遵照三十年修正課程標準編著

新中國教科書
初級中學
幾何學

第四冊

編著者 萬頤祥 余傳綏

（第三學年第二學期用）

正中書局印行

目 次

第十三章 比例

第十四章 多邊形的面積

第十五章 正多邊形及圓

第十三章　比例

比　例

317. **定義**　比例是表示二比相等的等式，如

$$a:b=c:d,\text{或}\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

318. **定義**　比例的第一和第四兩項叫做外項，第二和第三兩項叫做內項.

第一和第三兩項是前項，第二和第四兩項是後項.

如在 $a:b=c:d$ 比例中，a 和 d 是外項，b 和 c 是內項，a 和 c 是前項，b 和 d 是後項.

319. **定義**　比例的末項是前三項的第四比例項.

如在 $a:b=c:d$ 比例中，d 是 a, b 和 c 的第四比例項.

320. **定義**　若 $a:b=b:c=c:d=d:e$，則 a, b, c, d, e 成連比例.

若三量成連比例，則第二量是首、末二量的比例中項，第三量是前二量的第三比例項.

如在$a:b=b:c$比例中，b是a和c的比例中項，c是a和b的第三比例項。

基本定理

321。 在任何比例式中，兩外項的積，等於兩內項的積。

設 $a:b=c:d$。

求證 $ad=bc$。

證 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$， (假設)

兩邊同用bd來乘，則

$ad=bc$。 (等量的同倍量相等)

322。 若有兩數的積，等於他兩數的積，則以任兩數做內項，其他兩數做外項，必成比例。

設 $ad=bc$。

求證 $a:b=c:d$。

證 $ad=bc$， (假設)

兩邊同用bd來除，則

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。 (等量的同分量相等)

223。 二量的比例中項，等於這二量相乘積的平方根。

設　$a:b=b:c$，　則　$b=\sqrt{ac}$。

324．若 $a:b=c:d$，則 $a:c=b:d$。

證　$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$ (假設)

則　$$ad=bc,$$ (§321)

$$\therefore\ a:c=b:d。$$ (§322)

325．若 $a:b=c:d$，則 $b:a=d:c$。

(學者可自證之)

326．若 $a:b=c:d$，則

(1)　$(a+b):b=(c+d):d$;

(2)　$(a-b):b=(c-d):d$;

(3)　$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$.

證 (1)　$$\because\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

則　$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$ (何故？)

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}。$$ (何故？)

(2)　同上理，$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$,

$$\therefore\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}。$$

(3)　由 (1)÷(2)，卽得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}。$$

327. 若 $a:b=c:d=e:f=\cdots\cdots$，則

$(a+c+e+\cdots\cdots):(b+d+f+\cdots\cdots)=a:b$。

證　設　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots=r$，

則　$a=br, c=dr, e=fr, \cdots\cdots$。　(何故?)

相加，得 $a+c+e+\cdots\cdots=(b+d+f+\cdots\cdots)r$，　(何故?)

$$\therefore\ \frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}=r=\frac{a}{b}。$$　(何故?)

328. 若 $a:b=c:d$，則

(1)　$ma:mb=nc:nd$；

(2)　$a^n:b^n=c^n:d^n$；

(3)　$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{c}:\sqrt[n]{d}$。

(學者可自證之)

習題六十三

1. 求$3b^2$和$9a^2$的比例中項。

2. 求 $\frac{4}{3}$ 和 $\frac{10}{3}$ 的第三比例項。

3. 改變比例式 $m : x = p : q$，使 x 做第四項；第一項；第三項。

4. 若 $(x+y) : y = 7 : 3$，求 x 與 y 的比。

5. 若 $(x-y) : y = 2 : 3$，求 x 與 y 的比。

6. 若 $(x+y) : (x-y) = a : b$，求 x 與 y 的比。

7. 若 $\frac{x-a-c}{y-b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$，求 $x : y$。

8. 若 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$，求 $x+y+z$ 與 z 的比。

9. 若 $\sqrt[3]{x} : 1 = \sqrt{y} : 2$，求 $\frac{x}{y}$。

10. 若 $(x+y) : (x-y) = 3 : 1$，求 $\frac{x^2}{y^2}$。

11. 若 $x^2 : 4a^2 = y^2 : b^2$，求 x^3 與 y^3 的比。

12. 設 $a : b = c : d$ 和 $m : n = p : q$，試證 $am : bn = cp : dq$。

13. 設 $a : b = c : d$，試證 $a : d = bc : d$。

14. 設 $a : b = c : d$，試證 $ma : nb = mc : nd$

15. 設 $a : b = b : c$，試證 $a : c = b^2 : c^2$。

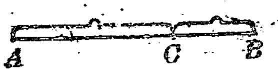
16. 設 $a : b = b : c$，試證 $(b+\sqrt{ac})(b-$

比例線段

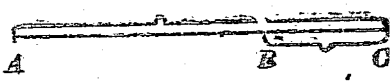
329. 定義 用一單位線段去量兩線段,量得的兩數的比,便是兩線段的比。

兩線段的比和另外兩線段的比相等時,這四線段便成比例,叫做比例線段.

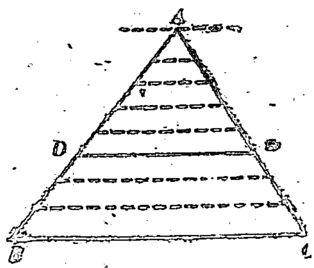
330. 定義 在AB線段內,或在AB的延長線上,取一點C,則AC和CB叫做AB被點C分成的兩線段.



若點C在AB線段內,就叫做內分;若點C在AB的延長線上,就叫做外分.



331. 定理六十三 平行於三角形一邊的直線,必分他二邊成比例線段.



設在$\triangle ABC$內,$DE \parallel BC$。

求證 $AD:DB=AE:EC$.

證 設BK是AD, DB的公度. $AD=m(BK)$, $DB=n(BK)$,

故 $AD:DB=m:n$. (§329)

m, n是整數.以BK做單位分AD為m等分,DB為n等分。

經過AD, DB的各分點,作BC的平行線,則AE, EC亦

分做 m, n 等分，各等分互相等。　(何故?)

$$\therefore \quad AE : EC = m : n.$$

$$\therefore \quad AD : DB = AE : EC.$$　(何故?)

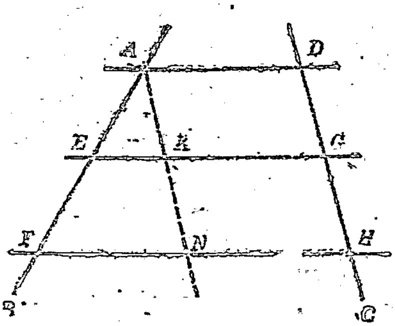
〔註〕 無公度的兩線段，其證明非初學所易了解，故從略。

〔注意〕 若這平行截線與三角形的兩邊相交，這二邊被內分成等比；若與二邊延長線相交，這兩邊被外分成等比。

332. 系一　一直線平行於三角形的一邊，與其他二邊相截，則一邊與此邊上所截線段的比，等於他一邊與其邊上所截相當線段的比。即上定理之圖中，

$$AB : DB = AC : EC \text{ 及 } AB : AD = AC : AE.$$

333. 系二　兩直線被平行諸直線所截的相當諸線段成比例。



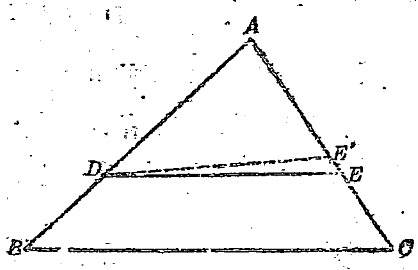
從 A 作 $AN \parallel CD$.

則　$AK = DG$,　$KN = GH$.　(何故?)

$\because$ $AE:EF=AK:KN,$ (何故?)

$\therefore$ $AE:EF=DG:GH.$ (何故?)

334. 定理六十四



一直線截三角形的兩邊成比例，則此直線必與第三邊平行。

設 DE 截 $\triangle ABC$ 的兩邊 AB, AC 於 D, E, 且

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

求證 $DE \parallel BC$。

證 從 D 作 $DE' \parallel BC$,

則 $$\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}.$$ (定理六十三)

$\because$ $$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC},$$ (假設)

$\therefore$ $$\frac{AE'}{E'C}=\frac{AE}{EC}.$$ (何故?)

$\therefore$ $$\frac{AE'+E'C}{E'C}=\frac{AE+EC}{EC}.$$ (§326)

$$\frac{AC}{E'C}=\frac{AC}{EC}.$$

$$\therefore \quad E'C=EC.$$

故 E' 與 E 相合。

於是 DE' 與 DE 相合.

$$\because \quad DE' \parallel BC,$$

$$\therefore \quad DE \parallel BC.$$

335. 系 若一直線截一三角形的二邊，使一邊與此邊上所截線段的比，等於他邊與他邊上所截相當線段的比，則此直線平行於第三邊.

習題六十四

1. 把 18 寸的直線，外分成 3 : 2 的比。

2. 一 18 寸長的直線，分成三線段成連比 2 : 3 : 4，求各線段的長.

3. 在定理六十三的圖中，若 $AE=2DB$, $AD=10$, $EC=20$，求 AE。

4. 在同圖中，若 $AB=a$, $AD=b$, $AC=c$，求 EC。

5. 在同圖中，若 $AD=2AE$，又 $DB=6$，求 EC.

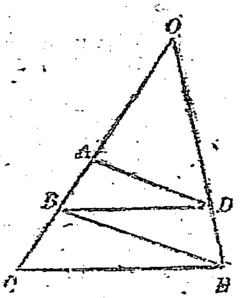
6. 在同圖中，若 $AD=8$, $DB=AE$，又 $AC=6$，求 DB 和 EC。

7. 在同圖中，若 $AD=8$, $AE=\frac{DB}{2}$, $EC=1$，求 DB 和 AE

8. 在同圖中，$AD=12$, $DB=16$; $AE=15$, $EC=20$, 問 DE 和 BC 是否平行?

9. 在右圖中，若 $BD \parallel CE$, 又 $AD \parallel BE$, 則

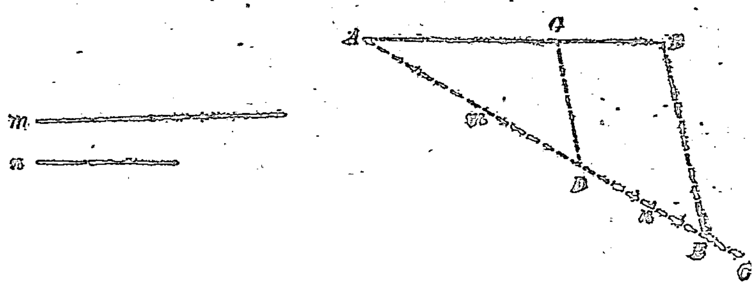
$$OA:OB=OB:OC.$$



10. 在四邊形 $ABCD$ 的四邊 AB, BC, CD, DA 上，順次各取一點 M, N, P, Q, 使 $AM:MB=AQ:QD$; 及 $BN:NC=DP:PC$, 試證

$$MQ \parallel NP.$$

336. 作圖題十七　分一已知線段成二線段，與已知二線段成比例.



設 AB, m 和 n 是已知線段。

求分 AB 成二線段，使其比等於 m 和 n 的比。

作法　作 AC 與 AB 成一任意角 A。

在 AC 上，截取 $AD=m$, $DE=n$，聯 BE.

過點 D，作一直線平行於 BE，與 AB 相交於 G。

則 AG, GB 是所求的二線段.

證　在 $\triangle ABE$ 中，

$\because \quad GD \parallel BE,$ （作圖）

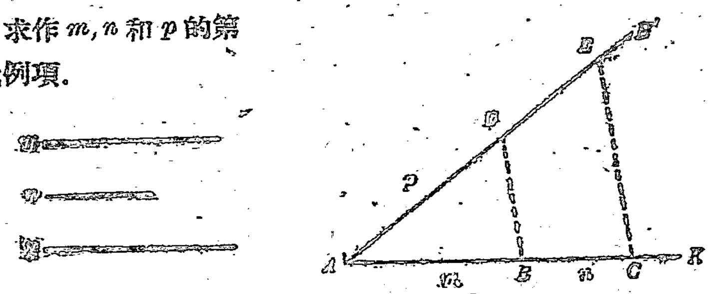
$\therefore \quad AG : GB = AD : DE$ （定理六十三）

$= m : n.$

337. 作圖題十八　求已知三線段的第四比例項.

設 m, n 和 p 是已知三線段.

求作 m, n 和 p 的第四比例項.



作圖　作任意角 KAH。

在 AK 上，取 $AB=m$, $BC=n$；在 AH 上，取 $AD=p$，聯 BD.

過點 C，作一直線平行於 BD，遇 AH 於 E。

則 DE 即所求的第四比例項。

證　在 $\triangle AEC$ 中，

$\because \quad DB \parallel EC,$ （作圖）

$\therefore$ $AB : BC = AD : DE$. (定理六十三)

即 $m : n = p : DE$.

$\therefore$ DE 卽爲所求的線段。

習題六十五

1. 設已知線段 a 和 b，作一線段 $x=\frac{b^2}{a}$。

2. 作 $x=a(a+b)\div b$。

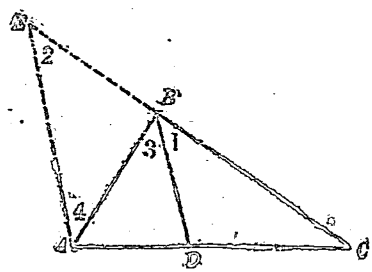
3. 分一已知線段成三線段，其比等於三已知線段的連比。

4. 作二線段，已知這二線段的和及其比。

5. 作二線段，已知這二線段的差及其比。

6. 在一已知線段 AB 上，求一點 C，使

$$AB : AC = m : n.$$



338. 定理六十五 三角形一角的二等分線，把對邊分成兩線段的比，等於此角二邊的比。

設 BD 二等分 $\angle B$。

求證 $AD : DC = AB : BC$.

證　過 A 作 $AE \parallel DB$，與 CB 的延長線交於 E.

則　　　$\angle 1 = \angle 2$,　　　（何故？）

　　　$\angle 3 = \angle 4$.　　　（何故？）

又　　　$\angle 1 = \angle 3$,　　　（假設）

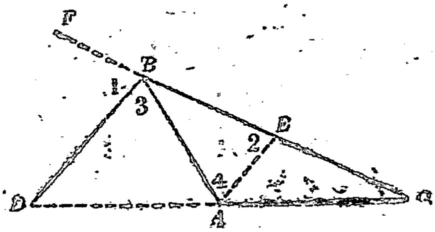
$\therefore$　$\angle 2 = \angle 4$.　　（等於某量的量互等）

$\therefore$　$AB = EB$.　　　（何故？）

但　　$AD : DC = EB : BC$.　　（定理六十三）

$AD : DC = AB : BC$.

339。 **定理六十六**　三角形一外角的二等分線，外分對邊成兩線段的比，等於其二鄰邊的比。



設在 $\triangle ABC$ 中，BD 二等分 $\angle ABF$。

求證　　$AB : BC = AD : DC$。

證　過 A 作 $AE \parallel BD$，交 BC 於 E。

則　　$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,　　（何故？）

又　　$\angle 1 = \angle 3$,　　（假設）

$\therefore$　$\angle 2 = \angle 4$.　　（等於某量的量互等）

$\therefore\quad AB=EB.$　　(何故?)

但　$EB:BC=AD:DC$,(定理六十三系一)

$\therefore\quad AB:BC=AD:DC.$

習題六十六

1. 在定理六十五的圖中,若 $AB=DC$, $AD=4$, $BC=6$, 求 AB.

2. 在同圖中,若 $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, 求 AD 及 DC.

3. 在定理六十六的圖中,若 $AB=3$, $BC=4$, $AC=5$, 求 AD.

4. 在同圖中,若 $DA=BC$, $BA=4$, $DC=9$, 求 DA.

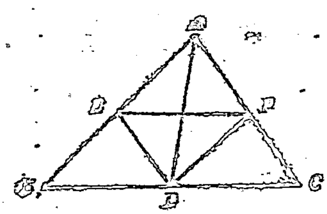
5. 在同圖中,若 $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, 求 DC 和 DA.

6. 求分三角形的一邊成兩線段,與他二邊成比例.

7. 試外分三角形的一邊成兩線段,與他二鄰邊成比例.

8. 試述定理六十五的逆定理,並證明之.

9. 試述定理六十六的逆定理,並證明之.



