高等幾何學

第一章　線形方程式及線形偽變數

1. 導言矩陣就幾何解析關係着論，應用代數方法頗爲便利，其中最重要者爲行列式及線形方程式尤於線形偽變數關係甚密切。

普通 n 線形方程式 n 個未知數用 Cramer 氏法則解之，例如 n=3

(1)　$a_ix + b_iy + c_iz = k_i$　　$i = 1, 2, 3,$

則　$|abc| \neq 0$

$$x = \frac{|kbc|}{|abc|},\quad y = \frac{|akc|}{|abc|},\quad z = \frac{|abk|}{|abc|}$$

更作進一步之研究，關於線形方程式乃以應用矩陣爲宜。

矩陣之例如次

(2)　$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}$　二列三行矩陣

(3)　$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{Vmatrix}$　四次正矩陣

在 (2) 中可得三個二次不同行列式及六個一次行例式是即爲 (2) 之原素。

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

又如（3）則可得四次，三次，二次，一次各行列式.

（定義）從矩陣得來之行列式其 r 次各行列式之値不盡爲零而其 r 以上次各行列式之値盡等於零則稱其矩陣之品位爲 r.

下列各矩陣之品位爲 2, 1, 0

$$\left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

習　　題

求下列矩陣之品位

1. $\left\| \begin{matrix} 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{matrix} \right\|$　　2 $\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\|$

3. $\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & 5 \end{matrix} \right\|$

4. 將行列式之行列任意互換其所自之矩陣品位不變.

2. 齊次線形方程式　多項式變數 x_1, x_2, x_3 而每項各變數同次則稱爲齊次,

$2x_1-5x_2+3x_3$, 　又　$3x_1x_2-5x_2^2+4x_1x_3$.

前者爲一次，後者爲二次.

A　三變數二個齊次線形方程系

(1)　$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$

　　$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$

易知 $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0$ 適合上二式，但其解非合實用.

求其他之解，分別為三種情況，依據其係數矩陣品位 r 為 2, 1, 或 0. 矩陣如次.

(2)　$\begin{Vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{Vmatrix}$

1.　$r=2$　矩陣之二次行列式最少有一個不為零.

假設　$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$　又將 (1) 書作

(3)　$a_1x_1+a_2x_2=-a_3x_3$

　　$b_1x_1+b_2x_2=-b_3x_3$

則 (4)　$x_1=\dfrac{\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}x_3\qquad x_2=\dfrac{\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}x_3$

故其解為 (5)　$x_1=\dfrac{|a_2\ b_3|}{|a_1\ b_2|}x_3\qquad x_2=\dfrac{|a_3\ b_1|}{|a_1\ b_2|}x_3\qquad x_3=x_3$

上式中 x_3 為任意常數.

設 k 為任意常數, $k|a_1b_2|$ 亦為任意常數.

故以 $k|a_1b_2|$ 代表 (5) 中任意常數 x_3 則結果

(I)　$x_1=k|a_2b_3|,\quad x_2=k|a_3b_1|,\quad x_3=k|a_1b_2|.$

上式中 k 爲任意常數, 若將 k 與一定値時, 則稱其解爲特解.

例如 $k=0$ 則特解爲 0,0,0

例如 $k=1$ 則特解爲 $|a_2b_3|, |a_3b_1|, |a_1b_2|$

II $r=1$ 所有二次行列式之值盡爲零, 但最少有一個原素不爲零, 例如 $a_1\neq 0$ 由第一式得 x_1

$$x_1=-\frac{a_2}{a_1}x_2-\frac{a_3}{a_1}x_3$$

但此 x_1 適合於第二式故以之代入後得

$$(a_1b_3-a_2b_1)x_2+(a_1b_3-a_3b_1)x_3=0$$

因各二次行列式爲零, 故 $(a_1b_2-a_2b_1)$, $(a_1b_3-a_3b_1)$ 皆爲零.

(6) $x_1=-\frac{a_2}{a_1}x_2-\frac{a_3}{a_1}x_3 \quad x_2=x_2. \quad x_3=x_3$

(II) $x_1=-ka_2-la_3 \quad x_2=ka_1 \quad x_3=la_1$

此處用 k,l 爲任意常數.

III. $r=0$ 因各係數皆爲零, 則通解爲

(III) $x_1=k \quad x_2=l \quad x_3=m$

此處用 k,l,m 爲任意常數.

前者三情況皆有異於 0,0,0 之解. 故得定理如次,

(定理A) 齊次線形方程式個數少於三而變數三個必有異於 0,0,0 之解.

考察前列三情況（1）之解中具備 $3-r$ 個任意常數，此 $3-r$ 個乃其變數之個數可以用任意常數表示之者，

習　題 Ⅱ

爰有 $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$ 求證定理 A.

B. 三變數三個齊次線形方程系

$$(7)\qquad \begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3&=0\\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3&=0\\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3&=0 \end{aligned}$$

不常有異於 0, 0, 0 之解，因如 $|abc|\neq0$ 則只有 0, 0, 0 之解，

故凡（7）有異於 0, 0, 0 之解時 $|abc|=0$

若 $|abc|=0$ 則 $||abc||$ 之 r 爲 2, 1. 或爲 0 此乃與（1）之意義相類，是以必有異於 0, 0 ,0 之解，

I. $r=2$ 可設 $|a_1b_2|\neq0$

(I) $x_1=k|a_2b_3|$, $x_2=k|a_3b_1|$, $x_3=k|a_1b_2|$

代入（7）之第三式　$k|abc|=0$,

與 $|abc|=0$ 之意義一致，

II. $r=1$ 則於（7）至少有一係數不爲零。

設 $a_1\neq0$ 又所有二次行列式爲零．故其解同 A 之（II）

$x_1 = -ka_2 - la_3 \quad x_2 = ka_1 \quad x_3 = la_1$

III. $r=0$ 則於 (7) 係數皆爲零，其解爲

$x_1 = k, \quad x_2 = l, \quad x_3 = m.$

故總之得次述之定理。

（定理 B ） 三變數三個齊次線形方程式有異於 0, 0, 0 之解，其充要條件爲其係數行列式之値等於零。

此處 $\|abc\|$ 之品位爲 r, 則其解中包含 $3-r$ 個任意常数，

若 $r<3$ 則 (7) 之解與 (4) 之解同

若 $r=3$ 則 (7) 之解爲 0, 0, 0 乃 $3-3$ 個即無任意常數。

C. 三變數三個以上齊次線形方程系

甚多之三變數齊次線形方程式以附於 (7) 之後，

因其只有三變數故其係數矩陣之品位最大爲 3,

若 $r=3$ 則矩陣中取出三次行列式至少有一個不爲零。

例如 $|abc| \neq 0$ 則其前三式之解爲 0, 0, 0 無他解矣。

若 $r=2$ 則用 I 可以知其解。

若 $r=1$ 則可 II 可以知其解。

若 $r=0$ 則用 III 可以知其解。

總之可得次述定理。

（定理 C）三變數三個以上齊次線形方程式若有異於0,0,0之解，其充要條件爲其係數矩陣品位小於三。

關於通解中包含 $3-r$ 個任意常數，總得一定理如次。

（定理一）若三變數齊次線形方程式係數矩陣品位爲 r，則其通解包含 $3-r$ 個任意常數，

按照以上方法可得以下定理。

（定理二）n 個變數齊次線形方程式係數矩陣品位爲 r，則其通解包含 $n-r$ 個任意常數。

（推論 A）若其方程式個數小於 n，則必有異於 $0,0,\cdots,0$ 之解。

（推論 B）若其方程式個數恰爲 n，則惟於其係數行列式爲零時，有異於 $0,0,\cdots,0$ 之解。

（推論 C）若其方程式個數等於 n 或大於 n 則惟於 $r<n$ 時有異於 $0,0,\cdots,0$ 之解。

習　　題

1. $2x_1+3x_2+6x_3=0$，$3x_1-6x_2+2x_3=0$

求一特解及其通解

2. 解 $3x_1+2x_2-2x_3=0$. $2x_1+3x_2-x_3=0$, $8x_1+7x_2$

$-5x_2=0$

3. 証明(定理二)之(推論 B)用 $n=2$.

4. 證明(定理二)之(推論 C)用次式

$$a_1x_1+a_2x_2=0,\ b_1x_1+b_2x_2=0,\quad c_1x_1+c_2x_2=0$$

5. 討論四變數三個齊次線形方程系之解，

證明(定理二)之(推論 B)用 $n=4$

6, 求次式之通解

$$x_1+2x_2-x_3+x_4=0,\ x_1+2x_2+x_3-2x_4=0$$

7. 證明 n 變數齊次線形方程式有異於 $0,0,\cdots,0$ 之解其充要條件爲係數矩陣品位小於 n，

3. 比例性質 線形倚變數 普通比例定義首末兩項之積等於居中兩項之積。但 2,4 與 0,0 雖作成其積相等，而非爲比例一眼可見。茲爲便利故，作新定義。

(定義一)兩對數 a_1,a_2 與 b_1,b_2 成比例則存在兩數 k,l 而不同時爲零，並得

$$ka_1+lb_1=0.\ ka_2+lb_2=0$$

舊定義 a_1,a_2 與 b_1,b_2 成比例則 $|ab|=0$. 但 $|ab|=0$ 其 $a_1.a_2$ 與 $b_1.b_2$ 未必成比例。用新定義則無此語病

(定理一)兩對數 a_1,a_2 與 $b_1.b_2$ 成比例(用新定義)則惟有 $|ab|=0$

據新定義則 (1) 中 k,l (視作變數) 有異於 $0,0$ 之解，但此二個齊次線形方程式係數矩陣品位小於 2 始合於條件，故 $|ab|=0$

由此推論，設有 n 對數成比例，用新定義亦適合無礙，例如 $n=3$ 得次述定義，

(定義二)　三對數如次

$$(2)\quad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$$

成比例之充要條件，乃存在 k, l 非同時爲零以使

$$(3)\quad ka_1+lb_1=0,\ ka_2+lb_2=0,\ ka_3+lb_3=0$$

(定理二)　三對數 a_1,a_2,a_3 與 b_1,b_2,b_3 成比例充要條件爲

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

此因 k,l 異於 $0,0$ 之解必有其係數矩陣品位小於 2.

線形倚變數　由比例新定義而得線形倚變數定義如次，

(定義三)　三三數

$$(5)\quad \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

爲線形倚變數之充要條件乃 k, l, m 不俱爲零而存在

$$(6)\quad \begin{aligned} ka_1+lb_1+mc_1&=0\\ ka_2+lb_2+mc_2&=0\\ ka_3+lb_3+mc_3&=0\end{aligned}$$

此(6)之 k, l, m 有異於 0,0,0之解惟 $|abc|=0$

(定理三) 三三數爲線形倚變數之充要條件爲其行列式爲零亦惟其矩陣品位小於三。

(定理四) m 個三組數爲線形倚變數之充要條件乃其矩陣品位小於 m

例如 $m=4$

$$(7)\quad \begin{aligned} Aa_1+Bb_1+Cc_1+Dd_1&=0\\ Aa_2+Bb_2+Cc_2+Dd_2&=0\\ Aa_3+Bb_3+Cc_3+Dd_3&=0\end{aligned}$$

此處有 A, B, C, D 視作未知數，而常有異於 0,0,0,0之解。

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{matrix}\right\|$$ 之品位小於 4 故合於倚變條件。

同理 $Aa_i+Bb_i+Cc_i+Dd_i+Ee_i=0$, $(i=1,2,3)$

亦得合於倚變條件因其矩陣品位小於 5. 總之如次，

（定理五）　m 個 n 組數合於線形倚變數充要條件乃其矩陣品位小於 m，特於 $m>n$ 時常爲線形倚變數前例 $4>3$，或 $5>3$ 特於 $m=n$ 時其行列式之値爲 0. 例如（定義三）。

習　　題

1. 求証三三數 5, 14, 4；2, −1, 1；3, 4, 2 爲線形倚變數並求其所以倚變之常數値。

2. 作一定義以述明四個四組數成爲線形倚變數，其充要條件爲其數之行列式等於零。

3. 今有三個而四組之數爲 1,2,4,3；2,2,1,3；4,1,2,5，能成立線形倚變數否。

4. 作一定義以述明 m 個而分 n 組之數，以成線形倚變數，再用以證明（定理五）。

5. 今有 m 個而 n 組之數中，每取其小於 m 個之 n 組數成立線形倚變數，則其 m 個 n 組數成立線形倚變數。

6. 今有 m 個而 n 組之數，乃獨具若干之零，則其 m 個 n 組數爲線形倚變數。

4. 線形連合　設三數 c_1, c_2, c_3 稱爲兩個三組數 a_1, a_2, a_3 與 b_1, b_2, b_3 之線形連合，則存在兩數 k, l 以

成立次式。

(1)　$c_1=ka_1+lb_1,\quad c_2=ka_2+lb_2,\quad c_3=ka_3+lb_3$

普通，n 個之組，數 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 爲 m 個而 n 組之數如

$a_1,a_2,\cdots,a_n\ ;\ b_1,b_2,\cdots,b_n\ ;\ \cdots\ ;\ m_1,m_2,\cdots\cdots,m_n$

之線形連合則有 $A,B,\cdots\cdots,M$ 之數以成立 n 方成程式，

(2)　$b_i=Aa_i+Bb_i+\cdots\cdots+Mm_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$

線形連合與線形倚變數有密切關係，例如 (1)可書作

$ka_1+lb_1-c_1=0,\ ka_2+lb_2-c_2=0,\ ka_3+lb_3-c_3=0$

是與三三數成立線形倚變數同意義。

同樣，(2) 式移項後亦可知爲 (m+1) 個 n 組數。

$a_1,a_2,\cdots,a_n\ ;\ b_1,b_2,\cdots,b_n\cdots\ ;\ m_1,m_2,\cdots,m_n\ ;\ h_1,h_2,\cdots,h_n,$

以成立線形倚變數同意義。

此時
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{vmatrix}=0$$

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1\cdots m_1 & -h_1 \\ a_2 & b_2\cdots m_2 & -h_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n\cdots m_n & -b_n \end{matrix}\right\|$$ 之品位小於 (m+1)

一，$(m+1)>n$ 據前節（定理五）常成立線形倚變數，

二，$(m+1)=n$ 因最初成立線形連合，其 $(m+1)$ 次行列式爲零，

三，$(m+1)<n$ 同上理每 $(m+1)$ 次行列式亦皆爲零，

總之得次述定理

（定理一） 若其線形連合爲 m 個之數所成者則得 $(m+1)$ 個之數以成線形倚變數。

（定理二） 若干個成線形倚變數時，則其中至少有一組以成爲所餘者線形連合。

例如 3 節之(7)成立線形倚變數。

$$Aa_i+Bb_i+Cc_i+Dd_i=0 \qquad i=1,2,3.$$

其中 A,B,C,D 至少有一個不爲零，設 $D\neq0$

則上式可解得 d_1,d_2,d_3 之值乃屬線形連合矣。

習　　題

1. 求証 $\begin{vmatrix} a_1 & 3a_1-c_1 & c_1 \\ a_2 & 3a_2-c_2 & c_2 \\ a_3 & 3a_3-c_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$

且 $a_i=k(3a_i-c_i)+lc_i$

2． 行列式中若其一行(或列)爲其他二行(或列)或若干行(或列)之線形連合其行列式爲零。

3． 行列式每行(或每列)之和爲零則行列式之値爲零

5． 齊次線形方程式 結論

(定理一) 若 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 及 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 爲 n 變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 齊次線形方程式系之兩解，則

(a) $kr_1, \quad kr_2, \quad \cdots, \quad kr_n,$

(b) $r_1+s_1, \quad r_2+s_2, \quad \cdots, r_n+s_n,$

亦爲其解，式中 k 爲任意常數，

此時係數矩陣之品位常小於 n 而後可得異於 $0, 0, \cdots, 0$ 之解，由 2 之(推理 A)(推理 B)(推理 C)可知此理。

又通解中包含任意常數，因此而可得特解，各特解之任意倍數而又用其和差，仍是其方程系之解無疑。

(C) $kr_1+ls_1, \cdots, kr_n+ls_n \cdots\cdots, kr_n+ls_n$

故亦爲其一解，乃兩特解之線形連合。

又設 $t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n$ 亦爲其一解時，則

(d) $kr_1+ls_1+mt_1, \quad kr_2+ls_2+mt_2, \cdots\cdots, kr_n+ls_n+mt_n$

亦爲其一解，乃三特解之線形連合。

總之，若干解之線形連合，仍爲其一解。

茲取 2 節之例，另作推演於次，

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$$

設　$r=0$

$$x_1=k,\qquad x_2=l,\qquad x_3=m$$

則可書作次式

$$x_1=k(1)+l(0)+m(0)$$

$$x_2=k(0)+l(1)+m(0)$$

$$x_3=k(0)+l(0)+m(1)$$

此其三特解　1,0,0；0,1,0；0,0,1　必爲任意線形連合，而其三特解必非爲線形倚變數也，因行列式不爲零之故。

設　$r=1$

$$x_1=-a_2k-a_3l,\quad x_2=ka_1,\quad x_3=la_1\ (a\neq 0)$$

$$x_1=\bar{k}(-a_2)+\bar{l}(-a_3),\quad x_2=\bar{k}(a_1)+\bar{l}(0),\quad x_3=\bar{k}(0)+\bar{l}(a_1)$$

上式二特解 $-a_2,\ a_1,\ 0$　與 $-a_3,\ 0,\ a_1$　必爲任意線形連合。

又可知二特解必非爲線形倚變數，因其與 3 節（定

理二）不相合。

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & -a_2 \\ a_1 & -a_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{雖} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

設 $r=2$

$$x_1 = k\,|a_2 b_3|,\quad x_2 = k\,|a_3 b_1|,\quad x_3 = k\,|a_1 b_2|$$

此一特解 $|a_2 b_3|$，$|a_3 b_1|$，$|a_1 b_2|$ 乃可乘任意數以得線形連合，例如

$$x_1 = k\,|a_2 b_3| + l\,|a_2 b_3| = \bar{k}\,|a_2 b_3|$$

凡（3－2）惟存在一個任意常數此處視作未知數，更無其他可與之比較者。

由此可知一特解自身獨立．無考察其倚變數之必要。

總之．得次述定理。

（定理二）若 n 變數齊次線形方程式係數矩陣品位爲 r，則每解能書作（n－r）個非線形倚變數各特解之線形連合。

習　　題

1．證明（定理一）用 $n=3$

2．次式係數矩陣品位爲 2，求其通解，爲兩特解之線形連合，而非有線形倚變數之關係存在。

$x_1-x_2+x_3+x_4=0,\ x_1+x_2+5x_3-3x_4=0,\ 3x_1-x_2+7x_3-x_4=0$

5 行列式及補餘式　設行列式△中一原素 m 之小行列式爲 M. 此乃軸去 m 所佔之行與列按原部位所作之小行列式，若 m 所佔第 i 行第 j 列則於△次式

(1)　$(-1)^{i+j}mM$

包含一切有 m 之項，按此意可從其任一行(或列)展開即得△之值。

爲圖便利乃謂 m 有補餘式 $(-1)^{i+j}M=\mathrm{M}\div\Delta$

(定義)若 m 佔第 i 行第 j 列，則 m 有補餘式自具正負號。

$$\mathrm{M}=(-1)^{i+j}M$$

(定理一) 某一行或某一列之原素與其補餘式相乘各積之和爲行列式之值。

(定理二) 某一行或某一列之原素而乘其他行或列對應之補餘式各積之和爲零。

習　　題

1. 從△中各原素順序將其各補餘式安排得一新行列式△'，稱之爲△之架砌(行)列式

(a) $n=2,\ \Delta'=\Delta$　(b) $n=3\ \ \Delta'=\Delta^2$

2. 設 M 於△爲 m 之補餘式而 u 於架砌行列式△′爲 M 之補餘式

則 $u=\Delta^{n-2}m$

設 $n=2$，又設 $n=3$分別演述其義。

3. 對稱行列式爲主對角線兩側原素對稱相等，

求證對稱行列式之架砌行列式亦爲一種對稱行列式。設 $n=3$，用以演述其義

4. 反映對稱行列式者主對角線各原素皆爲零而其居於兩側對稱原素之值相等符號相反。

求證反映對稱行列式於次數爲奇數時，其行列式之值常爲 0.

用 $n=3$ 以演述其義。

5. 兩個同次行列式相乘爲以第一行列式之第 i 列原素一一乘第二行列式第 j 行原素之和作爲結果行列式之第 i 列第 j 行之原素。

設 $n=2$，則

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1 & a_1\alpha_2+a_2\beta_2 \\ b_1\alpha_1+b_2\beta_1 & b_1\alpha_2+b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

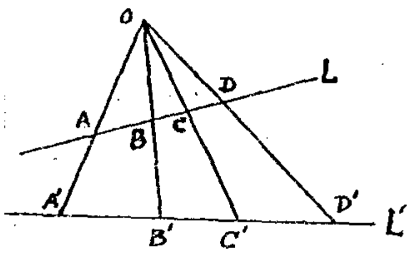
第二章　幾何導言

1. 射影與剛體運動　射影與計量性質　普通Euclid幾何所論者如線分之長，角之大小，及面積之類乃屬於計量性質，稱爲計量幾何學，約百年前產生一種新幾何，不論計量大小關係，稱之爲射影幾何學。

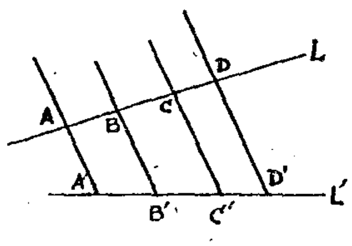
如欲明瞭二者之區別，先就圖形之剛體運動射影運動一述其演進之概要。

一直線射影於一直線上，令 L, L′ 爲同平面上之兩直線又令平面上 O 點不在其兩直線上。

令 A, B, C, D, 爲 L 上之點，連 OA, OB, OC, OD, 以定 L′ 於 A,′ B,′ C,′ D,′ ……於是稱之爲 A, B, C, D, ………之射影，O 稱爲射影中心。



第一圖



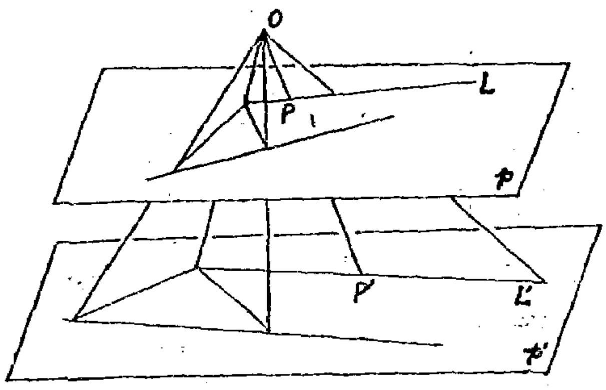
第二圖

第一圖爲自 O 將 L 之點射影於 L′ 之上，稱之爲中心射影。

第二圖表示若干同方向之直線截 L, L′ 各於相當點似此則稱之爲平行射影。

平面射影於平面上， 令 P, P′ 爲空間之兩平面又令 O 爲不在兩平面上之點。

自 O 作中心射影則 p 上任意 P 經射影連 OP 至與交於 P′ 如第三圖。



第 三 圖

設 P 爲 p 平面上 L 直線上之點則由 O 射影以得 P′ 平面上直線 L′ 而 P′ 爲 L′ 上之一點以與 P 對應。

第三圖爲中心射影。

同理以定方向作直線亦由 P 平面上之點線射影至 P′ 平面上得點線與之對應，是即平行射影也。

又如平面圓錐曲線平面外一點 O 連曲線得錐面則其圓錐曲線得射影至另一平面上且仍為圓錐曲線。又如平面圓錐曲線上各點作定方向之直線，則若干直線圍成一柱面，另以一平面截之，則亦得圓錐曲線，是為平行射影之關係也。

以上所述為圓錐曲線經射影方法而仍得圓錐曲線，是為射影性質。

（定義）圖形之性質經用射影方法而仍舊保存者為射影性質

其次之例皆為已知其屬於射影性質者。

圖形之為直線者，曲線之為圓錐曲線者，一點之在於一直線上者，若干點共同一直線者，若干直線共同一定點者，直點圖形而為三角形者。

最宜注意者，射影性質，非只謂經用幾次射影方法其圖形仍舊保存其性質即為滿足，乃言經用一切射影方法其圖形仍舊保存其性質也。例如用某射影方法圓仍為圓，但用另一射影方法不得復為圓矣。故曲線之為圓者，不得謂為射影性質。

剛體運動。將一圖形保持其固有性質任意移至他處，稱爲剛體運動。

不屬於射影性質之圖形，及屬於射影性質之圖形經用剛體運動仍舊保持其固有性質，毫無差別。

惟如距離，角度，面積等，特於剛體運動保持其固有性質，甚爲顯明，而此類關係之不屬於射影性質亦甚顯明故稱之爲計量性質。

（定義） 圖形經用一切剛體運動，（但决非謂其經用每個射影方法）而保持其固有性質者爲計量性質。

圓爲計量圖形，但普通圓錐曲線則爲射影性質。

二等邊三角形爲計量圖形但任意三角形射影性質。

射影與計量定理，就其性質將其推演定理之不同處區別於次，

（定義） 定理之僅僅關於射影性質圖形者爲射影定理。定理之僅僅論及計量性質抑或包括射影性質，乃是計量定理。

Pythagoras 定理爲計量定，其實 Euclid 幾何學皆屬計量定理，故 Euclid 幾何學稱爲計量幾何學。

射影幾何學乃僅僅論及射影性質者。

習　　題

1. 次列圖形舉出其何者屬射影何者屬計量。

(a) 平行四邊形 (b) 銳角三角形 (c) 圖形爲四點而無三點共一直線，連其點得六直線。

(d) 一三角形及其一中線 (e) 一拋物線 (f) 圓錐曲線及其上若干點，(g) 圓錐曲線及其上若干點中之一爲頂點。(h) 一直線與一圓錐曲線有兩公共點。

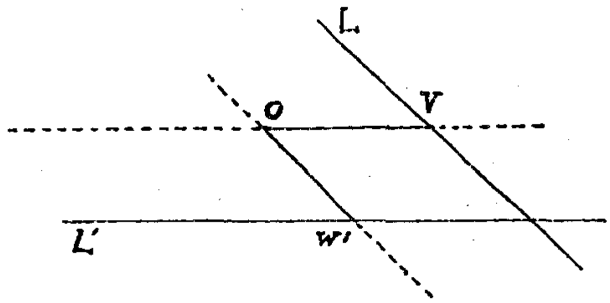
2. 兩點及其中點在 L 上，設用平行射影或中心射影，中點仍保持其性質，則 L,L′ 平行。此情形屬於射影計量二者之何種性質。

3. 求證曲線之切線爲射影性質。

2　消失點與消失線　中心射影如第四圖，L 線上有一點 V 而不能於 L′ 上得其對應點，蓋自 O 連其 L 上之點 V 得與 L′ 平行之直線故也。

另於 L′ 直線得 W′ 則 OW′ 與 L 直線平行，是W′ 於 L 上亦不能得其對應點。

如 V 則稱爲 L 上之消失點。如 W′ 則稱爲 L′ 上之消失點。



第　四　圖

可知除去兩個消失點，此外兩直線上之點各有其對應點，此乃一對一之關係也，

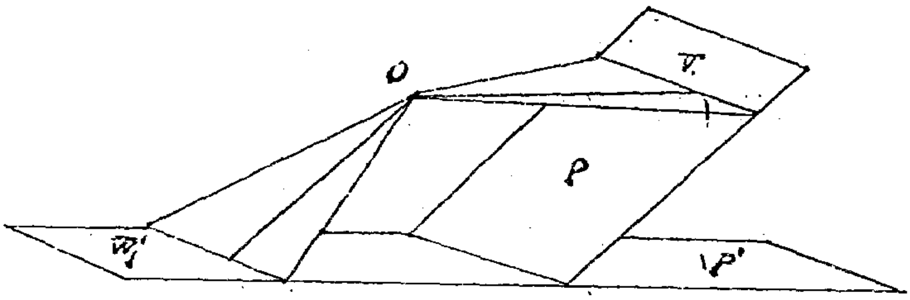
同理可推得中心射影如第五圖，P 平面上有直線 V_1 亦不能於 P' 上得其對應直線，蓋自 O 連其 P 上之 V_1 直線得與 P' 平面平行平面也。

另於 P' 平面得 W_1' 直線則 O W_1' 平面與 P 平面平行，是 W_1' 於 P 平面上亦不能得其對應直線。

如 V_1 則稱為 P 上之消失線，如 W_1' 則稱為 P' 上之消失線。

消失線上之點為消失點，以其 P 平面上任意消失點連射影中心 O 之直線，平行 P' 平面，必與 P' 平面上之直線不能得其對應點故也。

可知由射影關係，除去消失線點兩平面上各直線得其對應直線，乃為一對一之性質。



第五圖

設於P平面上有兩直線相交，經用射影法，普通於P′平面上得其對應兩直線亦相交。

習　題

1. 求一直線而射影至另一直線使其中不存在消失點。

2. 求一平面而射影至另一平面使其不中存在消失點。

3. 求證兩直線相交於P之消失點，經用射影法，得於P′平面上對應為兩平行直線。

4. 經用射影法，三角形普通對應為三角形，其例外之情況為何。

3. 平面與空間理論之概括　高等幾何學非是摒除一切例而外不納入研究範圍，乃是將特殊例一律視作普通概念以作而研究，並欲其一切包括於普通法則之下者也。

例如兩平行直線而設其有交點，則此所設之新點，殆有異於普通點之處，而稱之為理想點，或稱之為無窮遠點。因其給與吾人甚多便利，假設存在此種理想之新點，決無不可。

或謂兩平行直線，向正負兩無窮遠處以相交，但若假設有兩無窮遠點，其不便利尤甚於舊說兩平行直線之不相交，此說實不可取，故作假說如次。

為圖便利，每於一直線上，僅存在一理想點。

若干直線平行則謂其若干直線以一定之方向相交於一無窮遠點，是即於定方向有此一理想點也，且每直線上各僅有此一理想點存在。

總之得公認條件如次。

(公認條件一)對於每組一定方向之直線存在一理想點。(或一無窮遠點。)此一理想點只在於一組定方向各直線上，而不得在於其他直線上。故無窮遠點乃有定方向以指示之。

平面上各方向無窮遠點連結時，殆如曲線之甚大者，是一種曲線為圓為橢圓為其他則決不可知也。

經用射影法可知對於一消失點則有一無窮遠點與之對應。

對於一消失線則有若干無窮遠點組成如直線者與之對應。

（公認條件二）在於同一平面上之理想點組成一理想直線（或稱之爲其平面上之無窮遠線）

對於無窮遠點言，普通點稱爲限定點，對於無窮遠線言，普通直線稱爲限定直線。

同理，對於無窮遠面言，普通平面，稱爲限定平面，此處所言無窮遠面，爲概括若干無窮遠直線及無窮遠點之理想平面。由理想平面上之點線與普通限定平面上之點線連係爲一概括平面。

概括空間　由普通限定空間與一切無窮遠點所組成者稱爲概括空間。

（公認條件三）對於定限空間每組一定方向之直線存在一理想點。（或一無窮遠點），此一理想點只在於一組定方向各直線上，而不得在於其他限定直線上。

（公認條件四）對於定方向之垂直方向各無窮遠點組成一理想直線，（或一無窮遠線），此理想直線及其上之點在於每個垂直於定方向之平面上，而不得在於其他限定平面上。

（公認條件五）所有之無窮遠點組成一理想平面是即一無

窮遠平面也。

消去例外　在限定區域中有平行線一類之例外　在概括空間不過爲普遍情況下之一種特殊情況，不作例，由是言之，平行射影爲中心射影之一種特殊情況，不過爲以一無窮遠點爲射影中心耳，三角形經用射影法，常爲三角形與之對應，亦無例外可言。

習　題

1. 求証經用射影法 L 直線至 L′ 直線對於概括直線 L 上之點與概括直線 L′ 上之點，成立一對一關係而無例外存在。

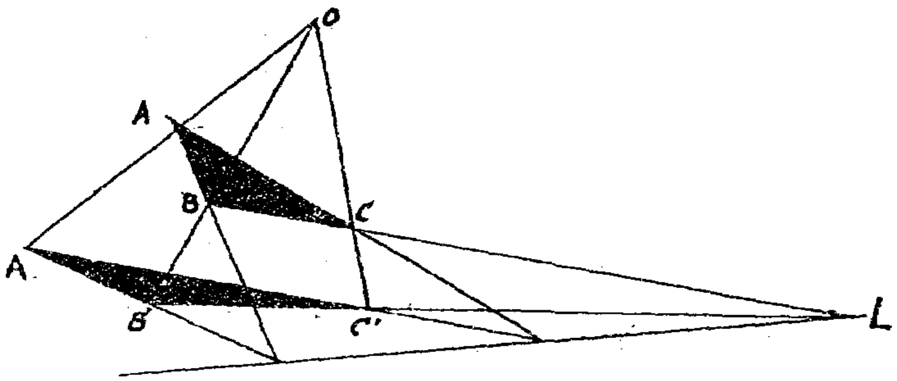
(a) 就其所謂消失點之存在於 L 與 L′ 直線上者中心射影。

(b) 就其所謂消失點不存在於 L 與 L′ 直線上者平行射影。

2. 就其與 1題相當之關係，經用射影法　平面至平面，點與點線與線一對一亦無例外存在。

4. Desargues 三角形定理　設 ABC 與 A′B′C′ 爲兩個三角形，各頂點與各頂點對應各邊與各邊對應　若連其對應頂點之三直線相交於一點則其相當邊之三交點在一

直線上，逆定理亦成立。



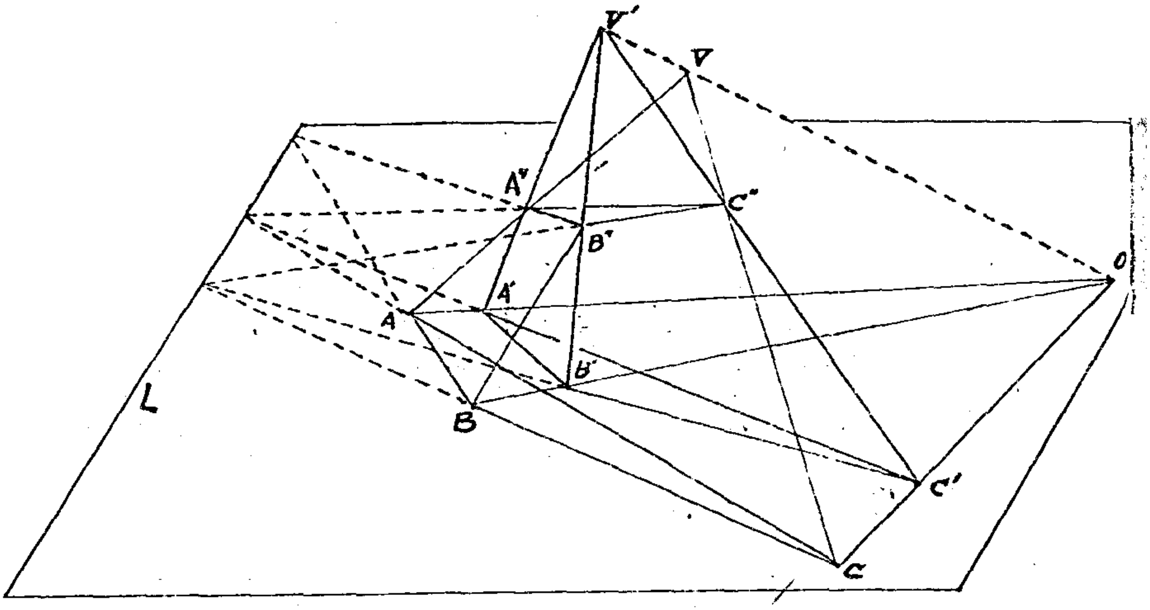
第　六　圖

如第六圖三角形 ABC 所在平面為P, 三角形A'B'C' 所在平面為 P'. 連其相當頂點三直線相交於 O 限定或理想之點。則每一對相當邊相交於其所在平面，並通過 O. 假此三平面各與 P,P' 之交線相交，每交點為三平面之公共點，三平面者，一對相對邊所在平面與 P,P'. 故相當邊之交點在 P 上復在 P' 上，是即相交於 P,P' 之交線 L 上也。

逆定理　先有 P,P' 之交線 L 並其上之三交點，凡三個平面各存在一對相當邊，每二個平面之交線存在一對相當頂點，凡得三交線相交於 O, 是其三個平面之交點也。

設兩三角形在同一平面 P 上，則另作一平面 P

其上有三角形 A''B''C''，自 V 射影以與 ABC 對應，又自 V' 射影將 A''B''C'' 以與 A'B'C' 對應，但 V,VO 在一直線上。



第七圖

兩三角形 A''B''C'' 與 ABC 相當邊相交於 p, p' 之交線上，兩三角形 A'' B'' C'' 與 A B C 相當邊相交於 p, p' 之交線上故兩三角形 A B C 與 A' B' C' 相當邊相交於 p, p' 之交線上．蓋 AA' 與 VV' 交於 O, 又 AV與 A' V' 交於 A'' 又 BV 與B' V' 交於 B'' 又 C V 與C'V' 交於 C'' 故得兩三角形 A'' B'' C'' 與 A B C 以 V 爲中

心射影關係也。兩三角形 $A''B''C''$ 與 $A'B'C'$ 同上理。

逆定理先有 ABC 與 $A'B'C'$ 及 $A''B''C''$ 相當邊相交於 L 直線上，因 $AA'A''$ 之平面上有 VV'

同樣 $BB'B''$ 與 $CC'C''$ 平面上亦有 VV'

故 AA', BB', CC' 有 VV' 上之一點即 O 點。

習　題

以上 Desargues 定理就概括空間論之者，試就限定空間分別論之，並注意其例外情況。更將其例外用概括空間以包含之。

5. 完全四點形及完全四邊形

（定義）一個完全四點形，包括四點，每三點不得在一直線上，而又連其四點得六直線。

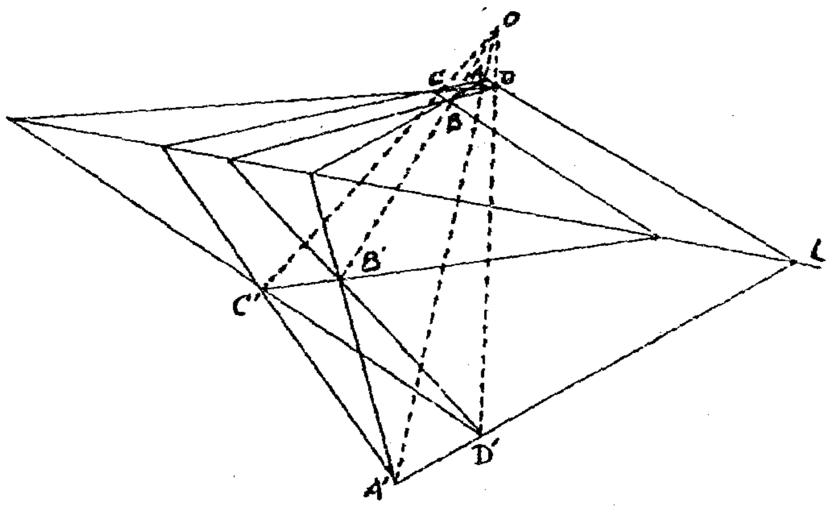
其四點稱為其形之頂，六直線稱為其形之邊。

（定義）完全四邊形包含四直線，每三直線不得在於公共點上，各兩直線之交點，計六點。

其四直線稱為其形之邊，六點稱為其形之頂

（定理一）兩個完全四點形六之五對對應邊交點在一直線上，則其所餘之一對對應邊交點，亦在其直線上

，連其各對對應項之四直線，通過一公共點。



第　八　圖

設 ABCD 與 A'B'C'D' 爲所設兩完全四點形。

令 CD 與 C'D' 爲第六對對應邊。

既三角形 ABC 與 A'B'C' 各對對應邊相交於 L 直線，

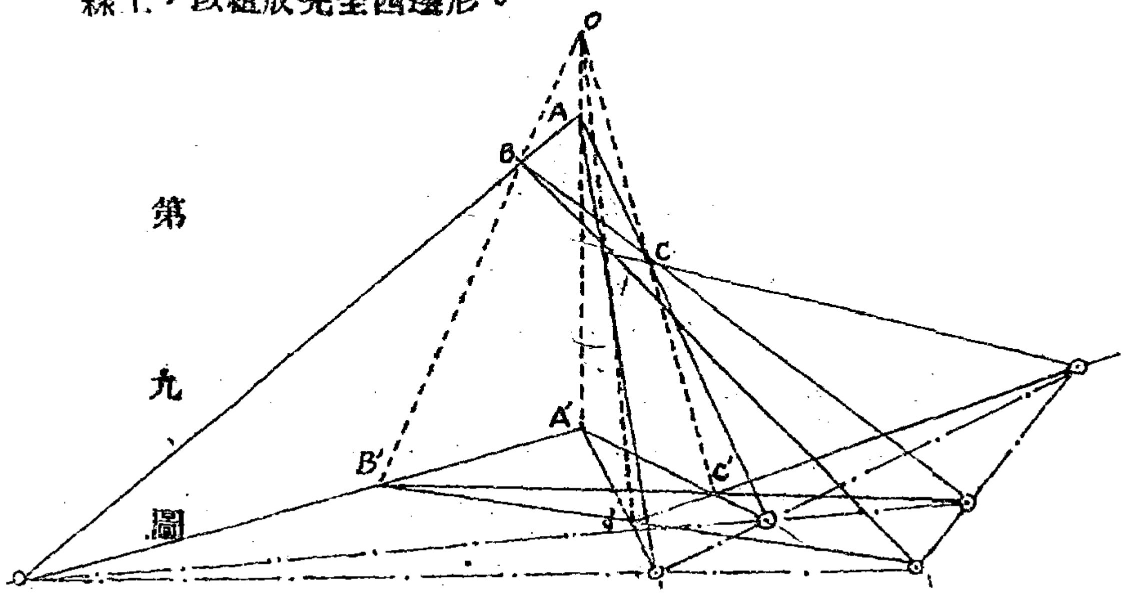
則 AA', BB', CC' 相交於 O 同理 AA', BB', DD' 相交於 O. 故連各對對應項四直線相交於 O.

再取三角形 ACD 與 A'C'D' 因其各對對應項之連線已相交於O. 故其三對對應邊之交點在一直線上，因有兩對對應邊之交點在 L 線上，故 CD, C'D' 之交點亦

亦然。

（定理二）連兩個完全四點形各對對應項之四直線相交於一公共點，其六對對應邊之六交點，若不在於一直線上，則每三點必在於一直線上，凡六點分配於四直線上，以組成完全四邊形。

第九圖



6.　雙對原理　凡原素與其他原素可互換者稱為雙對。

（定義一）點與直線稱為雙對原素。

（定義二）通過一點作一直線與在於一直線上取一點，稱之為雙對互演式。

由雙對互演式所得之兩圖形，稱爲雙對圖形。

（定義三）　兩圖形爲點與直線所構者若稱爲雙對圖形，則將一者之一切原素用其雙對原素換之，一切演式用其雙對互演式換之，結果得其所餘之一圖形。

前節完全四點形與完全四邊形爲雙對性質，

如(定義二)所述通過點之直線與在直線上之點，恰是意義一致，似此則爲自身雙對。

三角形與三邊形爲自身雙對。

設作前節(定理一)之雙對定理。則如次述語句，

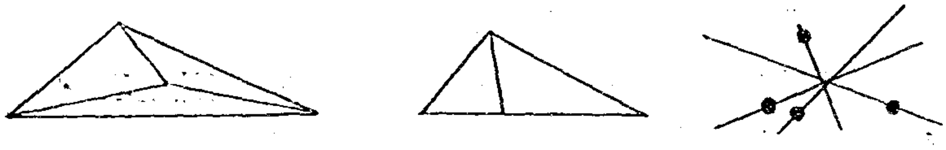
（定理壹）　兩個完全四邊形六之五對對應頂連線通過同一點，則其所餘之一對對應頂連線，亦通過同一點取其各對對應邊之四交點，在於一直線上。

此爲正確與否，須待證明。

習　　題

1．作完全五點形及其雙對圖形，所述五點無三點在一直線上。

2．作次列各圖之雙對圖形。



3. 證明(定理一)

4. 第 5 節 (定理二) 之雙對定理語句及證明如何。

5. 完全四邊形之兩項各不同其夾邊時，稱爲對項，對項連線稱對角線，求其雙對定義。

第三章　齊次座標點線之線形倚變

1. 齊次直交座標　論及一切無窮遠點必將以一定法則，指示其座標，是以產生齊次座標法，因普通所用者爲直交軸，故又名之爲齊次直交座標，簡稱齊次座標。

茲先述普通非齊次直交座標與齊次座標之關係。

（定義）限定點 (x,y) 之齊次座標 $(x_1, x_2, x_3,)$ 爲任意三數以使成立次式之關係

$$\frac{x_1}{x_3}=x \qquad \frac{x_2}{x_3}=y$$

例如 (x,y) 之齊次座標，則以次列各組之一皆可表示之。

$(x,y,1)$，$(-3x,-3y,-3)$，(rx,ry,r) 此處 r 爲任意數但非零耳。

故一限定點之座標，有無限多之齊次座標組表示之。但每兩組各項成比例而第三項不爲零。

逆之，任意一組三數齊次座標第三項不爲零者，乃表示限定點也。例如 $(3,-2,4)$ 表示 $(\frac{3}{4},-\frac{1}{2})$

今特就 $(x_1,x_2 0)$ 論之　其非表示限定點，固甚顯明。且更欲其表示某定方向之無窮遠點，設無差訛，則

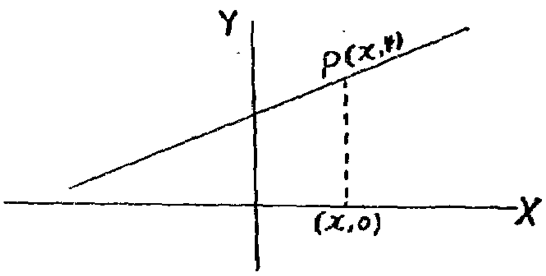
所以採取齊次座標之目的，已達列矣。

前者已知定方向一切直線上只有一無窮遠點。

設有定方向坡比 λ 之任意直線 L 其方程式如次，

$$y=\lambda x+b$$

其直線 L 上有動點 $P(x,y)$ 此動點可循其直線以至無窮遠點，今既知 $P(x,\lambda x+b)$ 爲非齊次座標，則用齊次座標表示之，爲 $(x,\lambda x+b,1)$，又以同樣之值如 r 者乘各項，其所表示之點仍無所異，故用 $\frac{1}{x}$ 乘各項則其點之齊次座標爲 $\left(1,\lambda+\frac{b}{x},\frac{1}{x}\right)$ 當 x 爲無窮大時則極限表示其無窮遠點之齊次座標即 $(1,\lambda,0)$．可知其關係與 b 不相干。



第 一 圖

由此可知有定方向坡比 λ 之無窮遠點爲 $(1,\lambda,0)$．

各項乘以 r 仍是其點得 $(r,r\lambda,0)$ 可知 $\frac{r\lambda}{r}=\lambda$，

〔定義〕 任意數組 $(x_1,x_2,0)$ 而得

$$\frac{x_2}{x_1}=\lambda$$

包括定方向坡比 λ 一組齊次座標之無窮遠點。

由此可知任意三個數爲組，皆是表示平面上之點。惟 $(0,0,0)$ 爲無意義之數，故不採用。

用齊次座標所表示之直線方程式。

普通 L 直線非齊次座標所表示之方程式如次。

(1) $a_1x+a_2y+a_3=0$

設用 $x=\dfrac{x_1}{x_3}$, $y=\dfrac{x_2}{x_3}$

代入 (1) 後，乘以 x_3，則得

(2) $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$

上式 (2) 爲用齊次座標所表示之直線方程式。

除 x_3 爲零之外，任何値俱適合 (2) 以表示其直線上之限定點，此直線上有無窮遠點 $(a_2,-a_1,0)$ 定方向坡比 $-\dfrac{a_1}{a_2}$

因任意點 (x_1,x_2,x_3) 爲一理想點時 x_3 必爲零。

(3) $x_3=0$

故爲無窮遠線之方程式，蓋一切無窮點皆與之適合

也。

方程式（1）表示直線，則須 a_1, a_2 不同時俱為零。

方程式（2）表示直線 則須 a_1, a_2, a_3 不同時俱為零。

若於方程式（2）特有 $a_1=a_2=0$ 則 $x_3=0$ 表示無窮遠線矣。

又（2)為齊次線形方程式，皆甚顯明，不待贅言。

習　　題

1． 求次列各點之齊次座標，先舉出其普遍數之組而後採取其最簡者。 (0,0,3) 為任意數

〔a〕 (0,0)，　〔b〕 (−2,3)，

〔c〕 $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$，　〔d〕 (0,1)

〔e〕 無窮遠點之有定方向坡比 $\frac{3}{4}$ 者。

〔f〕 無窮遠點之與 Y 軸同方向者。

2． 求次列各點在非齊次座標所表示之情況。

〔a〕 (2,4,−1)，　[b] (3,4,2)，

〔c〕 (2,1,0)　[d] (0,1,0)

3． 次列方程式表示何種圖形。

〔a〕 $x_1+x_2-4x_3=0$， $\frac{x_1}{x_3}$ $\frac{x_2}{x_3}$ $\frac{x_3}{x_3}$ (11)

$x+y-4=0$.

