華氏中西算學全書初集

華氏中國醫學全書初集

行素軒校本

算術莫難於開方開平立方不難開三乘以上諸方為難開三乘以上諸方尚不難開實從廉隅正負雜糅諸方為難自元和李氏取宋秦道古法演為開方說則開正負雜糅諸方亦不難矣然有益積有翻積開之雖不難而定商甚難定商難則開之仍不易矣質華君若汀創立數根開方法數根者他數不能度惟一可度之數也凡開方之實必為諸數根連乘之積而開得之元數必即實中一數根或即實中若干數根相乘之數其法先求元之尾數及元之位數乃視實中之數根及若干數根相乘之數其尾數位數與所求合者為商數有若干商數一一開之其開法亦如秦氏但無次商其式可開若干次者即有若干商法開之恰盡此法併諸商為一商故無翻積益積不特生面獨開且較舊法簡易什倍余又告以倒開法盡順開法以商數乘隅自下而上逐層加減而乘之必至減實不能恰盡始知商數非元數倒開法以商數除實自上而下逐層加減而除之不必至隅但除之不盡即知商數非元數則簡易之中又簡易焉華君即取而用之可謂從善如流矣余所譯所著各種算書自謂俱遠勝古人當今之世能讀而盡解之者惟吳太史子登及華君耳太史著九章翼力求簡易而華君所著獨務精深此卷為行素軒算稿第一種已自空前絕後他日盡出其蘊以問世余又烏能量其所至耶余近著攷數根四法華君倘能一一詳解之亦可與此卷相輔而行也

同治十一年龍在壬申二月既望海甯李善蘭序

華氏中西算學全書總目

四集

數根開方術　　金匱華蘅芳學

數根之術所以能通於開方者因諸數相乘之數一如其諸根連乘之數

如六與七相乘得四十二試以六之根二與三及七之根七連乘之亦得四十二

如四與九相乘得三十六試以四之根二與二及九之根三與三連乘之亦得三十六

兩數根相乘之數卽以相乘之兩數爲根多數根連乘之數卽以連乘之多數根爲根

如三與七相乘得二十一則二十一卽以三與七兩數爲根

如三與五與七連乘得一百〇五則一百〇五卽以三與五與七之三數根爲根

兩數相乘之數卽以兩數之根爲根多數連乘之數卽以多數之根爲根

如六之根爲二與三而七之根爲七則六與七相乘得四十二其根卽爲二與三與七

如二十一之根爲三與七而二之根爲二則二與二十一相乘所得四十二其根亦爲二與三與七

故其數爲兩數相乘所生必兼有兩數之根其數爲三數相乘所生必兼有三數之根其數爲若干數相乘所生必兼有若干數之根

如六之根爲二三而四之根爲二二則四與六相乘之數其根必爲二二二三也　又如九之根爲三三六之根爲二三十之根爲二五則九與六與十連乘之數其根必爲二二三三三五也

凡兩不相等之數相乘則所生之數其根非兩兩相等

如六之根爲二三四之根爲二二惟六與四不等故其相乘所得之數二十四其根爲二二二三其二二與二三不能兩兩相等

若相等之兩數相乘則所生之數其根必兩兩相等

如六之根爲二三則六自乘之數三十六其根爲二二三三其二三之根各有兩箇是也

又如九之根爲三三四之根爲二二其九與四雖不等而相乘得三十六其根爲二二三三仍兩兩相等此因三十六可作六與六相

乘所生故也

所以凡自乘之數其根必倶兩倍再乘之數其根必倶三倍其數爲若干乘方之數其根必有若干倍

如六之根爲二·三 則三十六之根爲二·二·三·三 而二百十六之根爲二·二·二·三·三·三 一千二百九十六之根爲二·二·二·二·三·三·三·三 之類是也

凡諸正乘方之數若求得其根即可知其爲某乘方及方邊之根若何

如九之根爲三·三 則見三·三 即知九爲平方數且知其方邊之根爲三

如十六之根爲二·二·二·二 則見之即知其數爲二之三乘方又知其平方邊之根爲二·二

如見二百十六之根爲二·二·二·三·三·三 則知其數爲立方數且知其方邊之根爲二·三

如見一千二百九十六之根二·二·二·二·三·三·三·三 則知其數爲三乘方且知其方邊之根亦爲二·三

凡數之諸根相同或諸根中各自相同而相同之倍數有等則可開正乘方

如四之根爲二·二 八之根爲二·二·二 二十七之根爲三·三·三 三十六之根爲二·二·三·三 之類是也

諸正乘方之積爲方邊累乘所得則方邊必可約其積故積之根恒爲幾倍其方邊之根所以凡見其數之諸根有幾倍者即知開得幾乘方邊盤數

如十六之根爲二·二·二·二 則十六等於二×二×二×二 即四二 亦即二四 所以可開三乘方其方邊爲二亦可開平方其方邊爲四此因二·二·二·二 有四箇二根亦爲二箇二·二根故也

今有數二千四百〇一問可開幾乘方其方邊之數幾何

[illegible]得其根為七·七·七·七知其數等於七×七×七×七亦等於四九×四九所以知此數可開平方其方邊為四十九亦可開三乘方其方邊為七

[illegible]一千七百二十八欲開立方問方邊幾何

求得其根為二·二·二·二·二·二·三·三·三即(二·二·三)(二·二·三)(二·二·三)故其立方邊之根為二·二·三即二×二×三故知其立方之邊為十二

數之是數根者其數恆不能開正乘方

蓋數之可開正乘方者必為幾箇相等之數連乘所得故其根必不止一數今數根之數只有一根故不能開得整數及分數之方邊蓋其方邊之數必奇零不盡以至無窮故也

數之諸根不相同或有相同之根而根之倍數無等則不能開正乘方整數

如一百〇五之根三·五·七諸根皆不相同　又如二百之根二·二·二·五·五其兩箇五與三箇二倍數無等則不能得其方邊之根故不能開得整數

今有數十二問此為正乘方數否　答曰不能因其根為二·二·三倍數不同故知其方邊必非整數

今有數二百十問此為正乘方數否　答曰不能因其根為二·三·五·七諸根之數不同故也

今有數三百二十四問此為立方數否　答曰不能祇能開平方因其根為二·二·三·三·三·三故祇能作(二·三·三)(二·三·三)

今有數四百〇五問此為平方及三乘方數否　答曰不能祇能開五箇相等之平方或五箇相等之三乘方因其根為三·三·三·三·五即五(三·三·三·三)即五箇三×三之平方亦即五箇三之三乘方也此式若已知五之平方邊及三乘方邊之密率即可得其平方邊三乘方邊之密率

數之不能開正乘方整數者必可開帶縱乘方其帶縱乘方之形或只有一形或有兩形及多形

如三十五之根爲五·七則爲闊五長七之帶縱平方

如一百〇五之根爲三·五·七則爲廣三長五高七之帶縱立方亦可爲闊三長三十五或闊五長二十一或闊七長十五之帶縱平方

如四百〇五之根爲三·三·三·三·五則可作五×八一 三×一三五 一五×二七 九×四五亦可作五×九×九 五×三×二七 三×九×一五 三×三×四五亦可作三×三×三×一五 三×三×九×五亦可作三×三×三×三×五凡可作四箇平方四箇立方兩箇三乘方一箇四乘方皆帶縱不同式

凡開帶縱方求得其實之諸根數必兼紀一根

如實之根爲三·三·三·三·五則必紀一·三·三·三·三·五是也

凡正負諸乘方式無論如何雜糅其實之諸根中必包有元之諸根

如平方式卌丨其元之同數二十八則實卌之根一·二·二·二·三·七其中必包有元之根二·七也

如立方式卌〇‖丅其元之同數爲十與二則其實卌之根一·二·二·二·五·五其中必包有元之根二·五與二也

實之諸根既包有元之諸根而恒多於元之諸根其故由於諸方數之和較

諸方之數有大小及正負則另生他根或與元之根同或與元之根異故有元只一兩根而實有多根者夫實之根既恒多於元之根則不知何者是元之根何者非元之根亦不知幾根相乘而可等於元設實之根有十餘數則兩根相乘已有數十數若欲盡窮諸根相乘之變不且有數百數乎於此數百數中而欲擇其一二仍茫然也今立法以通之

凡以元之諸乘方乘式之從廉隅諸數并之必與實之數正負相當則以元之諸乘方之單位數乘從廉隅之單位數并之亦必與實之單位數正負相當

法用自一至九之九個單位數各取其諸乘方之單位數與從廉隅之單位數並列而對乘之取其單位之數并之仍取其單位數與實之單位數相課則必有一數或幾數正負適相當者則記其所用之單位數爲元之尾數

自一至九之九數其諸乘方之單位數皆爲循環數故每數只

須記其四數如

一爲　一一一一

二爲　二四八六

三爲　三九七一

四爲　四六四六

五爲　五五五五

六爲　六六六六

七爲　七九三一

八爲　八四二六

九爲　九一九丅

如有九乘方式𝍨𝍣𝍢𝍦 [illegible]

以自一至九之諸乘方單位數各列爲行

第一行　𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠

第二行　𝍡𝍣𝍧𝍥𝍡𝍣𝍧𝍥𝍡𝍣

第三行　𝍢𝍨𝍦𝍠𝍢𝍨𝍦𝍠𝍢𝍨

第四行　𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣𝍥

第五行　𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤

第六行　𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥

第七行　𝍦𝍨𝍢𝍠𝍦𝍨𝍢𝍠𝍦𝍨

第八行　𝍧𝍣𝍡𝍥𝍧𝍣𝍡𝍥𝍧𝍣

第九行　𝍨𝍠𝍨𝍠𝍨𝍠𝍨𝍠𝍨𝍠

以從廉隅單位數𝍣𝍢𝍥𝍨𝍣𝍡𝍣〇𝍨𝍥各齊其筆而乘之

仍取其單位數得

第一行　𝍨𝍢𝍥𝍨𝍣𝍡𝍣〇𝍣𝍥

第二行　𝍧𝍡𝍦〇𝍧𝍤𝍣〇𝍧𝍨

第三行　𝍣𝍦𝍡𝍤𝍣𝍦𝍧〇𝍣𝍨

第四行　𝍥𝍦𝍨〇𝍥𝍡𝍥〇𝍥𝍥

第五行　〇𝍤〇𝍤〇〇〇〇〇〇

第六行　𝍣𝍦𝍥〇𝍣𝍡𝍣〇𝍣𝍥

第七行　𝍧𝍦𝍦𝍤𝍧𝍦𝍣〇𝍧𝍨

第八行　𝍣𝍡𝍡〇𝍣𝍦𝍧〇𝍣𝍤

第九行　𝍥𝍢𝍨𝍤𝍥𝍡𝍥〇𝍥𝍥

并每行正負之數仍取其單位數與實之單位數相課惟第三與八兩行皆并得𝍡與實之單位𝍣正負之數適相當故記三與八兩數爲尾數言元之單位數非三卽八也

如欲求負尾數者則以自一至九之數爲負故其諸乘方之單位數每層正負相間

第一行　𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠𝍠

第二行　𝍣𝍢𝍧𝍥𝍣𝍢𝍧𝍥𝍣𝍤

第三行　𝍣𝍢𝍧𝍠𝍣𝍢𝍧𝍠𝍣𝍤

第四行　𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣𝍥𝍣𝍥

第五行　𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤𝍤

第六行　𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥𝍥

第七行　𝍧𝍨𝍣𝍠𝍧𝍢𝍣𝍠𝍧𝍨

第八行 [illegible]

第九行 [illegible]

以從廉隅單位數各齊其等而乘之仍取其單位數則得

第一行 [illegible]

第二行 [illegible]

第三行 [illegible]

第四行 [illegible]

第五行 [illegible]

第六行 [illegible]

第七行 [illegible]

第八行 [illegible]

第九行 [illegible]

并每行正負之數仍取其單位數則第一第四第六第九四行皆得[illegible]第三第八兩行皆得[illegible]第二第七兩行皆得[illegible]第五行得〇 皆與實之單位[illegible]不相當所以知負元之尾數非整數

又如立方式[illegible]則求得其正尾數二·八負尾數二二元之尾數既有法求之矣然實之根數中及根與根相乘連乘之數其單位數與尾數合者猶厭其多欲删繁就簡非求得元之位數不可

如平方式[illegible] 其實之根為二·二·三·五·七·七·七 尾數為四·五·九

則一×五為五 二×二為四 二×七為一四 三×五為一五 七×七為四九 五×七為三五

二×二×三×七為八四 三×五×七為一〇五 五×七×七為二四五 五×七×七×七為一七一五 三×五×七×七×七為五一四五 以上十一

數其單位數皆與尾數合若必以此十一數一一試之無乃太繁乎所以若能先知元數有幾位則位數之不合者可棄之不用而其商數可稍簡

求元之位數仍用舊術廉隅超步之法與名相步得正商之位同名相步得負商之位

如平方式[illegible] 則以廉步實其廉隅各可進一位故知元之位數為二又以正隅步正廉可進二位故知負元為三位數

既知實之根數元之尾數位數則可於實之根數中求商數

如前式[illegible] 其實根為一·二·二·三·五·七·七·七 元之正尾數四·五·九 負尾數一·五·六

位數二·弌 則視其根數中有乘得兩位三位之數而單位與尾數合者則記之為商數故得正商之數為一五·三五·四八·八四 負商之數為

凡正負諸乘方式若以元之同數乘隅以加減上一層又以元之同數乘之以加減上一層如是遞求而上必減實適盡

如立方式[illegible]　以元數三乘隅數丨得三以減上一層[illegible]得[illegible]又以三乘之得[illegible]以減上一層[illegible]得[illegible]又以三乘之得[illegible]以減上層[illegible]適盡

如平方式[illegible]　以元數四十九乘隅得[illegible]以加上層[illegible]得[illegible]又以四十九乘之得[illegible]以減實[illegible]適盡

凡正負諸乘方式若以元之同數除實以加減下一層又以元之同數除之以加減下一層如是遞求而下亦必減隅適盡

如平方式[illegible]　以元數四十九除實[illegible]得[illegible]與下一層[illegible]相減得[illegible]又以四十九除之得[illegible]以減下層隅丨適盡

如立方式[illegible]　以元數三除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以三除之得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以三除之得[illegible]以減下一層隅丨適盡

所以既有商數欲求元之同數有二法　一法以商數乘隅以加減上一層又以商數乘之加減上一層如是遞求而上若減實適盡者其商數即元之同數若減實不能適盡則更置原式用他商數如法求之　一法以商數除實以加減下一層又以商數除之加減下一層如是遞求而下至減隅適盡者其商數即元之同數若不能適盡亦更置原式用他商數如法求之

如平方式[illegible]　以商數十五乘隅丨得[illegible]以加上層[illegible]得[illegible]又以十五乘之得[illegible]以減上層[illegible]得[illegible]不能適盡故知元之同數非十五

如立方式[illegible]　以商數九乘隅丨得[illegible]以減上層[illegible]得[illegible]又以九乘之得[illegible]以減上層[illegible]得[illegible]又以九乘之得[illegible]以減上層實[illegible]適盡故知其商數九即元之同數

如前式[illegible]　以商數七除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以七除之得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以七除之得[illegible]以減下層隅丨適盡故知其商數七亦元之同數

此二術余初以爲用乘法遞求而上者較便李氏秋紉言用商數乘隅遞求而上必求至最上一層方能知之若用除法遞求而下則不必求至最下一層已可知之蓋商數之不合於元數者求至數層其除得之數必不能俱爲整數故易識別若上下二層正負異名而除減之後除之仍得整數則其商數即爲元之同數此理非李君揭出之余不知也

如立方式[illegible]　試以商數三除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以三除之得[illegible]仍爲整數即知商數三爲元之同數

如前式試以商數七除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以七

除之得[illegible]仍爲整數即知商數七亦爲元之同數
如前式試以商數九除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以九除之得[illegible]仍爲整數即知商數九亦爲元之同數
如立方式[illegible] 試以商數五除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以商數五除之得[illegible]仍爲整數故知五爲元之同數
如前式試以商數七除實[illegible]得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以七除之得[illegible]仍爲整數故知元之同數又爲七
如前式試以商數三十三除實得[illegible]以減下一層[illegible]得[illegible]又以三十三除之得[illegible]亦爲整數故知元之同數又爲三十三
如平方式[illegible] 試以商數二十四除實[illegible]得[illegible]以加下一層[illegible]得[illegible]又以二十四除之不能適得整數即知二十四非元之同數
如立方式[illegible] 試以商數十二除實[illegible]得[illegible]以加下一層[illegible]得[illegible]又以十二除之不能適得整數即知元之同數非十二
如前式試以商數十八除實得[illegible]以加下一層[illegible]得[illegible]又以十八除之得[illegible]以加下一層[illegible]得[illegible]又以十八除之不能盡故知元之同數非十八
如六乘方式[illegible]〇〇[illegible] 試以商數四除實[illegible]得[illegible]以減下一層〇得[illegible]又以四除之得[illegible]以減下一層〇得[illegible]又以四除之得[illegible]以加下一層[illegible]得[illegible]又以四除之不能適盡故知元之同數非四
如前式試以商數九除實[illegible]得[illegible]以減下一層〇得[illegible]又以九除之不能適得整數所以知元之同數非九
用此法以闢正負諸乘方無論式有若干層亦無論其正負如何雜糅均以一法通之

今有平方式[illegible] 求得實根 二·三 尾數 二·三
位數一 商數 二·三 元數 二·三

今有平方式[illegible] 求得實根 一·二·二·二·三·七 尾數 四·八
位數二 商數 二八 二四 元數二十八

今有平方式[illegible]十 求得實根 一·二·二·三·三·一一 尾數 二·八
位數二 商數 二三 一八 元數 二十一 十八

今有平方式[illegible]求得實根一·二·二·三·三·一·三 尾數六·八

位數二一 商數一·二·三·七 八·六·六·八 元數十八·二十六

今有立方式[illegible]求得實根一·二·二·二·二·三·三·五·七 尾數二·八

位數二一 商數三·一·二·四 三·八·八·八 元數二十八

今有立方式[illegible]求得實根一·一·二·二·二·二·二·二·二·三·七 尾數二

位數二一 商數三·四 元數十二

今有立方式[illegible]求得實根一·二·五·五·七·三·一

尾數三·四·五·八·九 位數二·三 商數二五 元數二十五

今有三乘方式[illegible]求得實根一·三·三·五·五·一·三

尾數三·五·七 位數一·二 商數一·一·二·四·六 三·五·三·五·五·五·五 元數十五

今有四乘方式[illegible]求得實根一·三·三·三·三·六·五·三

尾數九 位數一·二 商數九 元數九

今有五乘方式[illegible]求得實根
二·三·七·一八六七

尾數七　位數一·二　商數七　元數七

今有六乘方式[illegible]求得

實根
一·二·二·二·三·一九·二三·五七七

尾數六　位數一　商數六　元數六

今有六乘方式[illegible]求得

實根
一·二·二·二·二·二·二·三·三·三

尾數
二·四·七·九
位數一　商數
二·四·九
元數二

今有七乘方式[illegible]求得

實根
一·二·二·二·三·三·七·一三

尾數二　位數一　商數二　元數二

今有八乘方式[illegible]求得

實根
一·二·二·三〇六七

尾數二　位數一　商數二　元數二

今有九乘方式[illegible]求得

實根
一·二·三·二九五二七

尾數
三·八
位數一　商數三　元數三

今有十三乘方式
[illegible]
求得

實根一·二·二·二·二·二·七·三·三·二　尾數二　位數一二　商數二·三·七二　元數二

凡諸乘方式任以一數偏乘之其元數不變任以一數偏除之其元數亦不變故遇諸層有公等者可以公等之數偏約之

如原式  求得

實根一·三·三·三·三·六·五·三　尾數九　位數一二　商數九　元數九

設以五偏乘原式爲  則其

實根變爲一·三·三·三·三·五·六·五·三　尾數仍爲九　位數仍爲一二

商數仍爲九　元數仍爲九

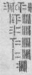
所以遇式如  可求得其公等五約之爲 

凡正負諸乘方式任取一數爲法乘其某層之上除其某層之下每上一層多乘一次每下一層多除一次則其變式之元恆等於法乘原式之元

如原式爲  其元數爲一

設以五一次除乙二次除丙三次除丁四次除戊五次除己則變爲  爲子式

設以五一次乘甲一次除丙二次除丁三次除戊四次除己則變爲  爲丑式

設以五一次乘乙二次乘甲一次除丁二次除戊三次除己則變爲  爲寅式

設以五一次乘丙二次乘乙三次乘甲一次除戊二次除己則

變爲　爲卯式

設以五一次乘丁二次乘丙三次乘乙四次乘甲一次除己則

變爲　爲辰式

設以五一次乘戊二次乘丁三次乘丙四次乘乙五次乘甲則

變爲　爲巳式

以上子丑寅卯辰巳諸式其元數皆爲五所以等於五乘原式之元

凡正負諸乘方式任取一數爲法除其某層之上乘其某層之下每上一層多除一次每下一層多乘一次則其變式之元恒等於法除原式之元

如原式爲

甲　乙　丙　丁　戊　己

其元數爲五

設以五一次乘乙二次乘丙三次乘丁四次乘戊五次乘己則

變爲　爲午式

設以五一次除甲一次乘丙二次乘丁三次乘戊四次乘己則

變爲　爲未式

設以五一次除乙二次除甲一次乘丁二次乘戊三次乘己則

變爲　爲申式

設以五一次除丙二次除乙三次除甲一次乘戊二次乘己則

變爲　爲酉式

設以五一次除丁二次除丙三次除乙四次除甲一次乘己則

變爲　爲戌式

設以五一次除戊二次除丁三次除丙四次除乙五次除甲則

變爲　爲亥式

以上午未申酉戌亥諸式其元數皆爲一所以等於五除原式之元

凡正負諸乘之式或求尾數不得或商數元數不得若其實之單位爲〇而位數大於一者則其元之單位或爲〇可以升降其式而求其元求得之後以十報乘之爲原式之元

如原式爲 [illegible] 甲乙丙丁 令甲層降一位丙層升一位丁層升二位則變爲

[illegible] 求得實根 一·三·三·三·三·七·一七·九七 尾數一 位數二

商數二十一 元數二十一 以十乘之得二百十爲原式之元數

如原式爲 [illegible] 甲乙丙丁 令甲層降二位乙層降一位丁層升一位則變爲

[illegible] 求得實根 一·二·二·二·二·三七·二七七 尾數一 位數二

商數二十一 元數二十一 以十乘之得二百十爲原式之元數

如原式 [illegible] 其位數爲一故不可升降

如原式爲 [illegible] 甲乙丙丁戊 令甲層降四位丙層降二位則變爲

[illegible] 求得元數八十四故原式之元數爲八百四十

西法之代數即中法之天元故凡代數式以兩邊之項移於一邊即可變作開方式

如代數式 天^{三}丅天^{二}丅天＝二 即 天^{三}丅天^{二}丅天丅二＝〇 即 [illegible]

如代數式 天^{五}丄二天^{四}丄三天^{三}丅四天^{二}丅五天＝二七八 即 天^{五}丄二天^{四}丄三天^{三}丅四天^{二}丅五天丅二七八＝〇 即 [illegible]

如代數式

$天^{三}\perp天^{二}\perp天=\frac{三八}{二七}$

即

$二七(天^{三}\perp天^{二}\perp天)=三八$

即

$二七(天^{三}\perp天^{二}\perp天)\top三八=〇$

即

𝍡𝍯 𝍡𝍯 𝍡𝍯 𝍫𝍧

如代數式

$\frac{二}{三}天^{三}\perp\frac{三}{二}天^{二}\top\frac{五}{三}天=\frac{一五四}{八}\perp\frac{二七}{四}\top\frac{一五}{二}$

即

$\frac{三〇}{一五}天^{三}\perp\frac{三〇}{一〇}天^{二}\top\frac{三〇}{六}天=\frac{二一八七〇}{三五六四}$

即

$一五天^{三}\perp一〇天^{二}\top六天=\frac{二一八七〇}{一〇六九二〇}$

即

$三二八〇五天^{三}\perp二一八七〇天^{二}\top一三一二二天=一〇六九二$

即

$三二八〇五天^{三}\perp二一八七〇天^{二}\top一三一二二天\top一〇六九二=〇$

即

[rod-numeral coefficients]

凡正負諸乘方式隅大於一者其元皆有之分若方廉隅無公等則以隅爲分母方廉隅有公等則以公等之繁根數爲分母皆可以分母變其式而開得其分子

今有開方式 甲乙丙丁戊 [rod-numeral coefficients] 其方廉隅無公等則以隅‖爲分母以分母一次除戊一次乘丙二次乘乙三次乘甲則式變爲 [rod-numeral coefficients] 求得其實根 一·二·二·二·二 尾數一·六 位數一 商數一 元數一 故原式天元之同數爲二分之一