10. D 是 $\triangle ABC$ 底 BC 的中點,DE,DF 是 $\angle ADB$,$\angle ADC$ 的二等分線,求證 $EF \parallel BC$.

相似多邊形

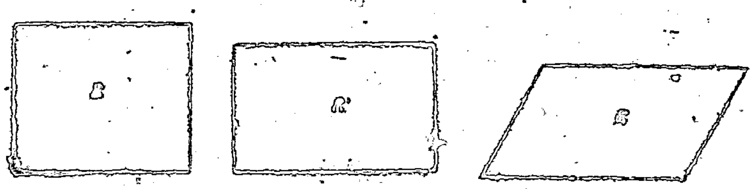
340. 定義 同邊數兩多邊形的相當角相等，相當邊成比例，則這兩多邊形叫做相似形。

設 $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ 是兩個五邊形，若$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$, $\angle E=\angle E'$,

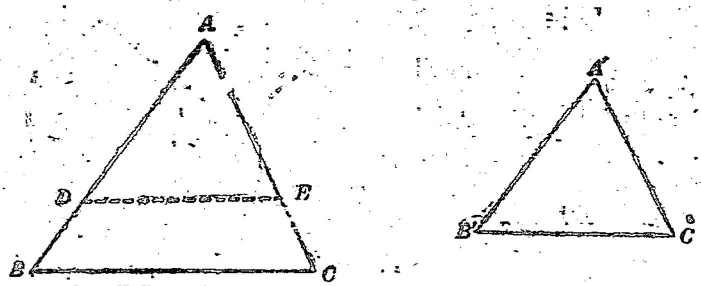
$$\text{及}\quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}。$$

則這兩五邊形叫做相似五邊形。以記號 $\backsim$ 表兩多邊形的相似，如 $ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$。

【注意】 相似卽形狀相像的意思，必須具有本定義所設的條件，否則不能成立。例如相當角相等相當邊不成比例，如圖 B 和 B'；或相當邊成比例相當角不等，如圖 B' 和 B''，都不是相似形；但三角形是例外。



341. **定理六十七** 兩三角形若有三角彼此各各相等，則此兩三角形相似。



設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',\ \angle C=\angle C'.$$

求證　　$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

證　在 AB, AC 上，取 $AD=A'B'$，$AE=A'C'$，聯 DE.

則　　$\triangle A'B'C'\cong\triangle ADE$.　　（何故?）

$\therefore$　$\angle ADE=\angle B$，

$\therefore$　$DE\parallel BC$.　　（何故?）

$\therefore$　$AD:AB=AE:AC$.（定理六十三系一）

即　　$A'B':AB=A'C':AC$.

同樣可證　　$A'C':AC=B'C':BC$.

$\therefore$　$A'B':AB=B'C':BC=C'A':CA$,

$\therefore$　$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.　　(§ 340)

342. 系一　兩三角形若有兩角彼此各各相等，則兩三角形相似。

343. 系二　兩直角三角形，若有一銳角彼此各相等，則兩三角形相似。

344. 系三　平行於三角形一邊的直線，截其他二邊成一三角形，與原三角形相似。

345. 系四　兩三角形的三邊兩兩平行或垂直，則兩三角形相似。

習題六十七

1　若圓內二弦 AB, CD 相交於 E，則

$$\triangle AEC \backsim \triangle BED.$$

2. 若從圓外一點 A 作二割線交圓周於 B 及 C, D 及 E，則

$$\triangle ABE \backsim \triangle ACD.$$

3. 若 $\triangle ABC$ 的二高 AD 和 BE 相交於 F，則

$$\triangle AFE \backsim \triangle BFD.$$

4. 若 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的二等分線 AD，交外接圓周於 E，則

$$\triangle ABD \backsim \triangle AEC.$$

5. 兩等腰三角形，若有一角彼此相等，則兩三角形相似。

〔注意〕 證明四線段成比例，常常先證出各以二線段爲邊的兩三角形相似。

6. 梯形的二對角線互相分成比例線段。

7. 在$\triangle ABC$中，二高AD和BE相交於F，求證

$$AE:AD=FE:DC。$$

8. 從$\triangle ABC$的頂點A作高AD及外接圓的直徑AF，則

$$AB:AD=AF:AC。$$

9. 在直角三角形ABC內，作斜邊上的高AD，則

$$AD:AB=AC:BC。$$

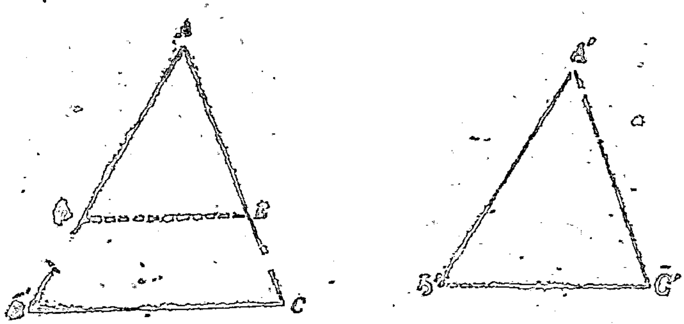
10. 將$\triangle ABC$的$\angle C$的二等分線CD延長遇外接圓周於E，則

$$EB:EC=DB:CB。$$

11. 在上圖中，試證$AD:EB=AC:CE$。

12. 相似三角形相當角的二等分線，與其相當邊成比例。

346. **定理六十八** 兩三角形若有一角相等，且夾此角的兩邊成比例，則此兩三角形相似。



設$\triangle ABC$及$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，

又 $AB : A'B' = AC : A'C'$。

求證 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

證 在 AB, AC 上，取 $AD = A'B'$, $AE = A'C'$，聯 DE。

則 $\triangle A'B'C' \cong \triangle ADE$。 （何故？）

$\because$ $AB : A'B' = AC : A'C'$， （假設）

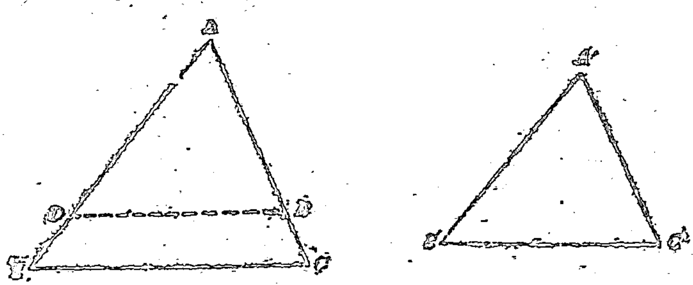
則 $AB : AD = AC : AE$，

$\therefore$ $DE \parallel BC$， （定理六十四系）

$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$。（定理六十七系三）

即 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

347. **定理六十九** 若兩三角形的三邊對應成比例，則此兩三角形相似。



設 $\triangle ABC$ 及 $\triangle A'B'C'$ 中，

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}。$$

求證　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

證　在 AB, AC 上,取 $AD=A'B'$, $AE=A'C'$,聯 DE.

$\because \quad AB : A'B' = AC : A'C',$　　(假設)

則　$AB : AD = AC : AE$。

又　$\angle A = \angle A,$

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle ADE.$　　(定理六十八)

$\therefore \quad AB : AD = BC : DE.$　　(相似形的定義)

但　$AB : A'B' = BC : B'C',$　　(假設)

$\because \quad AD = A'B',$　　(作圖)

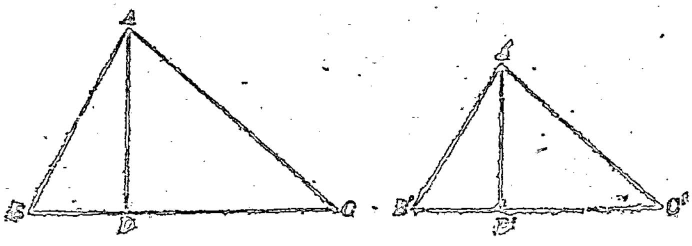
$\therefore \quad BC : DE = BC : B'C'$。　　(何故?)

$\therefore \quad DE = B'C'$。　　(何故?)

$\therefore \quad \triangle A'B'C' \cong \triangle ADE.$　　(s.s.s.)

$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

348. 定理七十　若兩三角形相似,則相當高之比等於相



當邊的比.

設 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$; AD, $A'D'$ 是二相當的高.

求證 $\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$.

證 $\because \triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, (假設)

$\therefore \angle B=\angle B'$. (相似形的定義)

又 $\angle BDA=\angle B'D'A'=$ rt$\angle$, (假設)

$\therefore \triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$. (定理六十七系二)

$\therefore \frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}$. (相似形的定義)

但 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$, (假設)

$\therefore \frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$.

習題六十八

1. 在二相似三角形內,二相當中線的比等於相當邊的比.

2. AD, $A'D'$ 為 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 的高,若 $AD:A'D'=BC:B'C'$, 又 $\angle B=\angle B'$, 則

$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

3. 若一三角形的二邊及二邊中一邊上的中線，與他一三角形的相當部分成比例，則此兩三角形相似。

4. 若一直角三角形的斜邊與一直角邊的比，等於他一直角三角形的斜邊與一直角邊的比，則此兩直角三角形相似。

5. 二相似三角形外接圓半徑的比，等於相當邊的比。

【注意】 要證明此兩線段的相乘積等於他兩線段的相乘積，可將它們寫成兩個內項同外項成一比例，再找出兩適合的相似三角形。

6. 在弦 AB 上任取一點 E，作 EC 垂直於直徑 AD，則

$$AC\times AD=AB\times AE。$$

7. 直角三角形二直角邊的積等於斜邊與其高的相乘積。

8. 三角形一邊與其高的相乘積等於他一邊與其高的相乘積。

9. $\triangle ABC$ 內的兩高 AD, BE 相交於 F，則

$$BF\times BE=BC\times BD。$$

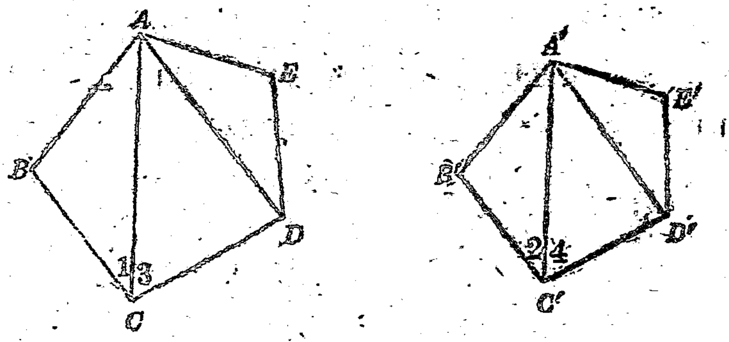
10. 同上圖，試證 $BD\times DC=DF\times AD$。

11. 若 AB 是直徑，BD 是切於 B 的切線，DA 遇圓周於 E，則

$$AB^2=AE\times AD。$$

12. 若在 $\triangle ABC$ 內，作二高 AD 及 BE，又 $BE=6$，$EC=3$，$DC=2$，求 AD。

349. 定理七十一　二相似多邊形可分成同數相似三角形.



設　　多邊形 $ABCDE \backsim$ 多邊形 $A'B'C'D'E'$。

求證　　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$,

　　　　$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$,

　　　　……………………

證　$\because$ $AB : A'B' = BC : B'C'$, $\angle B = \angle B'$,　(假設)

　　$\therefore$ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。(定理六十八)

　　$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$　　(相似形的定義)

　　$\because$ $\angle C = \angle C'$,　　(假設)

　　$\therefore$ $\angle 3 = \angle 4$.　　(等量減等量)

又　　$AC : A'C' = CB : C'B'$,　(相似形的定義)

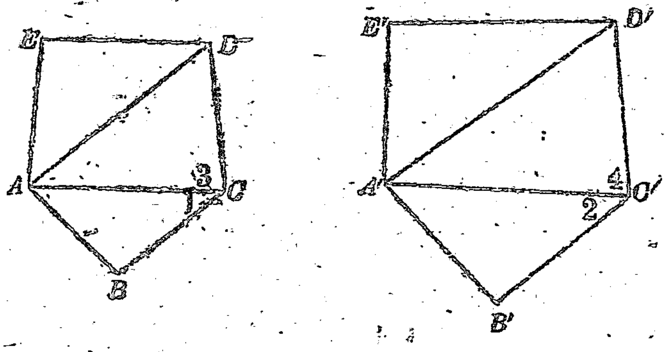
但　　$CB : C'B' = CD : C'D'$,　　(假設)

∵　$AC : A'C' = CD : C'D'$.（等於某量的量互等）

∴　$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$.　（定理六十八）

同樣可證　$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$。

350。 定理七十二　二多邊形若由兩兩相似且在相當位置的同數三角形所組成，則此二多邊形相似.



設在多邊形 $ABCDE$ 及 $A'B'C'D'E'$ 內，$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$，$\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$ 等等.

求證　多邊形 $ABCDE \backsim$ 多邊形 $A'B'C'D'E'$。

證　∵　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，　（假設）

∴　$\angle B = \angle B'$。　（相似形的定義）

$\angle 1 = \angle 2$，

又因，　$\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$　（假設）

∴　$\angle 3 = \angle 4$.　（相似形的定義）

則　　$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4,$

卽　　$\angle C=\angle C'.$

同理得證　$\angle D=\angle D',\ \angle E=\angle E',$

$\angle A=\angle A'.$

$$\because \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'},\quad\text{(假設)}$$

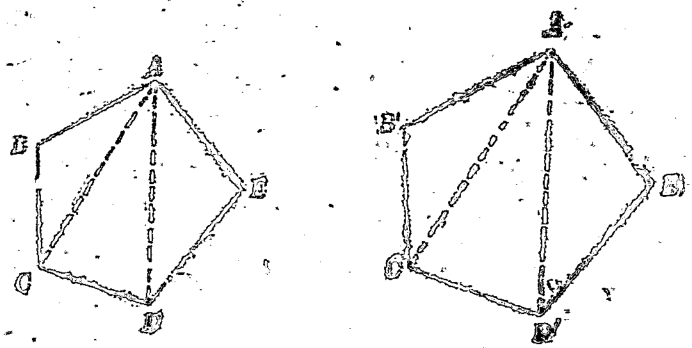
$$\frac{CA}{C'A'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{DC}{D'C'},\quad\text{(假設)}$$

$$\frac{AD}{A'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'},\quad\text{(假設)}$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{DC}{D'C'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}.$$

$\therefore$ 多邊形 $ABCDE \backsim$ 多邊形 $A'B'C'D'E'$. (§ 340)

351. 作圖題十九　以一已知線段爲一邊，作一多邊形與一已知多邊形相似。



設 $ABCDE$ 是已知多邊形，$A'B'$ 是已知線段.

求作以 $A'B'$ 爲一邊的一多邊形 $\backsim ABCDE$ 相似.

作圖 從已知多邊形的一頂點 A，所有的對角線.在 $A'B'$ 的兩端 A' 及 B' 各作 $\angle B'A'C'=\angle BAC$，$\angle B'=\angle B$，引長二邊使交於 C'。在 A' 及 C' 作 $\angle C'A'D'=\angle CAD$，$\angle A'C'D'=\angle ACD$ 等等，即能作成所求的多邊形 $A'B'C'D'E'$。

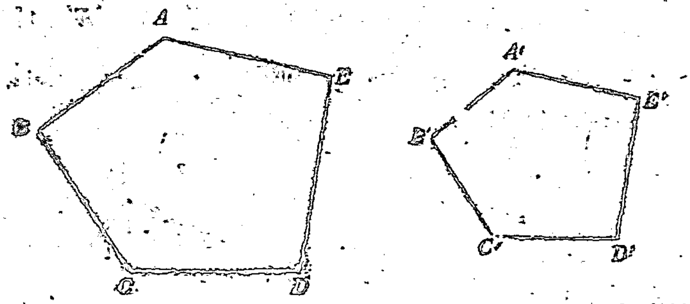
證 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$，$\triangle C'A'D' \backsim \triangle CAD$，……。

(定理六十七)

$\therefore$ 多邊形 $A'B'C'D'E' \backsim$ 多邊形 $ABCDE$。

(定理七十二)

52。 定理七十三 二相似多邊形的周圍的比，等於任意二相當邊的比.



設 P 及 P' 是二相似多邊形 $ABCDE$ 及 $A'B'C'D'E'$ 的周圍。

求證 $P:P'=AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=\cdots\cdots$。

證　$\because \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\cdots\cdots,$

$$\therefore \frac{AB+BC+CD+\cdots\cdots}{A'B'+B'C'+C'D'+\cdots\cdots}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\cdots\cdots。$$

(§ 327)

卽　$\dfrac{P}{P'}=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\cdots\cdots。$

習題六十九

1. 已知一平行四邊形，在已知底邊 AB 上作一相似平行四邊形。

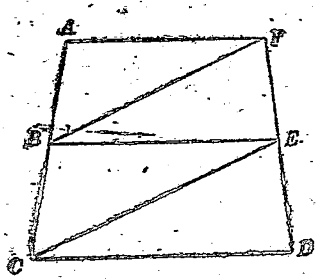
2. 二相似多邊形的周圍的比，等於任意二相當對角線的比。

3. 二相似三角形的周圍的比，等於任意二相當高的比。

4. 二相似多邊形的周圍是 20 寸及 25 寸，若一多邊形的一邊是 4 寸，求他一多邊形相當邊的長。

5. 在定理七十三的圖中，求 $ABCDE$ 的周圍，若 $A'B'C'D'E'$ 的周圍是 20 寸，$A'B'=4$ 寸，$B'C'=3$ 寸，$AC=10$ 寸，$B'C':A'B'=A'B':A'C'$，及 $ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$。

6. 設 $AF \parallel BE \parallel CD$，$BF \parallel CE$，試證 $ABEF$ 與 $BCDE$ 相似。



【注意】 要證明四線段成比例，假如易找出兩相似三角形，則可求出另一比同求證的兩比相等。

7. 在二相似三角形內，其內切圓半徑的比，等於任意二相當邊的比.

