實驗理論物理學講義

卷一

實驗理論

物理學講義

第壹卷

固體力學及流體力學

侯官陳學郢編纂

上海商務印書館藏版

CHINESE MIDDLE SCHOOL.

Experimental Instructions on Physics.

COMMERCIAL PRESS, LTD.

光緒三十三年十二月初版

宣統三年二月四版

（中學物理學講義三册）

（第一册定價大洋壹元叁角）

編譯者 侯官陳學郢

發行者 商務印書館

印刷所 上海北河南路北首寶山路 商務印書館

總發行所 上海棋盤街中市 商務印書館

分售處 商務印書分館 京師 奉天 龍江 天津 濟南 開封 太原 西安 成都 重慶 瀘州 長沙 常德 漢口 南昌 蘇州 杭州 福州 廣州 潮州

六四六一

緒　言

1. 是書程度專爲中學校及師範學校之參考書

2. 本書共分七編第一編論物性及固體力學第二編論流體力學第三編熱學第四編音學第五編光學第六編磁石學第七編電氣學多插圖畫以便學者不能親睹物理學之器械者

3. 科學之書期於明理本書於說理特丁甯周到且於各條之末附以實例凡於普通教科書體例祇提綱挈要說理概簡單詳處固待教師爲之啓發而本書乃講義體裁惟冀足供學者自修之便故雖淺近之理不敢略去惟書中說明往往涉之冗長文字愧欠修飾但意期明確不敢有模糊影響使學者易生疑惑也

4. 物理說明貴以數學爲根底本書僅限中學程度所用數學不出代數幾何三角之外初學者若僅通代數幾何等三角尙未學過者可依本書總論中所述三角大意强記之亦略足以資研究但書中有時所用三角法公式爲總論中所未述者則未通三角之人可將該節略去

5. 本書參酌日本諸大家講義或教科書之精腴加以頻年所領悟而編纂者術語譯字多因襲吾國所慣用遇有未當之處則改之但其中譯語縱與他書偶有不同而意則歸一致且本書多附原語以資參考又於各學語皆詳加解釋冀學者能一一領會其意可耳至於譯字之不同於讀者

毫無害事

6. 本書所論力之作用處動字改用慟字者取其有他慟之意與形容詞之動示區別也又本書立言體裁常有不劃一之處如 v 速度亦云速度 v 用法或有倒置然按其意義全無參差譬如速度一米突變寫爲一米突之速度其意義毫無所異也

7. 書中各節計算例題詳加解釋且於各章之終設應用問題并附詳解於書末

8. 當世通人如以本書說理未明或言詞艱澁別有缺憾之處尚祈不吝賜敎俾得於重印時更正幸甚

再版例言

本書初版愴悴而成益以印刷時鄙人適在東瀛不及細校書中殊多錯誤玆特訂正一遍重行付梓前版所有未盡闡明之理更詳加解析又書中要領處悉另加～～符號以觸學者注意又書中除雜例及例題用細字排印之外其理論稍涉高尚者亦書細字以便初學者可以略去又敎員用此書爲敎本遇有細字排印者亦可酌量敎授時間省略之也

物理學講義目錄

總　論

I. 物理學之學語及定律

II. 物體之通性

III. 單位

第一編 力學

第一章 運動

第二章 力及質量

第三章 重力

第四章　運動各論

第五章　剛體

65 功用·

第九章　彈性

第十章　物質之組成

第二編　流體力學

第一章　液體靜力學

第二章　液體動力學

第三章　氣體力學

38 氣體
關係
39 氣體

连线奥运

《和谐中国　和谐奥运》

上榜理由：　角度新颖，构思奇特

和谐的理念来自孔子的《中庸》，是指各种矛盾的对立与统一，通过相互协调以实现平衡状态为归结　这篇文章便充盈着和谐的理念，令人叫绝！

《飞向梦想》

上榜理由：　飘逸、灵秀的语句富于音乐感

“文章合为时而著，歌诗合为事而作”好的诗歌总是能让人陶醉于其意境之中。小朋友，是否你也有写诗的兴致？是否也梦想成为一名诗人？

《中华情　奥运情》

上榜理由：　奥运牵动着每一个中华儿女的心

中华民族自新中国的成立终于站起来了！许海峰的一声枪响，夺得了中国奥运史上的第一块金牌。中国人对奥运有着述说不完的情怀。

自然現象起者極少。又多有種種現象。同時相雜而起者。例如日蝕所得觀察者甚少。人之一生。不過二三回耳。又石向地面落下。地球引力之外。尚雜空氣之抵抗。及地球自轉之影響。若盡待自然現象之起而觀察之。於研究上甚不便。故理科學多藉『實驗』。實驗者。於所欲研究之現象用適宜之器械。以觀測之。例如家屋防雷殛。作避雷針。此避雷針果如目的。能避雷與否。固不待落雷之際。不能知之。且落雷之際。無避雷針之家屋。亦未必定受雷殛。則避雷針之實效。就自然之經驗。未易明徵之也。由是因欲觀測其結果。造小避雷針與家屋之模型。自發電機與以電氣。實驗之。又如研究物體落下之狀況。因避空氣之影響。特於眞空內。落物體以驗之。總之不得行實驗之學問。其發達遲。如哲學於太古希臘時代。與現今時代。無甚差異。若星學大部分皆歸觀察。其進步自速。故如物理學。及其他主實驗之理科學。其進步之速。無其比者。

3. 定律 Physical Law 宇宙間所起之自然現象。一見甚複雜。難以人意推知。如上古蒙昧時代。鄒衍談天之說。及明之宓山學者方以智。所著物理小識。非不就自然現象而觀察之也。特不經實驗。無一定之法則。不足以爲研究之基礎。蓋一現象之起。非出偶然。故必藉累次實驗。綜合其成蹟。種種現象。果皆適合於一定之法則者。曰定律。此定律全由實驗之結果。亦非若數學。由定理或公式。得諸推理上者。於數

學以確實之眞理爲基礎。遂據此基礎以推究他定理。又因之專由推理法得求出新定理。如是者由簡入繁。漸進而達於高尚之域。此固專就論理法。不由實地研究者。於物理學則不然。各條定律。無不出諸實驗。有時以定律爲基礎。考察物之性質。由數學上更得新定律者。但於此時尙須據實驗以試此定律之眞僞。必其實驗之結果與理論相符合者。始得確定其爲眞理也。

4. 假說，學說 Hypothesis, Theory 如前條所述。一現象之起。皆本諸一定之法則。但所以甚諸定律之理到底不能說明。例如物體受壓則收縮。一定律也。受壓何故收縮之理不能說明。但依想像得以物體看作極細微『分子』集合而成者。遂以此微分子有多少間隙。故收縮。如此等想像因便於說明。且足以助吾人之推考。曰假說。假說不過單就想像而已。故以爲推論之基礎。非必盡能符合事實。只須種種事實。多出一致。而假說之値大。

於此所當注意者。初學每有欲由假說說明事實之習慣。但研究假說。非初等物理學之本旨。讀者宜先事實。即講究定律。後假說。由假說論自然現象者曰學說。例如由分子說。論關於瓦斯體之諸現象者。曰『瓦斯動力說』。由『以太』Ether之假說。(以太者。彌漫於宇宙間。及物體中。有非常之彈力。且極微渺。人之五官。不能識其所在也。)論關於光之諸現象。爲『光之波動說』。但假說學說。無區別之必要。故於本書混稱

之曰『說』。

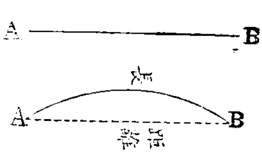
5. 物，物質，物體 Matter, Substance, Body 凡於空間占位置者皆曰『物』Matter 如石、金、銀、空氣皆物也。物之中。就目之所視，耳之所聽，手之所觸者。區別其性質曰『物質』Substance 如云水之物質。石之物質等。又以物質所有之量。生『物體』之名。如一桶之水，一袋之空氣。一塊之金。皆物體也。

凡物體必有如何大，卽占若干之積也。又二物體不能同時占同處。例如釘穿入木材，非釘與木之占同處。釘尖排木而入其空處也。砂充滿於器。卽注以水。砂亦不溢。就表面觀之。雖如砂與水能占同處者。實以砂中有空隙。水充之也。

6. 長 Length 距離 Distance 之區別 長對物體之大而言。例如絲之長幾尺。金線之長幾寸之謂也。距離者。係於空間中對彼此位置而言。謂自某點至某點之距離有幾丈也。

茲有一棒 AB。如云其棒『長』AB 者。乃形容此棒『大』之語。

第 1 圖



此棒縱如何屈曲。其長常不變。但若云 A 與 B 之距離。則棒未曲以前。與旣曲之後。其 AB 兩點之距離異也。然則距離之語。固無關係於棒。僅關係於空間者。

7. 時刻 Instant 時間 Time 之區別 時刻者表時

候之意。如云午前十一時。或午後四時三十分者是。時間乃對時之長短而言也。例如由午前十一時至午後四時三十分之時間。五時三十分也。

II. 物體之通性

8. 孔性 Porosity　凡物體之組成。皆以至微至細之部分組織而成者不能緊相接觸。故物體間常有極小之空隙。此性名爲『孔性。』

於西歷千六百六十一年。伊太利佛老介斯之大學。因試驗水能壓縮與否。偶然發見黄金有氣孔。當時試驗之法。造內部空洞之黄金球。滿盛以水。密閉之。後以强力壓之。球體因變其形狀。凡同一表面。於各種形體。以球體之內積爲最大。原造之金球。因被壓。致變其形狀。其內積自比原內積小。故强壓遂波及於內部之水。而水縱受重壓。不易收縮其容積。故水通黄金之氣孔。而現於表面。生細小之露珠。是金有孔性之證也。此外卽驗以他種之金屬亦然。至於鑄鐵爲此性之最著者。故水壓器之圓筒。鑄鐵不適於用。於液體亦有此性。如水二十七克火酒三十三克。混入於一器中。其積收縮百分之三十六。卽各液互相入他液之空隙中故也。

9. 分性 Divisibility　物體得終分爲微細之部分。此性曰『分性。』物之香者。其物之微細部分。散布於各處也。

如麝香其香氣甚濃。置之室內。空氣卽交換不絕。香氣常如舊。經時而不減其香。可知其所放之香氣。有如何微細也。

又如溶小銅片於硝酸。以一滴注於一碗之水中。若更加以少量之阿摩尼亞。則水呈青色。足見銅質尚有存焉。故水全體帶青色者。銅分微細部分之證也。

用火藥力分裂巖山。其巨大之巖石。仍可打碎無數小片。更以小量研磨之。爲細粉。飛散空中。如於日光見塵埃者。可想其分割之微渺也。

10. 原子，分子 Atom, Molecule 如前條所述。物體雖得分爲極少之部分。而就學者研究物體性質之結果。物體非可分至無窮者。如物體即屢分至極少部分。亦僅能分至物之『原子』而止。而分子即爲原子所集成之小部分者。蓋物體屢分之。必分爲『分子』。分子更分之。則爲原子。而分子萬無失其物體固有之性質。若原子或失其固有之性質者矣。