今有開方式 [rod-numeral coefficients] 方廉隅無公等以隅|||爲分母除隅乘實變其式爲 [rod-numeral coefficients] 求得其實根 一·二·二·二·二·二·二·二·三 尾數四·八 位數一·二 商數四·八·二四 元數八·二四 故原式之元有二同數其一數爲八其又一數爲二又三分之二

今有式 甲乙丙丁戊 [rod-numeral coefficients] 方廉隅求公等得 [rod numeral] 其公等之根爲五·五·五·五 則以五爲分母一次除乙二次除丙三次除丁四次除戊變其式爲 [rod-numeral coefficients] 求得其實根 一·三·七三三 尾數三·九 位數一 商數三 元數三 故原式元之同數爲五分之

三

今有式 𝍫〇̸ 𝍪𝍦 𝍨 𝍪𝍦 其方廉隅之公等 𝍨 其根 𝍫·𝍫 以三為分母變其式為 𝍫〇̸ 𝍨 𝍠 𝍠 求得其元數二故原式元之同數為三分之二

用此法求得之分數皆可還原

如前式 𝍫〇̸ 𝍪𝍦 𝍨 𝍪𝍦 其元為三分之二試以分子乘隅 𝍪𝍦 得 𝍭𝍣 分母除之得 𝍩𝍧 以加上層 𝍨 得 𝍪𝍦 分子乘之得 𝍭𝍣 分母除之得 𝍩𝍧 以加上層 𝍪𝍦 得 𝍬𝍤 分子乘之得 𝍱〇 分母除之得 𝍫〇 與實正負相當

凡正負諸乘方其元之同數若非整數及分數者則數根開方之術不能馭

數根開方之法所求得者為元之眞同數故遇元之同數非整數亦非分數者則為奇零不盡之數無單位數可言所以數根開方之法不能馭

數根術解　　行素軒算稿二

金匱華蘅芳學

數根者惟一可度他數不能度故凡他數所不能約之數謂之數根

如三不能以二約之　五不能以二與三約之　七不能以二與三及五約之　故三五七等類之數皆爲數根

數之有他數可約者皆非數根

如四可以二約之　九可以三約之　十五可以三與五約之　故此類之數皆非數根

一者數之始凡數皆從此出故任何數中皆有一之數根

凡數以一乘之猶不乘也以一除之猶不除也所以無論何數中皆可有一之根　此根視之雖若無用然不可忘之若忘之有時必致有窒礙不通之處不可不知

非數根之數或爲兩數根相乘所生或爲多數根連乘所生

如二十一爲三與七兩數根相乘所生　一百〇五爲三與五與七之三數根連乘所生

數之偶根只有一數其數爲二

二爲偶數之數根除二之外任何偶數皆非數根因其數既爲偶則皆可以二約之故也

二之所以爲數根者因更無小於二之偶數可以約二所以二爲偶數之根

數之奇根其數無窮

奇數之根單位者如一三五七共四數　兩位者如　十一　十三　十七　十九　二十三　二十九　三十一　三十七　四十一　四十三　四十七　五十三　五十九　六十一　六十七　七十一　七十三　七十九　八十三　八十九　九十七　共有二十一數　兩位以上以至無窮位其間皆有

奇數之數根雖位數愈多其數根之大亦愈稀然位數可任何多數根可任何稀而總無一窮盡之界所以知奇數之數根有無窮之數

非數根之數必有數根可約之其約之之數根從二數起以至多數皆有

如十五可以三約之亦可以五約之　如十八可以二約之亦可以三再約之　如一百〇五可以三約之又可以五約之又可以七約之是也

凡數有數根可約者其約之之數根即其數之根

如六可以二與三約之則二與三之兩數根即六之根非此兩數不能成六

如一百〇五可以三與五與七約之則三與五與七即一百〇五之根非此三數不能成一百〇五也

數根之數其本數自爲根非數根之數以數根爲根

如三爲數根則三之根即是三　五爲數根則五之根即是五　七爲數根則七之根即是七

如十五非數根則以三與五爲根　二十一非數根則以三與

七爲根　三十五非數根則以五與七爲根　一百〇五非數
根則以三與五與七爲根

所以數根之數除一之外只有本數爲根而非數根之數則有
兩根三根以至多根

非數根之偶數中有偶根亦有奇根

偶與偶相乘仍爲偶而偶與奇相乘亦爲偶所以偶數中每有
偶根亦有奇根

非數根之奇數其中只有奇根無偶根

奇與奇相乘仍爲奇若與偶相乘則爲偶所以奇數之中只有
奇根絕無偶根

非數根之數有一見即知無待於攷者如偶數及單位爲五之奇
數是也

大於二之偶數皆可以二約之故凡遇偶數之大於二者即知
其非數根

奇數之單位爲五者則皆可以五約之故亦知其非數根

除此之外皆須用法攷之方能知其數之是否數根

除偶數之大於二者及奇數之單位爲五者皆不能一見而辨
其是否數根故非有法以攷之不可

奇數之根或即爲其數之平方邊或有一根大於其數之平方邊
或諸根俱小於其數之平方邊

奇數自乘仍爲奇數故奇數之根或即爲其數之平方邊　如
九之平方邊爲三　二十五之平方邊爲五　四十九之平方
邊爲七等類是也

大小兩奇數相乘仍爲奇數故奇數之根或有一根大於其數
之平方邊　如三十五之平方邊畧近於六而其數爲五與七
兩數根相乘所生是也

多奇數連乘仍爲奇數故奇數如有多根則其根必俱小於其
數之平方邊　如一百〇五之平方邊畧近於十而其根三與
五與七俱小於十是也

凡大於平方邊之根以小於平方邊之根約本數可得之

如三十五以五約之可得七是也

所以有單位之數根即可求兩位之數根有兩位之數根即可求
四位之數根

法以單位之數根三與五與七連乘得一百〇五以與兩位之
數求等其有等者可以等數約之故非數根其無等者除一之
外俱不能度故爲數根

如欲知六十一是數根否則以六十一與一百〇五求等得一
即知六十一是數根

如欲知五十七是數根否則以五十七與一百〇五求等得三
即知五十七有三可約非數根

用此法以攷一百以內之數得一位及兩位之數根其數如左

三　五　七　一一　一三　一七　一九　二三　二九　三一　三七　四一　四三　四七
五三　五九　六一　六七　七一　七三　七九　八三　八九　九七

如以此諸數連乘之與他數求等則可得三位四位之諸數根

惟數根之數無窮而連乘之數位數愈多用之不便故用此法以攷數位之數根則甚便而施之多位之數則不便

李氏秋紉有攷數根之捷術曰以本數乘二之對數求得其眞數減二餘以本數度之能度盡者本數爲數根不能度盡者本數非數根

此術雖爲攷數根之公法惟所設之數若太大則乘二之對數已爲極多位眞數之對數不能檢表而得眞數若用對數求眞數法求之演算亦非易事故用之仍覺不便余欲舍對數外別求簡易之術遂窮索數理之奧賾乃知李氏立術之源亦不外乎諸乘尖堆及連比例而已試爲一一詳論之

無論何數以本數累多加一數乘之以一累多加一數除之各求至若干次則得數必爲整數

此即諸乘尖堆之積數也　如任設一數以本數加一乘之二除之得本數之二乘尖堆　又以本數加二乘之三除之得本數之三乘尖堆　又以本數加三乘之四除之得本數之四乘尖堆　順是以下其乘法每多加一數除法亦每多加一數任求至若干次則能得本數之若干乘尖堆積其數必皆爲整數

無論何數以本數累多減一數乘之以一累多加一數除之各求至若干次則得數亦必爲整數

此亦諸乘尖堆之積數也惟前條之法所求得者皆爲本數之諸乘尖堆而此條之法所求得者爲本數遞減一數之增乘尖堆　如任設一數爲本數以本數減一乘之二除之得本數減一之二乘尖堆　又以本數減二乘之三除之得本數減二之三乘尖堆　又以本數減三乘之四除之得本數減三之四乘尖堆　順是以下其乘法每多減一數除法每多加一數任求至若干次得本數減幾之某乘尖堆至本數減盡而止則此減數增乘之諸尖堆其數亦必爲整數

試以數明之設本數爲五則以四乘之二除之得四之二乘尖堆積十　又以三乘之三除之得三之三乘尖堆積十　又以二乘之四除之得二之四乘尖堆積五　又以一乘之五除之得一之五乘尖堆積一

以上二種尖堆其數必爲整數此因前此之乘法中每藏有後次除法之數根不然則本數中藏有除法之數根所以除之恆能得整數此非理之奇乃數之巧也

如本數爲五其乘法六以二除之能得整數三故其二乘尖堆積十五爲整數　又七乘之三除之其以三除七雖不能得整數而前此之乘法六旣受二除尚能受三除所以其三乘尖堆積三十五仍爲整數　又如本數爲五其乘法四以二除之能得整數故其四之二乘尖堆積十爲整數　又乘法三除法亦三故三之三乘尖堆積十爲整數　又乘法二除法四其四雖不能除二而前次之乘法四僅以二除今次之乘法二乃以四除則統計之猶以二除二以四除四也所以其二之四乘尖堆積五仍爲整數　又乘法一除法五其五雖不能除一而可約本數爲一故其一之五乘尖堆積一仍爲整數

凡本數之諸乘尖堆其乘數小於本數者皆與本數有等惟乘數等於本數者則或與本數無等

如本數爲五則其二乘尖堆積十五　三乘尖堆積三十五　四乘尖堆積七十　皆與本數有等　惟其五乘尖堆積一百二十六與本數無等

如本數爲九則其二乘尖堆積四十五　三乘尖堆積一百六十五　四乘尖堆積四百九十五　五乘尖堆積一千二百八十七　六乘尖堆積三千〇〇三　七乘尖堆積六千四百三十五　八乘尖堆積一萬二千八百七十皆與本數有等　惟其九乘尖堆積二萬四千三百一十與本數無等

凡減數增乘之諸尖堆其乘數小於本數者亦皆與本數有等惟乘數等於本數者則其數爲一若乘數比本數大一數則其數爲○

如本數爲五則其四之二乘尖堆積十　三之三乘尖堆積十　二之四乘尖堆積五　皆與本數有等　而一之五乘尖堆積其數爲一

如本數爲九則其八之二乘尖堆積三十六　七之三乘尖堆積八十四　六之四乘尖堆積一百二十六　五之五乘尖堆積一百二十六　四之六乘尖堆積八十四　三之七乘尖堆積三十六　二之八乘尖堆積九　皆與本數有等　而一之九乘尖堆積其數亦爲一

又如五減五則其數爲〇故〇之六乘尖堆爲〇　九減九則其數亦爲〇故〇之十乘尖堆亦爲〇　設減數再大則乘法爲負數而得負積

無論本數之諸乘尖堆及減數增乘之諸尖堆其本數若可以某數約之者則以本數度其某乘之尖堆積必不能度盡而可與本數輾轉相度求得等數

如本數爲九則以本數度其三乘尖堆積一百六十五餘三　或以本數度其減二之三乘尖堆積八十四亦餘三　試以三轉度本數適盡

如本數爲十五則以本數度其三乘尖堆積六百八十餘五　或以本數度其減二之三乘尖堆積四百五十五亦餘五　以本數度其五乘尖堆積一萬一千六百二十八餘三　或以本數度其減四之五乘尖堆積三千〇〇三亦餘三　試以三與五轉度本數皆適盡

所以取本數諸乘尖堆之乘數小於本數者與本數求等可知本數之是否數根如本數爲數根則本數必皆能度盡小於本數之乘數各尖堆如本數非數根則必有度之不能盡而可與本數輾轉相減求得等數以約本數者

諸乘尖堆之乘數小於本數者皆與本數有等故本數若爲數根則無他數可約本數而可以本數約其諸尖堆所以本數度諸尖堆必皆適盡　本數若非數根則必有某數爲等數其等數可約本數亦可約諸尖堆故以本數度諸尖堆必有某尖堆不能適盡而可與本數輾轉相減以得等數其等數必可約其

本數
如本數爲五則以本數五度其二乘尖堆積十五　三乘尖堆積三十五　四乘尖堆積七十　皆適度盡無餘所以知本數五爲數根
如本數爲九則以九度其二乘尖堆積四十五　四乘尖堆積四百九十五　五乘尖堆積一千二百八十七　七乘尖堆積六千四百三十五　八乘尖堆積一萬二千八百七十　皆適度盡無餘　而以九度其三乘尖堆積一百六十五　六乘尖堆積三千〇〇三　皆不能適盡而可以餘數轉度本數求得等數三可約本數九爲三所以知九非數根
若取減數增乘諸尖堆之乘數小於本數者與本數求等亦可知本數之是否數根其法與前同
減數增乘尖堆之乘數小於本數者亦必與本數有等故本數若爲數根則必可度盡諸尖堆　本數若非數根則必有輾轉度餘之數可約其本數
如本數爲五則以五度減一之二乘尖堆積十　減二之三乘尖堆積十　減三之四乘尖堆積五　皆適盡所以知本數五爲數根
如本數爲九則其減一之二乘尖堆積與減六之七乘尖堆積皆爲三十六　減三之四乘尖堆積減四之五乘尖堆積皆爲一百二十六　減七之八乘尖堆積爲九　以九度之皆適盡而其減二之三乘尖堆積減五之六乘尖堆積皆爲八十四以本數度之不盡三以三轉度本數九適盡故可以三約本數所以知本數九非數根
用此法以攷數之是否數根其理甚確惟所設之數愈大則所用之尖堆愈多所以未爲捷法
如所設數爲五則祇須用二乘至四乘之三箇尖堆積　所設數爲九則須用二乘至八乘之七箇尖堆積　所設數爲一百〇一則須用二乘至百乘之九十九箇尖堆積　若所設數爲千萬則豈能遍求其千萬箇之尖堆積而一一課之乎所以必變其術使不必逐一求其尖堆庶幾簡捷可用
準幾何例凡數與本數有等其和數亦與本數有等則本數根所度之諸尖堆其和數亦爲本數根可度所以欲設法以求其諸尖堆之總積
如本數爲五若能求得其本數之一乘至四乘之尖堆總積一百二十五　或能求得減數之一乘至四乘之增乘尖堆總積三十　則皆與五有等
求本數之本乘以上諸尖堆總積須用本數之本乘尖堆求之其術仍甚繁重又其總積雖仍與本數有等而本數之非數根者往往亦能度盡之所以攷數根之法不用本數之諸乘尖堆總積而用減數增乘之諸尖堆總積
凡本數之本乘以上諸尖堆總積等於本數之本乘尖堆積減一之數而求本數之本乘尖堆積必以本數累多加一爲乘法乘至如本數之次數亦必以一累多加一爲除法除至如本數

之次數所以本數愈大求之愈繁重況即使求得總積而本數之非數根者亦能度之適盡故不能用

如本數爲九以九度其三乘尖堆積一百六十五餘三　以九度其六乘尖堆積三千〇〇三餘六　他尖堆積皆適爲本數度盡　設求得其諸尖堆之總積以九度之則餘三之數與餘六之數兩者相并得九適亦爲九所度盡不能得九之等數三所以亦不能用

減數增乘之諸尖堆其總積加一之數等於廉法表橫層之總數

廉法表之斜層　第一層諸數皆爲一　第二層一・二・三・四・等數爲各數之一乘尖堆數　第三層一・三・六・十等數爲二乘尖堆數　第四層一・四・十・二十等數爲三乘尖堆數　順是以下每下一斜層爲多一乘之尖堆數以至無窮

廉法表

一
一 一
一 二 一
一 三 三 一
一 四 六 四 一
一 五 十 十 五 一
一 六 十五 二十 十五 六 一
一 七 二十一 三十五 三十五 二十一 七 一

廉法表之橫層　第一數爲一　第二數爲本數亦爲一乘尖堆數　第三數爲本數減一之二乘尖堆數　第四數爲本數減二之三乘尖堆數　第五數爲本數減三之四乘尖堆數　順是以下每後一數爲本數多減一之增一乘尖堆數以至於一而止

如舉第六橫層言之其式爲 一 五 十 十 五 一 以甲乙等字指之爲

己	戊	丁	丙	乙	甲
一	五	十	十	五	一

或

甲	乙	丙	丁	戊	己
一	五	十	十	五	一

則甲爲一　乙爲本數　丙爲本數減一之二乘尖堆　丁爲本數減二之三乘尖堆　戊爲本數減三之四乘尖堆　己爲本數減四之五乘尖堆

所以廉法表之橫層即減數增乘之諸尖堆數而多一數

凡求廉法表橫層之總數以一加倍至一數減一之次數即得

如其層爲第三層則以一加倍二次即得第三橫層之以總數四

如其層爲第四層則以一加倍三次即得第四橫層之總數八

順是以下每下一層則多加倍一次以至任何層皆合

置廉法表橫層之總數減去二即自一乘起以至比本數少一乘之減數增乘之諸尖堆積總數

廉法表橫層之總數內減去多數一又減去一之本乘尖堆一則所餘者即是自本數之一乘尖堆起以至二之本數減一乘之尖堆止之總數也

如本數爲五則以廉法表第六橫層之總數三十二減二得三十爲五之一乘尖堆與四之二乘尖堆三之三乘尖堆二之四

乘尖堆之總數

所以有任何數欲攷其是數根否祗須以一加倍之如本數之次數又減去二餘以本數度之適盡者本數爲數根不盡者本數非數根　其不盡之數或爲本數有等或與本數無等

此不過求一之累倍連比例率至本數之次數爲本數加一之廉法表橫層總數耳既得廉法表橫層之總數減去二卽爲本數以內之減數增乘諸尖堆總積故以本數度之可攷數根

李氏之術亦本此意惟因以二連乘多次爲繁故以對數代之耳余以爲求二之連比例率數可以超位而得且數之大於本數者可以隨時先去之則竟用眞數亦非難求不必借徑於對數也故更立一術如左

術曰凡奇數欲攷其是數根與否則以本數減一爲偶數屢折半至遇奇數則減一折之至一而止　乃以折減之次序顛倒之從二起凡遇折半處則用自乘遇減一處則用二乘乘時有滿本數者則隨時去之末以二減之適盡者本數爲數根

如本數爲五則減一得四折半二次得一　乃以二自乘二次得十六滿五去之得一又以二乘之得二減二得〇卽知本數五爲數根

如本數爲九則減一得八折半三次得一　乃以二自乘二次滿九去之得七又自乘一次得四十九滿九去之得四又以二乘之得八減二得六與本數九求等得三

如本數爲一百〇一則減一折半二次又減一折半三次又減一折半一次得一　乃以二自乘得四以二乘之得八又自乘得六十四又自乘得四千〇九十六滿本數去之得五十六自乘得三千一百三十六滿本數去之得五以二乘之得十自乘得一百又自乘得一萬滿本數去之得一以二乘之得二減二適盡卽知一百〇一爲數根

如有數十二萬三千四百五十七則減一折半六次又減一折半三次又減一折半四次又減一折半一次又減一折半一次又減一折半一次得一　故其術應以二自乘倍之又自乘倍之又自乘倍之又自乘四次而倍之又自乘三次而倍之又自乘六次而倍之滿本數則隨時去之至末減二與本數求等

草曰二自乘得四以二乘之得八　又自乘得六十四以二乘之得一百二十八　又自乘得一六三八四以二乘之得三二七六八　又自乘得一〇七三七四一八二四滿本數去之得三六二九五　又自乘得一三一七三二七〇二五滿本數去之得四〇八三五　又自乘得一六六七四九七二二五滿本數去之得八六九八三　又自乘得七五六六〇四二二八九滿本數去之得一〇三五〇一　二乘之滿本數去之得八三五四五　又自乘得六九七九七六七〇二五滿本數去之得二〇七三　又自乘得四二九七三二九滿本數去之得九九七九一　又自乘得九九五八二四三六八一滿本數去之得七八六〇四　以二乘之滿本數去之得三三七五一　又自乘得一一三九一三〇〇〇一滿本數去之得一一五七一九

又自乘得一三三九〇八八六九六一滿本數去之得一二三四五六　又自乘得一五二四一三八三九三六滿本數去之得一　又自乘三次仍得一　以二乘之得二減二適盡則知本數十二萬三千四百五十七爲數根

合以上諸法有時可求得多位數之各根

如有數十一萬七千九百三十六欲求其根

草曰其數可以二約四次得七千三百七十一卽知中有四箇二爲根　又以七千三百七十一與一百〇五求等得二十一卽知有三與七爲根　乃以三與七約之得三百五十一又與一百〇五求等得三卽知尚有三爲根　又以三約之得一百十七又與一百〇五求等得三卽知仍有三爲根　又以三約之得三十九再與一百〇五求等得三卽知仍有三爲根　又以三約之得十三與一百〇五無等　共求得四箇二根四箇三根一箇七根一箇十三根所以知其數之根爲

二·二·二·二·三·三·三·三·七·十三

如有數十六萬二千七百二十欲求其根

草曰其數可五次以二約之得五千〇八十五卽知其中有五箇二根　又視五千〇八十五之單位爲五知其中有五爲根　以五約之得一千〇十七與一百〇五求等得三知其中有三爲根　以三約之得三百三十九仍與一百〇五求等得三知其中尚有三爲根　以三約之得一百十三與一百〇五無等知其中更無三·五·七·爲根　乃以一百十三減一折半四次又減一折半一次又減一折半一次得一　乃以二自乘倍之得八　又自乘倍之得一百二十八滿一一三去之得十五　又自乘得二百二十五滿一一三去之得一百十二　又自乘得一二五四四滿一一三去之得一　又自乘二次仍得一　以二乘之得二減二得〇知一一三亦爲數根所以十六萬二千七百二十之根爲

二·二·二·二·二·三·三·五·一一三

新陽趙元益校

金匱華蘅芳學

朱松庭四元玉鑑首列今古開方會要之圖內分爲二一爲梯法七乘方圖一爲古法七乘方圖其如何用以開方則朱書未明言讀朱書者亦弗知也余謂是圖必能爲開正負諸乘方之用其開卷而首列是圖者必爲是書中所不可不著也惟是心力慵鈍未能遽通其義攷之梅氏駱氏夏氏之說亦覺未得要領蓄疑於胸中者久之邇年來因演算積較之術始知圖中各數乃專爲遞開一數而設是古時開方所用之乘數也其梯法之圖乃專明步法進退之例與秦氏數書九章之法大略相同蓋其所謂今法也集今古之法而會其要則朱氏之意也數百年久晦之義今得一旦復明此亦數理之自然非余之力也爰著開方古義二卷卷一專演古題卷二論余求得各術之故庚辰十一月若汀氏識

徵引舊說

梅氏少廣拾遺云嘗見九章比類歷宗算會算法統宗俱載有開方作法本原圖而僅及五乘並無算例同文算指稍變其圖具七乘方算法而不適於用詮釋不無譌誤西鏡錄演其圖爲十乘方而舉數僅詳三乘方一式而已

康熙壬申稍取古圖紬繹其旨趣爲作十二乘方算例頗覺詳明然後知今日所用開平方之法迺算家徑捷之用而不及古圖之簡括精深也

駱氏開方作法本原圖解云開方作法本原圖梅勿菴先生謂其相生之序皆加一算是矣然作法之原究未詳晰則以勿菴固未知天元一術也

又云是圖專爲天元一而設也第天元一術久失其傳故知之者鮮耳

夏氏洞方術論整根遞加圖云算學之遞加圖猶農夫之耒耜漁人之網罟也亦猶璇璣迴文縱橫反復皆成文也數雖至約理則無窮凡算法之精深者皆不外乎是梅氏少廣拾遺演爲圖而未詳加詮釋春池駱氏謂是圖專爲天元一而設其論亦似囿一隅蓋諸乘方之廉率方隅亦祗屬遞加數之一端耳烏足盡遞加數之妙哉是圖求法有斜橫直側四種自左上斜求至右下自右上斜求至左下曰斜行自左橫求至右自右橫求至左曰橫行自上直求至下曰直行自右下斜求至左上自左下斜求至右上曰側行以上四種相爲錯綜算法皆有條不紊亦數之賾而理之奧也

玉鑑原圖

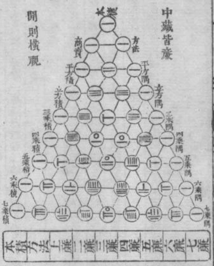
今古開方會要之圖

梯法七乘方圖

正者爲從負者爲益

不動數	直置數	第一等	定實位
方位決	進退一	第二等	除實法
第一廉	進退二	第三等	平方隅
第二廉	進退三	第四等	立方隅
第三廉	進退四	第五等	三乘隅
第四廉	進退五	第六等	四乘隅
第五廉	進退六	第七等	五乘隅
第六廉	進退七	第八等	六乘隅
第七廉	進退八	第九等	七乘隅