8. 若$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$是二相似三角形，AD及$A'D'$是角二等分線，AF及$A'F'$是高，求證

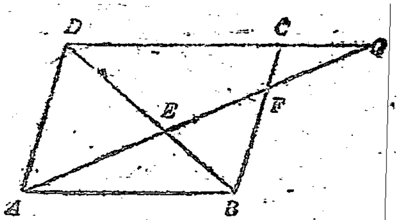
$$AD : A'D' = AF : A'F'。$$

9. 在二相似三角形$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的BC及$B'C'$邊上，各取一點D及D'，使$\angle BAD = \angle B'A'D'$，求證

$$BD : B'D' = BC : B'C'。$$

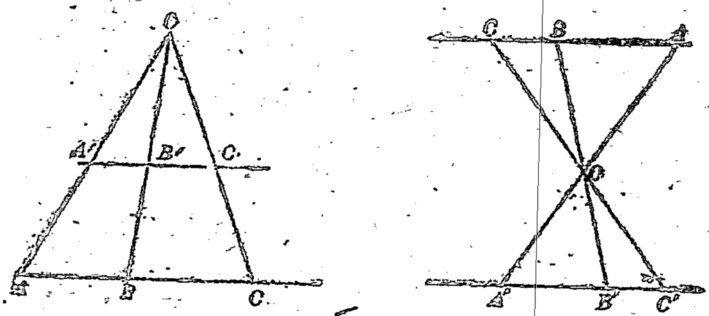
10. 設在▱$ABCD$內，作AG交對角線BD於E，交BC於F，引長DC與AG交於G，試證

$$\overline{EA}^2 = EF \times EG。$$



〔示意〕 證 $\dfrac{EF}{EA}=\dfrac{EB}{ED}=\dfrac{AE}{EG}$。

353. 定理七十四　兩平行線爲過同一點的數直線所截，則截取的對應線段成比例。



設過 O 引直線 OA, OB, OC 截平行線 AC 及 $A'C'$ 於 A, B, C, 及 A', B', C'。

求證 $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}$。

證 $\because A'B' \parallel AB$, (假設)

$\therefore \triangle A'OB' \sim \triangle AOB$. (定理六十七系三)

$\therefore \quad \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{OB'}{OB}$. (相似形的定義)

同樣得證 $\triangle B'OC' \backsim \triangle BOC$.

$\therefore \quad \dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{B'C'}{BC}$. (相似形的定義)

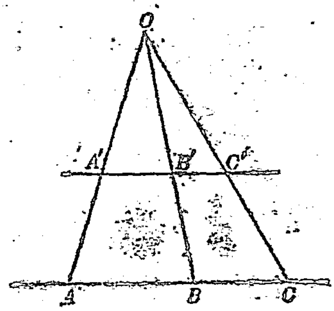
$\therefore \quad \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}$. (等於某量的量互等)

354. 定理七十五. 兩平行線被數截線所截，若截取的相當線段成比例，則此數截線必經過同一點。

設 AA', BB', CC' 三截線截二平行線 AC, $A'C'$ 於 A,B,C, 及 A',B',C', 而

$A'B' : AB = B'C' : BC$.

求證 AA', BB' 及 CC' 交於同一點.



證 設 AA' 與 BB' 的交點是 O.

聯 OC' 引長交 AC 於 D,

則 $A'B' : AB = B'C' : BD$. (定理七十四)

但 $A'B' : AB = B'C' : BC$, (假設)

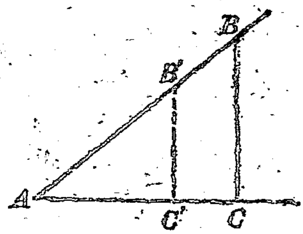
$\therefore \quad B'C' : BD = B'C' : BC$. (等於某量的量互等)

$\therefore \quad BD = BC$.

故點 D 與點 C 重合，即 O, C', C 在一直線上.

故 CC' 亦過點 O.

355. **定理七十六**　自一角的一邊上的一點垂他邊引垂線，則此二邊及垂線所成的三角形中，每二邊的比恆不變。



設 $\angle BAC$ 為定角，B 為 AB 邊上的一點，BC 為自 B 至 AC 邊的垂線。

求證 $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$, $\frac{BC}{AC}$ 之值恆不變。

證　於 AB 上任取一點 B'，自 B' 作 AC 的垂線 $B'C'$，則在 $\triangle AB'C'$ 與 $\triangle ABC$ 中，

$$\angle AC'B' = \angle ACB = \text{rt}\angle,$$

$$\angle A = \angle A.$$

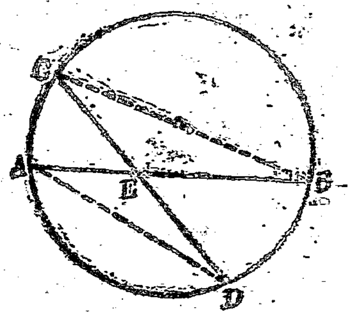
$$\therefore\ \triangle AB'C' \backsim \triangle ABC.\quad \text{（定理六十七系二）}$$

$$\frac{B'C'}{AB'} = \frac{BC}{AB},\quad \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC}{AB},\quad \frac{B'C'}{AC'} = \frac{BC}{AC}.$$

故不論 B 在 AB 上取何位置，$\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$, $\frac{BC}{AC}$ 之值恆不變。

〔註〕 $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$, $\frac{BC}{AC}$, $\frac{AC}{BC}$, $\frac{AB}{AC}$, $\frac{AB}{BC}$ 六比，叫做銳角 A 的三角函數。

356. **定理七十七** 若二弦相交於圓內，則一弦上所分成的二線段的積，等於他一弦上所分成的二線段的積。



設圓內兩弦 AB 和 CD 相交於 E。

求證　$AE\times EB=CE\times ED$。

證　聯 CB 和 AD。

$\because\ \angle A=\angle C,\ \angle B=\angle D,$　(何故?)

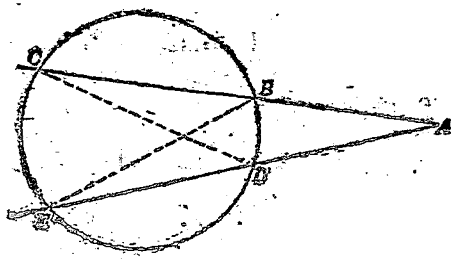
$\therefore\ \triangle CEB\backsim\triangle AED$。　(定理六十七系二)

$\therefore\ AE:CE=ED:EB$。　(相似形的定義)

$\therefore\ AE\times EB=CE\times ED$。　(§321)

357. 系　過圓內一定點的弦，被這點所分二線段的積常相等。

358. **定理七十八** 從圓外一定點作二割線，則一割線與其圓外線段的積，等於他一割線與其圓外線段的積。



設過圓外一點 A 的二割線 AC 及 AE 交圓於 B,C,及 D,E。

求證 $AC\times AB=AE\times AD$。

證 聯 CD 及 EB.

$\because\ \angle C=\angle E,$ （何故?）

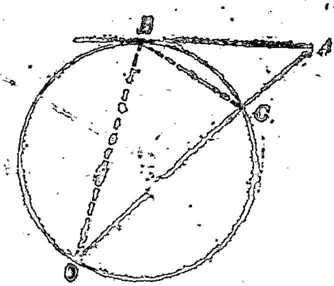
$\angle A=\angle A,$

$\therefore\ \triangle CDA\backsim\triangle EBA.$ （定理六十七系一）

$\therefore\ AC:AE=AD:AB.$ （相似形的定義）

$\therefore\ AC\times AB=AE\times AD.$ （§ 321）

359. 定理七十九 從圓外一點作一切線及一割線,則切線是割線和此割線在圓外線段的比例中項。



設 A 爲圓外的一點,AB 爲切線,B 爲切點,AD 爲割線,與圓

周相交於 C, D。

求證　　$AD : AB = AB : AC$。

證　聯 BD 和 BC，則

$\angle D = \angle CBA$,　　　　(何故?)

$\angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle DBA \backsim \triangle BCA$.　(定理六十七系一)

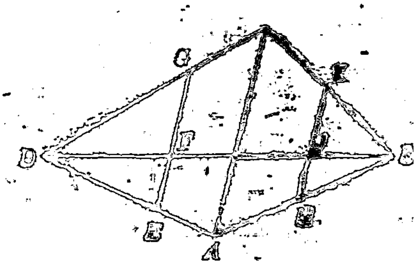
$\therefore AD : AB = AB : AC$。　(相似形的定義)

260。系　若從圓外一點作任意一割線，則割線全長與其圓外線段之積是常數。

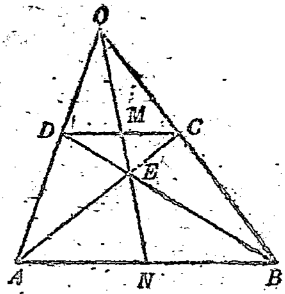
習題七十

1. 在四邊形 $ABCD$ 中，若 $EG \parallel AC \parallel HK$，試證

$$\frac{EF}{FG} = \frac{HI}{IK}。$$

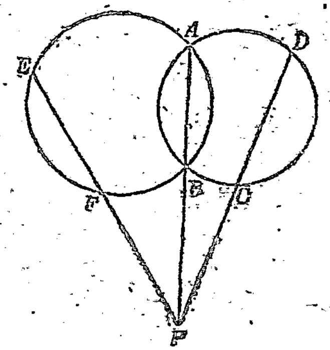


2. 如圖，設引長梯形的兩腰相交於 O，聯結點 O 與二對角線交點 E 的直線，必交兩底邊於其中點。



3. 設 AB, CD 二線段相交於 E，若 $AE \times EB = CE \times ED$，則 A, B, C, D 四點必同在一圓周上。

4. 如圖，設兩圓相交，在其公共弦的引長線上，任取一點 P，各作一圓的割線 PCD，PFE，則 $PC \times PD = PF \times PE$。



5. 自兩圓公共弦的引長線上任一點，作兩圓的切線必相等。

6. 設兩圓外切，自其內公切線上任一點，各作一圓的割線，則割線全長，及其圓外線段的相乘積必相等。

7. 試用定理七十九的方法，作二線段的比例中項。

8. 求作一圓，經過二定點，切於一定直線。

9. 在定理七十八的圖中，若 $CB = a$, $BA = b$, $AE = c$，求 DA。

10. 在同圖中，若 $AB = AD$，則 $BCED$ 是一等腰梯形。

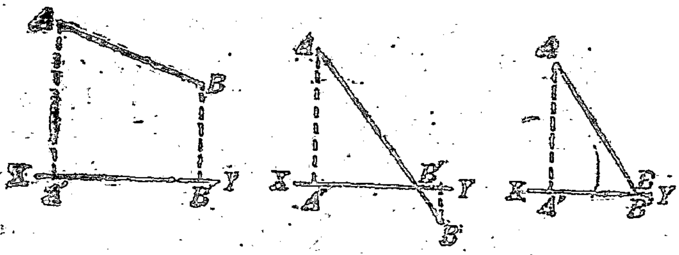
11. 在定理七十九的圖中，若 $AB=8$ 寸，從 A 到圓心的距離是 17 寸，求圓的半徑。

12. 三角形一邊的中線，平分平行於這一邊而止於其他二邊的任何直線。

361. 定義 從一點到一直線所作垂線的足，叫做這點在這直線上的射影。

從一線段的兩端到一直線所作垂線，其兩垂足間所夾的線段，叫做這線段在這直線上的射影。

如圖，A'，B' 是 A，B 在 XY 上的射影，$A'B'$ 是 AB 在 XY 上的射影。



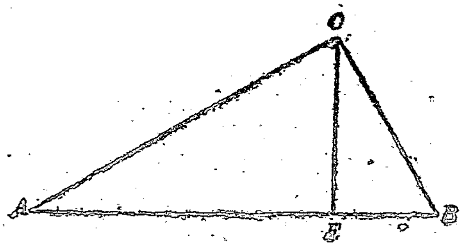
362. 定理八十 若從直角三角形的直角頂向斜邊作垂線，則：

(1) 所成的兩三角形，與原三角形相似，且彼此相似。

(2) 垂線是兩直角邊在斜邊上射影的比例中項。

(3) 直角三角形的直角邊是斜邊及這直角邊在斜邊上射

影的比例中項。



設 CF 是從直角三角形 ABC 的頂點 C 到斜邊 AB 的垂線。

(1)　求證　$\triangle ABC \backsim \triangle CFA \backsim \triangle CFB$。

證　在 $\triangle CFA$ 及 $\triangle ABC$ 中，

$$\angle AFC = \angle ACB = rt\angle，\quad \angle A = \angle A。$$

$$\therefore \quad \triangle CFA \backsim \triangle ABC。\quad \text{（定理六十七系二）}$$

同理得證　$\triangle CFB \backsim \triangle ABC$。

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle CFA \backsim \triangle CFB。$$

(2)　求證　$AF : CF = CF : FB$。

證　$\because \quad \triangle CFA \backsim \triangle BFC$，

$$\therefore \quad AF : CF = CF : FB。$$

(3)　求證　$AB : AC = AC : AF$，

$$AB : BC = BC : BF。$$

證　$\because \quad \triangle ABC \backsim \triangle CFA$，

$$\therefore\ AB : AC = AC : AF。$$

同理得證 $AB : BC = BC : BF$.

363。系一 直角三角形兩直角邊的平方,與其在斜邊上的兩射影成比例。

$$\overline{AC}^2 = AB\times AF,\quad \overline{BC}^2 = AB\times BF。$$

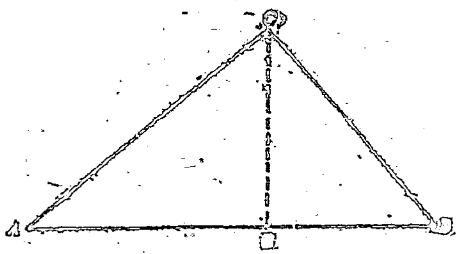
$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}=\frac{AB\times AF}{AB\times BF}=\frac{AF}{BF}。$$

364。系二 直角三角形斜邊的平方及一直角邊的平方,與斜邊及此直角邊在斜邊上的射影成比例.

$$\therefore\ \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{AB\times AB}{AB\times AF}=\frac{AB}{AF}。$$

365。系三 從圓周上一點到直徑的垂線,是直徑上所分成的兩線段的比例中項.

366. 定理八十一 直角三角形兩直角邊的平方和,等於



斜邊的平方。

設在直角$\triangle ABC$內，$\angle C$是直角。

求證 $\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=\overline{AB}^2$。

證 作$CE\perp AB$.

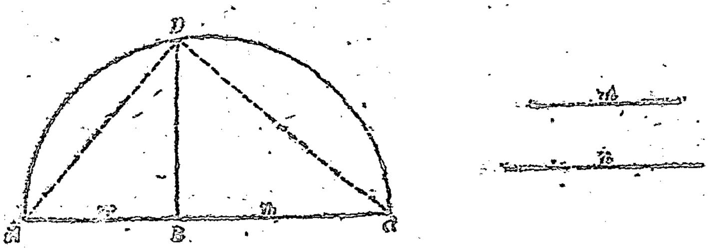
則 $\overline{AC}^2=AB\times AE$, $\overline{CB}^2=AB\times BE$.（定理八十系一）

相加，得 $\overline{AC}^2+\overline{CB}^2=AB\times(AE+BE)=\overline{AB}^2$。

〔註〕 此即畢氏定理。

367. 系 直角三角形一直角邊的平方，等於斜邊及他一直角邊的平方的差。

368. 作圖題二十 求二已知線段的比例中項。



設m和n是二已知線段。

求作 m和n的比例中項。

作圖 作$AB=m$。

引長AB到C，使$BC=n$，以AC爲直徑作半圓。

從B作$BD \perp AC$，交圓周於D。

則BD就是所求的比例中項.

證　因AC為直徑，

$$BD \perp AC,$$

$$\therefore AB : BD = BD : BC. \quad \text{(定理八十系三)}$$

即

$$m : BD = BD : n.$$

習題七十二

1. 若a是已知線段，作一線段使等於$a\sqrt{2}$.

〔示意〕$a\sqrt{2} = \sqrt{2aa}$.

2. 求等邊三角形的高，其一邊等於b $\left(h = \frac{b}{2}\sqrt{3}\right)$.

3. 若等腰直角三角形的斜邊等於8寸，求腰的長.