物體中如金鐵硫黃等。即分至極細。亦不能分爲他質之物。是曰 單體 。Simple Substance 或曰 元素 。Element 此等物之分子。皆同一原子相集合而成者也。而此等物之原子。雖無失其固有物體之性質。但物體若爲化合物。如水之分子。更分爲原子。則失其固有之特性。而爲養輕二元素。但原子作用。於化學上研究之。物理學研究之範圍。只限於分子間所作用者也。

物之分子。非互相密接者。分子與分子之間有空隙。故物體受强壓。其積減少。又以溫度變。物積亦變者。分子相近。或相離。其間空隙之變其大也。

11. 不滅性 Indestructibilty 物體以火燃燒之。以水溶解之。外觀恰如消滅者。但不過物體之變其形耳。其物質依然存在也。名此性曰『不滅性』。

例如盛水於器。置之空氣中。經時漸減其量。終至乾涸無餘。外觀若水之消滅者。其實不然。是水因溫熱蒸散。變爲氣體。升騰於空氣中耳。又於水盂中。投入食鹽攪拌之。食鹽漸歸消失。是不過溶解於水。非眞消滅也。若秤其器。所增之重量。即食鹽投入之量也。

薪炭燃燒。僅殘灰末者。其大半變爲炭養氣。擴散於空氣中也。此理於各化學中均有有實驗茲畧之。

12. 慣性 Inertia 止於一處者曰靜止。變地位而移動者曰運動。物之慣性。關於靜止運動之性。有二如次。

靜止之物體不能自生運動。

運動之物體。不能自止。或自變其狀態。

故若靜止之物體生運動。或運動之物體變靜止。無不因他之影響。其原因總稱之曰「力」。

此性質於第一條自無俟說明。第二條所述。殆與日常所見者相反。其實決不然。如投球於平板之上。始由速而漸緩。終至停止。其所以止者。非球之自止。其原因(阻礙之力)有種種也。一由板有凸凹抗運動。一以空氣之抵抗。故板之平滑者。常見其永能繼續運動。又若更用平滑之板。去其抵抗。且使空氣之抵抗。亦能除却。則當運動無已時。

物之慣性。於日常所見者。其例殊多。人立於靜止之車上。車卒然進行。乘車之人。反對於進行之方向轉倒。蓋下體與車以均等之速度進行。人之全身。尙依靜止之慣性。故倒退於後。又車之急止時。車上之人。倒於前方。其故亦因車進行。人向前方而運動。車卽急止。人尙依慣性。繼續其運動。故倒於前。

又於船進行之際。船中人向上拋球。復得落其手中。是亦慣性之所使然也。蓋球之未離手中時。與船共進行。其離手中之後。亦不能止其運動。與船進行於同方。故不可不復落於手中。

13. 物體之三態 如金鐵石等。不易變化其形狀。分子之位置。亦一定而無流動。受壓力略變其容積(如枹木栓此性最著)分割之而有抵抗力者。曰固體。Solid body 如水，油，火酒等。分子更相流動而無定形。隨所容之器而變化。卽受壓力亦不變其體積。靜止之際成水平面者。曰液體。Liquid 又如空氣水蒸氣等。分子流動比液體更甚。容之於器。而充滿。能擴散於四方。受壓力則大減其體積者。曰氣體。Gas 但液體氣體之區別。非全判然。在兩界中間之狀態者亦不少。並稱液體與氣體曰流體。

III. 單位

14. 量 Quantity 凡物體所可測者。曰『量』。如味，臭，色，等。無測其大小之方法。故不謂之量。惟物體之大小與重。有以

測之。故爲量量之內爲物理學上所用者。曰『物理量』。Physical quantity 大與重是也。物價人數等。非物理量。

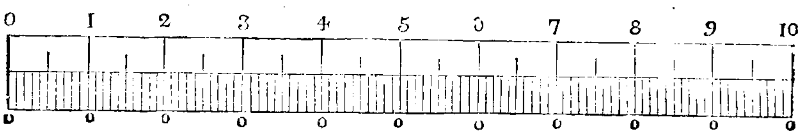
15. 單位 Unit 測量必以一定之單位爲標準。如測絲之長。必以長之單位爲標準。比較絲之長也。例如以單位之長爲一尺。絲長恰合一尺之長有五倍。因稱此絲之長有五尺。故量之云者。必以單位之名稱與數値二部分而成。如五尺者尺爲單位之名稱。五其數之値也。故同一量也。從單位之定而異其數値。是以同一絲之長。以尺爲單位。爲五尺。以寸爲單位。則爲五十寸。故所用之單位若小。則其數値大。所用之單位若大。則其數値小。

16. 基本單位 Fundamental units, 絕對單位 Absolute units 物理學所用之量。種類雖多。而所表之單位。究不外有三長、質量、時間、是也。此三單位。曰基本單位。以基本單位。所表他量之單位。曰絕對單位。(絕對單位詳處見第一篇第二章。)

17. 長之單位 Unit of Length 尺度各國雖異其制。而最通行於各國。且便於學術上之應用者。卽如法國所創制之尺度。以米突 Metre 爲單位者也。蓋其單位。永世不變。故以爲最良。卽通過法都巴黎地球子午線之長四千萬分之中。取其一分也。每米突約合我國 3·15 尺。近時所譯之書。譯音雖有種種。而以用米突者爲最多。故本書仍用米突。至於書法。擬仿照日本。列表如下。

法國原名	米突	合中國營造尺	譯語	代用字
Kilometre (*Km.*)	千米突	3149.6800尺	啟羅米突	粁
Hectometre (*Hm.*)	百米突	314.9680尺	海克米突	粨
Dekametre (*Dm.*)	十米突	31.4968尺	迭加米突	籵
Metre (*m.*)	米突	3.1496尺	米突	米
Decimetre (*dm.*)	十分一米突	0.3150尺	特西米突	粉
Centimetre (*cm.*)	百分一米突	0.0315尺	生的米突	糎
Millimetre (*mm.*)	千分一米突	0.0031尺	密里米突	粍

第　2　圖

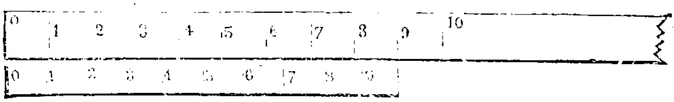


第2圖之全徑爲一粉、十分之爲一糎。又百分之爲一粍。

補足尺度 Vernier 上記之尺度。只能測至粍之長、若更小於粍者如粍之十分之一。則不能測西歷一千六百三十一年。有維爾涅 Verner 者。發明補足尺度、人因呼爲『維爾涅尺』。於通常米突尺之傍。另附小尺、取並行之位置使得容易進退。於短尺 n 部分之長、均等於米突尺 $n-1$ 之長、或均等於米突尺 $n+1$ 之長。前者名曰前進補足尺、其長尺部分與短尺各部分之差。即 $\frac{n}{n}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$、後者名曰後進補足尺、其長

短兩尺各部分之差亦$\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n}=\frac{1}{n}$。前進補足尺用九粍長之短尺精細分之爲十部分。各一部分之長合一粍之十分之九。卽 $(0\cdot9mm)$ 反之長尺之各一部分。其長一粍。是兩者之差。爲粍之十分之一。$(1mm-\cdot9mm=0\cdot1mm)$ 故兩者之零（第3圖）使符合一線上。於1之部生0·1粍 $(0\cdot1mm)$ 之差。於2之

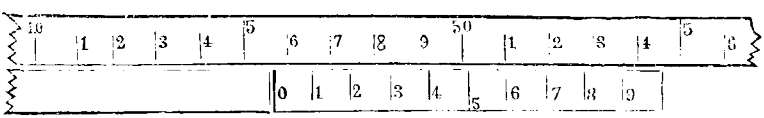
第 3 圖



部。生0·2粍 $(0\cdot2mm)$ 之差。終至10部之線。恰與長尺之9部符合一直線。此外卽符合於他部。亦逐次相差0·1粍。與前置於零部者同。

今以所欲測定物體之長。如第4圖所示。物體4糎5粍之外。尚有粍之分數。由補足尺得測定之。

第 4 圖

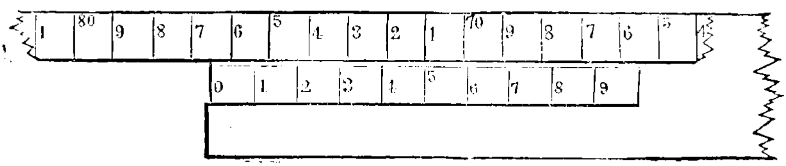


其短尺之0端。觸於物體之端。而求兩尺之符合線。就本圖長短兩尺分劃線之一致點。在短尺之6處。因可知短尺之5部。後於長尺0·1粍。短尺之4部。又後於長尺0·1粍。如斯逐次差減。至0部。其後於長尺0·6粍也必矣。故其所求之分數爲0·6粍。由此類推。更以19粍之長。二十分之。29粍之長三十分之。以至99粍之長百分之。自愈測愈精。但測至極精

微處非擴眼鏡不能見之。

後進補足尺。如第 5 圖物體之長徑欲知其僅微之差先以通常之尺度置於物體之上使長尺之起點符合於物體之一端於其他端置短尺之 0 點計其尺度知物體之長 76 粍之外。尚有些微之長。因求短尺之劃線與長尺之劃線相接同一直線之處長尺之七十一粍在短尺之 5 線然則在

第 5 圖



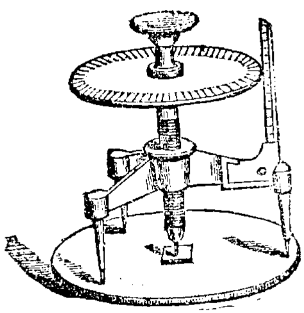
短尺 4 線之部比一粍長十分之一。故 3 線之部比一粍長十分之二。次 2 線 1 線以至 0 點之部比一粍長十分之五即半粍此物之全長徑可知爲 76.5 粍又因此法以補足尺百等一粍分劃百部分能知百分一之差也明矣。

用補足尺度。要豫驗其正否其法先以小尺之零度與本尺之某度相符合觀小尺之他端能與本尺之某度相符合與否若不符合。則小尺爲不正故不可用又此法同時又得判斷本尺之正否亦以小尺之零度與本尺之某度相符合小尺之10度不可不與本尺之他度相符合否則可知其尺度爲不正。

螺旋測度器。原名斯灰羅米突 Spherometre 補足尺僅測物體之長而不能測其大例如細小球體之直徑與極薄之

板片。纖細之金屬線等。用螺旋測度器得測之。該器如第 6 圖所示。以刻劃精密之螺旋回旋於陰螺旋中。傍纖小三足。係以鋼鐵製者。安置於十分平滑之水平形玻璃板上。其垂直樹立之螺旋。緊附金屬製之圓板。周圍分劃百度。密接此圓板。另直立一劃度之金屬小柱。而其所劃之度。使符合於各螺旋級之距離(詳於螺旋節)例如以一度合一粍。螺旋全旋一回。則上下一粍之間。又圓板之度數。若移轉一度。爲迴旋百分之一。則是上下百分一粍之間。今以此器欲測物體之厚。先使螺旋之下端。達於玻璃板。其下端與三足之下端成水平後記取金屬柱及圓板周圍之度數次旋上。以所欲測之物體。置於玻璃板螺旋之下。由是更旋下螺旋使其下端觸接此物體。再檢視柱與圓板之度數。與前所記之度數比較。因知其差。例如其差有一迴轉及十五度則物體之厚爲 1·15 粍也。若所測之板其質軟者。妨其螺旋之尖端入於其質中。宜置如玻璃等之硬板於此物之上。測此二物合計之厚。次定玻璃板之厚。因得知軟物之厚。又測細金屬線之直徑得利用此法。

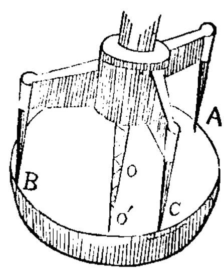
第 6 圖



又利用此法。以測球面鏡等之曲率半徑者。先於螺旋下端與三足尖端成水平時。記金屬柱及圓板周圍之度數。次以三足之尖端置於球面鏡上

ABC.旋下螺旋使其下端觸於鏡面.測三足尖端之水平面與鏡曲率面之距離.即OO′.而鏡截面ABC.其半徑為AO.察其AO之長為$\frac{1}{\sqrt{3}}$AB.蓋O為ABC圓之中心.即內接三角形ABC之中心也.故就第8圖思之.當有次之關係.