古法七乘方圖



釋圖

梯法七乘方圖　此圖專明實方廉隅相步如梯之有級也

正者為從負者為益　言相消得式之後惟實之正者則曰正實其方廉隅之正者則曰從方從廉從隅其實方廉隅之負者則曰益實益方益廉益隅也

不動數　即太極也言此數有一定之位不能上下左右移動也

方位法　言此為方之位亦為實之法也

第一廉至第七廉　言此為第幾廉之位也

直置數　言此數直置之不進退也

進退一至進退八　言相步之時此數每進幾位每退幾位也

第一等至第九等　其等字非相等之等乃等級之等猶言第幾層也

定實位　言其最上之一數定為實之位也

除實法　言此若為末層之數則可用之為法以除其實也

平方隅至七乘隅　言此若為末層之數則為某方之隅也

古法七乘方圖　言此為古時開方之法也程氏算法統宗有開方作法本原圖數與此同又名遞加圖又名廉法表

開則橫視　言開方之時必將此圖橫看之也猶言圖中橫行必改之為直行也

中藏皆廉　言其中間所含之各數皆為廉法也

本積商實至七乘積　言其左邊各層之一為各乘方之積也

方法至七乘隅　言其右邊各層為法與隅也

自中藏皆廉至此皆明造此各數之法也　如〡〢〡為〡〡之平方其上層之〡為平方積其下層之〡為平方隅中藏之〢為廉　如〡〣〣〡為〡〡之立方其上層之〡為立方積其下層之〡為立方隅中藏之〣〣皆為廉也

亦言用數時截取之處也　如開平方則截取其三層開立方則截取其四層各至其本方之積廉隅為止而用之也

本積至七廉　其字不注於各數之下而別書於橫格之中與其上各層若不相屬者疑指開得之餘式而言觀以下各算式自明其意

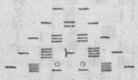
立術

開諸乘方術曰取圖中之數從一起至本乘方之層為止　齊其

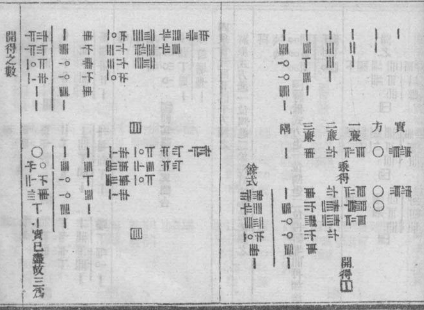
行而橫列之亦橫列其實方廉隅直乘圖數之各行乘訖依橫行相加譬於左爲餘式訖開得一數於下　再將餘式求之如前記其共開得二數於下　如是屢求至實盡而止則其共開之數即爲所求之數　方廉隅應進退其位者進退訖乃乘之其開得之數亦必隨方進退　實不盡者如常法命分之　開得之數不合於問者仍用本乘方之法續開之　若遇上兩層俱適盡者則爲開得兩數相同　多層俱空者仿此

氣退元[illegible]四乘方開之

從圖取各數如



乃齊其行而橫列之如



兩儀化元[illegible]平方開之

取圖數一[illegible]列之如[illegible]　實[illegible]　方[illegible]　隅[illegible]

[illegible]爲開

得之數

三才運元[illegible]三乘方開之

乘得

[illegible]因餘式之上

兩層皆爲空故知開得兩箇小元數皆爲正一惟此數與題中所問之理不合故用其餘式〇〇[illegible]再開之

[illegible]即爲開得五與問合

四象會元[illegible]平方開之

將原式方進一位隅進二位得[illegible]然後開之

[illegible]將餘式方退一位隅退二位得[illegible]再如法開之

上商

置初商爲開得十四合問

演段求源第十二問

三乘方開之

此式之實方上下廉皆爲負不能步得正商其正隅負下廉俱爲單位之數若拘於李氏開方說之例不應進位（較數平方此類）惟因負實甚大方廉甚小則可以隅步實其理（與參前四象會元式是也）與方廉俱空者無異所以將原式之方廉隅遞進一位得

然後開之

一

併其餘式之方

廉隅已大於餘實知不能再開十數故退其所進之位爲

再開之

一

二

一

二

三

卽爲開得十八

端匹互隱 第二問 平方開之

將原式之隔步其實進位作 然後開之

將餘式 退其位爲 再開之

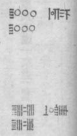
卽爲

開得五十四

方圓交錯 第一問 三乘方開之

將原式之隔步其實得 然後開之

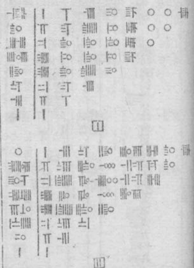
四將餘式退其位爲 再開



之

四即為開得十二

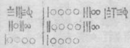
方圓交錯第九問 [illegible] 六乘方開之



即為開得二

或問歌象第七問 [illegible] 方平開之

將原式方進二位隅進四位為 [illegible] 然後開之



四將餘式退其位為 [illegible] 再開之

將餘式退其位爲

再開之

即爲開得一百三十五

鎖奩香容第十八問 平方開之

將原式方進一隅進二爲 開之

將餘式

退之爲 再開之

將其餘式 以隅十五爲分母乘實約隅

得 另開之

即爲開得分子五與分母十五求等得五約其

母子與前開得之壹數十三相加即爲開得十三又三分之二

雜範類會第二問 平方開之

將原式進其方隅之位爲 然後開之

將餘式退其位爲

再開之

將餘式退其位爲

孤百一再開之

即爲開得

三百五十四

左右逢元第十六問 開無隅平方

左右逢元第十九問 六乘方開之

即爲開得四

金匱華蘅芳學

列諸乘方式之實方廉隅而於後各行之末屢列其隅每以右上與左下相加爲左上之數至得餘式之實方廉隅而止則爲開得一數如是屢求之必可開得各元之數

如平方式丅卌丨求其元之兩同數

丅卌丨
〓卌丨　卌丨
丨　丨　是爲求一次以[一]記之

則其算式爲

〓卌丨　卌
丨　　　丨
丨

乃將其斜行之數　卌　改爲直行〓卌丨再求之

〓卌丨
〇卄丨　〇
十丨　爲求二次以[二]記之　又改其斜行　十爲直行〇十

丨因求至二次而實爲空故知其元數爲二

又將其〇十丨去其上層之空位爲十丨再求之

十丨
〇丨[三]　改其斜行爲直行〇丨因求一次而上層爲空即
丨

知第二元數與第一元數之較爲一以較數一與第一元數二相加得第二元數爲三

如平方式𝍫丅丨求其元之兩同數

𝍫丅丨　𝍫卌丨　丨卄丨
𝍫卌丨　丨卌丨　〇十丨
卌丨[一]　卄丨[二]　〇丨[三]求至三次而上兩層同
丨　丨　丨

時變爲空卽知元之兩箇同數皆爲三

如立方式卌丌卌丨求其元之各同數

卌丌卌丨　丅丌丅丨
丅丌卌丨　〇丅卌丨
丅卄丨[一]　丌卌丨[二]　卽得元數二
丅丨　卌丨
丨　丨

丌卌丨
〇卄丨
十丨[三]　卽得較數一與第一元數二相加得第二元數
丨

三

〡十〡

〡 ○丄〣

即得較數一以與第二元數三相加得第三箇元數

四

此即用平常開方之法而每次遞商一數也其算式之逐行漸低者即常法所謂一變二變三變之數也其戉直之數即變訖之式也因此式可第二次開之故名之爲餘式此種變法諸乘方皆通爲一例故可用代數求其公式

將各乘方式之實方廉隅代以甲乙丙丁等字如法求其變訖之式則得各式如下

平方之式爲

甲丄乙丄丙

乙丄丙　乙丄二丙

丙　丙　丙

其餘式爲

甲丄乙丄丙

乙丄二丙

丙

立方之式爲

甲丄乙丄丙丄丁

乙丄丙丄丁　乙丄二丙丄三丁

丙丄丁　丙丄二丁　丙丄三丁

丁　丁　丁　丁

其餘式爲

甲丄乙丄丙丄丁

乙丄二丙丄三丁

丙丄三丁

丁

三乘方式爲

甲丄乙丄丙丄丁丄戊

乙丄丙丄丁丄戊　乙丄二丙丄三丁丄四戊

丙丄丁丄戊　丙丄二丁丄三戊　丙丄三丁丄六戊

丁丄戊　丁丄二戊　丁丄三戊　丁丄四戊

戊　戊　戊　戊　戊

其餘式爲

甲丄乙丄丙丄丁丄戊

乙丄二丙丄三丁丄四戊

丙丄三丁丄六戊

丁丄四戊

戊

則可見各餘式內之甲乙丙丁戊在某層中所用之倍數相同故可將其倍數列爲表以諸乘方式之實方廉隅乘之即可得商一之餘式

開方表第一

〡	〡	〡	〡	〡	〡	〡
	〡	〢	〣	〤	〥	〦
		〡	〣	〦	〡〇	〡〥
			〡	〤	〡〇	〢〇
				〡	〥	〡〥
					〡	〦
						〡

此表各數次第相生其法有二

第一法　每行首末兩層之數皆爲〡其中間各層之數各以

右數與右上之數相加而成

第二法　先由上法得其一二兩行之數其第三行爲第二行自乘之數其第四行爲第二行再乘之數每後一行則多乘一次

既得此表乃知四元玉鑑中古法七乘方圖其數皆與此合知古人開方亦用此法也

如有平方式丅卌丨求其元之兩同數

則取表中三行之數與實方隅列如卌　丨丨　乘之得

丅　丨
丨　丨𝍧丨

丅　‖
𝍭𝍭　卌卌
丨‖丨　囗　丨‖丨　四即得元數二　又將其𝍮丨上

‖卌丨　〇𝍮丨

實下法除得丨與‖相加得又一元數三

如平方式卌〇丨求其元之兩同數

卌　卌
〇〇　囗　‖‖
丨‖丨　丨‖丨　四即得元數二　又將||||丨除得
卌‖丨　〇||||丨

得數與‖相加得卄爲又一箇元數

如有平方式卌丨丨求其元之兩同數

卌
将原式方進一隅進二爲卌〇〇乃求之

〇〇
〇〇〇　回
卌〇〇

卌
卌〇〇
〇〇〇　回將卌〇〇方退一隅退二爲卌‖再求之
卌〇〇

卌
‖‖　‖‖
丨‖丨　回即得元數二十一　又將||||丨除得卌與‖相
〇||||丨

加得卌爲又一箇元數

如有立方式下丅下丨求其元之各同數

則列　實下　丨
方丅　表丨丨　各齊其行而乘之
廉下　數丨‖丨
隅丨　丨|||丨|||丨

丅
-|
-|
丅卄丅　□即得元之小同數爲一
|〣〣|
○〢卌|

又列卌　||　乘得卌卌　□即得較數一與小元
||　|　||
|　|〢|　|〣|
　　　　○十|

數一相加得二爲第二個元數　又將十|除得一與二相

加得三爲大元數

如有立方式卌〢丅|求其元之各同數

卌　十
-〢　〣〣
丅卄丅　□　卌丅卌　□其實方廉同時俱變爲空
|〣〣|　|〣〣|
十〣卌|　○○○|

故知元之三個同數俱爲二

如有立方式□丅|求其元之各同數

將原式方進一廉進二隅進三爲□□乃求之

□即得元數爲十　乃將餘式□□□以十約

之得□□□實方隅皆同名只能開負數故反其偶層之號

爲□□□乃求之　□　□　將餘式□□□方退一隅

退二爲〣卌求之　卌卌　□　卄卄　□即得較數卄

與前開得之○相加得卄因其上兩層同時爲空故知其兩

個負元之數皆爲二

如有平方式丅〢|求其元之十位密率

丅　卌　卌
〢〢　〣〣　丅丅
|〢|□　|〢|□　|〢|□則開得元之單位
卌〣|　卌丅|　十〣|

數爲三其餘式十而一思將方退一廉退二然不如將實進二方進一爲便故作式再求之

此式之方仍大於實故

作以記之而再進其位爲

則求得正元之十位密率爲三

一二三一○五六二五

惟因題式爲較數平方其方𝍡爲正負兩元反號相加之數

故知其負元之十位密率爲五·二三一○五六二五

用前表以開方其便有四造表極易一便也位數甚少二便也有

乘無除三便也數多相同四便也有此四便故覺他法皆不能及

前表本專爲開正數而設故遇欲開負數之時必將開方式閒層

反其正負令負元變爲正元此乃遷就之法也玆於常法外更求

其專開負數之表

將各乘方式之實方廉隅代以甲乙丙丁等字如開負數之法

求其變訖之式則其各乘方之式如下

平方之式爲

丙丅乙丄甲

丅二丙丄乙　丅丙丄乙

丙　丙　丙

其餘式爲

丙丅乙丄甲

丅二丙丄乙

丙

立方之式爲

丅丁丄丙丅乙丄甲

三丁丅二丙丄乙　丁丅丙丄乙

丅三丁丄丙　丅二丁丄丙　丅丁丄丙

丁　丁　丁　丁

其餘式爲

丅丁丄丙丅乙丄甲

三丁丅二丙丄乙

丅三丁丄丙

丁

三乘方之式爲

戊丅丁丄丙丅乙丄甲

丅四戊丄三丁丅二丙丄乙　丅戊丄丁丅丙丄乙

六戊丅三丁丄丙　三戊丅二丁丄丙　戊丅丁丄丙

丅四戊丄丁　丅三戊丄丁　丅二戊丄丁　丅戊丄丁

戊　戊　戊　戊　戊

其餘式爲

戊丅丁丄丙丅乙丄甲

丅四戊丄三丁丅二丙丄乙

六戊丅三丁丄丙

丅四戊丄丁

戊

則可見各餘式內之甲乙丙丁戊在其層中所用之倍數及正負

皆相同故可列其各倍數爲表

開方表第二

𝍠

𝍠̸　𝍠

𝍠　𝍡̸　𝍠

𝍠̸　𝍢　𝍢̸　𝍠

𝍠　𝍣̸　𝍥　𝍣̸　𝍠

𝍠̸　𝍤　𝍩〇̸　𝍩〇　𝍤̸　𝍠

𝍠　𝍥̸　𝍩𝍤　𝍪〇̸　𝍩𝍤　𝍥̸

此表以諸乘方式之實方廉隅乘之即可得商負一之餘式

如有平方式𝍤𝍫̸𝍠求其元之負同數

將原式方進一隅進二爲〔算籌〕乃列〔算籌〕

元之兩箇負同數皆爲十二

如有平方式〔算籌〕求其元之負同數

〔算籌〕即得元

之負同數爲三十三

如有平方式〔算籌〕○〔算籌〕求其元之負同數

〔算籌〕即得其負元之數爲六

如有三乘方式〔算籌〕○〔算籌〕○〔算籌〕求其元之負同數

〔算籌〕即得負元二〔算籌〕爲較數與

負二相加得又一負元三

以上兩表正數負數皆可求矣惟每求一次必乘一次若遇四五以上之數則求之甚費楮墨必設法稍免其繁

如將呷吃哂叮㖂代餘式

戊丄丁丄丙丄乙丄甲
四戊丄三丁丄二丙丄乙
六戊丄三丁丄丙
四戊丄丁
戊

中之甲乙丙丁戊則得

㖂丄叮丄哂丄吃丄呷
四㖂丄三叮丄二哂丄吃
六㖂丄三叮丄哂
四㖂丄叮
㖂

又命

㖂＝戊
叮＝四戊丄丁
哂＝六戊丄三丁丄丙
吃＝四戊丄三丁丄二丙丄乙
呷＝戊丄丁丄丙丄乙丄甲

四㖂＝四戊
三叮＝一二戊丄三丁
二哂＝一二戊丄六丁丄二丙
吃＝四戊丄三丁丄二丙丄乙

六㖂＝六戊
三叮＝一二戊丄三丁
哂＝六戊丄三丁丄丙

四㖂＝四戊
叮＝四戊丄丁

則得

一六戊丄八丁丄四丙丄二乙丄甲
三二戊丄一二丁丄四丙丄乙
二四戊丄六丁丄丙
八戊丄丁
戊

於此式之各層中取其甲乙丙丁戊

所用之各倍數備其行而列之爲表則用此表一次可抵

表二次

開方表第三

[illegible]

此表亦專爲開正數之用若將此表之每行自下而上反其偶層之號則得下表爲專開負數之用

開方表第四

[illegible]

以上四表若兼用其一三兩表以開正數兼用二四兩表開其負數則可省少半工夫

如有平方式[illegible]求其元之兩同數

同數皆爲九

如有立方式𝍫𝍰𝍢𝍩𝍠求其元之各同數

從第三表得

從第一表得

即得元數三　又從第三表得

即得較數二與

三相加得又一元數五

又從第三表得

即又得較數二與五相加得其大元數七

凡諸乘方式每開得一元則其實爲空故可將餘式去其空位爲降一乘之方開其較數既得一較數則其上層又爲空故又可去其空位爲再降一乘之方開其第二較數如是屢開屢降以至爲法實兩層而止此乃開方之常法其理至當不易今從用表之法忽得一奇與之理因可不去其空位仍用本乘方開之亦得較數也

如立方式𝍠〇𝍤𝍧𝍩𝍠𝍩𝍤𝍠其元數爲三爲五爲七

則先開得小元數三其餘式爲〇𝍧𝍮𝍠本可去其上層之空位將𝍧𝍮𝍠平方開之得其較數二

今不去其空位即將〇𝍧𝍮𝍠仍用立方之法開之

亦得較數二

其餘式〇𝍣〇𝍠若去其上層之空位將𝍣〇𝍠平方開之

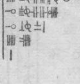
卌　卌
○○　四　‖‖　四得又一較數二
|‖|　|‖|
卌‖|　○‖‖‖|
若不去空位卽將○卌○|立方開之
○　卌
卌卌　十十
○○○　四　‖‖T‖‖　四亦得又一較數二
|‖‖‖‖|　|‖‖‖‖|
卌十‖‖|　○‖‖T|
又如將‖‖‖下|平方開之得其較數二其餘式爲○廿|本可去其空位將廿|上實下法除得又一較數二　若不去空位卽將○廿|平方開之
○　十
廿廿　○○　四亦可得又一較數二
|‖|　|‖|
十○|　○‖|
此理不難解也凡諸乘方式可開得幾箇元數者本無論先開何元皆可今旣二一商之則必先得其小元而實爲空不去空位仍用本乘方一一續商之則又必遇其第二元而實又爲空仍留其空位用本乘方再一一續商之乃遇其大元則其屢次不去空位而用本乘方一一開之者爲之先開其大元也　惟不用此法則習焉而不察耳
惟明晃其上層已空本可降一方開之者今可不降其方開之此理又不可謂之不奇因其開去一元而變訖之式與本未開去而原少一乘之式其形無異所以知無論何乘方之式皆可於其上增一空位之層而用多一乘之方開之其所得各元之正同數必無異所增者負元耳
由是推之則知於其上任增數空位而用多數乘之方開之其各元之正同數亦必無異
如立方式‖‖‖卌|其元數爲三爲五爲七
若於其上加空位爲○‖‖‖卌|三乘方開之
四亦得元數三
又將其餘式仍用三乘方開之
四爲第一
四爲第二

較數　故亦得其元數為三為五為七

若於原式之上增兩空位為○○[illegible]四乘方開之亦得其正元之數為三為五為七

由此法所變得之多乘方皆與原式為同式之形故可任造多乘方式使其正元與所設之數同而實方廉隅皆為極簡之數

如欲造四乘方式其正元之數為二為四為六則用立方式[illegible]於其上加兩空位求之



[illegible]為求得之四乘方式其正元之數為二為四為六兩負元皆為一

金匱華蘅芳學

論積較之理

積較者列各積相較復列各較相較復列各較之較相較必至無較乃止

凡求較之諸積必俱爲同方其底邊之長率必爲相等之數

凡列各數或自小而大或自大而小皆可惟恒以自右向左橫列之爲便

凡求較數其各數或以小減大或以大減小而則以正負俱可惟恒以右數減左數書其減餘之數於左下爲便

凡較數之次數恒如其方之指數

如遞加之數只有一次較數

1	2	3	4
1	1	1	

平方之積有二次較數

1	4	9	16	25
3	5	7	9	
2	2	2		

立方之積有三次較數

1	8	27	64	125
7	19	37	61	
12	18	24		
6	6			

由此推之三乘方之積有四次較數四乘方之積有五次較數

每多一乘之方其較數亦多一次

凡各方之積相加則其各較亦相加各方之積相減則其各較亦相減所以諸乘方和較之積較其數之次數恒如其最大之方之指數

如平方與立方相加則其和積之較數有三次

2	12	36	80	150
10	24	44	70	
14	20	26		
6	6			

如二平方積與一立方積相減則其較積之較數亦有三次

1	0	−9	−32	−75
−1	−9	−23	−43	
−8	−14	−20		
−6	−6			

[illegible] 𝍥

[illegible] 𝍥

惟因求次之較數各行必相同又因每以下一數減其上一數則得右上之數故其右下所缺之數可以此法補之

〡此處所缺之數　〡 〡 〇 [illegible]

〇 [illegible] 可補足之　[illegible]

[illegible] 如下式　[illegible]

[illegible]　[illegible]

[illegible]　[illegible]

[illegible]　[illegible]

惟因相連之兩行每以左下之數與右上之數相加則得左上之數每以左下之數減左上之數則得右上之數所以有任一行之數可求得其左右各行之數

用此法可求諸乘方之積

如欲求某數之立方積則將一二三四之立方積如法求得各行之數

𝍠 𝍠 〇 𝍥 第一行

𝍧 𝍦 𝍥 𝍥 第二行

𝍪𝍦 𝍩𝍨 𝍩𝍡 𝍥 第三行

𝍮𝍣 𝍫𝍦 𝍩𝍧 𝍥 第四行

𝍠𝍪𝍤 𝍮𝍠 𝍪𝍣 𝍥 第五行

則其第一行之積𝍠為一之立方積第二行之積𝍧為二之立方積第三行之積𝍪𝍦為三之立方積如是類推至任何行皆合所以求至第某行即得某數之立方積

用此法亦可將諸乘方之積求其方邊之數

如有立方積三百四十三欲求其方邊

則得〇一二三各求其立方積以與所設之數相減即得商〇之餘實𝍢𝍬𝍢商一之餘實𝍢𝍬𝍡商二之餘實𝍢𝍫𝍤商三之餘實𝍢𝍩𝍥

將此各餘實為積如法求其各行之數乃名其第一行為首行第二行為左一行第三行為左二行……則得各行之數如下

𝍢𝍬𝍢 𝍠̸ 𝍥 𝍥̸ 首行

𝍢𝍬𝍡 𝍠̸ 〇 𝍥̸ 左一行

𝍢𝍫𝍤 𝍦̸ 𝍥̸ 𝍥̸ 左二行

𝍢𝍩𝍥 𝍩𝍨̸ 𝍩𝍡̸ 𝍥̸ 左三行

𝍡𝍯𝍨 𝍫𝍦̸ 𝍩𝍧̸ 𝍥̸ 左四行

𝍡𝍩𝍧 𝍮𝍠̸ 𝍪𝍣̸ 𝍥̸ 左五行

𝍠𝍪𝍦 𝍱𝍠̸ 𝍫〇̸ 𝍥̸ 左六行

〇 𝍠𝍪𝍦̸ 𝍫𝍥̸ 𝍥̸ 左七行

求至左七行而積為〇則知其方邊之數為七

此法亦可通於正負諸乘方

如有平方式[illegible]欲求其元之兩同數

則用商〇之餘實[illegible]商一之餘實[illegible]商二之餘實[illegible]求其左各行之數

[illegible] 首行
[illegible] 左一行
[illegible] 左二行
[illegible] 左三行
[illegible] 左四行
[illegible] 左五行
[illegible] 左六行
[illegible] 左七行

至左四行左七行其積皆爲〇則知元之同數爲四七

如有立方式[illegible]欲求其元之各同數

則用商〇之餘實[illegible]商一之餘實[illegible]商二之餘實[illegible]商三之餘實〇求其左各行之數

[illegible] 首行
[illegible] 左一行
[illegible] 左二行
[illegible] 左三行
[illegible] 四行
[illegible] 左五行
[illegible] 左六行
[illegible] 左七行

至左三行左五行左七行其積皆爲〇則知元之同數爲三爲五爲七

凡元之正同數於左各行內求之元之負同數於右各行內求之

如有平方式[illegible]欲求其元之各同數

則用商〇之餘實[illegible]商一之餘實[illegible]商二之餘實[illegible]求其左右各行之數

[illegible] 右六行
[illegible] 右五行
[illegible] 右四行
[illegible] 右三行
[illegible] 右二行
[illegible] 右一行
[illegible] 首行
[illegible] 左一行
[illegible] 左二行
[illegible] 左三行

