка A совмещается с текущей точкой P поверхности (P), конец вектора $\bar{e}_3$ с соответствующей точкой P^*, векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ расположены в касательной плоскости к поверхности (P), причем конец вектора $\bar{e}_1$ совмещен с точкой M пересечения касательной плоскости к поверхности (P) в точке P с касательной к линии (P^*) в соответствующей точке P^*, и вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной к линии Γ_{P^*}.

Система дифференциальных уравнений конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$ в выбранном репере R имеет вид:

$$\begin{cases} \omega^3=0, \ \ \omega_3^3=-a\omega^1 \ \ (a\neq 0), \ \ \omega_3^2=-\omega^2, \ \ \omega_3^1+\omega^1+\omega_3^3=0, \\ \omega_1^3=k\omega^1+\ell\omega^2, \ \ \omega_2^3=\ell\omega^1+m\omega^2, \ \ \omega_1^2=b\omega^1-\omega^2, \\ \omega_1^1=c\omega^1-\ell\omega^2, \ \ \omega_2^1=p\omega^1+q\omega^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Рассматривая геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией $(PP^*)_{2,1}$, получаем следующие свойства таких конгруэнций: 1) торсы прямолинейной конгруэнции (PP^*) высекают на поверхности (P) сеть линий Γ_{P^*} $(\omega^1=0)$, Γ $(\omega^2=0)$; 2) характеристические точки координатных плоскостей принадлежат прямой PP^*; 3) касательная плоскость к фокальной поверхности $\bar{F}=\bar{A}+\frac{1}{1-a}\bar{e}_3$ прямолинейной конгруэнции (PP^*) содержит касательную $\tilde{\ell}$ к линии Γ_{P^*}, проведенную в соответствующей F точке.

Обозначим буквой ℓ_1 линию пересечения касательной плоскости к поверхности (P) в точке P с соприкасающейся плоскостью линии (P^*) в соответствующей точке P^*. Линия ℓ_1 определяется уравнением $b(1-x^1)+n x^2=0$, $x^3=0$, где $n=k+c+1$. Торсы $\omega_1^3=0$ прямолинейной конгруэнции (PM) высекают на поверхности (M) линии, касательные к которым в точке M определяются вектором $\bar{E}=n\bar{e}_1+b\bar{e}_2$ и, следовательно, являются прямыми ℓ_1.

Т е о р е м а 1. Линия (P^*) является прямой тогда и только тогда, когда касательные к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ вдоль направления $\omega^2=0$ параллельны соответствующим координатным плоскостям $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть линия (P^*) -прямая, т.е. $d\bar{A}_3=\lambda d^2\bar{A}_3$. Тогда $n=b=0$ и направление касательной к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ вдоль $\omega^2=0$ определяется вектором $\bar{E}_1=\bar{e}_1+k(\bar{e}_1-\bar{e}_3)$, параллельным плоскости $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_3)$. 2) Направление касательной к индикатрисе вектора $\bar{e}_1$ вдоль $\omega^2=0$ определяется вектором $(d\bar{e}_1)_{\omega^2=0}=\omega^1(c\bar{e}_1+b\bar{e}_2+k\bar{e}_3)$. Он параллелен плоскости $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_3)$ в том случае, если $b=0$. Учитывая это условие в системе (1), получаем $n=0$. Следовательно, линия (P^*) является прямой.

Т е о р е м а 2. Вырожденные конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$, у которых линия (P^*) -прямая, имеют на поверхности (P) плоские линии Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линия (P^*) -прямая, если $n=b=0$. В силу этих условий $((d^n\bar{A})_{\omega^2=0},\bar{e}_1,\bar{e}_1-\bar{e}_3)=0$, $n=1,2,3,\ldots$, т.е. линии Γ на поверхности (P) -плоские.

Т е о р е м а 3. Поверхность (P) вырожденной конгруэнции $(PP^*)_{2,1}$, у которой соприкасающаяся плоскость $\tilde{\alpha}$ линии Γ_{P^*} в точке P параллельна касательной ℓ^* линии (P^*) в соответствующей точке P^* или проходит через точку P^*, расслаивается на семейство плоских линий Γ_{P^*}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть плоскость $\tilde{\alpha}$ параллельна прямой ℓ^*. Тогда $q+m=0$ и $((d^n\bar{A})_{\omega^1=0},\bar{e}_2,\bar{e}_1-\bar{e}_3)=0$. Следовательно, линии Γ_{P^*} -плоские и их плоскости параллельны соприкасающимся плоскостям α^* линии (P^*). 2) Пусть точка P^* инцидентна плоскости $\tilde{\alpha}$. Тогда $q=0$ и $((d^n\bar{A})_{\omega^1=0},\bar{e}_2,\bar{e}_3)=0$. То есть линии Γ_{P^*} в этом случае инцидентны плоскостям $(A,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$.

С л е д с т в и е. Если прямая ℓ_1 параллельна касательной $\tilde{\ell}$ к линии Γ_{P^*} и линия (P^*) не является прямой, то линия Γ_{P^*} -плоская.

Т е о р е м а 4. Линии Γ_{p*}, Γ тогда и только тогда сопряжены на поверхности (P), когда существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (PP^*) к семейству касательных плоскостей поверхности (P).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение асимптотических линий поверхности (P) имеет вид $k(\omega^1)^2+2\ell\omega^1\omega^2+m(\omega^2)^2=0$. I) Пусть линии Γ_{p*}, Γ сопряжены на поверхности (P), т.е. $\ell=0$. Тогда условие указанного аффинного расслоения $\omega_3^i\wedge\omega_i^3=0$ удовлетворяется тождественно. 2) Пусть существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (PP^*) к семейству касательных плоскостей поверхности (P), т.е. выполняется условие $\omega_3^i\wedge\omega_i^3=0$ или $a\ell=0$. Так как $a\neq 0$, то $\ell=0$ и линии Γ_{p*}, Γ в этом случае сопряжены на поверхности (P).

Библиографический список

I. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр. ун-т. Калининград. 1973. Вып. 3. С. 41-50.

УДК 514.76

О СВЯЗИ СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С МНОГООБРАЗИЕМ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ПРОСТРАНСТВОМ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ

В.Н. Х у д е н к о
(Калининградский ун-т)

В проективном пространстве P_n рассматривается связность Γ в главном расслоении $G(B_k^*)$, ассоциированном с k-мерным многообразием обобщенных пространственных элементов (L_ℓ, L_{p+1})[1]. Исследуется связь с пространством линейной связности. Доказано, что ассоциированное расслоение с фундаментально-групповой связностью можно рассматривать как пространство линейной связности специального типа.

Как показано в [1], система дифференциальных уравнений k-параметрического многообразия B_k^* обобщенных пространственных элементов [2] записывается в виде

$$\omega_\mu^{\bar a}=M_{\mu i}^{\bar a}\tau^i,\quad \omega_\mu^a=\Lambda_{\mu i}^a\tau^i,\quad \omega_{\bar b}^a=\Lambda_{\bar b i}^a\tau^i, \tag{I}$$

где τ^i - параметрические формы. Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения

$$i,j=1,2,\dots,k;\qquad \mu,\nu,\eta=1,2,\dots,\ell+1;$$
$$\bar a,\bar b,\bar c=\ell+1,\ell+2,\dots,p+2;\quad a,b,c=p+3,p+4,\dots,n+1.$$

С многообразием B_k^* ассоциируется главное расслоенное пространство $G(B_k^*)$, базой которого является многообразие B_k^*, а типовым слоем - подгруппа стационарности обобщенного пространственного элемента (L_ℓ, L_{p+1}). В главном расслоенном пространстве задается связность по Г.Ф.Лаптеву с помощью поля объекта связности [I]: $\Gamma=\{\Gamma_{\mu i}^\nu, \Gamma_{\bar b i}^\nu, \Gamma_{bi}^\nu, \Gamma_{\bar b i}^{\bar a}, \Gamma_{bi}^{\bar a}, \Gamma_{bi}^a\}$.