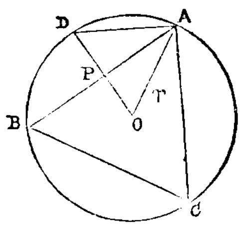
第 7 圖



$$\frac{OP}{AP}=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

又 $$\frac{OP}{AP}=\frac{\frac{AO}{2}}{\frac{AB}{2}}=\frac{AO}{AB}$$

第 8 圖



∴ $$\frac{AO}{AB}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

即 $$AO=\frac{AB}{\sqrt{3}}$$

故所測球之半徑設為R.則據幾何學定理.

$$OO' : AO :: AO : 2R-OO'$$

∴ $$\frac{AB^2}{3}=OO'(2R-OO')$$

AB為已知者。故由此式得求R之值。

$\boxed{\text{縱尺}}$ Kathetometer 此器械乃測二點鉛直距離之器械。其構造大畧如下(第9圖。)

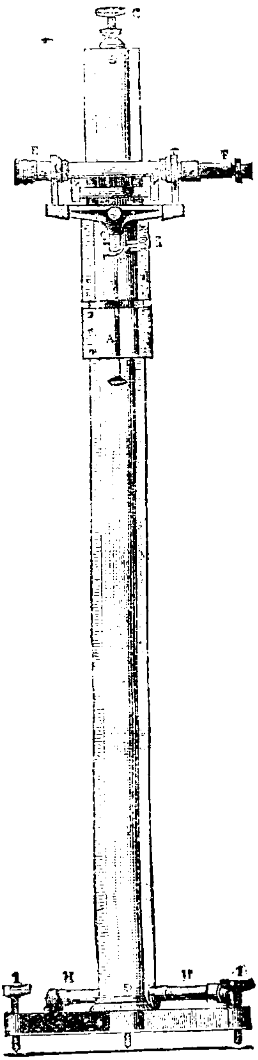
因欲測各方向之物。故柱不可不使其迴轉於周圍。圖上係以金屬柱包圍鉛直之軸。使得迴轉於軸之周圍。柱之傍,附望遠鏡EF。安置水平得沿上下。迴轉時與柱共迴轉。柱之上端。有螺旋G。其下端支於軸之上。藉之得迴轉柱於軸之周圍。望遠鏡在金屬臺上。下以A之螺旋相接續。此螺旋亦藉以上下望遠鏡之用。蓋上下鏡臺時。不免有不能十分

恰對所測之位置。則僅微之差。即藉螺旋A以進退之。是曰『進退螺旋』。又鏡臺兩邊共用他螺旋得定任意之處安置於臺上。有泡準器與望遠鏡平行。以驗眼鏡之位置。果能水平與否。B C亦一螺旋望遠鏡若位置未水平。則用B C得正之。又柱傍劃度臺上之部分。即支持望遠鏡之臺上置補足尺

圖下之部分H亦泡準器以驗器械之臺水平與否。臺若水平則器械之軸位置鉛直。又1之螺旋。迴轉之。使臺成水平。此種之螺旋。曰『臺螺旋』。

用此器械測二點a b間之距離時。上下望遠鏡。移於對a之處。固定望遠鏡之臺。此時不過指其大畧。未必望遠鏡恰對a點。故必藉進退螺旋。稍上下之。至恰見a點。在眼鏡之中心而止。因視補足尺之零度在柱上何度之處。次上下望遠鏡。更測之。又

第9圖



若a b二點不在一鉛直線上。則旋柱使對b點之方向遂依

前同樣之法。得見 b 點在眼鏡之中心。又視補足尺零度之位置。遂以前後所得之度數。求其差。卽 ab 二點之距離也。大抵此器械。得測至粍之五十分之一。

依以上測法。a 點及 b 點不可不恰由眼鏡之中心望見之。然若無標準。則兩點果恰合眼鏡之中心與否。難以確定。如 a 若稍在眼鏡之上方。b 又在眼鏡之下部。則眼鏡之上下距離。不免有微差。a 與 b 之距離因之不準。故欲 ab 各點。恰在眼鏡中心之處。必於物體生影地方。以細線交叉。成十字形。由是其交叉點。卽觀測 ab 之標準點。

【備考】 法國所定米突尺。雖以地周四千萬分之一爲基本。於西歷千七百九十九年。重測子午線之長。比前長三千四百米突。似米突尺亦難爲萬世不變之規範。又以地球冷却。實際不免收縮。該時亦不可不訂正米突尺之長。故現在所用之單位。棄當日之規定(卽云以地周四千萬分一爲米突者)不管地球之漲縮如何。惟以當時創制之尺度爲標準。蓋前法國創制此尺度時。曾造一白金(白金最難養化之金屬也)米突尺。秘藏之政府庫內。以爲後世之模範。故萬國永以米突爲尺度之單位。亦可無尺度差誤之虞。

18. 重量之單位 Unit of Weight 重量單位。亦依法國所定。爲萬國所通用者也。以攝氏四度一立方糎蒸溜水質量之重爲一克蘭。Gramme 合我國 0.02729 兩。此外如十百千克蘭。以至十分一百分一千分一克蘭。命名與米突同。列

表如下。

法國原名	克　蘭	中國漕平權	譯　語	代用字
Kilogramme	千克蘭	27·28800兩	啟羅克蘭	兛
Hectogramme	百克蘭	2·72880兩	海克克蘭	兡
Dekagramme	十克蘭	0·2788兩	迭加克蘭	兙
Gramme	克　蘭	0·027[illegible]9	克　蘭	克
Decigramme	十分一克蘭	0·0027	特西克蘭	兝
Centigramme	百分一克蘭	0·00027	生的克蘭	兣
Milligramme	千分一克蘭	0·00003	密里克蘭	兞

重量乃對地球引力而言者。原於單位上。與其用重量。甯用質量之名為妥。於種種之關係甚便於說明。但此事須俟考究力學之法則。始能明瞭。故此次暫用重量之語。乞讀者勿對克蘭之數。泥守為重量之數。不悟為質量之數也。

19. 時間之單位 Unit of Time 各國通用時分秒。太陽至南中。次再至南中為一日。但一日之長因時而異。故平均以一年間為平均太陽日。物理學所用之時間單位一秒。即平均太陽日之八萬六千四百分之一也。

20. C.G.S.單位 長質量時間等單位。如上記有種種。以計算甚不便。故於物理學一般長用糎。Centimetre 質量用克。Gramme 時間用秒。Second 此等即以為基本之單位也。曰C.G.S.單位。

21. 面積及體積之單位 於C.G.S.式以長1糎所成正方形之面積。爲面積之單位。名之曰1平方糎。長1糎所成立方體之體積。爲體積之單位。名之曰1立方糎。長a糎。闊b糎所成之矩形面積。爲$a\times b$平方糎。故表面積之數。卽以其長闊相乘之積。表面積之數單位平方糎之記號卽書以〔糎^2〕。但〔糎^2〕之書法。於數學上無甚意義。不過爲表平方糎之記號耳。又體積之單位立方糎亦書〔糎^3〕。一般書法如次。

1糎平方之面積$=1$糎^2, 10糎平方之面積$=100$糎^2

1糎立方之體積$=1$糎^3, 10糎立方之體積$=1000$糎^3

a糎立方之面積。謂一邊之長有a糎平方形之面積。等於a^2糎^2。又a糎立方之體積。謂一邊之長有a糎正立方體之體積。等於a^3糎^3。又

底邊之長1糎長a糎之矩形面積$=a$糎^2。

底面積1糎^{2}高a糎之柱形面積$=a$糎^3。

故表矩形面積之數。底邊之長若等於單位之長。則矩形面積。卽等於其長之數。又表柱形體積之數。面積若等於單位之長。其體積之數。卽等於其高之數。

22. 比例 Variation 比例者乃代數學所稱爲對變數或相變數者之謂也。

茲有同高之三角形。其底二倍時。面積亦二倍。底三倍時面積亦三倍。此時同高三角形之面積。正比例於其底。故凡

某量A與他量B成正比例者。則B n 倍時A亦 n 倍。

又同面積之三角形。若底增大二倍。則其高爲二分之一。底三倍。則其高爲三分之一。此時同面積三角形之高。反比例於其底。故凡某量A與他量成反比例者。則B n 倍時。A爲 $\frac{1}{n}$。

今設A,B之數値爲 a,b。設 k 爲一定不變之數。卽比例之常數。(Constant)

正比例時　$\frac{a}{b}=k$　或　$a=bk$　(I)

反比例時　$ab=k'$　或　$a=k'\frac{1}{b}$　(II)

(I)式卽改書爲 $b=\frac{1}{k}a$ 亦可。而 $\frac{1}{k}$ 爲定數。此式乃示 b 正比例於 a。然則 a 若正比例於 b。則 b 亦正比例於 a。推之反比例之理亦同。

次爲關於比例之定理

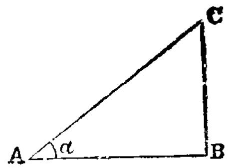
定理『甲正比例於乙。又正比例於丙。則甲正比例於乙與丙之相乘積』

(II)式謂 a 正比例於 $\frac{1}{b}$ 亦同。故據上之定理設 $X=k'a\times\frac{1}{b}$ 卽 $X=k'\frac{a}{b}$ 者。乃謂X正比例於 a 又正比例於 $\frac{1}{b}$〔卽反比例於 b〕之意也。

23. 三角函數 Trigonometrical functions 因本書計算多用三角函數。故特就三角函數簡單表明之。於第10圖ABC

直角三角形。B為直角。

第 10 圖



$\frac{CB}{AC}=\sin\alpha$ (卽 α 角之正弦)

$\frac{AB}{AC}=\cos\alpha$ (卽 α 角之餘弦)

$\frac{CB}{AB}=\tan\alpha$ (卽 α 角之正切)

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 等。為 α 角之三角函數。『sin, cos, tan 之文字未學過三角者不必深求其意只當作記號可也』由定義因得次之三式。

$CB=AC\sin\alpha$　　$AB=AC\cos\alpha$　　$CB=AB\tan\alpha$

又次之公式。亦主要之公式也,

(a) $\sin0^\circ=\cos90^\circ=0$　　(b) $\sin30^\circ=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

(c) $\sin45^\circ=\cos45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$　　(d) $\sin60^\circ=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(e) $\sin90^\circ=\cos0^\circ=1$　　(f) $\tan0^\circ=0$

(g) $\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$　　(h) $\tan45^\circ=1$

(i) $\tan60^\circ=\sqrt{3}$　　(i) $\tan90^\circ=\infty$

注意　上文數字右肩附 ∘ 者。度之記號。∞ 者。無窮盡之意。

第一編

力學　DYNAMICS.

