半ヨリ大ナル長ヲ半徑トシテ貳等圓ヲ畫キ此貳等圓周ノ交点ヲFトシAFヲ結ブ

AFハBAC角ヲ等分スル直線ナリ。

(証) DF, EFヲ結ブ

兩三角形ADF, AEFニ於テ

AD=AE　(作法)

DF=EF　(〃)

AFハ共通邊　∴ △ADF≡△AEF,

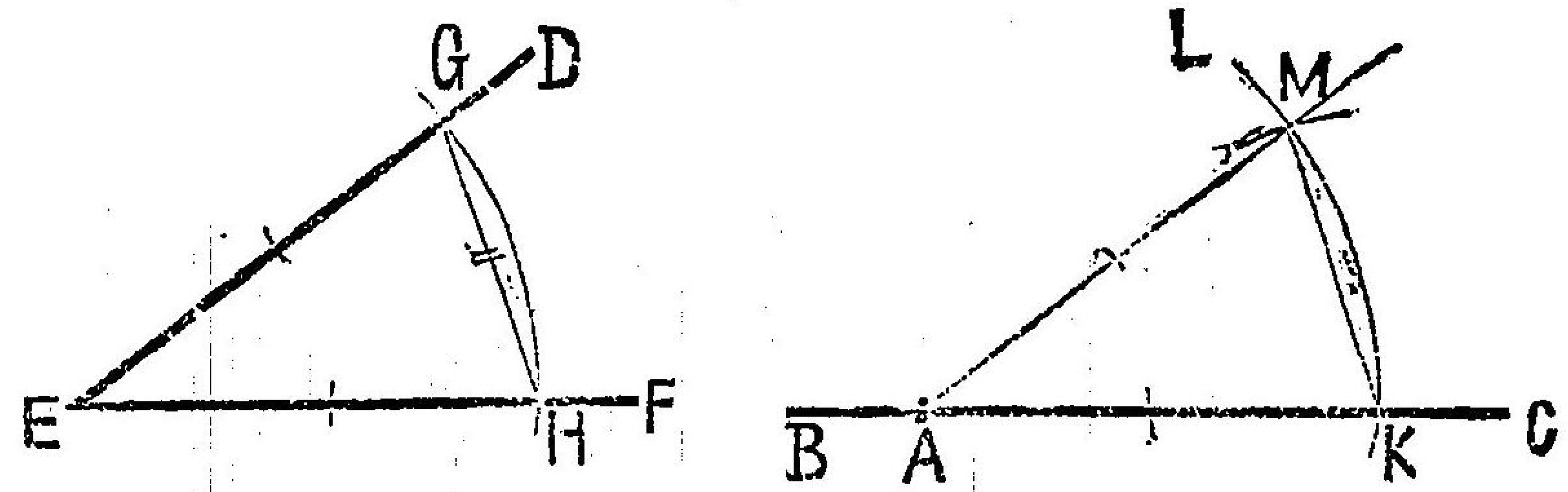
∴ ∠DAF=∠EAF.

故ニAFハ∠BACノ等分線ナリ。

問　題　四

174. 壹定直線上ノ壹定点ヲ過ギテ壹直線ヲ引キ此直線ト其定直線トノ交角ヲシテ所設ノ定角ニ等シカラシムルヿヲ求ム

定直線ヲBCトシ,其上ノ定点ヲAトシ,所設ノ定角ヲDEFトス,



今Aヲ過ギテ直線ヲ引キ,此直線トBCトニテ成ス角ヲシテ∠DEFニ等シカラシムルヿヲ求ム。

(作圖) Eヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ弧ヲ畫キ,此弧ガED, EFニ交ル点ヲG, Hトシ,GHヲ結ブ,

是ニ於テAヲ中心トシEHヲ半徑トシテ弧LKヲ畫キ此弧トBCトノ交点ヲKトシ,Kヲ中心トシGHヲ半徑トシテ弧ヲ畫

キ弧LKトノ交点ヲMトシMAヲ結ブ

然ル#ハMAハ所求ノ直線ナリ。

(証) MKヲ結ブ

兩三角形AMK, GEHニ於テ

AM=EG　(作法)

AK=EH　(〃)

KM=GH　(〃)　∴ △AMK≡△GEH

∴ ∠MAK=∠DEF

故ニAMハ所求ノ直線ナリ。

問　題　五

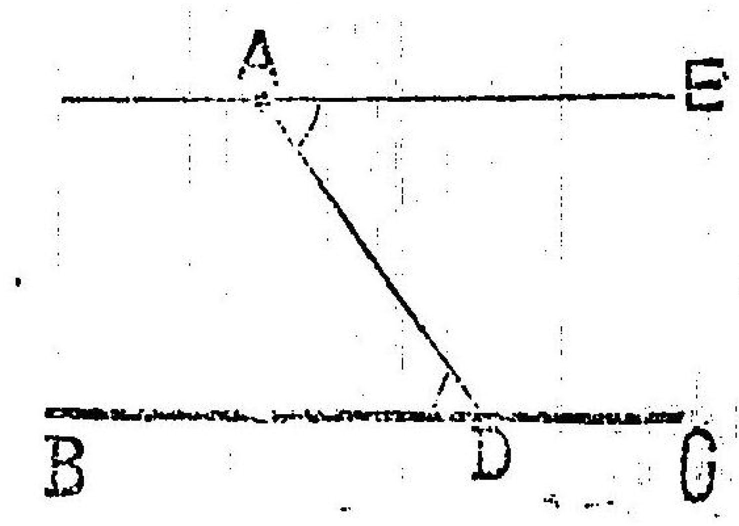
175. 壹定点ヲ通過シテ定直線ニ平行スベキ直線ヲ引クヿヲ求ム。

Aヲ定点トシ,BCヲ定直線トス

Aヲ過ギテBCニ平行ナル直線ヲ引クヿヲ求ム。

(作圖) AヨリBCニ交ルベキ任意ノ直線ヲ引キBCトノ交点ヲDトス,

是ニ於テA点ヨリ直線AEヲ引キEAD角ヲシテADB角ニ等シカラシム　(174. 問題)



然ル#ハAEハ所求ノ直線ナリ。

(証) ∠EAD=∠ADB　(作法)

∴ AE//BC　(83. 定理)

故ニAEハ所求ノ直線ナリ

問題七

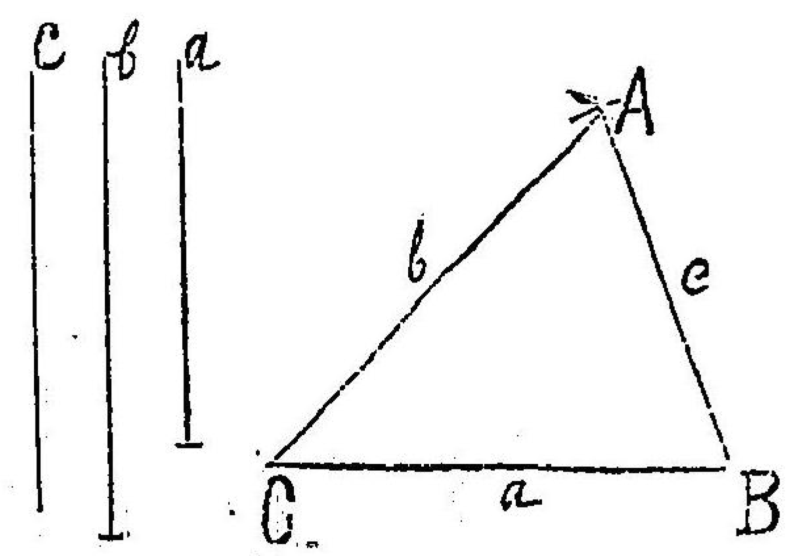
176. 三邊ヲ知リテ三角形ヲ畫クコトヲ求ム.

a, b, c ヲ已知ノ三邊トス

而シテ a, b, c ヲ三邊トスル所ノ三角形ヲ作ルコトヲ求ム.

(作圖) 直線CBヲ引キ其長ヲ a ニ等シカラシム

是ニ於テCヲ中心トシ b ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ, 又Bヲ中心トシ c ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ此二弧ノ交点ヲAトシ, AC, ABヲ結ブ



然ルトキハ三角形ABCハ所求ノモノナリ.

(証) 作法ニヨリ BC$=a$, AC$=b$, AB$=c$,

故ニ三角形ABCハ所求ノモノナリ

177. **注意.** a, b, c ノ中ノ孰レノ壹個モ, 殘ノ二個ノ和ヨリ小ナルコトヲ要ス　(64. 定理)

然ラザルトキハ不能ナリ.

問題八

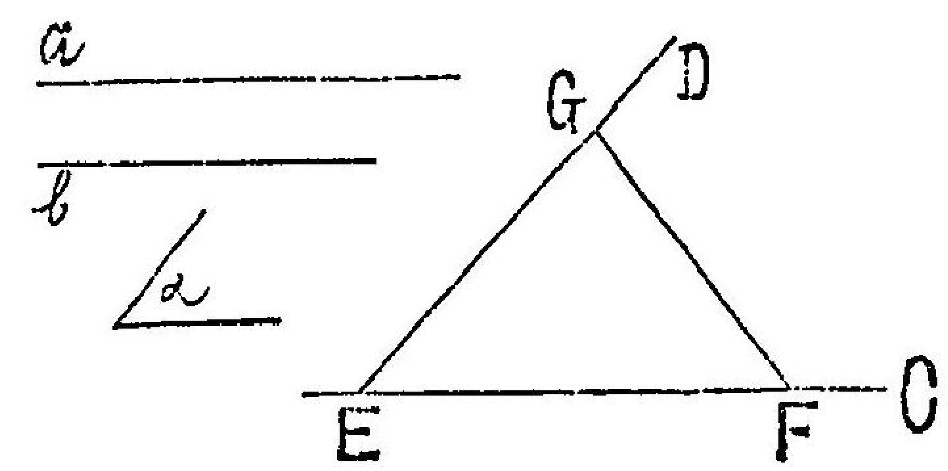
178. 二邊ト其夾角トヲ知リテ三角形ヲ畫クコトヲ求ム

已知二邊ヲ a, b トシ其夾角ヲ α トス

而シテ a, b ヲ二邊トシ其夾角ヲシテ α ナラシムベキ三角形ヲ作ルコトヲ刱ム.

(作圖) 任意ノ直線ヲ引キ, 其上ニ壹点Eヲ取リEヨリ直

線ヲ引キ∠DECヲシテ α ニ等シカラシメED上ニ a ト等シギ長サヲEヨリ取リ(兩脚器ニテ)之ヲEGトシ又EC上ニ於テ b ト等シキ長サヲEヨリ取リ之ヲEFトシGFヲ結ブ.



然ルトキハ△GEFハ所求ノモノナリ.

(証) 作法ニヨリ ∠DEC$=\alpha$, EG$=a$, EF$=b$

故ニ△EFGハ所求ノモノナリ

問題八

179. 二角壹邊ヲ知リテ三角形ヲ畫ケ.

本題ハ次ノ如キ貳個ノ場合アリ,

(第壹) 貳角ト其夾邊トヲ知ル場合.

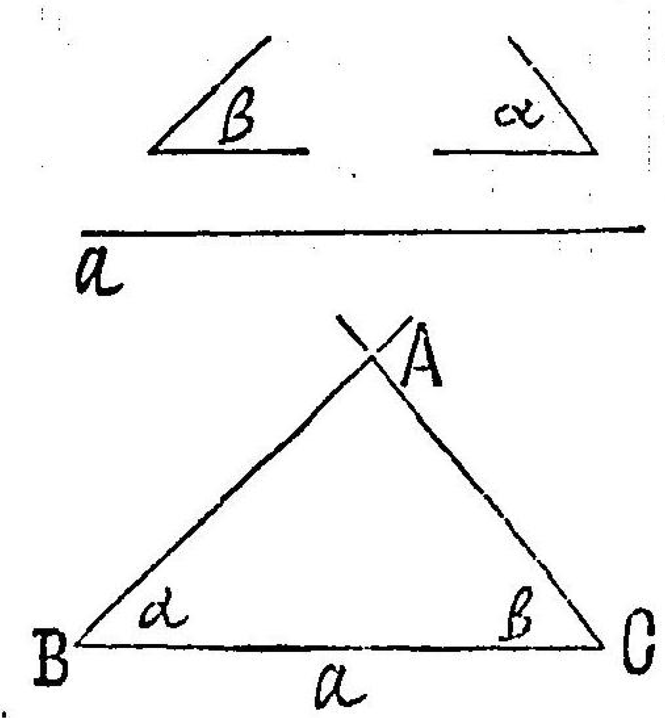
(第貳) 貳角ト其貳角ノ壹個ニ對スル壹邊トヲ知ル場合.

(第壹) 已知貳角ヲ α, β トシ其夾邊ヲ a トス.

今三角形ヲ畫キ α, β ヲ其二角トシ其夾邊ヲ a ニ等シカラシメントス.

(作圖) α ト等シキ壹角ABCヲ設キ, 其壹邊ノ上ニ a ト等長ニBCヲ取リ, 其壹端Cヨリ直線CAヲ引キ∠ACBヲ β ニ等シカラシム,

而シテBAトCAトノ交点ヲAトス,



然ルトキハ△ABCハ所求ノ三角

形ナリ。

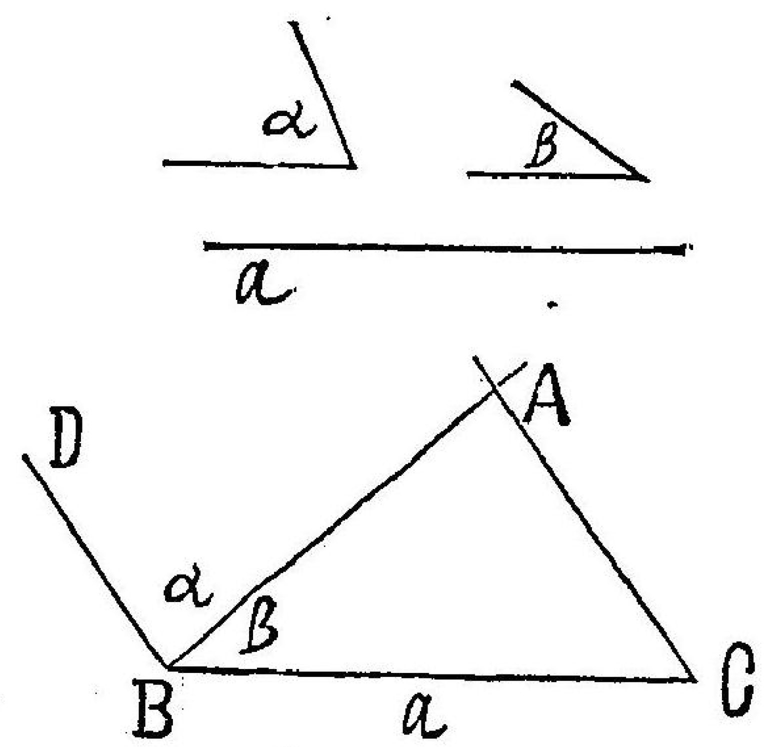
(證) 作法ニヨリ $\angle ABC=\alpha$, $\angle ACB=\beta$, $BC=a$ ナリ,

故ニ三角形 ABC ハ所求ノモノナリ。

(第貳) α, β ヲ已知ノ角トシ,

已知ノ壹邊ヲ a トス,

今三角形 ABC ヲ畫キ $\angle A=\alpha$ $\angle B$ β, $BC=a$ ナラシメンス,



(作圖) β ト等シキ角 ABC ヲ畫シ, (174. 問題)

其壹邊 BC 上ニ於テ a ト等シキ長サヲ B ヨリ取リ之レヲ BC トシ, 又 B ヨリ直線 BD ヲ引キ $\angle ABD$ ヲ α ニ等シカラシム。

(174. 問題)

是ニ於テ C ヨリ BD ニ平行線 CA ヲ引キ CA ト BA トノ交点ヲ A トス,

然ルキハ $\triangle ABC$ ハ所求ノモノナリ。

(證) $CA // DB$ (作圖) $\therefore$ $\angle CAB=\angle DBA=\alpha$

又作圖ニヨリ $\angle ABC=\beta$, 及ビ $BC=a$ ナリ,

故ニ三角形 ABC ハ所求ノモノナリ。

(注意) $\alpha+\beta$ ガ貳直角ヨリ大ナルキハ本問題ハ不成ナリ。

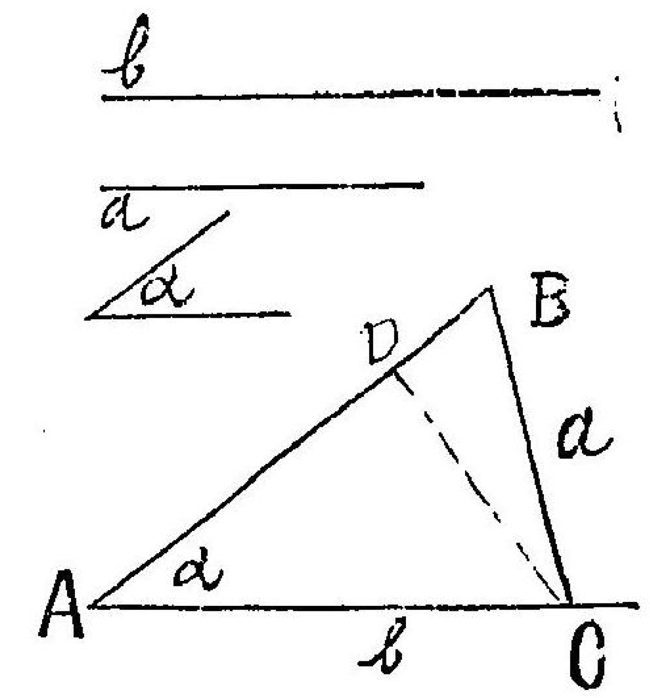
(86. 定理第二)

問題九

180. 貳邊及ビ其壹邊ノ對角ヲ知リテ三角形ヲ畫ケ

已知角ヲ α トシ, 已知二邊ヲ a, b トス。

三角形ヲ作リ其二邊ヲ a, b トシ其二邊中ノ壹個ニ對スル角ヲ α ナラシメントス。



(作圖) α ト等シキ角 BAC ヲ作リ, (174. 問題) 其壹邊上ニ於テ b ト等シキ長サヲ A ヨリ取リ之レヲ AC トシ, 其壹端 C ヲ中心トシ a ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ, 此弧ト AB トノ交点ヲ B トシ BC ヲ結ブ

然ルキハ $\triangle ABC$ ハ所求ノモノナリ

(證) 作法ニヨリ $BC=a$, $AC=b$, $\angle A=\alpha$ ナリ,

故ニ $\triangle ABC$ ハ所求ノ三角形ナリ。

(注意) C ヨリ AB ニ垂線 CD ヲ引ク,

$a<CD$ ナルキハ C ヲ中心トシ a ヲ半徑トセル圓周ハ AB ニ交ルコナシ, 故ニ此キハ本問題ハ不成ナリ。

$a=CD$ ナルキハ C ヲ中心トシ, a ヲ半徑トセル圓周ハ D ニ於テ AB ニ切ス 故ニ此キハ壹個ノ答解アルノミ。

$a>CD$, 及 $a<b$ ナルキハ C ヲ中心トシ a ヲ半徑トセル圓周ハ貳点 B, B′ ニ於テ AB ニ交リ而シテ B 及ビ B′ ハ共ニ A ノ同側ニアルベシ,

此キハ貳個ノ三角形 ABC, AB′C ハ共ニ所求ノモノナリ。

$a>b$ ナルキハ C ヲ中心トシ a ヲ半徑トセル圓周ハ AB ニ貳点 B, B′ ニ於テ交リ, 而シテ B 及ビ B′ ハ A ノ異側ニ在ルベシ。

此ノキハ $\triangle ABC$ ハ所求ノモノニシテ $\triangle AB'C$ ハ所求ノモノニアラズ。

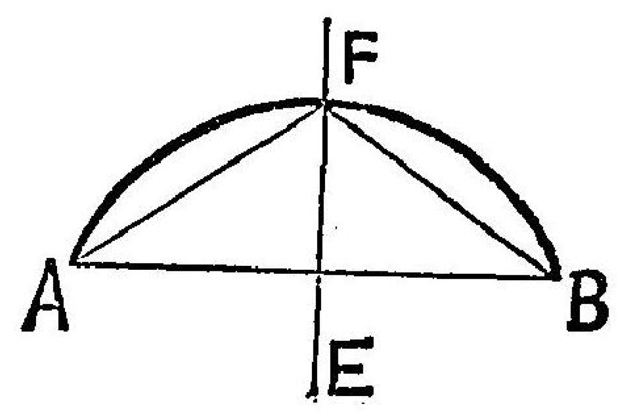
問題拾

181. 定弧ヲ貳等分スルヿヲ求ム。

定弧ヲAFBトシ之ヲ貳等分スルヿヲ求ム。

(作圖) ABヲ結ビ,ABヲ直角ニ貳等分スル直線ヲ引キ之レヲFEトス。 (171. 注意).

EFト定弧AFBトノ交点ヲFトス。



然ル𪜈ハFハ定弧AFBヲ貳等分スル点ナリ。

(證) FEハABノ中央ニ於テ之ニ直立ス。

故ニFEハ貳点A, Bヨリ等距ナル点ノ軌跡ナリ, (101. 定理)

∴ 弦AF＝弦FB,

∴ 弧AF＝弧FB, (122. 定理)

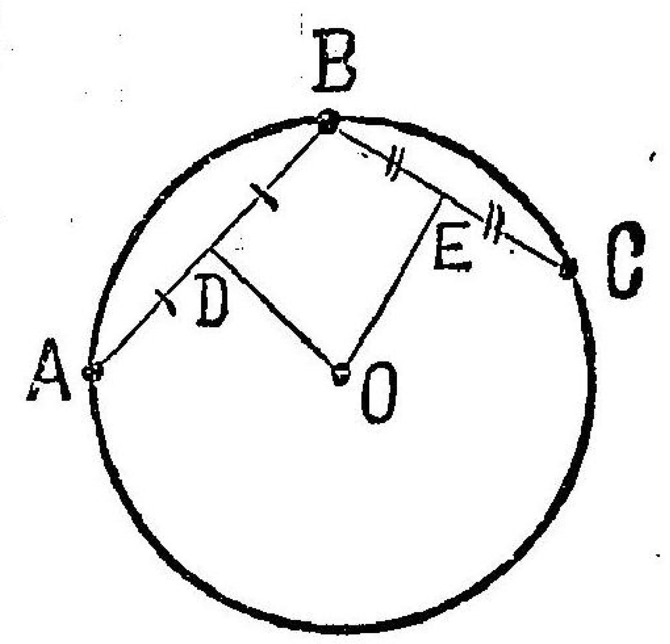
故ニFハ弧AFBノ中央点ナリ。

問題拾壹

182. 定圓若クハ定弧ノ中心ヲ求ム。

ABCヲ定圓若クハ定弧トシ其中心ヲ求ム。

(作圖) 定圓周(若クハ定弧)ABC上ニ任意ニ三点ヲ取リ之ヲA, B, CトシAB, BCヲ結ビAB, 及ビBCヲ直角ニ貳等分スル直線ヲ作リ之レヲDO, EOトス。



然ル𪜈ハDO, EOノ交点Oハ所求ノ中心ナリ。

(證) DOハ弦ABヲ直角ニ貳等分ス,

故ニDOハ定圓周(若クハ定弧)ABCノ中心ヲ過グ。 (126. 推論)

言換ヘレバ,定圓周(若クハ定弧)ABCノ中心ハDO上ニアリ,

同理ニヨリ,定圓周(若クハ定弧)ABCノ中心ハEO上ニアリ,

故ニ定圓周(若クハ定弧)ABCノ中心ハOナリ。

問題拾貳

183. 壹直線上ニアラザル三点ヲ過グル圓ヲ描クヿヲ求ム。

(作圖) 113. 定理ヲ見ヨ。

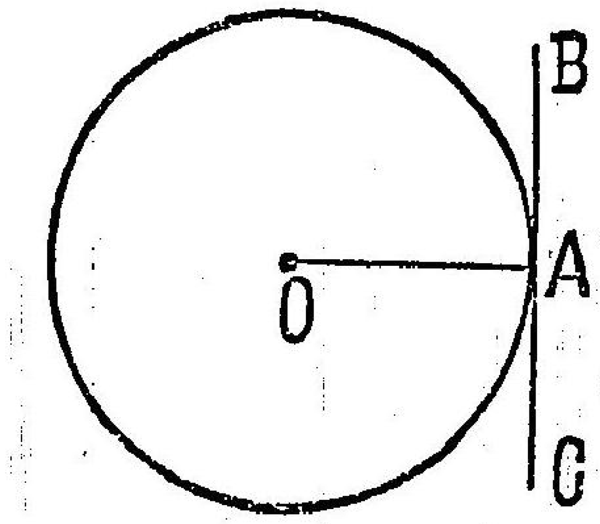
問題拾三

184. 壹定点ヨリ定圓周ニ切線ヲ作ルヿヲ求ム。

定点ヲAトシ,Aヨリ定圓周ニ切線ヲ作ルヿヲ求ム。

(作圖) Aガ定圓外ニアル𪜈ハ146定理ト同法ニヨリテ切線ヲ作ルヿヲ得。

Aガ定圓周上ニアル𪜈ハ中心OトAトヲ結ビAニ於テOAニ直立スル直線ヲ作リ之ヲBCトス (172 問題)



然ル𪜈ハBCハ所求ノ切線ナリ。

(證) BC⊥OA, 故ニBCハAニ於テ定圓周ニ切ス。 (143. 定理)

故ニBCハAニ於ケル切線ニシテ即チ所求ノモノナリ。

問題拾四

185. 貳定圓ニ共通切線ヲ作レ。

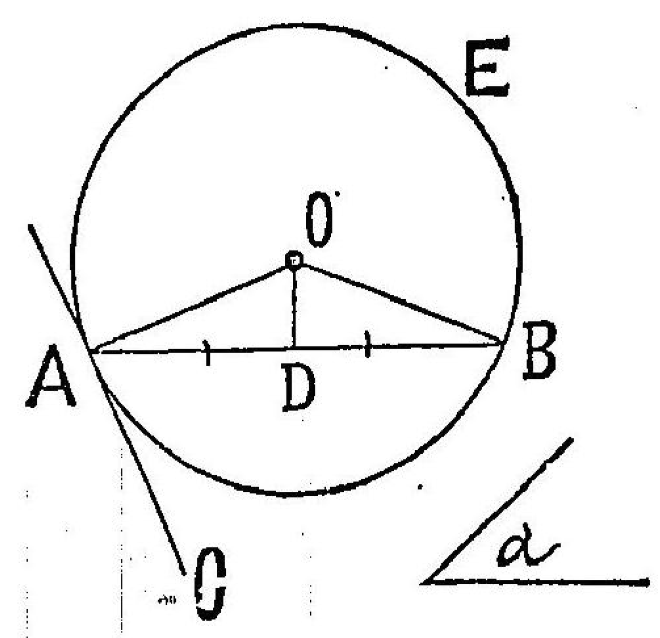
(作圖) 159. 定理ニ同ジ。

問題拾五

186. 定角ヲ有テル弓形ヲ定直線上ニ作ルコヲ求ム。

AB ヲ定直線トシ α ヲ定角トス。

α ヲ有ツ弓形ヲ AB 上ニ作ルコヲ求ム。



(作圖) A ヲ過ギテ直線 AC ヲ引キ $\angle CAB=\alpha$ ナラシム (174. 問題)

AB ヲ直角ニ二等分スル直線ヲ作リ,之ヲ OD トス (171. 注意)

又 A ニ於テ AC ニ直立スル直線ヲ作リ之レヲ OA トス (172. 問題)

而シテ OD ト OA トノ交点ヲ O トシ, O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トセル圓周ガ AB トナス弓形 (AC ニ對シテ AB ノ異側ニアル) AEB ハ所求ノモノナリ。

(証) OD ハ AB ノ中央ニ於テ之レニ直立ス,

$\therefore$ OA=OB (102. 定理)

故ニ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トセル圓周ハ B ヲ過グ。

又 $AC \perp OA$ (作圖)

故ニ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トセル圓周ハ AC ニ切ス,

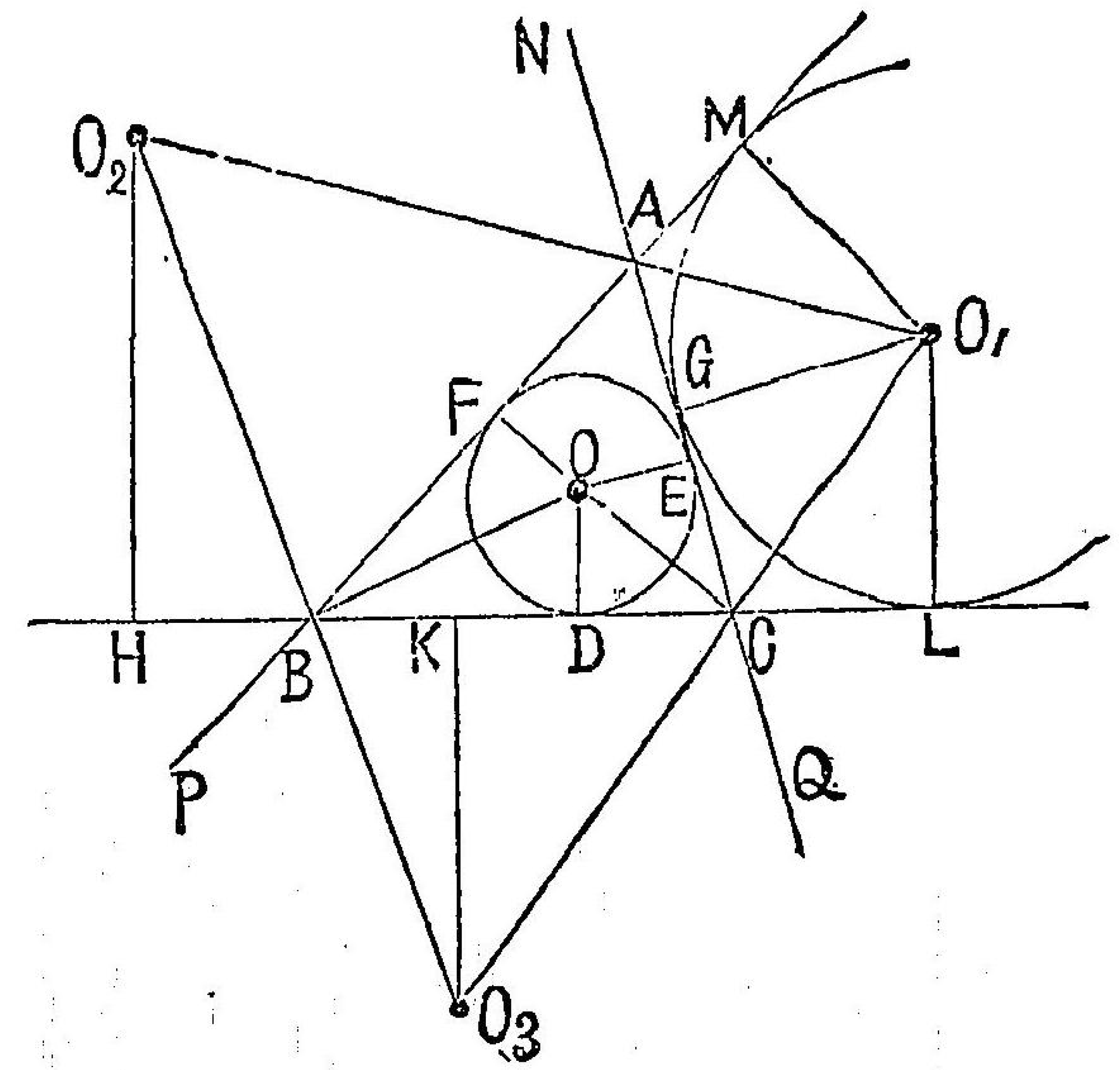
故ニ弓形 AEB 内ノ角ハ $\angle CAB$ 即チ α ニ等シ, (148. 定理)

故ニ弓形 AEB ハ所求ノモノナリ。

問題拾六

187. 壹点ニ於テ相交ラザル不平行三直線ニ切スル圓ヲ作ルコヲ求ム。

壹点ニ於テ相交ラザル不平行三直線ヲ AB, BC, CA トシ此三直線ニ切スル所ノ圓ヲ畫クコヲ求ム。



(作圖) $\angle ABC$, $\angle ACB$ ノ等分線ヲ作リ, (173. 問題)

此両等分線ノ交点ヲ O トス。

又両角 ACL, CAM ノ等分線ノ交点ヲ O_1,両角 BAN, ABH ノ等分線ノ交点ヲ O_2, 両角 CBP, BCQ ノ等分線ノ交点ヲ O_3 トス。

O, O_1, O_2, O_3 ヨリ BC ニ垂線 OD, O_1L, O_2H, O_3K ヲ引ク,

然ルトキハ O ヲ中心トシ OD ヲ半徑トセル圓周, O_1 ヲ中心トシ O_1L ヲ半徑トセル圓周, O_2 ヲ中心トシ O_2H ヲ半徑トセル圓周, 及ビ O_3 ヲ中心トシ O_3K ヲ半徑トセル圓周ハ所求ノモノナリ。

(証) $OE \perp AC$, $OF \perp AB$ トス。

OC ハ $\angle ACB$ ヲ, OB ハ $\angle ABC$ ヲ等分ス

$\therefore$ OE=OD=OF. (103. 定理)

故ニ O ヲ中心トシ OD ヲ半徑トセル圓周ハ E, F ヲ過グ,

而シテ $FO\perp OD$, $AC\perp OE$, $AB\perp OF$ ナリ，
故ニ AB, BC, CA ハ此圓ニ切ス。 (143. 定理)

又 $O_1G\perp AC$, $O_1M\perp AB$ トス。

AO_1 ハ $\angle MAC$ ヲ, O_1C ハ $\angle ACL$ ヲ等分ス，

$$\therefore\quad O_1M=O_1G=O_1L$$ (103. 定理)

故ニ O_1 ヲ中心トシ O_1L ヲ半徑トセル圓周ハ L, G, M ヲ過グ，
而シテ $BC\perp O_1L$, $O_1G\perp AC$, $O_1M\perp AB$ ナルヲ以テ其圓周ハ BC, AC, AB ニ切ス。 (143. 定理)

同樣ニ AB, BC, CA ハ O_2 ヲ中心トシ, O_2H ヲ半徑トセル圓周, 及ビ O_3 ヲ中心トシ O_3K ヲ半徑トセル圓周ニ切ス，

故ニ O, O_1, O_2, O_3 ヲ中心トセル四圓周ハ所求ノ圓ナリ。

(注意壹) 前圖ニ於テ O_1, O_2, O_3 ヲ中心トセル三個ノ圓ヲ三角形 ABC ノ傍切圓ト稱シ, O_1, O_2, O_3 ヲ三角形 ABC ノ傍心ト稱ス
又 O ヲ三角形 ABC ノ内心トイフ。(第壹編第二節例題 C. 7 注意)

(注意貳) 壹点ニ於テ相交ラザル三直線ニ切スル圓ハ唯四個アルノミ。

問題拾七

188. 正多角形ニ内切圓及ビ外切圓ヲ畫クコヲ求ム。

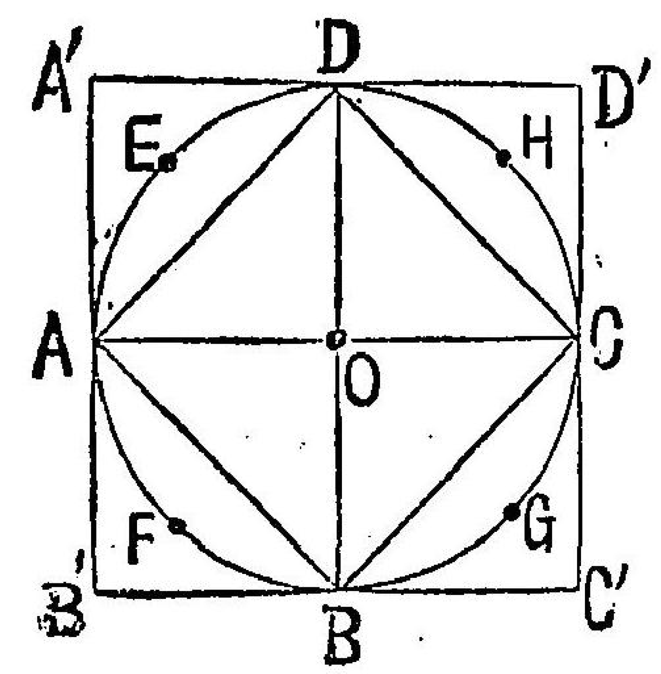
(作圖) 156. 推論ヲ見ヨ。
166

問題拾八

189. 定圓ニ内切及ビ外切スル正方形ヲ畫クコヲ求ム。

ABCD ヲ定圓トシ之レニ内切或ハ外切スル正方形ヲ畫クコヲ求ム。

(作圖) 直交スル直徑ヲ引キ，之レヲ AOC, BOD トシ, AB, BC, CD, DA ヲ結ブ



然ルトキハ ABCD ハ内接正方形ナリ。

又 A, B, C, D ニ於テ切線ヲ引クトキ，此切線ニテ成ル四角形ハ外接正方形ナリ。

(證) 圓ノ中心ヲ O トス，

然ルトキハ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOA=$ 直角,

∴ 弧 AB= 弧 BC= 弧 CD= 弧 AD (116. 定理)

故ニ ABCD ハ内接正方形ニシテ, A'B'C'D' ハ外接正方形ナリ。 (164. 定理)

(注意) 弧 AB, BC, CD, DA ヲ等分シ，其分点ヲ F, G, H, E トシ AF, FB, BG 等ヲ連結シテ成ル八角形ハ内接正八角形ナリ。 (164. 定理)

又 A, F, B, G 等ニ於ケル切線ニテ成ル八角形ハ外切正八角形ナリ。 (164. 定理)

又弧 EA, AF, FB 等ヲ等分シ同法ヲ施セバ内接及ビ外接正十六角形ヲ得，

上ノ如クニシテ内接及ビ外接正三十二，六十四角形等ヲ得ルナリ。

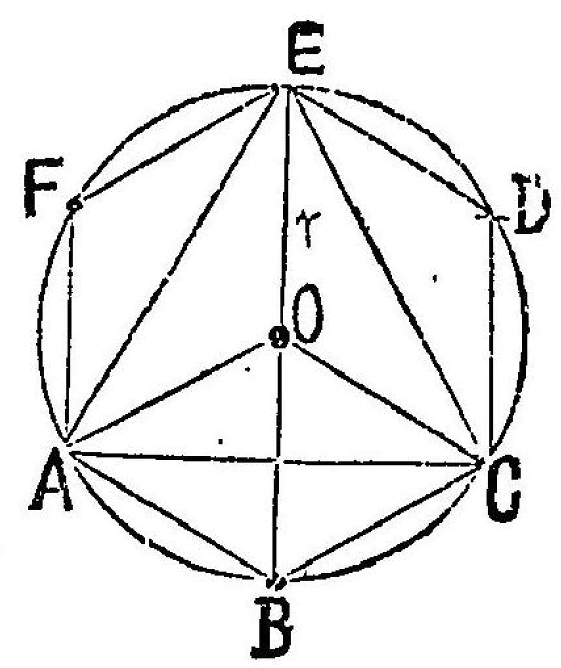
問題拾九

190. 定圓ニ内接及ビ外切スル正三角形及ビ正六角形ヲ畫クコヲ求ム。

ABC ヲ定圓トシ之レニ内接及ビ外接スル正三角形及ビ正六角形

ヲ畫クコヲ求ム.

(作圖) 定圓ノ中心ヲOトシ定圓ノ半徑ヲRトス。



定圓周上ニ任意ノ一点Bヲ取リBヲ中心トシRヲ半徑トシ弧ヲ畫キ定圓周トノ交点ヲA, CトシCヲ中心トシRヲ半徑トシ弧ヲ畫キ定圓周トノ交点ヲDトシ又Dヲ中心トシRヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ定圓周トノ交点ヲEトシ弧AFEノ中央点ヲFトス。

然ルトキハEA, AC, CEヲ連結シテ成ル三角形ハ内接正三角形ニシテA, C, Eニ於ケル切線ニテ成ル三角形ハ外接正三角形ナリ.

又AB, BC, CD, DE, EF, FAヲ連結シテ成ル六角形ハ内接正六角形ニシテ, A, B, C, D, E, Fニ於ケル切線ニテ成ル六角形ハ外接正六角形ナリ.

(証) OA, OB, OC, OEヲ結ブ.

弦AB, BCハ共ニ定圓ノ半徑ニ等シ,

故ニ△OAB △OBCハ共ニ正三角形ナリ,

∴ $\angle AOB=\angle BOC=\frac{2}{3}$直角 (86. 定理)

∴ $\angle AOC=\frac{4}{3}$直角

同樣ニ $\angle EOC=\frac{4}{3}$直角

∴ $\angle EOA=4$直角$-\frac{4}{3}\times$直角$\times 2=\frac{4}{3}$直角

∴ $\angle AOC=\angle EOC=\angle EOA$

∴ 弧ABC＝弧CDE＝弧EFA

故ニ△AECハ内接正三角形ニシテA, C, Eニ於ケル切線ニテ成ル三角形ハ外接正三角形ナリ, (64 定理)

又作圖ニヨリ, A, B, C, D, E, Fハ圓周ヲ六等分スル点ナリ.

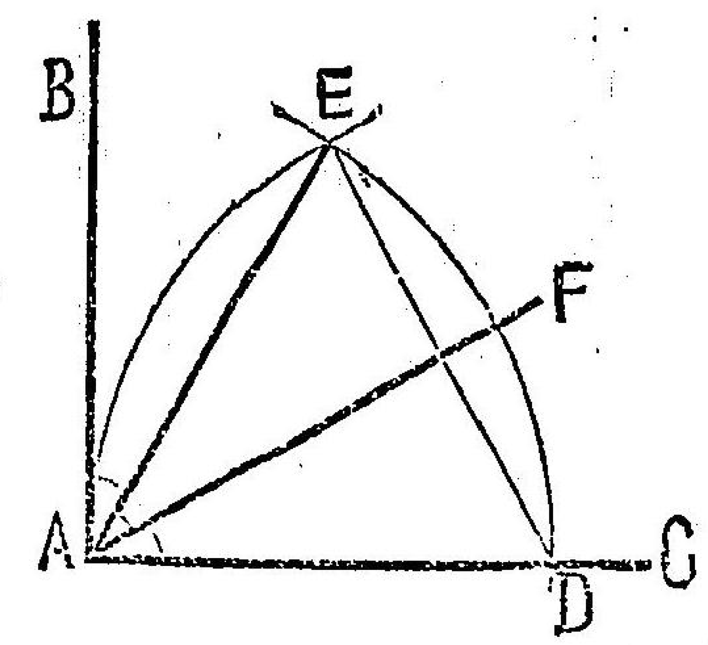
故ニABCDEFハ内接正六角形ニシテ, A, B, C, D, E, F, ニ於ケル切線ニテ成ル多角形ハ外接正六角形ナリ.

(注意) 弧AB, BC, CD等ヲ弐等分, 四等分スルコニヨリテ全圓周ヲ十二, 二十四等ニ等分スルコヲ得従ツテ外接及ビ内接正十二角形弐十四角形等ヲ畫クコヲ得.

例題

1. 一直角ヲ三等分スルコヲ求ム.

BACヲ一直角トシ, 之レヲ三等分スルコヲ求ム.



(作圖) Aヲ中心トシ任意ノ長サヲ半徑トシ弧ヲ畫キ此弧トACトノ交点ヲDトシ, Dヲ中心トシDAヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ, 此ノ弧ト前ノ弧トノ交点ヲEトシ, EAヲ結ビEAC角ヲ等分シ之レヲAFトス, (73 問題)

然ルトキハAE, AFハBAC角ヲ三等分ス.

(証) EDヲ結ブトキハ EA＝AD＝ED (作圖)

故ニ三角形EADハ等邊三角形ナリ,

∴ $\angle EAD=\frac{2}{3}$直角 (85. 定理)

∴ $\angle EAB=$直角$-\angle EAD$

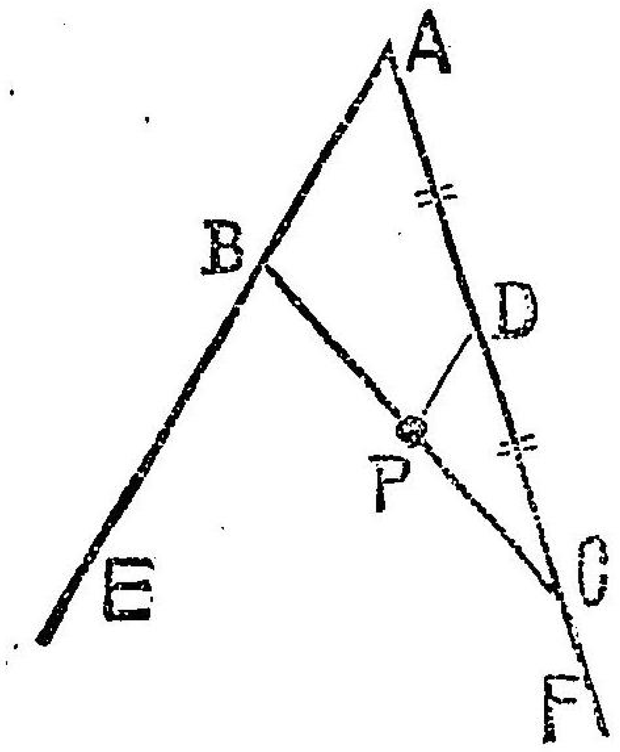
$=$直角$-\frac{2}{3}$直角,

$=\frac{1}{3}$直角

又 $\angle EAF=\angle FAD=\frac{1}{3}$直角 (作圖)

故ニEA, FAハ∠BACヲ三等分ス.

2. 定角EAFノ內方ノ壹定点Pヲ過ギ且ツ其定角ノ二邊ニB, Cニ於テ交ルベキ直線ヲ引キBP=PCナラシムルヿヲ求ム.



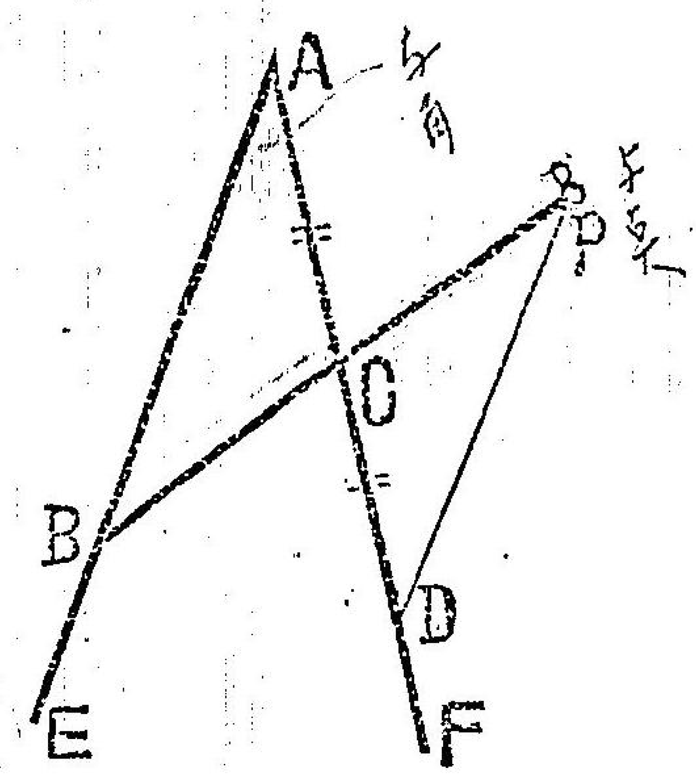
(作圖) PヨリAEニ平行ナル直線PDヲ引キAFトノ交点ヲDトシAF上ニC点ヲ取リCDヲADト等長ナラシメCPヲ引キAEトノ交点ヲBトス,

CPBハ所求ノ直線ナリ.

(証) △ABCニ於テAD=DC

DP//AB　∴　CP=BP.　(98. 定理)

3. 定角ノ外方ノ定点ヲ過ギ且ツ其二邊ニB, Cニ交ルベキ直線ヲ引キPC=BCナラシムルヿヲ求ム.



(作圖) PヨリAEニ平行ナル直線ヲ引キAFトノ交点ヲDトス,

ADノ中央点ヲ求メ之ヲCトシPCヲ引キPCトAEトノ交点ヲBトス.

然ル𪜈ハPCBハ所求ノ直線ナリ.

(証) △PCD, △ABCニ於テ

CD=AC

∠P=∠ABC　(錯角)

∠PDC=∠A　∴　△PCD≡△ACB

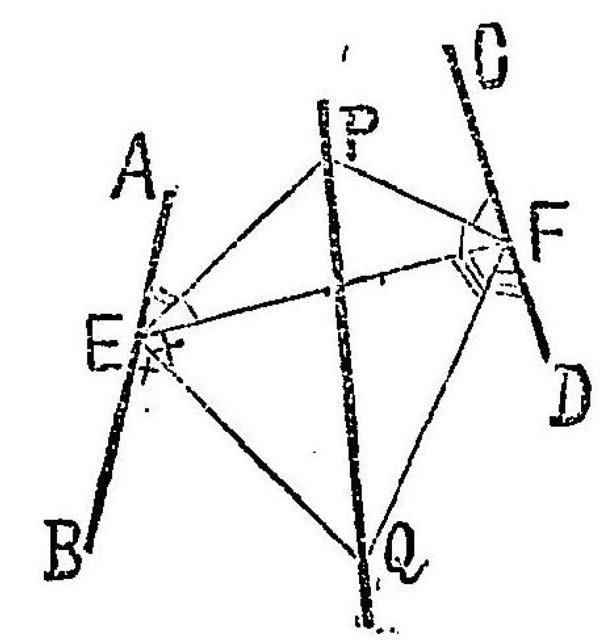
∴　PC=BC

4. 相交ルマデ引張スルヿヲ得ザル不平行貳直線ヲ與ヘテ其貳直線ノ交角ヲ等分スベキ直線ヲ引クヿヲ求ム.

相交ルマデ引張スルヿヲ得ザル貳直線ヲAB, CDトシ此貳直線ノ交角ノ等分線ヲ引クヿヲ求ム.

(作圖) AB, 及ビCDニ交ハベキ任意ノ壹直線ヲ引キ, 其交点ヲ

E, Fトシ, ∠AEF, 及ビ∠CFE, ノ等分線ヲ引キ, 其交点ヲPトス.



又∠BEF, 及ビ∠EFDノ等分線ヲ引キ其交点ヲQトシ, PQヲ結ブ,

然ル𪜈ハ直線PQハ所求ノ直線ナリ.

(証) AB, CDノ交角ノ等分線ハPヲ過ク, (第壹編第二節例題6.)

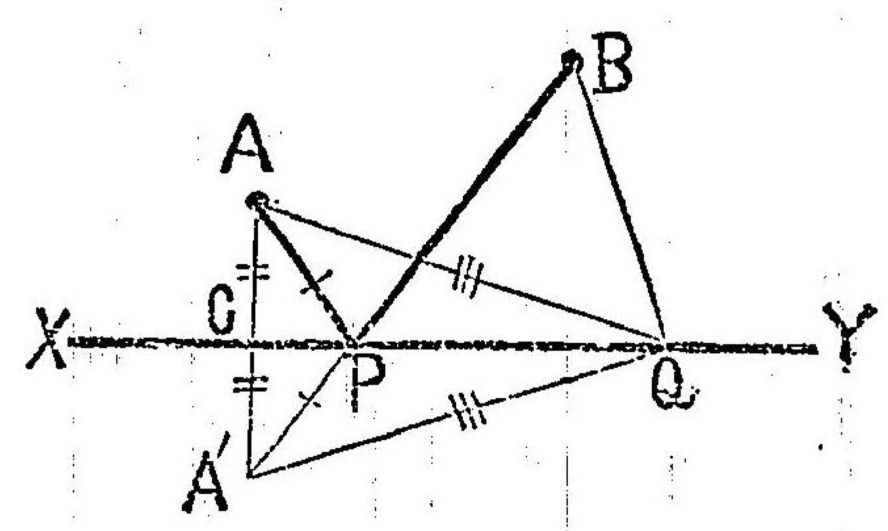
即チPハAB, CDノ交角ノ等分線上ノ点ナリ.

又AB, CDノ交角ノ等分線ハQヲ過ク (第壹編第二節例題7.)

即チQハAB, CDノ交角ノ等分線上ノ点ナリ.

故ニ直線PQハAB, CDノ交角ノ等分線ナリ.

5. XYハ定直線ニシテ, A, BハXYノ同側ニアル貳定点ナリ, 今XY上ニ壹点Pヲ求メPA+PBヲシテXY上ノ他ノ各点ヨリA及ビBニ到ル距離ノ和ヨリ小ナラシメントス, 其法如何.



(作圖) AヨリXYニ垂線ACヲ引キ, 之レヲA′マデ引張シCA′ヲCAト等長ナラシメA′Bヲ結ビXYトノ交点ヲPトス,

然ル𪜈ハPハ所求ノ点ナリ.

(証) APヲ結ブ.