4. 兩圓的半徑是6寸和21寸，又二圓心的距離是25寸，求外公切線的長。

5. 等邊三角形的高等於10，求其一邊的長。

6. 若AD是$\triangle ABC$的高，則

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2.$$

7. 若四邊形的二對角線互相垂直，則二對邊平方的和，等於他二對邊平方的和。

8. 若三角形一邊的平方，等於其他二邊平方的和，則此三角形是直角三角形。

【示意】 作一直角三角形，使二直角邊各等於已知的二直角邊，而後證明二三角形全同。

9. 若三角形一邊的平方，大於他二邊平方的和，則此三角形是鈍角三角形。

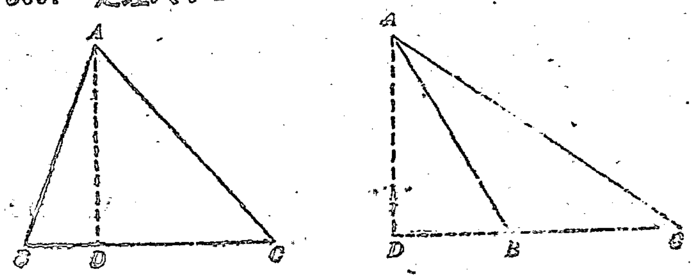
【示意】 把這三角形和直角三角形比較，直角三角形的二直角邊和已知三角形的二邊相等。

10. 若 AB 和 XY 的夾角是 60°，則 AB 在 XY 上的射影 $A'B'$ 等於 AB 之半。

11. 若 AB 和 XY 的夾角是 30°，又 $AB=m$，求證 AB 在 XY 上的射影等於 $\frac{m}{2}\sqrt{3}$。

12. 若 AB 和 XY 的夾角是 45°，又 $AB=m$，求證 AB 在 XY 上的射影等於 $\frac{m}{2}\sqrt{2}$。

369. 定理八十二 三角形鋭角對邊的平方，等於他二邊



平方的和，減去此二邊中的一邊乘他一邊在此邊上射影的二倍.

設△ABC中，$\angle C$為銳角，DC是AC在BC上的射影.

求證　$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2BC\times DC$.

證　(1) 設點D在底內，

則　$DB=BC-DC$。

(2) 設點D在底外，

則　$DB=DC-BC$。

平方之，都得　$\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{DC}^2-2BC\times DC$.

在等式的兩邊加$\overline{AD}^2$，則得

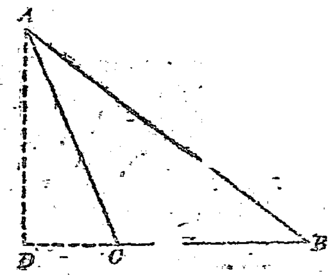
$$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2-2BC\times DC。$$

但　$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=\overline{AB}^2$，　(定理八十一)

$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2$，　(定理八十一)

$\therefore\ \overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2-2BC\times DC$。

170. 定理八十三　鈍角三角形鈍角對邊的平方，等於他二邊平方的和，加此二邊中的一邊乘他一邊在此邊上射影的二倍。



設 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 為鈍角，DC 是 AC 在 BC 延長線上的射影。

求證　　$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2BC\times DC$。

證　　$\because$　　$DB=BC+DC$，

平方之，得　　$\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{DC}^2+2BC\times DC$。

在兩邊各加 $\overline{AD}^2$，則得

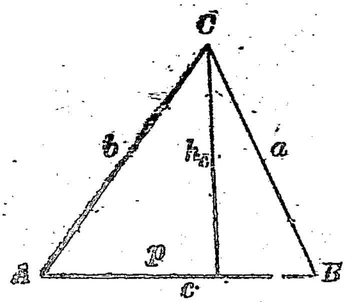
$$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2+\overline{DC}^2+2BC\times DC。$$

但　　$\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=\overline{AB}^2$，　　（定理八十一）

$\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=\overline{AC}^2$。　　（定理八十一）

$\therefore$　$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2+2BC\times DC$。

371.　高的公式　令 h_a，h_b，h_c 表 $\triangle ABC$ 三邊上的高，p 表 b 在 c 上的射影，則



$$a^2=b^2+c^2-2cp,$$

$$\therefore\quad p=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}。$$

$$h_c^2=b^2-p^2=(b+p)(b-p)$$

$$=\left(b+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)$$

$$=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4c^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}。$$

令 $a+b+c=2s$，則

$$b+c-a=2(s-a),$$

$$a-b+c=2(s-b)。$$

$$a+b-c=2(s-c)。$$

$$\therefore\quad h_c^2=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}。$$

$$\therefore \quad h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

同理，
$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

習題七十二

1. 三角形的三邊是 4, 13, 15, 求邊長 4 上的高。

2. 三角形的三邊是 25, 30, 11, 求邊長 11 上的高。

3. $b=15$, $c=25$, b 在 c 上的 p 是 9, 求 a。

4. $a=20$, $b=15$, $c=7$, 求 b 在 c 上的 p。

5. 三角形的三邊是 4, 13, 15, 求 13 在 4 上的射影。

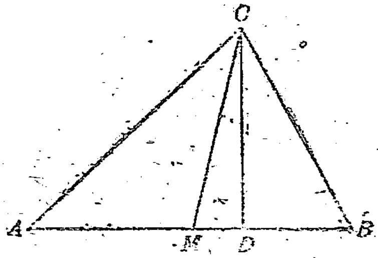
6. P 是等腰三角形 ABC 底 AB 上的一點，則

$$\overline{AC}^2-\overline{PC}^2=AP\cdot BP。$$

7. D 是等腰直角三角形 ABC 斜邊 BC 上的任意一點，

則
$$2\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2。$$

372. 定理八十四 三角形兩邊的平方和，等於第三邊上中線的平方與第三邊一半的平方和的二倍。



設△ABC中，M為AB的中點，CM為中線。

求證　$\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=2(\overline{CM}^2+\overline{AM}^2)$。

證　從C作$CD\perp AB$，

設$\angle AMC>\angle BMC$；

則　$\overline{CB}^2=\overline{CM}^2+\overline{BM}^2-2BM\times MD$.　（定理八十二）

$\overline{CA}^2=\overline{CM}^2+\overline{AM}^2+2AM\times MD$.　（定理八十三）

$\because$　$AM=BM$,　（假設）

$\therefore$　$\overline{CA}^2+\overline{CB}^2=2(\overline{CM}^2+\overline{AM}^2)$。

373．中線的公式　令m_a, m_b, m_c表△ABC三邊上的中線，則由前定理得：

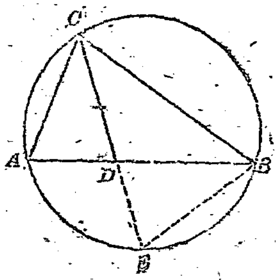
$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}。$$

同理，

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}。$$

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}.$$

374. **定理八十五**　三角形兩邊的相乘積，等於其夾角二等分線的平方，加此二等分線分對邊所得兩線段的相乘積



設在 $\triangle ABC$ 內，$\angle C$ 的二等分線 CD 與 AB 交於 D。

求證　$CA\times CB=\overline{CD}^2+AD\times BD$.

證　作 $\triangle ABC$ 的外接圓，交 CD 的延長線於 E，聯 BE。

$\because\ \angle ACD=\angle BCE$,　　　（假設）

$\angle A=\angle E$,　　　（何故？）

$\therefore\ \triangle ACD\backsim\triangle EBC$。（定理六十七系一）

$\therefore\ CA:CE=CD:CB$.

$\therefore\ CA\times CB=CE\times CD$

$=(CD+DE)\times CD$

$=\overline{CD}^2+DE\times CD$.

$\because\ DE\times CD=AD\times BD$,　　（定理七十七）

$\therefore\ CA\times CB=\overline{CD}^2+AD\times BD$.

375. **角二等分線的公式**　令 t_a、t_b、t_c 表 $\triangle ABC$ 三個角

的二等分線，$AD=m$，$BD=n$，則由前定理得：

$$t_c^2=ab-mn。$$

$$\because\ \frac{m}{b}=\frac{n}{a},$$ （定理六十五）

$$\therefore\ \frac{m}{b}=\frac{n}{a}=\frac{m+n}{a+b}=\frac{c}{a+b}。$$ （何故？）

$$\therefore\ m=\frac{bc}{a+b},\quad n=\frac{ac}{a+b}。$$

$$\therefore\ t_c^2=ab-\frac{abc^2}{(a+b)^2}$$

$$=ab\left[1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right]$$

$$=\frac{ab\{(a+b)^2-c^2\}}{(a+b)^2}$$

$$=\frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}$$

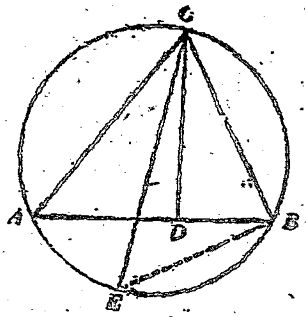
$$=\frac{ab\times 2s\times 2(s-c)}{(a+b)^2}。$$

$$\therefore\ t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}。$$

同理，$$t_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)}。$$

$$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}.$$

376. **定理八十六**　三角形兩邊的相乘積，等於第三邊上的高與外接圓直徑的相乘積。



設 CE 是 $\triangle ABC$ 外接圓的直徑，CD 是 AB 上的高。

求證　$CA\times CB=CD\times CE$。

證　$\because$ $\angle ADC=\angle CBE=rt\angle$，

$\angle A=\angle E$，

$\therefore$　$\triangle ACD\backsim\triangle ECB$。　　　（何故？）

$\therefore$　$CA:CE=CD:CB$。　　（相似形的定義）

$\therefore$　$CA\times CB=CD\times CE$。

377. **系**　三角形外接圓的直徑，等於二邊的積以第三邊的高除之。

$$\left(d=\frac{ab}{h},\ 或\ d=\frac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\right)$$

習題七十三

1. 三角形的三邊是22, 20和18，求邊18的中線的長。

2. 在 $\triangle ABC$ 內 $a=8$, $b=11$, 又 $m_c=8\frac{1}{2}$, 求 c。

3. 三角形的三邊是22，11及21，求邊21對角的二等分線的長。

4. 三角形的三邊是6，3及7，求邊7對角的二等分線的長。

5. $\triangle ABC$ 的外接圓的半徑是5寸，若 $AB=4$，$AC=5$，求邊 BC 上的高。

6. 求外接於 $\triangle ABC$ 的圓的直徑，若 $a=17, b=8, c=15$。

7. 在 $\triangle ABC$ 內，$a=20, b=15$，b 在 c 上的射影等於9，求外接圓的半徑。

8. 平行四邊形四邊平方的和，等於二對角線平方的和。

雜　題

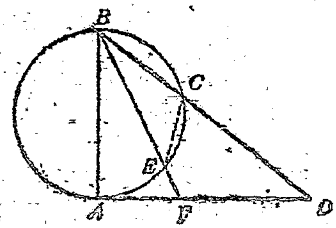
1. 若一弦被他一弦二等分，則一弦的任一線段是他一弦的二線段的比例中項。

2. 若在 $\triangle ABC$ 內，高 BD 和 AE 在點 F 相交，且 $AB=BC$，則 $BC:AF=BD:CD$。

3. 若在二平行的切線間，作第三切線，則圓的半徑是第三切線上切點所分二線段的比例中項。

4. 兩圓相外切，過切點作一公割線，則公割線所成的兩弦和兩圓的半徑成比例。

5. 若C是弧AB的中點，又弦CD和AB相交於一點E，則$CE:CA=CA:CD$。



6. 若AB是直徑，AD是切線，又FB和DB是割線，求證$BE\times BF=BC\times BD$。

7. 相交兩圓的公弦引長後必平分公切線。

8. 若二平行四邊形有一角相等，且夾等角的邊成比例，則此二平行四邊形相似。

9. 三角形三邊平方和的三倍，必等於三中線平方和的四倍。

10. 設兩圓相交於A，B，作BC，BD二弦，各切於一圓，試證AB是AC及AD的比例中項。

11. 已知a，b及$b:c=4:5$，求作一三角形。

12. 作一直線平行於矩形的一邊，截一矩形和原矩形相似。

13. 在已知圓內，作一與已知三角形相似的內接三角形。

14. 在已知圓外，作一與已知三角形相似的外切三角形。

15. 作一三角形與一已知三角形相似，且其高等於已知直線。

16. 在已知三角形內，作一內接正方形。

17. 設以任意長做單位，作直線使等於：

(a) $\sqrt{2}$　(b) $\sqrt{3}$　(c) $1+\sqrt{5}$.

18. 求作一線段與一已知線段的比等於 $1:\sqrt{2}$。

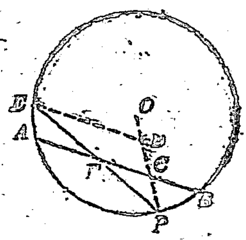
19. 求作一線段與一已知線段的比等於 $\sqrt{3}:1$。

20. 在一已知線段 AB 上，求一點 C，使

$$AC:BC=1:\sqrt{2}.$$

21. 作一三角形與一已知三角形相似，且其周圍等於定長。

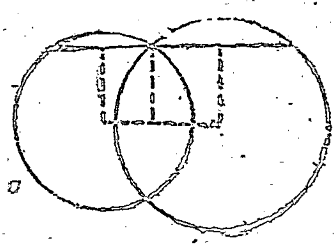
22. 若 a 和 b 是二已知線段，求作一線段等於 $\frac{2a^2}{b}$。



23. 從圓外一點作一割線，使圓外的線段等於割線的一半。

24. 在一已知圓內，作一內接矩形，且使他二邊的比等於 $m:n$。

25. 經過弦 AB 所對弧上的一點 P，求作一弦被弦 AB 二等分。



26. 經過兩相交圓的一交點作一割線，令所成的兩弦的比等於 $m:n$。

27. 在$\triangle ABC$內，$a=4, b=8$，c所對的角是60°，求c。

28. 一圓的半徑是10寸，過距離圓心8寸的一點作一弦，求這弦上二線段的積。又過該點所作最短弦的長若干？

29. 平行四邊形的二邊及一對角線是7，9和8，求他一對角線的長。

30. 菱形對角線是10寸和24寸，求周圍及高。

31. 在$\triangle ABC$內，$AB=BC=25$，$AC=30$，又在AB上取$AD=8$，求CD的長。

32. 三角形的三邊是14，16和6，求邊14所對的角。

33. 二圓的半徑是5和3，二圓心的距離是17，求內公切線的長。

34. 二圓半徑是12寸和9寸，又圓心的距離是28寸，外公切線與聯心線的延線相交於一點，則此點距二圓心各若干寸？

35. 梯形的高是h，二底邊是a和b，延長不平行的二邊使相交，求所成兩三角形的高。

36. 梯形的二底是8寸和12寸，又高是3寸，若離下底2寸作一直線，平行於底而止於不平行的二邊，求這線段的長。

本章提要

定理

I。 比例線段

1. 平行於三角形一邊的直線,必分他二邊成比例.

2. 兩直線被平行諸線所截的相當線段成比例.

3. 設兩平行線爲過同一點的數直線所截,則截取的對應線段成比例.

4. 自一角的一邊上的一點至他邊引垂線,則此二邊及垂線所成的三角形中,每二邊的比恆不變。

5. 三角形一角的二等分線分對邊做兩分,與其他兩邊成比例。

6. 三角形一外角的二等分線外分對邊做兩分,與其他兩邊成比例。

II。 兩三角形相似的條件

1. 兩角相等。

2. 兩雙對應邊成比例,夾角相等。

3. 各雙對應邊的比相等。

III. 相似三角形的性質

1. 相當角相等.

2. 各雙相當邊的比相等.

3. 周界的比等於相當邊的比.

4. 相當高的比等於相當邊的比.

5. 相當中線的比等於相當邊的比.

6. 相當角二等分線的比等於相當邊的比.

7. 內切圓或外接圓半徑的比等於相當邊的比.

IV. 相似多邊形的特性

1. 相當角相等.

2. 各雙相當邊的比相等.

3. 周界的比等於相當邊的比.

4. 相當對角線的比等於相當邊的比.

V, 直角三角形的特性

1. 直角三角形的高將原形分成兩個相似三角形,且都和原形相似.

2. 直角三角形的高是斜邊上所分兩線段的比例中項.

3. 直角邊是它在斜邊上射影和斜邊的比例中項.

4. 兩直角邊平方的比,等於其在斜邊上兩射影的比.

5. 斜邊和直角邊平方的比,等於斜邊及此直角邊在斜邊上射影的比.

VI． 三角形三邊的關係

1． 直角三角形斜邊的平方，等於兩直角邊平方的和．

2． 直角三角形直角邊的平方，等於斜邊及他一直角邊平方的差．

3。 三角形銳角對邊的平方，等於他二邊平方的和減去此二邊中的一邊乘他一邊在此邊上射影的二倍。

4． 鈍角三角形對鈍角邊的平方，等於他二邊平方的和加此二邊中的一邊乘他一邊在此邊上射影的二倍．

5． 三角形兩邊的平方和，等於第三邊上中線的平方與第三邊一半的平方和的二倍。

6． 三角形兩邊的相乘積，等於其夾角二等分線的平方加此二等分線分對邊所得兩線段的相乘積。

7． 三角形兩邊的相乘積，等於第三邊上的高與外接圓直徑的相乘積。

VII。 圓的比例線段

1。 二弦相交於圓內，則一弦上所分成的二線段的積，等於他一弦上所分二線段的積。

2。 從圓外一點作二割線，一割線與其圓外線段的積，等於他一割線與其圓外線段的積．

3。 從圓外一點作一割線及一切線，切線是割線和此割線在圓外線段的比例中項。

比例作圖題

1. 求二線段的第三比例項.
2. 求三線段的第四比例項.
3. 求二線段的比例中項.
4. 分一已知線段或二線段，其比等於定比.

