

Cosmologie

Une version à jour et éditable de ce livre est disponible sur Wikilivres, une bibliothèque de livres pédagogiques, à l'URL :

<http://fr.wikibooks.org/wiki/Cosmologie>

Vous avez la permission de copier, distribuer et/ou modifier ce document selon les termes de la Licence de documentation libre GNU, version 1.2 ou plus récente publiée par la Free Software Foundation ; sans sections inaltérables, sans texte de première page de couverture et sans Texte de dernière page de couverture. Une copie de cette licence est incluse dans l'annexe nommée « Licence de documentation libre GNU ».

L'expansion de l'univers

Autrefois, les scientifiques pensaient que l'univers était statique, c'est-à-dire que les effets de la gravité des astres s'annulent mutuellement sur de grandes distances. L'univers restait stable, son volume était invariant. Évidemment, chaque galaxie s'éloigne ou se rapproche de la nôtre, mais dans l'ensemble, ces différents mouvements auraient dû se compenser. Ainsi, les observateurs pensaient que la moyenne des vitesses des galaxies serait nulle. Mais cette théorie de l'univers statique était contradictoire avec le noir de la nuit. Si l'univers est statique, existant depuis un temps infini, le ciel devrait être éclairé par une infinité d'étoiles. Peu importe où on regarde de la voute céleste, on devrait y voir une étoile à cet endroit. Il faut savoir que la luminosité des étoiles du ciel est indépendante de la distance : seule leur distance les fait paraître plus petites, ce qui fait qu'elles semblent émettre peu de lumière. Cette différence entre la prédiction tirée d'un univers statique et l'observation, est appelée le **paradoxe d'Olbers**. Diverses réponses ont été apportées à ce paradoxe, mais aucune n'était satisfaisante. La finitude de l'espace pose divers problèmes, la non-transparence de l'espace à la lumière est simplement absurde au vu des observations actuelles, l'hypothèse que toutes les étoiles sont rassemblées assez près de la Terre ne tient plus suite à de nombreuses observations, et j'en passe. La seule solution est que l'univers n'est pas statique et qu'il a un âge fini. Cette hypothèse commença à prendre plus de poids quand les observations suivantes firent jour.

Loi de Hubble

Dès 1918, les astronomes ont entrepris de mesurer la vitesse de galaxies à partir de la lumière qu'elles émettent. Les observations actuelles utilisent soit des étoiles variables (des céphéides), soit des étoiles qui explosent : les supernovas. Plus précisément, les astronomes utilisent une classe bien précise de supernovas, qui ont pour particularité de générer systématiquement la même luminosité : les supernovas de type Ia. La luminosité perçue depuis la Terre de ces supernovas est proportionnelle à la distance. Et les observations ne collent pas du tout avec cette hypothèse ! Dans les grandes lignes, on observe que les galaxies s'éloignent plus qu'elles ne se rapprochent. La conclusion est claire : l'univers s'étend, gonfle.

Hubble a été le premier astronome à mettre en équation ce comportement, dans son article daté de 1929. Il étudia un grand nombre d'observations provenant de ses collègues, ainsi que les observations qu'il avait effectuées lui-même. De ces observations, il induit une loi statistique, du nom de **loi de Hubble**. Cette loi dit que la vitesse d'éloignement d'une galaxie est proportionnelle à sa distance. Dit autrement, cette loi est identique à la formule qui suit, dans laquelle V est la vitesse de fuite, D la distance de la galaxie et H un facteur de proportionnalité nommée **constante de Hubble**.

$$V = H \times D$$

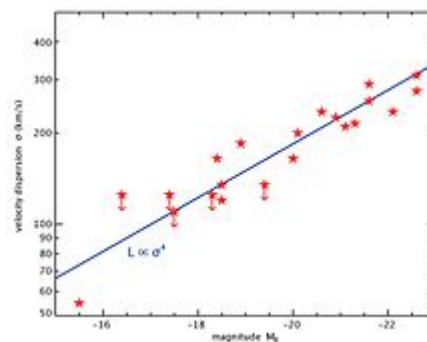


Illustration de la relation entre la vitesse de fuite d'une galaxie et sa distance.

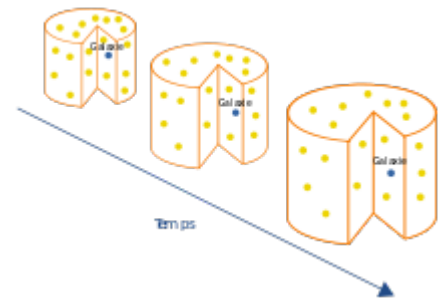
Expansion de l'univers

Aussi bizarre que cela puisse paraître, les scientifiques n'ont pas été étonnés de la découverte de la loi de Hubble. Il faut dire que la relativité générale était déjà bien avancée, et que les modèles d'univers en expansion ou en contraction étaient déjà étudiés à l'époque. De plus, cette équation avait été découverte quelques années auparavant par George Lemaitre, un abbé fêru de sciences, qui avait déduit cette relation des équations de la relativité générale. Les équations de la relativité expliquent la loi de Hubble avec le concept d'**expansion de l'univers** : les corps matériels de l'univers s'éloignent les uns des autres au fil du temps. Les interprétations de la relativité disent que l'expansion de l'univers ne provient pas d'un mouvement des objets dans l'espace, mais d'une modification de la manière de calculer les distances avec le temps. L'image qui est souvent donnée dans la vulgarisation scientifique compare l'univers avec un gâteau au raisin qui gonfle progressivement, les raisins étant les galaxies.

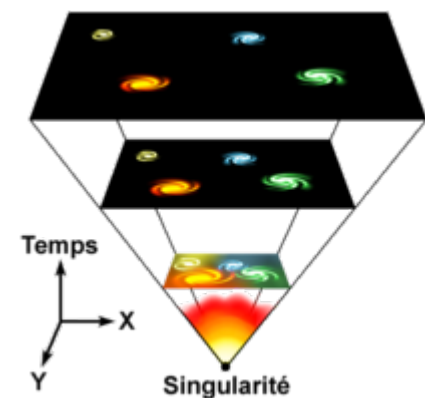
Avec la loi de Hubble, il est évident que l'univers devait être plus "petit" par le passé (plus précisément, la portion de l'univers qui correspond aujourd'hui à l'univers observable). En renversant l'écoulement du temps, l'univers se contracte progressivement, et on peut facilement imaginer qu'après un certain temps, tout le contenu de l'univers soit rassemblé en un seul point : la **singularité initiale**. L'univers serait alors né d'une dilatation de cette singularité initiale, dilatation qui porte le nom de **big-bang**. Mais cette vue de l'esprit pose de nombreux problèmes mathématiques. En effet, cette singularité implique que de nombreux calculs dépendant des distances donnent des divisions par zéro. Par exemple, le calcul de la pression, de la température, de la densité, ou d'autres paramètres physiques ne sont pas calculables. Tout ce que peuvent faire les scientifiques, c'est étudier ce qu'il s'est passé quelques secondes ou minutes après le temps qui correspond à cette singularité hypothétique. Les calculs actuels ne donnent plus de résultats crédibles au-delà d'une certaine durée, la durée de Planck. Celle-ci vaut environ $5,391\ 06(32) \times 10^{-44}$ secondes.

Le facteur d'échelle

Mettre en équation le phénomène d'expansion de l'univers est assez trivial. Du fait de l'expansion, toute distance entre deux points sera multipliée par un facteur multiplicatif après une durée t . Pour calculer ce facteur multiplicatif, les physiciens font intervenir ce qu'on appelle le **facteur d'échelle**, noté $a(t)$. Dans ce qui va suivre, nous allons supposer que nous prenons toutes les mesures dans un référentiel d'origine O , et que nous suivons la distance $\mathbf{x}(t)$ d'un objet matériel en fonction du temps. L'origine des temps est fixée comme étant t_0 . L'augmentation des distances à cause de l'expansion de l'univers se calcule comme suit :



Analogie de l'expansion de l'univers.



Expansion de l'univers.

$$x(t) = x(t_0) \frac{a(t)}{a(t_0)}$$

L'interprétation de cette équation est assez simple : si le facteur d'échelle augmente de X % , les distances font de même.

Pour simplifier les calculs, on considère souvent que le facteur d'échelle vaut 1 à un instant idéal pour simplifier les calculs. Par exemple, comparons les distances entre un instant t_0 et un instant ultérieur t . Pour simplifier les calculs, on peut supposer que le facteur d'échelle était de 1 à l'instant t_0 . Sous cette hypothèse, l'équation précédente se simplifie :

$$x(t) = x(t_0)a(t)$$

On voit que cette équation fait intervenir deux distances : $x(t)$ et $x(t_0)$. La distance $x(t_0)$ peut s'interpréter comme la distance qu'auraient deux objets s'il n'y avait pas d'expansion. Elle est appelée la **distance comobile**. A contrario, la distance $x(t) = x(t_0)a(t)$ tient compte de l'expansion, qui augmente les distances entre deux objets. On voit que le facteur d'échelle (ou plutôt le rapport entre les facteurs d'échelle) est un coefficient multiplicateur qui dit par combien les distances ont été multipliées entre l'époque actuelle et l' instant t_0 . Dit autrement, le facteur d'échelle est ce par quoi il faut diviser les distances actuelles pour obtenir les distances à l'instant t_0 . Les distances qui tiennent compte de l'expansion, opposées aux distances comobiles, sont appelées des distances propres.

Vitesse et facteur d'échelle

La distinction entre distance comobile et propre peut aussi se faire pour les vitesses, volumes, surfaces et autres. Par exemple, il est possible de calculer une **vitesse propre** en dérivant la distance propre, ce qui donne :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(t_0)}{dt} a(t) + x(t_0) \frac{da(t)}{dt}$$

En utilisant la définition de la vitesse, $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, l'équation devient :

$$v(t) = v(t_0)a(t) + x(t_0) \frac{da(t)}{dt}$$

La vitesse du terme de gauche est une vitesse provenant d'une modification de la distance comobile, qui est donc totalement indépendante de l'expansion. Elle traduit le fait que les objets s'éloignent ou se rapprochent même sans expansion. Cette forme de vitesse est appelée la **vitesse locale** ou encore vitesse comobile. Le terme de droite est causée intégralement par l'expansion, d'où son nom de **vitesse d'expansion**. La vitesse comobile est celle qu'aurait un objet s'il n'y avait pas d'expansion, alors que la vitesse propre tient compte de l'expansion. Il faut noter que l'équation précédente nous explique pourquoi certaines galaxies très lointaines semblent s'éloigner de nous plus vite que la lumière. Si la vitesse locale ne peut dépasser la vitesse de la lumière, la vitesse de l'expansion n'est pas contrainte par c . Ainsi, la vitesse supraluminique des galaxies lointaines provient de la vitesse de l'expansion et ne reflète pas une véritable vitesse supraluminique.

Pour les objets éloignés, la vitesse locale est négligeable par rapport à la vitesse d'expansion. Il est donc utile, de supposer la vitesse locale nulle. Sous cette hypothèse, l'équation précédente se simplifie et permet de dériver directement la loi de Hubble, comme illustré ci-dessous.

Démonstration

Partons pour cela de l'équation précédente.

$$v(t) = v(t_0)a(t) + x(t_0)\frac{da(t)}{dt}$$

Supposons que la vitesse locale est nulle.

$$v(t) = x(t_0)\frac{da(t)}{dt}$$

Or, on sait que $x(t_0) = \frac{x(t)}{a(t)}$, ce qui donne :

$$v(t) = x(t)\frac{1}{a(t)}\frac{da}{dt}$$

On retrouve la loi de Hubble en postulant que $H = \frac{1}{a(t)}\frac{da}{dt}$:

$$v(t) = x(t)H$$

CQFD !

Comme on le voit, la démonstration précédente nous donne la valeur exacte du facteur de Hubble.

$$H = \frac{1}{a(t)}\frac{da}{dt} = \frac{d \ln a}{dt}$$

Lien entre expansion et facteur de Hubble

L'expansion, de part son action sur les distances, entraîne naturellement une variation des surfaces, volumes et densités. Prenons par exemple une sphère de rayon r et de volume V : son rayon augmentant avec le facteur d'échelle, son volume fera de même. Quelques calculs triviaux nous disent que son volume évolue avec le facteur d'échelle selon la formule suivante, avec V le volume de la sphère à l'instant t_0 .

$$V = V_0 \times a^3$$

Cette équation nous permet de déduire le rapport entre le facteur de Hubble et l'expansion des volumes. On obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{dV}{V} = 3H.$$

Cette équation sera réutilisée plus tard dans le cours, quand nous démontrerons l'équation du fluide de Friedmann.

Démonstration

Par définition, le taux d'expansion, à savoir le pourcentage d'expansion des volumes, est égal à :

$$\frac{dV}{V}$$

Remplaçons le volume par l'expression précédente :

$$\frac{dV}{V} = \frac{d(V_0 a^3)}{V_0 a^3}$$

Vu que le volume à l'instant t_0 est une constante, on peut factoriser cette constante dans les calculs précédents et simplifier, ce qui donne :

$$\frac{dV}{V} = \frac{d(a^3)}{a^3}$$

Le calcul de la dérivée donne :

$$\frac{dV}{V} = \frac{3a^2 da}{a^3}$$

$$\frac{dV}{V} = 3 \frac{da}{a}.$$

On reconnaît alors le facteur de Hubble dans le terme de droite, ce qui donne :

$$\frac{dV}{V} = 3H.$$

Age de l'univers

Si on considère que le facteur de Hubble est constant, on peut obtenir une approximation pas trop absurde de l'âge de l'univers. Vu qu'au moment du big-bang, toutes les galaxies étaient rassemblées en un point, l'âge de l'univers est alors égal au temps qu'il a fallu pour une galaxie a atteindre sa distance actuelle D , en s'éloignant à la vitesse v calculée par la loi de Hubble. Autrement dit, l'âge de l'univers est égal à

$$Th = \frac{D}{V} = \frac{D}{D \times H} = \frac{1}{H}.$$

Ce résultat est appelé le **temps de Hubble**, et il vaut environ 13 milliards d'années. Cette valeur est très proche de celle actuellement admise par les scientifiques, même si

l'hypothèse de base du calcul n'est pas respectée (le facteur de Hubble n'est pas resté constant). Le cas général, où le facteur de Hubble n'est pas constant, est cependant plus compliqué. Nous verrons dans la suite du cours que l'âge de l'univers dépend de sa densité et de sa composition : selon sa teneur en matière et en rayonnement, son âge ne sera pas le même. L'âge de l'univers dépend notamment de sa densité. Il se trouve que le cas où la densité de l'univers est nulle donne un âge égal au temps de Hubble ! Alors que la densité de l'univers n'est évidemment pas nulle... Mais nous résoudrons ce mystère dans quelques chapitres.

De manière plus générale, l'âge de l'univers est égal à :

$$T = \int dt$$

Or, on peut calculer le terme dt en utilisant la définition du facteur de Hubble. On trouve alors :

$$T = \int \frac{d \ln a}{H_a}$$

L'univers observable

L'**univers observable** est la portion de l'univers que nous pouvons observer, compte tenu de la limite de la vitesse de la lumière. Des objets situés très loin ne peuvent pas être vu pour une raison très simple : la lumière qu'ils émettent n'a pas eu le temps de nous parvenir. La distance maximale à laquelle nous pouvons voir des objets (sans tenir compte d'éventuelles limitations techniques) dépend de l'âge de l'univers. S'il faut un temps supérieur à l'âge de l'univers pour nous parvenir, il nous est actuellement impossible de les voir, ce qui n'est pas le cas pour des objets situés plus près. Cette distance maximale est donc le rayon de l'univers observable. L'ensemble des points situés à la distance maximale des objets observables, à savoir la surface de l'univers observable, porte un nom : c'est l'**horizon cosmologique**.

Rayon de l'univers observable

Le calcul du rayon cosmologique actuel est simple : il suffit de prendre la vitesse de l'éloignement de l'horizon, et de l'intégrer sur l'âge de l'univers. On peut calculer la vitesse d'éloignement de l'horizon cosmologique en réutilisant l'équation du chapitre précédent.

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = v(t_0)a(t) + x(t_0)\frac{da(t)}{dt}$$

Dans le cas de l'horizon cosmologique, la distance est égale au rayon de l'univers et la vitesse locale est égale à la vitesse de la lumière, ce qui donne :

$$\frac{dr(t)}{dt} = c + \frac{da(t)}{dt} \times r(t)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = c + H(t) \times a(t) \times r(t)$$

On peut alors intégrer cette expression sur l'âge de l'univers pour obtenir le rayon de l'horizon cosmologique, mais les calculs sont alors très complexes.

Rayon comobile

Une autre façon de faire les calculs est de passer par l'intermédiaire du rayon comobile. Pour rappel, ce rayon comobile est le rayon corrigé de l'influence du facteur d'échelle (et donc de l'expansion. Il vaut, par

définition : $\frac{r(t)}{a(t)}$.

La dérivée de ce rayon comobile est égale à :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r(t)}{a(t)} \right) = \frac{1}{a(t)} \frac{dr(t)}{dt} - \frac{r(t)}{a(t)^2} \frac{da(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r(t)}{a(t)} \right) = \frac{1}{a(t)} \frac{dr(t)}{dt} - H \frac{r(t)}{a(t)}$$

En injectant l'équation $\frac{dr(t)}{dt} = c + H(t) \times a(t) \times r(t)$ dans la précédente, on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r(t)}{a(t)} \right) = \frac{c}{a(t)} + H(t)r(t) - H \frac{r(t)}{a(t)}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r(t)}{a(t)} \right) = \frac{c}{a(t)} + \frac{r(t)}{a(t)} (H(t) \times (a(t) - 1))$$

On voit que la dérivée est la somme de deux termes. Le premier est égal à ce qu'on appelle la vitesse comobile de la lumière. Par définition, la vitesse de la lumière est de $c = 299792,458 \text{ Km/S}$, mais il s'agit d'une vitesse propre. On peut calculer sa vitesse comobile en divisant par le facteur d'échelle, ce qui n'est autre que le premier terme de l'équation précédente. $c_{com} = \frac{c}{a}$. En intégrant l'équation précédente sur l'âge de l'univers, on a la distance comobile de l'horizon, celle à laquelle se situait l'horizon cosmologique quand la lumière de l'horizon a été émise. On se retrouve alors avec une équation très générale, qui marche même quand le facteur de Hubble est variable.

Pour simplifier les calculs, nous allons supposer que le second terme est négligeable, seule la vitesse comobile de la lumière devant être prise en compte. On trouve alors que le rayon comobile se calcule avec la formule suivante, avec t_u l'âge de l'univers :

$$\frac{r(t)}{a(t)} = \int_0^{t_u} \frac{c}{a(t)} dt$$

$$\frac{r(t)}{a(t)} = c \int_0^{t_u} \frac{1}{a(t)} dt$$

$$\frac{r(t)}{a(t)} = c \int_0^{t_u} \frac{dt}{a(t)}$$

On peut simplifier l'intégrale en supposant que le facteur de Hubble est constant. Avec cette approximation, l'âge de l'univers est simplement égal au temps de Hubble. En conséquence, le rayon comobile de l'univers observable est donc égal à la vitesse de la lumière multiplié par l'âge de l'univers. En prenant le temps de Hubble comme âge de l'univers, on trouve le **rayon de Hubble**, qui vaut 13 milliards d'années-lumière :

$$R = c \times Th = \frac{c}{H}$$

Cependant, cette équation omet le fait qu'entre le moment où la lumière a été émise, et le temps où elle-ci est perçue, l'horizon cosmologique s'est éloigné à cause de l'expansion de l'univers. Le rayon obtenu est en fait le rayon comobile de l'univers observable, à savoir la distance à laquelle se situait l'horizon cosmologique au moment de la création de l'univers : ce n'est pas sa distance actuelle, qui est supérieure du fait de l'expansion de l'univers !