第一章　運動 Motion.

24. 運動 總論10條所述物體之運動及靜止推原爲力之原因不過就現象上說明至於物體實際運動之景況甚複雜如陀螺之迴旋運動自轉車之迴進運動彈丸之拋物線運動物體之落下運動一見眞有莫知其所以然者但就學者精細觀察須先就點之運動而硏究之以應用其結果於實際物體之運動蓋物體皆以衆多質點 Particle 而成故物體盡得就其一點而想像之也點者如幾何學所論僅占位置而無大而物體不言大於實際若背乎理不過以便於硏究就物體運動之模樣而想像之耳故由推論之結果可知物體之運動即以衆多質點之合成運動也。

例如地球爲非常大之物體對太陽不過看作一質點後文以物體看作質點者不少.

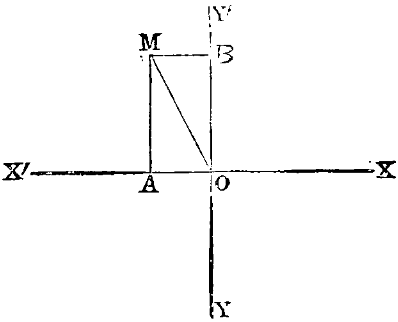
25. 位置 Position 於論運動以前須先就位置述之即物之位置者依標準物而定也。

如於南京問北京之位置須申明自南京以西幾里自南京以北幾里方能定其位置此時測其位置之法以南京爲『原點』測兩方向之距離得示北京之位置。

示地球上之位置以經緯度者亦同一理即以通過英國

古列基天文臺之子午線與赤道相交之點為原點自其處之東西南北以一定之方向。測經度及緯度指定地上之位置。

第 11 圖



今於第11圖以O為原點。指定M之位置時引OX′,OY,二直線以XOX′,YOY′定東西南北之方向。自M引MA平行於YO測OA之距離又由M引MB平行於OX測OB之距離則以此二距離得示M之位置抑或測OM之長及OM與OX′所成之角度亦得指定M之位置是有似乎對問道之人示以『對何方向行幾里』者同。

就上文所說明之位置必須知原點及由此點所測定方向之距離。

此節以關於運動欲表明其意義故特述位置之定義但位置非止就平面上言即空間位置由解析幾何學亦得定之不過以本書專為中等教育而作空間位置非普通程度研究之範圍故略置不論。

運動及靜止之定義　某點甲對他點乙變某位置者甲點對乙點為運動否則甲點對乙點為靜止。Rest.

上文必附『對乙點』之句者例如坐火車中人對火車雖靜止對停車場為運動又萬物對地球雖靜止對太陽與地球共運動者也故運動及靜止須指所對之物體始有意義。

蓋非以絕對的定也。但平時略稱運動靜止者。雖非絕對的運動。絕對的靜止。以所有運動。皆對地球而言。故略之也。

26. 速 Speed 速度 Velocity 物體之運動有遲速。進同一距離。費長時間者。其運動遲。以短時間而至者。其運動速。進短距離者。其運動遲。故因運動之有遲速也。須有測速之法。測速者以單位時間所通過之距離測之。例如由某點過 s 距離。以 t 秒間者。則 $\frac{s}{t}$ 爲其間平均一秒所進行之速。今以每秒平均之速。設爲 v。則 v, t, s, 三者之關係如次。

$$(1)\qquad v=\frac{s}{t}\qquad\qquad(2)\qquad s=vt$$

例 1 有物體運動三秒間。通過 144 尺。求其平均之速。

(解) 由上(1)式平均之速 $v=\frac{144}{3}=48$ 即每秒 48 尺若此速以 C.G.S. 式表之。則以中國尺三分一釐五毫。合米突尺一糎。(17 節) 故 48 尺變作糎。當如次。

$$\frac{480000}{315}=1523.8 \text{ 即每秒 } 1523.8 \text{ 糎}$$

例 2 一秒間流 80 米之河水。二分間當流至幾米。

(解) 二分合 120 秒由公式 (2) $s=vt$

本問 $t=120$, $v=80$. 故所求之路 $s=80\times120=9600$

即 9600 米突或 9.6 粁

例 3 光線每秒之速。約十八萬六千哩。太陽與地球間之距離。爲九千一百萬哩。問太陽之光線。幾秒始達於地球。

由公式 (2) $s=vt$ 變爲 $t=\frac{s}{v}$

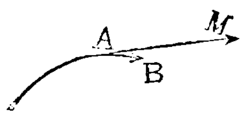
故由太陽至地球光線通過之時間。$=\frac{9100\,0000}{18\,6000}=489$, 秒餘。

上例(2)例(3)。以平均之速。於各秒中常無變異。故得由速與時間求距離。或以速與距離求時間。但平均之速。往往有以運線$\left(\begin{smallmatrix}\text{即運動}\\\text{之道}\end{smallmatrix}\right)$之各部分而異。或以時間之長短而異。例如見火車由停車場初出發時。每秒間平均之速漸增加。殆達一定之速力。次火車漸近於第二停車場時。平均之速漸減少。終至於靜止。是平均之速。以運線之各部分而異者。又由實驗。物體因受地球引力落下時。最初之一秒間。通過 490 糎。若由上文之法測速。則最初之一秒間。$t=1$。$s=490$。故其間平均之速$\frac{490}{1}=490$。由最初計算 2 秒間平均之速 $t=2$。$s=490+1470=1960$。故此間平均之速$\frac{1960}{2}=980$。又由最初計算 3 秒間平均之速。則 $t=3$ $s=490+1470+2450=4410$ 故$\frac{s}{t}=\frac{4410}{3}=1470$。由是觀之。同一物體落下運動之際。平均之速。因時間之長短而異者也。又平均之速。亦因時刻而異。如於前例第一秒與第 2 秒平均之速 980。而第 2 秒與第三秒平均之速。$t=2$。$s=1470+2450=3920$ 故 $\frac{s}{t}=\frac{3920}{2}=1960$。此等平均之速。如斯變易。故若欲求 t 秒間所通過之距離。不可不求每秒間速之變化。後所論之加速度。即表速之變化之模樣也。

論物體運動。不止專論其速。又有對運動之方向而言。故於物理學論運動之速。并述其方向者。因與速特異其意義。名曰$\boxed{\text{速度}}$。例如謂某點以一定之速。進行於一定之方向者是也。又謂二點以等速度運動者。二點運動之速相等。其

方向亦同之意也。若物體一向東。每秒走三米突。一向西。每秒走三米突。其速雖同。而速度則異。又若運動之道爲曲線。則速度亦不得爲一定。

第 12 圖



於第12圖AM切線之方向。其速雖一定。而AB曲線。其方向常變。故速度因之不得不變。

註　速與速度文字之意義雖同。但於物理學。因便宜上。聊以速度之語與速表差別之意耳。讀者不必於字義上苛求其意。但於定義上區別之可已。

於物理學。述平均之速幾粍。上必附秒之單位。如每秒幾粍又略書曰〔秒粍〕。亦示每秒幾粍之意也。是爲速之單位。又以表平均之速。常用時間之數。除距離之數。故有時代秒粍之意。以 粍/秒 之記號。於數學上無甚意義。不過示以時間秒除距離粍之意耳。

註　數學上所施演算。如加減乘除者。惟就數値而行之也。例如10個之果實。分給五人則求每人所得之數者。以人之數5除果實之數10得2.故一人所得果實之數爲2.若於此時略〔數〕之語。以人除果實。其意固不通。從之以時間除距離得速者。其意亦不通也。然則固不得不謂以表時間之數。除表距離之數。得表速之數。惟語過累贅。故只得用權宜之法以表之。學者當自能由單位以推及數。

27. 等速運動及不等速運動 Uniformmotion and Non-uniform motion

運動體之進行中。常變其平均之速。且變其方向者。曰 $\boxed{\text{不等速運動}}$。反之運動之速與方向共不

變者曰等速運動。然則等速運動。恆於一直線上。以同一之速而進行者。但此等運動。於自然界中極少。蓋運動體惟不受外力。方不變運動之常態。始終以一直線爲等速運動。故卽謂等速運動體之速度。爲運動體不受外力之速度可也。但自然界中無一非力之影響。是以於自然界殆無等速運動者。不等速運動分爲加速運動及減速運動二種。

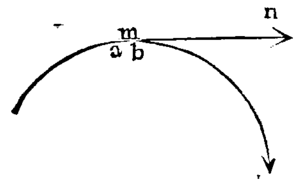
謂自然界中無等速運動。似與日常所見者異。實則於自然界中偶有等速運動者。或藉人爲。如時辰錶者是。又以加速運動與減速運動相抵消。恰如等速運動然者。例如火車之運動。一因蒸氣力而進行者若車輪與軌道毫無摩擦之阻力。及空氣之抵抗。則火車只須一度略加外力。始終能以等速進行。且若蒸氣之動力不絕。則火車當以加速運動。終至有如目不能見之速。但摩擦力與空氣抵抗力。時常阻滯。使之減速運動。故若蒸氣力一絕。則以阻礙力之抵抗。減速不絕。終至靜止。今者蒸氣力與阻礙力相抵消。恰如等速運動者也。

註　前條之例所述.火車始由緩而漸速者.蓋其始也由靜止而運動.初破靜止之慣性.故緩繼循運動之慣性因漸速.其終也以蒸氣力停止.只餘阻礙力.遂漸減速而靜止.