計算公式

1. 高的公式

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

2. 中線的公式

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}。$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}。$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}。$$

3. 角二等分線的公式

$$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}.$$

$$t_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)}.$$

$$t_c=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

4. 外接圓直徑的公式

$$d=\frac{ab}{h}=\frac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

第十四章　多邊形的面積

378、　定義　每邊等於單位長的正方形叫做單位面積。一個多邊形所含單位面積的個數，就是多邊形的面積.

379.　定義　凡面積相等的圖形，叫做等積形。

例如 $\triangle ABC$ 的面積是 16 平方寸，又 $\square MNOP$ 的面積也是 16 平方寸，就是 $\triangle ABC$ 與 $\square MNOP$ 等積. 寫做

$$\triangle ABC = \square MNOP。$$

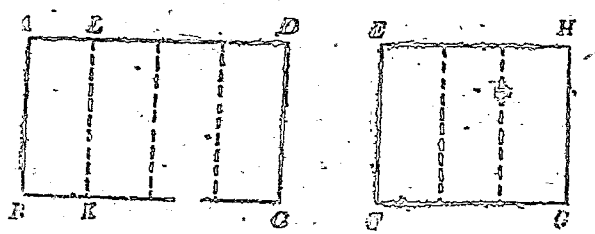
等號'＝'是表示面積相等，不論其形狀若何。

380.　定理八十七　等高二矩形面積的比，等於其底的比。

設 $\square ABCD$ 及 $\square EFGH$ 中，$AB = EF$。

求證　　$\square ABCD : \square EFGH = BC : FG$。

證　以 BK 為二底度量的單位。



若 $BC=m(BK)$, $FG=n(BK)$,

則 $$\frac{BC}{FG}=\frac{m}{n}。$$

從 BC 及 FG 上的各分點作垂線，因 $AB=EF$，則二矩形分成 m 及 n 個相等的矩形。

即 $\square ABCD=m(\square ABKL)$,

$\square EFGH=n(\square ABKL)$,

$$\therefore \frac{\square ABCD}{\square EFGH}=\frac{m}{n}。$$

$$\therefore \frac{\square ABCD}{\square EFGH}=\frac{BC}{FG}。\text{(等於某量的量互等)}$$

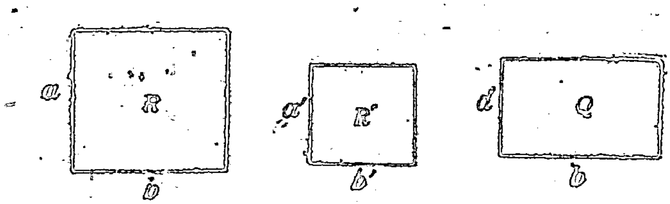
【註】 用記號▭表矩形，□表正方形。

381. 系 等底二矩形面積的比，等於其高的比。

382. 定理八十八 二矩形面積的比，等於底和高相乘積的比。

設二矩形 R 和 R' 的底是 b 和 b'，又高是 a 和 a'。

求證 $$\frac{R}{R'}=\frac{ab}{a'b'}。$$



證 作矩形 Q，使其底等於 b，高等於 a。

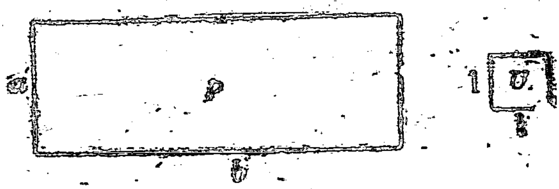
$$\because \frac{R}{Q}=\frac{a}{a'},\qquad \text{（定理八十七系）}$$

$$\frac{Q}{R'}=\frac{b}{b'},\qquad \text{（定理八十七）}$$

$$\therefore \frac{R}{Q}\times\frac{Q}{R'}=\frac{a}{a'}\times\frac{b}{b'}。\qquad \text{（等量的同倍量）}$$

即 $$\frac{R}{R'}=\frac{ab}{a'b'}。$$

383. 定理八十九 矩形面積等於底和高的相乘積。



設矩形 P 的底是 b，高是 a。

求證 $P=ab$。

證 作單位面積 U。

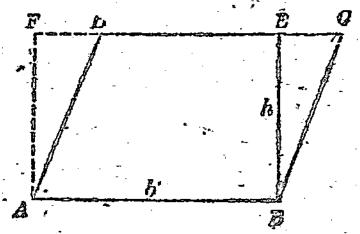
則 $$\frac{P}{U}=\frac{a\times b}{1\times 1}=ab。\qquad \text{（定理八十八）}$$

但 $\frac{P}{U}$ 就是 P 的面積。 （§378）

$$\therefore P=ab。$$

384. 系　正方形的面積等於一邊的平方.

385. 定理九十　平行四邊形的面積等於其底和高的相乘積.



設 $\square ABCD$ 的底 $AB=b$, 高 $BE=h$。

求證　$\square ABCD=bh$。

證　作 $AF\perp AB$, 交 CD 的延長線於 F。

則　　$AF\parallel BE$。　　(同垂直於 AB)

故 $ABEF$ 是矩形, 底是 b, 高是 h。　　(何故?)

$\because$　$AF=BE$,　$AD=BC$,　　(何故?)

$\angle AFD=\angle BEC=rt.\angle$,

$\therefore$　$\triangle AFD\cong\triangle BEC$。　　(何故?)

$\therefore$　$\triangle AFD+ABED=\triangle BEC+ABED$。　(等量加等量)

即　　$\square ABCD=\square ABEF$。

但　　$\square ABEF=bh$。　　(定理九十八)

$\therefore$　$\square ABCD=bh$。

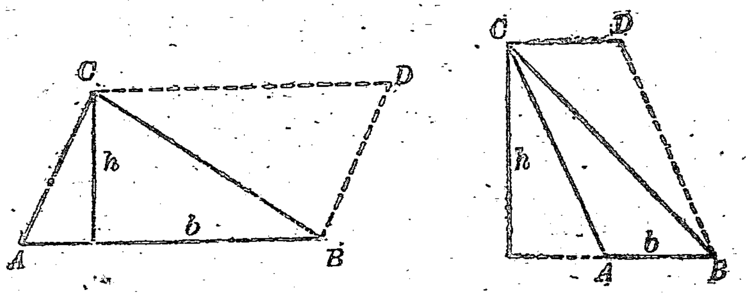
386. 系一　等底等高的平行四邊形必等積.

387. 系二　二平行四邊形的比,等於底和高相乘積的比。

388. 系三 等底二平行四邊形的比，等於其高的比.

389. 系四 等高二平行四邊形的比，等於其底的比.

390. 定理九十一 三角形的面積，等於其底和高相乘積的一半。



設 $\triangle ABC$ 的底是 b，高是 h。

求證 $$\triangle ABC=\frac{1}{2}bh。$$

證 作 $BD \parallel AC$, $CD \parallel AB$,

設 BD, CD 相交於 D,

則 $ABDC$ 是平行四邊形。

$\because$ $\square ABDC=bh$。 （定理九十）

但 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\square ABDC$。 （何故？）

$\therefore$ $\triangle ABC=\frac{1}{2}bh$。

391. 系一 等底等高的三角形必等積.

392. 系二 兩三角形的比,等於其底和高相乘積的比.

393. 系三 等底兩三角形的比,等於其高的比.

394. 系四 等高兩三角形的比,等於其底的比.

習題七十四

1. 三角形的二邊是6和18,又其所夾的角是30°,求此形的面積.

2. 等邊三角形的高是$4\sqrt{3}$,求面積.

3. 設一線段的位置及大小是固定的,求在此線段上所作諸等積三角形頂點的軌跡.

4. 在已知三角形的底邊上,作一直角三角形,與已知三角形等積.

5. 在已知三角形的底邊上,作一等腰三角形,與已知三角形等積.

6. 在已知平行四邊形的底邊上,作一矩形與已知平行四邊形等積.

7. 自三角形的一頂點作二直線,將此形分做三等分.

8. 平行於底邊作一直線,將一平行四邊形分做二等分.

9. 垂直於底邊作一直線,將一平行四邊形分做二等分.

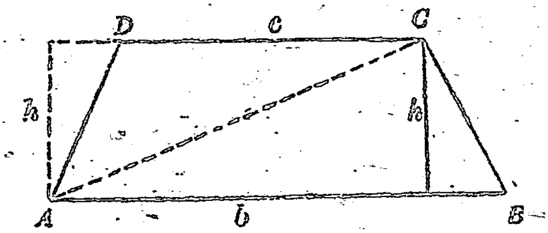
〔示意〕 過對角線的中點作直線.

10. 作一三角形等於一已知三角形的三倍。

11. 平行四邊形的兩對角線分全形成四個等積三角形。

12. 聯四邊形一角線的中點與其他兩頂點的線段，必將原形分成兩個等積形。

395. 定理九十二 梯形面積等於高與二底和相乘積的一半。



設梯形 $ABCD$ 的二底是 b 和 c，又高是 h。

求證 梯形 $ABCD=\frac{1}{2}h(b+c)$。

證 聯 AC，

則 梯形 $ABCD=\triangle ADC+\triangle ABC$，

$\because$ $\triangle ADC=\frac{1}{2}hc$， (定理九十一)

$\triangle ABC=\frac{1}{2}hb$， (定理九十一)

$\therefore$ 梯形 $ABCD=\frac{1}{2}hc+\frac{1}{2}hb=\frac{1}{2}h(b+c)$。

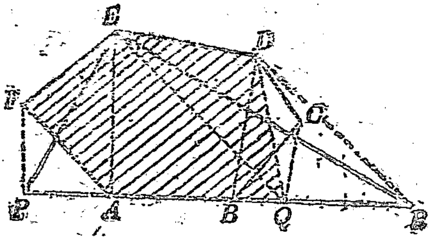
396. 作圖題二十一 求作一三角形與一已知多邊形等

積.

設多邊形$ABCDEF$.

求作一三角形與$ABCDEF$等積.

作圖 聯BD,從C作$CQ \parallel BD$,交AB的延長線於Q,聯DQ;



再依同法,聯EQ,從D作$DR \parallel EQ$,交AB的延長線於R,聯ER。

繼續仿此作圖,把所設多邊形的邊數逐次減少,最後得$\triangle EPR$,卽爲所求的三角形.

證 $\because$ $CQ \parallel BD$, (作圖)

$\therefore$ $\triangle DBQ = \triangle DBC$。 (定理九十一系一)

$\therefore$ $ABDEF + \triangle DBQ = ABDEF + \triangle DBC$,

卽 $AQDEF = ABCDEF$。

同理, $AREF = AQDEF$,

$\triangle EPR = AREF$,

$\therefore$ $\triangle EPR = ABCDEF$。

習題七十五

1. 梯形面積等於中線和高的相乘積。

2. 梯形二底中點的聯線分原形成二個相等的梯形.

3. 設梯形的兩底是 12 和 8, 又高是 5, 求面積.

4. 設梯形的面積是 120, 中線是 10, 求高.

5. 設梯形的面積是 60, 高是 8, 上底是 5, 求下底.

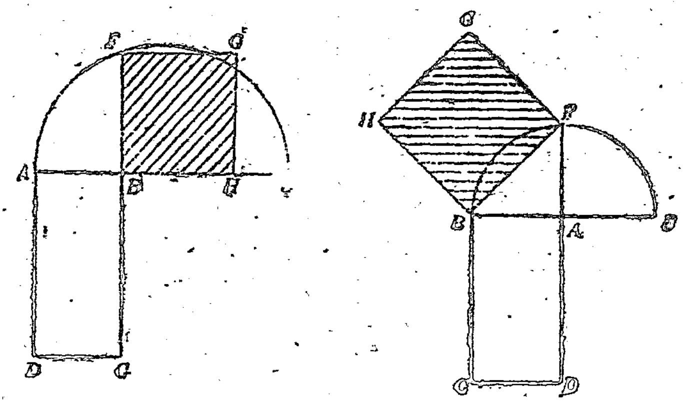
6. 將一個已知四邊形變做等積的三角形.

7. 將一個已知平行四邊形變做等積的直角三角形.

8. 將一個已知等腰三角形變做等積的矩形。

9. 將一個已知的四邊形分做三等分。

297. 作圖題二十二 求作正方形與一已知矩形等積



設矩形 $ABCD$。

求作一正方形與 □$ABCD$ 等積。

作圖 作 AB, AD 的比例中項 BF. (作圖題二十)

以 BF 爲一邊作正方形 $BFGH$，卽爲所求的正方形。

證　　$\because\ \overline{BF}^2=AB\times AD$，　　　　(作圖)

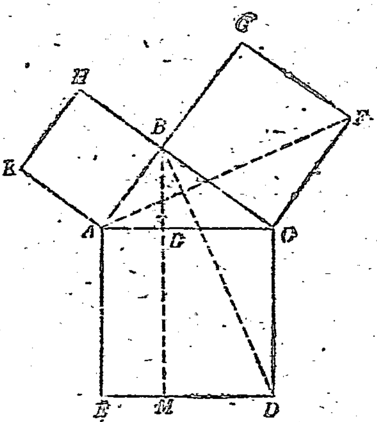
$\therefore\ \square BFGH=\square ABCD$。

398. 系　求作正方形與已知三角形等積。

399. 定理九十三　直角三角形斜邊上的正方形，等於兩直角邊上的正方形的和。

設 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=rt\angle$；

求證 $\because\ \square AD=\square AH+\square CG$。



證　作 $B\perp AC$，延長交 ED 於 M，

聯 BD,AF。

$\because\ CB=CF$，

$CA=CD$，

$\angle ACF=rt\angle+\angle BCA=\angle BCD$，

$\therefore\ \triangle BCD\cong\triangle ACF$。　　　　(何故？)

但　　$\square CG=2\triangle ACF$。　　(定理九十一)

同組，　　$\square CM=2\triangle BCD$。

$\therefore\ \square CG=\square CM$。

同理， $\square AH = \square AM$.

$\therefore \quad \square AM + \square CM = \square AH + \square CG$。

即 $\square AD = \square AH + \square CG$。

〔注意〕 此爲畢氏定理的又一證法.

400. 系 三角形直角邊上的正方形，等於斜邊上正方形與他一直角邊上正方形的差。

401. 作圖題二十三 求作正方形，等於已知二正方形的和。

402. 作圖題二十四 求作正方形，等於已知二正方形的差。

403. 幾何圖形的變化，常應用代數方程式表示，今將重要的各題用代數方程式表示在下面，a, b, c, d 等表已知線段，x, y, z 等表所求的線段。

(1) 作 $x = a + b$。

(2) 作 $x = a - b$。 $(a > b)$

(3) 若 m 是已知的有理數，

作 $x = m \cdot a$。

作 $x = \frac{a}{m}$。

(5) 作 $x=\frac{ab}{c}$。

〔示意〕 x是c, a,和b的第四比例項.

(6) 作 $x=\frac{a^2}{b}$. 〔應用5〕

(7) 作 $x=\sqrt{ab}$。

〔示意〕 x是a和b的比例中項。

(8) 作 $x=\sqrt{a^2+b^2}$。

〔示意〕 x是直角三角形的斜邊,直角邊是a和b。

(9) 作 $x=\sqrt{a^2-b^2}$。

〔示意〕 x是直角三角形的直角邊,a是斜邊,b是他一直角邊.

(10) 作 $x=a\sqrt{2}$。

〔示意〕 x是正方形的對角線,邊長是a。

(11) 若m是一已知數,

作 $x=a\sqrt{m}$.

〔示意〕 $x=\sqrt{a(am)}$。

習題七十六

1. 求作與已知四邊形等積的正方形。
2. 求作與已知梯形等積的正方形。

3. 求作二倍於三角形的正方形。

4. 求作等於梯形之半的正方形。

5. 求作等於兩三角形之和的正方形。

6. 求作等於矩形與三角形之差的正方形。

7. 作一正方形三倍於一已知正方形。

8. 已知三角形的底邊和一底角，求作與已知梯形等積的三角形。

9. 求作等於已知方形的矩形，它的底邊等於已知方形周界的一半。

10. 作 $x=a\sqrt{5}$；　$x=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$；

$$x=\sqrt{a^2-ad};\quad x=\frac{a^2-b^2}{c}.$$

11. 已知一邊，求作三角形，與一已知三角形等積。

12. 已知底邊與頂角，求作三角形，與一已知三角形等積。

13. 已知二邊 m, n，求作三角形，與一已知三角形等積。

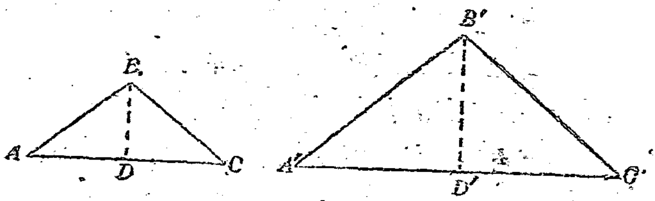
14. 已知斜邊，求作直角三角形，與一已知三角形等積。

15. 已知底邊，求作平行四邊形，與一已知平行四邊形等積。

16. 已知兩邊，求作平行四邊形，與一已知平行四邊形等積。

17. 已知一腰，求作一等腰三角形，與一已知三角形等積。

404. 定理九十四 兩三角形有一角相等，則此兩三角形面積的比，等於夾此角兩邊相乘積的比.