XY上ニ於テPノ外ニ任意ノ壹点Qヲ取リAQ, BQ, A′Qヲ結ブ, 作法ニヨリXYハAA′ヲ直角ニ貳等分ス,

∴　AP=A′P　(101. 定理)

及　AQ=A′Q

而シテ$\triangle BQA'$ニ於テ　$A'B<BQ+A'Q$,　(64.定理)

$\therefore\quad A'P+PB<BQ+A'Q$,

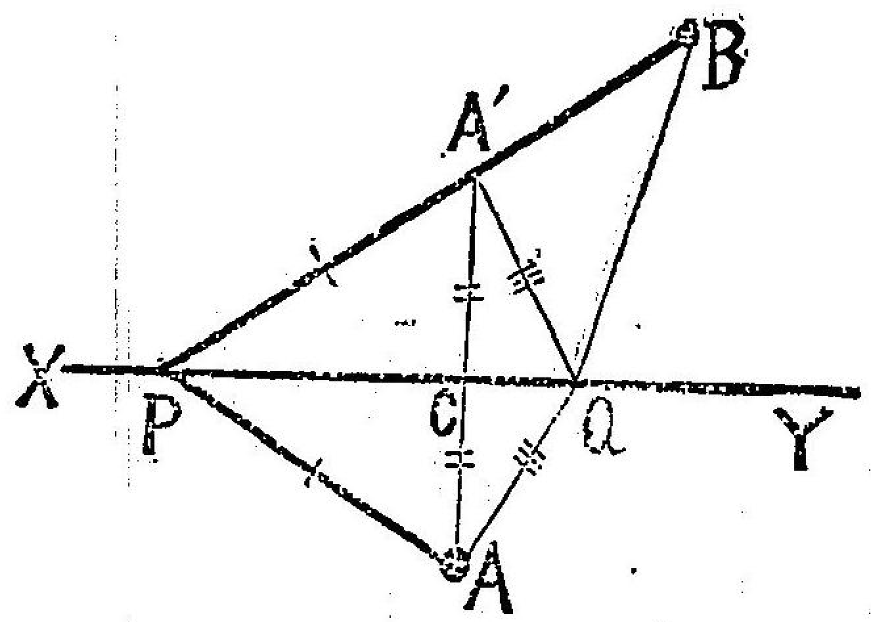
$\therefore\quad AP+PB<BQ+AQ$.

故ニPハ所求ノ直線ナリ.

(注意) A, BガXYノ異側ニアルトキハ直線ABトXYトノ交点ヲPトスレバ, PA+PBハXY上ノ他ノ各点ヨリA, Bニ到ル距離ノ和ヨリ小ナリ.

6. A, Bハ定直線XYノ異側ニ在ル弐定点ナリ, XY上ニ壹点Pヲ求メPA～PBヲシテXY上ノ他ノ各点ヨリA, Bニ到ル距離ノ差ヨリ大ナラシメントス其法ヲ求ム.

(作圖) AヨリXYニ垂線ACヲ引キ,之レヲA′マデ引張シCA′ヲACト等長ナラシメBA′ヲ結ビBA′トXYトノ交点ヲPトス,



然ルトキハPハ所求ノ点ナリ.

(証) XY上ニ於テPノ外ニ任意ノ点Qヲ取リQA, AQ, BQヲ結ブ.

XYハAA′ヲ直角ニ等分ス,

$AP=A'P$　及　$AQ=A'Q$　(101.定理)

而シテ三角形A′QBニ於テ

$BQ\sim A'Q<A'B$　(65.推論)

$\therefore\quad BQ\sim AQ<PB\sim A'P$

$\therefore\quad BQ\sim AQ<PB\sim AP$.

故ニPハ所求ノ点ナリ.

(注意) A′B//XYナルトキハ本題ハ不能ナリ.

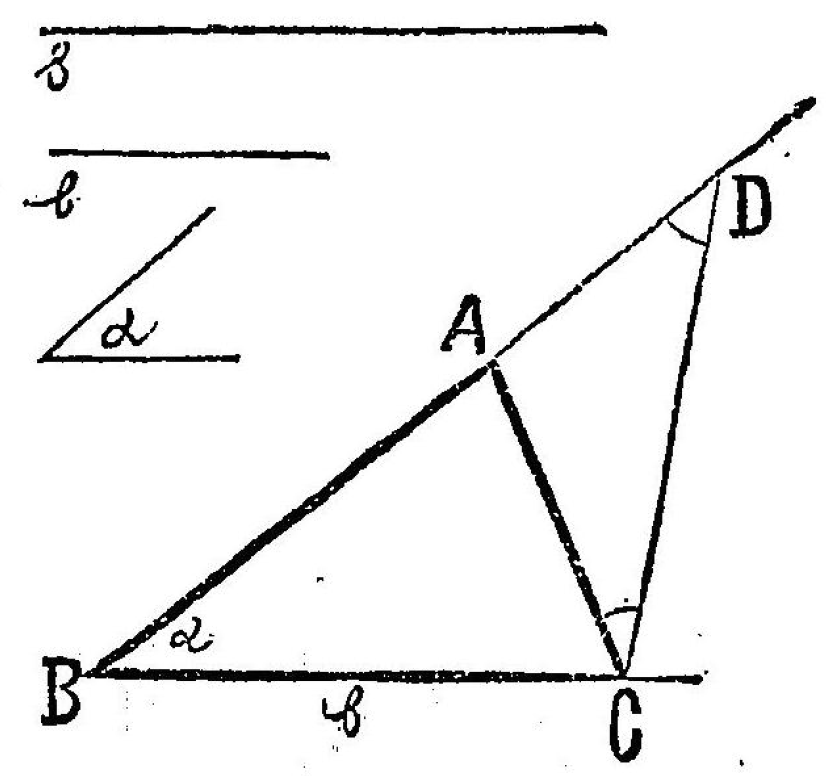
又A, BガXYノ同側ニアルトキハABトXYトノ交点ヲPトスレバPA～PBハXY上ノ他ノ各点ヨリA, Bニ到ル距離ノ差ヨリ大ナリ.

7. 底,底ノ壹個併ビニ他ノ弐邊ノ和若クハ差ヲ知リテ三角形ヲ畫クコトヲ求ム.

(第壹) 二邊ノ和ヲ知ル場合.

底邊ヲb, 二邊ノ和ヲs, 底角ノ壹個ヲαトス.

(作圖) αト等シキ壹角DBCヲ畫キ其各邊上ニ於テ点C Dヲ取リBCヲbト等長ニシ, BDヲsト等長ナラシメDCヲ結ブ, Cヨリ直線CAヲ引キ$\angle DCA$ヲシテ$\angle D$ト等シカラシメCAトDBトノ交点ヲAトス.



然ルトキハ三角形ABCハ所求ノモノナリ.

(証) $\angle ACD=\angle D$ (作圖)　$\therefore\quad AC=AD$　(62.定理)

$\therefore\quad AB+AC=AB+AD=BD=s$,

而シテ作圖ニヨリ$BC=b$, $\angle B=\alpha$ナリ,

故ニ三角形ABCハ所求ノモノナリ.

(注意) s b 或 $s<b$ナレバ本題ハ不能ナリ.

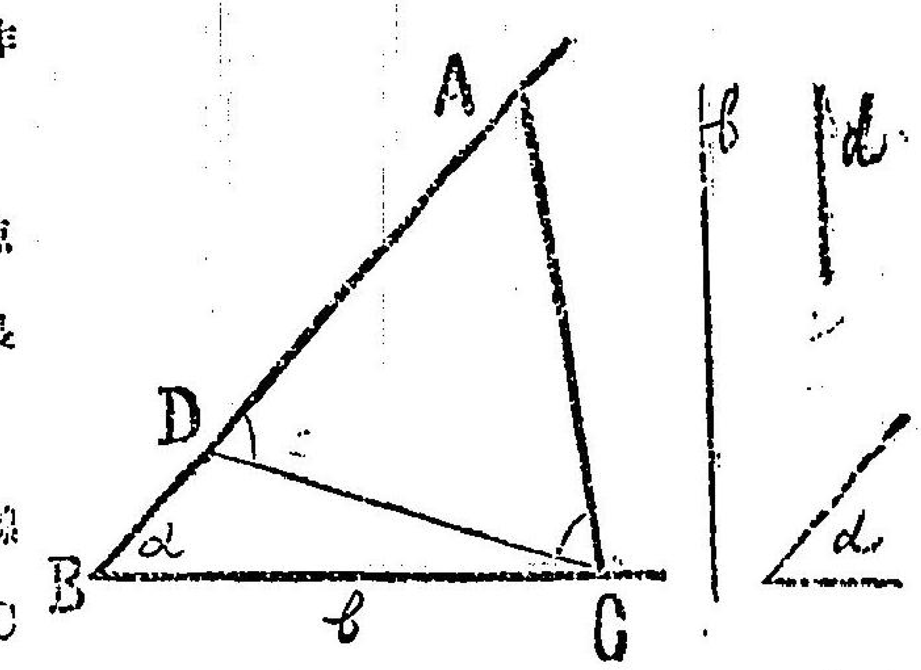
(第二) 二邊ノ差ヲ知ル場合.

底邊ヲb, 底角ヲα, 二邊ノ差ヲdトス.

(作圖) αト等シキ角ヲ作リ之レヲABCトス,

而シテ$\angle ABC$ノ邊上ニ点C, Dヲ取リBCヲbト等長ニシ, BDヲdト等長ニス,

DCヲ結ビ, Cヨリ直線CAヲ引キ$\angle ACD$ヲ$\angle ADC$ト等シカラシメ, CAトBAトノ交点ヲAトス,



然ル𪜈ハ△ABCハ所求ノモノナリ.

(証) $\angle ACD=\angle ADC$ (作圖) $\therefore\ AC=AD$

$$\therefore\ AB-AC=AB-AD$$
$$=DB$$
$$=d$$

而シテ作圖ニヨリ $\angle B=a$, $BC=b$ ナリ.

故ニ△ABCハ所求ノモノナリ.

(注意) $d=b$, $d>b$ ナレハ本題ハ不能ナリ.

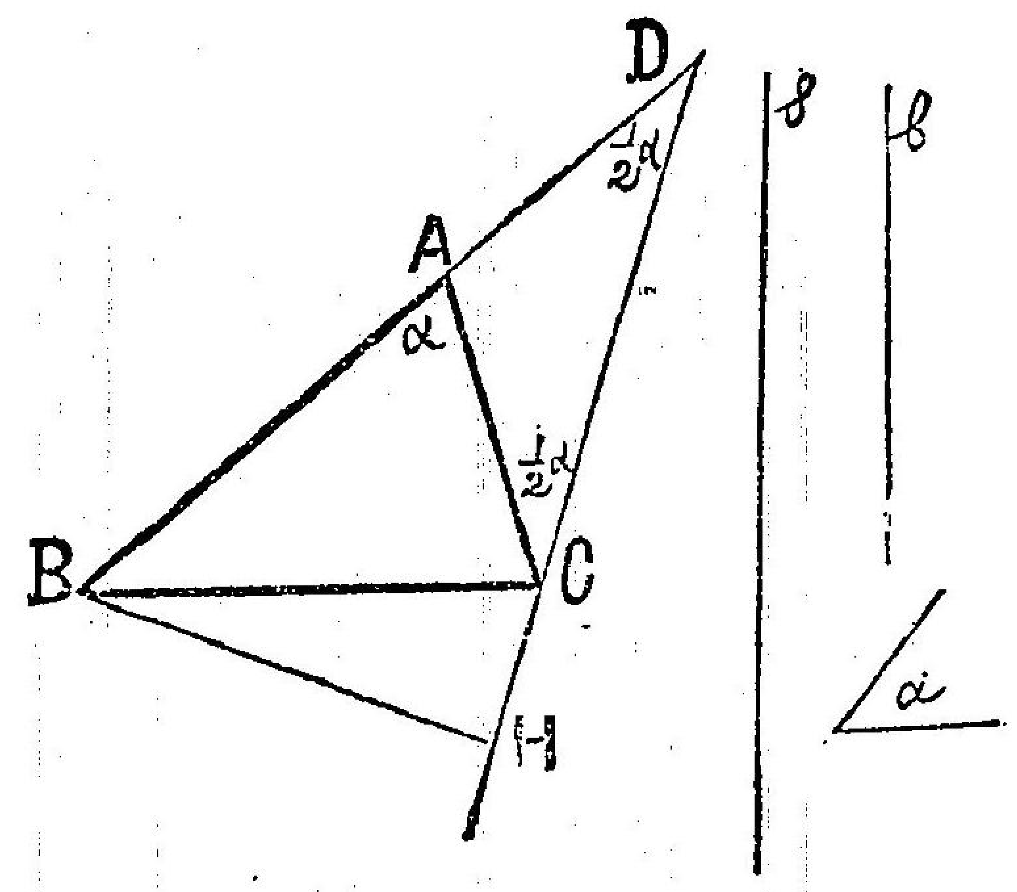
8. 底,頂角及ビ他ノ貮邊ノ和或ハ差ヲ知リテ三角形ヲ畫ケ,

(第一) 底,頂角及ビ他ノ二邊ノ和ヲ知ル場合.

底邊ヲ b, 頂角ヲ a, 二邊ノ和ヲ s トス.

(作圖) a ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シキ角ヲ作リ之レヲBDCトシ,其壹邊DB上ニ壹点Bヲ取リDBヲ s ニ等シクス.

是ニ於テBヲ中心トシ b ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ,此弧トDCトノ交点ヲCトシBCヲ結ビ,又Cヨリ直線CAヲ引キ $\angle DCA$ ヲ $\angle D$ 即チ $\frac{1}{2}a$ ニ等シカラシメCAトDBトノ交点ヲAトス,



然ル𪜈ハ△ABCハ所求ノモノナリ

(証) $\angle ACD=\angle D=\frac{1}{2}a$ (作圖) $\therefore\ AC=AD$

$$\therefore\ AB+AC=AB+AD=s$$

又 $\angle BAC=\angle D+\angle ACD$ (86. 定理)

$$=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}a=a$$

而シテ作圖ニヨリ $BC=b$ ナリ,

故ニ△ABCハ所求ノモノナリ.

(注意) BヨリDCニ下セル垂線ヲBHトス,

$b<BH$ ナレバBヲ中心トシ b ヲ半徑トセル弧ハDCニ交ハラズ,此時ハ本題ハ不能ナリ.

$b=BH$ ナレバBヲ中心トシ b ヲ半徑トセル弧ハDCニCニ於テ切ス,故ニ此時ハ壹個ノ答解ヲ有ス.

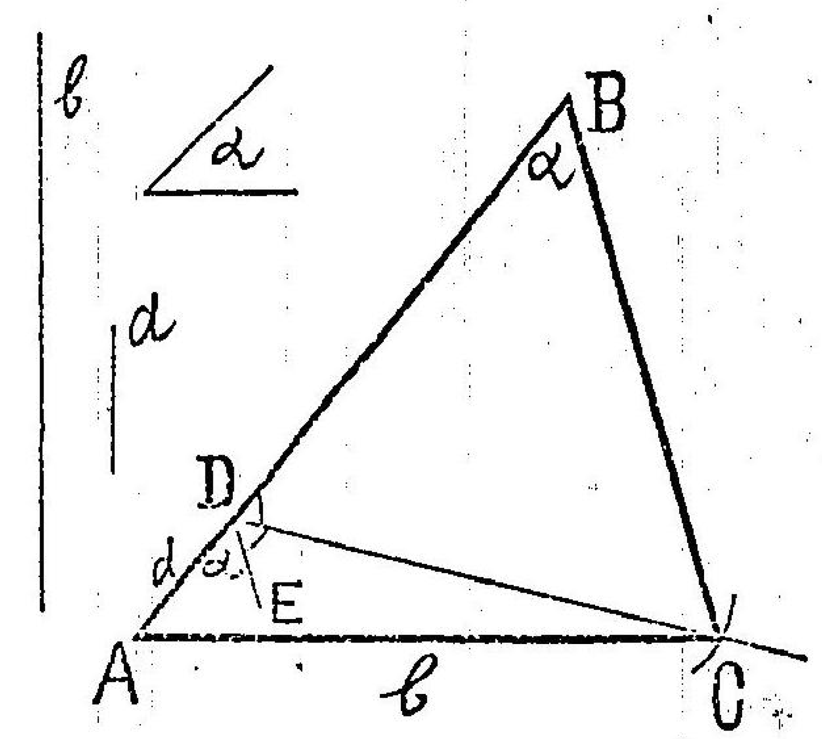
$b>BH$, $b<BD$ (即チ s) ナレバBヲ中心トシ b ヲ半徑トセル弧ハ貮点ニ於テDCニ交ハ但シ其貮点ハ共ニDハ壹傍ニアリ,此時ハ本題ハ貮個ノ答解ヲ有ス,

又 $b=s$ ナレバ本題ハ不能ナリ.

(第貮) 底,頂角,及ビ貮邊ノ差ヲ知ル𪜈,

(作圖) 底邊ヲ b, 頂角ヲ a 貮邊ノ差ヲ d トス,

a ト等シキ壹角ADEヲ作リDA邊上ニA点ヲ取リDAヲ d ト等長ナラシメ,又ADE角ノ外角ノ等分線ヲ作リ,之ヲDCトシ,Aヲ中心トシ b ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ此弧トDCトノ交点ヲCトシ,CヨリDEニ平行ナル直線CBヲ引キADノ引張線トノ交点ヲBトス,



然ル𪜈ハ三角形ABCハ所求ノモノナリ.

(証) $CB /\!/ DE$, $\therefore\ \angle B=\angle ADE=a$ (1)

又 $\angle BCD=\angle CDE$ (錯角)

$=\angle BDC$ (作圖) $\therefore\ BC=BD$

$\therefore\ BA-BC=BA-BD=d$, (2)

又作圖ニ依リ $AC=b$ ナリ, (3)

(1) (2) (3) ニヨリ△ABCハ所求ノモノナリ.

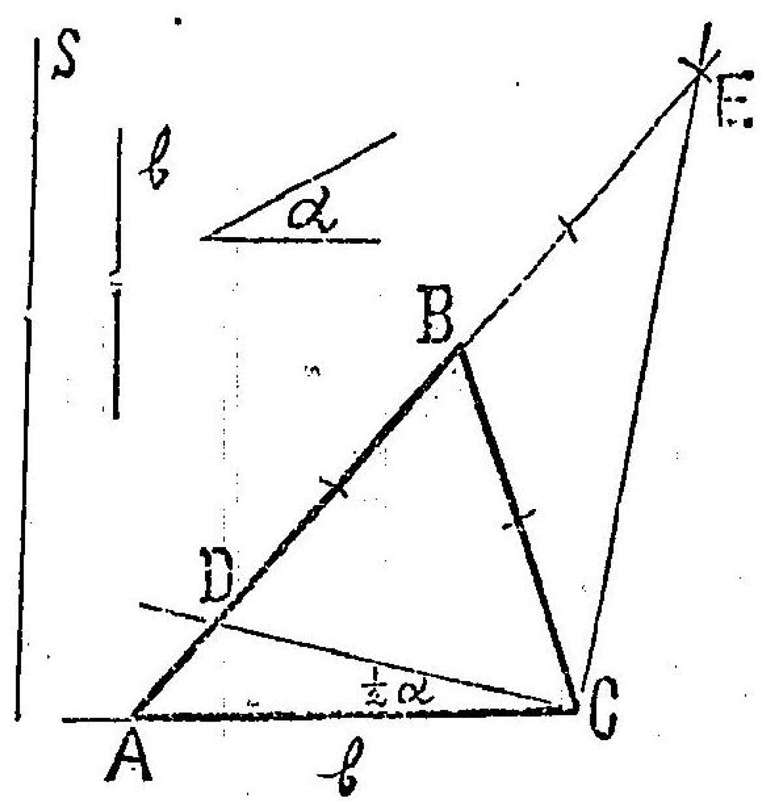
(注意) $b \not> d$ ナル片ハ本題ハ不能ナリ

又 $b>d$ ナル片ハ A ヲ中心トシ b ヲ半徑トセル弧ハ再ビ CD ノ引張線ニ交ルベシ,而シテ此交點ヲ C′ トシ,C′ ヨリ DE ニ平行線ヲ引キ BA トノ交點ヲ A′ トスル片ハ △A′BC モ亦所求ノ三角形ナリ.

9. 底及ビ貳邊ノ和或ハ差,併ビニ底角ノ差ヲ知リテ三角形ヲ畫クヿヲ求ム.

(第一) 底及ビ貳邊ノ和併ビニ底角ノ差ヲ知ル場合.

底邊ヲ b,貳邊ノ和ヲ s,底角ノ差ヲ α トス,



(作圖) $\frac{1}{2}\alpha$ ニ等シキ角 ACD ヲ作リ,其邊 CA ノ上ニ A 點ヲ取リ,CA ヲ b ト等長ナラシメ,C ヨリ CD ニ垂線 CE ヲ引キ,A ヲ中心トシ s ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ此弧ト CE トノ交點ヲ E トシ AE ヲ結ビ CD トノ交點ヲ D トシ DE ノ中央點ヲ B トシ CB ヲ結ブ.

然ル片ハ △ABC ハ所求ノモノナリ.

(證) 直三角形 ECD ニ於テ B ハ ED ノ中央ナリ,

∴ CB=BE=BD, (第一編第三節例題8.)

∴ AB+CB=AB+BE=AE=s, (作圖) (1)

又 △ABC ニ於テ BC=BD

∴ ∠BCA−∠A=∠DCA×2 (第壹編第三節例題9.)

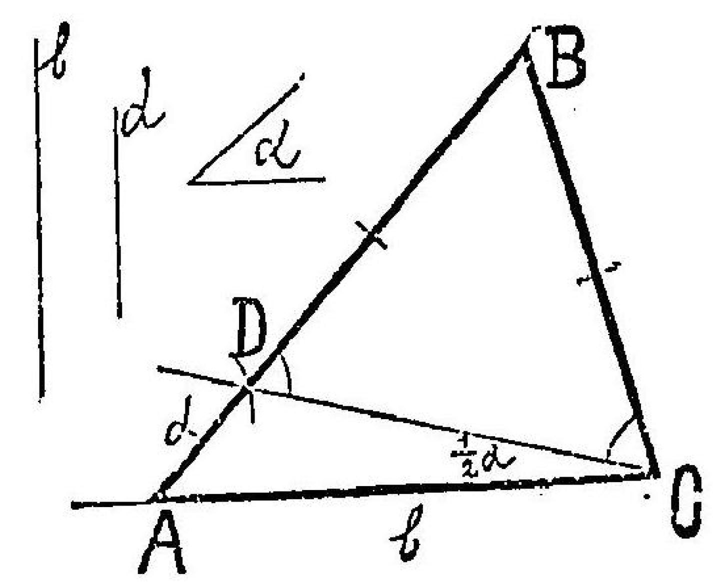
$=\frac{1}{2}\alpha\times 2=\alpha$, (2)

又作法ニヨリ AC=b ナリ. (3)

(1)(2)(3) ニヨリ △ABC ハ所求ノモノナルヿ明カナリ.

(第參) 底貳邊ノ差,併ビニ底角ノ差ヲ知ル場合.

底邊ヲ b,貳邊ノ差ヲ d,底角ノ差ヲ α トス,



(作圖) $\frac{1}{2}\alpha$ ニ等シキ角ヲ作リ,之レヲ ∠ACD トシ其邊ノ上ニ A 點ヲ取リ CA ヲ b ト等シクシ,A ヲ中心トシ d ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ此弧ト CD トノ交點ヲ D トシ AD ヲ結ビ之レヲ B マデ引張シ,C ヨリ直線 CB ヲ引キ ∠BCD ヲ ∠BDC ニ等シカラシメ CB ト AB トノ交點ヲ B トス,

然ル片ハ △ABC ハ所求ノモノナリ.

(證) ∠BCD=∠BDC ∴ BD=BC (62. 定理)

∴ ∠BCA−∠A=∠DCA×2 (第壹編第三節例題9.)

$=\alpha$ (1)

又 BC=BD ∴ BA−BC=BA−BD=AD=d, (2)

又作法ニヨリテ AC=b (3)

(1)(2)(3) ニヨリテ △ABC ハ所求ノモノナリ.

(注意) $b \not> d$ ナレバ本題ハ不能ナリ.

又 $b>d$ ナレバ A ヲ中心トシ d ヲ半徑トセル弧ハ再ビ CD ノ引張線ニ交ルベシ,而シ其交點ヲ D′ トシ D′A ヲ結ビ,C ヨリ直線 CB′ ヲ引キ ∠DCB′ ヲ ∠AD′D ニ等シクシ CB′ ト D′A ノ引張線トノ交點ヲ B′ トス

然ル片ハ △B′CA ハ所求ノモノナリ.

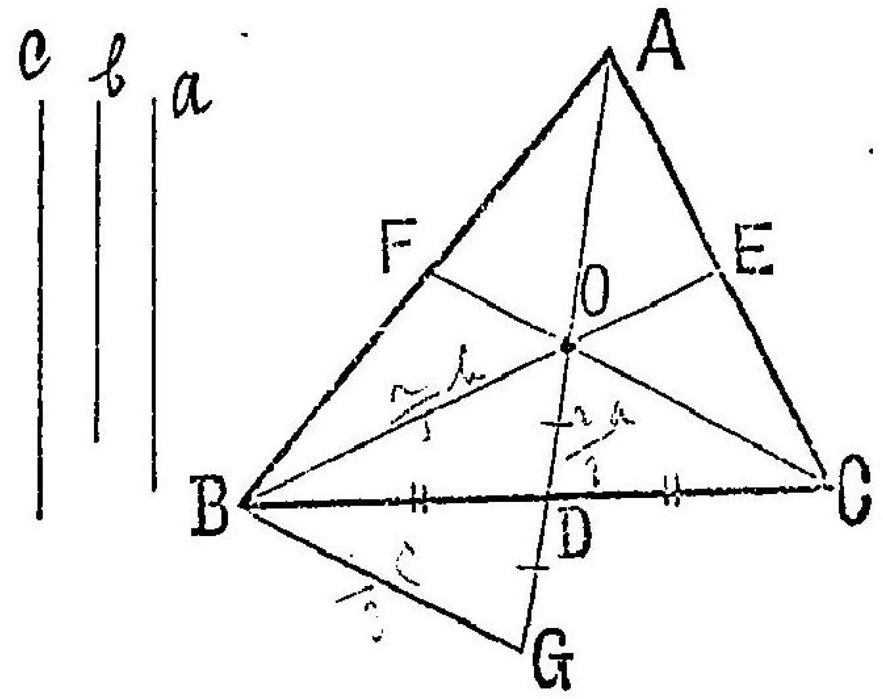
10. 三個ノ中央線ヲ知リテ三角形ヲ畫クヿヲ求ム,

三個ノ中央線ヲ a, b, c トス

a, b, c ヲ中央線トセル三角形ヲ畫クヿヲ求ム

(作圖) $\frac{2}{3}a, \frac{2}{3}b, \frac{2}{3}c$ ヲ三邊トセル三角形ヲ畫キ之レヲ BCG トス即チ CG=$\frac{2}{3}a$, BO=$\frac{2}{3}b$, BG=$\frac{2}{3}c$ トス, (第壹編[illegible]節[illegible]題14.)

OG ノ中央点ヲ D トシ BD ヲ結ビ之レヲ C マデ引張シ DC ヲ BD ト等長ナラシメ又 GO ヲ A マデ引張シ AO ヲ OG ト等長ナラシメ AB, AC ヲ結ブ



然ルキハ △ABC ハ所求ノモノナリ.

(証) BO ト AC ノ交点ヲ E トシ, CO ト AB トノ交点ヲ F トス, △ABC ニ於テ D ハ BC ノ中央ナリ, 故ニ AD ハ中央線ナリ, 而シテ $AO = OG = 2OD$

故ニ O ハ △ABC ノ重心ナリ. (第壹編第三節例題 14.)

故ニ BE, 及ビ CF ハ △ABC ノ中央線ナリ.

而シテ △BDG, △ODC ニ於テ

$BD = DC$ (作圖)

$OD = DG$ (")

$\angle BDG = \angle ODC \quad \therefore \triangle BDG \equiv \triangle ODC$

$\therefore \quad OC = BG$

$= \frac{2}{3}c$ (作圖)

而シテ $OC = \frac{2}{3}CF$ (第壹編第三節例題 14.)

$\therefore \quad FC = \frac{3}{2}OC = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}c = c$

同樣ニ $BE = \frac{3}{2}BO = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}b = b$

$AD = \frac{3}{2}AO = \frac{3}{2}OG$ (作圖)

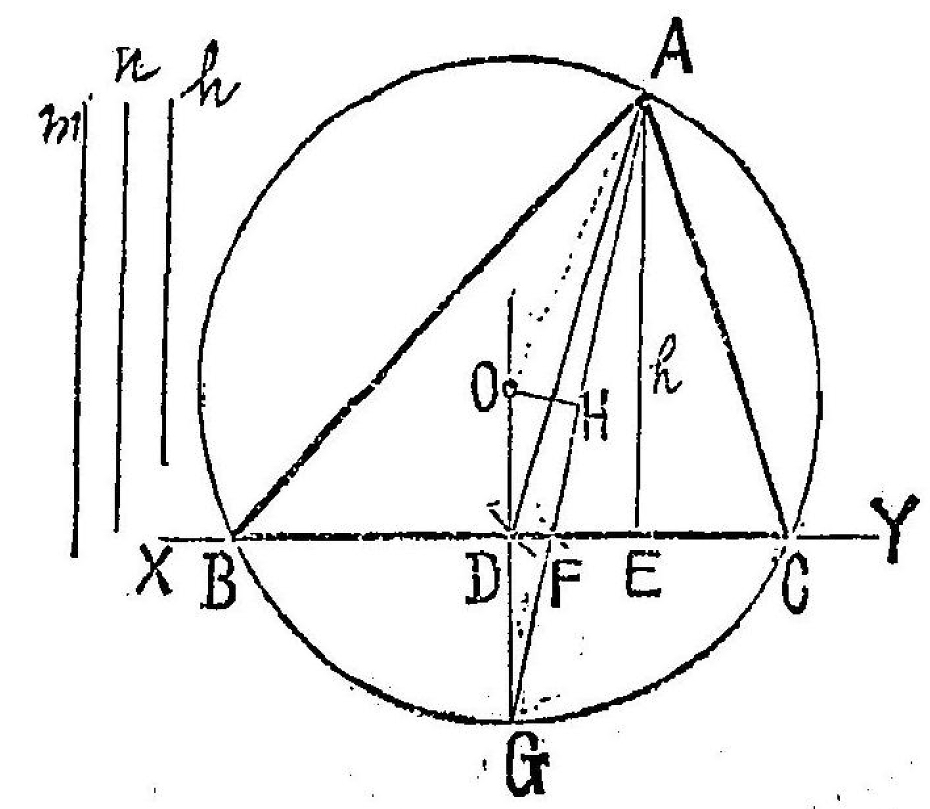
$= \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}a = a$

故ニ △ABC ハ所求ノ三角形ナリ.

11. 三角形ノ壹角頂ヨリ對邊ニ引ク垂線, 中央線併ビニ其角ノ等分線ヲ知リテ其三角形ヲ畫ケ.

(作圖) 已知ノ垂線ヲ h, 中央線ヲ m, 等分線ヲ n トス.

無限直線 XY ヲ置キ之レニ垂線 EA ヲ引キ AE ヲ h ト等長ナラシメ A ヲ中心トシ m 及ビ n ヲ半徑トシテ貳個ノ弧ヲ畫キ此ノ弧ト XY トノ交点ヲ順次ニ D, F トシ AD, AF ヲ結ブ.



D ニ於テ XY ニ垂線ヲ引キ此垂線ト AF ノ引張線トノ交点ヲ G トス,

而シテ AG ヲ直角ニ貳等分スル直線 HO ヲ作リ HO ト GD トノ交点ヲ O トシ O ヲ中心トシ OG ヲ半徑トセル圓ヲ畫キ此圓周ト XY トノ交点ヲ B, C トシ AB, AC ヲ結ブ.

△ABC ハ所求ノ三角形ナリ.

(証) AO ヲ結ブ

OH ハ AG ヲ直角ニ等分ス, $\therefore \quad OA = OG$ (101. 定理)

故ニ O ヲ中心トシ OG ヲ半徑トセル圓周ハ A ヲ過グ,

今半徑 OG ハ弦 BC ニ直立ス $\therefore \quad BD = DC$, (126. 定理)

故ニ AD ハ △ABC ノ中央線ナリ,

而シテ作圖ニヨリ $AD = m$ ナリ, (1)

又半徑 OG ハ弦 BC ニ直立ス, ∴ 弧 BG = 弧 GC (125. 定理)

$\therefore \quad \angle BAG = \angle GAC$

故ニ AF ハ ∠BAC ノ等分線ナリ,

而シテ作圖ニヨリ $AF = n$ ナリ, (2)

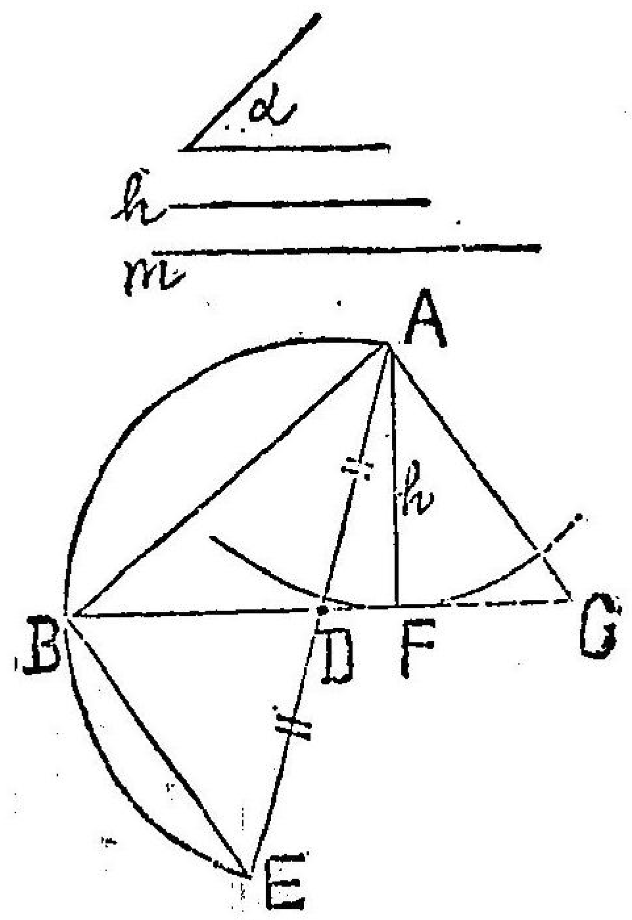
又 A ヨリ下セル垂線 AE ハ h ニ等シ (3)

(1) (2) (3) ニヨリ △ABC ハ所求ノモノナリ.

12. 三角形ノ頂角,及ビ頂角頂ヨリ底邊ニ到ル中央線併ビニ垂線チ知リテ三角形チ畫クコチ求ム.

(作圖) 頂角チ α トシ,頂角頂ヨリ底邊ニ引ク中央線及ビ垂線チ順次ニ m, h トス,

$2m$ ト等長ナル直線 AE チ置キ AE 上ニ α ノ補角チ含ム弓形チ畫キ之レチ ABE トス



(186. 問題)

而シテ AE ノ中央点チ D トス又 A チ中心トシ h チ半徑トスル圓チ畫キ, D ヨリ此圓ニ切線 DF チ引キ其切点チ F トス而シテ FD ト ABE 弧トノ交点チ B トシ BD ノ引張線上ニ壹点 C チ取リ CD チ BD ト等長ナラシメ AB, AC チ結ブ

然ルキハ △ABC ハ所求ノ三角形ナリ。

(証) BE チ結ブ

△BDE, △ADC ニ於テ

BD=DC (作圖)

DE=AD (")

$\angle$BDE=$\angle$ADC ∴ △BDE≡△ADC

∴ $\angle$DBE=$\angle$C ∴ AC // BE

故ニ $\angle$CAB ハ $\angle$ABE ノ補角ナリ, (作圖)

又 α モ亦 $\angle$ABE ノ補角ナリ

∴ $\angle BAC=\alpha$, (1)

又 BD=DC ナルチ以テ AD ハ中央線ナリ,

而シテ作圖ニヨリ AD ハ $\frac{1}{2}$AE ニ等シク即 m ト等長ナリ, (2)

又 BF ハ切線ナルチ以テ AF ハ BC ニ直立ス,

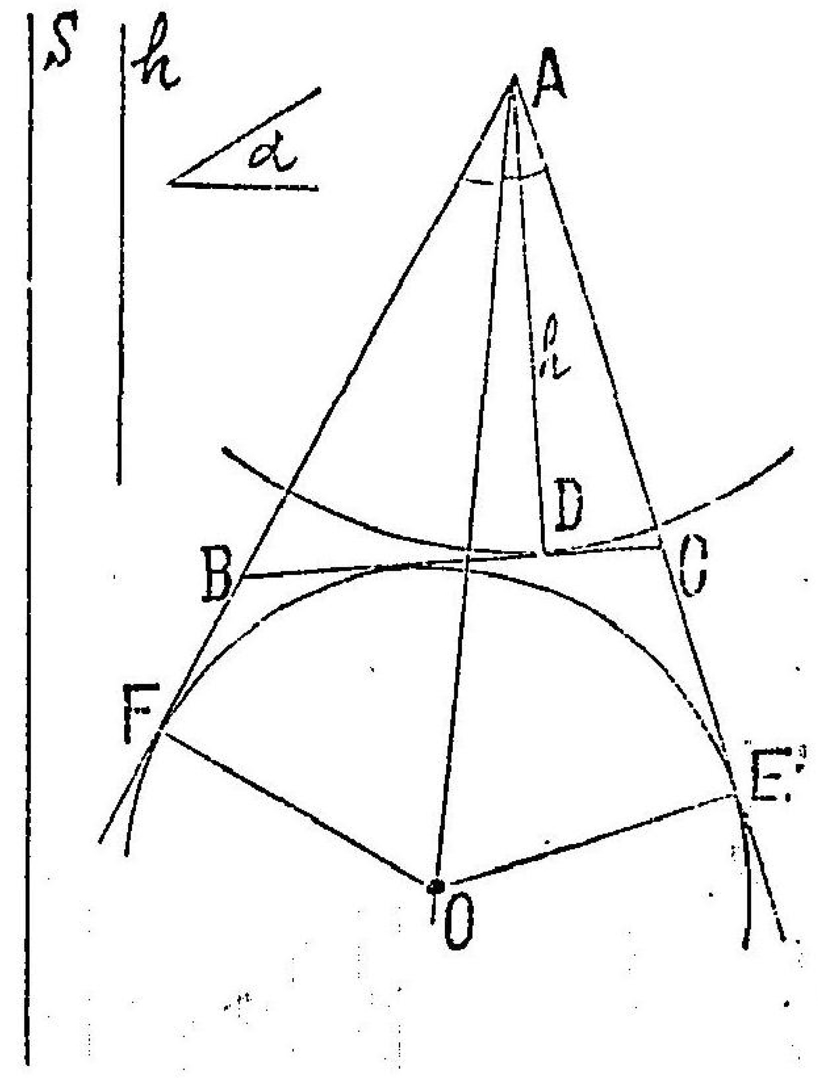
而シテ AF ハ h ト等長ナリ, (3)

(1) (2) (3) ニヨリテ △ABC ハ所求ノモノナリ

13. 周,頂角及ビ高チ知リテ三角形チ畫クコチ求ム。

(作圖) 周チ s, 頂角チ α, 高チ h トス,

α ト等シキ角 FAE チ置キ,其壹邊ノ上ニ E チ取リ AE=$\frac{1}{2}s$ トシ E ニ於テ AE ニ垂線 EO チ作ル而シテ FAE 角ノ等分線チ作リ之レチ AO トシ AO ト EO トノ交点チ O トシ. O チ中心トシ OE チ半徑トシ圓周チ畫キ又 A チ中心トシ h チ半徑トシテ圓周チ畫キ此二圓周ノ內方ノ共通切線チ引キ FAE 角ノ二邊トノ交点チ B, C トス



然ルキハ △ABC ハ所求ノ三角形ナリ。

(証) OF$\perp$AF トス. 又 OE$\perp$AE ナリ

故ニ OE, OF ハ $\angle$FAE ノ等分線上ノ壹点 O ヨリ各邊ニ到ル距離ナリ, ∴ OE=OF, (103 定理)

故ニ O チ中心トシ OE チ半徑トセル圓周ハ F チ過グ

而シテ AF$\perp$OF ナルチ以テ AF ハ此圓ノ切線ナリ. (143. 定理)

又 BC,AE モ此圓ニ切ス

∴ △ABC ノ周 =AE+AF (第二編第四節例題 7.)

=AE+AE (147. 推論)

$=2\text{AE}=2\times\frac{1}{2}s=s.$

又 A チ中心トセル圓周ト BC トノ切点チ D トシ AD チ結ブキハ AD=h ニシテ且 AD$\perp$BC ナリ.

即チ AD ハ △ABC ノ高ニシテ其長サハ h ナリ.

又頂角 BAC ハ作圖ニヨリ a ニ等シ,

故ニ △ABC ハ所求ノ三角形ナリ,

14. 底,二邊ノ和或ハ差併ビニ內接圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ描クヿヲ求ム.

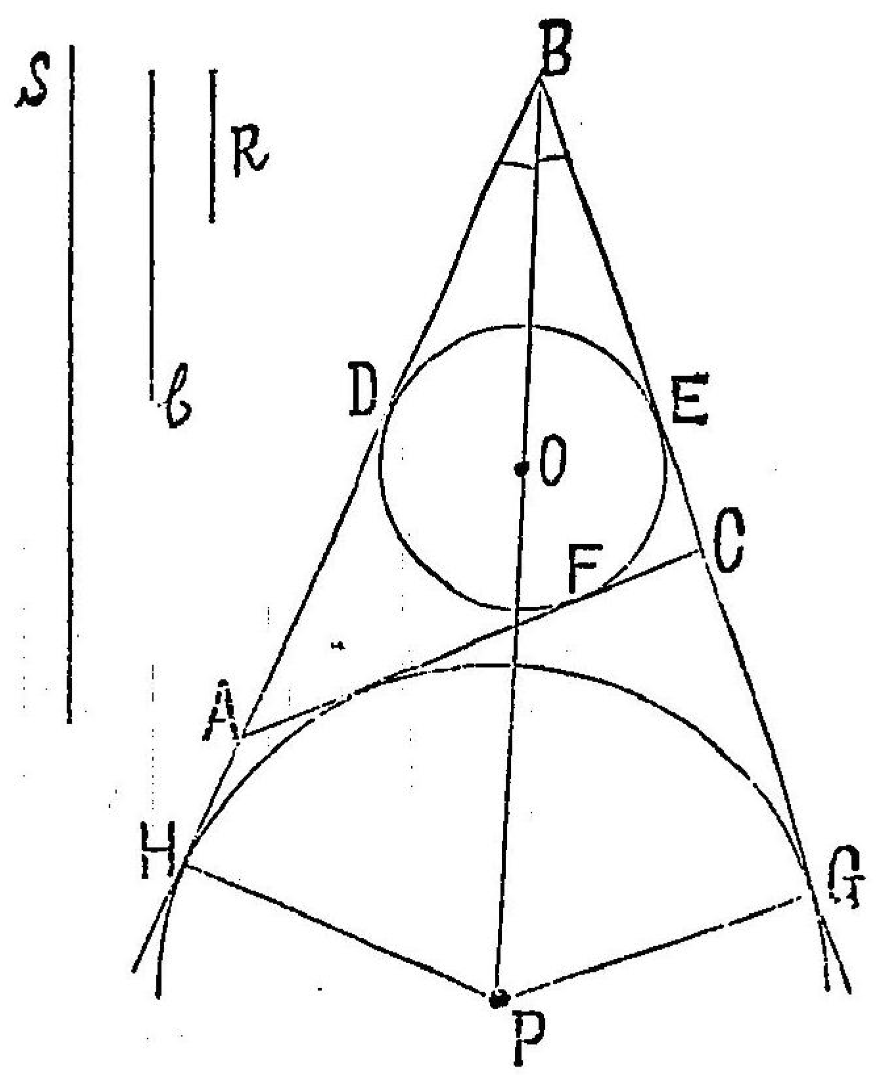
(第壹) 底,二邊ノ和及ビ內接圓ノ半徑ヲ知ル場合.

(作圖) 已知ノ底邊ヲ b, 二邊ノ和ヲ s, 內接圓ノ半徑ヲ R トス

先ヅ R ヲ半徑トスル圓ヲ描キ之レヲ OE トシ, 此圓ニ切線 EB ヲ引キ $EB=\frac{1}{2}(s-b)$ ナラシメ, 又 BE ノ上ニ壹点 G ヲ取リ

$$BG=\tfrac{1}{2}(s+b)$$

ナラシメ, G ニ於テ BG ニ直立ナル直線 GP ヲ引キ又 BO ヲ結ビ BO ノ引張線ト GP トノ交点ヲ P トシ, P ヲ中心トシ PG ヲ半徑トシテ圓周ヲ描ク.



是ニ於テ兩圓周 PG, OE ニ內方ノ共通切線 AC ヲ引キ又 B ヨリ OE 圓ニ切線 BD ヲ引キ BD ト AC トノ交点ヲ A トス,

然ル𪜈ハ △ABC ハ所求ノ三角形ナリ.

(證) 圓 OE ハ AB, BC ニ切ス,

故ニ BO ハ ∠ABC ヲ等分ス,

∴ △ABC ノ周 $=2BG$ (前題ト同理ナリ)

即 $AB+BC+CA=2\times\frac{1}{2}(s+b)$ (作圖)

$=s+b,$ (a)

又 OE 圓周ト AC トノ切点ヲ F トスル𪜈ハ

$AF=AD$ 及ビ $CF=CE$ (147. 推論)

$\therefore\ AB+BC-AC=DB+BE$

$=2BE$ (174. 推論)

$=2\times\frac{1}{2}(s-b)$

$=s-b$ (b)

(a) (b) 貳式ヲ加フル𪜈ハ

$2(AB+BC)=2s,\quad \therefore\ AB+BC=s,$ (1)

(a) 式ヨリ (b) 式ヲ減ズル𪜈ハ

$\therefore\ 2AC=2b \quad \therefore\ AC=b$ (2)

而シテ △ABC ノ內接圓ノ半徑ハ R ナリ. (3)

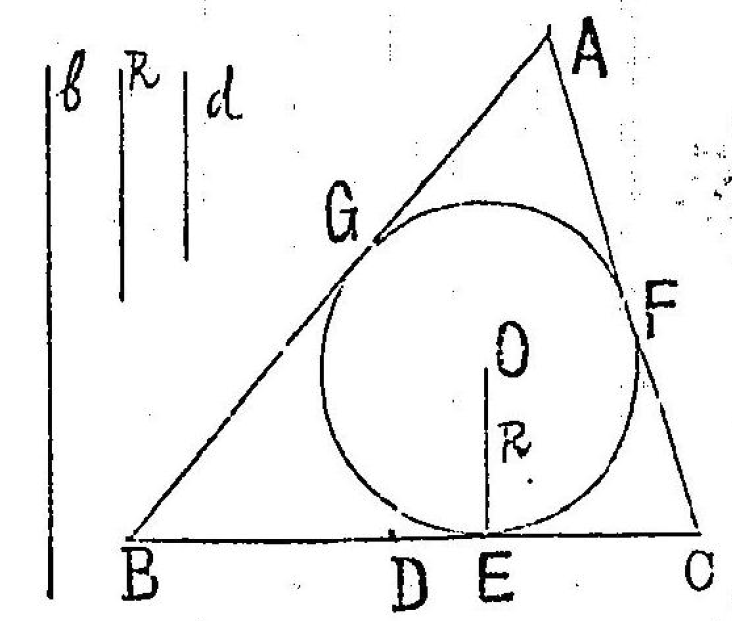
(1) (2) (3) ニヨリ △ABC ハ所求ノモノナリ.

(第貳) 底,貳邊ノ差及ビ內接圓ノ半徑ヲ知ル場合.

(作圖) 底ヲ b, 貳邊ノ差ヲ d, 內接圓ノ半徑ヲ R トス,

b ト等長ナル直線 BC ヲ置キ,

其中央点ヲ D トシ BC 上ニ壹点ヲ E 取リ $DE=\frac{1}{2}d$ ナラシメ, E ニ於テ BC ニ垂線ヲ作リ之レヲ OE トシ OE ヲ R ト等長ナラシメ, O ヲ中心トシ R ヲ半徑トシテ圓周ヲ作リ, B 及ビ C ヨリ此圓周ニ切線 BG, CF ヲ引キ其交点ヲ A トス,



然ル𪜈ハ △ABC ハ所求ノモノナリ.

(證) AB, AC ガ OE 圓ニ切スル点ヲ G, F トスレハ

$AG=AF$ (147. 推論)

$\therefore\ AB-AC=BG-FC$

$=BE-EC$ (147. 推論)

$=2DE$

$=2\times\frac{1}{2}d=d$ (作圖)

而シテ作法ニヨリ底邊 BC ハ b ニ等シク, $\triangle$ABC ノ内接圓ノ半徑ハ R ニ等シ,

故ニ $\triangle$ABC ハ所求ノモノナリ。

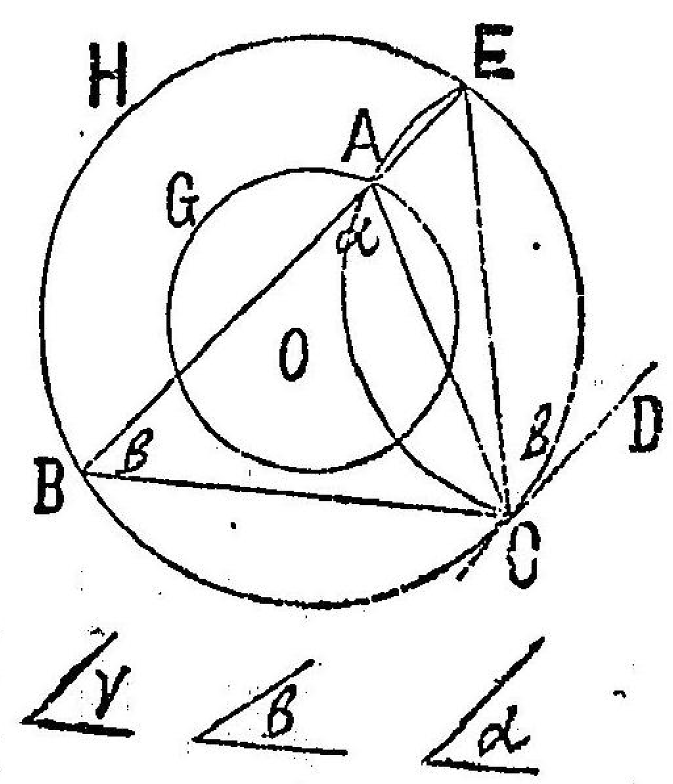
15. 二個ノ同心圓周上ニ角頂ヲ置ク所ノ三角形ヲ畫キ其各角ヲシテ所設ノモノニ等シカラシメントス其法ヲ求ム。

(作圖) 所設ノ角ヲ α, β, γ トシ, 二個ノ同心圓ヲ OG, OH トス所設ノ圓周ノ壹個例ヘバ OH ノ上ノ任意ノ壹点 C ニ於テ切線 CD ヲ引キ, C ヨリ直線 CE ヲ引キ

$$\angle \mathrm{DCE}=\beta$$

ナラシメ, CE 上ニ於テ α ノ補角ヲ含ム弓形ヲ畫キ, 此弓形ノ弧ト OG 圓周トノ交点ヲ A トス,

(186. 問題)



EA ヲ結ビ之レヲ引張シテ OH 圓周トノ交点ヲ B トシ BC, AC ヲ結ブ,

然ルトキハ $\triangle$ABC ハ所求ノモノナリ。

(証) CD ハ OH 圓ノ切線ナリ

$$\therefore \quad \angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{DCE} \qquad \text{(148. 定理)}$$

$$=\beta,$$

又弓形 EAC ハ α ノ補角ヲ含ム,

$$\alpha+\angle \mathrm{EAC}=2\ \text{直角}$$

又 $\angle \mathrm{BAC}+\angle \mathrm{EAC}=2$ 直角　$\therefore \ \angle \mathrm{BAC}=\alpha$

從ッテ $\angle \mathrm{BAC}=\alpha$.