至左三行右六行其積皆爲〇則知元之正同數爲三負同數爲大

求各種公式

用以上之法以求左右各行之數必依次而得若求至數十百行則不勝其繁所以必設一法可徑求其第某行之各數乃適於用

法以甲乙丙丁……代首行各數以$甲_{一}乙_{一}丙_{一}丁_{一}$……代左一行各數以$甲_{二}乙_{二}丙_{二}丁_{二}$……代左二行各數至以$甲_{卯}乙_{卯}丙_{卯}丁_{卯}$……代左卯行各數其右一行至右卯行各數以$甲_{下}乙_{下}丙_{下}丁_{下}$……至$甲_{卯}$〇$乙_{卯}丙_{卯}丁_{卯}$……代之則共爲一幅積較式如下

$甲_{卯}$	⋯⋯	$甲_{三}$	$甲_{二}$	$甲_{一}$	$甲$	$甲_{丅一}$	$甲_{丅二}$	$甲_{丅三}$	⋯⋯	$甲_{丅卯}$
$乙_{卯}$	⋯⋯	$乙_{三}$	$乙_{二}$	$乙_{一}$	$乙$	$乙_{丅一}$	$乙_{丅二}$	$乙_{丅三}$	⋯⋯	$乙_{丅卯}$
$丙_{卯}$	⋯⋯	$丙_{三}$	$丙_{二}$	$丙_{一}$	$丙$	$丙_{丅一}$	$丙_{丅二}$	$丙_{丅三}$	⋯⋯	$丙_{丅卯}$
$丁_{卯}$	⋯⋯	$丁_{三}$	$丁_{二}$	$丁_{一}$	$丁$	$丁_{丅一}$	$丁_{丅二}$	$丁_{丅三}$	⋯⋯	$丁_{丅卯}$
左卯行		左三行	左二行	左一行	首行	右一行	右二行	右三行		右卯行

依較數之例其

$$\text{㊄}\begin{cases}\text{㊀}\begin{cases}丙_{一}=丙\perp丁_{一}\\ 丙_{二}=丙_{一}\perp丁_{二}\\ 丙_{三}=丙_{二}\perp丁_{三}\\ \vdots\\ 丙_{卯}=丙_{卯丅一}\perp丁_{卯}\end{cases}\\ \text{㊁}\begin{cases}丙_{丅一}=丙\top丁\\ 丙_{丅二}=丙_{丅一}\top丁_{丅一}\\ 丙_{丅三}=丙_{丅二}\top丁_{丅二}\\ \vdots\\ 丙_{丅卯}=丙_{丅卯\perp一}\top丁_{丅卯\perp一}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{㊁}\begin{cases}\text{㊀}\begin{cases}乙_{一}=乙\perp丙_{一}\\ 乙_{二}=乙_{一}\perp丙_{二}\\ 乙_{三}=乙_{二}\perp丙_{三}\\ \vdots\\ 乙_{卯}=乙_{卯丅一}\perp丙_{卯}\end{cases}\\ \text{㊁}\begin{cases}乙_{丅一}=乙\top丙\\ 乙_{丅二}=乙_{丅一}\top丙_{丅一}\\ 乙_{丅三}=乙_{丅二}\top丙_{丅二}\\ \vdots\\ 乙_{丅卯}=乙_{丅卯\perp一}\top丙_{丅卯\perp一}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{㊀}\begin{cases}\text{㊀}\begin{cases}甲_{一}=甲\perp乙_{一}\\ 甲_{二}=甲_{一}\perp乙_{二}\\ 甲_{三}=甲_{二}\perp乙_{三}\\ \vdots\\ 甲_{卯}=甲_{卯丅一}\perp乙_{卯}\end{cases}\\ \text{㊁}\begin{cases}甲_{丅一}=甲\top乙\\ 甲_{丅二}=甲_{丅一}\top乙_{丅一}\\ 甲_{丅三}=甲_{丅二}\top乙_{丅二}\\ \vdots\\ 甲_{丅卯}=甲_{丅卯\perp一}\top乙_{丅卯\perp一}\end{cases}\end{cases}$$

若較數只有二次則其

$$\begin{aligned}丁&=○\\ 丁_{一}&=○\\ 丁_{二}&=○\\ 丁_{三}&=○\\ &\vdots\\ 丁_{卯}&=○\\ 丁_{丅一}&=○\\ 丁_{丅二}&=○\\ 丁_{丅三}&=○\\ &\vdots\\ 丁_{丅卯}&=○\end{aligned}$$

而

$$丙_{一}=○$$

$$\begin{aligned}丙_{二}&=丙\\ 丙_{三}&=丙\\ &\vdots\\ 丙_{卯}&=丙\\ 丙_{丅一}&=丙\\ 丙_{丅二}&=丙\\ 丙_{丅三}&=丙\\ &\vdots\\ 丙_{丅卯}&=丙\end{aligned}$$

用此於㊁式之㊀㊁兩式中得

$$\begin{aligned}乙_{一}&=乙\perp丙\\ 乙_{二}&=乙\perp二丙\\ 乙_{三}&=乙\perp三丙\\ &\vdots\\ 乙_{卯}&=乙\perp卯丙\\ &\vdots\\ 乙_{丅一}&=乙\top丙\\ 乙_{丅二}&=乙\top二丙\\ 乙_{丅三}&=乙\top三丙\\ &\vdots\end{aligned}$$

又從㊀式之㊀㊁兩式得

$$\begin{aligned}甲_{一}&=甲\perp乙\perp丙\\ 甲_{二}&=甲\perp二乙\perp三丙\\ 甲_{三}&=甲\perp三乙\perp六丙\\ &\vdots\\ 甲_{卯}&=甲\perp卯乙\perp\frac{卯(卯\perp一)}{二}丙\\ &\vdots\\ 甲_{丅一}&=甲\top乙\\ 甲_{丅二}&=甲\top二乙\perp丙\\ 甲_{丅三}&=甲\top三乙\perp三丙\\ &\vdots\\ 甲_{丅卯}&=甲\top卯乙\perp\frac{卯(卯\top一)}{二}丙\end{aligned}$$

則得其左卯行之式爲

$$\begin{aligned}甲_{卯}&=甲\perp卯乙\perp\frac{卯(卯\perp一)}{二}丙\\ 乙_{卯}&=乙\perp卯丙\\ 丙_{卯}&=丙\end{aligned}$$

右卯行之式爲

$$\begin{aligned}甲_{丅卯}&=甲\top卯乙\perp\frac{卯(卯\top一)}{二}丙\\ 乙_{丅卯}&=乙\top卯丙\\ 丙_{丅卯}&=丙\end{aligned}$$

若較數共有三次則其

丁$_{一}$=丁
丁$_{二}$=丁
丁$_{三}$=丁
⋯⋯
丁$_{卯}$=丁
⋯⋯
丁$_{下}$=丁
丁$_{下二}$=丁
丁$_{下三}$=丁
⋯⋯
丁$_{卯}$=丁

用此

於㊁丙式得

丙$_{一}$=丙⊥丁
丙$_{二}$=丙⊥二丁
丙$_{三}$=丙⊥三丁
⋯⋯
丙$_{卯}$=丙⊥卯丁
⋯⋯
丙$_{下}$=丙⊤丁
丙$_{下二}$=丙⊤二丁
丙$_{下三}$=丙⊤三丁
⋯⋯
丙$_{卯}$=丙⊤卯丁

又從㊀乙式得

乙$_{一}$=乙⊥丙⊥丁
乙$_{二}$=乙⊥二丙⊥三丁
乙$_{三}$=乙⊥三丙⊥六丁
⋯
乙$_{卯}$=乙⊥卯丙⊥卯(卯⊥一)/二 丁
⋯
乙$_{下}$=乙⊤丙
乙$_{下二}$=乙⊤二丙⊥丁
乙$_{下三}$=乙⊤三丙⊥三丁
⋯
乙$_{卯}$=乙⊤卯丙⊥卯(卯⊤一)/二 丁

又從㊀甲式得

甲$_{一}$=甲⊥乙⊥丙⊥丁
甲$_{二}$=甲⊥二乙⊥三丙⊥四丁
甲$_{三}$=甲⊥三乙⊥六丙⊥一〇丁
⋯
甲$_{卯}$=甲⊥卯乙⊥卯(卯⊥一)/二 丙⊥卯(卯⊥一)(卯⊥二)/二·三 丁
⋯
甲$_{下}$=甲⊤乙
甲$_{下二}$=甲⊤二乙⊥丙
甲$_{下三}$=甲⊤三乙⊥三丙⊤丁
⋯
甲$_{卯}$=甲⊤卯乙⊥卯(卯⊤一)/二 丙⊤卯(卯⊤一)(卯⊤二)/二·三 丁

則得左卯行之式爲

甲$_{卯}$=甲⊥卯乙⊥卯(卯⊥一)/二 丙⊥卯(卯⊥一)(卯⊥二)/二·三 丁
乙$_{卯}$=乙⊥卯丙⊥卯(卯⊥一)/二 丁
丙$_{卯}$=丙⊥卯丁
丁$_{卯}$=丁

其右卯行之式爲

甲$_{卯}$=甲⊤卯乙⊥卯(卯⊤一)/二 丙⊤卯(卯⊤一)(卯⊤二)/二·三 丁
乙$_{卯}$=乙⊤卯丙⊥卯(卯⊤一)/二 丁
丙$_{卯}$=丙⊤卯丁
丁$_{卯}$=丁

觀以上各式知左右卯行之式可合爲一式所以得公式爲

㊀卯

甲$_{卯}$=甲⊥卯乙⊥卯(卯⊤一)/二 丙⊥卯(卯⊤一)(卯⊤二)/二·三 丁⊥⋯
乙$_{卯}$=乙⊥卯丙⊥卯(卯⊤一)/二 丁⊥卯(卯⊤一)(卯⊤二)/二·三 戊⊥⋯
丙$_{卯}$=丙⊥卯丁⊥卯(卯⊤一)/二 戊⊥卯(卯⊤一)(卯⊤二)/二·三 己⊥⋯
丁$_{卯}$=丁⊥卯戊⊥卯(卯⊤一)/二 己⊥卯(卯⊤一)(卯⊤二)/二·三 庚⊥⋯

各至函末較之項而止

⋯⋯初項爲末較

⋯⋯至末較而止

用此㊀卯式之法求左行則令卯爲正數求右行則令卯爲負數

如有某行積較歸上下徑求其左第七行之數

則令

卯=七
甲=三四三
乙=⊤一
丙=六
丁=⊤六

用此於㊀卯式中得

甲$_{七}$=三四三⊤七⊥一六八⊤五〇四=〇
乙$_{七}$=⊤一⊥四二⊤一六八 =⊤一二七
丙$_{七}$=六⊤四二 =⊤三六
丁$_{七}$= =⊤六

即得其左第七行之數爲○丅卄丅卄丅下

如有某行之較○丅卄丅卄丅下徑求其右第七行之數

則令

卯＝一丅七

甲＝二丅○

乙＝二丅一二七

丙＝二丅三六

丁＝二丅六

用此於㊇式中得

甲$_{七}$＝○丄八八九丅七五六丄二一○＝三四三

乙$_{七}$＝丅一二七丄二五二丅一二六＝丅一

丙$_{七}$＝丅三六丄四二＝六

丁$_{七}$＝丅六

即得其右第七行之數爲○卌卜丅下

從㊇式可變得他式使各較變大變小令所得之積其邊之長率大小若干倍

如將甲甲$_{卯}$甲$_{丁卯}$……自左而右逆列之如法求其各較則其以甲爲積之一行積較其式如下

甲

甲丅甲$_{卯}$

甲丅二甲$_{卯}$丄甲$_{丁卯}$

甲丅三甲$_{卯}$丄三甲$_{丁卯}$丅甲$_{丁二卯}$

甲丅四甲$_{卯}$丄六甲$_{丁卯}$丅四甲$_{丁二卯}$丄甲$_{丁三卯}$

甲丅五甲$_{卯}$丄一○甲$_{丁卯}$丅一○甲$_{丁二卯}$丄五甲$_{丁三卯}$丅甲$_{丁四卯}$

……

於㊇式中取甲$_{卯}$之相等式以丅卯丅二卯丅三卯……代其卯則得

甲$_{丁卯}$＝甲丅卯乙丄$\frac{二}{卯(卯丁一)}$丙丅$\frac{二\cdot三}{卯(卯丁一)(卯丁二)}$丁丄……

甲$_{丁二卯}$＝甲丅二卯乙丄$\frac{二}{二卯(二卯丁一)}$丙丅$\frac{二\cdot三}{二卯(二卯丁一)(二卯丁二)}$丁丄……

甲$_{丁三卯}$＝甲丅三卯乙丄$\frac{二}{三卯(三卯丁一)}$丙丅$\frac{二\cdot三}{三卯(三卯丁一)(三卯丁二)}$丁丄……

甲$_{丁四卯}$＝甲丅四卯乙丄$\frac{二}{四卯(四卯丁一)}$丙丅$\frac{二\cdot三}{四卯(四卯丁一)(四卯丁二)}$丁丄……

……

即

甲$_{丁卯}$＝甲丅卯乙丄$\frac{二}{卯^{二}丅卯}$丙丅$\frac{二\cdot三}{卯^{三}丅三卯^{二}丅二卯}$丁丄$\frac{二\cdot三\cdot四}{卯^{四}丅六卯^{三}丅一一卯^{二}丅六卯}$戊丅……

甲$_{丁二卯}$＝甲丅二卯乙丄$\frac{二}{四卯^{二}丅二卯}$丙丅$\frac{二\cdot三}{八卯^{三}丅一二卯^{二}丅四卯}$丁丄$\frac{二\cdot三\cdot四}{一六卯^{四}丅四八卯^{三}丅四四卯^{二}丅一二卯}$戊丅……

甲$_{丁三卯}$＝甲丅三卯乙丄$\frac{二}{九卯^{二}丅三卯}$丙丅$\frac{二\cdot三}{二七卯^{三}丅二七卯^{二}丅六卯}$丁丄$\frac{二\cdot三\cdot四}{八一卯^{四}丅一六二卯^{三}丅九九卯^{二}丅一八卯}$戊丅……

甲$_{丁四卯}$＝甲丅四卯乙丄$\frac{二}{一六卯^{二}丅四卯}$丙丅$\frac{二\cdot三}{六四卯^{三}丅四八卯^{二}丅八卯}$丁丄$\frac{二\cdot三\cdot四}{二五六卯^{四}丅三八四卯^{三}丅一七六卯^{二}丅二四卯}$戊丅……

……

乃

令

甲′＝甲

乙′＝甲丅甲$_{卯}$

丙′＝甲丅二甲$_{卯}$丄甲$_{丁卯}$

丁′＝甲丅三甲$_{卯}$丄三甲$_{丁卯}$丅甲$_{丁二卯}$

戊′＝甲丅四甲$_{卯}$丄六甲$_{丁卯}$丅四甲$_{丁二卯}$丄甲$_{丁三卯}$

……

則得

甲′＝甲

乙′＝卯乙丅$\frac{二}{卯丅卯}$丙丄$\frac{二\cdot三}{卯丅三卯丄二卯}$丁丅$\frac{二\cdot三\cdot四}{卯丅六卯丄一一卯丅六卯}$戊丄……

丙′＝卯^{二}丙丅$\frac{二\cdot三}{六卯丅六卯}$丁丄$\frac{二\cdot三\cdot四}{一四卯丅三六卯丄二二卯}$戊丅……

丁′＝卯^{三}丁丅$\frac{二\cdot三\cdot四}{三六卯丅三六卯}$戊丄……

戊′＝卯^{四}戊丅……

爲㊈式

式從此可變得使用之各式如下

令㈣式中

卯＝一〇

則得

呷＝甲

吧＝一〇乙丅四五丙丄一二〇丁丅二一〇戊丄二五二己丅……

㖪＝一〇〇丙丅九〇〇丁丄四四二五戊丅一五〇〇〇己丄……

町＝一〇〇〇丁丅一三五〇〇戊丄九六七五〇己丅……

哦＝一〇〇〇〇戊丅一八〇〇〇己丄……

吧＝一〇〇〇〇〇己丅……

爲㈠式

令㈣式中

卯＝一〇/一

得

呷＝甲

吧＝二〇/一乙丄二〇〇/九丙丄六〇〇〇/一七一丁丄二四〇〇〇〇/四九五九戊丄一二〇〇〇〇〇〇/一九三四〇一己丄一

㖪＝二〇〇/一丙丄六〇〇〇/五四丁丄二四〇〇〇〇/一八五四戊丄一二〇〇〇〇〇〇/八〇三七〇己丄一

町＝二〇〇〇/一丁丄二四〇〇〇〇/三二四戊丄一二〇〇〇〇〇〇/一七五五〇己丄……

哦＝二〇〇〇〇/一戊丄一二〇〇〇〇〇〇/二一六〇己丄……

吧＝一〇〇〇〇〇/一己丄……

爲㈡式

令㈣式中

卯＝丅一

則得

呷＝甲

吧＝丅乙丅丙丅丁丅戊丅己……

㖪＝丙丄二丁丄三戊丄四己丄……

町＝丅丁丅三戊丅六己丅……

哦＝戊丄四己……

吧＝丅己丅……

爲㈢式

令㈣式中

卯＝丅一〇

則得

甲＝甲

吧＝丅一〇乙丅五五丙丅二二〇丁丅七一五戊丅二〇〇二己丅……

㖪＝一〇〇丙丄一一〇〇丁丄七四二五戊丄三八五〇〇己丄……

町＝丅一〇〇〇丁丅一六五〇〇戊丅一五六七五〇己丅……

哦＝一〇〇〇〇戊丄二二〇〇〇〇己丄……

吧＝丅一〇〇〇〇〇己丅……

爲㈣式

今㊃式中

卯＝一丅〇二 則得

甲＝甲

乙＝一二〇己丅二〇〇丙丄三〇〇〇丁丅二四〇〇〇〇戊丅一二〇〇〇〇〇己丅……

丙＝一二〇丙丄六〇〇〇丁丄二四〇〇〇〇戊丄一二〇〇〇〇〇己丄……

丁＝丅一〇〇〇丁丅二四〇〇〇〇戊丅一二〇〇〇〇〇己丅……

戊＝一〇〇〇〇戊丄一二〇〇〇〇〇己丄……

己＝丅一〇〇〇〇〇己丅……

……爲㊄式

以上論積較之理並求各公式皆記行數以別之惟用以演算則覺窒礙難通故不得不設法改之

惟因行數即爲方邊之數其左行之邊爲正右行之邊爲負首行之邊爲〇故可竟記邊數之爲正爲負爲〇更便於用

如有式

〇⊥‖ 右三行

卌卌‖ 右二行

卌下‖ 右一行

卌卌‖ 首行

𝍭卄‖ 左一行

𝍭〇‖ 左二行

卌‖‖ 左三行

今改爲

〇⊥‖ 邊數卌

卌卌‖ 卄

卌下‖ 十

卌卌‖ 〇

𝍭卄‖ 丨

𝍭〇‖ ‖

卌‖‖ |||

負邊之各行向右而書往往限於篇幅時覺不便若强改之爲向左則加減之例與正邊者不同每易錯誤惟用㊂式變其〇邊積較則可一例推之

如將卌卌‖從㊂式變爲卌‖‖邊數〇則可與正邊之式一

卌|||‖邊數十

例推之得

卌丅‖ 卄 其積與前式同

〇𝍧‖ 卌

設題以明各式之用

第一題 有方邊之數十四若於其立方積內減去四十三箇平方積加入六百十四箇方邊則得若干

如邊爲〇則

〇丅〇丄〇＝〇

邊爲一則

二七一五＝四一六丄三四丅一

邊爲二則

四六〇一＝八二二一丄二七一丅八

邊爲三則

二八一四一＝二四八一丄七八三丅七二

用此各同數如法求其各行

〇 邊數〇

|||||| 丨

|||||| ‖

|||||| |||

|||||| ||||

令
甲＝一八三二
乙＝三五〇
丙＝丅六八
丁＝六
從㈠式得
呷＝一八三二
叱＝三五〇〇丄三〇六〇丄七二〇＝七二八〇
哂＝丅六八〇〇丅五四〇〇＝丅一二二〇〇
叮＝六〇〇〇
用此各同數求其

邊數爲十四之行

邊數

則知所求之數爲二千九百十二

第二題　有平方式求其元之兩同數

則用商〇之餘實商一之餘實商二之餘實如法求

其各行

邊數〇

則知元之正同數爲四其負同數須變其積較求之

令
甲＝丅一七二
乙＝三八
丙＝二
從㊃式得
呷＝丅一七二
叱＝丅三八〇丅一一〇＝丅四九〇
哂＝二〇〇
用此各數求其各行

邊數〇

令
甲＝丅一三二
乙＝三一〇
丙＝二〇〇
從㊁式得
呷＝丅一三二
叱＝三一丄九＝四〇
哂＝二
用此各數求其各行

邊數

則知元之負同數爲四十三

第三題 有平方式[illegible]求其元之兩同數

則用商〇之餘實[illegible]商十之餘實[illegible]商二十之餘實[illegible]求其各行

[illegible] 邊數

則知元之同數在四十·五十之間

令

甲＝丅一三二

乙＝三一〇

丙＝二〇〇

從㊂式得

吅＝丅一三二

叱＝三一⊥九＝四〇

哂＝二

用此各數求各行

[illegible] 邊數

則知元之正同數爲四十三其負同數須變其實數求之

令

甲＝丅一七二

乙＝丅四九〇

丙＝二〇〇

從㊄式得

吅＝丅一七二

叱＝四九丅一＝三

哂＝二

用此各數求各行

[illegible] 邊數

則知元之負同數爲四

第四題 有立方式[illegible]求其元之各同數

用各餘實如法求其各行

[illegible] 邊數

則知元之同數在十一數與二十之間

令
甲=丅七二
乙=二八四〇
丙=丅八六〇〇
丁=六〇〇〇
從㊂式得
呷=丅七二
叱=二八四丅三八七⊥一七一=六八
哂=丅八六⊥五四=丅三二
叮=六
用此各數求各行

[illegible] 邊數 〇

則知元之同數爲十三爲十四爲十六

第五題　有平方式[illegible]求其元之兩同數

其隅大於一則其元必有之分因方隅無公等故以隅數三約隅乘實變其式爲[illegible]求之而寄三爲分母

乃用商〇之餘實[illegible]商一之餘實[illegible]商二之餘實[illegible]如法求其各行

[illegible] 邊數 〇

[illegible]

則知元之分子爲八以分母三約之得二又三分之二其元之又一同數須變其較數求之

令
甲=一九二
乙=丅三三
丙=二
從㊀式得
呷=一九二
叱=丅三三〇丅九〇=丅四二〇
哂=二〇〇
用此各數求各行

[illegible] 邊數 〇

令
甲＝丅四八
乙＝丅二〇
丙＝一二〇〇
從㊂式得
甲＝丅四八
乙＝丅二丄九＝七
丙＝二
用此各數求各行

[illegible] 邊數 [illegible]

則知元之分子爲二十四以分母三約之得整數八

第六題　有平方式[illegible]求其正元之密率

則用各餘實如法求其各行

[illegible] 邊數〇

令
甲＝丅一
乙＝七
丙＝二
從㊂式得
甲＝丅一
乙＝七丄〇九＝七九
丙＝〇二
用此各數求各行

[illegible] 邊數 [illegible]

令
甲＝丅一九
乙＝八一
丙＝〇二
從㊂式得
甲＝丅一九
乙＝〇八一丄〇〇〇九＝〇八一九
丙＝〇〇〇二
用此各數求各行

[illegible] 邊數 [illegible]

令
甲＝丅〇二五六
乙＝〇八二三
丙＝一〇〇〇二
從㊂式得
甲＝丅〇二五六
乙＝〇〇八二三丄〇〇〇〇九
＝〇〇八二三九
丙＝〇〇〇〇〇二
用此各數求各行

邊數

令

甲=丅·○○○八七一

乙=·○○八二四五

丙=·○○○○○○二

從㊁式得

甲=丅·○○○八七一

乙=·○○○八二四五{·○○○○○○○九=·○○○八二四五八

丙=·○○○○○○○二

用此

各數求各行

邊數

則知元之密率爲三·一一三一

金匱華蘅芳學

論造表用表之法

前卷各公式於邊積相求之理無不可通惟用餘實以求積較變其累商多次爲煩故舍之而更求他法

惟因同方之各積任若干倍之則其各較亦大若干倍又因不同方之各積其積數若相加則其較數亦相加其積數若相減則其較數亦相減其各積之任何倍相加減亦合此例所以可取各正乘方積各求得其○邊之積較而列爲表