Структурные уравнения ассоциированного расслоения с фундаментально-групповой связностью [3] можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} D\tilde\omega_\mu^\nu=\tilde\omega_\mu^\eta\wedge\tilde\omega_\eta^\nu+R_{\mu ij}^\nu\tau^i\wedge\tau^j,\\ D\tilde\omega_a^b=\tilde\omega_a^c\wedge\tilde\omega_c^b+R_{aij}^b\tau^i\wedge\tau^j,\\ D\tilde\omega_{\bar a}^{\bar b}=\tilde\omega_{\bar a}^{\bar c}\wedge\tilde\omega_{\bar c}^{\bar b}+R_{\bar a ij}^{\bar b}\tau^i\wedge\tau^j,\\ D\omega_{\bar b}^\nu=\tilde\omega_{\bar b}^\mu\wedge\tilde\omega_\mu^\nu+\tilde\omega_{\bar b}^{\bar a}\wedge\tilde\omega_{\bar a}^\nu+R_{\bar b ij}^\nu\tau^i\wedge\tau^j,\\ D\tilde\omega_b^\nu=\tilde\omega_b^\mu\wedge\tilde\omega_\mu^\nu+\tilde\omega_b^{\bar a}\wedge\tilde\omega_{\bar a}^\nu+\tilde\omega_b^a\wedge\tilde\omega_a^\nu+R_{bij}^\nu\tau^i\wedge\tau^j,\\ D\tilde\omega_b^{\bar a}=\tilde\omega_b^{\bar b}\wedge\tilde\omega_{\bar b}^{\bar a}+\tilde\omega_b^a\wedge\tilde\omega_a^{\bar a}+R_{bij}^{\bar a}\tau^i\wedge\tau^j, \end{cases} \tag{2}$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формулам

$$R_{\mu ij}^\nu=\Gamma_{\mu i}^\eta\Gamma_{\eta j}^\nu+\Gamma_{\mu ij}^\nu,$$
$$R_{aij}^b=\Gamma_{aij}^b+\Gamma_{ai}^c\Gamma_{cj}^b,$$
$$R_{\bar a ij}^{\bar b}=\Gamma_{\bar a ij}^{\bar b}+\Gamma_{\bar a i}^{\bar c}\Gamma_{\bar c j}^{\bar b},$$
$$R_{\bar b ij}^\nu=\Gamma_{\bar b i}^\mu\Gamma_{\mu j}^\nu+\Gamma_{\bar b i}^{\bar a}\Gamma_{\bar a j}^\nu+\Lambda_{\bar b i}^a\Gamma_{aj}^\nu+\Gamma_{\bar b ij}^\nu,$$
$$R_{bij}^\nu=\Gamma_{bi}^{\bar a}\Gamma_{\bar a j}^\nu+\Gamma_{bi}^a\Gamma_{aj}^\nu+\Gamma_{bi}^\mu\Gamma_{\mu j}^\nu+\Gamma_{bij}^\nu,$$
$$R_{bij}^{\bar a}=\Gamma_{bi}^\mu M_{\mu j}^{\bar a}+\Gamma_{bi}^{\bar b}\Gamma_{\bar b j}^{\bar a}+\Gamma_{bi}^a\Gamma_{aj}^{\bar a}+\Gamma_{bij}^{\bar a}.$$

Из анализа соотношений (2) следует

П р е д л о ж е н и е. Ассоциированное расслоение $G(B_h^*)[1]$ с фундаментально-групповой связностью является пространством линейной связности специального вида.

Библиографический список

1. Х у д е н к о В.Н. О связности в расслоении, ассоциированном с многообразием многомерных квадрик//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1984. Вып. 15. С.96-99.

2. Burau . Проективная классификация грассмановых соотношений в определении линейных моделей совокупностей обобщенных пространственных элементов//Ann. math. pura ed appl. 1953. Ap.4. №34. p.133-160.

3. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., 1979. Т.9. С.3-246.

УДК 514.76

О СВЯЗНОСТЯХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПОЛЕМ АФФИНОРА

М.А.Ч е ш к о в а
(Алтайский ун-т)

Пусть M_n — n-мерное вещественное C^∞-многообразие, $\mathcal{F}(M_n)$ — R-алгебра вещественных дифференцируемых функций на M_n, $T_s^r(M_n)$ — $\mathcal{F}$-модуль дифференцируемых тензорных полей на M_n типа (r,s), ∇-аффинная связность на M_n.

Зададим тензорное поле $F \in T_1^1(M_n)$. Будем предполагать для любой точки $m \in M_n$, $\operatorname{rang} F(m) = p < n$. Тогда определятся тензорные поля $\overset{1}{A}, \overset{2}{A} \in T_2^1(M_n)$:

$$\overset{1}{A}(X,Y) = (\nabla_X F)(Y), \quad \overset{2}{A}(X,Y) = -h\nabla_X vY - v\nabla_X hY, \tag{1}$$

$X, Y \in T_0^1(M_n)$,

где $(\nabla_X F)(Y) = \nabla_X FY - F\nabla_X Y$ -ковариантная производная поля F вдоль X ([1], с. 53), h, v -параллельные проекции на инвариантные подпространства $\operatorname{Im} F$, $\operatorname{Ker} F$, соответственно. Обозначим соответствующие распределения H и V. Положим $H \cap V = \varnothing$, т.е. $TM_n = H \oplus V$. Имеют место соотношения $Fv = 0$, $Fh = F$, $vF = 0$, $hF = F$.

Тензорные поля $\overset{i}{A}$ ($i = 1, 2$) определяют алгебраические операции $X \circ Y = \overset{1}{A}(X,Y)$, $X * Y = \overset{2}{A}(X,Y)$, относительно которых $T_0^1(M_n)$ — алгебра деформации [2] связностей ∇, $\overset{i}{\nabla} = \nabla + \overset{i}{A}$. Она обозначается $\mathcal{U}(M_n, \overset{i}{A})$ [3]. Таким образом,

$$\begin{cases} \overset{1}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \overset{1}{A}(X,Y) = \nabla_X Y + (\nabla_X F)(Y), \\ \overset{2}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \overset{2}{A}(X,Y) = v\nabla_X vY + h\nabla_X hY. \end{cases} \tag{2}$$

Тензоры кручения $\overset{i}{S}$ и кривизны $\overset{i}{R}$ связностей $\overset{i}{\nabla}$ определяются равенствами

$$\overset{i}{S}(X,Y) = S(X,Y) + \overset{i}{A}(X,Y) - \overset{i}{A}(Y,X), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \overset{i}{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + (\nabla_X \overset{i}{A})(Y,Z) - (\nabla_Y \overset{i}{A})(X,Z) + \\ &+ \overset{i}{A}(X, \overset{i}{A}(Y,Z)) - \overset{i}{A}(Y, \overset{i}{A}(X,Z)) + \overset{i}{A}(S(X,Y), Z), \end{aligned} \tag{4}$$

где S, R -кручение и кривизна связности ∇:

$(\nabla_X \overset{i}{A})(Y,Z) = \nabla_X \overset{i}{A}(Y,Z) - \overset{i}{A}(\nabla_X Y, Z) - \overset{i}{A}(Y, \nabla_X Z)$ -ковариантная производная $\overset{i}{A}$ вдоль X. Используя (2), получим

$$(\nabla_X \overset{1}{A})(Y,Z) - (\nabla_Y \overset{1}{A})(X,Z) = R(X,Y)FZ - FR(X,Y)Z - \overset{1}{A}(S(X,Y),Z);$$

$$\begin{aligned} (\nabla_X \overset{2}{A})(Y,Z) - (\nabla_Y \overset{2}{A})(X,Z) &= -vR(X,Y)hZ - hR(X,Y)vZ - \\ &- \overset{2}{A}(S(X,Y),Z) - 2\overset{2}{A}(X, \overset{2}{A}(Y,Z)) + 2\overset{2}{A}(Y, \overset{2}{A}(X,Z)). \end{aligned} \tag{5}$$

Откуда

$$\begin{aligned} \overset{1}{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + R(X,Y)FZ - FR(X,Y)Z + \overset{1}{A}(X, \overset{1}{A}(Y,Z)) - \\ &- \overset{1}{A}(Y, \overset{1}{A}(X,Z)), \\ \overset{2}{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - vR(X,Y)hZ - hR(X,Y)vZ - \overset{2}{A}(X, \overset{2}{A}(Y,Z)) + \\ &+ \overset{2}{A}(Y, \overset{2}{A}(X,Z)). \end{aligned} \tag{6}$$

Т е о р е м а 1. Следующие утверждения эквивалентны:

1) распределение V инволютивно;

2) $\overset{1}{A}(\xi,\eta) - \overset{1}{A}(\eta,\xi) = -FS(\xi,\eta)$;

3) $\overset{1}{S}(\xi,\eta) - S(\xi,\eta) = -FS(\xi,\eta)$;

4) $\overset{2}{A}(\xi,\eta) - \overset{2}{A}(\eta,\xi) = -hS(\xi,\eta)$;

5) $\overset{2}{S}(\xi,\eta) = \upsilon S(\xi,\eta)$;

6) $dF(\xi,\eta) = 0$;

7) $\bar{d}F(\xi,\eta) = 0, \ \forall \xi,\eta \in V$,

где dF ($\bar{d}F$) -внешний дифференциал F в связности ∇ ($\overset{2}{\nabla}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $X,Y \in T^1_0(M_n)$ имеем

$$dF(X,Y) = \nabla_X FY - \nabla_Y FX - F[X,Y], \quad (7)$$

$$\bar{d}F(X,Y) = \overset{2}{\nabla}_X FY - \overset{2}{\nabla}_Y FX - F[X,Y] = dF(X,Y) + \overset{2}{A}(X,FY) - \overset{2}{A}(Y,FX), \quad (8)$$

$$\overset{1}{A}(X,Y) - \overset{2}{A}(Y,X) = \nabla_X FY - \nabla_Y FX - F(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = dF(X,Y) - FS(X,Y), \quad (9)$$

$$\overset{2}{A}(X,Y) - \overset{2}{A}(Y,X) = -\upsilon(\nabla_X hY - \nabla_Y hX) - h(\nabla_X \upsilon Y - \nabla_Y \upsilon X). \quad (10)$$

Утверждения теоремы следует из (3),(7)-(10).

Т е о р е м а 2. Следующие утверждения эквивалентны:

1) распределение H инволютивно;

2) $\overset{2}{A}(X,Y) - \overset{2}{A}(Y,X) = -\upsilon S(X,Y)$;

3) $\overset{2}{S}(X,Y) = hS(X,Y), \ \forall X,Y \in H$.

С л е д с т в и е 1. Если $S=0$ и алгебра $\mathfrak{U}(M_n, \overset{1}{A})$ коммутативна,то

1) распределение V инволютивно;

2) $\overset{1}{S} = 0$;

3) $\overset{2}{S}(\xi,\eta) = 0, \ \forall \xi,\eta \in V$;

4) $dF(X,Y) = 0, \ \forall X,Y \in T^1_0(M_n)$.

С л е д с т в и е 2. Если $S=0$ и алгебра $\mathfrak{U}(M_n, \overset{2}{A})$ коммутативна,то

1) распределение H инволютивно; 2) $\overset{2}{S} = 0$; 3) распределение V инволютивно; 4) $\overset{1}{S}(\xi,\eta) = 0, \ \forall \xi,\eta \in V$.

Библиографический список

1. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М.: Наука, 1971. 343с.

2. Waisman I. Sur quelques formules du calcul de Ricci

3. Nicolescu L., Martin M. Sur l'algebre assosiel á un champ tensorial de type (1.2) // Acta Math. Acad. Sci Hungarical. 1978. N31. P. 27-35.

УДК 514.76

НЕЖЕСТКИЕ ВЛОЖЕНИЯ И АВТОМОРФИЗМЫ КОМПЛЕКСНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

Р.Б.Ч и н а к
(Омский политехнический ин-т)

Изучается строение группы биголоморфных автоморфизмов комплексного подмногообразия $i: N \hookrightarrow M$ в зависимости от свойств вложения i и кривизны объемлющего пространства M.

В дальнейшем символ TM означает голоморфное касательное расслоение многообразия M. Напомним,что инфинитезимальной голоморфной деформацией подмногообразия $N \subset M$ называется глобальное голоморфное сечение расслоения $TM|_N$ [1]. Через K_M обозначаем каноническое линейное расслоение,т.е. $K_M = \Lambda^n T^* M$, где $n = \dim_{\mathbb{C}} M > 0$.

О п р е д е л е н и е. Вложение $i: N \hookrightarrow M$ является нежестким,если $n = \dim_{\mathbb{C}} M > 0$ и существует $k = n-1$ всюду линейно-независимых голоморфных деформаций подмногообразия N в M.

Следующая теорема уточняет некоторые результаты работ [2,3].

Т е о р е м а . Пусть комплексное многообразие M допускает форму объема σ с неположительным тензором Риччи и $N \hookrightarrow M$ является нежестко вложенным компактным комплексным подмногообразием в M. Если при этом выполнено условие $C(N) \neq 0$, то группа $Aut(N)$ дискретна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n = \dim_{\mathbb{C}} M > 0$ и χ - нетривиальное голоморфное векторное поле на многообразии N. Рассмотрим всюду линейно-независимые инфинитезимальные голоморфные деформации $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ подпространства $N \subset M$. Тогда $\eta = \gamma_1 \wedge \ldots \wedge \gamma_{n-1} \wedge \chi \in H^0(N; \mathcal{O}(-K_M|_N))$.

Если $\eta \equiv 0$, то $\chi = \sum_i a_i \gamma_i$, где $a_i \in \mathbb{C}, i = \overline{1, n-1}$. Значит, в силу соотношения $\chi \not\equiv 0$ векторное поле χ имеет пустое множество нулей. Поскольку компактное комплексное многообразие с голоморфным векторным полем без нулей обладает нулевым классом Чженя [2,с.159],то получаем противоречие с условием $C(N)\neq 0$.

Таким образом, $\eta\neq 0$. Заметим,что сужение $\sigma|_N$ будет послойной эрмитовой метрикой в $-K_M|_N$ неположительной кривизны. Следовательно,голоморфное сечение η параллельно относительно метрики $\sigma|_N$ [4,замечание 7] и поэтому χ всюду отлично от нуля. Остается использовать [2,с.159] (см.выше) и соотношение $C(N)\neq 0$.

