**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2019/2020**

# Mathematik für Anwender I

## Arbeitsblatt 13

### Übungsaufgaben

Aufgabe 13.1. Zeige die folgenden Eigenschaften von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus

(1)
$$\cosh x + \sinh x = e^x .$$

(2)
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x} .$$

(3)
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 .$$

Aufgabe 13.2. Zeige, dass in der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ des Kosinus hyperbolicus die Koeffizienten $c_n$ für ungerades $n$ gleich 0 sind.

Aufgabe 13.3. Zeige, dass der Sinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}$ streng wachsend ist.

Aufgabe 13.4. Beweise die Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen, also

a)
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

b)
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Aufgabe 13.5. Zeige, dass der Tangens hyperbolicus die Abschätzungen

$$-1 \leq \tanh x \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt.

Aufgabe 13.6. Es sei $P = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P$ genau dann eine ungerade Funktion definiert, wenn $a_k = 0$ für alle geraden Indizes ist.

Aufgabe 13.7. Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Woran erkennt man am Graphen von $f$, ob $f$ eine gerade Funktion ist?

Aufgabe 13.8. Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Woran erkennt man am Graphen von $f$, ob $f$ eine ungerade Funktion ist?

Aufgabe 13.9. Zeige, dass die Summe von zwei geraden Funktionen wieder gerade und die Summe von zwei ungeraden Funktionen wieder ungerade ist. Kann man etwas über die Summe von einer geraden Funktion mit einer ungeraden Funktion aussagen?

Aufgabe 13.10. Zeige, dass das Produkt von zwei geraden Funktionen wieder gerade, das Produkt von zwei ungeraden Funktionen gerade und das Produkt von einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade ist.

Aufgabe 13.11. Zeige, dass es genau eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die sowohl gerade als auch ungerade ist.

Aufgabe 13.12. Zeige, dass man jede stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

als $f = g + h$ mit einer stetigen geraden Funktion $g$ und einer stetigen ungeraden Funktion $h$ schreiben kann.

Aufgabe 13.13. Welche Punkte kennen Sie auf dem rationalen Einheitskreis

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}?$$

Aufgabe 13.14. Beschreibe die obere Hälfte des Einheitskreises und die untere Hälfte des Einheitskreises als den Graphen einer Funktion.

Aufgabe 13.15. Wir betrachten den rationalen Einheitskreis

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

und die Gerade

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x + y = 0\right\}.$$

(1) Bestimme die Schnittpunkte $E \cap G$.
(2) Wie sieht es aus, wenn man statt $\mathbb{Q}$ die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nimmt?
(3) Kann man einen Kreis erst dann verstehen, wenn man die reellen Zahlen verstanden hat?
(4) Welche Beziehung besteht zum Zwischenwertsatz?

Aufgabe 13.16. Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden $G$ und des Kreises $K$, wobei $G$ durch die Gleichung $2y - 3x + 1 = 0$ und $K$ durch den Mittelpunkt $(2, 2)$ und den Radius $5$ gegeben ist.

Aufgabe 13.17.*

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Geraden, die durch die beiden Punkte $(-1,1)$ und $(4,-2)$ verläuft.

Aufgabe 13.18.*

Berechne die Schnittpunkte der beiden Kreise $K_1$ und $K_2$, wobei $K_1$ den Mittelpunkt $(3,4)$ und den Radius 6 und $K_2$ den Mittelpunkt $(-8,1)$ und den Radius 7 besitzt.

Aufgabe 13.19. Es seien $a, b, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, und sei

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \right\}$$

der *Kreis* mit dem *Mittelpunkt* $M = (a,b)$ und dem *Radius* $r$. Es sei $G$ eine *Gerade* in $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass es auf $G$ mindestens einen Punkt $P$ gibt mit $d(M,P) \leq r$. Zeige, dass $K \cap G \neq \emptyset$ ist.

Aufgabe 13.20.*

Beweise elementargeometrisch den *Sinussatz*, also die Aussage, dass in einem Dreieck die Gleichheiten

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

gelten, wobei $a, b, c$ die Seitenlängen gegenüber den Ecken mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma$ sind.

Aufgabe 13.21. Wir betrachten eine Uhr mit Minuten- und Sekundenzeiger, die sich beide kontinuierlich bewegen. Bestimme eine Formel, die aus der Winkelstellung des Minutenzeigers die Winkelstellung des Sekundenzeigers (jeweils ausgehend von der 12-Uhr-Stellung im Uhrzeigersinn gemessen) berechnet.

Aufgabe 13.22. Bestimme die Koeffizienten bis zu $z^6$ in der Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ aus der Sinusreihe und der Kosinusreihe.

Aufgabe 13.23. Berechne

$$\left(1 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{24}X^4\right)^2 + \left(X - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{120}X^5\right)^2 .$$

Was fällt dabei auf und wie kann man es erklären?

Aufgabe 13.24. Zeige $-1 \leq \sin x \leq 1$ und $-1 \leq \cos x \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 13.25.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+ \,.$$

Aufgabe 13.26.*

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.27. (3 Punkte)

Zeige, dass der Kosinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$ streng fallend und auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng wachsend ist.

Aufgabe 13.28. (3 Punkte)

Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden $G$ und des Kreises $K$, wobei $G$ durch die Gleichung $3y - 4x + 2 = 0$ und $K$ durch den Mittelpunkt $(2, 5)$ und den Radius 7 gegeben ist.

Aufgabe 13.29. (5 Punkte)

Beweise das Additionstheorem

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

für den Sinus unter Bezug auf die definierenden Potenzreihen.

Aufgabe 13.30. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{5 \sin^3 n - 6n^4 + 13n^2 + (\sin n)(\cos (n^2))}{7n^4 - 5n^3 + n^2 \sin^2 (n^3) - \cos n}$$

in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 13.31. (5 Punkte)

Es seien $n$ komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in der Kreisscheibe $B$ mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1, also in $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, gegeben. Zeige, dass es einen Punkt $w \in B$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i - w| \geq n$$

gibt.

# Abbildungsverzeichnis