求正乘方之○邊積較不必補足一幅可用其斜行之數變號得之

如求平方數之積較既得

○

丨丨

〣〣〢

不必補足如

○卜〢

丨丨〢可

〣〣〢

取其斜行

○

丨

〢

改爲直行○丨〢自下而上變其偶層之號即得其○邊積較之數○卜〢

立方數之○邊積較○丨丅丅則從立方數之積較式

○

丨丨

〣〢丅

〧〣〢丅

斜行改直之數○丨丅丅變號得之

三乘方數之○邊較積○卜〤亍〤從其斜行改直之數○丨

〤亍〤變號得之

多乘方數之○邊積較並同此例

既知自下而上變其偶層之號則爲正元積較亦可知自上而下變其偶層之號即爲負元積較所以得諸乘方正負兩元之積較表如下

諸乘方正元積較表

○卜〨〣亍〣〦卄〦〤〦卄〦〣	○丨亍〢〤〢〥〣〥〣〥〢	○十〣〤〤卄〢〤	○丨〥〤〤〤〡	○卜〤亍〤	○丨丅丅	○十〢	○丨	丨

諸乘方負元積較表

一	○十	○十‖	○十丅下	○十[illegible]	○十[illegible]	○十[illegible]	○十[illegible]

用表之法以諸乘方之實方廉隅依次直乘表中各行之數而併之則得○邊積較其邊之長率爲一

如有立方式 [illegible] 求其○邊之積較

實 [illegible] 表 一 乘得 [illegible]
方 [illegible] 表 ○一 乘得 ○[illegible]
廉 [illegible] 數 ○十‖ 乘得 ○[illegible]
隅 一 ○一下丅 乘得 ○一下丅

併得 [illegible] 邊數○長率一

若將乘得之數第一行不動第二行進一位第三行進二位第四行進三位每後一行則多進一位進訖併之則得○邊積較其邊之長率爲十

如有立方式 [illegible] 一求其○邊之積較

實 [illegible] 表 一 乘得 [illegible]
方 [illegible] 表 ○一 乘得 ○[illegible]
廉 [illegible] 數 ○十‖ 乘得數 ○[illegible]
隅 一 ○一下丅 乘得 ○一下丅

不動數 [illegible]
進一位 ○[illegible]
進二位 ○[illegible]
進三位 ○[illegible]
積較數 [illegible] 邊數○長率○

若將乘得之數第一行不動第二行進二位第三行進四位第四行進六位每後一行則多進二位進訖併之則得○邊積較其邊

之長率爲百　欲令邊之長率再大者進位之法依此類推

如有立方式 [illegible] 求其三位元數之○邊積較

實 [illegible]

方 [illegible] 表 ○ [illegible] 乘 ○ [illegible]

廉 [illegible] 數 ○ [illegible] 得數 ○ [illegible]

隅 [illegible] ○ [illegible] ○ [illegible]

不動數 [illegible]

進二位 ○ [illegible]

進四位 ○ [illegible]

進六位 ○ [illegible]

積較數 [illegible]

邊數 ○ 長率 [illegible]

負元積較表之用法與正元積較表同

如有立方式 [illegible] 求其負元之○邊積較

實 [illegible]

方 [illegible] 表 ○ [illegible] 乘 ○ [illegible]

廉 [illegible] 數 ○ [illegible] 得數 ○ [illegible]

隅 [illegible] ○ [illegible] ○ [illegible]

不動數 [illegible]

進一位 ○ [illegible]

進二位 ○ [illegible]

進三位 ○ [illegible]

積較數 [illegible]

邊數 ○ 長率 [illegible]

用積較術每求得元之一箇同數可變其積較使少一層

如有立方式𝍥𝍢𝍣𝍠求其元之各同數

先用四層積較求其小元數

𝍧 𝍤 𝍭 𝍦邊數〇

𝍨 𝍥 𝍬 𝍦 𝍠

𝍣 𝍢 𝍫 𝍦 𝍡

〇 𝍣 𝍫 𝍦 𝍢

既得小元數三則可將其積較之餘式𝍣𝍫𝍦以一除其第一層之數𝍣以二除其第二層之數𝍫以三除其第三層之數𝍦則得𝍣𝍫𝍡　乃以諸層之和爲上層之數以下兩層之和爲第二層之數其下層之數仍爲下層則得𝍤𝍫𝍡爲變得之少一層積較其邊數仍爲三

乃用三層積較求其第二個元數

𝍤 𝍫 𝍡邊數𝍢

𝍢 𝍧 𝍡 𝍢

〇 𝍤 𝍡 𝍧

既得第二個元數五則可將其積較之餘式𝍪𝍡　以一除其上層之𝍪以二除其下層之𝍡則得𝍪𝍠　乃以兩層之和爲上層其下層之數仍爲下層則得𝍪𝍠爲變少一層之積較其邊數仍爲五

乃用兩層積較求其第三個元數

𝍪 𝍠邊數𝍧

𝍩 𝍠 𝍦

〇 𝍠 𝍦

則得第三個元數七

此變少層數之法其理從積較表任一行之數求其上一行之數而生

如於元正積較表中任取其第六行之數去其上層之空位得𝍠𝍭𝍤𝍣以正數如法併之得𝍠𝍣𝍤𝍫𝍧

〇𝍩𝍧𝍭𝍧即爲第五行之數

將第五行之數去其上層之空位得𝍩𝍧𝍭𝍧以正數如法除之得𝍩𝍦𝍪𝍦如法併之得〇𝍠𝍬𝍦即爲第四行之數

將第四行之數去其上層之空位得𝍠𝍬𝍦以正數如法除之得𝍠𝍪𝍡如法併之得〇𝍩𝍡即爲第三行之數

將第三行之數去其上層之空位得𝍩𝍡以正數如法除之得𝍩𝍠如法併之得〇𝍠即爲第二行之數

將第二行之數去其上層之空位得𝍠以正數如法除之得𝍠無可併則仍得𝍠即爲第一行之數

如於負元積較表中任取其第六行之數去其上層之空位得

十[illegible]以負數如法除之得一[illegible]如法併之得
〇十卌[illegible]卽爲第五行之數
將第五行之數去其上層之空位得十卌[illegible]以負數如法
除之得一[illegible]如法併之得〇十丅下卽爲第四行
之數
將第四行之數去其上層之空位得十丅下以負數如法除之
得一卌‖如法併之得〇十‖卽爲第三行之數
將第三行之數去其上層之空位得十‖以負數如法除之得
一十如法併之得〇十卽爲第二行之數
將第二行之數去其上層之空位得十以負數如法除之得一
無可併則仍得一卽爲第一行之數

此法之公式爲

呷＝甲⊥二乙⊥三丙⊥四丁⊥五戊⊥……
𠮙＝二乙⊥三丙⊥四丁⊥五戊⊥……
哂＝三丙⊥四丁⊥五戊⊥……
叮＝四丁⊥五戊⊥……
㖂＝五戊⊥……

於公式之各層中取甲乙丙丁……之各倍數列之爲表則爲積較
減層表

積較減層表

$\frac{丨}{丨}$	$\frac{‖}{丨}$	$\frac{|||}{丨}$	$\frac{||||}{丨}$	$\frac{|||||}{丨}$	$\frac{丅}{丨}$	$\frac{丌}{丨}$	$\frac{Ⅲ}{丨}$
	$\frac{‖}{丨}$	$\frac{|||}{丨}$	$\frac{||||}{丨}$	$\frac{|||||}{丨}$	$\frac{丅}{丨}$	$\frac{丌}{丨}$	$\frac{Ⅲ}{丨}$
		$\frac{|||}{丨}$	$\frac{||||}{丨}$	$\frac{|||||}{丨}$	$\frac{丅}{丨}$	$\frac{丌}{丨}$	$\frac{Ⅲ}{丨}$
			$\frac{||||}{丨}$	$\frac{|||||}{丨}$	$\frac{丅}{丨}$	$\frac{丌}{丨}$	$\frac{Ⅲ}{丨}$
				$\frac{|||||}{丨}$	$\frac{丅}{丨}$	$\frac{丌}{丨}$	$\frac{Ⅲ}{丨}$
					$\frac{丅}{丨}$	$\frac{丌}{丨}$	$\frac{Ⅲ}{丨}$
						$\frac{丌}{丨}$	$\frac{Ⅲ}{丨}$
							$\frac{Ⅲ}{丨}$

右表所列之數上爲分母下爲分子
此表之用法與諸乘方正負兩元積較表同惟前表以實方廉隅之數乘之此則以欲變之積較各層乘之耳
如有積較式〇卌[illegible]求其減層之積較

卌	[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\frac{丨}{丨}$	$\frac{‖}{丨}$	$\frac{|||}{丨}$	$\frac{||||}{丨}$
	$\frac{‖}{丨}$	$\frac{|||}{丨}$	$\frac{||||}{丨}$
		$\frac{|||}{丨}$	$\frac{||||}{丨}$
			$\frac{||||}{丨}$

乘得
卌
[illegible]
[illegible]
丅丅丅丅

併得[illegible]爲減層積較

積較之數本從諸乘方式實方廉隅之數而生故從任一行之積較皆可返求其實方廉隅之數

如有積較式𝍣𝍣𝍫𝍣𝍫𝍥𝍥求其立方之式

法以𝍣𝍣𝍫𝍣𝍫𝍥𝍥為第一式

將第一式去其上層得𝍫𝍣𝍫𝍥𝍥以一除其上層之𝍫𝍣以二除其第二層之𝍫𝍥以三除其第三層之𝍥則共得𝍫𝍣𝍭𝍡　乃以上中下三數之和為上層以中下兩數之和為中層其下層之數仍為下層則得𝍫𝍢𝍪𝍡為第二式

將第二式去其上層得𝍪𝍡以一除其上層之𝍪以二除其下層之𝍡則共得𝍩𝍠　乃以兩數之和為上層其下層之數仍為下層則得𝍣𝍠為第三式

將第三式去其上層得𝍠以一除之仍得𝍠無他層可加則仍得𝍠為第四式

乃取每式第一層之數合為一行得𝍣𝍣𝍫𝍢𝍣𝍠即為所求之立方式

此法之理乃將積較表任一行之數變之使其末層之數為之而其上各層皆為空位也所以可從此理造一表以省屢除屢併之繁

如積較表第一行之數為𝍠因只此一層即可為末層之一故得所求之表其第一行之數為𝍠

將積較表第二行之數為〇𝍠寄其末層之𝍠為分母以上層之〇與所得第一行之𝍠相乘得〇以減〇𝍠得〇𝍠為分子　以所寄之分母𝍠合之即得表之第二行為〇$\frac{𝍠}{𝍠}$

將積較表第三行之數〇𝍠𝍡寄其末層之𝍡為分母橫列其上兩層之數〇𝍠與表數〇$\frac{𝍠}{𝍠}$𝍠相乘得〇$\frac{𝍠}{𝍠}$〇併之得〇$\frac{𝍠}{𝍠}$以減〇〇𝍠得〇$\frac{𝍠}{𝍠}$𝍠為分子　合其母子即得表之第三行為〇$\frac{𝍡}{𝍠}$$\frac{𝍡}{𝍠}$

順是以下俱如是求即得表之各行之數名之曰積較還原表

原表

積較還原表

〇	〇	〇	〇	〇	〇	𝍠
$\frac{𝍦𝍪〇}{𝍠𝍪〇}$	$\frac{𝍠𝍪〇}{𝍪𝍤}$	$\frac{𝍪𝍢}{𝍥}$	$\frac{𝍥}{𝍡}$	$\frac{𝍡}{𝍠}$	$\frac{𝍠}{𝍠}$	
$\frac{𝍦𝍪〇}{𝍡𝍣𝍤}$	$\frac{𝍠𝍪〇}{𝍫𝍣〇}$	$\frac{𝍪𝍣}{𝍩𝍠}$	$\frac{𝍥}{𝍢}$	$\frac{𝍡}{𝍠}$		
$\frac{𝍦𝍪〇}{𝍡𝍤𝍤}$	$\frac{𝍠𝍪〇}{𝍪𝍤}$	$\frac{𝍪𝍣}{𝍠}$	$\frac{𝍥}{𝍠}$			
$\frac{𝍦𝍪〇}{𝍪𝍤𝍤}$	$\frac{𝍠𝍪〇}{𝍩〇}$	$\frac{𝍪𝍣}{𝍠}$				
$\frac{𝍦𝍪〇}{𝍩𝍤𝍤}$	$\frac{𝍠𝍪〇}{𝍠}$					
$\frac{𝍦𝍪〇}{𝍠}$						

如有積較式𝍣𝍠𝍡𝍠求其平方之式

積[illegible]　還[illegible]
較[illegible]　原〇[illegible]
數[illegible]　表〇[illegible]
乘得〇[illegible]
併得[illegible]為所求平方式

如有積較式[illegible]求其平方之式

積[illegible]　還[illegible]
較[illegible]　原〇[illegible]
數[illegible]　表〇[illegible]
乘得〇[illegible]
併得[illegible]為所求平方式

如有積較式[illegible]求其立方之式

積[illegible]　還〇[illegible]
較[illegible]　原〇[illegible]
數[illegible]　表〇[illegible]
乘得〇[illegible]
併得[illegible]為立方式

如有積較式[illegible]求其三乘方之式

積[illegible]　還〇[illegible]
較[illegible]　原〇[illegible]
數[illegible]　表〇[illegible]
乘得〇[illegible]
併得[illegible]為所求之三乘方式

由前法反之即得諸乘方不用積較表而徑求本行積較之法

如有平方式[illegible]求其積較之式

取原式下兩層之數[illegible]以下層之[illegible]減其上層之[illegible]得[illegible]為上層其下層仍為[illegible]則共得[illegible]以一乘其[illegible]以二乘其[illegible]得[illegible]為所求之下兩層以原式之上層[illegible]加之得[illegible][illegible]即為所求之積較式

如有立方式[illegible]求其積較之式

取原式之下兩層[illegible]以下層之[illegible]減其上層之[illegible]得[illegible]為上層其下層仍為[illegible]則得[illegible]以一乘其[illegible]以二乘其[illegible]得[illegible]取原式之第二層[illegible]加之共得[illegible]將[illegible]以中層之[illegible]減其上層之[illegible]得[illegible]為上層以下層之[illegible]減其中層之[illegible]得[illegible]為中層其下層之[illegible]仍為下層則共得[illegible]以一乘其上層之[illegible]以二乘其中層之[illegible]以三乘其下層之[illegible]則共得[illegible]取原式之第一層[illegible]加於上得[illegible]即為所求之積較式

如有三乘方式〇丅〣〇〣丨求其積較之式

列其算式如左

三乘方式〇丅〣〇〣丨

〇〣
丅〣　〣〣　〣〣
〣〣　〣〣　〣〣　〣〣　〣
〣〣　〣〣　〣〣　丅　〣　〣〣　〣
〣〣　丅　丅　〢　〢　丨　丨　丨

爲所求之積較式

由此法可於一上加各空位而求積較表各行之數則比用正乘方求其〇邊積較更易

如丨因只此一層其下無數可取則無可減亦無可乘惟以丨加無則仍得丨故得表之第一行爲丨

將〇丨取其下層之丨因無再下之層則無數以減之惟以一乘之仍得丨加入上一層之〇即得表之第二行數〇丨

將〇〇丨取其下兩層之數〇丨以下層之丨減其上層之〇得十其下層仍爲十則得十丨　以一乘其十以二乘其丨得十〢加入上一層之〇即得表之第三行數〇十〢

所以可於一上多加空位而遞求積較表各行之數

如將〇〇〇〇丨

丨爲表之第一行

〇丨爲表之第二行
十丨

〇十〢爲表之第三行
丨〣〢

〇丨丅丅爲表之第四行
十丅〣丅

〇十〣〣〣爲表之第五行

由此法可造一簡易之表爲遞求積較表各行之用

簡易表

〇丨
〇十〢
〇〇〣〣
〇〇〇〣〣
〇〇〇〇〣〣
〇〇〇〇〇〣〣
〇〇〇〇〇〇丅
〇丅丅

右表之造法其上斜行之數從〇起遞加十其下斜行之數從丨起遞加丨其餘各位俱爲空

此表之用法亦同於以上各表

如將正元積較表第一行之數丨與此表第一行〇丨相乘即得積較表第二行之數〇丨

將第二行數 ○○丨 與 丨○十‖ 相乘得 ○○ ○十‖
○十‖爲第三行數

○○丨 ○○
將十與○十‖ 乘得 ○丨卅
‖ ○○卅‖ ○○卌丅
○丨下丅爲第四行之數

○○丨 ○○
丨○十‖ ○十‖
下○○卅‖ ○○卄卌
丅○○○卅‖ ○○○卌卌
○十卌卄卌爲第五行之數

負元積較表之各行將前表反其正負之號求之

○○十 ○○
十○丨卅 ○十‖
‖○○‖卅 ○○‖下
○十丅下爲第四行之數

○○十 ○○
十○丨卅 ○十‖
丅○○‖卌 ○○卄卌
下○○○‖卌 ○○○卌卌
○十卌卄卌爲第五行之數

以上論造表之法已極詳備茲設數題於下如法求之

一題 有平方式〡〤〡〡 求其元之兩同數

實〡 積丨 乘〡
方〤 較○丨 得○〤
隅丨 表○十‖ 數○十‖

不動數〡
進一位○〡
進二位○〤〥
積較數〡〤〥 邊數○

乃將邊數爲〇之積較橫列之〤 〥 還丨 原○十 表○卄卄

乘得○〤 ○〥〥
倂得〥〤〥爲平方之餘式退其位爲〥下丨

實〥 積丨
方下 較○丨 乘得○下 〥
隅丨 表○十‖ ○十‖
積較〥〤‖ 邊數○

〣〣〢 〡〣〢 〇十〢 〢 〢 〣 爲元數

乃列積較 十 減層表 十 乘得數 十
〢 十十 〡〡
減層數 〇〡

因其積較之數同時減去兩層故知元之又一箇同數亦爲

二十三

二題 有平方式 〣〢 〡 求其元之兩同數

實 〣〢 積 〡 乘 〣〢
方 〢 較 〇〡 得 〇〢
隅 〡 表 〇十〢 數 〇十〢

不動數 〣〢
進二位 〇 〇〢
進四位 〇 〇〢
積較數 〢 〇〇 邊數 〇

乃將邊數之積較橫列之 〢〇〇 〢〇〇〇 還 〡 原 〇十 表 〇十十

乘得 〇 〢〇〇 〇 〇〇〇〇 〇〇〇〇

併得 〢 〇〇 〇〇〇〇 爲餘方式退其位爲 〢 〡

實 〢 積 〡
方 〢 較 〇〡 乘得 〇〢
隅 〡 表 〇十〢 〇十〢
積較 〢 〢 邊數

〇 〢 〢 〢 爲元數

乃將積較之餘式橫列之 〢 〢 與減層表 十 十十 相乘

乘得 〢 〡〡

併得 〢〡 爲減層之積較上爲實下爲法除得〢與〢相

加得廿爲又一箇元數

三題　有立方式　求其大元數

將原式之隅步其下廉得

實　方　廉　隅

諸乘方正元積較表

乘

得

併得

爲積較數

邊數

積　較　數

還　原　表

乘

得

併得

爲餘方之式退其位

實　方　廉　隅

積　較　表

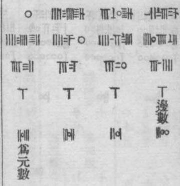
得

乘

得

併得

爲積較數



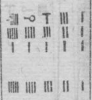
若將題式用負元積較表可求得其兩箇小元數爲負一爲負十二

論各種垛積

金匱華蘅芳學

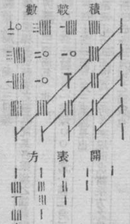
三角諸乘垛為各種垛積所由生其積較之形自成一類如三角一乘垛其積較爲〇丨邊數〇

三角二乘垛其積較爲〇〇丨邊數〇



三角三乘垛其積較爲〇〇〇丨邊數〇

觀上式知三角諸乘垛其積較從邊數爲一之行起其斜行之數即爲開方表



又知三角諸乘垛其積較之數縱橫相等故用去其邊數爲〇之行而縱橫互易之

三角諸乘垛其各次之較數爲遞減一乘之三角垛所成其末較之數俱爲一

如三角二乘垛其一較丨即三角一乘垛也

三角三乘垜其一較丨卽三角二乘垜也其二較丨丨卽三角一

𝍧 𝍦 𝍣 𝍡

乘垜也

所以三角諸乘垜其積較之式可公用之

如三角三乘垜其積較爲〇〇〇丨去其上一層卽爲三角

𝍤 𝍤 〇 〇 𝍣 丨
𝍤 𝍤 〇 𝍥 𝍣 丨
𝍤 𝍤 𝍢 𝍢 丨
丨 丨 丨 丨 丨

二乘垜之積較〇〇丨又去其上一層卽爲三角一乘垜

𝍤 〇 𝍥 𝍣 丨
𝍤 𝍣 𝍢 𝍡 丨
丨 丨 丨 丨 丨

之積較〇丨
丨丨

三角之各乘垜其〇邊之積較惟末層之數爲一其上各層皆爲

𝍤 𝍣 𝍢 𝍡
丨 丨 丨 丨

空位所以其積較表之式甚簡

三角 丨
諸乘 〇丨
垜正 〇〇丨
元積 〇〇〇丨
較表 〇〇〇〇丨

三角 丨
諸乘 〇卜
垜負 〇〇丨
元積 〇〇〇卜
較表 〇〇〇〇丨

凡諸乘方皆可改爲三角諸乘垜凡三角諸乘垜皆可改爲諸乘方

由諸乘方式以求積較卽是改之爲三角垜也由積較還求其諸乘方式卽是將三角垜改爲乘方也所以三角諸乘垜其各次之較數必爲遞降一乘之三角垜

三角諸乘垜其積較表之數爲記其各乘垜之箇數猶諸乘方式之方廉皆空而隔爲一也

如〇丨爲一箇三角一乘垜〇〇丨爲一箇三角二乘垜〇〇〇丨爲一箇三角三乘垜是也

由諸乘正方式而改爲三角各乘垜則成諸乘方之積較表爲記其所改成各三角垜之箇數也

如〇卜‖爲由一箇平方改爲與平方同邊之兩箇三角二乘垜尚少一箇三角一乘垜也

如○丨丅丅為由一箇立方改為六箇三角三乘垜與一箇三角一乘垜則少六箇三角二乘垜也

由三角各乘垜而改為諸乘方式則成積較還原表為記其所改成之各正方箇數也

如○卄卄為由一箇三角二乘垜改為同邊之半箇平方加半箇方邊也

如○丅丅丅為由一箇三角三乘垜改為立方積六分之一加平方積六分之三又加方邊六分之二也

所以必如此改法者因非如此則不能令其邊自小至大皆合此數也

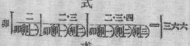
觀以上之說則三角垜之即為積較積較之即為三角垜可以無疑義矣所以有三角之諸乘垜式可即將其反號之積與其各項之倍數為其○邊之積較

如有代數式

求其卯之同數

則求得卯之同數為十

如有代數式



求其卯之同數

邊數						
〇	[illegible]	一	十	一	十	
〡	[illegible]	〇	十	〇	十	
〢	[illegible]	[illegible]	[illegible]	十	十	
〣	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	十	
〤	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	十	
〥	[illegible]	[illegible]	十	[illegible]	十	
〦	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	十	
〧	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	十	
〨	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	十	
〩	〇	[illegible]	[illegible]	[illegible]	十	即知卯之同數爲九

各行之積較皆從〇邊之積較而生故可將〇邊之積較不計其上之各空位但從其有數之層起至末層止專立一名曰積較根

如三角各乘垜其積較之根爲〡　平方各乘垜其積較之根爲十〢　立方各乘垜其積較之根爲〡下丅　三乘方各乘垜其積較之根爲十[illegible]

無論何種垜積其積較之根必爲三角各乘垜之積較根和較而成此猶正負諸乘方之式必爲各正乘方和較而成也所以積較根之式可多至無窮茲但將垜之邊與積皆從一起而積較根各層正負相間者每種僅舉其最要之一式以見其端倪而已

第一種爲三角類各乘垜　其根式之數只有一層

其最要者爲三角各乘垜其根式爲〡

第二種爲平方類各乘垜　其根式之數共有兩層

其中最要者爲平方各乘垜其根式爲十〢

第三種爲立方類各乘垜　其根式之數共有三層

其中最要者爲立方各乘垜其根式爲〡下丅

第四種爲三乘方類各乘垜　其根式共有四層

其中最要者爲三乘方各乘垜其根式爲[illegible]

第五種爲四乘方類各乘垜　其根式共有五層

其中最要者爲四乘方各乘垜其根式爲[illegible]　其餘各種依此類推

無論何種積較根於其上任加各空位皆可求其垜積

如將十〢加各空位於其上爲〇邊積較則求得

邊數	平	方	各	乘	垜
〡	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
〢	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
〣	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
〤	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
〥	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
〦	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

如將立方類之積較根〡下丅加各空位於其上則可求得立方之各乘垜

立方各乘垛

邊數	1	2	3	4	5	6	7
	1	12	69	272	846	2232	5214
	1	11	57	203	574	1386	2982
	1	10	46	146	371	812	1596
	1	9	36	100	225	441	784
	1	8	27	64	125	216	343