Приведем пример,который показывает,что нежесткость вложения в теореме является существенной.Напомним,что поверхностью Ферма $S_d\subset \mathbb{CP}^{n+1}$ $(n>0)$ называется множество нулей однородного многочлена
$$\sum_{i=0}^{n+1}(Z^i)^d$$
(здесь $\{Z^i\}$ -однородные координаты).
Если $d>n+2$, то S_d -гладкая гиперповерхность с отрицательным каноническим пучком.Кроме того, S_d содержит рациональную кривую $N\cong \mathbb{CP}^1$ вида
$$Z^0=u,\ Z^1=\eta u,\ Z^2=v,\ Z^3=\eta v,\ Z^4=0,\ \ldots,\ Z^{n+1}=0\ .$$
(η -корень d- й степени из -1). Поскольку $C(N)\neq 0$ и $C_1(S_d)<0$ (группа $Aut(N)$ недискретна),то в силу доказанной выше теоремы вложение $N\hookrightarrow S_d$ является жестким.

Библиографический список

1. Siu Y.T. Complex-analytysity of harmonic maps, vanishing and Lefschetz theorems // J. diff. geom. 1982. V.17. P.55-138.

2. К о б а я с и Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. Пер.с англ.М.: Наука, 1986. 224с.

3. Ч и н а к Р.Б. Автоморфизмы эрмитовых многообразий// Всесоюзная школа-сем.по компл.анализу: Тез.докл. Красноярск, 1987. С.127.

4. Kobayashi S., Wu H.-H. On holomorphic sections of certain hermitian vector bundles // Math. Ann. 1970. V.189. P.1-4.

УДК 514.75

ОБ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ

Ю.И.Ш е в ч е н к о
(Калининградский ун-т)

Основная задача дифференциальной геометрии поверхности проективного пространства по Г.Ф.Лаптеву и Н.М.Остиану состоит в построении оснащения Э.Картана.Если рассматривать поверхность как многообразие касательных плоскостей,то эту задачу необходимо переформулировать в пользу нормализации А.П.Нордена.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A,A_J\}$ $(J,\mathcal{J},K=\overline{1,n})$,деривационные формулы которого запишем в виде
$$dA=\theta A+\omega^J A_J,\quad dA_J=\theta A_J+\omega_J^{\mathcal{J}}A_{\mathcal{J}}+\omega_J A, \tag{1}$$
где θ - некоторая 1-форма,а структурные формы $\omega^J,\omega_J^{\mathcal{J}},\omega_J$ проективной группы $GP(n)$,действующей в пространстве P_n, удовлетворяют уравнениям Картана (см.,например, [1,с.173]):
$$\begin{cases} d\omega^J=\omega^{\mathcal{J}}\wedge\omega_{\mathcal{J}}^J, \qquad d\omega_J=\omega_J^{\mathcal{J}}\wedge\omega_{\mathcal{J}},\\ d\omega_{\mathcal{J}}^J=\omega_{\mathcal{J}}^K\wedge\omega_K^J+\omega_{\mathcal{J}}\wedge\omega^J+\delta_{\mathcal{J}}^J\omega_K\wedge\omega^K. \end{cases} \tag{2}$$
В пространстве P_n рассмотрим локальную m-поверхность X_m $(0<m<n)$ как семейство центрированных касательных плоскостей T_m. Произведем разбиение значений индексов: $J=(i,a)$;
$$i,j,k=\overline{1,m};\qquad a,b,c=\overline{m+1,n}.$$
Репером нулевого порядка поверхности X_m является репер $\{A,A_i,A_a\}$,вершины A,A_i которого помещены на касательную плоскость T_m, причем вершина A - в ее центр.Из формул (1) вытекает система дифференциальных уравнений поверхности X_m:
$$\omega^a=0,\qquad \omega_i^a=\Lambda_{ij}^a\omega^j. \tag{3}$$
Продолжая эту систему,найдем
$$\nabla\Lambda_{ij}^a\equiv 0\qquad (\Lambda_{ij}^a=\Lambda_{ji}^a), \tag{4}$$
где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i, а дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:
$$\nabla\Lambda_{ij}^a=d\Lambda_{ij}^a-\Lambda_{ik}^a\omega_j^k-\Lambda_{kj}^a\omega_i^k+\Lambda_{ij}^b\omega_b^a.$$
Коэффициенты Λ_{ij}^a в системе (3) образуют фундаментальный тензор 1-го порядка поверхности X_m, представляемой как многообразие касательных плоскостей.

Из структурных уравнений (2) группы $GP(n)$ и дифференциальных уравнений (3) поверхности X_m вытекает,что с последней ассоциируется расслоение $G(X_m)$ со структурными уравнениями

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{5}$$
$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \tag{6}$$
$$d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij}, \tag{7}$$
$$d\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^i \wedge \omega_{bi}^a, \tag{8}$$
$$d\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega^j \wedge \omega_{aj}^i, \tag{9}$$
$$d\omega_a = \omega_a^i \wedge \omega_i + \omega_a^b \wedge \omega_b,$$
где
$$\omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^a \omega_a^i - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j, \quad \omega_{ij} = \Lambda_{ij}^a \omega_a,$$
$$\omega_{bi}^a = -\Lambda_{ij}^a \omega_b^j - \delta_b^a \omega_i, \quad \omega_{aj}^i = -\delta_j^i \omega_a.$$
Базой главного расслоения $G(X_m)$ является поверхность X_m, а типовым слоем - подгруппа стационарности $G \subset GP(n)$ центрированной плоскости T_m, причем

$$\dim G = \dim GP(n) - \dim Gr(m,n) - \dim T_m =$$
$$= n^2 - nm + m^2 + n,$$

где $Gr(m,n)$ обозначает многообразие Грассмана m-плоскостей в пространстве P_n. С другой стороны, размерность группы G равна числу вторичных форм в репере нулевого порядка.

Ассоциированное расслоение $G(X_m)$ содержит четыре главных подрасслоения с той же базой X_m: I) расслоение реперов $A^*(X_m)$ со структурными уравнениями (5)-(7), типовой слой которого есть коаффинная (центропроективная) группа $A^* = GA^*(m) \subset G$, действующая в центрированной касательной плоскости T_m; 2) расслоение касательных линейных реперов $L(X_m)$ (5),(6) с типовым слоем - линейной группой $L = GL(m) \subset A^*$, действующей в связке касательных прямых (ср. [2, с.59]); 3) расслоение $H(X_m)$ (5),(6),(8),(9), типовой слой - группа Ли $H \subset G$ размерности

$$\dim H = \dim G - \dim Gr(n-1, n) = n^2 - nm + m^2,$$

действующая в связке гиперплоскостей с центром A; 4) расслоение двойственных линейных реперов $L^*(X_m)$ (5),(8), типовой слой - линейная группа $L^* = GL(n-m) \subset H$, действующая в пучке гиперплоскостей с осью T_m. Указанные группы Ли удовлетворяют соотношениям: $L \subset A^* \subset G \supset H \supset L^*$, $A^* \cap H = L$, $L \cup L^* \neq H$, $A^* \cup H \neq G$. Здесь точнее говорить о некоторых фактор-группах группы G, изоморфных ее соответствующим подгруппам.