Distance actuelle

On peut obtenir la distance propre par un calcul très simple, à partir de la distance comobile. On sait que pour toute distance, on a l'équation suivante qui est respectée. Ici, $x(t)$ correspond à la distance actuelle,

tandis que $\mathbf{x}(t_0)$ est la distance comobile.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)a(t)$$

Or, on a calculé plus haut l'expression générale de la distance comobile. En posant que le facteur d'échelle à l'émission est de 1, on a, avec t_u l'âge de l'univers :

$$R = a(t) \int_0^{t_u} \frac{c}{a(t)} dt$$

En supposant que la distance à l'émission est égale au rayon de Hubble, on a :

$$R = a(t) \frac{c}{T_h}$$

L'accélération de l'expansion de l'univers

Il est intéressant de savoir si cette vitesse reste constante, ou si l'expansion accélère/décélère. Pour simplifier les calculs, nous allons omettre la vitesse de la lumière et nous concentrer sur la vitesse de l'expansion de l'univers. Cela ne change rien aux résultats que nous allons obtenir vu que la vitesse de la lumière est constante : sa dérivée est donc nulle, ce qui la rend inutile dans les calculs de dérivée qui vont suivre.

Vitesse de l'expansion

Une première étape pour savoir si l'expansion ralentit ou accélère, est calculer l'accélération de l'expansion de l'univers. Cette accélération est simplement égale à la dérivée de la vitesse de l'expansion.

$$a_c = \frac{dv}{dt}$$

On peut alors appliquer la loi de Hubble pour déterminer la vitesse de l'expansion. En injectant dans l'équation précédente, on a :

$$a_c = \frac{d(H(t) \times r)}{dt}$$

Si on suppose que le facteur de Hubble n'est pas constant, on a :

$$a_c = \frac{dH(t)}{dt} \times r + H(t) \times \frac{dr}{dt}$$

Or, $\frac{dr}{dt}$ est simplement la vitesse d'expansion v .

$$a_c = \frac{dH(t)}{dt} \times r + H(t) \times v$$

La vitesse de l'expansion peut se calculer avec la loi de Hubble, ce qui donne :

$$a_c = \frac{dH(t)}{dt} \times r + H(t)^2 r$$

On peut factoriser le rayon de l'univers, ce qui donne :

$$a_c = r \left(H(t)^2 + \frac{dH(t)}{dt} \right)$$

Facteur de décélération

Il est courant que les cosmologistes utilisent ce qu'on appelle le **facteur de décélération**, un nombre calculé partir du facteur de Hubble. Celui-ci est positif si l'expansion accélère, négatif si elle ralentit, et reste constante si la vitesse d'expansion reste constante. Par définition, ce facteur de décélération q vaut :

$$a_c = q \times H(t)^2 r$$

Pour le calculer, on part de l'équation $a_c = r \left(H(t)^2 + \frac{dH(t)}{dt} \right)$. Quelques manipulations algébriques donnent alors :

$$q = - \left(1 + \frac{dH(t)}{H(t)^2 dt} \right).$$

Il se trouve que le facteur de décélération est relié au rayon de l'univers observable de la manière suivante :

$$\frac{dR_h}{dt} = c(q + 1)$$

L'évolution de la matière

L'univers est peuplé de matière et de rayonnement. La matière est essentiellement composée de particules massives : baryons, quarks, électrons, etc. Pour plus de simplicité, on peut supposer que la matière de l'univers est un gaz. Cette hypothèse n'est pas si abusive vu l'état actuel de l'univers : 10% de la matière sert à fabriquer de étoiles, le reste étant localisé dans des nébuleuses et des nuages moléculaires dont la température ne dépasse pas la dizaine de degrés au-dessus du zéro absolu. L'univers est donc essentiellement composé de gaz. Évidemment, ce gaz de matière a une pression, un volume, une densité, une énergie, etc. Il reste de plus soumis aux lois de la thermodynamique. L'expansion va cependant faire varier continument sa densité (l'univers se dilue avec l'expansion), sa pression, sa température, etc.

La densité

Nous allons commencer par étudier les différentes densités. Nous allons qu'en plus de la masse volumique, les cosmologistes utilisent plusieurs densités annexes : la densité d'énergie et la densité de particules.

La densité de particule

Le terme $\frac{n}{V}$ est appelé la densité de particules et est noté ϵ . Il correspond au nombre de particules par unité de volume. Vu que le volume de l'univers varie selon $V = V_0 \times a^3$, la densité de particule varie donc comme :

$$\frac{n}{V} = \frac{n}{V_0} \times \frac{1}{a^3}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 \times \frac{1}{a^3}$$

La densité de matière

La densité (la masse volumique) est égale au produit densité d particule par masse d'une particule, par définition. Vu que la masse d'une particule ne varie pas, du fait de la conservation de la masse, on devine rapidement que la densité varie comme :

$$d = d_0 \frac{1}{a^3}$$

Cette équation sera réutilisée plus tard dans le cours, quand nous analyserons la première équation de Friedmann. IL faut cependant signaler que la densité d'énergie du rayonnement ne suit pas la même équation, comme nous le verrons dans le prochain chapitre.

La densité d'énergie

Passons maintenant à la densité d'énergie de l'univers, à savoir la quantité d'énergie par unité de volume. Nous n'allons nous concentrer sur la matière, le rayonnement étant étudié au prochain chapitre. On sait que la densité d'énergie est proportionnelle à la densité de particule multipliée par l'énergie (moyenne)

d'une particule. Du fait de la conservation de l'énergie (qui est respectée pour la matière), on se doute que l'énergie moyenne d'une particule ne change pas avec le temps. On a donc :

$$\frac{E}{V} = \epsilon \times \langle E_p \rangle$$

$$\frac{E}{V} = \frac{\epsilon_0}{a^3} \times \langle E_p \rangle$$

On voit donc que la densité d'énergie varie comme la masse volumique et la densité de particule.

Pression et température

Ce gaz reste naturellement soumis à la première loi de la thermodynamique, à la fameuse conservation de l'énergie. Celle-ci s'écrit, dans le domaine de la thermodynamique, comme suit avec Q le flux de chaleur qui quitte le gaz de photons, E son énergie, P sa pression et V son volume.

$$dQ = dE + PdV$$

On va supposer que le flux de chaleur qui quitte le gaz est nul. On a alors :

$$dE = -PdV$$

Pour rappel, la température d'un gaz parfait est la somme des énergies cinétiques de chaque particule. La physique statistique nous dit que l'énergie moyenne d'une particule est égale à : $\langle E_p \rangle = \frac{3}{2}KT$. Pour un gaz de n particules et de température T : $E = \frac{3}{2}NKT$. En injectant la première équation dans la précédente, on a :

$$d\left(\frac{3}{2}NKT\right) = -PdV$$

Vu que le nombre de particule est supposé constant, on a :

$$\frac{3}{2}NKd(T) = -PdV$$

Pour rappel, un gaz parfait suit la loi suivante, avec P la pression, V le volume, n le nombre de particules, T la température et K la constante de Boltzmann : $PV = nKT$. On peut reformuler cette équation comme suit : $P = \frac{NKT}{V}$. Ce qui fait qu'on a :

$$\frac{3}{2}NKd(T) = -NKT\frac{dV}{V}$$

On divise alors par NKT :

$$\frac{3}{2}\frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V}$$

On utilise alors la relation $\frac{dV}{V} = 3H = 3\frac{da}{a}$:

$$\frac{3}{2} \frac{dT}{T} = -3 \frac{da}{a}$$

$$\frac{dT}{T} = -2 \frac{da}{a}$$

Intégrons des deux cotés. Vu que $\int \frac{dx}{x} = \ln x$:

$$\ln T = -2 \ln a$$

Ce qui signifie que, d'après les règles des puissances :

$$\ln T = \ln a^{-2}$$

De cette équation, on peut déduire que :

$$T \propto \frac{1}{a^2}$$

La température de la matière varie donc comme l'inverse du carré du facteur d'échelle.

L'évolution du rayonnement

On peut signaler que l'effet de l'expansion influe non seulement sur les distances entre corps matériels, mais aussi sur la lumière. La longueur d'onde de la lumière est une distance comme une autre, qui est modifiée par l'expansion de l'univers. Si une onde lumineuse est émise avec la longueur d'onde λ_0 à un instant t_0 , sa longueur d'onde λ à un instant t sera égale à :

$$\lambda = \lambda_0 \frac{a(t)}{a(t_0)}$$

Cela nous permet de calculer la fréquence d'une onde lumineuse en fonction du facteur d'échelle. En effet, il existe une relation entre la longueur d'onde et la fréquence pour la lumière (comme pour toute onde), les deux étant inversement proportionnels. De cette relation, on peut déduire la relation suivante :

$$f = f_0 \frac{a(t_0)}{a(t)}$$

Décalage vers le rouge cosmologique

On peut utiliser cette relation entre longueur d'onde de la lumière et facteur d'échelle, pour calculer sa variation en fonction de l'expansion. Le fait est que le facteur d'échelle augmentant avec le temps, la longueur d'onde de la lumière augmente. Ainsi, si vous regardez une galaxie ou une étoile au loin, sa lumière semble être décalée vers les basses fréquences (le rouge), comparé à sa couleur d'émission. C'est ce décalage vers le rouge qui était utilisé pour mesurer la vitesse des galaxies par Hubble et ses collègues. Ce phénomène s'appelle le **décalage vers le rouge**, noté z . Celui-ci est simplement le rapport entre le décalage des longueur d'onde causé par l'expansion, et la longueur d'onde d'émission :

$$z = \frac{\lambda_{\text{observation}} - \lambda_{\text{émission}}}{\lambda_{\text{émission}}} = \frac{\lambda_{\text{observation}}}{\lambda_{\text{émission}}} - 1$$

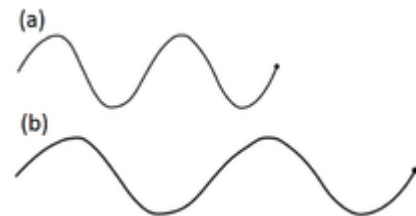
Décalage vers le rouge et facteur d'échelle

En utilisant la relation précédente, on déduit la valeur du décalage vers le rouge en fonction du facteur d'échelle :

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1$$

Cette équation permet de déterminer quel était le facteur d'échelle, quand la lumière a été émise. Posons que le facteur d'échelle actuel vaut 1. L'équation obtenue est alors la suivante :

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1$$



Effect of the stretching of light on the light wavefront.

$$z + 1 = \frac{1}{a(t)}$$

$$a(t) = \frac{1}{z + 1}$$

Décalage vers le rouge et facteur de Hubble

Quelques manipulations algébriques à partir de l'équation précédente nous donnent :

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}$$

Démonstration

Pour faire cette démonstration, partons de l'équation suivante :

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1$$

Calculons la dérivée par rapport au temps :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{a(t)} - 1\right)}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{da}{a^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{H}{a}$$

$$-\frac{dz}{dt} \times a = H$$

Maintenant, utilisons l'équation $a = \frac{1}{z+1}$:

$$-\frac{1}{z+1} \frac{dz}{dt} = H$$

CQFD !

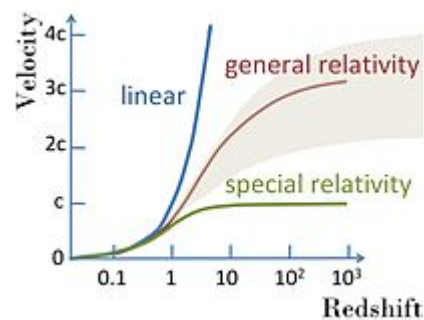
L'interprétation du décalage vers le rouge

Les étudiants en physique apprennent que le décalage vers le rouge peut être causé par le mouvement d'un objet dans l'espace. Quand un objet s'éloigne de nous, à une certaine vitesse propre, la fréquence de la lumière qu'il émet baisse. Et réciproquement, un objet qui s'approche émettra une lumière plus bleue,

dont la fréquence a légèrement augmenté. C'est l'**effet Doppler-Fizeau**. Celui-ci donne la formule suivante, entre la vitesse de l'objet en mouvement et le décalage vers le rouge qui en découle. Cette relation est cependant une approximation, dérivée des équations de Newton, valide uniquement pour des objets dont la vitesse d'éloignement est faible. En clair, cette formule ne vaut que pour des objets cosmologiques "proches".

$$z = \frac{v}{c} = \frac{Hd}{c}$$

Il pourrait être tentant d'utiliser une formule plus précise, tirée de la relativité restreinte, histoire d'obtenir des résultats corrects pour des objets lointains. Mais cela donnera des résultats faux, pour des raisons assez techniques liées au changement de vitesse de l'expansion (qui n'est pas forcément constante). Appliquées de manière naïve à des galaxies lointaines, les formules de la relativité restreinte et générales donnent des vitesses supérieures à la vitesse de la lumière. L'interprétation en terme d'effet Doppler impliquerait donc que les galaxies lointaines se déplacent plus vite que la relativité, en totale contradiction avec la relativité. La seule interprétation correcte de ce décalage vers le rouge cosmologique n'est donc pas une vitesse de déplacement dans l'espace, mais une modification du facteur d'échelle, valable quel que soit le référentiel. Mais une explication claire de ce processus demande d'utiliser la relativité générale.



Velocity-redshift

La thermodynamique du rayonnement

La majorité du rayonnement dans l'univers forme un gaz de photons homogène et isotrope (nous détaillerons cette remarque quand nous aborderons le rayonnement de fond diffus cosmologique). Autrement dit, c'est un rayonnement de corps noir. Ce gaz de photons possède diverses propriétés, qui sont affectées par l'expansion : il possède une densité d'énergie, une température, et bien d'autres paramètres.

Rappel : les équations d'un gaz de photons

Un gaz de photon est formellement décrit par la fameuse **équation de Planck**, que nous ne détaillerons pas ici. Celle-ci donne tout simplement la densité d'énergie des photons qui possèdent une fréquence f , dans un gaz de photons de température T . Et cette équation contient un terme, la fréquence, sensible au facteur d'échelle. Voici cette équation de Planck :

$$N(f) = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{hf}{k_b T}} - 1}$$

On peut reformuler cette équation en utilisant la longueur d'onde, ce qui donne :

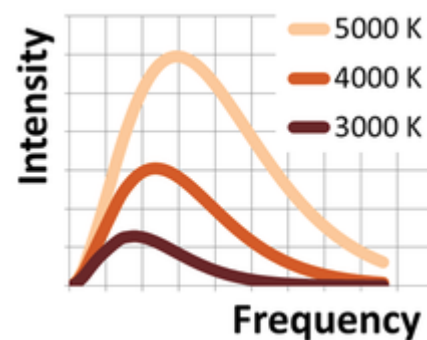


Illustration de la loi de Planck.

$$N(f) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda K_b T}} - 1}$$

Une illustration de la distribution des photons suivant leur fréquence est illustré dans le schéma de droite. Le schéma de droite montre que le pic d'intensité, à savoir la fréquence où le nombre de photons est maximal. Or, ce pic est proportionnel à la température moyenne du gaz de photon, d'après la relation

$$\text{suivante : } T = \frac{f}{2,8K_b}.$$

Énergie des photons

Un gaz de photons, ou rayonnement de corps noir a une densité d'énergie (quantité d'énergie par unité de volume) à savoir la quantité d'énergie du rayonnement par unité de volume, que nous noterons ϵ . Cette densité d'énergie se calcule avec la **loi de Stephan**, qui se dérive de l'équation de Planck. Celle-ci dit que la densité d'énergie d'un gaz de photon est proportionnelle à puissance quatrième de sa température. Voici cette loi, avec α une constante, la constante de Stephan, et T la température :

$$\epsilon = \alpha T^4$$

$$\epsilon = \frac{\pi^2}{15} \frac{K_b^4}{(\hbar c)^3} T^4$$

Les lois de la physique nous disent que l'énergie d'un photon dans ce gaz est égale à $E = hf$, avec h la constante de Planck. Des équations précédentes, il est possible de dériver laborieusement la quantité moyenne d'énergie d'un photon dans un gaz de photons. Celle-ci est approximativement celle-ci, avec K_b la constante de Boltzmann.:

$$\langle E \rangle = 3K_b T.$$

Nombres moyens de photons

Des équations précédentes, il est possible de déterminer le nombre de photons par unité de volume. Cette valeur est aussi appelée la densité de photons, par analogie avec la densité de matière, ce qui est un abus de langage. Pour la calculer, il suffit de diviser la densité d'énergie par l'énergie moyenne d'un photon. On obtient alors :

$$n = \frac{\epsilon}{\langle E \rangle}$$

$$n = \frac{\frac{\pi^2}{15} \frac{K_b^4}{(\hbar c)^3} T^4}{3K_b T}$$

En simplifiant, on a :

$$n = \frac{\pi^2}{45} \left(\frac{K_b T}{\hbar c} \right)^3$$

Pression d'un gaz de photons

Peut-être savez-vous déjà que la pression d'un gaz est proportionnelle à sa quantité d'énergie. Un gaz de photons ne fait certainement pas exception à cette règle. Le coefficient de proportionnalité entre pression et densité d'énergie est de $\frac{1}{3}$. Cela donne l'équation suivante :

$$P = \frac{1}{3}\epsilon = \frac{\alpha T^4}{3}$$

Le comportement du gaz de photon suite à l'expansion

Dans ce qui va suivre, nous allons voir comme la pression, la densité d'énergie et la température du gaz de photon varie en fonction de l'expansion. Nous allons voir que la densité d'énergie et la température dépendent du facteur d'échelle (ou d'une de ses puissance).

La densité d'énergie du rayonnement

Nous allons d'abord voir comment évolue la densité d'énergie en fonction de l'expansion. On peut dire que celle-ci varie selon la puissance quatrième du facteur d'échelle, en respectant l'équation :

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{a^4}$$

Démonstration

Un gaz de photon reste naturellement soumis à la première loi de la thermodynamique, à la fameuse conservation de l'énergie. Celle-ci s'écrit, dans le domaine de la thermodynamique, comme suit :

$$dQ = dE + PdV$$

Avec Q le flux de chaleur qui quitte le gaz de photons, E son énergie, P sa pression et V son volume.