垛積之邊數卽爲其高之層數故欲知其垛每層之積可視其降一乘之積而知之

如於立方各乘垛中任指其積203視此行之邊數卽知其垛之高共爲四層又視其下一橫行之數則知其最下一層之積爲146其上一層之積爲46其再上一層之積爲10其最上一層之積爲1

如任指其積371則知其垛共有五層其末層之積爲225上一層之積爲100再上一層之積爲36再上一層之積爲9最上一層之積爲1

無論何種垛積已知其積較之根則亦知其〇邊之積較故用積較之術有積可求其邊有邊可求其積因前卷已詳其法玆不再演其數

各垛邊積相求常法必從條段之理枝枝節節而解之玆從積較術得其一貫之理可用一公法求得其各垛之本術

其公法曰將本垛之積較根加各空位於其上變爲本乘垛之〇邊積較以乘積較還原表將併得之數與積相消卽得本垛有積求邊之開方式　將開方式改爲代數式而化之卽得本垛有邊求積之乘除式

設玆數題如法求之

一題　有積較根1求三角各乘垛有積求邊之術

加一空位于根式之上得〇1爲一乘垛之〇邊積較從積較還原表得〇1與積相消得積[illegible]爲所求一乘垛之式

加二空位於根式之上得〇〇1從還原表得[illegible]與積相消得積[illegible]卽積[illegible]爲所求二乘垛之式

加三空位於根式之上得〇〇〇1從還原表得[illegible]與積相消得積[illegible]卽積[illegible]爲所求三乘垛之式

加四空位於根式之上得〇〇〇〇1從還原表得[illegible]與積相消得積[illegible]卽積[illegible]爲所求四乘垛之式

加五空位於根式之上得〇〇〇〇〇1從還原表得[illegible]與積相消得積[illegible]卽積[illegible]爲所求五乘垛之式

加六空位於根式之上得〇〇〇〇〇〇1從還原表得〇[illegible]與積相消得積[illegible]

[illegible]即[illegible]爲所求六乘堢之式

二題 有積較根[illegible]求平方各乘堢有積求邊之術加一空位於根式之上得〇[illegible]從積較還原表得

〇十

〇一一 併之得〇〇一與積相消得積〇[illegible]爲所求一乘堢之式

加二空位於根式之上得〇〇[illegible]從積較還原表得

〇[illegible]

〇[illegible]與積相消得積[illegible]即[illegible]爲所求

〇[illegible]

二乘堢之式

加三空位於根式之上得〇〇〇[illegible]從還原表得

〇[illegible]

〇[illegible]與積相消得積[illegible]

〇[illegible]

即[illegible]爲所求三乘堢之式

加四空位於根式之上得〇〇〇〇[illegible]從還原表得

〇[illegible]

〇[illegible]與積相消得積[illegible]

〇[illegible]

[illegible]即[illegible]爲所求四乘堢之式

三題 有積較根[illegible]求立方各乘堢有積求邊術加一空位於根式之上得〇[illegible]從積較還原表得

〇十 〇一

即〇[illegible] 即〇[illegible]

〇[illegible] 〇[illegible] 併之得〇〇〇一與積相消得積〇〇[illegible]爲所求一乘堢之式

加二空位於根式之上得〇〇[illegible]從還原表得

〇[illegible] 〇[illegible]

〇[illegible] 即〇[illegible]

〇[illegible] 〇[illegible]

併之得〇〇[illegible]與積相消得積〇[illegible]即[illegible]

〇[illegible]爲所求二乘堢之式

加三空位於根式之上得〇〇〇[illegible]從還原表得

〇[illegible] 〇[illegible]

〇[illegible] 即〇[illegible]

〇[illegible]

併之得〇[illegible]與積相消得積[illegible]

[illegible]即[illegible]爲所求三乘堢之式

四題 有積較根[illegible]求三乘方各乘堢有積求邊之術

加一空位於根式之上得〇[illegible]從還原表得

〇[illegible]
〇[illegible]
〇[illegible]　并之得〇〇〇〇一與積相消得積〇〇
〇[illegible]

〇[illegible]爲所求一乘垜之式

加二空位於根式之上得〇〇[illegible]從還原表得

〇[illegible]　〇[illegible]
〇[illegible]　〇[illegible]
〇[illegible]　即　〇[illegible]
〇[illegible]　〇[illegible]

并之得〇[illegible]〇[illegible]與積相消得積[illegible]〇[illegible]

[illegible]即[illegible]〇[illegible]爲所求二乘垜之式

五題　有任設之數[illegible]以此爲積較根求立方類無名二

乘垜有積求邊之術

加二空位於根式之上得〇〇[illegible]從還原表得

〇[illegible]　〇[illegible]
〇[illegible]　即　〇[illegible]
〇[illegible]　〇[illegible]

并之得〇[illegible]與積相消得積[illegible]

即[illegible]爲所求二乘垜之式

六題　有三角一乘垜有積求邊之式積[illegible]求其以邊求積之

術

將積[illegible]改爲代數式 〇＝積[illegible]卯 則得 卯＝積 即知其一乘垜之積等於其

邊

七題　有三角二乘垜有積求邊之式積[illegible]求其以邊求積

之術

〇＝二積[illegible]卯[illegible]卯 則

$$\frac{二}{卯[illegible]}＝積$$

化其分子得

$$\frac{二}{卯(卯+一)}＝積$$

即知其術爲邊與邊加一相

乘以二除之得積

八題　有三角三乘垜有積求邊之式[illegible]求其以邊求

積之術

〇＝六積[illegible]卯[illegible]三卯[illegible]二卯 則

$$\frac{六}{卯[illegible]三卯[illegible]二卯}＝積$$

化其分子得

$$\frac{六}{卯(卯+一)(卯+二)}＝積$$

即知其術爲邊與邊加一相

乘又以邊加二乘之六除之得積

依同法推之知其四乘垛為 $\dfrac{二四}{卯(卯丄一)(卯丄二)(卯丄三)}=積$ 五乘垛為 $\dfrac{一二〇}{卯(卯丄一)\cdots(卯丄四)}=積$ ……

既得三角各乘垛有邊求積之術則他垛之有邊求積術可不必從開方式化得即從其○邊之積較相比得之

九題　有平方二乘垛○邊之積較○○⊥‖求其以邊求積之術

已知○○|之術為 $\dfrac{二}{卯(卯丄一)}$ ○○○|之術為 $\dfrac{六}{卯(卯丄一)(卯丄二)}$ 則知其○○⊥‖之術為 $\dfrac{六}{二卯(卯丄一)(卯丄二)丅三卯(卯丄一)}$ 即 $\dfrac{六}{卯(卯丄一)[(二卯丄四)丅三]}$ 即 $\dfrac{六}{卯(卯丄一)(二卯丄一)}$

十題　有平方三乘垛○邊之積較○○○⊥‖求其以邊求積之術

已知○○○|之術為 $\dfrac{六}{卯(卯丄一)(卯丄二)}$ ○○○○|之術為 $\dfrac{二四}{卯(卯丄一)(卯丄二)(卯丄三)}$

則知其○○○⊥‖之術為 $\dfrac{二四}{三卯(卯丄一)(卯丄二)(卯丄三)丅四卯(卯丄一)(卯丄二)}$ 即 $\dfrac{二四}{卯(卯丄一)(卯丄二)[(二卯丄六)丅四]}$ 即 $\dfrac{二四}{卯(卯丄一)(卯丄二)(二卯丄二)}$

十一題　有平方四乘垛○邊之積較○○○○⊥‖求其以邊求積之術

已知○○○○|之術為 $\dfrac{二四}{卯(卯丄一)(卯丄二)(卯丄三)}$ ○○○○○|之術為 $\dfrac{一二〇}{卯(卯丄一)(卯丄二)(卯丄三)(卯丄四)}$ 則知其○○○○⊥‖之術為 $\dfrac{一二〇}{二卯(卯丄一)\cdots(卯丄四)丅五卯(卯丄一)\cdots(卯丄三)}$ 即 $\dfrac{一二〇}{卯(卯丄一)\cdots(卯丄三)[(二卯丄八)丅五]}$ 即 $\dfrac{一二〇}{卯(卯丄一)\cdots(卯丄三)(二卯丄三)}$

依同法推之知五乘以上各垛之術為 $\dfrac{七二〇}{卯(卯丄一)\cdots(卯丄五)}$ $\dfrac{五〇四〇}{卯(卯丄一)\cdots(卯丄六)}$ ……

十二題 有立方二乘垜○邊之積較○○丨丅丅求其以邊求積之術

已知○○丨之術爲 二 / 卯(卯丄一)

○○○丨之術爲 六 / 卯(卯丄一)(卯丄二)

○○丨之術爲 二四 / 卯(卯丄一)(卯丄二)(卯丄三)

則知其○○丨丅丅之術爲 四二 / 六卯(卯丄一)…(卯丄三)丅二四卯(卯丄一)(卯丄二)丄一二卯(卯丄一)

即 二四 / 卯(卯丄一)[六(卯丄三)丅二四]丄一二卯(卯丄一)

即 二四 / 卯(卯丄一)(卯丄三)(六卯丅六)丄一二卯(卯丄一)

即 二四 / 卯(卯丄一)[(卯丄三)(六卯丄六)丄一二]

即 二四 / 卯(卯丄一)[六卯丄六卯]

即 二四 / 卯(卯丄一)卯(六卯丅六)

即 二四 / 卯(卯丄一)(六卯丄六)

即 二四 / 六卯(卯丄一)²

即 四 / 卯(卯丄一)²

十三題 有立方三乘垜○邊之積較○○○丨丅丅求其以邊求積之術

已知○○○丨之術爲 六 / 卯(卯丄一)(卯丄二)

○○○○丨之術爲 二四 / 卯(卯丄一)…(卯丄三)

○○○○○丨之術爲 一二○ / 卯(卯丄一)…(卯丄四)

則知其○○○丨丅丅之術爲 二○ / 卯(卯丄一)…(卯丄四) | 二○ / 五卯(卯丄一)…(卯丄三) | 六 / 卯(卯丄一)(卯丄二)

即 二○ / 卯(卯丄一)…(卯丄三)[(四丅卯)丅五] | 六 / 卯(卯丄一)(卯丄二)

即 二○ / 卯(卯丄一)…(卯丄三)(卯丅一) | 六 / 卯(卯丄一)(卯丄二)

即 六○ / 三卯(卯丄一)…(卯丄三)(卯丅一)丄一○卯(卯丄一)(卯丄二)

即 六○ / 卯(卯丄一)(卯丄二)[三(卯丄三)(卯丅一)丄一○]

即 六○ / 卯(卯丄一)(卯丄二)[三卯丄六卯丅九丄一○]

即 六○

卯(卯丄一)(卯丄二)[三卯丄六卯丄一]

即

六〇

卯(卯丄一)(卯丄二)[三卯(卯丄三)丄一]

十四題　有立方類無名二乘垜〇邊之積較〇〇卄|||||||求其以邊求積之術

已知〇〇|之術爲二

卯(卯丄一)

〇〇〇|之術爲六

卯(卯丄一)(卯丄二)

〇〇

〇〇|之術爲二四

卯(卯丄一)(卯丄二)(卯丄三)

則知其〇〇卄|||||||之術爲

六 卯(卯丄一)(卯丄二)(卯丄三)丨六 三卯(卯丄一)(卯丄二)丨六 六卯(卯丄一)

即

六

卯(卯丄一)(卯丄二)(卯丄三)丄三丅六卯(卯丄一)

即

六

卯(卯丄一)(卯丄二)(卯丄六)丅六卯(卯丄一)

即

六

卯(卯丄一)(卯丄二)(卯丄六)丅六

即

六

卯(卯丄一)(卯丄八卯丄六)

即

六

卯(卯丄一)[卯(卯丄八)丄六]

孟子言仁義禮知有四端吾謂算亦有端算之端者何計較之心也兒童分果必爭其大農夫行路必趨捷徑計較之顯然者無論矣他若衣服之工補短截長奇袤合度則有面積之意焉烹飪之工味鹹而和以水味淡而劑以鹽則有比例之意焉此皆能算之端具於生初者也是故有是端而不知擴充之則囿於一藝一能之末有是端而知所以擴充之則統乎萬事萬物之綱故凡天文之高遠地域之廣輪居家而布帛菽粟在官而兵河鹽漕以至儒者讀書考證經史商賈持籌權衡子母莫不待治於算此又算之切於日用斯須不可離者也夫以算之切於日用者既如此具於生初者又如彼宜乎夫人而知之夫人而能之矣而世之學者輒詫爲絕業而苦其難明者何哉竊嘗論之上古之算本簡捷而易明也自後世事物日變人心智慮日出於是設題愈難布算愈繁而精其業者各以心得著書又好爲隱互雜糅窮極微奧不屑以淺近示人甚或秘匿其根源以炫異變易其名目以託古此蓋今古疇人之積習作者之恒情算學之境因是而益深而學算之人宜其望洋而興歎也咸同以來風氣稍開四方嚮學者漸衆津逮初學之書亦漸出顧或力求簡易語焉不詳或稗販成書無足觀覽或硜硜然隨問演草因題立術亦云曲盡能事矣然無論說以疏達之貫徹之學者病其煩瑣讀不終篇輒倦而思卧耳余有鑒於此而重惜人人具有擴充之力而未得其用力之途也思有以誘掖而引進之因舉學算次第之大旨并胸中所欲言者一一達之筆而著於篇演爲算式以習其數設爲問答以窮其趣法由淺而入深語雖繁而易曉聊以擴充其能算之端云爾至於辭句之俚俗體例之參差見哂高明所不計也刻既成因書其緣起於簡端以質海內游藝之君子光緒壬午日躔降婁之次華蘅芳自序

總論算法之理

金匱華蘅芳學

人之心中若果懵懵然茫無知覺則亦不必談及算學若其稍有知覺而能以心計較者即已有算學之理與有生以俱來試觀孩兒嬉戲見果必爭取其大者因其胸中已有一多寡之見存焉也由是知算學之理爲人心所自有並非自外而入故取算書中不甚緊重之題以語不習算法之人彼亦能積思而得其所求之數惟遲速難易則與能算者大異焉此因算之未得其法則各數悉從心計而出故必甚難苟知算法則無論設數如何皆可以法馭之而心中可不必思索所以能事逸而功倍也夫一切算法其初皆從算理而出惟既得其法則其理即寓於法之中可以從法以得理亦可舍理以用法苟其法不誤則其理亦必不誤也

識數之法

物生而後有象象而後有滋滋而後有數則物之有數乃人之强立名目以記物之多寡者也故亦謂之數目

數目之名即一二三四五六七八九十是也然數可多至無窮若每數必立一名則不勝其繁且終不能盡紀其數故又立一簡便之法名其自一至九爲單位之數滿十則爲進一位之數仍以自一至九之各字記之而名之爲當十之位滿百則又進一位亦仍以自一至九之各字記之名之爲當百之位由此而百進爲千千進爲萬而十萬而百萬而千萬其位均以下一位之數滿十而進爲一則任數之如何多皆可以此法記之

所以必以十進位者因人手有十指便於屈指計之也凡常用之數大抵以十進位者爲多惟天文家度分秒之數則以六十進位

各位之數既俱可用自一至九之各數記之則其空位當以零字記之或作一圈以代零字亦可

凡學算法必先從識數起故識數爲算學中第一步工夫不識數之人不可以學算也惟數目之字並無意義可尋其初必從强記而得所以人自孩提之時父母即教其識數聰明之人有數歲即能識數者愚蠢之人有數十歲仍不識數者

識數之法先將自一至十之十個字讀至極熟能一氣貫注而不凌亂錯雜便能將十個物任取幾個數之知其爲何數再從一十一讀至一百則能數一百個錢又知十百爲千十千爲萬等意則其人便可爲識數之人

識數之工夫由於習練而成非但口中要熟亦須眼中看慣方能敏捷如將棊子五枚置於桌上則兒童不能隨口即言其數必用手一一數過而後知之此因眼光未習練之故也及已看慣則物之不滿十個者平常之人皆能一望而知之

惟因眼中亦能識數故數物可不必一個一數而可任幾個數之然亦各有數法譬如數錢數棊則以五個一數而口中呼一五一十十五爲最便譬如數雞卵則手中不能持五個雞卵祇能兩個一數而口中呼一雙兩雙至末則云幾雙或幾雙多一個此固尋常習用之法而其中已暗以加法乘法爲妙用焉雖不經道破則

人亦不覺耳

大抵物之能隨手運動者數之易其不能隨手運動者數之稍難因不能將已數過者另置一邊也嘗如入山林而數叢樹往往數之數次不得分明因其已數過者與未數過者易致看錯非有遺漏則有重覆故不能得其眞實之數然此亦有法焉可將他物於每數過之樹次第作誌則無誌者爲未數過之樹易於遍數而遍誌之以得其的確之數其作誌之意猶之另置一邊也

作誌之法惟手所能及之物或手雖不能及而可用長竿及之者則可若其物非手與竿之所能及則此法不能用譬如欲數清天空之星則其事甚難因不能於星上作誌也

人雖不能於星上作誌然可于紙上作點以肖其星故可觀列宿之形而一一繪之於紙以成星圖則數圖上之星與數天上之星無以異也所以星亦有數

此皆識數以後之巧思也算法亦爲各種巧思故遇一難算之題則必有一法以解之及解去此難又有一難於此者在前必又有一法以解之如此由淺入深步步各有難處而步步各有巧法故無論題之如何深奧皆可於紙上寫之算之以與人共明之

記數之法

凡記數目之字其列位之法有二　一爲直行者　一爲橫行者

直行之數便於文理橫行之數便於布算各隨其便而用之所以算法之書其論說及題目中宜用直行記數其算式則必用橫行非如此則閱者不易明也

直行之數必用十百千萬等字以記其位數其兩數間有空位者必以零字明之

如幾萬幾千幾百幾十幾　如幾千零幾十是也

亦有但記各位之數而不用十百千萬字者則以最下之字爲單位之數其無數之位必作〇以存其位否則易於混淆

如一二三四卽一千二百三十四也　如一〇二〇卽一千零二十也　如一〇〇〇卽一千也

橫行之數不必以十百千萬等字記其位數惟以最右之字爲單位之數其空位必作〇以存其位否則亦易混淆如一二三四卽一千二百三十四也　如一〇二〇卽一千零二十也如一二〇〇〇卽一萬二千也

加法

各數相加而得其和其理爲人所自明惟不得其加之之法則覺數之少者相加易數之多者相加難如將果子十五枚分作三堆置於桌上其第一堆爲三枚第二堆爲五枚第三堆爲七枚試以問但能識數之兒童此三堆果子共有幾枚則兒童不能卽答必將此三堆之果合而數之方知其爲十五枚因彼不知三加五成八以八加七成十五故必和而數之也

所以能和而數之者因其數甚少且果子爲有形之物又能以手搬運故兒童能一一數之若其每堆之果數甚多且重而不易搬運兒童卽不能算矣

假如有錢兩串其第一串爲五百六十七文第二串爲六百七十

八文則不知加法之人即不能知其總數因必先數其滿百之數得十一個一百再數其滿十之數得十三個十又數其八與七之和得十五惟十一個一百爲一千一百而十三個十爲一百三十其間皆有進位之數故欲以所得之三數相加在不明加法之人必以爲極其繁難之事也

若此兩筆錢並非眞有現錢置在面前而爲賬上所記之兩筆數目則不知加法之人欲得其和數更難因各數並無實象可求則手與目皆無所用而心中默計其數每有顧此失彼之處故極易錯誤也

加法之意亦不外乎和而數之之理惟因各數相加自有其法則可不必眞要和而數之而其依法所得之數與和而數得之數無異且無論數之爲多爲少爲虛爲實皆以一法馭之而無難易之分爲故甚便也

加法爲識數之後又進一步工夫故兒童既能識數又能寫自一至九之九個數目字便可學習加法

兩個單位之數相和而成總數其始也必從強記而得

如〇加一爲一　一加二爲三　三加二爲五　九加八爲十七之類

由強記而至於熟既熟之後便能用之及用之甚熟自能脫口而出應手而來不假思索矣

兩個單數相和之數既能爛熟於胸中便可學習任兩個多位之數相加之法

一題　設有數一千三百二十一又有數二千一百零三求共得若干

則將兩數齊其位而橫列一爲兩層於其下作橫線爲界乃從

一三二一
二一〇三
三四二四

末位起每位上下兩數相加而記其所得之本位數於橫線之下如一與三相加得四二與〇相加得二三與一相加得四一與二相加得三則共得三千四百二十四卽所求之數也

二題　設有數二千三百又有數二千零七十求其共數若干

則如法橫列兩數下作橫界線其單位俱爲〇故〇加〇仍得

二三〇〇
二〇七〇
四三七〇

〇其當十之位〇與七相加仍爲七其當百之位三與〇相加仍爲三其當千之位二與二相加得四則共得四千三百七十卽所求之數也

以上兩題之數爲加法中之最易者因其每位上下兩數之和俱不進位故可隨手書其所得之數於界線之下而心中不必記其進位之數也若上下兩數之和爲兩位之數則祇能先書其本位之數其進位之數須默記於心再與其上一位之數相加所以稍難

三題　設有數五千六百七十八又有數七千六百二十九求共數若干

則八與九相加得十七先書其七於本位之下而心中記其十

五六七八
七六二九
一三三〇七

爲上位之一以與七及二相加得十此十當爲上一位之一而本位爲無數故於本位下作〇而將

心中所記本位之十爲上一位之一以與六及六相加得十三則於本位下書三而將心中所記之十又爲上位之一以與五及七相加得十三乃書其三而心中記其十爲上位之一因上位已無他數與之相加只有心中所記者爲上一位之數故於上位之下書其一則共得一千三百零七爲所求之共數

兩數相加之法習之已熟則三數四數相加以至多數相加者皆可由此推廣之

四題　設有錢四個又有錢五個又有錢六個求共錢若干個

則因已知四與五相加得九又知九與六相加得十五故心中

四
五
六
一五

可先將其四與五相加又將其所得之九與六相加而得十五則於本位下書五而其十爲上位之一書於上一位之下

五題　設將五個單位之數一二三四五相加共得若干

則心中將一與二相加得三乃以三與三相加得六又以六與

一
二
三
四
五
一五

四相加得十又以十與五相加得十五

凡學多數相加者須將單位之各數習之甚熟則雖有七八數亦能一望而知其總數則遇任幾個多位之數亦可一例相加因其位數雖多亦必逐位相加則即其一位而論仍與單位之數無異故易明也

六題　設有數一百二十三又有數四百五十六又有數七百八十九求其共數若干

則將三與六相加得九又將九與九相加得十八乃書其八而

一二三
四五六
七八九
一三六八

以其十爲上位之一以一與二相加得三以三與五相加得八以八與八相加得十六乃書其六而以十爲上位之一以一與一相加得二以二與四相加得六以六與七相加得十三乃書其三而以十爲上位之一因上位無他數與之相加故書一則爲共求得一千三百六十八即所求之共數也

七題　設有數一百二十又有數三十四又有數五百零六又有數七百八十九求總數若干

則將〇四六九相加得十九乃書其九而以十爲上位之一以

一二〇
三四
五〇六
七八九
一四四九

一二三〇八相加得十四書其四而以十爲上位之一又將一一五七相加得十四書其四又於上位書一則爲共求得一千四百四十九即所求之總數也

八題　求一千八百零五與三十六與一萬九千七百二十七與三與一千四百七十四與二千零零八之和

則其五六七三四八之和爲三十三故書其三而以三十爲上

一八〇五
三六
一九七二七
三
一四七四
二〇〇八
二五〇五三

位之三以與三二七相加得十五故書其五而以十爲上位之一以與八七四相加得二十則於本位作〇而以其二十爲上位之二因二一九一二之和爲十五故書其五而以十爲上位之一以與一相加得二故書二則爲求得和數二萬五千零五十三

各數相加之法觀以上八題已極明白惟初學者每以心中所記之數爲難能設法使心中不必記其進一位之數則更覺少費心

力矣

凡兩數相加者其所得之進一位數不能大於一故可於上位橫線之上作點以誌之則其點卽作一字算必將上兩數之和數多作一數算之

卽如三題之數其八與九之和爲十七則可於上位二字之下

五六七八
七̣六̣二̣九
一三三〇七

作一點以當一字而於本位書七乃將上位之七二當作七三則其和數爲十故又於上位下一個六字之下作一點而於本位作〇乃將上位之六六當作六七其和爲十三則又於上位七字之下作一點而書其三於本位其上位之五與七當作五與八算之其和爲十三因其上一位已無他數則可不必作點故書一於上位書三於本位其所得之數一萬三千三百零七與前法所得者無異

