新學制

混合算學教科書

第四冊

初級中學用

編輯者 段育華

校閱者 胡明復

商務印書館印行

初級中學教科書

算學

編輯大意

一這部書完全是按照新學制同新學制課程綱要編輯出來的. 全書共分六册,每學期一册,適合初中三年每星期五小時之用.

一根據初中課程綱要所規定,採用混合方法,全書用代數幾何為主,算術三角為輔,合一爐而冶,不拘門類,循數理自然的次序,編法特出心裁,和一切舊本,迥然不同.

一象數通名,在西文本是 Mathematics, 從前沿用日本名詞,譯做"數學",現在照新學制課程會議改正了,譯做"算學".

一這書對於名詞初見的地方,附註西文,可為學生將來研究西書的幫助,并且免去迻譯失真的毛病.

一這册是全書的第四册,繼續第三册代形參伍並授,結構天成:從乘積引起因子分解;從因子分解引起二次方程;從二次方程與面積的關係引起平行四邊形及幾何求面積;從面積的幾何引起畢達哥拉定理;從畢達哥拉定理引起根式運算;從根式引起線段比與無理數;從線段比引起比例線段;從比例線段引起相似形;從相似形裏的線段比引起三角學的正餘弦切;從三角學的應用算法引起近似算與誤差,以爲收束.

一全書共插有算學名人肖像三十幅,并附載小傳,藉以引起學生崇拜學者的觀念,立高尚的志向,同時也可知道些算學發達的歷史.

一這書純用白話講解,並加新式標點;使學生沒有文字上的糾紛,才有學算的興趣.

一這書爲便於初學閱讀起見,不令一段文字或一套算式分跨在兩頁上面.

民國十四年一月. 編者識

初級中學算學教科書

第四册目次

算學家的肖像同小傳

高斯的小傳 (1777—1855)

十八世紀，歐洲同時有三個大算學家，高斯是當中最年輕的一個.高斯生在不倫瑞克 *Brunswick*, 他父親是個泥水匠，本不願意給他讀書，但他生來有驚人的算學天才，地方有一公爵特別注意他. 十五歲時，公爵出資送他到加羅林大學 *Caroline*. 後來高斯對人演講，常常當作笑話的說道:“我在還不會說話以前,便能計算,”他的天才可以想見了.

高斯在加羅林大學進步之快,眞是無比,不到三年,全校的教授與學生個個都承認那教授所能教的,他都早已知道了.高斯在做學生的時代，就有許多發明,譬如“最小二乘法(一種誤差最少的近似算法)”“圓內正十七角形的作法”等等都是.後來年紀加長,發明愈多,後人同他整理起來,竟有十幾厚册.

高斯在算學上研究最深的要算整數論,他有一部傑作,叫理論數學 *Disquisitiones Arithmeticae*, 在 1801 年出版，其中大半是他所發見的整數性質定理. 這書至今還是數論 *Theory of Number* 的標準書. 高斯在算學的分析 *Analysis* 上貢獻也很多很多,不勝枚舉.

高斯不但是大算學家，幷且是大天文家同物理學家.做格丁根 *Göttingen* 天文台長，差不多有半個世紀；在物理中光學同電學的理論上也有許多重大的發明.

Gauss

高斯的肖像

初級中學教科書

算學

第四册

第一章　二項乘積及因子

Binomial Product and Factors

(1)**羃的羃** *A Power of a Power* 羃的羃就是乘方的乘方. 假如已經有了 a 的二次羃如 a^2, 再要去找這個 a^2 的三次羃如 $(a^2)^3$, 依指數的定義和指數相加的定律,我們便知道:

$$(a^2)^3=a^2\times a^2\times a^2=a^{2+2+2}=a^{2\times3}=a^6$$

推廣起來,設這兩個指數是隨便兩個正的整數,譬如說 m 和 n, 就有

$$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times\cdots\cdots\text{一直到 } n \text{ 個因子}$$

$$=a^{m+m+m+\cdots\cdots\text{一直到}n\text{個}m}=a^{mn}$$

可見要找羃的羃,只要把兩指數相乘便是.

推論　從乘法互換定律,容易知道: $(a^m)^n=(a^n)^m$.

(2)積的冪 A Power of a Product 假如有兩數的乘積如 ab,要找這乘積的三次冪如 $(ab)^3$,依指數定義,定律和乘法互換定律,便有

$$(ab)^3=ab\times ab\times ab=a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b=a^3b^3$$

推廣到隨便什麼正整數的指數,就有

$$(ab)^n=ab\times ab\times ab\times\cdots\cdots\text{一直到 } n \text{ 個因子}$$

$$=(a\cdot a\cdot a\cdots\cdots n\text{個}a)(b\cdot b\cdot b\cdots\cdots n\text{個}b)$$

$$=a^nb^n.$$

再推廣得: $(abc\cdots\cdots)^n=a^nb^nc^n\cdots\cdots$

練習一

求出下列各冪的數值:——

1. $(12^2)^3=?$　　2. $(-2^4)^3=?$　　3. $(11^3)^2=?$

去下面各式的括號:——

4. $(2^3)^2\times(2^2)^3$　　5. $(3a^2x^3)^4$

6. $(ax^2\times bx^3)^4$　　7. $[(-3)^3\cdot(2x)^2]^4$

8. $(-7ab^2xy^3)^5$　　9. $(7a^nb^{2n})^3$

10. $(2mx^2)^m\cdot(3nx^3)^n$　　11. $(-5a^3b^2x^7y^4)^{2n}$

證明下面兩個恆等式:——

12. $(a^2)^3=(a^3)^2$　　13. $(x^m)^n=(x^n)^m$

(3)倒數 *Reciprocal*　一個數除1的商,稱爲這個數的倒數.

例如: 1. 8的倒數是$\frac{1}{8}$就是.125;

2. $x+2$ 的倒數是 $\frac{1}{x+2}$;

3. $\frac{2}{3}$的倒數是 $\frac{3}{2}$;

4. $\frac{x}{x-a}$的倒數是 $\frac{x-a}{x}$.

倒數的性質:設 R 是 N 的倒數,依定義: $R=\frac{1}{N}$

從這式可得; $RN=1$ 又 $N=\frac{1}{R}$.

(一)一數若是他數的倒數,那麼他數也是原數的倒數,換句話說:倒數與原數互做倒數.

(二)兩數互做倒數,他的相乘積總是1.

(4)**商的因子**　有了倒數這個觀念,一個商的式至少可分做兩個因子的積.

例一. $\frac{a}{b}=a\times\left(\frac{1}{b}\right)$

例二. $\frac{37}{1.25}=37\times.8=29.6$

(注意)利用倒數,凡算術的除法,都可以用乘法來代替.(有些算學表,載有從1到萬各整數的倒數可以直接檢查).

練習二

求下列各數的倒數:——

1. 8　　*2.* 5　　*3.* 12

4. .33333……　　*5.* 2^4　　*6.* $x-1$

7. $x-\frac{1}{x}$　　*8.* $\frac{x+1}{x-1}$　　*9.* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

先求16的倒數,再求下面各分數的數值:——

10. $\frac{3}{16}$　　*11.* $\frac{11}{16}$　　*12.* $\frac{15}{16}$

13. 已經知道4的倒數是.25,又8的倒數是.125;不用除法求32的倒數.

14. 已經知道16的倒數.0625,又8的倒數是.125;不用除法求$\frac{24}{128}$的數值.

15. 依倒數理,說明分數除法與分數乘法的關係.

(5)商的冪 *A Power of a Quotient* 假如有兩數的商如$\frac{a}{b}$,要找他的三次冪如$\left(\frac{a}{b}\right)^3$,依指數的定義,定律,和分式乘法的規則,便有

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}.$$

推廣起來得到

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\cdots\cdots\text{一直到}n\text{個因子}=\frac{a^n}{b^n}.$$

再推廣得: $\left(\frac{abc\cdots}{pq\cdots}\right)^n=\frac{a^nb^nc^n\cdots\cdots}{p^nq^n\cdots\cdots}.$

練習三

去下列各式的括號:——

1. $\left(\frac{2^3}{3^4}\right)^5$　2. $\left(\frac{7a^2b}{2x^3}\right)^4$　3. $\left(\frac{2x^my^{2m}}{a^2b^3}\right)^n$

4. 證明: $\frac{1}{x^n}=\left(\frac{1}{x}\right)^n$

5. 已知8的倒數是.125,不用除法求$\frac{73}{64}=?$

(6)因子與積 *Factors and Product* 從因子連乘得積,從積分解得因子;前一個是正運算,後一個是反運算;正運算自然可能,反運算却就不一定時時可能了.譬如有各處的人來到北京,再叫他回去,有的人原來生在北京,便用不着要回到那裏去.——代數式有的有因子,有的沒有因子,也就是這個道理.

沒有因子的固然不能分解,就是有了因子的,也因爲他的來路很多,變化無定,不容易尋出;所以我們分解因子,不但沒有普徧的方法,便是有幾種特殊的方法,也都要枝枝節節的先查明從因子發生乘積的來歷,再看他構造上有什麼關係,才能着手.

(7)二項因子 *Binomial Factors* 要研究因子同乘積的關係,如果因子的形式,不加限制,當然不勝其煩,無從入手;好在代數學上最重要的大約不外二項式,所以我們以下各節,就把兩個二項式做因子,分別研究.

(8)含兩項相同兩二項因子的代數式 這種代數式的產生,可用乘法求出如下:——

1. $(x+a)(x-a)=x^2-a^2$
2. $(x+a)(x+a)=x^2+2ax+a^2$
3. $(x-a)(x-a)=x^2-2ax+a^2$

上面三式:第一式是兩數和同較的積,第二三兩式是二項式的平方.

從因子看到乘積,有下列的關係:——

1. 凡是兩數和較的積,等於這兩數的平方較;
2. 凡二項式的平方,等於這兩項的平方和再加或減這兩項乘積的 2 倍.

反轉來,從乘積看到因子,我們就得到下面的兩種式的因子分解.

(一)兩平方較二項式的因子分解法

凡形式像兩數的平方較的二項式，都可以分做這兩數和同較的兩個因子.

有公式：　$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$.

(二)完全平方三項式的因子分解法

凡三項式有兩項是兩數的平方，其餘一項又是這兩數乘積的2倍;這種式就可以分做兩個同樣的因子，或是這兩數的和或是這兩數的較,看那兩數乘積的一項是正是負來決定.

有公式：　$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

練習四

不用二項式乘法,直接寫出下面各式的展開式:——

1. $(2x^2+3)(2x^2-3)$　　2. $(98+2)(98-2)$

3. $\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2$　　4. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\right)^2$

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{16}$

分解下面各式做兩因子:——

5. $25x^4-16y^4$　　6. $(x+y)^2-a^2$

7. x^2-25　　8. $(x+y)^2-(a-b)^2$

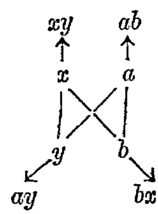
9. x^4-18x^2+81　　　10. $x^2-12x+36$

11. $x^2-16x+64$　　　12. $x^2+8x+16$

13. $25(a+b)^2+40(a+b)c+16c^2$

(9) 含兩項相異兩二項因子的代數式　這種代數式的產生,用乘法可求出如下:——

$$
\begin{array}{l}
x+a \\
\underline{y+b} \\
xy+ay \\
\underline{\quad +bx+ab} \\
xy+ay+bx+ab
\end{array}
$$



$\therefore\quad (x+a)(y+b)=xy+ay+ax+ab$

從因子看到乘積,有下列的關係:——

1. 乘積有四項:一項是因子兩首項的積,一項是因子兩末項的積,還有兩項是兩因子首末兩項交叉相乘的積.

2. 除交叉乘積的兩項同非交叉乘積的兩項之外,隨便那兩項都有公共的字母.

反轉來從乘積看到因子,我們又得到一種因子分解的方法.

分組分解因子法:—— 凡四項式把有公共字母的兩項做一組,分做兩組,各提出公共字母,變做帶有括號的兩項,如果兩括號裏,又恰是同樣因子,再提出便是.

例一. $xy+ay+bx+ab=(xy+ay)+(bx+ab)$

$=(x+a)y+(x+a)b$

$=(x+a)(y+b)$

例二. $x^3-5x^2+4x-20=(x^3-5x^2)+(4x-20)$

$=(x-5)x^2+(x-5)\times 4$

$=(x-5)(x^2+4)$

練習五

不用老老實實的乘法,直接寫出下面的乘積:——

1. $(x+2)(y-2)$　　2. $[(x-a)-b][(y-b)+a]$

3. $(x^2-3)(x+4)$　　4. $[(x+a)+(y+b)][(x-a)-(y-b)]$

分解下面各式的因子:——

5. x^3+x^2-x-1　　6. $8x^3-10x^2+12x-15$

7. $12x^3-6x^2+20x-10$　　8. $xy+2x-3y-6$

9. $15x^3-18x^2+20x-24$　　10. x^4-x^3+x-1

11. $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-1$　　12. $\frac{1}{xy}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ay}+\frac{1}{bx}$

(10)含首項相同兩二項因子的代數式 設兩因子的首項都是x,末項是p同q,但$p>q$,那麼這種代數式的產生,依乘法得出如下:——

$$
\begin{array}{llll}
x+p & x-p & x+p & x-p \\
\underline{x+q} & \underline{x-q} & \underline{x-q} & \underline{x+q} \\
x^2+px & x^2-px & x^2+px & x^2-px \\
\underline{\quad+qx+pq} & \underline{\quad-qx+pq} & \underline{\quad-qx-pq} & \underline{\quad+qx-pq} \\
x^2+(p+q)x+pq & x^2-(p+q)x+pq & x^2+(p-q)x-pq & x^2-(p-q)x-pq
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad (x+p)(x+q) &= x^2+(p+q)x+pq \\
(x-p)(x-q) &= x^2-(p+q)x+pq \\
(x+p)(x-q) &= x^2+(p-q)x-pq \qquad p>q \\
(x-p)(x+q) &= x^2-(p-q)x-pq \qquad p>q
\end{aligned}
$$

從因子看到乘積,得下列的關係:——

乘積依x的降冪序開列,是個三項式:

1. 頭一項是因子首項的平方;
2. 末一項是因子兩末項的積;
3. 中間一項是因子首末項交叉乘積的結合.

在這四個乘積裏有個最要注意的關係就是:

$$
\begin{cases}
\text{末項}pq\text{是正——}x\text{的係數是}p,q\text{的和;} \\
\text{末項}pq\text{是負——}x\text{的係數是}p,q\text{的較.}
\end{cases}
$$

倘若 p 同 q 都是數字,上面四個乘積就變成一個公共的形式:　x^2+bx+c,
就中 b 代表 p,q 的和或較,c 代表 p,q 的積,b,c 的正負號自然可以隨便變換.　這種式稱爲二次三項式 *Quadratic Trinomial.*

根據上述的關係,反轉來,從乘積看到因子,我們就得到一種二次三項式的因子分解.

二次三項式: x^2+bx+c 的因子分解法

把 c 分做兩個因數,譬如說 p 同 q $(p>q)$

$\begin{cases} c\text{若是正——就要分得}p,q\text{的和恰好是}b; \\ c\text{若是負——就要分得}p,q\text{的較恰好是}b. \end{cases}$

如果這種分法是可能的,那麼這個二次三項式的兩因子,便容易用分組分解求出*如下:—

$$\begin{aligned} x^2+bx+c &= x^2+(p+q)x+pq \\ &= x^2+px+qx+pq \\ &= (x+p)x+(x+p)q \\ &= (x+p)(x+q) \end{aligned}$$

*(注意)若是 b,c 的數值不很大,這種因子分解簡直可以從視察上一下寫出來.

例一. 分出 $x^2+7x+12$ 的因子.

1. 這裏12可分做兩因數如: $\begin{cases}12=1\times12\\12=2\times6\\12=3\times4\end{cases}$

2. 因爲12是正號,所以要分得兩因數的和恰好是7,那麼只有 $3+4=7$

3. 於是兩因子可用分組分解得到如下:—

$$\begin{aligned}x^2+7x+12&=x^2+(3+4)x+12\\&=x^2+3x+4x+12\\&=(x+3)x+(x+3)\times4\\&=(x+3)(x+4)\end{aligned}$$

例二. 分解 $x^2+4x-12$ 做兩因子.

1. 這裏12是負可分做

1×12;　　2×6;　　3×4

要分得兩因數的較恰好是4,只有 $6-2=4$

2. 所以 $$\begin{aligned}x^2+4x-12&=x^2+(6-2)x-12\\&=x^2+6x-2x-12\\&=x(x+6)-2(x+6)\\&=(x+6)(x-2)\end{aligned}$$

例三. 分解 $x^2-8x+12$

1. 從8同12(是正號)一望就知道:

$$12=2\times6 \quad \text{恰好有} \quad 2+6=8$$

2. 於是兩因子可從視察一直寫出如下:——

$$x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$$

例四. 分解 x^2-x-12

1. 從1同12(是負號)一望便知道:

$$12=3\times4 \quad \text{同} \quad 4-3=1$$

2. 依視察得: $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$

例五. 分解 $3x^2-6x-72$

1. 因爲這式的各項有個公共的因數3,可以先行提出,變做: $3(x^2-2x-24)$

2. 再依法分解 $x^2-2x-24$ 就得

$$3x^2-6x-72=3(x^2-2x-24)=3(x+4)(x-6)$$

例六. 分解 $x^2-6x+11$

這裏11(是正號)的兩因數,只有1×11,無論如何不能凑出和數6來;所以這種題在我們的因子分解法上,是不可能的問題.

練習六

不用老老實實的長乘法,直接寫出下面各乘積:——

1. $(x-7)(x+9)$
2. $(x-6)(x-11)$
3. $(3-x)(5+x)$
4. $(x+2)(x-8)$
5. $(x+11)(x+4)$
6. $(x+12)(10-x)$

分解下面各式的因子:——

7. $x^2+11x+24$
8. $x^2-5x-24$
9. $x^2+11x+18$
10. $x^2+5x-36$
11. $x^2-2x-48$
12. $x^2-18x+77$
13. $x^2+8x+15$
14. $x^2-6x-91$
15. $x^2-11x+30$
16. x^2-x-30
17. $x^2-17x+16$
18. $x^2-8x-20$
19. $x^2-13x+40$
20. $x^2-15x+54$
21. $x^2+13x+12$
22. $x^2+23x-24$
23. $x^2-17x+72$
24. $x^2-15x+44$
25. $x^2-13x+42$
26. $x^2+9x+20$
27. $x^2+21x+108$
28. $x^2-8x-84$
29. $x^2+21x+90$
30. $x^2+20x+51$
31. $96+4x-x^2$
32. $72-x-x^2$
33. $x^2-20x+84$
34. $x^2-25x+156$

(11)含首項相似兩二項因子的代數式　這種因子可把 $mx+p$ 同 $nx+q$ 兩個一次二項式來代表，於是從這種兩因子產生的乘積可依乘法得到如下:——

$$\begin{array}{l} mx+p \\ \underline{nx+q} \\ mnx^2+npx \\ \underline{\qquad\quad +mqx+pq} \\ mnx^2+(np+mq)x+pq \end{array}$$

$$\therefore (mx+p)(nx+q)=mnx^2+(np+mq)x+pq$$

變換 p,q 的正負號,也可得到同前節大同小異的四個乘積，并且那構造上也都有同樣的關係——但是這裏還有一個最關重要的性質必須注意:

首項 x^2 的係數乘末項 pq 的積,恰好等於中間一項 x 的係數改作乘積的數值:——

$$mn\times pq=np\times mq.$$

倘若 m,n,p,q 都是數字，那麼這種乘積都可以用二次三項式: ax^2+bx+c 來代表.

根據上面所說的各關係,我們就得到一個更普徧的二次三項式的因子分解法如下:—

二次三項式 ax^2+bx+c 的因子分解法

把 $a\times c$ 的積分做兩個因數*,譬如說 g 同 h,

$\begin{cases} c\text{若是正——就要分得 } g,h \text{ 的和,恰好是 } b; \\ c\text{若是負——就要分得 } g,h \text{ 的較,恰好是 } b. \end{cases}$

如果這種分法是可能的,那麼這二次三項式的兩因子便容易用分組分解法求出如下:

因爲 ax^2+bx+c 原來代表 $mnx^2+(np+mq)x+pq$,可見剛才所分得的兩因數 g 同 h 實在就是

$$np=g$$
$$mq=h$$

於是
$$\begin{aligned} ax^2+bx+c&=ax^2+(g+h)x+c \\ &=mnx^2+(np+mq)x+pq \\ &=mnx^2+npx+mqx+pq \\ &=nx(mx+p)+q(mx+p) \\ &=(mx+p)(nx+q) \end{aligned}$$

(附註)倘若 a 同 c 都是質數,或是所含因數不多,那麼可以不必找 ac 的積,只要把 a 同 c 各分做兩因數再用交叉乘法,有時也可以湊出 b 來(看例題六).

*(注意)若ac乘積數值很大,這件分解因數的事,就往往不容易辦到,最好用下面的試乘法:

(一)若c是正——就把b分做兩部份(整數),使這兩部份都很近於b的一半. 把這兩數做試乘的兩數,乘起來看看是不是能等於ac. 如果嫌大,就從小的數裏移個1加到大的數再試乘,若還嫌大,再移1再乘,有時太大,便一下移動好幾個也不妨; 照這樣逐次試乘下去,自然會得出(如果有的話)恰合的兩因數; 否則,到了移動1個嫌大不移又嫌小的時候,便可斷定這種分解的不可能.

(二)若c是負——就把c分起節來開平方,只要開到單位為止. 把這開得的數同這數加上b,做兩試乘數,乘起來看看是不是等於ac. 如果嫌大,就各減1,嫌小各加1,再試乘. 有時太大便一下各多減去幾個也不妨;照這樣逐次試乘下去,直到兩試乘數各多1嫌大各少1又嫌小的時候,便可斷定這種分解的不可能.

例一. 分解 $3x^2-10x+8$

1. 這裏3×8是24可以分做兩因數如下:——

$$\begin{cases}24=1\times24\\24=2\times12\\24=3\times8\\24=4\times6\end{cases}$$

2. 因爲末項的 8 是正, 要分得兩因數的和恰好是10, 只有 $4+6=10$

3. 於是 $3x^2-10x+8=3x^2-(4+6)x+8$

$$=3x^2-4x-6x+8$$
$$=x(3x-4)-2(3x-4)$$
$$=(x-2)(3x-4)$$

例二. 分解 $6x^2+7x-20$

1. 這裏 $6\times20=120$ 因爲末項20是負,要分得120做兩因數他的較恰好是7,只有

$$120=15\times8 \text{ 同 } 15-8=7$$

2. 所以 $6x^2+7x-20=6x^2+(15-8)x-20$

$$=6x^2+15x-8x-20$$
$$=3x(2x+5)-4(2x+5)$$
$$=(2x+5)(3x-4)$$

例三.　分解: $12x^2+59x+72$

1. 這裏72是正,又要分864(=12×72)做兩因數,他的和恰好是59,這種分法頗難,用試乘法如下:

把59分做　$30\times29=870$　太大

加減再試　$31\times28=868$　還太大

直到　$32\times27=864$　恰好

2. 於是
$$\begin{aligned}12x^2+59x+72&=12x^2+(32+27)x+72\\&=12x^2+32x+27x+72\\&=4x(3x+8)+9(3x+8)\\&=(3x+8)(4x+9)\end{aligned}$$

例四.　分解　$12x^2-5x-72$

1. 這裏72是負.要分864(=12×72)做兩因數他的較恰好是5　從　$\sqrt{864}=29+(?)$ (只開到單位根)

那麼　$29\times34=986$　太大　$(34=29+5)$

各減1再試　$28\times33=924$　還太大

再減1再試　$27\times32=864$　恰好

2. 於是
$$\begin{aligned}12x^2-5x-72&=12x^2-(32-27)x-72\\&=12x^2-32x+27x-72\\&=4x(3x-8)+9(3x-8)\\&=(3x-8)(4x+9)\end{aligned}$$

例五.　分解: $24x^2+64x-90$

這裏90是負,要分$2160(=24\times90)$做兩因數,他的較是64.　從　$\sqrt{2160}=46+\cdots\cdots\cdots$

先試乘	$46\times110=5060$	太大$(110=46+64)$
各減16再試	$30\times94=2820$	還太大
各減4再試	$26\times90=2340$	稍大
各減1再試	$25\times89=2225$	還嫌大
各再減1	$24\times88=2112$	又嫌小

這裏最後兩乘數各多1嫌大,各少1嫌小,可見這種分法不能得到整數,從此便可斷定這種因子分解的不可能.

例六.　分解: $14x^2+11x-15$

這裏14同15所含因數不多,只有$14=1\times14=2\times7$, $15=1\times15=3\times5$. 用交叉乘法如下:

$$\begin{array}{ccc}1 & & 15\\ & \times & \\ 14 & & 1\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}1 & & 1\\ & \times & \\ 14 & & 15\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}2 & & 3\\ & \times & \\ 7 & & 5\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}2 & & 5\\ & \times & \\ 7 & & 3\end{array}$$

只有第三式能湊出,因15是負,較數$3\times7-2\times5$是11,故由視察得到　$14x^2-11x-15=(2x+3)(7x-5)$

練習七

用交叉乘法,直接寫出下面各乘積:——

1. $(3x+8)(4x-9)$.　　2. $(8x-5)(6x-7)$.

3. $(2x-11)(3x+7)$.　　4. $(10-x)(5+4x)$.

分解下面各式的因子:——

5. $6x^2-19x+15$.　　6. $6x^2+17x+12$.

7. $12x^2+7x-12$.　　8. $15x^2-29x-14$.

9. $12x^2+8x-15$.　　10. $20x^2-41x+20$.

11. $6x^2-17x-14$.　　12. $12x^2+x-20$.

13. $27x^2+60x+32$.　　14. $27x^2-60x+32$.

15. $27x^2+12x-32$.　　16. $27x^2-12x-32$.

17. $36x^2+59x+32$.　　18. $32x^2-84x+27$.

19. $27x^2+100x-32$.　　20. $27x^2-87x-32$.

21. $32x^2+36x-81$.　　22. $24x^2-86x+72$.

23. $24x^2+22x-72$.　　24. $21x^2-40x+16$.

25. $20x^2+17x-24$.　　26. $20x^2-52x-24$.

27. $15x^2+44xy-20y^2$.　　28. $20x^2-xy-99y^2$.

29. $30x^2-xy-20y^2$.　　30. $21x^2+26xy-15y^2$.

31. $27x^2+15x-32$.　　32. $30x^2+43x-15$.

33. $35x^2-83x+36$.　　34. $32x^2-85x+27$.

35. $10x^2+20x-15$.　　36. $32x^2-24x-108$.

(12) 二項式的立方　二項式的平方公式前面已經講過，若再把原二項式去乘他，便得立方公式如下：——

$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$

$$(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$$

看這兩立方式有下面各性質：——

這種立方，依 x 的降冪序開列，是個四項式：

1. 因子是兩數和，那麼立方各項都是正，若是較，就一正一負相間.

2. x 的指數各項順次少 1；a 的指數就順次多 1：最大的指數都是 3（最小的可算是 0）.

3. 各項的數係數是：1——3——3——1.

利用這兩公式求立方，可免去連乘的麻煩.

例. 求 $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^3=?$

$$\left(3x-\frac{1}{3}\right)^3=(3x)^3-3\cdot\frac{1}{3}\cdot(3x)^2+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot3x-\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$=27x^3-9x^2+x-\frac{1}{27}$$

(13) 二項立方和較的因子　知道二項平方較有兩因子，我們當然想起二項立方較或者也可分解；是的，不但是較，并且和也都可能.

(一)從　　$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

用 $x+a$ 乘兩端　$(x^2-a^2)(x+a)=(x-a)(x+a)^2$

$$x^3-a^3+ax^2-a^2x=(x-a)(x+a)^2$$

$$x^3-a^3+(x-a)ax=(x-a)(x^2+2ax+a^2)$$

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+2ax+a^2)-(x-a)ax$$

$\therefore$　　$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$　　　(公式)

(二)從　　$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

用 $x-a$ 乘兩端　$(x^2-a^2)(x-a)=(x+a)(x-a)^2$

$$x^3+a^3-ax^2-a^2x=(x+a)(x-a)^2$$

$$x^3+a^3-(x+a)ax=(x+a)(x^2-2ax+a^2)$$

$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-2ax+a^2)+(x+a)ax$$

$\therefore$　　$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$　　　(公式)

練習八

不用乘法求下列各結果:

1. $(3x+5)^3=?$　　　2. $(2x-7)^3=?$

3. $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^3=?$　　　4. $\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{3}\right)^3=?$

分解下列各式的因子:

5. $27x^3-1.$　　　6. $x^3+64.$　　　7. $8x^3+27.$

8. $x^3-125.$　　　9. $x^3+\frac{1}{8}.$　　　10. $\frac{x^3}{9}-9.$

(14)用因子化簡分式 運算代數分式,當分式非常複雜時,利用因子分解往往能够省了許多麻煩不過的乘除.看下例便知道.

例一. 化簡 $\dfrac{1}{x-\dfrac{4}{x}}-\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{2}-2}$

$$\frac{1}{x-\dfrac{4}{x}}-\frac{1}{\dfrac{x^2}{2}-2}=\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{x^2-4}=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x+2}$$

例二. 化簡 $\dfrac{6x^2+5x-6}{8x^2+18x+9}$

$$\frac{6x^2+5x-6}{8x^2+18x+9}=\frac{(2x+3)(3x-2)}{(2x+3)(4x+3)}=\frac{3x-2}{4x+3}$$

例三. 化簡 $\dfrac{3x+3y}{2x^2-2y^2}\times\dfrac{2x^3-2y^3}{3x^2+3y^2}$

$$\frac{3x+3y}{2x^2-2y^2}\cdot\frac{2x^3-2y^3}{3x^2+3y^2}=\frac{3(x+y)2(x-y)(x^2+xy+y^2)}{2(x^2-y^2)3(x^2+y^2)}=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}.$$

練習九

化簡下列各分式:——

1. $\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-a}{x+a}+\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}$.

2. $\dfrac{ax-bx}{a^2-b^2}$.

3. $\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-x-6}$.

4. $\dfrac{4x^2+4x+1}{4x^2-1}$.

5. $\dfrac{1-n^2}{1-2n+n^2}$.

6. $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\times\dfrac{4x}{x+y}$.

7. $\dfrac{(a+b)^3}{a^2-b^2}\times\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2}$.

8. $\dfrac{x-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}$.

(15)分式方程 *Fractional Equations*　方程裏面帶有分式,叫分式方程. 解分式方程同平常解方程原來沒有兩樣, 不過開始的時候多一番運算分式的手續罷了.

例一. 解出方程: $\frac{x}{x-2}+\frac{6}{x+2}=1$ 裏的 x.

把 $(x+2)(x-2)$ 去乘方程兩端的各項得

$$\frac{x(x-2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}+\frac{6\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}=(x+2)(x-2)$$

消去因子　$x(x+2)+6(x-2)=(x+2)(x-2)$

去括號　$\cancel{x^2}+2x+6x-12=\cancel{x^2}-4$

消去 x^2　$2x+6x=12-4$　$\therefore x=1$

例二. 解方程:　$\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-5}{x-6}$

先寫原式做　$\frac{x-6}{x-7}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-1}{x-2}$

運算分式　$\frac{(x-6)^2-(x-5)(x-7)}{(x-7)(x-6)}=\frac{(x-2)^2-(x-1)(x-3)}{(x-3)(x-2)}$

乘出分子　$\frac{1}{(x-7)(x-6)}=\frac{1}{(x-3)(x-2)}$

當然　$(x-7)(x-6)=(x-3)(x-2)$

去括號　$x^2-13x+42=x^2-5x+6$

於是　$x=4.5$

練習十

解出下列各方程裏的 x 並覆驗:—

1. $\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{23-x}{3x}+\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{4x}$　　*2.* $\dfrac{5x-16}{x-5}=\dfrac{5x-3}{x+5}$

3. $\dfrac{5-2x}{x-1}-\dfrac{2-7x}{x+1}=\dfrac{5x^2+4}{x^2-1}$　　*4.* $\dfrac{3x+7}{4x+5}=\dfrac{3x+5}{4x+3}.$

5. $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{8}{4x^2-1}=\dfrac{2x-1}{2x+1}$　　*6.* $\dfrac{29-10x}{9-5x}=\dfrac{5+36x}{18x}$

7. $\dfrac{13}{8}-\dfrac{5x}{4x+8}=\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{2}$

8. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{5}{2x-2}=\dfrac{8}{3x-3}-\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{5}{18}$

9. $\dfrac{2x-13}{2x-16}+\dfrac{2(x-6)}{x-8}=\dfrac{7}{8}+\dfrac{2(5x-39)}{3x-24}$

11. 一件工程,甲作3日可完,乙作4日可完.問二人合作要幾日可完工?