28. 不等速運動於運線上一點之速度　不等速運動。其速度時刻變更。不若等速運動之容易測算。但若就其極近距離。亦得測某時刻中於一點之速度。是爲瞬

時之速。Instantaneous speed

第 13 圖



例如第13圖。盡進行於曲線路之一質點。如欲知經過m點之速度。可於m之兩側曲線路上。取極接近於m之二點a b。測此間之距離s,及所費之時間t。則$\frac{s}{t}$爲a b間平均之速。譬如a b間之距離s=0.000002。經過之時間t=0.00000005。則此間平均之速度=$\frac{0.000002}{0.00000005}$=40。即每秒40糎。今以a b二點極近於m。故於a運動之速。及於b運動之速。得看作無差者。故即於a b極近距離間。看作等速運動可也。由是以t秒間所經過之距離s。其等速運動之速v爲$\frac{s}{t}$。即經過m點之速也。蓋通過m點時之方向。恰如由m點引於曲線之切線m n之方向者也。

注意　普通之時辰錶。測一秒之時間固甚難。用特別之方法。縱一秒之千分之一。亦得精密測之。

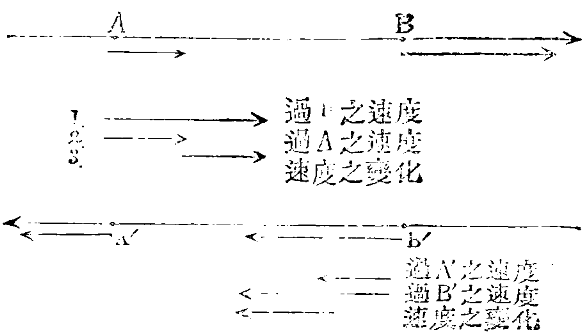
29. 速度之變化 Change of velocity 於不等速運動中。欲求其運動之模樣。須求速度經時生如何變化者。茲先就直線運動論之。

『有循直線運動之一點。於某時刻每秒以v糎之速度。運動於一直線上。經t秒之後。速度每秒v'糎。則(v'−v)秒糎者。t秒間速度之變化也』

變化之一語。於增加或減少。得通表之。由終速度減初速度。所得之値曰變化。故若終速度比初速度大。即速度增加

之意其量之變化爲(+)。終速度比初速度小者,卽速度減少之意其量之變化爲(−)。又變化爲零者,其值無增減,速度一定不變之意也。然則因 v 及 v' 兩值大小之比較,得定其速度正負之方向,而正數負數,與代數學所用之意義同,例如過A點之速度10秒糎,(卽以平均計算每秒10糎) 5秒之後過B點有30秒糎之速度。則其五秒間速度之變化。(於此時爲增加) $30^{\text{秒糎}} - 10^{\text{秒糎}} = 20^{\text{秒糎}}$ 第14圖卽示速度之變化也。

第 14 圖



(1)爲過B時之速度,(2)爲過A時之速度。(3)爲(1)減(2)之量,卽表速度之變化。卽謂5秒後比5秒前,每秒加速20糎也。反之通過B′之速度,每秒30糎但若外力阻滯不絕,5秒之後,過A′點時。每秒速度10糎,則5秒間速度之變化,(於此時爲減少) $10^{\text{秒糎}} - 30^{\text{秒糎}} = -20^{\text{秒糎}}$ 卽云5秒後比5秒前每秒減速20糎,

註　所云5秒間速度之變化20秒糎者,非謂物體1秒間通過20糎,又非謂5秒間通過20糎,乃謂5秒前每秒之速度,與5秒後每秒之速度,兩者之差,每秒有20糎,故以秒糎表之。

30. 加速度 Acceleration 見物體運動,速度之變化有急

有緩。若僅知速度之變化。尚不能測實際運動之景況。因之不可不求其每秒中平均速度之變化。此速度變化之平均數曰加速度。

例如某物體初時之速度 v 秒粍。t 秒後之速度 v' 秒粍時其速度之變化 $(v'-v)$ 秒粍。故以 t 除 $(v'-v)$ 秒粍所得之商 $\frac{v'-v}{t}$ 爲 t 秒間平均之加速度。

加速度之加字。不止含速度增加之意。於速度減少時。亦用之。即 $v'>v$ 時。加速度 $\frac{v'-v}{t}$ 爲正。速與時共增加。$v'<v$ 時加速度 $\frac{v'-v}{t}$ 爲負。速經時漸減少。

於前例 5 秒間速度之變化 20 秒粍。故平均各秒中每秒速度之變化 $=\frac{20}{5}=4$。即加速度。依前所論 5 秒間前後之差爲 20 秒粍。然則每秒間前後之差。即謂爲每秒 4 秒粍可也。故本書於加速度之單位。約言之爲幾秒秒粍。又或以 $\left[\frac{\text{粍}}{\text{秒}^2}\right]$ 之記號表之。此記號之意。即示以時間之單位〔秒〕。除速之單位 $\left[\frac{\text{粍}}{\text{秒}}\right]$ 之意。$\left(\frac{\text{粍}}{\text{秒}}\div\text{秒}=\frac{\text{粍}}{\text{秒}^2}\right)$

註 秒秒粍之記號。於數學上固無甚意義。以與秒粍示區別。特由推理上造此名詞。亦世界一般之學語。讀者切勿以我國無此等文字。怪作者之杜撰也。

時間及距離已定之單位。有時改爲他種單位。須用算術諸等法以變之。今以例題示之如次。

例 1 爲等速運動之物體。十五秒間。經過六十米突。問每秒之速度

幾糎.或每分之速度幾米.

(解) $v=\frac{60}{15}=4$ 秒米(卽每秒 4 米突)

或以 60 米 $=6000$ 糎

∴ $v=\frac{6000}{15}=400$ 秒糎(卽每秒 400 糎)

或以 15 秒 $=\frac{1}{4}$ 分

∴ $v=\frac{60}{\frac{1}{4}}=240$ 分米(卽每分 240 米)

例 2. 每分 750 尺之速度.以分尺秒尺及秒米表之.

(解) 每分 750 尺之速度爲 750 分尺

或 $\frac{750}{60}=12.5$ 秒尺

或以 1 米 $=3.15$ 尺

$750^{尺}=(750\div3.15)$米 $=238$ 米約

∴ $\frac{238}{60}=3.9$ 秒米强

例 3. 動體之速度.5 分間增 300 秒米.其平均加速度.以分秒米.秒秒米.秒秒糎表之如何.

(解) 此加速度每分 $\frac{300}{5}$ 秒米(卽 60 分秒米)

或每秒 $\frac{300}{60\times5}$ 秒米(卽 1 秒秒米)

或以 300 米 $=300\times100=30000$ 糎

此加速度每秒 $\frac{30000}{60\times5}=100$ 秒糎(卽 100 秒秒糎)

例 4. 前題之加速度.以分分米秒分米表之則如何.

(解) 300 秒米之速度.卽每秒 300 米之速度.每分 $300\times60=18000$ 米.卽等於 18000 分米.

於 5 分間速度之變化.18000 分米.則其平均加速度.每分 $\frac{18000}{5}=3600$ 分米.卽 3600 分分米

或此加速度每秒$\frac{18000}{60\times5}=60$分米.即60秒分米.

31. 等加速運動之公式　加速運動中。最簡單者。等加速運動也。計算等加速運動之時間或距離。必有一定之法則以次公式。卽由推理上。所得之法則也。

今於加速度之語。以a表之其式如次。

$$(3)\qquad a=\frac{v'-v}{t}$$

由(3)式去分母移項。得變爲次之二公式。

$$(4)\qquad v'=v+at$$

$$(5)\qquad v=v'-at$$

蓋每秒間速度之變化。a秒糎。則t秒間速度之變化。爲at秒糎。故可知後速度v'。所多於初速度v之値。即at之値也。故由(4)(5)兩式。若知初速度v。或終速度v'。及t秒間之加速度a。得求t秒後之速v'。或t秒前之速v。

又由前公式(2)

路程＝(平均之速×運動之時間)………………………(a)

但於等加速運動。速度逐秒增加。故若求t秒後所通過之距離。則當先求其前後平均之速。而

平均之速$=\frac{1}{2}$(初速度＋終速度)………………………(b)

由公式(4)終速度$v'=v+at$

故平均之速。$\frac{1}{2}(v+v')=\frac{1}{2}\{v+(v+at)\}=v+\frac{1}{2}at$……………(c)

由是t秒間所通過之距離S。由(a)式與(c)式。

(6)　　$S=(v+\frac{1}{2}at)t=vt+\frac{1}{2}at^2$

但若初速為零。如物體由靜止而運動時。$v=0$ 故

(7)　　$S=\frac{1}{2}at^2$

觀以上諸式終速度 v' 不專用(4)式。亦得求之。

蓋由公式(4)　　$v'=v+at$

$$\therefore \quad t=\frac{v'-v}{a}$$

次由(6)式 $S=(v+\frac{1}{2}at)\times t$ 即 $S=\frac{1}{2}(v+v')t$ 今代 t 以 $\frac{v'-v}{a}$

則 $S=\frac{1}{2}(v+v')\frac{v'-v}{a}=\frac{1}{2a}(v'^2-v^2)$ 即

(8)　　$v'^2-v^2=2aS$　　或　　$v'=\sqrt{2aS+v^2}$

此式以初速度 v。及加速度 a。與所通過之距離 S。得求後速度之公式。若初度 $v=0$ 時。

(9)　　$v'^2=2aS$　　或　　$v'=\sqrt{2aS}$

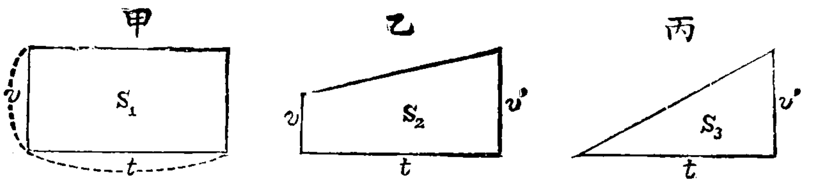
以上諸式擇其重要者類集之如次，

初速度 v 時	初速度零時
$v'=v+at$	$v'=at$
$S=vt+\frac{1}{2}at^2$	$S=\frac{1}{2}at^2$
$v'^2-v^2=2aS$	$v'^2=2aS$

此等諸式。得以圖形簡單表之。即以橫線之長。表所經過之時間。其左端表初時刻。右端表終時刻。又於橫線之各點。

引縱線。以其長表各時刻之速，由是以橫線與縱線所作之平面形，其面積卽表 t 秒間所通過之距離也。

第 15 圖



於甲圖縱線之長常一定。故以之表等速運動。玆以底邊之長爲 t。以高爲 v。則

$$S_1=v\times t$$

於乙圖左端之高爲 v。向右以一定之速逐漸增加。至右端其高爲 v'。則

$$S_2=\frac{1}{2}(v+v')t$$

於丙圖卽表左端 v 爲零者。故

$$S_3=\frac{1}{2}v't$$

例 1　有等加速運動之物體。初有 5 秒糎之速度。6 秒之後。得 23 秒糎之速度。問加速度若干。

（解）　由公式(3)加速度爲 a。v' 合本題 23。v 合本題 5。t 合本題 6。

故　$a=\frac{23-5}{6}=\frac{18}{6}=3$　卽每秒 3 秒糎之加速度。

例 2　有物體由靜止而運動。每秒增 980 秒糎之加速度。5 秒後每秒之速度若干。

（解）　以所求之速度爲 v. 故由公式 (4) $v'=v+at$

就本題中 $v=0$　$a=980$. 卽

$v'=0+980\times5=4900$ 秒糎

$\boxed{\text{例 3}}$ 每秒以 2 秒糎之加速度運動之物體. 5 秒之後. 得 10 秒糎之速度. 問初速度若干.

（解）　由公式 (5)　所求之初速度$=10-2\times5=0$

$\boxed{\text{例 4}}$ 有物體以等加速運動. 由靜止運動至第 5 秒時. 經過 144 米突. 問由初運動至第 10 秒之距離若干.

（解）　物體由靜止以等加速運動故 $v=0$. 由公式 (7) $S=\frac{1}{2}at^2$ 因之

$$144=\frac{1}{2}a\times5^2$$

$$\therefore\quad a=\frac{288}{25}$$

次以由初運動至第 10 秒所經過之距離爲 S'. 由同式得.

$$S'=\frac{1}{2}a\times10^2=\frac{1}{2}\times\frac{288}{25}\times10^2=576$$

故所求之距離 576 米也.