On va supposer que le flux de chaleur qui quitte le gaz de photon est nul. On a alors :

$$dE = -PdV$$

Par définition, $E = \epsilon V$, avec ϵ la densité d'énergie. De plus, on a vu comment calculer la pression d'un gaz de photon dans les paragraphes précédents. En faisant le remplacement, on a :

$$d(\epsilon V) = -\frac{\epsilon}{3}dV$$

On utilise alors la formule du produit d'une dérivée sur le terme de gauche :

$$d\epsilon \times V + \epsilon \times dV = -\frac{\epsilon}{3}dV$$

$$d\epsilon \times V = -\frac{4}{3}\epsilon dV$$

$$d\epsilon = -\frac{4}{3}\epsilon \frac{dV}{V}$$

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = -\frac{4}{3} \frac{dV}{V}$$

On utilise alors la relation $\frac{dV}{V} = 3H = 3\frac{da}{a}$:

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = -4\frac{da}{a}$$

Intégrons des deux cotés. Vu que $\int \frac{dx}{x} = \ln x$:

$$\ln \epsilon = -4 \ln a$$

Ce qui signifie que, d'après les règles des puissances :

$$\ln \epsilon = \ln a^{-4}$$

De cette équation, on peut déduire que :

$$\epsilon \propto \frac{1}{a^4}$$

CQFD !

La température du rayonnement

Après avoir vu la densité d'énergie, il est temps de voir ce qu'il en est pour la température. La température du rayonnement diminue au même rythme que l'augmentation du facteur d'échelle. Ainsi, le rayonnement né dans les premiers instants de l'univers, refroidit progressivement au fur et à mesure que l'univers s'étend.

$$T = T(t_0) \frac{a(t_0)}{a(t)} = T_0 \frac{1}{a}$$

Un premier argument assez qualitatif (et peu rigoureux) nous permet de dériver cette équation. Rappelons la formule qui donne la fréquence où l'intensité du rayonnement de corps noir est maximale : $T = \frac{f}{2,8K_b}$

. On peut réécrire l'équation précédente comme suit :

$$T = \frac{f}{2,8K_b} = \frac{1}{2,8K_b} \frac{f_0}{a} = \frac{T_0}{a}$$

Du fait de la diminution de la fréquence des photons du fait de l'expansion, la température du gaz de

photon doit aussi diminuer proportionnellement au facteur d'échelle. On retrouve donc l'équation précédente. Cependant, cette dérivation n'est pas parfaite, vu qu'on mélange la fréquence d'un photon unique avec la température d'un gaz de plusieurs photons. Ce qui nuit à la généralité de l'argument. Une véritable dérivation part de l'équation de la densité d'énergie dérivée plus haut.

Démonstration

Repartons de l'équation vue plus haut, dans la démonstration :

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = -4 \frac{da}{a}$$

On peut alors remplacer la densité d'énergie par sa valeur calculée par la loi de Stephan, ce qui donne :

$$\frac{d(\alpha T^4)}{\alpha T^4} = -4 \frac{da}{a}$$

$$\frac{d(T^4)}{T^4} = -4 \frac{da}{a}$$

$$\frac{4T^3 dT}{T^4} = -4 \frac{da}{a}$$

$$4 \frac{dT}{T} = -4 \frac{da}{a}$$

$$\frac{dT}{T} = - \frac{da}{a}$$

Intégrons des deux cotés. Vu que $\int \frac{dx}{x} = \ln x$:

$$\ln T = - \ln a$$

$$\ln T = \ln(-a)$$

En prenant l'exponentielle, on trouve que :

$$T \propto \frac{1}{a}$$

CQFD !

Interprétation physique de la variation de densité énergétique du rayonnement

On a vu que la densité d'énergie varie selon la puissance quatrième du facteur d'échelle :

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{a^4}$$

On peut donner un sens physique à cette équation. Premièrement, l'énergie du rayonnement est diluée dans un volume plus grande, égal à la puissance troisième du volume initial. La densité est donc divisée par la puissance troisième. A cela, il faut ajouter la diminution de la longueur d'onde causée par le facteur d'échelle. La somme de ces deux contributions donne la formule précédente. Pour nous en rendre compte, on peut partie de la définition de la densité d'énergie du rayonnement :

$$\epsilon = \frac{E_r}{V}$$

La variation de la densité d'énergie provient de deux sources : une provenant de la variation du volume (l'expansion) et l'autre de la diminution de l'énergie du rayonnement.

La contribution du volume

Remplaçons le volume par sa valeur dépendant du facteur d'échelle, à savoir l'équation $V = V_0 a^3$. On a donc :

$$\epsilon = \frac{E_r}{V_0} \frac{1}{a^3}$$

SI l'énergie du rayonnement demeurerait constante lors de l'expansion, on aurait l'équation suivante :

$$\epsilon = \epsilon_0 \frac{1}{a^3}$$

On le voit, il manque un facteur $\frac{1}{a}$ pour obtenir l'équation finale. L'expansion n'a donc pas qu'un effet sur le volume, mais aussi un effet sur l'énergie de rayonnement. Voyons quelle peut être son origine.

La contribution de l'énergie du rayonnement

Pour obtenir l'équation $\epsilon = \epsilon_0 \frac{1}{a^4}$, on est obligé de supposer que l'énergie du rayonnement suit l'équation suivante :

$$\epsilon_r = E_r \cdot$$

On peut facilement deviner son origine. Rappelons qu'un photon de fréquence f a une énergie égale à hf , avec h la constante de Planck. Or, on a vu que la fréquence varie avec l'inverse du facteur d'échelle, l'énergie des photons d'un gaz de photons doit aussi varier. En clair, l'expansion étire la longueur d'onde des photons, ce qui leur fait perdre de l'énergie. De par la relation précédente, on obtient que l'énergie d'un photon varie inversement avec le facteur d'échelle.

Une autre confirmation de cet état de faits tient que l'énergie moyenne d'un photon dans un gaz de photons est approximativement de :

$$\langle E \rangle = 3K_b T$$

On applique alors l'équation $\frac{1}{T} = \frac{1}{\hbar \omega}$

$$\langle E \rangle = 3K_b \frac{1}{\hbar \omega}$$

En posant $\hbar \omega = \frac{h c}{\lambda}$, on a :

$$\langle E \rangle = \frac{3K_b \lambda}{h c}$$

Cette équation a une conséquence assez importante : l'énergie de l'univers ne se conserve pas, mais diminue avec le temps ! Et ce n'est pas un problème qui serait réglé en relativité générale : il y a réellement une perte d'énergie quel que soit le modèle utilisé. A l'heure actuelle, on ne sait pas comment résoudre ce problème (si tant est que ce soit vraiment un problème).

L'équation de Friedmann

Armé de la loi de Hubble, et du facteur d'échelle, nous pouvons aborder des équations très importantes de la cosmologie actuelle : les **équations de Friedmann**. Celles-ci décrivent un univers de densité homogène, sans préférence au niveau de la direction (isotrope). Elles permettent de calculer le facteur de Hubble en fonction de la densité de l'univers et du facteur d'échelle.

Première équation de Friedmann

Une démonstration de cette équation demande d'utiliser la relativité générale, ce qui est affreusement compliqué. Heureusement, il existe une autre manière de déduire cette équation, nettement plus simple et intuitive, qui utilise la physique newtonienne. Les deux approches donnent des résultats similaires, avec cependant quelques différences que nous expliquerons plus tard. Cette première équation de Friedmann est la suivante :

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \rho$$

Version Newton

Pour commencer, nous allons considérer que l'univers observable est une sphère de rayon R , de masse M , de volume V , de densité homogène ρ , qui grossit à une vitesse v (la vitesse de l'expansion de l'univers). Le centre de cette sphère est situé là où se trouve l'observateur (la terre, donc). Prenons maintenant une galaxie située sur le bord de l'univers observable, et posons que son énergie mécanique est notée E . Son énergie potentielle et son énergie cinétique sont donc respectivement égales à $-\frac{GMm}{R}$ et $\frac{1}{2}mv^2$, ce qui donne :

$$-\frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv^2$$

On peut alors utiliser la loi de Hubble pour remplacer la vitesse de la galaxie par $v = H R$.

$$-\frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mR^2H^2$$

On peut alors isoler H^2 en divisant des deux côtés par $\frac{1}{2}mR^2$.

$$H^2 = \frac{2GM}{R^3}$$

Ensuite, souvenons-nous que par définition, $R = R_0 a(t)$. En posant qu'à l'instant t_0 , le facteur d'échelle est égal à 1, on a : $\frac{R}{R_0} = a(t)$. Nous n'allons cependant faire le remplacement que dans le second terme, et pas dans le premier. Quelques simplifications ultérieures permettront de se débarrasser du rayon dans le premier terme.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

Nous allons maintenant poser que $\frac{8\pi G}{3}$ est une constante, que nous allons appeler le paramètre de courbure.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

Exprimons maintenant la masse de l'univers comme étant égale à sa densité multipliée par le volume :

$$M = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

On a alors :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

Après quelques simplifications algébriques, nous obtenons l'équation de Friedmann.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

Version Einstein

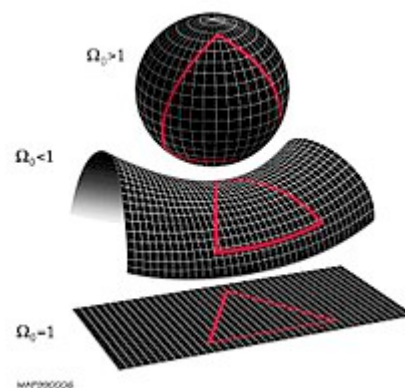
La version plus générale de l'équation, tirée de la relativité générale, peut se "déduire" de la formule précédente en utilisant l'équivalence masse-énergie d'Einstein, même si cette démonstration est loin d'être rigoureuse. Cette équivalence dit que l'énergie d'un corps (ici l'univers) est proportionnelle à sa masse, selon l'équation : $E = mc^2$, avec c la vitesse de la lumière. Dans ce cas, la densité ρ est remplacée par la densité d'énergie de l'univers ρ_{tot} .

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{tot}$$

La densité de l'univers prend en compte aussi bien la densité de matière ρ_m que la densité d'énergie liée au rayonnement (lumière) ρ_r . Or, on a vu dans les chapitres précédents que les densités de rayonnement et de matière dépendent du facteur d'échelle.

- La densité de matière varie selon l'équation : $\rho_m(t) = \frac{\rho_{m0}}{a^3}$
- Pour la densité d'énergie du rayonnement, l'équation a été vue dans le chapitre sur le rayonnement : $\rho_r(t) = \frac{\rho_{r0}}{a^4}$

Il est aussi possible de rendre compte de la courbure κ via une densité d'énergie de courbure. En effet, on a vu que celle-ci est proportionnelle à une énergie dans la démonstration newtonienne. En appliquant



La géométrie de l'univers peut prendre trois formes, suivant que le paramètre de densité soit nul, positif, ou négatif.

L'équivalence masse-énergie, on se retrouve donc avec une densité d'énergie de courbure ρ dans l'équation de Friedmann. En injectant le tout dans l'équation de Friedmann, on trouve :

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho$$

Il faut enfin préciser que l'interprétation du paramètre de courbure diffère sensiblement dans l'interprétation de la relativité générale. Cette courbure, en relativité générale, est liée à la géométrie de l'espace-temps :

- un espace de courbure nulle a une géométrie euclidienne ;
- un espace de courbure positive a une géométrie qui est l'équivalent en trois dimensions de ce qu'est la surface d'une sphère en deux dimensions ;
- un espace de courbure négative a une géométrie qui est l'équivalent en trois dimensions de ce qu'est la surface d'une selle de cheval en deux dimensions (cette selle de cheval étant à une hyperbole ce que la sphère est au cercle).

Équation du fluide de Friedmann

On peut décrire l'univers observable du point de vue de la thermodynamique sans trop de problèmes. Pour cela, il suffit de modéliser l'univers observable comme une sphère centrée sur le centre de la Terre, et de postuler que celui-ci est homogène. Par homogène, on veut dire que sa température est la même partout, de même que la densité, la pression, et toutes les variables du même genre. Cette dernière équation s'appelle l'**équation du fluide de Friedmann**.

$$dp + 3H \left(p + \frac{1}{3} \rho \right) dt = 0$$

Sa version newtonienne est la suivante :

$$\dot{p} + 3H \left(p + \frac{1}{3} \rho \right) = 0$$

Démonstration

Démonstration

Dans ce qui va suivre, on va aussi considérer que l'univers est un système isolé, à savoir qu'il n'y a pas d'échange de matière ou d'énergie avec l'extérieur (difficile de donner un sens à l'extérieur de l'univers). Dans ces conditions, la première loi de la thermodynamique s'applique. Celui-ci dit que toute variation de l'énergie interne de l'univers provient des variations de chaleur et de volume/pression. De plus, on va supposer que l'expansion est adiabatique : il n'y a pas d'échange de chaleur entre l'univers observable et un éventuel extérieur. Dans ces conditions, toute variation de l'énergie interne de l'univers se calcule avec la formule suivante, avec P la pression et V le volume de l'univers.

$$dU = PdV - TdS$$

Reformulons l'énergie en fonction du volume et de la densité d'énergie.

$$\rho_e V$$

Appliquons la formule sur la dérivée d'un produit.

$$d(\rho_e V) = V d\rho_e + \rho_e dV$$

Factorisons maintenant le terme $\rho_e dV$.

$$V d\rho_e + \rho_e dV$$

Divisons maintenant par V .

$$\frac{d\rho_e}{\rho_e} + \frac{dV}{V} = \frac{3H}{\rho_e}$$

Appliquons maintenant l'égalité suivante, vue dans le premier chapitre : $\frac{dV}{V} = 3H dt$.

$$\frac{d\rho_e}{\rho_e} + 3H dt = \frac{3H}{\rho_e} dt$$

CQFD !

Résolution

Résoudre l'équation du fluide de Friedmann n'est pas très complexe, mais demande quand même quelques astuces mathématiques. Une solution pour simplifier les calculs consiste à réduire le nombre d'inconnues à une seule. Au lieu de travailler avec la pression et la densité, il est possible de ne travailler qu'avec la densité. Cela demande de postuler une relation entre la densité d'énergie et la pression. Cette relation est ce qu'on appelle une **équation d'état**. Généralement, on postule que la pression est proportionnelle à la densité d'énergie. La relation entre pression et densité est donc de la forme $p = w\rho_e$. En introduisant w dans l'équation du fluide de Friedmann, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\rho_e}{\rho_e} + 3H dt = \frac{3H}{\rho_e} dt$$

$$\frac{d\rho_e}{\rho_e} + 3H dt = \frac{3H}{\rho_e} dt$$

Nous n'allons pas détailler la résolution de cette équation pour le moment. Cela est reporté à un chapitre ultérieur, qui parlera des modèles cosmologiques de Friedmann-Lemaître.

Seconde équation de Friedmann

A partir de la première équation de Friedmann, ainsi que de l'équation du fluide, on peut déduire une troisième équation, appelée seconde équation de Friedmann. C'est la **seconde équation de Friedmann**. Par souci de lisibilité, nous noterons la dérivée première d'une variable x comme ceci : \dot{x} . Même chose pour la dérivée seconde, notée \ddot{x} . Nous allons partir de la première équation de Friedmann, notée comme suit.

$$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi}{3c^2} \rho$$

Démonstration

Démonstration

Partons de l'équation suivante, la première équation de Friedmman.

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{1}{a^2} \left(p_e + \frac{1}{3} \rho c^2 \right)$$

Multiplions des deux côtés par a :

$$a' \frac{a''}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2} \rho a - \frac{1}{a} \left(p_e + \frac{1}{3} \rho c^2 \right)$$

Dérivons maintenant par rapport au temps :

$$2a'a'' = \frac{4\pi G}{3c^2} \dot{\rho} a - \frac{1}{a^2} \left(\dot{p}_e a + p_e \dot{a} + \frac{1}{3} \dot{\rho} c^2 a \right)$$

$$a'a'' = \frac{2\pi G}{3c^2} \dot{\rho} a - \frac{1}{2a^2} \left(\dot{p}_e a + p_e \dot{a} + \frac{2}{3} \dot{\rho} c^2 a \right)$$

$$G \rho c^2 \left(\frac{2}{3} a' + \frac{1}{3} a \frac{a''}{a} \right) = \frac{4\pi G}{3c^2} \dot{\rho} a - \frac{1}{2a^2} \left(\dot{p}_e a + p_e \dot{a} + \frac{2}{3} \dot{\rho} c^2 a \right)$$

$$G \rho c^2 \left(\frac{2}{3} a' + \frac{1}{3} a \frac{a''}{a} \right) = \frac{4\pi G}{3c^2} \dot{\rho} a - \frac{1}{2a^2} \left(-2p_e a a' + (p_e + \frac{1}{3} \rho c^2) \dot{a} a \right)$$

Divisons par a^2 :

$$\frac{a''}{a} = \frac{2\pi G}{3c^2} \frac{\dot{\rho}}{a} - \frac{1}{2a^3} \left(\dot{p}_e a + p_e \dot{a} + \frac{2}{3} \dot{\rho} c^2 a \right)$$

Or, l'équation du fluide nous dit que $\dot{p}_e = -3 \frac{p_e}{a} \frac{a'}{a}$. On peut donc faire la substitution dans l'équation précédente, ce qui donne :

$$\frac{a''}{a} = \frac{2\pi G}{3c^2} \frac{\dot{\rho}}{a} - \frac{1}{2a^3} \left(-2p_e a \frac{a'}{a} + (p_e + \frac{1}{3} \rho c^2) \dot{a} \right)$$

En simplifiant, on obtient :

$$\frac{a''}{a} = \frac{2\pi G}{3c^2} \frac{\dot{\rho}}{a} - \frac{1}{2a^3} \left(-2p_e a \frac{a'}{a} + (p_e + \frac{1}{3} \rho c^2) \dot{a} \right)$$

$$\frac{a''}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \rho$$

CQFD.

Résolution

Là encore, on peut utiliser une équation d'état de la forme $p = w\rho c^2$ pour simplifier cette équation. On obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{c^2} \right) = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{c^2} \right) = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a^3}{c^2} \right) = 4 \pi a^3 \rho$$

Influence de la pression sur l'expansion

Cette seconde équation de Friedmann nous dit quelque chose d'assez contrintuitif concernant la pression : celle-ci lutte contre l'expansion. L'intuition nous dirait pourtant le contraire, mais celle-ci est trompeuse. La pression de la matière ou du rayonnement ne pousse pas sur les bords de l'univers, et ne peut donc guider l'expansion. Rappelons que l'horizon cosmologique n'est pas une barrière matérielle sur laquelle la pression pourrait pousser, mais une simple limite liée à la vitesse de la lumière. L'effet de la pression sur l'expansion ne peut donc provenir de ce mécanisme intuitif. Pour comprendre l'effet contre-expansionniste de la pression, il faut se rappeler que la pression est proportionnelle à la densité d'énergie. Par exemple, on peut facilement démontrer que la pression d'un gaz parfait est égale aux deux tiers de sa densité d'énergie interne. Même chose pour le rayonnement, quoique le coefficient de proportionnalité soit différent. Or, rappelez-vous que l'énergie et la masse sont reliées dans la théorie de la relativité, l'équation $E = mc^2$ en étant la plus simple expression. Pour simplifier, l'énergie a un poids, un effet gravitationnel qui va lutter contre l'expansion. Plus la pression, et donc la densité d'énergie est grande, plus cet effet gravitationnel sera fort, plus l'expansion sera contrecarré.