12. 有工程,甲5日作完,乙6日作完,丙7日作完.問三人合作要幾日可完工?

13. 犬走2步時兎可走3步,但犬3步的路等於兎的5步.如果兎已經走了70步問犬要幾步可追到兎?

14. 有兩管通進一隻水槽:一管要3點鐘可以灌滿這水槽,他管要4點鐘才能灌滿;還有一個放水管在6點鐘裏能把滿水放盡.假如空槽各管都開,問幾點鐘水槽可滿?(設 x=灌滿的時間)

(16)倒數聯立方程　方程裏有未知數的地方,都是這未知數的倒數,這種方程,最好另設字母去代替那未知數的倒數再去求解.

例:　解聯立方程 $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=9\\[2mm]\dfrac{6}{5x}-\dfrac{3}{2y}=1\end{cases}$

先設　$u=\dfrac{1}{x};\ v=\dfrac{1}{y}$

原方程變做　$2u+3v=9;\ \dfrac{6}{5}u-\dfrac{3}{2}v=1$

解出u同v　$u=\dfrac{5}{2};\ v=\dfrac{4}{3}$

所以　$x=\dfrac{1}{u}=\dfrac{2}{5};\ y=\dfrac{1}{v}=\dfrac{3}{4}$

(附註)　不用u,v代替,簡直用$\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}$看做未知數也可解.

練習十一

解出下列各方程並覆驗:——

1. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=7\\[2mm]\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=2\\[2mm]\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}=1\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=1\\[2mm]\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{8}{y}=3\\[2mm]\dfrac{15}{x}-\dfrac{4}{y}=4\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{b}=3\\ \dfrac{6}{a}-\dfrac{2}{b}=1\end{cases}$　　6. $\begin{cases}\dfrac{1}{2r}-\dfrac{2}{5s}=4\\ \dfrac{5}{r}+\dfrac{6}{s}=7\end{cases}$

7. 水槽有兩管:甲管開2點鐘,乙管開4點鐘可以灌滿;又甲管開4點鐘,乙管開2點鐘也可以灌滿. 問甲乙兩管單獨灌滿要幾點鐘?(設 x, y 代所求時間)

8. 河水常流,舟人從某處往下游14里的地方來往共費6點40分鐘. 只知道他倒水划3里的時間順水能划7里,問這次來往各費幾時?(設 x 代替舟人在靜水裏划船速度,y 代替水流速度.)

達達烈的小傳 (1500—1557)

達達烈意大利人。這個名字在西文是口吃的意思。十二歲時法國攻破意大利，大肆殺掠。父爲郵差，已被殺。達達烈頭部受傷三處，齒腭都被割破，丟在那裏等他死。後來他的母親找着他還有生氣，設法醫治，竟得再生；但是從此說話起來，卻就急急結結的，所以才有這個口吃的綽號。

達達烈的母親，盡出所有的錢，只能供給他的學費十五天，達達烈趁這機會，在學校裏偷出一本練習簿，從此他才能自己教自己寫字讀書。達達烈窮到連紙都買不起來，他曾對人說，他幼時常常把人家的墓碑當作石板來練習他的算學。

達達烈最大的發明，就是三次方程解法。當時有一位著名算學家斐阿利 *Fiori*，由他的先生弗羅 *Ferro*，也得到一種三次方程解法，但只是達達烈的特例。達達烈得名就在同斐阿利比賽算學。雙方交換出題考驗，各出三十題，一月交卷。大概都是三次方程的問題。達達烈在兩小時裏便完全算出；斐阿利一個也做不來。達達烈因此名譽大噪，不久便被聘爲威尼斯算學教授，直到終身。

達達烈雖然發明了三次方程解法多年，但是好久沒有印書。後來有算學家迦但 *Cardan* 把他的方法騙了去，先一年印書，所以如今還有誤認做迦但的方法的。

Tartaglia

達達烈的肖像

第二章　二次方程

Quadratic Equation

(1)什麼叫二次方程 *Quadratic Equation*? 有些問題,常常引起一種方程,裏邊不但有未知數(一次羃),并有這未知數的二次羃. 譬如:有長方:長闊相差半尺,面積14方尺,求長闊.

設　　$x=$闊邊

那麼　　$x+\frac{1}{2}=$長邊

從長方面積同長闊的關係,得方程:

$$x\left(x+\frac{1}{2}\right)=14$$

變做　　$2x^2+x=28$

這個方程裏邊未知數最高的羃是二次,因此叫二次方程. 從前我們解一次方程的方法,遇到這種問題,只好束手. 現在這章書的目的,就是要研究怎樣去解這種方程.

(2)方程的整理法 從問題開列方程,問題裏有種種的情狀,方程就有種種的形式. 隨便取一方程,要問他是幾次方程,往往沒有意義. 因爲"幾次""幾次"的話,只有整式才可講,如果方程裏帶有分式,根式,以及運算未了的括號,都無次可言. 所以要知道一個方程的次數,非把方程來整理一番不可.

譬如有方程: 1. $\frac{x}{x-2}+\frac{4}{x+1}=3$

2. $(x+1)(x-3)=5$

3. $x=7-\sqrt{x^2-7}$

究竟那個是一次?那個是二次? 此刻都無從分辨. 須照下面的方法整理後,才能斷定.

整理方程的手續:——

(一)把方程兩端都化做整式

a. 去分母——方程裏有未知數做分母,應把這分母遍乘各項去掉他.

b. 去括號——方程裏有包含未知數的括號,應照代數式運算去掉他.

c. 去根號——方程裏有含未知數的根號(譬如平方根),應使根式獨立存在方程的一端,然後兩端各自乘去掉他.

(二)　把各項聚到一端(左端),歸併係數.

依這方法,上面三式可整理如下:——

例一.　　整理方程: $\frac{x}{x-2}+\frac{4}{x+1}=3$

去分母	$x(x+1)+4(x-2)=3(x-2)(x+1)$
去括號	$x^2+x+4x-8=3x^2-3x-6$
聚到一端	$3x^2-x^2-3x-4x-x-6+8=0$
歸併係數	$2x^2-8x+2=0$　　是二次方程.

例二.　　整理方程: $(x+1)(x-3)=5$

去括號	$x^2-2x-3=5$
聚到一端	$x^2-2x-8=0$　　也是二次方程.

例三.　　整理方程: $x=7-\sqrt{x^2-7}$

使根式獨在一端	$\sqrt{x^2-7}=7-x$
兩端各自乘	$x^2-7=(7-x)^2$
去括號	$x^2-7=49-14x+x^2$
聚到一端	$x^2-x^2+14x-7-49=0$
歸併係數	$14x-56=0$　　是一次方程.

(3) 一次方程與二次方程通式 *General Form*

方程只含一未知數x,依法整理之後,x的最高冪是一次就是一次方程,是二次就是二次方程. 各項依x的降冪序開列,令a, b, c等字母代表x各冪的係數,及不含x的項(其實也可說是x^0的係數),就有:

一次方程通式 $ax+b=0$ 代表一切的一次方程.

二次方程通式: $ax^2+bx+c=0$ 代表一切的二次方程.

當中a, b, c各數,除了$a \neq 0$之外,可算是任何或正或負的已知數.

練習十二

整理下列各方程,并分別他們的次數:

1. $2-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x-4}{x+3}$　　2. $\dfrac{x+3}{x-5}+7=x-8$

3. $x-4=\sqrt{x^2+3}$　　4. $\sqrt{x(x-3)}=3x+1$

5. $(x+3)(x-5)=x+3$　　6. $(x-2)(x+1)=x(x+5)$

把下列各方程化做通式,指出a, b, c的正負數值:

7. $\dfrac{2x}{x-4}=\dfrac{x+2}{3x}+6$　　8. $3x+\dfrac{5}{x+1}=4$

9. $\sqrt{x^2-5}=x+6$　　10. $2+\sqrt{3x-2x^2}=2x$

11. $20+8x^2=(x+2)(x-3)$　　*12.* $3x(3x+1)=2(1-x)$

13. $12x+2x^2-3=(x+5)(x+8)-36$.

(4) **二次方程解法**　從前我們解一次方程的方法,大部份都屬於整理方程的範圍,其實已經整理了的一次方程,解法極其簡單,只要移項一除便了.譬如從 $ax+b=0$ 立刻可得 $x=-\frac{b}{a}$.

但是解二次方程,却就不像這般容易,解法也不止一種,下面分節細細說來.

(5) **代數式與函數**　一個代數式裏邊若有一個沒有定值的 x,這個代數式的數值,就全靠這 x 的數值來定.譬如要知道 $\frac{2}{x^2+1}$ 的數值,先要知道 x 的數值;若 x 的數值變換,$\frac{2}{x^2+1}$ 的數值也就跟着變換.照我們變數與函數的話來講:x 是自變數,這代數式是 x 的函數.

例如:　$\frac{2}{x^2+1}$;　x^2-4x+1　都是 x 的函數

πr^2;　$2\pi r$　都是 r 的函數.

總說一句話:凡是含有變數的代數式,就是這變數的函數.

(6)二次方程解法一——格欄幅解法 *Solution by Graph* 二次方程曾經整理之後,一端是 0, 一端是含x的代數式。

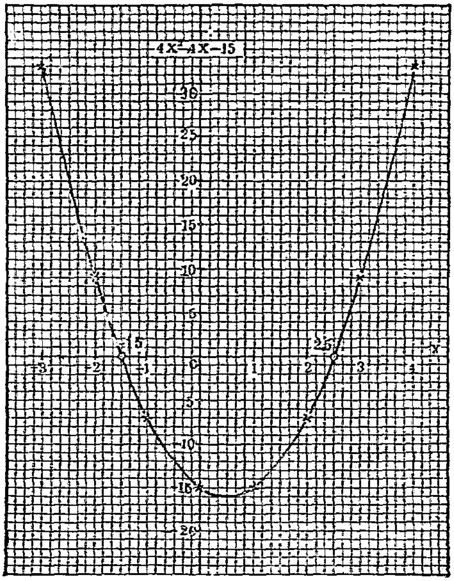
譬如:
$$4x^2-4x-15=0$$

讓我們單討論這個代數式: $4x^2-4x-15$, 裏邊有x,是個x的函數,x的數值變換,這函數的數值就跟着變換. 假如給x一套正負整數,找出這函數的一套對應數值,看下面的表.

取方格紙作正交兩坐標,將横軸代表x的數值,縱軸代表這函數的數值,依表裏開列的一對一對的對應數值,描點作格欄輻如圖一.

那麼得了! 現在我要問"我們想解這二次方程:
$$4x^2-4x-15=0$$
到底是個什麼意思呢?" 不是要找x的數值,能適合這方程嗎? 換一句話說:就是要找x的數值,能令這函數 $4x^2-4x-15$ 恰等於0. 從圖上一望,便知道這格欄幅同x軸相交的兩點能恰合這個條件.

x	$4x^2-4x-15$
-3	32
-2	9
-1	-7
0	-15
1	-15
2	-7
3	9
4	32



(圖　一)

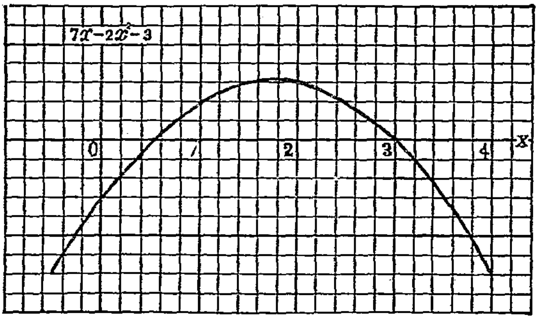
看圖讀出: $\left.\begin{array}{l} x=\quad 2.5 \\ x=-1.5 \end{array}\right\}$ 就是這方程的兩根.

覆驗: $\left.\begin{array}{ll} x=\quad 2.5, & 4(2.5)^2-4(2.5)-15=0 \\ x=-1.5, & 4(-1.5)^2-4(-1.5)-15=0 \end{array}\right\}$ 都能適合.

如此我們不但得了這方程的解, 同時并知道二次方程有兩個解(或說兩個根).

又如有方程: $7x-2x^2-3=0$

依法描點作出 $7x-2x^2-3$ 的格欄幅如圖二.



(圖　二)

從圖讀出:
$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=3 \end{array}\right\}$$ 就是這方程的兩根. 你們自己覆驗.

(注意)這裏 x^2 的係數是負,曲線倒過頭來

練習十三

用格欄幅解法,解下列各方程,如果根不是整數,估出分數的值,再代替到方程裏來覆驗:——

1. $x^2-2x+24=0$　　　　2. $4x^2-3x-10=0$

3. $3x^2+20x+32=0$　　　　4. $8x^2+10x-25=0$

解出下列各方程的根(橫軸用十小格表示單位)讀出小數兩位. 覆驗時依四捨五入求結果.

5. $\sqrt{3(7-x)}=3x-1$　　6. $\sqrt{2x}=x-2$

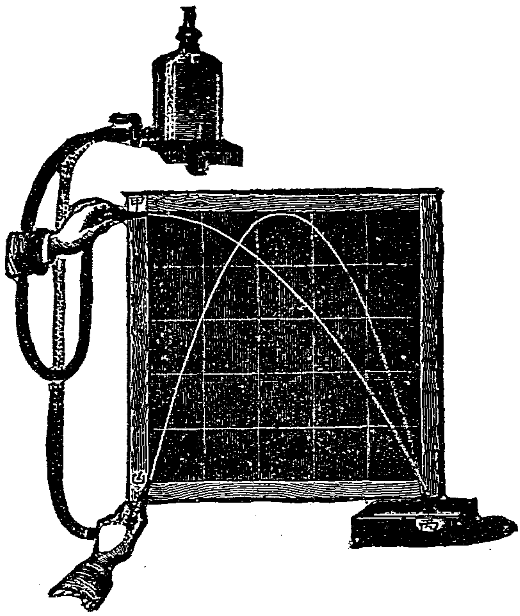
7. $\frac{6x}{x+1}+\frac{x-10}{x}=4$　　8. $\frac{x+7}{9-4x^2}=\frac{1-x}{2x+3}+\frac{4}{2x-3}$

9. 在同一坐標系裏用格欄幅解下兩方程,并說明他們的關係: $6x^2-x-12=0$, $12+x-6x^2=0$.

10. 在同一坐標系裏用格欄幅解下三方程并說明他們的關係:

$$2x^2-x-3=0$$
$$4x^2-2x-6=0$$
$$8x^2-4x-12=0$$

(7)二次函數與拋物線　凡是整理了的二次方程,結果都是一個二次三項式: ax^2+bx+c. 這種式叫二次函數 *Quadratic Function*. 從上面的練習,你們知道這種二次函數的格欄幅,都是一條一彎兩開的曲線. 這種曲線叫拋物線*Parabola*; 因爲我們向空中拋物,物在空中所經過的路線,就是這種曲線. 譬如礮彈射擊;水管噴水;網球;足球的動路,都是這種曲線,看下圖噴水的實驗.



(圖 三)

(8) **0 的運算** <u>*Operation of 0*</u> 一數加0不見多,減 0 不見少,所以 0 在加減運算上不生效力;但是乘除起來;却就有些特異的地方.

0的加法	$a+0=a$
0的減法	$a-0=a$
0的乘法	$0\times a=0$
0的除法	$\frac{a}{0}=?$

0的乘除——"一數乘0,還等於0"是0的一個最重要的性質;反轉來,一數被0所除却就是不可能的事.

譬如假設 $\frac{a}{0}=x$

無異要找 $0\times x=a$

但是無論x是什麼數只有

$$0\times x=0$$

不能有 $0\times x=a$

所以$\frac{a}{0}$是不可能的運算. 換句話說:就是在我們的數目系統裏,沒有像0這般的數,因此尋常算學上遇到0除的時候,往往發生例外,或者簡直引起謬妄.

$\frac{a}{0}$的意義——雖然,算學家爲了要運算普徧起見,這種不可能的事,也要給他一種解釋.

你們知道: $\dfrac{a}{\left(\frac{1}{10}\right)}=10a$

又知道: $\dfrac{a}{\left(\frac{1}{100}\right)}=100a$; $\dfrac{a}{\left(\frac{1}{1000}\right)}=1000a$

乃至 $\dfrac{a}{\left(\frac{1}{1,000,000}\right)}=1,000,000a$

從此我們可以推測:除數愈小,得數就愈闊愈大,及到小極了小到了 0,得數當然大到無限.　　$\therefore\ \frac{a}{0}=$一個極大的數.

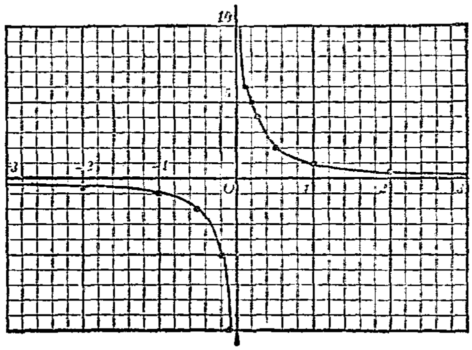
這數不好叫做什麽數,只好用一個記號去表示他,寫做　　$\frac{a}{0}=\infty$

反轉來就知道:　　$\frac{a}{\infty}=0$

練習十四

1. 設x,y是正變的兩量如$y=12x$. 問當$x=0$的時候,$y=$?;又當$x=\infty$時,$y=$?

2. 設x,y是反變的兩量如$xy=1$. 問當$x=0$時,$y=$?;又當$x=\infty$時,$y=$?　圖四是$xy=1$的格欄幅,試讀出當$x=0$時y有正負兩值,又$y=0$時x也有兩值.



(圖四)

3. 下面算式證明1=2,指出謬誤在什麼地方.

設 $x=a$

那麼 $x^2-ax=x^2-a^2$

分解因子 $x(x-a)=(x+a)(x-a)$

消去$(x-a)$ $x=x+a$

卽是 $x=2a$

所以 $1=2$

(9) 0 的因子定律 從乘法運算上,我們知道:"隨便兩數或是幾數連乘所得的積,決不能是0,除非乘數裏有一個或幾個是0";因此就有0的因子定律如下:——

兩個或多個因子的積若等於0,那麼這些因子裏至少有一個等於0.

(一)譬如圓周是0,就有 $2\pi r=0$

$\because\ 2\pi\neq 0$ $\therefore$ 必有 $r=0$

(二)又如長方面積是0,就有 $ab=0$

若是 $a\neq 0$ 那麼必有 $b=0$;

若是 $b\neq 0$ 那麼必有 $a=0$;

或是旣有 $a=0$ 又有 $b=0$.

(10)二次方程解法二——因子解法 *Solution by Factoring.* 二次方程曾經整理之後,一端是0,一端是個二次三項式. 如果這二次三項式,可以分解做兩個因子,那麼這二次方程便立刻可解.

例一. 解方程 $x^2-5x+6=0$

分解因子得 $(x-2)(x-3)=0$

按照 0 的因子定律,這裏兩個因子$x-2$同$x-3$至少有一個是0,或都是0.

$$\left.\begin{array}{llll}\text{若是} & x-2=0 & \text{那麼} & x=2\\ \text{若是} & x-3=0 & \text{那麼} & x=3\end{array}\right\}\text{有兩根}$$

覆驗:
$$\left.\begin{array}{ll}x=2 & 2^2-5\times2+6=0\\ x=3 & 3^2-5\times3+6=0\end{array}\right\}\text{兩根都適合}$$

可見兩因子都是0,而且我們又知道二次方程可有兩個根.

例二. 解方程 $2x^2+x-28=0$ (參看本章1節)

分解因子得 $(x+4)(2x-7)=0$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{若是}\ x+4=0 & \text{那麼}\ x=-4\\ \text{若是}\ 2x-7=0 & \text{那麼}\ x=\dfrac{7}{2}\end{array}\right\}\text{有兩根}$$

覆驗：$x=-4$　$2(-4)^2+(-4)-28=0$

$x=\frac{7}{2}$　$2\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{2}-28=0$　兩根都適合

練習十五

用因子解法解下列各方程,並覆驗：

1. $x^2-6x+8=0$　　2. $x^2-6x-27=0$
3. $2x^2+5x+3=0$　　4. $12x^2+5x-72=0$
5. $6x^2=23x+4$　　6. $10x^2+33x=7$
7. $72-x-x^2=0$　　8. $72x^2+30=3x$

整理下面各方程,再用因子解法求根幷覆驗：

9. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x}$　　10. $\frac{33}{x^2}+\frac{4}{x}=5$
11. $x-10=\sqrt{3(x-4)}$　　12. $\sqrt{3x+4}=1-6x$
13. $\frac{4x}{x-1}+\frac{x-10}{x}=4$　　14. $\frac{x}{x-3}-\frac{x-1}{x+3}=2$
15. $59+x=\frac{660}{x}$　　16. $x(546x-1)=1227$
17. $5(x^2+5)=3(x^2+25)$　　18. $2(x^2-17)=7(x^2+2)$
19. $4x-\frac{14-x}{x+1}=14$　　20. $\frac{3}{x-5}+\frac{2x}{x-3}=5$
21. $7(x^2-1)-(x+3)(x-3)-56=0$
22. $3x-\frac{3x-10}{9-2x}-2-\frac{6x^2-40}{2x-1}=0$
23. 練習十二裏的方程,那幾個可用因子求解?

(11)二次方程解法三——湊方解法 Solution by completing Square　你們知道: $x^2+2ax+a^2$ 是個完全平方, 可見若是我們單有一個代數式像 x^2+2ax, 可以把他湊成一個完全平方. 怎樣湊法呢? 只要加上 a 的平方. 從那裏看出這個 a 來呢? 從 x 的係數一半看出來. 換句話說: 就是要加上 x 的係數一半的平方. 那麼好了! 我們的二次方程, 有了一個最有把握的解法了. 譬如:

例一.　　解方程: $x^2-6x=16$

把左端湊成平方, 加上6的一半 (就是3) 的平方 9; 同時爲了要維持等式, 就得方程兩端都加上 9, 變做　　$x^2-6x+9=16+9$

即是　　$(x-3)^2=25$

兩端開方　　$x-3=\pm 5$

於是　　$x=3\pm 5$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{用 + 號得} & x=3+5=8 \\ \text{用 − 號得} & x=3-5=-2\end{array}\right\}\text{也有兩根}$$

覆驗: $x=8 \quad (8)^2-6(8)-16=0$, $x=-2 \quad (-2)^2-6(-2)-16=0$ 兩根都合

這裏我們又看見二次方程可有兩根.

例二. 解方程: $3x^2-5x+2=0$

寫做 $3x^2-5x=-2$

這式 x^2 帶有係數 3, 和我們的完全平方公式不一致,應當去掉才對. 於是全方程得用3去除他一下.

變做 $x^2-\frac{5}{3}x=-\frac{2}{3}$

再到兩端各加上 x 的係數 $\frac{5}{3}$ 的一半 $\frac{5}{2\times3}$ 的平方 $\left(\frac{5}{6}\right)^2$, 那麼左端就變成一個完全平方三項式如:——
$$x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2=\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{2}{3}$$

卽是 $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$

兩端各開方 $x-\frac{5}{6}=\pm\frac{1}{6}$

移項 $x=\frac{5\pm1}{6}$

故有兩根 $x=1$ 或是 $x=\frac{2}{3}$

覆驗: $x=1 \quad 3(1)^2-5(1)+2=0$, $x=\frac{2}{3} \quad 3\left(\frac{2}{3}\right)^2-5\left(\frac{2}{3}\right)+2=0$ 兩根都合.

例三. 解方程: $x^2-2x-1=0$

這題看似簡單,用因子法却不能分解,用格欄幅也不能讀出靠得住的數值. 看下面湊方解法的擅長處:

$$x^2-2x=1$$

湊方 $x^2-2x+1=2$

開方 $x-1=\pm\sqrt{2}$

移項 $x=1\pm\sqrt{2}$

故有兩根: $\begin{cases} x=1+\sqrt{2}=2.4142\cdots \\ x=1-\sqrt{2}=-.4142\cdots \end{cases}$ 若查開方表可得六位小數.

覆驗: $\left.\begin{aligned} (2.4142\cdots)^2-2(2.4142\cdots)-1=0 \\ (-.4142\cdots)^2-2(-.4142\cdots)-1=0 \end{aligned}\right\}$ 第五位小數四捨五入恰合.

於是得湊方解法規則如下:——

(一) 使整理了的二次方程有未知數的項歸到左端,沒有未知數的項歸到右端.

(二) 用 x^2 的係數遍除各項,使 x^2 的係數為1.

(三) 兩端各加上 x 的係數一半的平方,使左端變成完全平方三項式.

(四) 兩端各開平方再移項,即得.

練習十六

下列各代數式,當加什麼數,湊成完全平方式?

1. x^2-10x　　2. x^2+14x

3. $x^2+\frac{4}{5}x$　　4. $x^2-\frac{7x}{9}$

用湊方解法解下列各方程(根裏若有不盡根式,可在本書第二册開方表上取小數三位)并覆驗:——

5. $x^2-6x=91$　　6. $6x^2+7x-20=0$

7. $4x^2+x-19=0$　　8. $x^2+16x=-63$

9. $x^2+11x+28=0$　　10. $3x^2-7x=7$

11. $x^2-8x+13=0$　　12. $x^2+10x+7=0$

用湊方解法解下列各方程:——

13. $x^2+6x=1$　　14. $75-3x^2=75x$

15. $x^2-2x-111=0$　　16. $x^2+2x=147$

17. $3x^2+4x-5=0$　　18. $3x^2+4x+5=0$

整理下列各方程,用湊方解法求根。

19. $\frac{5x+4}{5x-4}+\frac{5x-4}{5x+4}=\frac{13}{6}$　　20. $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{5x-11}{x-2}$

21. $\frac{x+1}{x+2}=\frac{5}{x-3}$　　22. $\frac{x+4}{x+3}+\frac{x}{x-4}=0$

23. 用湊方解法解練習十三裏的5,6,7,8各題,并同格欄幅的解法比較根的準確。

(12) 三種解法的討論　前面所講過的二次方程三種解法,各有各的長短,分說如下:——

(一) 格欄幅解法——在理論上雖很有興趣,但應用時描點畫圖,非常麻煩,得數且不精密.

(二) 因子解法——如果因子可分得出,這法要算再便當沒有;否則,却枉費工夫,毫無所得.

(三) 湊方解法——這法最爲完備,得數又恰合,而且無時不可施行,不過手續較繁罷了.

(13) 公式解法　前面所講三法,比較起來,要算湊方法最好.　這法不但可解數係數二次方程,幷可解字母係數的二次方程通式.

解方程　$ax^2+bx+c=0$　(一)

寫做　$ax^2+bx=-c$

用 a 除　$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

湊方　$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

卽是　$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

開方　$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

故得兩根　$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　(二)

從此我們就知道：凡是整理了的二次方程把他同通式(一)來比較，找出 a, b, c 的正負數值，代替到(二)式裏，便得方程的兩根。

例。　解 $2x^2-x-28=0$ （參看本章1節）

和通式：$ax^2+bx+c=0$ 比較，知道

$$a=2 \qquad b=-1 \qquad c=-28$$

代替到公式：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 裏得兩根如下：

$$x=\frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-4\times2(-28)}}{2\times2}=\frac{1+\sqrt{1+224}}{4}=4$$

$$x=\frac{-(-1)-\sqrt{(-1)^2-4\times2(-28)}}{2\times2}=\frac{1-\sqrt{1+224}}{4}=-3.5$$

練習十七

用公式解法解下列各方程，得數求到小數三位，再代替到方程裏來覆驗：

1. $3x^2-5x-7=0$　　2. $x^2-8x-105=0$

3. $x^2-3x+7=0$　　4. $4x^2+9x+3=0$

用公式解法解下列各方程：——

5. $5x^2+x-8=0$　　6. $7x^2+3=8x$

7. $\dfrac{4x}{x-1}=4-\dfrac{x-10}{x}$　　8. $\dfrac{x}{x-3}=2+\dfrac{x-1}{x+3}$

9. $\dfrac{x-3}{x+2}=\dfrac{5}{x+1}$　　10. $\dfrac{6x}{x+1}=4+\dfrac{10-x}{x}$

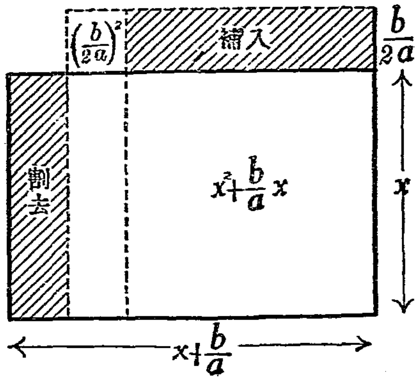
(14)湊方解法的圖解.

從二次方程的通式:　$ax^2+bx+c=0$

用 a 除全式再移項　$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

把這式當做一個長方面積來看待,

寫做　$\underset{\text{闊}}{x}\underset{\text{長}}{\left(x+\frac{b}{a}\right)}=\underset{\text{積}}{-\frac{c}{a}}$*



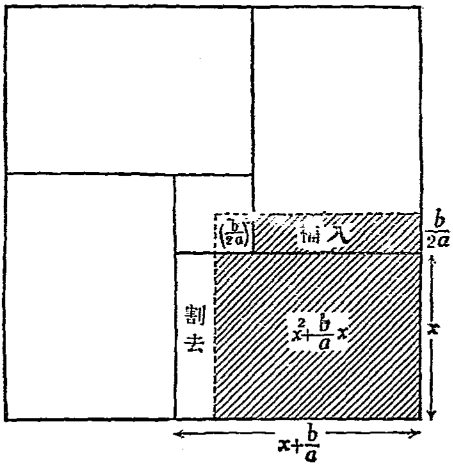
(圖 五)

從圖五,可見把長方截長補短,使長闊相等,變成一個正方,只是還缺少一個小方$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. 所以在長方面積 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ 裏面,加上小方$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$,便成一個完全平方,如 $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$.

*(附註)面有正反兩面,負號面積可算是從反面看.

還有一種解釋：把四個長方環繞連結，排成一個長闊和的大方，包住個長闊較的小方，如圖.

（圖六）



看圖知道：　$(\text{長}+\text{闊})^2=(\text{長}-\text{闊})^2+4\times\text{長方積}$

取出四分之一　$\left(\frac{\text{長}+\text{闊}}{2}\right)^2=\left(\frac{\text{長}-\text{闊}}{2}\right)^2+\text{長方積}$

因爲　$\text{長}+\text{闊}=2x+\frac{b}{a}$;　$\text{長}-\text{闊}=\frac{b}{a}$;　$\text{長方積}=-\frac{c}{a}$

所以　$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$

就是　$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$

結果也同湊方解法得到的完全一致.

（注意）圖五就是圖六的四分之一.

(15)缺項二次方程 整理了的完全二次方程有三項,除含 x^2 的項不能不存在之外,那含 x 或不含 x 的項都可以缺漏,還是二次方程.

(一)缺少含 x 的項的二次方程.

解方程: $3x^2-48=0$

移項再一除 $x^2=\frac{48}{3}=16$

開方得兩根 $x=\pm 4$

(二)缺少不含 x 的項的二次方程.