然此作點之法但可施之於兩數相加之時而不能通之於多數相加因多數相加其所成之上一位數每至大於一若於線上作多點最易混目故必將作點之法變之使無混目之弊而後可適於用

一八〇五
　　三六
一九七二七
　　　　三
　一四七四
　二〇〇八
一一一三三
一三九二
二五〇五三

卽如八題之數其五六七三四八之和爲三十三則可於本位下書三而於上位之下亦書三其上位之數〇三二七之和爲十二則再於上位書一而於本位書二於三之下其八七四之和爲十九則於上位書一而於本位書九於一之下其一九一二之和爲十三則於上位書一而於本位書三於一之下又將其上位之數一書於本位一字之下則得兩行橫列之數

一一一三三
一三九二

此無異於一萬一千一百三十三與一萬三千九百二十故可將此兩數如前法相加遇有進一位之數作點誌之而將其下有點之字作多一數算則共加得二萬五千零五十三與心中記數者所得無異

一一一三三
一三九二〇
二五〇五三

此法之理乃將任幾個多位之數先變爲兩個多位之數而再將其兩數相加也多寫數行字便能省用幾次心由此知事之繁難者皆由未得其法之故也

減法

凡於大數內去其小數於多數內去其少數皆謂之減其理亦爲人所自能如小孩手持十文問其若將三文買物則可賸幾文彼亦能先數去三文而將其餘七文數之而知其數也

以加法反其道而行之卽爲減法如三與二相加爲五則於五內減其三必得二於五內減其二必得三也

兩個單位之數以小減大其所餘之數亦必由強記而得習之甚久則自能熟矣

一題　設有數五百八十七以三百五十七減之則得若干

則用減法求之橫列五百八十七於上三百五十七於下各齊其位下作橫線爲界乃從末位之數起以六減其七得一書之

於單位之下以五減其八得三書之於十位之下以三減其五得二書之於百位之下則爲共減得二百三十一卽所求之數也

五	八	七
三	五	六
二	三	一

上題之數爲減法中最易之數其各位之數皆上數大下數小則以下數減上數必爲以小減大無不足減之數故不必借上一位之數而記於胸中也

二題　設有數五百八十七以四百九十八減之則餘若干

此題之數用減法求之比上題稍難因七內欲減去八而不足必向七之上一位之數八借出一數則本位之七可作十七乃可以八減之而得餘數爲九故於本位下書九惟心中須記得上位之八已被下位借去一數故只可作七算七內欲減去九亦爲不足必向上一位之五借出一數則本位之八可作十七算以九減十七得八故於本位下書八而心中須記得上位之五已被下位借去一數今只可作四算以四減四爲適減盡因其左更無他數故不必於本位下作〇則爲共減得八十九卽所求之數也

五	八	七
四	九	八
	八	九

然此尙非減法中最難之題因其本位之數雖不足減而上位有數可借也若遇上位爲〇則無數可借必俟上位更向再上之位借得始能借與本位如是向上遞借有致牽連多位者

三題　設有數一千以四百五十六減之求其減餘之數若干

則其單位之數上爲〇下爲六欲於〇內減去六爲不足減必向上一位借得始可減惟上一位亦爲〇則無可借之數若能向再上之位借得乃可借出惟再上一位亦爲〇而無可借出故必向再上之位借之乃先借千位

一	〇	〇	〇
	四	五	六
	五	四	四

之一爲百位之十又借百位之一爲十位之十又借十位之一爲單位之十而後可以六減之得四書之於單位之下惟心中須記得其千位之一已借去無存其百位十位各借得十而借去一則皆當作九數算故以五減其九得四以四減其九得五各書於本位之下則爲共減得五百四十四卽所求之餘數也

此乃論法而兼論其理欲人明白其中之曲折故覺如是之繁若其理已明則可更立簡便之法以免其繁重之弊卽如本題之數其單位徑可作以六減十其上一位亦可作以六減十其再上一位可作以五減十其最上之一位可作以一減一則減得之數亦必無異也

此法之理因於任兩數中同以若干數加之則其加得之兩數其較必與原兩數之較同所以本應以五減九者今可作以六減十算本應以四減九者今可作以五減十算則其減得之數仍與用本數相減者無異因其六與十之較必同於五與九之較其五與十之較必同於四與九之較也

用此法所以能覺簡易者因人之心中每覺加易而減難而減法之中又覺他數與十相減易而與九相減難以其所易代其所難雖於理多一曲折而於法則省數番心計矣兹特再設一題以明此法之用

四題　設有數二萬三千六百七十二以一萬六千四百八十一

減之當得若干

則以一減二得一其上一位因八不能減其七則可作以八減

二三六七二
一六四八一
————
七一九一

十七得九其上位必作以五減六故得一其當千之位以六減三可作以六減十三得七其上一位必作以二減二故適盡則爲共減得七千一百九十一卽所求之數也

蓋此法凡遇不足減者可徑將上數加十個算而其上一位之上一數雖暗中已被下位借去一數仍可作未作借去算惟必將其下數作多一數算之則所得之較仍同

若再用作點之法以記其數當加一數算則更覺便捷而少用心思

卽如本題之數以八減七不足減而作以八減十七算則可於

二三六七二
一六四八一
————
七一九一

上位之下一數四字之下作一點以誌之 又如以六減三亦不足而作以六減十三則可於上位一字之下作點以誌之則見其下有點之數可作多一數算之也

此作點之法亦與加法中作點之例同其作點之時卽在口中呼十之時故覺毫不費事也

五題 設有數六〇二七〇六四二三又有數四〇九〇一九六八七求其較數若干

則七大於三當作七減十三得六則於上位八下作點而八當作九算惟九大於二當作九減十二得三又於上位六下作點

六〇二七〇六四二三
四〇九〇一九六八七
————
一九三六八六七三六

則六當作七算其四小於七當作十四減去七得七又作點於上位九之下則九當作十算六不能減去十則作十六減去十得六又於上位之一下作點則一當作二惟二不能以減〇必作以二減十得八於上位〇下作點則〇當作一以一減七得六而上位不必作點二小於九不能以九減之則作十二而減去九得三於上位之下一〇作點則〇當作一以一減〇爲不能減當作以一減十得九於上位四下作點則四當作五以減其六得一則爲共減得一九三六八六七三六卽所求之較數也

加法有任幾箇數相加者減法則祇有兩數相減而無多數相減因其應減之數若有數箇可先用加法并其諸數爲一數而後用減法以求其較也

六題 設有數二十一欲以單位之各數一二三四五六連減之求其餘數若干

則可將其單位之數一與二相加得三又以三與三相加得六以六加四得十以十加五得十五其十五與六相加得二十一

二一
二一
————
〇

列二十一於上又列二十一於下其上下兩數各位皆相等則以下數減其上數必適盡無餘故於橫線下作〇卽爲所求之數

減法中又有一事須論之凡遇本位之數不足減而須加十方足減者則以單位之數減其兩位之數似比單位相減者稍難然亦由於未得其法之故假如上數爲五而欲以九減之則必將其五

當作十五而以九減之斯時心中若以爲以九減五則不足四以一此四減其十則得六此法亦未嘗不通然曲折太多每易錯誤不如先以九減十得一而以一與五相加得六之爲便此因人之心中每覺加易而減難又每覺與十相減易與他數相減難故兩次減不如一次減一次加也

然此亦由於加減之數不熟之故若數既極熟則一望之間已知其當減得六而心中可絕不計較也假如以二與五相加減夫人而能爲之者亦以熟故也大抵數之大於十者非常習算法之人不能一望而得其加減之數

乘法

將本數連加若干次其所得之數爲若干本數之和亦即本數之若干倍也如其倍數爲單位之數而其數甚少者原可用加法求之

如本數爲二十三欲求其四倍之數則極笨之法可列四箇二

二三
二三
二三
二三
——
九二

十三而用加法以求之即得其和數九十二

惟倍數若爲數位之數則連書本數若干次必致不勝其繁而和數亦非頃刻所能得

如本數爲二百七十五欲求其二百三十四倍之數則列二百三十四箇二百七十五而用加法求其和數此固勢所不能

於是從不能之中又思得簡便之法可令其所列之數依倍數之每位之數爲箇數

如求本數二百七十五之二百三十四倍可先列兩箇本數其位相齊以當二百箇本數又列三箇本數使與先列之數降一位以當三十箇本數又列四箇本數使更降一位仍當四箇本數則其共列之數無異於二百三十四箇本數故可用加法以求其和數得六萬四千三百五十

二七五
二七五
　二七五
　二七五
　二七五
　　二七五
　　二七五
　　二七五
　　二七五
————
六四三五〇

然此尚因倍數之位數不多其每位之數皆不大故能如是加之若其倍數有多位而每位之數又大則所列之本數必致多行豈不甚繁故必再求簡便之法

即如前式之數可先將其兩箇二七五加成五五〇又將其三箇二七五加成八二五又將其四箇二七五加成一一〇〇然後將此加得之三數列之使其末位遞降一位再用加法以求其和則所得之數仍與前同而算式則簡便數倍矣

五五〇
　八二五
　一一〇〇
————
六四三五〇

此乃以一次相加之事分爲數次相加故覺輕而易舉也然其中已暗寓乘法之理矣

乘法之理即從加法而生惟可變其多次相加之數爲一次相乘之數故加之極繁者乘之極易其立法之原蓋從加法屢變而得也

丙數相乘其乘得之數謂之積蓋取積少成多之意因其爲若干本數之和也

凡學乘法必先將單位之任兩數一一記其乘得之數故須熟讀九九歌訣從一一如一起以至九九八十一止讀至背誦如流則

任提首兩字便能誦出一句又必知無論何數與〇相乘必仍得

〇則可學習乘法

凡欲將倍數與本數相乘者其列數之時無論何數在上何數在下均可惟恒以上數爲實下數爲法位數多者爲實位數少者爲法位數雖多而其有數之位少者亦爲法位數相同者任以何數爲實何數爲法總以乘出之行數能最少者爲便

一題　設以十二爲實四爲法求其相乘之積

則列十二於上四於下又作橫線爲界先以四乘二得八書於

一二
　四
——
四八

本位之下又以四乘一得四書於上一位之下即得四十八爲所求之積

二題　設以十三爲實五爲法求其相乘之積

則以五乘三得十五於本位書五而心中記一爲上位之數又

一三
　五
——
六五

以五乘一得五加所記之一得六則書六於此位之下即得六十五爲積

三題　設以六百零七爲實六爲法求其相乘之積

則以六乘七得四十二書其二於下而心中記其四爲上位之

六〇七
　　六
————
三六四二

數又以六乘〇得〇加入所記之四得四則於其下書四又以六乘六得三十六因已乘畢故於此位下書六而其左書三則爲其共乘得三千六百四十二即所求之積數也

若法爲多位之數則從法之單位起以每位之數與實之各位數自右而左次第相乘至一一乘遍之後於其下再作一橫線乃將兩橫線內之各數相加書其所得於每位之下即爲乘得之數

四題　設以三十六爲實二十四爲法求其相乘之積

則先以四乘六得二四書其四而記其二以四乘三得一二加入所

　三六
　二四
———
一四四
七二
———
八六四

記之二得一四書其四於本位書其一於上一位則法之末位已乘實訖乃將法之上一位數二乘實之各位以二乘六得一二書其二而記其一以二乘三得六加所記之一得七則書其七是爲俱已乘遍乃作橫界線而將乘得之兩行數相加得八百六十四即爲所求之積

五題　設以四百五十六爲實一百二十三爲法求其相乘之積

則以三乘六得一八書八記一以三乘五得一五加一爲一六書六記一以三乘四得一二加一爲一三書三又書一於左則爲三已乘訖

　四五六
　一二三
————
一三六八
　九一二
四五六
————
五六〇八八

乃以二乘六得一二書二記一以二乘五得一〇加一爲一一書一記一以二乘四得八加一爲九書九則爲二亦乘訖乃以一乘六得六以一乘五得五以一乘四得四俱書之則爲俱已乘遍乃作橫線而將乘得之各行相加得五萬六千零八十八爲所求之積數

若法實之末位有〇位者可列法之有數之位使與實之有數之位相齊而將其有數之各位如法相乘於得數之後加其法實末數位之〇於右即得所求之積

六題　設有數四百二十以六百乘之當得若干

則可列法之六使與實之二上下相齊以六乘二得一二書二記一以六乘四得二四加一爲二五亦書之則共乘得二五二因實之末位

四二〇
〇〇六
二五二〇〇〇

有一圈法之末有兩圈故必於二五二之右共加三箇圈以存其位故其乘得之積為二十五萬二千即所求之數也

七題　設以四十二為實六百為法求其相乘之積

四二
六〇〇
二五二〇〇

則因法之末有二位為空實之末無空位故於乘得二五二之後只加兩圈其積為二萬五千二百即所求之數也

八題　設以四百二十為實六為法求其相乘之積

四二〇
六
二五二〇

則因實之末位有一空位而法無空位故於乘得二五二之後只加一圈則其所得之數為二千五百二十

若其法之各位中有空位者可不必將此空位之〇與實相乘但將其有數之位乘實之各位惟書其所得之數必使乘出之末一位與所用法數之位相齊則不致錯誤

九題　設有數三百六十五以十萬零一千零零一乘之當得若干

則法之單位乘實所得之三六五書其五字時必與法之單位之一相齊以法之千位之一乘實所得之三六五其五字必與法之千位之一相齊以十萬乘實所得之三六五其五字必與法之十萬之位相齊則各數相加得三千六百八十六萬五千三百六十五為乘得之積

三六五
一〇一〇〇一
三六五
三六五
三六五
三六八六五三六五

算學中有一種名目謂之自乘即以本數乘本數亦即以法實相同之數求其相乘之積也其乘法與法實之數不相同者無異

十題　設有數一百二十三求其自乘之積

則法實兩數皆為一百二十三以法之每位遍乘實之各位而用加法求其和數得一萬五千一百二十九即為其自乘之積

一二三
一二三
三六九
二四六
一二三
一五一二九

自乘之積再以本數乘之謂之再乘即三箇本數連乘也再乘之積復以本數乘之謂之三乘三乘以上依此類推

凡自乘之積謂之平方再乘之積謂之立方三乘之積謂之三乘方每以本數多乘一次則為多一乘之方總而言之則曰諸乘方其本數謂之方邊亦謂之方根

如本數為四則其自乘之積為十六再乘之積為六十四三乘之積為二百五十六四乘之積為一千零二十四五乘之積為四千零九十六六乘之積為一萬六千三百八十四故十六為四之平方六十四為四之立方二百五十六為四之三乘方一千零二十四為四之四乘方四千零九十六為四之五乘方一萬六千三百八十四為四之六乘方均以四為方根

茲列本數連乘之算式自一乘以至六乘學者能照乘法細明之自知無勞細解也

四
一六
六四
二五六
一〇二四
四〇九六
一六三八四

以上各題其相乘之算式每遞進一位之數皆不寫出但將其數默記於心中以俟上位乘得乃加入之此固欲圖算式簡便之故如欲稍省心思而不以多寫各數爲煩則亦可仿照加法之例將各數一一寫出也

即如四題之式可作

```
 三六
 二四
一二四
一二
六二
八六四
```

五題之式可作

```
  四五六
  一二三
 一一一八
  二五
 一二二
 八〇
四五六
一一〇八八
四五〇
五六〇八八
```

又如

```
  九八七
  六八九
 八八八三
七八九六
五九二二
六八〇〇四三
```

可作

```
    九八七
    六八九
   八七六三
    一二
  七六五六
   二四
五四四二
  四八
一二一一四三
五五八九
六八〇〇四三
```

此種繁寫之法乃爲至愚之人而設若能稍有記性總宜學習簡寫之式爲是

除法

將法實兩數以法分其實爲若干分者謂之約法亦謂之除法即乘法之還原也

除法之理從減法而生惟因累減不易故立簡便之法以代之令其除出之數與累減之次數無異故曰除法

如欲將六萬四千三百五十分之爲二百七十五分令其各分之數皆相等則必將二百七十五累減之至二百三十四次而適盡即知其每分之數爲二百三十四然如此累減則不勝其繁況數有更大於此者則將經旬累月不能減盡一數矣所以思其簡便之法

惟因百倍其二百七十五則爲二萬七千五百於原數內減去兩箇二萬七千五百即同於已減去二百次二百七十五其所餘之數爲九千三百五十　又因十倍其二百七十五爲二千七百五十於餘數內再減去三箇二千七百五十即同於原數內已減去二百三十次二百七十五則所餘之數爲一千一百　因四個二百七十五亦爲一千一百故減之適盡即同於原數內共減去二百三十四次二百七十五

此即除法之所由立也中國古法本用商除至宋時始有歸除惟歸除之法須熟讀九歸歌訣方能動手且便於珠盤而不便於筆算西人俱習筆算故亦用商除此書中所論者俱爲商除而算式亦用西法

一題　設有數六百四十八以二除之當得若干

則列六百四十八爲實於其左右各作反括弧書其法二於左弧之外乃觀實之首位六能容二之三倍則書三於右弧之外爲商得之首位數以此與法相乘得六

```
二)六四八(三二四
   六
    四
    四
     八
     八
     〇
```

書於實之首位六字之下以下減上適將實之首位減去乃作橫綫而書餘實之首位四此數能容法之二倍故於右弧三字

之右添二以此與法相乘得四書於四之下以下減上乃作橫線而書第二次餘實八此數能容法之四倍故書四於右弧三二之右以四與法相乘得八書於八之下以下減上適盡故於橫線下作〇以明更無餘數則觀右弧所括之數三百二十四卽爲除得之數

右題之數爲除法中最簡易者因其法爲最小之偶數而實之各位又皆偶數故以法除實每位皆能除盡則一位歸一位算不啻以單位之法除單位之實也凡欲爲初學之人說法必取再易明白之數如法演算使之先明其中之作用各有次序則心中絕無疑惑然後能由漸而進以推稍繁之題此不獨除法如此一切算法亦莫不如此也

二題　設有數七千八百九十二以四除之得若干

則實之首位七僅容法之一倍故於右弧外書商得之數一以

```
四)七八九二(一九七三
   四
   三八
   三六
    二九
    二八
     一二
     一二
      〇
```

一乘法得四書於七下以減之作橫線而下書其減餘之首位數三又添實之第二位數八於三之右爲三八此數能容法之九倍故於右弧一字之右書九以九乘四得三六書於三八之下以減之作橫線書其減餘之數於下爲二其右添以實之第三位數九爲二九此數能容法之七倍故於右弧一九之右書七以七乘法之四得二八書於二九之下以減之得餘數一書之於橫線之下右添以實之第四位數二爲一二此數能容法之三倍故於右弧一九七之右三以三乘法四得一二書於一二之下以減之適盡故於橫線下作〇則觀右弧所包之數卽爲除得之數一千九百七十三

三題　設有數一萬五千三百八十一以九除之當得若干

則於實數一萬五千三百八十一之左右各作反弧書法數九

```
九)一五三八一(一七〇九
   九
   六三
   六三
     八一
     八一
      〇
```

於左弧之左因實之首位數不能容法之九則必取其兩位一五則僅容一個九故書一於右弧之右以一乘法得九以減一五餘六書於橫線之下右添以實之第三位數三爲六三此數能容法之七倍故於右弧一字之右書七以七乘法九得六三書於六三之下以減之適盡乃於橫線下將實之第四位數移下爲八惟八不能容九故於右弧一七之右作〇因〇乘九仍得〇以〇減八仍爲八故可不必書惟於八之右再添以實之末位數一爲八一此數能容法之九倍故於右弧一七〇之右書九以此九乘法之九得八一書於餘實八一之下以減之適盡則於橫線下作〇觀右弧所包之數卽爲除得一千七百零九

學者觀右題之算式每不解所得之數其〇從何而來殊不知每商一數以商乘法而減其實之後只能添以實之下一位數若添入而仍不滿法則商一尚嫌其多安得不商〇惟商〇之後若必將其中之曲折一一寫出則必作以〇乘法之九得〇以乘得之〇減其八得八而後再添入實之第五位數一爲八一則與不以〇

乘不以〇減而徑添以實之末位數成八一者何異蓋右題所列之式乃簡寫之式也其繁寫之式如下

```
九)一五三八一(一七〇九
   九
   六三
   六三
     八
     〇
     八一
     八一
      〇
```

或有問者曰實之第一位其數爲一不滿法之九則不於右弧之右先作〇然後添入次位之數爲一五而再商一何也

答之曰此數論理亦當得〇其不作〇者因其上未有他數也當頭即寫〇字無乃不通從未有幾千幾百而必言零幾千幾百者也惟小數則當別論

四題　設有數二十四萬零零七十二以八除之當得若干

```
八)二四〇〇七二(三〇〇〇九
   二四
     〇〇七二
         七二
          〇
```

則實之第一位其數爲二不滿法惟有首兩位之數二四則能容法之三倍故於右弧書三以三乘法八得二四以減實之首兩位適盡乃作横線而將實之第三位之〇移下因不滿法故於右弧三字之右作〇又將實之第四位之〇移下仍不滿法則於右弧三〇之右再作〇爲三〇〇又將實之第五位數七移下仍不滿法故於右弧三〇〇之右再作〇於是乃將實之末位移下爲七二此數能容法之九倍故於右弧各數之末書九以九乘法得七二以減餘實七二適盡無餘故於橫線下作〇觀右弧之數爲除得三萬零零九

五題　設有數一萬三千一百零四以五十六除之當得若干

則實之首兩位數一三不滿法其首三位一三一能容法之二倍故商得之首位數爲二書於右弧之右以二乘五六得一一二以減一三一餘一九加以實之第四位數爲一九〇此數能容法之三倍故於右弧二字之右書三以三乘法五六得一六八以減一九〇餘二二加以實之第五位數四得二二四此數能容法之四倍故于右弧二三之右書四以四乘法五六得二二四以減餘實二二四適盡故于横線下作〇其右弧之二三四即爲除得之數二百三十四

```
五六)一三一〇四(二三四
     一一二
      一九〇
      一六八
        二二四
        二二四
          〇
```

或有問者曰法實之位數愈多則于實之多位中欲揣其能容多位之法若干倍豈不甚難

答之曰法之位數雖多只須用其首位揣之或其第二位之數甚大可將首位之數多作一數揣之則與法爲一位之數者無異也即如右題之法雖有兩位若但用其首位之數五亦可揣得其能容之倍數爲二爲三爲四也此與歸除之時用九歸歌訣專以法之首位數爲主者其理相同也

六題　設有數七萬六千九百三十六以二百三十六除之當得若干

則其實之首三位七六九能容法之三倍故於右弧外書三以三乘

法得七〇八以減七六九餘六一右添以實之第四位數三爲六一三此數能容法

二三六)七六九三六(三二六
七〇八
六一三
四七二
一四一六
一四一六
〇

之二倍故於右弧三字之右書二以二乘法得四七二以減六一三餘一四一右添以實之末位數六爲一四一六此數能容法之六倍故於右弧三二之右書六以六乘法得一四一六以減餘實一四一六適盡則於橫線下作〇其右弧之數三二六即爲除得三百二十六

觀以上各題之算式即可知法實之位數無論多少均可一例推之惟有數種更可簡易者故特論之

凡數以一乘之猶之不乘也則以一除之亦猶之不除也所以凡遇法爲單位之數而其數爲一者可不必除即以實之原數爲除得之數

若其法雖有多位而其首一位之數爲一其右之各位皆爲〇者則觀其〇有若干位可在實之右邊亦截去若干位即爲除得之數其截去者爲餘數亦即小數

七題　設有數三萬三千四百二十九以一百除之當得若干

一〇〇)三三四二九(三三四
三〇〇
三四二
三〇〇
四二九
四〇〇
二九

則法之首位其數爲一其右兩位皆爲〇故可於實之右邊截去兩位而但留其首三位之數三三四即爲除得之數三百三十四其截去之二九爲其餘數如不用截法仍用常法除之所得之數與截得者無異也觀上式自明

若其法祗首幾位有數其後之各位皆爲〇者則可截去其各空位亦將實之右邊截去幾位如其法尾之〇數然後如常法除之則算式中可省作多〇而所得之數與不截去者無異惟除至單位而仍不盡則必將截去之數仍加入之否則餘數不合也

八題　設有數十二萬八千八百三十二以二千三百除之當得若干

則其一二八八三二爲實二三〇〇爲法因法之末兩位爲〇故可於法實各截去其末兩位而算之則得五十六不盡三二

二三)一二八八(五六
一一五
一三八
一三八
三二

若不截去法實之末兩位則式如下

二三〇〇)一二八八三二(五六
一一五〇〇
一三八三二
一三八〇〇
三二

學者但觀上兩式亦不覺截法之便宜此因法末之〇不多除得

之數亦少故不覺其省事也試列法末有多〇而除得之數為多位者將兩式比而觀之則難易自見矣

一二三〇〇〇〇〇)四二一七六一八九三〇〇(三四二八
三六九〇〇〇〇〇
五二七六一八九三
四九二〇〇〇〇〇
三五六一八九三〇
二四六〇〇〇〇〇
一一〇一八九三〇〇
九八四〇〇〇〇〇
一一七八九三〇〇

