Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 8

Übungsaufgaben

Bei den Rechenaufgaben zu den komplexen Zahlen muss das Ergebnis immer in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit reellen Zahlen a, b angegeben werden, wobei diese so einfach wie möglich sein sollen.

Aufgabe 8.1. Berechne die folgenden Ausdrücke innerhalb der komplexen Zahlen.

(1) $(5 + 4\mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})$.
(2) $(2 + 3\mathrm{i})(2 - 4\mathrm{i}) + 3(1 - \mathrm{i})$.
(3) $(2\mathrm{i} + 3)^2$.
(4) i^{1011}.
(5) $(-2 + 5\mathrm{i})^{-1}$.
(6) $\frac{4-3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

Aufgabe 8.2.*

Bestätige die Gleichung

$$(-2 + \mathrm{i})^3 + (-2 - \mathrm{i})^3 = (1 + \mathrm{i})^4.$$

Aufgabe 8.3. Zeige, dass für reelle Zahlen die Addition und die Multiplikation als reelle Zahlen und als komplexe Zahlen übereinstimmen.

Aufgabe 8.4.*

Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 8.5. Zeige, dass $P = \mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation kein Körper ist.

Aufgabe 8.6. Skizziere die folgenden Teilmengen.

(1) $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re}\,(z) \geq -3\}$,
(2) $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}\,(z) \leq 2\}$,
(3) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 5\}$.

AUFGABE 8.7.*

a) Berechne

$$(4-7\mathrm{i})(5+3\mathrm{i})\,.$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu $z = 3+4\mathrm{i}$.

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt?

AUFGABE 8.8.*

Löse die lineare Gleichung

$$(2+5\mathrm{i})z \;=\; (3-7\mathrm{i})$$

über $\mathbb{C}$ und berechne den Betrag der Lösung.

AUFGABE 8.9. Finde zu einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i} \neq 0$ die inverse komplexe Zahl mit Hilfe eines reellen linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen.

AUFGABE 8.10.*

Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

(1) $z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)\mathrm{i}$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z+w) = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(w)$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z+w) = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(w)$.
(4) Für $r \in \mathbb{R}$ ist
$$\mathrm{Re}\,(rz) = r\,\mathrm{Re}\,(z) \text{ und } \mathrm{Im}\,(rz) = r\,\mathrm{Im}\,(z)\,.$$
(5) $z = \mathrm{Re}\,(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ ist.

AUFGABE 8.11.*

Berechne

$$(x+\mathrm{i}y)^n\,.$$

AUFGABE 8.12.*

Zeige, dass innerhalb der komplexen Zahlen folgende Rechenregeln gelten.

(1) $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.
(4) $\overline{z} = \mathrm{Re}\,(z) - \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)$.

(5) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Aufgabe 8.13. Zeige die folgenden Regeln für den Betrag von komplexen Zahlen.

(1) Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
(2) Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z|\,|w|$.
(5) Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/\,|z|$.
(6) $|\mathrm{Re}\ (z)|\,, |\mathrm{Im}\ (z)| \leq |z|$.

Aufgabe 8.14. Zeige, dass eine Folge komplexer Zahlen

$$z_n = x_n + \mathrm{i} y_n$$

genau dann konvergiert, wenn sowohl x_n als auch y_n konvergiert. Für den Grenzwert gilt dabei

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Aufgabe 8.15. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$
(2) Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$
(3) Für $c \in \mathbb{C}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} c x_n = c(\lim_{n\to\infty} x_n)\,.$$
(4) Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}\,.$$
(5) Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}\,.$$

Aufgabe 8.16.*

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| < 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 8.17. Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| > 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem reellen $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 8.18. Zeige, dass die komplexen Zahlen vollständig sind, dass also in $\mathbb{C}$ jede Cauchy-Folge konvergiert.

Die folgende Aufgabe beschreibt eine komplexe Version von Satz 7.7.

Aufgabe 8.19. Es seien $a < b$ und $c < d$ reelle Zahlen und sei

$$Q = \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq b,\ c \leq \mathrm{Im}\,(z) \leq d\}$$

das dadurch definierte Reckteck in $\mathbb{C}$. Es sei z_n eine Folge in Q. Zeige, dass diese Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 8.20. Bestätige die in Beispiel 8.11 angegebene Formel für die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ im Fall $b < 0$.

Aufgabe 8.21. Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Zeige, dass es für die Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mindestens eine komplexe Lösung z gibt.

Aufgabe 8.22. Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Man charakterisiere, wann es für die Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

genau eine Lösung in $\mathbb{C}$ gibt und wann zwei Lösungen.

Aufgabe 8.23. Man bestimme die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 + 5\mathrm{i}z - 3 = 0\,.$$

Der Begriff eines Häufungspunktes lässt sich unmittelbar auf komplexe Folgen erweitern.

Aufgabe 8.24. Bestimme die Häufungspunkte der komplexen Folge $(\mathrm{i}^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Man gebe für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen Punkt konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.25. (3 Punkte)

Berechne die komplexen Zahlen

$$(1+\mathrm{i})^n$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 8.26. (3 Punkte)

Zeige, dass für die komplexe Konjugation die folgenden Rechenregeln gelten.

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 8.27. (5 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von i.

Aufgabe 8.28. (3 Punkte)

Man finde alle drei komplexen Zahlen z, die die Bedingung

$$z^3 = 1$$

erfüllen.

Aufgabe 8.29. (5 Punkte)

Es seien n komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in der Kreisscheibe B mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1, also in $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, gegeben. Zeige, dass es einen Punkt $w \in B$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i - w| \geq n$$

gibt.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7