解方程: $2x^2-3x=0$

分解因子得 $x(2x-3)=0$

故有兩根 $x=0$ 或是 $x=\frac{3}{2}$

練習十八

1. 用因子解法解方程: $3x^2-48=0$
2. 用湊方解法解方程: $2x^2-3x=0$

解下列各方程:——

3. $13x^2-68=0$
4. $7x^2-196=0$
5. $x^2-12x=0$
6. $11x^2-133x=0$
7. 各項都有 x 的二次方程,必定有一根等於什麼?

(16)二次方程應用問題 從二次方程解法上看起來,凡是二次方程都有兩根;但在問題的事實上往往只有一根合理;而且照因子解法講來,兩根本不必同時都合,所以在解應用問題的時候,非按問題的意義去檢查不可.

題一. 用車載米552袋,本來各車平均分載,恰好載完,後來因爲要空出一車載人,於是每車得多載一袋,求原來的車數.

〔解法〕 設 x=所有車數

那麼 $\frac{552}{x}$=原來各車所載的袋數

$\frac{552}{x-1}$=除出一車後各車所載袋數

從問題裏數理上的關係開列方程如下:——

$$\frac{552}{x-1}=\frac{552}{x}+1$$

去分母 $552x=552x-552+x^2-x$

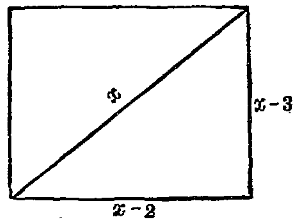
聚到一端歸併 $x^2-x-552=0$

分解因子 $(x-24)(x+23)=0$

故得兩根 $x=24$ 或 $x=-23$

因爲車數不能是負數,那麼 -23 不合用;於是知道答數是24隻車.

題二. 有長方形:對角線比長邊多 2 尺,比闊邊多 3 尺;求對角線.



(圖七)

〔解〕 設 x＝對角線

那麼 $x-2$＝長邊

$x-3$＝闊邊

依畢達哥拉定理得:

$$(x-2)^2+(x-3)^2=x^2$$

整理之後 $x^2-10x=-13$

湊成平方 $x^2-10x+25=25-13=12$

兩端開方 $x-5=\pm\sqrt{12}$

移項就得 $x=5\pm\sqrt{12}=5\pm\sqrt{4\times3}=5\pm2\sqrt{3}$

故有兩根 $\begin{cases} x=5+2\sqrt{3}=8.4641\cdots\cdots \\ x=5-2\sqrt{3}=1.5359\cdots\cdots \end{cases}$

如果對角線是1.5359……尺,那麼長闊都變成負數,不合題的意義,於是只有對角線＝8.4641……尺.

題三. 沿鐵路旁的電話桿要相隔等遠,若每哩想省去兩桿,那麼連續兩桿的距離就得增加24呎. 求每哩的桿數?

〔解〕 設 x＝每哩的電話桿數

(附註) 1哩＝1760碼; 1碼＝3呎(參看書尾的附表)

那麼　$\frac{3\times1760}{x}$＝原來連續兩桿中間的呎數

$\frac{3\times1760}{x-2}$＝省去兩桿後連續兩桿中間的呎數

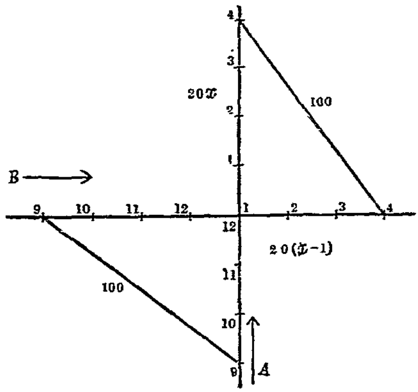
譯題語得方程　$$\frac{3\times1760}{x}+24=\frac{3\times1760}{x-2}$$

整理之後得　$$x^2-2x-440=0$$

分解因子得　$$(x-22)(x+20)=0$$

$\therefore\begin{cases}x=22 & \text{答數每哩二十二桿}\\ x=-20 & \text{不合題意不算答數}\end{cases}$

題四. 兩海船在正交兩航線上每點鐘各行20哩, A船正午經過B船的航線, B船午後一時經過A船的航線. 問何時兩船恰好相隔一百哩?



(圖八)

〔解〕 設　x＝午後相隔百哩時的鐘點數

$20x$＝相隔百哩時A距B的航線哩數

$20(x-1)$＝相隔百哩時B距A的航線哩數

譯題意依畢氏定理: $(20x)^2+[20(x-2)]^2=(100)^2$

整理之後得到: $x^2-x-12=0$

分解因子得到: $(x-4)(x+3)=0$

$\therefore \left.\begin{cases} x=4 & \text{午後第四時,即下午四點鐘} \\ x=-3 & \text{午前第三時,即上午九點鐘} \end{cases}\right\}$ 兩根都合用

練習十九

1. 兩數較是2,平方和是100:求這兩數.

2. 長方田面積216平方尺,長闊和30尺. 求長同濶.

3. 分20做兩部份,使兩部份的積等於較的24倍,怎麼分法?

4. 某人乘馬車走了6里. 回來的時候步行,每點鐘少走5里,多費了50分鐘. 求馬車每小時的速度.

5. 兩連續數和的平方比平方和多220. 求兩數.

6. 某人拿錢100圓買足球. 若每個足球減價1圓,就可多買5個. 求每個足球的原價.

7. 父子年紀的和是64. 父親年紀的2倍比兒子年紀的平方多8. 求父子的年紀.

8. 用車載米552袋,本來各車平均分載恰好載完,後來因爲增加一車,於是每車可少載一袋;求原來車數.

9. 有長方形,對角線同長邊的和是3尺,同闊邊的和是2尺. 求對角線.

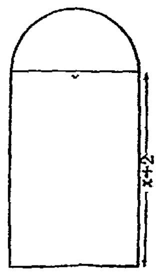
10. 大小兩汽車同時出發到相距36哩的地方,大車先到12分鐘. 若大車比小車每點鐘多走15哩,求兩汽車的速度.

11. 某人借銀千圓,一年後還六百圓,再一年後還五百五十圓,恰把本利還淸. 問年利率多少?

12. 有分數,分母比分子多4;分子減3,分母加3,結果是原分數的一半. 求原分數.

13. 父子年紀的較是20,積的$\frac{1}{10}$比父的年紀多180. 問父子各多少歲?

14. 有一個諾曼式窗洞的樣子如圖九,上面是個半圓,下面是個長方. 窗洞面積若是$30\frac{32}{113}$平方尺,那麼x應是多少尺?(圖裏長比闊多2尺.)



(圖九)

15. 大小兩管放水到池裏,$33\frac{1}{3}$分鐘可滿. 單用大管比單用小管早滿15分鐘,求單用各管所要的時間.

16. 酒席費15元,照人數均攤. 現因4人不到;其餘各人就多出1角5分. 求原定喫酒人數.

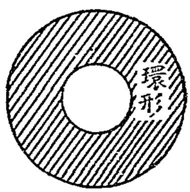
17. 一缸純酒,先取出9升,補進同量的水,再取出9升,還剩純酒6斗4升. 問原有純酒幾升?

18. 兩人同時對面走來,相遇時一個多走 30 里,相遇之後,快的再走 4 日,慢的再走 9 日,兩人交換地位:問兩地相隔多少遠?

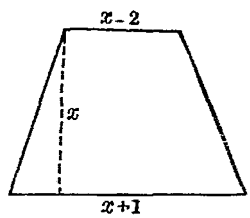
19. 有正方的對角線比邊多2尺,求方邊.

20. 兩人合作一工程,8日可完,A獨做比B獨做可早完12日. 問兩人單獨工作,幾日可完?

21. 有環形(圖十)面積5π方尺,外半徑比內半徑的二倍多1尺. 求內半徑



(圖十)



(圖十一)

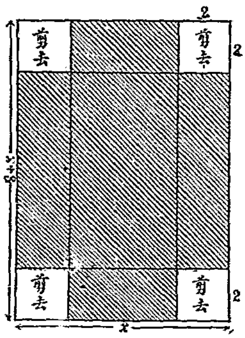
22. 有梯形(圖十一),面積33方尺,高比上底多 2 尺,比下底少1尺. 求高幷上下底.

23. 兩整數的比是5同4,各加15之後兩數的平方較是999. 求二數.

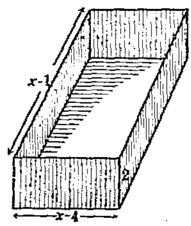
24. 流水裏划船,到相距 6 里以外的地方,來回共費七個半小時. 水流速度每小時3里. 問此人在靜水裏划船應該是什麼速度?

25. 有直角三角形的斜邊,比兩股一個多 2 寸,一個多9寸. 找三邊.

26. 紙片剪去四角(圖十二),造成高2寸,長比闊多3寸,容量是56立方寸的盒子(圖十三). 問應該用多少大的紙片?



(圖十二)



(圖十三)

27. 兩站相隔300哩,一火車想早到 2 小時就得增加速度每小時5哩. 問這車照例的速度?

28. 農夫買羊費 72 元;若每隻漲價 1 元就可多買 6 隻. 問他買了幾隻羊?

29. 甲乙兩人合辦一件事;所費的時間比甲獨做時間三分之一多 2 小時,比乙獨做時間二分之一少二小時. 求兩人合作所費的時間.

30. 沿鐵路旁的電話桿要相隔等遠,若每哩想增加兩桿,那麼連續兩桿的距離就要減少24呎,求原來每哩的桿數.

31. 兩站相隔150里,兩汽車同時從兩站對面出發,相遇後一車經2小時一車經 $4\frac{1}{2}$ 小時,兩車的地位交換,求兩車每小時的速度.

32. 工人築牆,高35尺,若每天少築2尺,那工程就要延緩2天. 求每天所築的尺數.

33. 大小兩船:小船每點鐘 3 里,從東到西;大船每點鐘 4 里,從南到北:相遇後小船更走 9 里,大船走12里,恰到正午的時候. 問在什麼時候兩船相距40里?

迦但的小傳 (1501—1576)

迦但意大利人,他一生的行爲很不一致. 倘若不說他是一個暴徒,至少要算一個賭棍; 但是另一方面他却又熱心科學,曾經解決過算學上久懸未了的問題. 有個時期,他曾做過許多不道德的事,并且迷信相術;然另一時期,却又很尊重哲學的價値.他的兩個兒子,品行也都同迦但一樣的惡劣.

迦但在算學上的功業, 都在他所著的一部代數書上, 1545 年出版. 這書要算當時同那時以前代數上最好的著作, 但這書的最大特色, 就是他從達達烈偷來的三次方程解法. 當他正在寫這部書的時候,他聽着達達烈同斐阿利比賽算學的事.曾經面請達達烈告訴他三次方程解法,達達烈不允許.不多時,迦但就從米蘭 *Milan* 寫信給達達烈說, 有個意大利的貴族要同他做好友 ,請他到米蘭來相會.達達烈來到米蘭,才知道並沒有什麼貴族,實在是迦但要請教他的三次方程解法. 迦但用種種手段, 達達烈被他央求不過, 於是由迦但先發誓永不洩漏不刋印,達達烈就把那解法完全告訴了他. 誰知不久迦但竟背了誓,寫在自己書上,並不提及達達烈的名字.達達烈見了大怒,積憤成病,不到幾年就死了去.現在算學歷史家沒有一個不給達達烈抱不平的!

Cardan

迦但的肖像

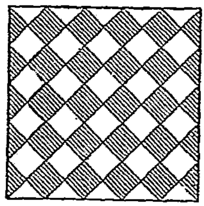
第三章　平行四邊形

Parallelogram

(1) 平行四邊形的定義　四邊形有兩對對邊，如果這兩對對邊是兩對平行線，就稱爲平行四邊形。如圖一四便是。

(圖一四)

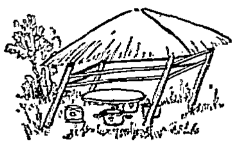
(2) 平行四邊形的用途　尋常所見的形狀要算平行四邊形最多。譬如桌面，窗戶，鏡框，書本，裝飾品的花紋，建築物的片面：在在看見這種形。圖一五是花磚鋪地的一種形式。



(圖一五)

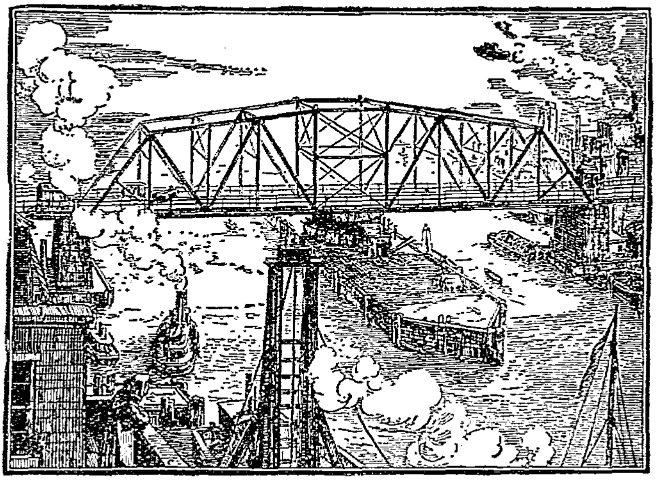
(3) 平行四邊形的活動性　應用平行四邊形，有一件最要注意的事，就是平行四邊形的一個活動性。

你們知道一個三角形三邊固定了，這三角形便完全固定(全等三角形定理二)；若是平行四邊形，四邊長短只管固定，形式還可受種種的改變．小屋欄杆，往往傾倒，就是這種作用．



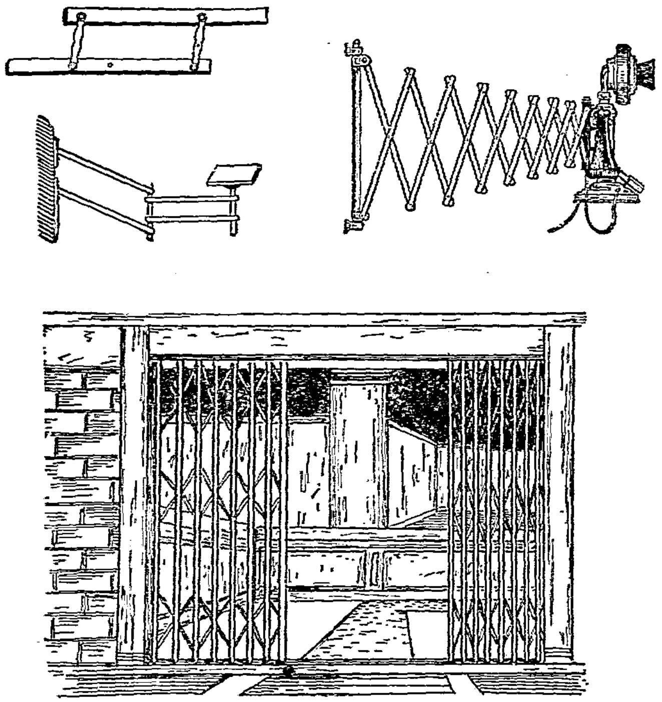
(圖一六)

所以近世建築，常有許多斜桿交加，使他穩固．



(圖一七)

但是這種活動性,利用起來,卻也很有益處.譬如畫圖人用的平行尺;牙醫用的守平檯;電話上伸縮柄;店鋪面的收展鐵欄門等都是.



(圖一八)

練習二十

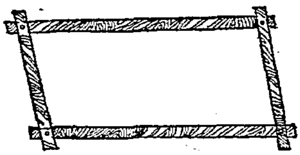
1. 從你們的實驗上看來,平行尺,守平檯,電話柄,鐵欄門等儘管變動形狀,那裏面平行四邊形還是個平行四邊形麽?

2. 平行四邊形變動到兩邊成一直線,這個平行四邊形變成了什麽?

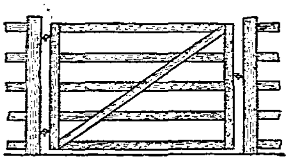
3. 平行四邊形變動的時候,他的邊變動了沒有?他的角變動了沒有?

4. 要使平行四邊形不會變動,要有什麽條件?

5. 把四條木板釘連成一個平行四邊形,如圖一九.若用力推壓他,會改變式樣麽? 怎樣就不會改變呢?



(圖一九)



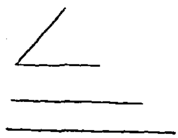
(圖二〇)

6. 圖二〇的柵門是用平行的木板同一條對角的斜交的木板做成的. 爲什麽要那條斜交的木板?

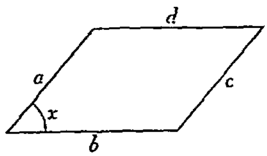
7. 我國老式的房屋有了歪斜的形狀,就往往在樑柱的相交之處用木桿斜放撐住. 爲甚麽要這樣?

(4) 平行四邊形作法　單有邊線,不能決定一個平行四邊形,所以要作平行四邊形,至少要知道一隻角.

已知平行四邊形的兩鄰邊同他的夾角,要作這平行四邊形.



(圖二一)



(圖二二)

〔解〕 給了圖二一的兩線段同一角.

要作一個平行四邊形他的兩鄰邊等於這兩線段,夾角等於這隻角.

〔作法〕 (一)依作角法:作$\angle x$等於指定的角,如圖二二.

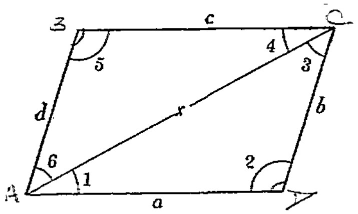
(二)依公法三:在$\angle x$的兩臂上,取出a, b兩線段等於所給的兩線段.

(三)依作平行線法:在a,b的端點,作$c \parallel a$又$d \parallel b$便得所求的▱.

〔證〕　∵ $c \parallel a$　又$d \parallel b$　(所作)

∴　▱$abcd$是平行四邊形　(定義)

(5) 平行四邊形性質定理一(對角線平分全形)　平行四邊形對角線平分全形爲兩個全等三角形.



(圖二三)

〔解〕 已知圖二三是平行四邊形. 要證 $\triangle abx \cong \triangle cdx$

〔證〕　因爲　　$a \parallel c$;　　$b \parallel d$　　　　(與件)

　　　所以　　$\angle 1 = \angle 4$; $\angle 3 = \angle 6$　　(平行性質一)

那麼在對角線x兩旁的兩三角形裏

有兩角一聯邊對應相等	$\angle 1 = \angle 4$	(已證)
	$\angle 3 = \angle 6$	(已證)
	$x = x$	(公共)

　　所以　$\triangle abx \cong \triangle cdx$　(全等三角形定理三)

推論1. 平行四邊形的對邊都相等.

　　2. 平行四邊形的對角都相等.

練習二十一

1. 作一個平行四邊形,他的兩邊是 3 寸同 4.5 寸,夾角是 45°.

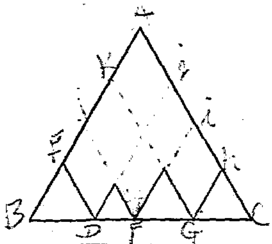
2. 證明等腰梯形底邊兩端的角相等.

3. 作一個兩鄰邊的較是 2 寸,夾角 60°,緣邊等於 18 寸的平行四邊形.

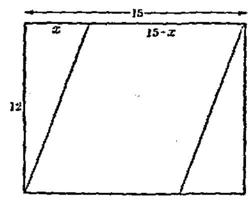
4. 兩平行四邊形若有兩邊一夾角彼此對應相等,試從全等三角形定理一,證明這兩形對應等邊等角.

5. 如圖二四,是個等邊三角形把底邊分做隨便的 4 段,在每段上作個小等邊三角形. 證明這四個小等邊三角形緣邊的和等於大三角形的緣邊.

$2\sqrt{12^2+x^2}+2(15-x)=4$



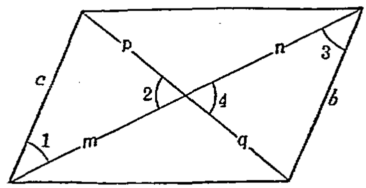
(圖二四)



(圖二五)

6. 有一塊長方形的木板,闊 12 尺,長 15 尺,要從對角割成一個平行四邊形,如圖二五,使緣邊等於 46 尺,怎樣割法? (求圖裏的 x).

(6) 平行四邊形性質定理二(兩對角線互相平分) 平行四邊形的兩對角線互相平分.



(圖二六)

〔解〕 已知圖二六是平行四邊形,帶有兩個對角線.

要證: $m=n$; $p=q$.

〔證〕 因爲a,b是▱的對邊 (與件)

所以 $a=b$ (▱性質定理一推論).

又因 $a \parallel b$ (與件)

所以 $\angle 1=\angle 3$ (平行性質定理一)

那麼在$\triangle amp$同$\triangle bnq$兩三角形裏

有兩角一對邊對應相等 $\begin{cases} \angle 1=\angle 3 & \text{(已證)} \\ \angle 2=\angle 4 & \text{(對頂角定理)} \\ a=b & \text{(已證)} \end{cases}$

$\therefore$ $\triangle amp \cong \triangle bnq$ (全等△定理四)

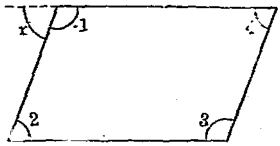
$\therefore$ $m=n$; $p=q$

(7) 平行四邊形性質定理三(鄰角互為補角)

平行四邊形的任兩鄰角互為補角.

〔解〕 已知圖二七是▱;

要證: $\angle 1+\angle 2=180°$.



(圖二七)

〔證〕 先將一邊引長如圖. (公法二)

因為 $\angle 1+\angle x=180°$ (平角定義)

但是 $\angle x=\angle 2$ (平行性質定理一)

∴ $\angle 1+\angle 2=180°$ (等量公理)

同樣可證$\begin{cases}\angle 2+\angle 3=180° \\ \angle 3+\angle 4=180° \\ \angle 4+\angle 1=180°\end{cases}$

推論 平行四邊形若有一角是直角,那麼四角都是直角.

練習二十二

1. 平行四邊形的鄰邊相等,證明對角線互做垂線.

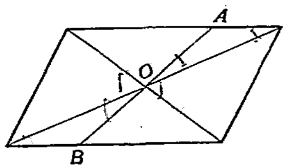
2. 一個平行四邊形相鄰兩角的較是60°. 求這平行四邊形四角的度數.

3. 平行四邊形有一個角是直角,便是長方形.

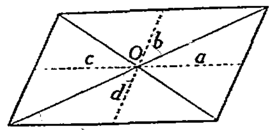
4. 有直角的平行四邊形的對角線相等.

5. 梯形底邊兩端的角若是相等,那麼這梯形是一個等腰梯形.

6. 如圖二八,AB是經過平行四邊形對角線交點O的線段. 證明$OA=OB$



(圖二八)



(圖二九)

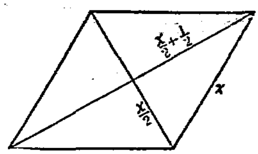
7. 證明平行四邊形對邊中點的連線,過對角線的交點. (如圖二九從交點O到各邊中點畫線證明a同c成直線,d同b也成直線.)

8. 證明平行四邊形相鄰兩角的平分線互做垂線.

9. 平行四邊形有一條對角線同兩鄰邊都相等,證明這平行四邊形有一角是60°,

10. 作一個四邊都等的平行四邊形,他的對角線一條同邊相等,一條比邊大一寸.

(求圖三〇裏的x到小數一位)

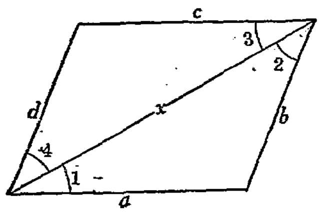


(圖三〇)

(8) **平行四邊形判定定理一**(對邊相等)　四邊形的對邊都相等,就是平行四邊形.

〔解〕 已知: $a=c$
$b=d$

要證: $a \parallel c$
$b \parallel d$



(圖三一)

〔證〕 作對角線 x　(公法一)

在 x 兩旁的兩三角形裏.

有三邊對應相等 $\begin{cases} a=c & \text{(與件)} \\ b=d & \text{(與件)} \\ x=x & \text{(公共)} \end{cases}$

所以 $\angle 1=\angle 3$; $\angle 2=\angle 4$　(全等 $\triangle$ 定理二)

由是　$a \parallel c$;　$b \parallel d$　(平行判定定理一)

推論　正方,長方都是平行四邊形.

在這裏我要請你們注意我們的正方,長方的定義.

{正方是四邊相等四角都是直角的四邊形.
{長方是對邊相等四角都是直角的四邊形.

練習二十三

1. 證明兩對對角都相等的四邊形是一個平行四邊形.

2. 從斜方的定義"四邊相等沒有直角的四邊形"證明他是平行四邊形.

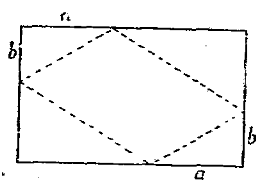
3. 證明斜方的對角線分全形做四個全等直角三角形.

4. 兩直線相交,互相平分. 證明連結端點的四線段造成一個平行四邊形.

5. 作一個平行四邊形,他的對角線是4寸同2.5寸,夾角是30°.

6. 兩平行四邊形兩對角線同中間的夾角,彼此對應相等,證明這兩平行四邊形四邊四角都對應相等.

7. 木匠從長方板兩對角量 a,b 長度作四虛線(如圖三二)照虛線割去四角剩下是個平行四邊形;請證明.



(圖三二)

8. 正交兩等線段互相平分. 連結這四個端點必成一個正方. 請證明.

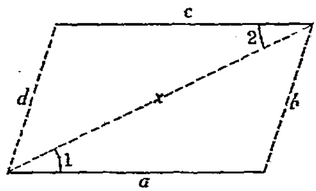
9. 說出用平行尺作平行線的理由.

(9) 平行四邊形判定定理二 (一對對邊平行相等) 四邊形有一對對邊平行而且相等,就是平行四邊形.

〔解〕已知 $a \parallel c$

$a = c$

要證圖三三是▱



(圖三三)

〔證〕	作對角線 x	(公法)
因爲	$a \parallel c$	(與件)
所以	$\angle 1 = \angle 2$	(平行性質定理一)

那麼在對角線 x 兩旁的兩個三角形裏

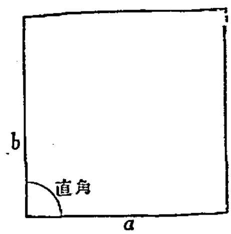
有兩邊夾一角對應相等	$a = c$	(與件)
	$x = x$	(公共)
	$\angle 1 = \angle 2$	(已證)
於是	$\triangle abx = \triangle cdx$	(全等△定理一)
包含有	$b = d$	
又因	$a = c$	

∴ ▱$abcd$ 是平行四邊形　(▱判定定理一)

(10) 作正方法　指定一線段做邊,作一正方.

〔解〕 已給線段a.

要在a上作正方.



(圖三四)

〔作法〕(一)依作垂線法:在a的一端作$b\perp a$.

(二) 依公法三:取$b=a$

(三) 依作▱法:已經有兩線段夾一角作圖三四的平行四邊形.

〔證〕 因為　圖三四是▱,又有一角是直角　(所作)

所以　四角都是直角　(▱性質定理二推論)

因為　$b=a$　(所作)

所以　四邊都相等　(▱性質定理一推論一)

∴　圖三四是正方　(正方定義)

練習二十四

1. 從平行四邊形一對對邊兩中點,連線到一對對角的兩頂點是平行兩線,請證明.

2. 作一個每邊長5.2寸的正方形.

3. 作一個長3.4寸濶4.9寸的長方形.

4. 證明正方形的對角線相等,而且分全形做四個全等直角等腰三角形.

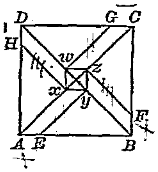
5. 平行四邊形的對角線相等而且成正交,便是一個正方形.

6. 如圖三五,在正方形$ABCD$上有$AE=BF=CG=DH$; Ey同Gw都平行於Ac; Hx同Fz都平行於BD. 證明:

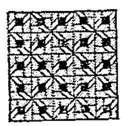
(1) AxH, ByE,等等是全等直角等腰三角形.

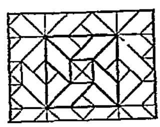
(2) $AEyx$, $BFzy$,等等是對應等角等邊的平行四邊形.

(3) $xyzw$是正方形.

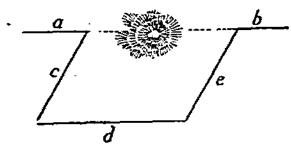


(圖三五)


(圖三六)


(圖三七)

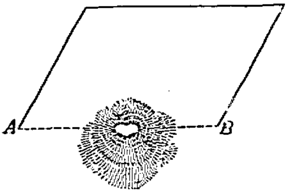
7. 圖三六同圖三七都是根據圖三五畫成的,試照樣各畫一個大些的.



(圖三八)

8. 測量家要把鐵道a穿過小山延長到b成直線,如圖三八,隨便作c,再作$d \parallel a$,又作$e \parallel c$,令$e=c$,再作$b \parallel d$. 證明b同a成直線.

9. AB中間隔一座小山如圖三九. 要量A到B的距離. 兩人各從A,B向北平行走一樣遠的路,再量得兩人中間的長,就得AB的距離. 證明這法不錯.



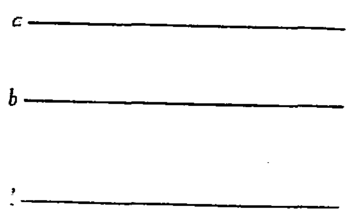
(圖三九)

(11) 三線平行定理 兩線都和另一線平行,便互相平行.

〔解〕已知 $a \parallel l$

$b \parallel l$

要證: $a \parallel b$



(圖四〇)

〔證〕如果a,b不平行,那麼必定要相交

但a,b都同l平行 (與件)

於是有: a同b既相交,又都同l平行 (違背平行公理)

可見 a同b不能相交 (要維持公理)

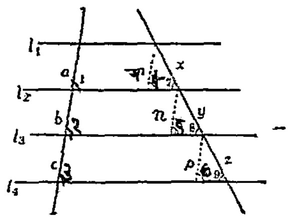
$\therefore\ a \parallel b$ (平行定義)

(12) 平行線內等線段定理　一組平行線,若分割一線成等線段,那麼這組平行線分割任何線都成等線段.

〔解〕已知 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$

$a=b=c$

要證 $x=y=z$



(圖四一)

〔證〕作 $m \parallel a; n \parallel b; p \parallel c$ 造成三個▱三個△　(作∥法)

故有　$m=a$;　$n=b$;　$p=c$　(▱性質一)

同時　$\angle 1=\angle 4$;　$\angle 2=\angle 5$;　$\angle 3=\angle 6$　(∥性質二)

因為　$l_2 \parallel l_3 \parallel l_4$　(與件)

所以　$\begin{cases} \angle 1=\angle 2=\angle 3 \\ \angle 4=\angle 5=\angle 6 \\ \angle 7=\angle 8=\angle 9 \end{cases}$　(∥性質二)

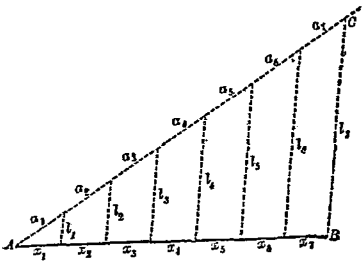
又因　$a=b=c$　(與件)

所以　$m=n=p$　(等量公理)

於是知道這三個小△有兩角一對邊對應相等

$\therefore x=y=z$　(全等△定理四)

(13) 等分線段法 指定一條線段,要分做指定的等分。



(圖四二)

〔解〕 設AB是指定的線段

要分做比方說七等分

〔作法〕先從A點隨便作一線AC

(一) 依線段加倍法:任取一線段a_1,加到七倍得到$a_1, a_2, a_3 \cdots a_7$七線段並末後一點C。

(二) 依公法一:連接C,B兩點得l_7

(三) 依作平行線法:從a_1, a_2, $a_3 \cdots a_7$各線段的分界點作一組平行線$l_1, l_2, l_3 \cdots l_7$,便得$x_1, x_2, x_3 \cdots x_7$就是AB的七等分。

〔證〕因為 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \parallel \cdots l_7$ (所作)

又 $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots a_7$ (所作)

∴ $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots x_7$ (平行線內等線段定理)

練習二十五

1. 畫一條長3.5寸的線段,把他分做9等分.