Поясним действия групп Ли. Из формул (I) с учетом уравнений (3) при фиксации плоскости T_m получим

$$\delta A = \vartheta A, \quad \delta A_i = \vartheta A_i + \pi_i^j A_j + \pi_i A, \tag{10}$$

где

$$\delta = d\big|_{\omega^k=0}, \quad \vartheta = \theta\big|_{\omega^k=0}, \quad \pi_i^j = \omega_i^j\big|_{\omega^k=0}, \quad \pi_i = \omega_i\big|_{\omega^k=0}.$$

Откуда видно, что в образующей плоскости T_m действует коаффинная группа A^* со структурными формами π_i^j, π_i. Далее, уравнения стационарности точки $M = A + x^J A_J \in P_n$ имеют вид

$$dx^J = x^J (x^J \omega_J - \omega_J^J) - \omega^J. \tag{11}$$

Произвольная гиперплоскость, проходящая через точку A, задается уравнением

$$F \overset{def}{=} \xi_J x^J = 0. \tag{12}$$

Дифференцируя левую часть уравнения (I2) с помощью уравнений (II) при $\omega^k = 0$, найдем $\delta F = F x^J \pi_J + x^J(\delta\xi_J - \xi_J \pi_J^J)$, отсюда получим условия относительной инвариантности гиперплоскости (I2)

$$\delta \xi_i = \omega \xi_i + \xi_j \pi_i^j, \tag{13}$$

$$\delta \xi_a = \omega \xi_a + \xi_b \pi_a^b + \xi_i \pi_a^i, \tag{14}$$

где ω - I-форма, играющая роль множителя пропорциональности. Из аналогии между уравнениями (I0) и (I3),(I4) следует, что в связке гиперплоскостей с центром A действует группа H со структурными формами $\pi_i^j, \pi_a^b, \pi_a^i$. Наконец, уравнения (I3) показывают, что функции ξ_i образуют тензор, поэтому равенства $\xi_i = 0$ имеют инвариантный смысл, состоящий в том, что гиперплоскость (I2) содержит касательную плоскость T_m. В этом случае уравнения (I2), (I4) упростятся: $\xi_a x^a = 0$, $\delta\xi_a = \omega\xi_a + \xi_b \pi_a^b$. Тогда ясно действие линейной группы L^* с формами π_a^b.

Фундаментально-групповая связность в главном расслоении $G(X_m)$ задается по Лаптеву [3, с.63,83] с помощью объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ai}\}$:

$$\begin{cases} \nabla\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i \equiv 0, \quad \nabla\Gamma_{ij} + \Gamma_{ij}^k \omega_k + \omega_{ij} \equiv 0, \\ \nabla\Gamma_{bi}^a + \omega_{bi}^a \equiv 0, \quad \nabla\Gamma_{aj}^i + \Gamma_{aj}^b \omega_b^i - \Gamma_{kj}^i \omega_a^k + \omega_{aj}^i \equiv 0, \\ \nabla\Gamma_{ai} + \Gamma_{ai}^j \omega_j + \Gamma_{ai}^b \omega_b - \Gamma_{ji} \omega_a^j \equiv 0. \end{cases} \tag{15}$$

Объект связности Γ содержит четыре существенных подобъекта:

$\Gamma_1=\{\Gamma^i_{jk},\Gamma_{ij}\}$, $\Gamma_2=\{\Gamma^i_{jk}\}$, $\Gamma_3=\{\Gamma^i_{jk},\Gamma^a_{bi},\Gamma^i_{aj}\}$, $\Gamma_4=\{\Gamma^a_{bi}\}$, задающих связности в указанных выше подрасслоениях.

Произведем оснащение Картана [4] поверхности X_m, состоящее в задании поля плоскостей C_{n-m-1} ($C_{n-m-1}\cap T_m=\varnothing$). Плоскость Картана C_{n-m-1} определим базисными точками $B_a=A_a+\lambda^i_a A_i+\lambda_a A$, причем коэффициенты λ^i_a, λ_a удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\lambda^i_a+\omega^i_a=\lambda^i_{aj}\,\omega^j, \tag{I6}$$

$$\nabla\lambda_a+\lambda^i_a\,\omega_i+\omega_a=\lambda_{ai}\,\omega^i, \tag{I7}$$

обеспечивающим относительную инвариантность плоскости C_{n-m-1}. Отметим, что квазитензор λ^i_a определяет нормаль I-го рода $N_{n-m}=A+C_{n-m-1}$ с помощью системы уравнений $x^i=\lambda^i_a x^a$.

Т е о р е м а I. Оснащение Картана поверхности X_m позволяет свести задание фундаментально-групповой связности Γ в ассоциированном расслоении $G(X_m)$ к заданию коаффинной связности Γ_1 в подрасслоении $A^*(X_m)$ и линейной связности Γ_4 в подрасслоении $L^*(X_m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продолжая уравнения (I6), (I7), получим

$$\nabla\lambda^i_{aj}-\lambda^i_b\,\omega^b_{aj}+\lambda^k_a\,\omega^i_{kj}+\omega^i_{aj}\equiv 0, \tag{I8}$$

$$\nabla\lambda_{ai}-\lambda_b\,\omega^b_{ai}+\lambda^j_{ai}\,\omega_j+\lambda^j_a\,\omega_{ji}\equiv 0\,. \tag{I9}$$

Продолжение оснащающего по Картану квазитензора $\{\lambda^i_a,\lambda_a\}$ и подобъекты связностей Γ_1,Γ_4 охватывают остальные компоненты Γ^i_{aj}, Γ_{ai} объекта Γ по формулам:

$$\Gamma^i_{aj}=\lambda^i_{aj}+\lambda^i_b\Gamma^b_{aj}-\lambda^k_a\Gamma^i_{kj}\,,\quad \Gamma_{ai}=\lambda_{ai}+\lambda_b\Gamma^b_{ai}-\lambda^j_a\Gamma_{ji}\,, \tag{20}$$

вытекающим из соотношений (I5)-(I9).

Теперь вместо оснащения Картана осуществим нормализацию А.П.Нордена [5,с.I97] поверхности X_m, которая состоит в задании на ней поля двух плоскостей, называемых нормалями. Нормаль I-го рода N_{n-m} ($N_{n-m}\cap T_m=A$) определим с помощью квазитензора λ^i_a. Нормаль 2-го рода N_{m-1} ($A\bar{\in} N_{m-1}\subset T_m$) зададим совокупностью базисных точек $B_i=A_i+\lambda_i A$, причем

$$\nabla\lambda_i+\omega_i=\lambda_{ij}\,\omega^j. \tag{2I}$$

Т е о р е м а 2. Нормализация Нордена поверхности X_m индуцирует фундаментально-групповую связность в ассоциированном расслоении $G(X_m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продолжая систему уравнений (2I), получим

$$\nabla\lambda_{ij}-\lambda_k\,\omega^k_{ij}+\omega_{ij}\equiv 0. \tag{22}$$

Фундаментальный тензор Λ^a_{ij} и нормализующие квазитензоры λ^i_a,λ_i вместе со своими пфаффовыми производными $\lambda^i_{aj},\lambda_{ij}$ охватывают компоненты объекта связности Γ по формулам

$$\begin{cases}\Gamma^i_{jk}=\Lambda^a_{jk}\lambda^i_a-\delta^i_j\lambda_k-\delta^i_k\lambda_j\,,\quad \Gamma_{ij}=\lambda_{ij}+\Lambda^a_{ij}\lambda^k_a\lambda_k-2\lambda_i\lambda_j,\\ \Gamma^a_{bi}=-\Lambda^a_{ij}\lambda^j_b-\delta^a_b\lambda_i\,,\quad \Gamma^i_{aj}=\lambda^i_{aj}+\lambda^k_a(\delta^i_j\lambda_k-2\Lambda^b_{jk}\lambda^i_b),\\ \Gamma_{ai}=\lambda^j_{ai}\lambda_j-\lambda^j_a\lambda_{ji}+2\lambda^j_a(\lambda_i\lambda_j-\Lambda^b_{ij}\lambda^k_b\lambda_k),\end{cases} \tag{23}$$

вытекающим из соотношений (4), (I5), (I6), (I8), (2I), (22).

З а м е ч а н и я: I) формулы (20) получались другим путем [6]; 2) для компонент (23) выполняется лишь первая группа формул (20); 3) теорема 2 доказывалась двумя иными способами [6],[7].