32. 物體之落下運動及其公式　物體落下。卽因地球吸力牽引而下也。以地球之牽引作用。各秒間吸力無間斷。故初秒間受地球吸力之牽引。所生之速度。隨慣性之定律。仍保有其速度。次更受牽引。因之速度比前加大。是爲落下加速度。落下加速度由實驗上於同一地方者。以一定之加速度。每秒約 980 秒糎。通常以 g 表之。卽重力 (gravity) 之頭字。

物體由靜止之狀態。自然落下者。曰墜落。卽與前節之公

式 $v=0$ 者同。又用力投下者曰投落。初速度即等於所與之速亦與前節無異。但前節加速度 a，本節易之為 g。至物體由地面鉛直上拋者。其物體之速每秒減 g 秒糎。故若以初速度為 v。則 t 秒終之速為 v'。

$$v'=(v-gt)\text{秒糎}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{甲})$$

次求其 t 秒時間所經過之路程 S，地球上若無重力則依慣性之定律。為等速運動，t 秒間經過 vt 糎。而因重力作用其間引下 $\frac{1}{2}gt^2$ 糎。故結局 t 秒間所經過之路程。

$$S=vt-\frac{1}{2}gt^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{乙})$$

由甲乙兩式。消去 t

$$v^2-v'^2=2gS\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{丙})$$

此三式為拋上體之公式。

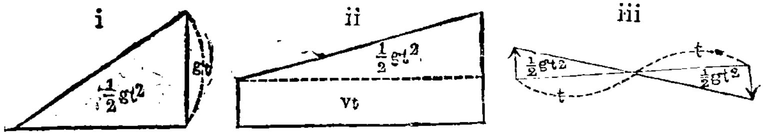
茲將各公式類集之如下。

(i)　墜落	(ii)　投落	(iii)　拋上
初速 0	初速 v	初速 v 加速度 $-g$
1.　$v'=gt$	4.　$v'=v+gt$	7.　$v'=v-gt$
2.　$S=\frac{1}{2}gt^2$	5.　$S=vt+\frac{1}{2}gt^2$	8.　$S=vt-\frac{1}{2}gt^2$
3.　$v'^2=2gS$	6.　$v'^2-v^2=2gS$	9.　$v^2-v'^2=2gS$

此等之諸式以圖示之如次。

(i)　即等於第15圖丙 $S=\frac{1}{2}gt\times t=\frac{1}{2}gt^2$

第 16 圖



(ii)　即等於第15圖乙 $S=\frac{1}{2}\{v+(v+gt)\}\times t=vt+\frac{1}{2}gt^2$ 此時 t 秒間所通過之距離。得看作由 vt 及 $\frac{1}{2}gt^2$ 之二部分而成者。蓋初速度 v 依慣性之定律。得看作以 v 速度。t 秒間爲等速運動。$\frac{1}{2}gt^2$ 與(i)同。即等於自然落下。t 秒間所通過之距離。

(iii)　速經時減少。於某時間 t 秒之後遂爲零。此時物體達於最高處。次轉而下落。速次第增加。經 t 秒再復原處。

就上(7)(8)二式中。先以 $v'=v-gt$ 思之。v 及 g 爲所與之數。乃一定者也。所以於(7)式中，t 數若增。$v-gt$ 即 v' 必減少。而 v' 終爲0。則 $v-gt$ 自等於0。今就此方程式解之。因

$$v-gt=0 \qquad \therefore \quad t=\frac{v}{g}$$

即由拋上至 t 秒(即 $\frac{v}{g}$ 秒)之後。其速當爲0。此時物體達於最高處。因之於 $S=vt-\frac{v}{g}gt^2$ 之式中。代 t 以 $\frac{v}{g}$ 得 $S=\frac{v^2}{2g}$ 即自離手至最高之距離爲 $\frac{v^2}{2g}$ 也。次 t 漸增至 $t>\frac{v}{g}$ 時。$v<gt$。v' 爲負數。即謂物體經 $\frac{v}{g}$ 秒。達於最高處後。反速之方向而落下之意也。又若 $S=vt-\frac{1}{2}gt^2=0$。則得 $t=0$ 及 $t=\frac{2v}{g}$ 之二根蓋 $S=0$ 者。物體毫不運動。或出發點與歸着點一致之意也。$t=0$ 者。爲物體未運動之意。故 $S=0$。又 $t=\frac{2v}{g}$ 者。物體拋上後。再落於

原位置。故 $S=0$。由是可知物體上拋後。再復原位置時。要 $\frac{2v}{g}$ 之時間。而 $v'=v-gt$ 之式中。t 若代以 $\frac{2v}{g}$，則得 $v'=-v$。故復歸於原位置時。出發點之速。與由出發點上昇之速得相等者。自可推知。

總以上所論。得簡單而言之曰。以 v 秒糎之速。鉛直拋上之物體。次第上昇。而漸減其速。$\frac{v}{g}$ 秒之後。達於最高處 $\frac{v^2}{2g}$ 之高。其速一時爲0。遂變方向與自然落下同運動。經 $\frac{v}{g}$ 秒。與初時同速。復歸於出發點。

例1　自高50米突之處。物體落下幾秒。始達於地。

(解)　所求之數爲 t。由落下公式 (2) $S=\frac{1}{2}gt^2$

按題意　$S=50$ 米　$g=9.8$ 米

$$\therefore \quad 50=\frac{1}{2}\times 9.8\times t^2$$

$$\therefore \quad t^2=\frac{50}{\frac{1}{2}98}=\frac{50}{4.9}=10.204$$

$$\therefore \quad t=\sqrt{10.204}=3.2 \text{ 秒}$$

例2　由高塔之上落石6.5秒。始達於地面問塔之高。

(解)　由落下之公式 (2) $S=\frac{1}{2}gt^2$ 塔之高爲 S

故　$S=\frac{1}{2}\times 980\times 6.5^2=41405$ 糎 $=414.05$ 米

例3　石以50秒米之速垂直投下。幾秒之後。得99秒米之速。又其間落下之距離若干。

〔解第一〕　以所求之時間爲 t。由落下公式 (4)

$$v'=v+gt$$

$$\therefore \quad 99=50+9.8\times t$$

$$\therefore \qquad t=\frac{99-50}{9.8}=5$$

〔解第二〕 所求之距離爲 S，由落下公式(6)，

$$v'^2-v^2=2gS$$

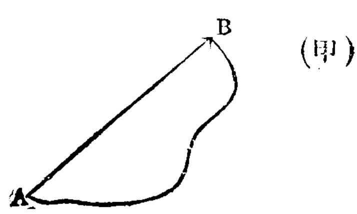
按題意　$99^2-50^2=2\times9.8\times S$

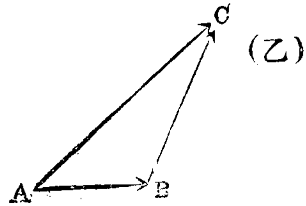
$$\therefore \qquad S=\frac{99^2-50^2}{2\times9.8}=372.5\text{米}$$

33. 有方向之量 於物理學論運動或速度。必稱其方向。此量常以直線表之。既述之如前矣。但前只論一直線上之運動。其方向僅分正與負。祇須代數學得說明之。若論一般之運動。勢不能不用代數學以外之數學。如幾何學。或三角法等。

變位 Displacement 於點之運動。不論運動之道及運動之時間。單就其始之位置。及終之位置想之。曰變位。例如某點自 A 至 B。不論其實際過如何之道。其變位惟以所連絡 A B 二點之直線 $\overrightarrow{AB}$ 表之。而 A B 之長。爲變位之大。以 A B 之方向。爲變位之方向。今如次圖。在 A 之一點。始爲 $\overrightarrow{AB}$ 之變位。次爲 $\overrightarrow{BC}$ 之變位。就 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{BC}$ 二變位之結果。與自 A 所發之點至 C 之變位同。茲更以實例示之如次。

第 17 圖



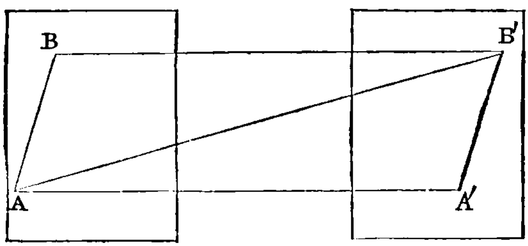


桌上有一册之書。書上之 A 點有一蟻。蟻見 B 點有砂糖碎。

進向B點。次人將書移之右邊。(AA'之方向)及蟻至B點時。却如在B之位置。

於此例。書之運動之量爲AA'。蟻之運動之量爲AB=A'B'但A'即原點A。B'即原點B。而蟻在B時。是蟻對桌由A變爲B'之位置。蟻自身雖進向AB之道。因人將書對桌動於AA'之方向。故A點對桌動AA'。B點對桌所動之方向與A同。故AA'=BB'。A'點及B'點對書上之位置雖不變。對桌之位置變。今記其結果如次。

第 18 圖



(i)　蟻運動於書上AB。

(ii)　書由AB移於A'B'之位置。即對桌運動於AA'。

(iii)　故蟻對桌運動AB'。

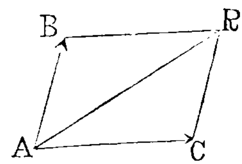
就圖上觀之AB'爲平行四邊形之對角線。故於物理學論運動。得依次之規則。

『$\overrightarrow{AB'}$者$\overrightarrow{AB}$之運動。與$\overrightarrow{AA'}$之運動之合成運動。$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{AA'}$者。$\overrightarrow{AB'}$之分運動也。』

即以蟻對桌上A之位置。移動於B'之位置者。蟻之AB運動。書之AA'運動。合成運動也。

依此例得知運動之合成法。即『求$\overrightarrow{AB}$運動及$\overrightarrow{AC}$運動

第 19 圖

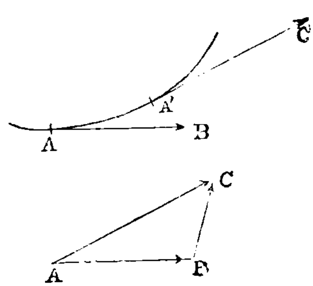


合運動者。可以其二邊 $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ 作平行四邊形。求其對角線 $\overrightarrow{AR}$ 之大。及其方向。」

以上所述。不止於運動合成。得以平行四邊形求之。卽求速度之合成。亦得應用此法。蓋所謂速度者。卽對於單位時間。所爲運動之量言也。於上例。若以蟻自 A 至 B 所費之時間爲一秒又書由 A 移於 A′ 所費之時間亦爲一秒。卽 $\overrightarrow{AB}$ 者蟻對書之速度。$\overrightarrow{AA'}$ 者書對桌之速度。$\overrightarrow{AB'}$ 者 $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AA'}$ 之合速度。又 $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AA'}$ 者 $\overrightarrow{AB'}$ 之分速度。

又加速度者。如前所述乃單位時間速度之變化也。亦如速度得求其合成分解。蓋速度之變化。雖由速度之大之變化。與速度方向之變化而成。祇就其小時間。亦得定其方向也。

第 20 圖



茲卽以曲線運動思之。譬如某點於某時刻以 $\overrightarrow{AB}$ 之速度。通過 A。t 時間之後。以 $\overrightarrow{A'C}$ 之速度。通過 A′。則 $\overrightarrow{BC}$ 者。乃表 t 時間速度之變化。($\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C}$) 何則組合 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ 得 $\overrightarrow{AC}$ 故也。t 若爲極小時間時。$\frac{\overrightarrow{BC}}{t}$ 之長。表 t 時間平均加速度之大。$\overrightarrow{BC}$ 表加速度之方向。蓋 t 爲極小時間者。加速度畧得看作一定故也。從之其合成分解之