2. 畫一個綫邊等於9寸,長是闊的3倍的長方形.

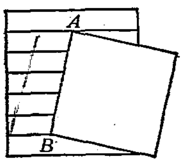
3. 過三角形一邊的中點且同底邊平行的線,必過第三邊的中點.

4. 三角形兩邊中點的連線,同底邊平行,而且等於底邊的一半. 請證明.

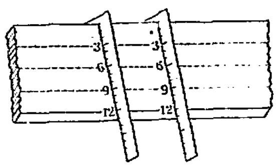
5. 連結任何四邊形鄰邊的中點,成功一個平行四邊形. 請證明.

6. 許多線把一線分做等線段,又把別一線分做等線段,那麼這許多線互相平行.

7. 說明利用尋常的橫格紙,可以把 AB 分做五等分,如圖四三. 注意那格子的闊相等.



(圖四三)



(圖四四)

8. 木匠要等分木板成4條,就用曲尺照圖四四記下3,6,9各點,再照樣在別處記點,依連線分割. 證明這法子是不錯的.

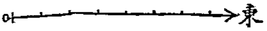
(14)有向線段表示力 *Force* 一個力有三要素:力的作用點,大小,方向. 我們的有向段,恰好也有這樣相彷彿的三個要素:線段起點,長短,方向. 那麼照這樣看起來,用有線段表示力,真是再巧沒有:——

(一)力的作用點　用有向線段的起點表示

(二)力的大小　　用有向線段的長短表示

(三)力的方向　　用有向線段的方向表示

譬如要表示一個向東方八斤的力在 o 點作用如圖四五;我們就從 o 點向右邊(代表東方)畫一條有向線段,他的長度恰好是8個單位長度.



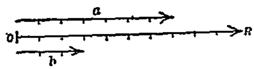
(圖四五)

練習二十六

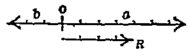
1. 有3斤向南,7斤向東,12斤向東北的三個力在一點作用,怎樣表示?

2. 用一公分長表示一斤,怎樣表示下面同作用的兩力: (一) 5.5斤向西南 (二) 11斤向北.

(15)合力 <u>*Resultant*</u>　兩個(或多個)力合起來的結果叫合力.　譬如有a,b兩力:a,7斤,b,3斤,同時在o點作用,看圖.



(圖四六)



(圖四七)

(一)如果兩力方向相同,合力R就是兩力的和(10斤),方向不變,如圖四六.

(二)如果兩力方向相反,合力R就是兩力的較(4斤),方向同大力,如圖四七.

練習二十七

1.　有4斤向東,5斤向西,12斤向東的三個力在同一點作用,試畫線段求合力.

2.　兩人合推一車,一個人用50斤的力,一個人用64斤的力,問車子受到多少斤的力?

3.　7斤,8斤的兩力向南,9斤,10斤的兩力向北,若在同一點作用,合力是多少,向那一方?

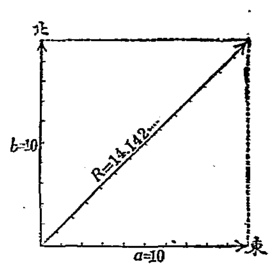
4　每人有力8斤的小孩5人同每人有力5斤的小孩7人拉繩,問那一隊人受多少力向那一隊倒下?

$x-y=18$
$2x-3y=-146$
$=2x-5y=-146$
$y=186$

5. 一牛一馬在對面用力,合力18斤向東,牛添一隻,馬添兩隻,合力146斤向西,求牛馬的力和方向.

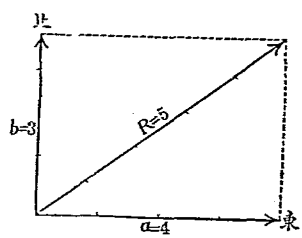
(16) 力的平行四邊形定律 如果兩力不在一直線上,也有合力.

(一) 設a,b兩力相等,都是10斤,一個向東,一個向北,如圖四八. 那麼這個合力R當然在東北適中的地方. 他的方向大小就恰好可用a, b兩力所作正方的對角線來表示. $\therefore R=\sqrt{10^2+10^2}=14.142\cdots$斤



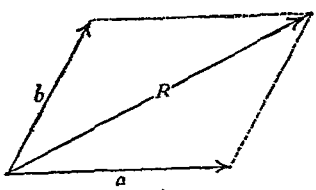
(圖四八)

(二) 設a,b兩力不相等,$a=4$斤向東,$b=3$斤向北,如圖四九. 那麼這個合力R當然離開大力近,離開小力遠,他的大小方向就恰好是a, b所作的長方的對角線. $\therefore R=\sqrt{3^2+4^2}=5$斤.

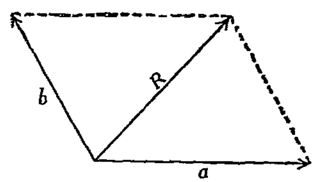


(圖四九)

(三)設a,b兩力所含的角度不是直角,如圖五〇同圖五一,那麼這個合力就恰是這平行四邊形的對角線.



(圖五〇)



(圖五一)

你們知道:正方長方都是平行四邊形的特例,所以我們可總說一句話:

兩個力同在一點作用,那合力就等於這兩個力所成平行四邊形的對角線——這個道理叫做力的平行四邊形定律 *Law of Parallelogram of Force*

練習二十八

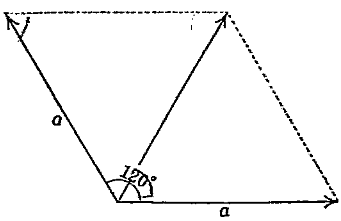
1. 兩力相等,都是7斤,一個向西,一個向北,問合力是多少斤,什麼方向?

2. 成直角的兩力是5斤同12斤,求合力的大小.

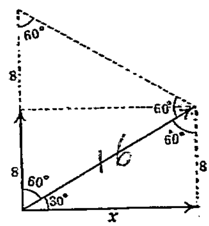
3. 一人用15斤的力向南射箭,若風力8斤向東吹去,問箭桿實在受力幾斤? 試畫圖求出箭的方向.

4. 有150斤同250斤的兩力成角45°,在同一點上作用,試用一公分表10斤,畫圖量合力的大小.

5. 兩人用繩拉車,各人用力相等,譬如說a,兩繩成角120°,證明合力也是a.(看圖五二)



(圖五二)



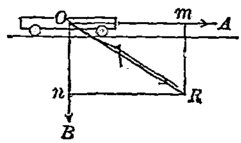
(圖五三)

6. 一人向東射箭,箭向偏北30°飛去,若風力8斤向北吹去,求這人所用的力. (依圖五三求x)

7. 6斤和8斤的兩力在什麼時候合力最大,什麼時候最小,成60°角時候多少,成直角時候多少?

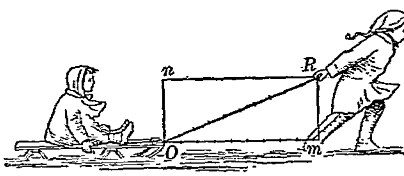
(17) 分力 Component 兩個力可以合做一個力,反轉來一個力當然也可以分做兩個力. 這種分解在有束縛的運動上很有用處.

(一)譬如有力OR引着一車在一條懸空的軌道上行動如圖五四.因爲這車受了軌道束縛,不能隨 OR 方向行走,只得依OA的方向前進;所以OR力對於運動不能完全有效;於是OR就分做兩力:一個Om引車前進,一個On使車壓緊軌道:Om,On是長方的長闊,OR是長方對角線.



(圖五四)

(二)又如圖五五也是分力作用.分力Om引船前進;分力On使船舉起.



(圖五五)

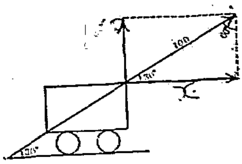
從上面兩例,我們就知道一個對於運動不能完全有效的力,可依任何可能的方向分做兩力.分法如下:——

過已知力的作用點,依運動可能的方向,作正交兩線,再在這兩線上作長方,使被分力恰好是這長方的對角線,那長闊邊便是兩分力.

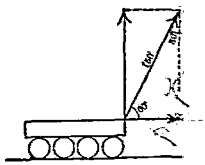
不是30°
60°

練習二十九

1. 用繩拉車,同地平成30°的角,如圖五六. 若用力100斤,問車子受幾斤的力前進.



(圖五六)

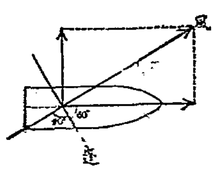


(圖五七)

2. 用繩拉車,繩同地成角60°如圖五七. 若用力150斤,問車子受幾斤的力前進?

3. 250斤的力分成兩個分力,都同他成角45°,求兩分力的大小?

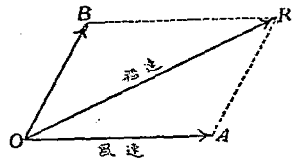
4. 一隻船的蓬同船成角60°時,風恰好直向蓬吹,如圖五八. 若風力30斤,問船受幾斤的力前進?



(圖五八)

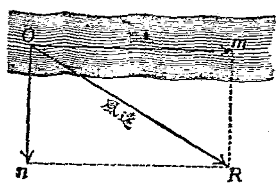
(18) 速度的平行四邊形定律 速度同力有連帶的關係,也可以依樣分合. 分合的方法也完全遵守平行四邊形定律.

(一)合速　譬如風速在一定的時間內,能從O走到A;水速在同樣的時間內能從O走到B,方向如圖五九;那麼在O處的船用不着划,可以在同樣的時間內從O走到R,方向如圖.



(圖五九)

(二)分速　譬如靜水裏的風速,方向如圖六〇,舟人張帆挽舵,使船只能依Om方向行駛.那麼在O處的船,單憑風力,若風速在一定的時間內從O走到R,同時船就能從O走到m.另外On的分速,表示這船有靠岸的趨向.



(圖六〇)

練習三十

1. 風吹船向東走,每小時12里,水推船向南走,每小時15里?問船實在的速度是多少?畫圖求出船走的方向.

2. 汽船的速度每小時8哩,河流的速度每小時6哩.若河闊24哩,問這汽船從河的這岸到對岸,離開原出發地幾哩?

8 24

3. 梯長24尺,同牆成30°的角,一人正午上梯,2分鐘走到梯頂.求這人的日影在平地上向牆前進的速度.(畫圖指示.)

24÷8=? 3×6=18

x=24+12 x=24²-12

4. 一船張蓬向東行走,風偏北30°吹去,每小時20里.問這船每小時向東前進多少里?

5. 船向南走每小時15里.風把船向東北吹去,每小時12里.用一公分表3里,試畫圖求出船的實在的速度,同進行的方向.

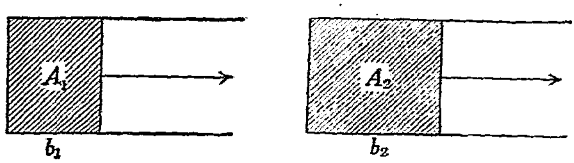
6. 一船張蓬向南走,風向偏東45°吹來,每小時18里.問船向南前進,每小時幾里?

第四章　面積與二次根

Area and Quadratic Surds

(1)兩長方面積的比一(高或底有一個相同)

同高兩長方形面積的比,等於兩個底邊的比。



(圖六一)

把長方的高來固定,使底邊可以任意變動如圖;那麼底邊變大隨便多少倍數,面積也就變大同樣的倍數;可見這面積同底邊是正變.

故有　　$A=kb$　　(k是常數)

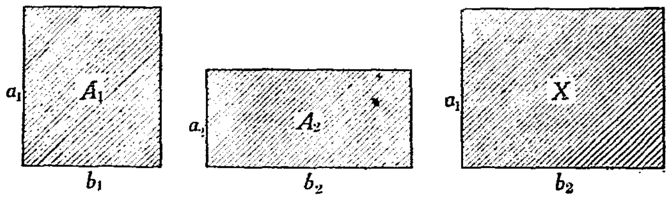
於是　　$A_1=kb_1$　　$A_2=kb_2$

兩式相除　　$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$　　(等量公理)

推論　同底兩長方面積的比,等於兩高的比.

(2)兩長方面積的比二(高和底許都不相同)

兩長方面積的比,等於各高底兩相乘積的比.



(圖六二)

〔證〕作長方 X 與長方 A_1 同高,與 A_2 同底　(作□法)

$\because$ A_1 與 X 同高　$\therefore$ $\dfrac{A_1}{X}=\dfrac{b_1}{b_2}$　(已證)

$\because$ A_2 與 X 同底　$\therefore$ $\dfrac{A_2}{X}=\dfrac{a_2}{a_1}$　(已證)

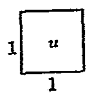
兩式相除　$\dfrac{A_1}{X}\times\dfrac{X}{A_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\times\dfrac{a_1}{a_2}$　(等量公理五)

$$\therefore\quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}$$

推論　兩正方面積比,等於兩邊線各自乘的比.

(3)單位面積 *Unit Area*　單位線段上的正方面積叫單位面積.

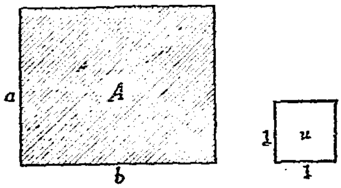
設 u 是單位線段上的正方那麼 $u=1$.



(圖六三)

(4) **長方面積定理**　長方面積,等於底乘高.

〔解〕已知A是長方
要證$A=ab$



(圖六四)

〔證〕因為正方不過是高底相等的長方,

故有比例　$\dfrac{A}{u}=\dfrac{ab}{1\times 1}$　(長方面積比)

但是　$u=1$　(定義)

$\therefore$　$A=ab$

推論　正方面積,等於邊線自乘.

練習三十一

1. 買賣綢布為什麼只管長短分別價值?

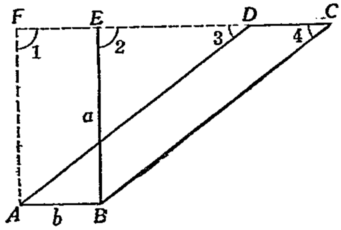
2. 買賣田地為什麼不單論長短分別價值?

3. 地圖上一公分代表5里,問這圖上7方公分代表幾方里?

4. 長方面積$11\frac{1}{4}$方尺,長闊和7尺,求長闊.

5. 方板每邊4尺,四周塗上一樣闊的漆邊,中空小正方等於漆邊面積,怎樣塗法? 畫圖證明.

(5)平行四邊形面積定理 平行四邊形面積等於底乘高.



(圖六五)

〔解〕已知 AC 是 $\square$

高是 a, 底是 b.

要證: $\square AC=ab$.

〔證〕引長 CD, 再作 $AF\parallel a$, 就得長方 BF.

那麼在 $\triangle ADF$ 同 $\triangle BCE$ 兩三角形裏

有兩角一對邊對應相等 $\left\{\begin{array}{ll}\angle 1=\angle 2 & \text{(平行性質二)}\\ \angle 3=\angle 4 & \text{(平行性質二)}\\ AD=BC & \text{(□性質一)}\end{array}\right.$

$\therefore\quad \triangle ADF=\triangle BCE$ (全等△定理四)

從 $ABCF-\triangle ADF=ABCF-\triangle BCE$ (等量公理)

結果得 $\square AC=\square BF$

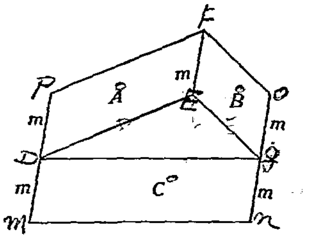
但是 $\square BF=ab$ (長方面積定理)

所以 $\square AC=ab$

推論 同在兩條平行線內,同底或等底的兩個平行四邊形,面積相等.

練習三十二

1. 證明梯形面積等於上下底的半和乘高. (一)分做兩個三角形再證. (二)分做一個三角形同一個平行四邊形再證.



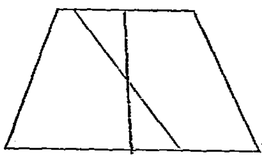
(圖六六)

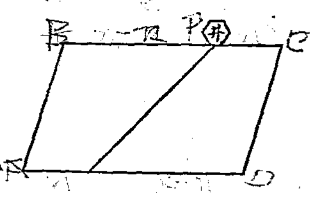
2. 證明連接平行四邊形對邊中點的兩線段,分全形做四個等積平行四邊形.

3. 知道圖六六的 m 都平行相等;請證 $A+B=C$

4. 證明經過平行四邊形兩對角線交點的任何線,分全形做兩個等積梯形(或平行四邊形).

5. 兄弟二人平分一塊梯形地,要連接上下底築牆分開,求分法.(看圖六七)


(圖六七)


(圖六八)

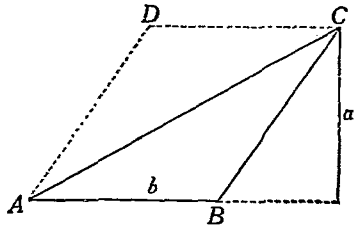
6. 有一塊平行四邊形的田,邊上有一口井如圖六八. 兄弟兩人要掘溝均分,使井在界線上,求分法.

(6)三角形面積定理 三角形面積等於高同底相乘的一半，

〔解〕已知ABC是△

高是a，底是b.

要證：$\triangle ABC=\frac{ab}{2}$



(圖六九)

〔證〕 作$\square BD$ (作□法)

因為 $\triangle ABC=\frac{\square BD}{2}$ (□性質一)

但是 $\square BD=ab$ (□面積定理)

$\therefore$ $\triangle ABC=\frac{ab}{2}$ (等量公理一)

推論 同在兩條平行線內，同底或等底的兩個三角形面積相等.

練習三十三

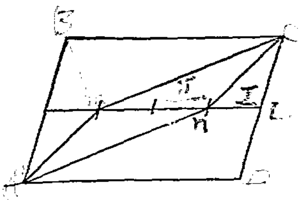
1. 證明連接三角形隨便一個頂點到對邊中點的線段，平分這三角形做兩個等積三角形.

2. 證明平行四邊形的兩對角線分全形做四個等積三角形.

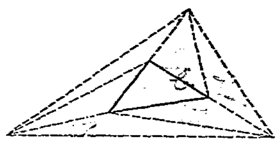
3. 證明斜方形的面積等於兩對角線相乘的一半.

4. 證明連接三角形兩邊中點所成的小三角形,他的面積等於原三角形的四分之一.

5. 把連接平行四邊形對邊中點的線段分做四等分,從第一第三兩分點向兩對角頂點作四線段,圖七〇.證明這四線段造成平行四邊形面積是原形四分之一.



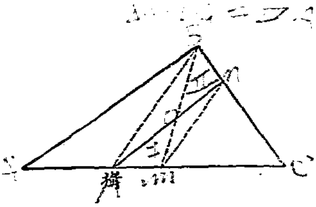
(圖七〇)



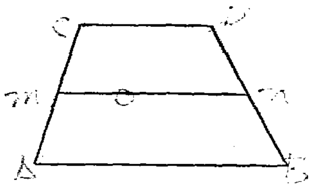
(圖七一)

6. 將三角形各邊順次引長一倍,證明連接引長線三端點的三角形,面積是原三角形的七倍.

7. 有三角形的田邊上有一棵樹,如圖七二. 要平分這田使這樹立在公共角上,求分法.



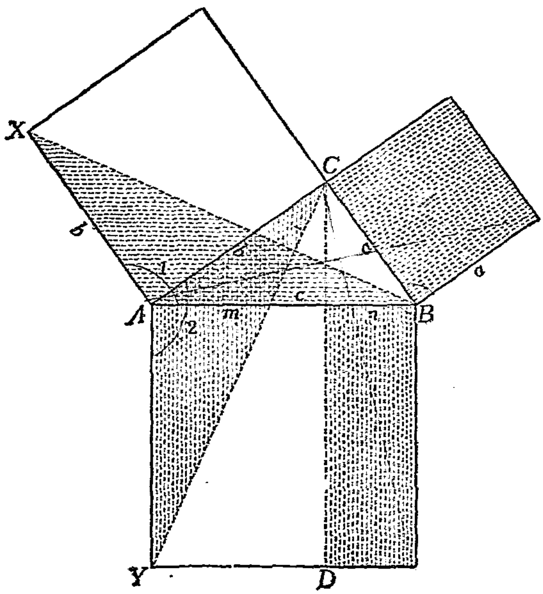
(圖七二)



(圖七三)

8. 證明連接梯形兩腰中點的線段如圖七三,等於上下兩底的半和.

(7)畢達哥拉定理 凡直角三角形兩股的平方和必等於斜邊的平方.



(圖七四)

〔解〕已知$\triangle ABC$裏有$\angle ACB=90°$

要證: $a^2+b^2=c^2$

〔證〕在 a,b,c三邊線上各作正方 (作正方法)

連接BX和CY兩線段 (公法一)

又作 $CD \parallel AY$ (作平行線法)

因爲　$\angle XAC=\angle ACB=90^\circ$　(與件,所作)

所以　$BC\parallel AX$　(平行判定一)

那麼　$\triangle XAB=\dfrac{b^2}{2}$　(△面積定理)

又因　$CD\parallel AY$　(所作)

那麼　$\triangle YAC=\dfrac{mc}{2}$　(△面積定理)

外又有 $\angle 1=90^\circ+\angle CAB$; $\angle 2=\angle CAB+90^\circ$ (所作)

於是　$\angle 1=\angle 2$　(等量公理一)

在 $\triangle XAB$ 同 $\triangle YAC$ 兩三角形裏

有兩邊夾一角對應相等 $\begin{cases} AX=AC & \text{(都是 } b\text{, 所作)} \\ AB=AY & \text{(都是 } c\text{, 所作)} \\ \angle 1=\angle 2 & \text{(已證)} \end{cases}$

所以　$\triangle XAB=\triangle YAC$　(全等△定理一)

代替到上式　$\dfrac{b^2}{2}=\dfrac{mc}{2}$　(等量公理一)

用 2 乘　$b^2=mc$　(等量公理四)

依同樣的理由和方法也可證明

$$a^2=nc$$

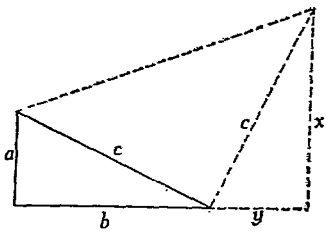
兩式相加　$a^2+b^2=(m+n)c$　(等量公理二)

但是　$m+n=c$　(線段加法)

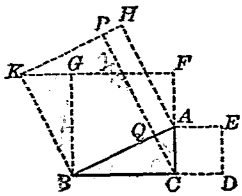
$$\therefore\quad a^2+b^2=c^2$$

練習三十四

1. 如圖七五,在直角三角形斜邊 c 上作半個正方形,又作 x,同 b 的延長線 y 成直角,先證明全形是一個梯形,他的高等於 $a+b$,再從此推出畢氏定理。



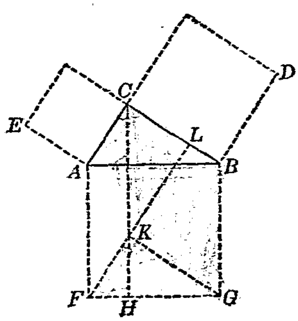
(圖七五)



(圖七六)

2. 用圖七六,證明畢氏定理. 圖裏□CE同□CG是直角三角形ABC兩股的正方,□AK是斜邊的正方,$CP \parallel AH$. 先證 KGF 成一直線,再求□ CE 同▭QH的面積關係。

3. 在圖七七裏,$FL \parallel AC$, $GK \parallel BC$, 連結 CK 到 H,證明 $CH \parallel AF$;再從□BK同□BH的面積關係推出畢氏定理。

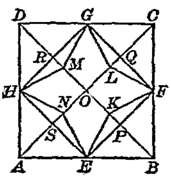


(圖七七)

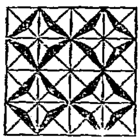
4. 在每邊 10 尺滿水的方池中心有一蘆草,高出水面 1 尺,風吹蘆倒,蘆稍恰到岸邊的中點,求池深.

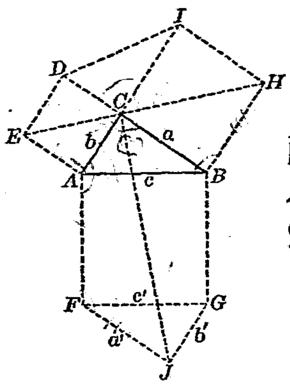
5. $ABCD$ 是正方,如圖七八,E, F, G, H 是各邊中點,$SN=PK=QL=RM$. 設 $AB=6$ 寸,$PK=1$ 寸,求四個小三角形的面積. 設 $AB=6$ 寸,小三角形面積和是全正方的五分之一,求 PK 的長. 設 E, K, Q 在一直線上,求小三角形面積和.

(圖七八)



(圖七九)





(圖八〇)

6. 圖七九是根據圖七八畫成的,每邊 8 寸,四小方相等,黑三角形面積和若是全形的十分之一,求畫法.

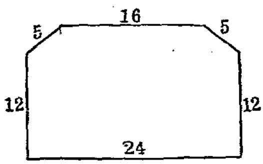
7. 在圖八〇裏,$\triangle FJG \cong \triangle ABC$,畫 CE 同 CH,證明 CE, CH 成一直線. 再從四邊形 $ACJF$, $BCJG$, $ABHE$, 同 $EHID$ 的面積關係,推出畢氏定理.

8. 斜方形兩對角線是 1.4 尺同 4.8 尺,求高.

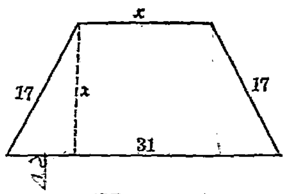
9. 等腰梯形兩底是 3 尺,0.6 尺,兩腰 3.7 尺,求面積.

10. 有花臺形式如圖八一求面積.

$\frac{(2+13)\times 2}{2}$



(圖八一)



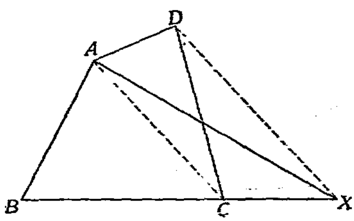
(圖八二)

11. 圖八二裏的梯形兩腰長 17 尺,上底同高相等,下底 31 尺. 求面積.

(8)等積三角形作法 給一個任意的四邊形,要作一個三角形同他的面積相等.

〔解〕 給了 $ABCD$

要作一個 $\triangle=BD$



(圖八三)

(附註) 這方法不限定是四邊形,可以推廣到隨便什麼直線形.

〔作法〕　(一)依公法一：作對角線 AC

(二)依公法二：引長 BC

(三)依作平行線法：作 $DX \parallel AC$

(四)依公法一：連接 AX 線段

那麼 $\triangle ABX = BD$

〔證〕　因爲　$DX \parallel AC$　(所作)

所以　$\triangle ACX = \triangle ACD$　(△面積推論)

於是 $\triangle ACX + \triangle ABC = \triangle ACD + \triangle ABC$　(等量公理二)

結果得　$\therefore \triangle ABX = BD$

練習三十五

1. 作一個三角形,同所給的四邊形面積相等,這方法可有幾種變換。

2. 作一個直角三角形,面積等於所給的正方。

3. 作一個等腰三角形,面積等於所給的正方。

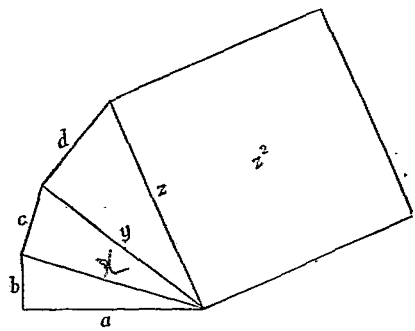
4. 作一個直角三角形,面積等於所給的三角形。

5. 作一個等腰三角形,面積等於所給的三角形,底邊等於所設的長。

6. 作一個等邊三角形,面積等於所給的長方。

7. 作一個等腰三角形,面積等於所給的梯形。

(9) 等積正方作法　作一正方等於所給的各正方的和



(圖八四)

〔解〕　所給的各正方的邊是 $a, b, c, d, \cdots\cdots$

要作一個大□ $= a^2+b^2+c^2+d^2+\cdots\cdots$

〔作法〕把各線段逐次作直角三角形如圖得 z^2, 便是.

〔證〕　因為　$a^2+b^2=x^2$　　(畢達哥拉定理)

$c^2+x^2=y^2$

$d^2+y^2=z^2$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+x^2+y^2+\cdots=x^2+y^2+z^2+\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad a^2+b^2+c^2+d^2+\cdots=z^2$$

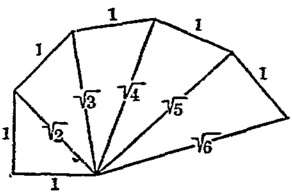
(10)二次根的線段表示　利用畢達哥拉定理,我們就可以作一線段來代表隨便什麼數的二次根 *Quadratic Surds and Radicals.*

例一. 給一單位線段,要作一線段表示$\sqrt{6}$.

用單位線段疊次作直角三角形卽得.

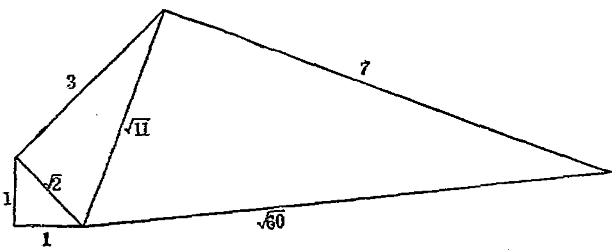
$$\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$
$$\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$$
$$\vdots$$
$$\sqrt{1+5}=\sqrt{6}$$

(圖八五)



例二. 給一單位線段,要作一線段表示$\sqrt{60}$

把根號裏的數做兩數和,至有一個是完全平方數(最好用最大的),疊次求出卽得.



(圖八六)

$\sqrt{60}=\sqrt{7^2+11}$, $\sqrt{11}=\sqrt{3^2+2}$, $\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1}$.

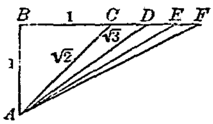
練習三十六

1. 作一個正方,面積等於所給正方的 3 倍.

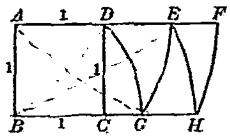
2. 作一個正方,面積等於所給兩正方的較.

3. 用方格紙作線段,表示$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$.

4. 圖八七 ABC 是半個單位正方, $BD=AC$, $BE=AD$, ……,說明 BC, BD, BE,等表示連續數的二次根.



(圖八七)



(圖八八)

5. 圖八八 AC 是單位正方,交換用 B, A 做心,畫 DG, GE, EH 等弧,說明 AE, AF,等表示連續奇數的二次根; BG, BH,等表示連續偶數的二次根.

6. 作線段表示下列各數,(用1公分表1):
$\sqrt{19}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{143}$, $\sqrt{214}$, $\sqrt{282}$, $\sqrt{710}$, $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$.

7. 用2寸表100哩,畫正方形表示全球陸地各洲的面積約數如下:——

亞洲	173.0萬方哩	南北美	161.6萬方哩
非洲	116.2萬方哩	歐洲	38.7萬方哩
澳洲	33.1萬方哩	南北極	50.8萬方哩

(11)二次根的最簡式　二次根號裏的數目，有時很大，不但是作起線段來表示很不便當，就是開方求數值，也太麻煩；我們最好用因子分解法把他來縮小，變做最簡的二次不盡根，或是簡直變成整數.