設 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$.

求證 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AC\times AB}{A'C'\times A'B'}.$$

證 作高 BD 與 $B'D'$，

則 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\frac{1}{2}(AC\times BD)}{\frac{1}{2}(A'C'\times B'D')}\text{，(定理九十一)}$$

$$=\frac{AC\times BD}{A'C'\times B'D'}=\frac{AC}{A'C'}\times\frac{BD}{B'D'}.$$

$\because$ $\angle A=\angle A'$， (假設)

$\angle ADB=\angle A'D'B'=rt\angle$， (作圖)

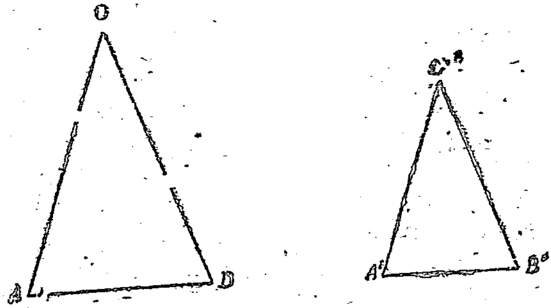
$\therefore$ $\triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$，(定理六十七系二)

$\therefore$ $$\frac{BD}{B'D'}=\frac{AB}{A'B'}，$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AC\times AB}{A'C'\times A'B'}.$$

405. 定理九十五 二相似三角形面積的比，等於相當邊

平方的比。



設$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

求證 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}=\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}$。

證 $\because \angle A=\angle A'$, (假設)

$\therefore \dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB\times AC}{A'B'\times A'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}\times\dfrac{AC}{A'C'}$。 (定理九十四)

但 $\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}$, (假設)

$\therefore \dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$。

$\therefore \dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}=\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}$。

406. 系　二相似三角形面積的比，等於相當高平方的比。

習題七十七

1. 二相似三角形面積的比，等於相當 (a) 中線平方的比；(b) 角二等分線平方的比。

2. 在等邊三角形的底和高上作正方形，求此二正方形面積的比。

3. 二相似三角形面積的比，等於周界平方的比。

4. 三角形的三邊是 4，7 及 8，求面積四倍於這個三角形的相似三角形的各邊。

5. 若二相似三角形的一對相當邊是 2 和 3，求面積的比。

6. 二相似三角形面積的比為 9 : 25，若前者的周圍是 36，求後者的周圍。

7. 一等邊三角形的面積是 10 平方寸，求二倍其邊長的等邊三角形的面積。

8. 延長梯形不平行的二邊使交於一點，若梯形的底是 20 和 12，求圖形內兩三角形的面積的比。

9. 梯形的二底是 12 和 8，延長不平行的二邊使交於一點，若梯形的面積是 40，求較小三角形的面積。

10. 二相似三角形的面積是 81 和 225，第一三角形的高是

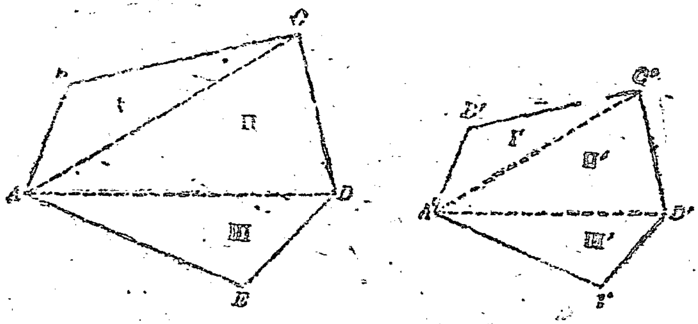
6. 求第二三角形的相當高.

11. 在已知正方形內，用一角做角，作一正方形，等於原形的三分之一.

12. 求作三角形，等於已知三角形面積的四倍，且與原形相似。

13. 求作一等邊三角形，等於已知正方形.

407. 定理九十六　二相似多邊形面積的比，等於相當邊平方的比.



設 $ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$.

求證　$\dfrac{ABCDE}{A'B'C'D'E'}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}=\cdots\cdots$。

證　從頂點 A 和 A'，作各對角線，則

$\triangle I \backsim \triangle I'$，$\triangle II \backsim \triangle II'$，$\triangle III \backsim \triangle III'$，(定理七十一)

但 $$\frac{\triangle I}{\triangle I'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}。$$ (定理九十五)

又 $$\frac{\triangle II}{\triangle II'}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}。$$

同理, $$\frac{\triangle III}{\triangle III'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}。$$

$$\therefore\ \frac{\triangle I}{\triangle I'}=\frac{\triangle II}{\triangle II'}=\frac{\triangle III}{\triangle III'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}。$$

$$\therefore\ \frac{\triangle I+\triangle II+\triangle III}{\triangle I'+\triangle II'+\triangle III'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}。$$ (§327)

即 $$\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}。$$

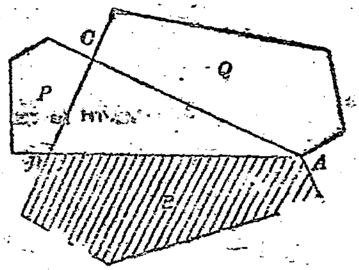
$$\therefore\ \frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}=\cdots\cdots。$$

408. 系一　二相似多邊形的比,等於相當對角線平方的比.

409. 系二　二相似多邊形的比,等於其周界平方的比。

410. 定理九十七.　在直角三角形的三邊上作相似多邊

形，則在二直角邊上多邊形的和等於斜邊上的多邊形.



設 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 直$\angle$，R, P, Q 爲在 AB, BC, CA 上的相似多邊形.

求證 $P+Q=R$。

證 $\because \dfrac{P}{R}=\dfrac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}, \dfrac{Q}{R}=\dfrac{\overline{CA}^2}{\overline{AB}^2}$. （定理九十六）

相加，得 $$\frac{P+Q}{R}=\frac{\overline{BC}^2+\overline{CA}^2}{\overline{AB}^2}。$$

$\because \overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$, （畢氏定理）

$$\therefore \frac{P+Q}{R}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AB}^2}=1。$$

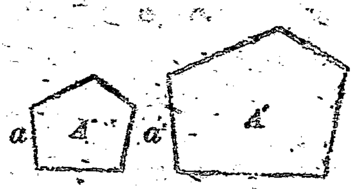
$\therefore P+Q=R$.

411. 系 在直角三角形的三邊上各作相似多邊形，則一直角邊上的多邊形，等於斜邊上的多邊形與他一直角邊上的多邊形的差。

412. 作圖題二十五 求作一多邊形與二已知相似多邊形相似，而面積等於二已知多邊形的和。

設 A, A' 爲二相似多邊形。

求作一多邊形與 A 或 A' 相似，面積等於 $A+A'$.



作圖　以任意相當邊 a, a' 為兩直角邊，作一直角三角形。

以所作的直角三角形中斜邊為邊，依作圖題十九作一多邊形與 A 或 A' 相似，即得所求的多邊形。

證　依上節定理即可證明。

習題七十八

1. 一多邊形的面積二倍於相似多邊形的面積，求相當邊的比。

2. 二相似多邊形對應邊的比為 5 : 6，又面積的和是 212 平方尺，求各多邊形的面積。

3. 二相似平行四邊形的比，等於二對角線之乘積的比。

4. 二相似多邊形的相當邊是 12 尺和 5 尺，求面積等於二已知相似多邊形面積的和的相似多邊形的相當邊。

5. 作一等腰直角三角形，它的面積等於二已知等腰直角三角形的和。

6. 作一等邊三角形，它的面積等於二已知等邊三角形的差。

7. 作一等邊三角形，它的面積等於三個已知等邊三角形

的和。

8. 作一三角形，與二已知相似三角形相似，且面積等於它們的和。

9. 作一多邊形，與二已知相似多邊形相似，且面積等於它們的差。

10. 作一直線平行於三角形的一邊，且二等分它的面積。

11. 作二直線平行於三角形的一邊，且三等分它的面積。

12. 作一多邊形與一已知多邊形相似，且面積等於它的三分之二。

13. 作一三角形與一已知三角形相似，且它的面積三倍於已知三角形。

雜　題

1. 若 E 是 $\square ABCD$ 的對角線 AC 上任一點，求證 $\triangle AEB=\triangle ADE$。

2. 若過平行四邊形的對角線上的任一點作二直線平行於二邊，成四個平行四邊形，其中不含對角線的二個平行四邊形等積。

3. 若從平行四邊形內任一點與四頂點相結，則相對的任一對三角形面積的和，等於平行四邊形的一半。

4. 順次連四邊形四邊的中點成一平行四邊形，它的面積

等於原形的一半。

5. 若在聯三角形二邊中點的線段上作一平行四邊形，有二頂點在三角形的底邊上；則這平行四邊形等於三角形的一半。

6. 若從三角形的重心至三頂點作三直線，則這三直線與三邊成三個相等的三角形.

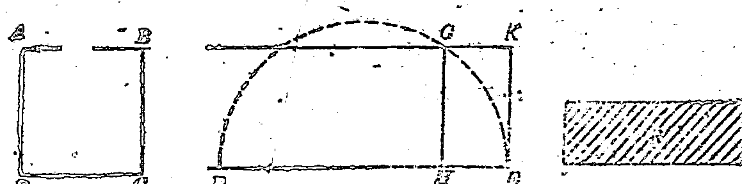
7. 若在 $\triangle ABC$ 內，D 及 F 是 AB 和 AC 的中點，則 $\triangle ADC = \triangle ABF$。

8. 一邊等於 a 的等邊三角形的面積等於 $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

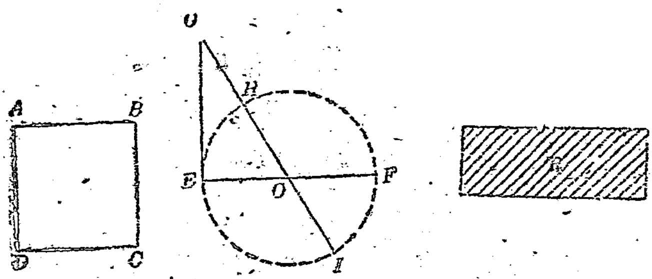
9. 菱形的面積等於二對角線相乘積的一半。

10. 作一矩形，使等於已知正方形，且底與高的和等於一已知線段。

〔示意〕 若 FE 是已知線段，又 $ABCD$ 是已知正方形，使 $EK = AB$。



11. 作一矩形，使等於已知正方形，且底與高的差等於已知線段。



12. 變矩形成另一矩形，使一邊等於已知線段.

13. 變正方形成等腰三角形；已知其底邊.

14. 變矩形成平行四邊形，已知其一對角線.

15. 平行於三角形的中線，作二直線三等分此三角形.

16. 過平行四邊形的一頂點，作二直線三等分此平行四邊形.

17. 過梯形的一頂點，作一直線二等分此梯形.

18. 過五邊形的一頂點，作二直線三等分此五邊形.

19. 在三角形內求一點，使此點與三頂點的聯線，分原形成三等分.

20. 在三角形內求一點，以此點與三頂點的聯線，分原形成三個三角形，其比爲 3 : 4 : 5.

21. 求四邊形 $ABCD$ 的面積，若 $AB=10$, $BC=24$, $CD=30$, $AD=28$, 對角線 $AC=26$.

22. 等邊 $\triangle ABC$ 的一邊爲 8, 求三倍於 $\triangle ABC$ 的等邊三

角形的邊.

23. 矩形的周界是 20 寸,一邊是 6 寸,求面積.

24. 一農夫要計算一五邊形 $ABCDE$ 田地的面積,他量得 $AB=4$ 丈,$BC=13$ 丈,$CD=14$ 丈,$DE=5$ 丈,$EA=12$ 丈,$AC=15$ 丈,及 $AD=13$ 丈,這田有多少方丈?

25. 一弧所對的弦長是 42 寸,這弧一半所對的弦長是 29 寸,求圓的直徑.

26. 三角形三邊的比爲 8:15:17,若面積等於 960 方寸,求各邊的長.

27. 三角形的三邊是 8,15,17,求內切圓的半徑.

【示意】三角形的面積,等於以內心做頂點、三邊做底邊的三個三角形面積的和.

28. 求圓內接等邊十二邊形的面積,其外接圓的半徑等於 4 寸.

29. 求等邊三角形的面積,其高等於 h.

30. 若菱形二對角線的和是 24 尺,其比爲 3:5,求面積.

本章提要

1. 等積形

1. 等底等高的矩形或平行四邊形等積.

2. 等底等高的三角形等積.

3. 矩形和平行四邊形若等底等高，則面積相等。

4. 三角形面積等於等底等高矩形或平行四邊形面積的一半。

5. 直角三角形斜邊上正方形等於兩直角邊上正方形的和。

6. 在直角三角形的三邊上作相似多邊形，則斜邊上的多邊形等於兩直角邊上多邊形的和。

II. 面積的比

1. 等底矩形或平行四邊形面積的比等於高的比。

2. 等高矩形或平行四邊形面積的比等於底的比。

3 等底三角形面積的比等於高的比。

4. 等高三角形面積的比等於底的比。

5. 矩形或平行四邊形面積的比等於底高相乘積的比。

6. 三角形面積的比等於底高相乘積的比。

7. 三角形或平行四邊形一角相等，這兩形面積的比等於夾這角的兩邊相乘積的比。

8 兩相似形面積的比等於任何對應線上正方形的比。

9. 兩相似形面積的比等於周界平方的比。

III. 特別面積的計算公式

1. 矩形或平行四邊形的面積等於底高相乘的積。

2. 三角形的面積等於底高相乘積的一半。

3. 菱形的面積等於兩對角線相乘積的一半.

4. 梯形的面積等於上下底的半和與高的相乘積.

IV. 面積作圖題

1. 作一三角形與已知多邊形等積.

2. 作一正方形與已知矩形等積.

3. 作一正方形與兩已知正方形的和等積.

4. 作一正方形與兩已知正方形的差等積.

5. 作一多邊形與二已知相似多邊形相似，面積等於二已知多邊形的和

第十五章　正多邊形及圓

413．定義　等邊且等角的多邊形，叫做正多邊形．

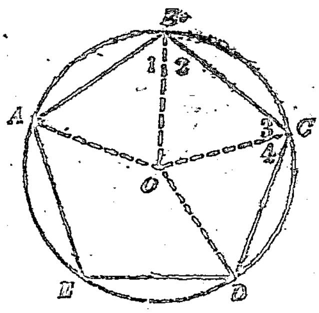
414．定義　正多邊形的內切圓和外接圓的公共圓心，就是正多邊形的中心．

415．定義　正多邊形的邊心距，是它的內切圓的半徑．

416．定義　正多邊形的頂心距，是它的外接圓的半徑．

417．定義　正多邊形的中心角，是相鄰二角頂與中心的聯線所成的夾角．

418．定理九十八　任何正多邊形可作一外接圓及一內切圓．



設 $ABCD\cdots$ 是 n 邊正多邊形．

求證　此多邊形可作一外接圓及一內切圓．

證　過 A, B, C 三點，先作一圓，命 O 表圓心．

聯 OA, OB, OC, OD．

$\because \angle B = \angle C$，（正多邊形的定義）

$\angle 2=\angle 3$; (何故?)

$\therefore \angle 1=\angle 4$. (何故?)

$OB=OC$, (同圓半徑相等)

$BA=CD$, (正多邊形的定義)

$\therefore \triangle OBA \cong \triangle OCD$. (S.A.S.)

$\therefore OA=OD$.

故圓 O 過點 D。 (距圓心距離等於半徑的點在圓周上)

同理,可證圓 O 也過其他各頂點,故能作一圓外接於此多邊形。

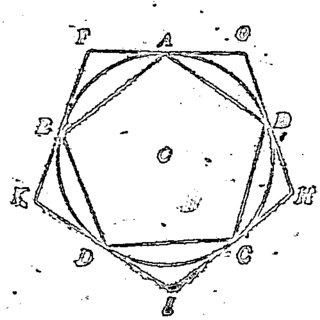
又諸邊都與圓心 O 等距離, (何故?)

故可作一圓內切於此多邊形。

419. 系一 正多邊形的外接圓同內切圓是同心圓.