В ы в о д ы

I. Нормализация А.П.Нордена поверхности позволяет задавать в ассоциированном расслоении фундаментально-групповые связности трех типов, причем индуцированные линейная связность (в классической терминологии - внутренняя аффинная [5,с.20I]), определяемая объектом Γ^i_{jk}, и двойственная ей линейная связность (называемая нормальной [2,с.60] или внешней [5,с.203]) с объектом Γ^a_{bi} не зависят от типа фундаментально-групповой связности.

2. С точки зрения расслоений основную задачу [8,с.39],[9,с. 244] проективной дифференциальной геометрии поверхности нужно уточнить, отдавая предпочтение нормализации Нордена перед оснащением Картана.

Библиографический список

I. К о б а я с и Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, I986. 224с.

2. Ч а к м а з я н А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n //Проблемы геометрии/ ВИНИТИ. М., I978. Т. IO. С.55-74.

3. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы геометрии/ВИНИТИ. М, I979. Т.9. 248с.

4. К а р т а н Э. Пространства проективной связности// Тр. семинара по векторному и тензорному анализу.М.;Л.,1937.Вып.4, С.160-173.

5. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности.М.: Наука,1976.432с.

6. Ш е в ч е н к о Ю.И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1987.Вып.18.С.115-120.

7. Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1977.Вып.8.С.135-150.

8. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей//Геометрия.1963.Итоги науки/ВИНИТИ.М.,1965.С.5-64.

9. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1966. Т.I.С.239-263.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРИК С ШЕСТИКРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С.В.Ш м е л е в а
(Калининградское ВИУИВ)

В трехмерном проективном пространстве исследуется специальный класс конгруэнций $\mathcal{K}$ линейчатых квадрик Q с одной невырождающейся шестикратной фокальной поверхностью.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}$ к реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, где A_0, A_3 совмещаются с фокальными точками квадрики $Q\in\mathcal{K}$, а ребра A_0A_i, A_3A_i – с прямолинейными образующими квадрики $Q\in\mathcal{K}$. Здесь и в дальнейшем $i,\hat{i},k=1,2$; $i\neq\hat{i}$ и по индексам i и $\hat{i}$ суммирование не производится.

Конгруэнция $\mathcal{K}$ определяется следующей системой уравнений Пфаффа:
$$\begin{cases}\omega_0^3=0,\quad \omega_3^0=0,\quad \omega_i^{\hat{i}}=a_{ik}^{\hat{i}}\omega^k,\quad \omega_i^3=(\delta_k^{\hat{i}}+c_{ik})\omega^k,\\ \omega_i^0=(b_k^{\hat{i}}+\lambda_{ik})\omega^k,\quad \omega_3^i=b_k^i\omega^k,\quad \omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0,\\ \Omega\equiv\omega_0^0+\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=h_k\omega^k,\end{cases}\tag{I}$$

причем
$$B_1^1\lambda_{12}-\lambda_{11}b_2^1+\lambda_{22}b_1^2-\lambda_{21}b_2^2=0\tag{2}$$
Для линии $\omega^i=t^i\vartheta$ (где ϑ -параметрическая форма [I,с.41]) на фокальной поверхности (A_0) конгруэнции $\mathcal{K}$ однозначно определяется присоединенная квадрика Q_t:
$$t^1F_1+t^2F_2=0,\tag{3}$$
где
$$F_i\equiv h_ix^1x^2-a_{ii}^{\hat{i}}(x^i)^2-a_{\hat{i}i}^i(x^{\hat{i}})^2+\lambda_{ki}x^kx^3+c_{ki}x^kx^0.\tag{4}$$

Уравнения $F_i=0$ определяют квадрики Q_i, которые мы называем ассоциированными квадриками.

О п р е д е л е н и е 1. Линией c_i (соответственно h) на поверхности (A_0) называется линия, для которой точки A_i и A_0 (соответственно A_1 и A_2) полярно сопряжены относительно присоединенной квадрики Q_t; линией a_i называется линия на поверхности (A_0), для которой точка $A_i\in Q_t$.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\mathcal{K}_n$ назовем конгруэнцию $\mathcal{K}$, имеющую одну невырождающуюся поверхность (A_0) кратности не меньше, чем n. Конгруэнцией $\hat{\mathcal{K}}$ назовем конгруэнцию $\mathcal{K}$ квадрик с фокальной парой прямых, пересекающихся в точке A_0.

В силу свойств конгруэнций квадрик в P_3 имеем следующую классификационную схему:
$$\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{K}_2\longrightarrow\mathcal{K}_3\longrightarrow\mathcal{K}_4\longrightarrow\mathcal{K}_5\longrightarrow\mathcal{K}_6\longrightarrow\mathcal{K}_7-\cdots\to\hat{\mathcal{K}}.$$

Подклассы $\mathcal{K}_2,\mathcal{K}_3,\mathcal{K}_4$ исследованы достаточно подробно в работах [2],[3]. Одним из наиболее замечательных подклассов конгруэнций $\mathcal{K}$ являются конгруэнции $\mathcal{N}\in\mathcal{K}_4$ -конгруэнции $\mathcal{K}$ с неопределенными линиями c_1 и c_2.

Конгруэнции $\mathcal{N}$ определяются системой пфаффовых уравнений
$$\begin{cases}\omega_0^3=0,\quad \omega_3^0=0,\quad \omega_i^{\hat{i}}=a_{ik}^{\hat{i}}\omega^k,\quad \omega_i^3=\omega^{\hat{i}},\\ \omega_3^i=b_k^i\omega^k,\quad \Omega\equiv\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_3^3=h_k\omega^k,\\ \omega_i^0=(b_i^{\hat{i}}+\lambda_{ik})\omega^k,\quad \omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0\end{cases}\tag{5}$$
и конечными соотношениями
$$\begin{cases}\lambda_{12}b_1^1-\lambda_{11}b_2^1+\lambda_{22}b_1^2-\lambda_{21}b_2^2=0,\\ 2a_{i\hat{i}}^{\hat{i}}+h_i=0.\end{cases}\tag{6}$$
Конгруэнции $\mathcal{N}$ обладают следующими характеристическими признаками (см.[3]):

1)Обе ассоциированные квадрики Q_1 и Q_2 являются конусами с вершиной A_0;

2)Точка A_0 является фокальной точкой второго порядка.

Квадрика Ли поверхности (A_0) конгруэнции $\mathcal{N}$ пересекается с квадрикой Q по асимптотическим касательным A_0A_i и конике:

$$x^1x^2-x^0x^3=0\ ,\quad h_k x^k+mx^3=0. \tag{7}$$

Таким образом,с конгруэнцией $\mathcal{N}$ ассоциируется конгруэнция коник,лежащих на квадрике Q .

О п р е д е л е н и е 3.Конгруэнцией $\mathcal{N}_0$ называется конгруэнция $\mathcal{N}$,у которой линии h, a_1, a_2 совпадают,а точки A_1 и A_2 не сопряжены полярно относительно обеих ассоциированных квадрик Q_1 и Q_2 .

В силу этого определения конгруэнции $\mathcal{N}_0$ выделяются из конгруэнций $\mathcal{N}$ соотношениями:

$$a=0\ ,\ s_1=0\ ,\ s_2=0, \tag{8}$$

$$h_1h_2\neq 0\ , \tag{9}$$

где относительные инварианты a, s_1, s_2 определяются формулами (3) работы [3].