(b)　$x_1+2x_3=0$,　　(c)　$x_2-3x_3=0$,

4．前 (2) 式表示直線 L，若有一理想點之座標滿足 (2) 式，其充要條件，乃其理想點爲 L 上之無窮遠點。

2　點直線應用齊次座標

(定理一 a)　兩點 (a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3) 重合之充要條件爲

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0,$$

(定理一 b)　兩直線

(1)　$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$

$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$

重合之充要條件爲

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & c_1 \end{vmatrix}=0,\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0,$$

(定理二 a)兩直線如 (1) 式其交點之齊次座標爲

(2)　$$x_1=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\qquad x_2=\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\qquad x_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

因第一章第二節 A 所得 (1) 式之特解爲 (2)，且乘以任意常數 k 合於齊次座標不變之意義，

設（1）式之交點（2）復在於另一直線

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0$$

之上，則將（2）代入時。

$$c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

乃是　$|abc|=0$

（定理三 a）　三直線相交於同一點，其係數行列式之值爲零。三直線爲齊次方程式其於異乎 0,0,0 之解，係數行列式值爲零，其解乃是其交點之座標。

（定理三 b）　兩點 $(a_1,a_2,a_3,)$ $(b_1,b_2,b_3,)$ 相連直線之方程式爲

(3)　　　$|xab|=0$

因直線之方程式必爲

$$r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3=0$$

又因 (a_1,a_2,a_3) 與 (b_1,b_2,b_3) 在直線上故代入時，

$$r_1a_1+r_2a_2+r_3a_3=0$$

$$r_1b_1+r_2b_2+r_3b_3=0$$

三式消去 (r_1,r_2,r_3) 或用上二式先求 (r_1,r_2,r_3) 代入第一式　　即得（3）$|xab|=0$

（定理三 b）　三點在同一直線上，其齊次座標行列

式之値爲零。

因如第三點在於 (3) 之直線上，則 $|cab| = 0$，即 $|abc| = 0$.

習　　題

1. 求次列各組兩直線之交點

〔a〕　$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$,　　$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

〔b〕　$4x_1 + 6x_2 + x_3 = 0$,　　$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$

2. 求次列各兩點連線之方程式

〔a〕　$(1, -1, 2)$, $(0, 1, 4)$　〔b〕 $(4, 1, -2)$, $(1, 1, 0)$

3. 次三直線相交於一點否．若相交則其交點若何。

$x_1 - x_2 - x_3 = 0$,　$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$,　$7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$

4. 三點 $(2, 3, 1)$, $(5, -2, 2)$, $(1, -8, 0)$ 是否在一直線上。

5. 證明兩限定直線相交於無窮遠點則惟兩直線平行，但應用解析座標之法以證之。

6. 由(定理二 b)以求非齊次座標兩點 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 之連線方程式。

7. 求証兩限定點 (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) 重合之充要條件，

只爲 $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$,　$a_3b_1 - a_1b_3 = 0$.

3. 簡單記式法

$$f(x,y)=x^2+y^2-1$$

用以表示二次式 已較便利 設 $f(x,y)=0$ 或 $f=0$

則表示一單位圓 $x^2+y^2-1=0$. 其便利多多，更不待言。

同理 $\alpha(x_1,x_2,x_3)\equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$

則 $\alpha(x_1,x_2,x_3)=0$ 或 $\alpha=0$ 表示齊次座標之直線方程式，甚明。

4. 兩直線之線形連合。 直線束

設 $\alpha=0$, $\alpha(x_1,x_2,x_3)\equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$

$\beta=0$, $\beta(x_1,x_2,x_3)\equiv b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3$

表示兩直線並作成次式

$$k\alpha+l\beta=0$$

是即

$$(ka_1+lb_1)x_1+(ka_2+lb_2)x_2+(ka_3+lb_3)x_3=0$$

此處 k, l 爲常數而非俱爲零。

各係數不得俱爲零，否則兩組 a_1, a_2, a_3 與 b_1, b_2, b_3 成比例，而兩直線 $\alpha=0$, $\beta=0$ 重合與假設相反。

上方程式表示一直線稱爲兩直線之線形連合。

（定理一） 兩直線之線形連合爲通過兩直線交點之

一直線。

設 (r_1,r_2,r_3) 爲 $\alpha=0$, $\beta=0$ 之公共點

$$\alpha(r_1,r_2,r_3)=0,\quad \beta(r_1,r_2,r_3)=0$$

於是在其點上與 k, l 之值無關，仍得

$$k\alpha(r_1,r_2,r_3)+l\beta(r_1,r_2,r_3)=0$$

是即 (r_1,r_2,r_3) 亦在於 $k\alpha+l\beta=0$ 之上。

（定理二）通過兩直線交點之任意直線可用其兩直線之線形連合表示之。

設 L 直線爲通過 $\alpha=0$, $\beta=0$ 交點 P 之直線。

又設 L 直線上有 (S_1,S_2,S_3) 爲異於 P 之點。

因直線 $k\alpha+l\beta=0$ 通過 P 而其直線應與 L 重合。

故得 $k\alpha(S_1,S_2,S_3)+l\beta(S_1,S_2,S_3)=0$

由此求 k, l 則得其一解

$$k=\beta(S_1,S_2,S_3),\quad l=-\alpha(S_1,S_2,S_3).$$

因設 (S_1,S_2,S_3) 爲已知點代入普通遍直線式以表示 L 爲

$$k\alpha+l\beta=0,$$

例　求通過 (2,1,4) 並通過次列二直線交點之直線

線

$$2x_1 - 3x_2 + x_5 = 0,\quad 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

其線形連合爲

$$k(2x_1 - 3x_2 + x_5) + l(5x_1 - 3x_3 - 2x_3) = 0$$

包含 (2,1,1) 故 $2k + 5l = 0$ 得 $k = 5,\ l = -2$

代入後其直線方程式爲 $x_2 - x_5 = 0$.

直線束　通過一點之一切直線稱爲直線束。其點稱之爲頂。　由(定理一)(定理二)得次述之定理。

(定理三)　兩直線 $\alpha = 0,\ \beta = 0$ 凡由 $k\alpha + l\beta = 0$ 表示之一切直線，其中任意 k, l 爲異於 0,0 者，乃用 $\alpha = 0,\ \beta = 0$ 之交點爲頂之直線束。

習　題

1.　求通過原點及次列二直線交點之直線方程式

$$3x + 2y + 1 = 0,\qquad 4x - y - 2 = 0$$

應用齊次座標與非齊次座標分別演之。

2.　求通過次列二直線交點，

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0,\qquad 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$$

並平行於 x 軸之直線方程式。

3.　求通過 2 題二直線交點而垂直於

$3x + 2y + 1 = 0$　之直線方程式。

4. 次列二平行直線之線形連合為無窮遠線

$$6x_1-9x_2+2x_3=0,\quad 4x_1-6x_2-3x_3=0$$

5. 求平行於 4 題二直線而通過 $(2,3,-2)$ 點之直線。

6. 若 $\alpha=0$ 為限定直線，$\beta=0$ 為無窮遠線，則其兩線之線形連合如何表示之其直線束 $k\alpha+l\beta=0$ 為何。

7. 若 k 與 l 為任意常數，次列二式表示何意義。

(a) $k(3x_1+5x_3)+lx_3=0,$

(b) $kx-ly=0$

5. 諸直線之線形倚變數　若一切 x_1 x_2 x_3 任意值皆適合 $f(x_1,x_2,x_3)$ 使為零，則函數 $f(x_1,x_2,x_3)$ 稱為唯零函數。

(補題)　若 $A_1x_1+A_2x_2+Ax_3$ 為唯零函數，即

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3\equiv 0$$

則　$A_1=0,\ A_2=0,\ A_3=0$

蓋以 $A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3$ 將所有 $x_1,\ x_2,\ x_3$ 之值代入而為零，

則用 $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=0$ 得 $A_1=0$

同法 $A_2=0,\ A_3=0.$

（定義）　兩直線

(1)　$\alpha\equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0,\quad \beta\equiv b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$

爲線形倚變數之充要條件，乃存在 k, l 不俱爲零，

並使 $k\alpha+l\beta$ 爲唯零函數以適合 x_1, x_2, x_3 一切任意值。

(2)　　$k\alpha+l\beta\equiv 0$

因

$k\alpha+l\beta\equiv(ka_1+lb_1)x_1+(ka_2+lb_2)x_2+(ka_3+lb_3)x_3$

即 $k\alpha+l\beta$ 爲唯零函數時惟得

(3) $ka_1+lb_1=0,\ ka_2+lb_2=0,\ ka_3+lb_3=0$

由是言之，係數 a_1, a_2, a_3 與 b_1, b_2, b_3 爲線形倚變數。

實是兩直線相重合，其逆定理亦成立。總之如次。

（定理一）兩直線爲線形倚變數之充要條件乃是兩直線重合爲一。

諸直線爲線形倚變數可以類推之。

三直線

(4)　$\alpha\equiv a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$

$\beta\equiv b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$

$\gamma\equiv c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0$

爲線形倚變數之充要條件存在 k, l, m 三數，不俱

為零，以使

(5)　$k\alpha+l\beta+m\gamma\equiv0$

即是

(6)　$ka_1+lb_1+mc_1=0$

$ka_2+lb_2+mc_2=0$

$ka_3+lb_3+mc_3=0$

但 (6) 式 k, l, m 異於 0, 0, 0 之解，其充要條件

為　$|a\ b\ c|=0$

由第 2 節（定理三 a）明明為 (4) 之三直線有公共點之充要條件，總之如次，

（定理二）三直線為線形倚變數之充要條件，乃其三直線有公共點。

茲再根據等式關係，另作一證明，

設想 k, l,m 不俱為零，例如 $m\neq0$ 則由 (5) 得

$$\gamma\equiv-\frac{k}{m}\alpha-\frac{l}{m}\beta$$

但於直線 $\gamma=0$ 是即同樣之直線

$$-\frac{k}{m}\alpha-\frac{l}{m}\beta=0\text{ 即 }k\alpha+l\beta=0$$

故直線 $\gamma=0$ 通過兩直線 $\alpha=0$, $\beta=0$ 之交點。

否則三直線之二者重合，三者俱重合。

逆定理，先設 $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ 通過一公共點。

由第4節（定理二）$\gamma=0$ 為兩直線之線形連合。

$$\gamma\equiv k\alpha+l\beta$$

即 $k\alpha+l\beta-\gamma\equiv 0$

乃三直線為線形倚變數之證也。

又設 $\alpha=0$, $\beta=0$ 重合時，由（定理一）存在 k, l 不俱為零

以使 $k\alpha+l\beta\equiv 0$

結果於（5）得 $m=0$, 仍是三直線為線形倚變數。

（定理三）若三直線為線形倚變數，其三直線方程式之賴以為倚變之常數俱可選之使為 1.

若 $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ 為三個分明之直線而為線形倚變數，

則 $k\alpha+l\beta+m\gamma\equiv 0$

其中常數無一個為零者

取 $k\alpha=0$, $l\beta=0$, $m\gamma=0$ 仍是原來三直線。

書作 $k\alpha\equiv\alpha'$, $l\beta=\beta'$; $m\gamma=\gamma'$

然則 $\alpha'+\beta'+\gamma'\equiv 0$.

原有 $|abc|=0$ 乃為 $|ka\ lb\ mc|=0$ 與上式不矛

盾。

（定理四） 若干直線爲線形倚變數乃是各方程式係數間共存在其線形倚變數之關係也。（此爲直線束）

習 題

1. 證明次列兩直線爲線形倚變數，並求其值之合於倚變數者。

$$4x_1-2x_2+6x_3=0,\quad 6x_1-3x_2+9x_3=0$$

2. 證明次列三直線爲線形倚變數並求其值之合於倚變常數者。

$$5x_1+6x_3-3x_2=0;\ 2x_1+3x_2-4x_3=0,\ 4x_1+3x_2+6x_3=0$$

3. 改 2 題各直線之倚變常數，選取使皆爲 1，其方程式各應如何。

4 求證四直線常爲線形倚變數。

5 若四直線中無三者通過一公共點，其四直線方程式

$$\alpha=0,\ \beta=0;\ \gamma=0,\ \delta=0$$

可使之成 $\alpha+\beta+\gamma+\delta\equiv 0$

6. 求証兩限定直線平行之充要條件，爲其兩直線與無窮遠線成線形倚變數，並證明

$$\alpha\equiv a_1x+a_2y+a_3=0,\quad \beta\equiv b_1x+b_1y+b_2=0$$

平行而不重合之充要條件乃常數 k, l, m 中 $m\neq 0$ 存在 $k\alpha+l\beta\equiv m$.

6. 點之線形倚變數 點列 爲簡便故 (x_1,x_2,x_3) 點記作 $X:(x_1,x_2,x_3)$

（定義） 諸點爲線形倚變數之充要條件乃其各組諸齊次座標成立線形倚變數。

就兩點論之，兩點之座標分組成比例，得次述之理，

（定理一） 兩點爲線形倚變數，則惟是兩點重合。

就三點 $a:(a_1,a_2,a_3)$, $b:(b_1,b_2,b_3)$, $C:(c_1,c_2,c_3)$ 爲線形倚變數論之，其充要條件爲 k, l, m, 不俱爲零而使適合次式，

$$(1)\qquad \begin{aligned} ka_1+lb_1+mc_1&=0\\ ka_2+lb_2+mc_2&=0\\ ka_3+lb_3+mc_3&=0\end{aligned}$$

由此得其成立線形倚變數之充要條件

爲. $|a\ b\ c|=0$

根據第 2 節（定理三 b）此爲三點在一公共直線上之關係，結果得次述之定理。

（定理二） 三點爲線形倚變數之充要條件爲其三點在一直線上。

點列 在於一直線上取若干點則稱爲點列。

點列與直線束有雙對關係。

直線束包含直線之與兩直線成線形連合者。

點列包含點之與兩點成線形連合者。

（定理三） 若 a 與 b 爲兩點則一切以次式所表之點爲兩點 a, b 直線上之點列。

$$ka+lb:(ka_1+lb_1,\ ka_2+lb_2,\ ka_3+lb_3)$$

式中 k, l 爲異於 0, 0 之任意選取值。

求證任意點 ka+lb 在於 a, b 所定直線上，先將其點之座標書作

$$c_i=ka_i+lb_i \qquad (i=1,2,3)$$

更僅用其符號簡記爲

$$ka+lb-c=0$$

結果，三點 a, b, c 爲線形倚變數。

且 c 點即是 ka+lb 在於 a 與 b 所定之直線上，甚明。

逆定理，先設 c 在於 a 與 b 所定之直線上。

三點 a, b, c 爲線形倚變數。

$$ka+lb+mc=0$$

因 a, b 爲兩定點座標故 m 不得爲零。

故用 m 除其式以得 c,

$$c=-\frac{k}{m}a-\frac{l}{m}b$$

知其爲 a, b 之線形連合。

例　求兩點 $(-6,0)$, $(6,4)$ 所定之直線與次列拋物線之交點。

$$y^2-x-4=0$$

齊次座標 $(-6,0,1)$, $(6,4,1)$ 所定直線上任意點爲

$$(-6k+6l, 4l, k+l).$$

所述之點若在於拋物線上即應適合次式。

$$x_2{}^2-x_1x_3-4x_3{}^2=0$$

$$16l^2+6(k^2-l^2)-4(k+l)^2=0$$

$$k^2-4kl+3l^2=0$$

可得 $k-l=0$, 及 $k-3l=0$ 兩解。

求得之點爲 $(0,2,1)$ 及 $(-3,1,1)$ 兩解。

習　題

1.　三點 $(2,3,-2)$, $(4,5,2)$, $(1,2,-4)$ 爲線形倚變數，並求其值之合於倚變常數者。

2. 改 1 題各點之倚變常數，選取使皆爲 1 以作倚變常數。

3. 求兩點 (1,1,2), (2,−1,3) 之線形連合爲其直線上之無窮遠點。

求次列兩點所定直線與次列曲線之交點。

4. (2,1,3), (3,1,2) 與 $x_1-x_2+x_3=0$

5. (5,1,5), (1,3,1) 與 $2x^3+y^3-3=0$

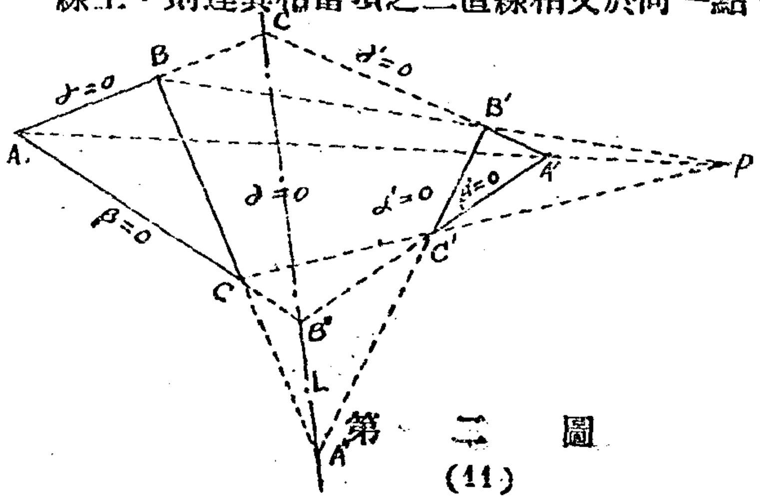
6. (1,0), (0,−1) 與 $x^2+y^2-2x-1=0$

7. 設三點 A, B, C 共在一直線上，若 A 之齊次座標爲 a,

又 B 之齊次座標爲 b 則 C 之座標爲 a+b.

7. Desargues 三角形定理之解析証法

(定理一) 兩三角形各對相當邊之三交點共在一直線上，則連其相當項之三直線相交於同一點。



第　二　圖

(11)

一個三角形三邊爲 $\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=0.$

另一三角形三邊爲 $\alpha'=0,\ \beta'=0.\ \gamma'=0$

其相當邊三交點 A″, B″, C″ 在直線 L 上 L 爲 $\delta=0$

因 L 通過 $\alpha=0,\ \alpha'=0$ 之交點 A″

故 δ 爲 $\alpha,\ \alpha'$ 之線形連合 $\delta\equiv k\alpha-k'\alpha'$

因 L 通過 $\beta=0\beta,=0$ 之交點 B″

故 δ 爲 $\beta,\ \beta'$ 之線形連合 $\delta\equiv l\beta-l'\beta'$

因 L 通過 $\gamma=0,\ \gamma'=0$ 之交點 C″

故 δ 爲 $\gamma,\ \gamma'$ 之線形連合 $\delta\equiv m\gamma-m'\gamma'$

(1) $k\alpha-k'\alpha'\equiv l\beta-l'\beta'\equiv m\gamma-m'\gamma'\equiv\delta$

由此可得次列三等式

(2) $l\beta-m\gamma\equiv l'\beta'-m'\gamma'$

$m\gamma-k\alpha\equiv m'\gamma'-k'\alpha'$

$k\gamma-l\beta\equiv k'\alpha'-l'\beta'$

先取 $l\beta-m\gamma=0$ 論之，$\beta=0,\ \gamma=0$ 而 l,m 不爲零。

同樣 $l'\beta'-m'\gamma'=0$ 乃是表示同一直線，皆爲線形連合。

既通過 $\beta=0,\ \gamma=0$ 之交點 A 者爲 $l\beta-m\gamma=0$

又通過 $\beta'=0$，$\gamma'=0$ 之交點 A′ 者爲 $l'\beta'-m'\gamma'=0$

爲同一直線則 AA′ 既可用 $l\beta-m\gamma=0$ 表示之

又可用 $l'\beta'-m'\gamma'=0$ 表示之

推得三直線各有兩法表示之如次式。

(3) AA′：　$l\beta-m\gamma=0$，　$l'\beta'-m'\gamma'=0$

BB′：　$m\gamma-k\alpha=0$，$m'\gamma'-k'\alpha'=0$

CC′：　$k\alpha-l\beta=0$，　$k'\alpha'-l'\beta'=0$

用其線形倚變常數爲 1. 即得三直線通過同一點。

（定理二）兩三角形各對相當頂之三連線共通過同一點，則連其相當邊之三交點共在一直線上。

此（定理二）與（定理一）屬於雙對性質，其證法亦可用雙對性質，於第二圖先定 p 之座標 d.

$$ka-k'a'=lb-l'b'=mc-m'c'=d.$$

其證法推演一如(定理一)

習　　題

1. 將(定理二)之證明完全書出。

2. (補題 A) 三角形三邊 $\gamma=o$，$\beta=0$，$\gamma=0$ 若由其三項作三直線而相交於同一點，則其充要條件乃是其三直線方程式可書作

(4) $l\beta-m\gamma=0,\ m\gamma-k\alpha=0,\ k\alpha-l\beta=0$

此爲充分條件甚爲顯明，蓋以其三直線成線形倚變數用 1 爲其線形倚變各常數即可。

其必要條件證明如次，其三直線相交於同一點故成立線形倚變數，據第 5 節（定理三）其直線方程式先書作

$$l\beta+m'\gamma=0,\ m\gamma+k'\alpha=0,\ k\alpha+l'\beta=0$$

可用 1 以作其線形倚變各常數，則上三式得

$$(k+k')\alpha+(l+l')\beta+(m+m')\gamma\equiv0$$

結果 $k+k'0,\ l+l'=0,\ m+m=0$

3: 作(補題 B) 爲(補題 A) 之雙對性質的敘述並求其証明。

8. 四點或四直線之線形倚變數

(定理一)　四點常成立線形倚變數

先設 a, b, c, d, 四點由第一章第 3 節(定理四)

(1) $ka+lb+mc+nd=0$

表示四點成立線形倚變數而 $n\neq0$

$$d=Aa+Bb+Cc$$

$$A=-\frac{k}{n},\quad B=-\frac{l}{n},\quad C=-\frac{m}{n}$$

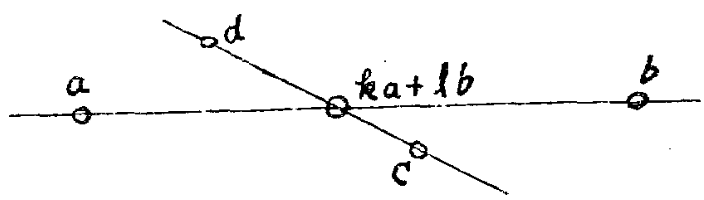
此言 d 爲三點 a, b, c 之線形連合。

d 必異於 0, 0, 0, 故僅三點 a, b, c 此時不必爲在一直線上之點。並於此時僅其三點不成立線形倚變數。

是以 d 爲其三點所定平面上任意點。

（定理二） 平面上任意點之齊次座標，可用其平面上不在一直線上三點之線形連合表示之。

就第三圖可知 a, b 兩點之直線與 c, d 兩點之直線相交，其交點先設爲 a, b 之線形連合，ka+lb



第　三　圖

再 d 點爲 ka+lb 與 c 之線形連合。

$d=A(ka+lb)+Bc$

其爲 a, b, c 三點之線形連合甚爲顯明。

（定理三） 四直線常成立線形倚變數。

（定理四） 平面上任意直線之方程式可用其平面上不通過同一點三直線之線形連合表示之。

習　　題

1．證明點 (1,1,1)為不在一直線上三點(1,0,0)，(0,1,0) (0,0,1) 之線形連合

2，用幾何圖形方法証明(定理四)

3．已知 a, b, c, d 四點中每三點俱不在一直線上。

求其能得 $a+b+c+b=0$

4．求 (1) 中四點至少有三點爲線形倚變數之特殊倚變常數。

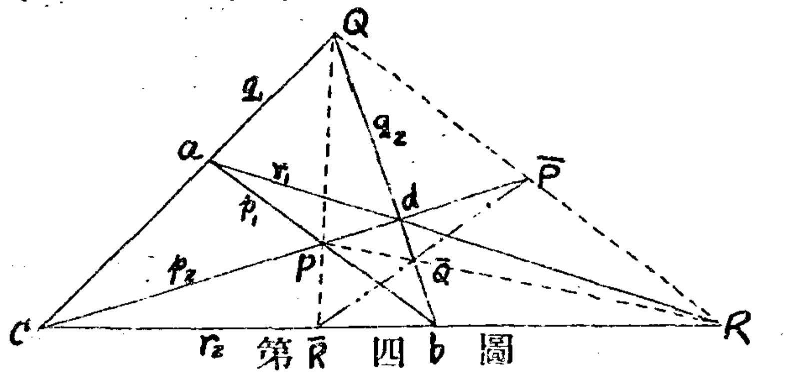
9．完全四點形與完全四邊形之應用

完全四點形三對對邊設爲 p_1 p_2· q_1, q_2; r_1, r_2，其三對對邊各交點 P, Q, R 稱之爲對邊點。

由第 8 節習題之 3 取四點 a, b, c, d

得其平面上有次式成立。

(1)　$a+b+c+d=0$



第四圖

由（1）可得 $a+b=-(c+d)$

此式左方表示之點與右方表示之點完全一致。

看第四圖左方 $a+b$ 爲通過 a, b 直線 P_1 上之點，

同法右方座標俱不用負號 $c+d$ 爲直線 P_3 上之點。

故左方右方所表示同一點爲 P_1 P_3 之交點 P，

總之爲次表：

$$(2)\qquad \begin{array}{lll} P: & a+b & 或\ c+d \\ Q: & a+c & 或\ d+b \\ R: & a+b & 或\ b+c \end{array}$$

三對邊點 P, Q, R 不得同在一直線上。

因反設三點在一直線上，則 $c+d$, $d+b$, $b+c$ 成爲線形倚變數。

取 k, l, m 不俱爲零，得

$$k(c+d)+l(d+b)+m(b+c)=0$$

即 $(l+m)b+(m+k)c+(k+l)d=0$

既 k, l, m 不俱爲零，則 $l+m$, $m+k$, $k+l$ 不俱爲零。

然則 b, c, d 成立線形倚變數，乃是 b, c, d 三點在一直線上， b, c, d 三點乃完全四點形之三項，原

不能在一直線上，故所反設者爲非是。故得次述定理

（定理一）　完全四點形之對邊點決不能共在一直線上。

完全四點形之三對邊點爲頂之三角形稱爲對邊三角形。

習　　題

1．　前第四圖中 $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ 可用 $c-d, d-b, b-c$ 表示之，

證明次述之定理。

對邊三角形之各邊與完全四點形不同時共頂之三邊分別相交，三交點在一直線上。

2．　用幾何綜合法證明 1 題

3．　完全四邊形三對對項各連直線稱之爲對項線此與完全四點形之三個對邊點成雙對關係。

求證三個對項線不公共同一點。

4．　述明 1 題之雙對關係並求其證明。

10．　計量之應用

非齊次座標之原點向定直線作垂直距離 P

若 x 軸與 p 之交角爲 Φ

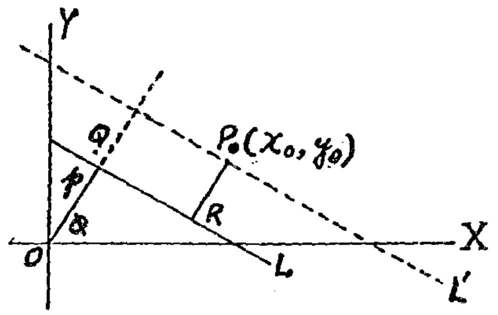
則其直線之方程式爲

(1)　　$$x\cos\Phi+y\sin\Phi-p=0$$

(1) 式稱為直線法規方程式。

直線至定點之距離

設 P_0 為定點又 R 為由 P_0 至直線之垂足。



第 五 圖

由直線 L 至 P_0 之距離為 RP_0 並以 d 表示之。

過 P_0 先作直線 L' 平行 L 則 $\Phi'=\Phi$

對於 L' 由原點至其直線之垂直距離為 p'

$$p'=p+d$$

可知 L' 直線之法規方程式為

$$x\cos\Phi+y\sin\Phi-p-d=0$$

因 $P_0(x_0,y_0)$ 在此 L' 直線上，得

(2) $$d=x_0\cos\Phi+y_0\sin\Phi+p$$

(定理一)　直線之法規方程式記作

$$\alpha(x,y)\equiv x\cos\phi+y\sin\phi-p=0$$

則由其直線至定點 $P_0(x_0,y_0)$ 之垂直距離爲

$$d=\alpha(x_0,y_0).$$

設有二直線 $\alpha=0$, $\beta=0$ 皆爲法規方程式。二直線相交而又俱不通過原點。

其二直線之線形連合 $\alpha-k\beta=0$ 有次述之定理存在。

(定理二)　直線 $\alpha-k\beta=0$ 爲自 $\alpha=0$ 自 $\beta=0$ 至動點之垂直距離常有 k 爲其比。所得軌跡爲一直線。

若 $k>0$ 則其直線經過 $\alpha=0$, $\beta=00$. 所分之兩區域而其一區域包含原點 0.

若 $k<0$, 則其直線通過所餘兩區域。

(推論)兩直線 $\alpha=0$, $\beta=0$ 分角線之方程式爲

$$\alpha-\beta=0 \text{ 及 } \alpha+\beta=0$$

(定理三)　三角形三內角之分角線相交於一點。

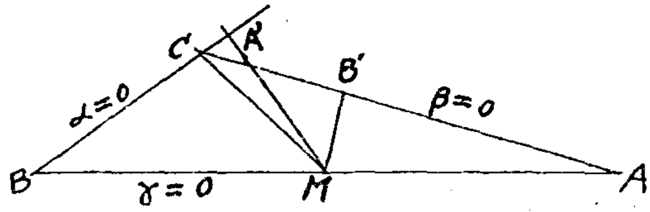
設原點在三角形內其三邊 $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ 三內分角線爲

$$\alpha-\beta=0,\ \beta-\gamma=0,\ \gamma-\alpha=0$$

因其成立線形倚變數，故知其相交於同一點。

（定理四）三角形三中線相交於一點。

設原點在三角形內其三邊 $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$



第　六　圖

如第六圖 MA′, MB′ 爲 AB 中點 M 向 $\alpha=0, \beta=0$ 所作之垂直距離又 $AB=c$

則 $MA'=\frac{c}{2}\sin B$　　$MB'=\frac{c}{2}\sin A$

中線 CM 上任意點自 $\alpha=0$, $\beta=0$ 至其點距離比一定，皆爲

$$k=\frac{MA'}{MB'}=\frac{\sin B}{\sin A}$$

故 CM 中線之方程式爲

$$\alpha\sin A-\beta\sin B=0$$

同法其餘二中線之方程式爲

$$\beta\sin B-\gamma\sin C=0$$

$$\gamma\sin C-\alpha\sin A=0$$

可知其爲線形倚變數三直線相交於同一點。

設有兩圓之方程式

$\alpha \equiv x^2+y^2+a_1x+a_2y+a_3=0$

$\beta \equiv x^2+y^2+b_1x+b_2y+b_3=0$

此兩圓相交於兩點 P_1 與 P_2

則通過 P_1 與 P_2 之另一曲線如次式。

$k\alpha+l\beta=0$

式中 k, l 爲常數，不俱爲零。則

$(k+l)(x^2+y^2)+(ka_1+lb_1)x+(ka_2+lb_2)y+(ka_3+lb_3)=0$

可知上式表示圓，設 $k+l=0$ 則表示線。

通過 P_1P_2 之直線即兩圓之公共弦，得

$\alpha-\beta=0$

今再設有第三圓

$\gamma \equiv x^2+y^2+c_1x+c_2y+c_3=0$

則三圓各兩圓之公共弦爲

$\alpha-\beta=0,\quad \beta-\gamma=0,\quad \gamma-\alpha=0$

其三直線成立線形倚變數，故得同一交點。

（定理五）　三圓各兩圓之公共弦凡三直線相交於同一點。

習　　　　題

1. 求證 $\alpha(x,y)\equiv a_1x+a_2y+a_3=0$ 至 $P(x',y')$ 之垂直距離爲

$$d=\frac{\alpha(x',y')}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

2. 三角形兩外角分角線與所對一內角分角線相交於同一點。

3. 求証三角形之三個高相交於同一點。

4. 相交兩直線 $\alpha=0$; $\beta=0$ 求證 $k\alpha-l\beta=0$ 與 $l\alpha-k\beta=0$ 兩直線各對於 $\alpha-\beta=0$ 所成角相等。

5. 由三角形各頂作三直線相交於同一點 P_1，所作三直線各與其頂之分角線成交角，在各分角線之另一側與前交角各相等自三頂再作三直線，亦必相交於同一點 P_2

稱 P_1 與 P_2 爲等角共軛點。

6. 兩三角形各頂與頂對應，自此形之頂向彼形對應頂之對邊作垂線，若三直線相交於同一點，則自彼形之頂向此形對應頂之邊作垂線，其三直線亦相交於同一點。

7. 已有三圓各兩圓相交又有一定點 P，設按次法作圓，由每兩圓之兩交點及 P 所得計三圓，旣公共交於 P 求證復有第二之公共交點。

8. 設四圓每兩圓相交若分得兩組計四交點在一圓周上，則無論如何分組均得其四交點在一圓周上，

9. 第 7 節（定理一）（定理二）爲 Desargues 三角形定理。今將其思想應用於圓之關係公式上，則所述之原素，何者與何者相當。

第 四 章　調和分割

1. 線段之分割

(定義) 限定線段 P_1P_2 爲 p 點分成如次之有向限定線段 $\overline{PP_1}$, $\overline{PP_2}$ 其商以代數比 μ 表示之。

$$\mu=\frac{\overline{PP_1}}{\overline{PP_2}}$$

由上式觀測，P 在線段 P_1P_2 外，μ 爲正

p 在線段 P_1P_2 內，μ 爲負

又　$\overline{pp_1}=\mu\,\overline{pp_2}$

就其座標得次述定理

(定理一) 設 P 之座標爲 (x,y)，將 $P_1:(x_1,y_1)$ 與 $P_2:(x_2,y_2)$ 所限定線分分割成代數比 μ，但 $\mu\neq1$ 得

(1)
$$x=\frac{x_1-\mu x_2}{1-\mu},\quad y=\frac{y_1-\mu y_2}{1-\mu}$$

假若 $\mu=1$ 則 (1) 式失去意義。

但用齊次座標，P 爲

$$(x_1-\mu x_2,\ y_1-\mu y_2,\ 1-\mu)$$

設 $1-\mu=0$ 則表示無窮遠點。

(定理二) 設 μ 爲 $a+\lambda b$ 點將 $a:(a_1,a_2,a_3)$ 與 $b:(b_1,b_2,b_3)$ 所限定線分分割之比。則

(2)　　$\mu=-\lambda\frac{b_3}{a_3}$

若 $a+\lambda b$ 爲 a, b 直線上之無窮遠點

則 $a_3+\lambda b_3=0$ 是即 $\lambda\frac{b_3}{a_3}=1$

若 $a+\lambda b$ 爲限定點，μ 之値可自 (1) 式求出。

而各限定點之座標爲

$$x_1=\frac{a_1}{a_3}\qquad x_2=\frac{b_1}{b_3}\qquad x=\frac{a_1+\lambda b_1}{a_3+\lambda b_3}$$

$$y_1=\frac{a_2}{a_3}\qquad y_2=\frac{b_2}{b_3}\qquad y=\frac{a_2+\lambda b_2}{a_3+\lambda b_3}$$

故自 x 等式或 y 等式得

$$(a_3b_1-a_1b_3)(a_3\mu+\lambda b_3)=0,\ (a_3b_2-a_2b_3)(a_3\mu+\lambda b_3)=0$$

但 $a_3b_1-a_1b_3$ 與 $a_3b_2-a_2b_3$ 俱不應爲零否則

$x_1=x_2$, $y_1=y_2$ 不合假設，故自 $a_3\mu+\lambda b_3=0$ 以得 μ.

2. 調和分割

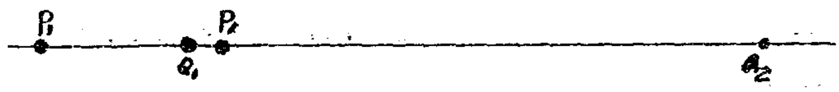
直線上兩點 Q_1, Q_2 將 P_1, P_2 互分割成爲調和分割

則所得兩代數比 μ_1, μ_2 得次式。

(1) $\mu_1=-\mu_2\dfrac{\overline{Q_1P_1}}{Q_1P_2}=-\dfrac{\overline{Q_2P_1}}{Q_2P_1}$

若 $\mu_1=1$ 則是 Q_3 爲直線上之無窮遠點。

而 $\mu_1=-1$ 乃 Q_1 爲 P_1P_2 之中點。



第　一　圖

普通如上圖 P_1，P_2 之座標爲 a 與 b

動點 Q_1，Q_2 之座標爲 $a+\lambda_1 b$ ，與 $a+\lambda_2 b$

其分割 P_1 P_2 之代數比爲 μ_1 與 μ_2

由 1.（定理二）

$$\mu_1=-\lambda_1\frac{b_3}{a_3},\qquad \mu_2=-\lambda_2\frac{b_3}{a_3}$$

則於 $\mu_1=-\mu_2$ 惟有 $\lambda_1=-\lambda_2$

但俱不爲零，得次述定理。

（定理一） 兩點將兩定點 a 與 b 分割成調和分割

惟有將其兩點之座標書作

$$a+\lambda b,\qquad a-\lambda b\qquad \lambda\neq 0$$

(11)

或作 $ka+lb$, $ka-lb$. $kl\neq0$

（定理二） 若 Q_1, Q_3 將 P_1, P_2 分割成調和分割，則 P_1, P_2 亦將 Q_1, Q_3 分割成調和分割

由 2 之 (1) 將所須線分互換得合於定義之等值。

$$\frac{\overline{P_3Q_1}}{\overline{P_1Q_3}}=-\frac{\overline{P_2Q_1}}{\overline{P_3Q_3}}$$

由座標關係論之，原為

a, b, $a+\lambda b$, $a-\lambda b$, $\lambda\neq0$

將 $a'=a+\lambda b$, $b'=a-\lambda b$

則 $2a=a'+b'$, $2\lambda b=a'-b'$

是以上二式各齊次座標乘除以等值仍無變化。

將其重新排列如定義所述之順序。

a', b', $a'+b'$, $a'-b'$,

可知合於 $\lambda=1$ 之情況以成調和分割。

（定理三） 設 P_1, P_3 及 Q_1 為共直線之三點，則只有唯一點 Q_3 以與 Q_1 將 P_1 P_3 分割成調和分割。

習　　題

1. 求証 P_1:(3,1), P_2:(7,5) 及 Q_1:(6,4), Q_2:(9,7) 成為調和分割點列。

〔a〕 求 Q_1, Q_2 分割 $P_1 P_2$ 之代數比。

〔b〕 用齊次座標法將 Q_1, Q_2 表示爲 P_1 P_2 之線形連合。

2. 求證 (2,3,2), (1,−2,3) 與 (8,5,12), (4,13,0) 成爲調和分割之點列。

3. 求將 (2,1,1) (1,2,2) 調和分割對於 (4,3,3) 之調和共軛點

4. 兩軸上之無窮遠點爲兩點分割成調和分割其一點爲在方向對 x 軸正切爲 1 直線上無窮遠點求其餘對此共軛之一點。

5. 四點 P_1, P_2 與 Q_1, Q_2 成調和分割則惟

$MQ_1 \cdot MQ_2 = a^2$ 但 $a = \frac{1}{2} P_1 P_2$ 又 M 爲 P_1 P_2 之中點

6. 四點 P_1, P_2 與 Q_1, Q_2 成調和分割則用 P_1, P_2 爲直徑之圓與通過 Q_1. Q_2 之圓成直交圓。

3. 兩直線之分割

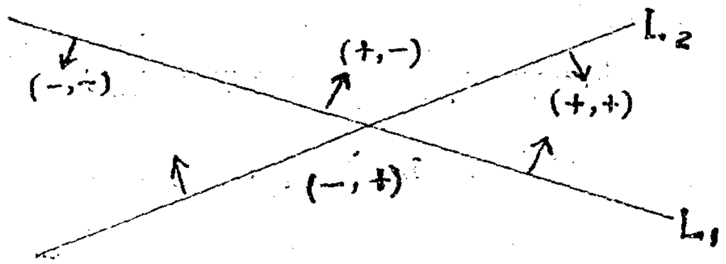
兩直線 L_1 與 L_2 之交點通過一直線 L

(1) $\mu = \dfrac{D_1}{D_2}$

表示自 L_1 至 L 上點之距離 D_1, 與自 L_2 至 L 上上同點之距離 D_2 相比爲常 μ.

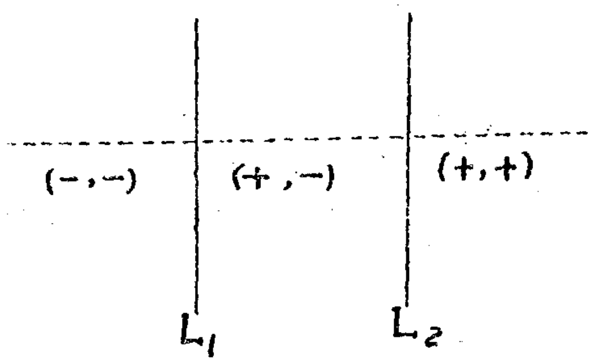
此常數比 μ 稱之為 L 分割 L_1 L_3 於 μ.

但以 D_1 與 D_2 之正負，μ 亦有正負，決定法如次圖



第　二　圖

特殊情況 L_1 與 L_2 平行，用次法決定其正負。



第　三　圖

按照第三圖無限定直線以合於 $\mu=1$, 設用無窮遠線，則與 $\mu=1$ 之關係不相矛盾。

公式。　設 L_1 與 L_3 之方程式如次

(2)　　$\alpha \equiv a_1x+a_2y+a_3=0$

$$\beta \equiv b_1x+b_2y+a_3=0$$

選取兩直線至某點之距離 D_1, D_2 (第一章 10, 習題 1)

(3) $$D_1=\frac{\alpha(x,y)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}, \quad D_2=\frac{\beta(x,y)}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

設限定直線分割 L_1, L_2 於比 μ, 則 L 之方程式為

$$\frac{\alpha(x,y)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}=\mu\frac{\beta(x,y)}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

(4) $$\alpha+\lambda\beta=0 \quad 又 \quad \lambda=-\mu\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{b_1^2+b_2^2}}$$

(定理一) 設直線 $\alpha+\lambda\beta=0$ 分割 $\alpha=0$, $\beta=0$ 於代數比 μ. 則

(5) $$\mu=-\lambda\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2}{a_1^2+a_2^2}}$$

4, 直線之調和分割

兩直線 M_1, M_2 通過一定點或無窮遠點 P 而將通過 P 點之兩直線 L_1, L_2 調和分割, 其各直線分割 L_1, L_2 之代數比為 μ_1, μ_2. 因為調和分割, 故

(1) $$\mu_1=-\mu_2$$

設於 P 為限定點, 特殊情況。

$$\mu_2=1,\qquad \mu_1=-1$$

則 M_1 與 M_2 為 L_1，L_2 交角之等分線。

是即兩直線交角之兩等分線互成調和分割。

就前 3 節所論，$\alpha=0$，$\beta=0$ 其分割兩直線之兩直線俱通過 P 而為 $\alpha+\lambda_1\beta=0$，$\alpha+\lambda_2\beta=0$．特於調和分割時 $\lambda_1=-\lambda_2$ 故得

（定理一） 兩直線能將 $\alpha=0$，$\beta=0$ 調和分割則其兩直線方程式必可書作

$$\alpha+\lambda\beta=0,\quad \alpha-\lambda\beta=0,\quad \lambda\neq 0$$

或書作

$$k\alpha+l\beta=0,\quad k\alpha-l\beta=0,\quad kl\neq 0$$

（定理二） 設 M_1，M_2 將 L_1，L_2 調和分割，則L_1，L_2 亦將 M_1，M_2 調和分割。

（定理三） 設 L_1 L_2 及 M_1 為通過同一點之三直線，則只有唯一直線 M_2 以與 M_1 將 L_1 L_2 分割成調和分割。

習　　　題

1．求証 $2x_1-3x_2+4x_3=0$

$$x_1+x_2+x_3=0$$

與 $7x_1-3_2+11x_3=0$

$x_1-9x_2+5x_3=0$ 成調和分割

2. 求證 $x=0,\ y=0$

與 $x+2y=0,\ x-2y=0$ 成調和分割。

3. 設 $x_1-2x_2+x_3=0,\ 2x_1+x_2+2x_3=0$ 爲直線 $4x_1-3x_2+4x_3=0$ 與其共軛直線分割成調和分割。

求所述之共軛直線。

4. 求證兩直交線自公共點向其一作等角之兩直線成爲調和分割。

5. 調和分割之射影性質

（定理一） 若四直線組成調和分割，則用另一直線截各直線，其四交點亦對應成爲調和分割。

（定理二） 若四點組成調和分割，則由另一點向各點連結，其四直線亦對應成爲調和分割。

以上兩定理之証明如次。

先設 P_1, P_2 與 Q_1, Q_2 四點共在一直線上，其座標爲

(1) $a,\ b,\ a+\lambda b,\ a+\lambda' b$

再由任一點 $r:(r_1, r_2, r_3)$ 向四點連直線 L_1, L_2, M_1, M_2 則 L_1 之方程式爲 $|xar|=0$

又 L_2 之方程式為 $|x\,b\,r|=0$

更得 M_1 之方程式為 $|x(a+\lambda b)r|=0$

通過 r 之直線

展開得 $|x\,a\,r|+\lambda|x\,b\,r|=0$

同樣得 M_2 之方程式 $|x\,a\,r|+\lambda'|x\,b\,r|=0$

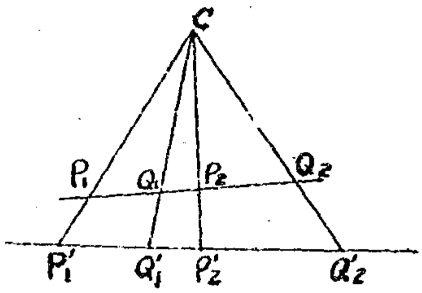
$$(2)\qquad \begin{array}{ll} |x\,a\,r|=0, & |x\,a\,r|+\lambda|x\,b\,r|=0 \\ |x\,b\,r|=0, & |x\,a\,r|+\lambda'|x\,b\,r|=0 \end{array}$$

由（1）式四點成調和分割 $\lambda'=-\lambda$

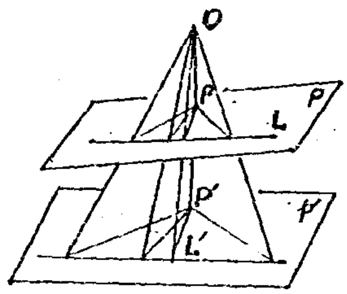
代入（2）則四直線亦成調和分割。

（定理三） 調和分割為射影性質之圖形。

因設 P_1, P_2 與 Q_1, Q_2 互分成調和分割，由(定理二）得 CP_1, CP_2 與 CQ_1; CQ_2 亦成調和分割，再由(定理一）得 P_1', P_2' 與 Q_1', Q_2' 亦成調和分割如第四圖。



第 四 圖



第 五 圖

如第五圖有四直線通過 P 以成調和分割於平面 p 上，但經用射影至平面 p′ 上得四直線通過 P′。由（定理一）L 上四點成調和分割，自 O 射影上得四直線，由（定理二）O成調和分割。
更於 L′ 上四點由（定理一）成調和分割，由（定理二）P′ 於 p′ 上四直線成調和分割。

習 題

1. 已知三直線 L_1, L_2 及 M_1 通過定點 O，作一直線使平行 M_1 以交 L_1, L_2 於 P_1, P_2. 設將 $P_1 P_2$ 之中點與 O 連成 M_2 直線，求 M_1, M_2 與 L_1, L_2 互分成調和分割。

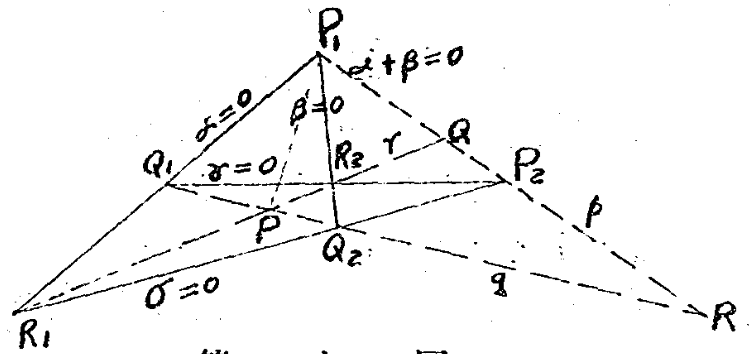
2. 已知三點 P_1, P_2 及 Q_1 同在 L 直線上，自 P_1, P_2 作兩平行直線 L_1, L_2. 自 Q_1 作直線交 L_1, L_2 於 A_1; A_2.

再於 L_2 上取 B_2 而以 P_2 為 A_2 B_2 之中點。連 A_1 B_2 交 L 於 Q_2 則 P_1 P_2 與 Q_1 Q_2 互分成調和分割。

6. 完全四點形四邊形之調和性質

完全四邊形有三對對項 P_1, P_2; Q_1, Q_2; R_1, R_2 如第六圖三直線 $P_1 P_2$, $Q_1 Q_2$, $R_1 R_2$ 以 p, q, r記之。稱為對角線。

由此三直線所成之三角形稱爲對角三邊形即 PQR.



第　六　圖

上圖四邊 $\alpha=0, \beta=0, \gamma=0, \delta=0$

(1)　$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$

其對角線可書作次式。

(2)　$p:\ \alpha+\beta=0$ 或 $\gamma+\delta=0$

　　$q:\ \alpha+\gamma=0$ 或 $\delta+\beta=0$

　　$r:\ \alpha+\delta=0$ 或 $\beta+\gamma=0$

今通過 P_1 之四直線成調和分割者爲

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ \alpha+\beta=0,\ \alpha-\beta=0$$

但 $\alpha-\beta=0$ 所指之直線爲 P_1P.