法。與速度者全同。

次力者又有方向之量。亦得應用同法。求其結果。例如 $\overrightarrow{AB}$ 之力。及 $\overrightarrow{AC}$ 之力。同時間加於物體時。與以 $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BC}$ 二邊所作之平行四邊形之對角線 $\overrightarrow{AR}$ 之力同作用。

『就力之合成分解更於後章詳論之』

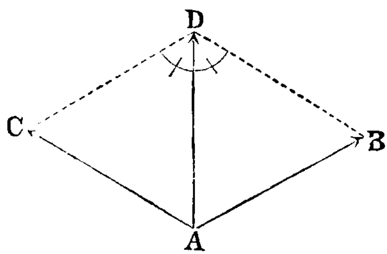
例 1 二運動互爲 $120°$ 之角度。若兩運動之速度相等。則兩運動合速度之大。各等於其分速度之大。

(解) $\overrightarrow{AB}$。$\overrightarrow{AC}$ 爲相等之速度。$C\hat{A}B$ 角 $= 120°$。作速度之平行四邊形 A B D C。此四邊形爲菱形也明矣。

故 A D 者二等分 $C\hat{A}B$ 角。

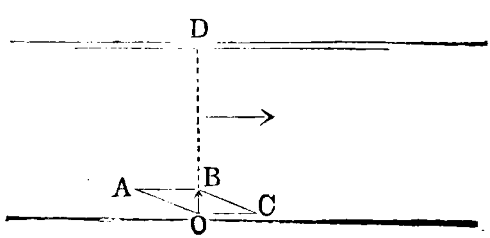
故 $C\hat{A}D = D\hat{A}B = 60°$。而 A D C 自亦等於 $60°$。故 $AD = AC$。而 A D 者。A B, A C 之合速度。A D 故等於分速度 A C, A B。

第 21 圖



例 2 闊三百尺之河。水流速度。每分 80 尺。小舟以直線橫衝河流而過。五分間達於對岸。問艇首須望何向。以如何之速撐船

第 22 圖



(解) 以 O D 爲河闊。即 $OD = 300$ 尺。今欲使舟行於此線上。5 分間達於對岸。則每分不可不以 $\frac{300}{5} = 60$

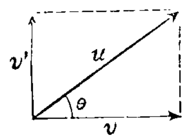
之速度。進行於OD之方向上。故與OD同方向之$\overrightarrow{OB}=60$。由是以之為對角線。以$CC=80$(河流之速)為一邊之分速度。作平行四邊形OCBA後。得$\overrightarrow{OA}$之分速度。因$\overrightarrow{OB}$之合速度為$\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$兩分速度所合成。故因水流於$\overrightarrow{OC}$之方向。此時欲使舟進行於$\overrightarrow{OB}$,必不可不向$\overrightarrow{OA}$之方向搖櫓。又欲求$\overrightarrow{OA}$之速度。只求$\overrightarrow{CB}$之長可也。

$$OA=CB=\sqrt{OC^2+OB^2}=\sqrt{80^2+60^2}=100_{尺}(每分)$$

組合之例　若知次之方法。則於一切有方向之量之合成分解。求之甚易茲就運動之合成分解用三角法述之如次,

(一)　互成直角時二量之組合

第 23 圖



$$u^2=v^2+v'^2 \qquad (大)$$

$$\tan\theta=\frac{v'}{v} \qquad (方向)$$

若　$v=v'$　則　$u=\sqrt{2}\,v$　$\theta=45°$

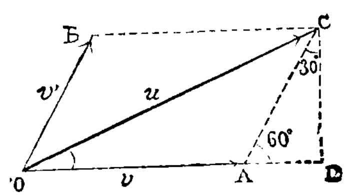
反之若以與橫線成θ角度之量u分解為橫及縱之方向則

橫分　$v=u\cos\theta$

縱分　$v'=u\sin\theta$

(二)　互成60°時二量之組合

第 24 圖



$$u_2=(v+AD)^2+DC^2$$

$$=v^2+2v.AD+AD^2+DC^2$$

但　$v'=AC^2=AD^2+DC^2$

$$\frac{AD}{AC}=\cos 60=\frac{1}{2}$$

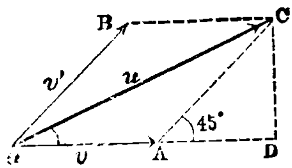
故　$2vAD=v\times AC=vv'$

∴　$u^2=v^2+v'^2+vv'$

若　$v=v'$ 則 $u=\sqrt{3}\,v$　$\angle AOC=30°$

(三)　互成45°時二量之組合

第 25 圖



$$u^2=(v+AD)^2+DC^2$$

$$=v^2+2v.AD+AD^2+DC^2$$

但　$\frac{AD}{AC}=\cos45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$

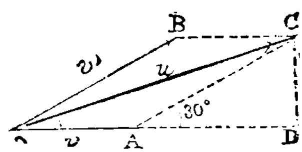
故　$2v.AD=2v\frac{AC}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,vv'$

∴　$u^2=v^2+v^2+\sqrt{2}\,vv'$

若　$v=v'$　則　$u^2=(2+\sqrt{2})v^2$　$\angle AOC=22°.5$

(四)　互成30°時二量之組合

第 26 圖



$$u^2=(v+AD)^2+DC^2$$

$$=v^2+2v.AD+AD^2+DC^2$$

但　$\frac{AD}{AC}=\cos30=\frac{\sqrt{3}}{2}$

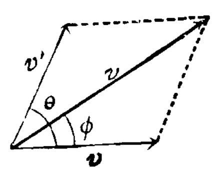
故　$2v.AD=2v.\frac{\sqrt{3}AC}{2}=\sqrt{3}\,vv'$

∴　$u^2=v+v'^2+\sqrt{3}\,vv'$

若　$v=v'$　則　$u^2=(2+\sqrt{3})v^2$　$\angle AOC=15°$

(五)　互成θ角時二量之組合

第 27 圖



由三角法

$$u^2=v^2+v'^2+2vv'\cos\theta$$

$$\sin\phi=\frac{v}{u}\sin\theta$$

若　$v^2=v'$ 則 $u^2=2(1+\cos\theta)v^2$　$\phi=\frac{1}{2}\theta$

於上式之θ若代以$90°$, $60°$, $45°$, $30°$等。則得(1) (2) (3) (4)例之結果

第一章之問題

1. 直徑25丈之圓形跑馬場。10分一週。問每分之速若干。

2. 以100秒米之速度。轉球於水平面之板上。20秒後始靜止。其加速度若干。

3. 動體於某時之速度10秒米。再經30秒之後。其速度40秒米。問其間之平均加速度。每秒幾秒米。又每秒幾分米。每秒幾秒尺。

4. 有物體由靜止出發。爲等加速運動。其運動之間。由某時刻5秒後。經過125米突。再經8秒間後。經過340米突。求其加速度。又上所云某時刻者。由始運動至第幾秒之時刻

5. 有汽車由停車場出發。每秒以5秒米之加速度進行。一分間達最大速度以其速度爲等速運動。經1分間後。每秒減6秒米之速度。達於第二停車場而靜止。問兩停車場之距離,

6. 垂直向上發砲,12秒後。礮丸復歸於原地。問最初以如何之速度發礮。

7. 物體由靜止墜落。自第三秒之初至第七秒之終。其間所通過之距離若干。

8. 有物體初以v之速進行。衝突於壁而反躍。與前得同速。問此時速之變化。

9. 由橋上落石石2秒達於水面。問橋至水面之距離。及石擊水面之速度、

10. 以100秒糎之初速。鉛直抛上物體。幾秒之後。物體復歸於地。

11. 以100秒糎之初速。鉛直抛上小石。次經 x 秒。更以小石與前同等之初速抛上。後之石抛上8.7秒後。與前石相會合。求 x。

12. 有208尺之高塔。由塔頂落石。又同時亦以石由下方抛上。二石恰於塔之中央相會。問石抛上之初速度。及與落下之石相會之速度。

13. 落石於井。2秒後聞石打於水面之音。問井之深若干。但音之速度330秒米。

14. 有船每時以8海里之速。向正東航行。潮流每時以6海里之速，流於正南。問船當進行於何方向，并問船每時進行之速度若干。

15. 獵戶乘馬疾驅而過。遠見野獸停立於傍。發礮時銃首必望野獸之後方者。其故何也。又若野獸與騎手以等速平行走時。銃手之目的當如何。

16. 有物體同時受兩運動，互爲45°之角。其一每秒10米之速。一每秒15米之速。求此物體運動之速度。

17. 以相等之二速度。互成120°之角組合之。得合速度。各等於二分速度之大。且合速度對兩分速度之角度。互

成六十度。試證明之。

18. 設有舟向東北方向進行。每時12里之速度。問正東方向之速度。

19. 大礮之前有軍艦以 v 之速度與大礮之軸成直角橫衝而過。今放彈丸擊此艦。礮身宜迴轉幾度則可。但彈丸之速度爲 V 秒米。

20. 於前問設 $v=100$　$V=200$ 則如何

21. 有火輪船若順流而下。每時以 3 粁之速度進行。若逆流而上。每時以 2 粁之速度進行。今汽船欲橫衝河流而過。直達於對岸。要幾時間。但河闊 1200 粁。

22. 同時三速度働於一質點。一正北每秒 60 尺。一西 30 度以南每秒 88 尺。一東 30 度以南。每秒 60 尺。問合速度之量。及方向各如何。

第二章 力及質量 Force and mass

34. 力 前章所論運動。皆力之使然。如地球引力働於物體。而物體落下。故若就力而論。不可不就各物體中之關係言之。蓋力之生。非於空間有作用。必對物體始覺有作用之力。如二物體互相牽引。或互相抵抗。力之作用也。故惟有物體。始生牽引與抵抗之作用。又惟其有牽引與抵抗之作用。始得表其作用曰力。恰如業商者必有賣人與買人。否則商業不成。但言力一一必稱兩物體。不免繁雜。遂以簡便故。得單就一方物體而言之。譬如述甲乙二物體間力之作用。必曰『甲働力於乙』或曰『乙爲甲所働』茲以簡單述之。略去他働之物體。只云『有力働於乙』或云『乙受他働力』但不可忘甲體之他働。故凡言力。只記作甲乙兩體間之作用可耳。

力之測法 由實驗之結果。物體不受外力。不變其運動或靜止之慣性。故物體因受他働力。運動之速度生變化。得歸爲力之結果。由是遂以受働力所生加速度之大。得測力之大。又得以其加速度之方向。測力之方向。例如甲力働於某物體所生之加速度比乙力働於某物體所生之加速度爲 n 倍者。甲力比乙力大 n 倍也。(速度之方向。已述之於前。加速度之方向。當於後文述之。)

(註) 讀者觀上文測力之法。或見其迂遠。但力者無形之物。直接測力之大。固理論上所不能。故只得由間接就力作用之結果。察其物

體運動之變化.遂以尺與時辰鍍二器械.得知力之大.

例如甲力働於靜止之物體.t秒間生v秒糎之速.乙力働於同大之物體.經同時間生v'秒糎之速.則甲乙兩力之大.其比較如次.

因甲力所生之加速度$\frac{v}{t}$.

因乙力所生之加速度$\frac{v'}{t}$.

$\therefore$ 甲乙兩力之比較爲 $\frac{v}{t}:\frac{v'}{t}$ 卽 $v:v'$

卽兩力大之比.等於同時間後所生速度之比.故測力之大.卽以其力働於物體一秒後所生之速度.定其力之大.