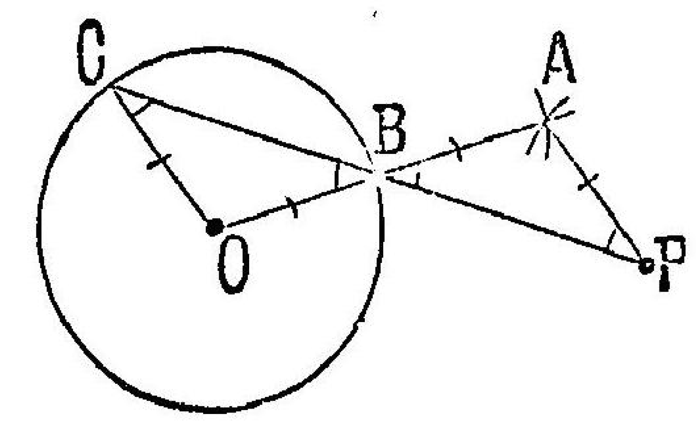
但シ α, β, γ ハ三角形ノ三角ニシテ $\alpha+\beta+\gamma=2$ 直角ナレバナリ。

故ニ $\triangle$ABC ハ所求ノモノナリ。

(注意) 同法ニヨリ OG 圓周上ニ貳角頂ヲ置キ, OG 圓周上ニ壹角頂ヲ置クヿヲ得。

16. 定圓外ノ壹定点 P ヨリ割線ヲ引キ, 圓外ノ部分ト圓內ノ部分トヲシテ等長ナラシメントス其法ヲ示セ

(作圖) 定圓ノ中心ヲ O トス, O ヲ中心トシ定圓ノ直徑ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ, 又 P ヲ中心トシ定圓ノ半徑ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ, 此貳弧ノ交点ヲ A トシ, OA ヲ結ビ OA ト定圓周トノ交点ヲ B トシ, PB ヲ結ブ



然ルトキハ PB ハ所求ノモノナリ。

(証) PB ト定圓周トノ交点ヲ C トシ OC, PA ヲ結ブ,

OA ハ定圓ノ直徑ニシテ, OB ハ半徑ナリ,

故ニ AB ハ定圓ノ半徑ニ等シ,

又 AP モ定圓ノ半徑ニ等シ

$$\therefore \quad \mathrm{AP}=\mathrm{AB}=\mathrm{BO}=\mathrm{OC}$$

$$\therefore \quad \angle \mathrm{P}=\angle \mathrm{ABP} \qquad \text{(60. 定理)}$$

$$=\angle \mathrm{OBC} \qquad \text{(對頂角)}$$

$$=\angle \mathrm{OCB} \qquad \text{(60. 定理)}$$

$$\therefore \quad \triangle \mathrm{ABP}\equiv\triangle \mathrm{OBC} \qquad \text{(72. 定理)}$$

$$\therefore \quad \mathrm{PB}=\mathrm{BC}$$

故ニ PB ハ所求ノ直線ナリ。

(注意) OP ガ定圓ノ半徑ノ三倍ヨリ大ナルトキハ不能ナリ, 但シ此ノ場合ニ在テハ O ヲ中心トシ定圓ノ直徑ヲ半徑トセル弧ト, P ヲ中心トシ定圓ノ半徑ヲ半徑トシテ畫ケル弧トハ相交ラザレバナリ。

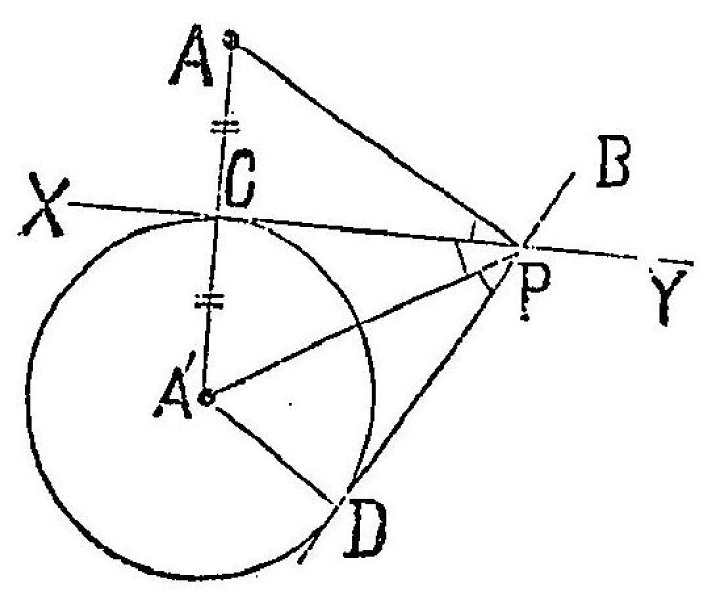
17. A, B ハ定直線 XY ノ同側ニアル貳定点ナリ, XY 上ニ壹点 P ヲ求メ $\angle$APX ヲシテ $\angle$BPY ノ半ナラシムルヿヲ求ム。

(作圖) A ヨリ XY ニ垂線 AC ヲ引キ之レヲ A′ マテ引張シ

$AC=A'C$

ナラシメA'ヲ中心トシ$A'C$ヲ半徑トシテ圓周ヲ畫キBヨリ此圓周ニ切線BDヲ引キ(Dヲ其切点トス)XYトノ交点ヲPトス

然ルトキハPハ所求ノ点ナリ。



(証)　AP, $A'P$, $A'D$ヲ結ブ

兩三角形PDA', $A'PC$ニ於テ

PA'ハ共通邊

$A'D=A'C$

$\angle D=\angle A'CP=$直角(145定理)　$\therefore\ \triangle PDA'\equiv\triangle A'PC$

$\therefore\ \angle A'PD=\angle A'PC$

又　$\triangle APC\equiv\triangle A'PC$　　$\therefore\ \angle APC=\angle A'PC$

$\therefore\ \angle A'PD=\angle A'PC=\angle APC$

$\therefore\ \angle CPD=2\times\angle APC$

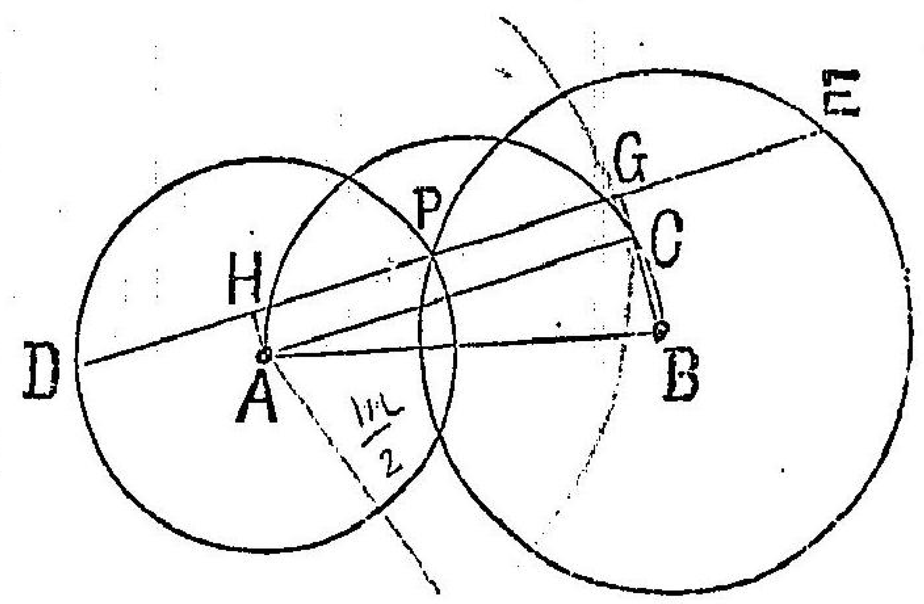
而シテ　$\angle CPD=\angle BPY$　(對頂角)

$\therefore\ \angle BPY=2\times\angle APC.$

故ニPハ所求ノ点ナリ。

18. 相交ル貳圓周ノ一交点Pヲ過キテ其兩圓周間ニ直線ヲ引キ其長サヲ所設ノ長サニ等シカラシメントス。

(作圖)　兩圓ノ中心ヲA, B,トシ所設ノ長サヲmトス,



ABヲ結ヒABヲ直徑トシテAB上ニ半圓ヲ畫キ,又Aヲ中心トシ$\frac{1}{2}m$ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ此弧ト前ノ半圓周トノ交点ヲCトシACヲ結ビPヨリACニ平行ナル直線ヲ引キ兩圓周トノ交点ヲD, Eトス

然ルトキハDPEハ所求ノ直線ナリ。

(証)　BC,ヲ結ビBCトDPEトノ交点ヲGトシ, AヨリDEニ垂線AHヲ引ク,

ACBハ半圓周ナリ　$\therefore\ \angle ACB=$直角

而シテ　$DE/\!/AC$　$\therefore\ \angle HGC=$直角

故ニGハ弦PEノ中央点ナリ　(126.推論)

又Hハ弦PDノ中央点ナリ　(〃)

$\therefore\ DE=2HG$

然ルニ$HGCA$ハ矩形　$\therefore\ HG=AC$

$\therefore\ DE=2AC$

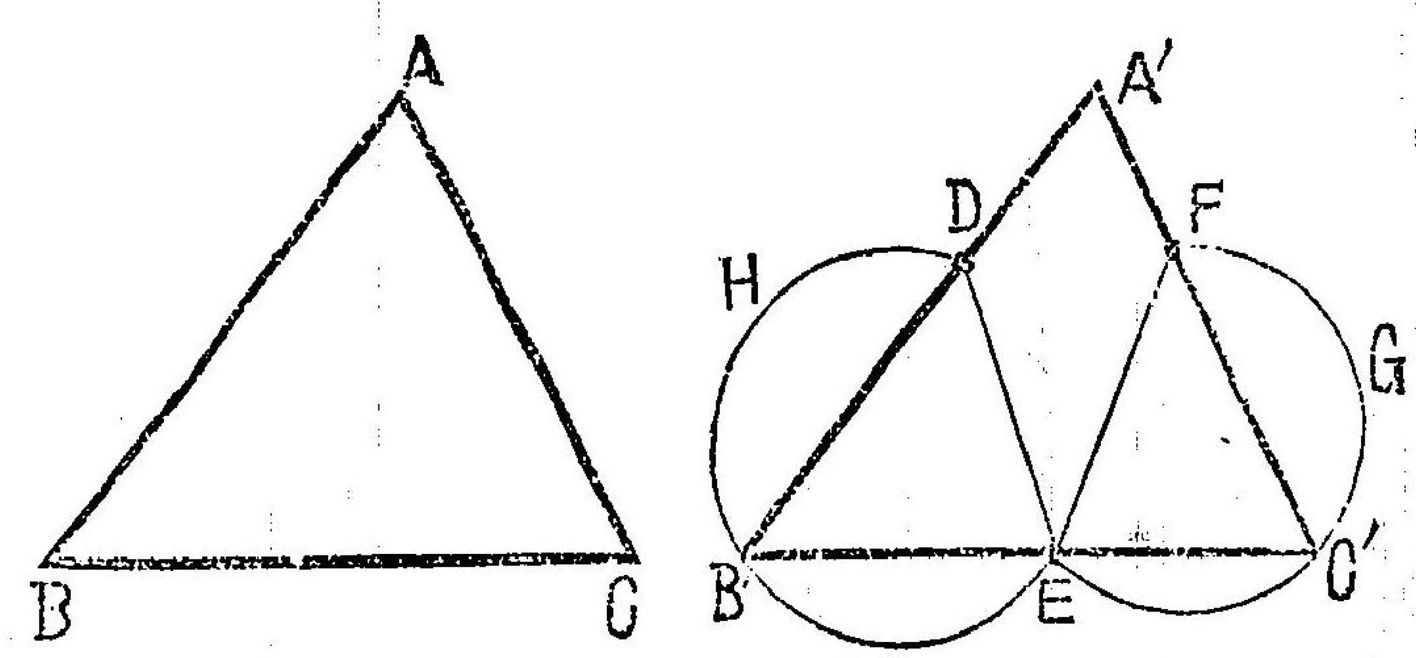
$=2\times\frac{1}{2}m$　(作圖)

$=m$

故ニDPEハ所求ノ直線ナリ。

19. 所設ノ三角形ト全等ナル三角形ヲ畫キ其各邊ヲシテ所設ノ三点ヲ過ギシメントス其法ヲ示セ。

(作圖)　所設ノ三角形ヲABCトシ,所設ノ三点ヲD, E, Fトス



DE, FEヲ結ブ

EF上ニ$\angle C$ヲ含ム弓形FGEヲ畫キ,又DE上ニ$\angle B$ヲ含ム弓形DHEヲ畫キ, Eヲ過ギテ直線$B'EC'$ヲ引キ

$B'C'=BC$

ナラシム(前題ニヨル)

而シテ $B'D$, $C'F$ ヲ結ビ其交点ヲ A' トス

然ルトキハ $\triangle A'B'C'$ ハ所求ノモノナリ。

(証) 作圖ニヨリ $B'C'=BC$

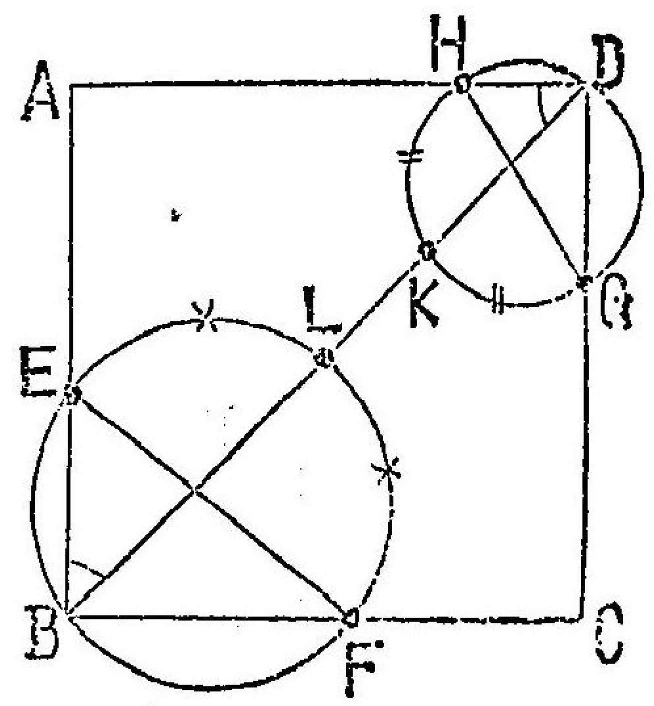
$\angle C'=\angle C$

$\angle B'=\angle B$ $\therefore$ $\triangle A'B'C'\equiv\triangle ABC$,

而シテ $\triangle A'B'C'$ ノ各邊ハ三点 D, E, F ヲ過グ

故ニ $\triangle A'B'C'$ ハ所求ノモノナリ。

20. 正方形ヲ畫キ其各邊ヲシテ所設ノ四点ヲ通過セシメントス，其法ヲ求ム。



(作圖) 所設ノ四点ヲ E,F,G,H トス，EF, GH ヲ結ビ EF, GH ヲ直徑トセル圓形ヲ其各直線上ニ畫キ，EF, HG ノ間ニアル各半圓周ノ中央点ヲ L, K トス

弐点 K, L ヲ過グル直線ヲ引キ各圓周ニ交ル点ヲ D, B トシ DH, DG, BE, BF ヲ結ビ DH ト BE ノ交点ヲ A トシ，DG, BF ノ交点ヲ C トス

然ルトキハ ABCD ハ所求ノ正方形ナリ。

(証) 弓形 EBF ハ半圓周ナリ， $\therefore$ $\angle EBF=$ 直角.

同様ニ $\angle HDG=$ 直角，

而シテ L ハ弧 ELF ノ中央点ナリ，

$\therefore$ $\angle EBL=\angle LBF=\frac{1}{2}$直角，

同様ニ $\angle HDK=\angle KDC=\frac{1}{2}$直角，

$\therefore$ $\angle EBL=\angle HDK=\frac{1}{2}$直角

$\therefore$ $\angle A=$ 直角

同様ニ $\angle C=$ 直角

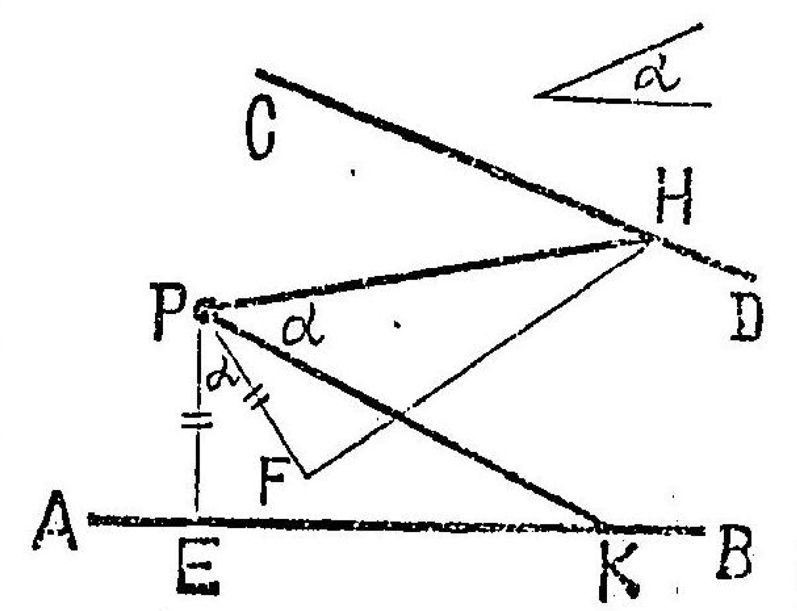
故ニ □ABCD ハ其各角ハ皆直角ニシテ即チ矩形ナリ，

而シテ $\angle ABD=\angle ADB=\frac{1}{2}$(直角)ナルヲ以テ $AB=AD$

故ニ ABCD ハ正方形ニシテ其各邊ハ E, F, G H ヲ過グ，

故ニ ABCD ハ所求ノ正方形ナリ。

21. 設定点 P ヨリ弐定直線 AB, CD ノ各ニマデ等長ノ直線ヲ引キ其夾角ヲシテ所設ノ定角 α ニ等シカラシメントス



(作圖) P ヨリ AB ニ垂線 PE ヲ引キ且ツ P ヨリ直線 PF ヲ引キ $\angle EPF=\alpha$, $PF=PE$ ナラシメ，F ニ於テ PF ニ垂線 FH ヲ引キ FH ト CD トノ交点ヲ H トシ，PH ヲ結ブ，

然ル后チ P ヨリ直線 PK ヲ引キ

$\angle HPK=\alpha$

ナラシメ，PK ト AB トノ交点ヲ K トス，

然ルトキハ PH, PK ハ所求ノ直線ナリ。

(証) $\angle EPF=\angle KPH=\alpha$ $\therefore$ $\angle EPK=\angle FPH$

故ニ両三角形 EPK, FPH ニ於テ

$\angle EPK=\angle FPH$

$\angle E=\angle F=$ 直角

$PE=PF$ (作圖) $\therefore$ $\triangle EPK\equiv\triangle FPH$

$\therefore$ $PK=PH$

而シテ作圖ニヨリ $\angle HPK=\alpha$ ナリ，

故ニ PK, PH ハ所求ノ直線ナリ。

(注意) P ガ AB, CD ノ外方ニアルトキハ同様ノ方法ニヨリテ作圖スルコトヲ得ベシ。

22. 設定点 P ヨリ弐定圓周ノ各ニマデ等長ノ直線ヲ引キ其夾角ヲシテ定角 α ニ等シカラシメントス。

(作圖) 弐定圓ノ中心ヲ A, B トス

PA ヲ結ビ，P ヨリ直線 PC ヲ引キ

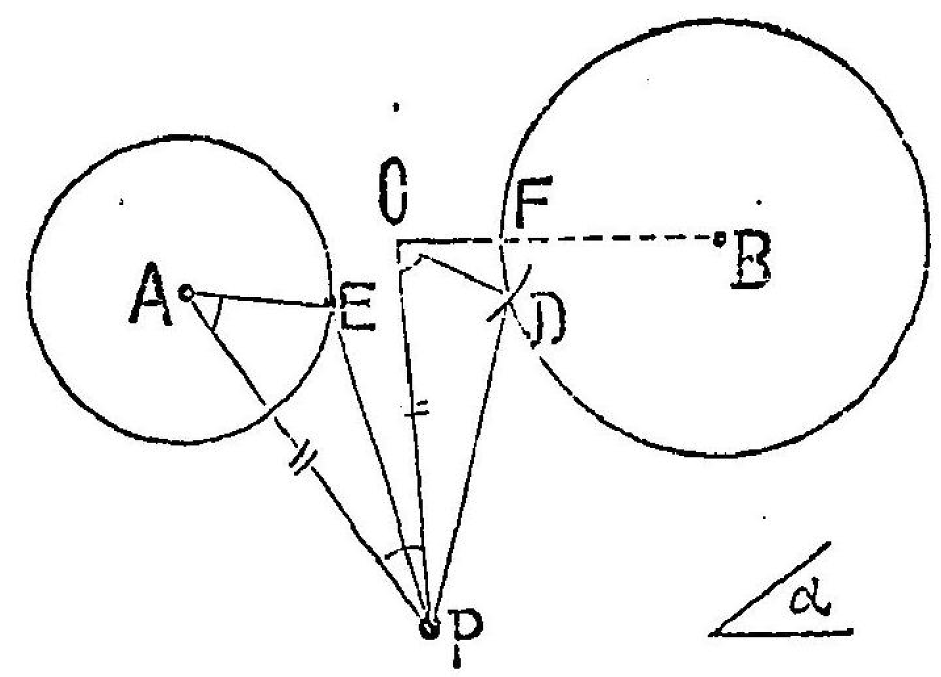
$PC=PA$, 及ビ $\angle APC=\alpha$

ナラシメCヲ中心トシA圓ノ半徑ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キB圓周トノ交点ヲDトシCD, PDヲ結ブ

Aヨリ半徑AEヲ引キ

$\angle PAE=\angle PCD$

ナラシメPEヲ結ブ



然ルトキハPE, PDハ所求ノ直線ナリ。

(証) 兩三角形AEP, CPDニ於テ

$AP=CP$ (作圖)

$AE=CD$ (〃)

$\angle PAE=\angle PCD$ (〃) $\therefore$ $\triangle AEP\equiv\triangle CPD$

$\therefore$ $PD=PE$ (1)

及 $\angle DPC=\angle EPA$

此終リノ式ノ双方ヘ$\angle CPE$ヲ加フルトキハ

$\angle DPE=\angle CPA=\alpha$ (2)

(1)(2)ニヨリPE, PDハ所求ノ直線ナルコトヲ知ル。

(注意壹) CBヲ結ビCBトB圓周トノ交点ヲFトシA圓ノ半徑ヲRトスレバ

$R>CF$ナレバCヲ中心トシRヲ半徑トスル弧ハB圓周ニ貳点ニ於テ相交ル，故ニ此時ハ貳個ノ答解アリ。

$R=CF$ナレバCヲ中心トシRヲ半徑トセル弧ハB圓周トFニ於テ相切ス，故ニ此トキハ唯壹個ノ答解アルノミ

$R<CF$ナレバ答解ナシ。

23. 壹定点Pヨリ壹定圓周ト壹定直線ト迄テ等長ノ直線ヲ引キ其夾角ヲシテ所設ノ角αニ等シカラシムルコトヲ求ム。

(解) 本題ハ前題ニ於テB圓周ノ代リニ直線ヲ用ヒシモノ

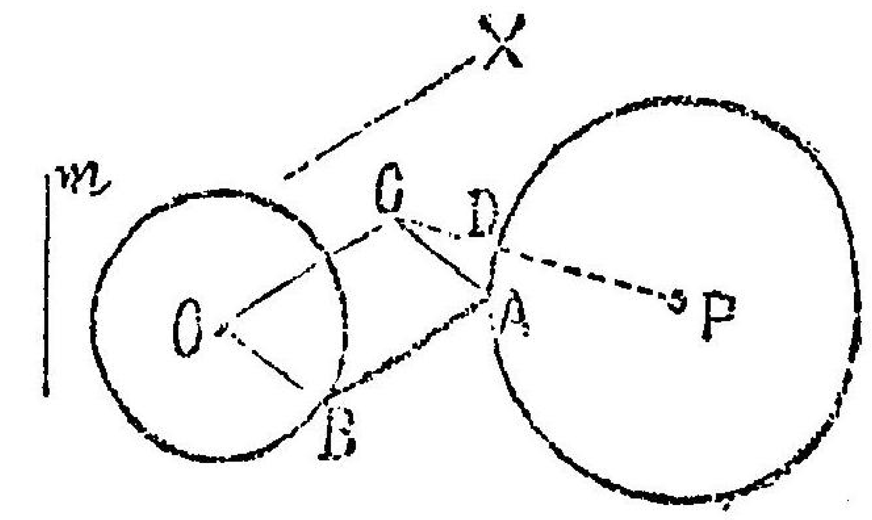
法ハ亦前題ト全ク同シ。

23. 外方ニ於テ相離ルヽ二定圓周間ニ所設ノ定長mト等シキ直線ヲ引キ此直線ヲシテ他ノ定位置ノ直線Xニ平行ナラシメントス其法如何

(作圖) 貳圓ノ中心ヲO, Pトス

Oヨリ定直線Xニ平行ナル直線OCヲ引キ

$OC=m$



ナラシメ，Cヲ中心トシO圓ノ半徑ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ圓周Pトノ交点ヲAトシACヲ結ビOヨリCAニ平行ナル半徑OBヲ引キABヲ結ブ，

ABハ所求ノ直線ナリ。

(証) $CA/\!/OB$, 且 $CA=OB$ (作圖)

故ニ□COABハ平行四角形ナリ。 (93. 定理第四)

$\therefore$ $AB=OC=m$, (90. 定理第貳)

且 $AB/\!/OC$

然ルニ $OC/\!/X$ (作圖)

$\therefore$ $AB/\!/X$.

故ニABハ所求ノ直線ナリ。

(注意壹) CPヲ結ビCPト圓周Pトノ交点ヲDトス

$m<CD$ナルトキハ不能ナリ，但シ此時ハCヲ中心トシmヲ半徑トスル弧ハ圓周Pニ交ラザレバナリ。

$m=CD$ナルトキハCヲ中心トシmヲ半徑トセル弧ハ圓周PDニD)ニ於テ切シ從ツテ唯壹個ノ答解アルノミ。

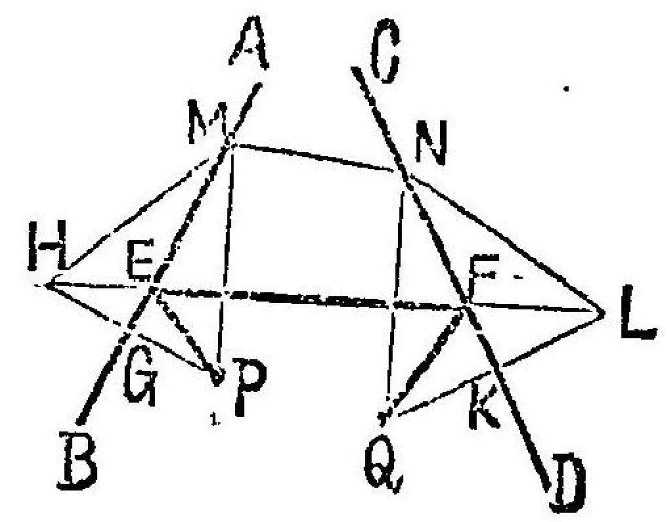
$m>CD$ナルトキハ貳個ノ答解アリ。

(注意貳) PヨリXニ平行線ヲ引キ前法ヲ施スモ可ナリ。

24. 貳直線AB, CDノ間ニアル貳定点ヲP, Qトス今Pヲ發シAB, CDニ觸レシ后ヲQニ達スル諸折線ノ中最短ナルモノヲ求ム.

(作圖) $PG \perp AB$, $HG=PG$, $GK \perp CD$, $KL=QK$ トシ, HLヲ結ビHLガAB, CDニ交ル点ヲE, Fトシ, PE, QF結ブ,

然ルトキハPEFQハ所求ノ最短折線ナリ.



(証) 任意ノ折線PMNQヲ作リMH, NLヲ結ブ,

ABハHPヲ直角ニ貳等分ス,

$\therefore$ $EP=EH$, 及 $MP=MH$,

又CDハQLヲ直角ニ貳等分ス,

$\therefore$ $FQ=FL$, 及 $NQ=NL$

$\therefore$ 折線 $PEFQ=HL$, 及 折線 $PMNQ=HMNL$.

然ルニ四角形HMNLニ於テ

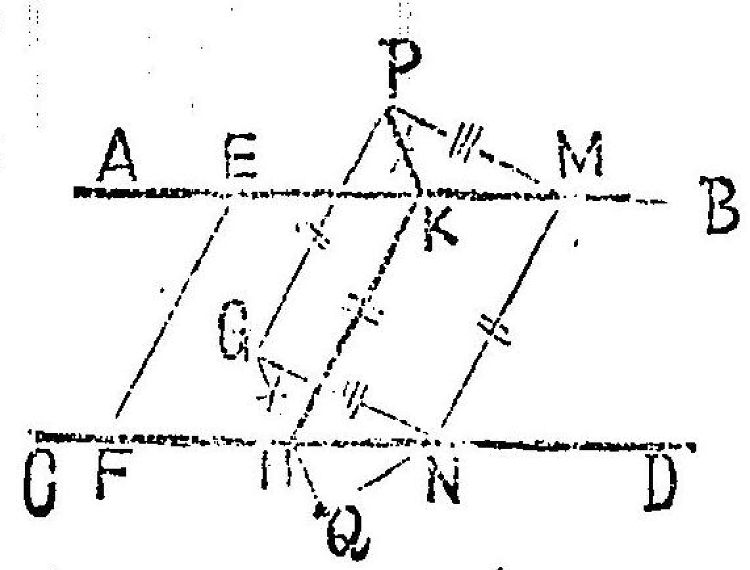
$HL <$ 折線HMNL

$\therefore$ 折線PEFQ $<$ 折線PMNQ

故ニPEFQハ最短折線ナリ.

25. P, Qハ平行貳直線ノ各ノ異側ニアル貳点ナリ, 今Pヲ發シAB, CDニ觸レシ后Qニ達スル諸折線ノ中最短ナルモノヲ求ム

但AB, CDノ間ノ部分ハ定直線Xニ平行スベキモノトス



(証) Xニ平行スル直線ヲAB, CDノ間ニ引キ, 之レヲEFトス,

PヨリXニ平行ナル直線PGヲ引キ

$PG=EF$

トシ, GQヲ結ビGQトCDトノ交点ヲHトシ, HヨリEF(即チX)ニ平行ナル直線HKヲ引キABトノ交点ヲKトシPKヲ結ブ,

然ルトキハ折線PKHQハ所求ノ最短折線ナリ,

(証) PヨリAB, CDニ觸レQニ到ル任意ノ折線PMNQヲ引キ $MN // EF$ ナラシム

今 $PG // EF$

$MN // EF$ $\therefore$ $PG // MN$

又 $PG=MN=EF$

故ニ□PGNMハ平行四角形ナリ. (93. 定理)

$\therefore$ $PM=GN$ 及 $MN=PG$

$\therefore$ 折線 $PMNQ=PG+GN+NQ$

$>PG+GQ$ (a)

然ルニ前ト同理ニヨリ□PGHKハ平行四角形ナリ,

$\therefore$ $PG=KH$, $GH=PK$

故ニ(a)ヨリ折線 $PMNQ>KH+PK+HQ$

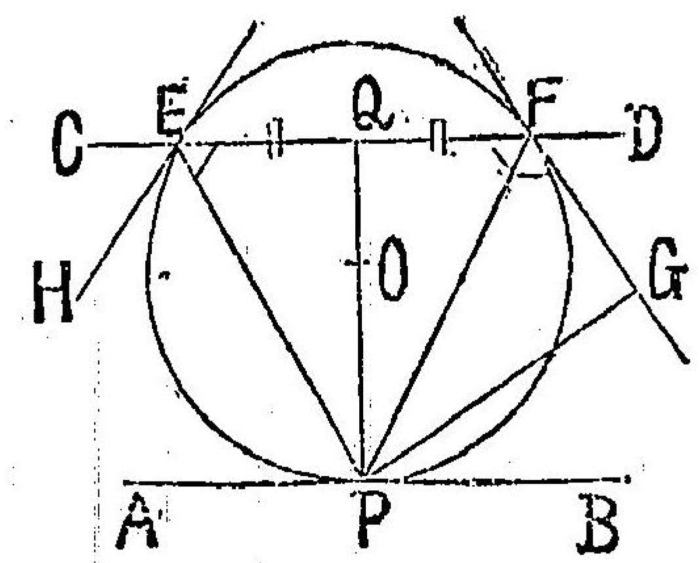
$\therefore$ 折線PMNQ $>$ 折線PKHQ

故ニ折線PKHQハ所求ノ最短折線ナリ.

第貳編雜題

題意不明

1. AB, CD ハ平行ナル定直線ナリ，今 AB 上ノ定点 P ニ於テ AB ニ切スベキ諸圓周ヲ作リ，此等圓周ト CD トノ交点ニ於テ其圓ニ切線ヲ引ク然ルトキハ此各切線ハ恒ニ壹定圓ニ切ス。



(証) P ニ於テ AB ニ切スベキ壹圓周ヲ作リ此圓周ト CD トノ交点ヲ E, F トシ且ツ此圓ノ中心ヲ O トス

E, F ニ於テ其圓ニ切線 EH, FG ヲ引キ OP ヲ結ビ OP ト CD トノ交点ヲ Q トシ PE, PF ヲ結ビ P ヨリ FG ニ垂線 PG ヲ引ク

今 $OP \perp AB$

且 $CD /\!/ AB$　∴ $POQ \perp CD$　(85. 推論)

∴ $EQ=QF$　(125. 推論)

即チ QP ハ EF ヲ直角ニ貳等分ス

∴ $EP=FP$　(101. 定理)

∴ $\angle PFE=\angle PEF$　(60. 定理)

然ルニ　$\angle PEF=\angle PFG$　(148. 定理)

∴ $\angle PFE=\angle PFG$

∴ $PQ=PG$　(103. 定理)

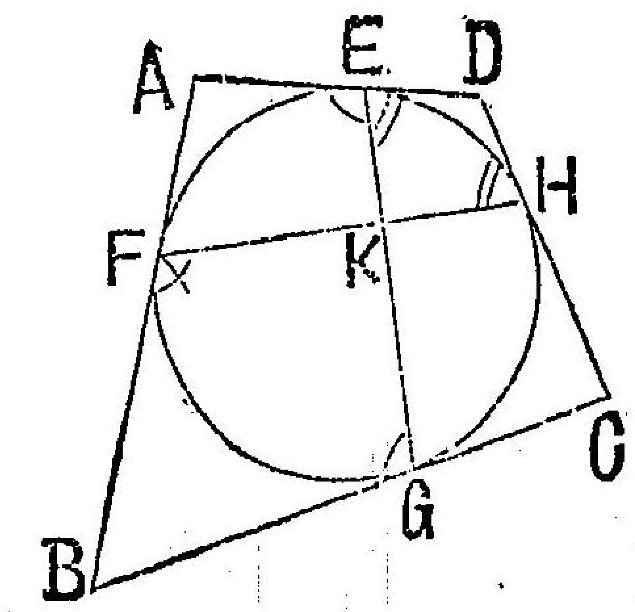
故ニ P ヲ中心トシ PQ ヲ半徑トセル圓周ハ G ヲ過ギ，而シテ FG ハ半徑ニ直立ス，

故ニ FG ハ P ヲ中心トシ PG ヲ半徑トセル圓ニ切ス。

同様ニ切線 EH ハ P ヲ中心トシ PQ ヲ半徑トセル圓ニ切ス。

同理ニ依リ P ニ於テ AB ニ切スル諸圓周ト CD トノ交点ニ於テ其各圓周ニ切スル直線ハ恒ニ P ヲ中心トシ PQ ヲ半徑トセル圓ニ切ス。

2. 內接四角形ノ各邊ニ切シテ圓ヲ畫キ得ルトキハ相對スル邊ノ上ノ切点ヲ結ベル直線ハ直交ス



內接四角形ヲ ABCD トシ各邊ニ切シテ壹圓ヲ畫キ得ルトシ其各切点ヲ E, F, G, H トス

然ルトキハ對邊ノ上ノ切点ヲ結ベル直線 EG, FH ハ直交ス。

(証) EG, FH ノ交点ヲ K トス，

AD, BC ハ切線ナリ。

∴ $\angle AEG=\angle BGE$　[147. 推論 (3)]

而シテ $\angle AEG+\angle DEK=2$ 直角

∴ $\angle BGE+\angle DEK=2$ 直角

又 $\angle BFK+\angle DHK=2$ 直角　(同理)

又 $\angle B+\angle D=2$ 直角　(∵ □ABCD ハ內接四角形)

上ノ三式ヲ加フルトキハ

$\angle BGE+\angle BFK+\angle B+\angle DEK+\angle DHK+\angle D=6$ 直角,　(1)

然ルニ任意ノ四角形ノ四內角ノ和ハ四直角ニ等シ

故ニ □EKHD, □FKGB ノ各內角ノ和ハ八直角ニ等シ

故ニ (1) ニヨリ

$\angle EKH+\angle FKG=2$ 直角

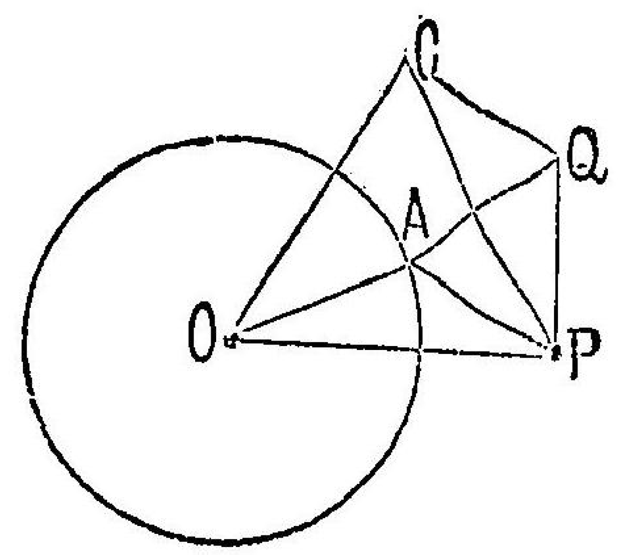
然ルニ　$\angle EKH=\angle FKG$

∴ $2\angle FKG=2$ 直角

∴ $\angle FKG=$ 直角　∴ $EG \perp FH$.

題意不明

3. 圓外ノ壹定点Pヨリ其圓周ニ到ル諸直線ノ上ニ畫ケル等邊三角形ノ頂点ハ貳定圓周ノ孰レカ壹個ノ上ニアリ。



(証) 定圓ノ中心ヲOトシ,PヨリPA定圓周ニ任意ノ直線PAヲ引キPA上ニ等邊三角形PAQヲ畫ク,

又POヲ結ビOP上ニ等邊三角形OPCヲ畫キOA, CQヲ結ブ.

今 $\angle QPA=\angle CPO=\frac{2}{3}$直角,

此兩邊ヨリ $\angle CPA$ヲ減スレバ

$\angle QPC=\angle APO$

故ニ兩三角形CQP, AOPニ於テ

$\angle QPC=\angle APO$

$QP=AP$

$CP=OP$ $\therefore$ $\triangle CQP\equiv\triangle APO$

$\therefore$ $CQ=OA=$(定圓ノ半徑)

故ニQハCヲ中心トシ,定圓ノ半徑ヲ半徑トセル圓周上ニアリ。

又APノ他ノ側($\triangle APQ$ニ對シテ)ニ於テAP上ニ畫ケル等邊三角形ノ頂点ハOPノ他ノ側($\triangle OPC$ニ對シテ)ニ於テOP上ニ畫ケル等邊三角形ノ頂点ヲ中心トシ定圓ノ半徑ヲ半徑トセル圓周上ニアリ。

故ニPヨリ定圓周ニ到ル諸直線上ニ畫ケル等邊三角形ノ頂点ハOPノ兩側ニ於テ其上ニ畫ケル貳個ノ等邊三角形ノ頂ヲ中心トシ定圓ノ半徑ヲ半徑トセル兩圓周ノ孰レカ壹個ノ上ニアリ。

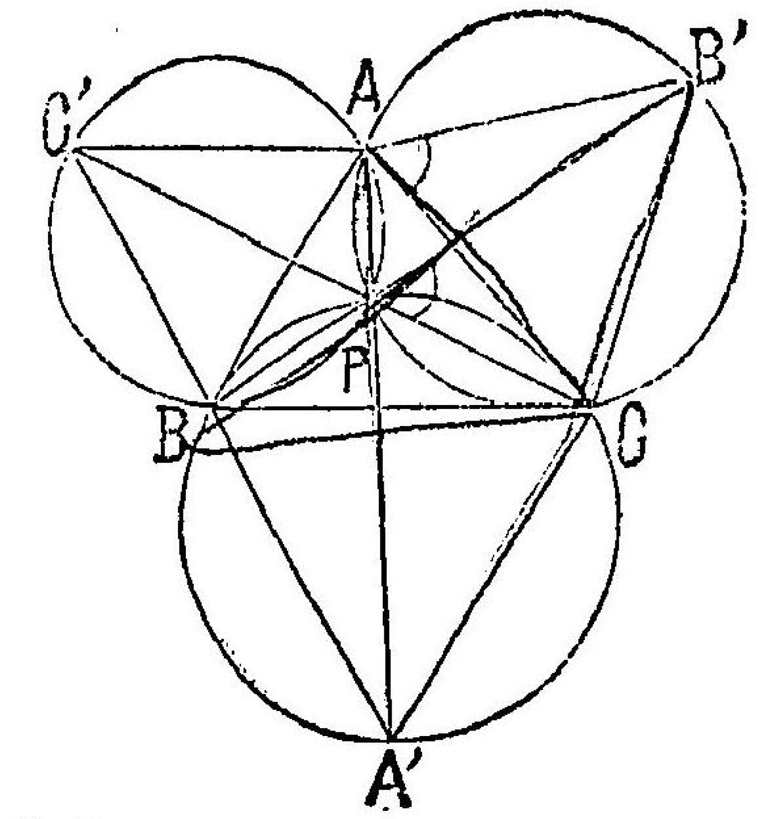
4. 三角形ABCノ各邊上ニ等邊三角形ヲ畫キ之ヲABC′, BCA′, ACB′トス,然ル件ハ

(第一) ABC′, BCA′, ACB′ノ各外接圓周ハ壹点ニ於テ相交ル。

(第二) 三直線AA′, BB′, CC′ハ壹点ニ於テ相交ル。

(第三) $AA'=BB'=CC'$.

(証) (第一) 兩三角形ABC′, ACB′ノ各外接圓周ノ交点ヲPトシPA, PB, PCヲ結ブ



□APCB′ニ於テ

$\angle APC+\angle AB'C=2$直角

(139. 定理)

然ルニ $\angle AB'C=\frac{2}{3}$直角

(86. 定理)

$\therefore$ $\angle APC=2$直角$-\frac{2}{3}$直角

$=\frac{4}{3}$直角

同様ニ $\angle APB=\frac{4}{3}$直角

$\therefore$ $\angle APC+\angle APB=\frac{4}{3}$直角$\times 2$

$=\frac{8}{3}$直角

$\therefore$ $\angle BPC=4$直角$-\frac{8}{3}$直角$=\frac{4}{3}$直角,

$\angle BA'C=\frac{2}{3}$直角

$\therefore$ $\angle BA'C+\angle BPC=\frac{4}{3}$直角$+\frac{2}{3}$直角$=2$直角,

故ニ□A′BPCニ外接圓ヲ畫クコヲ得,

即チ$\triangle ABC'$, $\triangle ACB'$, $\triangle BCA'$ノ各外接圓周ハPニ於テ相交ル。

(第二) BP, B′Pヲ結ブ

$\angle B'PC=\angle B'AC$ (135. 推論).

$=\frac{2}{3}$直角,

又 $\angle BPC=\frac{4}{3}$直角,

$\therefore$ $\angle B'PC+\angle BPC=\frac{2}{3}$直角$+\frac{4}{3}$直角$=2$直角

故ニBP, PB′ハ壹直線ヲナス。

同様ニCPC′及ビAPA′ハ壹直線ヲナス,

即チ三直線AA′, BB′, CC′ハ壹点Pニ於テ相交ル。

(第三) 兩三角形BCB′, ACA′,ニ於テ

$B'C=AC$

$BC=CA'$

$\angle BCB'=\angle ACA'$ $\therefore$ $\triangle BCB'\equiv\triangle ACA'$

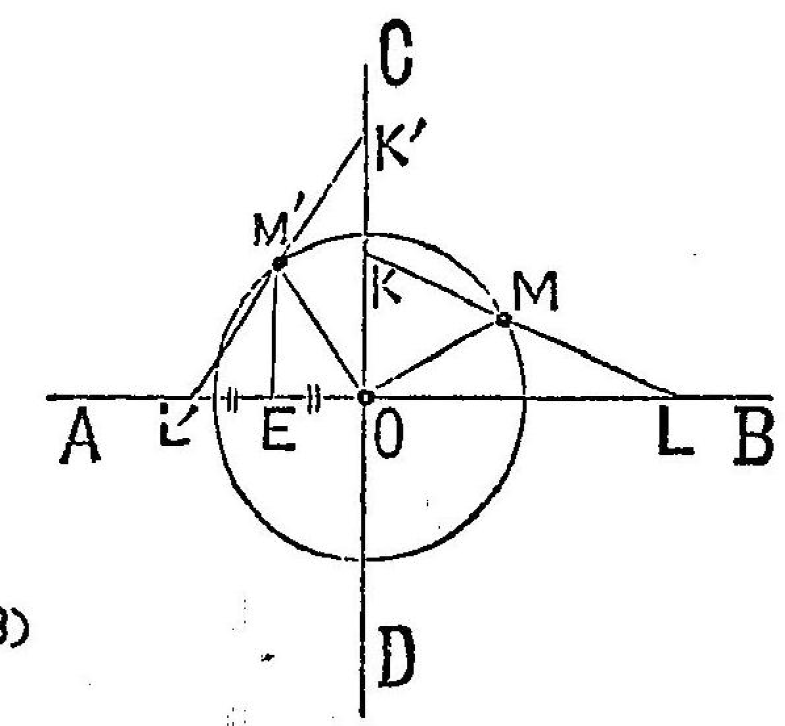
$\therefore$　$BB'=AA'$

同様ニ　$CC'=AA'$　$\therefore$　$AA'=BB'=CC'$.

5. 直交スル貳直線 AB, CD ノ上ニ兩端チ置キツヽ運動スル定長ノ直線ノ中央点ノ軌跡ハ圓周ナリ。

(証) AB, CD ノ交点チ O トシ，定長ノ直線チ l トス，

AB, CD ノ各ノ上ニ兩端チ置ク所ノ定長ノ直線ノ壹個チ KL トシ KL ノ中央点チ M トス，



今 MO チ結ブキハ

$OM=\frac{1}{2}KL$ (第壹編第三節例題8)

$=\frac{1}{2}l$

故ニ M 点ハ O チ中心トシ $\frac{1}{2}l$ チ半徑トセル圓周上ニアリ。同様ニ兩端チ AB, CD 上ニ置キツヽ運動スル直線(l ト等長ナル)ノ中央点ハ恒ニ圓周 OM ノ上ニアリ. [是レ 100. (4) ニ當ル].

又圓周 OM 上ニ任意ノ壹点 M′ チ取リ M′O チ結ビ M′ ヨリ AB ニ垂線 M′E チ下シ EA ノ上ニ L′ 点チ取リ L′E=EO ナラシメ L′M′ チ結ビ L′M′ ト CD トノ交点チ K′ トス，

今 M′E ハ OL′ ノ中央ニ於テ之ニ直立ス，

$\therefore$　$M'L'=M'O$　(101. 定理)

$=\frac{1}{2}l$

而シテ　$EO=EL'$

且　$EM'/\!/OK'$　$\therefore$　$M'L'=M'K'$　(98. 定理)

即　$M'L'=M'K'=\frac{1}{2}l$

故ニ K′L′ ハ l ト等長ニシテ M′ ハ其中央点ナリ。

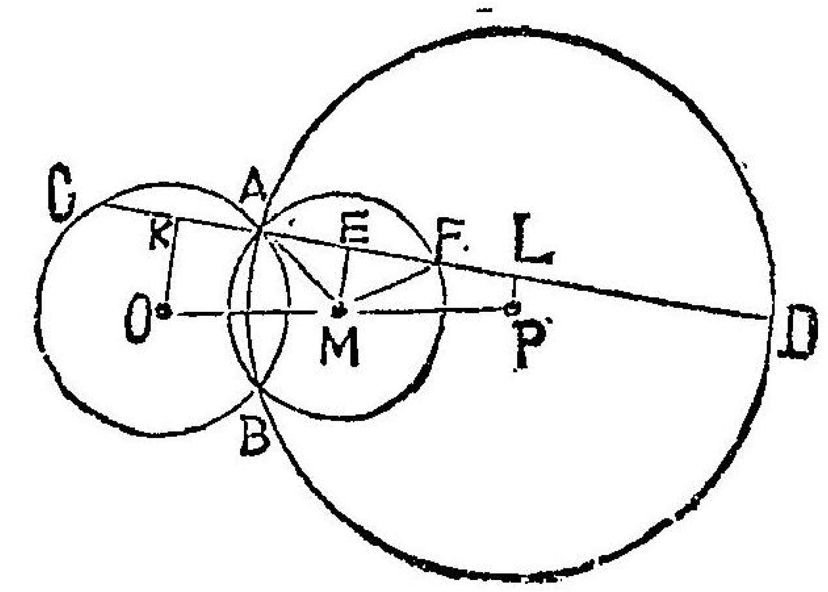
同様ニ圓周 OM 上ノ点ハ兩端チ AB, CD 上ニ置ク所ノ直線(l ト等長ナル)ノ中央点ナリ [100 ノ (1) ニ當ル].

故ニ圓周 OM ハ, AB, CD 上ニ兩端チ置キツヽ運動スル直線(l ト等長)ノ中央点ノ軌跡ナリ。

6. 相交ル貳圓周ノ壹交点 A チ過キテ各圓周間ニ引キタル諸直線ノ中央点ノ軌跡チ求ム。

(解) 各圓ノ中心チ O, P トス

A チ過ギテ各圓周ノ間ニ引キタル任意ノ直線チ CD トシ CD ノ中央点チ F トス，



OP チ結ビ OP ノ中央点チ M トシ

O, M, P ヨリ CD ニ垂線チ引キ之レチ OK, ME, PL トシ MA, MF チ結ブ

$OK\perp AC$　$\therefore$　$AK=CK$　(126. 推論)

又　$PL\perp AD$　$\therefore$　$AL=LD$　(　"　)

$\therefore$　$KL=\frac{1}{2}CD$

又　$CF=\frac{1}{2}CD$　(假　設)

$\therefore$　$KL=CF$　$\therefore$　$FL=CK$

$=AK,$　(1)

今　$OK/\!/ME/\!/PL$

又　$OM=MP$　$\therefore$　$EL=EK$

$\therefore$　$EF=EA$　[(1) ニヨル]

$\therefore$　$MF=MA$ (101. 定理)

故ニ CD ノ中央点ハ M チ中心トシ MA チ半徑トセル圓周上ニアリ

同様ニ A チ過ギテ各圓周間ニ引キタル諸直線ノ中央点ハ孰レモ M チ中心トシ MA チ半徑トセル圓周上ニアリ。

[是レ 100. ノ (4) ニ當ル].

又 M チ中心トシ MA チ半徑トセル圓周上ニ於テ任意ノ点 F チ取ル (但シ別ニ作圖スベキナレ圧略シテ前ノ圖チ用ユ.)

F, ヲ過グル直線ヲ引キ此直線ト各圓周トノ交点ヲ O, D トシ MF ヲ結ビ O, M, P ヨリ CD ニ垂線 OK, ME, PL ヲ引ク.

今　$OK /\!/ ME /\!/ PL$

且　$OM=MP$　∴　$KE=EL$

又　$ME \perp AF$　∴　$EA=EF$　(126, 推論)

∴　$AK=FL$

$OK \perp AC$　∴　$AK=CK$

∴　$CK=FL$

此ノ式ノ各邊ヘ KF ヲ加フレバ $CF=KL$

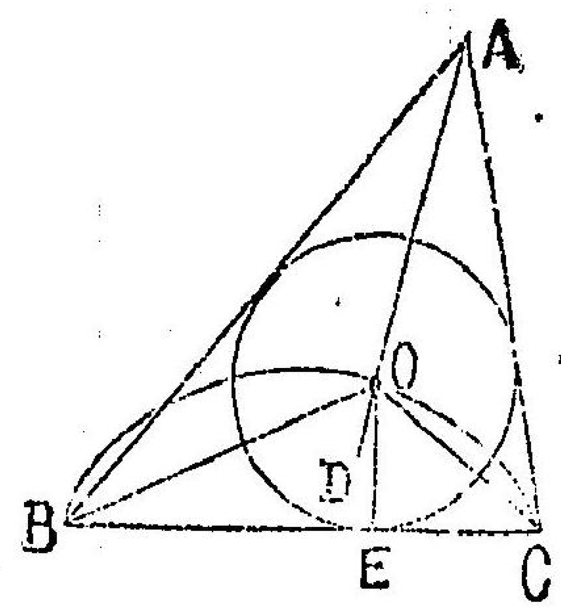
然ルニ $AK=CK$, $AL=LD$　∴　$KL=\frac{1}{2}CD$,　∴　$CF=\frac{1}{2}CD$

即チ F ハ CD ノ中央ナリ.

同様ニ圓周 MF 上ノ点ハ A ヲ過キテ各圓周間ニ引キタル直線ノ中央点ナリ　(b)　〔是レ 100. ノ (2) ニ當ル〕

(a) (b) ニヨリ圓周 MA ハ所要ノ軌跡ナリ.