蓋 P 爲 q, r 之交點，可自 (2) 之左二右三得

$$\alpha-\beta\equiv(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$$

以合於 P_1P 之方程式．故得次述定理。

(定理一 a)　完全四邊形之兩邊爲其頂上對角線及

其頂連他二對角線交點之線以分割成調和分割。

（定理二 a）完全四邊形之一對對頂於其邊上爲他二對角線所交之兩點互分成調和分割。

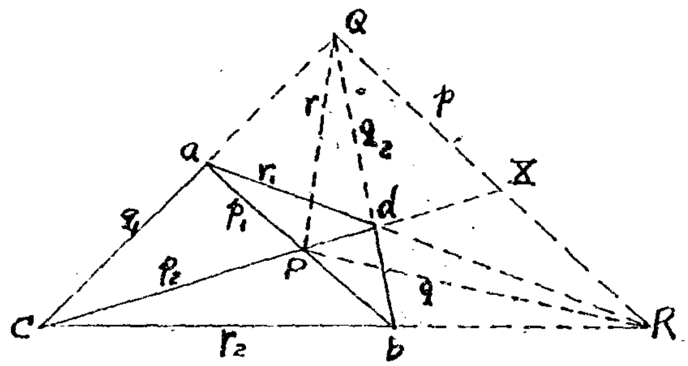
圖中 R_1 R_2 一對對頂爲 P, Q 分成調和分割甚明顯，再如將 r 直線上四點與 R 連結，則兩對角線 p, q 於對角線 r 上之兩頂連兩線成調和分割。

（定理三 a）兩對角線與其公頂連他對角線上兩頂之兩直線以分成調和分割。

完全四點形與完全四邊形雙對定理如次

（定理一 b）完全四點形之兩頂爲其邊上對邊點及其邊交他二對邊點連線之點以分割成調和分割。

上定理之証明不必拘泥與（定理一 a）雙對關係。今但就第七圖另作證明甚爲便利。



第　七　圖

其在於 P_3 上之兩項爲對邊點 p 及 P_3 交 RQ 之 X 以分割成調和分割。因由完全四邊形 q_1, q_2, r_1, r_2 之 Q 項，q_1, q_2 爲 q 與 r 分成調和分割。（定理一 a）

（定理二 b） 完全四點形之一對對邊於其項上爲他二對邊點所連之兩線互分成調和分割。

（定理三 b） 兩對邊點與其公邊交他對邊點之兩線得兩點以分成調和分割。

習　　題

1. 證明（定理二 b）

2. 証明（定理三 b）

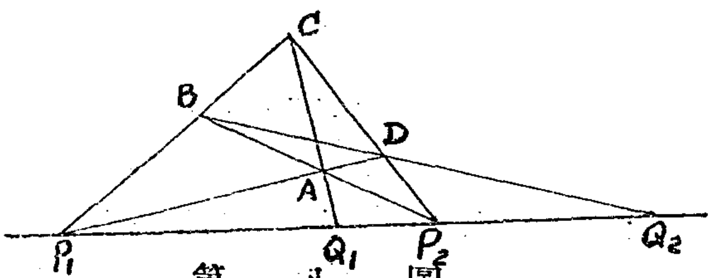
3. 用解析法以與（定理一 a）雙對，證（定理一 b）

4. 設 A, B, C 爲共直線三點而爲完全四邊形之三項，又設 M 與 C 以分 A, B 成調和分割。

連 M 與 C 之對項所得直線，則通過從 A 從 B 兩對角線之交點。

7. 自調和分割三原素求第四原素

設已知共直線之三點 P_1, P_3 與 Q_1 求 Q_3 以使成調和分割之關係。



第　八　圖

通過 Q_1 先作一直線於其上取 A, C 兩點。

將 A, C 連 P_1 又連 P_2 得四直線而得兩點 B, D,

連 BD 與 P_1 P_2 之交點爲所求之 Q_2.

(定理一 a) 直線上兩對定點互分成調和分割之充要條件，爲存在一完全四點形，而其兩對對邊交點交於一對定點，其餘一對對邊各於他二點相交。

由以上定理，可知調和分割關係，屬於射影性質，而可脫離之計量性質。

習　　題

1. 已知同一點上三直線求第四直線使之互分成調分和割。

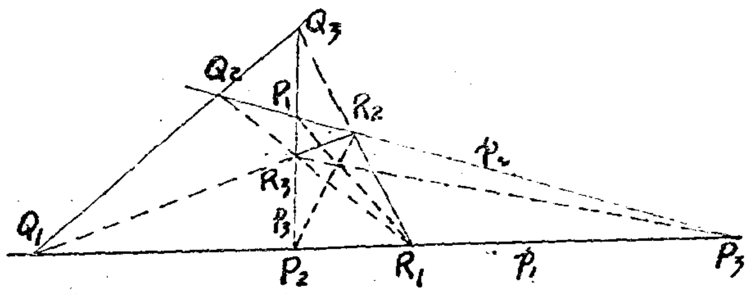
2. 叙述（定理一 a）之雙對定理並求其証明

3. 兩對定點成調和點列之充要條件乃存在一完全四邊形以其一對定點爲對項即於此對角線上與他二對角線相交於其餘一對定點，並叙述其雙對關係。

8. 射影性質所包括之計量定理

射影幾何中某特殊情況可為計量性質之定理，例如三角形三中線交於一點乃為射影幾何中之特殊情況。茲就調和分割論，每一中點有一無窮遠點以分兩頂成調和分割．凡三無窮遠點在一無窮遠線上，則每一中線有一通過其頂之直線以分其兩邊成調和分割，故由此方法以作其中線。其三中線相交於一點。乃是次述定理之特殊情況。

（定理一）三邊形每邊上取一點，凡三點在一直線上，每邊上對兩頂得所取點之調和分割共軛點連其邊之對頂三角直線相交於一點。



第　九　圖

設 $p_1p_2p_3$ 爲已知三邊形，Q_1, Q_2, Q_3 爲在一直線上三點，對各邊兩項 Q_1, Q_2, Q_3 各調和分割共軛點爲 R_1, R_2, R_3. 根據 Desargues 三角形定理 $\triangle p_1p_2p_3$ 與 $\triangle R_1R_2R_3$ 各相當邊相交於 Q_1, Q_2, Q_3 故三直線 P_1R_1, P_2R_2, P_3R_3 相交於一點。

所謂相當邊相交於一點者例如 Q_1 則須證 $Q_1R_3R_2$ 爲一直線，此只須由 Q_1 將直線 p_3 對影至 p_2 上得對應點 p_1, p_2, Q_3 與 p_1, p_3, Q_2. 因 R_3 爲對 p_1p_2 用 Q_3 調和分割共軛點，其射影對應點 R_2 亦對 p_1p_3 用 Q_2 調和分割爲共軛點。是以 Q_1, R_3, R_2 共直線，以得 $\triangle R_1R_2R_3$ 之一邊以交 p_2p_3 於 Q_1

（定理一之逆定理） 設三定點各在三角形之邊上，各點連相對項凡三直線相交於一點，則於各邊上對其兩項用定點調和分割之共軛點凡三點在一直線上。

先設 P_1R_1, P_2R_2, P_3R_3 相交於 P 點則 $\triangle p_1p_2p_3$ 與 $\triangle R_1R_2R_3$ 各々相當邊相交三點在一直線上。就 $P_2R_2PR_3$ 完全四點形論，R_2R_3 與 P_2P_3 相交於 Q_1 點，是即於 p_2p_3 用 R_1 調和分割之共軛點也。其餘可類推。

習　　題

(11)

1. 敘述（定理一）之雙對定理及其證明。

2. 三角形三內角等分線相交於一點，其於射影之計量定理如何。

3. 証明（定理一）之雙對定理恰與其逆定理相同。

4. 用解析法以証明（定理一）

p_1，p_2，p_3 之齊次座標為 a，b，c

Q_1，Q_2，Q_3 之齊次座標為 Bb－Cc，Cc－Aa，Aa－Bb.

5. 用解析法以證明（定理一）之雙對定理。

6. 三角形頂點 a，b，c 三邊上各一點連對頂之三直線相交於一點之充要條件，乃所取三點之座標為Bb＋Cc，Cc＋Aa，Aa＋Bb.

7. 敘述 6 之雙對定理。

8. 三直線各經過三角形之一頂而相交於一點，各直線與其夾邊成調和分割之共軛直線，其二者與其第三頂上之原作直線相交於一點，由計量性質論之，何種定理與此相當。

9. 三直線各經過三角形之一頂而相交於一點，各直線與其頂上兩邊成調和分割之共軛直線，凡三直線組

成另一三角形以與原三角形合於 Desargues 定理。

10. 已知對角三邊形求作其完全四邊形。

11. 已知對邊三角形求作其完全四點形。

12. 完全四邊形之對角三邊形每邊上取一點三點若在一直線上，對完全四邊形兩頂用所取點成調和分割之共軛點，凡三點亦在一直線上。

Newton之線 13. 設於完全四邊形之對角三邊形每邊上取其中點亦得三點在一直線上。

第五章　直線之座標

1. 點與直線之幾何、

以點作基礎原素而行硏討者稱點之幾何。

以直線作基礎原素而行硏討者稱直線之幾何。

例如點之幾何中稱直線乃謂之爲一點列。

如直線幾何中稱點乃謂之爲一直線束。

由點之軌跡所得曲線爲點幾何中之點構曲線

由直線爲包線所得曲線爲直線幾何中之直線構曲線

2. 直線齊次座標

前曾以點之齊次座標 $(x_1, x_2, x_3,)$ 線形方程式表示一直線，

(1)　$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$

式中 a_1, a_2, a_3 不俱爲零。

亦是其直線通過點 (x_1, x_2, x_3)

今有方程式

(2)　$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$

或　$2rx_1 - 3rx_2 + 4rx_3 = 0$　$r \neq 0$

表示同一直線。其係數 $(2, -3, 4)$ 或 $(2r, -3r, 4r)$ 所組成之關係乃爲一定。

(定義)　一直線方程式中係數組成直線之齊次座

標。已知 $(2,-3,4)$，$(4,-6,8)$ 等表示（2）式直線齊次座標。

同樣 (a_1, a_2, a_3) 表示（1）式直線齊次座標。

設將三變數齊次線形方程式係數用 (u_1, u_2, u_3) 則表示未定直線通過點 (b_1, b_2, b_3).

（定理一）　點 $x:(x_1, x_2, x_3)$ 在直線 $u:(u_1, u_2, u_3)$ 上充要條件為 [illegible]直線[illegible]係數為 u 之直線上 [illegible]直線係數為 u 所直線通過之點

(3)　$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$

（定義）　直線所過之定點必滿足直線座標 u_1, u_2, u_3 所過其點之方程式。

例如凡直線 u 通過點 $(2,1,3)$ 則

$$2u_1 + u_2 + 3u_3 = 0$$

此即屬於 $(2,1,3)$ 點之直線座標方程式。

（定理二）　屬於點 $a:(a_1, a_2, a_3)$ 以直線座標所表之方程式（乃示若干直線通過其點）為

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$$

逆定理，各線形齊次方程式之變數 u_1, u_2, u_3 各係數不俱為零，表示其點。

點與直線之解析的雙對性

在點幾何內，點有座標，直線用點座標之方程式表

示之。

直線幾何內，直線有座標，點用直線座標方程式表示之。

點幾何直線幾何之關係以（3）聯繫之。其為雙對互換俱如（3）之對稱情況。是以點幾何之點座標為直線幾何之所示方程式中係數。逆之，直線幾何之直線座標為點幾何所示方程式中係數。甚為明題。

習　　題

1. 直線幾何中，Y 軸之座標，無窮遠線，通過原點而線坡比為 2 之直線，應如何表示之。

2. 下列直線座標所示之直線為何。

(a)　(1,1,−1)；(b)　(1,−1,0)；(c)　(0,1,0)

3. 下列方程式之意義為何。

(a)　$2u_1-3u_2+u_3=0$

(b)　$u_2-u_3=0$　　(c)　$u_1=0$

4. 直線幾何中原點之方程式應如何，無窮遠點之在於線坡比 $\frac{1}{2}$ 方向者方程式應如何。

3　簡單符號

如有 $a:(a_1,a_2,a_3)$ 與 $b:(b_1,b_2,b_3)$ 於書作

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

時，用符號 $(a|b)$ 記之，讀作 a 各乘 b. 即令

$$(a|b) \equiv a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

點幾何中直線方程式爲 $(a|x)=0$

點 x 在於直線 u 上條件 $(u|x)=0$

習　　題

用簡單符號演算則得次列各關係

$$(a|b)=(b|a)$$

$$(ka|b)=k(a|b)$$

$$(\overline{a+b}|c)=(a|c)+(b|c)$$

$$(\overline{ka+lb}|c)=k(a|c)+l(b|c)$$

4. 點與直線表示法雙對性

點之 座標 P.G.	點之 方程式 S.G.	直線之 座標 S.G.	直線之 方程式 P.G.
(a_1,a_2,a_3)	$(a\|u)=0$	(a_1,a_2,a_3)	$(a\|x)=0$
(b_1,b_2,b_3)	$(b\|u)=0$	(b_1,b_2,b_3)	$(b\|x)=0$
(c_1,c_2,c_3)	$(c\|u)=0$	(c_1,c_2,c_3)	$(c\|x)=0$

將定理雙對性分別則有次列關係

(定理一a)兩點若重合其座標或其方程式爲線形倚變數。

(定理一b)兩直線重合其座標或其方程式爲線形倚變數。

(定理二a)三點若在一直線上其座標或其方程式爲線形倚變數。

(定理二b)三直線若通過一點其座標或其方程式爲線形倚變數。

次就兩直線之交點與兩點所連直線論之。

(定理三a)兩點 a, b 所連直線方程式爲

$$|xab| = 0$$

其直線座標爲

$$|a_2\ b_3|,\ |a_3\ b_1|,\ |a_1\ b_2|\ .$$

(定理三b)直線 a, b 相交之點方程式爲

$$|uab| = 0$$

其點之座標爲

$$|a_2\ b_3|,\ |a_3\ b_1|,\ |a_1\ b_2|$$

前者(定理三 a)爲已證明，將其行列式展開各變數之係數爲小行列式恰與直線座標相當甚明顯。

但(定明三 b)有証明之必要。

$$a_1 u_1 + a_3 u_2 + a_3 u_3 = 0$$

$$b_1 u_1 + b_3 u_2 + b_3 u_3 = 0,$$

上式爲具係數 a, b 爲直線座標之方程式。

書作 $a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 = 0$

$b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3 = 0$

加之 $u_1 r_1 + u_2 r_2 + u_3 r_3 = 0$

蓋設（r_1, r_2, r_3）爲公共點

故 $|uab| = 0$

其公共點座標爲$|a_2 \ b_3|$, $|a_3 \ b_1|$, $|a_1 \ b_2|$ 甚明顯。

(定理四 a) 用 a, b 兩點所定之點列上任意點座標爲 $ka+lb$,

又其點列爲兩點座標

$$(a|u)=0$$

$$(b|u)=0$$

所決定。

其上任意點之座標爲

$$k(a|u)+l(b|u)=0$$

(定理四 b) 用 a. b 兩直線所定線束上任意直線座標爲 $ka+lb$, 又其線束爲兩直線座標

$$(a|x)=0$$

$$(b|x)=0$$

所決定。

其上任意直線座標爲

$$k(a|x)+l(b|x)=0$$

以上所述左右兩方面皆有溝通之關係，故於應用時可自左右兩方面隨意採擇不生錯誤。

例通過（1, 2, −1）點及兩直線（2,1,3），（1,−1.0）

交點之直線座標。

①先求通過兩直線 $(2,1,3)$, $(1,-1,0)$ 交點之任意直線座標得 $(2k+1, k-1, 3k)$

所得直線通過 $(1,2,-1)$ 點

故　$(2k+1)+2(k-1)-3k=0$

解得 $k-1=0$　令 $k=1$

故得直線為 $(3,0,3)$ 即 $(1,0,1)$.

習　　題

1. 求次列直線幾何中所示兩點連得之直線座標。

$3u_1+4u_2-11u_3=0$, $5u_1-3u_2+u_3=0$

2. 直線 $(1,-1,2)$ 與兩點 $(3,4,-1)$, $(5,-3,1)$, 所連直線相交，求其交點座標。

3. 兩直線 $(1,1,1)$, $(2,1,3)$ 交點與 $2u_1+3u_2+u_3=0$ 點相連得直線，求其座標。

4. 用直線座標以證明 Desargues 三角形定理。

5. 兩點 a,b 所連直線與直線 c 相交。

求證其交點之座標為 $(b|c)a-(a|c)b$

述其變對定理及證明。

6. 兩點 a,b 所連直線與兩點 c,d 所連直線相交。

求證其交點座標爲 $|bcd|a-|acd|b$

或爲 $|abd|c-|abc|d$

5 直線非齊次座標

設令 $u=\frac{u_1}{u_3}$， $v=\frac{u_2}{u_3}$，

但 $u_3\neq 0$

設 $u_3=0$ 或 $0u_1+0u_2+u_3=0$

乃表示原點之方程式，而通過原點諸直線，皆爲齊次座標，即於其時不得有非齊次座標，故於非齊次座標系令 $u_3=0$ 爲不合理。

故於 $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$ $u_3x_3\neq 0$

並用 u_3x_3 除之，

$$ux+vy+1=0$$

（定理一） 點 (x,y) 在直線 (u,v) 上充要條件爲

(1) $ux+vy+1=0$

（定理二） 點 (x_0,y_0) 非爲原點，其於非齊次座標系之方程式爲

(2) $x_0u+y_0v+1=0$

（定理三） 直線 (u_0,v_0) 非無窮遠線，其於非齊

$$(3)\qquad u_0x+v_0y+1=0$$

次座標系之方程式爲)

若 $u_0 v_0 \neq 0$ 直線 (3) 截兩軸於

$$a=-\frac{1}{u_0},\qquad b=-\frac{1}{u_0}$$

則

$$u_0=-\frac{1}{a},\qquad v_0=-\frac{1}{b}$$

習　　題

1. 兩直線 (u_1, v_1) 與 $(u_2\ v_2)$

   平行之充要條件爲 $u_1\ u_2-u_2\ v_1=0$

   垂直之充要條件爲 $u_1\ v_2+v_1\ v_2=0$

2. 兩點 $P_1:(x_1,y_1)$ 與 $P_2:(x_2,y_2)$ 之方程式

   $\alpha\equiv x_1u_1+y_1v_2+u_3=0$; $\beta\equiv x_2u_1+y_2u_2+u_3=0$

則方程式 $\alpha-\lambda\beta=0$ 表示分割 $P_1\ P_2$ 爲 λ 比之分點。

3. 三角形外角等分線各交其對邊凡三點在於一直線上。

4. 第 2 題中 $\alpha=0,\ \beta=0$

   則點之方程式 $k\alpha-l\ \beta=0$ 與 $l\alpha-k\ \beta=0$

   對於 P_1P_2 之中點爲等距離。

5. 設於三角形各邊上取一點凡三點在一直線上，

則於各邊之中點至同邊所取點反向再取等距離凡得三點亦在一直線上。

第六章　交比

四直線之交比

任意四直線相交於一點，其間彼此分割，用一定順序排列其商而得之值，稱爲交比或非調和比。

設四直線 L_1, L_2, L_3, L_4 相交於一點。

其交比簡記作 $(L_1 L_2, L_3 L_4)$

（定義） 若四直線 L_1, L_2, L_3, L_4 相交於一點，其中 $L_1 L_2$ 爲已限定之直線，則交比 $(L_1 L_2, L_3 L_4)$ 以次式定之。

(1)　$$(L_1 L_2, L_3 L_4)=\frac{L_3\text{ 分割 }L_1, L_2\text{ 之比}}{L_4\text{ 分割 }L_1, L_2\text{ 之比}}$$

設 L_1, L_2, L_3, L_4 各齊次座標爲

$a,\ b,\ a+\lambda_1 b,\ a+\lambda_2 b$

又 L_3 分割 L_1, L_2 之比爲 μ_1 且 L_4 分割 L_1, L_2 之比爲 μ_2

$$\mu_1=-\lambda_1\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2}{a_1^2+a_2^2}},\qquad \mu_2=-\lambda_2\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2}{a_1^2+a_2^2}}$$

則 $(L_1L_2, L_3L_4)=\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$

（定理一） 設 L_1, L_2, L_3, L_4 座標爲 $a,\ b,\ a+\lambda_1 b,\ a+\lambda_2 b,$

(2) $$(L_1L_2, L_3L_4)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad \lambda_1\ \lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$$

因（定義）已述明四直線各不重合，λ_1, λ_2 故不相等亦不爲零，故交比決無爲零或 1 之時。

（定理二）設同過一點之兩對直線 L_1, L_2 與 L_3, L_4 成爲調和分割，則惟有

$$(L_1\ L_2,\ L_3\ L_4)=-1.$$

（定理三）設將兩對直線之主從互換交比不變。

即 $$(L_3\ L_4,\ L_1\ L_2)=(L_1\ L_2,\ L_3\ L_4)$$

此定理之証明可用次法推演。先設

$$a'=a+\lambda_1 b, \qquad b'=a+\lambda_2 b$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)a=-\lambda_2 a'+\lambda_1 b'$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)b=a'-b'$$

因 $(\lambda_1-\lambda_2)$ 爲常數故齊次座標用右方結果即可。

故得 L_3, L_4, L_1, L_2 各座標爲

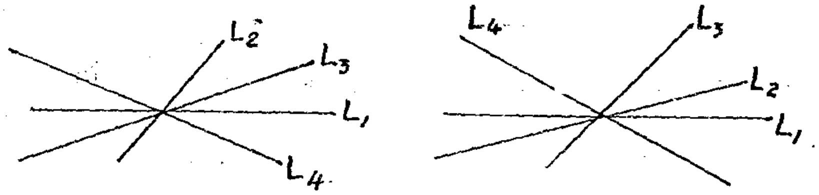
$$a',\ b',\ a'-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}b',\ a'-b'$$

故 $$(L_3\ L_4,\ L_1\ L_2)=\frac{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{-1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

（定理四）設交比及四直線中三直線已決定時，其

第四直線亦爲一定。(交比不爲零不爲 1)

(定理五) 兩對直線 L_1, L_2 與 L_3, L_4 互相間隔交比爲負值，若不相間隔交比爲正值。



第　一　圖

習　　題

1. 次列各四直線順序爲 L_1, L_2, L_3, L_4 其交比如何。

(a) $x=y$, $2x=-y$, $x=-y$, $3x=y$.

(b) $2x_1-x_2+x_3=0$, $3x_1+x_2-2x_3=0$,

$7x_1-x_2=0$, $5x_1-x_3=0$

2. 已知 L_1, L_3, L_4 之方程式爲

$2x_1+x_2-x_3=0$, $x_1-x_2+x_3=0$, $x_1=0$

又知 $(L_1 L_2, L_3 L_4)=-\frac{2}{3}$ 求 L_3 之方程式。

2. 四點之交比

(定義) 若四點 P_1, P_2, P_3, P_4 同在於一直線上其中 $P_1 P_2$, 爲已限定之點，則其交比 $(P_1 P_2, P_3 P_4)$ 以

次定式之。

$$(1)\qquad (P_1\,P_2,\,P_3\,P_4)=\frac{P_3\text{ 分割 }P_1\,P_2\text{ 之比}}{P_4\text{ 分割 }P_1\,P_2\text{ 之比}}=$$

$$\frac{P_3\,P_1}{P_3\,P_2}\div\frac{P_4\,P_1}{P_4\,P_2}$$

（定理一）設 P_1, P_2, P_3, P_4 座標爲 a, b, $a+\lambda_1 b$, $a+\lambda_2 b$

$$(2)\qquad (P_1\,P_2,\,P_3\,P_4)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\qquad \lambda_1\,\lambda_2\,(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$$

（定理二）設同在一直線上兩對點 P_1, P_2 與 P_3, P_4 成爲調和分割，則惟有

$$(P_1\,P_2,\,P_3\,P_4)=-1$$

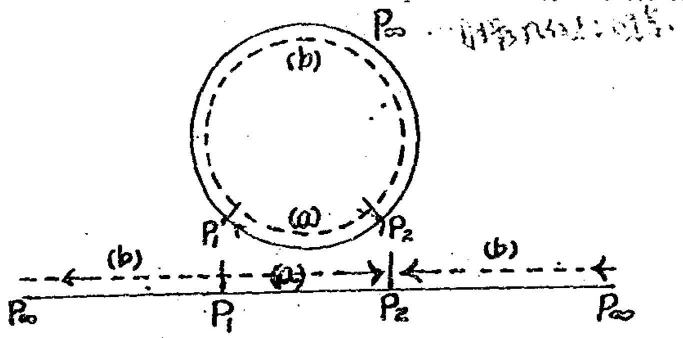
（定理三）設將兩對點之主從互換交比不變。

即　$(P_3\,P_4,\,P_1\,P_2)=(P_1\,P_2,\,P_3\,P_4)$

（定理四）設交比及四點中三點已決定時，其第四點亦爲一定。（交比不爲零不爲1）

（定理五）兩對點 P_1, P_2 與 P_3, P_4 互相間隔交比爲負值，若不相間隔交比爲正值。

設 P_1, P_2 爲圓周上兩點則自 P_1 至 P_2 順圓周連續進行有二途。前曾謂射影幾何中直線殆如閉曲線故作第二圖。



(a) 自 P_1 至P_2 順其線段進行。

(b) 自 P_1 向左以經過 P_∞ 理想點而回至 P_1

再考察 P_3, P_4 與 P_1, P_2 之位置則正負定矣。

習　　題

1. 若 P_1, P_2, P_3, P_4 座標爲 (1,2), (2,3), (5,6), (−2, −1)

應用次列各法求 (P_1P_2, P_3P_4)

(a) 求 P_3 與 P_4 分割 P_1P_2 之比

(b) 求 P_1 與 P_2 分割 P_3P_4 之比

(c) 求 P_3 與 P_4 齊次座標爲 P_1, P_2 之線形連合

2. 若 P_1, P_2, P_4 各座標爲 (1,1,1), (1,−1,1), (1,0,1)

又 $(P_1P_2, P_3P_4)=2$, 求 P_3 之座標。

3. 若 P_4 爲P_1, P_2, P_3 同直線上之無窮遠點。

則 $(P_1 P_2, P_3 P_4)$ 爲 P_3 分割 $P_1 P_2$ 之比。

3. 交比爲射影性質

（定理一） 設同直線上四點 P_1, P_2, P_3, P_4 各在於同頂四直線 L_1, L_2, L_3, L_4 之上。則

$$(L_1 L_2, L_3 L_4) = (P_1 P_2, P_3 P_4)$$

（定理二） 設同點上四直線 L_1, L_2, L_3, L_4 各通過同底四點 P_1, P_2, P_3, P_4，則

$$(P_1 P_2, P_3 P_4) = (L_1 L_2, L_3 L_4)$$

4. 交比之公式

點列與線束各組成之交比常成立同樣之關係，今但用其原素 E_1, E_2, E_3, E_4 代表其意義列表於次

	E_1	E_2	E_3	E_4	$(E_1 E_2, E_3 E_4)$
(1)	a	b	$a+\lambda_1 b$	$a+\lambda_2 b$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$
(2)	a	b	$k_1 a+l_1 b$	$k_2 a+l_2 b$	$\frac{l_1\ k_2}{k_1\ l_2}$
(3)	$a+\lambda_1 b$	$a+\lambda_2 b$	$a+\lambda_3 b$	$a+\lambda_4 b$	$\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_1)}$
(4)	$k_1 a+l_1 b$	$k_2 a+l_2 b$	$k_3 a+l_3 b$	$k_4 a+l_4 b$	$\frac{\lvert k_3 l_1\rvert \cdot \lvert k_4 l_2\rvert}{\lvert k_3 l_2\rvert \cdot \lvert k_4 l_1\rvert}$

上列之表中（1）式已證明。

應用（1）式易得（2）式之證明。

玆爲證明（3）式　使其與（2）式相似。

令　$a+\lambda_1 b=a'$,　　$a+\lambda_2 b=b'$.

得　$(\lambda_1-\lambda_2)a=-\lambda_2 a'+\lambda_1 b'$

$(\lambda_1-\lambda_2)b=a'-b'$

因 $(\lambda_1-\lambda_2)$ 爲常數故齊次座標用右方結果爲宜。

將所求之 a,b 代入 E_3 與 E_4，則

$(\lambda_3-\lambda_2)a'-(\lambda_3-\lambda_1)b'$，$(\lambda_4-\lambda_2)a'-(\lambda_4-\lambda_1)b'$

加之前設 E_1 之 a'．E_2 之 b' 恰與（2）式相似故得其交比。表中（4）式用（3）式亦易得其證明矣。

習　　題

1．前表中（4）式之証明如何。

2．設 x_1, x_2, x_3, x_4 爲 X 軸上四點之橫座標。求證

$$(P_1\,P_2,\,P_3\,P_4)=\frac{(x_3-x_1)\,(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)\,(x_4-x_1)},$$

3．通過同一點之四直線其線坡比爲 λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 求証

$$(L_1\,L_2,\,L_3\,L_4)=\frac{(\lambda_3-\lambda_1)\,(\lambda_4-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_2)\,(\lambda_4-\lambda_1)}.$$

4. 設 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) 四點在一直線上但其直線不與 Y 軸平行

求証　$(P_1P_2,P_3P_4)=\dfrac{(x_3-x_1)\ (x_4-x_2)}{(x_3-x_2)\ (x_4-x_1)}$

設其四點用齊次座標則如何。

5. 四直線 a, b, c, d 通過一定點但其定點不在 X 軸上。

求證其交比爲

$$\frac{|c_1\ a_3|\cdot|d_1\ b_3|}{|c_1\ b_3|\cdot|d_1\ a_3|}$$

6. 四點 a, b, c, d 不必在一直線上惟另得第五點 r 以連四點爲四直線 L_1, L_2, L_3, L_4

求證　$(L_1\ L_2,\ L_3\ L_4)=\dfrac{|c\ a\ r|\cdot|d\ b\ r|}{|c\ b\ r|\cdot|d\ a\ r|}$

7. 通過一限定點之四直線 L_1, L_2, L_3, L_4 設 (L_3L_1) 表示 L_3 繞其交點以至 L_1 重合所經過之角度，餘可類推。則

$$(L_1\ L_2,\ L_3\ L_4)=\frac{\sin(L_3L_1)\sin(L_4L_2)}{\sin(L_3L_2)\sin(L_4L_1)}$$

8. 圓周上四定點連結圓周上其他任意點得四直線以組成不變之交比。

5. 四原素組成廿四個交比。

取第 4 節表中（3）式各原素座標。

$a+\lambda_1 b,\ a+\lambda_2 b,\ a+\lambda_3 b,\ a+\lambda_4 b$

其交比（$E_1 E_2$, $E_3 E_4$）省寫作(12,34). 爲則

$$(1)\qquad (12,34)=\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_1)}$$

由此法推演得以下關係。

（定理一）兩對原素主從互換，交比不變。

$$(34,12)=(12,34)$$

（定理二）兩對原素，各對自互換，交比不變

$$(21,43)=(12,34)$$

此因

$$(21,43)=\frac{(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)}{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}=(12,34)$$

總以上定理得次式。

$$(2)\quad (12,34)=(34,12)=(21,43)=(43,21)$$

$$(3)\quad (21,34)=(34,21)=(12,43)=(43,12)$$

（定理三）兩對原素中一對原素互換前後兩交比之

爲積 1.

$$(21,34)(12,34)=1.$$

設再以 $(12,34)=\alpha$

(4)　$(13,24)=1-\alpha$

$$(14,23)=\frac{\alpha-1}{\alpha}$$

再將以前各式總成廿四個交比，每四個相等，凡得六組不同之值，其關係如次。

(5)　$(12,34)=\alpha,\qquad (13,24)=1-\alpha$

$$(14,23)=\frac{\alpha-1}{\alpha},\qquad (21,34)=\frac{1}{\alpha}$$

$$(31,24)=\frac{1}{1-\alpha},\qquad (41,23)=\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

（定理四）　成調和分割之四原素，任意取其交比所得之值，必爲 -1, 2, 與 $\frac{1}{2}$ 三值之一。

（定理五）　廿四個交比分爲六組，每組四個等值，凡得六個不同值，但四原素爲調和分割時僅得三個不同值，

習　　　題

(11)

1, 前（4）式如何推演而來。

2. 五原素 E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 爲共點五直線或共直線之五點，求証

$$(12,34)(12,45)(12,53)=1$$

6. 交比之應用

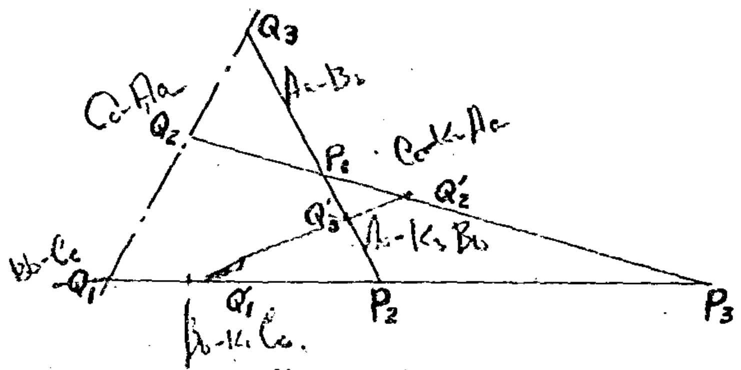
令 P_1 P_2, P_3 爲三角形之頂點，Q_1, Q_2, Q_3 共直線之三點，Q_1 在 P_2P_3 上，Q_2 在 P_3P_1 上，Q_3 在 P_1P_2 上。

又於三邊上各取一點 Q_1', Q_2', Q_3' 得交比如次，

$$(1)\qquad (P_2P_3,\ Q_1'Q_1)=k_1$$

$$(P_3P_1,\ Q_2'Q_2)=k_2$$

$$(P_1P_2,\ Q_3'Q_3)=k_3$$



第　三　圖

（定理一）　若三點 Q_1', Q_2', Q_3' 在一直線上，

則　$k_1k_2k_3=1$.

設 P_1, P_2, P_3 之座標爲 a, b, c

則 Q_1, Q_2, Q_3 之座標寫作

$Bb-Cc$, $Cc-Aa$, $Aa-Bb$.

式中 A, B, C 爲常數但不得爲零。

由（4）式算得 Q_1', Q_2', Q_3' 之座標爲

$Bb-k_1Cc$, $Cc-k_2Aa$, $Aa-k_3Bb$

若其三點在一直線上則得線形倚變數。

故設 l, m, n 不俱爲零，以使

$$l(Bb-k_1Cc)+m(Cc-k_2Aa)+n(Aa-k_3Bb)=0,$$

$$(n-k_2m)Aa+(l-k_3n)Bb+(m-k_1l)Cc=0.$$

因 a, b, c 三點，決非共在一直線上。又 $ABC\neq 0$

故取其係數各爲零以合於右方爲零之條件。

$$\begin{aligned} -k_2m+n&=0\\ l\qquad -k_3n&=0\\ -k_1l+m\qquad&=0 \end{aligned}$$

但 l, m, n 須有異於 0,0,0 之解

故得
$$\begin{vmatrix} 0 & -k_1 & 1 \\ 1 & 0 & -k_5 \\ -k_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$k_1k_3k_5 = 1$$

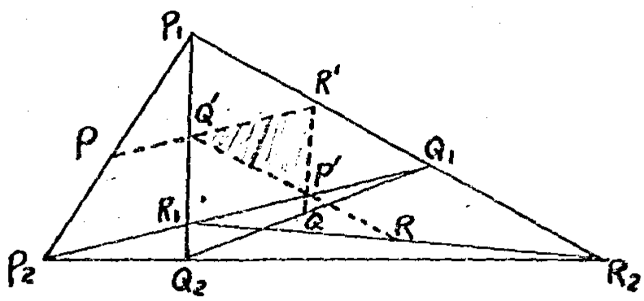
（定理二）　設連得 P_1Q_1', P_2Q_2', P_3R_3' 三直線共交於一點則得　$k_1k_3k_5 = -1$

前（定理一）爲 Menelaus 定理。

此（定理二）爲 Ceva 定理。(Geu.)

（定理三）　完全四邊形三個對角線之中點在一直線上。設 P, Q, R 爲三個對角線之中點

又 P,′ Q,′ R′ 爲三角形 P_1 Q_1 R_1 各邊之中點



第　四　圖

連各中點 P, Q, R′ 知 P 在 Q′ R′ 直線上

同理 R 在 Q′ P′ 直線上，Q 在 P′ R′ 直線上

故 P, R, Q 爲三角形 P′ Q′ R′ 各邊上之點

欲證明 P, Q, R 在一直線上，須得

$$(2)\qquad \frac{PR'}{PQ'}\cdot\frac{RQ'}{RP'}\cdot\frac{QP'}{QR'}=1.$$

注意 P_1. Q_2, R_2 爲共直線之三點而在三角形$P_1Q_1R_1$各邊上。

$$(3)\qquad \frac{P_2Q_1\cdot Q_2R_1\cdot R_2P_1}{P_2R_1\cdot Q_2P_1\cdot R_2Q_1}=1,$$

因 PQ′R′ 平行 $P_2R_1Q_1$ 故 $\frac{P_2Q_1}{P_2R_1}=\frac{PR'}{PQ'}$

同理　$\frac{Q_2R_1}{Q_2P_1}=\frac{QP'}{QR'}$,　$\frac{R_2P_1}{R_2Q_1}=\frac{RQ'}{RP'}$

由此代入 (3) 以得 (2).

習　題

1. 証明(定理二)
2. 叙述(定理一)之雙對定理，且(定理一)之證明

逐步雙對變換即得其雙對定理之證明，試用此法推演之。

7. 具重合原素之交比

前已知　$(12,34)=\dfrac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_1)}$

若於重合原素

(1)　$\lim\limits_{E_4\to E_3}(12,34)=1$

$\lim\limits_{E_4\to E_2}(12,34)=0$

$\lim\limits_{E_4\to E_1}(12,34)=\infty$

簡寫為次式。

(2)　$(E_1E_2,E_3E_3)=1$

$(E_1E_2,E_3E_2)=0$

$(E_1E_2,E_3E_1)=\infty$

（定理一）若 P_1, P_2, P_3 為共直線之三點，則於其直線上有唯一 P 點以使 (P_1P_2, P_3P) 決定一限定值或無窮，特於∞, 0, 或 1 時 P 為 P_1, P_2 或 P_3,

設於 $E_3\to E_2$ 或 $E_4\to E_2$

令　$\lambda_3=\lambda_2+\epsilon$　或　$\lambda_4=\lambda_2+\eta$

$$(12,34)=\frac{(\lambda_2-\lambda_1+\epsilon)\ \ \eta}{(\lambda_3-\lambda_1+\eta)\ \ \epsilon}$$

上式右方第一商之極限爲 1,

$\frac{\eta}{\epsilon}$ 爲兩個獨立微分可將其極限預定爲某或作爲無窮，而以定法則控制之。

習　　　　題

1．推演（1）式各極限

2．用極限法以考察次列定義

$(E_1E_1,E_3E_3)=1$,　$(E_1E_3,E_1E_2)=0$,　$(E_1E_2,E_2,E_1)=\infty$

Jan. 7, 46

第七章　變換論

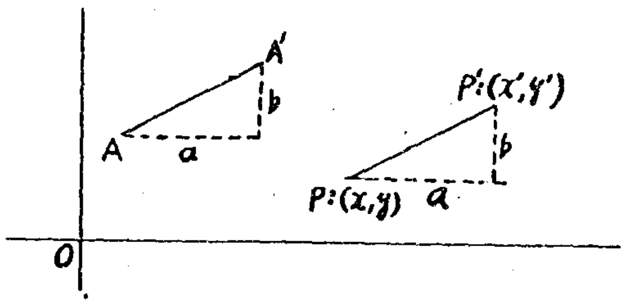
圖形之變動與座標軸系統變換，大有分別，但於演算式則有密切關係，今者就圖形變動前後兩座標關係論之，稱之為變換。

A. 剛體運動

1. 平面上簡單剛體運動　平移法

平面上每點經過定距離於其平面上用定方向移動稱為平移法，例如第一圖 AA′ 之方向為定方向， AA′ 之距離為定距離，又 AA′ 對於兩軸垂直射影為 a, b.

則任意點 P:(x,y) 用其平移法至 P′:(x′,y′)



第　一　圖

於是平移法方程式為

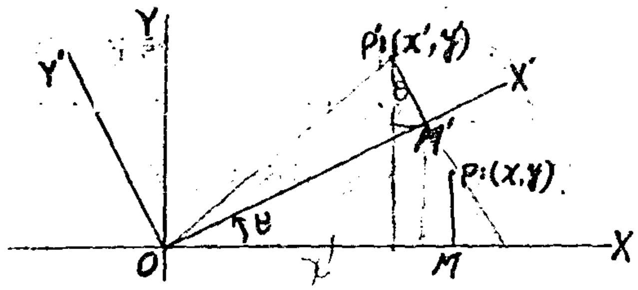
(1)　$x'=x+a,\quad y'=y+b$

旋轉法

先就平面上繞原點旋轉 θ 角論之，由於此旋轉法將 $P:(x,y)$ 移至 $P':(x',y')$

自 P 向 X 軸作垂直線得交點 M,

則 P' 於 X' 軸上得 M' 以與 M 對應，如第二圖所示。



第　二　圖

得 $OM=OM'=x$

$MP=M'P'=y$

將 $OP'M'O$ 垂直射影於 X 軸與 Y 軸，得

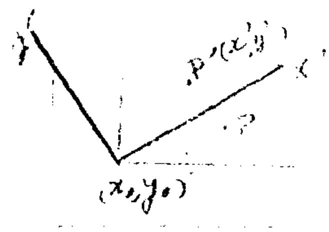
(2) $\quad x'=x\cos\theta-y\sin\theta$

$y'=x\sin\theta+y\cos\theta$

設將圖形繞點 (x_0,y_0) 旋轉 θ 角

則原爲 $(x-x_0,y-y_0)$ 點者，變換爲 $(x'-x_0,y'-y_0)$

點。



得 (3)

$x'-x_0=(x-x_0)\cos\theta-(y-y_0)\sin\theta$

$y'-y_0=(x-x_0)\sin\theta+(y-y_0)\cos\theta$

例如圖形 $y^2=2x$ 繞原點旋轉 30°

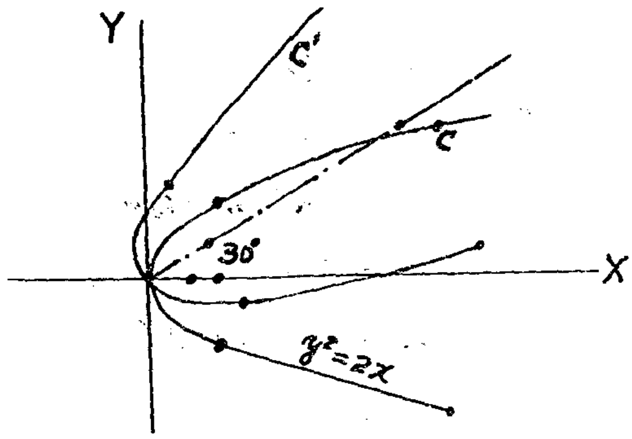
$$x'=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x-\tfrac{1}{2}y$$

$$y'=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,y$$

得

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x'+\tfrac{1}{2}y'$$

$$y=-\tfrac{1}{2}x'+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,y'$$



第　三　圖

將上式代入曲線 C, 則得 C' 如次

$$x'^2-2\sqrt{3}\,x'y'+y'^2-34\sqrt{3}\,x'-4y'=0$$

(11)

習 題

1. 將定點移至某點，只有唯一之平移法求其證明求將點（2,3）平移至點（0,−1）之平移公式，

並應用其平移法變換次列曲線

$$y^2-x-8y+18=0$$

2. 繞 P_0 點旋轉將定點變動至某點只有唯一之旋轉法，求其証明，設 A 旋轉而至 A'

則 $P_0A=P_0A'$

設繞原點旋轉將點（3,1）變動至（−1,3）求其變換式，

3. 繞原點移轉 45° 以變換 $x^2-y^2=a^2$

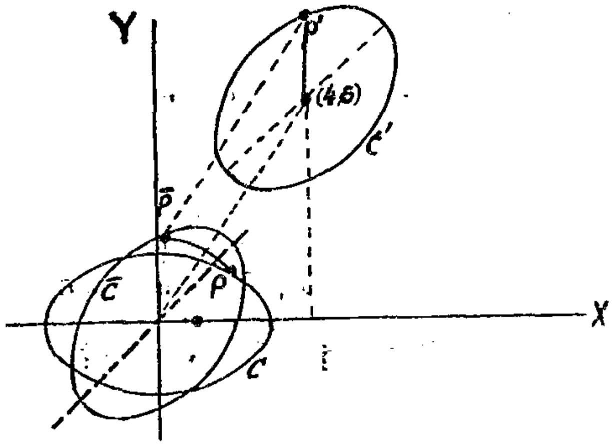
4. 有橢圓中心為原點兩半徑為 3 與 2,

而以直線 $x-2y=0$ 為橫軸，求其方程式。

5. 任意直線繞 P_0 旋轉 θ 角至為新直線，此新直線與原直線之交角亦為 θ 角，用幾何與解析意義証之。

2. 兩變換式之積與逆變換

例如橢圓 C' 中心為點（4,6）兩半徑為 3 與 2，而以線坡比為 1 之直線作橫軸求其方程式。



第　四　圖

1. 先作與 C′ 同大小，中心在原點之 C.

$$4x^2+9y^2=36$$

繞原點旋轉 45° 則 C 至 $\overline{C}$. 得橫軸方向合於條件，再將 $\overline{C}$ 平移至 C′, 中心則爲 (4,6) 點矣。

1 旋轉法 P:(x,y) 至 $\overline{P}$; $(\bar{x},\bar{y})$ 記作 T_1

$$\bar{x}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x-y),\qquad \bar{y}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x+y)$$

2. 平移法 $\overline{P}$: $(\bar{x},\bar{y})$ 至 P′: (x′,y′) 記作 T_2

$$x'=\bar{x}+4,\qquad y'=\bar{y}+6$$

用 T_1 旋轉法將 C 旋轉而爲 $\overline{C}$

$$4(\bar{x}+\bar{y})^2+9(\bar{x}-\bar{y})^2=72.$$

用 T_3 平移法將 $\overline{C}$ 平移而爲 C'

$$4(x'+y'-10)^2+9(x'-y'+2)^2=72$$

即得結果，

$$13x'^2-10x'y'+13y'^2-44x'-116y'+364=0$$

計算演代

自 T_1 所得之 $(\overline{x},\overline{y})$ 代入 T_3 得 T

$$x'=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x-y)+4,\quad y'=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x+y)+6\ .$$

此乃將 $P:(x,y)$ 直接移至 $P':(x',y')$者。

於是 C 直接移至 C'

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,(x'+y'-10),\quad y=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(x'-y'+2)$$

兩變換式之積

考察前述所用變換式及圖形進行之結果，總爲次表，

應用變換式	T_1	T_3	T
圖形之經歷	$P\to\overline{P}\to P'$		$P\to P'$

故從此意義，稱 T 爲 $T_1\,T_3$ 之積，記作

$$T=T_1\,T_3$$

但此式普通不適用交換原則。

用前例之變換式 T_2 將 $(x\ y)$ 平移至 $(\tilde{x},\tilde{y})$，則

$$\tilde{x}=x+4,\qquad \tilde{y}=y+6$$

再用前例之變換式 T_1 將 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 旋轉至 (x'',y'')

$$x''=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ (\tilde{x}-\tilde{y}),\qquad y''=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ (\tilde{x}+\tilde{y})$$

由上式 T_2 所得之 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 代入 T_1 得 T_2T_1

$$x''=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ (x-y-2),\quad y''=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\ (x+y+10)$$

將此式與 $T_1\ T_2$ 比較明明不相同故得

$$T_1T_2\neq T_2T_1.$$

但曲线之結果是相同的

逆變換式

應用變換式 T 將原圖形移至某位置，設自某位置將圖形仍移還原圖形之位置，則所用變換式，稱之爲 T 之逆變換式。

設有第一變換式爲第二變換式之逆變換式，則第二變換式爲第一變換式之逆變換式。

設有變換式 T 則 T 之逆變換式記作 T^{-1} 於是 T^{-1} 之逆變換式爲 $(T^{-1})^{-1}=T$

兩個互爲逆變換式之積稱爲合一變換式。合一變換式記作 I 次式即爲 I 之例，

$$x'=x,\quad y'=y$$

意若各點經用其變換式，並無變動，由符號得

$$TT^{-1}=I, \text{ 或 } T^{-1}T=I$$

今有變換式 T

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta, \quad y'=x\sin\theta+y\cos\theta$$

則求 T 之逆變換式乃 x, y 以 x', y' 表示之式故得 T^{-1}

$$x=x'\cos\theta+y'\sin\theta, \quad y=-x'\sin\theta+y'\cos\theta.$$

習　　題

1. 如 T_1 爲 $x'=x-2, \; y'=y+1$

又 T_2 爲 $x''=-y', \; y''=x'$

求 T_1T_2 與 T_2T_1 不同之

2. 圖形繞原點旋轉 θ 角其變換式爲 T.

用解析意義計算 $TT^{-1}=I$.