420. 系二 n 邊正多邊形的中心角等於 $\frac{4}{n}$ 直角。

421. 定理九十九 若將一圓周分成任意若干相等的部分,則



(1) 依次聯結各分點所成的弦,成一內接正多邊形。

(2) 從各分點所作的切線成一外切正多邊形。

設將 O 圓的圓周分成若干相等的弧 AB, BC, CD, ……,聯結

$AB, BC, CD, \cdots$；又過分點作切線 $FG, GH, HI, \cdots$；相交於 $G, H, I, \cdots\cdots$。

(1) 求證 $ABCDE$ 是一正多邊形。

證 $\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\cdots\cdots$，（假設）

$\therefore AB=BC=CD=\cdots\cdots$。（何故？）

$\angle A=\angle B=\angle C=\cdots\cdots$。（何故？）

$\therefore ABCDE$ 是一正多邊形。（§ 413）

(2) 求證 $FGHIK$ 是一正多邊形。

證 $\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\cdots\cdots$，（假設）

$\therefore \angle GAB=\angle GBA=\angle CBH=\angle HCB=\cdots\cdots$。（何故？）

$AB=BC=CD=\cdots\cdots$，

$\therefore \triangle ABG\cong\triangle CBH\cong\triangle DCI\cdots\cdots$。（何故？）

$\therefore \angle G=\angle H=\angle I=\cdots\cdots$。（何故？）

又 $AG=GB=BH=HC=\cdots\cdots$。（何故？）

$\therefore GH=HI=IK=\cdots\cdots$。

$\therefore FGHIK$ 是一正多邊形。（§ 413）

422. 系一 圓內接正多邊形的周界，必小於二倍邊數的內接正多邊形的周界。

423. 系二 圓外切正多邊形的周界，必大於二倍邊數的

外切正多邊形的周界。

習題七十九

1. 圓內接等邊多邊形，必是正多邊形。

2. 圓外切等角多邊形，必是正多邊形。

3. 若多邊形的內切圓和外接圓是同心圓，則多邊形爲正多邊形。

4. 任一正多邊形的中心角，是這多邊形頂角的補角。

5. 求一邊爲 6 寸的正六邊形的邊心距。

6. 正三角形的中心角幾度？正八邊形的？正六邊形的？

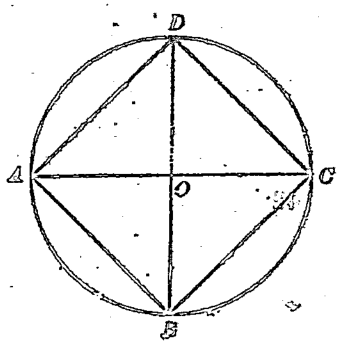
7. 設正多邊形的任意兩對角線相交於形內，則每一對角線上分成兩線段的相乘積必相等。

424. 作圖題二十六　求作圓內接正方形。

設圓 O。

求作 O 圓內接正方形。

作圖　作互相垂直的二直徑 AC, DB, 聯接 AB, BC, CD, DA; 則 $ABCD$ 即爲所求的正方形。



證　∵　$AC \perp DB$,　(作圖)

∴ $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DA}$. （垂直兩直徑分圓為四等分）

故 $ABCD$ 為內接正方形. （定理九十九）

425. 系一 二等分內接正方形的各中心角，則 AB, BC, 等弧都被分做二等分，如是可作成圓內接正八邊形.

如此類推，可作成圓內接 16, 32, ⋯, 2^n 邊的正多邊形.

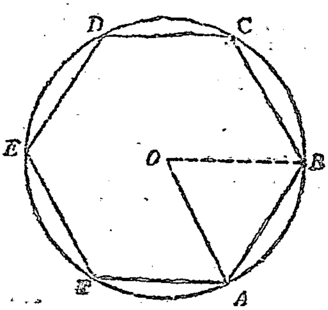
426. 系二 過 A, B, C, D 作切線，可作成一圓外切正方形.

427. 系三 若一圓的半徑是 R，則內接正方形的一邊等於 $\sqrt{2}R$.

428. 作圖題二十七 求作圓內接正六邊形.

設圓 O.

求作 O 圓內接正六邊形.



解析 假定 $ABCDEF$ 為已作得的圓內接正六邊形. 引半徑 OA, OB, 則

$$\angle AOB=\frac{4}{6}\text{rt}\angle=\frac{2}{3}\text{rt}\angle.$$

又 $$\angle OAB=\angle OBA=\frac{1}{2}\left(2\text{rt}\angle-\frac{2}{3}\text{rt}\angle\right)=\frac{2}{3}\text{rt}\angle.$$

故 $\triangle AOB$ 為正三角形，邊長等於圓的半徑.

由是得作圖法如下:

作圖 以 O 圓周上任意一點 A 爲圓心,用等於 O 圓的半徑爲半徑作圓,與 O 圓周相交於 B, F.

同樣,可作得 C, D, E, 聯 AB, BC, CD, DE, EF, FA, 得 $ABCDEF$ 卽爲所求的正六邊形.

證 $\because$ $AB=OB=OA$; (作圖)

$\therefore$ $\angle AOB=\frac{2}{3}rt\angle$, (何故?)

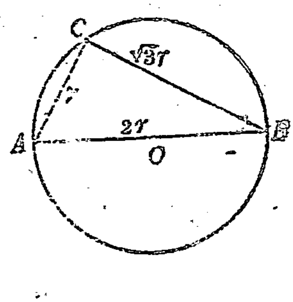
同理, $\angle BOC=\angle COD=\cdots\cdots=\frac{2}{3}rt\angle$.

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\cdots\cdots=\overset{\frown}{AF}$. (等圓心角對等弧)

故 $ABCDEF$ 爲正六邊形. (何故?)

429. 系一 聯內接正六邊形相間的頂點,就成一內接正三角形。

430. 系二 可在圓內和圓外,作內接和外切正多邊形,其邊數爲 3, 6, 12, 24, 等等。



431. 系三 若圓的半徑是 r, 則內接正三角形的一邊等於 $\sqrt{3}r$。

〖示意〗 若 AB 是直徑, $AC=r$, 則 BC 是所求的邊。

習題八十

1. 求作圓外切正八邊形.

2. 已知一邊，求作正八邊形.

3. 若半徑是 R，求內接正方形的面積。

4. 求作圓的外切正六邊形.

5. 已知一邊，求作正十二邊形.

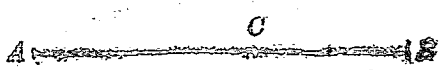
6. 正三角形的邊心距，等於其外接圓半徑的二分之一。

7. 已知半徑 R，求內接正六邊形的面積.

8. 一圓直徑的平方，等於同圓內接正方形的二倍.

9. 圓外切正三角形的一邊，等於同圓內接正三角形一邊的二倍.

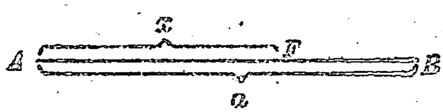
432. **定義** 若一線段分成二線段，長的線段是短線段和全線的比例中項，則這線段叫做分成外內比.



如 AB 是被分成外內比，則

$$AB : AC = AC : CB。$$

433. **作圖題二十八** 求分一線段成外內比.



設線段 $AB=a$。

求分 a 成外內比。

解析　設 F 是所求的分點。

令　　$AF=x$

則　　$FB=a-x$

$$\therefore\quad a:x=x:(a-x)$$

$$\therefore\quad x^2=a^2-ax$$

移項　　$x^2+ax=a^2$

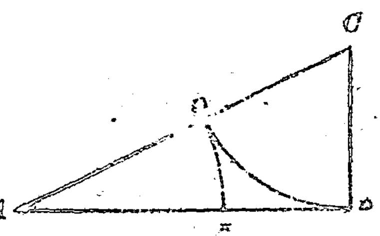
配成完全平方　$x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$

兩邊開方，得　$x+\frac{a}{2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$\therefore\quad x=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{a}{2}.$$

但是 $\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ 是直角三角形的斜邊，它的兩直角邊是 a 和 $\frac{a}{2}$，故 x 易求得。

作圖　從點 B 作 AB 的垂線 BC，使 $BC=\frac{AB}{2}$；聯 AC。



在　AC 上取 $DC=BC$.

在　AB 上取 $AF=AD$.

則 F 即爲所求的分點；分 AB 成外內比。

證 學者自證。

434. **作圖題二十九** 求作圓內接正十邊形。

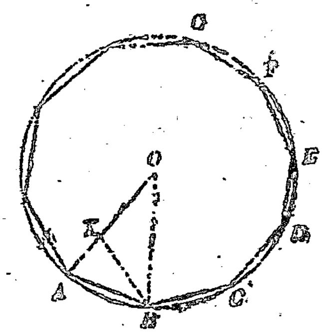
設圓 O。

求作 O 圓內接正十邊形。

作圖 引任意半徑 OA，以外內比分 OA 於 X。

作弦 AB 等於 OA 上的較長線段 OX，

則 AB 是所求內接正十邊形的一邊。



證 聯 BO，BX，

$$OA:OX=OX:XA,$$ （作圖）

$$\because \quad OX=AB,$$ （作圖）

$$\therefore \quad OA:AB=AB:XA.$$

又 $$\angle BAO=\angle BAX,$$

$$\therefore \quad \triangle AOB\backsim\triangle ABX.$$ （何故？）

$$\therefore \quad AB:BX=OA:OB,$$

$$\because \quad OA=OB,$$

$$\therefore \quad AB=BX=OX,$$ （何故？）

$$\therefore \quad \angle XBO=\angle O.$$

$$\angle ABO = \angle BAO = \angle BXA = 2\angle O,$$ (何故?)

又 $$\angle ABO + \angle BAO + \angle O = 2rt\angle$$ (何故?)

即 $$5\angle O = 2rt\angle.$$

$$\therefore \quad \angle O = \frac{2}{5}rt\angle = \frac{4}{10}rt\angle.$$

$$\therefore \quad \widehat{AB} = \frac{1}{10}\text{圓周}.$$

故 AB 是內接正十邊形的一邊。 (定理九十九)

435. 系一 聯內接正十邊形相間的頂點，可成一內接正五邊形。

436. 系二 在圓內和圓外可作內接和外切正多邊形，其邊數爲 5, 10, 20, 40 等等.

習題八十一

1. 求作一角等於 36°.
2. 已知一邊，求作正十邊形.
3. 試將一直角分作五等分.
4. 正五邊形的對角線相等。
5. 內接正六邊形的面積，是內接與外切正三角形面積的比例中項.
6. 正多邊形外接圓的半徑，必二等分其頂角。
7. 已知一邊，求作正五邊形.

8. 正五邊形的對角線互分成外內比.

9. 求作圓內接正十五邊形.

10. 在內接正三角形內, $a=\sqrt{3}R, r=\frac{1}{2}R, C=120°$.

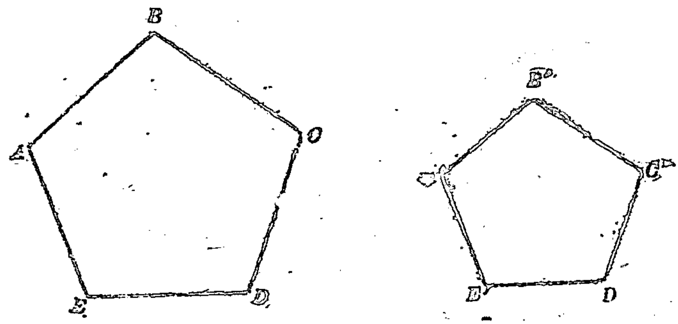
11. 在內接正方形內, $a=\sqrt{2}R, r=\frac{R}{\sqrt{2}}, C=90°$.

12. 在內接正六邊形內, $a=R, r=\frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{3}, C=60°$.

13. 在內接正十邊形內,

$$a=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1), r=\frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}, C=36°.$$

437. 定理一〇〇 邊數相同的正多邊形必相似.



設 $ABCD\cdots\cdots$ 和 $A'B'C'D'\cdots\cdots$ 兩正多邊形, 各有 n 邊.

求證 $ABCD\cdots\cdots \backsim A'B'C'D'\cdots\cdots$。

證 $\because \angle A=\angle B=\angle C=\cdots\cdots=\frac{2(n-2)}{n}rt\angle$

(何故?)

$\therefore \angle A'=\angle B'=\angle C'=\cdots\cdots=\frac{2(n-2)}{n}rt\angle$,

$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=\cdots\cdots=\angle A'=\angle B'=\angle C'=\cdots\cdots$。

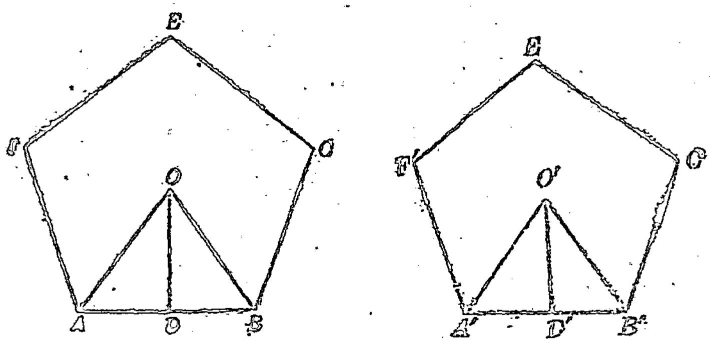
$\because AB=BC=CD=DE=\cdots\cdots$, (假設)

$A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=\cdots\cdots$,

$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\cdots\cdots$。

$\therefore ABCD\cdots\cdots \backsim A'B'C'D'\cdots\cdots$.(相似形的定義)

438. 定理一〇一 邊數相同的正多邊形的周界的比,等於頂心距的比,或邊心距的比.



設邊數相同的兩正多邊形 $ABCE\cdots\cdots$ 和 $A'B'C'E'\cdots\cdots$ 的

周界是P和P'，頂心距是OA和$O'A'$，邊心距是OD和$O'D'$。

求證 $P:P'=OA:O'A'=OD:O'D'$。

證 $\because \angle AOB=\angle A'O'B'=\frac{4}{n}rt\angle$， （何故?）

$$OA=OB,\ O'A'=O'B',$$

$$\therefore \frac{OA}{O'A'}=\frac{OB}{O'B'}。$$

$$\therefore \triangle AOB \backsim \triangle A'O'B'。$$ （何故?）

$$\therefore \frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{OD}{O'D'}。$$

$\because$ $ABCE\cdots\cdots \backsim A'B'C'E'\cdots\cdots$， （定理一〇〇）

$\therefore$ $P:P'=AB:A'B'$。 （定理七十三）

$$\therefore P:P'=OA:O'A'=OD:O'D'。$$

439. 系 邊數相同的正多邊形的面積的比，等於頂心距平方的比，或邊心距平方的比。

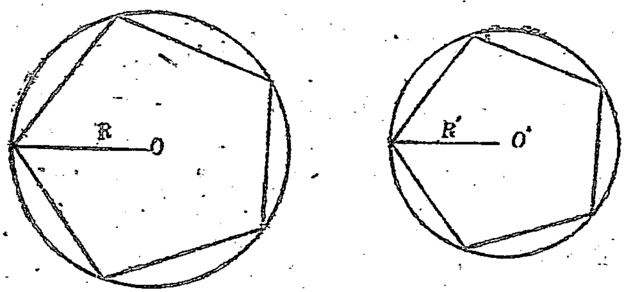
440. 定義 一個確定不變的量，叫做常數，如2，3，4等都是常數。

441. 定義 在同一個問題內，價值改變的量，叫做變數，通常用x，y，等代表。

442. 定義 若一變數x同一常數a無限接近，二者的差，比任何小的正數還要小，這常數a就叫做變數x的極限。

如圓內接或外切正多邊形的邊數，無限增加時，其周界的極限是圓周；面積的極限是圓面積；邊心距的極限是半徑.

443. **定理一〇二** 兩圓周的比，等於其半徑的比。



設 O, O' 兩圓的半徑是 R, R'，圓周是 C, C'。

求證 $C : C' = R : R'$。

證 各作 n 邊的內接正多邊形，令其周界為 P, P'，則

$P : P' = R : R'$, (定理一〇一)

$$\therefore \quad \frac{P}{R} = \frac{P'}{R'}。$$

若正多邊形的邊數 n 無限增加，則 P 的極限為 C, P' 的極限為 C'。

$$\therefore \quad \frac{C}{R} = \frac{C'}{R'}。$$

$$\therefore \quad C : C' = R : R'。$$

444. 系一 兩圓周的比，等於直徑的比，即

$$C : C' = 2R : 2R'.$$

445. 系二 圓周與其直徑的比是常數.

〔註〕 這個常數 $\frac{C}{2R}$ 是不盡小數，通常用希臘字母 π 來表示。π 的近似值是 $3\frac{1}{7}$，3.14，3.1416.

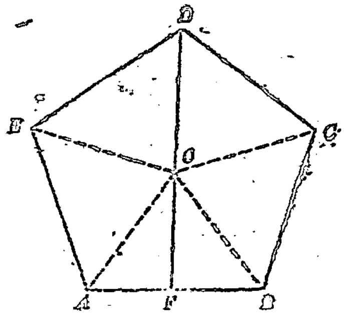
446. 系三 圓周等於 π 與直徑的相乘積.

$$\because \quad \frac{C}{2R} = \pi, \quad \therefore \quad C = 2\pi R.$$

447. 系四 在直徑是 d 的圓上，n 度的弧長等於 $\frac{n}{360}\pi d$.

448. 定理一〇三 正多邊形的面積，等於其周界與邊心距相乘積的一半.

設 n 邊正多邊形中，S 表面積，P 表周界，r 表邊心距.



求證 $S = \frac{1}{2}Pr$.

證 作 OA, OB, …… 分此正多邊形成 n 個相等的三角形.

