Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 41

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 41.1. Es seien G und H Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass $\varphi(e_G) = e_H$ und $(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1})$ für jedes $g \in G$ ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 41.2. Sei $a \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\, x \longmapsto ax,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 41.3. Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K_+$ ein positives Element. Zeige, dass die ganzzahlige Exponentialfunktion

$$\mathbb{Z} \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot, 1),\, n \longmapsto b^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 41.4.*

Bestimme, ob die durch die Gaußklammer gegebene Abbildung

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z},\, q \longmapsto \lfloor q \rfloor,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist oder nicht.

Aufgabe 41.5. Es sei K ein Körper und sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in K,\, ad - bc \neq 0 \right\}$$

die Menge aller invertierbaren 2×2-Matrizen.

a) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass M mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

b) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass die Abbildung

$$M \longrightarrow K^\times,\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 41.6. Sei G eine (multiplikativ geschriebene) kommutative Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Potenzieren

$$G \longrightarrow G,\ x \longmapsto x^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 41.7.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass sich Gruppenelemente $g \in G$ und Gruppenhomomorphismen φ von $\mathbb{Z}$ nach G über die Korrespondenz

$$g \longmapsto (n \mapsto g^n) \text{ und } \varphi \longmapsto \varphi(1)$$

entsprechen.

Aufgabe 41.8. Bestimme die Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Q}, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Aufgabe 41.9. Es sei K ein Körper. Zeige, dass es außer der trivialen Abbildung keinen weiteren Gruppenhomomorphismus von $(K, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$ gibt.

Aufgabe 41.10. Es bezeichne $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ die (multiplikative) Einheitengruppe von $\mathbb{Q}$. Man gebe einen nichttrivialen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^\times$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$ an.

Aufgabe 41.11. Sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir betrachten die Restklassengruppe

$$\mathbb{Z}/(d) = \{0, 1, \ldots, d-1\}.$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{Z}/(d) \longrightarrow \mathbb{Z},\ r \longmapsto r,$$

kein Gruppenhomomorphismus ist.

Wie in der Vorlesung erwähnt, sind lineare Abbildungen insbesondere Gruppenhomomorphismen. Den Kern kann man wie folgt auch für einen Gruppenhomomorphismus definieren.

Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dann nennt man das Urbild des neutralen Elementes den *Kern* von φ, geschrieben

$$\operatorname{kern} \varphi = \varphi^{-1}(e_H) = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}.$$

Es gilt auch wieder das Kernkriterium, also die Aussage, dass ein Gruppenhomomorphismus genau dann injektiv ist, wenn der Kern trivial ist, d.h. nur aus 0 besteht.

Aufgabe 41.12.*

Beweise das Kernkriterium für die Injektivität eines Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow H.$$

Aufgabe 41.13. Seien G und H Gruppen und sei $\varphi\colon\, G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild von φ eine Untergruppe von H ist.

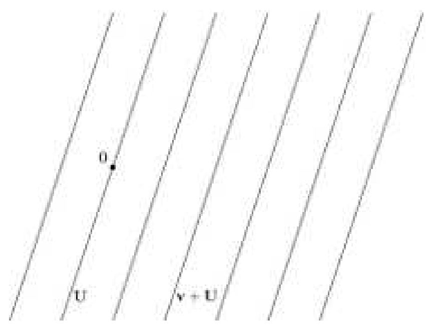
Aufgabe 41.14. Stelle in der Restklassengruppe $\mathbb{Q}$ mod $\mathbb{Z}$ die folgenden Terme durch einen Bruch zwischen 0 und 1 dar.

(1) $\frac{3}{8} + \frac{5}{7}$,
(2) $-\frac{6}{5}$,
(3) $\frac{6}{7} \cdot \frac{3}{2}$.

Aufgabe 41.15. Bestimme für die folgenden Hintereinanderausführungen von Teildrehungen (in der Ebene um den Nullpunkt), um welche Gesamtdrehung es sich handelt. Die Gesamtdrehung soll dabei durch eine Drehung um höchsten 180 Grad (höchstens eine Halbdrehung) mit oder gegen den Uhrzeigersinn beschrieben werden.

(1) Eine Halbdrehung im Uhrzeigersinn gefolgt von einer Vierteldrehung im Uhrzeigersinn.
(2) Eine Halbdrehung im Uhrzeigersinn gefolgt von einer Vierteldrehung gegen den Uhrzeigersinn.
(3) Eine Volldrehung im Uhrzeigersinn.
(4) Eine drei-Viertel-Drehung gegen den Uhrzeigersinn gefolgt von einer zwei-Drittel-Drehung gegen den Uhrzeigersinn.
(5) Eine Fünfteldrehung im Uhrzeigersinn gefolgt von einer fünf-Achtel-Drehung gegen den Uhrzeigersinn.