3. 雙曲線兩軸長爲 4 與 6 其中心爲 $(1,-2)$ 其橫軸方向線坡比爲 $-\frac{3}{4}$

求作其方程式。

4. 求證變換式之積適用組合原則，

即 $(T_1T_2)T_3=T_1(T_2T_3)=T_1T_2T_3$

應用第 1 題之 T_1 與 T_2 更有如次之 T_3

$x'=x+3,\quad y'=y-2$

將其變換式之積以解釋組合原則之適用，

5. 求証兩平移變換式之積常適用交換原則，

6. 求證繞原點兩旋轉變換式之積常適用交換原則，

7. 一平移變換式與一旋轉變換式之積是否有適用交換原則之情況。

3. 平面上普通剛體運動

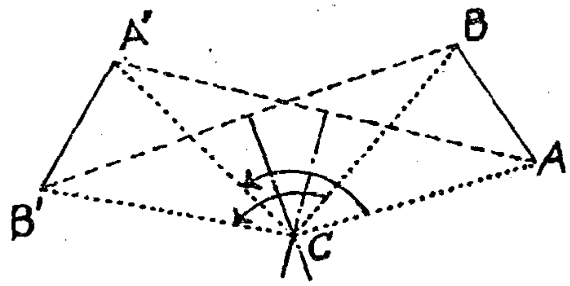
由平移法與旋轉法之結合，足以表示其平面上圖形之剛體運動，但須採取圖形新舊位置兩對對應點，始可決定其爲剛體運動與否，

例如舊位置之 A 與新位置之 A' 對應，其他之位置或有旋轉關係與其他關係存在其間。

例如舊位置之 A、B 與新位置之 A', B' 對應，則 $AB=A'B'$ 於其平面上，足以表示剛體運動之意義矣。

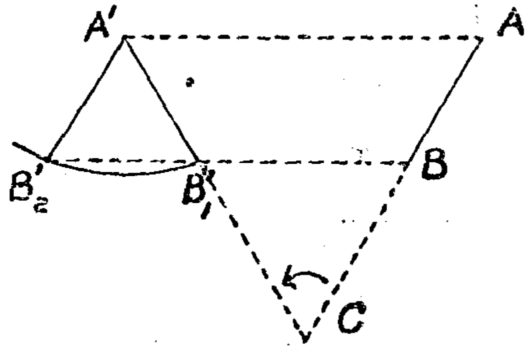
（定理一） 將兩定點 A,B 移至 A',B' 而 $AB=A'B'$ 則存在一剛體運動，

如第五圖所示可知其爲旋轉法



第　五　圖

如第六圖所示可知其爲平移法旋轉法之結合，或僅用平移法，或僅用旋轉法，皆可得其剛體運動之意義，



第　六　圖

（定理二） 剛體運動，或爲平移法，或爲旋轉法，

（定理三） 剛體運動爲繞原點旋轉而繼以平移法者或僅用旋轉法平移法二者之一種。

繞原點旋轉及平移變換式之積，由次式

$$\bar{x}=x\cos\theta-y\sin\theta,\quad x'=\bar{x}+a$$

$$\bar{y}=x\sin\theta+y\cos\theta,\quad y'=\bar{y}+b$$

得剛體運動 S 之（1）式

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta+a$$

$$y'=x\sin\theta+y\cos\theta+b$$

上式包括 $a=b=0$ 繞原點之旋轉變換，

又包括 $\theta=0$ 之平移變換，故得次述定理，

（定理四）　平面上一切剛體運動皆可用（1）表示之。

習　　題

1.　將兩點（4,2）與（3,5）移至（2,4）與（−1,5），求其剛體運動之變換式，

2.　剛體運動 $x'=-y+3,\ y'=x+1$ 爲繞（1,2）點旋轉之變換，求其證明，

3.　前第 2 題爲繞原點旋轉變換及一平移變換之積，應如何表示之。

4.　變換之羣　幾何變換羣特具殊異之意義，如次所述。

（定義） 有限個或無限個爲組之一組變換式稱之爲羣，須具備次列條件

〔a〕 每兩變換式之積仍屬於其組中變換式之一．

〔b〕 每變換式之逆變換式仍屬於其組中變換式之一，

例如合一變換式與繞原點旋轉 180° 變換式

$$(1) \qquad \begin{array}{ll} x'=x & x'=-x \\ y'=y & y'=-y \end{array}$$

組成群．因兩變換式之積仍爲其旋轉變換式．每變換式自乘之積爲合一變換式．各逆變換式仍爲其原變換式，皆屬於其羣，

又如次列四變換式

$$(2) \qquad \begin{array}{llll} x'=x & x'=-y & x'=-x & x'=y \\ y'=y & y'=x & y'=-y & y'=-x \end{array}$$

上式爲合一變換式，繞原點旋轉 90°，180°，270° 之變換式，組成羣

羣（1）與羣（2）俱包含有合一變換式，

每個羣俱包含有合一變換式，蓋羣中任意 T 則有 T^{-1} 屬於其羣，又 TT^{-1} 亦屬於其羣，是故 $TT^{-1}=1$ 爲每個羣中必具之變換式，故得次述定理。

（定理一）每個變換羣包含有合一變換式。

前者羣（1）俱爲群（2）所包含，故稱羣（1）爲羣（2）之分羣，普通群有分羣，茲論述於次。

剛體運動之羣及其分羣

(3)　$x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a$

$y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b$

上式中 a, b, θ 爲任意常數，可任意用數值代入之。

每取其兩個變換式之積，仍屬其形式，即仍屬其組，蓋其剛體運動之形式必須如此乃可．再其每個逆變換亦當屬於其組，故總之組成剛體運動羣，故得次定理，

（定理二）平面上一切剛體運動之（3）組成爲羣．

平面上一切平移變換式記作　　$\theta=0$, or $360°$, $(a\neq 0)$

(4)　$x' = x + a$,　$y' = y + b$

式中 a, b 爲任意常數，得次述定理，

（定理三）平面上一切平移變換式（4）組成爲群．

（定理四）平面上一切繞定點旋轉變換式組成爲羣，平移變換羣（4）爲剛體運動羣（3）之分群，$(\theta=0)$.

同理，繞定點旋轉羣爲剛體運動羣之分羣，

剛體運動羣有三任意常數，稱爲參數，故稱其羣爲三參數群，

習　題

1. 演算（2）變換式組成爲群之意義，

2. 用解析意義證明繞原點旋轉變換式組成爲群，

3. 平移變換式倚若干參數以變換，繞定點旋轉變換式倚若干參數以變換。

5. 不變式　剛體運動式　（1）

$x'=x\cos\theta-y\sin\theta+a,\quad y'=x\sin\theta+y\cos\theta+b.$

保持其距離不變，

例如 $P_1:(x_1,y_1)$ 與 $P_2:(x_2,y_2)$ 至 $P'_1:(x_1',y'_1)$ 與 $P_2':(x_2',y'_2)$ 代入（1）得兩組相減

$$x'_2-x'_1=(x_2-x_1)\cos\theta-(y_2-y_1)\sin\theta$$

$$y'_2-y_1'=(x_2-x_1)\sin\theta+(y_2-y_1)\cos\theta$$

平方後相加

$$(x'_2-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

故得次式（2）

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

常爲不變之值，

總之，（2）式對於剛體運動群爲 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 間不變式，此爲不變式之一種，蓋指距離而言者，

又剛體運動中，兩直線交角亦保持不變，

設有兩直線 (3)

$$a_1x+a_2y+a_3=0,\quad b_1x+b_2y+b_3=0$$

應用剛體運動 (1) 以變換之，但求 (3) 中之 x,y 雖以先求 (1) 之逆變換式爲宜，茲爲便利故，另作得次式 (4) 亦足代表其剛體運動，

$$x=x'\cos\phi-y'\sin\phi+c\qquad y=x'\sin\phi+y'\cos\phi+d$$

上式 (4) 中 c,d,ϕ 爲三參數，

將 (4) 之 x,y 代入 (3)，遂得次式 (5)

$$a_1'x'+a_2'y'+a_3'=0,\quad b_1'x'+b_2'y'+b_3'=0$$

式中各値載於次式 (6)

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= a_1\cos\phi+a_2\sin\phi \\ a_2' &= -a_1\sin\phi+a_2\cos\phi \\ a_3' &= a_1c+a_2d+a_3 \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} b_1' &= b_1\cos\phi+b_2\sin\phi \\ b_2' &= -b_1\sin\phi+b_2\cos\phi \\ b_3' &= b_1c+b_2d+b_3 \end{aligned}$$

應用各直線對 x 軸之交角與係數關係，

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

計算結果

$$\frac{a_1'b_2'-a_2'b_1'}{a_1'b_1'+a_2'b_2'}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1b_1+a_2b_2}$$

由上式可知式中已無 c, d, ϕ 並合為次式 (7)

$$\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1b_1+a_2b_2}$$

總之，(7) 式對於剛體運動群為 (3) 式兩直線交角正切不變式．此為不變式之一種，蓋指兩直線交角而言者，

習　　　題

1. 詳細計算 (7) 式成立時，中間所經過各式，

2. 對於剛體運動群次列行列式為三點不變式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

求其證明並述此不變式在幾何上之意義，

√3. 求証對於平移變換群，直線線坡比為不變式，

√4. 求證對繞原點旋轉變換群，兩點 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 存在 $(x_1y_2-x_2y_1)$ 為不變式，在幾何上表示何種意義。

5. 求証對於剛體運動群，(x_0, y_0) 及 $a_1x+a_2y+a_3=0$ 存在次列不變式，

$$\frac{a_1x_0+a_2y_0+a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$$

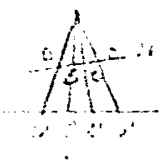
6. 求証對於剛體運動羣，(x_0,y_0) 點與圓

$$x^2+y^2+a_1x+a_2y+a_3=0$$

存在不變式 $x_0^2+y_0^2+a_1x_0+a_2y_0+a_3$

B. 一次元射影變換式

6. 射影與射影對應



(定理一) 將直線 L 射影至直線 L′ 上，兩直線上之點列間成立一對一之對應，並保持其交比各相合，

(定理二) 兩個點列，彼此一對一對應並保持交比各相合，依據一個點列上順序 A,B,C 與另一個點列順序 A′,B′,C′ 以成立唯一之對應，

因其交比必保持各相合，

(1) $(A'B',C'P'_i)=(AB,CP_i)$

由此可知於 i 爲某，則 P'_i 與唯一之 P_i 對應，

更由此得交比

(2) $(P'_1P'_2,P'_3P'_4)=(P_1P_2,P_3P_4)$

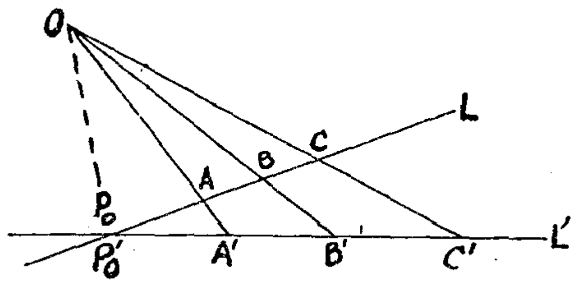
設採用齊次座標，A,B,C 爲 a,b,a+b.

與其一一對應之 A′,B′,C′ 爲 a′,b′,a′+b′.

由其交比設 P_i 之座標爲 $a+u_ib$

交比相合故 P'_i 之座標爲 $a'+u_ib'$

設 $i=1,2,3,4$ 則 (2) 式成立甚顯明，



第　八　圖

由第八圖兩直線上點列一對一對應，自射影中心 O 至各點已知 $A\longleftrightarrow A'$, $B\longleftrightarrow B'$, $C\longleftrightarrow C'$

又因保持交比各相合以得 $P_i\longleftrightarrow P'_i$

必有 $P_0\longleftrightarrow P'_0$ 以適合交比 u_0，而知 P_0, P_0' 重合於兩直線 L,L′ 之交點，乃是由 O 射影 L 之 P_0 至 L′ 之 P'_0 也，總之，得次述定理，

（定理三） 由射影一直線至另直線成立一致之一對一對應兩個點列並保持其交比各相合。

（定義 a ） 兩個點列間對應爲一對一，而保持交比

各相合，稱之爲一次元射影對應，

（定理四）　兩個點列間之射影對應，爲三對之對應點唯一義以決定之。

對應與變換

兩個點列對應 R 與 R′，其對應點 P 與 P′，乃是平等可逆之性質，故表示爲 $R\longleftrightarrow R'$ 或 $P\longleftrightarrow P'$

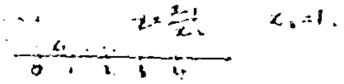
凡得 $R\to R'$ 或 $P\to P'$ 即得 $R'\to R$ 或 $P'\to P$.

（定義）　凡由射影對應所決定之變換稱爲射影變換，

總之，由於射影對應之兩個點列所組成之交比爲不變式。

7.　一次元射影變換

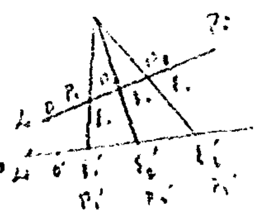
各直線上自取一點爲原點，自取特殊單位，順次決定其座標，稱之爲自決之非齊次座標，



各直線上各用自決座標則各有統系。

茲設直線 L 上自決之非齊次座標用 ξ_i 表之，

又設直線 L′ 上自決之非齊次座標用 ξ'_i 表之，



今兩直線 L 與 L′，其上 $P_1\longleftrightarrow P'_1$，$P_2\longleftrightarrow P'_2$，$P_3\longleftrightarrow P'_3$ 所決定之兩個點列以成射影變換，

則交比爲不變式得

$$(1) \qquad (P'_1P'_2,P'_3P)=(P_1P_2,P_3P)$$

式中 P' 爲點列 L' 上之動點，P 爲點列 L 上之動點，常保持 $P'\longleftrightarrow P$ 以存在於其交比不變式之情況中，

在兩個點列上各用其自決座標，

P_1, P_2, P_3, P 各爲 ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ

$P_1', P_2', P_3' P$ 各爲 $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'$

則（1）式交比得書作次式

$$(2) \qquad \frac{(\xi'_3-\xi'_1)(\xi'-\xi'_2)}{(\xi'_3-\xi'_2)(\xi'-\xi'_1)}=\frac{(\xi_3-\xi_1)(\xi-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_2)(\xi-\xi_1)}$$

射影變換式所欲知者爲動點 $P'\longleftrightarrow P$ 即求 ξ', ξ 之關係，

茲令 $\dfrac{(\xi'_3-\xi'_1)}{(\xi'_3-\xi'_2)}=k' \qquad \dfrac{(\xi_3-\xi_1)}{(\xi_3-\xi_2)}=k$

則由各常數關係與變數關係成立次式

$$\frac{k'(\xi'-\xi'_2)}{(\xi'-\xi'_1)}=\frac{k(\xi-\xi_2)}{(\xi-\xi_1)}$$

解之得 ξ' 如次

$$\xi' = \frac{(k\xi'_1 - k'\xi'_2)\xi + (k'\xi_1\xi_2' - k\xi_2\xi'_1)}{(k-k')\xi + (k'\xi_1 - k\xi_2)}$$

為便利故，令　$\xi' = x'$,　$\xi = x$

另為便利故，此後常數 a_1, a_2, b_1, b_2 不作表示座標之用，將上式改作次列方程式。　$x' = \frac{x_1'}{x_2'}$,　$x = \frac{x_1}{x_2}$

$$(3)\qquad x' = \frac{a_1 x + a_2}{b_1 x + b_3} = \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{a_1\frac{x_1}{x_2} + a_2}{b_1\frac{x_1}{x_2} + b_2} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2}{b_1x_1 + b_2x_2}$$

設各直線上採用自次齊次座標，令 $i = 1,2,3$

則 L 上 ξ_i 點用 $\{(x_1)_i, (x_2)_i\}$ 表之，x 用 (x_1, x_2) 表之。

又 L′ 上 ξ'_i 點用 $\{(x'_1)_i, (x'_2)_i\}$ 表之，x′ 用 (x_1', x_2') 表之。

故得　$\xi_i = \frac{(x_1)_i}{(x_2)_i}$　　$\xi'_i = \frac{(x'_1)_i}{(x'_2)_i}$

又　$x = \frac{x_1}{x_3}$　　$x' = \frac{x_1'}{x_2'}$

則將 (3) 改為次式

$$(4)\quad \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{a_1 x_1 + a_3 x_3}{b_1 x_1 + b_2 x_2}$$

就上列方程式論，左方之比等於右方之比，故得

(5)　$\rho x_1' = a_1x_1 + a_2x_2$　　$\rho \neq 0$

$\rho x_2' = b_1x_1 + b_2x_2$

再自 (5) 經過 (4) 可還原使爲 (3). 故 (5) 與 (3) 表示同一之變換,

故得次述之定理,

(定理)　由一個點列至另一點列之射影變換屬於線形變換。

習　　題

1. 將直線 L 上自決之點列 0,1,2 順次射影至直線 L′ 上自決之點列 −1,0,−2, 求其射影變換方程式。用其齊次座標表示其變換方程式, 並求其逆變換式, 決定各直線上之消失點。

2. 將直線 L 上自決之 2, 4, 無窮遠點, 順次射影至直線 L′ 上自決之 −1,1, 無窮遠點求其射影變換方程式, 並作圖以明其意義。

3. 將直線 L 上三點 $(1,0,1)$, $\left(1,1,1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $(0,3,\sqrt{3})$ 順次射影至 L′ 上三點 $(1,0,2)$, $(1,1,4)$, $(0,1,2)$ 求作其射影變換方程式。

4. 求直線上自决齊次座標與其直線所在一平面上所通過兩定點齊次座標之關係。

8. 一次元線形變換

兩直線 L 至 L′任意點列之線形變換爲

$$(1)\quad x'=\frac{a_1x+a_2}{b_1x+b_2}\quad \text{或}\quad \begin{aligned}\rho x_1'&=a_1x_1+a_2x_2\\ \rho x_2'&=b_1x_1+b_2x_2\end{aligned}\qquad \rho\neq 0$$

求其逆變換式得

$$(2)\qquad \begin{aligned}\Delta x_1&=\rho(b_2x_1'-a_2x_2')\\ \Delta x_2&=\rho(-b_1x_1'+a_1x_2')\end{aligned}$$

$\rho\Delta x_1 = b_2x_1'-a_2x_2'$

$\rho\Delta x_2 = -b_1x_1'+a_1x_2'$

but $x=\frac{x_1}{x_2}=\frac{\rho\Delta x_1}{\rho\Delta x_2}=(5)$

但式中 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$

行列式 Δ 稱爲線形變換行列式，

設 $\Delta=0$ 則 (2) 式不能代表其逆變換式。

特於 $\Delta=0$ 則 a_1, a_2 與 b_1, b_2 成比例

原是 x' 惟爲常數而 x' 只有一度爲零時其相當 x 有定值，此是射影中心在 L' 上，其座標即是所述之常數，而 L' 與 L 相交之點在 x 爲定值在直線 L' 上乃 x' 之自决原點，此種特例並非射影幾何普遍情況，故射影幾何摒棄 $\Delta=0$.

總之，射影幾何中，線形變換行列式 $\Delta\neq0$.

由（2）式所得，令 $\Delta=\rho\sigma$，得（1）之逆變換式

$$(3)\quad x=\frac{b_2x'-a_2}{-b_1x'+a_1}\quad 或\quad \begin{aligned}\sigma x_1&=b_2x_1'-a_2x_2'\\ \sigma x_2&=-b_1x_1'+a_1x_2'\end{aligned}\quad \sigma\neq 0$$

（定理一）　由一個點列至另一點列之線形變換則屬於射影變換，

此爲第 7 節最末所述定理之逆定理。

既知線形變換式（1）已具備兩點列一對一之對應，再若證明其由線形變換所得交比保持其不變式，則其線形變換俱合於射影變換之條件矣

今設 L 上四點齊次座標 (x_1,x_2)，(y_1,y_2)，(z_1,z_2) (t_1,t_2)，於 L′ 上齊次座標對應點 (x_1',y_1')，$(y_1'y_2')$，(z_1',z_2')，(t_1',t_2')．得其線形變換爲

$$(4)\quad \begin{aligned}\rho_1x_1'&=a_1x_1+a_2x_2 & \rho_2y_1'&=a_1y_1+a_2y_2\\ \rho_1x_2'&=b_1x_1+b_2x_2 & \rho_2y_2'&=b_1y_1+b_2y_2\\ \rho_3z_1'&=a_1z_1+a_2z_2 & \rho_4t_1'&=a_1t_1+a_2t_2\\ \rho_3z_2'&=b_1z_1+b_2z_2 & \rho_4t_2'&=b_1t_1+b_2t_2\end{aligned}$$

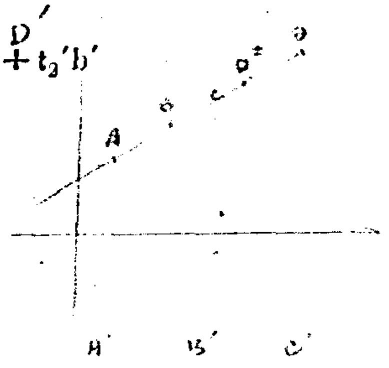
上式中 $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\neq 0$

今若 L 直線通過 a,b 其上四點

$$x_1a+x_2b,\quad y_1a+y_2b,\quad z_1a+z_2b,\quad t_1a+t_2b$$

又設 L' 直線通過 a',b' 其上四點

$x_1'a'+x_2'b'$, $y_1'a'+y_2'b'$, $z_1'a'+z_2'b'$, $t_1'a'+t_2'b'$



各交比若得相等則其證明爲完全矣，

即求證

$$\frac{|z_1'x_2'|\ |t_1'y_2'|}{|z_1'y_2'|\ |t_1'x_2'|}=\frac{|z_1x_2|\ |t_1y_2|}{|z_1y_2|\ |t_1x_2|}$$

但由（4）式算得

$$\begin{vmatrix} z_1'x_1' \\ z_2'x_2' \end{vmatrix}=\frac{1}{\rho_1\rho_2}\begin{vmatrix} a_1z_1+a_2z_2 & a_1x_1+a_2x_2 \\ b_1z_1+b_2z_2 & b_1x_1+b_2b_2 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\Delta}{\rho_1\rho_2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}$$

將左方各行列式算得之值代入，適與所欲證明之式相同。

線形變換射影羣

前者兩直線 L,L' 上點列一對一自決座標 x 與 x' 用（1）式線形變換式表示之。

由其一切變換及逆變換與其合一變換等得組成一變換羣．因其與群之定義相合也。

（定理二）　一點列上一切射影變換自組成羣。

對於線形變換射影羣則存在（5）之不變式

$$\frac{|zx|\cdot|tv|}{|zy|\cdot|tx|}$$

習 題

1. 應用非齊次座標線形變換中求證其保持交比爲不變式，

2. 兩個線形變換式之積求證其爲線形變換。

應用兩式所示行列式及其乘積，且各不爲零。

3. 平移式 $x'=x+b'$ 表示於其一直線上之剛體運動，求證其平移變換自組成群並爲其點列上射影變換羣之分群。

4. 作第 6 節（定義 a）之雙對定義

5. 求証兩個線束間之射影對應，爲三對之對應直線唯一義以決定之

6. 由一個線束至另一線束之射影變換屬於線形變換，則其變換式爲

$$u'=\frac{a_1u+a_2}{b_1u+b_2} \quad 或 \quad \begin{aligned}\rho u'_1&=a_1u_1+a_2u_2, & \rho\neq0\\ \rho u'_2&=b_1u_1+b_2u_2, & \Delta\neq0\end{aligned}$$

式中 u,u' 爲各有自決非齊次座標，u_1,u_2 與 u'_1,u'_2

爲各有自決齊次座標，

7、 由一個線束至另一線束之線形變換則屬於射影變換，

並求證於其變換保持交比不變式

C. 二次元射影變換式

9. 用解析法述明兩平面射影變換之意義如次

（定理一） 將一平面射影至另一平面，兩平面上之點成立一對一之對應，兩平面上之直線成立一對一之對應，且保持其交比爲不變式。

其逆定理亦能成立，

（定義） 將平面 M 上之點變換至平面 M′ 上之點，

(a) 平面 M 與平面 M′ 上各點間成立一對一之對應，

(b) 平面 M 與平面 M′ 上各直線成立一對一之對應，

(c) 各對應關係保持其交比爲不變式，

則稱之爲二次元射影變換，

線形變換屬於射影變換故表示之如次

$$(1)\quad \begin{aligned} \rho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \qquad \rho \neq 0 \\ \rho x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

簡記爲 $\rho x_1'=\sum\limits_{j=1}^{3} a_{1j}x_j$

$$\rho x_2'=\sum_{j=1}^{3} a_{2j}x_j$$

$$\rho x_3'=\sum_{j=1}^{3} a_{3j}x_j$$

更簡爲

$$(1')\qquad \rho x'_i=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \qquad (i=1,2,3)$$

普通（1）式之係數行列式記作 $|a_{ij}|$ 稱之爲變換行列式，

設 $|a_{ij}|=0$ 則於（1）式不能對 M 與 M′ 成立一對一之對應，

故於線形變換摒棄 $|a_{ij}|=0$

總之線形變換成立一對一對應 $|a_{ij}|\neq 0$

計算（1）之逆變換得

$$(2)\qquad \begin{aligned} \sigma x_1&=A_{11}x'_1+A_{21}x'_2+A_{31}x'_3\\ \sigma x_2&=A_{12}x'_1+A_{22}x'_2+A_{32}x'_3 \qquad \sigma\neq 0\\ \sigma x_3&=A_{13}x'_1+A_{23}x'_2+A_{33}x'_3 \end{aligned}$$

更簡爲

$$(2')\qquad \sigma x_i=\sum_{j=1}^{3}A_{ji}x_j' \qquad (i=1,2,3)$$

此處 A_{ij} 各爲其 a_{ij} 之補餘式蓋自 $|a_{ij}|$ 中取得之者，

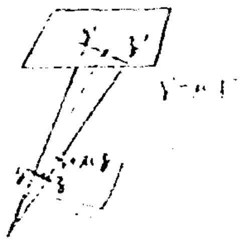
因　$|A_{ij}|=|a_{ij}|^2$ 故 $|A_{ij}|\neq 0$

又　$\rho\sigma=|a_{ij}|$

（補題）變換式（1）將平面 M 上之點 y 與 z 移至平面 M′ 上之點 y′ 與 z′ 則將 M 上之點 $y+\mu z$ 移至 M′ 上則爲 $\rho_1 y'+\mu\rho_2 z'$ 此處 ρ_1 與 ρ_2 各爲 $y\rightarrow y'$ 與 $z\rightarrow z'$ 所用之常數比。

因設　$\rho_1 y'_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\,y_j \quad (i=1,2,3)$

又設　$\rho_2 z'_i=\sum_{j=1}^{3}b_{ij}\,z_j \quad (i=1,2,3)$



倘若 $a_{ij}=b_{ij}$

故　$\mu\rho_2 z'_i=\mu\sum_{j=1}^{3}b_{ij}\,z_j \quad (i=1,2,3)$

是以 M 上一直線上三點 $y, z, y+\mu z$

變換於 M′ 上直線上三點 $y', z', \rho_1 y'+\mu\rho_2 z'$

(11) 因 $\rho_1 y_i'+\mu\rho_2 z_i'=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}y_j+\mu\sum_{j=1}^{3}a_{ij}z_j$

[illegible]

設於 M 上取四點，

$$y,\ z,\ y+\mu_1 z,\ y+\mu_2 z$$

則於 M′ 上得其對應之四點

$$y',\ z',\ \rho_1 y'+\mu_2\rho_2 z',\ \rho_1 y'+\mu_2\rho_2 z'$$

兩平面上各得交比，然皆為$\frac{\mu_1}{\mu_2}$即交比不變也，

是以總得線形變換屬於射影變換，

（定理二）　每組線形變換乃將 M 上之點移至 M′ 上得一對一點對應，保持交比不變式，是即射影變換，

習　　　題

1．求次列變換之逆變換

$$\rho x_1'=2x_1-x_2+x_3,\ \rho x_2'=x_1+2x_2-x_3,\ \rho x_3'=x_1+x_2+x_3$$

又將各方用非齊次座標表示之，並求其逆變換，

2．應用 1 題變換求直線 $3x_1+x_2-2x_3=0$ 之對應直線，

3．應用 1 題變換求兩個平面之消失線，

4．求證兩個線形變換之乘積為線形變換，

§10．基本定理

（定理一）將平面 M 上四點移至平面 M′ 上某四點，但兩平面上各四點無三點在一直線上，乃存在唯一

之線形變換，

特列 A

設將 M 上四點 (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1) 移至平面 M′ 上某四點 a′, b′, c′, d′. 可得兩平面上各無三點在一直線上，應用第 9 節之 (1) 即 (1′) 求其線形變換，

$$(1)\qquad \rho x'_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\,x_j\quad(i=1,2,3)$$

並知 $|a_{ij}|\neq 0,\ \rho\neq 0$

順次代入 M 上四點則由 a′, b′, c′, d′ 得十二式 (2)

$$\rho_1 a'_1=a_{11},\ \rho_2 b'_1=a_{12},\ \rho_3 c'_1=a_{13},\ -\rho_4 d_1'=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}$$

$$\rho_1 a_2'=a_{21},\ \rho_2 b_2'=a_{22},\ \rho_3 c_2'=a_{23},\ -\rho_4 d_2'=\sum_{j=1}^{3}a_{2j}$$

$$\rho_1 a_3'=a_{31},\ \rho_2 b_3'=a_{32},\ \rho_3 c_3'=a_{33},\ -\rho_4 d_3'=\sum_{j=1}^{3}a_{3j}$$

由十二個方程式求其九個之 a_{ij}' 與四個 ρ 之關係，

由 (2) 之第一列，第二列，第三列得次式 (2′)

$$a_1'\rho_1+b_1'\rho_2+c_1'\rho_3+d_1'\rho_4=0$$

$$a_2'\rho_1+b_2'\rho_2+c_2'\rho_3+d_2'\rho_4=0$$

$$a_3'\rho_1+b_3'\rho_2+c_3'\rho_3+d_3'\rho_4=0$$

上三式中 a',b',c',d' 無三點在一直線上故其矩陣品位爲 3. 四個 ρ 有異於 0,0,0,0 之解，

$$(3a)\qquad \rho_1=k\,|b'c'd'|,\quad \rho_2=-k\,|a'c'd'|,$$

$$\rho_3=k\,|a'b'd'|,\quad \rho_4=-k\,|a'b'c'|$$

此處 k 爲任意常数，但不取其爲零，

，再將各 ρ 代入 (2) 之十二式以得 a_{ij} 爲 (3b)

$$a_{11}=k\,|b'c'd'|\,a_1'\quad a_{12}=-k\,|a'c'd'|\,b_1'\quad a_{13}=k\,|a'b'd'|\,c_1'$$

$$a_{21}=k\,|b'c'd'|\,a_2'\quad a_{22}=-k\,|a'c'd'|\,b_2'\quad a_{23}=k\,|a'b'd'|\,c_2$$

$$a_{31}=k\,|b'c'd'|\,a_3'\quad a_{32}=-k\,|a'c'd'|\,b_3'\quad a_{33}=k\,|a'b'd'|\,c_3$$

將 (3a) 與 (3b) 代入 (1) 則得其唯一之線形變換，

且此唯一之線形變換適合其特設條件 (2)

再者各 ρ 不爲零，由於 a',b',c',d' 無三點在一直線上，自 (2′) 可以知之，

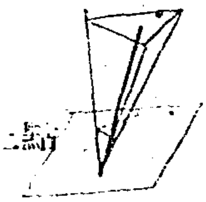
在射影變換 $|a_{ij}|\neq 0$ 自 (2) 或 (3b) 求之，

$$|a_{ij}|=\rho_1\rho_2\rho_3|a'b'c'|$$

因各 ρ 不爲零且三點 a',b',c' 不在一直線上故其行列式不爲零，故左方行列式不爲零，是以所述線形變換爲其唯一之射影變換，

特例 B

設將 M 上某四點 a,b,c,d 移至平面 M'_0 上四點 (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1) 可得兩平面上各無三點在一直線上，求其只存在唯一之線形變換



此爲特例 A 之逆，故將其証明省略之，

普通例

設欲將 M 上四點 a, b,c,d 移至 M′ 上某四點 a′,b′,c′,d′ 求其唯一之線形變換．

今另取一平面 $\overline{M}$ 於其上定四點

(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)

則將 M 上四點移至 $\overline{M}$ 上所定四點存在唯一之線形變換 T_1 以適合其特設條件．

再將 $\overline{M}$ 上所定四點移至 M'_0 上某四點則存在唯一之線形變換 T_2 以適合其特設條件，

則有線形變換 $T=T_1T_2$ 以適合各特設條件，乃是 a 經 (1,0,0) 而至 a′ 又 b 經 (0,1,0) 而至 b′ 又 c 經 (0,0,1) 而至 c′ 又 d 經 (1,1,1) 而至 d′

此時所欲證明者 T 是否即爲其唯一之線形變換，

假設於 T 外另有線形變換 S 並用以適合其各特設條件，即能將 M 上之 a,b,c,d 移至 M'_0 上之 a′,b′,c′,d′

則 ST_2^{-1} 爲一線形變換之將 M 上諸點移至 $\overline{M}$ 上諸點者並適合其特設條件凡 M 上之 a,b,c,d 順次移至 $\overline{M}$ 上之 (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1). 者，

因 S 旣已將 M 之點移至 M'_0 之點，今繼以 T_2^{-1} 將 M′ 之點移至 $\overline{M}$ 之點故如上所述，

但將 M 上之 a,b,c,d 順次移至 $\overline{M}$ 上各定點乃已有線形變換 T_1 適用，

則是 $ST_2^{-1}=T_1$ 故 $ST_2^{-1}T_2=T_1T_2$

即 S＝T 故 S 不得爲 T 外之線形變換即 T 爲所求之唯一線形變換，

習　　題

1. 求將四點 (1,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(0,0,1) 順次移至四點 (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1) 之線形變換，

2. 將直線 L 上各點移至 L′ 上各點而適合 L 上特設三點移至 L′ 上特設三點，用解析法證明其唯一線形變換之存在，

11. 二次元線形變換

茲因二次元射影變換是否即爲二次元線形變換，倘

未證明，故申述於次。

設 T 爲將 M 上各點移至 M′ 上各點之射影變換。

在 M 上取四點 A_1,A_2,A_3,D 無三點在一直線上，移至 M′ 上四點 A_1',A_2',A_3',D' 自第 9 節射影變換定義 (b) 則 M′ 上所述點亦無三點在一直線上，

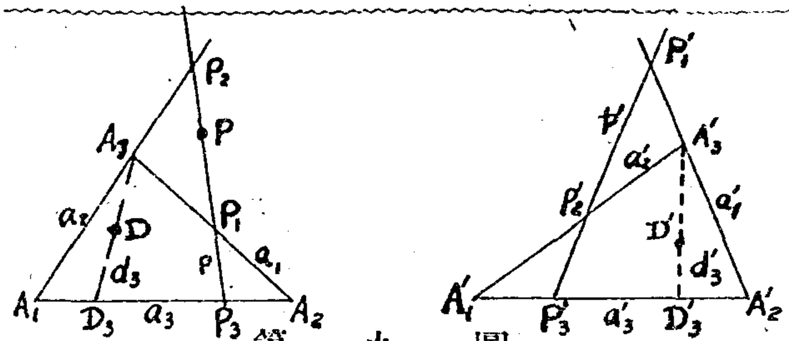
前已知存在唯一線形變換設爲 S 將 M 上各點移至 M′ 上各點以適合 A_1,A_2,A_3,D 移至 A_1',A_2',A_3',D' 之特設條件，

設證明 T 與 S 一致相同，則得結論矣，

a. 今既知 T 與 S 皆爲將 M 上各點移至 M′ 上各點之變換，並皆適合特設條件 A_1,A_2,A_3,D 移至 A_1',A_2',A_3',D'.

b. 凡線形變換屬於射影變換故 S 有射影變換 T 之功用，

c. 故 S 與 T 皆能將 a_3 移至 a_3' 將 d_3 移至 d_3' 是以將 D_3 移至 D_3' 如第九圖，點線對應俱同，



第 九 圖

既 S 與 T 皆能將 A_1,A_2,A_3,D 移至 A_1',A_2',A_3',D

則皆能將 a_1,a_2,a_3,d_1,d_2,d_3 移至 $a_1',a_2',a_3',d_1',d_2',d_3'$,

故設有任意點 P 通過 P 作任意直線 p 交三邊於 P_1,P_2,P_3

則 S 與 T 皆能將 P_1,P_2,P_3 移至 $P_1'P_2',P_3'$ 於直線 p′ 上，

是以 S 與 T 皆能將 p 上之 P 移至 p′ 上之 P′.

（定理） 將平面 M 上各點移至 M′ 上各點之射影變換與其將平面 M 上各點移至 M′ 上各點之線形變換一致相同。 実際上不一致，射影變換不同已

習 題

將 M 上各點移至 M′ 上各點之射影變換設將 M 上直線 L 移至 M′ 上直線 L′，則於 L 上點列與 L′ 上點列間，成立一對一之射影對應，

12. 平面上直線間之線形與射影變換

點幾何與直線幾何爲雙對關係故與第 9 節(定義)雙對，作定義如次，

(定義) 將平面 M 上之直線變換至平面 M′ 上之直線，

(a) 平面 M 與平面 M′ 上各直線間成立一對一之對應，

(b) 平面 M 與平面 M′ 上各點間成立一對一之對應，

(c) 各對應關係保持其交比爲不變式，

則稱之爲二次元射影變換，

線形變換屬於射影變換，故今表示之如次，

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\rho u_1' &= b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3 \\
\rho u_2' &= b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3 \\
\rho u_3' &= b_{31}u_1 + b_{32}u_2 + b_{33}u_3
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\rho \neq 0 \\
&|b_{ij}| \neq 0
\end{aligned}
$$

更簡爲

$$
(1')\qquad \rho u'_i = \sum_{j=1}^{3} b_{ij}u_j \qquad (i=1,2,3)
$$

計算 (1) 之逆變換得

$$(2)\qquad \sigma u_i = \sum_{j=1}^{3} B_{ji} u_j' \qquad (i=1,2,3)$$

此處 B_{ij} 各爲其 b_{ij} 之補餘式蓋自 $|b_{ij}|$ 中取得之者，由此亦得基本定理，

（定理一）將平面 M 上四直線移至平面 M′ 上某四直線，但兩平面上各四直線無三直線通過同一點，乃存在唯一之線形變換，

（定理二）將平面 M 上各直線移至 M′ 上各直線之射影變換與其將平面 M 上各直線移至 M′ 上各直線之線形變換一致相同，

習　　題

1. 求證變換式（1）爲射影變換

2. 求證（定理二）

3. 第 9 節習題 4 變換式用以使 M 上任意直線 u 移至平面 M′ 上之直線 u′．求其直線之變換式，

13. 共相對稱性

兩平面上點之變換式

$$(1)\qquad \rho x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \qquad (i=1,2,3),\quad |a_{ij}| \neq 0$$

可用以表示兩平面上直線 u 移至 u′ 之變換，

求其直線之變換式，先求 (1) 之逆變換

$$(1')\qquad \sigma x_i=\sum_{j=1}^{3}A_{ji}x_j' \qquad (i=1,2,3)$$

而將其中之 (x_1, x_2, x_3) 代入次式直線 u 直線座標，

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

但 σ 不為零，因之用 (1′) 之右方得

$$x_1'\sum_{j=1}^{3}A_{1j}u_j+x_2'\sum_{j=1}^{3}A_{2j}u_j+x_3'\sum_{j=1}^{3}A_{3j}u_j=0$$

今以次式為直線之變換式 (2)

$$\lambda u_1'=\sum_{j=1}^{3}A_{1j}u_j,\qquad \lambda u_2'=\sum_{j=1}^{3}A_{2j}u_j,\qquad \lambda u_3'=\sum_{j=1}^{3}A_{3j}u_j$$

代入上式則 $x_1'u_1'+x_2'u_2'+x_3'u_3'=0$

又 (2) 式總為 $\lambda u_i'=\sum_{j=1}^{3}A_{ij}u_j \qquad (i=1,2,3)$

此 (2) 式即謂 u 之移至 u′ 所用之變換，

得其逆變換

$$(2')\qquad \mu u_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ji}u_j' \qquad (i=1,2,3)$$

變換式（2）與（2'）爲線形變換故爲射影變換，

（定理一）　平面 M 上各點移至平面 M' 上各點之射影變換得用以成立 M 上直線移至 M' 上直線之射影變換，

此（定理一）之雙對定理亦當成立，

蓋自其兩平面上直線之射影變換

$$(3)\qquad \rho u_i' = \sum_{j=1}^{3} b_{ij} u_j, \quad \sigma u_i = \sum_{j=1}^{3} B_{ji} u'_j. \quad (i=1,2,3)$$

可得其兩平面上點之射影變換

$$(4)\qquad \lambda x_i' = \sum_{j=1}^{3} B_{ij} x_j, \quad \mu x_i = \sum_{j=1}^{3} b_{ji} x_j' \quad (i=1,2,3)$$

（定義）　一平面射影至另一平面，凡此上之點移至彼上之點，於是此上之直線亦移至彼上之直線，或者此上之直線移至彼上之直線，於是此上之點亦移至彼上之點，如斯之射影變換名之曰共相對稱，或簡名之曰相稱，故所得變換名之曰相對變換，

習　　題

1. 求証（定理一）之雙對定理

2. 已知 $\rho x_1' = x_2 + x_3$，$\rho x_2' = x_1 + x_3$，$\rho x_3' = x_1 + x_2$

求其直線座標之相稱變換，

14. 變換羣與幾何結合

設平面 M 與平面 M′ 合而爲一個平面，

則同於一個平面上之相稱變換點之座標仍用次式表示之，

$$(1)\qquad \rho x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \quad (i=1,2,3) \quad |a_{ij}| \neq 0$$

(定理一)　一平面上一切相稱變換自組成羣，

此定理之成立甚爲明顯，

設將前（1）式相稱變換，其點用非齊次座標表示之，

$$(2)\qquad x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},\quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

自（2）式選取特殊之 a_{ij} 則得其平面上旋轉變換

$$(3)\qquad x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a,\quad y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b$$

（定理二）　平面上剛體運動羣爲其平面上相稱變換群之分群，

射影幾何爲適用相稱變換羣之幾何所結合而成，計量幾何爲適用剛體運動群之幾何所結合而成，由上（定

理二）已知剛體運動羣爲相稱變換羣之分羣，故計量幾何稱爲射影幾何之部下幾何。

習　　題

√ 1.　相似變換羣將幾何圖形用相似形狀變換，與剛體運動之不變大小者有不同之意義，

今自原點出射線其變換稱爲射線變換設爲

$$x'=\rho x,\quad y'=\rho y,\quad \rho>0$$

普通相似變換包括剛體運動與射線變換，故用剛體運動羣與射線變換羣之乘積表示之，

$$x'=\rho(x\cos\theta-y\sin\theta+a),\quad y'=\rho(x\sin\theta+y\cos\theta+b)$$

求證其相似變換自組成羣，

2.　相應變換，用次式表示之

$$x'=\rho x+a,\quad y'=\rho y+b\qquad \rho>0$$

求證其有次列之性質

(a)　相應變換爲自原點之射線變換及一平移變換之乘積或其二者僅用其一，

(b)　相應變換或爲自定點之平移變換或爲自定點之射線變換，

(c)　相應變換自組成羣，

3. 次式表示一直線上之射影變換，求証其於兩點 $x=3$, $x=-1$ 為固定點，則對於此兩固定點將所有 x 移至其調和共軛點 x',

$$x'=\frac{x+3}{x-1},$$

4. 一直線仍移至於原直線上應用線形變換式

$$x'=\frac{3x+2}{x+4}$$

求證於其直線上有兩固定點而其餘之 P 與 P′ 對其兩固定點分割成定交比，

5. 某變換式將一直線上之 P 移至其直線上之 P′，但其直線有兩特殊點 P_1, P_2 以得

$(P_1P_2, PP')=k$　但 k 不為零不為 1.

而其變換只將 P_1 移至 P_1，只將 P_2 移至 P_2，

求證其變換為射影變換，

6. 相du變換式

$$x'=\frac{x}{2x-1},\qquad y'=\frac{y}{2x-1}$$

將原點與 $x=1$ 之直線固定，將 P 移至 P′ 之方法

，為 P,P'，對於原點及 OP 與 $x=1$ 之交點，互成調和共軛，求証其相稱變換自成互逆變換。

7. 用幾何圖形表示次列相稱變換之意義。

$$x'=\frac{x}{3x-2},\qquad y'=\frac{y}{3x-2}$$

8. 求 L' 直線之方程式，L' 為自 L 直線 $y-6=0$ 應用次法移來者，

$$x'=\frac{3x+y+4}{y-1},\qquad y'=\frac{-4x-y+1}{y-1}$$

特將 L 移至 L' 視為剛體運動求證其距離為不變式。

9. 將次列曲線應用相稱變換式移動之

$$2x^2+3xy+2y^2+x+y-1=0$$

相稱變換式

$$\rho x_1'=2x_1+x_2+x_3,\ \rho x_2'=x_1+2x_2+x_3,\ \rho x_3'=x_1+x_2+2x$$

10. 零例線形變換

(a) 求證次列變換為零例變換

$$\rho x_1'=2x_1-x_2+x_3,\ \rho x_2'=x_1+x_2+x_3,\ \rho x_3'=4x_1-5x_2+x_3$$

所謂零例變換者其係數行列式為零也。

求證應用上列線形變換將其平面上之點皆移至於一直線上，惟有一點除外，

$$3x_1'-2x_2'-x_3'=0$$

其除外之一點爲何，在幾何上此爲何種意義，

(b)　應用次列零例變換

$\rho x_1'=x_1-x_2+x_3,\quad \rho x_2'=-2x_1+2x_2-2x_3,$

$\rho x_3'=3x_1-3x_2+3x_3$

將其平面上各點皆移至一點（1, −2, 3），惟除去一特殊直線，此在幾何上有是例否，

(c)　求證（a），（b）變換式中係數矩陣品爲 2 爲 1，並求一定理，將零例線形變換與幾何上之關係作一注解。

第八章 複素數平面上計量幾何

1. 複素數 設取一圓，一直線，求其交點，

$$x^3+y^2=1 \quad x=a$$

則於 $0<a<1$ 則得兩交點，

設令 $a>1$ 則普通作圖，圓與直線，實無交點，

例如 $a=2$ 則知其實雖不相交，然有虛數產生，

乃以 $(2,\sqrt{-3}),(2,-\sqrt{-3})$ 爲其兩交點座標

今設 a' 與 a'' 爲任意常數，稱 A 爲複素數

則是 $A=a'+ia''$ $i=\sqrt{-1}$

設於 $a''=0$ 則複素數 A 爲較簡潔者，

設於 $a''\neq0$ 則複素數 A 帶有虛數。

複素數之在代數學上與普通實數無大差別，特於第一章所述行列式，矩陣，線形方程式，線形倚變數各關係中，將一切實數皆易以複素數代入，其關係一律仍舊無異動。

習 題

次列兩複素數之積若爲零，求證其兩複素數中最少有一複素數爲零，

$$a = a' + ia'', \quad b = b' + ib''$$

2.　複素點與複素線

設取　$x = x' + ix''$　$y = y' + iy''$

則可用 (x,y) 以表示某平面上直交軸系中點之座標，一切 (x,y) 所表示之點，有時僅爲普通實數座標之點，有時尙帶有虛數，有時僅爲虛數座標，總之，稱爲複素點，

所謂某平面者，乃由一切 (x,y) 所表示之點，即由一切複素點所組成，稱之爲限定複素平面，

將非齊次座標 (x,y) 改用齊次座標可令

$x_1 = x_1' + ix_2''$,　$x_2 = x_2' + ix_2''$,　$x_3 = x_3' + ix_3''$

特設 x_1, x_2, x_3 與不俱爲零之三實數成比例，

則 $(x_1, x_2, x_3,)$ 表示其複素平面上之實點，

例如 $(2i, 0, 4i)$, $(2-2i, 0, 4-4i)$, 皆表示實點 $(1,0,2)$.

設 x_1, x_2, x_3 與不俱爲零之三實數不成比例，

則 $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$ 表示複素平面上之虛點，但 ρ 爲任意複素數且不得爲零，

複素點包括實點與虛點，由齊次座標 (x_1, x_2, x_3) 表示之一切複素點組成概括複素平面，

複素線

複素線包括實直線與虛直線，由直線座標法，倣前能推得一切複素線所組成之概括複素平面，

複素點與複素線

(1) $(u|x)\equiv u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$

上式 u 表示複素線，x 表示複素點，並表示 u 通過 x 或 x 在 u 上，一如普通之情況，

又 $(a|u)=0$ 爲複素點 a 之方程式，

$(a|x)=0$ 爲複素線 a 之方程式，

皆易證明故從略，

習 題

1．連兩點 $(1,i,3+2i)$，$(1,-i,3-2i)$ 之直線求證其爲實線，

2．求次列兩直線之交點

$$2x_1-ix_2+(1+i)x_3=0,\quad 2ix_1-x_2+(1+i)x_3=0$$

3．共軛複素原素

次列二數爲共軛複素數

$$a=a'+ia'',\quad \bar{a}=a'-ia''$$

特於 $a''\neq 0$ 又稱之爲共軛虛數，

（定理一）　複素數爲實數之充要條件乃其共軛複素數相等，

因於　$a''=0$ 則 $a=\overline{a}$

逆之　$a=\overline{a}$ 則 $ia''=0$ 故 $a''=0$

（定義）　兩原素例如兩點兩直線等稱爲共軛複素數，惟是其一之座標爲（ a_1, a_2, a_3 ），其一之座標可化爲 $(\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{a_3})$，

此（定義）包含限定點限定直線座標之爲共軛複素數者，

又此（定義）所述（a_1, a_2, a_3）與（$\overline{a_1}, a_2, a_3$）不必一一俱如前式所示 $a'+ia''$ 與 $a'-ia''$

例如（$2, i, 1-i$）與（$2+2i, -1+i, 2i$）爲共軛，

蓋以 $\frac{1-i}{2}$ 乘入（$2+2i, -1+i, 2i$）能得（$2, -i1+i$）也，

（定理二）　原素爲實數之充要條件乃兩共軛原素相重合，

設既知原素爲實數，則其共軛複素數與之相等，是以推得兩原素相重合，

逆之，兩原素相重合，可取 $a_3=1$，

則　$a_1=\rho\overline{a_1}$,　$a_2=\rho\overline{a_2}$,　$a_3=\rho\overline{a_3}$

故由　$a_3=\rho\overline{a_3}=1$,　$a_3=\overline{a_3}=1$,　$\rho=1$

故　$a_1=\overline{a_1}$,　$a_2=\overline{a_2}$　是以共軛複素數皆爲實數，

（定理三）　如一點 x 在一直線 u 上，則其 x 之共軛複素數 $\overline{x}$ 亦在於其 u 之共軛複素數 $\overline{u}$ 直線上，

蓋將 $(u|x)$ 可視作一簡單複素數，則其各共軛複素數所組成之 $(\overline{u}|\overline{x})$ 爲 $(u|x)$ 之共軛複素數，證明留作習題，

設 $(u|x)=0$ 故得 $(\overline{u}|\overline{x})=0$

特於一虛點在一實直線上，則其共軛虛點亦即在於其實直線上，

故一實直線上之點或爲實點或爲一對共軛虛點，

同理通過一實點之直線或爲實直線或爲一對共軛虛直線，

（定理四）　兩共軛虛直線之交點爲一實點，

兩共軛虛點所定之直線爲一實直線，

令 L 與 $\overline{L}$ 爲兩共軛虛直線，其交點爲惟一之 P.