例一　$\sqrt{180}=\sqrt{2^2\times3^2\times5}=\sqrt{2^2}\sqrt{3^2}\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

例二　$\sqrt{576}=\sqrt{3^2\times8^2}=\sqrt{3^2}\sqrt{8^2}=24$

練習三十七

化簡下列各二次根:——

1　$\sqrt{75}$	2　$\sqrt{112}$	3　$\sqrt{128}$
4　$\sqrt{864}$	5　$\sqrt{7056}$	6　$\sqrt{9a^3-9a^2b}$
7　$\sqrt{243}$	8　$\sqrt{163\times9^2}$	9　$\sqrt{(x+b)(a^2-b^2)}$

(12)二次不盡根的保留　算學上解決問題，有時得到答數是個分數，譬如$\frac{1}{7}$，我們就說這個分數便是答數，不必除出那不盡的小數來.

同樣，有些問題的解答，也許是個二次不盡根，譬如$\sqrt{2}$，我們也就照樣保留作爲答數，不必再去開方求那永遠不盡的小數.

這種辦法,就是把那找小數的事,留給別人理會. 小數既是不盡,我們隨便寫出幾位數,以下的數人家都不知道,倒不如保留根式,使別人有要幾位便可開出幾位小數的選擇.

但是我們旣然把那較麻煩的事,留給別人去做,我們就應該把那保留的東西,寫做最簡的形式. 譬如分數要約分到最簡的分式,根式也要變做最簡的根式,免得別人要找小數時太費事,譬如$\sqrt{32}$應當寫做$4\sqrt{2}$.

還要知道,保留並不是躲懶,實在比小數更好. 不但形式簡單,有時還要繼續運算,那麼這種保留了的東西,却比小數又省事又準確.

譬如有二次方程 $x^2=2$

解出答數是 $x=\pm\sqrt{2}$

如果求出小數得 $x=\pm1.4142\cdots\cdots$

假如要覆驗如 $x^2=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ 恰合

至於 $x^2=1.4142\cdots\times1.4142\cdots=1.9999\cdots$

不但運算麻煩而且結果始終差一點.

(13)二次根的加減 兩個二次不盡根,要找他的和或較,不必各開平方,加減那永遠不盡的小數;有時可以化做兩個形式相彷彿的根式,叫相似根. 然後照代數相似項加減起來,可以得出一個根式.

例一 $\sqrt{45}+\sqrt{20}=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

例二 $\sqrt{45}-\sqrt{20}=3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$

練習三十八

把下列各式化到最簡單可保留的形式:——

1 $13\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{98}$ 2 $\sqrt{108}+\sqrt{75}+\sqrt{12}$

3 $\sqrt{490}+4\sqrt{40}-4\sqrt{90}$ 4 $6\sqrt{288}-4\sqrt{18}+\sqrt{128}$

5 $\sqrt{\frac{2a^2}{5}}+\sqrt{\frac{a^2}{10}}+\sqrt{\frac{18a^2}{5}}$ 6 $\sqrt{98}-\sqrt{18}+\frac{1}{\sqrt{8}}$

(14)二次根的乘積 算式裏邊有保留了的二次根,可以把他看做一個字母數. 運算起來也同運算字母一般.

(一)獨項根式乘法

例一 $\sqrt{6}\times\sqrt{15}=\sqrt{6\times15}=\sqrt{3^2\times10}=3\sqrt{10}$

例二 $(2\sqrt{3})(4\sqrt{3})=8(\sqrt{3})^2=8\times3=24$

(二)多項根式乘法

例一 $(3+\sqrt{2})(4+\sqrt{2})=?$

$$\begin{array}{r} 3+\sqrt{2} \\ 4+\sqrt{2} \\ \hline 12+4\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2}+2 \\ \hline 12+7\sqrt{2}+2 \end{array}$$

$\therefore (3+\sqrt{2})(4+\sqrt{2})=7(2+\sqrt{2})$

例二 $(2-\sqrt{3})^2=?$

$$\begin{array}{r} 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \\ \hline 4-2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3}+3 \\ \hline 4-4\sqrt{3}+3 \end{array}$$

$\therefore (2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}.$

練習三十九

求下列各結果:

1. $\sqrt{7}\sqrt{63}$　　2. $\sqrt{96}\sqrt{147}$　　3. $\sqrt{128}\sqrt{685}$

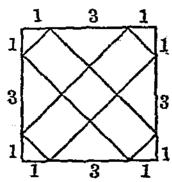
4. $(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$　　5. $(5\sqrt{3}+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2)$

6. $(a+b-\sqrt{ab})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$　　7. $(3\sqrt{5}+5\sqrt{7})(2\sqrt{10}-7\sqrt{14})$

8. $(8-7\sqrt{30})(3\sqrt{15}+4\sqrt{18})$　　9. $(3\sqrt{300}-2\sqrt{2})(2\sqrt{200}+\sqrt{3})$

10. $(15-3\sqrt{48})(15\sqrt{71}-63\sqrt{40})$

11. 正方形每邊5寸,各邊上到各角1寸的地方用線段連接如圖八九,證明成功兩長方,並求這兩長方的面積.



(圖八九)

12. 斜方每邊20寸,一個對角線10寸,求面積.

13. 正八角形每邊若是a,證明面積是$2a^2(\sqrt{2}+1)$.
先分全形做長方同三角形再推算.

(15) 共軛二次根 <u>*Conjugate Quadratic Surds*</u>

一個整數或是分數同一個二次根的和較,稱爲兩個共軛二次根.

譬如 $2+\sqrt{3}$ 同 $2-\sqrt{3}$ 是兩個共軛二次根,推廣得 $a\pm\sqrt{b}$ 爲兩個共軛二次根的通式,式裏的a,b $(b>0)$代表任何整數或分數.

(注意) 解二次方程所得到的二次根,都是共軛二次根.

(16)共軛二次根的特性 共軛二次根有個特殊的性質,就是他的乘積是個整數或分數.

(一) $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$

$$\begin{array}{l}
2+\sqrt{3} \\
2-\sqrt{3} \\
\hline
4+2\sqrt{3} \\
\quad -2\sqrt{3}-3 \\
\hline
4 \qquad\quad -3
\end{array}$$

(二) $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$

$$\begin{array}{l}
a+\sqrt{b} \\
a-\sqrt{b} \\
\hline
a^2+a\sqrt{b} \\
\quad -a\sqrt{b}-b \\
\hline
a^2 \qquad\quad -b
\end{array}$$

練習四十

寫出下列各式的共軛根,再找兩共軛根的乘積:——

1. $13+5\sqrt{3}$　　2. $20-13\sqrt{7}$

3. $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}\sqrt{2}$　　4. $8-\frac{a}{3}\sqrt{45}$

5. $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{2ab}$　　6. $\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2+b^2}$

7. 二次方程兩根的乘積常是整數或分數麼?

8. 有二次方程　$x^2-4x+1=0$

解x得　$x=2\pm\sqrt{3}$

請用根式同小數分別覆驗來比較.

解下列各二次方程,並用根式覆驗:——

9. $x^2-2x-1=0$　　10. $x^2+6x+2=0$

11. $2x^2+5x+3=0$　　12. $x^2+x-12=0$

13. $x^2-8x+8=0$　　14. $6x^2-23x-14=0$

15. $(x+3)(2x-3)=(5x-3)(x+1)$

(17) 分母裏二次根的化去法　分母裏有二次根做分母,不但同別數運算時不便當,就是留給別人求小數時,開方之後還要做討厭的長除法,未免太費事了;所以我們應該設法把他弄掉才是.

(一) 獨項二次根分母的化去法　分母裏的獨項二次根,最易去掉,只要分母子都用這二次根一乘便是.

例　$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(二) 多項二次根分母的化去法　利用共軛二次根的特性,凡是分母裏有多項二次根,一概可以化去.

例一.　$$\frac{21}{3+\sqrt{2}}=\frac{21(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}=\frac{21(3-\sqrt{2})}{9-2}$$

$$=\frac{21(3-\sqrt{2})}{7}=3(3-\sqrt{2})$$

例二.　$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=$$

$$\frac{5+2\sqrt{5}\sqrt{3}+3}{5-3}=\frac{8+2\sqrt{15}}{2}=4+\sqrt{15}$$

練習四十一

化去下列各式分母裏的二次根:——

1. $\frac{12}{\sqrt{4}}$　2. $\frac{16\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$　3. $\frac{12}{7\sqrt{3}}$

4. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$　5. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$　6. $\frac{2}{2-\sqrt{3}}$

7. $\dfrac{5}{2+\sqrt{5}}$　　8. $\dfrac{3-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}$　　9. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

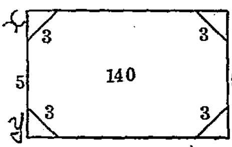
化簡下列各式:——

10. $\dfrac{3\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+5\sqrt{2}}$　　11. $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$

12. $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$　　13. $\dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$

14. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$　　15. $\dfrac{2\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

16. 有長方板原來的面積是140方尺,四角割下四個等腰三角形底邊各是3尺,那麼闊邊就恰剩下5尺. 問這長方板原來多少長?(用根式寫出)



(圖九〇)

$2y^2=9$　∴$y=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

寬 $=5+2y=5+3\sqrt{2}$

長 $=x$　$(5+3\sqrt{2})=140$

$x=\dfrac{140}{5+3\sqrt{2}}$

$=\dfrac{140(5-3\sqrt{2})}{(5+3\sqrt{2})(5-3\sqrt{2})}$

$=\dfrac{140(5-3\sqrt{2})}{25-18}$

$=\dfrac{700-420\sqrt{2}}{7}$

$=100-60\sqrt{2}$

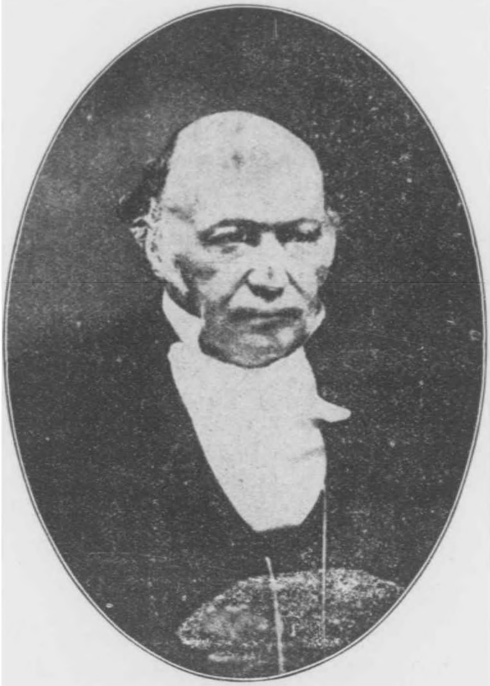
$=20(5-3\sqrt{2})$ 尺

韓莫敦的小傳 (1805—1865)

韓莫敦英國人．他的叔父是個有名的語言學家，韓莫敦幼時曾受他的薰洵，所以七歲時便能讀拉丁，希拉，德法等文字，到十三歲時可以說得他所懂的語言文字的種數同他年齡一樣多．大約就在這個年齡，他偶然看見一本牛頓的"數學，"引起了他的興趣，從此研究下去，不多時便把微積等學都看懂了．

十九歲進了都伯林三一大學 *Trinity College, Dublin.* 在校的成績，要算有一無二．當他二十二歲時，三一大學天文教授出缺，他還沒有畢業，就被大衆推爲繼任的天文教授，從此連任到他的終身．

韓莫敦在算學上的功績，就是提出代數的基本定律，譬如結合定律之類；同時發見四原術 *Quaternion*，有著作家說，四原論要算十九世紀中最大發明之一．



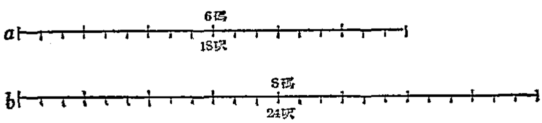
Hamilton

韓莫敦的肖像

第五章 比例線段

Proportional Line-segments

(1)線段比 *Ratio of two Line-segments* 兩線段用一單位線段量過,把量得的兩數,寫做分數式,就是兩線段的比. 譬如有a,b兩線段如圖九一,a量出6碼,b量出8碼;那麼$\frac{6}{8}$或是$\frac{3}{4}$就是a,b兩線段的比.

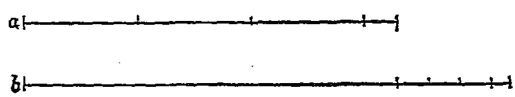


(圖九一)

(2)線段比與單位線段 兩線段的比,同量他的單位線段的長短,完全沒有關係. 譬如上面a,b兩線段,用碼量得的比是$\frac{a}{b}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$;若是都用呎來量,那麼$a$量出18呎,$b$量出24呎,得的比也是$\frac{a}{b}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$.

(3) **公共單位** *Common Unit* 兩線段的比,雖然同量他的線段長短無關,但是兩線段却要同時用同樣的線段去量才是. 譬如一線段用呎量,又一線段用碼量,或用尺量,或用公尺量,或用吋量,都不能找得比. 所以找比,最要緊的條件,就是要先找出一個公共單位.

公共單位,若是找到一個,便有許多. 譬如 x 是 a,b 的公共單位那麼 $\frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4},\cdots$ 都是公共單位. 所以我們找公共單位,只要一個. 那最大的一個很容易找出,只要把兩線像兩整數找最大公約數那樣,展轉相量便是.

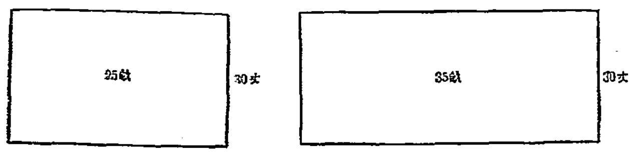


(圖九二)

譬如有 a,b 兩線段 $a<b$ 如圖九二, 用 a 量 b,餘下來不夠量的線段反轉來量 a,若又有餘剩,再反轉來量前次的餘剩,如是展轉量來量去,末後能量得恰盡的線段,便是公共單位.

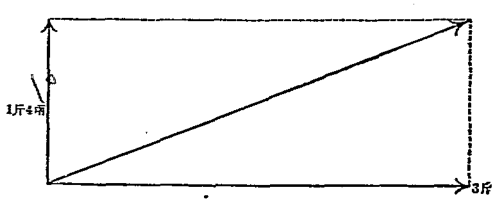
練習四十二

1. 有兩長方田如圖九三. 展轉量出兩長邊的最大公共單位,求兩長邊的比,再從面積推算覆驗.



(圖九三)

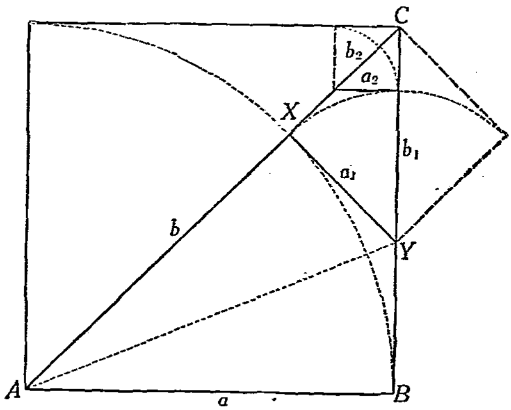
2. 成直角的兩力是1斤4兩同3斤,如圖九四,推算兩力的最大公共單位,在圖裏找出代表這公共單位的線段. 用這線段量合力,推算合力的斤兩. 再用畢達哥拉定理推算覆驗.



(圖九四)

3. 畫等腰三角形,兩腰都是10公分,底邊12公分,從圖量出高同底的比,再用畢達哥拉定理推算覆驗.

(4) **沒有公共單位的線段**　兩整數展轉相除,如果沒有最大公約數,至少總可以得到一個 1; 因爲凡是整數都可用 1 除盡. 到了線段展轉相量,却就大不然了. 有時量來量去永遠沒有窮盡;換句話說,就是簡直沒有公共單位. 這種的例很多很多,最容易了解的莫如正方邊同他的對角線兩個線段.



(圖九五)

在我們還沒有把 a, b 展轉相量以前,我要把圖上那些另外添上的線段,先解釋一下:

從 b 裏截取 $AX=a$, 再在 X 點上作垂線 YX 就是 a_1; 那麼就有下面兩個關係:——

(一) $CX=XY=YB$

〔證〕 因爲 $\angle XCY=45°$ 何故?

於是 $\angle XYC=45°$ 何故?

所以 $XY=XC$ 何故?

又在 ΔAYB 裏有 $YB=\sqrt{AY^2-a^2}$ 何故?

在 ΔAYX 裏也有 $XY=\sqrt{AY^2-AX^2}=\sqrt{AY^2-a^2}$

所以 $XY=YB$

(二) ΔXYC 是半個正方 (留給你們自己證)

那麼得了!現在我們來把 a, b 展轉相量:——

1. 把 a 量 b, 量去一下 AX 餘下 XC, 無異 a_1;
2. 把 a_1 量 a 或 BC, 量去一下 BY, 再量 b_1, 餘下 a_2,
3. 把 a_2 量 a_1 或 XC, 量去一下,再量 b_2, 餘下 a_3.

你看: 1. 用 a 量 b 是方邊量對角線;

2. 用 a_1 量 b_1 也是方邊量對角線;

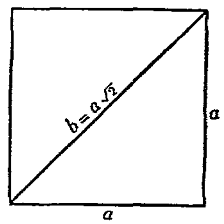
3. 用 a_2 量 b_2 還是方邊量對角線.

照這樣進行,無論今年量到明年,情形依然一樣,手續完全重覆,那麼怎樣會有止境呢?所以這兩線段決不能有公共單位.

(5)有公度量與無公度量 *Commensurable and Incommensurable Magnitudes* 前面線段的討論,可以推廣到任何量. 有公共單位的量叫有公度量;沒有公共單位的量叫無公度量.

(6)有理數與無理數 *Rational and Irrational Numbers* 量雖可以沒有公度,却不能沒有比;不過有公度量的比是分數或整數,無公度量的比不是分數整數罷了.譬如正方邊同他的對角線的比,用畢達哥拉定理找出來得

$$\frac{b}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$$



(圖九六)

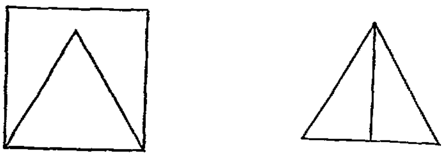
這種數不能用分數或整數湊合寫出,叫無理數;同他對待起來,那整數分數就叫做有理數.

$$\text{數}\begin{cases}\text{有理數}\begin{cases}\text{整數: } 1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots\\ \text{分數: } \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\cdots\cdots\end{cases}\\ \text{無理數: } \sqrt{2},\ \sqrt{3}\ \ \pi,\ \sqrt[3]{4},\cdots\cdots\end{cases}$$

(注意)無理數寫做小數,是不循環的無窮小數.

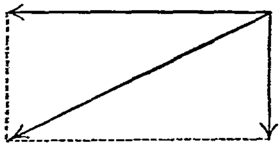
練習四十三

1. 證明等邊三角形邊同高的比是無理數$\sqrt{3}$.

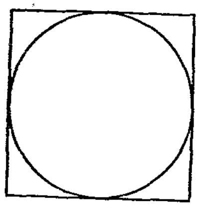


(圖九八)

2. 證明圖九八裏邊線相等的等邊三角形同正方,兩



(積面)



(圖一〇〇)

3. 正交兩力的比是1同2,求合力與兩力的比.

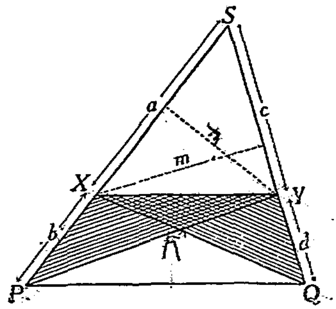
4. 證明圓徑上的正方同面積的比,是無理數$\frac{\pi}{4}$.

(7)比例線段 *Proportional Line-segments* 有兩線段的比,恰等於另外兩線段的比,這樣的四線段叫比例線段.下一節三角形兩腰上的四線段,就是這樣的一個例.

(8)三角形裏的比例線段定理 三角形裏同底邊平行的線,分兩腰成比例線段.

〔解〕 已知 $XY \parallel PQ$

要證 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$



(圖一〇一)

〔證〕 連接 XQ 同 YP 兩線段 (公法一)

又作 $m \perp SQ$ 同 $n \perp SP$ (作垂線法)

因為 $XY \parallel PQ$ (與件)

所以 $\Delta XYP=\Delta XYQ$ (Δ面積推論)

但是 $\begin{cases}\Delta XYP=nb\\ \Delta XYQ=md\end{cases}$ (Δ面積定理)

於是 $nb=md$ (等量公理一)

又有 $\Delta XYS=na=mc$ (Δ面積定理)

兩式相除 $\dfrac{na}{nb}=\dfrac{mc}{md}$ (等量公理五)

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

練習四十四

1. 如圖一〇一,設$a=3.5$, $b=2$, $c=3$, $d=?$

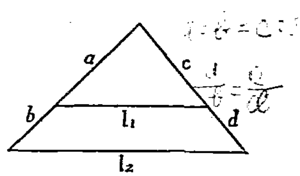
2. 證明平分三角形一邊的線,若同第二邊平行,那麼必定平分第三邊.

3. 如圖一〇二,已知$l_1 \parallel l_2$

給了 $c=\frac{3x-1}{4}-\frac{4x-5}{5}$

$d=\frac{7x+5}{10}$

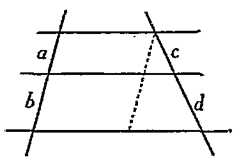
倘若$a=b$求c,d的值.



(圖一〇二)

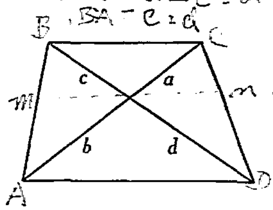
4. 兩線被三平行線割成四線段,如圖一〇三.

證明 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$



(圖一〇三)

Am:mB = b:a
Cn:nD = c:d
BA = c:d

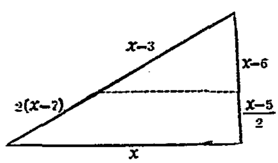


(圖一〇四)

5. 證明梯形兩對角線互相分成比例線段 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

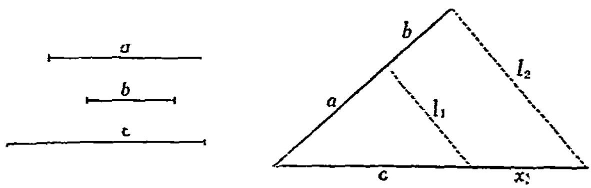
6. 證明梯形裏面同上下底平行的線分割兩腰成比例線段.

7. 如圖一〇五虛線同底平行,求三邊.



(圖一〇五)

(9) 作第四比例線段法 作一線段同所給的三線段順次成比例線段.



(圖一〇六)

〔解〕 給了a,b,c三線段

要作一線段如圖一〇六的x湊成比例線段,

使有 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

〔作法〕(一)依公法:引長a使引長部分等於b;

(二)又從a的他端隨便作線段等於c;

(三)連接a,c兩端作l_1;

(四)依作平行線法:從b端作$l_2 \parallel l_1$;

(五)引長c到l_2,即得線段x.

那麼就有$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.

〔證〕 因為 $l_1 \parallel l_2$ (所作)

所以 $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ (△比例線段定理)

練習四十五

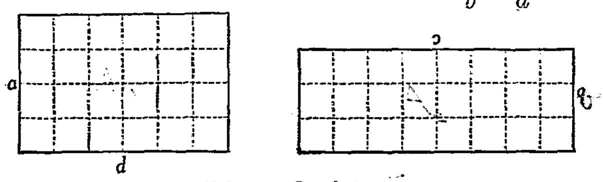
求下列各比例裏x的數值,(1)用作線段法,(2)用解方程法:

1. $\frac{4.2}{2.5}=\frac{3.7}{x}$　　2. $\frac{3}{x}=\frac{4.5}{8}$

3. $\frac{x+1}{2.5}=\frac{3}{5}$　　4. $\frac{4}{6.5}=\frac{x-1}{19.5}$

5. 給了a,b,c三線段$a=2.5$; $b=3.5$; $c=5$, 要作(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, (2) $\frac{a}{c}=\frac{b}{y}$ 兩個第四比例線段,并解方程證明他相等,再檢驗你的線段.

6. 設有兩個長方形面積相等,高同底如圖一〇七所示.證明這兩長方的高底成比例線段:$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$



(圖一〇七)

7. 在一條指定的線段上作一長方,使他的面積同一個所給的長方的面積相等.

8. 設有兩個三角形:一個的高是a,底是d;又一個的高是b底是c;如果這四線有$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,證明這兩三角形等積.

9. 在一指定線段上作等腰三角形,使他面積等於所給的三角形的面積.

(10) 比例的加法定律 *Addition Law of Proportion* 若有四量成比例,那麼兩比裏的二量各相加,也成比例.

〔解〕 已知: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

要證: $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

〔證〕 從所給的 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (與件)

兩邊各加1 $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ (等量公理一)

$\therefore \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

(11) 比例的減法定律 *Subtraction Law of Proportion* 若有四量成比例,那麼兩比裏的二量各相減,也成比例.

〔解〕 已知: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

要證: $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

〔證〕 從所給的 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (與件)

兩邊各減1 $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ (等量公理二)

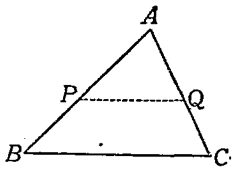
$\therefore \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

練習四十六

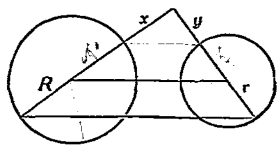
1. 如圖一〇八三角形裏有$PQ \parallel BC$,證明:

(1) $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}$　(2) $\frac{AB}{PB}=\frac{AC}{QC}$

(3) $\frac{AB}{AC}=\frac{AP}{AQ}$　(4) $\frac{AB}{AC}=\frac{PB}{QC}$



(圖一〇八)



(圖一〇九)

2. 如圖一〇九,連接兩圓心的線段同連接兩圓周上一點的線段平行. 證明x, y的比等於R, r的比。

3. 求x, y的比:(1)$\frac{x+2}{x-2}=\frac{y+4}{y-4}$　(2)$\frac{x-5}{2x+5}=\frac{3y+7}{2y-7}$

4. 應用比例的減法定律解出下方程的x:

(1) $\frac{3-4x}{4x+3}=\frac{2x+4}{6-2x}$　(2) $\frac{x+5}{x+3}=\frac{x-3}{x-4}$

(3) $\frac{x+\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{4}}=\frac{x+\frac{5}{3}}{x-1}$　(4) $\frac{1+\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{4}}=\frac{2-\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{4}}$

5. 有分數:分子加1,變做$\frac{2}{3}$;分母加1,變做$\frac{1}{2}$;求原分數(應用比例加法定律)。

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\quad\frac{(a+b)+(a-b)}{(a+b)-(a-b)}$

(12) 比例的加減定律 若有四量成比例,那麼兩比裏的二量各相加減,也成比例.

〔解〕 已知: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

要證: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

〔證〕 從所給的 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (與件)

得到 $\begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} & \text{(比例加法定律)}\\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} & \text{(比例減法定律)}\end{cases}$

兩式相除 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (等量公理五)

練習四十七

1. 已知$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, 證明$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

2. 應用比例的加減定律求x, y的比:——

(1) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{a+b}{a-b}$ (2) $\frac{2x+3y}{2x-3y}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$

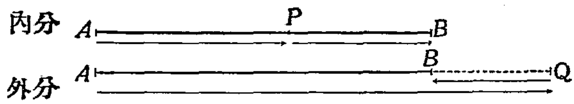
3. 有兩長方面積相等,證明兩長闊和較成比例.

4. 應用比例加減定律解下列方程:

(1) $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=3$ (2) $\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x}}$

5. 有分數:分子加3分母加2等於分子減2分母減3,求原來的分數(應用比例的加減定律)。

(13)線段的內分與外分　在一線段裏取一點,我們就說這線段被這點內分做兩線段,如圖AB被P點分做兩線段.　這兩線段可以順着一個方向讀出:從原線段的一端讀到分點,如AP;再從分點讀到他端,如PB.



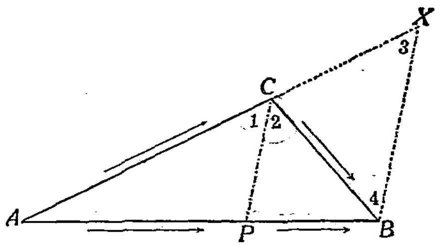
(圖一一〇)

在一線段的引長線上取一點,如圖的Q點,我們就說這線段AB被Q點外分做兩線段,一個是AQ,一個是QB.　我們也照樣從原線段的一端讀到分點如AQ,再從分點讀到他端如QB.

在這兩種情形裏,倘若我們承認從A到B的方向做正,反轉來的方向做負;那麼那分出來的線段同原線段的關係,都可以依剛纔的讀法順次寫出如下:——

$$\left.\begin{array}{l}\text{(一)內分 } \textit{internal division} \quad AP+PB=AB,\\ \text{(二)外分 } \textit{external division} \quad AQ+QB=AB.\end{array}\right\}\text{完全一致.}$$

(14)三角形的內分比例線段定理 三角形頂角的分角線內分底邊成兩線段，同兩腰成比例線段.



(圖一一一)

〔解〕 已知 $\angle 1=\angle 2$ 要證: $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AC}{CB}$

〔證〕 引長AC,再作$BX \parallel CP$ (作平行線法)

於是 $\begin{cases}\angle 1=\angle 3 & \text{(平行應角定理)}\\ \angle 2=\angle 4 & \text{(平行錯角定理)}\end{cases}$

但是 $\angle 1=\angle 2$ (與件)

所以 $\angle 3=\angle 4$ (等量公理)

於是 $CB=CX$ (等腰△定理二)

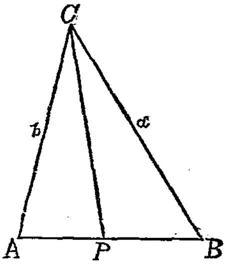
又因 $CP \parallel XB$ (所作)

所以 $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AC}{CX}$ (△內比例線段)

$\therefore \dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AC}{CB}$

練習四十八

1. 有三角形如圖一一二，CP 平分 C 角，$a=14$，$b=12$ $AB=10$. 求 AP 同 PB.

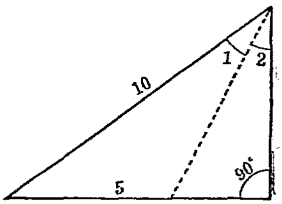


(圖一一二)

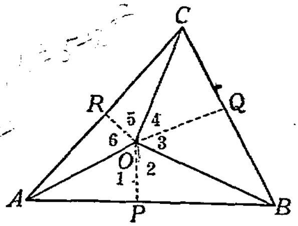
2. 有三角形的三邊是 10 寸；20 寸；14 寸. 問 14 寸邊的對角的平分線所分成的兩三角形，面積的比是什麼？

3. 有三角形三邊是：7 寸，8 寸，9 寸. 求各角的分角線所分對邊的三對線段.

4. 有直角三角形如圖一一三，$\angle 1=\angle 2$　求三邊.



(圖一一三)

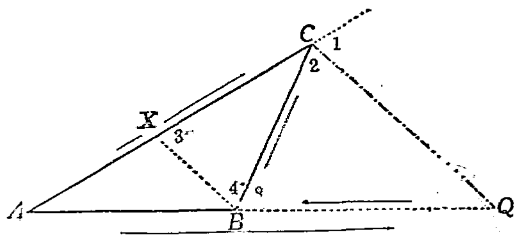


(圖一一四)

5. 三角形裏任取一點如圖一一四向各角作線；平分各角如 ~~∠12; ∠3=; 6~~　∠1=∠2　∠3=∠4　∠5=∠6

證明：　$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RA}=1$$

(15)三角形的外分比例線段定理 三角形頂角的外角分角線，外分底邊成兩線段，同兩腰成比例線段.