С учетом (9) осуществим фиксацию оставшихся двух вторичных групповых параметров,положив: $h_1=1$,$h_2=1$. Пфаффова система уравнений конгруэнции $\mathcal{N}_0$ имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_0^3=0\ ,\ \omega_3^0=0\ ,\ 2\omega_i^{\hat{i}}=-\omega^i-\omega^{\hat{i}},\ \ \omega_i^3=\omega^{\hat{i}}, \\ \omega_3^i=b_k^i\omega^k,\ \omega_i^0=(b_k^{\hat{i}}+\lambda_{ik})\omega^k, \\ 2\omega_0^0=(H_{11}+H_{21}-\frac{1}{2})\omega^1+(H_{12}+H_{22}-\frac{1}{2})\omega^2, \\ 2\omega_3^3=(\frac{3}{2}-H_{11}-H_{21})\omega^1+(\frac{3}{2}-H_{12}-H_{22})\omega^2, \\ 2\omega_i^i=(H_{\hat{i}i}-H_{ii}-\frac{1}{2})\omega^i+(H_{\hat{i}\hat{i}}-H_{i\hat{i}}-\frac{1}{2})\omega^{\hat{i}}, \end{cases} \tag{10}$$

где величины H_{ik} находятся из дифференциальных уравнений для компонент геометрического объекта h_i .Из (10) следуют конечные соотношения:

$$\begin{cases} b_1^1\lambda_{12}-b_2^2\lambda_{21}+b_1^2\lambda_{22}-b_2^1\lambda_{11}=0, \\ H_{i\hat{i}}=\lambda_{ii}+\frac{1}{2}(H_{11}+H_{22})\ ,\ \ \lambda_{11}-\lambda_{22}+2(\lambda_{12}-\lambda_{21})=0\ . \end{cases} \tag{11}$$

Анализируя систему (10),(11),убеждаемся,что конгруэнции $\mathcal{N}_0$ определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Для конгруэнций $\mathcal{N}_0$ справедливы конечные соотношения (2) работы [3] и соотношения:

$$-\lambda c+(u_i-a)^2+2v_{\hat{i}}q_{\hat{i}}+(s_i+t_i)(t_{\hat{i}}-s_{\hat{i}})-(v_i+w_i)(r_{\hat{i}}+q_{\hat{i}})-p_i\ell_i=0,$$

$$\lambda(r_{\hat{i}}+q_{\hat{i}})+2v_{\hat{i}}(u_i-a)+\ell_i(s_{\hat{i}}-t_{\hat{i}})+(v_i+w_i)(s_i+t_i)=0.$$

Следовательно,фокальная точка A_0 квадрики $Q\in\mathcal{N}_0$ -шестикратная. Таким образом, $\mathcal{N}_0\in\mathcal{K}_6$. Можно показать,что конгруэнция $\mathcal{N}_0$ не является конгруэнцией $\mathcal{K}_7$.

Уравнение квадрики Ли Q_0 фокальной поверхности (A_0) конгруэнции $\mathcal{N}_0$ записывается в виде

$$\Phi_0\equiv 4(x^1x^2-x^0x^3)+2x^1x^2+2x^2x^3+(2\lambda_{12}+H_{12})(x^3)^2=0.$$

Плоскость коники (7) проходит через точку A_0 и точку $E_0^*=A_1-A_2$ - четвертую гармоническую единичной точке $E_0=A_1+A_2$ относительно A_1 и A_2 .

Библиографический список

1.Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Тр. геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

2.М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1981.Вып.12. С.44-47.

3.Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с четырехкратной фокальной поверхностью//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986.Вып.17.С.106-109.

УДК 514.75

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КОНГРУЭНЦИИ КОНИК В A_3

Е.А.Щ е р б а к

(Калининградский ун-т)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются конгруэнции коник F ,лежащих на инвариантной цилиндрической поверхности Φ .Назовем такие конгруэнции цилиндрическими конгруэнциями коник.

Исследования проводятся в частично-канонизированном репере

$R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$ ($\alpha=1,2,3$), начало A которого совмещено с центром коники F, концы E_i векторов $\bar{e}_i$ ($i=1,2$) расположены на конике F так, что векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ сопряжены относительно F, причем вектор $\bar{e}_1$ параллелен прямой, соединяющей центр коники F с характеристической точкой плоскости коники F. Вектор $\bar{e}_3$ параллелен образующей цилиндрической поверхности Φ.

Уравнения коники F и цилиндрической поверхности Φ в выбранном репере имеют соответственно вид:

$$F: \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0; \tag{1}$$

$$\Phi: \quad (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1. \tag{2}$$

Из условия инвариантности цилиндрической поверхности Φ имеем:

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0, \quad \omega_2^1 + \omega_1^2 = 0. \tag{3}$$

Система уравнений Пфаффа цилиндрической конгруэнции коник состоит из уравнений (3) и следующих уравнений:

$$\omega_1^2 = \Gamma_1^{2i}\Omega_i, \quad \omega^3 = \Gamma^{31}\Omega_1 \quad (\Gamma^{31} \neq 0), \tag{4}$$

где главные формы $\Omega_i = \omega_i^3$ приняты за независимые формы конгруэнции K.

Анализируя системы уравнений (3) и (4), убеждаемся, что цилиндрические конгруэнции коник существуют и определяются с произволом одной функции двух аргументов.

О п р е д е л е н и е I. Обозначим через $F_{a,b}$ (a, b - положительные фиксированные числа) конику, заданную уравнениями:

$$a(x^1)^2 + b(x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0, \tag{5}$$

т.е. конику, принадлежащую плоскости $\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$, имеющую центр в точке A и относительно которой векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены.

Интерес представляет случай, когда $a \neq b$. Координаты фокальных точек коники $F_{a,b}$ конгруэнции $(F_{a,b})$ определяются из уравнений (5) и уравнения $x^1x^2(b-a)(\Gamma_1^{21}x^2 - \Gamma_1^{22}x^1 - \Gamma_1^{22}\Gamma^{31}) = 0$ или, т.к. $a \neq b$,

$$x^1x^2(\Gamma_1^{21}x^2 - \Gamma_1^{22}x^1 - \Gamma_1^{22}\Gamma^{31}) = 0. \tag{6}$$

Т е о р е м а 1. Точки пересечения коники $F_{a,b}$ с ее диаметрами, параллельными векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, являются фокальными точками коники $F_{a,b}$ в конгруэнции $(F_{a,b})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки $C_{1,2}$; $C_{3,4}$ пересечения коники $F_{a,b}$ с ее диаметрами, параллельными векторам $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$, имеют координаты $C_{1,2}(\pm\frac{1}{\sqrt{a}},0,0)$ и $C_{3,4}(0,\pm\frac{1}{\sqrt{b}},0)$.

Подставляя координаты полученных точек в уравнение (6), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2. Фокальные точки коники $F_{a,b}$ конгруэнции $(F_{a,b})$, отличные от точек $C_{1,2}$ и $C_{3,4}$, тогда и только тогда принадлежат прямой, проходящей через центр коники $F_{a,b}$, когда индикатриса вектора $\bar{e}_1$ вырождается в линию.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фокальные точки коники $F_{a,b}$ конгруэнции $(F_{a,b})$, отличные от точек $C_{1,2}$ и $C_{3,4}$, расположены на прямой ℓ, заданной уравнениями:

$$\Gamma_1^{22}x^1 - \Gamma_1^{21}x^2 + \Gamma_1^{22}\Gamma^{31} = 0, \quad x^3 = 0. \tag{7}$$

Так как $\Gamma^{31} \neq 0$, то прямая ℓ тогда и только тогда проходит через центр коники $F_{a,b}$, когда

$$\Gamma_1^{22} = 0. \tag{8}$$

Рассмотрим индикатрису вектора $\bar{e}_1$. Имеем

$$d\bar{e}_1 = \Omega_1(\Gamma_1^{21}\bar{e}_2 + \bar{e}_3) + \Omega_2\Gamma_1^{22}\bar{e}_2. \tag{9}$$

Из формулы (8) следует, что индикатриса вектора $\bar{e}_1$ тогда и только тогда вырождается в линию, когда

$$\Gamma_1^{22} = 0. \tag{10}$$

Сравнивая соотношения (8) и (10), убеждаемся в справедливости теоремы 2.