由（定理三）P 在 L 上則 $\overline{P}$ 在 $\overline{L}$ 上，今 P 又在 $\overline{L}$ 上故 $\overline{P}$ 又在 L 上是 $\overline{P}$ 亦爲 L 與 $\overline{L}$ 之交點也，故 $\overline{P}$ 與 P 重合爲實點，

再令兩共軛虛點為 a 與 $\bar{a}$,

則連此兩點之直線 L 座標為

$$a_2\bar{a}_3-a_3\bar{a}_2,\quad a_3\bar{a}_1-a_1\bar{a}_3,\quad a_1\bar{a}_2-a_2\bar{a}_1$$

其共軛複素數各為

$$\bar{a}_2a_3-\bar{a}_3a_2,\quad \bar{a}_3a_1-\bar{a}_1a_3,\quad \bar{a}_1a_2-\bar{a}_2a_1,$$

乃為 L 之共軛複素數直線 $\bar{L}$ 座標，但以 -1 乘之，則前後兩者相同，是即兩共軛原素相重合故為實直線，

（推論）惟有一實直線通過一虛點，

惟有一實點在一虛直線上，

通過一虛點之實直線是即兩共軛虛點所定之直線，於此設另有實直線則其兩直線所通過之交點為實點而非通過虛點矣，

同此，雙對定理亦自成立，

習　　題

1. 如 a 與 b 為兩個複素數，

則　$\overline{(a+b)}=\bar{a}+\bar{b}$,　$\overline{(ab)}=\bar{a}\,\bar{b}$

2. 應用前題之法求證 $(u|x)$ 之共軛複素數為 $(\bar{u}|\bar{x})$.

3. 如 a 與 b 為共軛複素數則其和與其積皆為實數，其逆定理可成立否，

4. 求證次列二直線為共軛虛直線，

$2x_1-ix_2+(1+i)x_3=0$,　$2ix_1-x_2+(1+i)x_3=0$

5. 求在直線 $(2,i,3-4i)$ 上之實點，

6. 求通過 $(1,i,0)$ 點之實直線，

7. 證明 $(1+i,-1+i)$,$(1,1+i)$;$(i,-1-i)$三點在一直線上，求其直線上之實點，

8. 應用解析法與幾何意義証明（定理四）

9. 在一虛直線上之實點為無窮遠點之充要條件乃其直線之線玻比為實數或其直線平行於 Y 軸，

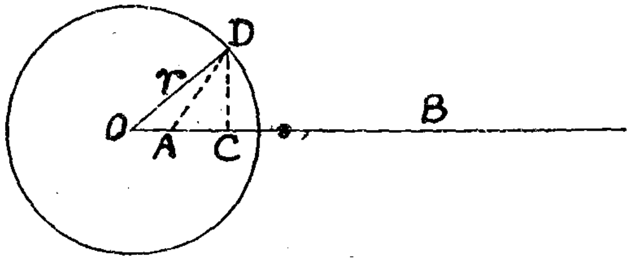
10. 兩點所決定之直線與其共軛複素兩點所決定之直線互成共軛複素數，

4. 複素數平面上計量幾何

設有一圓，圓心為 O，半徑為 r，又於圓內取 A 點，

並使 $OA\cdot OB=r^2$ 以得 B 點，

今假想 AB 之中點 C 在圓內如第一圖



第　一　圖

自 C 立 AB 之垂直線與圓交於 D，

連 AD 連 OD，

則於直角三角形 ACD 與 OCD 中

$$AD^2 = CD^2 + AC^2, \quad CD^2 = r^2 - OC^2$$

故

$$AD^2 = r^2 - (OC^2 - AC^2)$$

$$AD^2 = r^2 - (OC - AC)(OC + AC)$$

$$AD^2 = r^2 - OA \cdot OB = r^2 - r^2 = 0$$

$$AD = 0$$

此式謂 A 與 D 距離爲零，普通爲相重合之意，但 D 在圓周上，於是原點外一切點如 A 者皆在圓周之上，殊可駭異也，

但就複素數平面着論，並對兩點距離爲零更與以嚴明之定義，使其與兩點相重合者不生淆混，則 AD=0，並非 A 與 D 重合之意，蓋就第一圖 CD 與圓之交點爲

兩虛點之一虛點 D 實不能與實點 A 相重合也、若就此推論、則無可駭異之足言者，

茲再應用第一圖，說明實點 A 至虛點 D 之距離為零之意義，

設 $r=3$ 則可得 A：$(1,0)$ 及 B：$(9,0)$

於是得 C：$(5,0)$ 又 CD 直線方程式為 $x=5$

圓與 $x=5$ 之交點 D：$(5,4i)$ 或 D′：$(5,-4i)$

$x^2+y^2=3^2$
$x=5$
$y^2=-25+9=-16$
$y=\pm 4i$

故 $AD^2=(1-5)^2+(-4i)^2=0$

但 $(1,0)$ 與 $(5,4i)$ 決非能重合者，

習　　題

1、 設 x,y 為複素數求 $x^2+y^2=0$ 之一切解，

2、 應用解析法將第一圖實圓中心 O 作原點並決定實點 A，以 OA 為 X 軸，解釋前所述者在論理之謬誤，

5. 同歸線

就複素數平面論距離與角，其公式與實平面上相同，

設兩點為 (x_1,y_1) 與 (x_2,y_2) 距離為 D

$$D^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

但於 $D^2=0$ 在複素數平面上與在實平面上不同，

今設自定點 (x_0,y_0) 至動點 (x,y) 之距離為零，求動點之軌跡，

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$$

$$=[(x-x_0)-i(y-y_0)][(x-x_0)+i(y-y_0)]$$

得兩直線

(1)　$(x-x_0)-i(y-y_0)=0,\quad (x-x_0)+i(y-y_0)=0$

兩直線通過定點 (x_0,y_0)．自 (x_0,y_0) 至兩直線上任意點之距離為零，

兩直線之線坡比，一為 $-i$，一為 i

直線之有線坡比為 i 或為 $-i$ 者稱之為同歸線，

（定理一）　自定點至動點之距離常為零，則動點之軌跡為兩同歸線之通過其定點者。

再設在於一同歸線 L 上之兩限定點為 P_1,P_2

則 $P_1P_2=0$ 因自 L 上某定點至 P_1，至 P_2 距離皆為零之故，

（定理二）　一直線為同歸線之充要條件，乃取其直線上任意兩限定點俱得距離為零，

凡有線坡比 $-i$ 各同歸線俱平行而成一線束，各直線俱通過無窮遠點 $\check{I}$；$(1,-i,0)$

凡有線坡比 i 各同歸線俱平行而成一線束，各直線俱通過無窮遠點 J：(1,i,0)

兩線束可分別記之如次

$$x-iy+k=0,\quad x+iy+l=0$$

式中 k,l 爲任意常数，

圓周之無窮遠點

零圓 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=0$

爲兩同歸線 (1) 而通過 I,J.

複素数平面上之圓皆通過 I,J 因任意圓

$$x_1^2+x_2^2+a_1x_1x_3+a_2x_2x_3+a_3x_3^2=0$$

可用 (1,−i,0) 與 (1,i,0) 滿足其方程式也。

逆之，任意二次曲線通過 I,J 則

$$Ax_1^2+Bx_1x_2+Cx_2^2+Dx_1x_3+Ex_2x_3+Fx_3^2=0$$

得 $A-Bi-C=0$ 與 $A+Bi-C=0$

必得 $A=C$ 與 $B=0$、

然則二次曲線爲圓矣，

(定理三) 二次曲線爲圓之充要條件乃必通過兩同歸線束之頂點 I 與 J.

因 I 與 J 所具性質故稱之爲圓周無窮遠點，

自一點至直線之距離

$$d^2=\frac{(a_1x_0+a_2y_0+a_3)^2}{a_1^2+a_2^2}$$

由上式距離爲定值爲重值，

當直線爲同歸線時，則 $a_1^2+a_2^2=0$ 因 $a_1=1, a_2=\pm i$

則距離公式無意義，而其值不能決定，

縱其點在同歸線上，其點至其直線之距離亦不能決定，

兩直線交角與垂直

兩直線線坡比各爲 λ_1 與 λ_2, 交角爲 θ

$$(2)\qquad \tan\theta=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$$

則知於同時 $\lambda_1=\lambda_2$, $1+\lambda_1\lambda_2=0$ 爲 θ 之不定式，

設取同歸線束之二直線則本爲平行 $\lambda_1=\lambda_2$

但 $1+ii=0$ 或 $1+(-i)(-i)=0$ 雖普通垂直，

今則於（2）爲不定式，於分母爲零乃無意義，故同歸線束各於其方向只仍保持其平行之意義，

再設任意限定直線線坡比爲 λ, 與任意同歸線例如線坡比之爲 $-i$ 者求其交角之關係，此時用 $\lambda=i$ 亦可，

$$\tan\theta=\frac{\lambda+i}{1-\lambda i}=i$$

今知　$e^{\theta i}=\cos\theta+i\sin\theta$,　$e^{-\theta i}=\cos\theta-i\sin\theta$

$$\sin\theta=\frac{e^{\theta i}-e^{-\theta i}}{2i},\qquad \cos\theta=\frac{e^{\theta i}+e^{-\theta i}}{2}$$

故得

$$(3)\qquad \tan\theta=\frac{e^{\theta i}-e^{-\theta i}}{i(e^{\theta i}+e^{-\theta i})}$$

代入前式之 i 值

算得　$e^{\theta i}=0$　即　$\theta i=\log 0$

設線坡比 λ 之直線與線坡比 i 之同歸線代入 (2).

則　$\tan\theta=\dfrac{\lambda-i}{1+\lambda i}=-i$

由　$\dfrac{e^{\theta i}-e^{-\theta i}}{i(e^{\theta i}+e^{-\theta i})}=-i$,

算得　$e^{-\theta i}=0$　即　$-\theta i=\log 0$

總之，$\log 0$ 爲不定式，故 θ 爲不定．

是以同歸線與任意直線不得相交成角，

逆之，兩限定直線無交角存在，則至少有一爲同歸線，

由 (2) 知 $\tan\theta$ 或 $\cot\theta$ 爲不定式$\frac{0}{0}$,

由（3）得不定式

（4）　$\theta=\frac{1}{2i}\log\frac{i-\tan\theta}{i+\tan\theta}$

前者已知 $\tan\theta=\frac{0}{0}$ 可得 $\lambda_1=\lambda_2$ 及 $1+\lambda_1\lambda_2=0$

爲同方向兩同歸線之結論，今只須知其一爲同歸線即可，

但（4）式爲 $\theta i=\log 0$ 與 $-\theta i\log 0$ 連合所得，

故將 $\tan\theta=i$ 或 $\tan\theta=-i$ 檢驗（4）式爲合理，

於是（2）式爲 $\tan\theta=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}=i$ 或 $-i$

即解得 $(\lambda_1+i)(\lambda_2-i)=0$ 或 $(\lambda_1-i)(\lambda_2+i)=0$

故最少有一括弧爲零即至少有一爲同歸線，

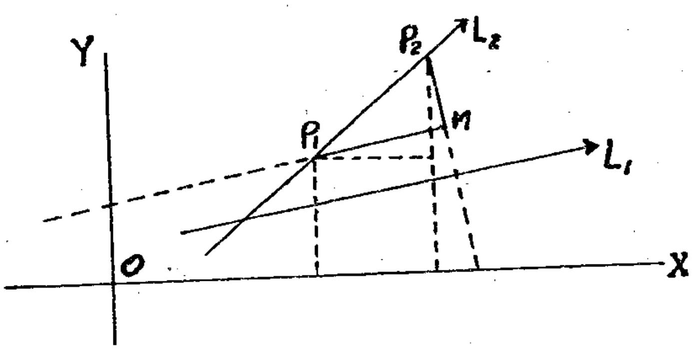
附注

同歸線與任意直線不得相交成角者，非是同歸線無線坡比之意義，蓋線坡比只須用次式表示之，

$$\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

由此可知其與角度無關，

直線與直線交角之正切，亦可不用角度關係，而另用新定義以距離之比作準而名之曰相對線坡比，



第 二 圖

先於直線 L_2 上取兩點 P_1,P_2 由 P_1 作 L_1 之平行線 P_1M, 再自 P_2 作 P_1M 之垂直線得 P_2M, 即 P_1M 直線至 P_2 之距離為 MP_2, 設以 r 表示 L_2 對 L_1 相對線坡比，

則 $r=\dfrac{MP_2}{P_1M}$

一同歸線與任意直線雖無定交角，一同歸線對任意直線則有相對線坡比，但其同歸線對同方向之同歸線無相對線坡比存在，

茲設各直線之方程式如次

L_1 直線 $a_1x+a_2y+a_3=0$.

P_1M 直線 $a_1x+a_2y-(a_1x_1+a_2y_1)=0$

P_3M 直線 $a_2x-a_1y-(a_2x_3-a_1y_3)=0$

P_1M 直線至 P_3 距離 $MP_3=\dfrac{a_1x_3+a_2y_3-(a_1x_1+a_2y_1)}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$

P_1 至 P_3M 直線距離 $P_1M=\dfrac{a_2x_1-a_1y_1-(a_2x_3-a_1y_3)}{\sqrt{a_2^2+a_1^2}}$

$$\tau=\frac{a_1(x_3-x_1)+a_2(y_3-y_1)}{a_2(x_1-x_3)-a_1(y_1-y_3)}$$

$$=\frac{a_1\left(\dfrac{x_3-x_1}{y_3-y_1}\right)+a_2}{a_2-a_1\left(\dfrac{x_1-x_3}{y_1-y_3}\right)}$$

設 L_2 直線用 $x+iy+\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1-y_2}=0$ 則 $i=-\left(\dfrac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\right)$

故 $\tau=\dfrac{-a_1i+a_2}{a_1+a_2i}=-i$

設 L_3 直線用 $x-iy+\dfrac{x_1y_3-x_3y_1}{y_1-y_3}=0$ 則 $i=\left(\dfrac{x_1-x_3}{y_1-y_3}\right)$

得 $\tau=\dfrac{a_1i+a_2}{a_1-a_2i}=i$

但設 L_1 直線用 $x+iy+k_1=0$

則 $a_1=1$，$a_2=i$

同時 L_1 直線用 $x+iy+k_1=0$ 與 L_1 同方向

則　$\tau=\frac{-i+i}{1+i\cdot i}=\frac{0}{0}$爲不定式，

又設 L_1 直線用 $a_1=1$，$a_2=i$

而 L_2 直線用 $x-iy+1=0$

則　$\tau=\frac{i+i}{1-i\cdot i}=i$

總之，同歸線 L_2 方向 i 與任意直線之 $\tau=-i$，L 方向 $-i$ 與任意直線之 $\tau=i$

〔在實數有大小可比較複素數則無法比較大小〕

習　　　題

1.　應用距離公式直接證明一同歸線上兩限定點之距離爲零，設其同歸線之線坡比爲 $-i$

2.　於直線 $x+y+2=0$ 上求其點至原點之距離爲零者，

3.　限定直線 $a_1x+a_2y+a_3=0$ 爲同歸線之充要條件，乃爲 $a_1^2+a_2^2=0$

4.　普通四邊形各邊爲同歸線，各二者爲同方向，則其兩對角線互相垂直互相平分，

其特殊情況，已知一對頂爲共軛數（2,3i）與

(2, −3i)，用以證明其定理，

5. 兩點互爲共軛虛點則兩點間距離爲實數爲負數，

6. 兩直線互爲共軛虛直線决不能互相垂直，

7. 求証於複素數平面上 Pythagoras 定理有効用，

8. 兩虛點但連一動點，動點上之角常爲直角，又連兩虛點爲一同歸線，求動點之軌跡、

6. Laguerre 角之定義

剛體運動羣，對於兩點之無論爲實爲虛，其間距離平方爲不變式，然則零距離之兩點在於一同歸線上者，經用剛體運動所得兩點亦爲零距離，於是所得兩點亦在於某同歸線，是以同歸線經用剛體運動仍爲一同歸線，

圓周上無窮遠點雖經用剛體運動然未嘗變移，

剛體運動羣普通式如次，

$$\rho x_1' = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta + a x_3$$

$$\rho x_2' = x_1\sin\theta + x_2\cos\theta + b x_3$$

$$\rho x_3' = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x_3$$

設將圓周上無窮遠點 I；(1, −i, 0) 經用剛體運動，則得 $x_3' = 0$

$$\rho x_1' = \cos\theta + i\sin\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)(1)$$

$$\rho x_2' = \sin\theta - i\cos\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(-i)$$

則以 ρ 爲任意常數，令爲 $(\cos\theta + i\sin\theta)$

故 $x_1' = 1,\quad x_2' = -i,\quad x_3' = 0$ 即是I：$(1, -i, 0)$

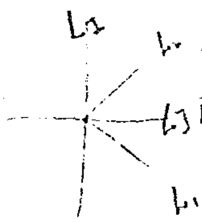
設有限定直線 $(x - x_0) - i(y - y_0) = 0$

經用剛體運動得 $(x' - x_0') - i(y' - y_0') = 0$

總之得次述定理，

（定理一） 經用剛體運動圓周上之無窮遠點不曾變移，經用剛體運動同歸線乃至爲同方向之同歸線

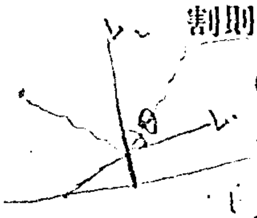
今有直線束爲兩限定直線 L_1, L_2 及兩同歸線 L_I, L_J 相交於 P 者所組成，經用剛體運動得直線束於 P′ 及其直線 L_1', L_2' 與 L_I', L_J' 前後叉比保持不變顯而易見，



即 $(L_1'L_2', L_I'L_J') = (L_1L_2 L_IL_J)$

因 L_I 與 L_J 決不平行，其餘各對直線亦不平行，

（定理二） 兩個非同歸線於其交點爲兩同歸線所分割則其直線束經用剛體運動群之變換，叉比保持不變



(1) $\gamma = (L_1L_2, L_IL_J)$

令 L_1 之線坡比爲 λ_1 又 L_2 之線坡比爲 λ_2

又 L_I 之線坡比爲 $-i$ 又 L_J 之線坡比爲 i

$$\gamma = \frac{(-i-\lambda_1)(i-\lambda_2)}{(-i-\lambda_2)(i-\lambda_1)} = \frac{(1+\lambda_1\lambda_2)+i(\lambda_2-\lambda_1)}{(1+\lambda_1\lambda_2)-i(\lambda_2-\lambda_1)}$$

$$(11) = \frac{1+\frac{i(\lambda_2-\lambda_1)}{1+\lambda_1\lambda_2}}{1-\frac{i(\lambda_2-\lambda_1)}{1+\lambda_1\lambda_2}}$$

但　$\tan\theta=\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$

故　$\gamma=\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$

(2)　$\tan\theta=\dfrac{\gamma-1}{i(\gamma+1)}$

再與第5節之(3)式比較

$$\tan\theta=\frac{e^{2\theta i}-1}{i(e^{2\theta i}+1)}$$

(3)　$\gamma=e^{2\theta i}$　即　$\theta=\dfrac{1}{2i}\log\gamma$　$=\dfrac{1}{2i}\log(L_1L_2,\ L_IL_J)$

(定理三)　若 L_1 與 L_2 爲兩限定直線但非同歸線於一限定點相交之交角 θ 以次式表示之，

$$\tan\theta=\frac{\gamma-1}{i(\gamma+1)}\text{或}\ \theta=\frac{1}{2i}\log\gamma$$

式中 $\gamma=(L_1L_2,\ L_IL_J)$

若 L_1 與 L_2 垂直則 $\gamma=-1$。其逆亦成立。

(定理四)　兩限定直線之非同歸線者相交成直角之充要條件，乃其兩直線於其交點爲兩向同歸線分割成調和分割。

此定理啟示於射影幾何角之定義，及其直交叉關係於調和分割，乃計量幾何與射影幾何最要關鍵也。

習　　題

1. 由剛體運動將一同歸線之有線坡比 i 者移至一同歸線用變換式直接證明之，

2. 綜合應用完全四邊形之調和分割性質及 Laguerr 之直角定義証明第 5 節習題 4 之普通情况，

7. 射影幾何中之計量關係

既知於剛體運動兩個之圓周無窮遠點各不變移，則 $x:(1,-i,0)$ 乃為 $x':(1,-i,0)$

而 $x:(1,i,0)$ 乃為 $x';(1,i,0)$

玆檢驗其於剛體運動外，更於何種較普遍之條件下，適合於普通變換式之相稱式，

$$(1)\qquad \begin{aligned} \rho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \qquad |a_{ij}| \neq 0 \\ \rho x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

先以 $x_3=0$ 且 $x_3'=0$

則 $a_{31}=a_{32}=0$ 且 $a_{33}\neq 0$

以 a_{33} 除各系數，並令 $\sigma=\frac{\rho}{a_{33}}$ 又 $a_j=\frac{a_{1j}}{a_{33}}$ 又 $b_j=\frac{a_{2j}}{a_{33}}$

(2)
$$\begin{aligned}\sigma x_1'&=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\\ \sigma x_2'&=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\\ \sigma x_3'&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x_3\end{aligned}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$$

因用 (2) 令 I 爲 I 得 σ_1, 又令 J 爲 J 得 σ_2

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=a_1-ia_2,\\ -i\sigma_1&=b_1-ib_2,\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}\sigma_2&=a_1+ia_2\\ i\sigma_2&=b_1+ib_2\end{aligned}\right\}$$

消 σ_1 得 $ia_1+a_2+b_1-ib_2=0$

消 σ_2 得 $-ia_1+a_2+b_1+ib_2=0$

故 $a_2=-b_1,\quad b_2=a_1$

將 (2) 式化成非齊次座標，

(3)
$$\left.\begin{aligned}x'&=a_1x-b_1y+a_3\\ y'&=b_1x+a_1y+b_3\end{aligned}\right\}\qquad \Delta=a_1^2+b_1^2\neq 0$$

玆因 $a_1^2+b_1^2\neq 0$，特令 $a_1^2+b_1^2=\gamma^2$ 爲實數方

$$a_1=\gamma\cos\theta\qquad a_3=\gamma a$$
$$b_1=\gamma\sin\theta\qquad b_3=\gamma b$$

故 (3) 式得書作

(4) $x' = \gamma(x\cos\theta - y\sin\theta + a)$

$\Delta = \gamma^2,\ \gamma > 0$

$y' = \gamma(x\sin\theta + y\cos\theta + b)$

可知其爲相似變換群參看第七章末習題 1,

設 (5) $\gamma = 1$ 則爲剛體運動羣，

(定理一) 相似變換羣乃爲相稱變換式之將圓周上無窮遠點兩個各不變移者，

相對不變式

應用 (4) 將兩點 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 變換爲 (x'_1,y'_1), (x'_2,y'_2)

$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2=\gamma^2[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]$

表示圖形經用 (4) 變換其距離前後之關係，此以常有任意定數 γ 倍其原距離，故稱之爲相對不變式，

如 $(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

則表示距離決無變化故又稱爲絕對不變式，

(定理二) 剛體運動乃爲相稱變換式之將圓周上無窮遠點兩個各不變移，並任意兩限定點間之距離平方常保持其絕對不變式，

相稱變換羣表示射影幾何，相稱變換羣之特殊情況，有分羣爲相似變換羣，相似變換群之特殊情況，有分群爲剛體運動羣，故剛體運動羣爲相稱變換羣分群之分

羣，但於普通簡單計量幾何，只採用剛體運動；如於 Euclid 幾何，則圖形大小形狀經任何運動性質不變，是即簡單之計量幾何，而只適用剛體運動羣者，故 Euclid 幾何爲射影幾何之部下幾何之一種。

習　　題

決定相稱變換羣而將兩實點 (1,1,0),(1,−1,0) 各不變移之變換式，並證明其任意兩點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 有相對不變式 $(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2$，

8　圓錐曲線上之應用

次式實係數中 A,B,C 不俱爲零，表示圓錐曲線

(1)　$Ax_1^2+Bx_1x_2+Cx_2^2+Dx_1x_3+Ex_2x_3+Fx_3^2=0$

判別式 Δ 爲零，則其圓錐曲線爲可分解，

$\Delta=F(4AC-B^2)+BDE-AE^2-CD^2$

若　$B^2-4AC<0$ 則其曲線爲橢圓，

若　$B^2-4AC=0$ 則其曲線爲拋物線，

若　$B^2-4AC>0$ 則其曲線爲雙曲線，

橢圓時，(1) 可化作

$$(2)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

特就其可分解之二直線論之，

$$(3)\ \frac{x}{a}+i\frac{y}{b}=0,\quad \frac{x}{a}-i\frac{y}{b}=0$$

爲互相共軛之兩虛線相交者，

拋物線時，(1) 可化作

$$y^2=2mx \text{ 及 } y^2=k$$

其可分解之二直線爲互相平行或兩實線，或兩實線重合，或互爲共軛虛線，由 k 之值定之，

雙曲線時，(1) 可化作

$$(4)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

其可分解之二直線爲相交之二實線，

總之，得次述定理，

(定理一) 圓錐曲線可分解之充要條件，乃其曲線爲二直線或重合之二直線所組成，

4 圓錐曲線與無窮遠線之關係

曲線 (1) 與無窮遠線 $x_3=0$ 相交，則得

$$Ax_1^2+Bx_1x_3+Cx_3^2=0$$

如 $B^2-4AC<0$ 其交點爲互相共軛之兩虛點，即兩無窮遠虛點

如　$B^2-4AC=0$　其交點爲兩實點重合，即一無窮遠點，

如　$B^2-4AC>0$ 其交點爲兩實點，即兩無窮遠點，

總得次述定理，

（定理二）　圓錐曲線之爲橢圓，拋物線，雙曲線，乃依照其與無窮遠線相交交點爲兩共軛虛點，爲兩實點重合，爲兩實點之各無窮遠點而判定之，

繼此，就圓錐曲線之未分解者論之，

（定理三）　拋物線爲無窮遠線切於其主軸方向之無窮遠點，

例如　$y^2=2mx$ 即 $x_2{}^3=2mx_1x_3$

設爲一直線切於 (x_0,y_0) 即 $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ 切線爲

$$y_0y=m(x+x_0) \text{ 即 } \gamma_2x_2=m(\gamma_3x_1+\gamma_1x_3)$$

當其切點在其拋物線上而又爲其主軸上之無窮遠點則其切線爲 $0x_2=m(0x_1+1.x_3)$ 即 $x_3=0$.

漸近線之新定義

（定義）　曲線爲非無窮遠線切於無窮遠點，其切線稱爲曲線之漸近線，

拋物線無漸近線，橢圓實虛，皆有兩共軛虛線爲漸近線交於其中心，圓之漸近線爲兩同歸線相交於中心者

雙曲線之漸近線爲自其中心所作之兩切線。

橢圓與無窮遠線相交於一對之共軛虛點，如爲圓周上無窮遠點，則其橢圓爲圓。

習　　題

1. 圓錐曲線（1）分解判別式求其爲

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{vmatrix}$$

2. 曲線〔1〕上之點（$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$）作切線則其方程式爲

$$A\gamma_1x_1+\frac{B}{2}(\gamma_2x_1+\gamma_1x_2)+B\gamma_2x_2$$

$$+\frac{D}{2}(\gamma_3x_1+\gamma_1x_3)+\frac{E}{2}(\gamma_3x_2+\gamma_2x_3)+F\gamma_3x_3=0$$

並與普通非齊次座標之切線方程式比較之，

3. 求次列拋物線上之無窮遠點並其主軸之方向，

$$x^2-4xy+4y^2+2x+y-6=0$$

4. 雙曲線如次式其上無窮遠點之切線如何，

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

5. 實虛橢圓如次式求其漸近線，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

6. 求次列雙曲線之漸近線並其中心之座標，

$$x^2-xy-2y^2-x+5y-3=0,$$

9. 切線爲同歸線　焦點及準線

設已知切線線坡比爲λ 則對拋物線只有一切線存在，

(1)　$y^2=2mx$

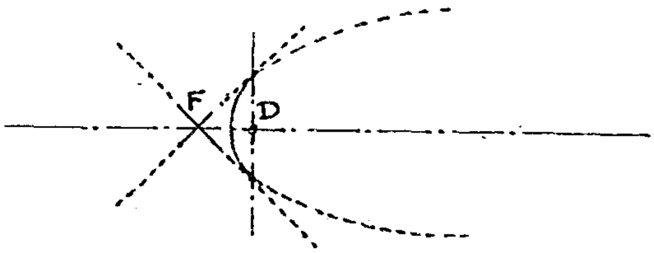
則切線爲　$hy=\lambda x+\dfrac{m}{2\lambda}$

設有兩同歸線線坡比爲 i 與 $-i$, 兩切線爲

(2)　$y=ix+\dfrac{m}{2i},\quad y=-ix-\dfrac{m}{2i}.$

兩切線之交點爲 $(\frac{m}{2},0)$, 是乃拋物線之焦點也，

兩切線之切點皆爲 $(-\frac{m}{2},0)$, 此是拋物線上之切點，但又爲拋物線準線上之一點，即準線與主軸之交點也，茲作圖如次聊示其意義，



第三圖

（定理一） 拋物線有兩同歸線爲切線，其兩線之交點爲拋物線之焦點，其兩切點則在拋物線之準線上，

再設已知線玻比 λ 之直線切橢圓則可得兩切線存在，設橢圓爲

(5)　　$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　$a>b$

則切線爲　$y=\lambda x\mp\sqrt{a^2\lambda^2+b^2}$

設 $\lambda=\pm i$　則令 $\sqrt{a^2\lambda^2+b^2}=ci$

於是得四切線（4）

(a)　$y=i(x-c)$

(b)　$y=i(x+c)$

(c)　$y=-i(x-c)$

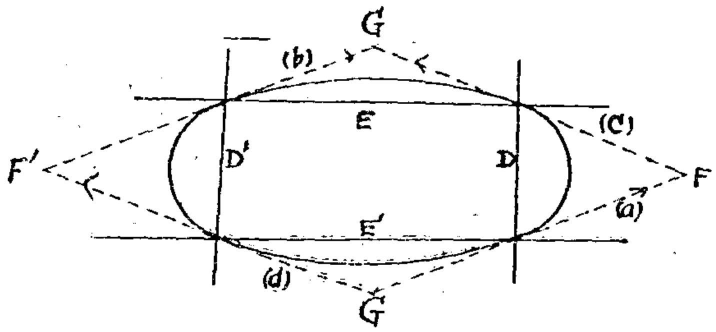
(d)　$y=-i(x-c)$

今設普通四邊形之兩頂點在 X 軸上其餘兩頂在 Y 軸上但其四邊爲四同歸線則四頂爲 F；(c,o), F′；(−c,o)

與 G；(o ci) G′；(o,−ci)，前於第 5 節習題 4 知其對角線互相垂直且平分，

(補題)　如曲線 (3) 之切線截兩軸於 A,B 長，則切點之座標爲 $\left(\frac{a^2}{A}, \frac{b^2}{A}\right)$.

今將各關係作圖如次聊示其意義，



第四圖

圖中 (a) 於 F′G 截兩軸各長 c, −ci 切點爲$\left(\frac{a^2}{c}, -\frac{b^2}{ci}\right)$

同樣得 (b),(c),(d) 之切點 $\left(-\frac{a^2}{c}, \frac{b^2}{ci}\right)$, $\left(\frac{a^2}{c}, \frac{b^2}{ci}\right)$,

$\left(-\frac{a^3}{c},\ -\frac{b^3}{ci}\right)$

連 (a),(c) 之切點得直線 D：$x=\frac{a^3}{c}$ 對應於 F

連 (b),(d) 之切點得 D′：$x=-\frac{a^3}{c}$ 對應於 F′

同法對應於 G 所連 (b (c) 切點之 E：$y=\frac{b^3}{ci}$

對應於 G′、所連 (d),(a) 切點之 E′：$y=-\frac{b^3}{ci}$

凡四直線 D,D′,E,E′ 爲接於橢圓之矩形，

普通稱 F,F′ 爲橢圓之焦點，對應之 D,D′ 爲其準線，同樣 G,G′ 亦得稱爲焦點，對應之 E,E′ 亦稱準線，

（定理二） 實橢圓有四同歸線爲其切線而兩者各同向，各同歸線切線之限定交點爲其焦點，通過一焦點之兩同歸線切線之兩切點在於對應焦點之準線上，

再設於實橢圓上取任意點 P 則有次列性質一如慣例，

$$\pm FP\pm F'P=2a,\ \frac{FP^2}{PM^2}=e^2\qquad e^2=\frac{c^2}{a^2}$$

$$\pm GP \pm G'P = 2b, \quad \frac{GP^2}{PN^2} = e'^2 \qquad e'^2 = -\frac{c^2}{b^2}$$

式中 M 爲自 P 向準線 D 作垂直線之垂足，同樣自 P 向 D′ 得垂足 M′，同樣 N 爲自 P 向 E 準線之垂足，同樣自 P 向 E′ 得垂足 N′

習　　題

1．計算　$\pm GP \pm G'P = 2b$．$\left(\frac{GP}{PN}\right)^2 = -\frac{c^2}{b^2}$．

並証明 $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$

2．檢討雙曲線之以同歸線爲切線及其焦點準線各關係，

3．檢討虛橢圓之以同歸線爲切線及其焦點準線各關係，

4．決定次列拋物線之焦點，

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$$

5．求次列雙曲線之焦點，

$$6x^2 - 24xy - y^2 - 150 = 0$$

第九章 一次元射影幾何

1. 一次元計量座標 點列點座標

在實直線 L 上取定點 O，順其定方向，用單位長，以決定點列中定點 P 之非齊次座標 x.

則 $x = OP$

與此對應之齊次座標 (x_1, x_2) 必得

$$\frac{x_1}{x_2} = x \qquad x_2 \neq 0$$

設 P 於 L 上順其任一方向無限進行，則 x 至爲無定，設 x 爲無定，則 P 於 L 上爲無窮遠點。

第 一 圖

故將 L 上之無窮遠點齊次座標用 (1,0) 表示之，更或用 $(\rho, 0)$，$\rho \neq 0$.

於是 L 上之任意點皆可應用異於 (0,0) 之一對數字 (x_1, x_2) 以表示其齊次座標。

線束線座標

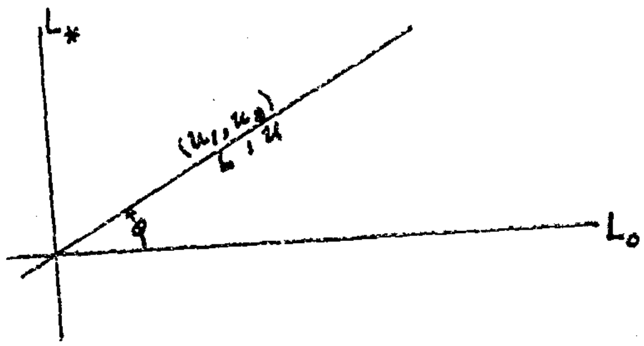
設 L_0 爲線束中之定直線，繞其頂點自 L_0 正向計角度，以決定線束中定直線 L 之非齊次座標 u

則　　　　$u=\tan\theta$

與此對應之齊次座標 (u_1, u_2) 必得

$$\frac{u_1}{u_2}=u \qquad u_2 \neq 0$$

特設 L_* 與 L_o 成直角，其時之 u 乃至爲無定，設 u爲無定，則於其線束中得與 L_o 成直角之 L_*



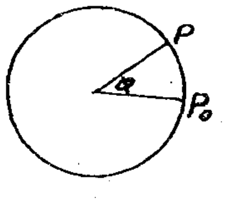
第　二　圖

故其線束中與 L_o 成直角之 L_*^1 齊次座標用 $(1,0)$ 表示之， 更或用 $(\rho,0)$, $\rho \neq 0$

於是其線束中任意直線皆可應用異於 $(0,0)$ 之一對數字 (u_1,u_2) 以表示其齊次座標。

概括空間直線之閉連續

今於第三圖設 ϕ 角自 0 至 2π 增進而 P 完成圓。



第三圖

則圓周上各點由 ϕ 定之。

而 $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$

惟 P_0 對應於 0 及 2π

實數 ϕ 之凡在於其區間者 $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$

得其組之數爲連續　因之圓周上之點亦爲連續。

圓周上之點除 P_0 皆可與 ϕ 對應時。

則 $0 < \phi < 2\pi$

仍組成其連續，特於此稱爲開連續。

故全圓周上之點包含 P_0 者稱爲閉連續。

第二圖線束中之 θ 所在區間

乃 $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$.

惟 L_* 對應於 $-\frac{\pi}{2}$ 及 $\frac{\pi}{2}$，全線束直線成閉連續，

若線束中一直線除外，所餘成開連續。

倘將 L_* 除外則其對應之開連續，θ 區間

爲 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

如應用座標 u 之值

則 $-\infty < u < \infty$

第一圖點列將無窮遠點除外，所餘開連續

則 $-\infty < x < \infty$

設於此加入其無窮遠點全點列成閉連續矣。

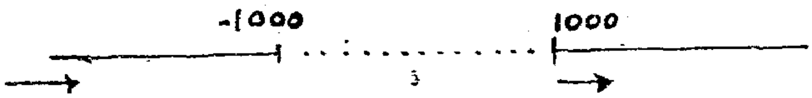
圖與線束，由幾何直覺自明悉其爲閉連續，就直線上之點觀察之，雖或似不如是，但用解析證明其連續實乃經過無窮遠點者。

因如取齊次座標之 x_2 於閉連續區間。

設　$1 \geqq x_2 \geqq -1$

則由 $(1000, x_2)$ 所表示之數 x 亦成連續，是乃齊次座標在概括空間直線之一部分而具其連續性者。

將此情況於第四圖述之。由 $x=1000$ 連續向右以經過無窮遠點轉負連續自左而至 $x=-1000$

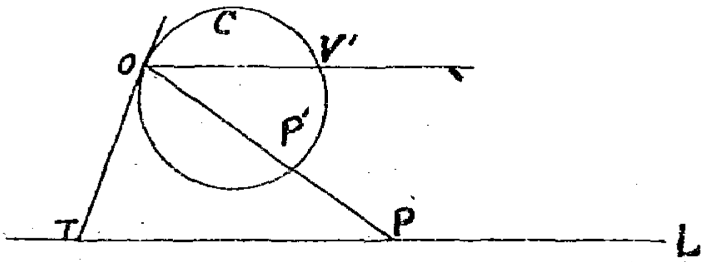


第　四　圖

圖中實線表示 x 並其連續性。

總之，概括空間之直線爲點之閉連續。

更將此意義用第五圖釋之，



第　五　圖

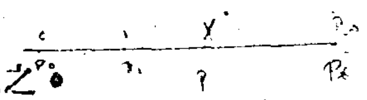
自圓 C 上定點 O 向直線 L 作射影則以一對一凡圖 C 上一點 P′ 對應於 L 上 P. 特於 C 圓上之 O 以直線 L 上之 T 對應之，圓 C 上之 V′ 乃直線 L 上無窮遠點以對應之，既知 C 圓爲點之閉連續故直線 L 亦爲點之閉連續。

圖中 OV′ ∥ L.

2. 點列點之射影座標

(定義) 點列上三定點 P_*, P_o, P_1 又設 P 爲點列上之任意點並以 x 表示 P 之射影座標。

則 $x=(P_*P_o, P_1P)$



每一 P 點有唯一之 x 對應之。

特於 P_o 座標爲 0, 又 P_1 座標爲 1

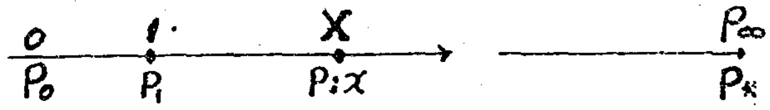
而 P_* 座標無定，蓋 P 之 x 無定於 $P \to P_*$.

三點 P_*, P_o, P_1 稱爲射影座標之基點。

(定理一) 直線 L 上各點計量座標乃射影座標之特殊情況，

蓋將無定之 P_* 於計量幾何視作無窮遠點之定點故。

茲於直線 L 上計量幾何原點 O 當於 P_o, 單位 1 當於 P_1, 任意點 P 之計量座標 X 而射影座標 x.



第　六　圖

計量幾何

$$X = \frac{P_0P}{P_0P_1}$$

射影座標基點 P_* 爲 P_∞ 時.

$$x = (P_\infty P_0,\ P_1P) \to \frac{P_0P}{P_0P_1}$$

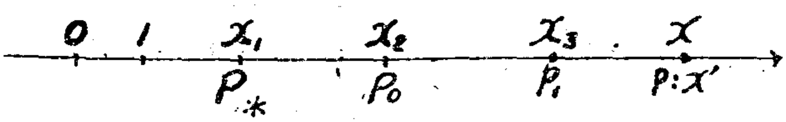
故 $X = x$.

但謂計量座標可用射影座標之特例表示之。

座標之變換

在一直線 L 上 P 於不同兩系計量座標以 x 表之。射影座標以 x′ 表之。

第　七　圖



射影座標　$x' = (P_*P_0, P_1P)$

由計量座標求得（I）式，

$$(P_*P_0P_1P)=\frac{(x_3-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_2)(x-x_1)}=x'$$

既設 x_1，x_2，x_3 爲計量幾何之定値，故上式化作

$$(1)\qquad x'=\frac{a_1x+a_2}{b_1x+b_2}\qquad a_1b_2-a_2b_1\neq 0$$

上式右方所示爲 x_1，x_2，x_3 各不可重合。

上式爲線形變換前嘗言之，故自計量座標變換爲射影座標，或自射影座標變換爲計量座標，用線形變換。

（定理二）自一射影座標變換至另一射影座標其解析表示法應用線形變換式。

設 x 與 x' 爲其兩系對同點之射影座標而以 $\bar{x}$ 表示同點計量座標，則自 x 至 $\bar{x}$ 又自 $\bar{x}$ 至 x' 皆用線形變換，總之，自 x 至 x' 應用線形變換式爲合理。

射影座標之性質

設直線上四點 Q_1，Q_2，Q_3，Q_4 計量座標 x_1，x_2，x_3，x_4 由計量座標所得交比

$$(2)\qquad (Q_1Q_2,Q_3Q_4)=\frac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_4-x_1)}$$

設計量座標各 x 變換爲射影座標 x_1'，x_2'，x_3'，x_4'

用 $x_i'=(P_* P_0,\ P_1 Q_i)=\dfrac{(\xi_3-\xi_1)(x_i-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_2)(x_i-\xi_1)}=\dfrac{a_1x_i+a_2}{b_1x_i+b_2}$

此於第七章第 8 節可得

$$\frac{(x'_3-x'_1)(x_4'-x_2')}{(x_3'-x_2')(x_4'-x_1')}=\frac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_4-x_1)}$$

故用射影座標得其交比

(3)　$(Q_1 Q_2,\ Q_3 Q_4)=\dfrac{(x_3'-x_1')(x_4'-x_2')}{(x_3'-x_2')(x_4'-x_1')}$

（定理三）直線上四點之交比應用計量座標之表示與應用其射影座標之表示相同。

（定理四）直線 L 上之點經用射影變換爲直線 L′ 上之點，則同於應用 L 上與 L′ 上點之射影座標以得其座標之線形變換。

逆之，兩直線上各點射影座標之線形變換表示兩直線上各點之射影變換。

兩線形變換之演繹

計量幾何之方程式

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta+a,\quad y'=x\sin\theta+y\cos\theta+b$$

表示平面上之剛體運動亦表示兩座標系之變換。所謂剛體運動乃其座標系統始終固定而圖形位置移徙者。若就兩座標系之變換論之，則圖形位置始終固定而由

不同之原點所建座標系統以測量之新舊座標也。

今取線形變換（1）式察之，亦具兩意義 或謂之爲在其直線上之射影變換，乃圖形之變動，或謂之爲直線上一系統之射影座標變換爲另一系統之射影座標．

茲再証明凡線形變換爲射影座標之變換。

設應用（1）之線形變換將 x 變換爲 x' 則 x' 爲射影座標，是即 $x_1\to x_1'$, $x_2\to x_2'$, x_3-x_3' 由其線形變換得次式，

$$\frac{(x_3'-x_1')(x'-x_2')}{(x_3'-x_2')(x'-x_1')}=\frac{(x_3-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_2)(x-x_1)}$$

特於 $x_1'=\infty$, $x_2'=0$, $x_3'=1$

則 $$\frac{(1-x_1')}{(x'-x_1')}x'=\frac{(x_3-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_2)(x-x_1)}$$

極限 $$x'=\frac{(x_3-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_2)(x-x_1)}$$

上式 x' 乃以 x 據基點 x_1, x_2, x_3 推得之射影座標，即前（1）式。射影直線之自然性質

建立射影座標系，可隨意將 P_* 視作無定而以之爲計量幾何之無窮遠點。據此變換計量幾何之無窮遠點亦隨之而非固定唯一之點，亦與其直線上任意點無稍異矣。

總之，射影幾何之直線無例外點而成閉連續。

概括空間之直線成閉連續而當斟酌者一點。

齊次射影座標隨意取 P_* 以 $(\rho,0)$，$\rho\neq 0$ 表示之。

習　　題

1. 齊次座標系之變換爲次列線形變換，

$\rho x_1'=2x_1-4x_2$，　$\rho x_2'=x_1-x_2$

求各系之基點所當於他系之座標。

2. 將射影座標 x 變換至射影座標 x' 新基點之 P_*'，P_0'，P_1' 各當於 $x=3$，$x=-2$，$x=5$ 求其線形變換。

3. 線束線之射影座標

線束中任意直線 L_1 之射影座標 u

又於其線束中取 L_*，L_0，L_1 名爲基線。

則　$u=(L_*L_0,L_1L)$

齊次座標則爲 (u_1,u_2) 而 $\frac{u}{u_2}=u$

特於 L_* 齊次座標用 $(1,0)$ 或 $(\rho,0)$，$\rho\neq 0$

在同線束中直定兩線之計量座標變換爲射影座標乃是線形變換，其逆射影座標變換爲計量座標亦是線形變換。故設 u 與 u' 爲兩系對同直線之射影座標而

以 $\tilde{u}$ 表示同直線之計量座標，則自 u 至 $\tilde{u}$ 又自 $\tilde{u}$ 至 u'

皆爲線形變換，總之，自 u 至 u' 爲線形變換。

射影座標應用之例

設表示點列或線束之兩原素爲 a 與 b

則於 a 外之點或直線凡屬於所設點列或線束者皆以 $\mu a+b$ 座標決定之。而於 a 外之原素則皆以一對一之關係得不同之 μ，於是 μ 爲其點列或線束中任意原素之座標矣。

結果，μ 爲射影座標

蓋取四原素 $\mu=\infty$、$\mu=0$，$\mu=1$，$\mu=\mu$

則其四座標 a，b，a+b，$\mu a+b$ 成交比 μ

同理將 μ 化爲 k，l 則於 ka+lb 亦知（k,l）爲射影座標。

習　　題

1．用幾何圖形表示線束中直線之計量座標爲射影座標之特例。

2．敘述第 2 節定理二，三，四之雙對定理並求證明。

4．射影對應

前將點列線束分別論其關係，今以其俱屬於一次元

基本圖形總爲次述之定義及定理。

（定義）兩個一次元基本圖形，如其一個中之原素與他一個中之原素成立一對一對應而各交比相等，乃爲射影對應。

（定理一）兩個一次元基本圖形將其一個中三原素與他一個中三原素一一對立，其間存在唯一之射影變換。

（定理二）一個一次元基本圖形至他一個一次元基本圖形之射影變換同於兩個基本圖形射影座標之線形變換。

5　複素射影幾何

一次元射影座標設爲複素數 $\omega=\omega'+i\omega''$

由實數與虛數及帶虛數以組成複素一次元圖形。

用非齊次座標

$$(1)\qquad (E_1E_2,E_3E_4)=\frac{(\omega_3-\omega_1)(\omega_4-\omega_2)}{(\omega_3-\omega_2)(\omega_4-\omega_1)}$$

上式之意義與實數之交比無大殊異，其所自來亦爲

$$\omega=(E_*E_0,E_1E)$$

因其交比雖適用於虛數帶虛數及實數，而特有只包含實數之情況且其基數如次

$$\omega_1=\infty,\ \omega_2=0,\ \omega_3=1,\ \omega_4=\omega$$

仍得 ω 之爲虛數帶虛數或實數不易其性質。

習 題

1. 一虛數與其共軛數之比爲實數必爲-1.