Aufgabe 41.16. Begründe, dass die Menge der zu einer Geraden $U \subset \mathbb{Q}^2$ parallelen Geraden eine kommutative Gruppe bilden. Addiere zwei solche Geraden miteinander. Illustriere die Wohldefiniertheit an diesem Beispiel.



Aufgabe 41.17.*

Es sei G eine kommutative Gruppe und

$$\varphi\colon G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass H ebenfalls kommutativ ist.

Aufgabe 41.18. Es sei d ein Teiler von n. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\psi\colon \mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(d)$$

derart gibt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(n) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{Z}/(d) \end{array}$$

kommutiert. Warum lassen sich die Reste modulo 2 und modulo 5 besonders einfach berechnen?

Aufgabe 41.19. Es seien G und F kommutative Gruppen und sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit der zugehörigen Äquivalenzrelation $\sim$ auf G. Es sei $\varphi\colon G \to F$ ein Gruppenhomomorphismus mit $H \subseteq \operatorname{kern} \varphi$. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi}\colon G/\sim \to F$ mit $\tilde{\varphi} \circ p = \varphi$ gibt.

Aufgabe 41.20. Zeige direkt und unter Verwendung von Satz 20.4, dass jede Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ein Ideal ist.

Aufgabe 41.21. Zeige, dass $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ eine Untergruppe, aber kein Ideal ist.

Aufgabe 41.22.*

Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann ein Körper ist, wenn er genau zwei Ideale enthält.

Aufgabe 41.23.*

Zeige, dass der Kern eines Ringhomomorphismus

$$\varphi\colon R \longrightarrow S$$

ein Ideal in R ist.

Aufgabe 41.24. Erstelle für $n = 2, 3, \ldots, 10$ Operationstafeln für die Addition und die Multiplikation für die Restklassenringe $\mathbb{Z}/(n)$. Was haben diese Tabellen mit dem Rechnen im n-System zu tun?

Aufgabe 41.25.*

(1) Gibt es eine Primzahl x derart, dass auch $x + 10$ und $x + 20$ Primzahlen sind?
(2) Gibt es mehr als eine Primzahl x derart, dass auch $x+10$ und $x+20$ Primzahlen sind?

Aufgabe 41.26. Bestimme den Rest von $36!$ modulo 31.

Aufgabe 41.27. Bestimme den Rest von $12!$ modulo 143.

Aufgabe 41.28. Sei p eine Primzahl. Beweise durch Induktion den kleinen Fermat, also die Aussage, dass $a^p - a$ ein Vielfaches von p für jede ganze Zahl a ist.

Aufgabe 41.29.*

Bestimme das inverse Element zu $\overline{44}$ in $\mathbb{Z}/(97)$.

Aufgabe 41.30. Bestimme das inverse Element zu $\overline{57}$ in $\mathbb{Z}/(139)$.

Aufgabe 41.31.*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}/(n)$ der zugehörige Restklassenring. Zeige, dass $a \in \mathbb{Z}$ eine Einheit modulo n genau dann ist, wenn a und n teilerfremd sind.

Aufgabe 41.32. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Abbildung

$$K \longrightarrow \operatorname{Mat}_n(K),\ a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{pmatrix},$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 41.33.*

Es sei K ein Körper. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon K \longrightarrow \operatorname{Mat}_2(K),\ a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche Eigenschaften eines Ringhomomorphismus erfüllt die Abbildung φ, welche nicht?

Aufgabe 41.34. Löse die lineare Gleichung

$$3x = 5$$

für die folgenden Körper K

a) $K = \mathbb{Q}$,

b) $K = \mathbb{R}$,

c) $K = \{0, 1\}$, der Körper mit zwei Elementen aus Beispiel 11.4,

d) $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, der Körper mit sieben Elementen aus Beispiel 41.11.

Aufgabe 41.35. Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 41.11.

$$5x = 4.$$

Aufgabe 41.36. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus Beispiel 41.11.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 41.37. (2 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass der Betrag

$$K^\times \longrightarrow (K_+, \cdot, 1),\, x \longmapsto |x|\,,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Was ist der Kern?

Aufgabe 41.38. (3 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Matrix einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}^2$ und ebenso von $\mathbb{Z}^2$ nach $\mathbb{Z}^2$ definiert. Untersuche diese beiden Gruppenhomomorphismen in Hinblick auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 41.39. (2 Punkte)

Stelle in der Restklassengruppe $\mathbb{Q}$ mod $\mathbb{Z}$ die folgenden Terme durch einen Bruch zwischen 0 und 1 dar.

(1) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$,
(2) $-\frac{3}{4}$,

(3) 11,
(4) $\frac{4}{7}+\frac{5}{6}$.

Aufgabe 41.40. (3 Punkte)

Erstelle Operationstafeln für die Addition und die Multiplikation für den Restklassenring $\mathbb{Z}/(13)$.

Aufgabe 41.41. (3 Punkte)

Berechne über $\mathbb{Z}/(5)$ das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 41.42. (3 Punkte)

Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ aus Beispiel 41.11.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Abbildungsverzeichnis