7. 定長ニシテ且ツ定位置ノ直線 BC ヲ底トシ定角 α ヲ頂角トセル諸三角形ノ内接圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム



(解) BC ヲ底トシ α ヲ頂角トセル任意ノ三角形ヲ ABC トシ其内心ヲ O トシ AO, BO, CO ヲ結ビ AO ヲ D マデ引張ス

$$\angle DOC=\angle OAC+\angle OCA$$

然ルニ AO ハ ∠BAC ヲ等分シ OC ハ ∠ACB ヲ等分ス

∴　$\angle DOC=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ACB$

又　$\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC$　(前ト同理ニテ)

∴　$\angle BOC=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB+\angle ACB)$

然ルニ　$\angle ABC+\angle A\ B+\angle ACB=2$ 直角

∴　$\angle BOC=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\times 2$ 直角

$=\frac{1}{2}\alpha+$ 直角

同理ニヨリ A ガ如何ニ動クモ ∠BOC ハ恒ニ($\frac{1}{2}\alpha+$ 直角) ニ等シ,

而シテ ∠BOC ノ弐邊ハ定点 B, C ヲ過グ

故ニ O ハ BC 上ニ於テ($\frac{1}{2}\alpha+$ 直角) ヲ含ム弓形ノ弧ノ上ニアリ(a)

〔是レ 100. ノ (4) ニ當ル〕

又 BC 上ニ於テ($\frac{1}{2}\alpha+$ 直角) ヲ含メル弓形ノ弧ノ上ニ任意ノ一点 O ヲ取リ $OE \perp BC$ トス(但シ別ニ作圖スベキナレモ畧シテ前ノ圖ヲ用ユ)

而シテ O ヲ中心トシ OE ヲ半徑トシ圓周ヲ畫キ B, 及ビ C ヨリ此圓ニ切線ヲ引キ此兩切線ノ交点ヲ A トシ AO, BO, CO ヲ結ビ AO ヲ D マデ引張ス,

然ルトキハ前ト同理ニヨリ

$\angle BOC=\frac{1}{2}\angle BAC+$ 直角

而シテ　$\angle BOC=\frac{1}{2}\alpha+$ 直角

$\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\alpha$　∴　$\angle BAC=\alpha$,

故ニ O 点ハ BC ヲ底トシ α ヲ頂角トセル三角形ノ内心ナリ.

同様ニ弓形 BOC 上ノ点ハ孰レモ BC ヲ底トシ α ヲ頂角トセル三角形ノ内心ナリ　(b)　〔是レ 100. ノ (1) ニ當ル〕

(a) 及ビ (b) ニヨリ弓形 BOC ノ弧ハ所求ノ軌跡ナリ.

8. 定位置ニシテ定長ノ直線ヲ底トシ定角ヲ頂角トセル三角形ニ於テ垂心及ビ外接円ノ中心ノ軌跡ヲ求ム

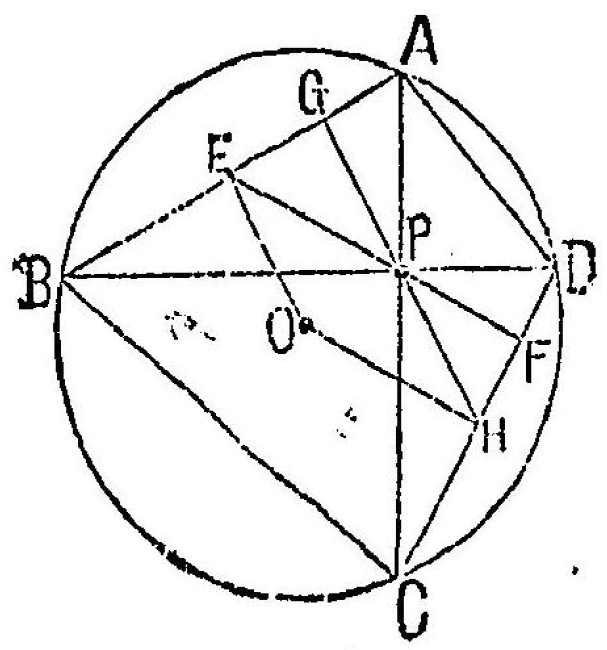
(解) 殆ンド前題ト同様ナリ故ニ省畧ス,

9. 内接四角形ノ對角線ガ直交スルトキハ外接圓ノ中心ヨリ一邊ニ到ル距離ハ其對邊ノ半ニ等シ.

内接四角形ヲ ABCD トシ對角線 AC, BD ハ直交スルモノトス

然ルトキハ外接圓ノ中心 O ヨリ一邊 AB ニ到ル距離 OE ハ AB ノ對邊 CD ノ半ニ等シ.

(證) 對角線ノ交点ヲPトス



今 PF⊥CD トスレバ FP ノ引張線ハ AB ノ中央点ヲ過グ

(第貳編第三節例題10)

然ルニ OE⊥AB, 故ニ E ハ AB ノ中央ナリ (第二編第三節例題10.)

故ニ FP ノ引張線ハ E ヲ過グ

同様ニ OH⊥CD, PG⊥AB トスレバ GP ノ引張線ハ H ヲ過グ

而シテ OE, HG ハ共ニ AB ニ直立スルヲ以テ

$$HG \parallel OE$$

同様ニ

$$EF \parallel OH$$

故ニ □EOHP ハ平行四角形ナリ。

$$\therefore \quad OE=PH$$

然ルニ △CPD ニ於テ ∠CPD ハ直角ニシテ H ハ CD ノ中央点ナリ。

$$\therefore \quad PH=\tfrac{1}{2}CD$$ (第壹編第三節例題8.)

$$\therefore \quad OE=\tfrac{1}{2}CD.$$

10. 内接四角形ノ對角線ガ直交スル時ハ對角線ノ交点ヨリ各邊ニ下セル垂線ノ底及ビ各邊ノ中央点ハ同壹ノ圓周上ニアリ

内接四角形 ABCD ノ對角線 AC, BC ハ直交スルトシ其交点ヲ P トシ P ヨリ各邊ニ下セル垂線ノ底ヲ E, F, G, H トシ, 各邊ノ中央点ヲ K, L, M, N トス

然ル時ハ E, F, G, H, K, L, M, N ナル八点ハ同壹ノ圓周上ニアリ

(證) GP ノ引張線ハ K ヲ過ギ HP ハ L ヲ過ギ, EP ハ M ヲ過ギ, FP ハ N ヲ過グ, (第二編第三節例題10.)

KL, LM, MN, NK ヲ結ブ,

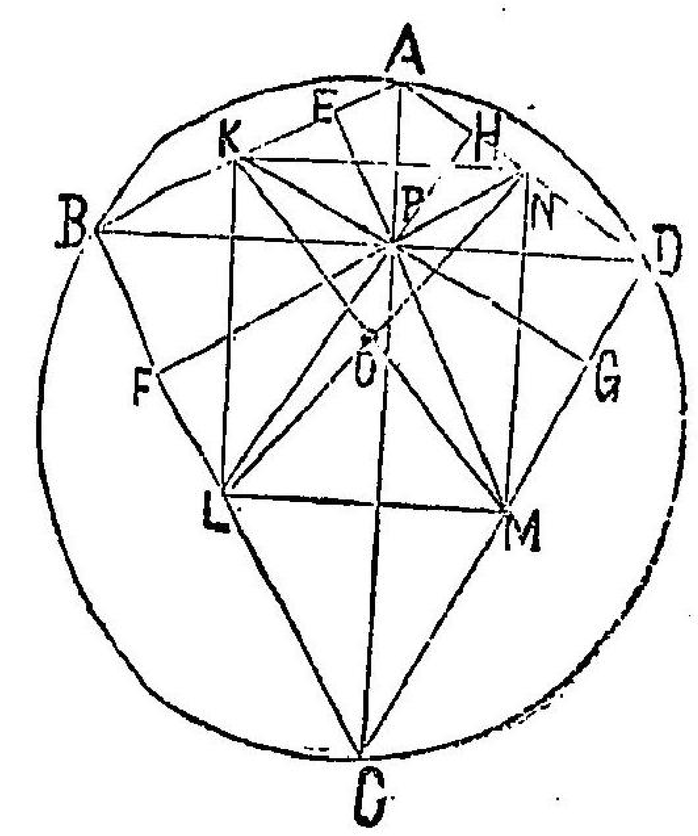
今 AK=KB

BL=LC ∴ KL // AC (59丁. 99 推論)

同様ニ KN // BD

∴ ∠NKL=∠APB (第壹編第三節例題4.)

=直角



同様ニ ∠KLM, ∠LMN, ∠MNK ハ共ニ直角ナリ。

故ニ KLMN ハ矩形ナリ。

故ニ KM, LN ヲ結ビ其交点ヲ O トスル時ハ

$$OK=OL=OM=ON$$

故ニ O ヲ中心トシ OK ヲ半徑トセル圓周ハ K, L, M, N ヲ過グ

而シテ ∠KEM=直角ナルヲ以テ E ハ O ヲ中心トシ OK ヲ半徑トセル圓周上ニアリ。

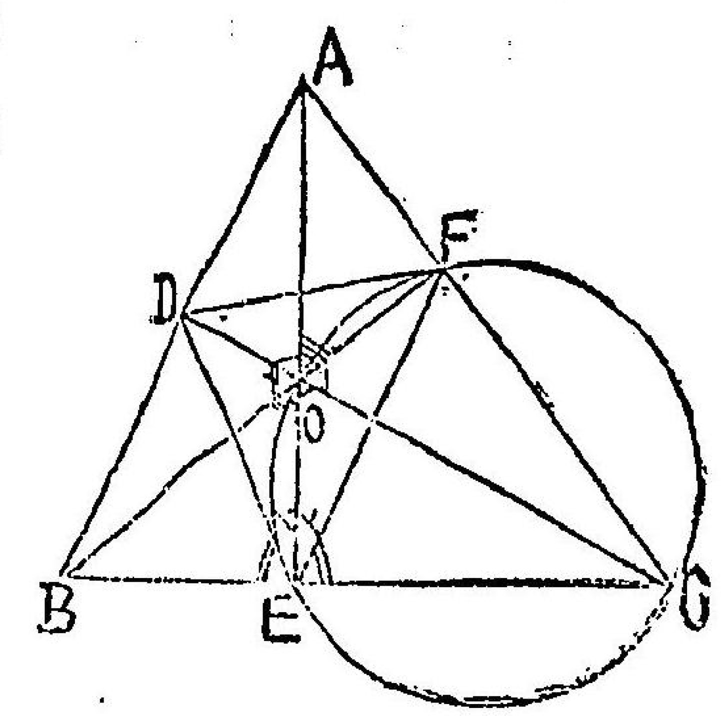
同様ニ H, G, F ハ O ヲ中心トシ OK ヲ半徑トセル圓周上ニアリ

故ニ E, F, G, H, K, L, M, N ナル八個ノ点ハ同壹ノ圓周上ニアリ。

11. 三角形ノ各角頂ヨリ各對邊ニ下セル垂線ノ底ヲ與ヘテ其三角形ヲ畫クコトヲ求ム。

三角形ノ各角頂ヨリ各對邊ニ下セル垂線ノ底ヲ D, E, F トシ其三角形ヲ畫クコトヲ求ム

(作圖) DE, EF, FD ヲ結ブ △DEF ノ各角ノ等分線ノ交点ヲ O トシ



BEC⊥OE, CFA⊥OF, ADB⊥OD トシ BC, CA, AB ニテ成ル三角形 ABC ハ所求ノモノナリ。

(證) AO, BO, CO ヲ結ブ

∠OFC=∠OEC=直角 (作圖)

故ニ ⊙FOCE ハ内接四角形ナリ (141 定理)

$$\therefore \quad \angle FOC = \angle FEC$$

同様ニ $\angle DOB = \angle DEB$,

然ルニ $\angle OEC = \angle OEB =$ 直角, $\angle OEF = \angle OED$ (作圖)

$$\therefore \quad \angle FEC = \angle DEB$$

$$\therefore \quad \angle FOC = \angle DOB$$

同様ニ $\angle COE = \angle AOD$

$$\angle EOB = \angle FOA$$

上ノ三式ヲ加フルトキハ

$$\angle FOC + \angle COE + \angle EOB = \angle DOB + \angle AOD + \angle FOA$$

$$= 2 \text{ 直角}$$

故ニ BO, OF ハ同一ノ直線ナリ, 而シテ BF ハ AC ニ直立ス,

故ニ F ハ B ヨリ AC ニ下セル垂線ノ底ナリ.

同様ニ E ハ A ヨリ BC ニ下セル垂線ノ底ニシテ D ハ C ヨリ AB ニ下セル垂線ノ底ナリ

故ニ △ABC ハ所求ノモノナリ.

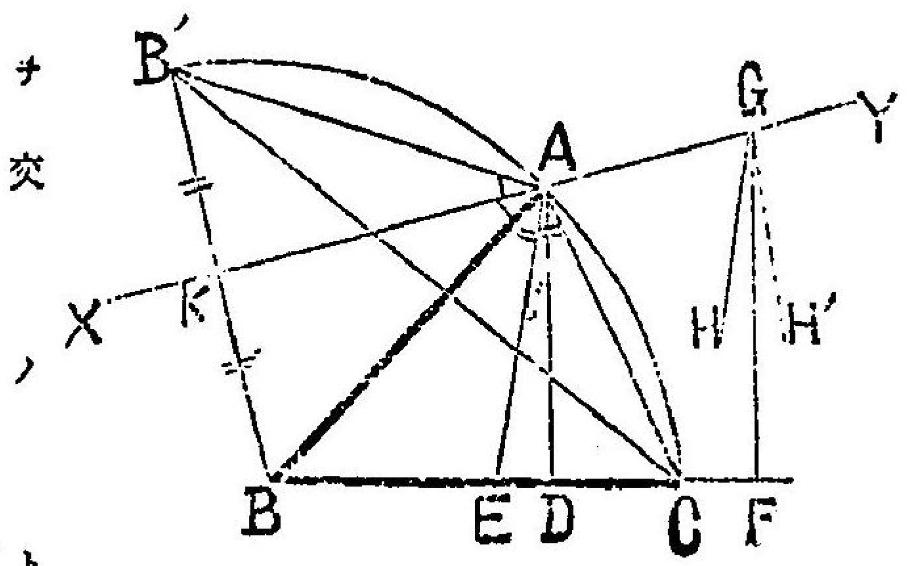
12. 定位置ニシテ且ツ定長ノ直線ヲ底トシ頂点ヲ他ノ定直線上ニ置ク所ノ三角形ヲ畫キ兩底角ノ差ヲシテ所設ノ角ニ等シカラシムルコヲ求ム.

定位置ニシテ且定長ノ直線ヲ BC トシ他ノ定直線ヲ XY トシ所設ノ角ヲ α トス

BC ヲ底トシ頂角ヲ XY 上ニ置キ且ツ兩底角ノ差ガ α ニ等シキ三角形ヲ畫クコヲ求ム.

(作圖) BC (若クハ其引張線) 上ニ任意ノ一点 F ヲ取リ F ヨリ BC ニ垂線 FG ヲ引キ FG ト XY トノ交点ヲ G トシ, G ヨリ直線 GH ヲ引キ $\angle HGF = \frac{1}{2}\alpha$ ナラシム.

又 B ヨリ XY ニ垂線 BK ヲ引キ之レヲ B′ マデ引張シ B′K ヲ BK ト等長ナラシム



而シテ B′C ヲ結ビ B′C ノ上ニ $\angle HGK$ ノ貳倍ヲ含ム弓形ヲ畫キ, 此弓形ノ弧ト XY トノ交点ヲ A トシ AB, AC ヲ結ブ

然ルトキハ △ABC ハ所求ノ三角形ナリ.

(証) AB′ ヲ結ビ AE // GH トシ AD ⊥ BC トス, 然ルトキハ

$$\angle KAE = \angle HGK$$

而シテ $\angle B'AC = 2\angle HGK$ $\quad\therefore\quad \angle B'AC = 2\angle KAE \quad (1)$

而シテ $\triangle AKB \equiv \triangle AKB'$

$\therefore\quad \angle BAK = \angle B'AK \quad\therefore\quad \angle B'AB = 2\angle BAK \quad (2)$

(1) ヨリ (2) ヲ減ズレバ $\quad \angle BAC = 2\angle BAE$

故ニ AE ハ $\angle BAC$ ノ等分線ナリ.

而シテ AD ⊥ BC ナリ.

$\therefore\quad \angle EAD = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle ABC)$ (第壹編第三節例題 10.)

而シテ $\angle EAD = \angle HGF$ $\quad$ ($\because$ GH // AE, GF // AD)

$$= \frac{1}{2}\alpha$$

$\therefore\quad \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle ABC) = \frac{1}{2}\alpha \quad\therefore\quad \angle ACB - \angle ABC = \alpha.$

故ニ △ABC ハ所求ノモノナリ.

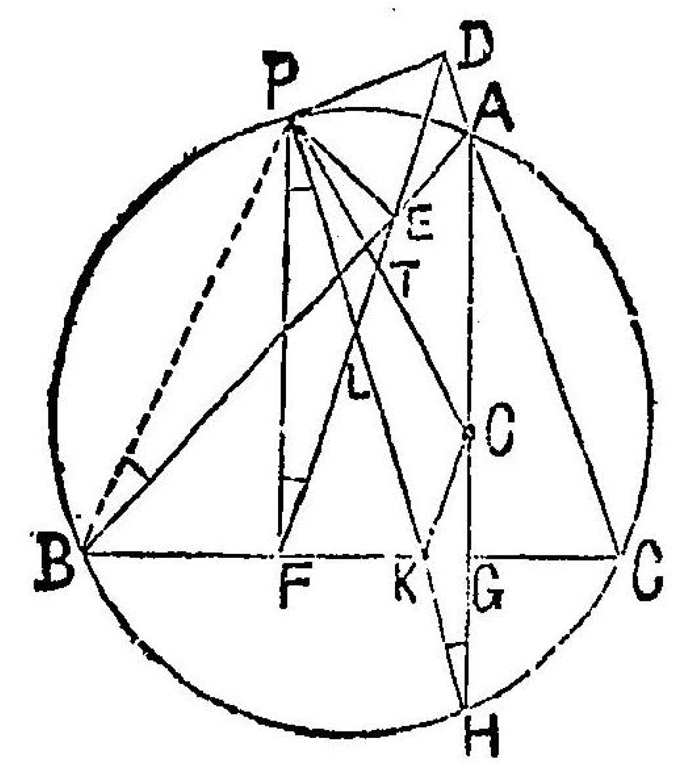
(注意) GF ノ他ノ側ニ GH′ ヲ引キ $\angle FGH'$ ヲ $\frac{1}{2}\alpha$ ニ等シクシ前法ヲ施スモ可ナリ,

但シ $\angle HGK$, 或ハ $H'GK'$ ノ二倍ガ貳直角ヨリ大ナル場合ハ不能ナリ.

13. 三角形 ABC ノ垂心ト其外接圓周上ノ一点 P トヲ結ベル直線ハ P 点ニ於ケル △ABC ノしむそん線ニテ等分セラル

(第二編第三節例題 19 注意)

(証) AO ト BC トノ交点ヲ G トシ又 AO ト外接圓周トノ交点



ヲHトシPHヲ結ビPHトBCトノ交点ヲKトシKOヲ結ブ

又Pニ於ケル△ABCノしむそん線ヲDEFトシDEFガPH, OPニ交ル点ヲL, Tトス

今 $\angle H=\angle PBA$ (1)

然ルニ $\angle PEB=\angle PFB=$ 直角

故ニ四点P, E, F, Bハ同壹ノ圓周上ニアリ,故ニPBヲ結ベバ

$\therefore\ \angle PBA=\angle EFP$ (2)

(1) (2) ヨリ $\angle H=\angle EFP$

又 $\angle H=\angle LPF$ (内錯角) $\therefore\ \angle EFP=\angle HPF$

$\therefore\ PL=LF$

又$\angle LFK$ハ$\angle LFP$ノ余角ニシテ$\angle LKF$ハ$\angle HPF$ノ余角ナリ

$\therefore\ \angle LFK=\angle LKF$ $\therefore\ LK=LF$

$\therefore\ PL=LK$

即チLハPKノ中央点ナリ。 (α)

又 $OG=GH$ (第貳編第三節例題2)

$\therefore\ \triangle OKG\equiv\triangle KGH$

$\therefore\ \angle KOG=\angle H$

然ルニ $\angle H=\angle LFP$ $\therefore\ \angle KOG=\angle LFP$

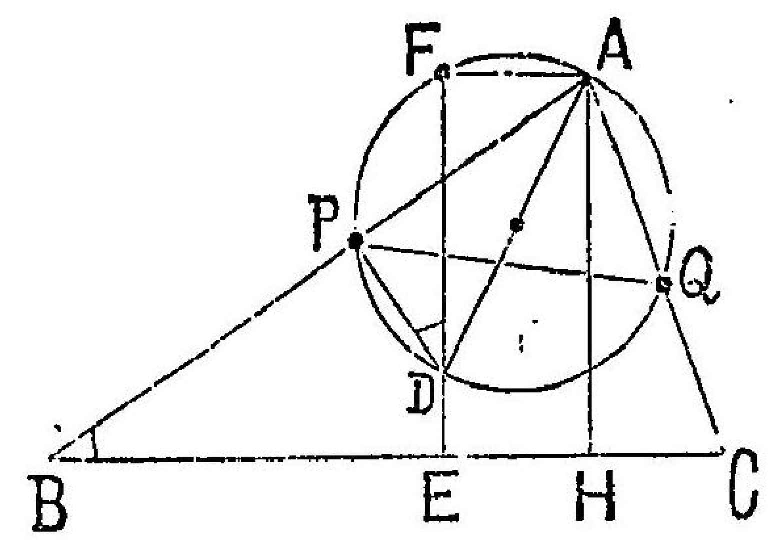
而シテAG, PFハ共ニBCニ直立ナルヲ以テ平行ス

故ニ容易ニ$OK \parallel DF$ナルヲ証シ得,

即チ△PKOニ於テLハPKノ中央点ニシテLTハOK邊ニ平行ス $\therefore\ PT=TO.$ (98.定理)

即チ証ヲ得タリ

14. ABCハ壹個ノ三角形ニシテ, P, Qハ貳定点ナリ,今ABハPヲ過キACハQヲ過ギツヽ△ABCヲ旋轉セシムル時ハBC邊ハ定圓ニ切ス.



（證）運動セル三角形ノ一個ノ位置ヲABCトス

A, P, Qヲ過クル圓ヲ畫キAヨリ直徑ADヲ引キDヨリBCニ垂線DEヲ引キ, EDヲ引長シ圓周APQトノ交点ヲFトス

然ル時ハFヲ中心トシFEヲ半徑トセル圓周ハBCニ切ス,

故ニFヲ中心トシEFヲ半徑トセル圓周ハ定圓ナルコヲ證スレバ可ナリ,

次ニ之レヲ證ス.

PQ, PD, AF,ヲ結ヒAヨリBCニ垂線AHヲ引ク

P, Qハ定点ナリ,故ニPQハ定位置ニシテ且ツ定長ノ直線ナリ

而シテ$\angle PAQ$ハ定角ナリ,

故ニ弓形PAQハ定弓形ナリ

今ADハ直徑ナリ $\therefore\ \angle DPB=$ 直角,

又 $\angle E=$ 直角,

$\therefore\ \angle PDE+\angle B=2$ 直角 (136定理)

又 $\angle PDE+\angle PDF=2$ 直角 $\therefore\ \angle PDF=\angle B,$

然ルニ$\angle B$ハ定角ナリ,故ニ$\angle PDF$ハ定角ナリ,

故ニ弧PFハ定弧ナリ,

而シテ弓形PFQハ定弓形ニシテPハ定点ナリ,故ニFハ定点ナリ,

又□AFEHハ矩形ナリ,故ニ$EF=AH$ナリ,

然ルニAHハ定長ナルヲ以テEFハ定長ナリ,

上ノ如クFハ定点ニシテEFハ定長ナリ,

故ニFヲ中心トシEFヲ半徑トセル圓ハ定圓ナリ.

第三編

比例

定義

191. 比 (Ratio) 同種類ノ貳量アリテ其壹量ハ他ノ壹量ノ幾倍ナルカヲ表ハス數ヲ此貳量ノ比トイフ.

例ヘハ同種類ノ貳量ヲA, Bトシ, AハBノm倍ニ等シキ𪜈ハmハA, Bノ比ナリ, 而シテA, Bノ比ハ A : B 或ハ$\frac{A}{B}$ニテ之レヲ表ハス.

可約比 貳量ノ比カ整數或ハ分數ナル𪜈ハ此比ヲ可約比トイフ, 例ヘハ$\frac{A}{B}$カ$\frac{2}{3}$若クハ5ナル𪜈ハ$\frac{A}{B}$ハ可約比ナリ.

不可約比 貳量ノ比カ不盡根ナル𪜈ハ不可約比トイフ例ヘハ$\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ナレハ此比ハ不可約比ナリ.

192. 比例 (Proportion) 四個ノ量A, B, C, Dアリ但シA, Bハ同種類ノ量ニシテC, Dモ亦同種類ノ量ナリトス, 而シテ

$$A : B = C : D$$

ナル𪜈ハA, B, C, Dハ比例ヲナストイフ, 而シテA, B, C, Dヲ順次ニ比例ノ第壹項, 第貳項, 第三項, 第四項トイフ.

同種類ノ三量A, B, Cアリテ A : B=B : C

ナレハBヲA, Cノ比例中項ト稱シ, CヲA, Bノ比例第三項トイフ.

193. 貳變量X, Yアリ但シ此貳量ハ相關係シテ變スルモノトス (但シ貳變量X, Yカ相關係シテ變スルトハX變スル𪜈ハY亦從ツテ變シ, 又Yカ變スル𪜈ハXモ亦從ツテ變スルヿヲイフ, 而シテXカAナル値ヲ取ル𪜈, YハBナル値ヲ取レハA, Bヲ相應スル値トイフ) 而シテXノ任意ノ貳値ノ比カYノ之レニ應スル貳値ノ比ニ等シキ𪜈, X, Yハ比例ストイフ.

194. 凡ソ壹量 (例ヘハA) ヲ測ルトハ此量ト同種類ノ壹定ノ量 (例ヘハB) ヲ標準トシテ初メノ量ヲ測ルヿナリ, 換言スレハ計ラントスル量 (即チA) ト標準トスル定量 (即チB) トノ比ヲ求ムルヿナリ, 而シテ此比ヲ初ノ量 (即チA) ノ數値トイヒ標準トセル定量Bヲ單位ト稱ス.

195. 同種類ノ貳量ヲA, Bトシ其數値ヲa, bトシ, sヲ單位トス即チ$\frac{A}{s}=a$, $\frac{B}{s}=b$トス但シa, bハ整數, 分數或ハ不盡根ナリ,

然ル𪜈ハ

$$\begin{aligned} A &= s\times a \\ &= \frac{B}{b}\times a \qquad (\because\ \tfrac{B}{s}=b \text{ ナレバナリ}) \\ &= \frac{a}{b}\times B \end{aligned}$$

即チAハBノ$\frac{a}{b}$倍ナリ, $\therefore\ \frac{A}{B}=\frac{a}{b}$.

故ニ貳量A, Bノ比ハ各數値ノ比ニ等シ.

之ニ由テ貳量A, Bノ比, 即チ$\frac{A}{B}$ハAノ數値トBノ數値トノ比ト考フルヿヲ得ルナリ

故ニ比及ヒ比例ニ關スル代數學ノ定理ハ之レヲ幾何學ニ應用スルヿヲ得ルナリ. 而シテ主モニ用ユル定理ハ次ノ如シ,

(1) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ナレバ$\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$ナリ.

(2) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ニシテA, B, C, Dハ同種類ナレバ$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$ナリ.

(3) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ナレバ$\frac{A+B}{A}=\frac{C+D}{C}$及ヒ$\frac{A+B}{B}=\frac{C+D}{D}$ナリ.

(4) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ナレバ$\frac{A-B}{A}=\frac{C-D}{C}$及ヒ$\frac{A-B}{B}=\frac{C-D}{D}$ナリ

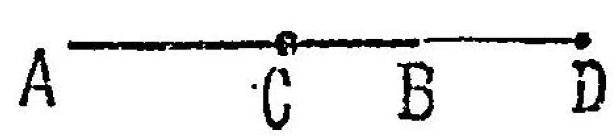
(5) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ナレバ$\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}$ナリ.

(6) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\dots\dots$ニシテ各量凡ヘテ同種類ナル𪜈ハ此比ハ凡ヘテ$\frac{A+C+E+\dots\dots}{B+D+F+\dots\dots}$ニ等シ.

第　壹　節　一根源之定理

定　　義

196. **有限直線之貳部分**　有限直線ノ上ニアル壹点ハ其有限直線ヲ内方ニ於テ貳分ス(或ハ内分ス)トイフ．又有限直線ノ引張線上ノ点ハ其直線ヲ外方ニ於テ貳分ス，(或ハ外分ス)トイフ，而シテ上ノ何レノ場合ニ於テモ，分点ヨリ有限直線ノ両端ニ到ル距離ハ其貳部分ナリ．



例ヘハ右ノ図ニ於テCハ直線ABヲ内方ニ於テ貳分ストイフ或ハCハABヲ内分ストイヒAC, BCハ其貳部分ナリ，又DハABヲ外方ニ於テ貳分ス，或ハABヲ外分ストイヒ而シテDA, DBハ其貳部分ナリ

定　理　壹

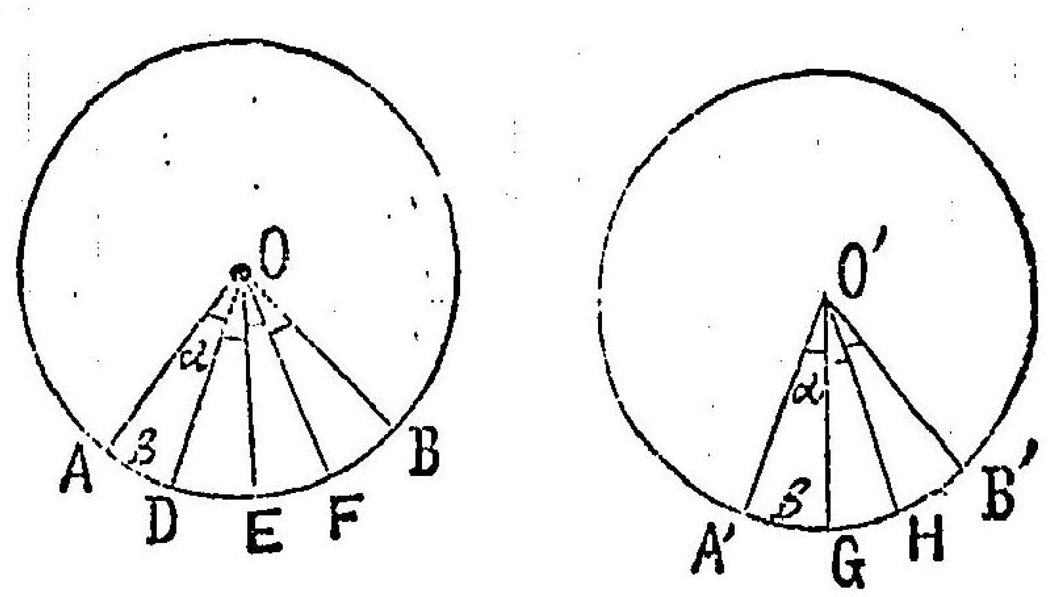
197. 圓ノ中心角ハ其夾弧ト比例ス．

任意ノ兩中心角ヲAOB, A'O'B'トスルトキハ

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{弧AB}{弧A'B'}\text{ナリ}$$

(証)　(第壹)　$\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}$ カ可約比ナル場合．

此ノ時ハ $\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}$ ハ整数若クハ分数ナリ而シテ之レヲ $\dfrac{4}{5}$ ト假定ス



今 $\angle A'O'B'$ ヲ半徑OG, OHニテ三等分シ其壹部分ヲ α トス然ルトキハ弧A'B'ハ亦OG, OHニテ三等分セラル而シテ其壹部分

ヲ β トス　即チ　$\angle A'O'B'=3\alpha$,　及ビ　弧 $A'B'=3\beta$ ナリ，

今 $\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\dfrac{4}{3}$　$\therefore$　$\angle AOB=\angle A'O'B'$ ノ $\dfrac{4}{3}$ 倍

$$=\frac{\angle A'O'B'}{3}\times 4$$

$$=4\alpha$$

故ニ $\angle AOB$ ヲ半徑OD, OE, OFニテ四等分スルトキハ其各分ハ α ニ等シ從ツテ弧ABハOD, OE, OFニテ四等分セラレ且ツ其各分ハ B ニ等シ　$\therefore$　弧 $AB=4B$　　(166. 定理)

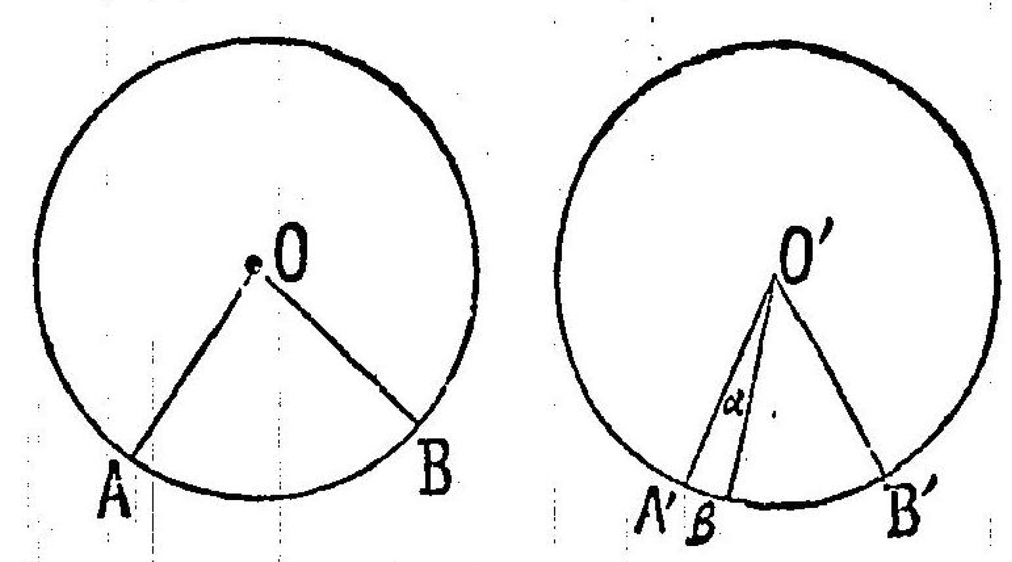
$$=4\times\frac{弧A'B'}{3}$$

$$=弧A'B'\text{ノ}\frac{4}{3}\text{倍}$$

$$\therefore\quad \frac{弧AB}{弧A'B'}=\frac{4}{3},$$

$$\therefore\quad \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{弧AB}{弧A'B'}$$

(第二)　$\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}$ カ不可約比ノ場合．　(此場合ハ初學者ハ省略スルモ可ナリ)



$\angle A'O'B'$ ヲ n 個ニ等分ス，然ルトキハ弧A'B'モ亦 n 個ニ等分セラル而シテ $\angle A'O'B'$ ノ $\dfrac{1}{n}$ ヲ α トシ，弧A'B'ノ $\dfrac{1}{n}$ ヲ β トス，

而シテ $\angle AOB$ ハ α ノ整数倍若クハ分数倍ナルコナシ，如何トナレハ $\angle AOB$ カ若シ α ノ整数倍若シクハ分数倍ナルトキハ $\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}$ ハ整数若クハ分数トナリテ假設ニ反スレハナリ，而シテ $\angle AOB$ ハ α ノ m 倍ト $m+1$ 倍トノ間ニアリトス但シ m ハ整数ナリ，

然ルトキハ弧ABハ亦從ツテβノm倍ト$m+1$倍トノ間ニアリ,

$$\therefore\quad \angle AOB > m\times\alpha$$

$$\therefore\quad \angle AOB > m\times\frac{\angle A'O'B'}{n}$$

$$\therefore\quad \angle AOB > \frac{m}{n}\times\angle A'O'B' \qquad \therefore\quad \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'} > \frac{m}{n};$$

同樣ニ $$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'} < \frac{m+1}{n};$$

故ニ $\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}$ ハ $\dfrac{m}{n}$ ト $\dfrac{m+1}{n}$ トノ間ニアリ.

又 $$弧AB > m\times\beta$$

$$\therefore\quad 弧AB > m\times\frac{弧A'B'}{n},$$

$$\therefore\quad 弧AB > \frac{m}{n}\times 弧A'B', \qquad \therefore\quad \frac{弧AB}{弧A'B'} > \frac{m}{n};$$

同樣ニ $$\frac{弧AB}{弧A'B'} < \frac{m+1}{n};$$

故ニ $\dfrac{弧AB}{弧A'B'}$ ハ $\dfrac{m}{n}$ ト $\dfrac{m+1}{n}$ トノ間ニアリ.

斯ノ如ク $\dfrac{\angle AOB}{\angle A'OB'}$ 及 $\dfrac{弧AB}{弧A'B'}$ ハ共ニ $\dfrac{m}{n}$ ト $\dfrac{m+1}{n}$ トノ間ニアリ.

但シ $\dfrac{m}{n}$ ト $\dfrac{m+1}{n}$ トノ差ハ $\dfrac{1}{n}$ ヨリ小ナリ

故ニ $\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}$ ト $\dfrac{弧AB}{弧A'B'}$ トノ差ハ $\dfrac{1}{n}$ ヨリ小ナリ,

但シnハ$\angle AOB$ヲ等分セシ個數ニシテ如何程大ナルモ差支ナシ,故ニ $\dfrac{1}{n}$ ハ如何程小ナル數トモ爲フルコトヲ得ルナリ.

從ツテ $\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}$ ト $\dfrac{弧AB}{弧A'B'}$ トノ差ハ如何程小サキ數ヨリモ小ナリ,

但シ如何程小サキ數ヨリモ小ナル數ハ零ナリ,

$$\therefore\quad \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'} - \frac{弧AB}{弧A'B'} = 0$$

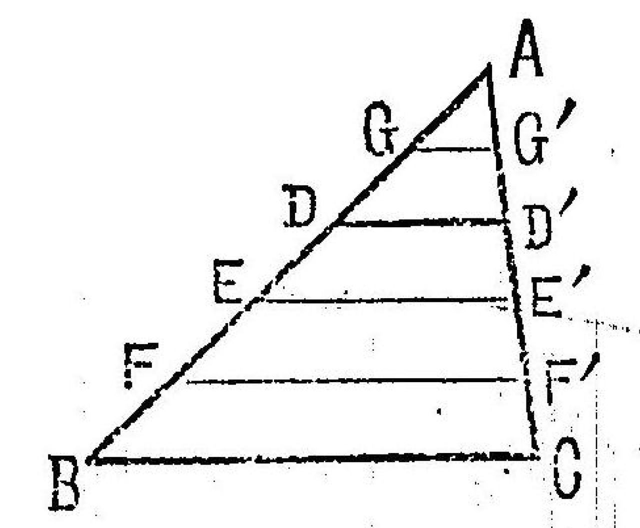
$$\therefore\quad \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'} = \frac{弧AB}{弧A'B'}$$

定理貳

128. 三角形ノ底邊ニ平行ニ引キタル直線ガ他ノ貳邊ノ各ヲ貳分スルトキ其相應部分ハ比例ス.

三角形ヲABCトシ底邊BCニ平行ナル直線トAB, ACトノ交点ヲD, D'トス,

然ルトキハ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AD'}{D'C}$ ナリ.



(證) (第壹) $\dfrac{AD}{DB}$ ガ可約比ノ場合.

$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{2}{3}$ ト假定ス,

今DBヲE, Fニ於テ三等分シ,其各部分ヲlトス,

然ルトキハ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{2}{3}$ ナルヲ以テ
$$AD=DB\times\frac{2}{3}$$
$$=\frac{DB}{3}\times 2=l\times 2$$

故ニ今ADヲGニ於テ貳等分スルトキハ其各部分ハlニ等シ,

即 $AG=GD=DE=EF=FB=l$

ナリ,故ニ今G, E, FヨリBC(或ハDD')ニ平行線ヲ引キACトノ交点ヲG', E', F'トスレバ $AG'=G'D'=D'E'=E'F'=F'C$ (96,定理)

而シテ此各部分ヲl'トスレバ $AD'=2l'$, $D'C=3l'$ ナリ

$$\therefore\quad \frac{AD'}{D'C}=\frac{2l'}{3l'}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad \frac{AD}{DB}=\frac{AD'}{D'C}$$

(第貳) $\dfrac{AD}{DB}$ ガ不可約比ノ場合

此場合ニ於ケル證明ハ前章第貳ト同法ナリ故ニ省略ス.

(注意) 底邊BCニ平行ナル直線ガAB, ACヲ外方ニ於テ貳分スルトキハ其相應各部ハ比例ス.

199. 推論壹 前章ノ圖ニ於テ $\frac{AD}{AB}=\frac{AD'}{AC}$ 及ビ $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{D'C}$

(證) $\frac{AD}{DB}=\frac{AD'}{D'C}$　$\therefore\ \frac{AD+DB}{AD}=\frac{AD'+D'C}{AD'}$　〔195. (3)〕

$$\therefore\ \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AD'}.$$

$$\therefore\ \frac{AD}{AB}=\frac{AD'}{AC}.\qquad〔195.\ (1)〕$$

又 $\frac{AD}{DB}=\frac{AD'}{D'C}$　$\therefore\ \frac{AD+DB}{DB}=\frac{AD'+D'C}{D'C}$,　〔195. (3)〕

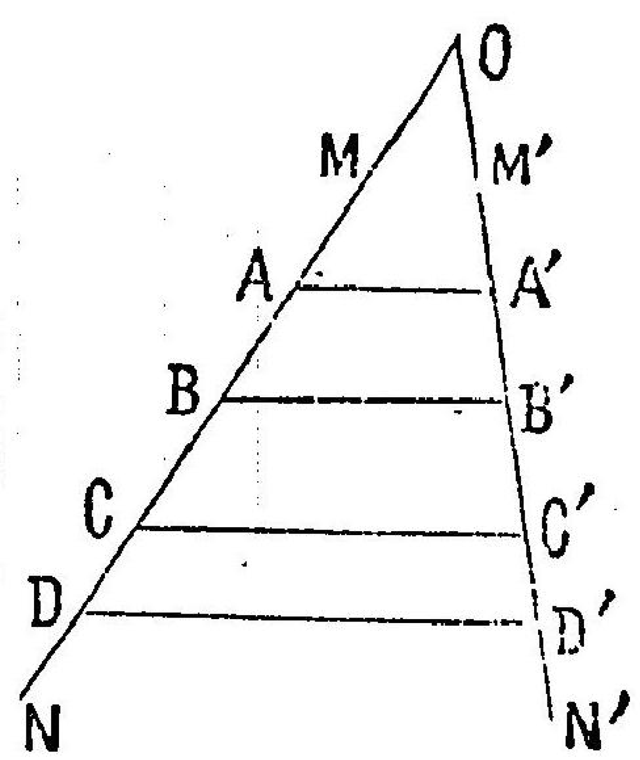
$$\therefore\ \frac{AB}{DB}=\frac{AC}{D'C}.$$

200. 推論貳 不平行貳直線ヲ平行諸直線ニテ截ルキハ其貳直線上ノ相應部分ハ比例ス。

不平行貳直線ヲ MN, M′N′ トシ平行諸直線ヲ AA′, BB′, CC′ DD′……トス

然ルキハ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{C'B'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}=\cdots\cdots$$



(證) MN, M′N′ ノ交点ヲ O トス

△OBB′ ニ於テ AA′ // BB′

$$\therefore\ \frac{OB}{OB'}=\frac{AB}{A'B'}$$

又 △OCC′ ニ於テ BB′ // CC′,

$$\therefore\ \frac{OB}{OB'}=\frac{BC}{B'C'}$$

$$\therefore\ \frac{OB}{O'B'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

同樣ニ $\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}=\cdots\cdots$

$$\therefore\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}=\cdots\cdots$$

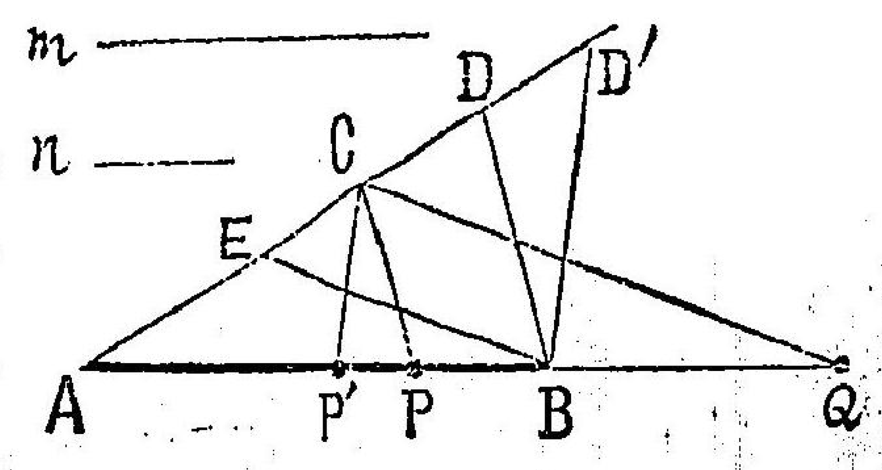
定理三

201. 有限直線ヲ所設ノ比ニ内分或ハ外分スルヿヲ得, 而シテ斯ノ如キ分点ハ唯壹個ツヽナリ.

有限直線ヲ AB トシ所設ノ比ヲ $\frac{m}{n}$ トス, 然ルキハ

(第一) AB ヲ $\frac{m}{n}$ ノ比ニ内分或ハ外分スルヿヲ得,

(第二) AB ヲ $\frac{m}{n}$ ノ比ニ内分スル点及ビ外分スル点ハ唯壹個ツヽナリ。



(證) (第一) A ヲ過ギテ任意ノ直線 AC ヲ引キ其上ニ於テ m ト等長ニ AC ヲ取リ, 又 n ト等長ニ CD, CE ヲ取リ DB, EB ヲ結ビ C ヨリ DB, EB ニ平行線 CP, CQ ヲ引ク,

然ルキハ △ABD ニ於テ DB // CP

$$\therefore\ \frac{AP}{PB}=\frac{AC}{CD}=\frac{m}{n}$$

即チ P ハ AB ヲ $\frac{m}{n}$ ノ比ニ内分スル点ナリ.

又 △AQC ニ於テ CQ // EB

$$\therefore\ \frac{AQ}{BQ}=\frac{AC}{CE}=\frac{m}{n}$$

即チ Q ハ AB ヲ $\frac{m}{n}$ ノ比ニ外分スル点ナリ.

斯ノ如ク AB ヲ $\frac{m}{n}$ ノ比ニ内分及ビ外分スルヿヲ得.

(第貳) AB 上ニ於テ P ノ外ニ P′ ヲ取リ P′C ヲ結ビ B ヨリ P′C ニ平行線ヲ引キ AC トノ交点ヲ D′ トス

然ルキハ △ABD′ ニ於テ D′B // P′C

$$\therefore\ \frac{AP'}{P'B}=\frac{AC}{CD'}=\frac{m}{CD'}$$

然ルニ $CD' \neq n$ ∴ $\dfrac{AP'}{P'B} \neq \dfrac{m}{n}$

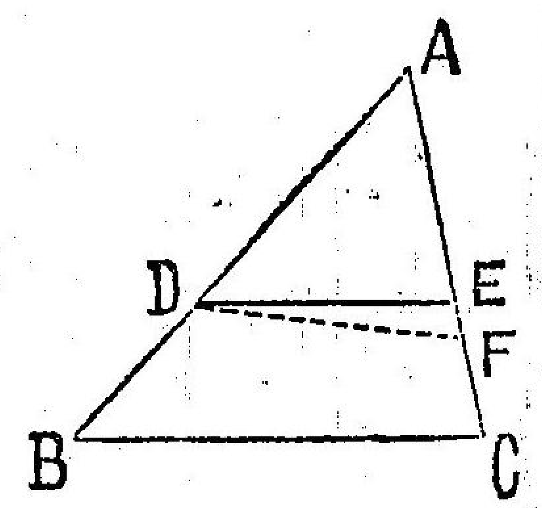
故ニABヲ $\dfrac{m}{n}$ ノ比ニ内分スル点ハPノミナリ.

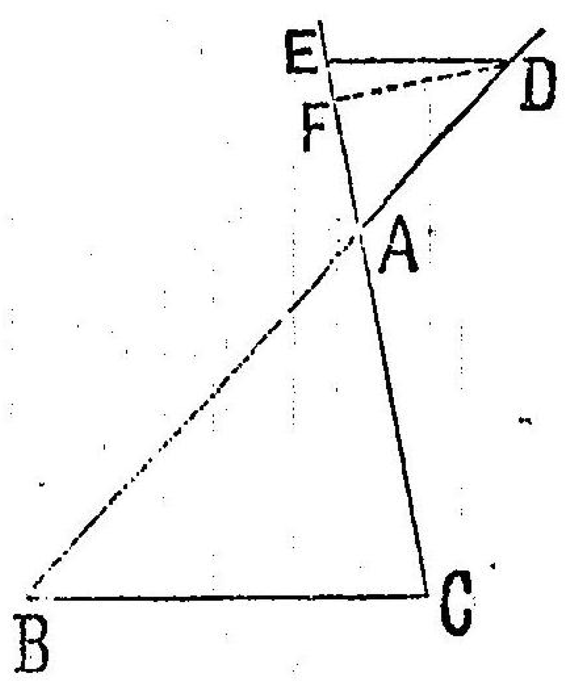
同様ニABヲ $\dfrac{m}{n}$ ノ比ニ外分スル点ハQノミニ限ル.

定理四

202. 三角形ノ二邊ヲ等比ニ内分或ハ外分スル直線ハ底邊ニ平行ス.

三角形ABCニ於テAB, ACヲ等比ニ内分シ或ハ外分スル直線ヲDEトス, 即チ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ トス,





然ル𪜈ハDEハBCニ平行ス

(證) DヨリBCニ平行線ヲ引キACトノ交点ヲFトス

然ル𪜈ハ $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AF}{FC}$ (198. 定理)

又 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$ (假設) ∴ $\dfrac{AF}{FC}=\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AD}{DB}$,

即チACハE及ビFニ於テ $\dfrac{AD}{DB}$ ノ比ニ内分或ハ外分セラル, 是レ不合理ナリ, (201. 定理)

故ニFハEト一致ス, 即チDFハDEト一致ス,

故ニDEハBCト平行ス.

定理五

203. 三角形ノ頂角及ビ其外角ノ各等分線ハ底邊ヲ他ノ二

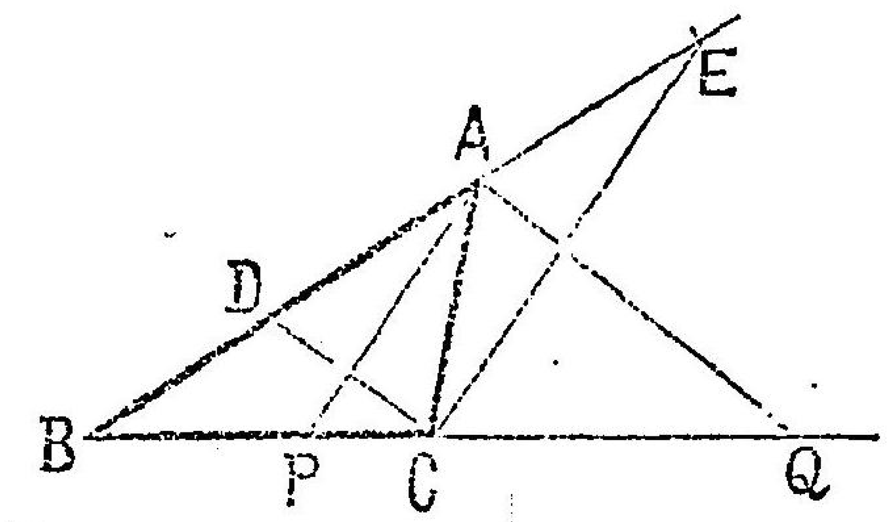
ノ比ニ内分或ハ外分ス.

三角形ABCニ於テ

(第壹) 頂角Aノ等分線APハBCヲAB, ACノ比ニ内分シ,

(第貳) 頂角ノ外角ノ等分線AQハBCヲAB, ACノ比ニ外分ス

(證) (第一) CヨリAPニ平行スル直線ヲ引キBAトノ交点ヲEトス,



然ル𪜈ハ

$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{AB}{AE}$,

然ルニ $\angle E=\angle BAP$ (應角)

$\angle ACE=\angle CAP$

而シテ $\angle BAP=\angle CAP$

∴ $\angle E=\angle ACE$ ∴ $AE=AC$ ∴ $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{AB}{AC}$.

(第貳) CヨリAQニ平行線CDヲ引キABトノ交点ヲDトス, 然ル𪜈ハ

$\dfrac{BQ}{CQ}=\dfrac{AB}{AD}$

然ルニ $\angle ADC=\angle EAQ$ (應角)

$\angle ACD=\angle CAQ$ (錯角)

而シテ $\angle EAQ=\angle CAQ$ (假設)

∴ $\angle ADC=\angle ACD$ ∴ $AD=AC$ ∴ $\dfrac{BQ}{CQ}=\dfrac{AB}{AC}$.

204. 推論 三角形ノ頂角頂ヨリ對邊ニ至ル直線ガ其邊ヲ他ノ二邊ノ比ノ如ク内分或ハ外分スル𪜈ハ其直線ハ其頂角若クハ其外角ヲ等分ス.

三角形ヲABCトス(前章ノ圖ヲ用ユ) 然ル𪜈ハ

(第一) $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{AB}{AC}$ ナル𪜈ハAPハ$\angle BAC$ヲ等分ス.