交比若爲兩實數及共軛兩虛數而互相間隔以組成之實數，則惟有其四原素成調和分割。

2. 四複素原素所成二十四個交比中，若有一個交比爲$x^2-x+1=0$ 之根，則十二個交比俱等於其根，所餘十二個交比俱等於另一根，特於此情況稱之爲平等調和組。

6. 一次元射影變換之固定原素及不變式

設一次元圖形之齊次射影座標爲 $(\omega_1,\ \omega_2)$，就實射影變換至爲原一次元圖形之上以論之。

$$(1)\qquad \begin{aligned}\rho\omega_1'&=a_1\omega_1+a_2\omega_2\\ \rho\omega_2'&=b_1\omega_1+b_2\omega_2\end{aligned}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$$

式中 $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ 爲實數常數。

變換式（1）能將某原素仍還回某原素，則是由其式推知原素有重合者或名之爲固定原素，或名之爲重原素。

即 $$\frac{\omega_1'}{\omega_2'}=\frac{a_1\omega_1+a_2\omega_2}{b_1\omega_1+b_2\omega_2}$$

(2) $$b_1\omega_1^2+(b_2-a_1)\omega_1\omega_2-a_2\omega_2^2=0$$

若 $b_1=b_2-a_1=a_2=0$ 則 (1) 表示左右重合，原素皆爲固定，乃屬合一變換式 I 矣。

茲就其不爲合一變換式論之，於 (2) 作判別式

$$D=(b_2-a_1)^2+4a_2b_1=(a_1+b_2)^2-4\Delta$$

(定理一) 線形變換式之非I者存在兩個固定原素，

存在兩個不同實原素固定，$D>0$ 稱雙曲線形變換。

存在兩個相等實原素固定，$D=0$ 稱拋物線形變換。

存在兩個共軛虛原素固定，$D<0$ 稱橢圓線形變換。

非拋物線形變換

(定理二) 非拋物線形變換由其兩個重原素及一對之對應原素唯一義以決定一切原素之對應變換。

設 E_1, E_2 爲兩個重原素，E_3, E_3' 爲一對之對應原素其他一對用以求變換之任意對應原素爲 E, E'

則 $(E_1E_2, E_3'E')=(E_1E_2, E_3E)$. 再用各非齊次座標

即
$$\frac{(\omega_3'-\omega_1)(\omega'-\omega_3)}{(\omega_3'-\omega_3)(\omega'-\omega_1)}=\frac{(\omega_3-\omega_1)(\omega-\omega_3)}{(\omega_3-\omega_3)(\omega-\omega_1)}$$

令
$$\frac{(\omega-\omega_1)\ (\omega'-\omega_2)}{(\omega-\omega_3)\ (\omega'-\omega_1)}=\frac{(\omega_3-\omega_1)(\omega_3'-\omega_3)}{(\omega_3-\omega_2)\ (\omega_3'-\omega_1)}=k$$

上式右方皆爲已知數，故令爲 k，但 $k\neq0,1$

故上式左方隨之亦爲 k，簡記之爲

(3)　　$(E_1\ E_2,\ E\ E')=k$　　$k\neq0,1$

此式稱爲非拋物變換交比不變式，或簡稱不變式。

（定理二）　兩原重原素與其任意一對之對應原素以所取順序組成交比乃是常數。

此意義以（3）表示之，但 $(E_2\ E_1,\ E\ E')=k'$ 或將 $E,\ E'$ 互換皆得常數，在（定理三）謂以所取順序者，以此之故。

再自
$$\frac{(\omega-\omega_1)(\omega'-\omega_2)}{(\omega-\omega_3)(\omega'-\omega_1)}=k$$

(4)
$$\frac{(\omega'-\omega_2)}{(\omega'-\omega_1)}=k\frac{(\omega-\omega_3)}{(\omega-\omega_1)}\qquad k\neq0,1$$

（定理四）　非拋物線形變換乃以兩個重原素用所取順序及其不變式唯一義以決定一切原素之對應變換。

雙曲線形變換標準式

設 $D>0$ 重原素各爲實，用齊次射影座標 E_1；(1,0) E_2；(0,1)

設 k 爲實數，則由 (4) 式 $\omega_1\to\infty$; $\omega_2=0$ 以得

(5)　$\omega'=k\omega$　$k\neq 0,1$

採取適當座標系統，任意雙曲線形變換皆可化爲(5)之標準式。

橢圓線形變換標準式

設 $D<0$ 重原素爲共軛兩虛，用非齊次座標 E_1 爲 i 又 E_2 爲 $-i$

設 k 爲實數。

(6a)　$$\frac{(\omega'+i)}{(\omega'-i)}=k\frac{(\omega+i)}{(\omega-i)}\qquad k\neq 0,1$$

(6b)　$$(1-k)(\omega\omega'+1)+i(1+k)(\omega-\omega')=0$$

則惟 $k=-1$，得橢圓線形變換標準式 $\omega\omega'=-1$

拋物線形變換標準式

設 $D=0$ 則兩個重原素又重合，用齊次座標 (1,0) 代 E_1, E_2，並應用 (1) 式以求係數則　$\rho=a_1$
$0=b_1$

但 $D=(a_1-b_2)^2+4a_2b_1=0$ $\therefore a_1=b_2$

普通任意一對之對應原素則由 (1) 之線形變換表示之

故得

$$\rho\,\omega_1{}'=a_1\,\omega_1+a_2\,\omega_2$$
$$\rho\,\omega_2{}'=0\cdot\omega_1+a_1\,\omega_2$$

非齊次座標得 $\omega'=\omega+\frac{a_2}{a_1}$ 爲抛物變換標準式。省作

(7) $\omega'=\omega+C$

習 題

1. 求次列各變換式之各固定原素並其不變式.

(a) $\omega'=\dfrac{4\omega-2}{\omega+1}$ (b) $\omega'=-\dfrac{\omega+5}{\omega+1}$

2. 用 $\omega_1=1$, $\omega_2=-1$, 又 $k=2$ 求其非抛物線形變換之方程式。

3. 用 $\omega_1=1+i$, $\omega_2=1-i$, 又 $k=i$ 求其非抛物線形變換之方程式。

4. 設 $\omega_1=-1$, $\omega_2=3$ 將 $\omega=1$ 變換至 $\omega'=0$ 求其非抛物線形變換方程式

5. 設於次列非抛物線形變換，存在 ω_1, ω_2 兩個固定

原素; (8) $\omega'=\dfrac{a_1\omega+a_2}{b_1\omega+b_2}$

лиш設不變式爲 $k=\dfrac{a_1\omega_1+b_2\omega_2}{b_2\omega_1+a_1\omega_2}$

則得 (9)　$k=\dfrac{a_1+b_2\mp\sqrt{(a_1+b_2)^2-4\Delta}}{a_1+b_2\pm\sqrt{(a_1+b_2)^2-4\Delta}}$

式中±依 ω_1，ω_2 所取符號而定。

6. 拋物線形變換之唯一重原素與任意 E 原素，得爲由 E 所變換之對應原素及由其變換而至 E 之原素分割以成調和分割。

7. 設線形變換重原素與任一 E 原素具 6 題性質者則是拋物線形變換。

7. 對合

非拋物線形變換之不變式皆可以 −1 表之。將 E 至 E′

(4)　$(E_1\,E_2,\ EE')=-1$

但於兩個重原素 E_1，E_2 亦同樣將 E′ 變至 E.

則 (4′)　$(E_1\,E_2,\ E'E)=-1$

是即於此線形變換，兩個重原素爲任意一對之對應原素分割成調和分割，且自 E 至 E′，自 E′ 至 E，互自爲逆。

(定義) 線形變換 T 之非 1 者而又互自爲逆，則

稱爲對合變換，凡對合變換必異於 I 而互自爲逆。

（定理一） 線形變換之非 I 者其爲對合變換之充要條件，乃其線形變換自乘而得合一變換式。

（定理二） 一次元射影變換其圓形爲對合變換之充要條件 乃是非拋物線形變換而不變式爲 -1.

取 $(E_1\ E_2,\ E\ E')=k,\ (E_1\ E_2,\ E'\ E)=k,\ k\neq 0,1$

則 $k=\dfrac{1}{k}$ $k^2=1$ 但 $k\neq 1$ $\therefore$ $k=-1$

拋物線形變換决非對合變換

設取拋物變換標準式 $\omega'=\omega+C$ 而 $C\neq 0$

故不能使之爲對合變換。

對合射影變換常簡稱爲對合 此後從其簡稱。

（定理三） 對合之在一次元圖形屬於非拋物線形變換而具 -1 爲不變式者 簡算其任意一對之對應原素只須用之分割兩個重原素以成調和分割。

各對之對應原素於此稱爲對合偶。而其一切原素全體又稱爲組成對合，或對合組。

（定理四） 對合爲其兩個之固定原素唯一義以决定之。

雙曲對合，乃 $k=-1$，由第 6 節之 (5) 標準式得

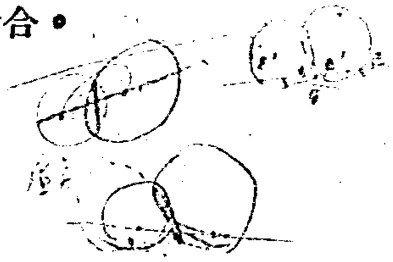
(2)　$\omega' = -\omega$　互自為逆用正，負負以等之。

橢圓對合，於 $k=-1$ 由第 6 節之(6b) 已得

(3)　$\omega\omega'+1=0$　互自為逆用互為倒數者附正負。

(定理五)　每兩對之對應原素於對合組中不相間隔者，為雙曲對合，其互相間隔者，為橢圓對合。

設兩對之對應原素為 E, E' 與 $\bar{E}$, $\bar{E}'$



將 $$(EE', \bar{E}\bar{E}') = \frac{(\bar{\omega}-\omega)(\bar{\omega}'-\omega')}{(\bar{\omega}-\omega')(\bar{\omega}'-\omega)}$$

用 (2) 雙曲對合得 $\left(\frac{\bar{\omega}-\omega}{\bar{\omega}+\omega}\right)^2>0$ 故兩對不間隔

用 (3) 橢圓對合得 $-\left(\frac{\bar{\omega}-\omega}{\bar{\omega}\omega+1}\right)^2<0$ 故兩對相間隔

(定理六)　線形變換 T 而將一對之原素能互換者即為對合。

設變換 T 為 A 至 A' 所表示者。則亦是 A' 至 A

當 T 將 E 至 E' 又將 E' 至 $\bar{E}$

則　$(AA', EE') = (A'A, E\bar{E}) = (AA', \bar{E}E')$

是即 $\bar{E}$ 與 E 一致，因其 AA', EE' 各自成立對合偶；其條件即屬對合。

（定理七） 只有唯一之對合，將兩對之對應原素中任一對互換之。$e\ldots\ldots e'\ldots\ldots\bar{e}\ldots\bar{e}'$

（定理八） 只有唯一之一對原素，能將任意兩對之原素俱分割成調和分割。

（推論） 唯一之一對原素將兩對不間隔原素分割成調和分割者為一對實原素，是即雙曲對合兩個重原素也

唯一之一對原素將兩對相間隔之原素分割成調和分割者為一對共軛虛原素，是即橢圓對合兩個重原素也。

習　　題

1. 求對合之方程式。

其兩個重原素非齊次座標為 $\omega=1$, $\omega=4$.

2. 求對合之方程式，

兩個重原素座標為 $\omega=1+i$, $\omega=1-i$

3. 證明 $\omega'=\dfrac{(4-3\omega)}{(2\omega+3)}$ 為對合。

4. 設將 $\omega=1$, $\omega=2$ 與 $\omega=0$, $\omega=4$ 互換，

求對合之方程式。

5. 將第 4 題各對原素俱分割成調和分割，求其一對原素之座標。

6. 將 $\omega=1$, $\omega=4$ 與 $\omega=0$, $\omega=2$ 俱分割成調和分割求其一對原素之座標。

7. 對合之用 (2) 與 (3) 表示者，將其 ω 視作計量座標之線坡比所示定線束之直線時，叙述其情況。

8. 對合之用 (3) 表示者，將其 ω 視作定直線上之計量座標時，叙述其情況。

9. 前第 6 節第 5 題 (8) 式所示線形變換為對合之充要條件乃 $_1+b_3=0$

8. 計量座標之對合　線束具限定頂點

對合線束為各對互相垂直之直線時，稱之為圓對合。其兩個重直線為其線束中之兩個同歸線，用計量座標線坡比表示其對合為 $u'u+1=0$

（定理一）　對合線束之非為圓對合者僅包含一對互相垂直之直線。

此對合所包含僅僅一對互相垂直之直線，乃為兩個重直線之分角線。反設對合中具兩對或兩對以上互相垂直之直線則自第 7 節之（定理七）推知其為圓對合矣。

點列在限定直線上

普通兩個重點不為直線上之無窮遠點，但於其對合無窮遠點所對應之對合偶點乃是一個限定點，特稱之為

對合中心。

用直線上之計量座標 x 以表其對合之方程式，

則普通 $x'=\frac{a_1x+a_2}{b_1x-a_1}$

此由於第 7 節第 9 題 $a_1+b_2=0$ 推得者。

並適用於 $x'\to\infty$, $x=\frac{a_1}{b_1}$ 又 $x'=\frac{a_1}{b_1}$, $x\to\infty$

若令 $a_1=0$ 即是對合中心為原點。

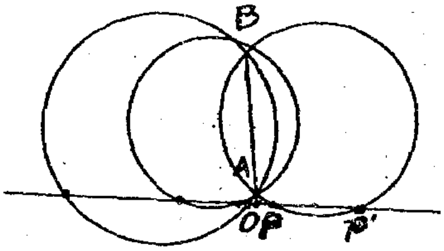
則 $b_1xx'=a_2$ 即 $x'x=c$, $c\neq0$

（定理二） 自對合中心向一對之對合偶點取距離，二者之積為常數。

特於無窮遠點為重點時，另一重點為限定點，則自其限定點之重點向任意一對之對合偶點得相等距離。因第七節之（2） $\omega'=-\omega$ 根據於第 6 節之（5）其兩個重點在計量座標，一個為無窮遠點一個為限定點。

對合之應用

設若干圓相結於 A,B 兩點成圓束，AB 直線上取 O 點如第八圖則由 O 作另一直線截各圓每兩點成雙曲對合偶點而以 O 為對合中心。



第　八　圖

可知　$OP \cdot OP' = OA \cdot OB$

$OO \cdot AB$ 爲常數，又 P, P' 與 P_1, P_1' 不間隔

用座標得　$xx' = c^2$　$c^2 = OA \cdot OB$

設 $x = \pm c$ 則其直線上得兩個重點。

設於 A, B 之間取一點作另一直線可得橢圓對合。

習　題

1. 對合線束之一對互相垂直之直線稱爲其對合之主對合偶線，若用 u 表示對於一個主對合偶線爲基線 $(u=0)$ 之線坡比，則對合方程式化爲標準式。

$u'u = c$, $c \neq 0$ 此於幾何成立何種定理。

2. 在計量幾何之平面上，通過原點之線束其對合重線爲 $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 0$ 則其對合之方程式以線坡比 λ 表示之時爲 $\lambda\lambda' = -\frac{B}{A}$，

3. 若 P_1, P_2 與 Q_1, Q_2 組成調和分割

則 P_1P_2 與 Q_1Q_2 各中點爲 P_1, P_2 與 Q_1, Q_2 所決定對合之對合偶點。

4. 求兩對之點不相間隔而成爲調和分割之作圖

5. 設有兩點 A, B 並直線 L 則切 L 而通過 A, B 有兩圓但 L 與 AB 交於 AB 延長線上。求作圖。

6. 設於第八圖中在 AB 線分中取 O 點作另一直線以交各圓每兩點得成對合偶點其情況如何。

9. 雙聯線形方式及二次方式

$$(1a)\quad c_1\omega_1\omega_1'+c_2\omega_1\omega_2'+c_3\omega_2\omega_1'+c_4\omega_2\omega_2'=0$$

$$c_1c_4-c_2c_3\neq0.$$

上 (1a) 方程式爲於 ω_1, ω_2 及 ω_1', ω_2' 各齊次線形方程式稱之爲非簡雙聯線形方式。與其對應之非齊次方程式爲

$$(1b)\quad c_1\omega\omega'+c_2\omega+c_3\omega'+c_4=0$$

二次方式乃代表一對原素者，

$$(2)\qquad a_{11}\omega_1^2+2a_{12}\omega_1\omega_2+a_{22}\omega_2^2=0\quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq0$$

若係數爲實數則原素爲實或共軛兩虛。

習　　題

1. 雙曲對合包括無限多之共軛虛原素對合偶，欄

個對合雖具重原素之共軛虛而無共軛虛原素對合偶，並求證兩個共軛虛原素不能將另有兩個共軛虛原素分割成調和分割．

2. 茲有兩個對合俱為同樣一次元方程式而各重原素分別不同則有一對之對合偶為公共，其公共之對合偶或為實或為共軛兩虛，並由第 1 題證明若至少一個對合為橢圓則公共對合偶為實，若兩個對合中無橢圓對合其情況如何

3. 一直線截完全四點形之六邊每對邊之兩交點成對合偶點．

4. 設一直線上已具兩對之雙曲對合偶點，其直線上再有一已知點根據第 3 題之作圖求此對合偶點，

5. 前（1a）或（1b）表示一次元基本圖形所用之射影變換之仍還於原基本圖形上者，求證明，

6 前（1a）或（1b）之射影變換為對合之充要條件乃 $c_3=c_2$，即是普通對合變換為

$$c_1\omega_1\omega_1'+c_2(\omega_1\omega_2'+\omega_2\omega_1')+c_4\omega_2\omega_2'=0 \quad c_1c_4-c_2^2\neq 0$$

或 $c_1\omega\omega'+c_2(\omega+\omega')+c_4=0$

7. 六原素 (r_1, r_2), (r_1', r_2'), (s_1, s_2), (s_1', s_2'), (t_1, t_2), (t_1', t_2') 成為對合偶之充要條件為

$$\begin{vmatrix} r_1 r_1' & r_1 r_2' + r_2 r_1' & r_2 r_2' \\ s_1 s_1' & s_1 s_2' + s_2 s_1' & s_2 s_2' \\ t_1 t_1' & t_1 t_2' + t_2 t_1' & t_2 t_2' \end{vmatrix} = 0$$

應用非齊次座標其條件如何，

8. 由兩對之對合偶原素 (r_1, r_2) (r_1', r_2'), (s_1, s_2) $(s_1' s_2')$ 所決定之對合方程式如何，

9. 屬於二次方式（2）之原素為 (r_1, r_2), (s_1, s_2) 所分割成調和分割則有充要條件

(3) $a_{11} r_1 s_1 + a_{12}(r_1 s_2 + r_2 s_1) + a_{22} r_2 s_2 = 0$

先設（2）之原素座標得以 $r + \lambda' s$, $r + \lambda'' s$ 表之，調和分割則 $\lambda' + \lambda'' = 0$

10. 屬於二次方式（2）之原素與次式（4）之原素成為調和分割

(4) $b_{11}\omega_1^2 + 2b_{12}\omega_1\omega_2 + b_{22}\omega_2^2 = 0$, $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 \neq 0$

其充要條件為 $a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12} + a_{22}b_{11} = 0$

11. 由第 9 題求對合重原素之用（2）表示者其對合方程式為

(5) $a_{11}\omega_1\omega_1' + a_{12}(\omega_1\omega_2' + \omega_2\omega_1') + a_{22}\omega_2\omega_2' = 0$

12. 用第 10 題求其對合偶原素之為（2）（4）兩對原素所決定者為

$k(a_{11}\omega_1^2+2a_{12}\omega_1\omega_3+a_{33}\omega_3^2)+l(b_{11}\omega_1^2+2b_{12}\omega_1\omega_3$
$+b_{33}\omega_3^2)=0$

其一對分割(2)，(4)各對爲調和分割之重原素爲

$$(6)\quad \begin{vmatrix} a_{11}\omega_1+a_{12}\omega_3 & a_{12}\omega_1+a_{33}\omega_3 \\ b_{11}\omega_1+b_{12}\omega_3 & b_{12}\omega_1+b_{33}\omega_3 \end{vmatrix}=0$$

第十章　平面上射影座標

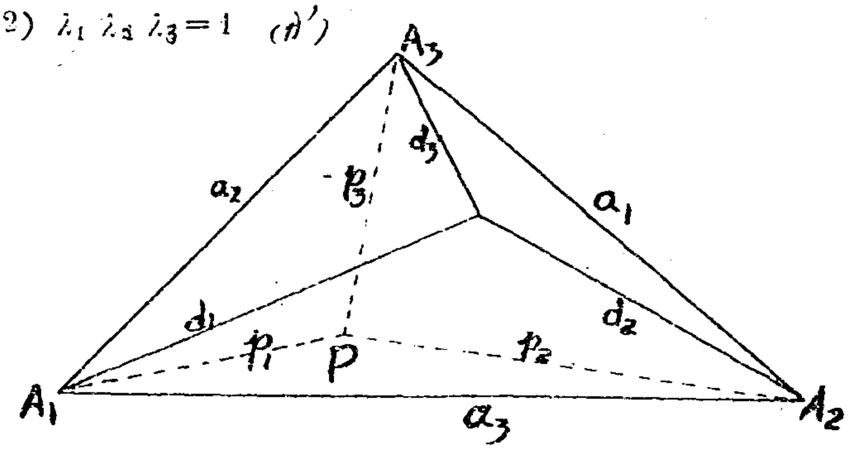
1.　射影點座標

先於概括空間實平面上取四點爲基點但無三點在一直線上，其基點 $A_1\ A_2\ A_3$ 所成三角形稱基準三角形各對邊爲 $a_1,\ a_2,\ a_3$. 其頂連結基點 D 之線爲 $d_1,\ d_2\ d_3$ 平面上任意點 P 連結頂點 $A_1,\ A_2,\ A_3$ 之線 $p_1,\ p_2,\ p_3$ 作成交比 (1)

$\lambda_1=(a_2\ a_3,\ d_1\ p_1)$, $\lambda_2=(a_3\ a_1,\ d_2\ p_2)$, $\lambda_3=(a_1\ a_2,\ d_3\ p_3)$

因 $p_1,\ p_2,\ p_3$ 三線共點由第六章第 6 節 Ceva 定理

(2) $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3=1$　(d′)



第　一　圖

特設 P 在 a_3 上則 p_1 與 p_2 俱與 a_3 重合，(1) 乃爲 (3)

$\lambda_1=(a_2\,a_3,\ d_1\,a_3)=0,\quad \lambda_2=(a_3\,a_1,\ d_2\,a_3)=\infty$

似此（2）爲無意義。$(0\times\infty\times\lambda_3=?)$

玆爲（2）式常保持無碍各交比不易性質乃作次式，

$$\left(\lambda_1=\frac{x_3}{x_2},\qquad \lambda_2=\frac{x_1}{x_3};\qquad \lambda_3=\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$

而用 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 表示 P 之座標。

（定義） 定點 P 之齊次射影座標用 x_1, x_2, x_3 任意三數表示之但須適合

（4）
$$\frac{x_3}{x_2}=\lambda_1,\qquad \frac{x_1}{x_3}=\lambda_2,\qquad \frac{x_2}{x_1}=\lambda_3$$

①今就 P 爲頂點 A_1 時檢察定義之所示。

則 p_1 不定，p_2 重合於 a_3, p_3 重合於 a_2

於是 λ_1 不定即 $(a_2\,a_3,\ d_1\,p_1)$

$$(A)\begin{cases}\lambda_2=(a_3\,a_1,\ d_2\,a_3)=\infty\text{或}\dfrac{1}{\lambda_2}=0\\[2ex]\lambda_3=(a_1\,a_2,\ d_3\,a_2)=0\end{cases}$$

今將齊次射影座標代入則 $\underset{\text{Condition}}{x_1\neq 0,\ x_2=x_3=0}$

適合 A_1 之齊次射影座標 $(\rho,0,0)$ 即$(1,0,0)$

④同法 A_2 爲 $(0,1,0)$，A_3 爲 $(0,0,1)$

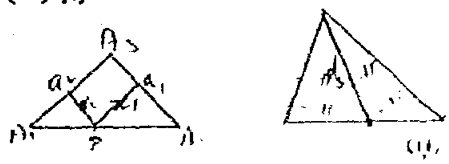
逆之，設有 $x_1=\rho\neq 0,\ x_2=x_3=0$ 由（定義）以得

$\lambda_2=\infty,\ \lambda_3=0$ 得 p_2 重合 a_3 又 p_3 重合 a_2

而 p_3 與 p_5 即 a_3 與 a_3 之交點 A_1 矣。

(3) 再設 P 爲 a_3 上任意點但非 A_1 或 A_3 由 (3) 得

$\lambda_1=0,\quad \frac{1}{\lambda_3}=0,\ \lambda_5=(a_1\ a_2,\ d_3\ p_5)$ 由 (4) 得



$\frac{x_3}{x_3}=0,\quad \frac{x_3}{x_1}=0,\quad \frac{x_3}{x_1}=\lambda_5$

故 P 在 a_5 上爲 $(x_1,\ x_2,\ 0)$ 但 $x_1\ x_3\neq 0$ 逆之，亦成立。

(4) 同法可求 a_1 上或 a_3 上之點。

前已知 P 在 a_3 上惟 $x_3=0$ 故用之代表 a_3 上一切點，即是其方程式代表 a_5 之直線也。同法可知代表 $a_1,\ a_3$ 之方程式。

(4) 最後 P 不在於三邊上則無 $x_1,\ x_2,\ x_3$ 任何爲 0.
是即 (2) 式 $\lambda_1\lambda_3\lambda_5=1$ 成立無碍也。

直線 d_1 之方程式爲 $x_3=x_3$ 因任意直線 p_1 上之 P 點設在 d_1 上，則 p_1 與 d_1 重合。則 $\lambda_1=1$ 故 $x_2=x_3$ 代入 d_1 上之 A_1 亦適合。

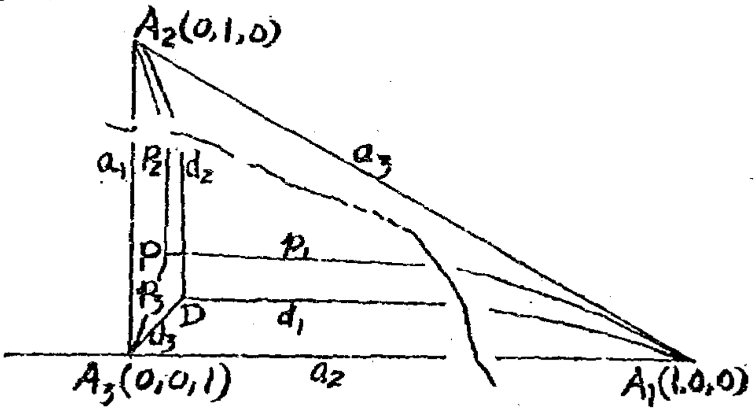
同法得 $d_2,\ d_3$ 之方程式。

故 D 之座標爲 (1,1,1)

(定理一)　直交軸座標爲特殊射影座標

先於概括空間實平面上取四基點如前但適合於直交軸系

。$A_1(1,0,0)$ 當於 X 軸上無窮遠點，$A_2(0,1,0)$ 當於 Y 軸上無窮遠點，$A_3(0,0,1)$ 當於直交軸原點，$D(1,1,1)$ 當於直交軸系 (1,1) 點之座標。則 (x_1, x_2, x_3) 表示點之齊次座標。



第 二 圖

令 P 之齊次座標爲 (r_1, r_2, r_3) 其交比爲

$$\lambda_1=\frac{r_3}{r_2}, \qquad \lambda_2=\frac{r_1}{r_3}, \qquad \lambda_3=\frac{r_2}{r_1}$$

蓋就四直線 a_2, a_3, d_1, p_1 求交比 λ_1，須自

$x_2=0$, $x_3=0$, $x_2-x_3=0$, $r_3x_2-r_2x_3=0$

乃得 $\lambda_1=\frac{r_3}{r_2}$，同法得 λ_2, λ_3

而 P 在直交軸系爲 $(\lambda_2, \frac{1}{\lambda_1})$.

射影幾何平面之自然性質

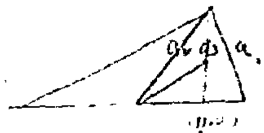
採取射影座標之基點之 A_1 A_2 為 $x_3=0$ 原可採取其平面上之任意直線。則所謂無窮遠線者未可常用 $x_3=0$, 而與其他直線有所歧視。

總之，射影幾何平面無例外點無例外線，概括計量平面具一例外線乃無窮遠線也，而於其線上兩點亦例外者乃圓周無窮遠點也。

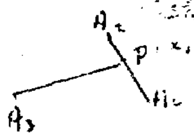
故平面為點所成之二次元閉連續。故通過空間一點之直線亦成閉連續。

習　　題

1. 直線 d_1 與 a_1 之交點座標為何。



2. 對 a_1, a_2 而與 d_3 調和共軛之直線為何。
3. 方程式 $x_2-2x_3=0$ 表示何意義。
4. 與於 A_3 之 P 點座標 $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，自 A_3 將 P 射影於 a_3 上之點則為 $(\gamma_1,\gamma_2,0)$
5. 設 $(x_1,x_2,0)$ 為 a_3 上一點之座標，求各基點。

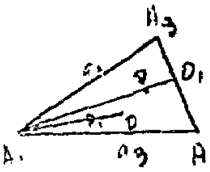


2. 射影座標所表示之性質

設四基點在直交軸系齊次座標如次，

$A_1(a_1,a_2,a_3)$, $A_2(b_1,b_2,b_3)$, $A_3(c_1,c_2,c_3)$, $D(d_1,d_2,d_3)$

又 P 之直交軸系座標 (x_1, x_2, x_3)，射影標座 (x_1', x_2', x_3')



$\lambda_1 = (a_2\ a_3,\ d_1\ p_1)$

$A_1 \to A_3,\ A_2,\ D\ \ P)$

由射影座標而來

a_1 上 $c, b, |bad|c - |cad|b,\ \ |bax|c - |cax|b$

故得交比 λ_1，總成

$$(1)\qquad \lambda_1 = \frac{\dfrac{|abx|}{|abd|}}{\dfrac{|cax|}{|cad|}},\quad \lambda_2 = \frac{\dfrac{|bcx|}{|bcd|}}{\dfrac{|abx|}{|abd|}},\quad \lambda_3 = \frac{\dfrac{|cax|}{|cad|}}{\dfrac{|bcx|}{|bcd|}}$$

但射影座標

$$\lambda_1 = \frac{x_3'}{x_2'},\qquad \lambda_2 = \frac{x_1'}{x_3'},\qquad \lambda_3 = \frac{x_2'}{x_1'}$$

$$(2)\qquad \rho x_1' = \frac{|bcx|}{|bcd|},\quad \rho x_2' = \frac{|cax|}{|cad|},\quad \rho x_3' = \frac{|abx|}{|abd|}$$

$\rho \neq 0$，應用 (2) 將 (a_1, a_2, a_3) 變換爲射影座標 $(1,0,0)$．同法，(b_1, b_2, b_3) 變換爲 $(0,1,0)$，(c_1, c_2, c_3) 變換爲 $(0,0,1)$．

又 (d_1, d_2, d_3) 變換爲 $(1,1,1)$ 皆適合，不言而喻，

(定理一) 自一射影座標系變換至另一射影座標系爲線形變換。

前者所述，乃計量座標所構之圖與射影座標所構之

圖原未變化，茲再就解析式述其性質與其圖形。

設任意直線 L 方程式在直交軸系座標用 x_1, x_2, x_3

(3)　$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ 係數不全爲零

在射影座標用 x_1', x_2', x_3' 應用 (2) 則得

(4)　$a_1'x_1' + a_2'x_2' + a_3'x_3' = 0$ 係數不全爲零

逆之由 (4) 應用 (2) 之逆雙換以得 (3)

(定理二)　射影座標系直線方程式爲線形齊次方程式，逆之線形齊次方程式表示直線。

(定理三)　若同直線上四點 P_1, P_2, P_3, P_4 於射影座標系用 $a', b', a'+u_1b', a'+u_2b'$ 表示時

$$(P_1P_2, P_3P_4) = \frac{u_1}{u_2}$$

蓋由 (2) 中射影座標 x' 變換爲直交軸座標 x 實得同樣之交比，故令

$$a_1' = \frac{|bcx_a|}{|bcd|} \qquad b_1' = \frac{|bcx_b|}{|bcd|}$$

$$a_1' + u_1b_1' = \frac{|bcx_a| + u_1|bcx_b|}{|bcd|}, \quad \cancel{a_1' + u_2b_1'}$$

$$a_1' + u_2b_1' = \frac{|bcx_a| + u_2|bcx_b|}{|bcd|}$$

由上式推之，其交比爲$\frac{u_1}{u_2}$不變，逆之亦然

（定理四） 凡 x_1, x_2, x_3 變換爲 x_1', x_2', x_3' 之線形變換，乃表示自一射影座標系至另一射影座標系者。

設有四個以三爲組之任意數 a, b, c, d 而無三個成線形倚變數，並將其變換而各爲 (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0,0,1) (1,1,1)

其變換顯而易知其爲 (2) 式矣。

線形變換

$$\rho x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \qquad (i=1,2,3), \qquad |a_{ij}| \neq 0$$

有兩義，一爲自一射影座標系變換至另一射影座標系，而所在平面固定座標則成變換，一爲線形變換表示平面至同平面或另一平面之射影變換也。故得次述定理。

（定理五） 平面 M 上之點至平面 M′ 上之點其射影變換以此平面上射影座標表示之，而爲線形變換，逆定理亦必成立。

習　　題

1. 次列線形變換表示座標變換

$\rho x_1' = -x_1 + x_2 + x_3,\ \rho x_2' = x_1 - x_2 + x_3,\ \rho x_3' = x_1 + x_2 - x_3.$

求此系之基點在彼系之座標，求此系基準三角形之邊在彼系之方程式。

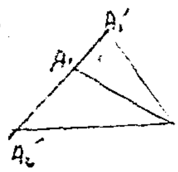
2. 將次列直線作爲新基準三角形之三邊。

$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0;\ x_1 - x_2 + x_3 = 0$

求其普遍射影座標變換式，並得 (2,3,2) 變換而爲新基準三角形之單位點。

可作一標準而
可利用 Cramer

3. 將 (1,0,1), (0,1,1), (1,2,1), (2,1,1) 變換而爲新基準三角形之基點 A_1, A_2, A_3, D 求其變換式並應用(2)式檢驗其結果



4. 兩射影座標系同基準三角形惟單位點不同，求兩系之變換式。

5. 不通過 A_3 之一直線上四點 a, b, c, d, 求證由其順序所成之交比乃與次列四點順序之交比等。

$(a_1, a_2, 0)$, $(b_1, b_2, 0)$, $(c_1, c_2, 0)$ $(d_1, d_2, 0)$ 求交比之值。

6. 應用射影座標表示圓錐曲線當爲幾次方程式。

7. 次列方程式爲 a, b, c, d 各變換爲 a′, b′, c′, d′ 之線形變換而各四無三者成立倚變數。求其證明。

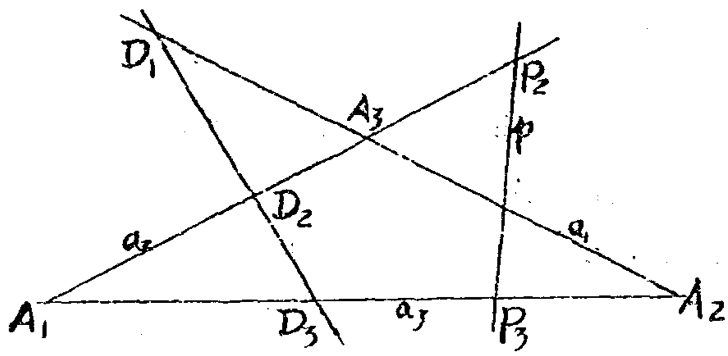
$$\frac{|b'c'x'|}{|b'c'd'|}=\frac{|bcx|}{|bcd|}\cdot\frac{|c'a'x|}{|c'a'd'|}=\frac{|cax|}{|cad|}, \quad \frac{|a'b'x'|}{|a'b'd'|}=\frac{|abx|}{|abd|}$$

3. 射影線座標

平面上四實直線 a_1, a_2, a_3, d 無三者共點

三邊形 $a_1\,a_2\,a_3$ 之頂點爲 A_1, A_2, A_3

d 與三邊交點爲 D_1, D_2, D_3 又任意 p 交三邊於P_1, P_2, P_3 點



第 三 圖

令作成交比

$\lambda_1=(A_2A_3, D_1P_1)$, $\lambda_2=(A_3A_1, D_2P_2)$, $\lambda_3=(A_1A_2, D_3P_3)$

因 P_1, P_2, P_3 在一直線上由 Menelaus 定理，

$$\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3=1$$

若 $\lambda_1=0$, $\lambda_2, \lambda_3\neq 0$
則 $A_1(0,1,1)$ 至

（定義） 任意三數 u_1, u_2, u_3 之成立次式者稱爲直線 p 之齊次射影座標。

$$\frac{u_3}{u_2}=\lambda_1,\quad \frac{u_1}{u_3}=\lambda_2,\quad \frac{u_2}{u_1}=\lambda_3$$

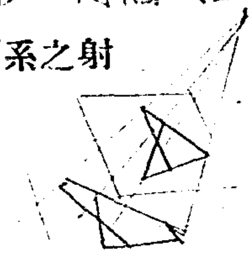
今檢查定義所示，四直線 a_1, a_2, a_3 及 d 各座標乃爲

(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), 及 (1,1,1)

頂點 A_1, A_2, A_3 乃各以方程式 $u_1=0$, $u_2=0$, $u_3=0$ 表示之。

特稱 d 爲單位直線，又 a_1 a_2 a_3 稱爲基準三邊形。

設 (u_1,u_2,u_3) 與 (u_1',u_2',u_3') 爲同一直線對兩系之射影線座標則其變換爲線形變換甚爲明顯。



習　　題

1. 齊次射影線座標定義所示各直線之通過頂點者如何表示之。

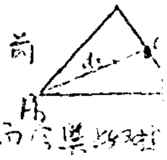
(P.223 Ex2.3)

2. 求 A_3 D_3 之座標。 point or Line?

3. 方程式 $2u_1+u_2=0$ 表示何意義。

4. 已知直線 (u_1, u_2, u_3) 與 a_2 之交點連 A_2 所得直線座標則爲 $(u_1,0,u_3)$，其情況如何。

5. 求証 $(u_1, 0, u_3)$ 爲 A_2 項上線中直線之齊次射影線



座標。

6.　求證直線之計量座標爲特殊之射影線座標。

7.　求證自直線計量座標系變換爲射影線座標系，或由射影線座標系變換爲另一射影線座標系，乃是線形變換式所表示之變換。

8.　次列線形變換表示兩射影線座標系之變換，

$$\rho u'_1=a_1u_1,\quad \rho u'_2=a_2u_2,\quad \rho u'_3=a_3u_3,\quad a_1a_2a_3\neq 0$$

求兩系基準三邊形各關係。

4.　同平面上射影點線座標關係

先設點在直線上或直線通過點結果各爲一次。

	u_1	u_2	u_3
x_1	a_{11}		
x_2		a_{22}	
x_3			a_{33}

假想式　以上a為係數.　Z1為 Linear Trans formation

$$\begin{aligned}(1)\qquad & a_{11}x_1u_1+a_{12}x_1u_2+a_{13}x_1u_3\\ & +a_{21}x_2u_1+a_{22}x_2u_2+a_{23}x_2u_3\\ & +a_{31}x_3u_1+a_{32}x_3u_2+a_{33}x_3u_3=0\end{aligned}$$

在點與直線之結合，固當如上式以使兩系座標相乘，但欲其簡明，將各基準三角形採取最適宜者，(1) 可化爲

$$(2)\qquad u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

茲採取基準三角形 $A_1A_2A_3$ 及單位點 D 並用 $a_1\,a_2\,a_3$ 爲基準三邊形。其兩系點線座標關係如次。

點 A_1 (1,0,0) 在線 a_2 [0,1,0] 上，前 (1) 於此成立。　點座標　　線座標

因 $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=0$ 及 $u_1=0$, $u_2=1$, $u_3=0$

故得 $a_{12}=0$, 設就 $A_1(1,0,0)$ 在 $a_3[0,0,1]$ 上，代入(1)

又得 $a_{13}=0$ 同法 $a_{31}=0$, $a_{23}=0$, $a_{21}=0$, $a_{32}=0$

於是（1）化為

(3) $a_{11}x_1u_1+a_{22}x_2u_2+a_{33}x_3u_3=0$

但單位直線 $d[\overset{u_1,u_2,u_3}{1,1,1}]$ 代入(3) 得單位直線方程式。

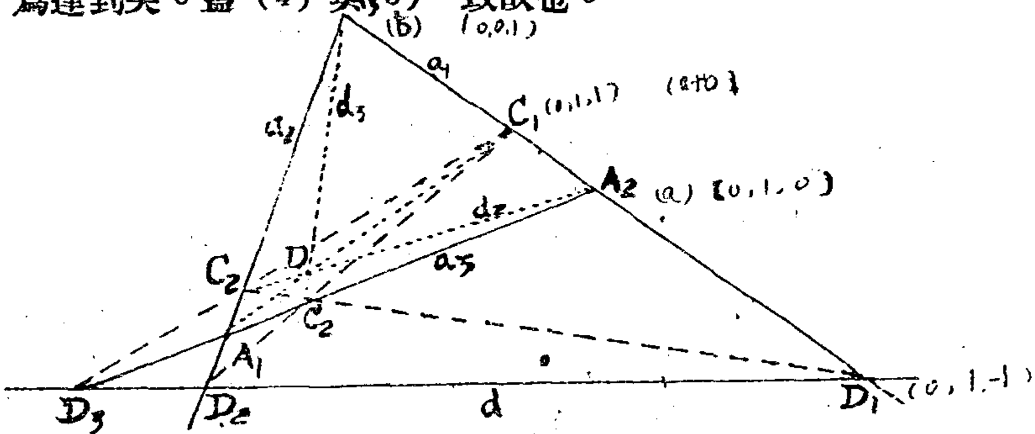
(4) $a_{11}x_1+a_{22}x_2+a_{33}x=0$

惟欲求簡明，(2) 式表示直線為最適宜，單位直線為

(5) $x_1+x_2+x_3=0$　　$a_1=a_{22}=a_{33}$ 者

若能得 $a_{11}=a_{22}=\overset{不定=1}{a_{33}}$ 之條件，則吾人所欲其簡明之目的

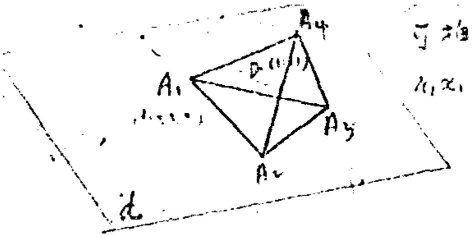
為達到矣。蓋 (4) 與 (5) 一致故也。



第　四　圖

今於點射影座標系取三點共一直線以當於 d 三點為 D_1

$[0,1,-1)$, $D_2(-1,0,1)$, $D_3(1,-1,0)$ 皆適合 (4)



可推出…

$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3+\lambda_4 x_4=0$

三次元之…

故得 $a_{11}=a_{22}=a_{33}$

單位點與單位線之幾何關係

三點爲 d 與基準三角形各邊相交之點 D_1, D_2, D_3

茲決定適宜之單位點 D 令 d_1, d_2, d_3 交對邊於 C_1, C_2, C_3

此三點由 $(A_2A_3C_1D_1)$，(A_3A_1, C_2D_2)，(A_1A_2, C_3D_3) 決定之。

例如 $A_2(0,1,0)$，$A_3(0,0,1)$，$C_1(x_1,x_2,x_3)$，$D_1(0,1,-1)$

則 A_2 用 a 代，A_3 用 b 代，C_1 可用 a+b 代，因先有 D_1 能用 a−b 代之故，結果 $C_1(0,1,1)$ 同法 $C_2(1,0,1)$，$C_3(1,1,0)$

特從矣 $(A_2A_3, C_1D_1)(A_3A_1, C_2D_2)(A_1A_2, C_3D_3)=-1$

故由 Ceva 定理知 $d_1\ d_2,\ d_3$ 相交於 D 單位點。

設就此逆推之，其關係亦無矛盾。

射影座標系中點線關係

就前法建樹之基準三角形或三邊形並單位點與單位線，所得點在直線上或直線通過點之方程式爲

(2) $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$

固甚顯明矣。此 (2) 又與計量座標系點線關係相同，故計量座標系之屬於特殊射影座標系理益顯明矣。

習　　題

第四圖中三角形 $A_1A_2A_3$ 與 $C_1C_2C_3$ 有 Desarges 關係因各相當項之連線相交於 D 之故，求證其相當邊之交點三點在其直線 d 上。

5，二次元射影變換

（定義）二次元基本圖形 F 原素變換至另一個二次元基本圖形 F′ 之原素爲射影變換時則先具次述三條件。

(a) 在 F 與 F′ 各原素間成立一對一之對應。

(b) 在 F 與 F′ 對應之部分一次元基本圖形各原素間成立一對之對應。

(C) 保持其交比不變。

玆舉特殊例以作上述定義之解釋。

點平面上之點變換至線平面之線爲射影變換時則先具次述三條件。

(a) 在點平面之點與線平面之線間成立一對一之對應。

(b) 在點平面之點列與線平面之線束間成立一對一之對應。

(C) 保持其交比不變。

（定理一） 二次元圖形變換至另一二次元圖形而其前者、

四原素以當於後者四原素各無三者爲倚變數其變換只有唯一之射影變換。

今就次述情況以證明之。

先於第一平面取四基點 A_1, A_2, A_3, D, 任意點(x_1, x_2, x_3)

其相當之第二平面上四基線 a_1', a_2', a_3', d'

若存在射影變換而使

A_1 至 a_1', A_2 至 a_2', A_3 至 a_3', D 至 d'

則其變換乃是唯一以次式表示之者。

(1)　$\rho u_1' = x_1$, $\rho u_2' = x_2$, $\rho u_3' = x_3$

逆之，其理顯明無矛盾，更一見而知其爲線形變換式。

（定理二）二次元圖形變換至另一二次元圖形之射影變換乃是前圖形原素射影座標變換至後圖形原素射影座標之線形變換。

習　　題

1. 就兩個點平面之變換情況證明(定理一)

2. 就線平面與點平面之變換情況證明(定理一)

6　相稱變換與相關變換

平面 M 至平面 M′之射影變換分爲四種，

A_1　平面 M 上之點至平面 M′ 上之點

A_2 平面 M 上之線至平面 M′ 上之線

B_1 平面 M 上之點至平面 M′ 上之線

B_2 平面 M 上之線至平面 M′ 上之點

相稱變換　　在第七章第 13 節已證明 A_1 A_2 變換之効果一致而稱之爲相稱變換。

相反變換　　當 B_1 與 B_2 之關係成立時，於其兩平面得其變換乃爲同樣。

就 B_1 言之，M 之點至 M′ 之線，先具次述條件，

(a) 在 M 之點與 M′ 之線間成立一對一之對應

(b) 在 M 之線與 M′ 之點間成立一對一之對應

(c) 保持其交比不變。

就 B_2 言之，所先具條件與 B_1 一致。

今稱 B_1 或 B_2 爲相關變換，總之，

相關變換爲 M 平面至 M′ 平面之射影變換而將 M 之點爲 M′ 之線並將 M 之線爲 M′ 之點。且反述之亦可。

例如相關變換之將共線點而爲共點線，反述之共點線而爲共線點，就四原素論之，點列上交比與線束上交比固已保持其不變性質者，就其兩平面上之圖形論之，顯然互成雙對圖形，乃備具點幾何與線幾何之雙對性質

者。

相關變換可用兩法以表示之，或 B_1 或 B_2 而實一致。

(1)
$$\rho u_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j, \quad \sigma x_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ji} u_i'$$

$(i=1,2,3)$, $|a_{ij}| \neq 0$, A_{ij} 表示 a_{ij} 之補餘行列式之值

(2)
$$\lambda x_i' = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} u_j, \quad \mu u_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ji} x_j'$$

上 (2) 與 (1) 一致而 (2) 又爲 (1) 之逆變換。

若 M 與 M′ 爲同一平面且 x, u 與 x′, u′ 屬於同基礎三角形三邊形及單位點單位線之時，即用 (1) 表示其普遍相關變換，

平面上僅僅相關變換不能組成群，因用兩個相關變換相乘之結果爲相稱變換非爲相關變換之故。

設取平面相稱變換與相關變換則結合成群，是即普遍平面射影群也。

習　　題

1. 自 (1) 求 (2) 式。

2. 求 B_1 之普遍相關變換式並由此求 B_1 之相關變換

式。

3. 求次列相關變換式對合。

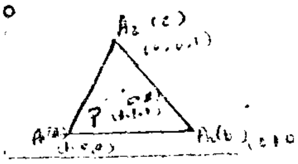
$\rho u_1' = 2x_1 - x_2 + x_3,\quad \rho u_2' = -x_1 + x_2 + 3x_3,$

$\rho u_3' = x_1 + 3x_2 - x_3.$

因由此變換施行二回結果則復成一致如初。

4. 相關變換 3 題之式爲根據設有點之軌跡常在於相關直線之上，求證其軌跡爲不分解之圓錐曲線。

5. 第 3 題相關變換得對稱行列式，求証第 3 題第 4 題之性質爲一切相關變換之具對稱行列式者所俱有。



7. 三線座標

將第 2 節之（2）式書之於次

(1)
$$\rho x_1' = \frac{|xbc|}{|dbc|},\quad \rho x_2' = \frac{|xca|}{|dca|},\quad \rho x_3' = \frac{|xab|}{|dab|}$$

$\rho z_1' = \frac{1}{|dbc|}[z_1|bc|$ … $-x_3|$

上式右方原是直交軸系各點齊次座標，(x_1', x_2', x_3') 爲 P 點射影座標。

同理 $\rho z_2' =$

$\rho z_3' =$

今乃設 a, b, c 爲基準三角形之頂，d 爲單位點。

由此以求定點 P 之三線座標 (x_1', x_2', x_3') 用次法。　z_1'

先就直交軸系中通過 b, c 之直線 $\alpha_1 = 0$ 論之。則 $z_1' = 0$

得 $(b_2c_3 - b_3c_2)x_1 + (b_3c_1 - b_1c_3)x_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)x_3 = 0$　則 $\rho z_1' = 0$

則 P 之直交軸系座標 $(x, y, 1)$，由 P 至 α_1 之距離

爲 z_1　$x_1 = x,\ x_2 = y$　$x_3 = 1.$

(11)

則 $(b_2c_3 - b_3c_2)x + (b_3c_1 - b_1c_3)y + (b_1c_2 - b_2c_1) = 0$

$$z_1=\frac{(b_2c_3-b_3c_2)x_1+(b_3c_1-b_1c_3)x_2+(b_1c_2-b_2c_1)x_3}{x_3\sqrt{(b_2c_3-b_3c_2)^2+(b_3c_1-b_1c_3)^2}}$$

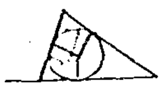
再 D 之直交軸系座標 (d_1,d_2,d_3)，由 D 至 α_1 之距離爲 k_1

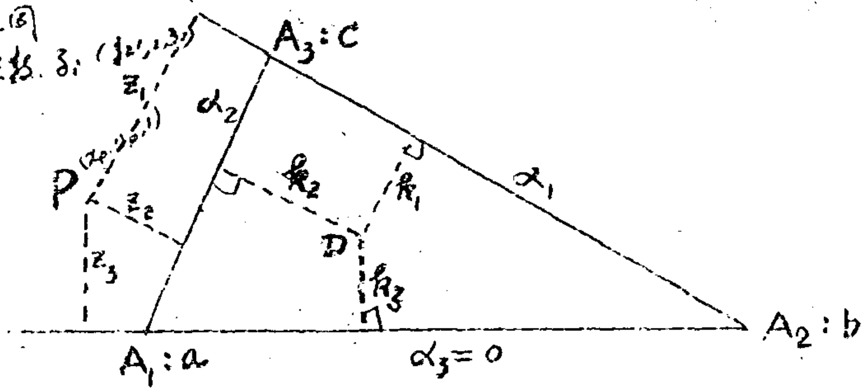
$$k_1=\frac{(b_2c_3-b_3c_2)d_1+(b_3c_1-b_1c_3)d_2+(b_1c_2-b_2c_1)d_3}{d_3\sqrt{(b_2c_3-b_3c_2)^2+(b_3c_1-b_1c_3)^2}}$$

同法可得 P 至 α_2, α_3 之距離 z_2,z_3

又得 D 之三線座標 (k_1,k_2,k_3) 之 k_3 k_2 亦如前法。

P在△A₁A₂A₃內也同





第　五　圖

今設 $A^2=(b_2c_3-b_3c_2)^2+(b_3c_1-b_1c_3)^2$

且 $x_3=1$, $d_3=1$

(2)　　$z_1=\pm\frac{1}{A}|xbc|$,　　$k_1=\pm\frac{1}{A}|dbc|$.

