Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis I

Arbeitsblatt 5

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. Es sei K ein angeordneter Körper und $a \in K$. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in K besitzt.

Aufgabe 5.2. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element x mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 5.3. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 3$.

Aufgabe 5.4.*

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $a_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen a_1, a_2, a_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 5.5. Was passiert beim babylonischen Wurzelziehen, wenn man mit einem negativen Startwert x_0 die Quadratwurzel von $c \in \mathbb{R}_+$ berechnen möchte?

Aufgabe 5.6. Was passiert beim babylonischen Wurzelziehen, wenn man die Quadratwurzel einer negativen Zahl $c \in \mathbb{R}_-$ (mit einem positiven Startwert x_0) berechnen möchte?

Aufgabe 5.7. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass K genau dann archimedisch angeordnet ist, wenn die Folge der Stammbrüche $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5.8. Es sei K ein angeordneter Körper, es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in K und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in K. Zeige, dass dann auch die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 5.9. Betrachte die folgenden (Pseudo)-Definitionen.

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei $x \in K$.

(1) Man sagt, dass die Folge gegen x *hypervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon.$$

(2) Man sagt, dass die Folge gegen x *supervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon \geq 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(3) Man sagt, dass die Folge gegen x *megavergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ und jedes $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(4) Man sagt, dass die Folge gegen x *pseudovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(5) Man sagt, dass die Folge gegen x *semivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, derart, dass die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(6) Man sagt, dass die Folge gegen x *protovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(7) Man sagt, dass die Folge gegen x *quasivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(8) Man sagt, dass die Folge gegen x *deuterovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$x_n - x \leq \epsilon$$

gilt.

Vergleiche diese Definitionen mit der Definition von Konvergenz. Worin besteht der Unterschied? Welche Bedeutung haben die einzelnen Definitionen? Welche Definitionen sind zueinander äquivalent, zwischen welchen besteht eine Implikation (Beweis oder Gegenbeispiel)? Für welche Definitionen ist das x eindeutig bestimmt?

Aufgabe 5.10. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge in einem angeordneten Körper. Zeige, dass jede Teilfolge ebenfalls gegen x konvergiert.

Aufgabe 5.11. Man gebe ein Beispiel für eine Folge, die nicht konvergiert, aber eine konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 5.12. Man untersuche die folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{Q}$ auf die Begriffe obere Schranke, untere Schranke, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

(1) $\{2, -3, -4, 5, 6, -1, 1\}$,
(2) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{13}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$,
(3) $]-5, 2]$,
(4) $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\}$,
(5) $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \{0\}$,
(6) $\mathbb{Q}_-$,
(7) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$,
(8) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 4\}$,
(9) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 5.13. Es sei K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$ eine Teilmenge, die ein Supremum T besitze. Zeige, dass T genau dann das Maximum von M ist, wenn $T \in M$ ist.

Aufgabe 5.14.*

Hans will sich ein Frühstücksei kochen. Im Moment, als er das Ei in das kochende Wasser eintaucht, zeigt seine Uhr $7:21$ (die Uhr läuft genau und hat keine Sekundenangabe). Als er das nächste Mal auf die Uhr schaut, zeigt sie $7:26$ an. Bestimme das Infimum, Minimum, Supremum, Maximum der Zeit, die das Ei zwischen den beiden Momenten im Wasser ist.

In den beiden folgenden Aufgaben geht es um die Folge der Fibonacci-Zahlen.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 5.15. Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt ($n \geq 2$)

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n\,.$$

Aufgabe 5.16. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

Aufgabe 5.17. Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge genau dann bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, wenn $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5.18. Es sei K ein angeordneter Körper. Man gebe ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die es sowohl eine bestimmt gegen $+\infty$ als auch eine bestimmt gegen $-\infty$ divergente Teilfolge gibt.

Aufgabe 5.19. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass eine bestimmt gegen $+\infty$ divergente Folge in K nach unten beschränkt ist.

Man gebe ein Beispiel einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nach unten, aber nicht nach oben beschränkt ist, und die nicht bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Aufgabe 5.20. Bestimme alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche durch

$$a_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

gegeben ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.21. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

Aufgabe 5.22. (3 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $x \in K$ mit $|x| < 1$. Zeige, dass die Folge

$$x_n := x^n$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5.23. (3 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die Folge

$$\left(\frac{n}{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5.24. (3 Punkte)

Man gebe Beispiele für konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

Aufgabe 5.25. (3 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass x genau dann ein Häufungspunkt der Folge ist, wenn es eine gegen x konvergente Teilfolge gibt.