О п р е д е л е н и е 2. Обозначим через $F_{a,b}^c$ (a,b,c - фиксированные числа) конику, заданную уравнениями:

$$a(x^1)^2 + b(x^2)^2 + 2cx^1x^2 = 1, \quad x^3 = 0, \tag{11}$$

т.е. конику, принадлежащую плоскости $\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ и имеющую центр в точке A.

Интерес представляет только случай, когда условия $a=b$ и $c=0$ не выполняются одновременно.

Координаты фокальных точек коники $F_{a,b}^c$ конгруэнции $(F_{a,b}^c)$ определяются из уравнений (11) и уравнения

$$((b-a)x^1x^2 + c((x^1)^2-(x^2)^2)(\Gamma_1^{21}x^2 - \Gamma_1^{22}x^1 - \Gamma_1^{22}\Gamma^{31}) = 0. \tag{12}$$

Т е о р е м а 3. Точки пересечения коники $F_{a,b}^c$ конгруэнции $(F_{a,b}^c)$ с прямыми AE_1 и AE_2 тогда и только тогда одновременно являются ее фокальными точками, когда коника $F_{a,b}^c$ является коникой $F_{a,b}$, т.е. когда векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно этой коники.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки пересечения коники $F^c_{a,b}$ с прямыми AE_1 и AE_2 имеют вид:

$$M_{1,2}\ (\pm\frac{1}{\sqrt{a}}, 0, 0)\ ,\quad M_{3,4}\ (0, \pm\frac{1}{\sqrt{b}}, 0). \qquad (13)$$

Так как точки (13) одновременно являются фокальными точками коники $F^c_{a,b}$ конгруэнции $(F^c_{a,b})$, то их координаты должны удовлетворять уравнению (12), а это возможно только в случае, когда $c=0$, т.е. когда коника $F^c_{a,b}$ является коникой $F_{a,b}$. Обратное утверждение теоремы легко проверить, подставив в уравнение (12) $c=0$.

Т е о р е м а 4. Точки пересечения коники $F^c_{a,b}$ с прямыми $x^1=\pm x^2$ тогда и только тогда являются ее фокальными точками, когда коника $F^c_{a,b}$ есть коника $F^c_{a,a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точки пересечения коники $F^c_{a,b}$ с прямыми $x^1=x^2$ и $x^1=-x^2$ имеют соответственно вид:

$$N_{1,2}\ (\pm B_1, \pm B_1, 0);\quad N_{3,4}\ (\pm B_2, \pm B_2, 0), \qquad (14)$$

где

$$B_1=\frac{1}{\sqrt{a+b+2c}}\ ,\quad B_2=\frac{1}{\sqrt{a+b-2c}}.$$

Подставляя координаты точек (14) в уравнение (12), убеждаемся, что они будут удовлетворять этому уравнению только в случае, когда $a=b$, т.е. когда коника $F^c_{a,b}$ является коникой $F^c_{a,a}$. Обратное утверждение теоремы следует из того, что при $a=b$ уравнение (12) приводится к виду: $((x^1)^2-(x^2)^2)(\Gamma^{21}_1 x^2-\Gamma^{22}_1 x^1-\Gamma^{22}_1\Gamma^{31})=0$, следовательно, точки пересечения прямых $x^1=\pm x^2$ с коникой $F^c_{a,a}$ являются ее фокальными точками.

Т е о р е м а 5. Каждая из коник $F_{a,b}$ и $F^c_{a,b}$ имеет по две фокальные точки, инцидентные прямой ℓ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прямая ℓ задается уравнениями (7), учитывая их в уравнениях (6) и (12) для определения координат фокальных точек коник $F_{a,b}$ и $F^c_{a,b}$ убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 6. Прямая ℓ проходит через характеристическую точку плоскости коники F.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическая точка плоскости коники F имеет координаты $(-\Gamma^{31}, 0, 0)$. Подставляя эти координаты в уравнения (7), задающие прямую ℓ, убеждаемся в справедливости теоремы.

С Е М И Н А Р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском госуниверситете

В предыдущих выпусках сборника освещена работа семинара по 23 декабря 1987 года. Ниже приводится перечень докладов, обсужденных на семинаре в 1988 году.

10.02.88. В.С.М а л а х о в с к и й. Обзор по дифференциальной геометрии многообразий фигур.

17.02.88. Б.А.А н д р е е в. Отображения многообразий фигур в механике сплошных сред.

24.02.88. А.В.М а х о р к и н. Метод нормальных форм в теории систем Пфаффа.

2.03.88. В.В.М а х о р к и н. Инфинитезимальные фигуры.

9.03.88. Ю.И.П о п о в. Дифференциально-геометрические структуры многообразия.

16.03.88. Е.В.С к р ы д л о в а. О вырожденных конгруэнциях, порожденных парой коник специального взаимного расположения.

23.03.88. С.В.Ш м е л е в а. Конгруэнции квадрик в трехмерном проективном пространстве с фокальным автополярным тетраэдром.

30.03.88. В.Н.Х у д е н к о. О связи связности в расслоении, ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов, с пространством аффинной связности.

6.04.88. Е.А.Щ е р б а к. О конгруэнциях пар фигур, порожденных коникой и плоскостью.

13.04.88. С.Ю.В о л к о в а. Об одном классе распределений проективного пространства.

20.04.88. Л.М.К р е с с (г.Казань). Пучки билинейных форм и аффинные связности в биаксиальных и биаффинных пространствах.

27.04.88. Э.Ш.З а р и п о в (Тадж.ССР). Геометрия однородных пространств, порожденных группами унитарных и неевклидовых движений и их автоморфизмами.

4.05.88. М.Ф.Г р е б е н ю к (г.Киев).Дифференциально-геометрические структуры,ассоциированные с распределением аффинного пространства.

11.05.88. Н.В.М а л а х о в с к и й. О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств.

18.05.88. Т.П.Ф у н т и к о в а. Вырожденные конгруэнции,порожденные парой эллипсов.

25.05.88. С.В.Ш м е л е в а. Об одном классе конгруэнций квадрик с шестикратной фокальной поверхностью.

5.10.88. Е.П.Ю р о в а. Расслоенное пространство квадрик в аффинном пространстве.

12.10.88. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Роль оснащения Э.Картана и нормализации А.П.Нордена для задания фундаментально-групповых связностей.

19.10.88. Л.А.Ж а р и к о в а. О связностях,индуцируемых конгруэнциями коник.

26.10.88.Л.Г.К о р с а к о в а. Конгруэнции пар коник с заданными свойствами ассоциированных образов.

2.11.88.В.П.Ц а п е н к о.Классы конгруэнций пар квадрик и точек.

9.11.88. Ю.И.Ш е в ч е н к о.Приложение ковариантных дифференциалов геометрических объектов к геометрии поверхности проективного пространства.

16.11.88. Е.В. С к р ы д л о в а. О вырожденных конгруэнциях кривых и поверхностей второго порядка.

30.11.88. Б.А.А н д р е е в. К теории многообразий гиперквадрик унитарного пространства.

7.12.88. В.В.М а х о р к и н. Связь фокальных образов с теорией особенностей дифференцируемых отображений.

14.12.88. В.Н.Х у д е н к о. Связности в расслоениях,ассоциированных с многообразиями квадрик.

21.12.88. Л.Г.К о р с а к о в а.Геометрические свойства пар конгруэнций коник.

28.12.88. Ю.И.П о п о в. О неголономных композициях А.П. Нордена многосоставных распределений.

уб.