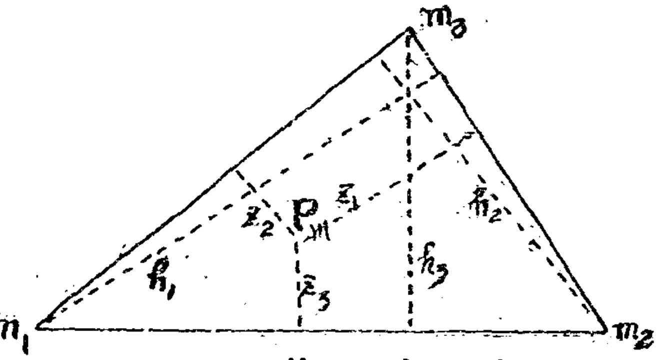
以之代入 (1) 之右方，且用同法則 (1) 爲

(3) $\rho x_1' = \frac{1}{k_1} z_1, \quad \rho x_2' = \frac{1}{k_2} z_2, \quad \rho x_3' = \frac{1}{k_3} z_3$

（定理一） 定點 P 之射影座標，用計量表示之時，則為基準三角形三邊至 P 之距離比而各乘以基準三角形三邊至單位點之距離逆比。

平衡重心座標　Barycentric coor.

由三線座標系 Moebius 根據機械之理，擴充而得平衡重心座標。先設三質量 m_1, m_2, m_3，置於三角形之頂點而以 P 為平衡重心。以 P 至三邊垂距為 z_1, z_2, z_3 三角形之三高為 h_1, h_2, h_3.



第　六　圖

因 P 為平衡重心故 P 上質量 $m = m_1 + m_2 + m_3$

由質量運動能率對於各邊代數和之平衡，

$$h_1 m_1 = m z_1 \qquad h_2 m_2 = m z_2 \qquad h_3 m_3 = m z_3$$

故得 P 之三線座標 (x_1', x_2', x_3') 如次之比，

故 $\rho x_i' = z_i$　$(i = 1, 2, 3)$

(11)

$$m_1 : m_2 : m_3 = \frac{1}{h_1}z_1 : \frac{1}{h_2}z_2 : \frac{1}{h_3}z_3$$

但自三高交點垂心 H 至三邊距離之比非 $h_1 : h_2 : h_3$

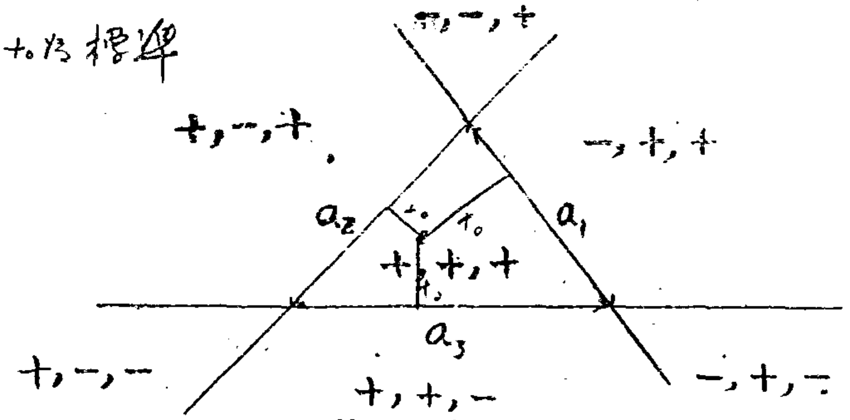
而自三中線交點 G 至三邊距離之比為 $h_1 : h_2 : h_3$

故 G 為單位點與前述之 D 相當。

內切圓心作單位點

基準三角形之三邊分平面為七區域，設採取內切圓心為單位點，則於三線座標式中 k_1, k_2, k_3 相等且同號，任意點之三線座標即用其至三邊之垂距 z_1, z_2, z_3 表示之。

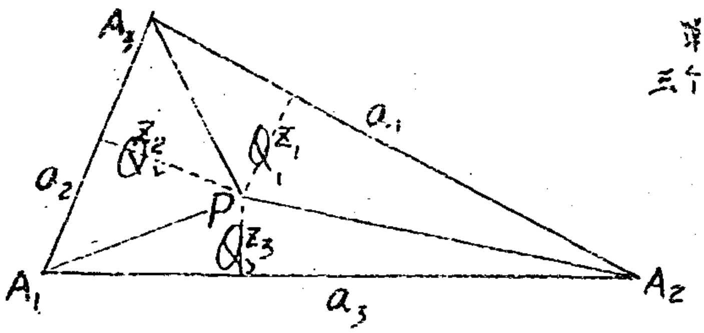
z_1, z_2, z_3 之正負表示其點所在之區域如第七圖



第 七 圖

設以 a_1, a_2, a_3 代三角形三邊之長，以 A 代三角形之面積，則於次式之 z_1, z_2, z_3 決定 P 之位置

(4) $a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 = 2A$



單位置之兩法、
三个△面積 $Q_1 = Q_2 = Q_3$

第　八　圖

設將（4）式左方各邊長用其對角換之，　利用 $\frac{a_1}{\sin A_1} = \frac{a_2}{\sin A_2} = \frac{a_3}{\sin A_3} = 2R$

$$2R(z_1\sin A_1 + z_2\sin A_2 + z_3\sin A_3) = 2A$$

若左方因其點在無窮遠即是在無窮遠線上，　$z_i = \infty$

則　$a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 = 0$

逆之無窮遠線亦應用上式表示之，

即　$z_1\sin A_1 + z_2\sin A_2 + z_3\sin A_3 = 0 = 2A/\Delta$

習　　題

1．求證內切圓心之座標為（1，1，1），
又三傍切圓心座標為（−1，1，1），（1，−1，1）、（1，1，−1）

2．三高交點垂心有座標為

$$(\cos A_2\cos A_3,\ \cos A_3\cos A_1,\ \cos A_1\cos A_2)$$

3．求證（$\cos A_1$，$\cos A_2$，$\cos A_3$）為外接圓心座標。

4．求證三中線交點 G 三高交點 H 與外接圓心 O 共在

一直線上。

5. 設 $P_1:(m_1,m_2,m_3)$為不在邊上之點，則有等角共軛點 P_2 之座標為 $\left(\frac{1}{m_1},\frac{1}{m_2},\frac{1}{m_3}\right)$

9. 求證外接圓之方程式為

$$z_2z_3\sin A_1+z_1z_3\sin A_2+z_1z_2\sin A_3=0$$

7. 將射影線座標系擴充而為計量之表示。

座標變換式中備具合一變換式，而於其時對應原素謂為固定原素或重原素。

習　　題

1. 點平面上之變換先將 A 點固定外，並將不通過 A之直線 a 上各點亦固定之 。而將任意點 P 移至其調和共軛點，此指對於 A 與 AP 交 a 之交點而言。

用適當座標以求其變換方程式並證明其為射影對合之變換。

2. 由幾何意義解釋次變換式為將其平面之移至原平面者。

$$\rho x_1'=x_1,\quad \rho x_2'=x_2,\quad \rho x_3'=kx_3,\quad k\neq 0\ 1$$

3. 設相稱變換具備四點為固定者而又無三點共直線，

則是合一變換。

4. 設相稱變換具備不在同直線上三實點爲固定點，如能適當選擇射影座標則相稱變換爲

$$\rho x_1'=a_1x_1,\quad \rho x_2'=a_2x_2,\quad \rho x_3'=a_3x_3$$

式中 a_1, a_2, a_3 皆不得爲零又俱不相等。

求於不通過同點三實直線固定時線之相稱變換方程式以與上式對應之。

5. 相稱變換而又非合一變換，但將在某一直線上各點固定之，又將其直線上某點所通過之直線亦固定之　求證其射影點座標得以此式表示之。

$$\rho x_1'=x_1+cx_3,\ \rho x_2'=x_2,\ \rho x_3'=x_3,c\neq 0$$

6. 設 r 點爲相稱變換之固定點

$$\rho x_i'=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j,\ (i=1,2,3),\ |a_{ij}|\neq 0$$

其充要條件乃 (r_1,r_2,r_3) 爲次列方程式之解，

$$\begin{aligned}(a_{11}-\rho)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\rho)x_2+a_{23}x_3&=0\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\rho)x_3&=0\end{aligned}$$

式中 ρ 爲次式之根以得 (r_1,r_2,r_3)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\rho \end{vmatrix}=0$$

2. 求次列相稱變換所固定之點與固定之直線

$$\begin{cases} \rho x_1' = \quad -2x_2+2x_3 \\ \rho x_2' = -3x_1+x_2+3x_3 \\ \rho x_3' = -x_1+x_2+3x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho x_1' = 3x_1+x_2-x_3 \\ \rho x_2' = x_1+x_2+x_3 \\ \rho x_3' = 2x_1+2x_3 \end{cases}$$

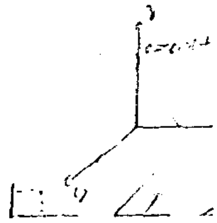
April 10.46

第十一章　幾何參數

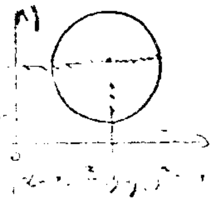
1. 常數之個數

在一直線上有無限個之點，在一平面上亦有無限個之點。彼此點之個數無從比較多少。然就無限之意義尚可另作區劃。

在幾何上常容許解析式之以座標或參數(任意常數)若干個表示圖形，即此便可窺知所謂無限云云之意義。



1. 例如平面上之點則直交軸系用兩個數爲座標 x, y 以表示之，則是兩個參數即足以決定平面上之一點，且此兩個乃其決定平面之一點所用參數最少之個數。

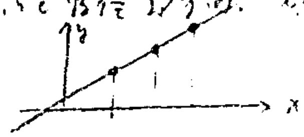


2. 平面上之圓，則用三個參數以決定之，即中心之座標 (x_0, y_0) 半徑 r 是也。決定圓之位置與大小更不能少於三個參數。

3. 拋物線 $y=x^2$ 上之一點雖具兩個之座標而兩個不能獨立蓋使 x 爲定值 y 即隨之亦定矣。故決定此拋物線上之一點只用一個參數 x 爲已足。

4. 平面上共在一直線上之任意三點，每點至少兩個參數，而三點六個參數不能獨立，結果就平面上圖形三點之在於同直線上最少須用五個參數決定之。

$ax+by+c=0$



因 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$ 已用其四個，最後只再用一個即可矣。

(定義) 足以決定一組之無限諸原素，所用最少參數之個數爲 n，則稱其組包容 ∞^n (n，無限) 原素，或稱其組結成原素之 n 參數系。

由是可知平面包容 ∞^2 點，或平面結成點之 2 參數系，又平面包容 ∞^3 圓，或平面結成圓之 3 參數系。又平面包容 ∞^5 三共線之點。

一組之無限諸原素中之普通原素爲自參數列中最少個之參數所決定者，是即決定其原素而皆必要之參數個數，因此稱之爲必要參數之個數。

齊次參數

平面上一點只有唯一之非齊次座標 (x, y)，但可具無限個之齊次座標 (x_1, x_2, x_3)，如用 $(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3)$ 則 ρ 爲不等零之任意常數。故一點具一對非齊次座標，而於齊次座標 (x, y, 1) 則更有參數之比例於 ρ 者，屬於齊次座標之 1 參數系。

平面上任意圓可用三個非齊次參數 A_1, A_2, A_3 以決定之方程式如次。

$$x^2+y^2+A_1x+A_2y+A_3=0$$

設用齊次座標並將其方程式更改為普通之式，其四個參數為 a_0, a_1, a_2, a_3

$$a_0(x^2+y^2)+a_1x+a_2y+a_3=0 \qquad a_0\neq 0$$

至如齊次參數 a_0, a_1, a_2, a_3 代以 ρa_0 ρa_1, ρa_2, ρa_3 未嘗有異動，故一圓於非齊次數只具唯一組，而更具 ∞^1 組屬於齊次參數。(易知之)

總前之例，自齊次參數個數減一即得必要參數之個數。

平面之點 $3-1=2$, 平面之圓 $4-1=3$ 為必要參數之個數。

混合參數

例如圓之中心位置與半徑以 x_1, x_2, x_3; r 表示之，則為混合參數，亦可書作 ρx_1, ρx_2, ρx_3, r.

其必要參數個數為 $4-1=3$, 即於平面包容 ∞^3 圓。

平面上三者共組點具 a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3 之齊次座標，此甚易知其結果非得九個齊次參數蓋各數中有不能獨立之關係存於其間之故。

因已知其所附加者具 ∞^3 組之參數，而有

$$\rho a_1,\ \rho a_2,\ \rho a_3;\ \sigma b_1,\ \sigma b_2,\ \sigma b_3;\ \tau c_1,\ \tau c_2,\ \tau c_3$$

故其必要參數個數為 $9-3=6$. 即平面包容 ∞^6 之三者

共組而各獨立之點。

雜例

1. 任意直線為兩點所決定者。平面上每點則具兩個參數，

2. 凡四個參數決定直線，就直線論之，每直線當於一對之點，故直線所用以決之必要參數個數 $4-2=2$.

是即平面包容 ∞^2 直線。

3. 在空間之直線由一點及對三軸方向分標以決定之，對三軸方向之分標屬於齊次而為獨立，又可任意於其直線上取點，以得 ∞^1 加於其上，故知空間包容 ∞^4 直線。

實參數與虛參數

平面上普通實點由兩個必要實參數決定之，普通虛點則由兩個必要虛參數決定之。

論及複素原素與實參數雖有差別。今於平面包容 ∞^4 複素點，則由其複素點所用座標為 $(x'+ix'', y'+iy'')$ 具備四個實參數，知之甚易。

若以計算實參數個數為根據，則可將平面上複素點與其實點之數比較之。何則，平面僅包容 ∞^2 實點而包容 ∞^4 複素點，複素點之數去實點之數所餘者可知矣。若空間實直線數去平面實直線數所餘者恰與此同。

習　　題 more thought

次列各題所述原素個數應如何決定之。

除特別註明者外，原素及參數皆爲實。(或皆複素)

1. 平面上點之對數。 ∞^4

2. 三角形爲不共點三直線所決定，平面上三角形數。 ∞^6

3. 完全四點形由次法決定之，

(a) 四點而無三點共線，

(b) 六直線每三直線通過一點凡四點。 ∞^8

其平面上完全四點形數。

4. 由不共直線之三點決定圓，平面上圓數。 ∞^3

5. 平面上圓錐曲線數。 ∞^5

6. 橢圓爲其焦點及偏心率所決定，其平面上橢圓數。 ∞^5

7. 拋物線由次法決定之，

(a) 方程式。

(b) 焦點及準線定義。

其平面上拋物線數。

8. 空間之點數。 3

9. 平面由次法決定之，

(a) 方程式。 ∞^7

(b) 不共直線之三點。 ∞^{9-6}

(c) 一直線及一點。

空間平面數。

10. 直線由次法決定之，

(a) 兩點。

(b) 兩平面。

空間直線數。

11. 球上之點數。

12. 空間之球數。

13. 空間之圓數。

14. 空間圓錐曲線數。

15. 通過一點之直線數。

16. 通過一點之平面數。

17. 平面上已有對邊三角形其完全四點形之數。

18. 由實參數計算，一直線上之複素點。

§ 2. 次元

舊傳統謂直線爲一次元，平面爲二次元，空間爲三次元，原以直線包容 ∞^1 點，平面包容 ∞^2 點，空間包容 ∞^3 點，乃是以所包容點爲標準原素推演之者。

設取直線標準原素，則平面包容 ∞^2 直線，平面爲二次元。空間包容 ∞^4 直線，空間爲四次元。直線則本

無次元。直線推演爲一次元，乃直線之線束或爲點。

習　　題

1. 設取平面爲標準原素，則空間爲幾次元，平面爲幾次元，直線爲幾次元，點爲幾次元。

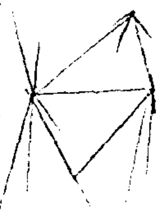
2. 設取圓爲標準原素，則平面爲幾次元，空間爲幾次元。

3. 幾何之建樹

建樹幾何之始，先採取標準原素。前已述及採取直線爲標準原素而建樹線幾何，一如普通以點爲標準原素之點幾何，俱無不宜。故設用圓爲標準原素則可有圓幾何之成立。

Dimention

幾何圖形之次元，乃就標準原素之全部次元或倍積以論之者，例如點幾何與線幾何在平面上俱爲二次元，直線上點幾何爲一次元，點上線幾何亦爲一次元，皆甚顯明。點幾何與面幾何在空間俱爲三次元，蓋空間包容 ∞^3 點亦包容 ∞^3 平面故也。惟線幾何在空間爲四次元，殊出於吾人簡單觀察之外。應宜注意也。



空间G.

建樹幾何採取標準原素及其次元之確立外，研討其幾何

之性質尤屬重要。此則歸之於標準原素各次元座標變換之群。由是而從其群之性質以研討其不變式。

例如就平面上之點論其平面上點之全變換群可書作

$$x'=f(x,y),\qquad y'=\phi(x,y).$$

其所表示保持一對一之對應與連續性。此種幾何總稱為解析位置學或位相幾何學。

今茲就位相幾何部下之射影幾何論之，射影幾何之部下，平面上點幾何與線幾何之變換乃射影變換群之分群所控制者，由射影平面即可推知射影空間幾何矣

4 擬眞幾何學

平面計量幾何具一例外線並兩例外點而亦在例外線上此計量幾何為剛體運動變換所控制。常使其一直線及其兩點不變。在射影平面例外點更無例外線，是故一切相稱變換並無點或直線之為固定者存在於其間也。

在於射影幾何與計量幾何之間，有一種幾何僅具一例外直線乃是用特殊相稱變換而將其直線變換至其原直線。似此之變換稱為擬眞變換。其幾何稱為擬眞幾何。

擬眞幾何得視為廣義計量幾何。亦即射影幾何之部下幾何也。故於射影平面幾何取定直線 $x_3=0$ 作為計量

幾何之無窮遠線。擬眞變換平面相稱式中常得 $x_3=0$,

即 $x_3'=0$ 同時成立。是即計量無窮遠線上擬眞之限定

點仍變換至一限定點者。

相稱變換

$$\rho x_i'=\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j \qquad (i=1,2,3) \qquad |a_{ij}|\neq 0$$

爲擬眞變換之充要條件乃 $a_{31}=a_{32}=0$

but $z_2\neq 0$, $z_1\neq 0$

因其能將理想點變換至理想點則惟 x_3' 消失以得 x_3 爲 0, Hence

其中 x_1 與 x_2 之値可以不問。惟常得

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2\equiv 0$$

故得普通擬眞變換爲

$$\begin{aligned}\rho x_1' &= a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\ \rho x_2' &= a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\ \rho x_3' &= \qquad\qquad\qquad a_{33}x_3\end{aligned} \qquad a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$$

若將其化爲非齊次座標 $x=\dfrac{x_1}{x_3}$, $y=\dfrac{x_2}{x_3}$

$$(1)\qquad \begin{aligned}x' &= a_1x+b_1y+c_1\\ y' &= a_2x+b_2y+c_2\end{aligned} \qquad \triangle=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$$

（定理一）　全擬眞變換組成爲群乃相稱變換群之分群

也。

af finie = 厚狭有限
af finie (防分)

特屬於擬眞變換群之不變式為自射影變換群交比不變式推演而得者，直線 L 上三點 P_1, P_2, P 及 L 上理想點 P_∞ 應用普通擬眞變換而為直線 L' 上之三點 P_1', P_2', P' 及 L' 上理想點 P'_∞

故 $(P_1'\ P_2',\ P'\ P_\infty') = (P_1\ P_2,\ P\ P_\infty)$

因 $\dfrac{P'_\infty P_1'}{P'_\infty P_2'} = 1$ $\qquad \dfrac{P_\infty P_1}{P_\infty P_2} = 1$

故交比為 $\dfrac{P'P_1'}{P'P_2'} = \dfrac{PP_1}{PP_2}$，總得次述定理。

(定理二) 對於擬眞變換群線分 P_1P_2 為 P 分割之比為不變式。

普通相稱變換群中無上述定點割線分之不變式存在，故稱定點割線分之不變式為擬眞不變式，具此性質之幾何是即擬眞幾何也。

(定理三) 直線之平行者即備具擬眞性質。

擬眞座標為將基準三角形之邊 $x_3 = 0$ 常用作無窮遠線之特殊射影座標。以次式表示擬眞座標為最宜。

(2) $\qquad x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $\qquad y = \dfrac{x_2}{x_3}$

線形變換 (1) 將 $x_3 = 0$ 變換至原直線。是即 (1) 變換

相比: cross-ratio

式不僅爲其平面上之擬眞變換．且將一對擬眞座標自(x, y)變換以至(x', y')另一對者。（射影特殊座標 → affine 之座標系）

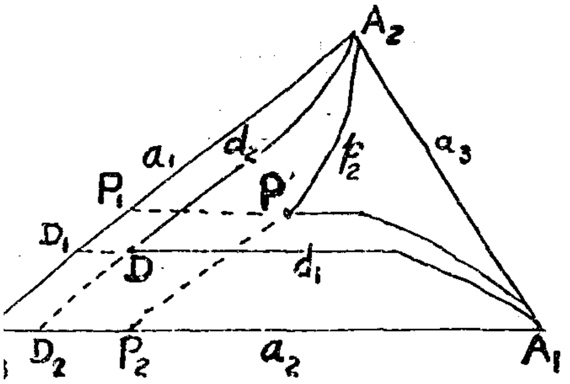
若自計量幾何言之，將（2）所示擬眞座標，用第X章第1節之定義。

$$x=\frac{x_1}{x_3}=(a_3a_1, d_2p_2), \qquad y=\frac{x_2}{x_3}=(a_3a_2, d_1p_1)$$

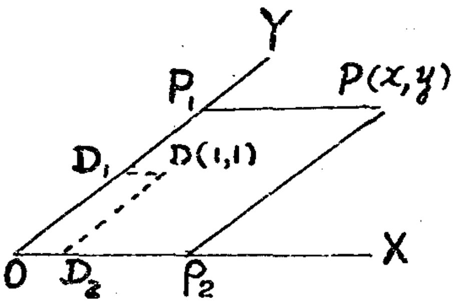
由第一圖

$$x=(A_1A_3, D_2P_2) \qquad y=(A_2A_3, D_1P_1)$$

$$x=(P_2D_2, A_3A_1) \qquad y=(P_1D_1, A_3A_2)$$



第　一　圖



第　二　圖

又因 A_1 與 A_2 爲無窮遠點　　化成兩坐標之關係

$$x=\frac{A_3P_2}{A_3D_2} \qquad y=\frac{A_3P_1}{A_3D_1}$$

(3) $x=\dfrac{OP_2}{OD_2}$ $y=\dfrac{OP_1}{OD_1}$ (第二圖)

故 x 與 y 爲 P 點之計量座標此乃屬於斜交軸系。

在擬眞幾何，角度可不提及。距離則本非擬眞性質。

惟在擬眞幾何同直線上或平行直線上線分距離之比以得大小，則具 (3) 式以表示之。

習 題

1. 求證(定理一)

2. 求證(定理三)

3. 兩有向距離之比其兩距離在同直線上或平行直線上得爲擬眞不變式，求證惟距離比之經用擬眞變換僅爲不變者。

4. 在擬眞變換群，三角形面積爲相對不變式。

5. 次式表示擬眞座標之變換。

$$x'=3x-2y-1, \qquad y'=x+3y-4$$

求新基點在舊系之座標並新軸之用 x 與 y 所表示之方程式。

6. 將次列二直線作爲新軸 $x'=0$, $y'=0$

$$2x-y=0, \qquad x+y+1=0$$

決定最普遍擬眞座標變換式，並設置（3.1）爲新單位點，以求其特殊變換式。

7. 射影變換將直線 L 變換至直線 L' 若稱爲擬眞換換則已能將 L 上無窮遠點變換至 L' 上無窮遠點者，求證 L 之至 L' 普遍擬眞變換乃與 L 至 L' 普遍相似變換一致。

即是　$x'=ax+b,\ a\neq 0$

5. 擬眞變換之計量觀測

（定理一）在擬眞變換中用同一常數 k 乘一切原直線線分之長則同向以相等於其上距離。

因設直線 L 與 L' 對應，其上各點一對一爲擬眞變換，

則與相似變換一致，例如前習題之 7. 即明示此意義也。

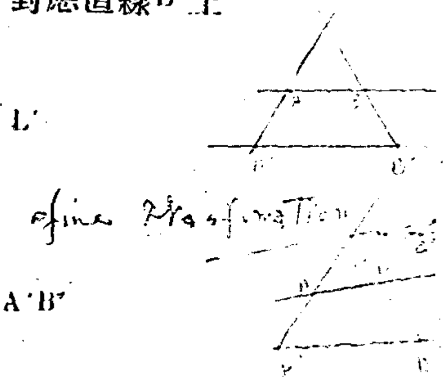
設 AB 爲 L 上任意線分，又 A'B' 爲 L 對應直線 L' 上之線分以對應於 AB. 易知 $A'B'=k\cdot AB$

再設直線 M, M' 各平行於對應直線 L 與 L'

又 CD, C'D' 各爲 M, M' 上之對應線分

若所取 CD＝AB, ABDC 則爲平行四邊形，

則 A'B'C'D' 亦爲平行四邊形，並 C'D'＝A'B'



結果 $C'D'=k\cdot CD$ 此即上述定理之證明也。

由此求 k 之適於乘各向一切線分者，今取簡單之圓 C 以推之，因於擬眞變換，常將圓錐曲線變換爲圓錐曲線，常將限定點變換爲限定點。故必將 C 圓變換爲一 E′ 橢圓。且 C 之中心變換爲 E′ 之中心。〔第 4 節（定理二）〕故 C 之半徑 r 變換爲 E′ 之半徑各 h′. 設 C 爲單位圓，則所謂 k 者，乃順半徑 $r=1$ 之方向 E′ 橢圓半徑各 h′ 以當之。

設 E′ 最小半徑爲 b 又 E′ 最大半徑爲 a,

則　$b\leq k\leqq a$　故 k 不得在於 a,b 之外。

（定理二）設 b 與 a 爲橢圓縱橫軸上半徑，橢圓爲自單位圓經用擬眞變換以得之者　依據其擬眞變換以視其單位長之在 a,b 間，或只等於 a,b 之一或在 a,b 外而具兩束實平行線束或僅一束實平行線束或竟無實平行線束以保持其上距離關係，

（定理三）平面上各圓經用擬眞變換而爲各橢圓則各橢圓皆爲相似且與各圓在相似位置。其橫軸與共軛軸以對應於所屬 k 之最大值最小值之方向。

９０設於計量平面單位圓 C 以 O 爲中心。

$$x=\cos\theta \qquad y=\sin\theta \qquad (11)$$

人看 Euclid G. 三站勢

① Topology one to one
② 射影變換 cross-ratio
③ 疑義
④

經用擬眞變換　　因有任意之選算

(1)　$x'=a_1x+b_1y+c_1$　　$y'=a_2x+b_2y+c_2$

則圓 C 變換而爲橢圓 E′ 如次

$$x'-c_1=a_1\cos\theta+b_1\sin\theta$$

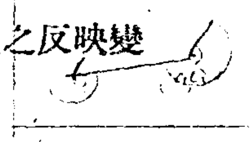
$$y'-c_2=a_2\cos\theta+b_2\sin\theta$$

其橢圓 E′ 之中心爲 (c_1,c_2)，由 θ 線被定 k 之方向並知 $(x'-c_1)^2+(y'-c_2)^2=k^2$ 即是

$$(a_1^2+a_2^2)\cos^2\theta+2(a_1b_1+a_2b_2)\cos\theta\sin\theta+(b_1^2+b_2^2)\sin^2\theta=k^2$$

普遍擬眞變換則除去 k^2 爲常數之情況。普遍擬眞變換距離須附以條件而得其不同之 k

設 k 爲常數（各向長度都爲相同），在擬眞變換之特殊情況，距離爲相對不變式，擬眞變換爲相似變換而或附以 x 軸之反映變換。



於是　$\frac{dk^2}{d\theta}=0$ 既以 θ 爲變數，tan 2θ 與 cot 2θ 不

$=-2\sin\theta\cos\theta(a_1^2+a_2^2)+2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(a_1b_1+a_2b_2)+\ldots$

爲零，故得必要充分條件

(2)　$a_1^2+a_2^2=b_1^2+b_2^2,\quad a_1b_1+a_2b_2=0$

$a_1b_1=-a_2b_2$
$a_1^2b_1^2=a_2^2b_2^2$
$a_1^2b_1^2-a_2^2b_2^2=0$

此與次式之關係同樣。

(3)　$b_1=\mp a_2$　　$b_2=\pm a_1$

但 $(a_1^2-b_1^2)=(b_2^2-a_2^2)$
or $a_1^2+a_2^2=b_1^2+b_2^2$
得 $b_1=\mp a_2$, $b_2=\pm a_1$

才有 min or Max 而條件(3)成立
圓不化爲橢圓

由是可知（1）爲相似變換之性格第八章第 7 節已述之，亦即相似變換與 x 軸之反映變換相乘之積，是爲剛體運動。

習　題

1. 次列兩組擬眞變換，決定各組各 k 於最大最小時之向方，而於圓變換至其橢圓時求其橢圓軸之方向及偏心率。設保持其距離關係存在時則方向如何。

(a)　$x' = -x - 3y,\qquad y' = 3x + y$

(b)　$x' = x + \frac{1}{2}y +$ [illegible]　$y' = x - \frac{1}{2}y - 2$

2. 前所述（3）式與（2）式爲一致。

3. 擬眞變換惟於保持角度方向時爲相似變換。

6, 射影擬眞與計量幾何

相稱變換群具九個獨立齊次參數故取 8 個記作

$$G_8 \quad \begin{aligned} \rho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \qquad |a_{ij}| \neq 0 \\ \rho x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

擬眞變換群爲 G_8 之分群，而惟 $x_3 = 0$ 無窮遠線固定。

$$G_6 \quad \begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

剛體運動群自然爲 G_6 之分群．乃由一切擬眞變換而將兩個圓周無窮遠點各固定之，並具距離爲絕對不變式。

$$G_3 \qquad x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b$$

射影幾何對於射影群 G_8 而具備不變之幾何性質，對於擬眞群 G_6 而具備不變之幾何性質爲擬眞幾何。故於此對 G_8 不變之性質則不具備。而擬眞幾何仍或具或不具其他射影性質，主要必具備擬眞性質。

對於計量群 G_3 具備幾何不變性質而對於擬眞群 G_6 則不具備其幾何不變性質時謂爲計量性質。但具備或不具備其他擬眞性質而主要具備計量性質者，爲計量幾何，即歐氏幾何也。

習　　題

1. 將第二章第 1 節習題 1 中圖形分類，何者爲射影，何者爲擬眞，何者爲計量。

2. 將次列各圖形分類以區別其爲射影擬眞計量性質。

(a) 一線分及其中點　　(e) 有心圓錐曲線及中心

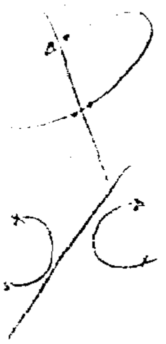
(b) 一相交直線之線束　　(f) 有心圓錐曲線及焦點

(c) 一有心圓錐曲線　　(g) 圓錐曲線之偏心率

(d) 一橢圓

7. 複素平面之幾何

建立幾何，可於方程式自由選用其係數為實數為素數以控制其群。亦可自由選用其以實原素複素原素之構圖而研究之。



前者所論實原素構圖之對於實數變換群諸性質已甚詳細。如在第八章論及實係數所表示實圓錐曲線對於實剛體運動之變換，如在第九章論及實一次線形變換之對於實射影座標之變換。

今者將普通圓錐曲線方程式之實係數用複素數換之，則其結果為拋物線之切於無窮遠線，有心圓錐曲線交無窮遠線於兩點。於是初無區別雙曲線與橢圓之必要，蓋以其判別式 B^2-4AC 常為複素數之故。正負不可決也。

基於複素變換群之複素幾何較之其所對應以基於實變換群之實數幾何猶具更少數之部下分類。總之，複素幾何之主要觀念仍宜以其所對應之基於實變換群之實數幾何為依歸。

習　　題

考察具複素係數之一次元線形變換式，並求對於具複素係數射影座標之變換標準式。

[illegible]

2) 对[illegible]

A. 連線 [illegible]

B. [illegible]

[illegible] P264 [illegible]

Non-Euclidian G.

[illegible]

T→P→

[illegible]

第十二章 點與線圓錐曲線

1. 點圓錐曲線

將普遍圓錐曲線書作此式並再簡記之：

$$a_{11}x_1x_1+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3$$
$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2x_2+a_{23}x_2x_3$$
$$+a_{31}x_3x_1+a_{32}x_3x_2+a_{33}x_3x_3=0$$

惟式中 $a_{23}=a_{32}$, $a_{31}=a_{13}$, $a_{12}=a_{21}$

簡式 $\sum_{j=1}^{3}(a_{1j}x_1x_j+a_{2j}x_2x_j+a_{3j}x_3x_j)=0$

(1) $\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0$, $a_{ij}=a_{ji}$

(定義一)凡點之座標滿足 (1) 式而於式中係數爲實數又不俱爲零，則點之軌跡爲實點圓錐曲線。

行列式 $|a_{ij}|$ 稱爲圓錐曲線行列式，矩陣 $\|a_{ij}\|$ 稱爲圓錐曲線矩陣。

直線與圓錐曲線之交點

如 $r:(r_1,r_2,r_3)$ 與 $s:(s_1,s_2,s_3)$ 爲直線上兩點，則直線上任意點之座標可記作

(2) $x=\lambda r+\mu s$

故直線與圓錐曲線 (1) 之公共點滿足次式

$$\sum a_{ij}(\lambda r_i+\mu s_i)(\lambda r_j+\mu s_j)=0$$

(3)　$\lambda^2\sum a_{ij}r_ir_j+\lambda\mu(\sum a_{ij}r_is_j+\sum a_{ij}s_ir_j)+\mu^2\sum a_{ij}s_is_j=0$

因 $a_{ij}=a_{ji}$ 又 $\sum a_{ij}s_ir_j$ 與 $\sum a_{ji}\ r_js_i$ 相同　故得

(4)　$\sum a_{ij}\ s_i\ r_j=\sum a_{ij}\ r_is_j$

(5)　$\lambda^2\sum a_{ij}r_ir_j+2\lambda\mu\sum a_{ij}\ r_is_j+\mu^2\sum a_{ij}s_is_j=0$

上式爲 $\lambda\ \mu$ 之二次齊次方程式係數爲定值。

設係數不俱爲零則得不同之 λ, μ 爲二組解以決定其兩公共點之座標 $\lambda_1 r+\mu_1 s$ 及 $\lambda_2 r+\mu_2 s$，設係數俱爲零則最初之兩點俱在 (1) 上且用任意之 λ, μ 皆適合 (5)，復可代表直線 (2) 上任意點亦適合 (5) 而在 (1) 上。

(定理一)直線與點圓錐曲線相交於兩點或其兩點相重，或直線上各點俱在其圓錐曲線之上。

(定理二)如兩個之點圓錐曲線完全一致則其兩方程式係數有比例之關係。

(定義二)若 $\sum a_{ij}x_ix_j$ 能化爲兩個線形之因數如次，

$$\sum a_{ij}x_ix_j\equiv(c|x)(d|x)$$

則其點圓錐曲線 (1) 稱爲可分解。

由是言之，點圓錐曲線爲兩直線所組成，逆之，其點圓錐曲線 (1) 之方程式與方程式 $(c|x)(d|x)=0$ 表示

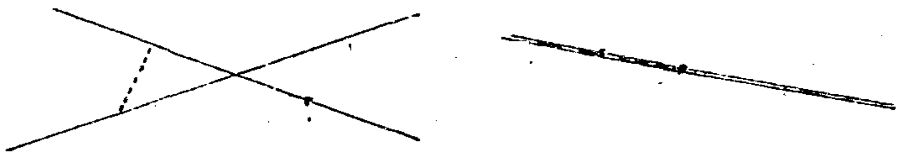
完全一致之軌跡。由(定理二)則得(1)可分解。

$$\sum a_{ij}x_ix_j \equiv k(c|x)(d|x),\ k\neq 0$$

(定理三)點圓錐曲線可分解之充要條件，乃為兩個直線或兩個相重之直線所組成。

設其兩個直線不相重時，則惟由其交點連結其圓錐曲線上任意點所得直線俱為其圓錐曲線所包含，

設兩個直線相重時，則將其圓錐曲線上任意兩點連結所得直線俱為其圓錐曲線所包含。



第一圖

(定義三)點圓錐曲線之簡單點，乃謂自其點連結其圓錐曲線上任意點所有直線俱為其圓錐曲線所包含者。

凡可分解之圓錐曲線至少有一單簡點，証設圓錐曲線有單簡點 P 則其圓錐曲線僅為通過 P 之直線所組成故為可分解者。

(定理四)不分解之點圓錐曲線無單簡點，可分解之點圓錐曲線於其為兩個直線所組成者有一單簡點，於其為兩

個相重直線所組成者其圓錐曲線上之點皆爲單簡點。

（定理五）設 γ 點爲圓錐曲線（1）之單簡點則其充要條件爲 γ 滿足次列方程式，

（6）
$$a_{11}\gamma_1+a_{12}\gamma_2+a_{13}\gamma_3=0$$
$$a_{21}\gamma_1+a_{22}\gamma_2+a_{23}\gamma_3=0$$
$$a_{31}\gamma_1+a_{32}\gamma_2 a_{33}\gamma_3=0$$

因如 γ 有異於 0,0,0 之解則惟 $|a_{ij}|=0$ 是即曲線可分解者。

（定理六）點圓錐曲線可分解之充要條件爲其判別行列式爲零。

如（6）之係數矩陣品位爲 2 則只具一單簡點，如其品位爲 1 則是有 ∞^1 單簡點矣，乃其直線上之一切點矣。

（推論）點圓錐曲線矩陣品位爲 2 則其可分解圓錐曲線爲兩個直線所組成，若其品位爲 1 則其可分解圓錐曲線爲兩個相重之直線所組成。

證、

因（6）爲 $\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\gamma_j=0,\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}\gamma_j=0,\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}\gamma_j=0$

即 $\left(\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\gamma_j\right)y_1+\left(\sum_{j=1}^{3} a_{2j}\gamma_j\right)y_2+\left(\sum_{j=1}^{3} a_{3j}\gamma_j\right)y_3\equiv 0$

上式中 y 右脚注與 a 右脚注前字相同故上式爲

$$\sum a_{ij}y_i\gamma_j \equiv 0 \text{ 或 } \sum a_{ij}\gamma_i y_j \equiv 0 \text{ 此因 } a_{ij}=a_{ji}$$

（定理五續） 設 γ 點爲圓錐曲線之單簡點則其充要條件爲。

（7）　$\sum a_{ij}\gamma_i y_j \equiv 0$

先設 y 爲其平面上異於 γ 之任意點，並設 γ 爲單簡點。

連結 γ 與 y 得直線而此直線與（1）交於 x 點。

$x=\gamma+\mu y$　代入（1）得

（8）　$\sum a_{ij}\gamma_i\gamma_j + 2\mu\sum a_{ij}\gamma_i y_j + \mu^2\sum a_{ij}y_i y_j = 0$

因 γ 爲單簡點原在其圓錐曲線上，今如 y 在曲線上則連結 γ,y 之直線俱在曲線上，蓋以 μ 爲任意値（8）乃常成立之故。

又如 y 不在曲線上則連結 γ,y 之直線與曲線已相交於 γ 點，則於（8）已得 $\sum a_{ij}\gamma_i\gamma_j=0$ 又得 $\mu_1=0$ 而因 γ 爲單簡點 μ 不得再用異於 0 之根，此爲定義所限制者。總之 $\mu_2=0$.