Modèles cosmologiques de Friedmann

Résoudre l'équation du fluide de Friedmann n'est pas très complexe, mais demande quand même quelques astuces mathématiques. Une solution pour simplifier les calculs consiste à réduire le nombre d'inconnues à une seule. Au lieu de travailler avec la pression et la densité, il est possible de ne travailler qu'avec la densité. Cela demande de postuler une relation entre la densité d'énergie et la pression. Cette relation est ce qu'on appelle une **équation d'état**. Généralement, on postule que la pression est proportionnelle à la densité d'énergie. La relation entre pression et densité est donc de la forme $p = w \rho c^2$. La valeur de w dépend selon que l'on considère la matière ou le rayonnement.

- Pour la matière, il est supposé que ce facteur est nul (ce qui marche bien pour de la matière qui va à faible vitesse).
- Pour le rayonnement, il est établi par la physique du rayonnement que $w = \frac{1}{3}$.

Ces deux valeurs ont des conséquences extrêmement différentes sur les résultats de l'équation.

Dans ce qui va suivre, nous allons supposer que la courbure de l'univers est nulle, afin de simplifier les calculs. Cette simplification est cependant une très bonne approximation de l'univers réel, toutes les observations semblant indiquer une courbure nulle.

Univers dominé par la matière

Le cas de l'univers qui ne contient que de la matière, sans rayonnement, ni constante cosmologique est le premier cas que nous allons aborder. Dans ce modèle, la matière est un gaz parfait dont les particules sont des galaxies ou des amas de galaxies. Cette hypothèse est crédible dans le sens où les amas de galaxies sont relativement éloignés et interagissent peu. Comme autre simplification, nous allons prendre le cas d'une matière froide, au zéro absolu. Cette autre hypothèse n'est pas si abusive vu l'état actuel de l'univers : seul 10% de la matière sert à fabriquer des étoiles, le reste étant localisé dans des nébuleuses et des nuages moléculaires dont la température ne dépasse pas la dizaine de degrés au-dessus du zéro absolu. L'univers est donc vraiment très froid ! En appliquant la loi des gaz parfaits avec une température au zéro absolu, on trouve que la pression est nulle quelle que soit la densité. Dit autrement, $p = 0$.

Résolution de l'équation du fluide

Avec cette hypothèse, l'équation du fluide de Friedmann se simplifie alors en :

$$\dot{\rho} + 3H\rho = 0$$

Ou encore :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3H dt$$

La résolution de cette équation différentielle (laissée en exercice au lecteur) nous donne l'équation

suivante. Avec quelques manipulations algébriques triviales, on retrouve un résultat établi il y a quelques chapitres : la densité de matière diminue avec le cube du facteur d'échelle.

{\displayst

Évolution temporelle du facteur d'échelle

Dans un tel modèle, le facteur d'échelle évolue avec le temps en suivant cette équation :

{\displaystyle

Vu que les termes ρ_0 et t_0 sont des constantes (des constantes d'intégration, plus précisément), on peut les simplifier en une seule constante que nous noterons A. Cela donne l'équation suivante :

{\displayst

Pour simplifier les calculs, on peut parfaitement supposer que la constante d'intégration A vaut 1, ce qui permet de la négliger totalement dans les calculs. On a alors :

{\display

Détermination de l'âge de l'univers

En ne tenant compte que de la matière, la première équation de Friedmann se reformule ainsi. On a juste à retirer les termes liés à la densité d'énergie de rayonnement et de courbure.

{\displaystyle

A partir de cette équation, on peut facilement dériver l'âge d'un tel univers hypothétique à partir du temps de Hubble.

{\display

Démonstration

Partons de la première équation de Friedmann et simplifions-la en ne tenant en compte que la matière:

{\displaystyle

En se souvenant que

{\displayst

, on a :

```
{\displayst}
{\frac
{da^{\dots}}
```

```
{\displayst}
{\frac
{da^{\dots}}
```

```
{\displayst}
{\frac
{da}{dt}}
```

```
{\displaystyle}
{\frac
{\dots}}
```

```
{\displaystyle}
{\frac
{\dots}}
```

En intégrant, il vient :

```
{\displaystyle}
{\frac
```

On peut alors déduire la valeur de la variable t , qui n'est autre que l'âge de l'univers. En supposant que le facteur d'échelle actuel vaut 1, l'équation se simplifie. Après quelques manipulations algébriques, on trouve que celui-ci est égal aux deux tiers du temps de Hubble.

```
{\display}
t={\frac
```

CQFD !

Rayon de l'univers

L'équation précédent nous permet de calculer le rayon de l'univers observable. On a alors une équation étonnamment simple :

0.3.1.

Démonstration

On a vu dans le chapitre sur l'univers observable que le rayon comobile de l'univers se calcule avec l'équation suivante :

```
{\displaystyle}
R=c\int
{0}^{t} dt
```

On peut remplacer le facteur d'échelle par la valeur calculée ci-dessus, ce qui donne :

$$R = c \int_0^t dt$$

Le résultat de cette intégrale est le suivant :

$$R = 2c t \quad \text{CQFD.}$$

En utilisant l'âge de l'univers calculée plus haut, on a :

$$R = 2c t$$

On voit que le rayon de l'univers est le double du rayon de Hubble.

Univers dominé par le rayonnement

Dans le cas où on considère un univers entièrement rempli de rayonnement, on postule que le rayonnement est formé d'un gaz parfait de photons. Dans ces conditions, le comportement des photons fait

que
$$P = \frac{1}{3} \rho c^2$$

Résolution de l'équation du fluide

On obtient alors :

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + \frac{1}{3}\rho) = 0$$

$$\dot{\rho} + 3H\rho = 0$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3H dt$$

Ou encore :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{3}{2} \frac{dR}{R}$$

La résolution de cette équation différentielle (laissée en exercice au lecteur) nous donne l'équation suivante. Avec quelques manipulations algébriques triviales, on retrouve un résultat établi il y a quelques chapitres : la densité de matière diminue avec la puissance quatrième du facteur d'échelle.

$$\rho \propto R^{-4}$$

Évolution temporelle du facteur d'échelle

Dans un tel modèle, le facteur d'échelle évolue avec le temps en suivant cette équation :

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-1/2}$$

On peut simplifier le tout en supposant que le facteur d'échelle actuel est unitaire, ce qui donne l'équation suivante :

$$\{\displaystyle$$

Détermination de l'âge de l'univers

En ne tenant compte que du rayonnement, la première équation de Friedmann se reformule ainsi.

$$\{\displaystyle$$

A partir de cette équation, on peut facilement dériver l'âge d'un tel univers hypothétique à partir du temps de Hubble.

$$\{\displaystyle t=\{\frac$$

Démonstration

Partons de la première équation de Friedmann et simplifions-la en ne tenant en compte que du rayonnement :

$$\{\displaystyle H^{\{2\}}=\{\frac$$

En simplifiant par $\{c^2\}$; on a :

$$\{\displaystyle \{\frac$$

$$\{\displaystyle \{\frac$$

$$\{\displaystyle a\{times$$

En intégrant, il vient :

$$\{\displaystyle$$

On peut alors déduire la valeur de la variable t , qui n'est autre que l'âge de l'univers. En supposant que le facteur d'échelle actuel vaut 1, l'équation se simplifie. Après quelques manipulations algébriques, on trouve que l'âge d'un tel univers est simplement le double du temps de Hubble.

$$\{\displaystyle t=\{\frac$$

CQFD !

Rayon de l'univers

L'équation précédent nous permet de calculer le rayon de l'univers observable. On a alors une équation étonnamment simple :

$R = 2c \int_0^t dt$

Démonstration

On a vu dans le chapitre sur l'univers observable que le rayon comobile de l'univers se calcule avec l'équation suivante :

$$R = c \int_0^t dt$$

On peut remplacer le facteur d'échelle par la valeur calculée ci-dessus, ce qui donne :

$$R = c \int_0^t \frac{R}{c} dt$$

Le résultat de cette intégrale est le suivant :

$$R = 2c t \quad \text{CQFD.}$$

En remplaçant l'âge de l'univers par sa valeur calculée précédemment, on a :

$$R = 2c \frac{R}{c}$$

On voit donc que le rayon de l'univers est le double du rayon de Hubble.

\square *fin*

Le cas général

En introduisant Ω_m dans l'équation du fluide de Friedmann, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\dot{R} = \frac{c}{R} \sqrt{1 - \Omega_m \frac{R^2}{c^2}}$$

Cette équation peut être écrite sous cette forme.

$$\frac{dR}{R} = \frac{c}{R^2} \sqrt{1 - \Omega_m \frac{R^2}{c^2}}$$

Facteur d'échelle

La résolution de cette équation nous donne :

$$\frac{da}{dt} = H_0 a$$

Ou encore, si le facteur d'échelle actuel a_0 est de 1 :

$$\frac{da}{dt} = H_0$$

Facteur de Hubble

Cette équation peut nous donner directement le facteur de Hubble. Pour cela, on peut calculer la dérivée du facteur d'échelle, ce qui donne :

$$\frac{da}{dt} = H_0 a$$

$$\frac{da}{dt} = H_0 a$$

$$\frac{da}{dt} = H_0 a$$

Or, vu que $\frac{da}{dt} = H_0 a$, on a :

$$\frac{da}{dt} = H_0 a$$

$$\frac{da}{dt} = H_0 a$$

En divisant par a et en multipliant par dt , on a :

$$\frac{da}{a} = H_0 dt$$

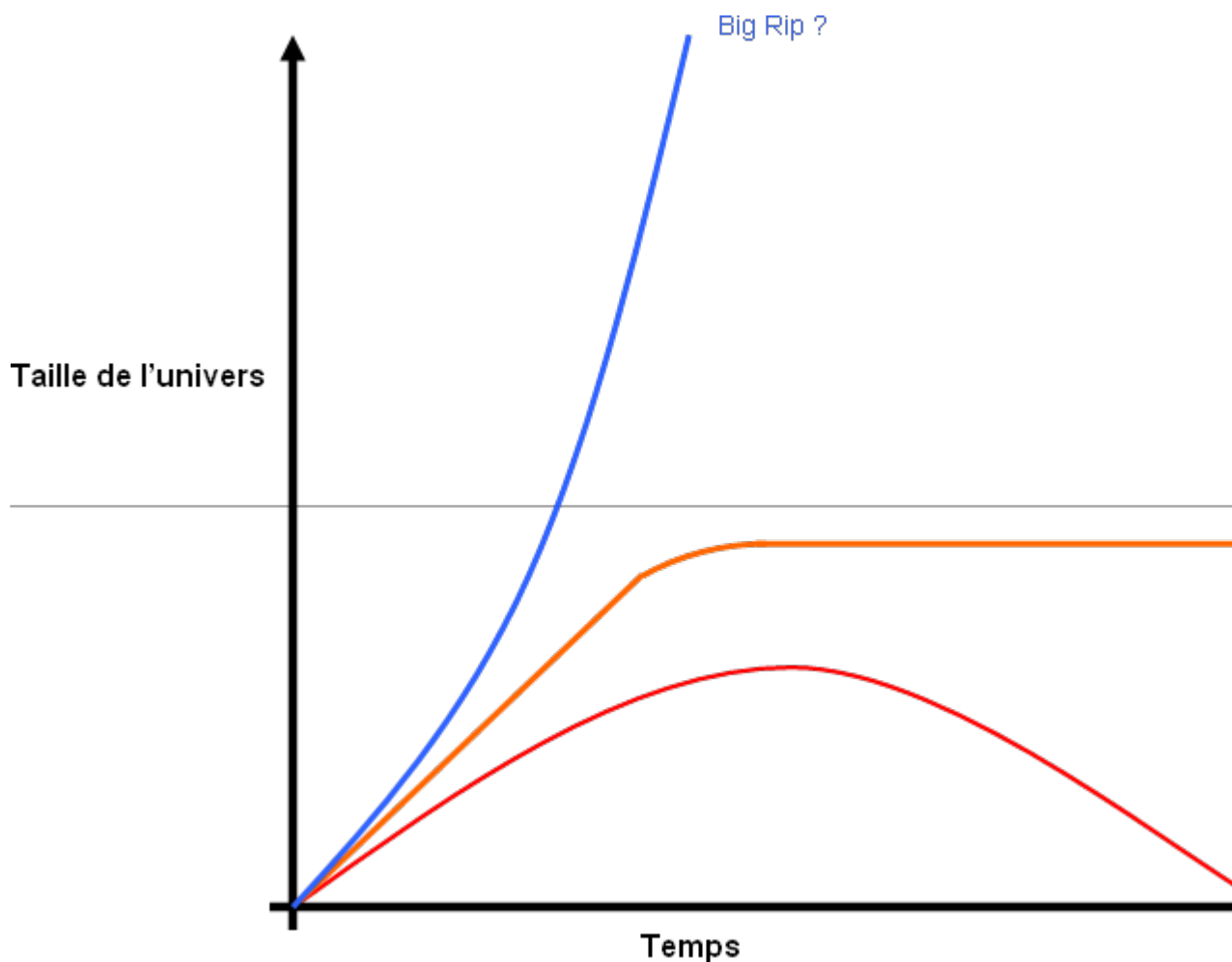
Age de l'univers

On peut alors calculer l'âge de l'univers, sous la condition que $w > -1$.

$$t_0 = \frac{1}{H_0}$$

Le destin de l'univers

Si le facteur de Hubble reste tout le temps positif, l'expansion de l'univers ne s'arrête jamais. L'expansion de l'univers s'accélère sans cesse et l'univers grossit indéfiniment : c'est le scénario du **big-rip**. Par contre, l'expansion s'inverse si le facteur de Hubble devient négatif : l'univers se contracte et le volume de l'univers observable diminue. En clair, l'univers s'effondre sur lui-même dans un grand **big-crunch**. Il reste cependant un troisième scénario : l'univers commence par s'étendre, mais son rythme de croissance diminue peu à peu, jusqu'à s'annuler après un temps infini. Dans ce scénario, l'univers ne grossit pas indéfiniment et verra son volume tendre progressivement vers un volume maximum.



L'influence de la courbure

Chaque scénario dépend de la manière dont évolue le facteur d'échelle $a(t)$. Le big-rip n'a lieu que si celui-ci ne cesse d'augmenter avec le temps, ce qui se traduit mathématiquement par une dérivée positive de $a(t)$. Le big-crunch quand à lui, n'a lieu que si le facteur d'échelle finit par diminuer au cours du temps, ce qui se traduit mathématiquement par une dérivée négative de $a(t)$. Enfin, le troisième scénario se traduit par un facteur d'échelle qui diminue au point de s'annuler après un temps infini. Le destin de l'univers dépend donc de la dérivée du facteur d'échelle.

Cette dérivée se calcule assez facilement en partant de la définition du facteur de Hubble :

$$\frac{da}{dt} = a \cdot H$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = a \cdot \dot{H}$$

En remplaçant le facteur de Hubble par son expression déterminée par l'équation de Friedmann, on obtient :

$$\frac{d^2a}{dt^2} = a^2 \cdot \frac{8\pi G}{3} (\rho - 3p)$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{8\pi G}{3} a^2 (\rho + 3p)$$

On voit alors facilement que cette dérivée ne peut s'annuler que si $\rho + 3p = 0$. En effet, le facteur $\frac{d^2a}{dt^2}$ va naturellement s'annuler avec l'augmentation progressive de a . Qualitativement,

l'expansion diluera la matière et le rayonnement, faisant diminuer leur densité. C'est en partie le cas pour le facteur de courbure, mais l'effet est nettement plus faible et s'annule dans le calcul de la dérivée du facteur d'échelle. Ainsi, le destin de l'univers ne dépend que du paramètre de courbure, et nullement des densités de matière et de rayonnement.

Densité critique

Si la courbure est nulle, la densité actuelle de l'univers peut se calculer. Cette densité actuelle, valable uniquement pour un univers sans courbure, s'appelle la **densité critique**. Pour la calculer, il faut partir de l'équation de Friedmann, retirer le terme de courbure, et faire quelques manipulations algébriques ce qui donne :

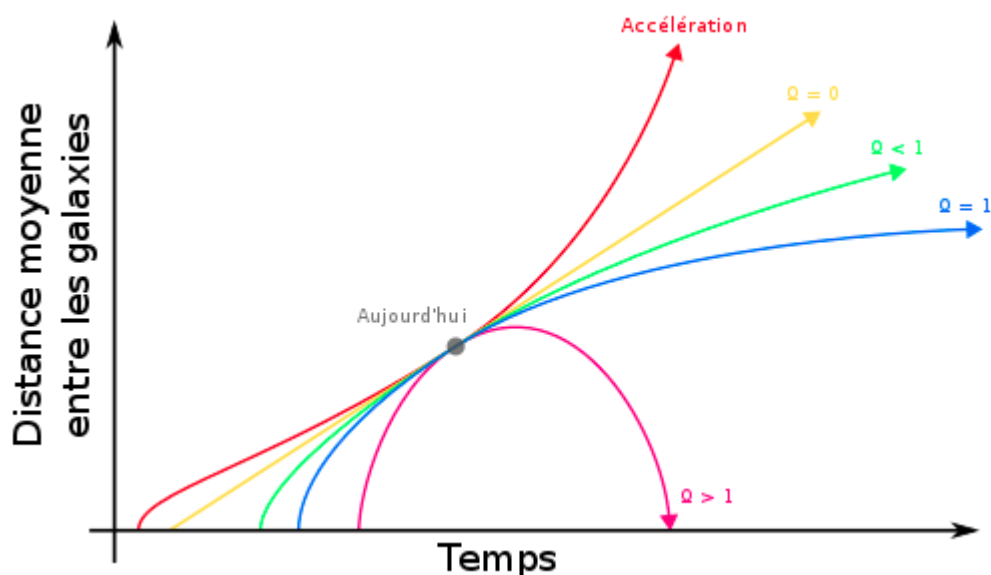
$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Paramètre de densité

Les cosmologistes utilisent souvent le rapport entre la densité mesurée expérimentalement et la densité critique, ce rapport étant appelé le **paramètre de densité**. Si celui-ci est égal à 1, la courbure de l'univers est nulle et la densité de l'univers est égale à la densité critique. Si il est positif, la densité de courbure est légèrement positive (et réciproquement pour un paramètre de densité négatif). Dans ces conditions, de futur de l'univers dépend fortement de sa valeur. Le paramètre de densité peut se mesurer indirectement, via diverses observations astronomiques. On peut en effet mesurer avec précision le facteur de Hubble, ainsi que la densité de l'univers.