一二三)四二一七六一(三四二八
三六九
五二七
四九二
三五六
二四六
一一〇一
九八四
一一七八九三〇〇

或有問者曰余自幼即習珠算於加減乘除之法用之數十年今學筆算之法意欲更圖便利那知遠不如珠盤之速且覺商除甚難不及歸除之有把握此何故也

答之曰此由於未熟之故爾幼時初習珠算亦非旦夕之工所能精逮用之數十年已忘其前此之艱苦矣爾幼時若先習筆算迄今乃學珠算則又必覺筆算易而珠算難此乃一定之理也若珠算果捷於筆算則西人之貿易於中土者何不舍其筆算改習珠盤以取便利耶亦以難學之故也可見筆算與珠算其致用之理毫無分別惟各有見長之處則不可沒其所長則各有見短之處亦不能掩其所短也

珠盤所得之數必用筆以記之否則不能再算他數且一經觸動則數亦變亂矣是用珠盤必仍與筆墨相需也惟筆算則無藉乎珠盤其加減乘除諸數一一留其迹於紙上如有錯誤不難尋得其錯處而改之珠盤算錯則不能知其錯在何處且再算一遍而得數先後不符究不知孰是孰非也所以用珠盤者每得一數必覆算數遍必至先後符合而後已則即其算一遍而論珠算誠速於筆算若合計其覆算之工夫則與筆算無異矣

加減之時凡滿十進位之數或本位不足而將上位退下一數以作本位之十者珠盤皆比筆算便捷惟珠盤之加減每從首位起易於看差位數筆算之加減從末位起故無看差位數之弊

至於乘法則法實之位數少者以珠盤為便因能將法實兩數各列於盤之一邊觀其法以乘其實也若遇多位之實則其法非盤所能容必將法之各數全記在心中若法之位數甚多記之已難次第用以乘實更難所以凡遇法爲多位之數者以筆算為便

珠盤算得之數其位數之大小最易混淆非素知其物之價值者不能算畢即言其何數以其定位難也若筆算則凡有空位皆作圈以明之其十百千萬可以一覽而知無須乎定位之法也

至於除法尤宜以筆算為便其法數實數商得之數乘得之數減餘之數一一寫於紙上燦若列眉步步為之不易差誤即偶然有誤亦易於檢得而改之珠盤之誤不能自知其處必須從頭另起其繁為何如耶

如謂商除不如歸除有把握此亦未曾慣故耳夫既名之曰商除則其數須從商量而得本不能有一定不移之法以作把握也

歸除之法先須讀熟九歸歌訣撞歸歌訣乃可致用而商除則但用九九歌訣已綽乎有餘且絕無窒碍不通之事所以甚便如不信此說可將九萬八千爲實九十九爲法用珠盤以作歸除其難自見矣

或又問曰觀以上除法各題其算草中但言此數能容法之幾倍而未明言用九九數之法乞明以教我

答之曰凡言能容法之幾倍者即是用九九數而知之也即以第六題而論實之首位爲七法之首位爲一二惟因二三如六故知七能容法之三倍也其餘實之首位爲六而下兩位爲一三已小於法之下兩位三六所以不能商三而只可商二因二二如四其四小於六也其第二次餘實之首兩位爲一四惟因二六十二小於一四故知其能容法之六倍也總之此是揣度之工夫其數須從商量遷就而得非慣用此法者不能爲之甚易也

或又問曰余觀書中之算草總覺不如口講指畫之顯而易明豈算法必須傳授歟

答之曰非也作算草之時亦不啻對學算之人耳提而面命之則觀其書者亦必如聞其言如示之掌也然而仍覺不明者其故何也大抵書中之算說與算式無異於雙管齊下而成觀書者但見其已寫完之式未曾見作此式時寫算之法又不能將書中已有之字以爲逐漸寫出所以不易明若自將紙筆一面看其說一面寫其式看至何處即寫至何處要使算式中之字無一字無着落便易明白矣明白之後便能將書中之算式掩之但觀其說而自寫其式寫成則與書中之式比對若比對無異便已能算矣若比對而有不同之處必是自己之誤也否則誤會其說也否則口中念錯手中寫錯也若口中手中俱未錯而其說亦未曾誤會則是書上刻錯也或是作書者之錯也能校出書上之錯與作者之錯尚有不明其法者哉

公度數

凡此數能約彼數而無餘則彼數中能容此數之若干倍而此數即可度彼數若此數能度彼兩數則此數即爲彼兩數之公度數此數能度彼三數則此數即爲彼三數之公度數

公度數亦名公約數亦名等數惟名之爲等數之意又稍有不同因凡有大於一之公度數者謂之有等之數否則爲無等之數

有時其數能有數箇公度數所有凡求公度數必求其最大之數即如三百六十與一百六十八此兩數之公度數爲二爲三爲四爲六爲二十四則有五數皆爲其公度數其五箇公度數中以二十四爲最大則謂之最大之公度數

求兩數之最大公度數其法可分爲三事　一將兩數中之小者爲法大者爲實除至餘數小於法而止　二將其餘數爲法前法爲實除至餘數小於法而止　三依同法屢爲之至無餘數則其末次爲法之數即爲所求之最大公度數

一題　設有兩數其第一數爲三百六十第二數爲一百十二求其最大之公度數

一一二)三六〇(三
三三六
二四)一一二(四
九六
一六)二四(一
一六
八)一六(二
一六
〇

則先以一一二爲法三六〇爲實用除法得其餘數二四乃以二四爲法一一二爲實除得其餘數一六又以一六爲法二四爲實除得餘數八以八除一六則適盡無餘即得其所求之最大公度數爲八

二題　設有兩數其第一數爲九百三十六第二數爲一千九百零八求其最大之公度數

九三六)一九〇八(二
一八七二
三六)九三六(二六
七二
二一六
二一六
〇

則以一千九百零八爲實九百三十六爲法除之餘三十六以三十六除九百三十六則適盡而無餘數所以知末次爲法之數三十六即爲所求之最大公度數

學者既明除法則觀以上兩題之算式自能明最大公度數之求法矣然其每次除得之數皆不用而惟取其末次所用之法爲所求之數則此法雖名之曰除實則輾轉相減耳所以用珠盤算之可將兩數各列於盤之一邊以數之小者屢減其大者至不足減則反減之如是屢減至盡則末次所用之減法即爲所求之數其減去之數可不必計也

輾轉相減之法在中法謂之求等其所求得之數謂之等數即西法之最大公度數也惟等數與公度數其命名之意微有不同因求等而得一者不謂之有等而謂之無等也

或有問者曰如所設之兩數本無公度數者用以上兩題之法能知其無公度數乎

答之曰兩數之無公度數者未之有也因無論何整數皆爲一所積累而成則必能以一度之所以任兩箇整數必以一爲公度數若無他箇公度數則其末次之法必爲一而一即爲兩數之最大

公度數

三題　設以八十七與二十五求其最大之公度數

則以二十五除其八十七餘一十二以一十二除其二十五餘

二五)八七(三
七五
一二)二五(二
二四
一)一二(一二
一
二
二
〇

一以一除其一十二適盡無餘則知所設之兩數其公度數更無大於一者故其求得之一即爲其最大之公度數

或又問曰既名其一爲最大之公度數豈尚有公度數能小於一者乎

答之曰無有矣凡求最大之公度數而得一則其一固爲最大之公度數亦即爲最小之公度數因此兩數只有一箇公度數不能再有第二箇公度數也

或又曰然則求等而得一則其一即可爲最大之等數何以又謂之無等之數

答之曰其命名之時取意不同也蓋求等之意原欲使所求之數可以約小其原兩數若求等而得一則一不能約其原兩數使小所以謂其原兩數爲彼此無等之數若所得之等數大於一則可以等數爲法而約小其原兩數所以謂其原兩數爲彼此有等之數其有等無等是指其原兩數而言非指其求得之數而言也惟用之既久則將其有等無等之名漸移於求得之數於是遂以一爲無等大於一者爲有等而不復顧其不通猶之以有等代可約二字無等代不可約三字而已

凡有三數而欲求其最大之公度數者可將其任兩數先求得最大之公度數乃以此兩數之公度數再與又一數求其最大之公度數即得　三數以上仿此

四題　設有三數其第一數爲十八第二數爲十二第三數爲九求其最大之公度數

則先以十八與十二求得其最大之公度數爲六又以六與九求其最大之公度數得三則三可度盡十八亦可度盡十二又可度盡九故即爲三數之公度數因更無大於三之數能兼度其三數所以三必爲所求之最大公度數

求三數及三數以上之最大公度數中法謂之求總等詳見秦道古數書九章學者取而觀之可也

公倍數

有數能度所設之各數者謂之公度數若有數能爲所設之各數所度者則謂之公倍數因將各數累以本數自相加皆能到此數也亦謂之公乘數因各以他數乘之皆能得此數也

如所設之數爲八爲十二爲二十四爲四十八則此四數之公倍數爲九十六

凡將任何兩數相乘或將任幾數連乘其乘得之積必爲各數之公倍數惟各數之公倍數每有小於其積者所以必求其最小之公倍數

如所設之數爲三十六爲八則其相乘之積爲二百八十八其

最小公倍數爲七十二

凡有兩數欲求其最小之公倍數必先求兩數之最大公度數將兩數中之任一數以最大公度數約之以約得之數與其又一數相乘則其乘得之積即爲兩數之最小公倍數

一題　設有兩數其第一數爲十四第二數爲二十一求其最小之公倍數

則先求得兩數之最大公度數爲七以七約其第一數得二以二乘其第二數得四十二即爲所求之最小公倍數

所以兩數之最大公度數若爲一則其最小之公倍數即爲兩數相乘之積

二題　設有兩數其第一數爲十一第二數爲九求其最小之公倍數

則因此兩數之最大公度數爲一以一任約何數皆仍爲本數故其最小之公倍數即爲其兩數相乘之積即九十九是也

若欲求三數之最小公倍數則先將其任兩數求得其最小之公倍數再將此最小公倍數與又一數求其最小之公倍數即爲三數之最小公倍數

三題　設有三數其第一數爲五第二數爲十六第三數爲二十四求其最小之公倍數

則先將第一數與第二數求得其最小之公倍數爲八十以八十與第三數二十四求其最小之公倍數得二百四十此即爲三數之最小公倍數

西法之最小公倍數即中法求一術內之衍母也故無論有若干數皆可用衍母之法求之學者觀秦氏數書九章自能明其曲折故不贅及

命分法

凡以法除實而可適盡無餘者則其除得之數必爲整數若除至單位而不能適盡則必有餘數其餘數若略去不計則其所得之數必比應得之數微小以法乘之必不能復其原惟有將法與餘數命之爲分數則可與所得之數連而舉之此命分之法所由立也

命分之法恒以法爲分母實之不滿法者爲分子其寫法在文理中則曰幾分之幾其上一幾字爲分母之數下一幾字爲分子之數也在算式中恒列分母之數於上分子之數於下其母子之間作一橫綫界之以明上數爲法下數爲實之意

如有式爲$\frac{三}{二}$其三爲分母其二爲分子讀此式則曰三分之二蓋以母子間之橫綫代其分之二字也

一題　設有數四百五十三以十七除之當得若干

則以法除實得二十六其餘數十一已小於法數十七若再除之則所得之數必在單位以下且無論除至若干位其餘數終不能盡故只可以分數命之則爲除得二十六又十七分之十一

```
一七)四五三(二六
    三四
    ────
    一一三
    一〇二
    ────
     一一
```

二題　設有數十一以三除之當得何數

則以三除其十一得三其餘數爲二已比三爲小則命法爲分母餘數爲分子與除得之數合而言之則爲三又三分之二卽爲所求之全數

三)一一(三
九
二

三題　設有法實兩數其法爲十七實爲十三問以法除實當得何數

此題之法大於其實不能除得整數故卽可用命分之法命其法爲分母實爲分子謂之十七分之十三如以算式書之則爲

$\frac{一三}{一七}$

約分法

命分之時將其法與不滿法之實隨手命之爲幾分之幾則其所命之分數有時爲甚大之數故又必有法變之使其母子皆爲最簡之數則一覽易明而入算更便其變簡之法名曰約分法

約分之法以母子兩數求得其最大之公度數以約其母子卽得最簡之分數則其用仍與未約者無異

一題　設有數二百八十八分之二百一十六求其最簡之分數

則將其分母分子求得其最大之公度數七十二以約其分母得四以約其分子得三則其分數變爲四分之三卽所求之最簡分數也

二題　設有數七百八十分之一百九十五求其最簡之分數

則將母子二數求得最大之公度數一百九十五以此數約其母子得四分之一

三題　設有數二百零四分之一百三十六求其最簡之分數

則求其母子之最大公度數得六十八以此約其母子得三分之二爲最簡之分數

若母子二數之最大公度數爲一則其分數不能再簡故所設之分數卽爲最簡之分數

四題　設有數七百三十六分之二百四十五問可求得更簡之分數否

則其母子之最大公度數爲一以一約原分數仍得原分數故知所設之分數已爲最簡之分數不能再求得比此更簡之數也

通分法

有幾個分數其分母之數各不相同則有法可將異母之各分數化爲同母之各分數而其用仍與未化者無異其化之之法謂之通分

通分之舊法以各分母連乘爲公分母以各分子與他分母連乘爲各分子

一題　設有五分之三與三分之二欲化之爲同母之分數

則以兩分母三與五相乘得十五爲化得之公分母又以本分子三與他分母三相乘得九亦以本分子二乘他分母五得十各爲化得之分子卽得兩個同母之分數一爲十五分之九一爲十五分之十

二題　設有二分之一與三分之二與五分之三欲化爲三個同母之分數

則以分母二與三與五連乘得三十為所求之公分母以本分子一與他分母三與五連乘得十五以本分子二連乘他分母二與五得二十以本分子三連乘他分母二與三得十八即得所求之三個分數為三十分之十五為三十分之二十為三十分之十八

惟用此法所化得之同母分數不能必得最簡之分數故求得之後必將其分母子求其最大之公度數以約之 即如三分之二與五分之一與六分之一 如前法求其同母之分數為九十分之六十為九十分之十八為九十分之十五此三個同母之分數可求得其最大之公度數三以約之為三十分之二十為三十分之六為三十分之五方為最簡之同母分數

欲徑求最簡之同母分數法將各分母求得最小之公倍數以各分母各除所得之公倍數以除得之數各乘其分子為所求之分子而俱以最小之公倍數為其公分母

三題 設有三分之二與五分之一與六分之一求將此三個分數化為最簡之同母分數

則以三與五與六求得最小之公倍數三十此數即為最簡之公分母 以三除三十得十以乘其分子二得二十即得第一個分數為三十分之二十 以五除三十得六以乘其分子一得六即得第二個分數為三十分之六 以六除三十得五以乘其分子一得五即得第三個分數為三十分之五

四題 設有五個分數其一為三分之一其二為七分之二其三為十四分之三其四為二十一分之十二其五為四分之三求將此五個異母之分數化之為最簡之同母分數

則將其五個分母求得其最小之公倍數八十四 以三除之得二十八 以七除之得十二 以十四除之得六 以二十一除之得四 以四除之得二十一 乃以一乘二十八得二十八為化得之第一分子 以二乘十二得二十四為化得之第二分子 以三乘六得十八為化得之第三分子 以十二乘四得四十八為化得之第四分子 以三乘二十一得六十三為化得之第五分子 此五個化得之分子皆以八十四為其分母

惟因無論何數以一乘之猶之不乘也以一除之猶之不除也所以無論何整數皆可以為當以一除之則其整數可作分子而其分母為一

從此法可將帶分之整數化之為兩個同母之分數以便將此兩數合而為一個分數

五題 設有數三又三分之二欲將其整數三化為同母之分數以便與分數相加

則其整數三可當之為一分之三即一分之三與三分之二為異母之分數所以可用通分之法化之為兩個同母之分數如三分之九與三分之二

加分法

凡欲將幾個分數相加者必先觀其分母之同不同若分母之數相同者可將其分子相加爲分子仍以其原分母爲分母

一題　設有兩個分數其一爲七分之二其二爲七分之三求將兩分數相加

則因兩個分數其分母皆爲七所以可將其分子二與三相加得五爲加得七分之五

若其分母之數不同則必先化之爲同母之分數然後將其同母之分子相加而以化得之公分母爲其分母

二題　設有二分之一又有三分之二欲將兩個分數相加

則必將兩個異母之分數先用通分法化爲同母之分數六分之三與六分之四則三與四相加得七故其加得之數爲六分之七即一又六分之一也

三題　設有三個分數其一爲二分之一其二爲七分之一其三爲七分之三求其和數若何

則因七分之一與七分之三爲同母可相加爲七分之四惟七分之四與二分之一爲異母必化之爲同母之分數十四分之八與十四分之七則可相加得十四分之十五即一又十四分之一也

減分法

凡欲將兩個分數相減者亦必先觀其分母之同不同若分母之數相同可將其分子之小者減其分子之大者以減餘之數爲減得之分子仍以原分母爲其分母

一題　設有兩個分數其一爲七分之五其二爲七分之三求其相減之分數

則因分母之數相同故可將分子三與五相減得二其減得之數即爲七分之二

若其分母之數不同者則必先化爲同母之分數然後將其同母之分子以小減大其減餘之數爲減得之分子而以化得之公母爲其分母

二題　設有兩個分數其一爲二分之一其二爲三分之二求其相減之分數

則必將兩個異母之分數化之爲同母之分數六分之三與六分之四乃將其分子三與四相減得一爲減得之分子而以公分母六爲其分母即得所求之數爲六分之一

乘分法

凡將任幾個分數相乘者法以分母連乘爲母以分子連乘爲子

一題　設有兩個分數其一爲七分之三其二爲五分之二求將兩數相乘

則以分母之數五與七相乘分子之數二與三相乘即得所求之數爲三十五分之六

二題　設有三個分數其一爲二分之一其二爲三分之二其三爲五分之三求其連乘之數

則以分母之數二與三與五連乘得三十以分子之數一與二與三連乘得六則其乘得之分數爲三十分之六可用約分法

約之爲五分之一

三題　設有三分之一以三乘之當得若干

則因其整數三可當作分數一分之三故可將分母之數一與三相乘得三其分子三與一相乘亦得三則其乘得之分數爲三分之三以分母三除其分子三卽得一爲所求之數

除分法

凡法實俱爲分數而欲以法除實者可將實之分數爲主以法之分子乘其母以法之分母乘其子卽爲除得之分數

一題　設有八分之三以三分之一除之求其除得之數則以法之分子一乘實之分母八以法之分母三乘實之分子三卽得八分之九爲除得之數因實大於法可命之爲一又八分之一

二題　設有五分之三欲以五分之二除之求其除得之數

則以法之分子二乘實之分母五以法之分母五乘實之分子三得十分之十五可約之爲二分之三卽一又二分之一

三題　設有五分之三以八除之求其除得之數

則因整數八可作分數一分之八以八乘五爲母以一乘三爲子故其除得之數爲四十分之三

四題　設有整數六以分數三分之二除之求其除得之數

則其整數六可作分數一分之六以法子二乘實母一得二爲母以法母三乘實子六得十八爲子卽得二分之十八以二除十八得九爲所求之數

或有問者曰乘分之法用乘則除分之法當用除今觀除分亦用乘法其故何也

答之曰論除分之理本當以法母除實母爲母法子除實子爲子惟每遇實之母子非法之母子所能除盡者則謂之不受除夫至不受除則除法窮矣於是有變通之法謂之不除此而乘彼如本應除其母者今不除而乘其子本應除其子者今不除而乘其母則其乘得之分數必與除得之分數其用無異也此法可用數證之

如有四分之一欲以二分之一除之則可以二除其四以一除其一得二分之一爲除得之分數　如用不除此而乘彼之法則可以一乘四以二乘一得四分之二約爲二分之一與除得之分數無異

或又問曰整數之除不盡者既可用命分之法命之爲分數則此母除母子除子之除不盡者獨不可命之爲分數乎何以又變爲以乘代除也

答之曰整數除整數其實不滿法之數可命之爲分數以濟除之窮若分數除分數而不便於除論算學之理原可再命之爲分數惟法實兩數已爲分數茲從分數中再命爲分數則母子之中各生母子設將此種分數再用除法必至愈變愈繁而不可收拾矣夫算法總以能簡爲貴所以雖有其理可不必據此理以立法雖有其法而不必從此法以求數也

或又問曰數從法出法自理生此法既不堪求數則此理亦終歸無用矣豈理與法竟不足恃乎

答之曰理與法非不足恃也必欲恃一知半解之理法以論數則不可耳今人於算法有未明之處則必以數核之核之而其數偶合遂以爲理法之無差殊不知其所用以相核者不過是整數耳至於分數已不便於核況分數之中又有分數乎若但論其理但用其法而不必處處以數核之則分數之中亦可再含分數代數式中往往有之學者由此漸進至能通代數之術方知余言不謬耳

或又問曰除分之法既可不除此而乘彼則乘分之法亦可不乘此而除彼乎

答之曰論理亦未嘗不可通惟算法之事乘易而除難除分之時本當用除法者尚且因除之不易而改用乘法豈有本當用乘法者反舍易求難而改用除法乎此亦余所謂雖有其理而不必據此理以立法雖有其法而不必從此法以求數者也

或又問曰分數之不受除者既可不除此而乘彼則整數之不受除者亦可用此法乎

答之曰此亦未嘗不可惟必先將法實兩數各化爲分數然後能如法求之其所得之數必與命分者無異此譬如從本處直向南行即可徑抵某處今遶道先向西行乃向南行再向東行而至某處也

如以三除二而不受除本可用命分之法命之爲三分之二

今必將其三化爲一分之三將其二化爲一分之二乃以三與一相乘一與二相乘而得三分之二

或又問曰乘分之法以母乘母爲母以子乘子爲子除分之法本當以母除母爲母以子除子爲子惟因不受除者居多故變爲不除此而乘彼則亦猶之乎除也加減與乘除其事當歸一例何以加分之法但以子加子爲子而不以母加母爲母減分之法亦但以子減子爲子而不以母減母爲母此何故也

答之曰子但據整數之加減乘除以律分數故覺其不一例耳若將分數之加減乘除以律整數則知其亦歸一例矣試設數以證之

如取兩個整數二與六則以二加六得八以二減六得四以二乘六得十二以二除六得三

若將整數化爲分數則其二可作一分之二其六可作一分之六其八可作一分之八其四可作一分之四其十二可作一分之十二其三可作一分之三

試將一分之二與一分之六用分數之加減乘除法求其各數則其加得之分數亦爲一分之八減得之分數亦爲一分之四乘得之分數亦爲一分之十二除得之分數爲二分之六亦可約爲一分之三

則分數所得之四數與整數所得之四數一一脗合若必如子之說則當以一與一相加爲八之分母一與一相減爲四之分母是本當得一分之八者必得二分之八本當得一分之四者必得〇分之四矣尚能相合乎

蓋天下無無母之數即整數亦必以一爲分母其分母所以能恒

爲一之故因其加減之時仍用其公分母故可仍爲一其乘除之時以一乘一以一除一其數不變故亦仍爲一是無論加減乘除其分母之一常不變也其分母之一常不變則不如不言有母而但用其子爲便於是遂覺其加減乘除之法與分數大有區別盡已逐其末而忘其本矣總而言之整數之加減乘除乃簡捷之法也分數之加減乘除乃完全之法也則亦未始非一例云

或又問曰子謂天下無無母之數余終不以爲然余以爲整數本無分母其以一爲母者乃是算者姑作如是觀並非必不可少之數也

答之曰其分母既可爲一則其數祇能爲有不能爲無因算學中凡遇無數之處皆可作〇以存其位整數若可無母則其母之位應可作〇今祇能作一分之幾而不能作〇分之幾者即是不能無母之明證也所以整數之分母以爲有之而不必入算則可以爲無母則不可也吾故曰天下無無母之數也

又有問者曰分數相加減必先化之爲同母之分數其故何也

答之曰此即古法所謂齊同通分也凡欲將分數相加減者必先同其母齊其子因母不同子不齊則不易知其孰爲大孰爲小惟之爲同母之分數則其分子之大小一覽而知即能於大數內減去小數其所餘之數即爲減得之分子至於加法雖無大小之分而其大小之理終不容昧所以亦必先同母齊子而後可將分子相加

又有問者曰命分之法不過將應除之數合舉其法實而渾言之耳然與其合舉法實而加減乘除如是繁雜何不以法除實至若干位截而用之以取便利耶

答之曰此即所謂小數也整數所難算則以分數明之分數有不便則以小數濟之其理固相因而出其法由遞變而成學者既知分數即能思得小數可見一切數理皆吾心所自有並非由外鑠我也

或又問曰小數既可合用則分數之法可盡廢乎

答之曰不能廢也從尋常之分數變爲十分數從十分數變爲小數若無分數則無十分數亦無小數