(第二) $\dfrac{BQ}{CQ}=\dfrac{AB}{AC}$ ナル𪜈ハAQハ$\angle BAC$ノ外角ヲ等分ス

（証）（第壹）CヨリAPニ平行線ヲ引キBAトノ交点ヲEトス，

然ルトキハ $\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AE}$

然ルニ $\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{AC}$ ∴ $\frac{AB}{AE}=\frac{AB}{AC}$

∴ $AE=AC$

∴ $\angle ACE=\angle E$

然ルニ $\angle ACE=\angle CAP$（錯角） $\angle E=\angle BAP$（應角）

∴ $\angle CAP=\angle BAP$

即チAPハ∠BACヲ等分ス．

（第貳）CヨリAQニ平行線CDヲ引キABトノ交点ヲDトス

然ルトキハ $\frac{BQ}{CQ}=\frac{AB}{AD}$

又 $\frac{BQ}{CQ}=\frac{AB}{AC}$ ∴ $\frac{AB}{AD}=\frac{AB}{AC}$

∴ $AD=AC$.

∴ $\angle ACD=\angle ADC$

然ルニ $\angle ACD=\angle CAQ$（錯角），$\angle ADC=\angle EAQ$

∴ $\angle CAQ=\angle EAQ$

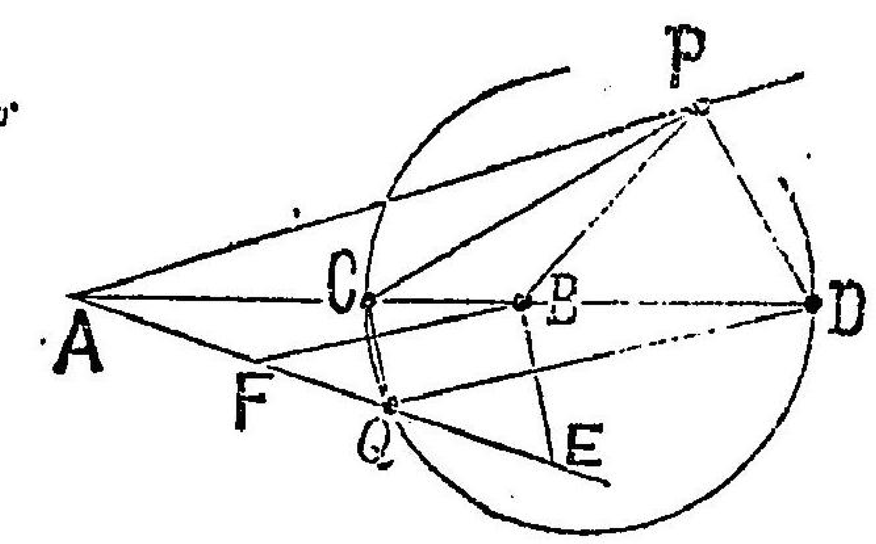
故ニAQハ∠BACノ外角ヲ等分ス．

定理六

205. 二定点ニ到ル距離ノ比ガ所設ノ比ニ等シキ点ノ軌跡ハ，其二定点ヲ結ベル直線ヲ所設ノ比ニ内分及ビ外分シ此両分点間ノ距離ヲ直徑トセル圓周ナリ．

二定点ヲA, Bトシ所設ノ比ヲ $\frac{m}{n}$ トシ，直線ABヲ $\frac{m}{n}$ ノ比ニ内分及ビ外分スル点ヲC, Dトス 即チ $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}$ トス

然ルトキハA, Bニ到ル距離ノ比ガ $\frac{m}{n}$ ノ比ニ等シキ点ノ軌跡ハCDヲ直徑トセル圓周ナリ．



（証）A, Bニ到ル距離ノ比ガ $\frac{m}{n}$ ニ等シキ点ヲPトス，即チ

$$\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$$

トス，PC, PDヲ結ブ

$$\frac{PA}{PB}=\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}$$

故ニPCハ∠BPAヲ等分シ，

PDハ∠BPAノ外角ヲ等分ス． ∴ ∠CPD＝直角（第壹節例題4）

故ニPハCDヲ直徑トセル圓周上ニアリ (α)

〔是レ100ノ(4)ニ當ル〕

又CDヲ直徑トセル圓周上ニ於テ任意ノ点Qヲ取リQA，QC, QDヲ結ブ，BヨリQCニ平行線ヲ引キAQトノ交点ヲEトシ，又BヨリQDニ平行線BFヲ引キAQトノ交点ヲFトス

今 $CQ/\!/BE$ ∴ $\frac{QA}{QE}=\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$ (1)

又 $BF/\!/QD$ ∴ $\frac{QA}{QF}=\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}$

∴ $\frac{QA}{QE}=\frac{QA}{QF}$ ∴ $QE=QF$

然ルニ $BF/\!/QD$, $BE/\!/CQ$ ∴ ∠FBE＝∠CQD＝直角

∴ $FQ=BQ=QE$

∴ $\frac{QA}{QB}=\frac{QA}{QE}=\frac{m}{n}$ 〔(1)ニヨル〕

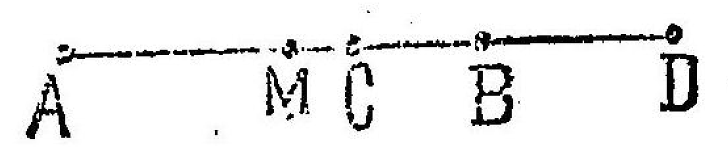
故ニCDヲ直徑トセル圓周上ノ總ベテノ点ヨリA, Bニ到ル距離ノ比ハ $\frac{m}{n}$ ニ等シ 〔是レ100ノ(1)ニ當ル〕 (β)

(α) (β) ニヨリCDヲ直徑トセル圓周ハ所求ノ軌跡ナリ．

第壹節例題

1. A, C, B, D ハ壹直線上ノ四点ニシテ $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$ ナリトシ且ツ M ハ AB ノ中央点ナリ, 然ルトキハ AM 若クハ BM ハ MC, MD ノ比例中項ナリ.

(証) $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{BD}$.



∴ $\frac{AC-BC}{AC+BC}=\frac{AD-BD}{AD+BD}$; (a)

然ルニ $AC-BC=MC+AM-BC=MC+MB-BC=MC+MC=2MC$,

$AC+BC=AB=2AM$,

$AD-BD=AB=2AM$,

$AD+BD=MD+AM+BD=MD+MB+BD=MD+MD=2MD$

故ニ (a) 式ハ次ノ如クナル,

$\frac{2MC}{2MA}=\frac{2MA}{2MD}$ ∴ $\frac{MC}{MA}=\frac{MA}{MD}$,

故ニ MA (即チ MB) ハ MC, MD ノ比例中項ナリ.

(注意) A, C, B, D ハ壹直線ノ四点ニシテ $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$ ナルトキハ A, C, B, D ヲ調音列点ト称ス.

2. A, C, B, D ハ壹直線上ノ四点ニシテ M ハ AB ノ中央ナリ而シテ AM 或ハ MB ガ AC, AD ノ比例中項ナルトキハ $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$ ナリ. (前題ノ逆ナリ).

(証) 題意ニ依リ $\frac{MC}{AM}=\frac{AM}{MD}$

∴ $\frac{AM+MC}{AM-MC}=\frac{DM+AM}{DM-AM}$

∴ $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$

即チ証ヲ得タリ

3. 三角形 ABC ニ於テ D ハ BC ノ中央ナリ, 而シテ ADB 角ノ等分線ト AB トノ交点ヲ E トシ, ADC 角ノ等分線ト AC トノ交点ヲ F トス, 然ルトキハ直線 EF ハ BC ニ平行ス.

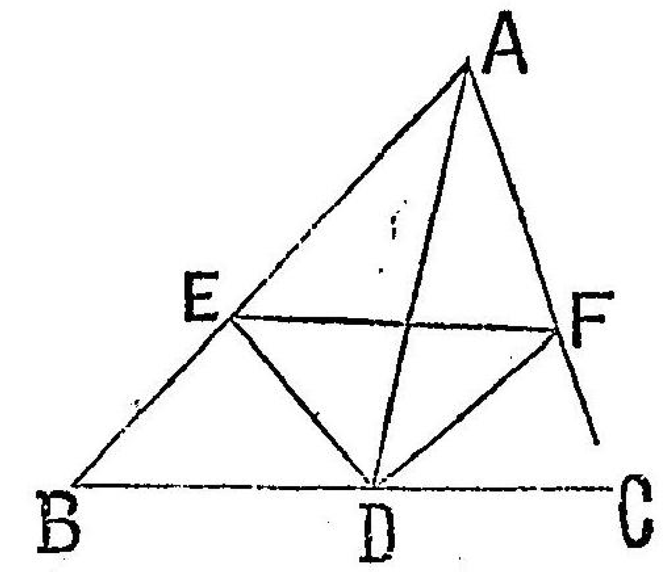
(証) △ADB ニ於テ DE ハ ∠ADB ヲ等分ス

∴ $\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{BD}$

同様ニ $\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DC}$

$=\frac{AD}{BD}$ (∵ DC = BD)

∴ $\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$



故ニ直線 EF ハ BC ニ平行ス (定理弐)

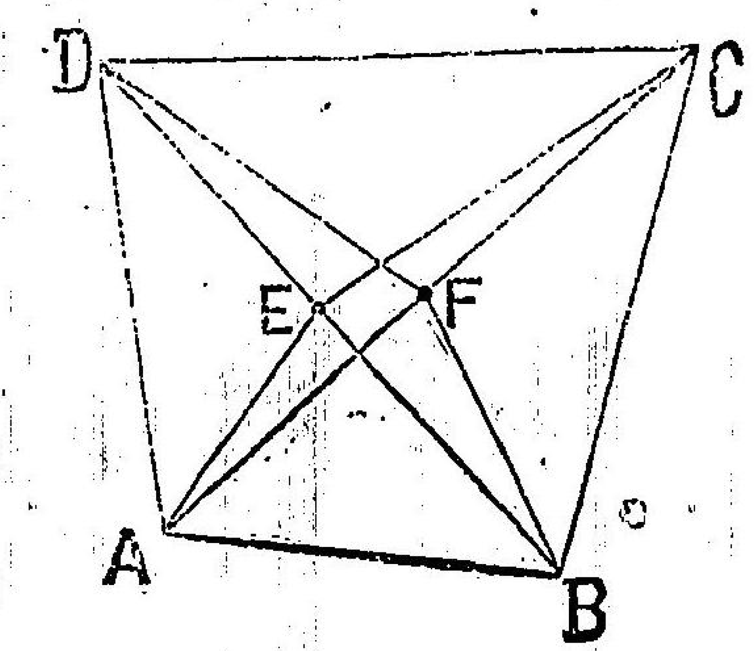
4. 四角形ノ相對弐角ノ各等分線ガ壹對角線上ニ於テ交ルトキハ他ノ相對二角ノ等分線ハ他ノ對角線上ニ於テ相交ル

四角形 ABCD ニ於テ両對角 A, C ノ各等分線ガ對角線 BD ノ上ノ壹点ニ於テ交ルトス, 然ルトキハ他ノ両對角ノ各等分線ハ他ノ對角線 AC ノ上ニ相交ル.

(証) △DAB ニ於テ $\frac{DA}{AB}=\frac{DE}{EB}$

又 △DBC ニ於テ $\frac{DC}{BC}=\frac{DE}{EB}$

∴ $\frac{DA}{AB}=\frac{DC}{BC}$ (1)



今 ADC 角ノ等分線ト AC トノ交点ヲ F トシ FB ヲ結ベバ $\frac{AF}{FC}=\frac{AD}{DC}$

然ルニ (1) ヨリ $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$ ∴ $\frac{AF}{FC}=\frac{AB}{BC}$

故ニ BF ハ ∠ABC ヲ等分ス, 即チ ∠ADC, ∠ABC ノ等分線ハ AC 上ニ於テ交ル.

5. CAB, DAB ハ同底 AB 上ニ畫クル三角形ニシテ頂点 CD ハ AB ノ同傍ニ在ルモノトス,今 AB 上ノ壹点 P ヨリ AC, AD ニ平行スル貳直線ヲ引キ之レヲ PX, PY トシ PX ト BC トノ交点ヲ X トシ, PY ト BD トノ交点ヲ Y トスレバ XY ハ CD ニ平行ナリ

(證) 畬略ス. $\dfrac{BX}{XC}=\dfrac{BY}{YC}$ ナルコヲ證スレバ可ナリ.

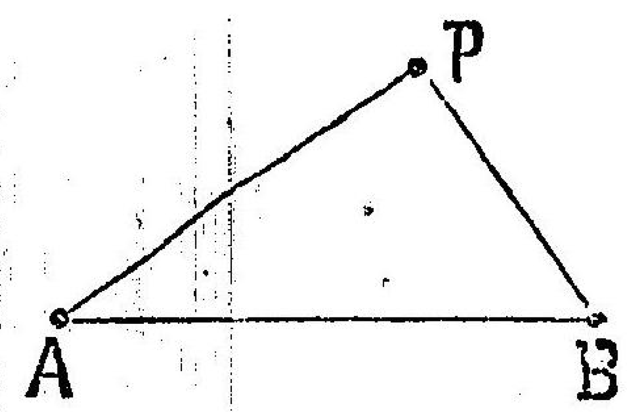
6. 直線 AB ノ外ノ壹点 P ヨリ AB ニ到ル諸直線ヲ所設ノ比 $\dfrac{m}{n}$ ニ内分スル点ノ軌跡ハ AB ニ平行ナル直線ナリ.

(解) P ヨリ AB ニ到ル任意ノ直線ヲ $\dfrac{m}{n}$ ノ比ニ内分シ其分点ヲ過ギテ AB ニ平行ナル直線ヲ引クトキハ此直線ハ所題ノ軌跡ナリ但シ其證明ハ第壹編第四節例題 3. ノト同様ナリ故ニ之レヲ畧ス

又之レト同様ニ, P ヨリ AB ニ到ル直線ヲ $\dfrac{m}{n}$ ノ比ニ外分スル点ノ軌跡ヲ求ムルコヲ得ルナリ.

7. A, B ハ壹平面上ニアル貳光点ナリ,長サノ單位ニ於ケル光力ハ順次ニ a, b ナリ然ルトキハ此平面上ニ於テ此貳光点ヨリ等シキ光力ヲ受クル点ノ軌跡ハ圓周ナリ.但シ光力ハ距離ノ平方ト反比例ス

(證) A, B ヨリ等シキ光力ヲ受クル点ヲ P トス



A, B ガ P ニ與フル光力ヲ x トス

今光力ハ距離ノ平方ト反比例スル故

$$PA^2:1^2=a:x, \quad \therefore \quad x=\frac{a}{PA^2}$$

及 $$PB^2:1^2=b:x \quad \therefore \quad x=\frac{b}{PB^2}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{PA^2}=\frac{b}{PB^2} \quad \therefore \quad \frac{PA}{PB}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

故ニ P ノ軌跡ハ圓周ナリ

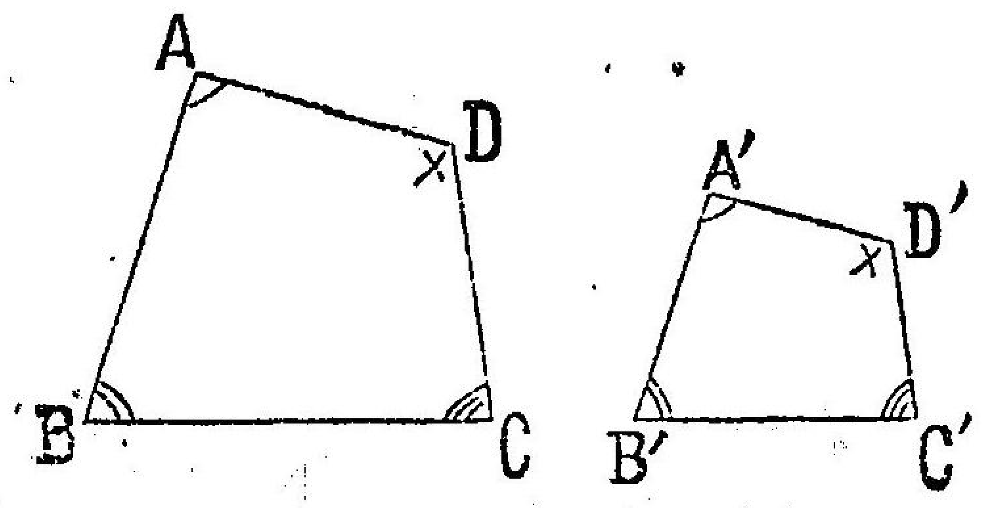
(注意) 本題ヨリシテ不等ノ光力ヲ有スル三光点ヨリ等光力ヲ受クル点ヲ求ムルコヲ得ルナリ.

第貳節—相似形

定義

相似形(*Similen polggor*) 同邊數ノ貳個ノ多角形アリテ其壹個ノ各角ガ順次ノ他ノ壹個ノ各角ト等シク且ツ其レ等ノ等角ノ對邊ガ比例スルトキハ其兩多角形ハ相似形ナリトイフ

例ヘバ貳個ノ多角形 ABCD, A′B′C′D′ ニ於テ $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$ ニシテ且ツ



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}$$

ナルトキハ此兩多角形ヲ相似形トイフ

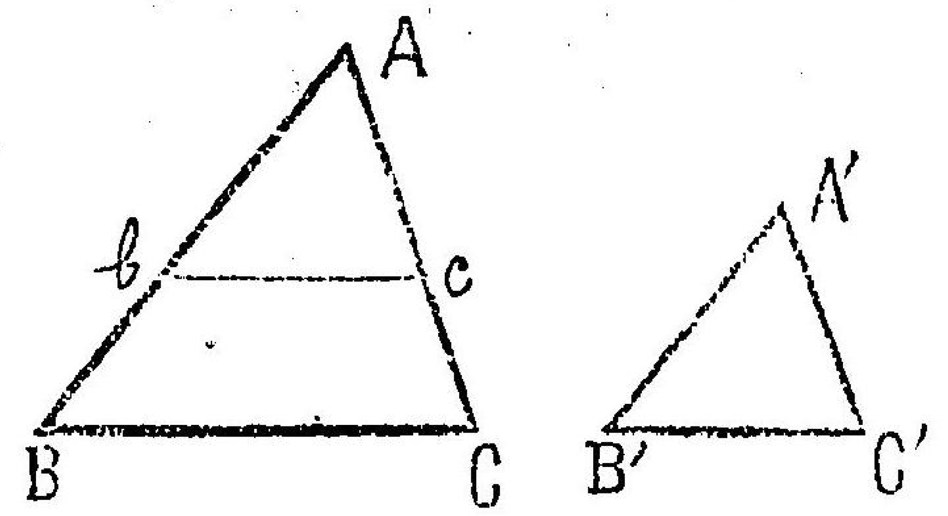
又等角ノ對邊即チ AB ト A′B′, BC ト B′C′, CD ト C′D′ 等ヲ相應邊トイフ.

記號 兩多角形ガ相形似ナルヲ示スニハ ∞ ナル記號ヲ用ユ

定理

貳個ノ三角形ガ等角ナルトキハ其兩三角形ハ相似形ナリ

二個ノ三角形 ABC, A′B′C′ ニ於テ $\angle A=\angle A'$, $\angle B=B'$, $\angle C=\angle C$ ナルトキハ $\triangle ABC \infty \triangle A'B'C'$ ナリ.



(證) $\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ置キ A′ ヲ A ノ上ニ, A′B′ ヲ AB ノ上ニアラシメ B′ ガ落ツル点ヲ b トス

然ルトキハ $\angle A'=\angle A$ ニナルヲ以テ $A'C'$ ハ AC ノ上ニ落ツベシ, 而シテ C ガ落ツル点ヲ c トス,

然ルトキハ $\angle B'=\angle B$ ナルヲ以テ $\angle Abc=\angle B$, $\therefore\ bc//BC$

$$\therefore\quad \frac{Ab}{AB}=\frac{Ac}{AC},$$

$$\therefore\quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC};$$

$\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ置キ B' ヲ B ノ上ニアラシムルトキハ前ト同理ニヨリテ

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC'},$$

$$\therefore\quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC},$$

即チ $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ノ相應邊ガ比例ス,
而シテ此両三角形ハ等角ナリ,
故ニ $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ハ相似形ナリ.

推論 壹個ノ三角形 ABC ノ貳角 A,B ガ他ノ三角形 $A'B'C'$ ノ貳角 A', B' ニ等シキトキハ此両三角形ハ相似形ナリ

(証) $\angle A+\angle B+\angle C=2$ 直角, $\angle A'+\angle B'+\angle C'=2$ 直角

$\therefore\quad \angle A+\angle B+\angle C=\angle A'+\angle B'+\angle C'$

而シテ $\quad \angle A+\angle B=\angle A'+\angle B' \quad \therefore\quad \angle C=\angle C'.$

定理

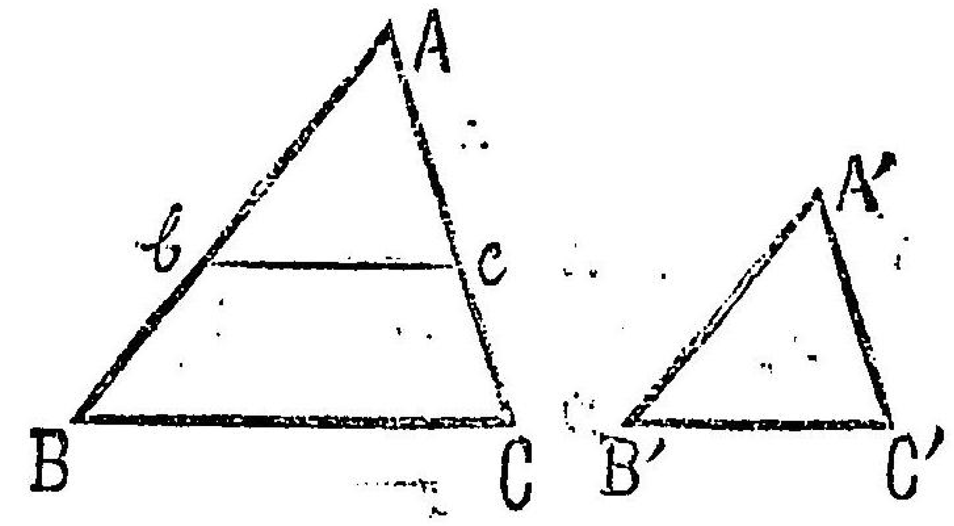
壹個ノ三角形ノ壹角ガ他ノ三角形ノ壹角ニ等シク其角ヲ狭ムニ邊ガ比例スルトキハ其三角形ハ相似形ナリ.

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ $\angle A=\angle A'$ ニシテ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$ ナルトキハ

$\triangle ABC\infty\triangle A'B'C'$ ナリ.

(証) $\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ置キ A ヲ A' ノ上ニ, $A'B'$ ヲ AB ノ上ニ置キ B' ガ落ツル点ヲ b トス,

然ルトキハ $\angle A'=\angle A$ ナルヲ以テ $A'C'$ ハ AC ノ上ニ落ツベシ, 而シテ C' ガ落ツル点ヲ c トス



今 $\quad \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC} \quad \therefore\quad \dfrac{Ab}{AB}=\dfrac{Ac}{AC}$

$$\therefore\quad bc//BC$$

$$\therefore\quad \angle b=\angle B \quad 及 \quad \angle c=\angle C$$

$$即\quad \angle B'=\angle B \quad 及 \quad \angle C'=\angle C,$$

故ニ $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ハ等角三角形ナリ.

$$\therefore\quad \triangle ABC\infty\triangle A'B'C'.$$

定理

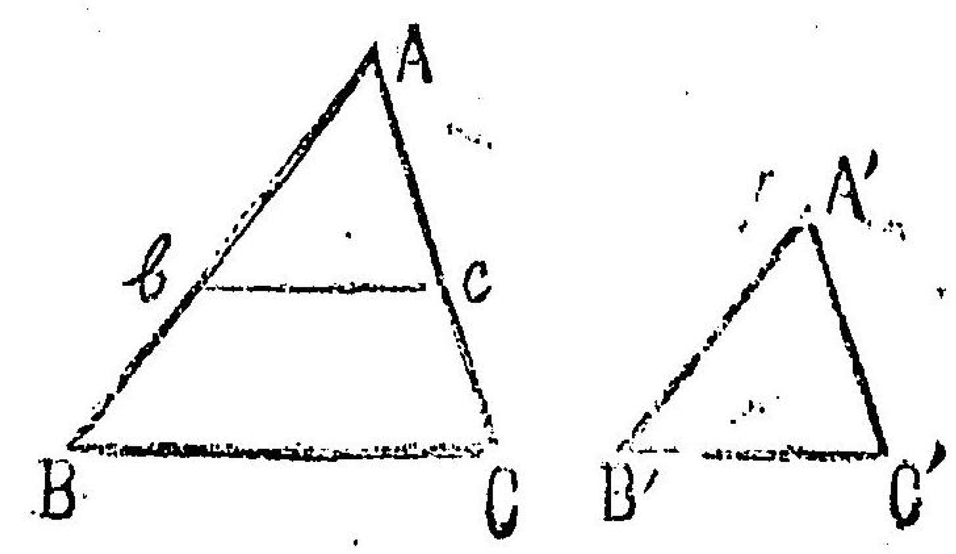
貳個ノ三角形ノ各邊ガ比例スルトキハ此両三角形ハ相似形ナリ.

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'C'}{BC}=\dfrac{C'A'}{CA}$ ナルトキハ此両三角形ハ相似形ナリ.

(証) AB 上ニ壹点 b ヲ取リ

$$Ab=A'B'$$

ナラシメ, b ヨリ BC ニ平行線ヲ引キ AC トノ交点ヲ C トス



然ルトキハ $\angle b=\angle B$, $\angle c=\angle C$

$\therefore\quad \triangle Abc\backsim\triangle ABC$

$$\therefore\quad \frac{Ab}{AB}=\frac{Ac}{AC}=\frac{bc}{BC}$$

$$即\quad \frac{A'B'}{AB}=\frac{Ac}{AC}=\frac{bc}{BC}$$

然ルニ $$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

$$\therefore\quad \frac{Ac}{AC}=\frac{A'C'}{AC}\quad 及\quad \frac{bc}{BC}=\frac{B'C'}{BC}$$

$\therefore\quad BC=B'C'$ 　及　 $bc=B'C'$

故ニ兩三角形 Abc, $A'B'C'$ ハ各邊相等シ

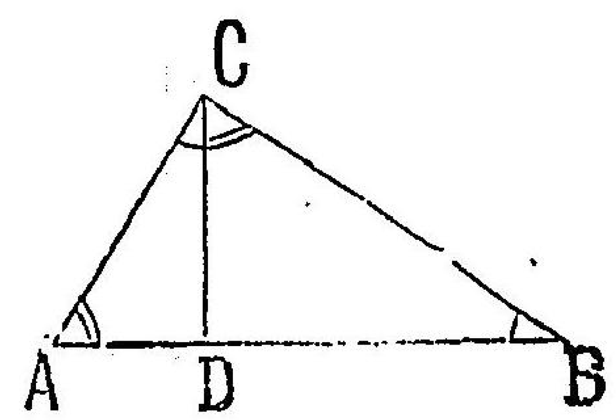
$\therefore\quad \triangle Abc\equiv\triangle A'B'C'$

$\triangle Abc\backsim\triangle ABC$

$\therefore\quad \triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$

定　理

直三角形ノ直角項ヨリ斜邊ニ下セル垂線ハ原三角形ヲ貳個ノ相似ノ三角形ニ分チ而シテ此貳個ノ三角形ノ各ハ原三角形ト相似ナリ



直三角形ヲABCトシ直角項Cヨリ斜邊ABニ垂線CDヲ下ストキハ

$\triangle CAD\backsim\triangle CDB$

又此兩三角形ノ各ハ $\triangle ABC$ ト相似形ナリ

(証)　$\angle DCB+\angle DCA=$ 直角

$\angle DCB+\angle B=$ 直角　 $\therefore\quad \angle DCA=\angle B$

同理ニヨリテ　 $\angle DCB=\angle A$

$\therefore\quad \triangle ADC\backsim\triangle DCB$

又兩三角形 ADC, ABC ニ於テ

$\angle A$ ハ共通

$\angle ADC=\angle ACB$ 　 $\therefore\quad \triangle ADC\backsim\triangle ABC$,

同様ニ　 $\triangle BDC\backsim\triangle ABC$.

213. 推論壹　直三角形ノ直角項ヨリ斜邊ニ下セル垂線ハ,此垂線ニテ分タレタル斜邊ノ兩部分ノ比例中項ナリ.

直三角形ヲABCトシ(直角ヲCトス) $CD\perp BA$ トス(前圖)

然ルトキハCDハAD, DBノ比例中項ニシテ即 $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$ ナリ.

(証)　$\triangle ADC\backsim\triangle BCD$ 　 $\therefore\quad \frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$.

214. 推論貳　直三角形ノ直角項ヨリ斜邊ニ下セル垂線ヲ以テ斜邊ヲ貳分スルトキ,直角壹邊ハ其邊ニ隣接セル部分ト全斜邊トノ比例中率ナリ.

直三角形ABCニ於テ(Cヲ直角トス)Cヨリ斜邊BCニ垂線ADヲ下ス,(212章ノ圖)

然ルトキハCAハAD, ABノ比例中項ナリ.

(証)　$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$, 　 $\therefore\quad \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$

定　理　拾　壹

215. 兩相似多角形ハ同數ノ相似三角形ニ分解スルヿヲ得

兩相似多角形ヲABCDE, A'B'C'D'E' トス

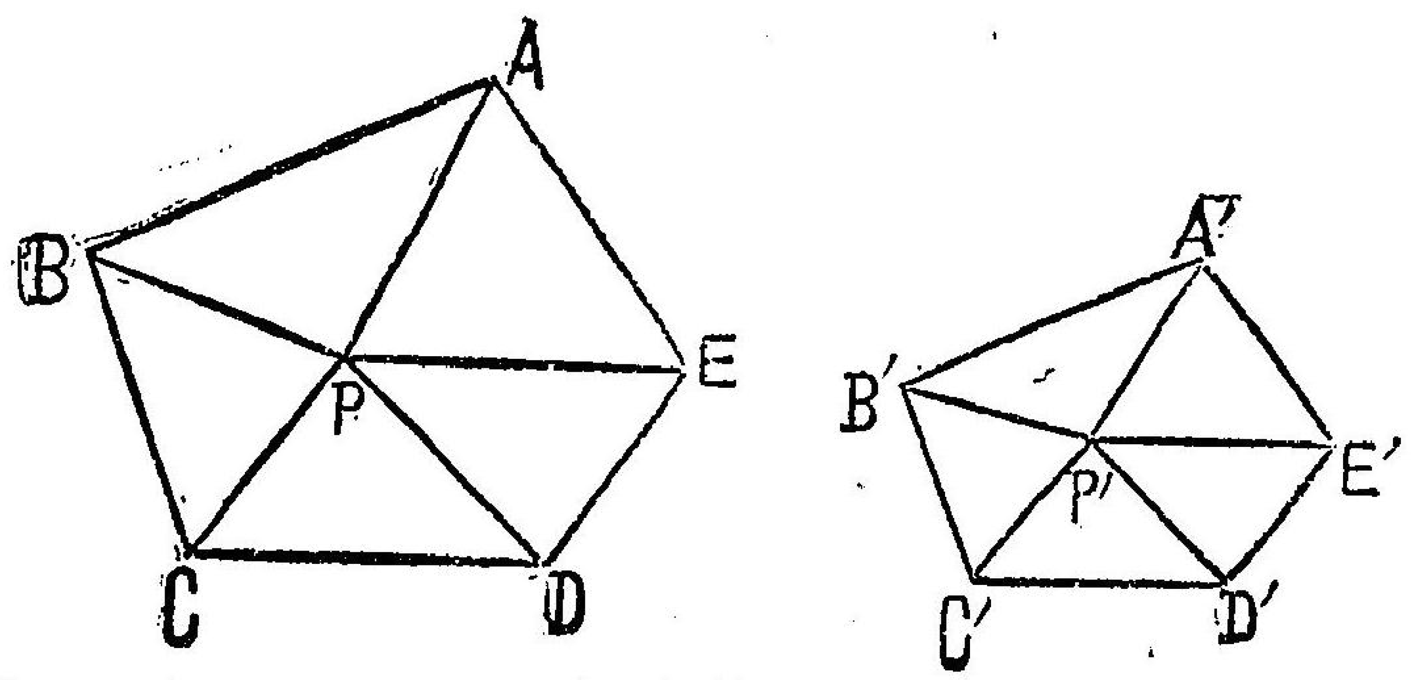
然ルトキハ此兩多角形ハ同數ノ相似三角形ニ分ツヿヲ得.

(証)　ABCDEノ內方ニ任意ノ壹点Pヲ取リ, PA, PB, PC, PD, PEヲ結ブ

是ニ於テ A', 及ビ B' ヨリ直線 A'P', B'P' ヲ引キ $\angle P'A'B'$ ヲ $\angle PAB$ ニ等シクシ, $\angle P'B'A'$ ヲ $\angle PBA$ ニ等シカラシメ A'P', B'P' ノ交点ヲ P' トス.

而シテ P'C', P'D', P'E' ヲ結ブ

然ルトキハ PAB, PBC, PCD, PDE, PEA ナル諸三角形ハ, 順次ニ P'A'B', P'B'C', P'C'D', P'D'E', P'E'A' ナル諸三角形ト相似ナリ, 次ニ之レヲ證スベシ.



作圖ニヨリ　$\angle PAB=\angle P'A'B'$

$\angle PBA=\angle P'B'A' \quad \therefore \quad \triangle APB \sim \triangle A'B'P'$

又　$\triangle APB \sim \triangle A'P'B' \quad \therefore \quad \dfrac{BP}{B'P'}=\dfrac{AB}{A'B'}$

$ABCDE \sim A'B'C'D'E' \quad \therefore \quad \dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'} \quad \therefore \quad \dfrac{BP}{B'P'}=\dfrac{BC}{B'C'}$　(1)

又 $ABCDE \sim A'B'C'D'E' \quad \therefore \quad \angle ABC=\angle A'B'C'$

然ルニ　$\angle ABP=\angle A'B'P'$

$\therefore \quad \angle PBC=\angle P'B'C'$　(2)

(1) (2) ニヨリ　$\triangle PBC \sim \triangle P'B'C'$

同様ニ　$\triangle PCD \sim \triangle P'C'D'$,　$\triangle PDE \sim \triangle P'D'E'$.........

定理拾貳

216. 兩多角形ガ相似ニシテ且ツ同順序ニ置カレタル同數ノ三角形ヨリ成ルトキハ此兩多角形ハ相似ナリ.

多角形 ABCDE ハ PAB, PBC, PCD, PDE, PEA ナル三角形ヨリ成リ又多角形 A'B'C'D'E' ハ P'A'B', P'B'C', P'C'D', P'D'E', P'E'A' ナル三角形ヨリ成ルトス(前章ノ圖ヲ用ユ)

而シテ PAB, PBC, PCD, PDE, PEA ナル三角形ハ順次ニ P'A'B', P'B'C', P'C'D', P'D'E', P'E'A' ナル三角形ト相似ニシテ且ツ同順序ニ置カレタルモノトス.

然ルトキハ兩多角形 ABCDE, A'B'C'D'E' ハ相似形ナリ.

(證)　$\triangle PAB \sim \triangle P'A'B' \quad \therefore \quad \angle PBA=\angle P'B'A'$

又　$\triangle PBC \sim \triangle P'B'C' \quad \therefore \quad \angle PBC=\angle P'B'C'$

上ノ二式ヲ加フルトキハ　$\angle ABC=\angle A'B'C'$

同様ニ　$\angle BCD=\angle B'C'D'$,　$\angle CDE=\angle C'D'E'$..........

即チ多角形 ABCDE ノ各角ハ順次ニ A'B'C'D'E' ノ各角ニ等シ.　(1)

又 $\triangle PBA \sim \triangle P'B'A' \quad \therefore \quad \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BP}{B'P'}$

$\triangle PBC \sim \triangle P'B'C' \quad \therefore \quad \dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{BP}{B'P'} \quad \therefore \quad \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$

同様ニ　$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DE}{D'E'}=$.........

即チ兩多角形 ABCDE, A'B'C'D'E' ノ各邊ハ比例ス　(2)

(1) (2) ニヨリ　$ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

定理拾三

217. 貳個ノ相似多角形ノ周邊ノ比ハ相當邊ノ比ニ等シ

貳個ノ相似多角形ヲ ABCDE, A'B'C'D'E' トス (215. ノ圖)

然ルトキハ此兩多角形ノ周邊ノ比ハ相當邊 AB, A'B' ノ比ニ等シ.

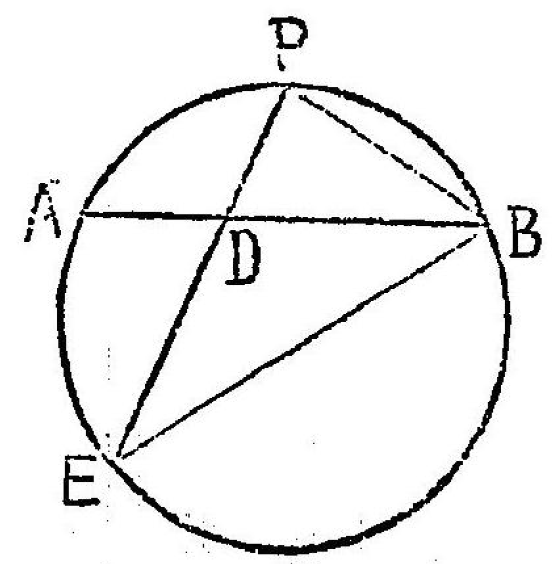
(證)　$ABCDE \sim A'B'C'D'E'$

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$$

$$\therefore \quad \frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'}=\frac{AB}{A'B'}$$

第二節例題

1. 定弧APBノ中央点Pヲ過ギテ任意ノ二直線ヲ引キ其直線ガ弦ABト其圓周トニ交ル点ヲ順次ニD, EトスルトキハPBハPD, PEノ比例中項ナリ.



(証) PB, BEヲ結ブ

両三角形PDB. PBEニ於テ

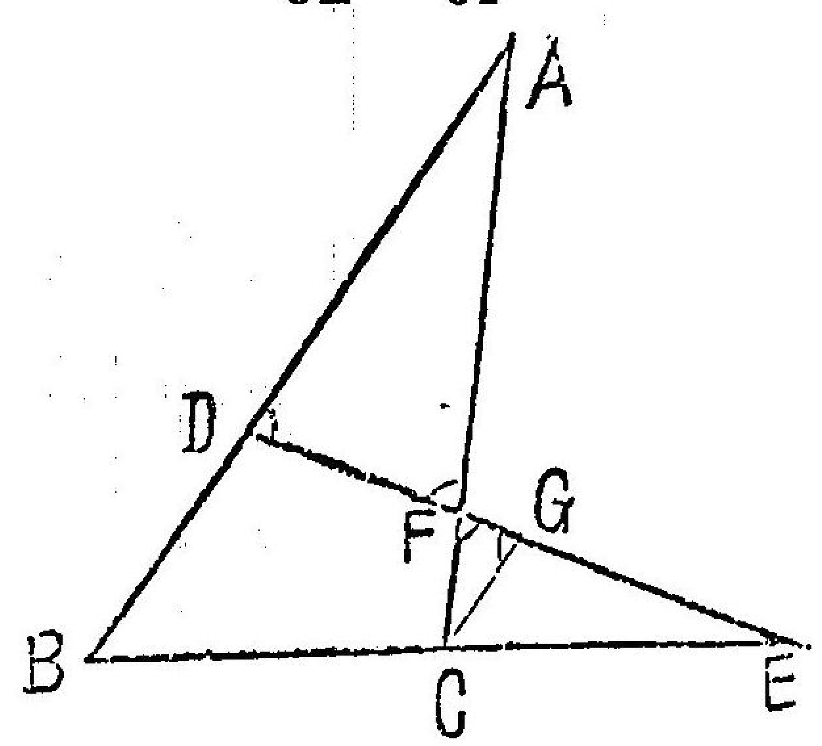
$\angle P$ ハ共通

$\angle PBD=\angle E(\because \overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PB})$

$\therefore \triangle PBD \backsim \triangle PBE$

$\therefore \quad \dfrac{PD}{PB}=\dfrac{PB}{PE}$ 　即チPBハPD, PEノ比例中項ナリ.

2. 三角形ABCノ三邊AB, BC, CAニD, E, Fニ於テ交ル所ノ一直線ヲ引キAD=AFナラシム, 然ルトキハ $\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{BD}{CF}$ ナリ.



(証) CヨリABニ平行線ヲ引キDEトノ交点ヲGトス

然ルトキハ $\angle ECG=\angle B$ (應角)

$\angle EGC=\angle EDB$ (〃)

$\therefore \quad \triangle ECG \backsim \triangle EBD$

$\therefore \quad \dfrac{BE}{CE}=\dfrac{BD}{CG}$ 　(1)

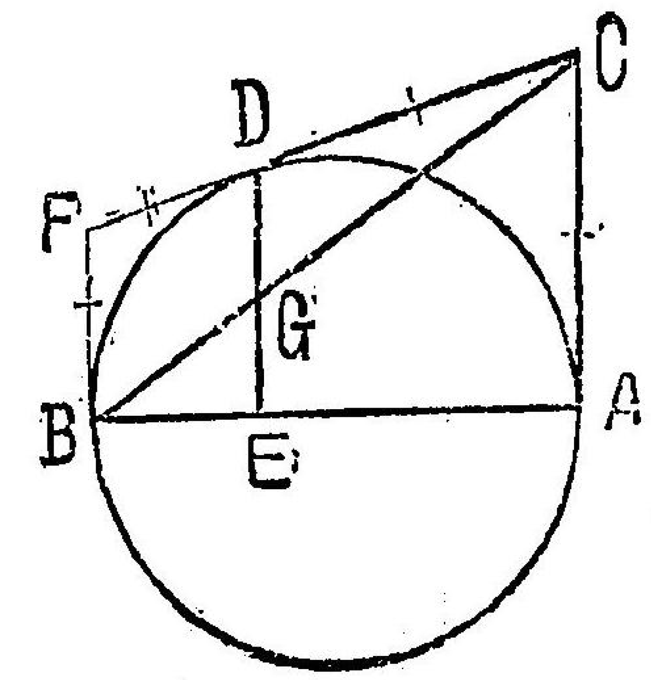
然ルニ $\angle CFG=\angle AFD$

$=\angle ADF$

$=\angle CGF$ (錯角)　$\therefore$ 　$CG=CF$

$\therefore$ 　(1)ヨリ　$\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{BD}{CF}$

8. 直徑ABノ一端Aニ於ケル切線ト, 圓周上ノ任意ノ点Dニ於ケル切線トノ交点ヲCトス. 然ルトキハDヨリABニ到ル垂線DEハ直線FCニテ等分セラル.



(証) Bニ於テ切線ヲ引キCDトノ交点ヲFトシ, CBトDEトノ交点ヲGトス,

然ルトキハDE, FBハ共ニABニ直立スルヲ以テ平行ス, 故ニ△CDG, △CFBハ各角相等シ,

$\therefore \quad \triangle CDG \backsim \triangle CFB$

$\therefore \quad \dfrac{CD}{DG}=\dfrac{CF}{FB}$ 　然ルニ FB=FD

$\therefore \quad \dfrac{CD}{DG}=\dfrac{CF}{FD}$

$=\dfrac{CB}{BG}$ 　$(\because DG/\!/FB)$

然ルニCA//GEナルヲ以テ両三角形CBA, BGEハ等角ナリ,

$\therefore \quad \triangle CBA \backsim \triangle BGE$

$\therefore \quad \dfrac{CB}{BG}=\dfrac{CA}{GE}$ 　　$\therefore \quad \dfrac{CD}{DG}=\dfrac{CA}{GE}$

然ルニ　CD=CA (174推論)　$\therefore$ 　DG = GE.

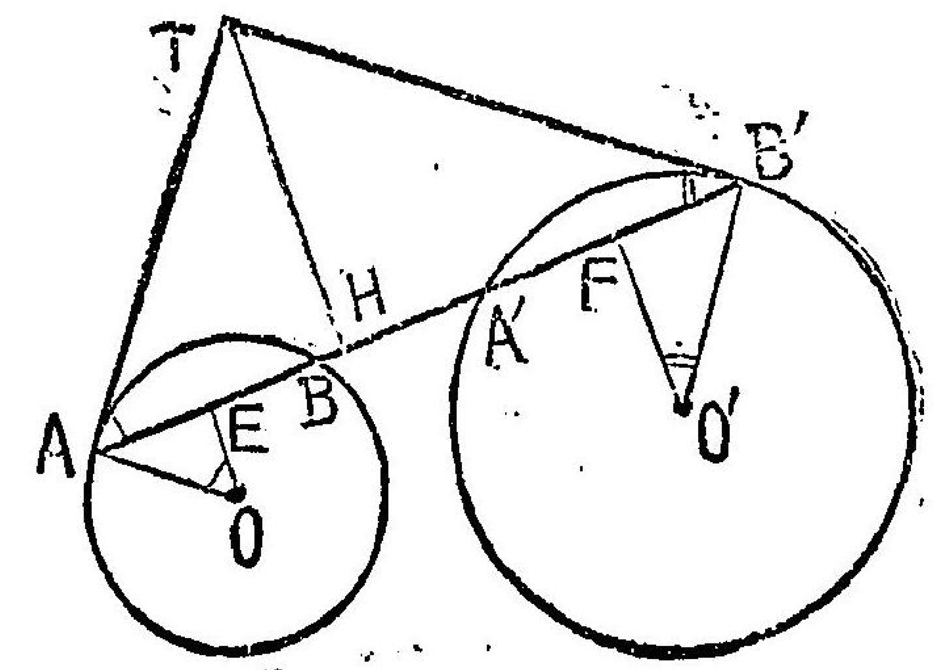
4. 二圓周ニA, B, A′, B′ニ於テ交ルヘキ直線ヲ引キAB=A′B′ナラシム, 今A及ビB′ニ於ケル各圓ノ切線ノ交点ヲTトスレバ $\dfrac{AT}{B'T}$ ハ各圓ノ半徑ノ比ニ等シ.

(証) TヨリAB′ニ垂線THヲ引ク,

又各圓ノ中心ヲO, O′トシOA, O′B′ヲ結ビ(次ノ頁ノ圖ヲ見ヨ)

O及ビO′ヨリAB′ヘ垂線OE, O′Fヲ下ス,

然ルトキハ $\angle O$, 及ビ $\angle TAH$ ハ共ニ $\angle EAO$ ノ余角ナリ,



$\therefore\quad \angle TAH=\angle O$

又　$\angle THA=\angle AEO=$ 直角

$\therefore\quad \triangle TAH \infty \triangle AEO$

$$\therefore\quad \frac{AT}{AO}=\frac{TH}{AE} \qquad (1)$$

同様ニ $$\frac{B'T}{O'B'}=\frac{TH}{B'F} \qquad (2)$$

然ルニ　$AB=A'B'$　(題意)

而シテ AE ハ $\frac{1}{2}AB$ ニシテ, $B'F$ ハ $\frac{1}{2}A'B'$ ナリ

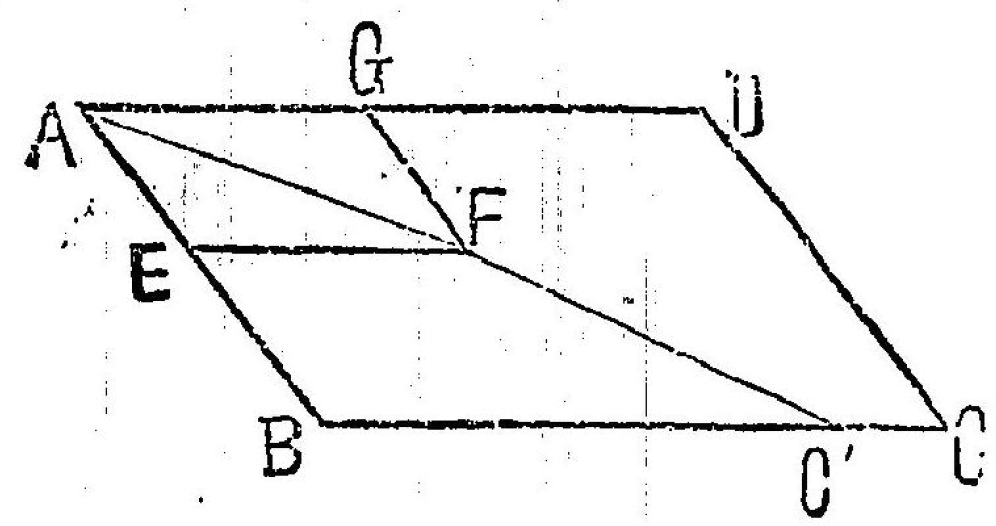
$\therefore\quad AE=B'F$

$$\therefore\quad \frac{TH}{AE}=\frac{TH}{B'F} \qquad \therefore\quad \frac{AT}{AO}=\frac{B'T}{O'B'} \quad [(1)\ (2)\ ヨリ]$$

$$\therefore\quad \frac{AT}{B'T}=\frac{AO}{O'B'}$$

5. ABCD, AEFG ハ A 角ヲ共有スル所ノ相似三角形ナリ, 然ルトキハ A, F, C ハ同壹ノ直線上ニアリ.

(証)　AF ヲ結ビ　F E BC トノ交点ヲ C′ トス



ABCD∞AEFG

$$\therefore\quad \frac{AE}{EF}=\frac{AB}{BC}$$

$$又\quad \frac{AE}{EF}=\frac{AB}{BC'}$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{BC}=\frac{AB}{BC'} \qquad \therefore\quad BC=BC'$$

故ニ C′ ハ C ト壹致ス,

故ニ A, F, C ハ壹直線上ニアリ.

第三節—面積

218. **注意** 次ノ諸章ニ於テ,[同シ単位ヲ以テ測リタル弐直線ノ数値ノ相乗] トイフヘキヲ略シテ [其二直線ノ相乗] トイヒ, 又 [単位ヲ以テ測リタル或ル壹直線ノ数値ノ二方] トイフヘキヲ略シテ壹直線ノ二方トイフ.

例ヘハ同シ単位ヲ以テ弐直線 AB, CD ヲ測リテ得タル数値ノ相乗トイフヘキヲ略シテ, AB, CD ノ相乗トヒ之レヲ $AB\times CD$ ト書ク, 又或ル単位ヲ以テ直線 AB ヲ測リテ得タル数値ノ二方トイフヘキヲ略シテ AB ノ二方トイヒ, 之レヲ AB^2 ト書ク.

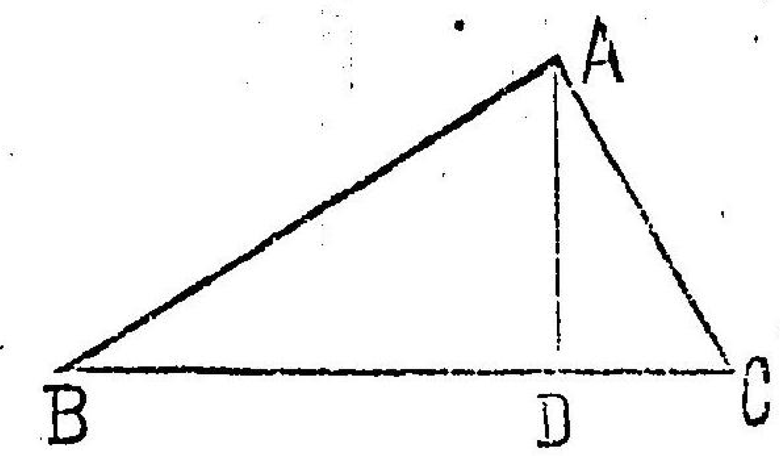
定理拾四

219. 直三角形ノ直角邊ノ二方ハ, 此邊ノ斜邊上ニ於ケル正影ト斜邊トノ相乗積ニ等シ.

直三角形ヲ ABC トシ, A ヲ直角トシ, AB 邊ノ上ニ於ケル正射影ヲ BD トス(正射影ノ定義ハ 80 ニアリ.)

然ルトキハ $AB^2=BD\times BC$.

(証)　BD ハ AB ノ BC ニ於ケル正射影ナリ, 故ニ $AD\perp BC$. (80)



$\therefore\quad \triangle ABD \infty \triangle ABC$　(212)

$$\therefore\quad \frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BC}$$

$\therefore\quad AB^2=BD\times BC$.

220. 推論 直三角形ABC(Aヲ直角トス)ノ直角貳邊AB, ACノ各二方ノ比ハAB, ACノBC上ニ於ケル正射影即BD, DCノ比ニ等シ.(前章ノ圖)

(證) $AB^2=BD\times BC$

$AC^2=CD\times BC$ ∴ $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{BD\times BC}{CD\times BC}=\frac{BD}{CD}$.

定理拾五

221. 直三角形ノ直角二邊ノ各二方ノ和ハ斜邊ノ二方ニ等シ.