(圖一一五)

〔解〕 已知 $\angle 1=\angle 2$ 要證: $\dfrac{AQ}{QB}=\dfrac{AC}{CB}$

〔證〕 作 $BX \parallel QC$ (作平行線法)

於是 $\angle 1=\angle 3$; $\angle 2=\angle 4$ (平行性質)

但是 $\angle 1=\angle 2$ (與件)

所以 $\angle 3=\angle 4$ (等量公理)

於是 $CB=CX$ (等腰△定理二)

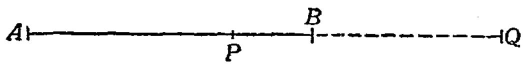
又因 $CQ \parallel XB$ (所作)

所以 $\dfrac{AB}{BQ}=\dfrac{AX}{XC}$ (△內比例線段)

幷有 $\dfrac{AB+BQ}{BQ}=\dfrac{AX+XC}{XC}$ (比例加法定律)

$\therefore$ $\dfrac{AQ}{QB}=\dfrac{AC}{CB}$ (線段加法)

(16)調和分割 <u>*Harmonic Division*</u> 一線段內分外分兩比相等；那麼這線段叫做已經調和分割了.

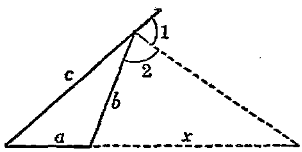


(圖一一六)

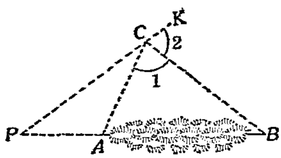
如圖若有$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$, AB就算調和分割了.

練習四十九

1. 圖一一七的$a=5, b=6, c=9, \angle 1=\angle 2$, 求$x$.



(圖一一七)



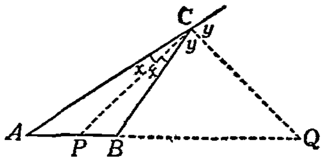
(圖一一八)

2. 要測不便直接去量的A,B兩點的距離,如圖一一八,就先揀一點C, 作CK,使$\angle 1=\angle 2$; 再延長到P,使P,A,B在一直線上. 問量那幾條線段,可推算出AB呢?

3. 三角形三邊是8寸, 10寸, 12寸,求外角平分線外分三邊所成的三對線段.

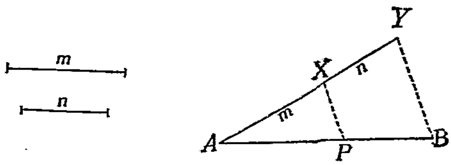
4. 直角三角形的兩股是8同15,求直角的外角平分線外分斜邊的一對線段.

5. 證明三角形隨便一角的平分線,同他的外角的平分線,恰好把這角的對邊調和分割.



(圖一一九)

(17)線段的內分法　內分一指定的線段等於所給兩線段的比.



(圖一二〇)

〔解〕　給了m,n同AB三線段,

要把AB內分,使分得的線段比等於$\frac{m}{n}$.

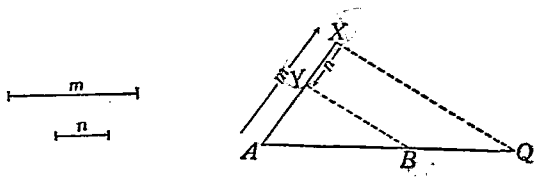
〔作法〕(一)依公法:從A作線令$AX=m$;$XY=n$.

(二)依作平行線法:先連YB,再作$XP \parallel YB$

那麼就有$\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$

〔證〕　$\because$　$XP \parallel YB$　$\therefore \frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}$　　(△比例線段)

(18) 線段的外分法　外分一指定的線段等於所給兩線段的比.



(圖一二一)

〔解〕給了 m, n 同 AB 三線段;

要把 AB 外分,使分得線段比等於 $\frac{m}{n}$

〔作法〕(一)依公法:從 A 作線,令 $AX=m$; $XY=n$.

(二)依作平行線法:先連 YB,再作 $XQ \parallel YB$.

那麼就有 $\frac{AQ}{QB}=\frac{m}{n}$

〔證〕 $\because XQ \parallel YB$　$\therefore \frac{AB}{BQ}=\frac{m-n}{n}$　(△比例線段)

但是　$\frac{AB+BQ}{BQ}=\frac{m}{n}$　(比例加法定律)

$\therefore$　$\frac{AQ}{QB}=\frac{m}{n}$　(線段加法)

練習五十

1. 分一線段做兩部分,成3同7的比.

2. 作 $\sqrt{13}$ 的線段,再分做兩部分成3同 $\sqrt{2}$ 的比.

3. 外分一指定線段,成13同7的比.

4. 長方的兩邊的較是1寸,長闊成5同2的比;作這個長方. 再用方程求長濶覆驗你的圖形.

5. 長方兩邊的和是5寸,長闊成7同4的比,作這個長方. 再用方程求長濶覆驗你所作的圖.

6. 延長所給線段,要使延長部分同原線段成3同$\sqrt{5}$的比.

7. 內分指定線段做兩部分,使這兩部分的比等於正方形邊同對角線的比.

8. 外分指定線段做兩部分,使這兩部分的比等於正方形邊同對角線的比.

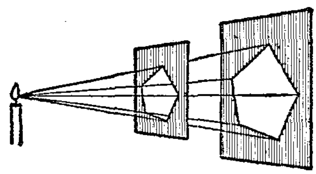
9. 已給正方形邊同對角線的和,作這正方.

10. 已給正方形邊同對角線的較,作這正方.

第六章　相似三角形與多角形

Similar Triangles and Polygons

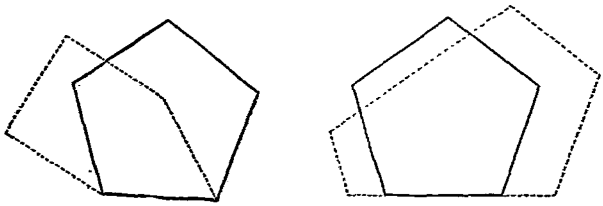
(1) 相似多角形定義　你們知道:兩形式樣相同,大小不等,是相似形;如圖一二二是相似五角形.你們細看,這兩個相似五角形,大小雖然不同,卻有兩件東西完全沒有改變.第一,角度沒有變:這形裏有一角,那形裏就有一角同他對應且相等.第二線段比沒有變:這形裏有兩線段,那形裏就有兩對應線段,兩比相等.這兩個條件,不但是必要的,并且是充分的,於是有定義如下:



(圖一二二)

既有　(一)對應角都相等
又有　(二)對應邊成比例　} 就叫相似多角形.

前面所講的定義包括兩部份,看來好像太多不是必要的,那麼就請看下面兩個多角形都只合這定義的一部份,卻不相似.



(圖一二三)

(2) 相似形的實用 我們差不多時時要用相似形,不要遠處找例,便是你的教員,在黑板上畫圖給你們講幾何,就往往是教科書裏小小圖形的放大相似形,你們做練習也往往畫書上小圖的相似形,至於照相,更不消說了.此外像自然教科書裏的動植物理化儀器等圖,都是實物的相似形. 一隻牛可畫得比老鼠要小,一隻蚊子可畫得比鴨子要大;然而你們並不因大小顚倒,發生誤會;這是因爲那圖形裏邊比例不錯角度又合的緣故.

有時畫人,畫得不好,你便說這人的耳朵太大,其實圖上不過一公分,我知道你的意思,是說那比例不合;可見我們都已默認了線段比不變的條件. 你又許指出來說,那人鼻子畫得太歪,可見我們也承認了那角度不變的條件.

(3) 相似三角形的特性　三角形本是多角形的一種,照相似多角形定義,兩個三角形應

當要　　(一)三角對應相等

而且　　(二)三邊對應成比例

才能算是相似. 但是三角形卻不比其他的多角形,在上面的條件裏,只要有一部份適合,其餘部份便自然連帶的也要適合. 分別來講,就是:兩個三角形,只要在下面三個條件裏隨便有一個適合了,便充分的相似:——

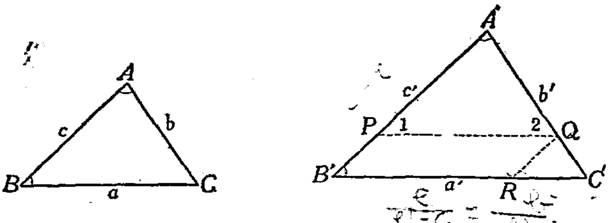
(A)兩角對應相等,

(B)兩邊對應成比例夾角相等,

(C)三邊對應成比例

以後各節,就把這三個條件逐一順次證明.

(4) 相似三角形定理一(兩角) 兩三角形有兩角對應等,必相似.



(圖一二四)

〔解〕已知: $\angle A'=\angle A$; $\angle B'=\angle B$

要證: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ 換句話說,就是要證

$$\angle C'=\angle C;\quad \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}.$$

〔證〕截取 $A'P=c$, $A'Q=b$; 連接 PQ (公法)

於是 $\triangle A'PQ \cong \triangle ABC$ (兩角夾一邊)

幷且 $\begin{cases}\angle 1=\angle B=\angle B' & \text{(已證同與件)}\\ \angle 2=\angle C=\angle C' & \text{(三角和定理)}\end{cases}$

$\therefore\ PQ \parallel a'$ (應角等則平行)

故有 $\dfrac{A'P}{PB'}=\dfrac{A'Q}{QC'}$ (△裏比例線段)

即 $\dfrac{c}{c'-c}=\dfrac{b}{b'-b}$ (線段減法)

或 $\dfrac{c'-c}{c}=\dfrac{b'-b}{b}$ (等量公理)

所以 $\dfrac{c'}{c}=\dfrac{b'}{b}$ (比例加法定律).

再作 $QR \parallel c'$　　$\therefore B'R = PQ = a$　　（▱對邊相等）

又有　　$\dfrac{C'Q}{QA'} = \dfrac{C'R}{RB'}$　　（△裏比例線段）

即　　$\dfrac{b'-b}{b} = \dfrac{a'-a}{a}$　　（線段減法）

所以　　$\dfrac{b'}{b} = \dfrac{a'}{a}$　　（比例加法定律）

合起來得　　$\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$　　（等量公理）

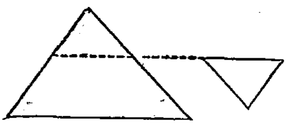
$\therefore \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$　　（相似形定義）

推論　兩直角三角形有一銳角等便相似

練習五十一

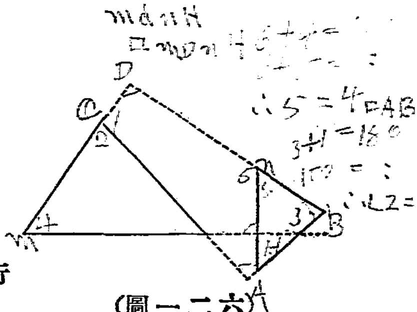
1. 證明頂角相等的兩個等腰三角形相似。

2. 證明梯形兩腰引長所成的小三角形同大三角形相似。



（圖一二五）

3. 證明三邊對應平行的兩三角形相似（圖一二五）



（圖一二六）

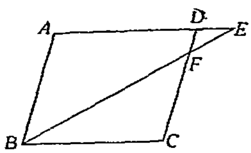
4. 證明三邊對應正交的兩三角形相似（圖一二六）

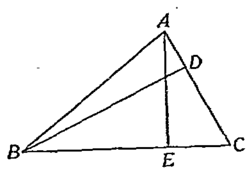
(5)相似三角形與比例線段 一個最常用的方法，去證明四線段成比例線段，就是在圖形關係上，找出兩個相似三角形（只要有兩角對應相等），使這四線段恰好是他的兩對對應邊，然後按相似形定義開列這四線段的比例。

練習五十二

1. 在圖一二七裏 $ABCD$ 是平行四邊形。延長 AD 到 E，連接 BE。問圖裏有幾組比例線段（每組四條）？

（圖一二七）





（圖一二八）

2. 圖一二八裏 $AE \perp BC$，$BD \perp AC$，證明 $\frac{AE}{BD}=\frac{AC}{BC}$.

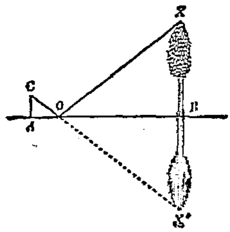
3. 梯形的下底若是上底的兩倍，證明對角線相交在三等分的一點。

4. 證明兩個相似三角形對應角平分線的比，等於隨便兩條對應邊的比。

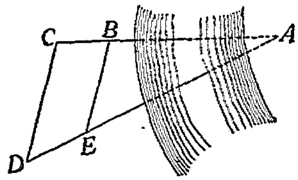
5. 梯形上底18寸，下底60寸，問延長兩腰到相交，所成的延長部分，同原來兩腰的比是什麼？

6. 三角形田的三邊是 125 尺,54 尺,112 尺. 要畫圖表示,用 3 寸代表最長一邊,其餘兩邊應畫多少長?

7. 測量家從 C 點看樹在池裏的影子,望得影端 X' 同 O,C 在一直線上,如圖一二九. 若測得 CA,XB 都同地平線 AB 成直角,又量得 $CA=5$ 尺,$AO=6.2$ 尺,$BO=30$ 尺,問怎樣推算樹的高?



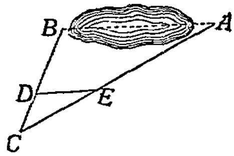
(圖一二九)



(圖一三〇)

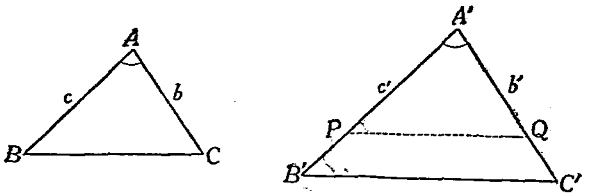
8. 要量河闊 AB,先揀一點 C 同 A,B 在一直線上,如圖一三〇,再依同方向作 BE, CD ($BE \parallel CD$),使 D,E,A 在一直線上. 若量得 $CD=65$ 尺, $BE=50$ 尺, $BC=24$ 尺,問怎樣推算 AB?

9. AB 中間是一塊有水的低地,要測量 AB 的距離,就從一點 C 量得 $CA=12$ 丈, $CE=45$ 尺,再作 $ED \parallel AB$,使 D,B,C 在一直線上. 若 $DE=3$ 丈,問 $AB=$?



(圖一三一)

(6)相似三角形定理二(兩邊夾一角)　兩三角形有兩邊對應成比例夾角相等必相似.



(圖一三二)

〔解〕 已知 $\angle A'=\angle A$; $\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$　要證: $\triangle A'B'C'\sim\triangle ABC$

〔證〕 截取　$A'P=c$　作 $PQ\parallel B'C'$　(作垂線法)

於是　$\angle P=\angle B'$　(平行則應角等)

并有　$\frac{A'P}{PB'}=\frac{A'Q}{QC'}$　(△裏比例線段)

卽　$\frac{c}{c'-c}=\frac{A'Q}{b'-A'Q}$　(線段減法)

解出 $A'Q$　$A'Q=\frac{b'c}{c'}$　(一次方程)

又因　$\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$　(與件)

解出 b　$b=\frac{b'c}{c'}$　(一次方程)

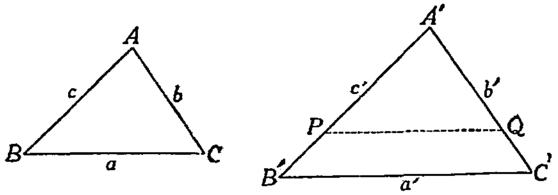
$\therefore$　$A'Q=b$　(等量公理)

那麼　$\triangle A'PQ\cong\triangle ABC$　(兩邊夾一角)

而且　$\angle P=\angle B'=\angle B$　(量公理)

$\therefore$　$\triangle A'B'C'\sim\triangle ABC$　(兩角對應等)

(7)相似三角形定理三(三邊)　兩個三角形三邊對應成比例必相似.



(圖一三三)

〔解〕 已知 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$　要證: $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

〔證〕 截取 $A'P=c$, $A'Q=b$; 連接PQ　(公法)

那麼在 $\triangle A'PQ$ 同 $\triangle A'B'C'$ 兩三角形裏

有兩邊對應成比例夾角相等 $\begin{cases} \dfrac{A'P}{A'B'}=\dfrac{A'Q}{A'C'} & \text{(所作)} \\ \angle A'=\angle A' & \text{(公共)} \end{cases}$

於是　$\triangle A'PQ \sim \triangle A'B'C'$　(兩邊夾一角相似)

所以　$\frac{a'}{PQ}=\frac{b'}{A'Q}=\frac{b'}{b}$　(相似定義)

又因　$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$　(與件)

所以　$\frac{a'}{PQ}=\frac{a'}{a}$　(等量公理)

解出PQ　$PQ=a$　(一次方程)

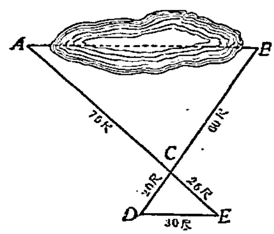
便有　$\triangle A'PQ \cong \triangle ABC$　(全等△,三邊)

$\therefore$ $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$　(代換)

練習五十三

1. 證明相似三角形對應頂點到對邊中點的線段的比等於對應邊的比.

2. 照圖一三四的計畫要測 AB 的距離,量出可量的線段如圖,求 AB.

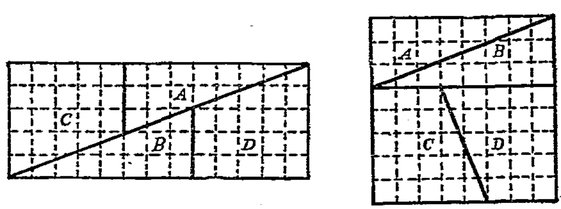


(圖一三四)

3. 證明直角三角形隨便有兩邊對應成比例,就必相似.

4. 用相似三角形定理二證明連結三角形兩邊中點的線段,等於第三邊的一半.

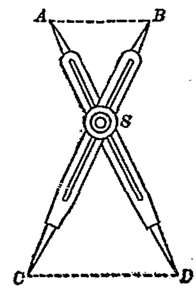
5. 證明連結 $\triangle ABC$ 三邊中點的線段所成的三角形同 $\triangle ABC$ 相似.



(圖一三五)

6. 如圖 $A,B,C,D,$ 四形可湊成一個正方,面積64,又可湊成一個長方,面積65,好像64=65,錯誤在那裏?

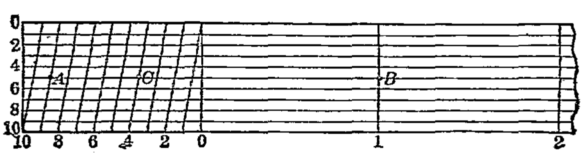
(8) **比例分線規** Proportional Dividers　利用相似三角形裏的比例線段，可以製造幾種很有用的器具．如圖 AD, BC 是銅做的兩桿，上面刻了數目，中間有空槽，螺旋輪 S 可以自由升降，決定 AB 同 CD 的比，使有



(圖一三六)

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AS}{SD}=\frac{BS}{SC}.$$

(9) **對角線尺** Diagonal Scale　還有一種器具，如圖一三七，可以量出一條不很長的線段



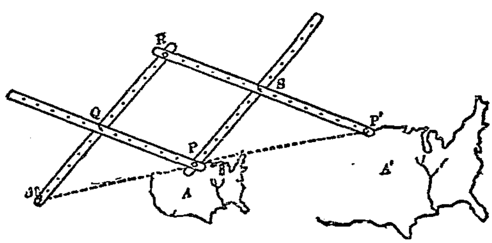
(圖一三七)

的長度到百分之幾的一寸的準確．用法：把圓規或比例規套準要量的線段兩端點，再將原距離套在尺上一個適當的地方一讀，即得．

練習五十四

1. 在比例規裏若 $\frac{BS}{SC}=\frac{3}{5}$, $CD=6$ 公分,問 $AB=?$
2. 對角線尺是根據那一個定理製造出來的?
3. 圖一三七是對角線尺的一段,共長三吋;若有一線段用規比齊兩端點套在尺上恰合在 AB 的地方;問這線段長多少? 若在 BC 的地方長多少?
4. 畫一吋的正方,用圖一三七的尺量對角線.

(10) 圖形縮放器 Pantograph 如圖一三八 O 點固定不動; Q,S 可依桿上的小眼任意選



(圖一三八)

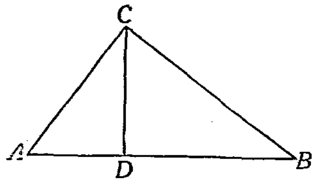
比例,使 $\frac{OQ}{OR}=\frac{RS}{RP'}$; 於是 O,P,P' 常在一直線上.所以 $\frac{OP}{OP'}=\frac{OQ}{OR}$. 使 P 沿 A 形各線移動, P' 處的鉛筆同時畫相似形 A'. 掉換 P,P',便是縮小.

(11)直角三角形母子相似定理 直角三角形直角頂點到斜邊的垂線，分原形爲兩個小直角三角形，都同原形相似，故互相似.

〔解〕 已知 $\angle ACB=90°$

$CD \perp AB$

要證: $\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ACD$



(圖一三九)

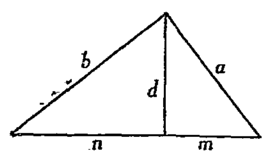
〔證〕 ∵ $\angle A$公共 ∴ $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (兩角等推論)

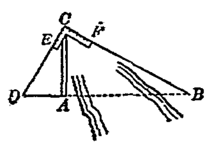
∵ $\angle B$公共 ∴ $\triangle ABC \sim \triangle CBD$ (兩角等推論)

合併卽得 $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$

練習五十五

1. 如圖一四〇 a, b 夾直角, $d \perp n$, 證 $\frac{m}{n}=\frac{a^2}{b^2}$.

(圖一四〇)




(圖一四一)

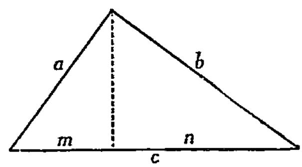
2. 要量河闊 AB, 如圖一四一立竿 AC 高52尺,置矩尺令 CF 指着 B, CE 指着 D, $AD=6$尺, $AB=$?

(12)畢達哥拉定理的別證 利用直角三角形母子相似定理，我們又得到一個畢達哥拉定理的證法，雖不及第四章歐几里得的證法那般美麗，却比他簡單得多了:——

直角三角形兩股的平方和,等於斜邊的平方.

〔解〕 已知 a,b 成直角

要證 $a^2+b^2=c^2$



(圖一四二)

〔證〕 從直角的頂點作 c 的垂線

分 c 邊做 $m+n=c$

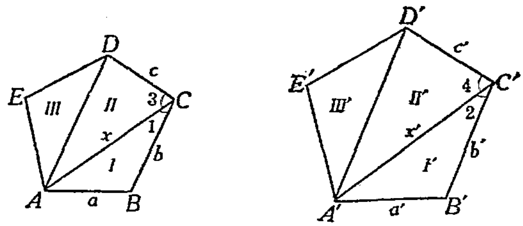
因爲 $\begin{cases} \dfrac{a}{c}=\dfrac{m}{a} \\ \dfrac{b}{c}=\dfrac{n}{b} \end{cases}$ 何故?

所以 $\begin{cases} a^2=mc \\ b^2=nc \end{cases}$ 何故?

相加 $a^2+b^2=(m+n)c$

$\therefore \quad a^2+b^2=c^2$

(13)相似多角形定理　從相似多角形一個對應頂點所發出的許多對角線，必分兩形爲個數相同位置相似的許多對應相似三角形.



(圖一四三)

〔解〕已知　$A'B'C'D'E' \sim ABCDE$

要證:　$I \sim I'$　$II \sim II'$　$III \sim III'$

〔證〕因爲　$\dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}$,　$\angle B'=\angle B$　(與件)

所以　$I \sim I'$　(兩邊夾一角)

於是　$\angle 2=\angle 1$　(相似定義)

又因　$\angle C'=\angle C$　$\therefore$　$\angle 4=\angle 3$

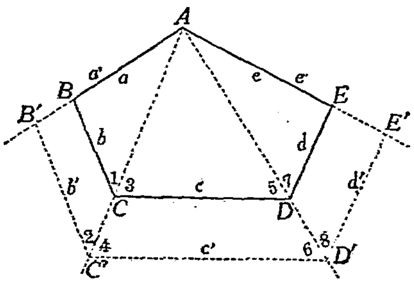
因爲　$\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c}$,　$\dfrac{b'}{b}=\dfrac{x'}{x}$　(與件,已證)

故有　$\dfrac{c'}{c}=\dfrac{x'}{x}$　(等量公理)

$\therefore$　$II \sim II'$　(兩邊夾一角)

同樣可證　$III \sim III'$

(14)相似多角形作法 作一個多角形同所給的多角形相似



(圖一四四)

〔解〕 給了多角形$ABCDE$, 要作他的相似形.

〔作法〕 (一)從A作各角的對角線并且引長

(二)從B'作 $b' \parallel b$; $c' \parallel c$; $d' \parallel d$

那麼 $A'B'C'D'E' \sim ABCDE$

〔證〕 因為 $b' \parallel b$; $c' \parallel c$; $d' \parallel d$ (所作)

$\therefore$ $\angle B' = \angle B$; $\angle 2 = \angle 1$; $\angle 4 = \angle 3$; $\angle 6 = \angle 5$;

$\angle 8 = \angle 7$; $\angle E' = \angle E$ (平行性質二)

相加 $\angle C' = \angle C$; $\angle D' = \angle D$ (角的加法)

又 $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{c'}{c} = \dfrac{AD'}{AD} = \dfrac{d'}{d}$ (相似定義)

$\therefore$ $A'B'C'D'E' \sim ABCDE$ (相似定義)

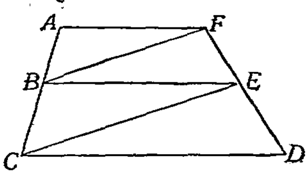
練習五十六

1. 指定一邊的長度,作三角形同所給三角形相似.

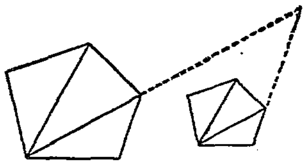
2. 作個五角形同所給的五角形相似,對應邊的比等於指定線段的比.

3. 圖一四五裏 $ABEF \sim BCDE$, 證明 $BF \parallel CE$.

4. 相似多角形對應邊平行,對應對角線也平行。



(圖一四五)



(圖一四六)

(15) **連比例** <u>*Continual Proportion*</u> 許多比連續相等叫連比例. 例如 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$

(16) **連比例定理**

倘若 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$, 那麼 $\frac{a'+b'+c'}{a+b+c}=\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$.

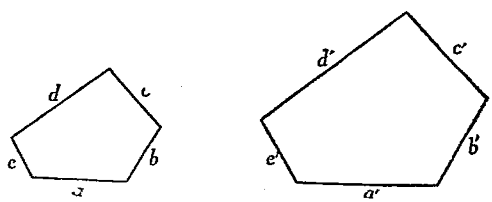
〔證〕　設 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=k$

於是　$a'=ka,\quad b'=kb,\quad c'=kc$

相加　$a'+b'+c'=k(a+b+c)$

$\therefore\quad \frac{a'+b'+c'}{a+b+c}=k=\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$

(17) 相似多角形綠邊比定理　兩相似多角形綠邊的比,等於兩個對應邊的比.



(圖一四七)

〔解〕　已知 $a'b'c'd'e' \sim abcde$

要證: $\frac{a'+b'+c'+d'+e'}{a+b+c+d+e}=\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}=\frac{e'}{e}$

〔證〕　$\because \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}=\frac{e'}{e}$　(與件)

$\therefore \frac{a'+b'+c'+d'+e'}{a+b+c+d+e}=\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d}=\frac{e'}{e}$　(連比例定理)

練習五十七

1. 設有 $\frac{x-a-c}{y-b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 求 $\frac{x}{y}=?$

2. 設有 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$, 求 $x+y+z$ 對於 x,y,z 三個比。

3. 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, 證明: $\frac{x+y}{a+b}=\frac{y+z}{b+c}=\frac{z+x}{c+a}$.

4. 證明相似三角形綠邊的比等於對應邊的比.

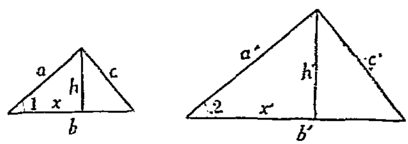
5. 兩三角形相似:大三角形的綠邊22寸,小三角形三邊是5.5寸,3.8寸,8.2寸;求大三角形的三邊.

6. 兩個相似多角形的綠邊是120寸同72寸,大多角形有一邊是25寸,求小多角形的對應邊.

7. 證明相似三角形綠邊的比等於對應角的平分線的比.

8. 兩個相似三角形的綠邊是18寸同15寸,若大三角形一頂點到對邊中點的線段是6.5寸,求小三角形對應頂點到對邊中點的線段.

(18) 相似三角形對應高的比定理　兩相似三角形對應高的比,等於任兩對應邊的比.



(圖一四八)

〔解〕 已知 $\triangle a'b'c' \sim \triangle abc$　要證: $\dfrac{h'}{h}=\dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c}$

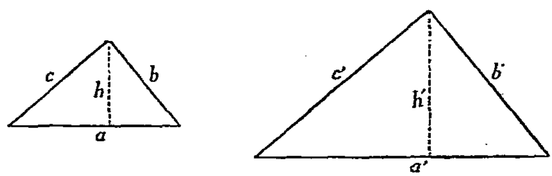
〔證〕 因爲　$\angle 2=\angle 1$　(與件)

所以　$\triangle a'x'h' \sim \triangle axh$　(相似△定理一推論)

於是　$\dfrac{h'}{h}=\dfrac{a'}{a}$　(相似定義)

$\therefore$　$\dfrac{h'}{h}=\dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c}$　(等量公理)

(19) 相似三角形面積比定理　兩相似三角形面積比等於任兩對應邊的平方比.



(圖一四九)

〔解〕　已知 $\triangle a'b'c' \sim \triangle abc$

要證　$\dfrac{\triangle a'b'c'}{\triangle abc}=\dfrac{a'^2}{a^2}=\dfrac{b'^2}{b^2}=\dfrac{c'^2}{c^2}$

〔證〕 因為　$\triangle a'b'c'=\dfrac{h'a'}{2}$;　$\triangle abc=\dfrac{ha}{2}$　(△面積定理)

所以　$\dfrac{\triangle a'b'c'}{\triangle abc}=\dfrac{\dfrac{h'a'}{2}}{\dfrac{ha}{2}}=\dfrac{h'a'}{ha}$　(等量公理)

但是　$\dfrac{h'}{h}=\dfrac{a'}{a}$　(相似△高的比)

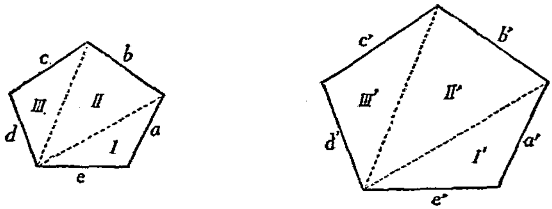
代替得　$\dfrac{\triangle a'b'c'}{\triangle abc}=\dfrac{a'^2}{a^2}$

又因　$\dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c}$　(與件)

故有　$\dfrac{a'^2}{a^2}=\dfrac{b'^2}{b^2}=\dfrac{c'^2}{c^2}$

$\therefore$　$\dfrac{\triangle a'b'c'}{\triangle abc}=\dfrac{a'^2}{a^2}=\dfrac{b'^2}{b^2}=\dfrac{c'^2}{c^2}$

(20) 相似多角形面積比定理　兩相似多角形面積比,等於任兩對應邊的平方比.