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho$$



Détermination de la courbure

Ce paramètre de densité est utilisé par les cosmologistes pour une raison très simple : il permet de déterminer quelle est la courbure de l'univers. En effet, une fois le paramètre de densité connu, on peut alors en déduire quelle est la courbure via quelques manipulations algébriques sur l'équation précédente. Ces manipulations nous permettent d'obtenir la courbure en fonction du paramètre de densité avec la formule suivante.

$$K = \frac{1 - \Omega}{R_0^2}$$

A l'heure actuelle, il semblerait que la courbure soit nulle, ou tout du moins tellement faible qu'on peut la considérer comme nulle. Toutes les mesures, réalisées par les satellites WMAP et Planck donnent bien une valeur quasiment nulle, aux imprécisions expérimentales près. Les mesures les plus récentes, provenant du satellite Planck, nous disent qu'il y a 95% de chances pour que le paramètre de densité soit compris entre 1.0008 et -1.0029. Aussi, dans les développements mathématiques des prochains chapitres, je supposerais que la courbure est nulle.

Reformulation de la première équation de Friedmann

Il est possible de reformuler la première équation de Friedmann avec ce paramètre de courbure. Cependant, cela demande de fournir différents paramètres de densité. En effet, il ne faut pas oublier l'influence différentielle du facteur d'échelle sur la matière, l'énergie de rayonnement et la courbure. Pour cela, il faut utiliser différents paramètres de densité : un pour la matière, un autre pour le rayonnement, et un autre pour la courbure. Le premier est égal à la densité de matière divisée par la densité critique et est noté Ω_m . Le second est égal à la densité de rayonnement divisée par la densité critique et est noté Ω_r . Même principe pour le rapport entre densité de courbure et densité critique Ω_k .

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda}$$

Thermodynamique de l'expansion

Au tout début de sa formation, l'univers était clairement chaud et dense : les températures quelques microsecondes après le big-bang dépassaient le millions voire le milliards de degrés. L'univers était en première approximation un gaz parfait de particules très différentes : neutrons, protons, neutrinos, électrons, photons, quarks, et autres. Au tout début de l'univers, les températures étaient tellement fortes que toutes les populations de particules réagissaient entre elles : à peu-prêt n'importe quelle particule pouvait se transformer en une autre, homogénéisant les températures. Le mélange était tel que l'on pouvait définir une température moyenne valable pour tous les types de particules : les neutrons avaient une température moyenne similaire à celle des protons, elle-même identiques à celle des quarks, etc. On dit que l'équilibre thermique est respecté. Les différences d'équation d'état étaient ainsi mineures, et étaient compensées par les nombreuses interactions entre particules.

Découplage des photons et neutrinos

La température baissant avec l'expansion, certaines interactions entre particules deviennent de plus en plus rares. Par exemple, en-dessous d'une certaine température, certaines réactions entre neutrinos et matière deviennent rares, voire inexistantes. Ces populations de particules cessent alors d'interagir. Lorsque cela se produit, l'équilibre thermique est rompu : les deux populations de particules s'isolent thermiquement, et divergent en terme de température moyenne. On nomme **découplage** de telles situations où deux populations de particules n'interagissent plus à la suite d'une baisse de température. Après un découplage, chaque population de particule a sa propre équation d'état : un gaz monoatomique n'aura pas le même coefficient w qu'un gaz de protons ou un gaz d'électrons. Ainsi, une population de particule se refroidira différemment d'une autre. Par exemple, le rayonnement s'est refroidi plus vite que la matière, à cause de la diminution de fréquence des photons (la température du rayonnement n'est autre que la moyenne de l'énergie des photons, qui diminue avec le facteur d'échelle, comme vu précédemment).

Découplage des photons

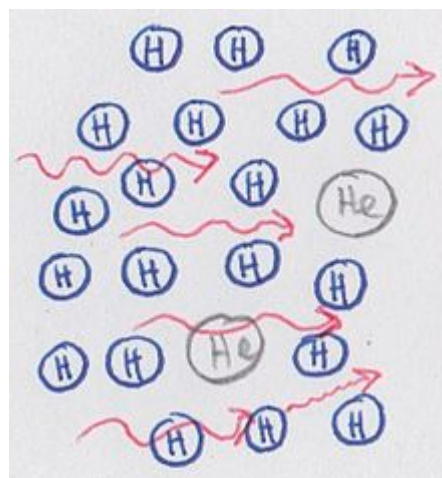
Le cas le plus classique est celui du **découplage des photons**, qui s'est produit il y a 380.000 ans lorsque la matière est passée de l'état de plasma à un gaz d'atomes. Avant ce découplage, la matière était composée d'un plasma d'électrons libres, de baryons (protons, neutrons, noyaux d'atomes), et de photons. Les photons interagissaient fortement avec les électrons, par divers processus (diffusion Compton, et autres). Ces interactions faisaient que les photons échangeaient de la quantité de mouvement avec les électrons, ce qui redistribuait la température : les photons chauffaient les électrons et réciproquement. Un équilibre thermique s'était ainsi installé entre photons et électrons libres, les deux ayant la même température/énergie cinétique moyenne. Cet équilibre incluait aussi les baryons, bien que les photons n'interagissaient pas directement avec les photons : les baryons interagissaient fortement avec les électrons, qui servaient d'intermédiaires avec les photons. Ce plasma avait naturellement des propriétés thermodynamiques simples : une pression, une température, un volume, etc. Son pression était essentiellement causée par la pression de radiation des photons, avec une participation mineure de la pression des électrons libres et baryons.

Après le découplage, les électrons se sont mis à orbiter autour des noyaux, formant des atomes. Ces

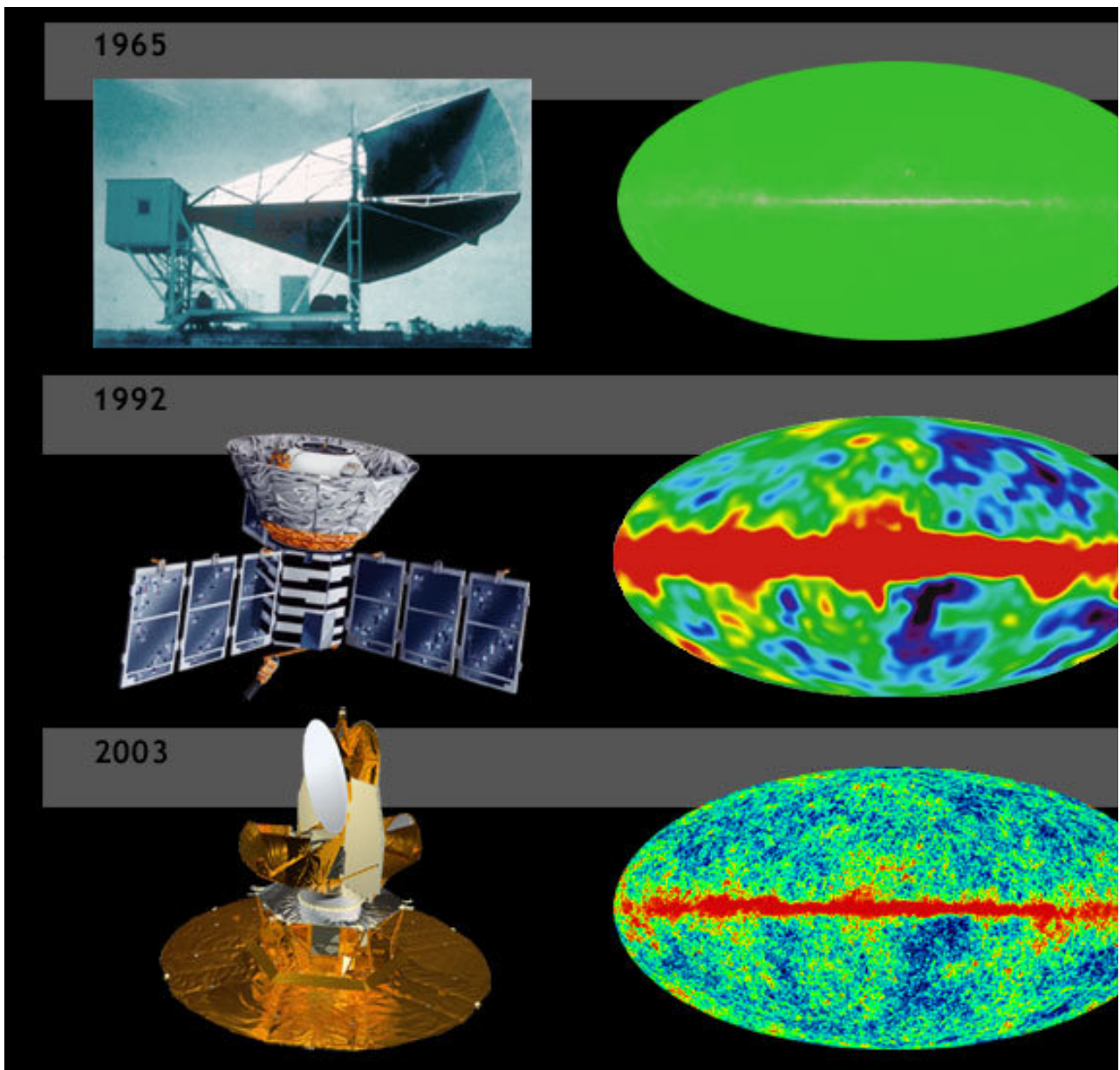
électrons n'étant plus libres, ils interagissaient bien moins avec les photons. Les photons n'avaient plus d'électrons libres à disposition, ceux-ci étant enfermés dans les atomes. Les photons ont donc vu leurs interactions avec la matière diminuer fortement, et ont continué leur vie chacun dans leur coin. Une partie de ces photons ont survécu jusqu'à aujourd'hui et continuent de se balader dans l'univers : ils forment le **rayonnement de fond diffus cosmologique**, aussi appelé CMB (Cosmic Microwave Background).

Le CMB a été théorisé avant d'être découvert. Dans un article de 1948, Alpher et ses collègues théorisèrent l'existence du CMB à partir d'un modèle de big-bang usuel. Mais il fallu attendre 1965 pour ce signal soit observé pour la première fois, par Penzias et Wilson. Ceux-ci utilisaient une antenne de grandes dimensions, pour tester la fiabilité des communications entre satellites, et étudiaient des interférences radio qui apparaissaient à haute fréquence. Leurs investigations leur ont permis de capter un signal dans la bande de 4GHz, qui avait des caractéristiques étranges : isotrope, non-polarisé et libre de toute variation saisonnière. L'origine de ce signal est restée inconnue durant quelques années, mais les scientifiques (dont Penzias et Wilson) avaient éliminé toute origine terrestre. Il fallu que Dicke et ses collaborateurs fassent le lien avec l'article d'Alpher. Par la suite, diverses campagnes d'observation ont permis d'obtenir une carte assez détaillée du fond diffus. De nombreux projets d'observations scientifiques ont ainsi observé le fond diffus cosmologique avec une précision de plus en plus grande : COBE, puis WMAP, et enfin la mission PLANCK.

Les observations de Penzias et Wilson montraient un CMB relativement uniforme. Par la suite, les observations du satellite COBE ont montré que le CMB a l'air d'avoir une structure en forme de dipôle, à savoir qu'il a un pôle chaud opposé à un pôle froid. On pourrait croire que cela réfute l'idée d'un univers isotrope, mais il est rapidement apparu que cette structure en dipôle était liée au mouvement de la Terre par rapport au CMB. Ce mouvement est à l'origine d'un effet Doppler : les zones du CMB qui s'éloignent de nous sont vues comme refroidies, alors que les zones qui s'approchent (opposées, donc) sont vues comme plus chaudes. Les observations plus récentes éliminent cet effet Doppler par divers traitements informatiques, et montrent un CMB sans dipôle, mais avec quelques inhomogénéités. On observe notamment une zone plus chaude au niveau de l'équateur, liée à la présence de la voie lactée (notre galaxie), qui réchauffe quelque peu le CMB de par son rayonnement.



La matière neutre est transparente, ce qui induit un découplage des photons.



Découplage des neutrinos

La même chose a eu lieu pour les neutrinos et anti-neutrinos qui se sont découplés de la matière et des photons un peu avant les photons. Ce fond diffus de neutrinos est malheureusement nettement moins étudié que le fond diffus cosmologique, car les neutrinos n'interagissent pas beaucoup avec la matière, et qu'ils sont donc difficiles à détecter. Nous n'en parlerons donc pas dans ce cours, par manque d'informations à son sujet.

Découplage des baryons, noyaux et atomes

Au tout début, on pouvait voir l'univers comme un mélange de plusieurs gaz composés de particules élémentaires. Du temps des fortes températures, quelques micro-secondes avant le big-bang, les particules composites ne pouvaient pas se former à partir de quarks : la température trop intense faisait que les particules composites étaient brisées par le chaos ambiant quelques microsecondes après leur formation. C'était essentiellement les photons et neutrinos qui réagissaient avec la matière et brisaient les structures

ainsi formées. Il a fallu attendre que la température du rayonnement baisse pour que les quarks puissent s'assembler en protons et neutrons sans interagir avec un photon qui passe sur le chemin. Plus tard, protons et neutrons ont pu s'assembler pour former des noyaux, quand la température a atteint un certain seuil. Et ensuite, la même chose s'est produit avec les électrons et les noyaux pour former des atomes.

Rapport protons/neutrons

La théorie du big-bang nous permet de déterminer comment s'est produit ce processus. Une réussite de la théorie tient dans le fait qu'elle prédit le rapport entre le nombre de protons et de neutrons dans l'univers. Celui-ci peut se calculer à partir du raisonnement suivant. Avant que les noyaux se forment, les protons et neutrons étaient libres et formaient un plasma de nucléons. La température de ce plasma a diminué progressivement avec l'expansion. Peu avant la formation des noyaux, la température était faible comparé à la masse des protons et neutrons ($\frac{kT}{m_p c^2}$). Dans ces conditions, le gaz peut être décrit par ce qu'on appelle la distribution de Maxwell-Boltzmann. Celle-ci dit que la quantité de particules d'énergie par unité de volume est de :

$$N = n_0 e^{-E/kT}$$

Ainsi, on peut calculer le rapport entre protons et neutrons. Il suffit de faire le calcul de la densité de protons, et de la densité de neutrons séparément, et de diviser le premier par le second :

$$\frac{N_p}{N_n} = \frac{n_{p0} e^{-E_p/kT}}{n_{n0} e^{-E_n/kT}} = \frac{n_{p0}}{n_{n0}} e^{(E_n - E_p)/kT}$$

Les protons et neutrons forment un plasma tant que protons et neutrons peuvent interagir. Il arrive notamment que des protons se transforment en neutrons et réciproquement. Ces transformations, des réactions nucléaires, ont une probabilité d'occurrence qui dépend de la température. Quand le produit $k_b T$ descend en-dessous de 0.8 Mev, ces réactions deviennent de plus en plus rares, au point que l'équilibre thermique du plasma est brisé. Les quantités de protons et de neutrons sont alors figées, de même que le rapport de leurs densités volumiques. Les calculs donnent 6 protons pour 1 neutron :

$\frac{N_p}{N_n} = 6$. Dit autrement, $\frac{1}{7}$ ème de la matière baryonique est sous la forme de neutrons, alors que $\frac{6}{7}$ ème sont des protons.

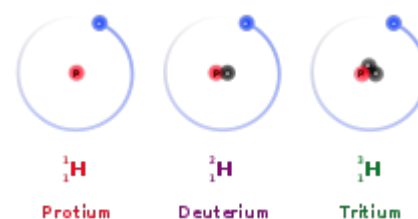
Par la suite, ce rapport va cependant évoluer à cause de désintégrations de neutrons en protons (désintégration bêta). Ces désintégrations suivent la fameuse loi de désintégration radioactive $N = N_0 e^{-\lambda t}$, avec λ égal à 880,3 s. On a alors :

$$\frac{N_p}{N_n} = 6 \times \frac{1}{e^{-\lambda t}} = 6 \times e^{\lambda t} = 3.8$$

Abondance de l'Hélium

Les calculs précédents nous donnent toutes les bases pour calculer l'abondance de l'hélium et de l'hydrogène dans l'univers. Vous savez sans doute que la quasi-totalité de la matière des étoiles et planètes est sous la forme d'hélium et d'hydrogène, des particules formées par l'assemblage de neutrons et de

protons. Un noyau d'hydrogène est formé d'un simple proton, le nombre de neutrons variant de zéro à quelques neutrons pour certains de ses isotopes assez rares (deutérium). La plupart de l'hydrogène ne contient qu'un seul proton, cette forme d'hydrogène étant appelé du protium. Les formes avec un neutron (deutérium) ou deux (tritium). Le protium est de loin la forme d'hydrogène dominante, les autres formes n'étant présentes que dans les étoiles, rarement dans le milieu interstellaire. Les quantités de deutérium et de tritium sont suffisamment rares pour qu'on les omette dans ce qui va suivre. Quant à l'hélium, il possède deux protons et deux neutrons pour son isotope le plus fréquent, les formes avec un seul ou trois neutrons étant encore une fois suffisamment rares pour qu'on les omette. Pour résumer, il y a quatre baryons dans un atome d'hélium (deux protons, deux neutrons) et un seul dans l'atome d'hydrogène.



Isotopes de l'hydrogène.

On peut alors calculer le rapport entre le nombre de baryons dans les atomes d'hélium et le nombre total de baryons, que nous noterons Y . Nous allons noter le nombre d'atomes d'hélium n_{HE} alors que le nombre d'atomes de protium sera noté n_H . Les nombres de neutrons et de protons seront notés n_n et n_p . On a alors :

$$Y = \frac{4n_{HE}}{4n_{HE} + n_H}$$

On peut réécrire cette équation en utilisant uniquement le nombre de protons et de neutrons. On rappelle qu'un atome d'hélium a deux fois plus de baryons que de neutrons (autant de protons que de neutrons). Ce qui fait que $4n_{HE} = 2 \times n_n$. Le nombre total de baryons est, par définition, la somme du nombre de protons et de neutrons.

$$Y = \frac{2 \times n_n}{n_n + n_p}$$

On peut réécrire cette équation en utilisant uniquement le rapport protons/neutrons calculé dans la section précédente. Il suffit pour cela de diviser l'équation précédente par le nombre de protons. On a alors :

$$Y = \frac{2 \times (n_n/n_p)}{1 + (n_n/n_p)}$$

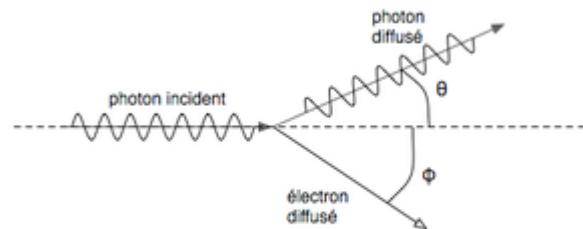
En utilisant la valeur de $1/7$ calculée dans la section précédente, on trouve que $Y \approx \frac{1}{4}$, ce qui est très proche de la valeur observée.

La physique du fond diffus

On a vu dans le chapitre précédent que le découplage des photons a donné naissance à un fond diffus de photons, le fameux CMB. Avant ce découplage, rayonnement et matière interagissaient fortement entre eux, formant un plasma. Ce gaz unique de photons et de matière était un fluide comme un autre, avec une pression, une température, une densité d'énergie, etc. Cependant, la température diminuant, les interactions entre matière et photons ont soudainement cessées lorsque la température est tombées sous les 3000°C. A cette température, les électrons se sont associés aux noyaux atomiques pour former des atomes. Ces atomes interagissant peu avec le rayonnement, le plasma s'est divisé en deux gaz indépendants : un gaz de matière, qui s'est condensé pour donner des galaxies et autres structures, et un gaz de photon. Ce dernier a subsisté jusqu'à aujourd'hui sous la forme d'un ensemble de photons de faible température, que l'on peut capter avec certains instruments. Ce gaz est appelé le **fond diffus cosmologique**, ou CMB.