直三角形ヲABCトシAヲ直角トス,

然ルキハ $AB^2+AC^2=BC^2$ (前章ノ圖)

(證) AD⊥BCトスレハ

$AB^2=BD\times BC$

$AC^2=CD\times BC$

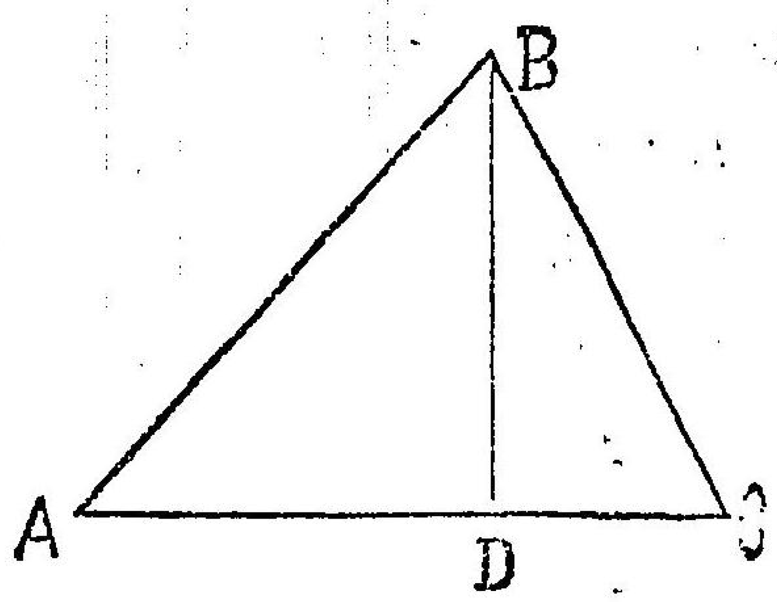
∴ $AB^2+AC^2=(BD+CD)\times BC=BC^2$

定理拾六

222. 三角形ノ鋭角ノ對邊ノ二方ハ他ノ二邊ノ各二方ノ和ヨリ此二邊中ノ壹個ト此邊上ニ於ケル他ノ壹邊ノ正射影トノ相乘積二倍ヲ減セシモノニ等シ.

三角形ヲABCトシAヲ鋭角トスABノAC上ニ於ケル正射影ヲADトス,然ルキハ

$BC^2=AB^2+AC^2-2AC\times AD$.



(證) ADハABノAC上ニ於ケル正射影ナリ,故ニBD⊥AC,

∴ $BC^2=BD^2+DC^2$

$=BD^2+(AC\sim AD)^2=BD^2+AC^2+AD^2-2AC\times AD$.

然ルニ $AD^2+BD^2=AB^2$ ∴ $BC^2=AB^2+AC^2-2AC\times AD$

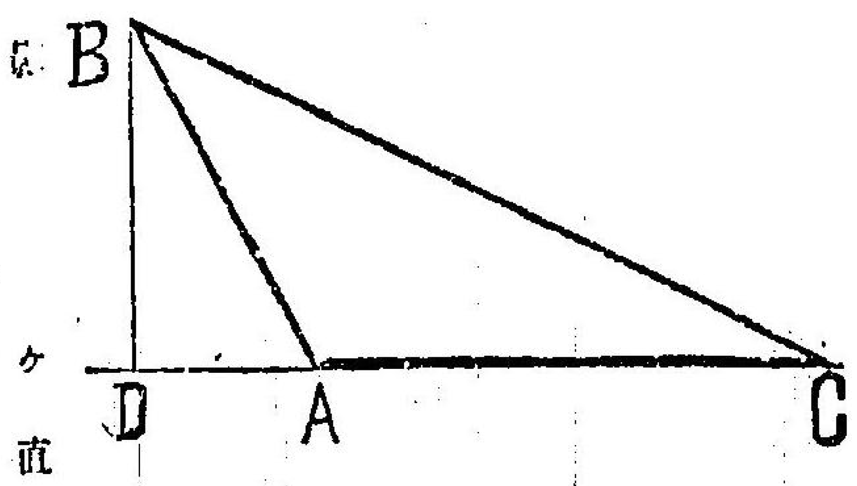
∴ $BC^2=AB^2+AC^2-2BC\times BD$.

定理拾七

223. 三角形ノ鈍角ノ對邊ノ二方ハ他ノ二邊ノ二方ノ和ニ此二邊中ノ壹個ト,此邊上ニ於ケル他ノ壹邊ノ正射影トノ相乘積二倍ヲ加ヘシモノニ等シ.

三角形ABCニ於テA角ヲ鈍角トシABノBC上ニ於ケル正射影ヲADトス,然ルキハ

$BC^2=AB^2+AC^2+2AC\times AD$.



(證) ADハABノAC上ニ於ケル正射影ナリ,故ニBDハACニ直立ス ∴ $BC^2=BD^2+DC^2$

$=BD^2+(AD+AC)^2$

$=BD^2+AD^2+AC^2+2AC\times AD$.

然ルニ $BD^2+AD^2=AB^2$, ∴ $BC^2=AB^2+AC^2+2AC\times AD$.

224. 推論 三角形ノ壹邊ノ二方ガ他ノ貳邊ノ各二方ノ和ニ等シキカ,或ハ之ヨリ小ナルカ,或ハ之ヨリ大ナルカニ從ツテ其壹邊ノ對角ハ直角或ハ鋭角或ハ鈍角ナリ.

(證) 三角形ノ壹角ヲAトシ其對邊ヲaトシ,他ノ二邊ヲb, cトス.

Aガ直角ナレハ $a^2=b^2+c^2$ (221. 定理)

Aガ鋭角ナレハ $a^2<b^2+c^2$ (222. 定理)

Aガ鈍角ナレハ $a^2>b^2+c^2$ (223. 定理)

上ノ三定理ニ於テ假設ハ起リ得ベキ總ヘテノ場合ヲ盡シ,終決ハ相異ル

故ニ轉換法ニヨリ上ノ各ノ逆ハ眞ナリ,即チ次ノ如シ

$a^2=b^2+c^2$ ナレバAハ直角ナリ,

$a^2<b^2+c^2$ ナレバAハ鋭角ナリ,

$a^2>b^2+c^2$ ナレバAハ鈍角ナリ.

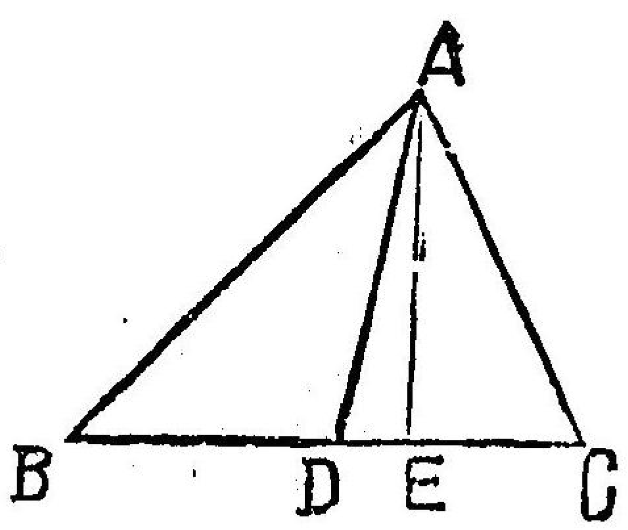
即チ証ヲ得タリ.

定理拾八

225. 三角形ノ二邊ノ二方ノ和ハ第三邊ノ半ノ二方ト第三邊ニ到ル中央線ノ二方トノ和ニ等シ.

三角形ABCニ於テBCノ中央点ヲDトスレバ

$$AB^2+AC^2=2BD^2+2AD^2.$$



(証)(第一) $AD\perp BC$ ナル場合

此時ハ $AB^2=AD^2+BD^2$

$AC^2=AD^2+DC^2$

$=AD^2+BD^2$

$\therefore\ AB^2+AC^2=2AD^2+2BD^2$

(第二) $AD\perp BC$ ナラザル場合.

$\angle ADB$ ヲ鈍角トス,然ルキハ $\angle ADC$ ハ鋭角ナリ,

今 $AE\perp BC$ トスルキハ

$AB^2=AD^2+BD^2+2BD\times DE$ (223. 定理)

$AC^2=AD^2+DC^2-2DC\times DE$ (222. 定理)

$=AD^2+BD^2-2BD\times DE$ $\because\ BD=DC$

$\therefore\ AB^2+AC^2=2AD^2+2BD^2.$

定理拾九

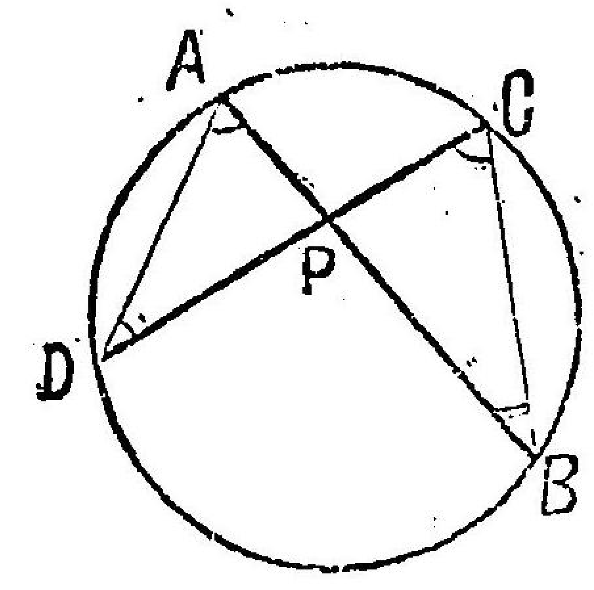
226. 圓內或ハ圓外ノ一定点ヲ過ギテ二個ノ弦ヲ引クキ其定点ヨリ各弦ノ兩端ニ到ル距離ノ相乘ハ相等シ

定点ヲPトシ,Pヲ過ギテ二個ノ弦AB, CDヲ引クキハ

$$PA\times PB=PC\times PD$$

(証)(第一) Pガ圓內ニ在ル場合.

AD, CDヲ結ブ



$\triangle APD$, $\triangle CPB$ ニ於テ

$\angle D=\angle B,$

$\angle A=\angle C,$

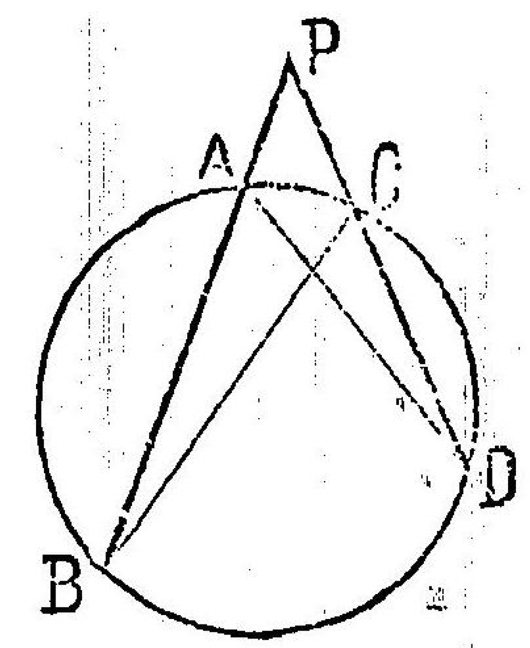
$\therefore\ \triangle APD\sim\triangle CPB,$

$\therefore\ \dfrac{AP}{CP}=\dfrac{PD}{PB},$

$\therefore\ AP\times PB=CP\times PD$

(第二) Pガ圓外ニ在ル場合.

AD, BCヲ結ブ



$\triangle APD$, $\triangle PBC$ ニ於テ

$\angle D=\angle B$

$\angle P$ ハ共通

$\therefore\ \triangle APD\sim\triangle PBC$

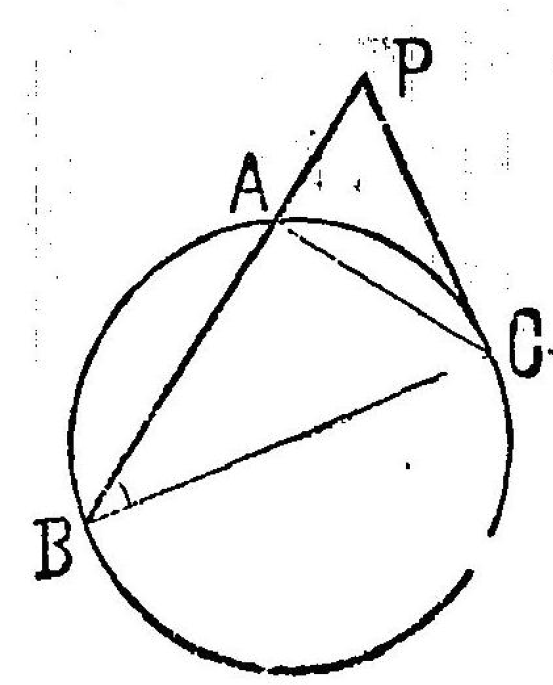
$\therefore\ \dfrac{AP}{CP}=\dfrac{PD}{PB}$

$\therefore\ PA\times PB=PC\times PD.$

227. 推論壹 圓外ノ一定点ヨリ其圓ニ切線及ビ弦ヲ引クキハ其点ヨリ其弦ノ兩端ニ到ル距離ノ相乘ハ切線ノ二方ニ等シ.

圓外ノ一定点ヲPトシPヨリ割線PAB,及ビ切線PCヲ引クキハ

$$PC^2=PA\times PB.$$



(証) AC, BCヲ結ブ

$\triangle PAC$, $\triangle PBC$ ニ於テ

$\angle B=\angle PCA$

$\angle P$ ハ共通 $\therefore\ \triangle PAC\sim\triangle PBC$

$\therefore\ \dfrac{PB}{PC}=\dfrac{PC}{PA}$ $\therefore\ PC^2=PA\times PB.$

228. 推論貳　圓外ノ壹点Pヲ過ギテ其圓周ニA, Bニ於テ交ルベキ直線ヲ引キ且ツPト其圓周上ノ壹点Cトヲ結ブ而シテ若シ$PC^2=PA\times PB$ナル時ハPCハ切線ナリ。(前推論ノ逆)

(証)　AC, BCヲ結ブ　　(前ノ推論ノ圖)

$$PC^2=PA\times PB,\quad \therefore\ \frac{PA}{PC}=\frac{PC}{PB}$$

又　∠Pハ共通

$$\therefore\ \triangle PAC\propto\triangle PBC\quad \therefore\ \angle PCA=\angle B$$

故ニPCハ切線ナリ。　(148)

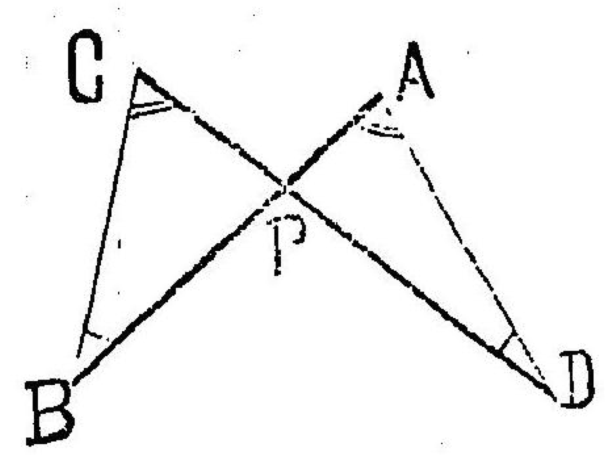
定理貳拾

229. 有限貳直線ガ相交ルカ或ハ其各直線ノ引張線ガ相交リ而シテ其交点ヨリ各直線ノ両端ニ到ル距離ノ相乗積相等シキ時ハ各直線ノ端ハ同壹ノ圓周上ニアリ

有限貳直線AB, CDガ相交ルカ或ハAB, CDノ各引張線ガ相交ルトシ其交点ヲPトス, 然ルトキハ$PA\times PB=PC\times PD$ナル時ハA, B, C, Dハ同壹ノ圓周上ニアリ。

(証)　(第一)　AB, CDガ相交ル場合

BC, ADヲ結ブ



$$PA\times PB=PC\times PD,$$

$$\therefore\ \frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}$$

$$\angle APD=\angle CPB,$$

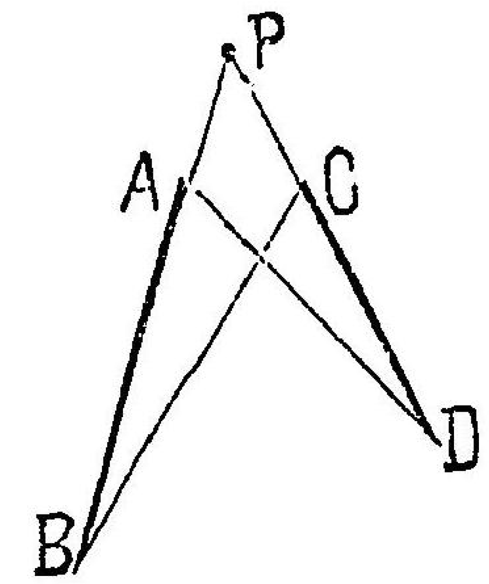
$$\therefore\ \triangle APD\propto\triangle CPB,$$

$$\therefore\ \angle BAD=\angle DCB,$$

故ニB, C, A, Dハ同壹ノ圓周上ニアリ。

(第二)　AB, CDノ各引張ガ相交ル場合,

AD, BCヲ結ブ



$$PA\times PB=PC\times PD$$

$$\therefore\ \frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}$$

∠Pハ共通

$$\therefore\ \triangle PBC\propto\triangle PAD$$

$$\therefore\ \angle PBC=\angle PDC$$

故ニB, A, C, Dハ同壹ノ圓周上ニアリ。

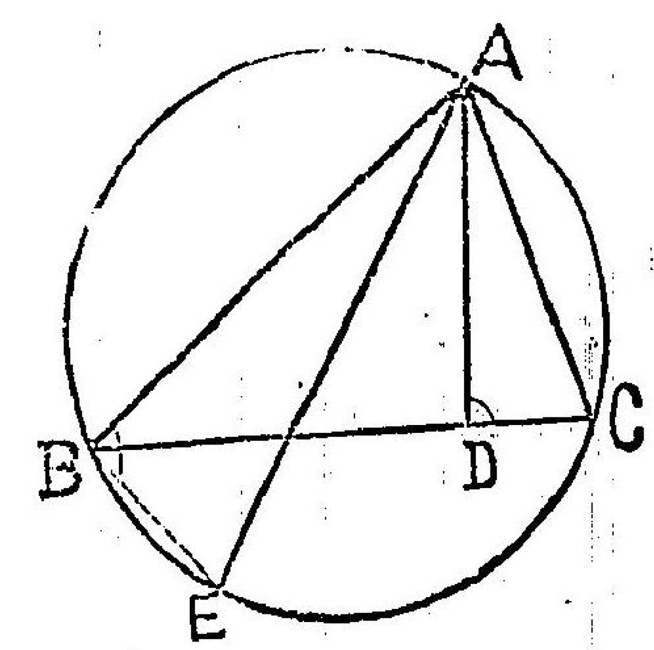
定理貳拾壹

230. 三角形ノ外接圓ノ直徑ト高トノ相乗積ハ両傍邊ノ相乗積ニ等シ。

三角形ヲABCトシADヲ其高トス

然ル時ハ△ABCノ外接圓ノ直徑トADトノ相乗積ハ$AB\times AC$ニ等シ。

(証)　Aヲ過グル直徑ヲ引キ之レヲAEトシEBヲ結ブ



△ADC, △AEBニ於テ

∠D=∠ABE　(二直角)

∠C=∠AEB

$$\therefore\ \triangle ADC\propto\triangle AEB$$

$$\therefore\ \frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}\qquad \therefore\ AE\times AD=AB\times AC$$

第三節例題

1. 三角形ABCニ於テAB=7, BC=5, CA=6寸ナル時ハCノ頂ヨリBCニ下セル垂線ノ長サ如何。

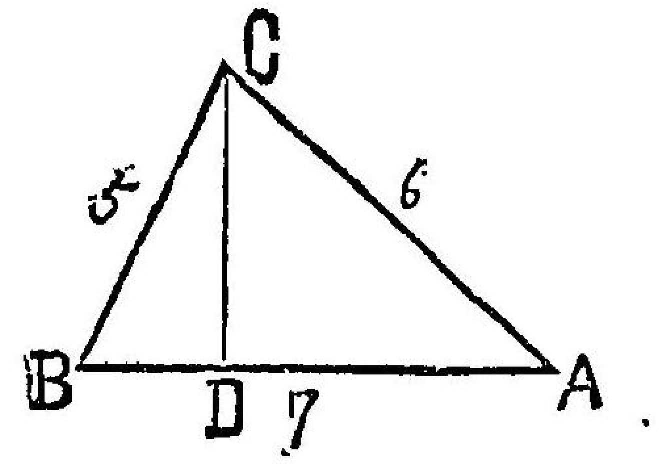
(解) $BC^2=25$

$AB^2+AC^2=7^2+6^2$

$=85>BC^2$

故ニ∠A ハ鋭角ナリ,

故ニ今 BC ノ BA 上ニ於ケル正射影ヲ BD トスル時ハ



$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AD$

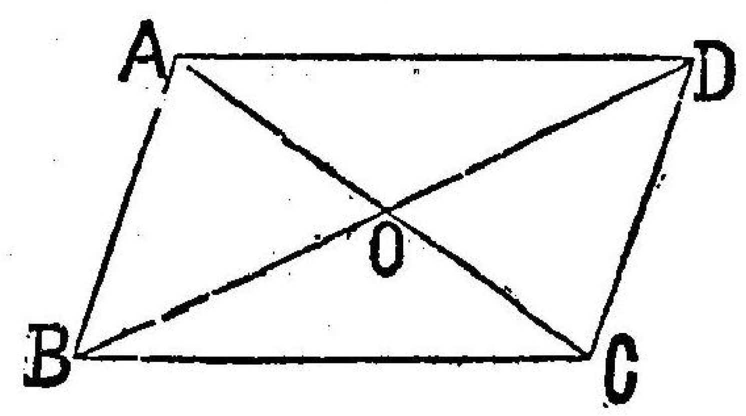
$\therefore\quad 5^2=7^2+6^2-2\times 7\times AD \qquad \therefore\quad AD=4\frac{2}{7}$

而シテ ∠BDC= 直角 $\therefore\quad CD=\sqrt{AC^2-BD^2} \;=\sqrt{6^2-\left(4\frac{2}{7}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{864}{49}}=\sqrt{\frac{12^2\times 6}{49}}=\frac{12}{7}\sqrt{6}$ 寸

2. 平行四角形ノ各邊ノ二方ノ和ハ對角線ノ二方ノ和ニ等シ

平行四角形ヲ ABCD トシ對角線ノ交点ヲ O トス然ル時ハ



$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$

$=2(AC^2+BD^2)$

(証) △ADC ニ於テ AO=OC

$\therefore\quad AD^2+DC^2=2AO^2+2DO^2$

$\therefore\quad 2AD^2+2DC^2=4AO^2+4DO^2$

$=AC^2+BD^2 \qquad (\because\ 2AO=AC,\ 2DO=BD)$

然ルニ $AD=BC \quad\therefore\quad 2AD^2=AD^2+BC^2$

又 $\qquad 2DC^2=AB^2+DC^2$

$\therefore\quad AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$

3. 任意ノ四角形ニ於テ各邊ノ二方ノ和ハ兩對角線ノ二方ノ和ト兩對角線ノ各中央点ヲ連結セル直線ノ二方ノ四倍ヲ加ヘシモノニ等シ.

四角形ヲ ABCD トシ二角線 AC, BD ノ各中央点ヲ E, F トスレバ

又 a 及ビ c ヨリ直線 ad, cd ヲ引キ

$\angle cad=\angle CAD, \qquad \angle acd=\angle ACD$

ナラシメ ad, cd ノ交点ヲ d トス

又 a, 及ビ d ヨリ直線 ae, de ヲ引キ

$\angle dae=\angle DAE, \qquad \angle ade=\angle ADE$

ナラシメ ae, de ノ交点ヲ e トス,

然ル時ハ $abcde$ ハ所求ノ多角形ナリ.

(証) 作圖ニヨリテ $abcde$ ノ各角ハ ABCDE ノ各角ト相等シ

又 $\triangle ABC\backsim\triangle abc \quad\therefore\quad \frac{bc}{BC}=\frac{ac}{AC}$

又 $\triangle ACD\backsim\triangle acd \quad\therefore\quad \frac{cd}{CD}=\frac{ac}{AC} \quad\therefore\quad \frac{bc}{BC}=\frac{cd}{CD}$

同様ニ $\frac{cd}{CD}=\frac{ed}{ED}$, 及ビ $\frac{ed}{ED}=\frac{ea}{EA}$

即チ $\frac{bc}{BC}=\frac{cd}{CD}=\frac{ed}{ED}=\cdots\cdots\cdots$

故ニ $abcde$ ハ ABCDE ト相似形ニシテ即チ所求ノ多角形ナリ.

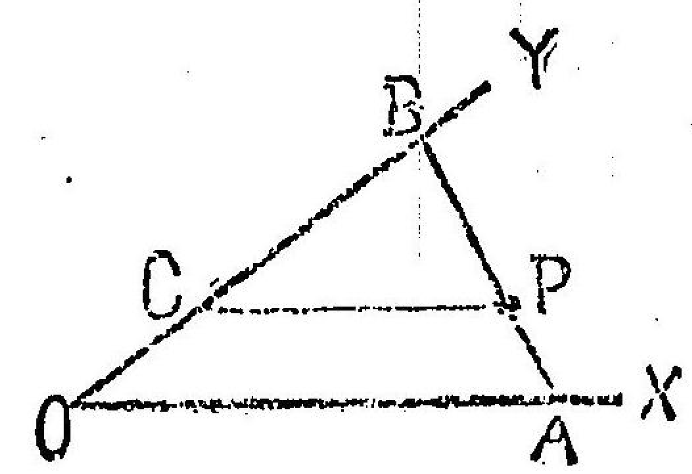
第三節例題

1. un定点 P ヲ過ギ且ツ定角ノ二邊ニ A, B ニ於テ交ルベキ直線ヲ引キ PA, PB ノ比ヲ所設ノ比 $m:n$ ニ等シカラシメントス

(作圖) 定角ヲ XOY トス

P ヨリ OX ニ平行線 PC ヲ引キ OY トノ交点ヲ C トシ

OY 上ニ B 点ヲ求メ



$\frac{OC}{CB}=\frac{m}{n}$

ナラシメ BP ヲ結ビ之レヲ引張シテ OX トノ交点ヲ A トス

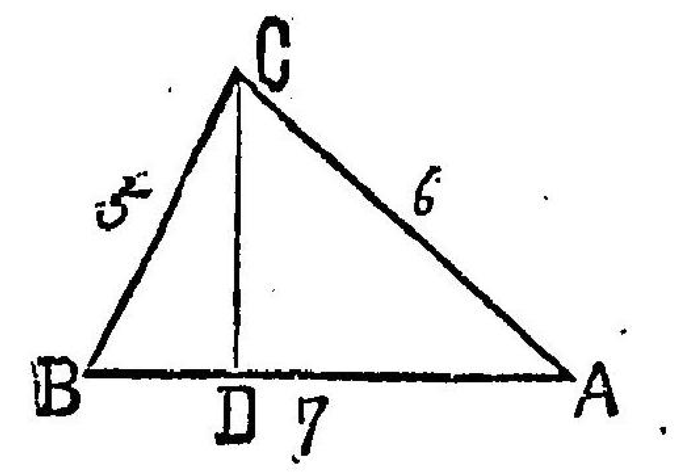
(解) $BC^2=25$

$AB^2+AC^2=7^2+6^2$

$=85>BC^2$

故ニ $\angle A$ ハ鋭角ナリ，

故ニ今 BC ノ BA 上ニ於ケル正射影ヲ BD トスル𪜈ハ



$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AD$$

$\therefore\quad 5^2=7^2+6^2-2\times 7\times AD \qquad \therefore\quad AD=4\frac{2}{7}$

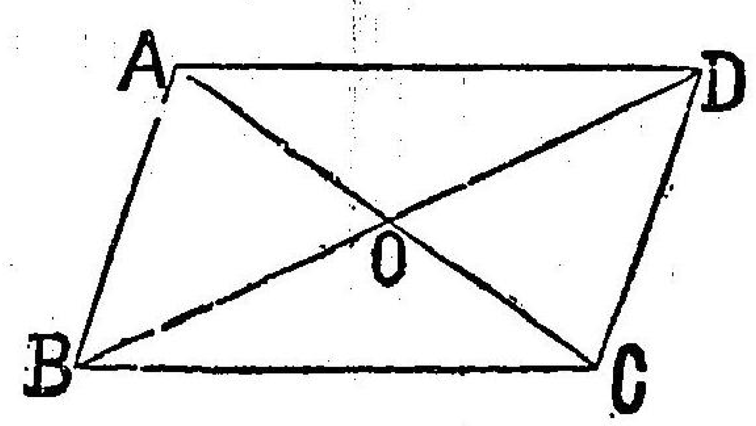
而シテ $\angle BDC=$ 直角 $\therefore\quad CD=\sqrt{AC^2-BD^2}=\sqrt{6^2-\left(4\frac{2}{7}\right)^2}$

A

$$=\sqrt{\frac{864}{49}}=\sqrt{\frac{12^2\times 6}{49}}=\frac{12}{7}\sqrt{6}\text{寸}$$

2. 平行四角形ノ各邊ノ二方ノ和ハ對角線ノ二方ノ和ニ等シ

平行四角形ヲ ABCD トシ對角線ノ交点ヲ O トス然ル𪜈ハ



$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$

$=2(AC^2+BD^2)$

(証) $\triangle ADC$ ニ於テ $AO=OC$

$\therefore\quad AD^2+DC^2=2AO^2+2DO^2$

$\therefore\quad 2AD^2+2DC^2=4AO^2+4DO^2$

$=AC^2+BD^2 \qquad (\because\ 2AO=AC,\ 2DO=BD)$

然ルニ $AD=BC\ \therefore\quad 2AD^2=AD^2+BC^2$

又 $\qquad 2DC^2=AB^2+DC^2$

$\therefore\quad AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2$

3. 任意ノ四角形ニ於テ各邊ノ二方ノ和ハ兩對角線ノ二方ノ和ト兩對角線ノ各中央点ヲ連結セル直線ノ二方ノ四倍ヲ加ヘシモノニ等シ。

四角形ヲ ABCD トシ二對角線 AC, BD ノ各中央点ヲ E, F トスレバ

欠

MISSING

又 a 及ビ c ヨリ直線 ad, cd ヲ引キ

$$\angle cad=\angle \mathrm{CAD},\qquad \angle acd=\angle \mathrm{ACD}$$

ナラシメ ad, cd ノ交点ヲ d トス

又 a, 及ビ d ヨリ直線 ae, de ヲ引キ

$$\angle dae=\angle \mathrm{DAE},\qquad \angle ade=\angle \mathrm{ADE}$$

ナラシメ ae, de ノ交点ヲ e トス,

然ルキハ $abcde$ ハ所求ノ多角形ナリ.

(証) 作圖ニヨリテ $abcde$ ノ各角ハ ABCDE ノ各角ト相等シ

又 $\triangle \mathrm{ABC} \propto \triangle abc \quad \therefore \quad \dfrac{bc}{\mathrm{BC}}=\dfrac{ac}{\mathrm{AC}}$

又 $\triangle \mathrm{ACD} \propto \triangle acd \quad \therefore \quad \dfrac{cd}{\mathrm{CD}}=\dfrac{ac}{\mathrm{AC}} \quad \therefore \quad \dfrac{bc}{\mathrm{BC}}=\dfrac{cd}{\mathrm{CD}}$

同様ニ $\dfrac{cd}{\mathrm{CD}}=\dfrac{ed}{\mathrm{ED}}$, 及ビ $\dfrac{ed}{\mathrm{ED}}=\dfrac{ea}{\mathrm{EA}}$

即チ $\dfrac{bc}{\mathrm{BC}}=\dfrac{cd}{\mathrm{CD}}=\dfrac{ed}{\mathrm{ED}}=\cdots\cdots\cdots\cdots$

故ニ $abcde$ ハ ABCDE ト相似形ニシテ即チ所求ノ多角形ナリ.

第三節例題

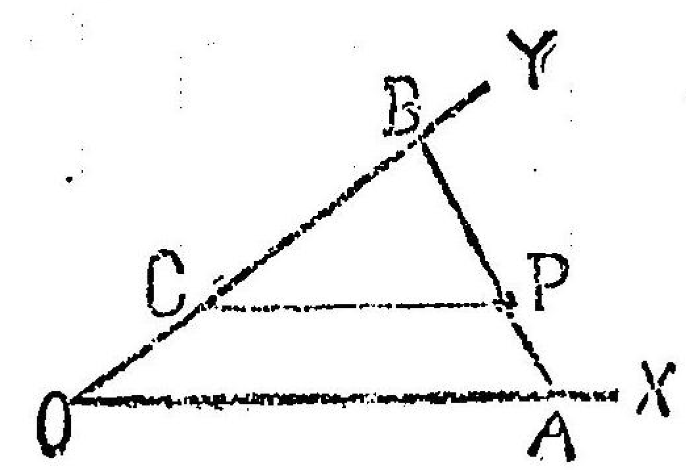
1. 壹定点Pヲ過ギ且ツ定角ノ二邊ニA, Bニ於テ交ルヘキ壹直線ヲ引キPA, PBノ比ヲ所設ノ比 $m:n$ ニ等シカラシメントス

(作圖) 定角ヲXOYトス

PヨリOXニ平行線PCヲ引キOYトノ交点ヲCトシOY上ニB点ヲ求メ

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CB}}=\frac{m}{n}$$

ナラシメBPヲ結ビ之レヲ引張シテOXトノ交点ヲAトス



然ルトキハBPAハ所求ノ直線ナリ,

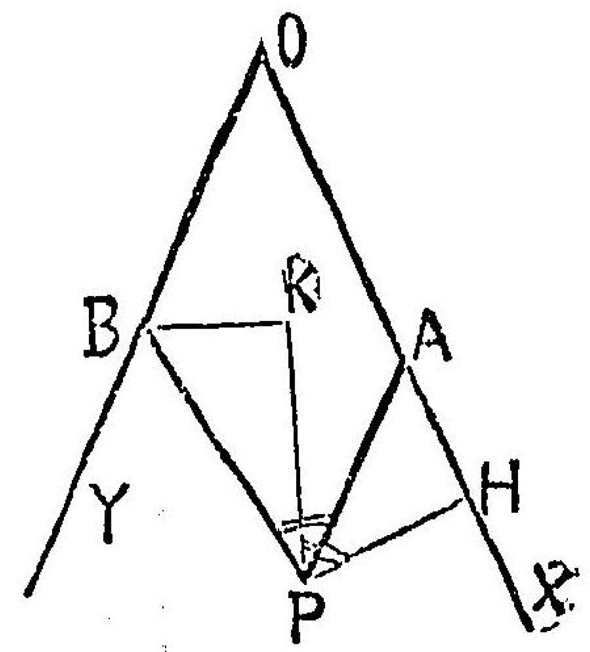
(証)　PC // OA　∴　$\frac{AP}{BP}=\frac{OC}{BC}=\frac{m}{n}$,

故ニBPAハ所求ノ直線ナリ.

(注意)　Pガ定角XOYノ外方ニ在ル場合ヲ吟味スヘシ

2. 定角XOYノ内方ノ定点Pヨリ貳邊OX, OYニA, Bニ於テ交ルヘキ直線ヲ引キ$\frac{PA}{PB}$ヲ所設ノ比$\frac{m}{n}$ニ等シカラシメ且ツ∠APBヲシテ所設ノ角αニ等シカラシメントス

(作圖)　PヨリOXニ垂線PHヲ引キ,又Pヨリ直線PKヲ引キ∠HPK=α, $\frac{PH}{PK}=\frac{m}{n}$ナラシメ, KB⊥PKトシBKトOYトノ交点ヲBトシPBヲ結ビ, PヨリPAヲ引キ∠BPA=αナラシメ, PAトOXトノ交点ヲAトス　PA, PBハ所求ノ直線ナリ.



(証)　∠HPA=∠KPB　∵　∠HPK=∠APB=α

又　∠H　=∠K=直角

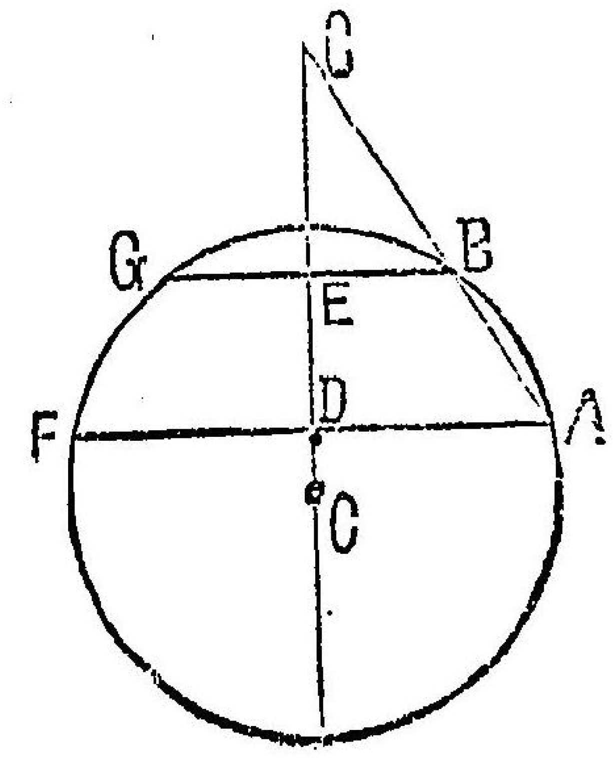
∴　△HPA∽△KPB　∴　$\frac{PA}{PB}=\frac{PH}{PK}=\frac{m}{n}$,

而シテ作圖ニヨリ　∠APB=α　ナリ.

故ニPA, PBハ所求ノ直線ナリ.

3. 定圓周上ノ貳定点A, Bヨリ平行貳弦ヲ引キ其各弦ノ長ノ比ヲシテ所設ノ比$\frac{m}{n}$ニ等シカラシムルコトヲ求ム.

(作圖)　圓ノ中心ヲOトス　ABヲ結ビ之レヲ$\frac{m}{n}$ノ比ニ外分シ其分点ヲCトシCOヲ結ビ及ビA及ビBヨリOCニ垂線AD, BEヲ下シAD, BEガ再ビ圓周ニ出逢フ点ヲF, GトスAF, BGハ所求ノ直線ナリ,



(証)　$\frac{AF}{BG}=\frac{AD}{BE}$　∵　AF=2AD,　BG=2BE

$=\frac{AC}{BC}$　∵　BE//AD

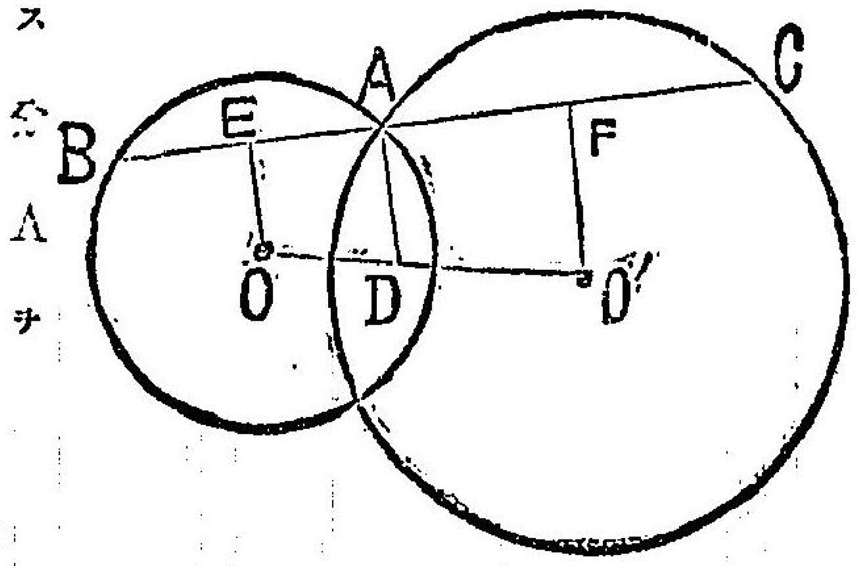
$=\frac{m}{n}$.　(作圖)

故ニAF, BGハ所求ノ直線ナリ.

(注意)　ABヲ$\frac{m}{n}$ノ比ニ内分スルモ可ナリ.

4. 貳圓周ノ交点Aヲ過ギテ其兩圓周間ニ直線BACヲ引キ$\frac{BA}{AC}$ヲシテ所設ノ比$\frac{m}{n}$ニ等シカラシムルコトヲ求ム.

(作圖)　兩圓ノ中心ヲO, O'トス　OO'ヲ結ビ之レヲ$\frac{m}{n}$ノ比ニ内分シ其分点ヲDトシDAヲ結ビAヨリADニ直立スル直線BACヲ引ク



BACハ所求ノ直線ナリ.

(証)　OE⊥AB,　O'F⊥AC

トスレバ　$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}$　∵　AB=2AE,　AC=2AF

$=\frac{OD}{O'D}$　∵　OE//AD//O'F

$=\frac{m}{n}$

故ニBACハ所求ノ直線ナリ.

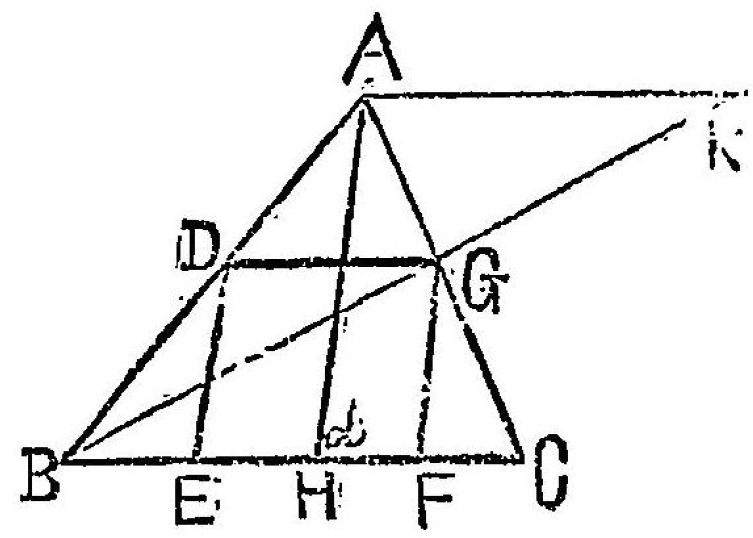
5. 所設ノ三角形ABC内ニ平行四邊形DEFGヲ畫キ(EFヲBC邊上ニ置キ, DヲABノ上ニ, GヲAC上ニ置ク) DE, DGノ比ヲ所設ノ比$\frac{m}{n}$ニ等シカラシメ且ツ∠DEFヲシテ所設ノ角αニ等シカラシムルコトヲ求ム

(作圖)　AヨリBCニマデ直線AHヲ引キ∠AHC=αナラシメ又AヨリBCニ平行線AKヲ引キ$\frac{AK}{AH}=\frac{m}{n}$ナラシメBKヲ結ビBKトACトノ交点ヲGトシ直線GF, GDヲ引キGF//AH, GD//BCトシDヨリAHニ平行線DEヲ引ク

然ルキハ□EDGFハ所求ノモノナリ.

(證) $DE // AH$

$\therefore \angle DEF = \angle AHC = a,$



又 $\dfrac{DE}{AH} = \dfrac{BD}{BA}$ $\because$ $DE // AH$

$= \dfrac{DG}{AK}$ $\because$ $DG // AK$

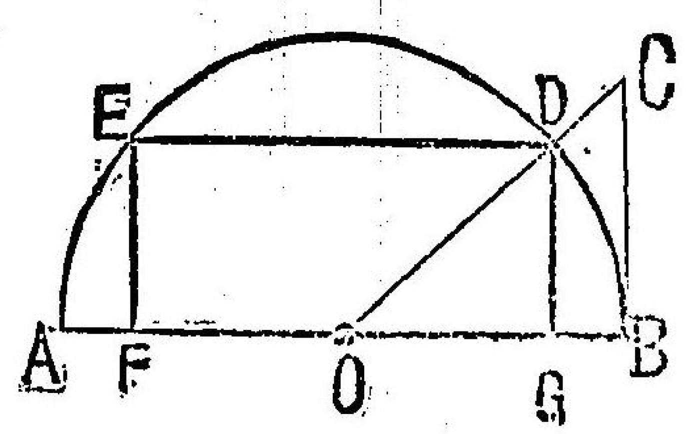
$\therefore \dfrac{DE}{DG} = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{m}{n}$

故ニ□EDGFハ所求ノモノナリ.

(注意) 本題ニ於テ $m=n$, $a=$直角トスルキハ □FGDEハ正方形トナルナリ, 故ニ本題ニヨリ, 所設三角形内ニ正方形ヲ畫クコヲ得.

6. 半圓形ニ矩形ヲ容レ其相隣二邊ノ比ヲ所設ノ比ニ等シカラシムルコヲ求ム.

(作圖) 半圓ノ直徑ヲABトシ中心ヲOトス,



$CB \perp OB,\quad \dfrac{OB}{BC} = \dfrac{\frac{1}{2}m}{n}$

ナラシメ, OCヲ結ビOCト半圓周トノ交点ヲDトシDヨリABニ平行線DE, ヲ引キ, ABニ垂線EF, DGヲ引クキハ□EFGDハ所求ノ矩形ナリ

(證) $\dfrac{OG}{DG} = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{\frac{1}{2}m}{n}$ $\quad\therefore\quad \dfrac{2OG}{DG} = \dfrac{m}{n}$

然ルニOEヲ引ケキハ明カニ $\triangle OGD \equiv \triangle OEF$ $\therefore OG = OF$ $\therefore FG = 2OG$

$$\frac{FG}{DG} = \frac{m}{n}$$

而シテ□EFGDハ明カニ矩形ナリ.

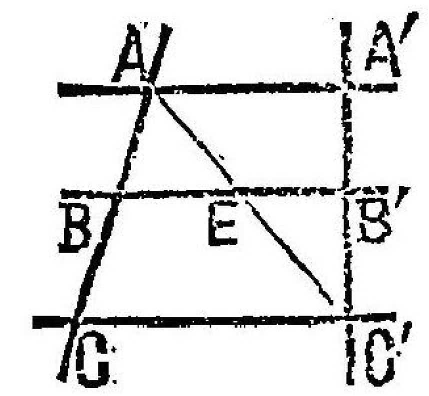
$\therefore$ EFGDハ所求ノ矩形ナリ

(注意) $m=n$ トスルキハEFGDハ正方形トナル

第三編雜題

1. 或直線ガ三個ノ平行線AA', BB', CC', ニテ截ラレ而シテ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{m}{n}$ ナルキハ $(m+n)BB' = mCC' + nAA'$ ナリ.

(證) AC'ヲ結ビAC'トBB'トノ交点ヲEトス



$\triangle ABE \backsim \triangle ACC'$

$\therefore \dfrac{BE}{CC'} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{m}{m+n}$

$\therefore (m+n)BE = mCC' \quad (1)$

又 $\triangle AC'A' \backsim \triangle C'EB'$

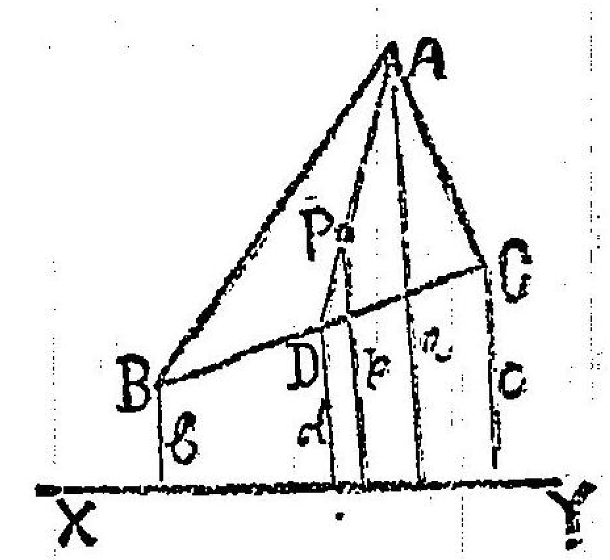
$\therefore \dfrac{EB'}{AA'} = \dfrac{B'C'}{C'A'} = \dfrac{n}{m+n} \quad \therefore (m+n)EB' = nAA' \quad (2)$

(1) (2) 兩式ヲ加フルキハ

$$(m+n)BB' = mCC' + nAA'$$

2. 三角形ノ各角頂ヨリ定直線XYニ下セル垂線ノ長ヲa, b, cトシ又其三角形ノ重心Pヨリ其直線ニ下セル垂線ノ長ヲpトスレバ $p = \frac{1}{3}(a+b+c)$

(證) BCノ中央点ヲDトシ, DヨリXYニ下セル垂線ノ長ヲdトス　然ルキハ



$BD = DC \quad \therefore 2d = b + c$

又A, P, Dハ一直線上ニアリテ

$\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{2}{1}$

$\therefore (2+1)p = 2d + a$ 　(1. 例題)

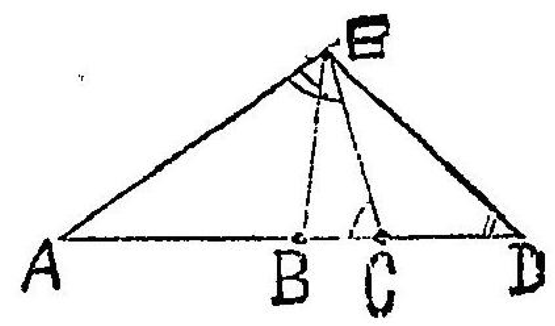
$\therefore 3p = b + c + a \quad \therefore p = \frac{1}{3}(a+b+c)$

3. 定直線ABヲC, B, Dニテ三分シ $AB \times AD = AC^2$ ナリトシ, Aヲ過ギテ任意直線AEヲ引キ, AE=ACトナスキECハ∠DEBヲ等分ス.

(證) $AB\times AD=AC^2=AE^2$

$\therefore \quad \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{AE}{AD},$

$\angle A=$ 共通,



$\therefore \quad \triangle AEC\backsim\triangle AEB$

$\therefore \quad \angle AEB=\angle D$

$AE=AC \quad \therefore \quad \angle AEC=\angle ACE$

$\angle AEC-\angle AEB=\angle ACE-\angle D$

$\angle BEC=\angle DEC.$ 即チ EC ハ $\angle BED$ ヲ等分ス.

4. 壹圓周上ノ壹点Pヲ中心トシ第二ノ圓ヲ畫キ此圓ニ切シ且ツ原圓周ニM, Nニ於テ交ルベキ任意ノ直線ヲ引ク片ハ $PM\times PN$ ハ不變ナリ. (學者自ラ作圖スヘシ)

(證) 切点ヲAトシPAヲ結ブ片ハ $PA\perp MN$ トナル

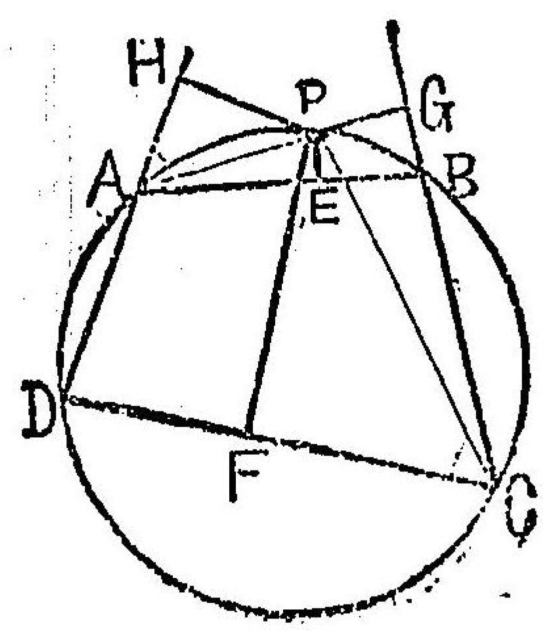
$\therefore \quad PM\times PN=PA\times$(第貳圓ノ直徑) (230. 定理)

$=$(第壹圓直徑)$\times$(第二圓ノ半徑)

同様ニ MN ガ第二圓ニ切シツヽ如何ニ動クモ $PM\times PN$ ハ恒ニ第二圓ノ直徑ト第壹ノ直徑トノ積ニ等シク即チ不變ナリ.

5. 内接四角形ABCDニ於テ外接圓周上ノ壹点Pヨリ両對邊AB, CDヘ到ル距離ノ相乘ハ其点ヨリ他ノ二對邊AD, BCニ到ル距離ノ相乘ト相等シ.