(圖一五〇)

〔解〕已知　$a'b'c'd'e' \sim abcde$

要證　$\dfrac{a'b'c'd'e'}{abcde}=\dfrac{a'^2}{a^2}=\dfrac{b'^2}{b^2}=\dfrac{c'^2}{c^2}=\dfrac{d'^2}{d^2}=\dfrac{e'^2}{e^2}$

〔證〕　從一個對應頂點作各角的對角線

分做　$I+II+III=abcde;\ I'+II'+III'=a'b'c'd'e'$

因爲　$I'\sim I;\ II'\sim II;\ III'\sim III$　(相似多角形定理)

$\therefore\quad \dfrac{I'}{I}=\dfrac{a'^2}{a^2};\ \dfrac{II'}{II}=\dfrac{b'^2}{b^2};\ \dfrac{III'}{III}=\dfrac{c'^2}{c^2}$　(相似Δ面積比)

$\because\ \dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c}=\dfrac{d'}{d}=\dfrac{e'}{e},\quad \therefore \dfrac{a'^2}{a^2}=\dfrac{b'^2}{b^2}=\dfrac{c'^2}{c^2}=\dfrac{d'^2}{d^2}=\dfrac{e'^2}{e^2}$　(與件)

於是　$\dfrac{I'}{I}=\dfrac{II'}{II}=\dfrac{III'}{III}$　(等量公理)

$\therefore\ \dfrac{I'+II'+III'}{I+II+III}=\dfrac{I'}{I}=\dfrac{a'^2}{a^2}=\dfrac{b'^2}{b^2}=\dfrac{c'^2}{c^2}=\dfrac{d'^2}{d^2}=\dfrac{e'^2}{e^2}$　(連比例定理)

$\therefore\quad \dfrac{a'b'c'd'e'}{abcde}=\dfrac{a'^2}{a^2}=\dfrac{b'^2}{b^2}=\dfrac{c'^2}{c^2}=\dfrac{d'^2}{d^2}=\dfrac{e'^2}{e^2}$

練習五十八

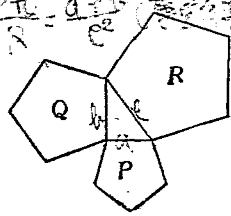
1. 梯形的上底5寸，下底8寸，高6寸，求延長兩腰所成小三角形的面積。

2. 若兩個相似多角形面積的比等於$\frac{121}{169}$，求兩多角形緣邊的比。

3. 作一個六角形，面積等於所設六角形的兩倍，並同他相似。 $\frac{R}{Q}=\frac{c^2}{b^2}$ $\frac{R}{P}=\frac{c^2}{a^2}$ $\frac{P+Q}{R}=\frac{a^2+b^2}{c^2}$

4. 在直角三角形的三邊上作相似多角形P, Q, R，如圖一五一。　證明：　$R=P+Q$

(用畢氏定理找$P+Q$同R的比。)



(圖一五一)

5. 兩個相似多角形面積的比是$\frac{5}{45}$，大多角形的一邊比小多角形的對應邊多4，求這兩對應邊。

巴羅的小傳　(1630—1677)

算學家巴羅是牛頓的先生，英國倫敦人.十八歲在英國劍橋三一大學畢業.三十歲時被聘爲本大學的希拉文的教授.三十二歲時改格勒善大學 *Gresham College* 的幾何教授，明年被選爲劍橋大學的盧卡榮譽講座 *Lucasian Chair at Cambridge*, 巴羅是這講座的第一個人.三十九歲辭職,讓給他的學生牛頓繼任.

巴羅曾刋印歐几里得的幾何原本，先用拉丁文,後又用英文,還有他自己的講義.他的重要貢獻,要算他的切線法,這個法子可算是牛頓發明微積學的引線.

巴羅身材瘦小,吸烟大癮,卻是很有胆略有膂力.當他遊歷東歐時,有一次曾奮勇以一人之力從許多海盜手裏奪回一隻被搶去了的船.

Issac Barrow

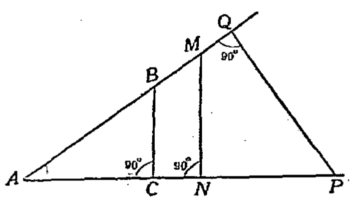
巴羅的肖像

第七章　三角比與直角三角形

Trigonometric Ratios and Right Triangle

(1) 相似直角三角形　相似三角形最大的定理說:兩個三角形有兩角對應相等便相似.從這定理立刻就有一個推論:兩個直角三角形有一銳角對應相等便相似. 根據這個推論我們就可以在一隻角裏作許多相似直角三角形如下:——

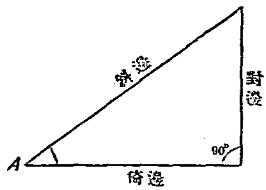
在一隻角的一邊上,隨便取一點,向他邊作垂線,可以作出許多直角三角形,如圖一五二的 $\triangle ABC$, $\triangle AMN$, $\triangle APQ$ 都是直角三角形;大家都有公共銳角 $\angle A$.



(圖一五二)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AMN \sim \triangle APQ.$

(2)**斜邊,對邊,倚邊** 直角三角形的三邊,對於裏面一個銳角來說,如圖∠A,除斜邊外,那直角三角形的兩股,一個是這銳角的對邊,一個是這銳角的倚邊.



(圖一五三)

(3)**角裏的線段比** 你們知道在一角的一邊上隨便作垂線,所得的直角三角形都相似.如圖一五四有

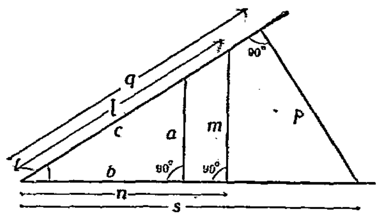
$\triangle abc \sim \triangle mnl \sim \triangle pqs.$

那麼依定義就有

(1) $\frac{a}{c}=\frac{m}{l}=\frac{p}{s};$

(2) $\frac{b}{c}=\frac{n}{l}=\frac{q}{s};$

(3) $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}.$



(圖一五四)

用話來說就是在這三個直角三角形裏,

(1)式告訴我們對邊同斜邊的比都相等;

(2)式告訴我們倚邊同斜邊的比都相等;

(3)式告訴我們對邊同倚邊的比都相等.

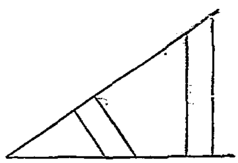
總說一句話:在一角裏作垂線無論垂線作在何處,所得的直角三角形只管大小不同,那下面的三個線段比卻有一定的數值:——

(1) $\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$; (2) $\frac{\text{倚邊}}{\text{斜邊}}$; (3) $\frac{\text{對邊}}{\text{倚邊}}$.

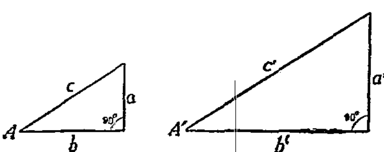
練習五十九

1. 在方格紙上作一個37°的角,在角裏隨便作一垂線,求出在所成直角三角形裏的三個線段比,把所得的結果同別人所得的比較. 別人所作的垂線,同你所作的一樣麼? 所得三個比對應相同麼?

2. 在37°的角裏,作四條垂線,如圖一五五,量出每個直角三角形裏的三個線段比,看這四組的線段比,是不是對應相等.



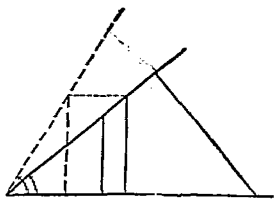
(圖一五五)



(圖一五六)

3. 圖一五六的兩個三角形裏, $\angle A=\angle A'$; 證明 $\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$, $\frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}$. 量圖實驗.

(4)線段比與角度的關係 一隻角的大小,雖然同夾住他的兩邊長短沒有關係,但是若在這角裏設立垂線,那所得直角三角形三邊對待的比,都永遠不變;及到這個角變了,才完全改換. 可見角度的大小,同這種的線段比,卻有一個密切的關係,看圖一五七.



(圖一五七)

練習六十

1. 在方格紙上,作一個41°的角,在這角裏作直角三角形,求三個線段的比到小數兩位. 再作一個24°的角,也求三個線段的比到小數兩位. 問這兩組比裏的對應比同不同?

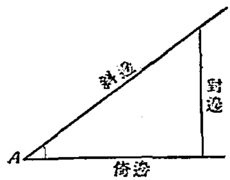
2. 在1題裏邊,再在兩角裏作等長的垂線,量出兩組比來,問那對應比同不同?

3. 在不等的兩角裏,你能作相似直角三角形麼?

4. 為什麼等角或同角裏的線段比不變?

5. 為什麼不等角裏的線段比不相等?

(5)三角比 Trigonometric Ratios　在一角裏立垂線如圖一五八,我們既知道那對邊斜邊倚邊的線段比對於 A 角有密切的關係,於是我們就給他都取個名字:——



(圖一五八)

(1)　$\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$的比稱為 A 角的正弦 *sine*;

(2)　$\frac{\text{倚邊}}{\text{斜邊}}$的比稱為 A 角的餘弦 *cosine*;

(3)　$\frac{\text{對邊}}{\text{倚邊}}$的比稱為 A 角的正切 *tangent*.

正弦寫做　(1) $\sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$;

餘弦寫做　(2) $\cos A = \frac{\text{倚邊}}{\text{斜邊}}$;

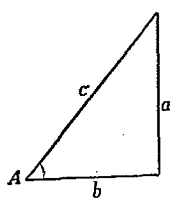
正切寫做　(3) $\tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{倚邊}}$.

那麼照圖一五九,就有

(1)　$\sin A = \frac{a}{c}$;

(2)　$\cos A = \frac{b}{c}$;

(3)　$\tan A = \frac{a}{b}$.



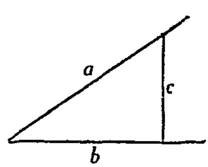
(圖一五九)

(注意) 這裏的 $\sin$, $\cos$, $\tan$ 都是一種記號,並不是代表一數同 A 相乘,好比 $\sqrt{2}$ 不是 $\sqrt{\ }$ 乘 2 一樣.

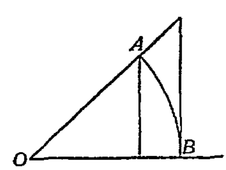
(6)三角函數 *Trigonometric Functions* 正弦餘弦正切,都叫做三角比. 這些三角比都跟着角來變換,在一定的角裏,三角比都有一定的數值;如果換過一角,這些比就都跟着變換;那末照我們函數的意義來講,這些比都是角的函數;所以最好叫做三角函數.

練習六十一

1. 在一個角裏作垂線,如圖一六〇. 若 A 代表單位線段,問圖裏那幾條線段可以表示這角的那幾個三角函數? 若 b 代表單位線段,問圖裏那一條線段可以表示這角的那一個三角函數?



(圖一六〇)



(圖一六一)

2. 在角頂 O 用單位半徑作一弧,交兩邊於 A, B, 如圖一六一,在 A, B 作 OB 的兩垂線如圖. 指出圖裏表示 $\angle O$ 的三角函數的三線段,並說明理由.

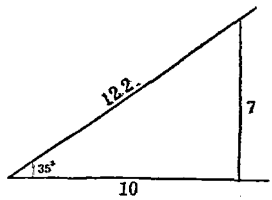
(7)三角函數的求法　一隻角的正弦,餘弦,正切,既然都是這角的函數,那麼有了角,我們就可以找他的函數.

譬如要求 35° 角的函數.　先用量角器作 35° 角,如圖一六二.　在這角裏隨便作一垂線,量出三線段的長度,就得

$$\sin 35° = \frac{7}{12.2} = .57\text{(略)}$$

$$\cos 35° = \frac{10}{12.2} = .82\text{(略)}$$

$$\tan 35° = \frac{7}{10} = .70\text{(略)}$$



(圖一六二)

練習六十二

1. 求18°角的三個三角函數到小數兩位.

2. 求 $\sin 65°$, $\cos 53°$, $\tan 58°$ 的數值.

3. 用10格做單位,在方格紙上求出下列各角的三角函數到小數兩位:

37°,　40°,　22°,　15°,　70°,　20°

4. 用100格做單位,在方格紙上求出下列各角的三角函數到小數三位:

63°,　6°,　22°,　37°,　58°,　53°

$\sqrt{3}=1.7321$ $\sqrt{2}=1.414$

(8)三角函數表 *Table of Trigonometric Function*

一角的三角函數既是有一定的數值,我們就可以造成一表,開列各角的函數,免得應用的時候作角量線的麻煩. 看這面書的對過.

譬如要找 $\sin 67°$, 在表裏一讀,就得

$$\sin 97° = \cdot 9205.$$

不但從角可找函數,並且也可以反轉來從函數找出角度.

譬如有正切是 ·3449, 在表裏找得 19° 的正切是 ·3443, 可見這角比 19° 略微大些, 20° 還不到, 我們就可說這角是大約 19° (近似值).

練習六十三

1. 在表裏找出下列各函數的數值:

$\sin 3°$, $\cos 12°$, $\tan 20°$, $\sin 36°$,
$\tan 9°$, $\cos 7°$, $\sin 97°$, $\cos 47°$.

2. 用表求出下列各函數的 x 角:

$\sin x=0{\cdot}5599$, $\cos x=\dfrac{13}{15}$, $\tan x=\dfrac{3}{5}$,

$\tan x=9{\cdot}5144$, $\sin x=\dfrac{9}{40}$, $\cos x=0{\cdot}31$,

$\sin x=0{\cdot}8988$, $\tan x=2+\sqrt{3}$.

角x	$Sin x$	$Cos x$	$tan x$	角x	$Sin x$	$Cos x$	$tan x$
1°	.0175	.9998	.0175	46°	.7193	.6947	1.0355
2°	.0349	.9994	.0349	47°	.7314	.6820	1.0724
3°	.0523	.9986	.0524	48°	.7431	.6691	1.1106
4°	.0698	.9976	.0699	49°	.7547	.6561	1.1504
5°	.0872	.9962	.0875	50°	.7660	.6428	1.1918
6°	.1045	.9945	.1051	51°	.7771	.6293	1.2349
7°	.1219	.9925	.1228	52°	.7880	.6157	1.2799
8°	.1392	.9903	.1405	53°	.7986	.6018	1.3270
9°	.1564	.9877	.1584	54°	.8090	.5878	1.3764
10°	.1736	.9848	.1763	55°	.8192	.5736	1.4281
11°	.1908	.9816	.1944	56°	.8290	.5592	1.4826
12°	.2079	.9781	.2126	57°	.8387	.5446	1.5399
13°	.2250	.9744	.2309	58°	.8480	.5299	1.6003
14°	.2419	.9703	.2493	59°	.8572	.5150	1.6643
15°	.2588	.9659	.2679	60°	.8660	.5000	1.7321
16°	.2756	.9613	.2867	61°	.8746	.4848	1.8040
17°	.2924	.9563	.3057	62°	.8829	.4695	1.8807
18°	.3090	.9511	.3249	63°	.8910	.4540	1.9626
19°	.3256	.9455	.3443	64°	.8988	.4384	2.0503
20°	.3420	.9397	.3640	65°	.9063	.4226	2.1445
21°	.3584	.9336	.3839	66°	.9135	.4067	2.2460
22°	.3746	.9272	.4040	67°	.9205	.3907	2.3559
23°	.3907	.9205	.4245	68°	.9272	.3746	2.4751
24°	.4067	.9135	.4452	69°	.9336	.3584	2.6051
25°	.4226	.9063	.4663	70°	.9397	.3420	2.7475
26°	.4384	.8988	.4877	71°	.9455	.3256	2.9042
27°	.4540	.8910	.5095	72°	.9511	.3090	3.0777
28°	.4695	.8829	.5317	73°	.9563	.2924	3.2709
29°	.4848	.8746	.5543	74°	.9613	.2756	3.4874
30°	.5000	.8660	.5774	75°	.9659	.2588	3.7321
31°	.5150	.8572	.6009	76°	.9703	.2419	4.0108
32°	.5299	.8480	.6249	77°	.9744	.2250	4.3315
33°	.5446	.8387	.6494	78°	.9781	.2079	4.7046
34°	.5592	.8290	.6745	79°	.9816	.1908	5.1446
35°	.5736	.8192	.7002	80°	.9848	.1736	5.6713
36°	.5878	.8090	.7265	81°	.9877	.1564	6.3138
37°	.6018	.7986	.7536	82°	.9903	.1392	7.1154
38°	.6157	.7880	.7813	83°	.9925	.1219	8.1443
39°	.6293	.7771	.8098	84°	.9945	.1045	9.5144
40°	.6428	.7660	.8391	85°	.9962	.0872	11.4301
41°	.6561	.7547	.8693	86°	.9976	.0698	14.3006
42°	.6691	.7431	.9004	87°	.9986	.0523	19.0811
43°	.6820	.7314	.9325	88°	.9994	.0349	28.6363
44°	.6947	.7193	.9657	89°	.9998	.0175	57.2900
45°	.7071	.7071	1.0000	90°	1.0000	.0000	∞

(9) 特別角的三角函數　有幾個特別的角度如 45°, 30°, 60°; 他的三角函數可以用幾何的方法很容易推算他的準確數值,看下兩節便知道.這幾個角度用處很多,你們最好把他的數值或者簡直連那找出這數值的方法,牢牢記住.

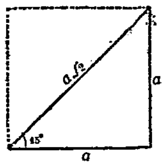
(10) 45° 的函數　從半個正方得來的直角三角形,裏邊的銳角是45°,如圖一六三.

設　$a=$ 隨便一股

依畢達哥拉定理

有　$a^2+a^2=$ 斜邊^2

$\therefore$ 斜邊 $=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$



(圖一六三)

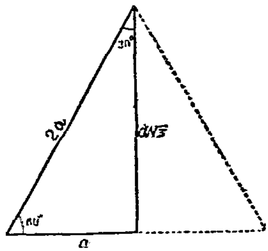
於是依三角函數的定義,便可以寫出45°的各個函數如下:——

$$\sin 45^\circ=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ=\frac{a}{a}=1$$

(11) 30°和60°的函數　從半個等邊三角形得來的直角三角形，裏邊的銳角一個是 30°，一個是 60°；如圖一六四。



(圖一六四)

設　$2a=$ 這△的一邊

那末　$a=$ 這△的半邊

依畢達哥拉定理

$$(2a)^2-a^2=高^2$$

於是

$$高=\sqrt{4a^2-a^2}=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}$$

依三角函數的定義，就得到

(一) 60°的各三角函數：——

cos $\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$　斜 底 三 比

sin $\cos 60^\circ=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$　斜 对 ： ：

$\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}$　对 底 ： ：

底斜 对是 底对

(二) 30°的各三角函數：——

$$\sin 30^\circ=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ=\frac{a}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(12)三角函數的羃的記法 一個三角函數寫起來雖然有許多字母同一個角度，却只代表一個數．譬如 $\sin 30^\circ$，就是一數 $.5$．如果這數要自乘，應當寫做 $(\sin 30^\circ)^2$．但是平常爲了簡便起見，都寫做 $\sin^2 30^\circ$．若是寫做 $\sin 30^{\circ 2}$，那就變做了角度自乘，不是函數自乘了，這種分別，務要注意．

練習六十四

求下列各式的數值：

1. $2\sin 45^\circ \cos 45^\circ$　　2. $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$

3. $\tan^2 60^\circ + 2\tan^2 45^\circ$　　4. $2\sin 30^\circ \cos 30^\circ \tan 30^\circ$

5. $\sin^2 45^\circ + 2\cos^2 45^\circ + 3\tan^2 45^\circ$

6. $\sin^2 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$

7. $\tan^2 30^\circ + 2\sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \tan 60^\circ + \cos^2 30^\circ$

8. $\dfrac{2\tan 45^\circ}{1-\tan^2 45^\circ}$　　9. $\dfrac{\sin^2 30 + \cos^2 60^\circ}{\tan^2 30^\circ \tan^2 60_\circ}$

10. $\dfrac{\sin 60^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}$　　11. $\dfrac{\sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 45^\circ}{\sin 45^\circ + \cos 45^\circ}$

12. 把 $30^\circ, 60^\circ, 45^\circ$ 三角的各函數化成小數，同表裏所載的比較．

(13) 同角各函數的關係 同是一角的正弦,餘弦,正切,既然都是一角的函數,那麼他們當然有互相連帶的關係. 有兩個這種關係,叫基本公式,如下:——

$$(1)\qquad \sin^2 A+\cos^2 A=1$$

$$(2)\qquad \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

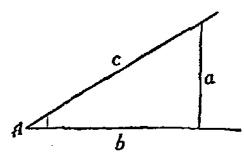
這兩式都是恆等式,無論 A 角是什麼都合.

(一)公式 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 的證明

作一角如圖一六五代表 A,在這角裏立垂線,令這直角三角形的三邊爲 a, b, c; 那麼依定義

有 $\begin{cases}\sin A=\dfrac{a}{c}\\ \cos A=\dfrac{b}{c}\end{cases}$

即是 $\begin{cases}a=c\sin A\\ b=c\cos A\end{cases}$



(圖一六五)

依畢達哥拉定理有 $a^2+b^2=c^2$

於是 $(c\sin A)^2+(c\cos A)^2=c^2$

即 $c^2\sin^2 A+c^2\cos^2 A=c^2$

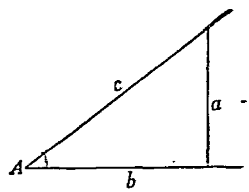
消去 c^2 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

(二)公式 $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ 的證明

作一角如圖一六六代表 A 角,在這角裏立垂線,得直角三角形 abc,那麼依正餘弦定義

有 $\begin{cases}\sin A=\dfrac{a}{c}\\ \cos A=\dfrac{b}{c}\end{cases}$

即 $\begin{cases}a=c\sin A\\ b=c\cos A\end{cases}$



(圖一六六)

再依正切的定義,就得

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{c\sin A}{c\cos A}=\frac{\sin A}{\cos A}.$$

(14)**同角各函數互求法** 利用剛纔證明了的兩基本公式,我們就可以從一角的任一函數,推出這同角的其他各函數.

例一. 有 $\sin A$, 求 $\cos A$ 同 $\tan A$ 的等值.

從公式 $\sin^2A+\cos^2A=1$

解出 $\cos A$ 得 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}$ (1)

又從公式 $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

即得 $\tan A=\dfrac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2A}}$ (2)

例二. 有 $\tan A$, 求 $\sin A$ 的等值.

從公式 $$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

兩邊自乘 $$\tan^2A=\frac{\sin^2A}{\cos^2A}$$

因爲 $$\cos^2A=1-\sin^2A$$

所以 $$\tan^2A=\frac{\sin^2A}{1-\sin^2A}$$

去分母得 $$\tan^2A-\tan^2A\sin^2A=\sin^2A$$

移項歸併 $$(1+\tan^2A)\sin^2A=\tan^2A$$

那麼 $$\sin A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2A}}$$

練習六十五

1. 有 $\tan A$, 求 $\cos A$ 的等值.
2. 有 $\cos A$, 求 $\sin A$ 同 $\tan A$ 的等值.
3. 從下列各函數求其餘兩個函數:

$\sin A=\frac{12}{13}$, $\tan A=\frac{4}{3}$, $\cos A=\frac{60}{61}$,

$\cos A=0.28$, $\sin A=0.8$, $\tan A=2.6$,

$\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\tan A=\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\cos A=\frac{1}{2}$.

從同角各函數的關係解下面兩題:——

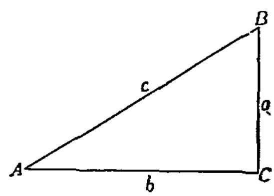
4. 若 $2\sin A=\cos A$, 求三個函數的值.
5. 若 $4\sin A=\tan A$, 求三個函數的值.

(15)餘角的三角函數 你們想必還記得兩角和是$90°$,這兩角互爲餘角. 直角三角形兩銳角互爲餘角(何故?). 如圖一六七,認A做正角,那麼B是他的餘角. 依定義得正餘弦如:

$$\sin A=\frac{a}{c}\qquad \cos B=\frac{a}{c}$$

$$\cos A=\frac{b}{c}\qquad \sin B=\frac{b}{c}$$

可見$\begin{cases}\sin A=\cos B\\ \cos A=\sin B\end{cases}$



(圖一六七)

但因 $A+B=90°$, 認A做正角,那麼他的餘角可寫做 $B=90°-A$. 於是有公式如下:——

$$\begin{cases}\sin(90°-A)=\cos A\\ \cos(90°-A)=\sin A\end{cases}$$

從此我們就知道:餘角的正弦恰是正角的餘弦;餘角的餘弦恰是正角的正弦.

(附註) 正餘弦的名稱,就是因爲這個緣故才定下來的. 同正切對待,也有一個函數叫餘切 Cotangent, 就是正切的倒數,寫做$\cot A=\dfrac{1}{\tan A}$;在正餘角裏同正切也有互爲正餘的關係,故有這名稱.

練習六十六

1. 把下列各函數表做餘角的函數:

$$\sin 25°,\ \cos 31°,\ \cos 80°,\ \sin 78°,$$

$$\cos 45°,\ \sin 3°,\ \sin 89°,\ \cos 5°.$$

2. 前面的表裏,1°到45°的正餘弦,同45°到89°的正餘弦,有什麼關係? 爲什麼會有這關係?

3. 把下列各函數,表做小於45°的角的函數:

$$\cos 65°,\ \sin 50°,\ \sin 79°,\ \cos 82°,$$

$$\sin 46°,\ \cos 89°,\ \cos 52°,\ \sin 60°.$$

$\sin 45-2x = \cos 2x \quad \cos 2x = \cos 90°-3x$

4. 30°,60°,45°的正餘弦同餘角函數公式相合麼?

$2x = 90-3x \quad 5x = 90° \quad x = 18°$

5. 若 $\sin(90°-2x)=\cos(90°-3x)$,求 x 是幾度?

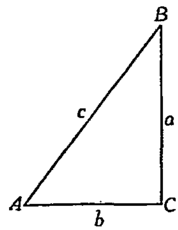
6. 若 $\sin(45°-x)=\cos 4x$,求 x 是幾度?

$\cos 4x = \sin(90-4x) \quad \sin(45-x) = \sin(90-4x)$

(16) 三角形的解法 *Solution of a Triangle* 三角形裏最要緊的東西有六件:三邊同三角:在一個三角形裏,如果這六件東西都已知道,我們就說這個三角形已經解了. 知道這六件東西裏的幾件,去找其餘各件,叫解三角形.

研究解三角形同三角函數的種種關係和用的學問叫做三角學 *Trigonometry*.

(17)直角三角形邊角的關係 直角三角形除一直角已經固定外,其餘兩角三邊,可以隨便變換;但是從幾何學同三角學上,我們就知道這種變換却都有互相牽連的關係如下:——



(圖一六八)

(一)邊同邊的關係——畢達哥拉定理.

$$a^2+b^2=c^2$$

(二)角同角的關係——三角和定理.

$$A+B=90^\circ$$

(三)邊同角的關係——三角函數定義.

$$\begin{aligned} a &= c\sin A \\ b &= c\cos A \end{aligned} \quad \text{或是} \quad \frac{a}{b}=\tan A$$

(18)直角三角形的解法 看上面所開列的直角三角形邊角關係各公式,我們就知道:從第一關係,有兩邊可找第三邊;從第二關係,有一銳角可找第二銳角;從第三關係,有兩邊可找一銳角,或一邊一銳角可找第二邊.

總說一句話:凡直角三角形兩角三邊五件東西裏,有了兩件,就可以再找一件,如是逐漸加多,直到其他各件. 但是這已知的兩件東西,却不能都是角;因爲只知 $A+B=90°$, 同邊線脫離關係*,所以我們至少要有一邊. 那麼直角三角形有了下列的兩種與件,便可求解.

(一) 兩邊

(二) 一邊同一銳角

*(注意) 相似三角形三角雖同,三邊却無定值.

第一類——已知兩邊

例一. 有直角三角形,已知斜邊 c 是40尺,一股 b 是20尺,求其他各邊角.

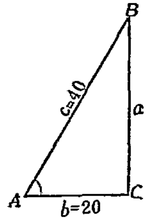
從公式

卽得　$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{40^2-20^2}=20\sqrt{3}$

又從　$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$

所以　$A=60°$

於是　$B=90°-A=90°-60°=30°$



(圖一六九)

覆驗: 依與件作圖,再量其他各邊角,便知不誤.

例二. 有直角三角形,已知兩股一個是7,一個是10,求解這直角三角形.

依公式 $a^2+b^2=c^2$

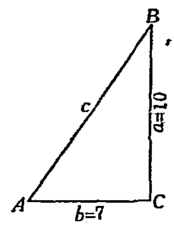
即得 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{7^2+10^2}$

$=\sqrt{149}=12.2\cdots$

又從 $\tan B=\frac{b}{a}=\frac{7}{10}=.7$

檢表得 $B=35^\circ$

於是 $A=90^\circ-B=55^\circ$



(圖一七〇)

作圖覆驗不誤.

第二類——已知一邊同一銳角

例一. 有三角形,已知$C=90^\circ$; $c=80$ $A=60^\circ$, 求解這三角形.

先從公式 $A+B=90^\circ$

得 $B=90^\circ-A=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

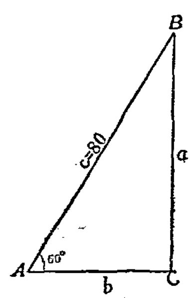
再從公式 $a=c\sin A$

得 $a=80\times\sin 60^\circ$

$=80\times\frac{\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}$

又從 $b=c\cos A=80\cos 60^\circ$

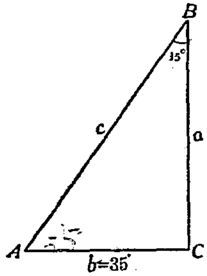
$=80\times\frac{1}{2}=40$



(圖一七一)

作圖覆驗不誤.

例二. 有三角形,已知 $C=90^\circ$; $B=35^\circ$; $b=35$. 求解這三角形.



(圖一七二)

先得　$A=90^\circ-B=90^\circ-35^\circ=55^\circ$

從公式　$b=a\tan B$

得　$a=\dfrac{b}{\tan B}=\dfrac{35}{\tan 35^\circ}$

檢表得　$a=\dfrac{35}{.7}=50$ (略)

又從　$b=c\sin B$

卽得　$c=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{35}{.5736}=61$ (略) 作圖覆驗不誤.

練習六十七

直角三角形有 $C=90^\circ$, 從下列各與件,不用檢表解各直角三角形.——

1. $A=30^\circ, c=7.3$.　　2. $B=60^\circ, a=30$.

3. $c=23, a=11.5$.　　4. $A=35^\circ, b=25$.

直角三角形有 $C=90^\circ$, 從下列各與件,檢表解各直角三角形:——

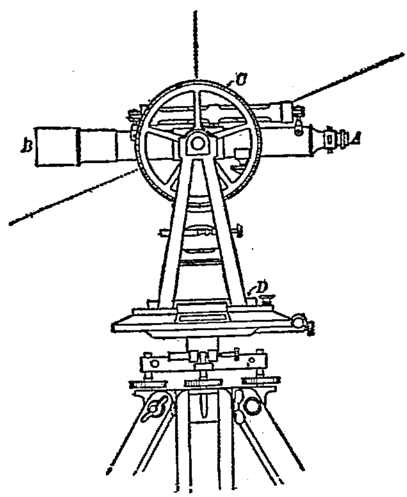
5. $B=42^\circ, b=60$.　　6. $A=64^\circ, b=22$.

7. $A=40^\circ, c=80$.　　8. $b=92.7, c=100$.

9. $B=82^\circ, c=100$.　　10. $A=35^\circ, b=85$.

11. $a=80$; $b=60$.　　12. $B=25^\circ, a=32$.

(19) **測角儀** Transit　測量術 *Surveying* 上最要緊的儀器,就是測角儀,如圖一七三. 驟然一望,好像一架照相器,也有三脚台支柱(圖上沒有畫完). 這儀器的最重要的部份有三個:兩個刻了角度的圓輪,一個平擺的如圖 D; 一個豎立的如圖 C; 還有一個望遠鏡如圖 A B.