La physique du rayonnement avant découplage

Avant le découplage, le rayonnement et la matière évoluaient ensemble, que ce soit au niveau de la densité, de la pression ou de la température. Les interactions entre photons et électrons libres étaient fréquentes, suffisamment pour redistribuer l'énergie des photons aux électrons (et réciproquement). Le processus d'interaction principal était la **diffusion Compton**, ainsi que le processus inverse, la **diffusion Compton inverse**. Celle-ci est une collision entre un photon et un électron libre, où les deux particules échangent de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.



Diffusion Compton: Collision d'un photon avec un électron au repos

Illustration du processus de diffusion Compton.

Diffusion Compton sans expansion

Les physiciens rendent compte de la fréquence de ces collisions par deux paramètres : le temps moyen entre deux collisions et la distance moyenne entre deux collisions. Le temps moyen entre deux collisions est appelé le **temps de libre parcours moyen**, tandis que la distance moyenne entre deux collisions est appelée le **libre parcours moyen**. Évidemment, les deux sont liés entre eux par la vitesse des particules du gaz : la distance de libre parcours moyen est ainsi égale au produit de la vitesse moyenne par le temps de libre parcours moyen. Ainsi, plus un gaz est froid, plus, plus le temps et la distance entre deux collision sont faibles. Il en est de même pour les gaz denses : ceux-ci ont un libre parcours moyen assez faible, vu que les particules sont plus proches.

Il est possible de calculer le libre parcours moyen en utilisant une relation très simple entre celui-ci et deux autres variables : le nombre de particules par unités de volume et la probabilité moyenne d'une collision. Le nombre de particules par unité de volume remplace en quelque sorte la densité : plus il y a de particules

par unité de volume, plus celles-ci ont de chances d'entrer en collision. Quant à la probabilité d'une collision, elle se calcule à partir des équations de la diffusion Compton. Nous ne ferons pas ces calculs ici, d'autres articles sur la diffusion Compton le feront certainement mieux que moi. Elle se calcule avec la formule suivante, avec α la constante de structure fine et m_e la masse d'un électron.

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{2m_e^2}$$

Le libre parcours moyen est égal, par définition, à l'équation suivante. On note λ_t le libre parcours moyen, n_e le nombre d'électrons par unité de volume, et σ la probabilité d'interaction Compton entre deux particules.

$$\lambda_t = \frac{1}{n_e\sigma}$$

Le temps de libre parcours moyen se calcule en divisant cette distance par la vitesse d'un photon, ce qui donne :

$$T = \frac{\lambda_t}{c}$$

Avec expansion, les équations de la diffusion Compton change un petit peu. Avec l'expansion, le libre parcours moyen va naturellement augmenter, à cause de l'évolution du facteur d'échelle. On peut remarquer que l'expansion n'influence pas la section efficace d'interaction Compton : son influence se fait sur la densité des électrons, qui diminue d'un facteur a^3 avec l'expansion. Suite à l'expansion, il arrive un moment où le libre parcours moyen devient plus grand que l'horizon cosmologique, que l'univers observable. Lorsque cela arrive, la diffusion Compton entre un photon du CMB et un électron libre devient "impossible", ou tout du moins fortement improbable. Les photons cessent d'interagir complètement avec les électrons libres, qui sont alors libres de former des atomes avec les noyaux. C'est ainsi qu'à lieu le découplage.

Approximation du couplage fort

La diffusion Compton ne faisait pas que redistribuer la quantité de mouvement : elle couplait aussi fortement le nombre de photons et de baryons. Si on prenait un volume d'espace fini, le nombre de photons et de baryons ne différait pas sensiblement l'un de l'autre. Il y avait bien quelques variations ci et là, mais on peut parfaitement supposer qu'en moyenne, le nombre de particules par unité de volume était le même pour les photons et les baryons. Dit autrement, avec n_r et n_b le nombre de photons et de baryons par unité de volume :

$$n_r \approx n_b$$

On sait de plus que $n_r \propto \frac{p_r}{a^4}$ et que $n_b \propto \frac{p_b}{a^3}$, ce qui donne :

$$4p_r = 3p_m$$

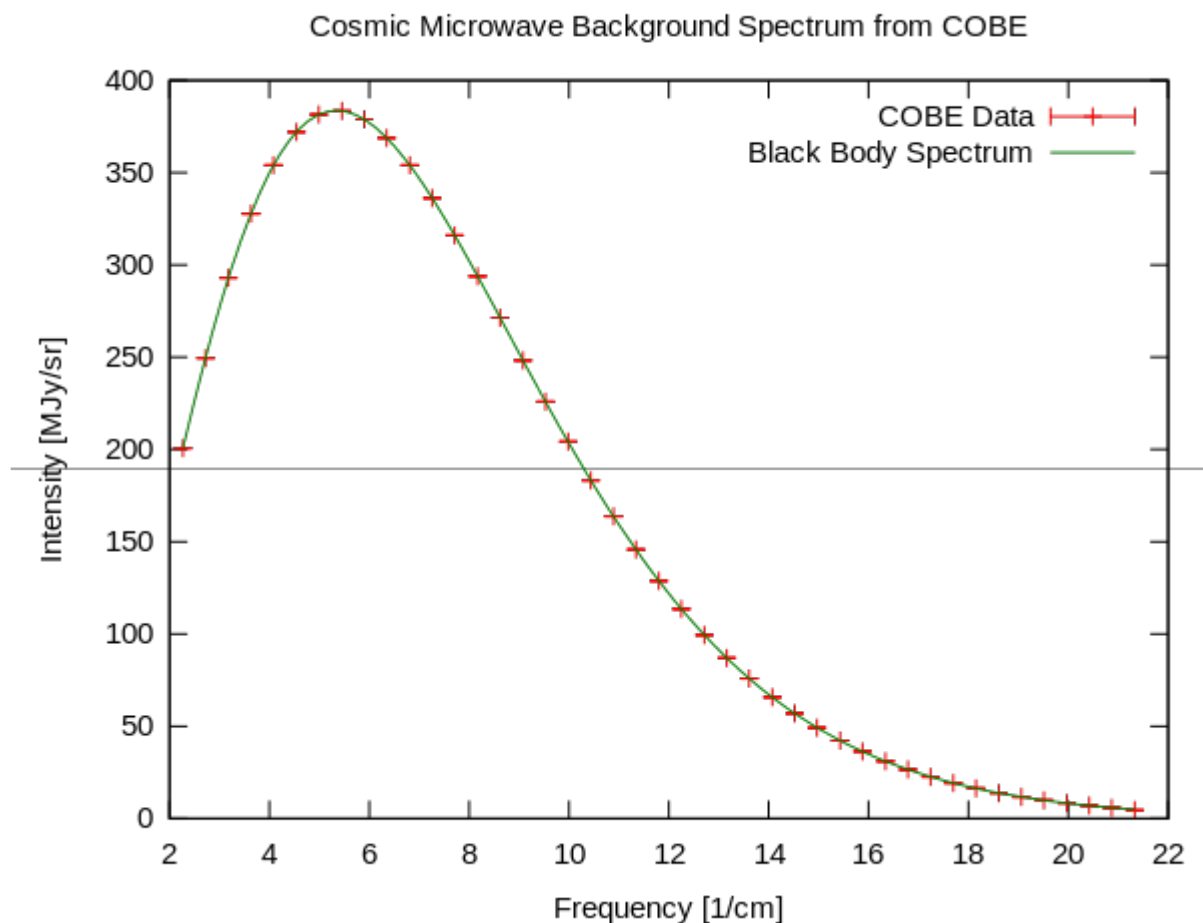
$$p_r = \frac{3}{4}p_m$$

Dans la suite du cours, nous aurons à utiliser le coefficient suivant, dérivé de l'équation précédente :

$$R = \frac{1}{4} \left(\frac{c}{v} \right)^3$$

Température du CMB

Les observations montrent que le CMB est un rayonnement de corps noir quasiment parfait ! Ce qui est en accord avec la théorie.



Le fait que le CMB soit un rayonnement de corps noir signifie que l'on peut lui attribuer une température. Sans expansion, cette température serait égale à la température du plasma au moment du découplage, qui a été conservée par le gaz de photons. Cependant, l'expansion a décalé ce rayonnement de corps noir vers le rouge, diminuant sa température. La température du fond diffus au moment du découplage n'est pas donc pas connu, tant que l'on ne sait pas quand ce découplage a eu lieu.

Approximation par l'énergie photonique moyenne

On peut cependant rendre compte théoriquement de la température à laquelle a eu lieu le découplage. Une première méthode est de comparer l'énergie d'ionisation de l'hydrogène avec l'énergie d'un photon. Dans un gaz de photons de température T , l'énergie moyenne d'un photon est de $2.7 k_B T$. L'énergie d'ionisation d'un atome d'hydrogène (la plus faible de toutes) est de 13,6 électrons-Volts (l'EV est une unité d'énergie). On peut alors calculer une approximation de la température de découplage avec le quotient suivant :

$$T = \frac{13,6 \text{ eV}}{3k_B} = 5000 \text{ K}$$

On voit que la température obtenue est diablement haute, comparé aux valeurs réelles : plus de 10 fois la valeur réelle. Cela vient d'un phénomène simple : l'énergie moyenne n'est qu'une moyenne, qui cache le fait que certains photons sont plus énergétiques que la moyenne. Même si l'énergie moyenne d'un photon est de 13,6 eV, de nombreux photons ont une énergie suffisante pour ioniser un atome dans le gaz de photon.

Approximation par l'équation de Saha

Il est possible d'obtenir une approximation plus précise avec l'**équation de Saha**. Celle-ci permet de déduire le degré d'ionisation d'un gaz. Le gaz en question correspond à un gaz d'hydrogène, composant principal de l'univers, qui s'est justement formé lors du découplage. Avant le découplage, on peut considérer que l'univers était rempli d'un plasma formé par ionisation du gaz d'hydrogène, à savoir un gaz qui mélangeait protons et électrons. L'équation de Saha nous dit que, si on note :

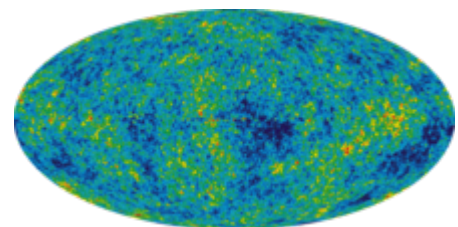
- n_e , n_p et n_H La concentration en électrons, protons et hydrogène ;
- m_e la masse de l'électron ;
- ϵ l'énergie d'ionisation d'un atome d'hydrogène.

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \frac{2 \pi m_e k T}{\epsilon}^{\frac{3}{2}}$$

Si on estime que le découplage a eu lieu quand le degré d'ionisation descend en-dessous de 10%, on trouve que la température obtenue est d'environ 3000 degrés Kelvin. Les scientifiques estiment que ce fond diffus s'est formé quand l'univers avait une température d'environ 3700 degrés Kelvin, température de condensation d'un plasma en atomes. Au moment du découplage, on sait que le gaz de photons devait avoir la même température que le plasma. Mais avec l'expansion de l'univers, la longueur d'onde des photons a augmenté, du fait de décalage vers le rouge induit par l'expansion. La température du fond diffus a donc diminuée en conséquence. De nos jours, les mesures donnent une température de 3 degrés Kelvin.

Anisotropies du fond diffus

Le fond diffus capté à l'heure actuelle correspond aux photons émis 380.000 ans après le big-bang environ, sur une sphère centrée sur la Terre : cette sphère est appelée la **surface de dernière diffusion**. Si on regarde le fond diffus, on peut remarquer que celui-ci n'est pas totalement homogène, avec quelques variations de températures assez aléatoires et dispersées appelées **anisotropies**. Les anisotropies ont divers origines, les scientifiques font ainsi la différence entre anisotropies primaires et secondaires. Les **anisotropies primaires** se sont formées lors du découplage, de petites variations de densités ayant laissé leur trace dans le fond diffus. Les **anisotropies secondaires** après le découplage, quand la matière des étoiles a interagi avec ce fond diffus (rappelez-vous que la matière est à



Carte du fond diffus cosmologique, qui illustre les anisotropies.

l'état de plasma dans une étoile, plasma qui interagit fortement avec les photons). Les anisotropies secondaires ne sont pas importantes pour le cosmologiste qui étudie la théorie du big-bang. De plus, ces anisotropies secondaires sont de petite taille, peu visibles sur les résultats actuels (à l'exception des anisotropies formées par effet Sachs-Wolfe). On peut donc les omettre sans perdre en généralité.

La taille des anisotropies a beaucoup de choses à nous dire concernant la courbure de l'univers, le rapport entre masse visible et énergie noire, et ainsi de suite. Pour comprendre pourquoi, il faut faire appel à ce que l'on appelle le **spectre de puissance** du fond diffus. Pour rappel, la surface de dernière diffusion est une sphère. La localisation d'un point sur cette sphère demande d'utiliser un système de coordonnées avec : un méridien et un équateur : on peut alors déterminer une latitude et une longitude pour chaque point, celles-ci permettant de localiser le point sur la surface de la sphère. Tout point du fond diffus est donc identifié par une longitude et une latitude . En chaque point, l'intensité de la lumière qui compose le fond diffus varie, à cause de différences de températures liées aux anisotropies. Les scientifiques cartographient le fond diffus en notant pour chaque point, la différence de température en pourcentage par rapport à la moyenne du fond diffus :

$$\frac{\Delta T}{T}$$

Oscillations acoustiques de baryons

La formation des anisotropies primaires est liée au passage d'ondes sonores dans le plasma primordial. On rappelle qu'une onde sonore est une onde de compression/décompression qui se propage dans un milieu (ici, le plasma primordial). Les zones comprimées lors du passage de l'onde vont naturellement voir leur densité augmenter, ce qui les réchauffera. A l'inverse, les zones de décompression se détendent et se refroidissent. Les ondes sonores primordiales, aussi appelées **oscillations acoustiques de baryons**, se forment dans des zones de surdensité qui ont tendance à osciller de façon cyclique, donnant naissance à des ondes sonores qui se propagent dans le plasma. La formation des ondes sonore est gouvernée par deux mécanismes : la gravité permet la formation et le maintien de ces surdensités, et la pression de radiation la contrecarre. Sous l'effet de la gravité, des particules matérielles peuvent se rassembler pour former de petites zones de surdensités, qui se contractent sous l'effet de la gravité. Cette contraction va réchauffer la matière dans la zone de surdensité, ce qui en augmentera la pression de radiation (on néglige totalement la pression de la matière baryonique). Cette pression luttera contre la force de gravité, forçant la surdensité à gonfler et à se dilater. Cette dilatation fait chuter sa température, et sa pression fait alors de même. La gravité reprend alors ses droits, en devenant plus forte que la pression, et un nouveau cycle commence.

Lors du découplage, ces ondes sonores se sont figées, les photons n'agissant plus sur la matière. La pression de radiation reste la même, mais celle-ci influence relativement peu la matière, laissant la gravité faire son travail. Ne pouvant plus contrecarrer la gravité, la pression de radiation cesse de donner naissance aux oscillations acoustiques de baryons. Les zones de surdensité cessent d'osciller et s'effondrent sur elles-mêmes, donnant naissance à diverses structures : de futures galaxies pour les surdensités de grande échelle, notamment. Les variations de densité formées par les ondes sonores se traduisent sur le CMB par des variations de densité, densité et température étant reliées par l'équation suivante :

$$\frac{\Delta T}{T}$$

On verra à quoi correspond la variable x plus tard, quand nous aborderons l'effet Sachs-Wolfe.

Vitesse du son

La vitesse de ces ondes sonores se calcule avec des raisonnements assez simples. Vous savez peut-être déjà que la vitesse du son dans un milieu se calcule avec la formule suivante, avec P la pression et ρ la densité. Il faut noter que les dérivées sont calculées à entropie constante, ce qui est supposé être le cas dans l'univers en expansion.

$$v_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

Or, on sait que $\rho \propto a^{-3}$. La dérivée précédente nous donne donc :

$$v_s^2 \propto a^3$$

Un traitement plus détaillé nous donne une vitesse du son égale à :

$$v_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{c^2}{3} \frac{\partial P}{\partial \rho}$$

Démonstration

Partons de la définition de la vitesse du son :

$$v_s = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$$

Pression et densité de l'univers primordial ne sont censés varier qu'avec la température et l'expansion. On peut alors prendre les dérivées par rapport à la température, ce qui donne :

$$v_s = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \rho}}$$

Sachant que l'univers primordial contient du rayonnement et de la matière (l'énergie noire n'a pas encore un effet notable), on a :

$$v_s = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{\partial P_r}{\partial T} + \frac{\partial P_m}{\partial T}} \frac{\partial T}{\partial \rho}$$

La matière n'ayant pas de pression, la formule se simplifie en :

$$v_s = \sqrt{\frac{\partial P_r}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{\partial P_r}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \rho}}$$

On peut alors calculer les dérivées $\frac{dv_s}{dt}$ et $\frac{dR}{dt}$ en partant des équations $\frac{dR}{dt} = v_s$ et $\frac{dv_s}{dt} = -\frac{v_s}{R}$. Les calculs donnent : $\frac{dR}{dt} = v_0 \frac{R_0}{R}$, $\frac{dv_s}{dt} = -\frac{v_0}{R_0} \frac{R_0}{R}$. En injectant dans l'équation précédente, on a :

$$v_s = v_0 \frac{R_0}{R}$$

On peut ensuite utiliser la formule $\frac{dR}{dt} = v_s$ pour le rayonnement, ce qui donne :

$$v_s = v_0 \frac{R_0}{R}$$

Vu que T varie comme $\frac{1}{R}$, on a alors :

$$v_s = v_0 \frac{R_0}{R} \frac{1}{R}$$

En notant $R = \frac{R_0}{a}$, l'équation précédente se simplifie en :

$$v_s^2 = v_0^2 \frac{R_0^2}{R^2}$$

Avant le découplage, $R \propto a$, ce qui donne :

$$v_s^2 \propto \frac{1}{a^2}$$

Par contre, après le découplage, R évolue avec les variations de densité de rayonnement et de matière. Dit autrement, la vitesse du son se met alors à diminuer avec l'expansion.

Horizon sonore

Chaque zone de surdensité, supposée sphérique, a créé des ondes sonores dont le front d'onde a une forme sphérique. La taille maximale que peut prendre cette sphère dépend du temps écoulé depuis le big-bang et la recombinaison. La sphère de taille maximale correspond à une onde sonore créée lors du big-bang et figée lors de la recombinaison : c'est pour cela qu'on l'appelle l'**horizon sonore**. Le rayon de cette sphère se calcule en faisant l'intégrale de la vitesse du son dans le plasma primordial sur l'âge de l'univers au moment de la recombinaison.

$$R_s = \int_0^{t_{\text{rec}}} v_s dt$$

La vitesse du son dans un gaz de photon est égale à $\frac{c}{3}$. Elle augmente quelque peu du fait de la présence des baryons dans la réalité.

$$R_s = \frac{1}{3}$$

Il se trouve que l'horizon sonore correspond à la longueur de l'onde sonore de plus grande amplitude possible : la sur-densité a eu le temps maximal pour se compresser.