（9）　$\sum a_{ij}\gamma_i\gamma_j=0,\ \sum a_{ij}\gamma_i y_j=0 \quad y\neq\gamma$

上式之第二即爲所求之（7）

逆之，先由（7）用 y 以決定 γ，則（8）於 y 在曲線

上，又用（7），得（9）之結果，然則 r 爲單簡點矣。

（定理七）設點圓錐曲線包含直線則其圓錐曲線可分解。

習　　題

1. 求連結（1,4,1）〔5,0,1〕與次列曲線之交點。

$$x_1x_2-6x_3^2=0$$

2. 求次列直線與曲線之交點。

$$x_1-2x_2+x_3=0$$

$$x_1^2+2x_2^2-x_3^2-x_1x_2-x_2x_3=0$$

3. 將（4）式展開並比較其相等之項

4. 決定之列各圓錐曲線矩陣品位。設曲線可分解則求其單簡點並所包含之直線。

(a) $2x_1^2-x_3^2+5x_3^2-4x_2x_3+7x_3x_1-x_1x_2=0$

(b) $2x_1^2+3x_2^2-x_3^2+2x_2x_3-x_3x_1+x_1x_2=0$

(c) $x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-8x_2x_3+4x_3x_1-4x_1x_2=0$

5. 述明點圓錐曲線之定義與射影座標系各自獨立。

2. 不分解之點圓錐曲線與其切線

（定理一）直線常與不分解之點圓錐曲線交於兩點或兩個相重之點。於其兩個相重之點時稱直線交其曲線於重

點。

(定理二)通過不分解之點圓錐曲線上一 r 點，只存在一直線交其曲線於其 r 點爲重點之時。

(1)　$\sum a_{ij}x_ix_j=0$，　$a_{ij}=a_{ji}$，　$|a_{ij}|\neq 0$

上式點圓錐曲線上有 r 點故 $\sum a_{ij}r_ir_j=0$，直線 $x=r+\lambda y$ 內 y 爲任意點，但以 r 爲重點，故將直線代入 (1) 得

$$2\lambda\sum a_{ij}y_ir_j+\lambda^2\sum a_{ij}y_iy_j=0$$

則須 $\lambda=0$ 而 λ 爲重根。

(2)　$\sum a_{ij}y_ir_j=0$

逆之，先用 (2) 展開，則通過 r 點之直線方程式，且具 $y=r$ 之點。

$$(\sum a_{1j}r_j)y_1+(\sum a_{2j}r_j)y_2+(\sum a_{3j}r_j)y_3=0$$

(定義)通過不分解點圓錐曲線上定點之唯一直線交其曲線於其定點爲重點時，其唯一直線稱爲其曲線上定點之切線。

(定理二)在於點圓錐曲線 (1) 上 r 點之切線方程式爲

(3)　$\sum a_{ij}r_ix_j=0$　　即 $\sum a_{ij}x_ir_j=0$

直線切不分解點圓錐曲線之條件

就切線定義言之，直線交圓錐曲線之兩點爲重點，亦即通過其重點之直線爲切線。

設直線 u；(u_1, u_2, u_3) 爲 (1) 之切線 r 爲切點又得切線之直線座標 $\sum a_{1j}r_j$, $\sum a_{2j}r_j$, $\sum a_{3j}r_j$ 故自 (3) 得

$$(4)\quad \sum_{j=1}^{3} a_{1j}r_j=\rho u_1,\quad \sum_{j=1}^{3} a_{2j}r_j=\rho u_2,\quad \sum_{j=1}^{3} a_{3j}r_j=\rho u_3$$

$$(5)\qquad u_1r_1+u_2r_2+u_3r_3=0$$

展開 (4) 並附以 (5) 得

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_{11}r_1+a_{12}r_2+a_{13}r_3-u_1\rho&=0\\ a_{21}r_1+a_{22}r_2+a_{23}r_3-u_2\rho&=0\\ a_{31}r_1+a_{32}r_2+a_{33}r_3-u_3\rho&=0\\ u_1r_1+u_2r_2+u_3r_3-0\cdot\rho&=0 \end{aligned}$$

則於 r_1, r_2, r_3, ρ 有異於 0,0,0,0 之解時

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3\\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

逆之，(7) 中，$|a_{ij}|\neq 0$ 既決定點圓錐曲線之不分解，並於 (6) 之前三式知 r 有異於 0,0,0 之解且爲唯一之

解。

將（4）代入（5）得 $\sum a_{ij}\ \gamma_i\ \gamma_j = 0$ 則 γ 爲（1）上之點矣。

又將〔7〕變化得爲次式。

(8)　　$\sum A_{ij}\ u_j\ u_j = 0$

式中 $A_{ij} = A_{ji}$, $|A_{ij}| = |a_{ij}|^2$

〔定理三〕　直線u切於不分解之點圓錐曲線(1)之充要條件爲 u_1, u_2, u_3 滿足方程式（7）即得相當等式（8）之方程式。

由(8)式推廣其意義，凡適合於方程式（8）之 u 直線皆切點圓錐曲線（1），則用一切適合（8）之 u 以爲切線者得一曲線，特稱之爲線曲線，而以其與（1）相當，故稱爲不分解之線圓錐曲線，但以 $|A_{ij}| \neq 0$ 表示圓錐線不分解之意義。

〔定理四〕線構曲線之與不分解點圓錐曲線相當者爲不分解線圓錐曲線。如點圓錐曲線之方程式爲

$$\sum a_{ij}x_ix_j = 0,\ a_{ij} = a_{ji}\quad |a_{ij}| \neq 0$$

則線圓錐曲線方程式爲

$$\sum A_{ij}u_iu_j = 0,\quad A_{ij} = A_{ji},\quad |A_{ij}| \neq 0$$

習　　題

1. 述明方程式（3），設非其圓錐曲線可分解而 r 爲單簡點時，則表示一直線。

2. 求切次列曲線上〔i,i,1）點之切線方程式，

$$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+x_1x_2-x_2x_3=0$$

3. 求相當於次列各點曲線之線圓錐曲線方程式，

(a) $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$.　(b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$

(c) $x_2^2-2x_1x_3=0$,　(d) $x_1x_2+2x_3+x_3x_1=0$

(e) $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3-2x_3x_1=2x_1x_2=0$

4. 述明方程式（8）之與（7）相當。

5. 連結（2,1,3）（1,1,1）兩點之直線是否爲第 2 題中圓錐曲線之切線。

6, 求證連結 r,s 兩點之直線切於圓錐曲線（1）之充要條件爲 $(\sum a_{ij}r_ir_j)(\sum a_{ij}s_is_j)-(\sum a_{ij}r_is_j)^2=0$

7. 求通過（1,−1,2）點而切次式之曲線

$$x_1^2-3x_2^2-4x_3^2=0$$

先求直線通過之 y 與（1,−2,2，而求其適合切線之條件。

8. 求第 7 題普遍之情況

[illegible]分解？

∨ 3. 線圓錐曲線

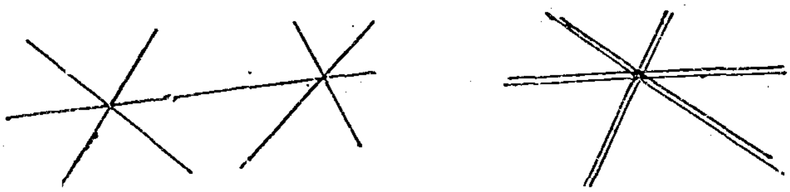
(定義一) 所有直線座標滿足次式，

(1)　　$\sum b_{ij}u_iu_j=0 \quad b_{ij}=b_{ji}$

其係數爲實數且不俱爲零時，直線構成一實線圓錐曲線。上述定義無關於射影座標採用如何。

(定理一) 通過一點得線圓錐曲線之兩直線或通過線圓錐曲線上之一點而得其曲線上之所有直線。

線圓錐曲線若可分解，則惟是兩點或二個相重之點所組成者。可分解線圓錐曲線之單簡線，乃謂其線與其曲線上任意直線相交之點仍屬於其曲線者。可分解線圓錐曲線爲兩點所組成者具一個單簡線，若爲兩個相重之點所組成者則其上之所有直線爲單簡線。不分解之線圓錐曲線則無單簡線。



第　二　圖

(定理二)直線 γ 爲 (1) 之單簡線充要條件乃是

(1)

(2)　$\sum b_{ij}r_iv_j\equiv 0$　一切直線 v 爲屬於曲線者，又

(3)　$\sum_{j=1}^{3} b_{1j}r_j=0,\quad \sum_{j=1}^{3} b_{2j}r_j=0,\quad \sum_{j=1}^{3} b_{3j}r_j=0$

(定理三) 線圓錐曲線 (1) 可分解之充要條件乃其係數行列式 $|b_{ij}|$ 爲零。若 $||b_{ij}||$ 之品位爲 2 則其曲線爲兩點所組成，若其品位爲 1 則其曲線爲兩個相重之點所組成。

不分解之線圓錐曲線及切點

(定理四) 對於一點及不分解線圓錐曲線常存在兩直線或兩個直線相重之重線。

(定理五) 在不分解線圓錐曲線之直線上有唯一元。點以使所有直線及其曲線公共，其直線俱重合於所與直線。

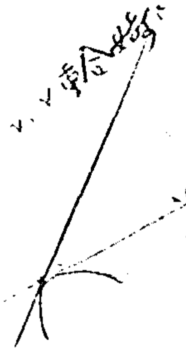
設 r 爲 (1) 上所與之直線，$\sum b_{ij}r_ir_j=0$

在 r 上之點爲 r 與另一直線 v 所決定。

所有直線 $u=\lambda v+r$ 與 (1) 有公共點爲次式之根所決定。

(4)　$\lambda^2\sum b_{ij}v_iv_j+2\lambda\sum b_{ij}v_ir_j+0=0$

設使直線 v 常在 (1) 之上，則 $\lambda_1=0$ 又得重根 $\lambda_2=0$，則得



(5) $\sum b_{ij} v_i \gamma_j = 0$

逆之，由 v 所包絡而得一點亦在於 γ 上。此時 v 與 γ 爲重線。

(定義二) 線圓錐曲線上之唯一點爲重線所公共時其點稱之爲其直線對其曲線之切點

(定理六) 線圓錐曲線上 γ 線之切點方程式爲

(6) $\sum b_{ij}\gamma_i u_j = 0$ 即 $\sum b_{ij} u_i \gamma_j = 0$

(定理七) 設 x 點爲次列不分解線圓錐曲線之切點

(7) $\sum b_{ij} u_i u_j = 0, \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad |b_{ij}| \neq 0$

其充要條件爲 x_1, x_2, x_3 滿足次列方程式

(8) $\sum B_{ij} x_i x_j = 0, \quad B_{ij} = B_{ji}, \quad |B_{ij}| \neq 0$

(定理八) 相當於不分解線圓錐曲線之點線爲不分解之點圓錐曲線。若 (7) 爲線圓錐曲線之方程式，則 (8) 爲其相當之點圓錐曲線方程式。

習 題

1. 通過兩直線 $(1,-2,0)$, $(1,-1,-1)$ 之交點作直線之屬於次列曲線者

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$$

2 求通過原點而屬於次列曲線之直線。

$u_1^2-3u_2^2+u_3^2-2u_1u_2+5u_1u_3=0$

3. 決定直線 $(-1,-3)$ 對 $v^2+9u=0$ 之切點。

4. 證明次列曲線可分解並求其所用以組成之點，

5. 求相當於次列曲線之點圓錐曲線方程式

$u_1^2+4u_3^2+2u_2u_3+u_1u_3=0$

6, 求證〔定理七〉

8. 設直線 r 與 s 之交點爲不分解線圓錐曲線之切點求其條件

√4 點及線圓錐曲線之關係

(1a)　$\sum a_{ij}x_ix_j=0$,　$a_{ij}=a_{ji}$,　$|a_{ij}|\neq 0$

(1b)　$\sum A_{ij}u_iu_j=0$,　$A_{ij}=A_{ji}$　$|A_{ij}|\neq 0$

(2a)　$\sum b_{ij}u_iu_j=0$,　$b_{ij}=b_{ji}$,　$|b_{ij}|\neq 0$

(2b)　$\sum B_{ij}x_ix_j=0$,　$B_{ij}=B_{ji}$　$|B_{ij}|\neq 0$

Exe 有 (1a) 曲線上之點作切線則得 (1b) 之線曲線。√

有 (2b) 曲線上之線取切點則得 (2b) 之點曲線。√

既知 (1a) 之 C 相當於 (1b) 之 C', 再由 (2a) 相當於 (2b)

則 C' 相當於 C'' 則 C'' 與 C 爲一致有證明之必要。

Proof C' 爲 $\sum A_{ij}u_iu_j=0$,　再設 α_{ij} 爲 A_{ij} 之補餘式

C'' 爲 $\sum \alpha_{ij}x_ix_j=0$

今由行列式計算 $\alpha_{ij} = |a_{ij}|a_{ij}$ constante $|c_{ij}| = |A_{ij}|^2 = (|a_{ij}|)^2$

故 C'' 爲 $|\alpha_{ij}| \sum a_{ij} x_i x_j = 0$ 故與 C 一致。

〔定理一〕 不分解點圓錐曲線及不分解線圓錐線互爲相當時以成相當之一對。

〔定理二〕 不分解點圓錐曲線及所具切線以與其相當之不分解線圓錐曲線及所具切點而合爲一致。

上述定理幾何構圖一對合一，總程爲不分解圓錐曲線。故不分解圓錐曲線爲點與線所組成。乃是點之軌跡，線所包絡，故有兩方程式以表示之，或用點座標，或用線座標。

可分解點圓錐曲線原爲兩直線所組成故不可以線座標 u 方程式表示之，可分解線圓錐曲線原爲兩點所組成故不可以點座標 x 方程式表示之。

三種易區別之圖形，爲不分解圓錐曲線，爲可分解點圓錐曲線，爲可分解線圓錐曲線。

習　　題

1. 求次式用線座標表示之方程式。

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

2. 求次式用線座標表示之方程式；

$$a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3=0,$$

$$y^2=2mx,$$

3. 求次式用點座標表示之方程式，

$$a_1u_2u_3+a_2u_3u_1+a_3u_1u_2=0$$

4. 求證圓錐曲線上之點在一線上或線通過一點俱是一對之實或共軛之虛。

5. 求證切線切不分解圓錐曲線於共軛兩虛點亦是共軛兩虛，

6. 可分解線圓錐曲線所用以組成之點或爲實或爲共軛之虛。

7. 若一虛線交點圓錐曲線於兩點，則其共軛虛線交其曲線於前者之共軛虛點凡兩點。

5. 可分解點圓錐曲線之切線與線圓錐曲線之切點

設 r 非爲點圓錐曲線之單簡點則自點圓錐曲線

(1) $\sum a_{ij}x_ix_j=0 \qquad a_{ij}=a_{ji}$

(2) $\sum a_{ij}x_ir_j=0$ 代表一直線切不分解之(1)於 r,

設 (1) 可分解則 (2) 亦可稱爲切 (1) 於 r 者，則於此時，直線爲組成其包含 r 之曲線者之一。

設 $\sum a_{ij}x_ix_j=2(c|x)(d|x)$

則 $\sum a_{ij}x_i r_j=(c|r)(d|x)+(d|r)(c|x)$

例如 r 在直線 d 上則（2）為 $(c|x)=0$

設 r 為可分解點圓錐曲線（1）之單簡點則於（2）所有 x_1,x_2,x_3 係數俱為零，於是組成其曲線之兩直線為於 r 之兩切線。設圓錐曲線為兩直線所組成則僅有一個單簡點及其上之兩切線。當此兩線相重則其上每點為單簡點而每點上之兩切線相重矣。

習　　　　題

討論可分解線圓錐曲線上切點之關係。

6　複素圓錐曲線

設齊次二次方程式 x_1,x_2,x_3 或 u_1,u_2,u_3 之係數為複素數時則稱之為複素點圓錐曲線或複素線圓錐曲線。特於其係數俱為實或同時俱可由複素化為實則複素圓錐曲線謂之為實曲線，否則謂之為虛曲線。本章惟除去第 4 節習題 4.7 外，皆可適用於複素圓錐曲線。

習　　　　題

1．求證次式為可分解點圓錐曲線並其用以組成之兩直線。

$$2x_1^2+ix_1x_2+x_2^2+(3-i)x_1x_3-2x_2x_3+x_3^2=0$$

2，求通過（1，i，1）點以切次式之切線

$$x_1^2+ix_1x_3-x_3^2=0$$

3．求次列圓錐曲線上之實點

(a)　$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$

(b)　$x_2^2-x_1x_3+ix_2x_3=0$

(c)　$x_1^2-(1-i)x_1x_3^2-ix_3=0$

(d)　$x_1^2-x_1x_3+i(x_1-x_3)(x_1-2x_3)=0$

4．複素點圓錐曲線爲實曲線之充要條件乃是曲線與其共軛複素圓錐曲線一致者。

May.

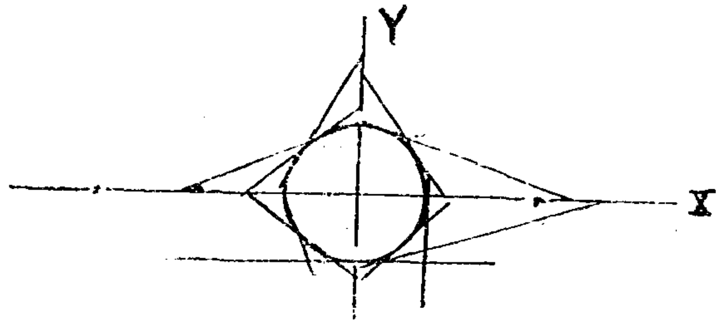
第十三章　點曲線與線曲線

1. 點之軌跡線之包絡

設以原點爲中心，取 a 爲半徑，則得圓

(1)　　$x^2+y^2=a^2$

但就線幾何着想，圓爲若干切線包絡所成。線座標常以 (u,v) 表示之，今求圓之線座標方程式於次。



第　一　圖

直線 (u,v) 皆切於 (1) 則圖之半徑爲 a

但直線之點有與 X 軸 Y 軸公共者。

(2)　　$ux+vy+1=0$

上式表示任意直線 (u,v) 通過 $(0,-\frac{1}{v}),(-\frac{1}{u},0)$

兩點。

又自原點至直線（2）之距離常為 a，故得

（3）　$a=\dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$　即　$u^2+v^2=\dfrac{1}{a^2}$

今再取線幾何之方程式為例，

（4）　$4uv=1$

既先用 u,v 以為定值則截 X 軸 Y 軸直線為

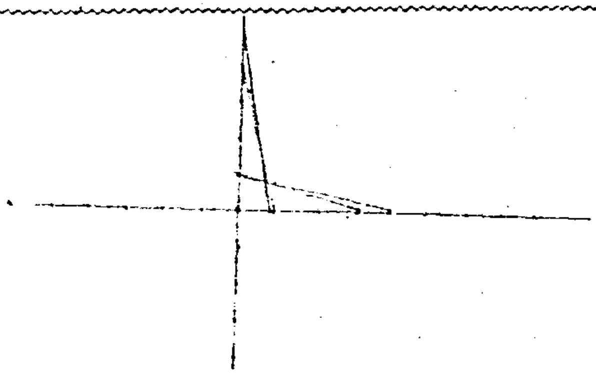
$$\frac{x}{-\frac{1}{u}}+\frac{y}{-\frac{1}{v}}=1$$

為便利故，令 $-\dfrac{1}{u}=\xi$　　$-\dfrac{1}{v}=\eta$

則於 X 軸上取 $(\xi,0)$ 於 Y 軸上取 $(0,\eta)$ 連得直線。

是以（4）化為 $\left(-\dfrac{1}{u}\right)\left(-\dfrac{1}{v}\right)=4$　即 $\xi\eta=4$

作圖如次。

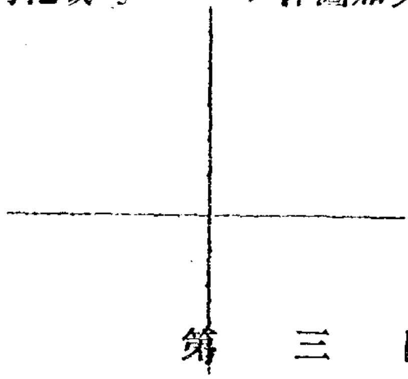


第　二　圖

設再取一例如次，

(5)　　$v=-4u^3$

今可化成 $\xi^3=-4\eta$ 作圖如次。



第　三　圖

由直線包絡以成之曲線簡稱爲線曲線，以與點曲線雙對。線曲線上各切點可組成點曲線，點曲線上各切線可組成線曲線。

但點曲線與線曲線之來源本非一致。故(1)與(3)之兩圓，未可視爲合同爲一也。今設已有(3)而自切線

切點之關係另作一如（1）之曲線以與（3）相當，乃屬可能之事實。

第二圖原是（4）之線曲線。今作點曲線而於其點上之切線使與（4）相當，其方法如次。

先已知其圖形爲雙曲線故作

(6)　$2xy=c$

又於點曲線（6）任意點（x_1,y_1）上之切線爲

$$(y-y_1)=-\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$$

即　$y_1x+x_1y=2x_1y_1=c$

化爲截軸直線方程式

$$\frac{x}{\frac{c}{y_1}}+\frac{y}{\frac{c}{x_1}}=1 \qquad \text{又}\ \xi\eta=\frac{c^2}{y_1x_1}=2c=4$$

故得 $c=2$ 所求之（6）化作

(7)　$xy=1$　此相當於（4）

逆之，於（4）之每直線上取切點則亦爲（7）．總之，（4）稱爲線構雙曲線，簡稱線雙曲線。

習　　題

1．將第三圖放大以表示（5）之線曲線使更爲顯明。

並求其相當之點曲線而各點上之切線爲(5)之線。

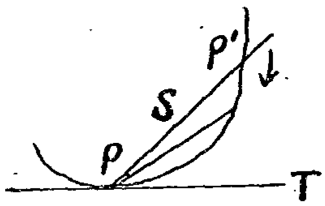
2. 求 $v^2-u=0$ 之作圖並求其相當點曲線。

3. 求 $u^2+v^2=u^2v^2$ 之作圖。

2, 連續與系統研究

(定義一 a) 連定點 P 與鄰點 P′ 得直線 S, 則其點曲線 P 點上之切線爲 P′ 接近於 P 當其極限時之 S. 如 T

P′ 爲點曲線上之點



第 四 a 圖

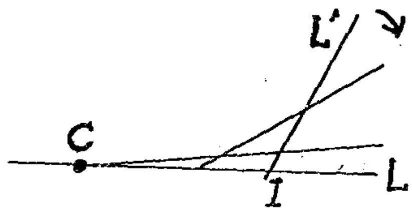
(定理一 a) 點曲線

(1a) $y=f(x)$

在 (x,y) 上切線爲

(定義一 b) 定直線 L 與鄰線 L′ 得交點 I. 則其線曲線 L 線上之切點爲 L′ 接近於 L 當其極限時之 I. 如 G

L′ 爲線曲線上之線



第 四 b 圖

(定理一 b) 線曲線

(1b) $v=\phi(u)$

在 (u,v) 上切點爲

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)\qquad\qquad V-v=\frac{dv}{du}(U-u)$$

(a) 爲常用定理證從略，(b) 定理證明如次。

設 L 爲 (u,v) 鄰線 L′ 爲 $(u+\triangle u, v+\triangle v)$

$$\begin{vmatrix} U & u & u+\triangle u \\ V & v & v+\triangle v \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad 即 \quad \begin{vmatrix} U-u & u & \triangle u \\ V-v & v & \triangle v \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

將上式展開於 L′ 接近 L 極限時

$$V-v=\frac{dv}{du}(U-u)$$

上證法亦可用以證 (a) 亦可用 (a) 法證 (b)

(定義二 a) 由點曲線之切線組成之線曲線稱爲原有點曲線相當之線曲線。

(定義二 b) 由線曲線之切點組成之點曲線稱爲原有線曲線相當之點曲線。

由定理一 (a) (b) 能求曲線之相當曲線舉例如次

(2a)　$2xy=1$

求其相當線曲線。

任意點 (x,y) 上切線，

(2b)　$2uv=1$

求其相當點曲線。

任意線 (u,v) 上切點，

$-yX-xY+1=0$	$-vU-uV+1=0$
故 $u=-y \quad v=-x$	故 $x=-v \quad y=-u$
由（2a）與此消去 x,y	由（2b）與此消去 u,v
得所求線曲線	得所求點曲線
(2b) $\quad 2uv=1$	(2a') $\quad 2xy=1$

(定理二)設彼此相對互反之曲線，此曲線相當於彼曲線。則彼曲線亦相當於此曲線。

直線與點爲雙對。但直線視作點曲線而惟一個切線故無相當之線曲線。一點可視作線曲線但只一個切點故不能得其相當點曲線。

習　　題

1. 證明(定理一a).
2. 證明次列二曲線彼此相當。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a^2u^2+b^2v^2=1$$

3. 將 $y^2=2mx$ 化成線曲線。
4. 將 $v=2u^2-u+1$ 化成點曲線。

3.基本定理之證明 (A G)

(4) $\qquad y=f(x)$

表示點曲線而決非爲直線，自第 2 節(1a)任意點(x,y)上切線爲

(2) $\qquad y'X-Y+(y-y'x)=0, \qquad y'=\frac{dy}{dx}$

設用線座標 (u,v) 則切線之座標爲

(3) $\qquad u=\frac{y'}{y-y'x}, \qquad v=-\frac{1}{y-y'x}$

自 (1) 與 (3) 消去 x,y 以得其相當之線曲線。茲爲簡便故。

又設其相當之線曲線爲 $v=\phi(u)$ 自第 2 節 (1b) 得切點，

(4) $\qquad V-v=v'(U-u) \qquad v'=\frac{dv}{du}$

再自 (3) 得

(5) $\qquad \frac{du}{dx}=\frac{y''y}{(y-y'x)^2} \qquad \frac{dv}{dx}=-\frac{y''x}{(y-y'x)^2}$

(6) $\qquad v'=-\frac{x}{y}$

將（6）代入（4）而後化成

$$(7)\qquad x\left(U-\frac{y'}{y-y'x}\right)+y\left(V+\frac{1}{y-y'x}\right)=0$$

再將上式展開則（x,y）點上之切線爲普通之

$$xU+yV+1=0$$

故所述切點切線之於相當曲線上關係正確無疑。逆推之亦然。

評注

在（2）式 $y-y'x=0$ 爲通過（0 0）點之切線，在（3）則有所不可，於是無（u,v）座標以當之。

設於 P 點而得 $y''=0$ 則於（5）得$\frac{du}{dx}$與$\frac{dv}{dx}$爲零並於

$v'=\frac{dv}{du}$爲不定。而於 P 之鄰點向 P 接近至其極限，（6）

式如常適用。

但（6）式之於 y 將爲零時，須將（4）式書作次式求之。

$$\frac{dv}{dx}(U-u)-\frac{du}{dx}(V-v)=0.$$

此亦可將（5）代入之後以得（7）式。

習　　題

1，點曲線用參數表示之者如次式，求其相當線曲線。

$$x=t^3-1,\qquad y=t$$

2．線曲線用參數表示之者如次式，求其相當點曲線。

$$u=-\frac{1}{a}\sec\theta,\quad v=\frac{1}{b}\tan\theta$$

3　四尖點雙曲擺線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 用參數表示之如次，

$$x=a\cos^3\theta,\qquad y=a\sin^3\theta$$

其用參數表示之相當線曲線為 $u=-\frac{1}{a}\sec\theta$，$v=-\frac{1}{a}$

$\sec\theta$ 4

求其證明，並求其相當曲線之用線座標表示之者。

4　一參數直線族　包線

由線幾何以論一參數直線族，則僅僅為線曲線耳。由點幾何以論一參數直線族，則普通為以點座標所示包線之方程式。乃指點曲線上各切線而非以線座標所示之線曲線也。如包線如軌跡，皆是從點幾何推演而出之名詞，在線幾何則尚未曾用適宜之名詞與之對應也。今因襲用

之。

在點幾何一個一參數直線族常用次式表示之。

(1)　　$f_1(t)x_1+f_2(t)x_2+f_3(t)x_3=0$

式中 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ 只各設爲單一值，其於解析函數則 t 爲複素參數。設將 (1) 改作

(2)　　$f(t)x+\phi(t)y+1=0$

則　　$f(t)=\dfrac{f_1(t)}{f_3(t)}\phi(t)=\dfrac{f_2(t)}{f_3(t)}$

可知於其直線通過 (0,0) 點者爲例外，設其包線所組只是一點，則是其直線皆通過其點者矣

茲將求直線族包線之方法分述如次。

線幾何方法

先將 (2) 式用線座標關係換之。

(3)　　$u=f(t)$,　　$v=\phi(t)$,

由　　$\dfrac{dv}{dt}(U-u)-\dfrac{du}{dt}(V-v)=0,\quad v'=\dfrac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}}$

$$\phi'(t)[U-f(t)]-f'(t)[V-\phi(t)]=0$$

省寫作 $-\phi'U+f'V+(f\phi'-f'\phi)=0$

即　$-\frac{\phi'}{f\phi'-f'\phi}U+\frac{f'}{f\phi'-f'\phi}V+1=0$

(4)　$x=-\frac{\phi'}{f\phi'-f'\phi}$，$y=\frac{f'}{f\phi'-f'\phi}$

由是即組成一參數 t 表示之包線。

解析方法

用消去參數 t 之方法，即得其包線。

$$f(t)x+\phi(t)y+1=0$$

$$f'(t)x+\phi'(t)y=0$$

所得結果與（4）式相當。

代數幾何方法

設用（1）式其 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ 各爲 t 之多項式。則（1）可爲

(5)　$\alpha_0 t^n+\alpha_1 t^{n-1}+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}t+\alpha_n=0$

其中　$\alpha_i\equiv a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3$　$(i=1,2,\cdots,n)$

設 $n=1$ 則（5）爲

$\alpha_0 t+\alpha_1=0$ 即 $(a_{01}t+a_{11})x_1+(a_{02}t+a_{12})x_2+(a_{03}t+a_{13})x_3=0$,

爲表一直線束。並於 $\alpha_0=0$, $\alpha_1=0$ 爲直線之各不相重者。

設 $n=2$ 就其二次直線族言之，

(6) $\alpha_0 t^2+2\alpha_1 t+\alpha_2=0$

則於 $\alpha_0=0,\ \alpha_1=0,\ \alpha_2=0$ 爲直線無三者共點。但於 (x_1,x_2,x_3) 任意點因自 (6) 有二根之 t 以適合之。

$(a_{01}t^2+2a_{11}t+a_{21})x_1+(a_{02}t^2+2a_{12}t+a_{22})x_2+(a_{03}t^2+2a_{13}t+a_{23})x_3=0$

故於一任意點上有兩組直線座標以代表兩直線。若其點爲點圓錐曲線而其兩直線爲包線則兩直線相重以成切線。並是 (6) 之判別式備具次列條件。

(7) $\alpha_1^2-\alpha_0\alpha_2=0$

取 (6) 及 (6) 就 t 之偏微分所得之式，並消去之，亦易得 (7) 式。

設 $n=3$ 則 (5) 爲

(8) $\alpha_0 t^3+\alpha_1 t^2+\alpha_2 t+\alpha_3=0$

則普通三直線通過一點，欲其於一點兩直線相重而爲切線，即得包線於其點曲線之上，(8) 須備具重根條件。又

(9) $3\alpha_0 t^2+2\alpha_1 t+\alpha_2=0$

蓋自 (8) 與 (8) 就 t 之偏微分所得之式 (9) 以消去 t. 乃得 (8) 之判別式，於是得包線方程式。

(10) $27\alpha_0^2\alpha_3^2-\alpha_1^2\alpha_2^2+4\alpha_0\alpha_2^3+4\alpha_1^3\alpha_3-18\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0$

高次點曲線之包線可類推之。

習　題

用線座標求次列各題之包線方程式，

1. 直線截兩軸其長之和爲常數。設常數爲 4 並作其圖。

2. 直線截兩軸常以一定次序得其長之差爲常數。

3. 直線與兩軸所圍三角形之面積爲常數。

4. 直線截兩軸其長之和等於其長之積。

5. 直線截於兩軸間弦爲定長。

6. 求次列各直線族之包線。

   (a) $xt^2-2yt+3=0$

   (b) $x\cot t+y\tan t+4=0$

   (c) $t^3+3t^2+3yt+1=0$

7. 用直線座標，若圓心爲 (a,b) 點，其半徑爲 r 則圓之方程式爲

$$(au+bv+1)^2=r^2(u^2+v^2)$$

8. 直線向兩定點距離平方和爲常數，求其直線所成

包線。

9. 直線向兩定點距離平方差以一定次序列之而為常數求其直線所成包線。

10. 直線向兩定點代數距離之積為常數。但分別其兩定點在直線之同側或在其異側得兩種情況。求其直線所成包線。

11. 直線向兩定點代數距離之和為常數，但分別其兩定點在直線之同側或在其異側得兩種情況，求其直線所成包線。

5. 代數曲線　點曲線

滿足次列方程式之點曲線，為點齊次座標多項式，係數實數，不俱為零，稱為實代數點曲線。多項式之次數 n 稱為其曲線之次。

(1)　$$f(x_1, x_2, x_3)=0$$

一次代數點曲線為直線，二次代數點曲線為點圓錐曲線，三次代數點曲線可用次式記之，

(2)　$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{ijk}x_ix_jx_k=0$$

其中之 a 右足有同樣數字者互自相等。

茲先設點曲線 (1) 為不可分解者，即 $f(x_1, x_2, x_3)$

非爲多項式相乘之積亦非具常數爲其因子。

（定理一 a）　直線交 n 次代數點曲線於 n 點。

設 r 與 s 爲一直線上之兩點，則直線上之點 $x=\lambda r+\mu s$ 以交點曲線（1）於其點之 λ, μ 適合次式者。

$$(3)\qquad f(\lambda r_1+\mu s_1, \lambda r_2+\mu s_2, \lambda r_3+\mu s_3)=0$$

蓋以 $f(x_1, x_2, x_3)$ 爲 n 次之 x_1, x_2, x_3 則(3) 得 λ, μ 亦爲 n 次多項式而成之齊次方程式。故一直線交(1) 於 n 點。

再若 r 爲(1) 之點，則取 $\lambda=1, \mu=0$ 以爲(3)b之解。其時 μ 爲(3) 中多項式之一因子。設取 μ 之若干次亦於其時適合，例如用 μ^k 則是其直線交(1) 於 r 點者凡k次。即 r 爲 k 次重點。

通過平面上任意 y 點之直線而交（1）於 r 最少爲二重點時求法如次，先用 $x=r+\mu y$ 即以 r, y 所連直線交(1) 於 r，而 μ 原已適合次式，

$$(4)\qquad F(\mu)\equiv f(r_1+\mu y_1, r_2+\mu y_2, r_3+\mu y_3)=0$$

多項式 $F(\mu)$ 用 Maclaurin 展開法，正爲適宜。

$$F(\mu)\equiv F(0)+F'(0)\mu+F''(0)\frac{\mu^2}{2!}+\cdots+F^{(n)}(5)\frac{\mu^n}{n!}$$

最初從（4）式已知

$$F(\mu)=f(x_1,x_2,x_3),$$

$$F'(\mu)=\sum_{j=1}^{3} f_j(x_1,x_2,x_3)y_j,$$

$$F''(\mu)=\sum_{i,j} f_{ij}(x_1,x_2,x_3)y_iy_j$$

$$F'''(\mu)=\sum_{i,j,k} f_{ijk}(x_1,x_2,x_3)y_iy_jy_k,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1=r_1+\mu y_1,\ x_2=r_2+\mu y_2,\ x_3=r_3+\mu y_3$$

式中 $f_i(x_1,x_2,x_3)$ 爲 $f(x_1,x_2,x_3)$ 就 x_i 之一次偏微分。又 $f_{ij}(x_1,x_2,x_3)$ 爲 $f(x_1,x_2,x_3)$ 就 x_i 又就 x_j 之二次偏微分。

其次以類推之。

$$F(0)=f(r_1,r_2,r_3),$$

$$F'(0)=\sum f_i(r_1,r_2,r_3)y_i,$$

$$F''(0)=\sum_{i,j} f_{ij}(r_1,r_2,r_3)y_iy_j,$$

$$F'''(0)=\sum_{i,j,k} f_{ijk}(r_1,r_2,r_3)y_iy_jy_k,\ \cdots\cdots$$

最初已設 $f(r_1,r_2,r_3)=0$ 故 $F(\mu)=0$ 即得

(5) $$0=\mu\sum f_i(r_1,r_2,r_3)y_i+\frac{\mu^2}{2!}\sum f_{ij}(r_1,r_2,r_3)y_iy_j+\cdots\cdots$$

故於 $\mu=0$ 之外再欲 $\mu=0$ 以得重根之充要條件爲

(6) $$f_1(r_1,r_2,r_3)y_1+f_2(r_1,r_2,r_3)y_2+f_3(r_1,r_2,r_3)y_3=0$$

是即 y 在通過 r 之直線上。

再設 (6) 中各係數俱爲零，則是

(7) $$f_1(r_1,r_2,r_3)=0,\quad f_2(r_1,r_2,r_3)=0,\quad f_3(r_1,r_2,r_3)=0$$

由 (5) 可知 $\mu=0$ 至少爲兩個相重之根更或爲三重根，故凡直線通過 (1)之 r 點者交 (1) 於 r 至少爲二重點。但 y 爲平面上任意點。代數點曲線上凡具上述性質之點稱爲其曲線之單簡點。

設 r 非爲單簡點，則 (6) 式表示通過 r 點之直線，乃是切線。而惟有此一直線通過代數點曲線之非單簡點以交其曲線於至少兩重之點。

（定理二 a） 點曲線 (1) 上非單簡點 r 上切線方程式爲

(8) $$f_1(r_1,r_2,r_3)x_1+f_2(r_1,r_2,r_3)x_2+f_3(r_1,r_2,r_3)x_3=0.$$

線曲線

實代數線曲線爲其所有直線之線座標滿足次式

(9) $\phi(u_1,u_2,u_3)=0$

此 $\phi(u_1,u_2,u_3)$ 爲 $u_1 u_2 u_3$ 之齊次多項式，係數實數，不俱爲零，多項式之次數 m 稱爲其曲線之階。

（定理一 b） 不分解之 m 階代數線曲線於平面上任意點有其 m 個直線。

設線曲線之 L 直線上其點之爲線曲線及 L 所公共時，乃 L 至少爲兩線相重，則其時 L 稱爲單簡線。

若 (9) 之直線 γ 爲單簡線則其充要條件爲

(10) $\phi_1(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=0,\ \phi_2(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=0,\ \phi_3(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=0$

設 γ 非爲單簡線，則其曲線上有唯一之點在於重線 γ 上。其點稱爲切點。

（定理二 b） 曲線 (9) 之非單簡線 γ 上其切點之方程式爲

(11) $\phi_1(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)u_1+\phi_2(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)u_2+\phi_3(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)u_3=0.$

點曲線與線曲線之相當關係

設直線 u 爲點曲線 (4) 上非單簡點 x 上之切線，則

(12) $\rho u_1=f_1(x_1,x_2,x_3),\ \rho u_2=f_2(x_1,x_2,x_3),\ \rho u_3=f_3(x_1,x_2,x_3)$

(13) $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$

逆之，設已知直線 u 上存在 x 而 u,x 滿足(12)，(13)

故得

(14)　$x_1f_1(x_1,x_2,x_3)+x_2f_2(x_1,x_2,x_3)+x_3f_3(x_1,x_2,x_3)=0$

應用 Euler 定理

(15)　$x_1f_1(x_1,x_2,x_3)+x_2f_2(x_1,x_2,x_3)+x_3f_3(x_1,x_2,x_3)=n f$

(x_1,x_2,z_3)

則　$f(x_1,x_2,x_3)=0$　且 x 點在 (1) 之上。

於是 (12) 爲表示 x 點之非 (1) 上單簡點而直線 u 爲其點上之切線。

(定理三 a) 直線 u 爲點曲線之切線其充要條件乃存在 x 點而使 u 與 x 滿足方程式 (12) 與 (13)。

設自 (12) 與 (13) 消去 x_1, x_2, x_3 則因兩式爲代數式故可化爲 u_1, u_2, u_3 之方程式。

(16)　$\phi(u_1, u_2, u_3)=0$

則 ϕ 爲 u_1, u_2, u_3 之齊次多項式。

線曲線 (16) 相當於點曲線 (1)。

(定理四 a) 相當於代數點曲線 (1) 之線曲線亦爲代數線曲線。其方程式爲自 (12) (12) 消去 x_1, x_2, x_3 以得之者。

習　題

求 (定理三 a) (定理四 a) 之雙對定理。

階數與次數

設代數點曲線與代數線曲線如次而互爲相當曲線。

(17) $f(x_1, x_2, x_3)=0, \qquad \phi(u_1, u_2, u_3)=0$

當代數點曲線不具單簡點時，

(18) $m=n(n-1)$

蓋自 (12) 各 u 當於 (n−1) 次，得各 x 當於其 u

之 $\left(\frac{1}{n-1}\right)$ 次，(13) 當於其 $\frac{n}{(n-1)}$ 次，而所得線曲線

(16) 相當於點曲線 (1) 者乃當於 (13)，然則上式之成立，其顯明不待言矣，由代數線曲線之不具單簡線者亦得 $n=m(m-1)$,

例如 $n=2$ 同時 $m=2$, 此外階數俱不同時等於次數。

如代數三次點曲線之不具單簡點者其階數爲 6.

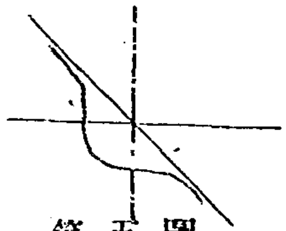
今有三次曲線 $x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$

$$f_1=3x_1^2, \quad f_2=3x_2^2, \quad f_3=3x_3^2$$

因上三式偏微分於各爲零時，得

$x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_3=0$ 乃不合理。

故其曲線無單簡點，是以得階數爲 6.



第五圖

則於 (12) 取 $\rho=3$

$$x_1^2=u_1$$

$$x_2^2=u_2$$

$$x_3^2=u_3$$

設將所得之 x_1, x_2, x_3 代入 (13) 得相當線曲線。

$$\pm u_1^{\frac{3}{2}}\pm u_2^{\frac{3}{2}}\pm u_3^{\frac{3}{2}}=0$$

即 $u_1^6+u_2^6+u_3^6-2u_2^3u_3^3-2u_3^3u_1^3-2u_1^3u_2^3=0$

代數曲線之非齊次方程式

前曲線方程式 (1) 用非齊次座標表示之。

(19) $$F(x,y)=0$$

(20) $$f(x_1,x_2,x_3)\equiv x_3^nF\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)$$

但曲線上須將 $x_3=0$ 各點除外。

再自 (20) $f_1=x_3^{n-1}F_x$, $f_2=x_3^{n-1}F_y$

$$f_3=nx_3^{n-1}F(x,y)-x_3^{n-2}(x_1F_x+x_2F_y)$$

若於 (19) 有單簡點則 (19) 之點有次式存在

$$F_x(x,y)=0,\ F_y=0$$

曲線 (19) 普通之非單簡點得將其座標代入次式。

(21) $$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

設 (x_0,y_0) 爲 (19) 之非單簡點須於 $F_x(x_0,y_0)$ 與 $F_y(x_0,y_0)$ 不俱爲零。

尤以 $F_y(x_0,y_0)$ 不爲零時爲宜，倘 $F_y(x_0,y_0)$ 爲零則反其式以用 $F_x(x_0,y_0)$ 蓋於非單簡點最少有一式不爲零也。

當方程式 $F(x,y)=0$ 又可化作次式以論 (x_0,y_0) 之鄰點。

(22) $y=f(x)$

習 題

求次列各曲線之相當曲線並決定其階數與級數。

1. $x_2^2x_3=x_1^3$ 2. $4u_1^3+27u_2u_3^2=0$

3. $x^3=y^5$ 4. $v=u^4$

5. 應用此第 5節之結果以考證第十二章點曲線與線曲線之關係。

6. 代數曲線之單簡點與單簡線

設次列點曲線 (1) 具單簡點 r 則由 (1) 以得 (2)

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 並 $f(r_1,r_2,r_3)=0$

(2) $f_1(r_1,r_2,r_3)=0,\ f_2(r_1,r_2,r_3)=0,\ f_3(r_1,r_2,r_3)=0$

通過 r 點及曲線上任意點 y 之直線其上之點 $x=r+\mu y$，根據第 5 節 (5), (6) 已知 $\mu=0$ 爲根，故

$$0=\frac{\mu^3}{2!}\sum f_{ij}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)y_i y_j+\frac{\mu^3}{3!}\sum f_{ijk}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)y_i y_j y_k$$

$+\cdots\cdots\cdots$

故其 y 當直線交曲線至少三重點於 γ 時，

(3)　$\sum f_{ij}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\, y_i y_j=0$

(A) 設於其係數不俱爲零時則稱其 γ 點爲純單簡點。或二級單簡點。

但就 (3) 觀察，(3) 爲分解於兩直線交於 γ 之二次式。

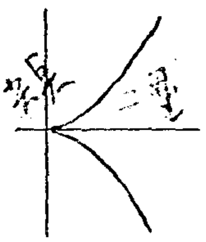
通過代數曲線純單簡點有兩直線以交其曲線至少爲三重點合於其純單簡點。其兩直線即爲其點上之兩切線。

由於兩切線之相重或分開其純單簡點稱爲尖點或叠點。

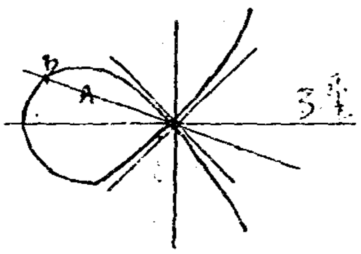
(4)　$x_1^3-x_2^2x_3=0$　　$(y^2=x^3)$　　$f_1=3x_1^2$

有尖點合於 (0,0,1) 點如第六圖。　$f_2=-2x_2x_3$

$f_3=-x_2^2$



第六圖



第七圖

(5)　$x_1^3+x_1^2x_3-x_2^2x_3=0$　　$(y^2=x^3+x^2)$

有叠點合於 (0,0,1) 點如第七圖。

(β)再於 (3) 之係數全爲零於 γ 點，即 f 之二次偏微分於 γ 點全爲零，而於其點 f 之三次偏微分不俱爲零，則是通過 γ 之直線於 γ 交曲線至少之三重點乃爲四重點之可能。故於 γ 將得三直線一如推 (3) 而得其三次偏微分之式，亦是 γ 點之切線。

普通 f 之偏微分於 γ 點當 $1,2,\cdots,k-1$ 但 $k\geqq 2$ 之次數不俱爲零，則有 k 直線於 γ 爲切線。其 γ 點稱爲 k 級單簡點。同理，代數線曲線之 k 級單簡線與 k 點於 γ 線上爲切點，由前者之雙對性質推演皆爲正確。

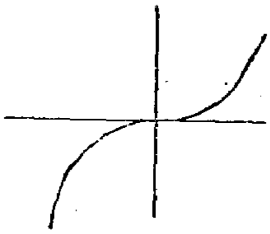
茲取 $k=2$ 則於 $\sum\phi_{ij}\ (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\ v_i\,v_j=0$ 係數不俱爲零時稱其 γ 線爲純單簡線。或二級單簡線，但上式分解爲兩點連成 γ 線。

在代數曲線純單簡線上兩點以存於其曲線上至少爲二重線合於其純單簡線上。其兩點即爲其線上之兩切點。

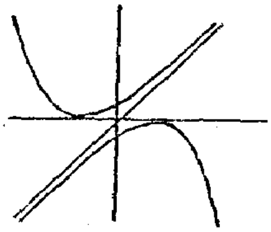
由於兩切點之相重或分開其純單簡線稱爲反線或叠線。

(6)　$4u_1^3+27u_2u_3^2=0$　　$(y=x^3)$

有反線合於 $x_3=0$ 線如第八圖。



第 八 圖



第 九 圖

(7)　$u_1^3+u_1^2u_2-u_2u_3^2=0$　$x^3+x^2y-y^2=0$

有疊線合於 $x_3=0$ 如第九圖。

P lueckers 方程式

設 n 爲次數，m 爲階數，d 爲疊點數，δ 爲疊線數，γ 爲尖點數，ρ 爲反線數，代數曲線不分解而只具純單簡點與純單簡線。P luecker 作成方程式如次

(8a)　$m=n(n-1)-2d-3\gamma$

(8b)　$n=m(m-1)-2\delta-3\rho$

又得　$\rho=3n(n-2)-6d-8\gamma$

$\gamma=3m(m-2)-6\delta-8\rho$

(9)　$\begin{cases} p=\frac{1}{2}(n-1)(n-1)(n-2)-d-\gamma \\ p=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-\delta-\rho \end{cases}$

因上式公共之 p 不能爲負號，且 $d+\gamma$ 及 $\delta+\rho$ 之極大

値所得單簡點單簡線各爲

(10)　$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$,　$\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$

例如三次曲線最多只有一個單簡點，四次曲線最多只有三個單簡點其雙對性質亦然。

因 p 整數代表極大單簡點數與實單簡點數之差稱之爲曲線降差。又 p 代表極大單簡線數與實單簡線數之差，亦爲曲線降差　總又名之爲減縷數。減縷數爲零則其曲線有極大之單簡點數與極大之單簡線數，例如圖錐曲線之減縷數即爲零。

例一　第六圖之曲線

(4)　$f\equiv x_1^3-x_2^2x_3=0$

因 $n=3$ 最多只有一個單簡點　，即尖點 (0,0,1). 切線 $x_2=0$

故　$n=3$, $d=0$　$\gamma=1$ 用 (8a) $m=3$.

但 (8b) 中 $3=6-2\delta-3\rho$ 惟 $\delta=0$, $\rho=1$.

故此曲線爲三階而有一反線將方程式化爲線座標，

$$f_1=3x_1^2=\rho u_1,\quad f_2=-2x_2x_3=\rho u_2,\quad f_3=-x_2^2=\rho u_3$$

$$\phi\equiv 4u_1^3+27u_2^2u_3=0$$

則有 (0,0,1) 反線於 $u_3=0$ 之切點。且減縷數爲零　。

例二　第九圖之曲線

(7)　$\phi \equiv u_1^3 + u_1^2 u_2 - u_2 u_3^2 = 0$

此乃三階僅單簡線爲叠線 (0,1,0) 於切點 $u_1 \pm u_3 = 0$

因 $m=3$, $\delta=1$, $\rho=0$ 故得相當曲線 4 次。

用 (8a) $3 = 12 - 2d - 3\rho$ 故於 $n=4$ 最多只有三個單簡點即其曲線可有三個尖點而無叠點，且減縱數爲零。今得其方程式爲

$$4x_1^4 - 4x_1^3x_2 - (8x_1^2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)x_3^2 + 4x_3^4 = 0$$

即　$27y^2 + 4x(x^2-9)y - 4(x^2-1)^3 = 0$

其三個尖點一個爲在於 Y 軸之無窮遠點而以無窮遠線爲其尖點上切線。其餘兩個尖點爲虛點 $(9, 8, \pm 3\sqrt{3}i)$

習　題

1. 求例一之詳細計算並證明其曲線之性質。
2. 求例二之詳細計算並證明其曲線之性質。
3. 第 5 節三次曲線 $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ 無單簡點。

求證其有單簡線爲九個反線於其切點上。

$(1,-1,0)$, $(\omega,-1,0)$, $(\omega^2,-1,0)$

$(-1,0,1)$, $(-1,0,\omega)$, $(-1,0,\omega^2)$

$(0,1,-1)$, $(0,\omega,-1)$, $(0,\omega^2,-1)$

求證此九個反線切點每三點在一直點上凡得十二直線。

即一直線之爲兩反線切點所決定者必包含另一反線切點。其十二直線得於上列九點排列組合中求之。

4. 求次列四尖點擺線之單節點與單節線。

$u^3+v^3=a^2u^3v^2$ 或 $(x^2+y^3-a^3)+27a^2x^2y^2=0$

但四個尖點爲 $(\pm a,0)$, $(0,\pm a)$ 另有兩個圓周無窮遠點，

四個叠點爲 $(\pm ai,\pm ai)$. $(\pm ai,\mp ai)$. 三個叠線爲兩軸與無窮遠線。

5. 次列曲線有一個孤立叠點乃是於其實叠點而有虛切線者。$y^2=x^3-x^3$

試在計量平面上作圖並討論其性質。

7. 互理曲線

設第七圖三次曲線，

(1) $y^2=x^3+x^2$

爲次式之直線所截。

(2) $y=tx$ 假設

則其直線通過叠點 O 而另於 O 外只有一點 P 公共．但已設其非在 O 之切線。

設叠點 O 視作與其上一切線對應，則曲線上各點與以 O 爲頂之線束各直線對應而全成一對一之關係。則解方

程式 (1), (2) 以得 P 之 (x,y) 而 t 爲線束之參數。

故得以參數 t 表示其點曲線。

$$x=t^2-1, \qquad y=t^3-t$$

由第 4 節 (4) 得相當曲線之用參數表示者以一對一。

$$u=-\frac{3t^2-1}{(t^2-1)^2}, \qquad v=\frac{2t}{(t^2-1)^2}$$

今再設

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1&=\Psi_1(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n \\ x_2&=\Psi_2(t)=b_0t^n+b_1t^{n-1}+\cdots+b_n \\ x_3&=\Psi_3(t)=c_0t^n+c_1t^{n-1}+\cdots+c_n \end{aligned}$$

各 a, b, c 爲實數且 a_0, b_0, c_0 不俱爲零，參數 t 可爲複素數。

已設惟於每單簡點作固定數之自重對應點　。以得一對一。

故與 (3) 相當者爲

$$(4) \qquad \begin{aligned} u_1&=\Psi_2\Psi_3'-\Psi_3\Psi_2' \\ u_2&=\Psi_3\Psi_1'-\Psi_1\Psi_3' \\ u_3&=\Psi_1\Psi_2'-\Psi_2\Psi_1' \end{aligned}$$

代數曲線之爲此類者稱爲互理曲線。

互理曲線 (3) 之次數為 n, 固已知任意線 $(d|x)=0$ 交其曲線於 n 點與 t 之 n 個根對應。t 適合次式，

$$d_1\varphi_1(t)+d_3\varphi_2(t)+d_5\Psi_3(t)=0$$

此中之d適於(4)之已知關係，故階數為 $n+(n-1)$ 即 $2n-1$.

但非 (4) 之多項式 $2n-1$ 次之項各係數俱為零者所可適用。乃順降則已知多項式 $2n-2$ 次之項各係數為

$$b_1c_0-b_0c_1,\quad c_1a_0-c_0-c_0a_1,\quad c_1b_0-a_0b_1$$

$c_1a_0-c_1c_0 \quad a_1b_0-a_7b_1$

普通此類係數不俱為零於是時 $m=2(n-1)$.

普通代數曲線有最多叠點時就無尖點之 $r=0$

更用 $m=2(n-1)=n(n-1)-2d-3r$

$$a=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

是曲線有極大之叠點數也，由第 6 節之 (10) 乃減縷數之為零者，

結果，凡互理曲線屬於減縷數之為零者。逆之，減縷數為零之曲線為互理曲線。

互理曲線之重要例乃不分解之圓錐曲線也。

習　題

1．按照研究（1）之三次曲線法以論次列各曲線並用參數表示之。

(a) $y^2=lmx$.　　(c) $y^2=x^2-3x+2$

(b) $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$.　(d) $\sum a_{ij}x_i x_j=0$

2．求次列之以參數表示之圓錐曲線方程式。

(a) $x_1=2t-1$, $u_2=t^2+1$. $u_3=t^2-1$.

(b) $x_1=-t^2+t+1$, $x_2=t^2-t+1$, $x_3=t^2+t-1$.

3．方程式 $x_1=t^4$. $x_2=t^2$, $x_3=1$

包含以參數表示之圓錐曲線 $x_2^2=x_1x_3$

但 $n=4$ 用以闢其誤。

4．證明第六圖爲互理曲線並以參數之有理式表示之。

5．直接證明（3）之 x 點上切線座標得以(4)表示之。

即應用割線上兩點接近之極限以得切線之理。