(證) PヨリAB, CD, AD, BCニ到ル距離ヲ順次ニPE, PF, PH, PGトシPA, PC, ヲ結ブ



$\triangle PAH,\ \triangle PFC$ ニ於テ

$\angle PCF=\angle PAH$($\because$ $\angle PAD$ ノ補角)

$\angle H=\angle F=$ 直角

$\therefore \quad \triangle PAH\backsim\triangle PFC$

$\therefore \quad \dfrac{PH}{PF}=\dfrac{PA}{PC} \qquad (1)$

又 $\triangle PAE,\ \triangle PGC$ ニ於テ

$\angle PAE=\angle PCB$

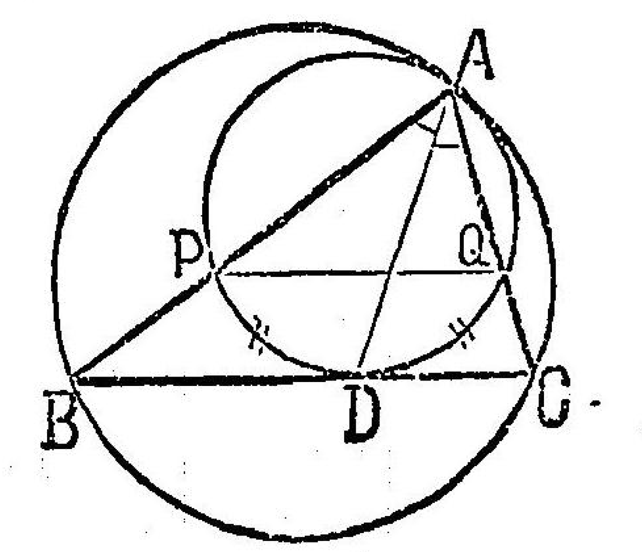
$\angle PEA=\angle PGC=$ 直角 $\quad \therefore \quad \triangle PAE\backsim\triangle PGC$

$\therefore \quad \dfrac{PE}{PG}=\dfrac{PA}{PC} \qquad (2)$

(1) 及ビ (2) ニヨリ $\quad \dfrac{PH}{PF}=\dfrac{PE}{PG}$

$\therefore \quad PH\times PG=PE\times PF.$

5. Aニ於テ内切スル両圓アリ今小圓周Dニ於テ切スベキ大圓ノ弦BCヲ引キAB, ACヲ結ビAB, ACガ小圓周ニ交ル点ヲP, Qトスレバ $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AP}{AQ}.$



(證) PQ, ADヲ結ブ片ハ

$BC//PQ$ (180頁例題1.)

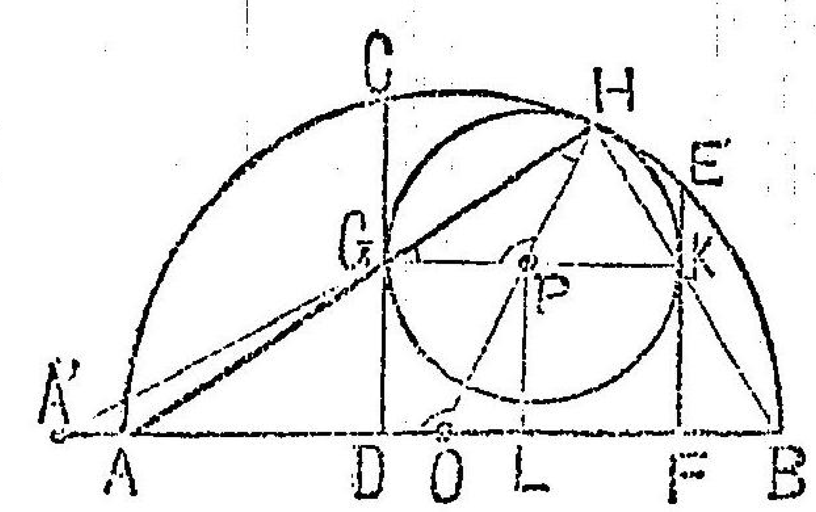
$\therefore$ 弧PD=弧DQ (150. 定理)

$\therefore \quad \angle PAD=\angle DAC$

$\therefore \quad \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$ (230. 定理)

$=\dfrac{AP}{AQ}$ ($\because$ $PQ//BC$).

6 半圓周上ノ貳点C, EヨリAB直徑ニ垂線CD, EFヲ下シCD, EF, 及ビ其半圓周ニG, H, Kニ於テ切スベキ圓ノ中心ヲPトシ, PヨリABニ垂線PLヲ下ス, 然ル片ハ PL ハ AD, BF ノ比例中項ナリ.



(證) 半圓ノ中心ヲOトス

然ル片ハO, P, Hハ壹直線上ニアリ,

又PG, PKヲ結ブ片ハPG, PKハ明ニ同壹ノ直線ナリ.

今HGヲ結ビ之レヲ引張シテBAトノ交点ヲA′トスル片ハ両三角形PGH, OA′Hニ於テ

$\angle HPG = \angle HOA'$ (錯角)

$\angle PHG$ ハ共通 $\therefore$ $\angle PGH = \angle A'$

然ルニ $PH = PG$. $\therefore$ $\angle PGH = \angle PHG$

$\therefore$ $\angle PHG = \angle A'$ $\therefore$ $OA' = OH$
$= OA$

故ニ A' ハ A ト壹致ス, 即チ H, G, A ハ壹直線上ニアリ,

同様ニ H, K. B モ同壹直線上ニアリ,

兩三角形 AGD, KFB ニ於テ

$\angle GAD = \angle B$ ($\because$ 共ニ $\angle AGD$ ノ餘角)

$\angle ADG = \angle KFB =$ 直角

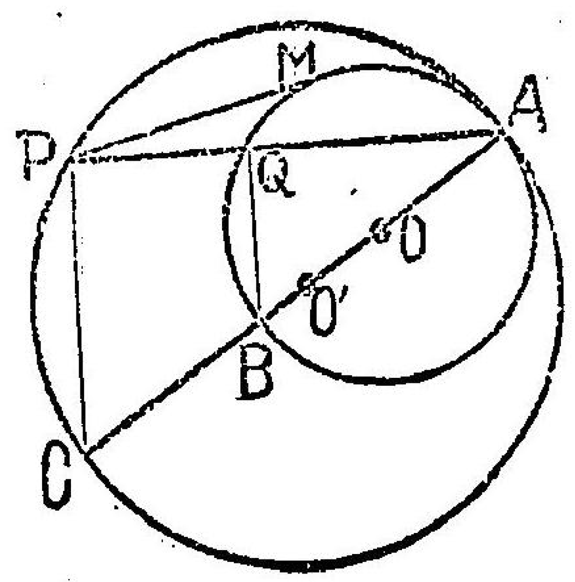
$\therefore$ $\triangle AGD \backsim \triangle KFB$ $\therefore$ $\dfrac{AD}{GD} = \dfrac{KF}{FB}$

然ルニ $GD = KF = PL$ $\therefore$ $\dfrac{AD}{PL} = \dfrac{PL}{FB}$

故ニ PL ハ AD, FB ノ比例中項ナリ.

7. A ニ於テ內切スル圓アリ今外圓周上ノ任意ノ点 P ヨリ內圓ニ切線 PM ヲ引ク時ハ PA : PM ハ不變ナリ.

(証) PA ト內圓周トノ交点ヲ Q トシ, 二圓ノ中心ヲ O, O′ トス然ル時ハ A, O O′ ハ壹直線上ニアリ, 而シテ直線 AOO′ ガ各圓周ニ交ル点ヲ B, C トシ QB, PC ヲ結ブ,



$PM^2 = PQ \times PA$

$\therefore$ $\dfrac{PM^2}{PA^2} = \dfrac{PQ \times PA}{PA^2} = \dfrac{PQ}{PA}$

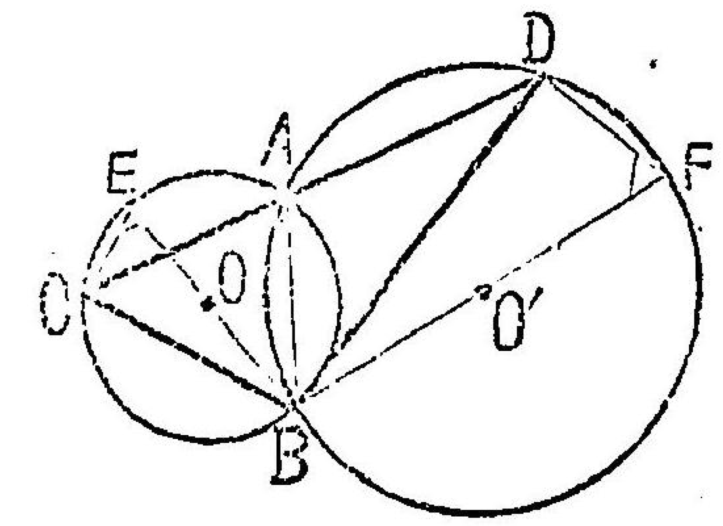
然ルニ $\angle BQA = \angle CPA =$ 直角 $\therefore$ $QB // PC$

$\dfrac{PQ}{PA} = \dfrac{BC}{AC}$ $\therefore$ $\dfrac{PM^2}{PA^2} = \dfrac{BC}{AC}$

同様ニ P ガ如何ニ動クモ $\dfrac{PM^2}{PA^2}$ ハ恒ニ $\dfrac{BC}{AC}$ ニ等シク即チ不變ナリ

從ッテ $\dfrac{PM}{PA}$ ハ不變ナリ

8. A, B ハ相交ル二圓周ノ交点ナリ, A ヲ過ギテ各圓周間ニ引キタル直線ト各圓周トノ交点ヲ C, D トシ BC, BD ヲ結ブ, 然ル時ハ BC : BD ハ各圓ノ直徑ノ比ニ等シ.



(証) B ヲ過ギテ各圓ノ直徑ヲ引キ之レヲ BOE, BO′F トシ CE, DF ヲ結ブ

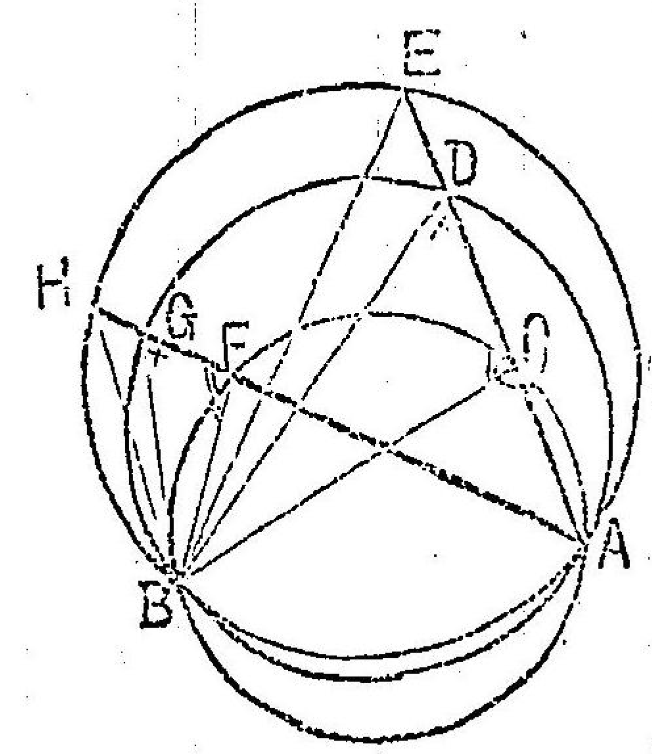
$\angle F = \angle CAB$, (共ニ $\angle BAD$ ノ補角)

$= \angle CEB$,

又 $\angle BDF = \angle ECB =$ 直角, $\therefore$ $\triangle BCE \backsim \triangle BDF$

$\therefore$ $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{BE}{BF}$.

9. 貳定点 A B ヲ過グル數個ノ圓周アリ, 今 A ヲ過ギテ二直線ヲ引キ其各直線ガ各圓周ニ交ル点ヲ C, D, E, F, G, H トス然ル時ハ $\dfrac{CD}{DE} = \dfrac{FG}{GH}$.



(証) CB, DB, EB, FB, GB, HB ヲ結ブ時ハ

$\angle ACB = \angle AFB$

$\therefore$ $\angle DCB = \angle GFB$

又 $\angle CDB = \angle FGB$

$\therefore$ $\triangle CDB \backsim \triangle FGB$

$\therefore$ $\dfrac{CD}{FG} = \dfrac{DB}{GB}$

又 $\triangle EDB \backsim \triangle HGB$ (同理) $\therefore$ $\dfrac{ED}{HG} = \dfrac{DB}{GB}$.

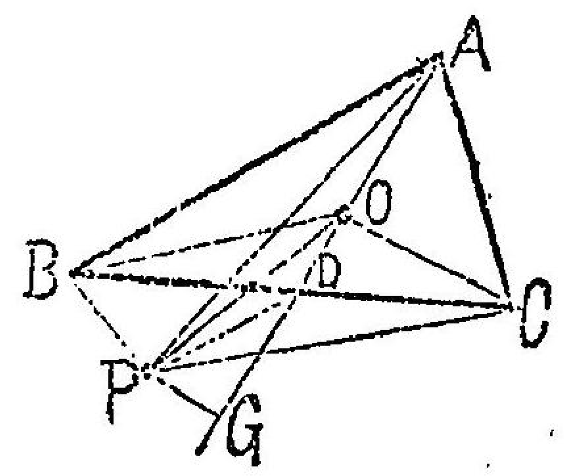
$\therefore$ $\dfrac{CD}{FG} = \dfrac{ED}{HG}$.

10. O ヲ三角形 ABC ノ重心トシ P ヲ任意ノ壹点トスル時ハ

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3OP^2.$$

(証) BC ノ中央点ヲ D トシ PD ヲ結ビ P ヨリ AD ヘ垂線 PG ヲ

引ク $\angle POD$, $\angle POA$ ノ內孰レカ壹個銳角ニシテ他ノ壹個ハ鈍角ナリ而シテ $\angle POD$ ヲ銳角トス



$\triangle POD$ ニ於テ $\angle POD$ ハ銳角ナルヲ以テ

$$PD^2=OP^2+OD^2-2OD\times OG$$
$$=OP^2+OD^2-AO\times OG$$

$\therefore\ 2PD^2=2OP^2+2OD^2-2AO\times OG$　　(1)

又 $\triangle APO$ ニ於テ $\angle AOP$ ハ鈍角ナルヲ以テ

$$PA^2=AO^2+OP^2+2AO\times OG \qquad (2)$$

(1) (2) 兩式ヲ加フルキハ

$$2PD^2+PA^2=AO^2+2OD^2+3OP^2.$$

$\triangle PBC$ ニ於テ　$PB^2+PC^2=2BD^2+2PD^2$

上ノ二式ヲ加ヘ兩邊ヨリ $2PD^2$ ヲ減ズルキハ

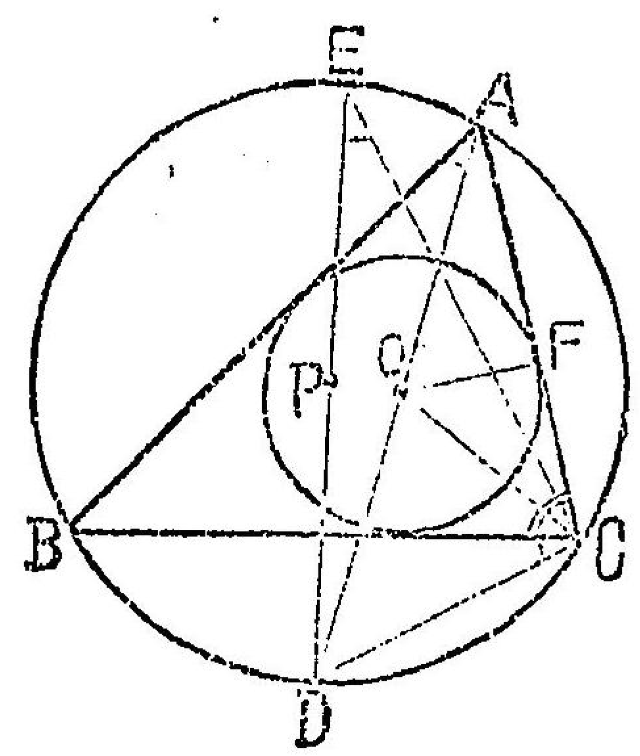
$$PA^2+PB^2+PC^2=AO^2+2BD^2+2OD^2+3OP^2$$

然ルニ　$\triangle BOC$ ニ於テ　$2BD^2+2OD^2=OB^2+OC^2$

$\therefore\quad PA^2+PB^2+PC^2=AO^2+OB^2+OC^2+3OP^2.$

11. 任意ノ三角形 ABC ノ內接圓ノ中心ヲ O トシ其外接圓ノ中心ヲ P トス然ルキハ O ヲ過グル外接圓ノ弦ガ O ニ於テ分タル弍部分ノ相乘積ハ外接圓ノ直徑ト內接圓ノ半徑トノ積ニ等シ.

(證) AO ヲ結ビ AO ト外接圓周トノ交点ヲ D トシ DP ヲ結ビ DP ト外接圓周トノ交点ヲ E トシ EC, OC ヲ結ブ　又 AC ト內接圓周トノ切点ヲ F トシ OF ヲ結ブ



$\triangle EDC$, $\triangle AOF$ ニ於テ

$$\angle E=\angle OAF$$
$$\angle ECD=\angle AFO=\text{直角}$$

$\therefore\quad \triangle DCE \backsim \triangle AOF \quad \therefore\quad \dfrac{DE}{AO}=\dfrac{DC}{OF}$

$\therefore\quad AO\times DC=DE\times OF$　　(A)

然ルニ　$\angle BCD=\angle BAD=\angle DAC$　($\because$ AD ハ $\angle BAC$ ヲ等分ス)

又　$\angle OCB=\angle ACO$

上ノ二式ヲ加フルキハ

$$\angle OCD=\angle DAC+\angle ACO$$
$$=\angle DOC \qquad \therefore\quad DC=DO$$

故ニ (A) 式ヨリシテ　$AO\times OD=DE\times FO$

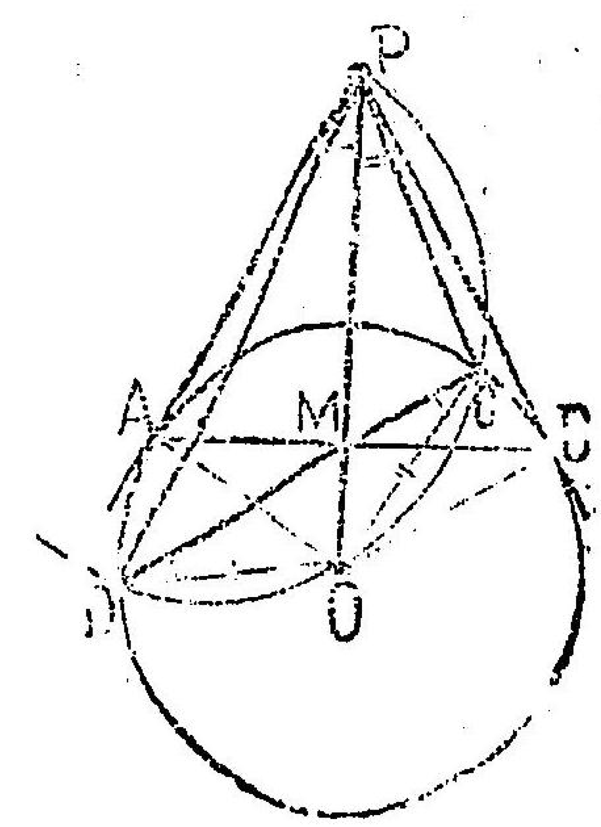
=(外圓ノ直徑)×(內圓半徑)

然ルニ O ヲ過グル外接圓ノ諸弦ガ O ニテ分タレタル弍部分ノ相乘積ハ孰レモ $AO\times OD$ ニ等シ.

故ニ題言ノ如シ.

12. 圓外ノ壹点 P ヨリ其圓ニ切線 PA, PB ヲ引キ AB ヲ結ビ AB ノ中央点 M ヲ過ギテ任意ノ弦 CD ヲ引キ PC, PD, PM ヲ結ブキハ PM ハ $\angle CPD$ ヲ等分ス.

(證) 圓ノ中心ヲ O トス



然ルキハ PM ハ O ヲ過グ

OA, OB ヲ結ブキハ

$$\angle PAO=\angle PBO=\text{直角}$$

故ニ P, A, O, B ハ同壹ノ圓周上ニアリ　$\therefore\quad PM\times MO=AM\times MB$

$$=MC\times MD$$

故ニ P, C, O, D ハ同壹ノ圓周上ニアリ

故ニ今 OC, OD ヲ結ブキハ　$\angle OPD=\angle OCD$,　$\angle ODC=\angle OPC$

然ルニ $OC=OD$ ナルヲ以テ　$\angle OCD=\angle ODC$

$\therefore\quad \angle OPD=\angle OPC$

故ニ PO ハ $\angle CPD$ ヲ等分ス

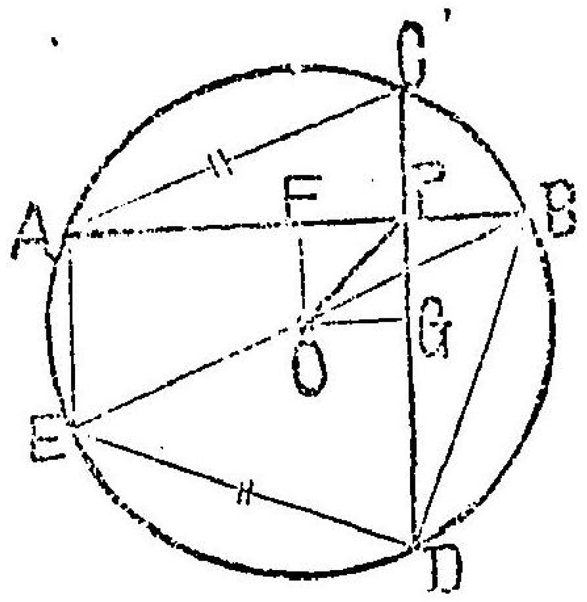
13. 圓內或ハ圓外ニ於テ直交セル弍弦 AB, CD ノ交点ヲ P

トシ圓ノ直徑ノ長ヲdトスルキハ

(第一) $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=d^2$

(第二) $AB^2+CD^2=2d^2-4OP^2$.

(證) (第壹) 圓ノ中心ヲOトシ AC, BD ヲ結ビ B ヲ過グル直徑ヲ BOE トシ AE, ED ヲ結ブ



$\angle APC=$直角, ∴ $AP^2+PC^2=AC^2$

$\angle DPB=$直角 ∴ $PD^2+PB^2=BD^2$

∴ $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=AC^2+BD^2$ (a)

又BCAEハ半圓ナルヲ以テ $\angle BAE=$直角 ∴ $AE//CD$

∴ 弧AC＝弧ED ∴ $AC=ED$

故ニ(a)ヨリ $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=ED^2+BD^2$

$=ED^2$ (∵$\angle BDE=$直角)

$=d^2$.

(第二) $OF\perp AB$, $OG\perp CD$ トスレバ $AF=FB$, $CG=GD$

∴ $AB^2=4FB^2$

$=4(OB^2-OF^2)=4OB^2-4OF^2$

$=d^2-4OF^2$

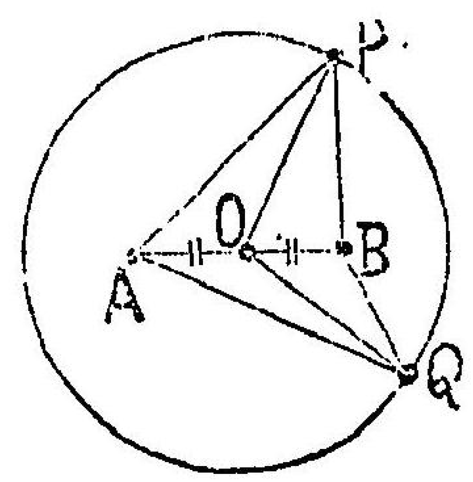
同様ニ $CD^2=d^2-4OG^2$

∴ $AB^2+CD^2=2d^2-4(OF^2+OG^2)$

$=2d^2-4(OF^2+FP^2)$

$=2d^2-4OP^2$

14. 貳定点A, Bヨリノ距離ノ貳方ノ和ガ所設ノ数m^2ニ等シキ点ノ軌跡如何



(解) Pヲ所求ノ軌跡ノ上ノ任意ノ点トス即チ $PA^2+PB^2=m^2$ ナリトス

AB ヲ結ビ AB ノ中央点ヲ O トシ OP ヲ結ブ,

△APBニ於テ $AP^2+BP^2=2OP^2+2OA^2$

∴ $m^2=2OP^2+2OA^2$

∴ $OP=\sqrt{\dfrac{m^2-2OA^2}{2}}$

同様ニA, Bヨリノ距離ノ二方ノ和ガm^2ニ等シキ点トOトノ距離ハ恒ニ$\sqrt{\frac{1}{2}(m^2-2OA^2)}$ニ等シ.

故ニA, Bヨリノ距離ノ二方ノ和ガm^2ニ等シキ点ハOヲ中心トシ$\sqrt{\frac{1}{2}(m^2-2OA^2)}$ヲ半徑トスル圓周(之レヲXトス)上ニアリ (1)

[是レ100ノ(4)ニ當ル]

又圓周Xノ上ニ任意ノ点Qヲ取リQA, QB, QOヲ結ブ

△AQBニ於テ $AO=OB$ ナルヲ以テ

$AQ^2+BQ^2=2AO^2+2OQ^2$

$=2AO^2+2\times\dfrac{m^2-2AO^2}{2}$ ∵ $OQ=OP$

$=m^2$

故ニX上ノ点ヨリA, Bニ到ル距離ノ二方ノ和ハm^2ニ等シ (2)

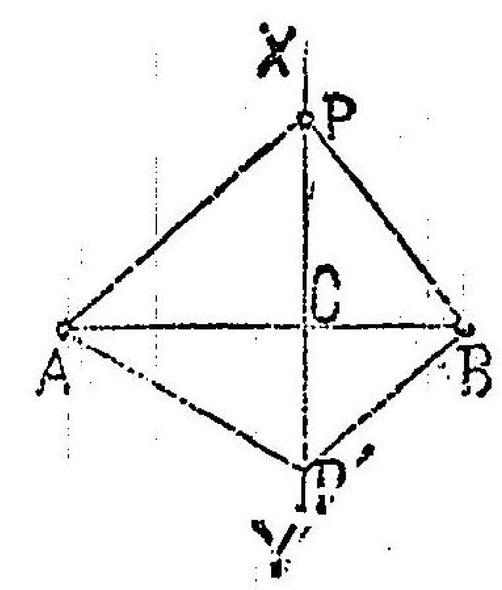
[是レ100ノ(1)ニ當ル]

(1)及ビ(2)ニ依リ圓周Xハ所要ノ軌跡ナリ.

15. 貳定点ヨリノ距離ノ二方ノ差ガ所設ノ数m^2ニ等シキ点ノ軌跡ヲ求ム

Pヲ所要ノ軌跡ノ上ノ任意ノ壹点トス

即 $PA^2-PB^2=m^2$ トス



ABヲ結ビPヨリABニ垂線PCヲ下ス

$\angle ACP=$直角 ∴ $PA^2=AC^2+CP^2$

$\angle BCP=$直角 ∴ $PB^2=CB^2+CP^2$ (−

$PA^2-PB^2=AC^2-BC^2$

∴ $m^2=AC^2-BC^2$

故ニ今$AC^2-BC^2=m^2$ナル様ニCヲ求メ

(但シCヲ求ムル法ハ次ノ補題ニ在リ)

Cニ於テABニ垂線XY引クキハPハXYノ上ニアリ (1)

[是レ100ノ(4)ニ當ル]

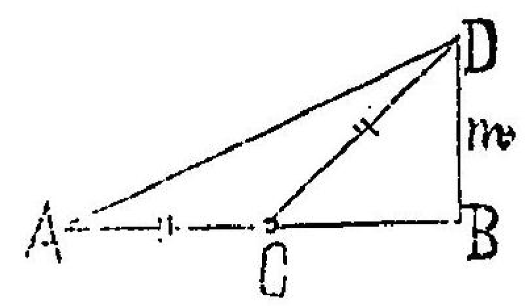
又 XY ノ上ニ任意ノ点 P′ ヲ取リ P′A, P′B ヲ結ブ時ハ

$$P'A^2=AC^2+CP'^2$$
$$P'B^2=BC^2+CP'^2 \quad (-$$
$$P'A^2-P'B^2=AC^2-BC^2=m^2.$$ [100. ノ (2) ニ當ル]　(2)

(1) (2) ニヨリ XY ハ所求ノ軌跡ナリ

(補題) $AC^2-BC^2=m^2$ ナル様ニ C ヲ求ムル法ハ次ノ如シ

B ニ於テ AB ニ垂線 BD ヲ引キ BD ノ長ヲ m ニ等シクシ DA ヲ結ビ D ヨリ直線 DC ヲ引キ ∠CDA=∠A ナラシメ DA ト AB トノ交点ヲ C トス, C ハ所要ノ点ナリ.

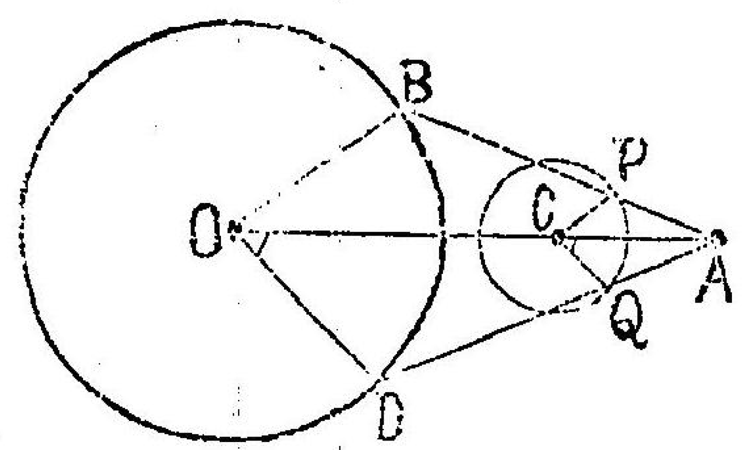


如何トナレバ ∠B= 直角. ∴ $DC^2-BC^2=DB^2=m^2$

然ルニ ∠CDA=∠A　∴ DC=AC　∴ $AC^2-BC^2=m^2$.

16. 壹定点 A ヨリ壹定圓周ニ到ル諸直線ヲ所設ノ比 $\frac{m}{n}$ ニ内ケスル時其分点ノ軌跡ヲ求ム

(解) P ヲ軌跡ノ上ノ点トス



即チ AP ト定圓周トノ交点ヲ B トスル時 $\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$ ナリトス,

定圓ノ中心ヲ O トシ AO ヲ結ビ之レヲ $\frac{m}{n}$ ノ比ニ内分シ其分点ヲ C トシ OB, CP ヲ結ブ

$$\frac{AP}{AB}=\frac{AC}{AO}=\frac{m}{m+n}$$

∠BAO ハ共通　∴ △APC∽△AOB

$$\therefore \quad \frac{PC}{BO}=\frac{AC}{AO}=\frac{m}{m+n}$$

$$\therefore \quad PC=\frac{m}{m+n}BO=\frac{m}{m+n}R$$ (R ハ半徑)

故ニ P ハ C ヲ中心トシ $\frac{m}{m+n}R$ ヲ半徑トセ圓周(之レヲ X ト命ス)ノ上ニアリ [是レ 100 ノ (1) ニ當ル]

又 X 上ニ任意ノ点 Q ヲ取リ CQ ヲ結ビ O ヨリ CQ ニ平行ナル半徑ヲ引キ之レヲ OD トシ AQ, AD ヲ結ブ.

CQ ハ X 圓ノ半徑ナリ　∴ $CQ=\frac{m}{m+n}R=\frac{m}{m+n}OD$

$$\therefore \quad \frac{CQ}{OD}=\frac{m}{m+n}$$

又 $\frac{AC}{AO}=\frac{m}{m+n}$　∴ $\frac{CQ}{OD}=\frac{AC}{AQ}$

故ニ兩三角形 ACQ AOD ニ於テ

$$\frac{CQ}{OD}=\frac{AC}{AO}$$

∠ACQ=∠AOD (應角)　∴ △ACQ∽△AOD

∴ ∠CAQ=∠OAD

故ニ二直線 AQ, AD ハ壹致ス

即チ A, Q, D ハ壹直線ヲナシ,

而シテ CQ//OD ナルヲ以テ $\frac{AQ}{QD}=\frac{AC}{CO}=\frac{m}{n}$

故ニ X 上ノ点ハ A ヨリ O 圓周ニ到ル距離ヲ $\frac{m}{n}$ ニ分ツ.　(2)

[100. (2) ニ當ル]

(1) (2) ニヨリテ X ハ所求ノ跡ナリ.

第五節—面積

定義

239. 或ル平面多角形ノ面積トハ其多角形ト,單位トシテ取ル所ノ他ノ定多角形トノ比ヲイフ.但シ面積ノ單位ハ主ニ長サノ單位ノ上ニ畫ケル正方形ヲ用ユ

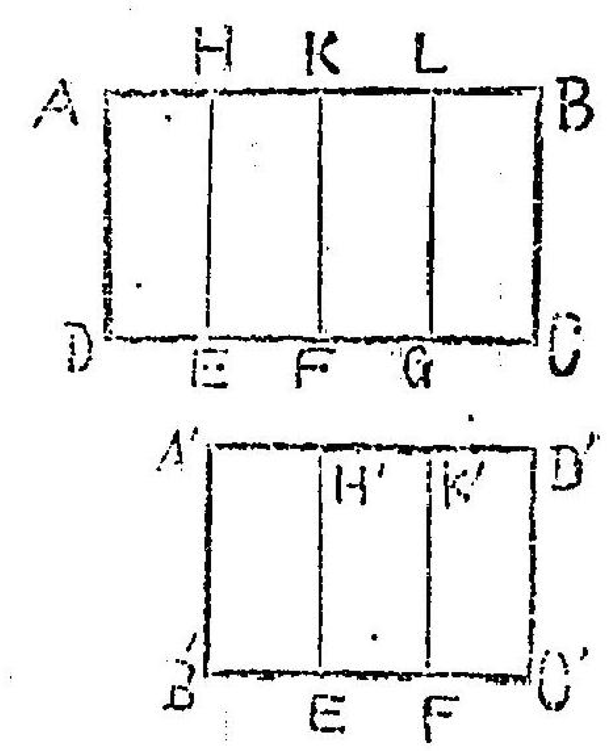
例ヘハ或ル多角形ヲ A トシ,單位トシテ取ル所ノ多角形ヲ B トスレハ $\frac{A}{B}$ ハ A ノ面積ナリ.

定理壹

240. 貳個ノ等高ノ矩形ハ其底ト比例ス.

等高ノ矩形ヲ ABCD, A'B'C'D' トシ其底ヲ DC, B'C' トス

然ルキハ ABCD : A'B'C'D' = DC : B'C'.



(証) (第壹) $\frac{DC}{B'C'}$ ガ可約比ノ場合.

$\frac{DC}{D'C'}=\frac{4}{3}$ トス

今 B'C' ヲ E', F' ニテ三等分シ其各部分ヲ l トスルキハ

$$DC=\frac{4}{3}B'C'=\frac{4}{3}\times 3l=4l$$

故ニ DC ヲ E, F, G ニ於テ四等分スルキハ其各分ハ l トナル

是ニ於テ E' F' ニ於テ C'B' ニ垂線 E'H', F'K' ヲ作リ又 E F G ニ於テ DC ニ垂線 EH, FK, GL ヲ作ル然ルキハ矩形 A'E', H'F', K'C' AE, HF, KG LC ハ凡ヘテ全等ナリ故ニ此諸矩形ノ各ヲ S トスルキハ ABCD＝4S, A'B'C'D'＝3S

$$\therefore \frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{4S}{3S}=\frac{4}{3} \qquad \therefore \frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{DC}{B'C'}.$$

(第二) $\frac{DC}{D'C'}$ ガ不可約比ノ場合.

此ノ場合ニ於ケル証明ハ本編第壹節定理(197)ノ第貳ト全シ故ニ略ス.

241. 推論 等底ノ矩形ハ其高ト比例ス.

(証) 前章ノ圖ニ於テ AD ヲ ABCD ノ底, A'D' ヲ A'B'C'D' ノ底ト看フルキハ DC, D'C' ハ各矩形ノ高ナリ.

而シテ $\frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{DC}{D'C'}$ ナリ.

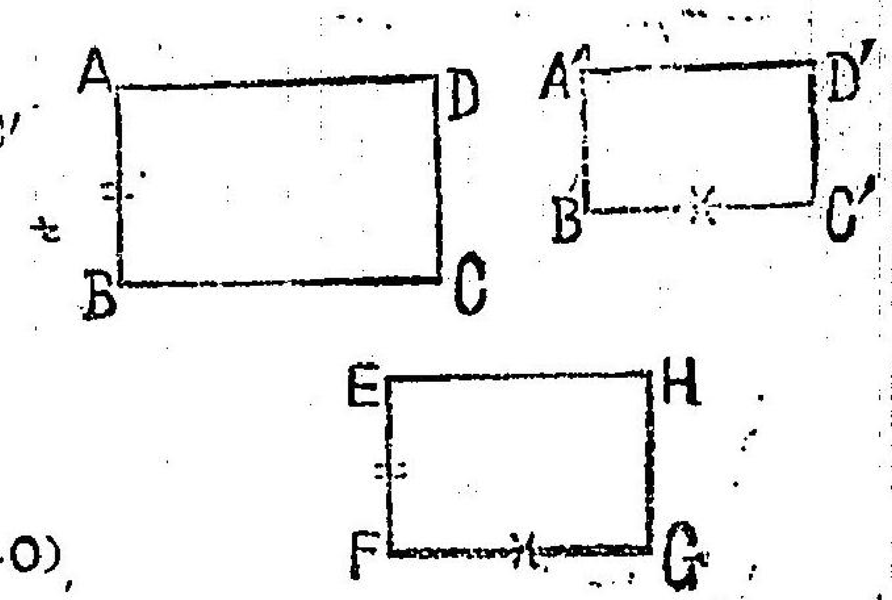
即チ ABCD, A'B'C'D' ノ比ハ高ノ比ニ等シ.

定理貳

242. 貳個ノ矩形ハ底ト高ノ相乘ト比例ス.

貳個ノ矩形ヲ ABCD, A'B'C'D' トス

然ルキハ $\frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{AB\times BC}{A'B'\times B'C'}$



(証) AB, B'C' ヲ隣接二邊トセル矩形 EFGH ヲ畫ク

即チ EF＝AB, FG＝B'C' トス

AB＝EF $\therefore \frac{ABCD}{EFGH}=\frac{BC}{FG}$ (240),

FG＝B'C' $\therefore \frac{EFGH}{A'B'C'D'}=\frac{EF}{A'B'}$ (241)

上ノ二式ヲ相乘スレハ

$$\frac{ABCD}{A'B'C'D'}=\frac{BC\times EF}{FG\times A'B'}=\frac{BC\times AB}{B'C'\times D'A'}.$$

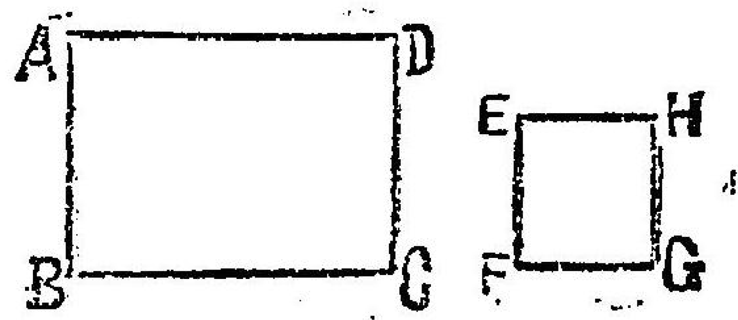
定理三

243. 矩形ノ面積ハ底ト高トノ相乘ニ等シ

矩形ヲ ABCD トスレハ其面積ハ AB×BC ナリ.

(証) 長サノ單位ノ上ニ正方形 EFGH ヲ畫ク即チ此正方形ハ面積ノ單位ナリ.

$$\frac{ABCD}{EFGH}=\frac{AB\times BC}{EF\times FG}=\frac{AB}{EF}\times\frac{BC}{FG}$$



但シ EFGH ハ面積ノ單位ニシテ

EF, FG ハ長サノ單位ナリ,

故ニ $\frac{ABCD}{EFGH}$ ハ ABCD ノ面積ニシ

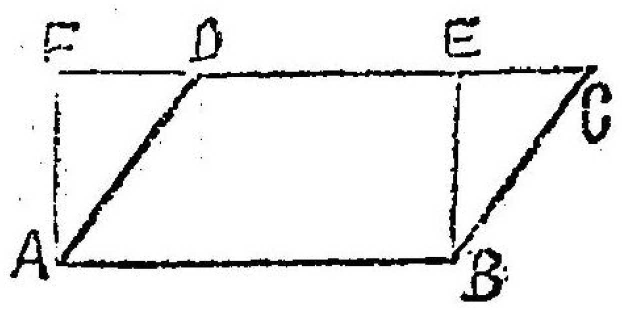
テ $\frac{AB}{EF}$ $\frac{BC}{FG}$ ハ AB, BC ノ數値ナリ,

故ニ ABCD ノ面積ハ AB, BC ノ各數値ノ相乘ナリ.

244. 推論　正方形ノ面積ハ其壹邊ノ自乘ニ等シ,

定　理　四

245. 平行四邊形ノ面積ハ底ト高トノ相乘ニ等シ.



平行四邊形ナ ABCD トシ其高ナ BE,

底邊ナ AB トス

然ルトキハ ABCD ノ面積ハ $AB\times BE$ ナリ.

(証)　$AF\perp AB$ トシ AF ト DC トノ交

点ナ F トス, 然ルトキハ明カニ

$$\triangle AFD\equiv\triangle BEC$$

$\therefore$　$ABCF-\triangle AFD=ABCF-\triangle BEC$　　$\therefore$　$ABCD=ABEF$

然ルニ ABEF ノ面積 $=AB\times BE$

$\therefore$　ABCD ノ面積 $=AB\times BE$.

246. 推論壹　等底, 等高ノ矩形ハ等積ナリ,

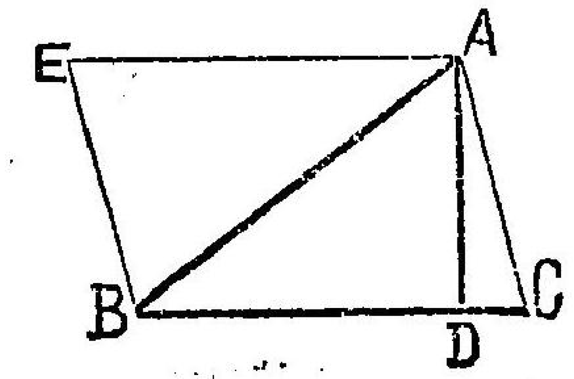
247. 推論貳　等高ノ平行四邊形ハ底ト比例シ又等底ノ平行四邊形ハ其高ト比例ス

定　理　五

248. 三角形ノ面積ハ底ト高ノ相乘ノ半ニ等シ,

三角形ナ ABC トシ其高ナ AD, 底ナ BC トス

(証)　AE//BC, BE//AC トス



然ルトキハ　$\triangle ABC\equiv\triangle AEB$

$\therefore$　$\triangle ABC=\frac{1}{2}AEBC$

然ルニ $AD\perp BC$ ナルナ以テ AEBC

ノ面積ハ $AD\times BC$ ナリ

故ニ $\triangle ABC$ ノ面積ハ $\frac{1}{2}AD\times BC$ ナリ.

249. 推論壹　等底等高ノ三角形ハ等積ナリ.

250. 推論貳　等底ノ兩三角形ハ其各高ト比例ス, 又等底ノ三角形ハ其高ト比例ス.

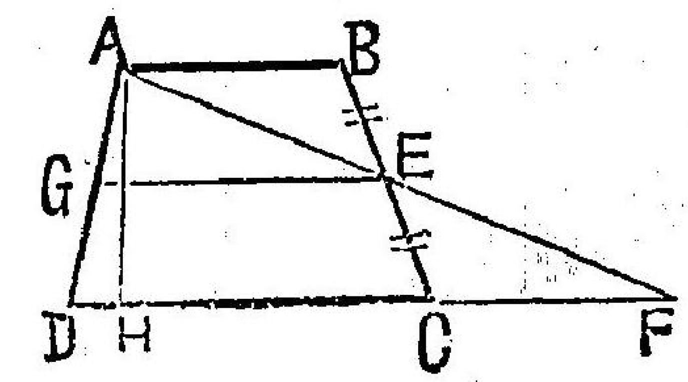
定　理　六

251. 梯形ノ面積ハ二底ノ和半ト高トノ相乘ノ半ニ等シ.

梯形ナ ABCD トシ AB, CD ヲ底トシ AH ナ其高トス

然ルトキハ ABCD ノ面積ハ $\frac{1}{2}(AB+CD)\times AH$ ナリ.

(証)　BC ノ中央点ナ E トシ



AE ナ結ビ AE ト DC トノ交点ナ F

トスレハ

$$\triangle ABE\equiv\triangle CEF$$

$\therefore$　$ABCD=\triangle ADF$

然ルニ $\triangle ADF$ ノ面積ハ $\frac{1}{2}AH\times DF$

$\therefore$　ABCD ノ面積 $=\frac{1}{2}AH\times DF$

然ルニ　$DF=DC+CF$

$=DC+AB$ $\because$ $\triangle ABE\equiv\triangle CEF$

$\therefore$　ABCD ノ面積 $=\frac{1}{2}AH(AB+DC)$.

252. 推論　梯形ノ面積ハ不平行二邊ノ各中央点ナ結ベル直線ト高トノ相乘ニ等シ.

(証)　前章ニ於テ不平行二邊 AD, BC ノ各中央点ナ G. E トス

然ルトキハ $GE=\frac{1}{2}(AB+CD)$ ナリ

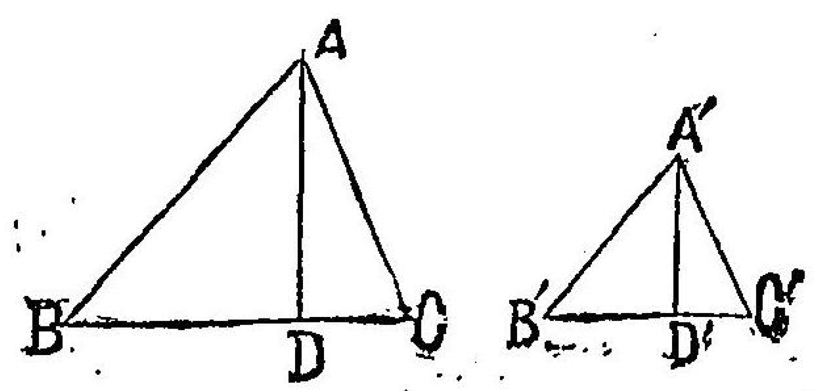
$\therefore$　ABCD ノ面積 $=\frac{1}{2}(AH\times GF)$.

定理七

253. 相似三角形ノ面積ノ比ハ相等邊ノ二方ノ比ニ等シ

相似三角形ヲ ABC, A'B'C' トス

然ルトキ $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{BC^2}{B'C'^2}$



(證) $AD\perp BC$, $A'D'\perp B'C'$ トスレハ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AD\times BC}{A'D'\times B'C'}$$

然ルニ $\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}$ ∵ $\triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$

$=\frac{BC}{B'C'}$ ∵ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

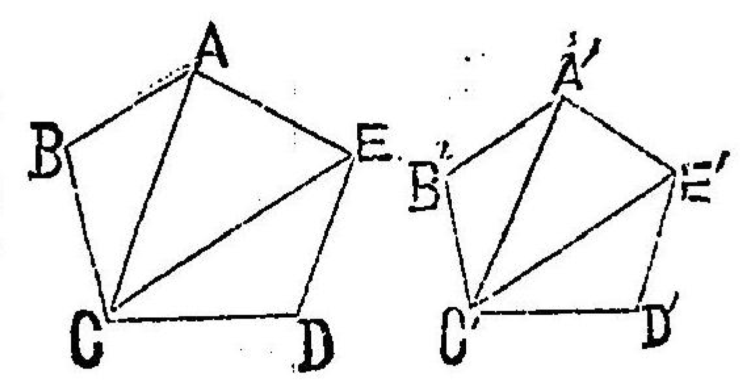
∴ $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{BC^2}{B'C'^2}$

定理八

254. 相似多角形ハ相當邊ノ二方ト比例ス;

相似多角形ヲ ABCDE, A'B'C'D'E' トシ AB, A'B' ヲ相當邊トスレハ

$\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$.



(證) 對角線ヲ BD, BE, B'D', B'E' トス;

$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ ∴ $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$

$\triangle ACE\backsim\triangle A'C'E'$ ∴ $\frac{\triangle ACE}{\triangle A'C'E'}=\frac{AE^2}{A'E'^2}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$

$\triangle ECD\backsim\triangle E'C'D'$ ∴ $\frac{\triangle ECD}{\triangle E'C'D'}=\frac{DC^2}{D'C'^2}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$

∴ $\frac{\triangle ABC+\triangle ACE+\triangle ECD}{\triangle A'B'C'+\triangle A'C'E'+\triangle E'C'D'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$

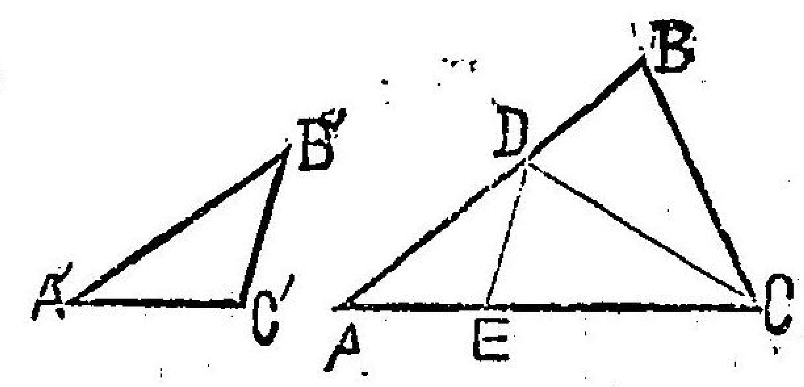
∴ $\frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'}=\frac{AB^2}{A'D'^2}$.

定理九

253. 兩三角形ニ於テ彼レ是レノ一角ガ相等シキトキハ此兩三角形ノ面積ノ比ハ其等角ニ邊ノ相乘ト比例ス.

兩三角形ヲ ABC, A'B'C' トシ $\angle A=\angle A'$ トス

然ルトキハ $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\times AC}{A'B'\times A'C'}$



(證) $AD=A'B'$ $AE=A'C'$ トシ DE, DC ヲ結ブ

然ルトキハ $\triangle A'B'C'\equiv\triangle ADE$.

△ADE, △ADC ハ等高ナリ (AE, AC ヲ底ト考フ)

∴ $\frac{\triangle ADE}{\triangle ADC}=\frac{AE}{AC}$ (1)

又 △ADC, △ABC ハ等高ナリ (AD, AB ヲ底ト考フ)

∴ $\frac{\triangle ADC}{\triangle ABC}=\frac{AD}{AB}$ (2)

(1) (2) ヲ相乘スレハ $\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{AE\times AD}{AC\times AB}$

∴ $\frac{\triangle A'B'C'}{\triangle ABC}=\frac{A'B'\times A'C'}{AB\times AC}$.

定理拾

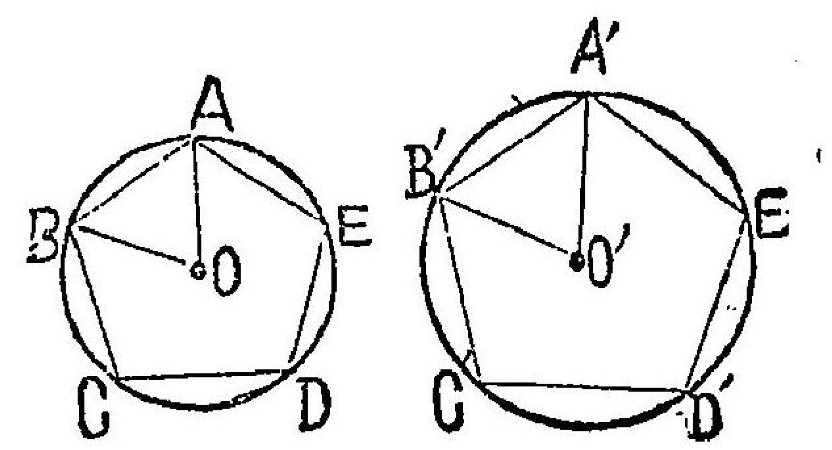
254. 圓周ト直徑トノ比ハ不變ナリ.

(證) 二個ノ圓形 O, O' ヲ畫キ, 各圓ノ半徑ヲ R, R' トシ, 其圓周ヲトス

各圓ニ等邊數ノ整多多角形 ABCDE, A'B'C'D'E' ヲ畫キ其周ヲ P, P' トス,

$ABCDE \sim A'B'C'D'E'$

$$\frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}$$



今 OA, OB, O′A′, O′B′ ヲ結ブ

トハ

$$\therefore \quad \frac{OA}{OB}=\frac{O'A'}{O'B'}$$

$$\angle AOB=\angle A'O'B' \quad (\because \ \widehat{AB}=\widehat{A'B'})$$

$$\therefore \quad \triangle OAB \sim \triangle O'A'B'$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{R}{R'} \qquad \therefore \quad \frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$$

$$\therefore \quad \frac{P}{R}=\frac{P'}{R'} \qquad \therefore \quad \frac{P}{2R}=\frac{P'}{2R'}$$

上ノ關係ハ內接整多角形ノ邊數如何ニ拘ラス(其邊數ハ彼レ是レ相等シキヲ要ス)恒ニ成立ス.

而シテ其邊數カ無究ニ增大スルトキハ P 及ビ P′ ハ C 及ビ C′ ニ無究ニ接近スヘシ

$$\therefore \quad \frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'} \qquad \therefore \quad \frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'}$$

斯ノ如ク凡ヘテノ圓ニ於テ其圓周ト直徑 2R)トノ比ハ相等シ.