（何故？）

則 $$\triangle OAB=\frac{1}{2}AB\times r,$$ (何故?)

$$\therefore\ S=n\times\triangle OAB=\frac{1}{2}\times n\times AB\times r.$$

但 $$n\times AB=P,$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}Pr.$$

習題八十二

1. 求下列正多邊形的半徑,邊心距,及面積:

(a) 一正方形每邊是4。

(b) 一正六邊形每邊是2。

2. 內接正六邊形的面積,等於同圓外切正六邊形面積的四分之三。

3. 圓內接正三角形的面積,等於同圓內接正六邊形面積的一半。

4. 求作圓周,等於已知圓周的一半。

5. 求作圓周,等於二已知圓周的和。

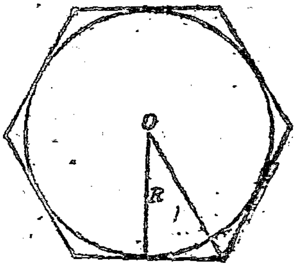
6. 求作圓周,等於二已知圓周的差。

7. 在線段 AC 上,取一點 B 用 AB, CB 及 AC 做直徑,順次作半圓,試證最大的半圓周,等於他二半圓周的和。

449. 定義 扇形是兩半徑及所截圓弧所包圍的一部分。

450. 定義 凡扇形、弓形、及圓弧所對的中心角相等，就叫做相似扇形，相似弓形，及相似弧。

451. 定理一〇四 圓面積等於圓周與半徑相乘積的一半。



設圓 O 中，C 是圓周，R 是半徑，S 是面積。

求證 $S=\frac{1}{2}CR$.

證 作外切正多邊形，P 表周界，A 表面積。

則 $A=\frac{1}{2}PR$。 (定理一〇三)

若外切正多邊形的邊數無限增加，則

A 趨近於極限 S，

P 趨近於極限 C。

$\therefore\ S=\frac{1}{2}CR$。

452. 系一 圓面積等於 π 與半徑平方的相乘積。

$\because\ C=2\pi R$,

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\cdot R=\pi R^2$。

453. 系二 兩圓面積的比，等於半徑平方的比，或直徑平方的比.

454. 系三 中心角爲 n 度的扇形面積等於 $\frac{n}{360}\pi R^2$。

455. 系四 相似扇形面積的比，等於其半徑平方的比。

習題八十三

1. 求作一圓，等於已知圓的 $\frac{3}{4}$。

【示意】 $\pi x^2=\frac{3}{4}\pi R^2$ 即 $x^2=\frac{3}{4}R^2=\frac{3}{4}R\cdot R$。

2. 求作一圓，等於已知圓的三倍.

3. 求作一圓，等於已知圓的 $\frac{3}{2}$。

4. 求作一圓，等於已知二圓的和。

5. 求作一圓，等於已知二圓的差。

6. 求作一圓，等於已知二個同心圓周間所夾的面積。

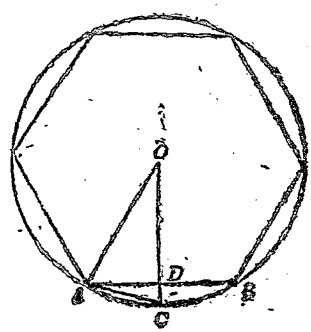
7. 已知扇形的中心角是 40°，圓半徑是 5，求這扇形的面積。

8. 已知圓半徑是 10，求內接正方形一邊所對弓形的面積.

9. 已知圓半徑是 10，求 60° 圓弧所包弓形的面積.

10. 設圓面積是 60 方尺，求 60° 圓弧的長。

456. 求圓周率的近似值 如圖，設 R 為 O 圓的半徑，內接正多邊形的一邊 $AB=S$，AC 是同圓內二倍邊數的內接正多邊形的一邊.



自 C 作半徑 OC，

則 $AD=BD$。 (何故?)

$\therefore\ CO\perp AB$. (何故?)

在 $\triangle AOC$ 中，

$$\overline{AC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OC}^2-2OC\cdot OD. \qquad \text{(定理八十二)}$$

即 $$\overline{AC}^2=2R^2-2R\cdot OD.$$

但 $$\overline{OD}^2=R^2-\left(\frac{S}{2}\right)^2, \qquad \text{(定理八十一系)}$$

$$\therefore\ OD=\sqrt{R^2-\frac{S^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-S^2}.$$

$$\therefore\ \overline{AC}^2=2R^2-R\sqrt{4R^2-S^2}.$$

$$\therefore\ AC=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-S^2}}.$$

若取半徑爲單位長，則 $R=1$，令內接 n 邊正多邊形的一邊是 S_n。

則
$$S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}.$$

設 $R=1$，則內接正六邊形的一邊 $S_6=1$.

由上式計算得：

	(一邊的長)	(周界的長)
$S_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}$	$=0.51764$	6.21166
$S_{24}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.51764)^2}}$	$=0.26105$	6.26526
$S_{48}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.26105)^2}}$	$=0.13081$	6.27870
$S_{96}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.13081)^2}}$	$=0.06534$	6.28206
$S_{192}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.06534)^2}}$	$=0.03272$	6.28291
$S_{384}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.03272)^2}}$	$=0.01636$	6.28312
$S_{768}=\sqrt{2-\sqrt{4-(0.01636)^2}}$	$=0.00818$	6.28317

用最後一周界當做圓周的近似值，則

$$\pi=\frac{C}{2R}=\frac{6.28317}{2}=3.14159.$$

習題八十四

1. 半徑是 10 求圓面積.

2. 直徑是 10，求 60° 的圓弧的長.

3. 圓面積是 100π，求半徑和圓周.

4. 圓周是 m 尺，求半徑和圓面積.

5. 已知圓周是 10，求二倍面積的圓周.

6. 求作半圓，等於每邊是 5 的正三角形的面積.

7. 設 A 是弧 BC 的圓心，B 是弧 AC 的圓心，C 是弧 AB 的圓心，若 $AB=6$ 寸，求此形的面積.

8. 設扇形面積是 18π，中心角是 60°，求半徑.

9. 設正三角形的一邊是 6 尺，求內切圓和外接圓的面積.

10. 設正三角形的高是 8 尺，求內切圓和外接圓的面積.

11. 設兩圓面積的比是 9 : 4，大圓的半徑是 6 寸，求小圓的圓周。

12. 已知正方形的面積是 36 方尺，求內切圓和外接圓的面積。

13. 設正六邊形的邊心距是 8 寸，求內切圓和外接圓的面積.

14. 引長正六邊形的各邊，所成星形的面積，等於原六邊形的二倍。

15. 在每邊 4 尺的正方形的四邊上，向外各作一半圓，求全形的面積.

16. 設正六邊形每邊2尺，用每邊做直徑向外各作一半圓，求此形的面積。

17. 設一圓周長等於其面積，求其半徑。

18. 設扇形的面積，等於其半徑的平方，求中心角。

本章提要

I. 圓和正多邊形的關係

1. 凡是正多邊形，總可作一外接圓及一內切圓。

2. 圓內接等邊多邊形，必是正多邊形。

3. 圓外切等角多邊形，必是正多邊形。

II. 正多邊形的性質

1. 正多邊形的外接和內切圓，必是同心圓。

2. 正多邊形一邊所對的中心角，必與其內角互為補角。

3. 正多邊形的中心，與各邊的距離相等，與各角頂的距離相等。

4. 正多邊形的頂心距必二等分其內角。

5. 同邊數的正多邊形必相似。

III. 線段與面積的比。

1. 同邊數的正多邊形周界的比，等於邊的比，邊心距的比，或頂心距的比。

2. 圓周的比等於半徑或直徑的比。

3. 同邊數的正多邊形面積的比，等於邊的平方比，邊心距的平方比，或外接圓半徑的平方比。

4. 圓面積的比，等於半徑或直徑的平方比。

IV. 計算公式

1. $C=\pi d$ 或 $2\pi r$（C 爲圓周，d 爲直徑，r 爲半徑）。

2. n 度的弧長 $=\frac{n}{360}\pi d$.

3. 正多邊形的面積 $=\frac{1}{2}Pr$（r 爲內切圓半徑）。

4. 圓面積 $=\frac{1}{2}Cr=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2$.

5. 中心角爲 n 度的扇形面積等於 $\frac{n}{360}\pi r^2$（r 爲扇形的半徑）.

6. 設 S_n 爲圓內接正 n 邊形的一邊，S_{2n} 爲在同圓內接正 $2n$ 邊形的一邊，則

$$S_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-S_n^2}}.$$ （R 爲圓的半徑）

V. 圓內接和外切正多邊形的作圖

1. 正方形，正八邊形，正十六邊形，……

2. 正三角形，正六邊形，正十二邊形，……

3. 正五邊形，正十邊形，正二十邊形，……

4. 正十五邊形，正三十邊形，正六十邊形，……

總　習　題

1. 三角形二條角二等分線所夾的角等於第三外角的一半。

2. O 為 $\triangle ABC$ 內的一點，則 OA, OB, OC 的和比三角形的周小，而比半周大。

3. O 為 $\triangle ABC$ 內的一點，則 $\angle BOC > \angle BAC$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A - \angle B = \angle B - \angle C = \frac{1}{2}$∠，$\angle A$，$\angle B$ $\angle C$ 的大小。

5. 三角形三中線的和比三邊的和小而比此和之半大。

6. 一正多角形，內角的和等於16∠，求此形的邊數。

7. 四邊形 $ABCD$ 中，AD 為最大邊，BC 為最小邊，

則　　$\angle ABC > \angle ADC$，　$\angle BCD > \angle BAD$.

8. 二點 A, B 在直線 MN 的同旁，若點 C 在 MN 上，而 $\angle ACM = \angle BCN$，則 $AC + BC$ 為最小（卽 D 為 MN 上他一點時，$AC + BC < AD + BD$）.

9. 二個三角形 ABC, ADE 共有頂角 A，且 $AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$，則 $\triangle ADE$ 的底 DE 二等分 $\triangle ABC$ 的底 BC。

10. 三角形的三中線相等，則此形為正三角形。

11. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=rt\angle$，$\angle B=2\angle C$，A' 為 BC 的中點，D 為從 A 至 BC 所引垂線之足，則 $A'D=\frac{1}{2}AB$。

12. $\triangle ABC$ 中，$\angle A=rt\angle$，$\angle B$ 的二等分線交 AC 於 D，又從 A 到 BC 所引垂線交 BD 於 E，則 $AD=AE$。

13. 三等分一弦的二半徑，決不三等分此弦所張的弧。

14. 三等分一弧的二半徑，決不三等分此弧的弦。

15. A 為 $\odot O$ 上任意一點，過 A 的切線與任意半徑 OB 的延長線交於 C，從 A 至 OB 引垂線 AD，則 AB 二等分 $\angle DAC$。

16. 圓內接六角形中，間隔三角的和等於四直角。

17. H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，則 $\triangle HBC$，$\triangle HCA$，$\triangle HAB$ 的外接圓等於 $\triangle ABC$ 的外接圓。

18. 從圓周上一點 C 作切線，從任意直徑 AB 的一端 A 到此線引垂線 AD，則 AC 二等分 $\angle BAD$。

19. 有一定角 XOY 及一定點 P；從 P 作等長二線段，令其端各在角的一邊上而互相垂直。

20. 三角形的二傍心及二個角頂共圓。

21. 三角形內心及一個傍心的距離，等分於外接圓周。

22. 作一圓，令切一定直線於其上的一定點，且切一定圓。

23. 設二個同心圓，作外圓的一弦，令其為內圓分作三等

分.

24. 過相交二圓的一交點作割線，令其在二圓周間的部分等於定長。

25. AB 是圓的直徑，從其一端 A 引任意弦與圓周會於 C，從 C 引圓的切線，從 B 到此切線引垂線，延長交 AC 的延線於 P. 求點 P 的軌跡。

26. $\triangle ABC$ 是所設三角形，一動點 P 恆令 $\triangle PAB=\triangle PAC$，求點 P 的軌跡.

27. 梯形二對角線的交點，是過此交點而與二底平行的線段的中點。

28. 四邊形 $ABCD$ 的二對角線正交，則

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DA}^2.$$

39. 從任意一點到矩形各角頂引線段，則在二雙對角頂線段上正方形的和相等.

30. 一動點到二定點距離上正方形的和爲定積，則此動點的軌跡爲一圓。

31. 一動點到二定點距離上正方形的差爲定積，則此動點的軌跡爲一直線。

32. 過三角形一邊上一定點，作一直線二等分此三角形的面積。

33. 二個三角形 ABC, ABD 立於同底 AB 上，聯其頂點的線段 CD 的中點是 E，則 $\triangle ABE$ 等於二個三角形 ABC, ABD 的半和或半差。

34. 一圓內二弦正交，則由交點所分四部分上正方形的和，等於直徑上的正方形。

35. 一圓的二弦正交，則此二弦上正方形的和等於從 8 倍半徑上正方形中減去從中心到二弦交點距離上正方形的 4 倍所得的差。

36. 在 $\triangle ABC$ 內，求一點 P，令 $\triangle BPC = 2\triangle APC$，及 $\triangle CPA = 3\triangle APB$.

37. 過定角內一點引線段，令其兩端止於二邊上，而為此點所分二部分的比等於一定比.

38. 在 $\triangle ABC$ 二邊 AB, AC 上各取一點 D, E。

令 $$AD : AB = AE : AC = 1 : 2,$$

則 BE, CD 互分成 $1:2$ 之比.

39. 一動點與二定直線距離的比等於 $m:n$，求此動點的軌跡.

40. 在三角形內求一點，令其與三邊距離的比等於定比 $l:m:n$.

41. 從圓周上一點到弦所引垂線上的正方形，等於從其弦的兩端到此點的切線所引垂線的相乘積。

42. 從圓外一點 P 引二切線 PA, PB，過弦 AB 的中點 C，引任意弦 DE，則 PC 二等分 $\angle DPE$.

43. 作一正方形，令與一定正方形的比等於二已知線段的比.

44. 圓內接四邊形二雙對邊所包矩形的和，等於二對角線所包的矩形。

45. 過相交二圓之一交點作一直線，令其爲二圓所截弦的比等於 1 : 2。

46. P 爲 $\triangle ABC$ 底 BC 上的一點，從 P 引 AC, AB 的平行線 PX, PY 各交 AB, AC 於 X, Y，則 $\triangle AXY$ 是 $\triangle BPX$ 及 $\triangle CPY$ 的比例中項.

47. $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 爲直角，從 A 到 BC 引垂線 AD，$\angle B$ 的二等分線交對邊 AC 於 E，而 AD，BE 交於 O，則

$$DO : OA = AE : EC.$$

48. 圓內接三角形 ABC 頂點 A 的切線與底 BC 的延長線交於 D，則 $$BC : CD = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2.$$

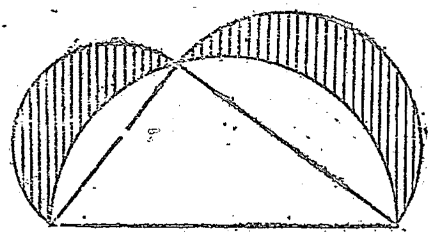
49. 在 $\triangle ABC$ 三邊 BC, CA, AB 上各取一點 D, E, F，令 $BD : CD = CE : EA = AF : FB = 2 : 3$. 求 $\triangle AEF$, $\triangle DEF$ 各對 $\triangle ABC$ 的比值。

50. 正十二邊形面積等於其半徑上正方形的三倍。

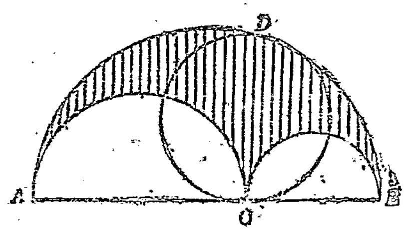
51. 圓內接正六角形的面積，等於其外接正六角形面積的 $\frac{3}{4}$。

52. 二個同心圓中，大圓的弦切於小圓，則以此弦做直徑的圓，等於原二圓所成的環。

53. 以一直角三角形的三邊做直徑作半圓於斜邊的同旁，則在大半圓外所成二個新月形的和等於三角形的面積.



54. 從半圓直徑 AB 上取一點 C，從 C 引 AB 的垂線交半圓周於 D，以 AC, CB 各做直徑再畫二半圓，以 CD 爲直徑畫全圓，則三個半圓周所圍的面積，等於一全圓的面積.



55. 直角三角形中對於斜邊的高分原形成兩三角形，此兩形內接圓面積的比，等於斜邊上二線段的比.

56. 兩兩相切三等圓半徑各長 2 尺，求此三圓間空隙部分的面積.

57. 一扇形中心角爲 $22°30'$，半徑 25 寸，求面積。

58. 作定圓的二個同心圓，三等分此定圓的面積。

59. 求作一直線與三已知點的距離相等。

60. 求作一等邊三角形與一已知三角形等積。

61. 從三角形一邊上一定點作二直線，三等分此三角形。

62. AD 是 $\triangle ABC$ 頂角 A 的二等分線，O 是內心，則底 BC 與他二邊和的比等於 $DO:OA$。

中華民國三十三年十月初版

新中國教科書 初中幾何學

第四冊 正中書局造紙本 定價國幣五角
（外埠酌加運費匯費）

編著者 萬頤祥
余傳綬

發行人 高明強

印刷所 正中書局

發行所 正中書局

(1894)