Équation d'onde

Il est possible de rendre compte des oscillations acoustiques de baryons assez simplement, avec des équations digne d'une première année de licence de physique. En effet, celles-ci se dérivent bien par un simple oscillateur harmonique amorti. Pour nous en rendre compte, prenons un point à la surface de la surdensité, et donnons-lui une masse m . Ce point va osciller, passant d'une distance maximale à une distance minimale, la durée d'une période étant la durée d'une période de l'onde sonore. Cette oscillation est, comme pour de nombreuses ondes sonores, de forme sinusoïdale (en réalité cosinusoidale).

Des développements très compliqués nous disent que ces oscillations de baryons sont décrites par les équations d'un oscillateur harmonique. Pour être décrit par un oscillateur harmonique amorti, un système (ici, la particule à la surface de la surdensité) doit être soumis à une force de rappel, proportionnelle à la distance : $F_{\text{rappel}} = -kx$. La force de rappel est ici la pression de radiation, qui pousse le système à osciller. Cependant, il faut signaler qu'une seconde force joue les troubles-fêtes : la gravité. Les oscillations sont en effet gouvernées par la pression de radiation. Mais le poids des baryons force le système à se compresser, ce qui tend à réduire les oscillations au fil du temps. Il s'agit donc d'un terme de friction, ce qui fait que l'oscillateur harmonique est dit amorti. Dans le cas des oscillations acoustiques de baryons, l'équation de l'oscillateur harmonique est celle-ci, avec ζ le potentiel gravitationnel dans la surdensité :

$$\frac{d^2 \zeta(t)}{dt^2} + k^2 v_s^2 \zeta = -\frac{k^2}{3} \Phi$$

La solution de cette équation est la suivante :

$$\zeta = [\zeta_{t_0} + (1 + R)\Phi] \cos(kr_s) + \frac{1}{kr_s} \sin(kr_s) - (1 + R)\Phi$$

On voit que les ondes sonores des oscillations acoustiques de baryons sont un mélange de cosinusoides et de sinusoides, dont la valeur moyenne est égale à $-(1 + R)\Phi$. Cette moyenne différente de 0 aura des conséquences que nous aborderons plus tard.

Effet Sachs-Wolfe

Les surdensités à l'origine des anisotropies sont des zones où la température est plus élevée qu'alentour, cette différence de température entraînant un surcroît de luminosité. Néanmoins, ce sont aussi des zones où la gravité est plus importante. Or, la relativité générale nous dit qu'un photon qui part d'une zone de forte gravité est décalé vers le rouge. Ce décalage gravitationnel est d'origine gravitationnelle, purement lié à la relativité générale. Cela vient du fait que la gravité, dans la relativité générale, est une déformation de la géométrie de l'espace. On peut simplifier en disant que les distances ne se calculent pas de la même manière dans un champ de gravité qu'en-dehors. On peut rendre compte de ce phénomène d'une manière simplifiée (et même fautive) en disant que la gravité entraîne une modification stable du facteur d'échelle,

par rapport aux environ (c'est une modification "locale"). En sortant d'un champ gravitationnel, un photon garde la même longueur d'onde comobile, ce qui se traduit par une modification de la longueur d'onde perçue (qui tient compte de la modification locale du facteur d'échelle). La modification fait que la longueur d'onde augmente en "sortant" du champ gravitationnel.

Dans le détail, la différence locale de facteur d'échelle est égale au potentiel gravitationnel Φ .

$$z_{\text{gravite}} = \frac{\Delta a_{\text{locale}}}{a_{\text{moyen}}} = -\Phi$$

Du fait de ce décalage vers le rouge, la surdensité semble avoir une température inférieure par rapport à celle qu'elle aurait sans ce décalage vers le rouge. C'est ce qu'on appelle l'**effet Sachs-Wolfe**. Pour résumer, on peut décomposer la température perçue par un observateur lointain comme étant la somme du décalage vers le rouge avec la température locale (sans décalage vers le rouge. En notant T_p et T_l les températures perçues et locales, on a :

$$\frac{\Delta T_p}{T_p} = \frac{\Delta T_l}{T_l} - z_{\text{gravite}}$$

$$\frac{\Delta T_p}{T_p} = \frac{\Delta T_l}{T_l} + \Phi$$

Dans leur article original, Sachs et Wolfe ont postulé que $\frac{\Delta T_l}{T_l}$ était proportionnelle à Φ . Rien d'étonnant à cela : la température dépend de la densité, qui dépend elle-même du potentiel gravitationnel. Leurs calculs et approximations leur ont donné : $\frac{\Delta T_l}{T_l} = -\frac{2}{3}\Phi$. On peut en faire une démonstration relativement simple, basée sur quelques arguments physique.

Démonstration

Par définition, on sait que :

$$\frac{\Delta T_l}{T_l} = -\frac{\Delta a}{a}$$

On a vu dans le chapitre sur les modèles cosmologique que dans un univers où se mélangent rayonnement et matière, on a :

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{2}{3(1+w)} \frac{\Delta t}{t}$$

On combinant les équations précédentes, on a :

$$\frac{\Delta T_l}{T_l} = -\frac{2}{3(1+w)} \frac{\Delta t}{t}$$

On peut alors se demander à quoi correspond le terme $\frac{dt}{t}$. Il faut savoir que dans un champ de gravitation, le temps s'écoule plus lentement : c'est le phénomène de dilatation des durées. Ce ralentissement du temps est approximativement proportionnel au potentiel gravitationnel, cette approximation étant tirée de la relativité générale. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{\displa} \\ \text{\frac} \end{array}\right.$$

En combinant les deux équations précédentes, on a :

$$\frac{\Delta T_l}{T_l} = -\frac{2}{3(1+w)}\Phi$$

En supposant que la matière domine au fond diffus, on trouve :

$$\frac{\Delta T_l}{T_l} = -\frac{2}{3}\Phi$$

CQFD !

En injectant dans l'équation précédente, on trouve :

$$\frac{\Delta T_p}{T_p} = -\frac{2}{3}\Phi + \Phi$$

$$\frac{\Delta T_p}{T_p} = \frac{1}{3}\Phi$$

Spectre de puissance du fond diffus

Les différences de température entre chaque point sont causées par des différences de densité et de pression, c'est à dire par des ondes acoustiques de grande échelle. Ces ondes acoustiques se propagent dans le plasma primordial, se superposent et évoluent progressivement. Ce faisant, la somme de toutes ces ondes donne des zones de surdensité et des zones de sous-densité. Des grumeaux de matière de grande taille donnent naissance à des "ondes acoustiques" de grande taille, de grande longueur d'onde, et réciproquement pour les grumeaux de petite taille. A l'échelle du CMB, on observe la somme de toutes ces ondes, qui se superposent les unes au-dessus des autres s'additionnent : l'ensemble forme une seule et unique onde de température, surimposée sur la sphère de température uniforme. Or, un théorème très utilisé en physique nous dit que toute onde peut être décomposée en ondes plus simples, de formes sinusoïdales. En additionnant un certain nombre (potentiellement infini) de ces ondes de base,

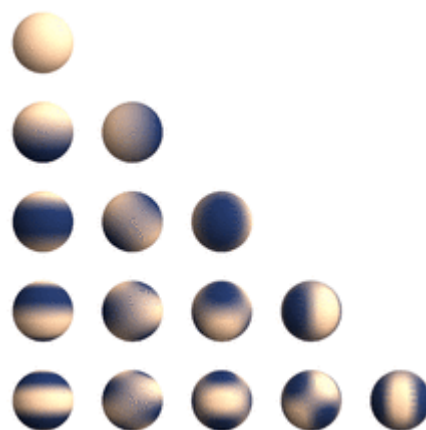
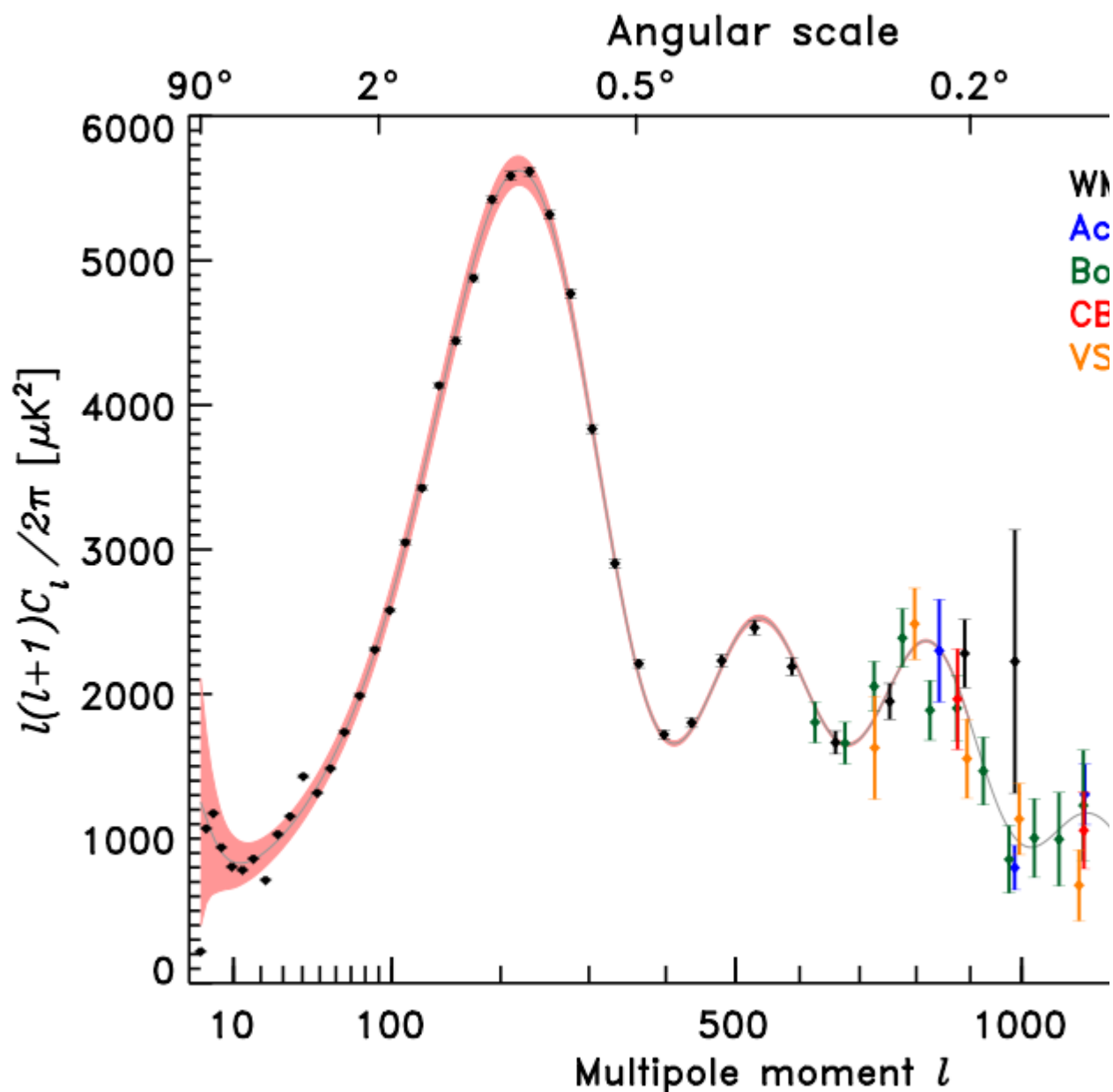


Illustration de quelques harmoniques sphériques.

pondérées par un coefficient, on peut obtenir n'importe quelle onde résultante. Dans le cas d'une onde de forme sphérique, ces ondes simples sont appelées des **harmoniques sphériques**.

$$\frac{\Delta T(\theta, \varphi)}{T} = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (a_l^m \times Y_l^m(\theta, \varphi))$$

Ce théorème s'applique aussi au fond diffus, et à la gigantesque onde acoustique à l'origine des anisotropies de température. Ce qui fait qu'il est possible d'analyser l'amplitude de chaque harmonique sphérique du CMB en fonction de leur fréquence. Il suffit de reporter ces amplitudes sur un graphique, dont l'abscisse donne la fréquence de chaque harmonique, et l'ordonnée son amplitude. Dit autrement, ce graphique donne quelle est l'amplitude de chaque anisotropie en fonction de sa taille : telle anisotropie d'une taille de quelques kilomètres aura une amplitude de tant, telle anisotropie plus grosse aura une amplitude de température plus élevée, etc. Le résultat donne la figure suivante, bien connue des cosmologistes :



Lorsqu'on observe un spectre de puissance quelconque, qu'il s'agisse d'une onde acoustique, d'un champ de gravité ou de tout autre onde, on observe la présence de plusieurs pics à certains endroits. Les mathématiques nous disent que ces pics sont localisés à des fréquences bien précises, multiples d'une fréquence dite fondamentale. Les pics sont situés respectivement à la fréquence fondamentale pour le premier pic et aux harmoniques pour les suivants. On observe plusieurs de ces pics sur le CMB, dont l'amplitude nous renseigne sur certains paramètres, comme la courbure ou le rapport entre masse visible et matière noire.

La fréquence fondamentale

Le premier pic donne des indications sur la fréquence fondamentale des ondes sonores, qui est liée à la courbure de l'univers K . Précisément, la fréquence fondamentale correspond à une sur-densité dont l'extension était maximale au moment du big-bang, et qui s'est comprimé avant le découplage. Au moment

du découplage, celle-ci a atteint sa compression maximale et s'apprêtait à se détendre. La fréquence fondamentale ayant l'amplitude maximale, sa longueur d'onde a donc égale à l'horizon sonore. Depuis, cet horizon sonore a gonflé du fait de l'expansion de l'univers, ce qui se traduit par une diminution de sa taille. La fréquence fondamentale actuelle est tout simplement le rapport entre distance de la surface de dernière diffusion et rayon de l'horizon sonore. L'analyse du premier pic donne une courbure nulle.

Les autres harmoniques

Le second pic correspond au double de la fréquence fondamentale, qui correspond à une sur-densité qui a eu le temps de faire une période complète entre le big-bang et le découplage. Il donne des indications sur la quantité de matière baryonique, à savoir formée de protons et de neutrons (en réalité, de baryons, des particules composites formées de quarks et gluons). Cela vient du fait que la valeur moyenne des ondes sonores vaut, comme on l'a vu plus haut : $-(1 + R)\Phi$. Le rapport entre densité de matière baryonique et de rayonnement modifie la valeur de R , et donc la valeur moyenne. Pour comprendre le mécanisme exact, rappelons que la fréquence des oscillations dépend de la différence entre pression et gravité dans les sur-densités. La pression dépend essentiellement de la pression de radiation, mais pas du tout de la pression de la matière baryonique. La gravité par contre, dépend autant de la matière baryonique que du le poids du rayonnement. Sans matière baryonique, les amplitudes des compressions et décompressions devraient être égales, symétriques par rapport à la valeur moyenne. Si on ajoute de la matière baryonique, l'amplitude maximale (des décompressions) reste la même, vu qu'elle dépend surtout de la pression de radiation. Mais l'amplitude maximale des compression est amplifiée par le poids de la matière baryonique. Les amplitudes sont alors inégales, plus amples pour les compressions. Ainsi, le rapport entre matière baryonique et rayonnement influence l'amplitude des ondes sonores, ce qui se remarque dans le spectre de puissance, sur le second pic.

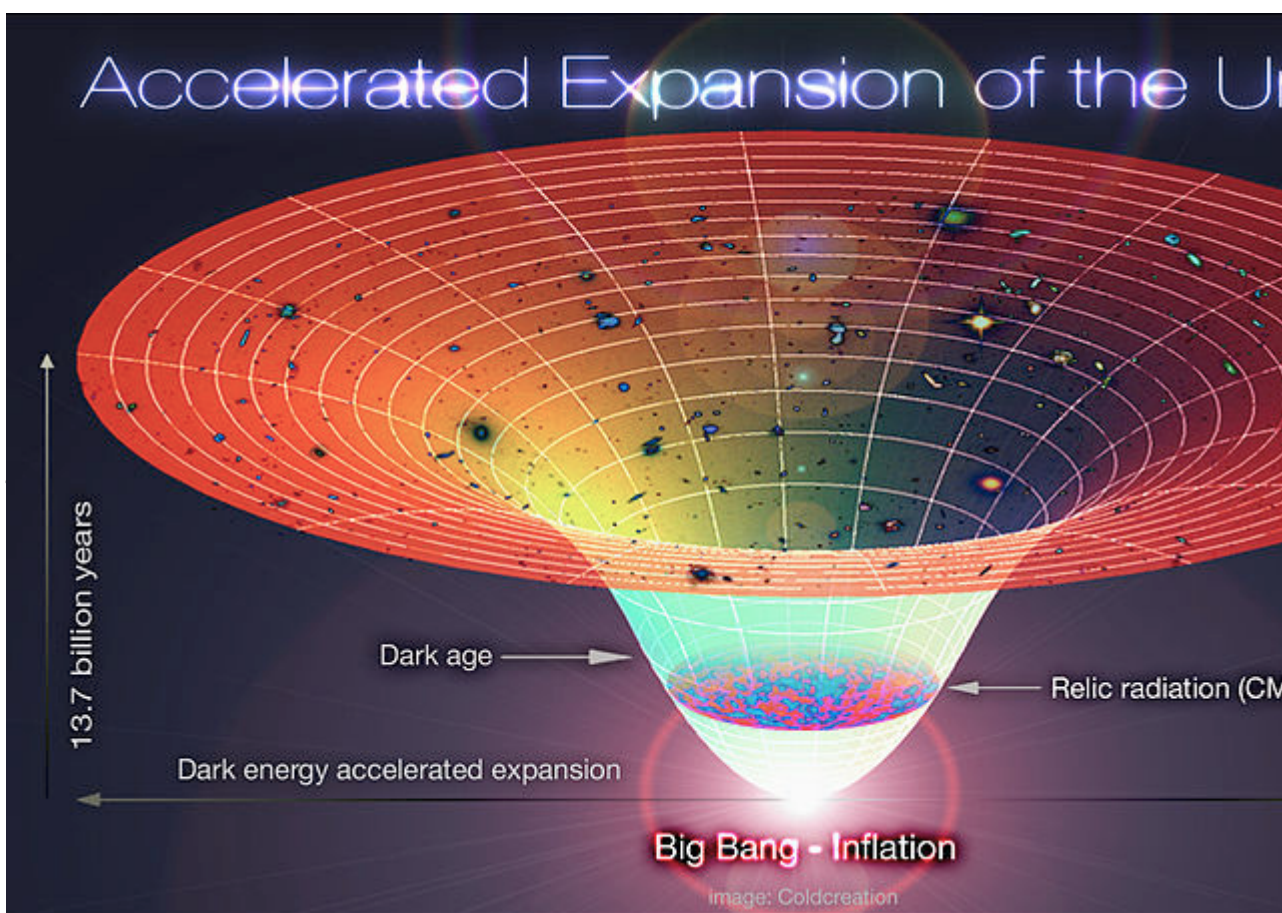
On voit que les pics après le troisième ont quelque peu atténués. Pour comprendre pourquoi, il faut se rappeler, les ondes sonores se propagent par des collisions entre particules. Avant et au moment de la recombinaison, les photons et autres particules avaient un temps de libre parcours moyen très élevé. Dans les unités de distance actuelle, le libre parcours moyen serait de 10 000 années lumières. Il va de soit que sur le CMB actuel, les ondes sonores dont la longueur d'onde est plus petite sont atténuées. Vu que seule une portion des particules a pu entrer en collision, les particules n'ont pas eu le temps de transmettre totalement l'onde sonore par collisions. Cela en réduit l'amplitude.