故ニ圓周ト其直徑トノ比ハ不變ナリ.

255. 注意 圓周ト直徑トノ比ヲ π ニテ示ス但シ π ノ値ハ不盡數ニシテ其略近値ハ 3·14159 ナリ.

又圓周ヲ C, 半徑ヲ R トスレハ

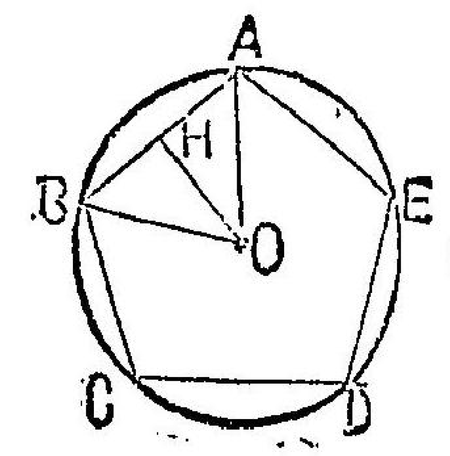
$$\frac{C}{2R}=\pi \qquad \therefore \quad C=2\pi R.$$

定理拾壹

256. 圓ノ面積ハ圓周ト半徑トノ相乘積ノ半ナリ.

圓ノ周ヲ C, 半徑ヲ R トスレハ圓ノ面積 $=\frac{1}{2}C\times R$ ナリ.

(證) 中心ヲ O トス



任意ノ內接整多角形 ABCDE ヲ畫キ, 其邊數ヲ n トシ其周ヲ P トス

OA, OB ヲ結ビ $OH \perp AB$ トス

$$\triangle ABO \text{ ノ面積 } =\tfrac{1}{2}OH\times AB$$

$$ABCDE \text{ ノ面積 } =\triangle ABO\times n$$

$$=\tfrac{1}{2}OH\times AB\times n=\tfrac{1}{2}OH\times P$$

上ノ關係ハ內接整多角形ノ邊數如何ニ拘ラズ成立スルモノナリ,

而シテ邊數ガ無究ニ增大スルキハ ABCDE ノ面積ハ圓ノ面積ニ無究ニ接近シ同時ニ P 及ビ OH ハ順次ニ圓周 C 及ビ半徑 R ニ無究ニ接近ス

$$\therefore \quad \text{圓ノ面積 } =\tfrac{1}{2}R\times C.$$

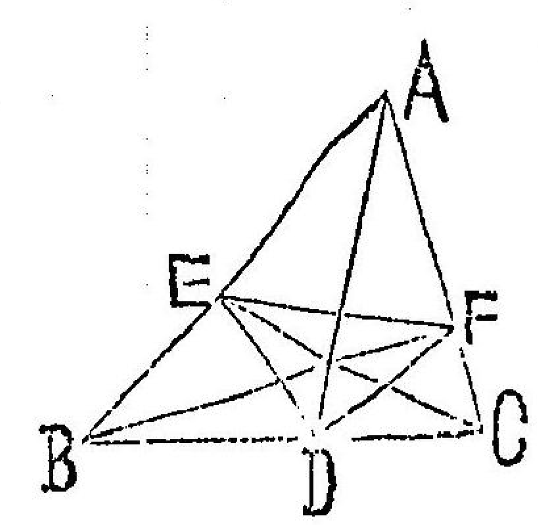
257. 推論 圓ノ半徑ヲ R トスレハ

$$\text{圓ノ面積 } =\tfrac{1}{2}R\times 2\pi R=\pi R^2.$$

例題

1. 三角形ノ A 角ノ等分線 AD ト BC トノ交點ヲ D トシ BDA 角及 CDA 角ノ等分線ガ AB, AC ニ交ル點ヲ E 及ビ F トスレバ

$$\triangle BEF : \triangle CEF = AB : AC.$$



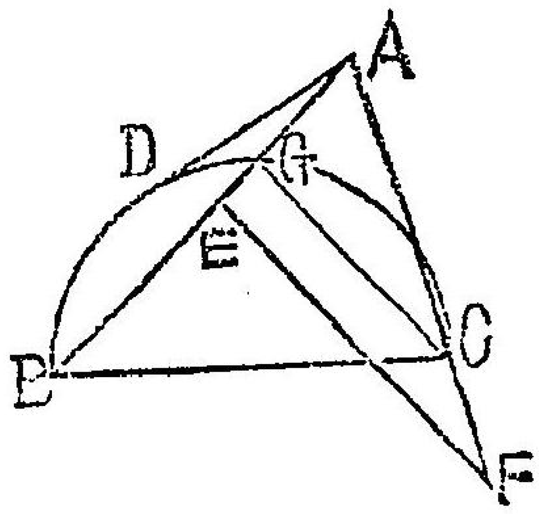
(證) $\dfrac{\triangle BEF}{\triangle AEF}=\dfrac{BE}{AE}$

$$=\frac{BD}{AD} \qquad (1)$$

又 $\dfrac{\triangle CEF}{\triangle AEF}=\dfrac{CF}{AF}=\dfrac{DC}{AD} \qquad (2)$

(1) : (2) $\quad \dfrac{\triangle BEF}{\triangle CEF}=\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}.$

2. 鋭角三角形ABCノ底邊BCヲ半徑トシテ半圓ヲ畫キAヨリ此圓ニ切線ADヲ引キ而シテAB上ニ壹点Eヲ取リAE=ADトシEヨリABニ垂線EFヲ引キEFトACトノ交点ヲFトスレバ兩三角形ABC, AEFハ等積ナリ。



(証) AB ト半圓周トノ交点ヲGトシCGヲ結ブ

$\triangle$AEF, $\triangle$ABCハ$\angle$BACヲ共有ス

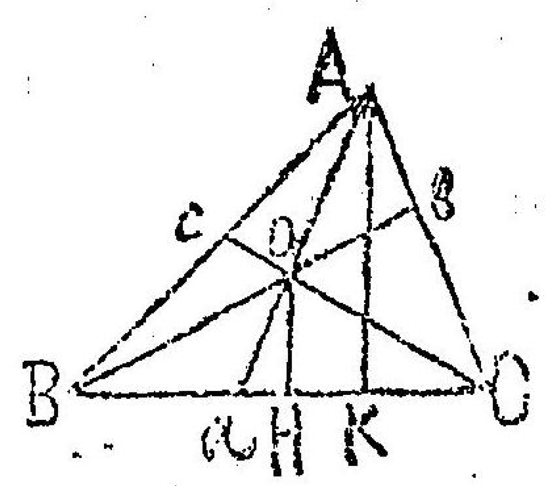
$$\therefore\quad \frac{\triangle AEF}{\triangle ABC}=\frac{AE\times AF}{AB\times AC}=\frac{AE}{AB}\times\frac{AF}{AC}$$

$$=\frac{AE}{AB}\times\frac{AE}{AG}=\frac{AE^2}{AB\times AG}$$

$$=\frac{AD^2}{AD^2}=1\qquad\therefore\quad \triangle AEF=\triangle ABC.$$

3. 三角形ABCノ各角頂ヨリ形内ノ壹点Oニ於テ交ルヘキ直線AO, BO, COヲ引キAO, BO, COト各邊トノ交点ヲa, b, cトスレハ

$$\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}=1.$$



(証) A及ヒOヨリBCニ垂線AK, OHヲ引ケ

$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{OH}{AK}=\frac{Oa}{Aa}\qquad(1)$$

同様ニ $$\frac{\triangle OAB}{\triangle CAB}=\frac{Oc}{Cc}\qquad(2)$$

$$\frac{\triangle OAC}{\triangle ABC}=\frac{Ob}{Bb}\qquad(3)$$

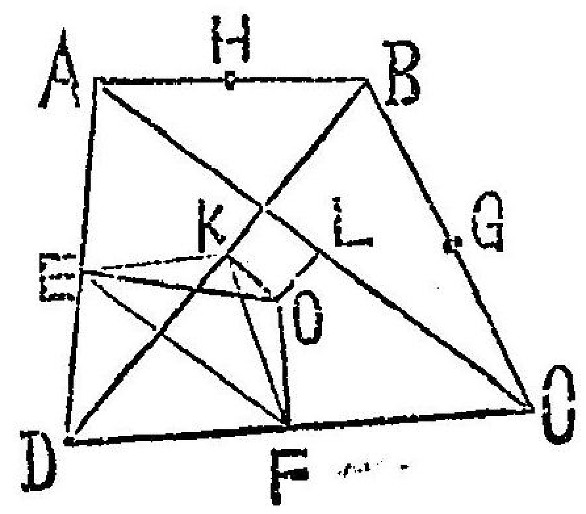
(1) (2) 及ヒ (3) ヲ加フレハ

$$\frac{\triangle OBC+\triangle OAB+\triangle OAC}{\triangle ABC}=\frac{Oa}{Aa}+\frac{Oc}{Cc}+\frac{Ob}{Bb}$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=\frac{Oa}{Aa}+\frac{Oc}{Cc}+\frac{Ob}{Bb}$$

即 $$\frac{Oa}{Aa}+\frac{Oc}{Cc}+\frac{Ob}{Bb}=1.$$

4. 四角形ノ對角線ノ各ノ中央点ヲ過キテ他ノ對角線ニ平行ニ引キタル兩直線ノ交点ト各邊ノ中央点トヲ結ベル直線ハ原四角形ヲ四等分ス.



(証) 四角形ヲABCDトシ, 各邊ノ中央点ヲE, F, G, HトシG對角線BD, ACノ中央点ヲK, LトシKO//AC, LO//BDトス

OE, OF, KE, KF, EFヲ結ブ

FハDCノ中央点ニシテEハADノ中央点ナリ

$$\triangle DEK=\tfrac{1}{4}\triangle ABD,$$

同様ニ $\triangle DKF=\frac{1}{4}\triangle DBC$ $\quad\therefore\quad$ DEKF$=\frac{1}{4}$ABCD

然ルニ$\triangle$KEF, $\triangle$OEFハ同底EFヲ有シ且ツOK//EFナルヲ以テ等高ナリ,

$$\therefore\quad \triangle KEF=\triangle OEF$$

$$\therefore\quad DEKF=DEOF\qquad\therefore\quad DEOF=\tfrac{1}{4}ABCD$$

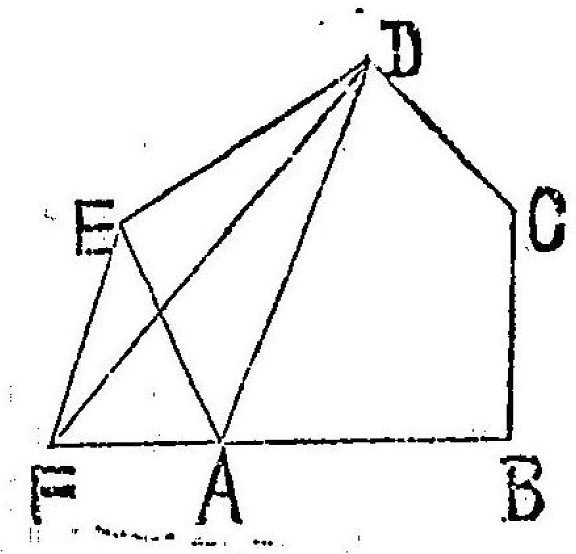
全様ニOH, OGヲ結フキハOEAH, OHBG, OGCFハ共ニABCDノ$\frac{1}{4}$ナリ。

第六節——面積之作圖

問題壹

258. 所設ノ多角形ト等積ニシテ邊數ガ壹個少ナキ多角形ヲ作レ。

(作法) 所設ノ多角形ヲABCDEトス對角線ADヲ引キ又EヨリADニ平行線ヲ引キ此平行線トBAトノ交点ヲFトシFDヲ結ブ



然ル𪜈ハFBCDハ所求ノ多角形ナリ

(證明) △AED, △AFDハ共通ノ底ヲ有シ且ツEF//ADナルヲ以テ等高ナリ,

$$\therefore \quad \triangle ADE = \triangle AFD$$

$$\therefore \quad ABCDE = FBCD.$$

而シテ明カニFBCDノ邊數ハ原形ノ邊數ヨリ壹個少シ

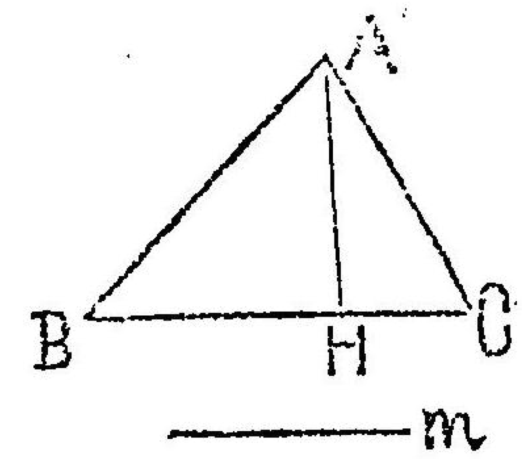
故ニFBCDハ所求ノ多角形ナリ。

259. 注意　前法ニヨリ或ル多角形ヲ之レト等積ニシテ邊數ガ壹個少ナキ第二ノ多角形ニ變形シ,此第二ノ多角形ヲ,之レト等積ニシテ邊數ガ壹個少ナキ第三ノ多角形ニ變形シ且下次第ニ此法ヲ操リ返ス𪜈ハ遂ニ原形ト等積ナル三角形ヲ得ルナリ。

問題貳

260. 所設ノ三角形ト等積ナル正方形ヲ畫クヿヲ求ム。

(作圖) 所設ノ三角形ヲABCトスAヨリBCニ垂線AHヲ引ク$\frac{1}{2}$AHトBCトノ比例中項ヲ求メ之レヲmトス



然ル𪜈ハmノ上ニ作レル正方形ハ所求ノモノナリ

(証明) 作法ニヨリ $\dfrac{\frac{1}{2}AH}{m} = \dfrac{m}{BC}$

$$\tfrac{1}{2}AH = m^2$$

然ルニ$\frac{1}{2}AH \times BC$ハ△ABCノ面積ニシテm^2ハm上ノ正方形ノ面積ナリ

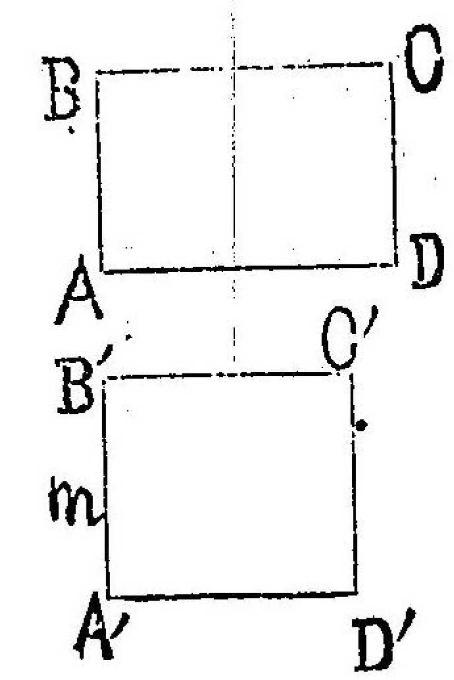
故ニ△ABCノ面積トm上ノ正方形ノ面積トハ相等シク即チm上ノ正方形ハ所求ノモノナリ

261. 注意　前問題ト本問題トニヨレハ凡ヘテノ多角形ハ,之レト等積ナル正方形ニ變形スルヿヲ得ルナリ.

問題三

262. 所設ノ矩形ト等積ナル矩形ヲ所設ノ直線上ニ畫クヿヲ求ム.

(作法) ABCDヲ所設ノ矩形トシA′D′ヲ所設ノ直線トス



A′D′, AD, ABノ比例第四項ヲ求メ之レヲmトス

A′D′トmトニテ矩形A′B′C′D′ヲ畫ク𪜈ハ之レ所求ノ矩形ナリ。

(証) 作法ニヨリ $\dfrac{A'D'}{AD} = \dfrac{AB}{m}$

$$\therefore \quad AB \times AD = A'D' \times m$$

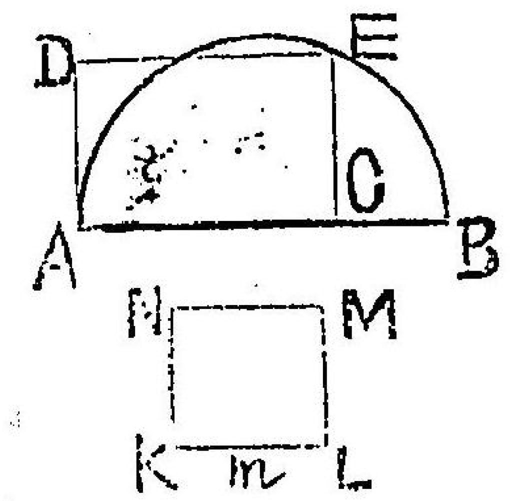
然ルニAB×ADハ矩形ABCDノ面積ニシテA′D′×mハA′B′C′D′ノ

面積ナリ，故ニ$A'B'C'D'$ハ$ABCD$ト等積ナリ。

故ニ$A'B'C'D'$ハ所求ノ矩形ナリ，

問題四

263. 矩形ヲ作リ其面積ヲ所設ノ正方形ニ等シカラシメ且ツ其隣接二邊ノ和ヲ所設ノ直線ニ等シカランメントス



(作圖) 所設正方形ヲKLMNトシ(其壹邊ヲmトス)

所設ノ直線ヲABトス

ABヲ直徑トシ其上ニ半圓ヲ畫キAニ於テ此半圓ニ切線ADヲ引キ$AD=m$トシDヨリABニ平行線ヲ引キ此平行線ト半圓周トノ交点ヲEトシEヨリABニ垂線ECヲ下シABトノ交点ヲCトス

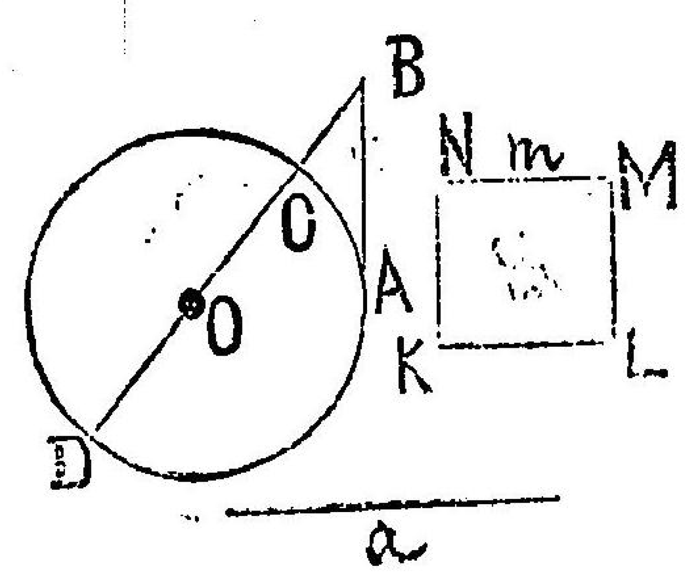
然ル旹ハAC, CBヲ隣接二邊トセル矩形ハ所求ノモノナリ。

(證明) $AC\times CB=EC^2=AD^2=m^2$

故ニAC, CBノガナス矩形ハ所求ノモノナリ。

問題五

264. 矩形ヲ作リ其面積ヲ所設ノ正方形ニ等シクシ且ツ其隣接二邊ノ差ヲ所設ノ長サニ等シカラシムルヿヲ求ム。



(作圖) 所設ノ正方形ヲKLMNトシ(其壹邊ヲmトス)

所設ノ長サヲaトス，

aヲ直徑トシテ圓形ヲ畫キ其中心ヲOトシ，切線ABヲ引キ其長サヲmニ等シクシBOヲ結ビBOト圓周トノ交点ヲC, Dトス

然ル旹ハBC, BDガナス矩形ハ所求ノモノナリ。

(證) BAハ圓ニ切ス

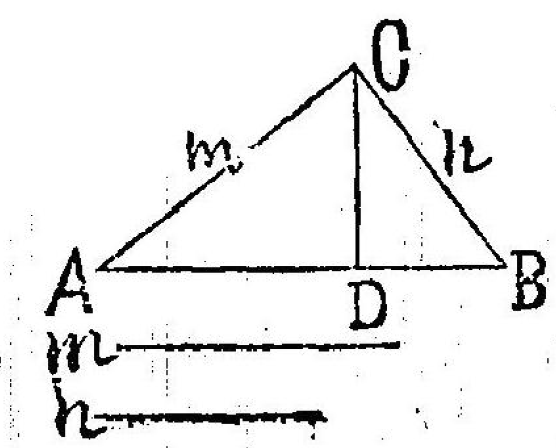
∴ $BC\times BD=BA^2=m^2$

又 $BD-BC=BD=a$

故ニBC, BDガナス矩形ハ所求ノモノナリ。

問題六

265. 二直線ヲ求メ其比ヲ所設ノ兩多角形ノ面積ノ比ニ等シカラシメントス



(作圖) 所設ノ兩多角形ノ各ヲ正方形ニ變形シ其各ノ邊ヲm, nトス

是ニ於テ直三角形ABCヲ畫キ

$AC=m$, $BC=n$

トス但シ$\angle BAC$ヲ直角トス。

Cヨリ斜邊ABニ垂線CDヲ下ス

然ル旹ハAD, BDハ所求ノ二直線ナリ

(證明) 222ニヨリ $\dfrac{CA^2}{BC^2}=\dfrac{AD}{BD}$ ∴ $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{m^2}{n^2}$

故ニAD, BDハ所求ノ直線ナリ

問題七

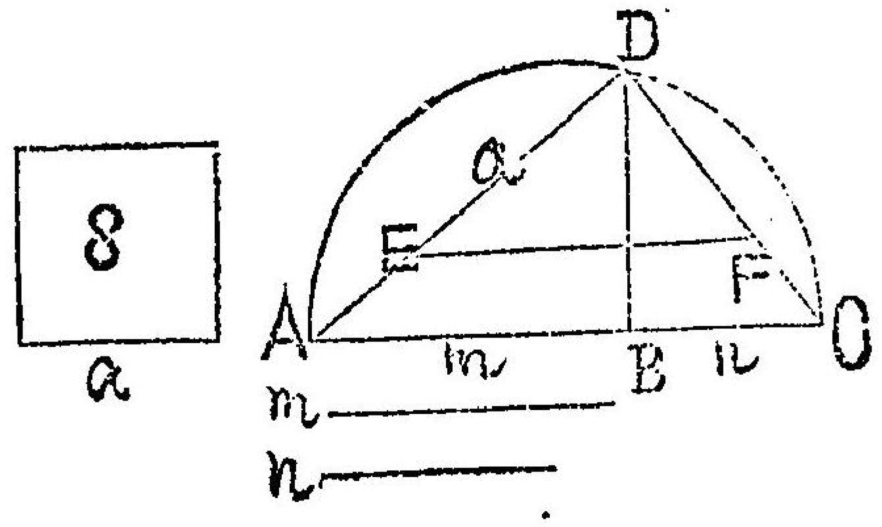
266. 壹個ノ正方形ヲ求メ之レト所設ノ正方形トノ比ヲシテ所設ノ二直線ノ比ニ等シカラシムルヿヲ求ム。

(作圖) 所設ノ正方形ヲSトシ其壹邊ヲaトス又所設ノ二直線ヲm, nトス

無限直線XYヲ置キ其上ニ三点A, B, Cヲ取リテ

$AB = m, \quad BC = n$

ナラシメ AC 上ニ於テ之レヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ B ニ於テ AC ニ垂線 BD ヲ引キ BD ト半圓周トノ交点ヲ D トシ DA, DC ヲ結ビ DA 上ニ　ヲ取リ



$DE = a$

トシ E ヨリ AC ニ平行線ヲ引キ DC トノ交点ヲ F トス

DF ノ上ニ畫ケル正方形ハ所求ノモノナリ。

(證明) ∠ADC ハ半圓周內ノ角ナリ, ∴ ∠ADC＝直角

而シテ DB ハ AC ニ直立ス

$$\therefore \quad \frac{AD^2}{DC^2} = \frac{AB}{BC} = \frac{m}{n} \quad (220)$$

又 EF//AC

$$\therefore \quad \frac{AD^2}{DC^2} = \frac{DE^2}{DF^2} = \frac{a^2}{DF^2}$$

$$\frac{a^2}{DF^2} = \frac{m}{n} \quad 即チ \quad \frac{S}{DF^2} = \frac{m}{n}$$

故ニ DF 上ノ正方形ハ所求ノモノナリ。

問　題　八

267. 所設ノ多角形ト相似ナル多角形ヲ畫キ其兩多角形ノ面積ノ比ヲ所設ノ二長ノ比ニ等シカラシムルヿヲ求ム。

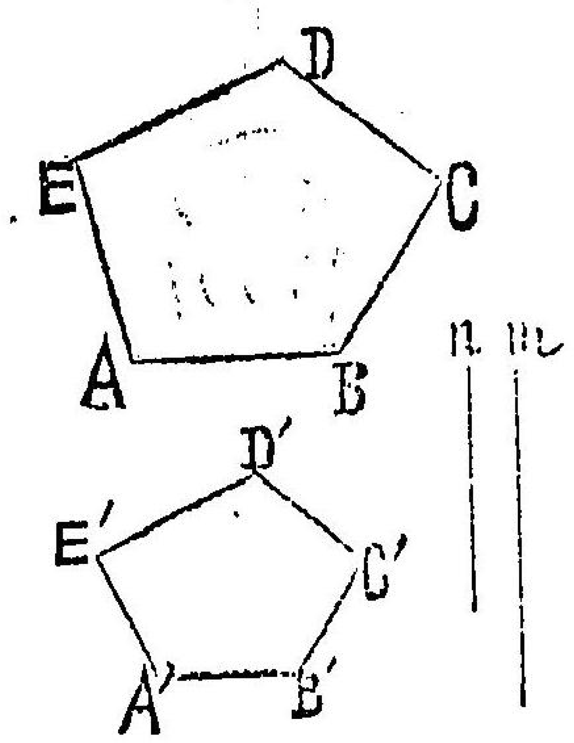
(作圖) 所設ノ多角形ヲ ABCDE トシ所設ノ二長ヲ m, n トス

直線 A′B′ ヲ求メ

$$\frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{m}{n}$$

ナラシメ　(266. 問題)

A′B′ ノ上ニ ABCDE ト相似ナル多角形 A′B′C′D′E′ ヲ畫ク



然ルトキハ A′B′C′D′E′ ハ所求ノ多角形ナリ。

$$(證明) \quad \frac{ABCDE}{A'B'C'D'E'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

$$= \frac{m}{n} \quad (作法)$$

故ニ A′B′C′D′E′ ハ所求ノ多角形ナリ

問　題　九

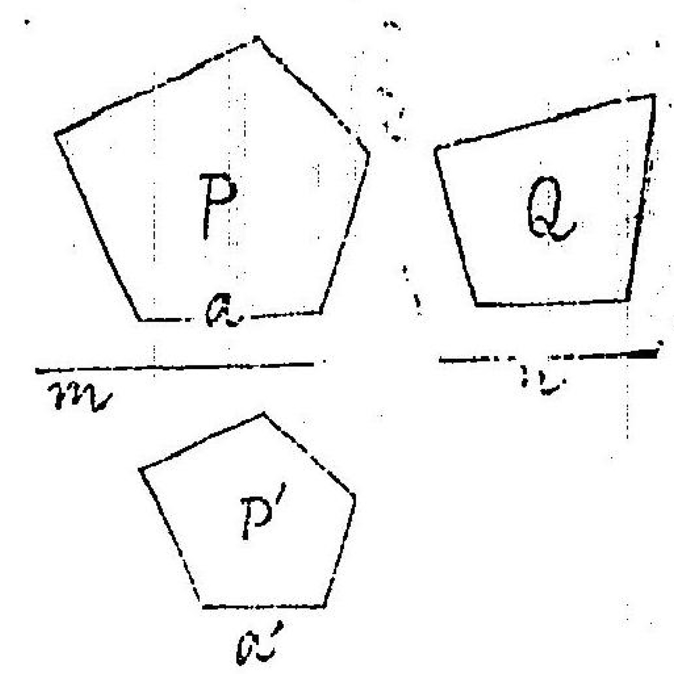
268. 所設ノ多角形 P ト相似ニシテ且ツ他ノ所設ノ多角形ト等積ナルベキ多角形ヲ作ルヿヲ求ム。

所設ノ兩多角形ヲ P, Q トス

P ト相似ニシテ Q ト等積ナル多角形ヲ畫カントス

(作圖) P ト等積ナル正方形ヲ求メ其壹邊ヲ m トシ又 Q ト等積ナル正方形ヲ求メ其壹邊ヲ n トス

又 P ノ任意ノ壹邊ヲ a トシ m, n, a ノ比例第四項ヲ求メ之レヲ a' トシ a' ノ上ニ P ト相似ナル多角形ヲ畫キ之レヲ P′ トス



P′ ハ所求ノ多角形ナリ。

$$(證明) \quad P' \propto P \quad \therefore \quad \frac{P}{P'} = \frac{a^2}{a^2}$$

$$= \frac{m^2}{n^2}$$

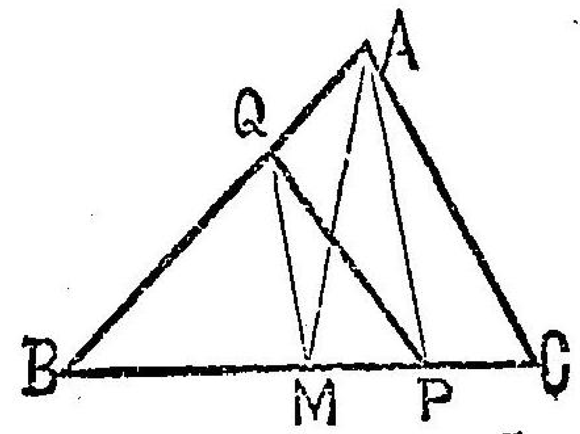
$$然ルニ \ P = m^2 \quad \therefore \quad P' = n^2$$

$$= Q \quad (作圖)$$

故ニ P′ ハ所求ノ多角形ナリ。

例題

1. 三角形ABCノBC邊上ノ定点Pヲ過ギテ△ABCヲ等分スベキ直線ヲ引ケ



(作圖) BC邊ノ中央点ヲMトシAPヲ結ビMヨリAPニ平行線MQヲ引キABトノ交点ヲQトシPQヲ結ブ

PQハ所求ノ直線ナリ。

(証明) AMヲ結ブ

△AQM, △PQMハ共通ノ底邊QMヲ有シ且ツAP//QMナルヲ以テ等高ナリ

$\therefore\ \triangle PQM=\triangle AQM$

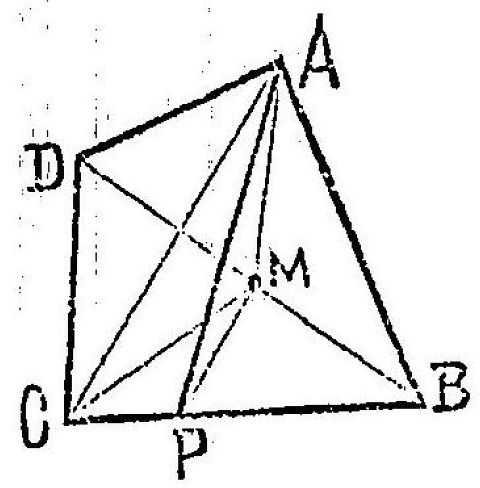
$\therefore\ \triangle BPQ=\triangle ABM$

然ルニ $BM=MC$ $\therefore\ \triangle ABM=\frac{1}{2}\triangle ABC$

$\therefore\ \triangle BPQ=\frac{1}{2}\triangle ABC$

故ニPQハ所求ノ直線ナリ。

2. 四角形ABCDノ一角項Aヲ過ギテ本形ヲ等分スベキ直線ヲ引クヿヲ求ム。



(作圖) 對角線AC, BDヲ引キBDノ中央点ヲMトシMヨリACニ平行線ヲ引キBCトノ交点ヲPトシAPヲ結ブ。

APハ所求ノ直線ナリ。

(証明) AM, CMヲ結ブ

△AMC, △ACPハ共通ノ底ACヲ有シ且ツMP//ACナルヲ以テ等高ナリ

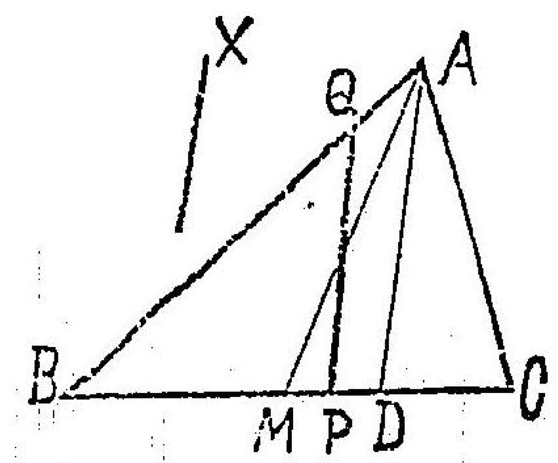
$\therefore\ \triangle APC=\triangle AMC$

双方ヘ△ADCヲ加フレバ

$$\square ADCP=\square ADCM$$
$$=\triangle ADM+\triangle CDM$$
$$=\tfrac{1}{2}\triangle ADB+\tfrac{1}{2}\triangle DCB \quad \because\ DM=MB.$$
$$=\tfrac{1}{2}ABCD$$

故ニAP直線ハ所求ノモノナリ。

3. 所設ノ定直線Xニ平行ナル直線ヲ以テ所設ノ三角形ABCヲ等分スルヿヲ求ム



(作圖) AヨリXニ平行ナル直線ADヲ引キBCトノ交点ヲDトシ又BCノ中央点ヲMトス

BC上ニPヲ求メBPヲシテBM, BDノ比例中項ナラシメPヨリXニ平行線PQヲ引ク然ルキハPQハ△ABCヲ等分ス。

(証明) AMヲ結ブ

$$\triangle BPQ \backsim \triangle ABD \quad \therefore\ \frac{\triangle BPQ}{\triangle ABD}=\frac{BP^2}{BD^2}$$
$$=\frac{BM\times BD}{BD^2} \quad \because\ BP\text{ハ}BM, BD\text{ノ中項}$$
$$=\frac{BM}{BD}$$

又 $\dfrac{\triangle ABM}{\triangle ABD}=\dfrac{BM}{BD}$ ∵(等高ナル故)

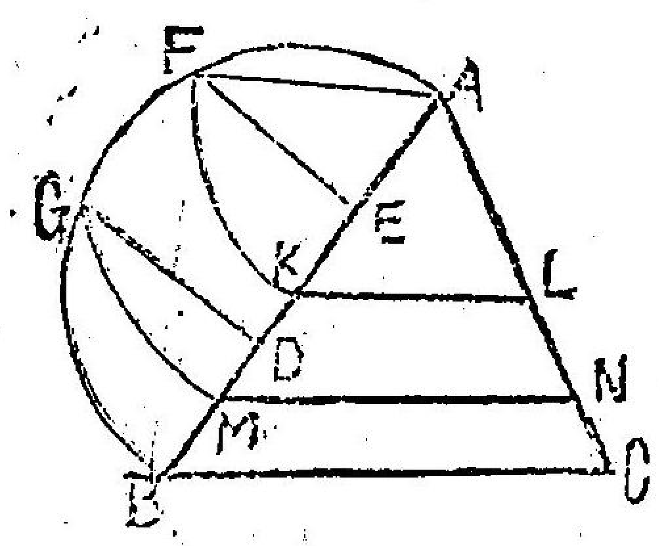
$$\therefore\ \frac{\triangle BPQ}{\triangle ABD}=\frac{\triangle ABM}{\triangle ABD}$$
$$\therefore\ \triangle BPQ=\triangle ABM$$
$$=\tfrac{1}{2}\triangle ABC \quad (\because\ BM=MC)$$

ニPQハ所求ノ直線ナリ。

4. 三角形ノ底邊ニ平行ナル直線ヲ以テ三角形ヲ若干等分スルコトヲ求ム

三角形ヲ ABC トシ BC ニ平行ナル直線ヲ以テ原三角形ヲ三等分セントス

(證明) AB 上ニ於テ之レヲ直徑トシテ半圓ヲ畫キ, AB ヲ D, E ニ於テ三等分シ E, D ニ於テ AB ニ垂線ヲ引キ半圓周トノ交点ヲ F, G トシ, A ヲ中心トシ AF, AG ヲ半徑トセル二弧ヲ畫キ AB トノ交点ヲ K, M トシ M, K ヨリ BC ニ平行線 MN, KL ヲ引キ AC トノ交点ヲ N, L トス



KL, MN ハ所求ノ直線ナリ

(證明) $\triangle AKL \backsim \triangle ABC$

$$\therefore \quad \frac{\triangle AKL}{\triangle ABC}=\frac{AK^2}{AB^2}=\frac{AF^2}{AB^2}=\frac{AE\times AB}{AB^2} \quad (\because \angle BFA=\text{直角})$$

$$=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad \triangle AKL=\tfrac{1}{3}\triangle ABC$$

又 $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$

$$\therefore \quad \frac{\triangle AMN}{\triangle ABC}=\frac{AM^2}{AB^2}=\frac{AG^2}{AB^2}=\frac{AD\times AB}{AB^2}=\frac{AD}{AB}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \triangle AMN=\tfrac{2}{3}\triangle ABC$$

故ニ KL, MN ハ △ABC ヲ三等分ス

注意 △ABC ヲ四等分, 五等分等スルモ之レト同法ナリ.

5. AB ハ半圓ノ直徑 BP ハ B ニ於ケル切線ナリトス, A ヲ過ギテ半圓周ニ C ニ, BP ニ D 於テ交ルベキ直線ヲ引キ AC, AD ノ和若クハ差ヲ所設ノ長ニ等シカラシメントス

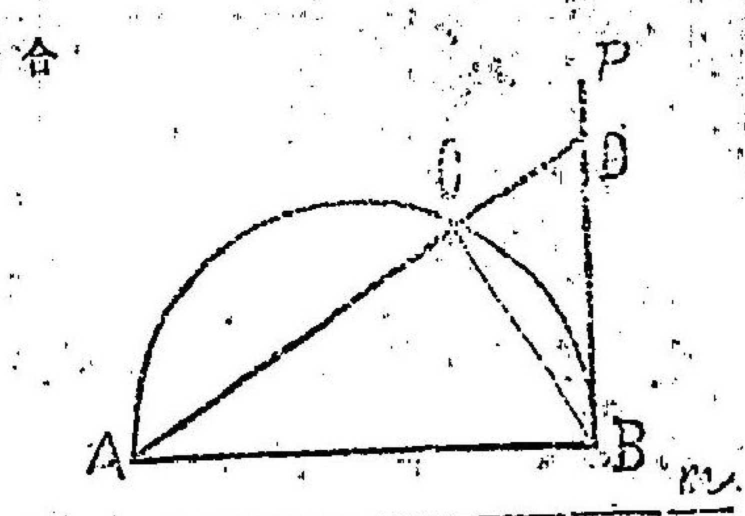
(第壹) AC ト AD トノ和ヲ知ル場合

(作圖) 所設ノ和ヲ m トス

二直線 x, y ヲ求メ(但シ $x>y$ トス)

$$x+y=m, \quad xy=AB^2$$

ナラシム (263. 問題)



A ヲ中心トシ x ヲ半徑トセル弧ヲ畫キ此弧ト BP トノ交点ヲ D トシ AD ヲ結ブ

AD ハ所求ノ直線ナリ.

(證明) AD ト半圓周トノ交点ヲ C トシ BC ヲ結ブ

$\angle ABP=$直角, $BC\perp AD$ ($\because \angle ACB$ ハ半圓內ノ角)

$$\therefore \quad \frac{AC}{AB}=\frac{AB}{AD} \quad \therefore \quad AC\times AD=AB^2$$

即 $\quad AC\times y=AB^2$

又 $\quad x\times y=AB^2$

$\therefore \quad AC=x$

$\therefore \quad AD+AC=x+y=m,$

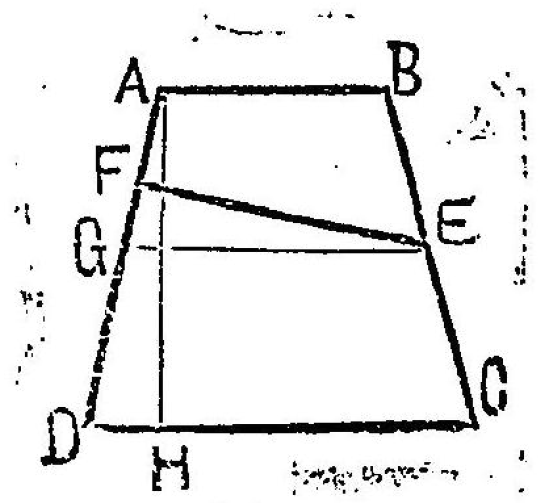
故ニ ACD ハ所求ノ直線ナリ.

(第二) AD−AC ヲ知ル場合ハ前ト同様ニ付畧ス.

第四編雜題

1. 梯形ハ其不平行壹邊ト其對邊ノ中央ヨリ其壹邊ニ到ル距離トニテナル矩形ト等積ナリ.

ABCD ヲ梯形トシ AD, BC ヲ不平行二邊トシ E ヲ BC ノ中央トシ EF⊥AD トス



然ルキハ ABCD ハ EF, AD ガナス矩形ト等積ナリ.

(證明) AH⊥DC トシ EG//DC トス

△EFG, △ADH ニ於テ

∠F=∠H= 直角

∠FGE=∠D (應角) ∴ △EFG∽△ADH

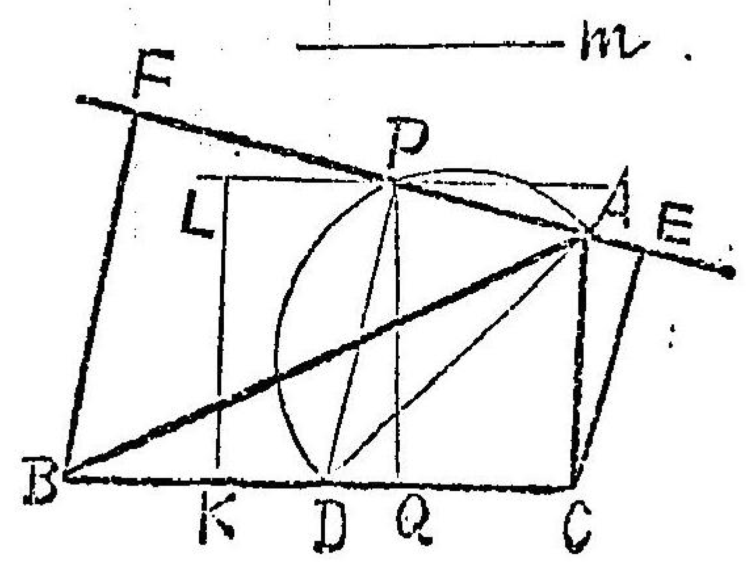
$$\therefore \quad \frac{EF}{AH}=\frac{EG}{AD}$$

$$\therefore \quad EG\times AH=EF\times AD$$

然ルニ EG×AH ハ ABCD ノ面積ナリ

故ニ ABCD ハ EF, AD ガナス矩形ト等積ナリ.

2. 三角形 ABC ノ頂角 A ヲ過キテ壹直線ヲ引キ, 此直線ト, B, C ヨリ此直線ニ下セル垂線ト, BC トニテナス梯形ヲ所設ノ正方形ニ等シカラシムルコヲ求ム



(作圖) 所設正方形ノ壹邊ヲ m トス

BC ト m ノ比例第三項ヲ求メ之レヲ h トス即

$$\frac{BC}{m}=\frac{m}{h}$$

トス

BC 若クハ其引張線上ノ壹点ニ於テ BC ニ垂線 KL ヲ引キ KL $=h$ ナラシメ L ヨリ BC ニ平行線 LP ヲ引ク

又 BC ノ中央点ヲ D トシ AD ヲ結ビ AD 上ニ於テ之レヲ直徑トシテ半圓周ヲ畫キ此半圓周ト LP トノ交点ヲ P トシ AP ヲ結ブ

AP ハ所求ノ直線ナリ.

(證) CE⊥AP, BF⊥AP, PQ⊥BC トシ PD ヲ結ブ

然ルキハ ∠DPA ハ半圓内ノ角ナルヲ以テ直角ヲナス故ニ DP ハ EF ニ直立ス而シテ BF, CE ハ亦 EF ニ直立ス

∴ BF//DP//CE

且 BD=DC ∴ EP=PF

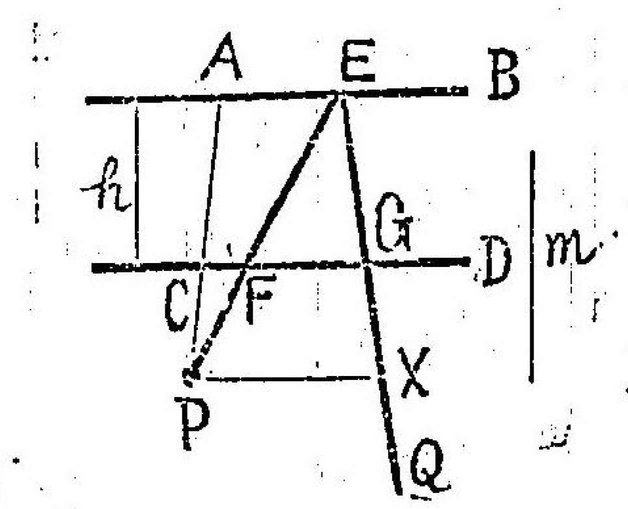
∴ BFCE ノ面積 =PQ×BC (前題)

$=h\times BC$

$=m^2 \quad \because \quad \frac{BC}{m}=\frac{m}{h}.$

故ニ AP ハ所求ノ直線ナリ.

3. AB, CD ハ貳平行直線ニシテ P, Q ハ貳定点ナリ P, Q ヲ過キテ AB 上ニ交ルベキ二直線ヲ引キ此貳直線ト CD トニテナス三角形ヲシテ所設ノ正方形ト等積ナラシメントス



(證明) 所設ノ正方形ノ壹邊ヲ m トス

AB, CD ノ距離ヲ h トシ $\frac{1}{2}h$, m ノ比例第三項ヲ求メ之レヲ n トス

$$\text{即} \quad \frac{\frac{1}{2}h}{m}=\frac{m}{n}$$

トス

P ヲ過ギテ AB, CD ニ交ルベキ直線 PCA ヲ引キ其交点ヲ C, A トス

PヨリCDニ平行線PXヲ引キPXヲシテAC, AP, nノ比例第四項ナラシム

即 $$\frac{AC}{AP}=\frac{n}{PX}$$

ナラシム

QXヲ結ビQXトABトノ交点ヲEトシPEヲ結ビQE, PEガCDニ交ル点ヲG, Fトス

△EFGハ所求ノモノナリ.

(證明) $FG /\!/ PX$ ∴ $$\frac{FG}{PX}=\frac{EF}{EP}=\frac{AC}{AP}$$

又 $$\frac{n}{PX}=\frac{AC}{AP}$$

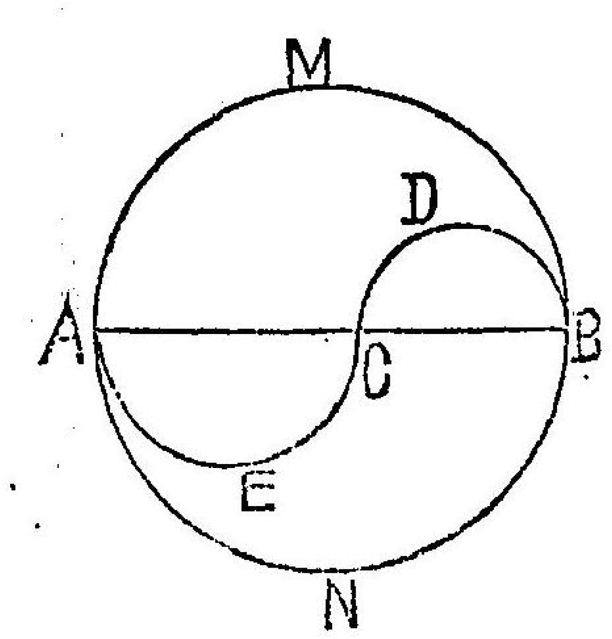
∴ $$\frac{GF}{PX}=\frac{n}{PX}$$ ∴ $FG=n$.

△EFGノ面積 $=\frac{1}{2}h\times FG$

$=\frac{1}{2}h\times n=m^2$ (作圖)

故ニ△EFGハ所求ノモノナリ.

4. ABハ圓ノ直徑ニシテCハAB上ノ定点ナリBDCハBCヲ直徑トセル半圓周ニシテABCハACヲ直徑トセル半圓周ナリ然ルトキハ曲線BDCEAハ原圓ヲAC, BCノ比ニ分ツ.



(証) 半圓形AMB及ビ半圓形ANBノ面積ハ共ニ

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi AB^2$$

ニ等シ.

又半圓BDCノ面積 $=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi BC^2$

又半圓AECノ面積 $=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi AC^2$

之レニ由テ

BMAECDノ面積 = 半圓AMB + 半圓AEC − 半圓BDC

$$=\frac{1}{8}\pi AB^2+\frac{1}{8}\pi AC^2-\frac{1}{8}\pi BC^2$$

$$=\frac{1}{8}\pi(AB^2+AC^2-BC^2) \qquad (1)$$

又AECDBNノ面積 = 半圓ANB + 半圓BDC − 半圓AEC

$$=\frac{1}{8}\pi.AB^2+\frac{1}{8}\pi.BC^2-\frac{1}{8}\pi.AC^2$$

$$=\frac{1}{8}\pi(AB^2+BC^2-AC^2) \qquad (2)$$

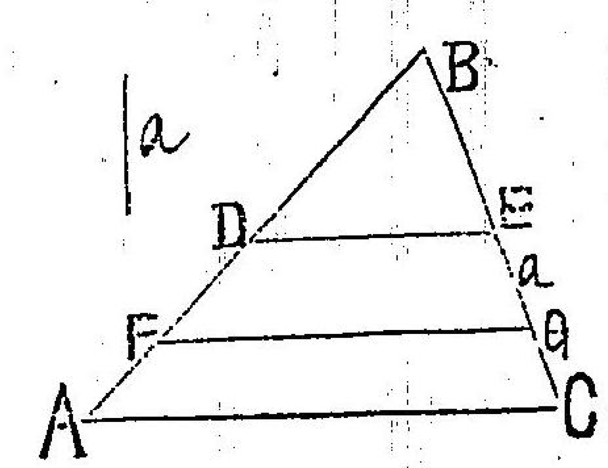
(1) (2) ニヨリ

$$\frac{BMAECD}{AECDBN}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{AB^2+BC^2-AC^2}$$

$$=\frac{AB^2+AC^2-(AB-AC)^2}{AB^2+BC^2-(AB-BC)^2}$$

$$=\frac{2AB\times AC}{2AB\times BC}=\frac{AC}{BC}.$$

5. 三角形ABCノ一邊ACニ平行シテBCニE, Gニ於テ交リ, ABニD, Eニ於テ交ルベキ二直線ヲ引キ梯形AGト三角形BEDトヲ等積ナラシメ且ツEGヲ已知長ニ等シカラシメントス



(作圖) 已ニ解キ得タリト假定ス即チ右ノ圖ニ於テDE, FGハACニ平行ニシテEGハ所設ノ長サaニ等シク且ツ梯形△AFGC=△BDEナリトス,

$$\frac{\triangle BED}{\triangle ABC}=\frac{BE^2}{BC^2} \qquad (1)$$

又 $$\frac{\triangle BFG}{\triangle ABC}=\frac{BG^2}{BC^2}$$ ∴ $$\frac{\square AFGC}{\triangle ABC}=\frac{BC^2-BG^2}{BC^2} \qquad (2)$$

然ルニ△BED=□AFGC (假定) 故ニ (1) (2) ニヨリ

$$BE^2=BC^2-BG^2$$

∴ $$(BG-EG)^2=BC^2-BG^2$$

∴ $$(BG^2-a)^2=BC^2-BG^2$$

$$\therefore \quad BG^2-2a\times BG+a^2=BC^2-BG^2$$

$$\therefore \quad 2BG^2-2a\times BG=BC^2-a^2$$

$$\therefore \quad 2BG(BG-a)=BC^2-a^2$$

$$\therefore \quad 2BG\times BE=BC^2-a^2$$

$$\therefore \quad BG\times BE=\tfrac{1}{2}(BC^2-a^2),$$

而シテ $\quad BG-BE=a,$

之レニ由テ次ノ作法ヲ得

差ガaニ等シク積ガ$\frac{1}{2}(BC^2-a^2)$ニ等シキニ直線ヲ求メ BG, BE ヲ其二長ニ等シクシ E, G ヨリ AC ニ平行線ヲ引クトキハ是レ所求ノ直線ナリ。

明治三十四年十二月十五日印刷
明治三十四年十二月三十日合卷發行

正價金壹圓五十錢

數學講義錄合卷 幾何之部

發行者兼編輯 東京市神田區西小川町二丁目十一番地 野村喜十

發行所 東京市神田區仲猿樂町十五番地 東京數學院

印刷者 東京市麹町區有樂町三丁目一番地 大西鍊三郎

印刷所 東京市京橋區弓町廿四番地 三協合資會社

專賣所 大阪市東區安土町四丁目 積善館本店

全 廣島市鹽屋町 福岡市博多中島町 積善館支店