(圖一七三)

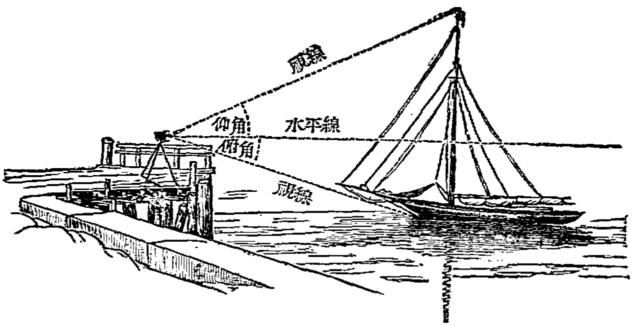
使用的時候,遠鏡可以上下轉動,角度就在 C 圓上讀出來, D 圓以上的全部,又可以四方轉動,角度就在 D 圓上讀出來.

(20) **水平線與豎垂線**　同水面平行的線,叫水平線 *Horizontal Line*.　同水面正交的線,叫豎垂線 *Vertical Line*.　看圖一七四.

注意！

第 175 圖請倒看，

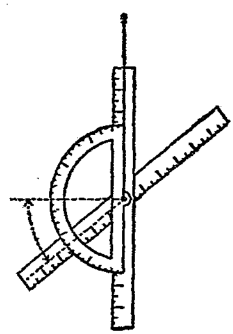
(21) 視線 Line of Sight　用眼睛視察出來的線,叫視線. 看圖一七四.



(圖一七四)

(22) 仰角與俯角　視線同水平線所成的角,在水平線上面的叫仰角 *Angle of Elevation.* 在下面的叫俯角 *Angle of Depression.* 看圖一七四.

測量仰角俯角,當然用測角儀,但是如果這種儀器不應手的時候,我們也可以用兩條直尺一塊半圓量角器釘在一塊來代替,如圖一七五.



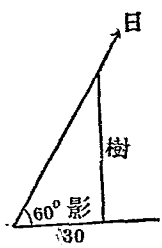
(圖一七五)

(23) 三角學的簡易應用問題 利用直角三角形的解法,有許多測量上的高低距離的問題可以解決,但不必各邊各角都要解出來.

題一 樹影長30尺,日高60°,求樹高.

設 $x=$ 樹高

$$x=30\tan 60^\circ$$
$$=30\times\sqrt{3}$$
$$=30\times1.732$$
$$=52\text{尺 (略)}$$



(圖一七六).

題二 從地上望塔頂,仰角60°;直上50尺,從屋頂望塔頂,仰角30°. 求塔高.

令 $x=$ 塔高

$y=$ 屋到塔的距離

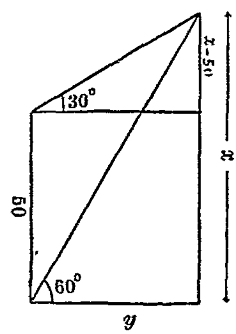
依題得 $\begin{cases} x=y\tan 60^\circ \\ x-50=y\tan 30^\circ \end{cases}$

消去 y $\dfrac{x}{\tan 60^\circ}=\dfrac{x-50}{\tan 30}$

即 $\dfrac{x}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\,(x-50)$

用$\sqrt{3}$乘 $x=3(x-50)$

$\therefore x=75$尺



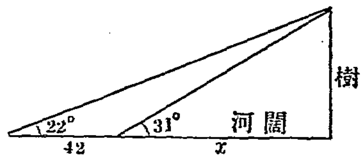
(圖一七七)

題三. 在河邊測得對岸的樹,仰角31°;退後42丈再測,仰角22°;求河闊.

設　$x=$河闊

樹高　$=x\tan 31^\circ$

樹高　$=(x+42)\tan 22^\circ$



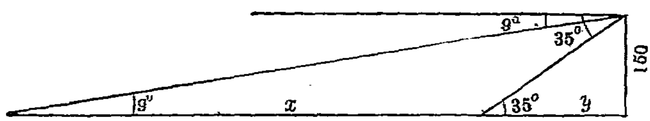
(圖一七八)

於是　$x\tan 31^\circ=(x+42)\tan 22^\circ$

即是　$.601\,x=.404\,(x+42)$

解出x得　$x=86.1$丈(略)

題四. 從高150尺的燈塔上,測得兩船俯角:一個是9°;一個是35°.求兩船距.



(圖一七九)

設　$x=$兩船的距離

$y=$近船到燈塔脚的距離

從三角學得　$\begin{cases}150=y\tan 35^\circ\\150=(x+y)\tan 9^\circ\end{cases}$

消去y得　$\dfrac{150}{\tan 35^\circ}=\dfrac{150}{\tan 9^\circ}-x$

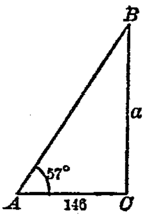
解出x得　$x=150\left(\dfrac{1}{.158}-\dfrac{1}{.7}\right)=735$尺(略)

練習六十八

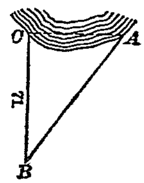
1. 有44尺長的梯子,靠在牆壁上離地面28.9尺的所在. 求梯子同牆壁所成的角,並求梯子的脚到牆壁的距離.

2. 在圖一八〇裏面,氣球B用繩子綁在地面上A點,同地平成57°. 氣球直垂到地面的C點,同A相距146尺. 若地面甚平,問氣球有多少高?

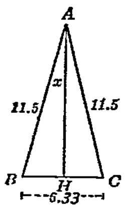
3. 如圖一八一,A, C是湖上對岸的兩點. 測量家要找AC的距離,在B點立杆測得$\angle C=90°$量出BC上71尺,又測得$\angle A=52°$. 求AC的距離.



(圖一八〇)



(圖一八一)



(圖一八二)

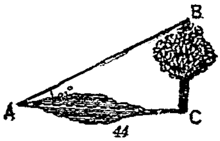
4. 張開兩脚規的兩脚,到6.33公分,如圖一八二;兩脚的長各等於11.5公分,求兩脚間的角度.

5. 有鐘的擺長20寸,向左右擺動時,成功6°的角. 求尖端在左右最遠兩點間的距離.

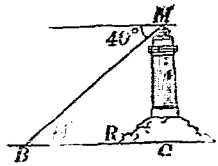
6. 一個教堂的屋頂有30呎高. 當他的影子在地面上有123.2呎長的時候,太陽的仰角有幾度?

7. 在圖一八三裏,樹 BC 的影子有44尺,太陽的仰角是31°,求樹高.

8. 燈塔在水面上220呎,從 M 點測得水面上船的俯角是40°,如圖一八四. 若 RC 是40呎,問從 R 到船 B 的距離有幾呎?



(圖一八三)



(圖一八四)

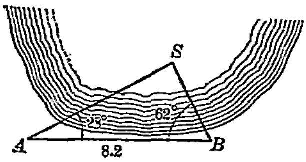
9. 屋頂上有旗竿,在地面上離屋70尺的地方測得旗竿頂點的仰角是42°,屋頂的仰角是32°. 求旗竿的高同屋頂的高.

10. 在一個圓形水池的中心有一根直桿,高出水面55呎. 若在池的邊上測得桿的頂點的仰角是35°,問這圓池的半徑同面積各是多少?

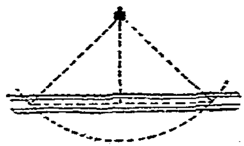
11. 汽船上的燈高出河面30尺. 一人立在河岸上測得燈的仰角是6°,河岸比水面高4尺. 問這人同燈的距離是多少尺?

12. 山頂比海面高3260尺,從山頂望到海面上的一隻船,所得的俯角恰是41°. 問這船同山頂的距離是多少尺?

13. 在圖一八五裏,S是一個自來水廠,在河的一邊;A,B 是對岸上兩所房子. 測得 $AB=8.2$ 里, $\angle A=28°$, $\angle B=62°$, 求從S到A到B的兩個距離.



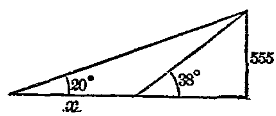
(圖一八五)



(圖一八六)

14. 有大砲架在離河心 6.9里的地方,如圖一八六. 若砲彈可達到的距離是 9.9 里, 問沿河有多少長的地方,在這大砲射擊範圍之內?(河岸是直的)

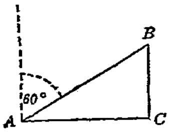
15. 華盛頓的紀念塔有 555 呎高. 兩人都在塔的正西測得塔的仰角一個是20°,一個是38°; 問兩人相隔多少遠? 看圖一八七.



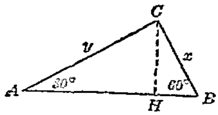
(圖一八七)

16. 在高出海面 122 尺的燈塔頂上,用探海燈探照 400 尺外的海面上的船隻,問須使燈光同水平線成幾度的俯角?

17. 村莊 B 在村莊 C 的正北,如圖一八八. 在 C 的正西8里的 A 點測得 B 在 A 的北偏東 60°. 在 A 處望見一隻飛機從 C 的頂上平飛到 B 的頂上,費15分鐘;求這飛機每分鐘的速度.



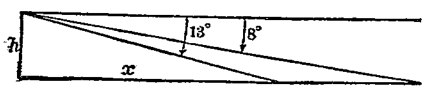
(圖一八八)



(圖一八九)

18. 想知道一條從東到西的河的闊,如圖一八九的 CH, 在河的南岸選定一點 A, 測得北岸上 C 點在 A 的北偏東 60°. 從 A 向東走300碼到 B 點,再測得 C 點就在 B 的北偏西 30°. 求河闊.

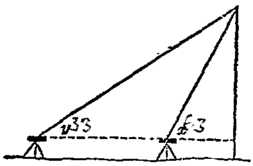
19. 如圖一九〇,從山頂一直望去,見平地有相距一里的兩路碑,測得兩俯角為13°同8°. 求山高.



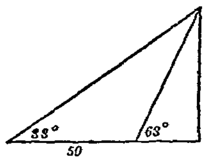
(圖一九〇)

20. 有55尺高的旗竿直立在地面上. 在空中的飛機上測得旗竿頂點的俯角是 45°, 旗竿底點的俯角是 67°. 求飛機的高.

21. 要決定一製造廠煙囱的高，如圖一九一；先在平地相距50呎的兩處用測角儀測得$x=63°$, $y=33°$, 如圖一九二. 測角儀的三脚架距地$3\frac{1}{2}$呎. 求煙囱的高.



(圖一九一)



(圖一九二)

22. 燈塔的探海燈比海平面高140呎. 當光線俯角20°的時候，恰照見海面上的一隻船. 問這船到塔脚距離多少遠?

第八章　近似算與誤差

Approximation and Error

(1) 直接量法的限度　數量的變化無窮,儀器的精密有限;用精密有限的儀器,量變化無窮的數量,所得的結果,當然不能絕對的準確.

譬如尋常公尺,上面所刻的分寸,大概刻到公釐為止.　用這種尺去量長度,到了公釐以下的尾數,便不能直接讀出.　十分之幾的公釐,還可以估計一位數字,到了百分之幾的公釐,就完全不可得知了.　尋常天秤,只能秤到釐毫,釐毫以下,只好'馮馮糊糊'.　科學家的天秤,總算精密的了,可以秤到千分一的公分,再設法使他搖擺,還可以憑到萬分一的公分;但是無論如何,始終總有個限度,不能像我們的 π 那像,可以找出707位數値.

(2) **近似數値** *Approximate Value* 從直接量法得來的數值,既不能絕對的準確,都叫近似數值. 譬如秤銀圓重 0.739 兩,無論末位準與不準,以下還許有數,所以只算近似數值.

算術上從分數或開方,得出不盡小數,隨便寫出幾位,也是近似數值. 又如把 1.414 當做 $\sqrt{2}$;把 $\frac{22}{7}$ 當做 π:都是近似數值.

(3) **有效數字** *Significant Figures* 近似數值雖然不很準確,大概起首幾位數字總靠得住. 這種可靠的數字,叫有效數字.

從直接量法得來的數值,倘若沒有意外的錯誤,如讀尺讀錯了或橡皮尺可伸縮之類,那麼除了末位數或因刻度有限估計而得不很可靠之外,其他數字可算有效數字. 譬如量線段得 7.32 公分,末位是估計的,7.3 是有效數字. 又如工程師常常把 $\frac{22}{7}$ 當作 π. 你們知道: $\pi=3.14159\cdots$,而 $\frac{22}{7}=3.14285\cdots$;一望卽知只有起首三位數字是有效數字.

(4) 小數前後的 0　你們知道一千二百寫做1200,那末了兩個 0 是不可少的,到了 1.200 平常人說,這兩個 0, 可有可無,不關痛癢. 其實不然: 如果這數是絕對準確,下面有無數的 0 可寫可不寫; 若是近似數, 那麼寫與不寫可就大有分別. 1.2是說量到小數第一位,那第二位以下都不知道; 1.200 是說量到小數第三位了,到第四位以下才不知道. 換句話說:1.200 比1.2多了兩位有效數字.

最奇怪的, 在談起有效數字來, 那小數末尾的 0 是必要的, 而小數前面的 0, 却不是必要的. 例如 0.0012 的有效數字只有 12 兩位, 那前面的 0, 不算有效數字, 不過是指示小數點的位置. 譬如量線段得1.2公分, 有效數字是兩位, 忽然高興起來, 要把他寫做公丈, 就變做 0.0012, 那有效數字, 當然不能因爲我們改換寫法, 就可增加, 所以還是兩位.

(注意) 夾在有效數字中間的 0, 是有效數字.

(5) 誤差,絕對誤差 近似數値既然不是絕對的準確,那麼必有誤差 *Error*. 近似値同眞値的較,稱爲絕對誤差 *Absolute Error*.

設 X=眞値 A=近似値 a=絕對誤差

那麼絕對誤差的定義,可寫做等式:——

$$A-X=a$$

這個 a 許是正也許是負,看 $A>X$ 還是 $X>A$.

例一. 用 $\frac{22}{7}$ 當做 π,那絕對誤差爲

$$a=3.14285\cdots-3.14159\cdots=0.00026.$$

例二. 凡不知道眞値的近似値,也可找誤差. 譬如有近似値2.73,若三位數都是有效數字,那麼絕對誤差爲0.01. 因爲這三位數既然都有效,那麼同眞値前三位必定相同,只有第四位以下有誤差,但這誤差最多不過 0.0099⋯ 或是 0.01,所以最大絕對誤差爲 0.01

練習六十九

指出下面兩近似數的有效數字:——

1. 0.0007500 *2.* 0.00300700

3. 工程師有時也用$\frac{355}{113}$當作π的近似值. 問有幾位有效數字? 並求出絕對誤差(兩位數).

4. 有人量得一方尺的平方的對角線爲1.415尺,求出他的絕對誤差(兩位數值).

5. 有一個民國的銀幣,秤出的重是26.9公分,但眞重爲26.88公分. 求絕對誤差.

寫出下列各近似數(各數都有效)的最大絕對誤差.

6.	253.	*7.*	0.0253	*8.*	25.3
9.	250.	*10.*	700.00	*11.*	80.20

(6) 近似數和較的誤差定律　兩近似數和或較的誤差,充其量可等於兩絕對誤差的絕對值(不計正負號)的和.

[證]　設X,Y兩眞值的近似值爲A,B; 兩絕對誤差爲a,b. 那麼依定義有

$$\begin{cases}A-X=a\\B-Y=b\end{cases}$$

相加減得　$(A\pm B)-(X\pm Y)=a\pm b$

這式左端依定義爲A,B兩近似數和或較的絕對誤差. 但右端的a,b是或正或負的數,所以最大許是a,b兩絕對值的和.

從上面的定律立刻就有一個推論:

大小兩近似數相加減,如果小近似數比大近似數的絕對誤差還要小,簡直可以不計.

例如 23.1加減0.0054還是23.1. 因爲23.1的末位以下的數字,都不確知,所加減的0.0054還在不知之列,所以毋須計較.

練習七十

求下列各近似數(每位都是有效數字)的和或較:——

1. 35.8−0.0027　　*2.* 1.008+0.270006

3. 100.0+3.0012　　*4.* 4.004−57.0

5. 有代數式 $x^2-12x+28.3$ 末項 28.3 爲近似數三位都是有效數字. 設x的眞值爲 0.02 求這代數式的近似數值.

6. 有一線段長一公尺,有人用一公分的長度做尺去量,往往相差很大,是什麼緣故?

7. 造幣廠製造銀圓時,往往用一百圓或一千圓來秤重量,使適合規定一圓的重的百倍或千倍. 爲何不一圓一圓去秤,秤到百圓或千圓?

8. 把 3.1415 或 3.1416 當作 π, 求兩絕對誤差.

9. 用絕對誤差解釋四捨五入的用意.

(7) 準確度與相對誤差　有誤差就是不準確,但是準確度 *Degree of Accuracy* 却不是看絕對誤差的大小來定的.

譬如測樹的高得 101 尺,實在是 100 尺,相差 1 尺,似乎很粗略;量蝨的長得 0.011 尺,實在是 0.010 尺,相差 0.001 尺,好像很準確:其實不然,前者雖差 1 尺,不過百分之一,後者相差 0.001 尺,却有十分之一:當然前者準,後者疏.

可見準確度乃是看絕對誤差同真值的比來定的.　這個比稱爲相對誤差 *Relative Error.*

設　X = 眞值　A = 近似值　a = 相對誤差.

那麽相對誤差的定義可寫做:——

$$\frac{A-X}{X}=a$$

於是　$$A=X(1+a)$$

相對誤差都用百分來計,叫百分誤差 *Percentage Error.*　上面兩例的百分誤差如下:——

$$\frac{101-100}{100}=\frac{1}{100}=0.01=1\%$$

$$\frac{0.011-0.010}{0.010}=\frac{1}{10}=0.1=10\%$$

練習七十一

1. 已知$\sqrt{3}=1.73205080 7\cdots$若只取兩位小數,求他的百分誤差. 取三位小數呢? 取五位小數呢? 取六位小數呢?

2. 取π的四位小數求百分誤差;用四捨五入也留四位小數再求百分誤差. 比較起來,看那一個更準確.

(8) 近似數商積的誤差定律 兩近似數商或積的誤差,充其量可等於兩相對誤差的絕對值(不計正負號)的和.

[證] 設X,Y兩眞值的近似值爲A,B;兩相對誤差爲α,β. 那麼依定義有:——

$$A=X(1+\alpha)$$

$$B=Y(1+\beta)$$

相乘得 $$AB=XY(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)$$

這括弧裏$\alpha\beta$很小,依近似和較定律,可以不計.

於是 $$AB=XY(1+\alpha+\beta)$$

$$\frac{AB}{XY}-1=\alpha+\beta$$

$$\frac{AB-XY}{XY}=\alpha+\beta \quad \text{(積的誤差公式)}$$

這式左端依定義是A,B兩近似數積的相對誤差;右端是A,B原來的相對誤差.

又從A,B的商　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{X(1+\alpha)}{Y(1+\beta)}$

那麼　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{X(1+\alpha)(1-\beta)}{Y(1+\beta)(1-\beta)}=\dfrac{X}{Y}\cdot\dfrac{1+\alpha-\beta-\alpha\beta}{1-\beta^2}$

依近似和較定律,棄去$\alpha\beta$同β^2不計,

就有　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{X}{Y}(1+\alpha-\beta)$

於是　$\dfrac{\dfrac{A}{B}-\dfrac{X}{Y}}{\dfrac{X}{Y}}=\alpha-\beta$　(商的誤差公式)

這式左端依定義是A,B兩近似數的商的相對誤差;右端是A,B原來的相對誤差　但是α,β許是正也許是負,所以誤差最大時還可等於α,β的絕對值的和.

推廣起來:　設有四個近似數A,B,C,D各眞値爲X,Y,Z,W;各相對誤差爲$\alpha,\beta,\gamma,\delta$,　那麼依上面同樣的方法,可證明下列公式:——

$$\frac{\dfrac{AB}{CD}-\dfrac{XY}{ZW}}{\dfrac{XY}{ZW}}=\alpha+\beta-\gamma-\delta$$

練習七十二

1.　設有近似數A爲23.08,他的眞値爲23.04;又近似數B爲12.76,他的眞値爲12.74;問$A\times B$的百分誤差是什麼?　問A/B的百分誤差是什麼?

2. 有近似數 4.18 他的眞値爲 4.16; 又一近似數爲 1.77 他的眞値爲 17.8　求 $\frac{4.18}{1.77}$ 的百分誤差.

3. 有兩線段 A,B: 量 A 得 2.79 公分,眞値爲 2.76 公分; 量 B 得 1.84 公分,眞値爲 1.87 公分;求這兩線段比 A/B 的百分誤差.

4. 有比例線段 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, 量 A, B, C 設三誤差順次爲 2%,0.1%,−1.9%;求推算 D 時的百分誤差.

(9) 有效數字與百分誤誤　一個近似數譬如 2.76 三位都是有效數字,他的絕對誤差最大的時候爲 0.01 那麼他的最大相對誤差就是

$$\frac{0.01}{2.76}=\frac{1}{276}=0.37\%.$$

從此可見凡各位都有效的近似數的最大相對誤差,常爲這數除去小數點的倒數.

於是我們就知道: 凡兩位都有效的近似數他的百分誤差,必在 10% 同 1% 之間;三位都有效的近似數的百分誤差,必在 1% 同 0.1% 之間;其他照這樣類推. 總說一句話:有效數字愈多,百分誤差愈小,就是準確度愈高.

練習七十三

1. 有近似數1200同0.01200求兩個百分誤差.

2. 已知各位都有效的近似數的百分誤差為2%,問這數有幾位? 若是0.3%有幾位? 若是0.013%有幾位?

(10)近似數的運算 平常運算乘除,你們總以為多算幾位小數,必定很準確,其實不盡然.在運算近似數時,譬如 7.84π 寫做

$$7.84\times3.1415926=\underline{24.6}30085984$$

但7.84的誤差為0.13%依乘積誤差定律,積的誤差不能比0.13%更小.換句話說:就是只有四位有效.可見0085984都是無效數字.所以我們可把 π 的數值縮短,寫做3.142四位(比7.84多一位),只要他的誤差對於乘積不生重大的影響.如 $7.84\times3.142=\underline{24.63}328$

你看積的前四位同上式還是一樣.不但如此,便是這乘積後面三位數字還是多餘的,所以在實行乘法演算時,還可以不必完全算出,於是有一種省略乘法看下節.

(11) 省略乘法 *Abbreviated Multiplication* 做省略乘法,最要注意的就是:要把乘數的數字從左邊取起,以下逐一挨次向右取,同平常的手續恰好相反.

例如 7.84×3.142 演算如下:——

詳細乘法		省略乘法	
3.142		3.142	
7.84		7.84	
21.99	4	21.99	……捨 4
2.51	36	2.51	……捨 3
12	568	.13	……入 5
24.63	328	24.63	

從誤差定律,我們知道:乘積最多只要取四位數(因爲7.84是三位),所以在做省略乘法時,四位以下用四捨五入隨時割棄,不必乘出,結果得24.64已經嫌位數太多.因爲7.84的誤差爲0.13%而24.63的誤差爲0.04%還比0.13%小,可見第四位都不是必要的,不過我們暫時保留,預備繼續運算之用.

(12) 省略除法 *Abbreviated Division* 做省略除法時,必須要知道的就是:每得一位商數之後,除數的數字可少取一位(從後面割起)譬如用 3.142 去除 24.63 演算如下:——

省略除法

$$
\begin{array}{r}
3.142)\,24.63\,(7.84 \\
21.99 \\
\hline
2.64 \\
2.51 \\
\hline
.13
\end{array}
$$

先用 3.142 除 24.63 得 7. 再用 3.14 除 2.46 得 .8 末用 3.1 除 .13 得 .04. 又末了一位商數,可以不必實行除的手續,只要用心算估計一下便可得到.

練習七十四

下列各乘數應該取幾位,乘積應該取幾位,決定後,再用省略乘法求積.

1. $61.3\sqrt{3}$
2. $.0217\times2.236068$
3. 8.75×12903
4. 10.82×9.82741

下列各數應該取幾位,決定後,用省略法求商.

5. $\sqrt{2}\div 25.4$ 6. $\sqrt{5}\div 40.87$

7. $25.61\div 0.01191$ 8. $3.982\div 71.4$

9. 有人用立竿量影法,測算樹高,只知竿長2.4尺(是兩位有效數字的近似值),量得竿影長2.7尺(近似值),再用極精密的儀器量得樹影長164.732尺,於是求得樹高爲146.42844尺. 問此人的謬誤何在? 並討論量法的要點.

(13) 近似算常用公式 運算近似數有幾個常用的公式,如下:——

設$\alpha,\beta,\gamma,\delta$代替比1小得多的或正或負的數.

因爲 $(1+\alpha)(1+\beta)=1+\alpha+\beta+\alpha\beta$

略去$\alpha\beta$得 $(1+\alpha)(1+\beta)=1+\alpha+\beta$ (一)

又因 $(1+\alpha)(1-\alpha)=1-\alpha^2$

略去α^2得 $(1+\alpha)(1-\alpha)=1$

於是有 $\begin{cases}\dfrac{1}{1+\alpha}=1-\alpha & (二)\\[2ex] \dfrac{1}{1-\alpha}=1+\alpha & (三)\end{cases}$

合併(一)(二)得 $\dfrac{(1+\alpha)(1+\beta)}{(1+\gamma)(1+\delta)}=1+\alpha+\beta-\gamma-\delta$ (四)

又因　$(1+\alpha)^2=1+2\alpha+\alpha^2$

略去α^2得　$(1+\alpha)^2=1+2\alpha$　(五)

又因　$\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)^2=1+\alpha+\frac{\alpha^2}{4}$

略去$\frac{\alpha^2}{4}$開方　$\sqrt{1+\alpha}=1+\frac{\alpha}{2}$　(六)

例一.　求$\sqrt{1.016}=?$

$$\sqrt{1.016}=\sqrt{1+0.016}=1+\frac{0.016}{2}=1.008$$

例二.　求$\frac{2}{6.204}=?$

$$\frac{2}{6.204}=\frac{1}{3.102}=\frac{1}{3\times1.034}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+0.034}$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-0.034\right)=\frac{0.966}{3}=0.322$$

練習七十五

求下列各式的近似值:——

1. $(1.027)^2$　　2. $(3-0.0831)^2$

3. 9.054×3.012　　4. $\sqrt{4.28}$

5. $\frac{4+0.0052}{3-0.0081}$　　6. $\frac{4}{1+0.0823}$

7. $\frac{1}{.99823}$　　8. $\frac{0.99872\times1.00011}{1.00034\times0.9992}$

9. 有直角三角形兩股是1.06同2.012求斜邊.

(14)累次近似算開平方 算學上求近似值,有一種方法,先求一個粗略的數值,然後依樣累次推求,越求越近,叫累次近似算法*Successive Approximation*.

例如 求$\sqrt{5}=?$ (用累次近似法)

設 $\sqrt{5}=2+x$

自乘 $5=4+4x+x^2$

略去x^2 $5=4+4x$

解x $x=\frac{1}{4}$

那麼 $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}=2.25$ 不很準

再設 $\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}+x$

即 $\sqrt{5}=\frac{9}{4}+x$

自乘略x^2 $5=\frac{81}{16}+\frac{9}{2}x$

解出x $x=-\frac{1}{72}=-0.139$ (略)

於是 $\sqrt{5}=2.25-0.139=\underline{2.2361}$ (略)

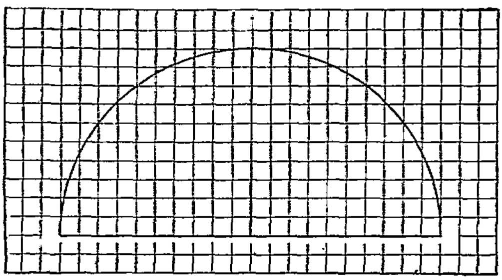
因爲$\sqrt{5}=2.236067977$那麼已得四位有效數字

請用累次近似法求下列各平方根:——

$\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$.

(15)用方格求近似面積　用方格求面積,遇到方格不成整個,便不能辦.　但是如果不要絕對的準確,却也可以得到一個誤差很小的近似數值.　方法如下:——

不成整個的方格,如果比半格大,就算一格;比半格小,就算沒有;恰好半格,算半格.



(圖一九三)

譬如有半圓如圖一九三,設半徑爲2尺,令10格代表半徑,畫方格如圖.　依上面的方法,數出方格的個數爲156格.

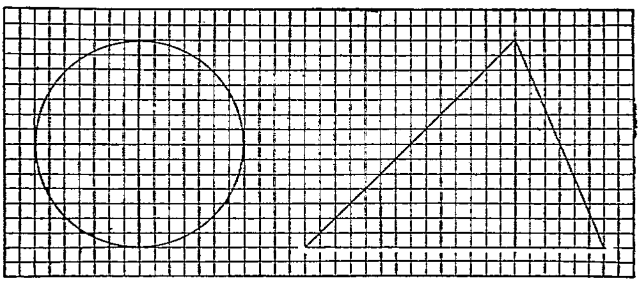
於是　　面積 $=\dfrac{2^2\times156}{10^2}=6.24$ 方尺

因爲　　眞值 $=2\pi=6.28$

那麼　　誤差 $=0.60\%$

練習七十六

1.　畫一個直徑是14公分的圓,用一格代表一公分,作方格如圖一九四.　數方格求面積,再用公式推算,求你的近似值的準確度.



(圖一九四)　　　　(圖一九五)

2.　有三角形如圖一九五,底邊長20尺,高14尺,用一格代表一尺.　數方格求面積,再用公式推算,求這近似數的準確度.

3.　在地圖上照圖上所附的比例尺,作方格求我們中國的面積.

度量權衡幣制表

本國制
(營造尺庫平制)

【長度】

1里=180丈
1丈=10尺
1尺=10寸
1寸=10分
1分=10厘

【面積】

1畝=10分
1分=10釐
1畝=60方丈

【容量】

1石=10斗
1斗=10升
1升=10合
1升=31.6立方寸

【衡制】

1斤=16兩
1兩=10錢
1錢=10分
1分=10釐

【幣制】

1圓=10角
1角=10分

萬國通制

【長度】

1公里 Kilometer =10公引
1公引 =10公丈
1公丈 =10公尺
1公尺 Meter =10公寸
1公寸 =10公分
1公分Centimeter=10公厘

【面積】

1公畝Are=100方公丈

【容量】

1公升Liter=1立方公寸

【衡制】

1公斤 Kilogram=10公兩
1公兩 =10公錢
1公錢 =10公分
1公分Gram =10公釐
1公釐 =10公毫

【時間】

1日Day=24小時
1小時Hour=60[illegible]
1分Minute=60秒Second

英美制

【長度】

1哩Mile=1760碼
1碼Yard=3呎
1呎Foot=12吋Inch

【面積】

1畝Acre=4840方碼

【容量】

1蒲式耳Bushel=8加侖
1加侖Gallon=4夸
1夸Quart=2品Pint
1加侖(英)=277.4立方吋
1加侖(美)=231立方吋

【衡制】

1噸Ton(英)=2240磅
1噸Ton(美)=2000磅
1磅Pound=16兩O[illegible]nce

【英幣制】

1[illegible]ound=20先令
[illegible]先令Shilling=12辨士Penny

【美幣制】

1弗Dollar=10角
1角Dime=10仙Cent

中英美制與萬國制比較

本國制 {1營造尺=32公分; 1庫平兩=37.301公分} (民國四年公布)

英美制 {1公尺=39.37吋(美) (1866年公布); 1公尺=39.370113吋(英) (1878年公布); 1公斤=2.20462234磅}

元(1746)

New System Series
Correlated Mathematics
For Junior Middle Schools
The Commercial Press, Limited

中華民國十四年二月初版
中華民國十四年五月再版

（初級中學用）
※圓（新學制）混合算學教科書六冊）
（第四冊定價大洋陸角）
（外埠酌加運費匯費）

編輯者　段育華
校閱者　胡明復
發行者　商務印書館
印刷所　上海北河南路北首寶山路 商務印書館
總發行所　上海棋盤街中市 商務印書館
分售處　北京天津保定奉天吉林龍江濟南太原開封西安南京杭州蘭谿安慶蕪湖南昌漢口長沙常德衡州成都重慶廈門福州廣州潮州香港梧州雲南貴陽張家口新嘉坡 商務印書分館

八七二二自

商務印書館出版