En savoir plus

- [Site sur l'effet Sche-Wolfes \(http://fizisist.web.cern.ch/fizisist/ISW/ISW_effect_Home.htm\)](http://fizisist.web.cern.ch/fizisist/ISW/ISW_effect_Home.htm)

L'énergie noire

Il a longtemps été cru que l'expansion de l'univers devait décélérer avec le temps, d'après les équations de Friedmann. Mais quelques observations ont remis cette affirmation en cause. Deux expériences ont fait voler en éclat ce consensus, en faisant état d'une accélération de l'expansion : le Supernova Cosmology Project et le High-Z supernovae search team. Ces observations ont été confirmées par des observations faites avec le télescope Hubble, à l'heure où j'écris ces lignes (fin 2016). Cela pourrait s'expliquer par une courbure non-nulle, mais les diverses observations stipulent que la courbure est bien nulle ! Or, les équations de Friedmann sans courbure et sans constante cosmologique nous disent que l'univers est censé se contracter de moins en moins vite : l'expansion devrait ralentir, pas accélérer.



Constante cosmologique

Pour expliquer cela, on est obligé d'ajouter un terme Λ à l'équation de Friedmann; auquel on donne le nom de **constante cosmologique**.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_e + \frac{K}{a(t)^2 c^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Cette équation se simplifie, si on considère une courbure nulle, en :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_e + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Si on prend un univers vide, pour lequel la constante cosmologique est non-nulle, l'équation de Friedmann devient :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

L'énergie noire

A l'heure actuelle, la constante cosmologique n'est qu'un paramètre ad-hoc qui permet de faire coller prédictions théoriques et observations. On ne connaît pas encore son origine, même si les physiciens ont quelques pistes. L'interprétation de ce terme varie suivant les physiciens. La plupart pensent que ce terme est la conséquence d'une forme d'énergie différente de la matière ou du rayonnement : l'**énergie noire**. Les observations semblent indiquer que 30% de l'univers est composé de matière, tandis que le reste de la densité d'énergie est intégralement composé d'énergie noire.

Cette énergie se caractériserait par une densité constante au cours du temps, signe que l'énergie de l'univers ne se conserve pas. Cette hypothèse permet de simplifier la première équation de Friedmann, en utilisant la densité d'énergie noire ρ_Λ .

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

On peut alors reformuler cette équation comme suit :

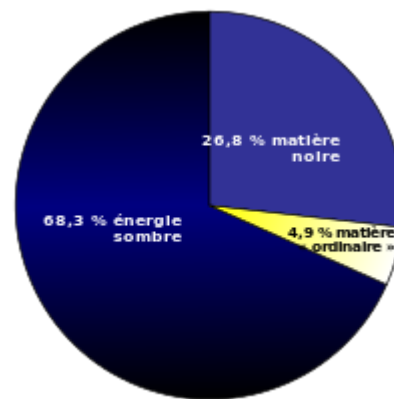
$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} a^2$$

Modèle cosmologique avec énergie noire

Si on prend un univers ne contenant que de l'énergie noire, l'équation de Friedmann devient alors :

$$H(t)^2 = \frac{\Lambda c^2}{3}$$

La constance de la densité d'énergie noire a une conséquence assez intéressante : la densité étant constante, le facteur de Hubble est constant lui aussi. Cela signifie que l'énergie noire influence l'expansion de l'univers, mais a des effets strictement inverses à ceux de la matière ou du rayonnement. Elle a un effet anti-gravitationnel, et implique une force répulsive, qui contrecarre la gravité. D'ordinaire, la matière et le rayonnement ont un poids, leur gravité contre-carrant l'expansion : leur pression est donc dirigée vers le centre de l'univers observable. Mais la définition de la constante cosmologique nous dit que l'énergie noire doit au contraire augmenter l'expansion : la pression doit être dirigée vers l'extérieur. Dit autrement, la pression de la l'énergie noire est négative, ce qui est particulièrement original (même si on observe des phénomènes similaires dans certains cristaux ou lors de changements de phases).



Contenu de l'univers.

La constance du facteur de Hubble a des conséquences assez intéressantes, qui peuvent se déduire de la définition du facteur de Hubble. Pour rappel, la définition du facteur de Hubble en fonction du facteur d'échelle donne :

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

Prenons l'exponentielle des deux cotés :

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

En supposant que le facteur d'échelle actuel est unitaire, et en intégrant les deux cotés de l'équation, il vient :

$$a(t) = e^{Ht} = e^{ct}$$

Cette équation nous dit que le volume de l'univers augmente de manière exponentielle avec le temps. Ce qui est beaucoup plus rapide que dans les deux autres modèles, où la croissance est plus lente. Ce plus, cette équation dit que l'univers a un âge infini : vu qu'une exponentielle ne peut être nulle, le facteur d'échelle et le volume de l'univers ne peuvent pas être nuls. Dit autrement : la singularité initiale est totalement évitée !

Preuves de la théorie du big-bang

On peut se demander quelles sont les preuves de l'expansion de l'univers (et donc, indirectement, du big-bang). On sait que la loi de Hubble et le phénomène de décalage vers le rouge de la lumière sont des prédictions de la théorie de l'expansion qui sont confirmée expérimentalement depuis belle lurette. Mais d'autres témoins sont demandés à la barre, pour que le jury puisse se faire son opinion !

Nucléosynthèse primordiale

La première preuve tient dans les conséquences du découplage thermique sur la formation des noyaux et des baryons. Les équations permettent de calculer exactement le rapport entre le nombre de protons et de neutrons né de ce découplage, ainsi que le rapport du nombre d'atomes d'hydrogènes, d'hélium et de lithium. La théorie prédit que 92% des atomes de l'univers est composé d'hydrogène, 7% des atomes d'hélium, et le reste est composé d'autres éléments chimiques. Malheureusement, les étoiles ont produit de l'hélium et d'autres éléments chimiques, modifiant les rapports proportions dans les galaxies récentes : les supernovas ont enrichit le milieu interstellaire en Carbone, Oxygène, Hélium, etc. C'est pour cela qu'on observe des rapports de l'ordre de 75% d'hydrogène, et 24% d'hélium. Pour éliminer le problème, il suffit d'observer la composition chimique des toutes premières galaxies formées, que l'on peut observer à la lisière de l'univers observable (les fameux quasars). Les observations montrent que dans ces galaxies, on observe des rapports exactement identiques à ceux prédits par la théorie du big-bang.

Les mêmes équations permettent de calculer le rapport nombre de protons sur nombre de neutrons. Là encore, celui-ci a été modifié par certaines désintégrations radioactives, mais on peut quantifier le phénomène et prédire les rapports actuels en fonction des rapports prédits lors du découplage. Et là encore, les conclusions sont exactement celles prédites par la théorie de l'expansion de l'univers.

Fond diffus cosmologique

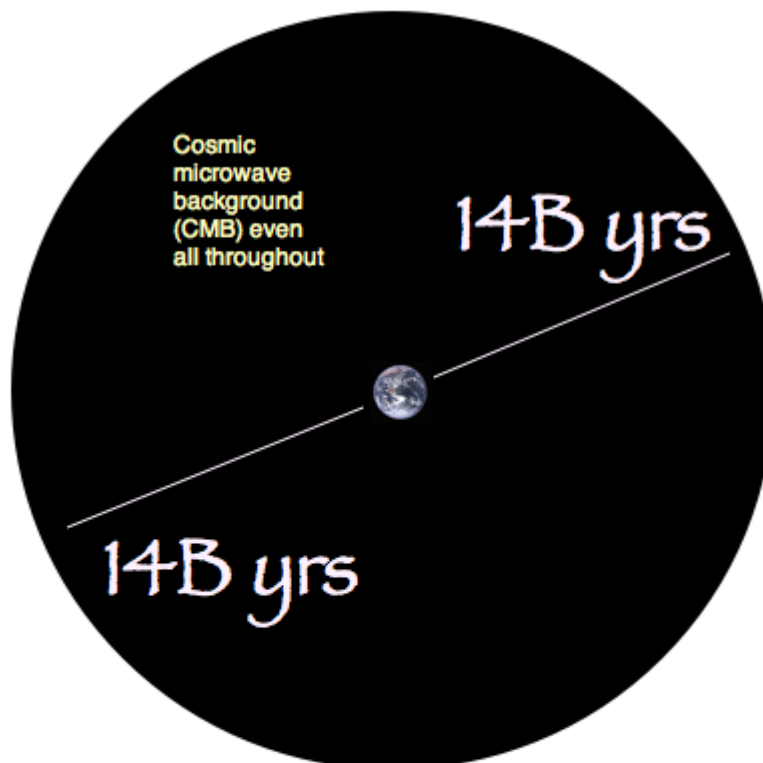
La théorie du big-bang est la seule à prédire l'existence du fond diffus cosmologique de photons, abordé il y a quelques chapitres. Le fond diffus capté à l'heure actuelle correspond aux photons émis sur une sphère centrée sur la Terre, 380.000 ans après le big-bang environ : cette sphère est appelée la **surface de dernière diffusion**. Si on regarde le fond diffus, on peut remarquer que celui-ci n'est pas totalement homogène, avec quelques variations de températures assez aléatoires et dispersées appelées **anisotropies**. On a vu il y a quelques chapitres que ces anisotropies sont le traces laissées par des ondes sonores qui se propageaient dans le plasma primordial. Diverses compagnes d'observation ont déterminé la taille des surdensités, des grumeaux de matière, et ont réussi ce qui a permis d'induire les valeurs des paramètres utilisés pour calculer la taille des surdensités.

On a vu il y a quelques chapitres que le spectre du fond diffus possède quelques pics, chacun ayant une signification relativement précise. En postulant un univers sans courbure, et avec quelques hypothèses supplémentaires, on arrive à avoir un accord parfait avec les données observationnelles, comme le montre la courbe ci-dessous. La théorie arrive ainsi à déterminer la taille des zones de surdensité en fonction de certains paramètres comme l'âge de l'univers, le facteur de Hubble, etc. C'est la première réussite de la théorie du big-bang : réussir à prédire l'état du fond diffus cosmologique, seulement à partir des équations

vues plus haut. Les campagnes d'observations du fond diffus se succèdent les unes aux autres, pour tenter d'invalider ou de valider divers modèles d'univers, ou théories spéculatives sur le big-bang et les mécanismes thermodynamiques en place avec la recombinaison.

L'hypothèse de l'inflation

Les observations montrent que des points opposés sur la surface de dernière diffusion ont des températures similaires, et sont relativement homogènes entre eux. Pourtant, ces points n'ont pas pu interagir entre eux pour harmoniser leurs températures, même indirectement. Pour comprendre pourquoi, il faut remarquer que même en allant à la vitesse de la lumière, les photons n'ont pas pu atteindre le point opposé pour le réchauffer ou le refroidir. On voit ainsi apparaître le **problème de l'horizon** : pourquoi le fond diffus est-il si homogène ? C'est là un des points que la théorie ne peut pas expliquer.



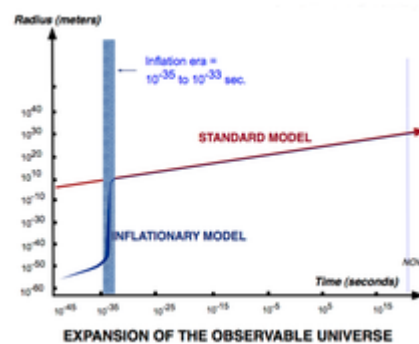
THE 'HORIZON PROBLEM'

The opposite edges of the visible universe are 28 billion years apart. The universe is only 14 billion years old. And yet the temperature of the CMBR is uniform everywhere.

Un autre problème de la théorie du big-bang est que l'univers est plat. On pourrait croire que ce n'est qu'une coïncidence, mais les physiciens ne sont pas vraiment satisfaits par cette explication. Beaucoup pensent que le fait que la courbure soit nulle est quelque chose qui doit être expliqué. C'est ce qu'on appelle le **problème de la platitude** : pourquoi la courbure semble-t-elle nulle ?

L'inflation

Ces deux problèmes peuvent être résolus, si on suppose que la vitesse de l'expansion est supérieure à celle de la lumière. Dans ce cas, la surface de dernière diffusion correspond à une portion d'espace suffisamment petite pour harmoniser les températures, qui aura gonflé jusqu'à devenir plus grande que la surface de dernière diffusion : cela résout le problème de l'horizon. Cela résout aussi le problème de la platitude : la zone aura tellement gonflé que les effets de la géométrie de l'univers seraient presque invisibles. Pour faire une analogie, imaginez que la zone gonflée par l'expansion est la surface de la Terre : vous êtes si petits par rapport à la Terre que vous ne vous rendez pas compte de sa rotondité et voyez un sol plat.

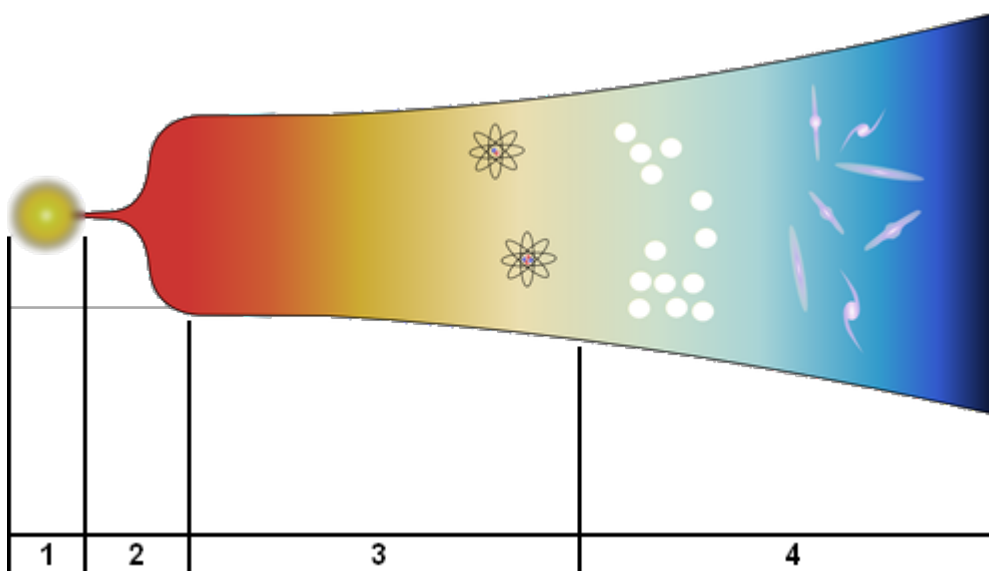


Inflation comparée à un modèle sans inflation.

Les modèles d'univers dominés par la matière ou le rayonnement ne permettent pas d'obtenir une vitesse d'expansion suffisante, vu que l'expansion décélère. Mais un univers dominé par une constante cosmologique répond au cahier des charges : on a vu il y a peu qu'un tel univers a une expansion qui accélère exponentiellement avec le temps, et la vitesse d'expansion peut rapidement dépasser la vitesse de la lumière. La solution est de supposer que dans son jeune âge, l'univers a été temporairement dominé par la constante cosmologique. On nomme cette période, et le mécanisme qui l'a causée, l'**inflation**.

Dans cette théorie, l'évolution de l'univers s'est déroulée en quatre étapes :

- une étape antérieure à l'inflation, qu'on ne connaît pas très bien ;
- une étape d'inflation exponentielle ;
- une étape où l'univers est dominé par le rayonnement ;
- une étape où l'univers est dominé par la matière.



A l'heure actuelle (début 2016), il n'existe pas de preuve certaine de l'existence d'une inflation. Au mieux, il s'agit d'une théorie, qui fait des prédictions sur certains paramètres du fond diffus, qui n'ont pas encore été mesurés. Reste à voir ce que nous réserve l'avenir !

Le mécanisme de l'inflation

En supposant que la constante cosmologique permet d'expliquer l'inflation, on est face à un problème : l'inflation ne s'arrête jamais ! La constante cosmologique ne peut donc pas expliquer l'inflation, et il faut trouver autre chose. Ce quelque chose doit être équivalente à une constante cosmologique à un détail près : elle doit varier dans le temps, histoire d'être assez grand lors de la phase d'inflation, et faible ensuite. Reste à inventer ce mécanisme d'inflation. Et là, les théories sont assez nombreuses ! Mais la majorité se basent sur la présence de ce qu'on appelle un **champ scalaire**.

Un champ scalaire est quelque chose qui attribue un nombre à tout point dans l'espace à chaque instant, appelé le potentiel, noté ϕ . De plus, ce champ a une densité d'énergie en chaque point de l'espace, qui dépend du potentiel : celle-ci sera notée $\rho(\phi)$. Si on suppose que le champ a la même valeur en tout point, les équations nous disent que :

- la densité d'énergie causée par le champ sera de $\rho(\phi)$;
- et la pression sera de $p(\phi)$.

Si on ne tient compte que du champ scalaire, on peut alors insérer ces équations dans l'équation du fluide de Friedmann.

$\dot{\phi}$

$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho(\phi)}$

Le facteur de Hubble calculé dépend du potentiel. N'importe quel champ scalaire peut déclencher une inflation à condition que $\rho(\phi)$, souvent complétée avec $p(\phi)$: dans ces conditions, le champ se comporte comme une constante cosmologique de pression négative. Mais si le potentiel a une valeur nulle, il ne cause aucune expansion : on peut alors modéliser l'inflation en supposant que $\rho(\phi)$ diminue avec le temps, l'inflation s'arrêtant quand le champ est nul. Tout champ qui respecte ces conditions peut déclencher une inflation, ce qui laisse beaucoup de possibilités. Le champ lié au boson de Higgs est une solution possible, par exemple.



Vous avez la permission de copier, distribuer et/ou modifier ce document selon les termes de la **licence de documentation libre GNU**, version 1.2 ou plus récente publiée par la Free Software Foundation ; sans sections inaltérables, sans texte de première page de couverture et sans texte de dernière page de couverture.

Récupérée de « https://fr.wikibooks.org/w/index.php?title=Cosmologie/Version_imprimable&oldid=561313 »

La dernière modification de cette page a été faite le 16 juillet 2017 à 16:08.

Les textes sont disponibles sous [licence Creative Commons attribution partage à l'identique](#) ; d'autres termes peuvent s'appliquer.

Voyez les [termes d'utilisation](#) pour plus de détails.