又加速度亦力之所影響.故由一秒間速之變化.亦得測力.如物體自然落下.一秒後所得之速.於緯度45°之處.980.6秒糎.於赤道978.1秒糎.故於兩處比較地球引力之大.卽如次.

引力(緯度45°):引力(赤道)＝980.6:978.1.

35. 質量 Mass　物體中所含物質之量.爲其物體所有之質量.質量者占有位置.能感觸吾人之視覺.能受外力之作用.測質量之法如次.

1. 二物體受等大之他働力.生等大之加速度者.兩物體之質量相等.

2. 以某力働甲體所生之加速度.與以n倍之力.働乙體所生之加速度.若相等.則乙之質量.爲甲之質量n倍.

定義(1)示二物體質量相等之意.定義(2)比較二物體質量大小之方法.

總以上之測力.及測質量之方法.比較質量之大小時.得

知力之大小。又由力働於物體。生同等之加速度。得測質量之大小。玆以實際比較之方法述之如次。

凡引延橡皮帶必收縮。其收縮之力。由引延之長而一定。(引延愈長。其反撥力愈强。故反撥力卽以其所引之長而定)今以一端繫於物體。以手引延之不絕。至一定之長。(例如其長爲 l)手於他端牽絲。則物體常以一定之働力。以一定之加速度 a 進行。(以物體受收縮力外。更加手之牽引力。故生加速度)次以橡皮帶引延至 l' 之長。更牽物體。物體以 a' 加速度進行。此際 a 若比 a' 大 n 倍時則知始之力。爲後之力 n 倍。又由此法亦得比較甲乙二物體之質量。卽以前之橡皮帶繫於甲物體。使橡皮之長。引延至 l 後。牽物體。生一定之加速度。次以橡皮繫於乙體。引延至 l' 長牽之。若與甲體生同等之加速度。是働於甲體之力。爲働於乙體之力之 n 倍。卽甲之質量。合乙之質量 n 倍也。

上文不過比較二物體之質量或力之方法。但欲實測物體之質量。必以一單位爲標準。於物理學通例以一克之體量爲質量之單位。卽於攝氏溫度四度之蒸溜水。每一糎之體量爲一克。

於此所當注意者。質量之語。係對體量而言。切勿與前總論18條所述之重量相混。蓋測質量毫無關係於地球之引力。(至後章自明)物體之重由地球引力而生也。若物體在地球之外。不受引力而無重。如物體之質量。無論置於何處。其所有之

體量決無差異。故物體之質量重量。兩不相同也。(重量之說當更詳於下章)

36. 力之單位 以種種之力。作用於種種質量之物體。當生種種之加速度。故由前(36)條及(37)條(1)若物體之質量相等。則力之大正比例於加速度。(2)若加速度相等。則力之大。正比例於質量。

故一般言之。質量及加速度均不相等時。得合上(1)(2)二定義述之如次。

『凡物體因力之作用生加速度時。所作用之力。即視乎質量之多少。及加速度之大小。爲正比例』

以式表之如次。

$$f \propto ma \quad (\text{即云}f\text{比例於}ma\text{之意})$$

比例之理。已於總論(22)條述之。茲更就實際詳爲說明。上云力正比例於質量與加速度者。即云力正比例於質量與加速度之相乘積。但不曰等。必曰正比例者。不過謂力加大時。質量及加速度亦加大。不能斷定力即等於質量與加速度之相乘積。蓋以其單位未定故也。惟力之大小。與質量加速度大小之比較定後。始得云若干之力。等於若干之質量。與若干之加速度之相乘積。然則若以比例式變爲恆等式。不可不乘一定之數。(係對上文所謂若干者而言)即常數。由是

$$f = kma \left(\text{蓋反而言之}\ \frac{f}{ma} = k\ \text{故也}\right)$$

以常例言之。譬如有人購米。其所有之錢。固與購米之量爲正比例。不得云錢數即等於米量也。惟米每石之價定後。

由是得知其所有錢之多少。卽等於每石之價。乘米多少之量此時每石之價常數也。以式表之。則

$$錢數 \propto 米量$$

變式爲 $\dfrac{錢數}{米量(石數)} = k$ $\therefore$ 錢數 $= k \times$ 米量(石數)

今若米價每石七元。則錢數 $= 7 \times$ 米量(石數)又若米每石之價爲一元。則錢數 $= 1 \times$ 米量(石數)於力亦然。欲計算力之大小。不可不求其常數固不可不定其單位。

『單位質量之物體因力作用所生之單位加速度。爲力之單位是名力之絕對單位。若以 C.G.S 單位表之。凡力作用於質量一克之物體生 1 秒秒糎之加速度者。爲一功。Dyne』

由是得類推如次。

1. 所作用於 1 克之物體生 1 秒秒糎之加速度者爲 1 功。
2. 所作用於 1 克……………a……………加速度者爲 a 功。

……………m……………1……………加速度者爲 m 功。

……………m……………a……………加速度者爲 ma 功。

故一般力作用於質量 m 克之物體。所生 a 秒秒糎之加速度者其力爲 f 功。由前式 $f = kma$ 對單位未定者而言。今也單位旣定。$f = 1$。$m = 1$。$a = 1$。則 k 亦等於一。k 旣等於一。則

$$f = kma = 1 \times ma = ma。$$

乘一與不乘等。故於單位旣定之後。

$$f = ma$$

此關係約言之。卽力者等於質量與加速度之相乘積。其意卽謂表力之數。以表質量之數。乘表加速度之數也。

(註) 質量及絕對單位等。固常人向無聞此名目。但於物理學因探求力之原理。確定力之意義。造此名詞者。如常人所述力之單位。或以斤兩。如云其力有三斤五斤。或以腕力。如云一人二人之力。此等所用之單位。皆無物可指。惟以習慣上約略言之。卽如五斤三斤等語。若執而問之曰。斤何自來。則漠然不知其所以然矣。至於物理學所用之單位。在在有憑有據。如力爲質量與加速度之相乘積。而質量亦爲確定之數。如以攝氏4度之蒸溜水爲一克者。故物理學稱力之單位。與各種單位不同。純由推理上。以基本單位所表之量。名之曰力之絕對單位。

於前章所述。初速度 v 秒糎之物體。受 f 功之働力。t 秒得 v' 秒糎之速。加速度者。卽 $\frac{v'-v}{t}$ 秒秒糎。故將前式加速度 a。代以 $\frac{v'-v}{t}$，則

$$f = m\frac{v'-v}{t}$$

$\frac{v'-v}{t}$ 者。一秒間速度之變化。故又可知力者。等於質量與一秒間速度變化之相乘積。更以上式變形。則

$$f = \frac{mv'-mv}{t}$$

『質量與速度之相乘積名爲「運動量」Momentum』

詳言之

mv 者 初之運動量

mv' 者 t 秒後之運動量

$\frac{mv'-mv}{t}$者 平均一秒間運動量之變化

故以力働於物體。致生運動量之變化者。則力之大。即謂爲等於一秒間運動量之變化可也。

注意 運動量無特別之單位.書單位時.可即以其質量之單位.與速之單位表之.例如m質量爲克.v速度爲秒糎.mv之運動量即mv克秒糎也.

力之實例 質量大之物體.疾走時欲過之使止要大力者.以其運動量大.故止之之力亦大.又如自一尺高落下之物體.即撞頭上而不受傷.若此物體由牆上落下.却能傷人者.以在高處之物體落下之加速度.比由低處落下之加速度大.故力大.又如疾走之火車.若衝突則大破壞者.亦運動量大之原因

如上記表力之式。書法有三。

1. $f=ma$

2. $f=m\frac{v'-v}{t}$

3. $f=\frac{mv'-mv}{t}$

解問題時。若問題中所述。力與加速度有關係者。用(1)。力與速度有關係者。用(2)。力與運動量有關係者用(3)。於(2)。及(3)。$v=0$ $t=1$者。$f=mv'$ 但v'者。力働於靜止體。一秒後所生之速度。故測力之大又得如次述之。

力働於靜止之物體者。

(1) 其大等於物體之質量。與物體一秒後所得之速度之相乘積。(參照本章34條之例)

(2) 其大等於物體一秒後所得之運動量。

例 1 以50功之力。働於質量10克之物體。所生加速度如何。

(解) 由(1)式 $f = ma$

$50 = 10a$

$\therefore \quad a = 5$

故所求之加速度5秒秒糎也。

例 2 質量25克之物體。以力働之。運動3秒間。其速由20秒糎以至50秒糎。求力之大。

(解) 先求運動加速度之大。

由公式 $a = \dfrac{v' - v}{t}$

$\dfrac{50 - 20}{3} = 10$ 秒秒糎

又因 $f = ma$

故 $f = 25 \times 10 = 250$

即此力為250功

例 3 以1000功之力。働於靜止之物體。10秒後。得1秒米之速度。求物體之質量。

(解) 於公式(2) $f = \dfrac{m(v' - v)}{t}$

初時物體為靜止。故 $v = 0$, $v' = 1$ 秒米。即100秒糎。$t = 10$ 秒。

$f = 1000$ 功

故 $1000 = \dfrac{m \times 100}{10}$

$\therefore \quad m = 100$

即此物之質量100克也。

例 4 有物體質量40克。以100秒糎之速進行。此時若以80功之力,働於運動之方向。5秒後生幾何之速。

(解) 由公式(3)
$$f=\frac{mv'-mv}{t}$$
$$\therefore \quad 80=\frac{40\times v'-40\times 100}{5}$$
即
$$80\times 5=40v'-4000$$
$$\therefore \quad v'=\frac{4000+400}{40}=110$$

即5秒後有110秒糎之速也。

37. 運動之三則 Three laws motion 距今二百年前。英國有牛頓者。Newton 由種種實驗之結果。倡言一切物體之運動。皆有一定之法則。因立三則。傳之後世。是爲牛頓之運動三則。自牛頓時代以至今日。物換星移。幾經數百載。學問之進步可謂盛矣。而此三則。未嘗少加修正。今世學者依然奉爲典型。且此三則。不特爲力學之基礎。亦物理學全體基本的之法則也。

第一則 一切物體。不受外力常靜止或以等速進行於同方向。

第二則 力働於物體。所生運動量之變化。以其働力之大。與時間之相乘積。爲正比例。而運動量之變化。由於力所作用之方向。

第三則 有他働則必有反働。即云二物體間之相互作用。其大相等。其方向相反。

本書於前所述。大概不出此三則。此節不過就此三則表

明之耳。上之三則內第一則及第三則。於總論(12)條慣性。及本章(34)條力之定義節略已說明。第二則測力之法則。於(36)條力之單位節已述之。

更就第一則而玩味之。物體非受外力。始終以等速運動。或靜止者。以始終靜止。則其速始終爲零。然則靜止者亦得看作物體之特別等速運動也。但逆推第一則之理。未必皆正確。卽物體不受外力時則爲等速運動。爲等速運動時。未必不受外力也。例如在桌上之物體雖靜止。而地球之引力。與桌之壓上力常作用。不過此際働於物體之力。兩相均而已(相均之力詳之後章)力之相均者。力有作用。與無作用等。故專就等速運動之物體。不能驗其物體果受如何之働力。是以欲測働力之大。不可不就物體速度之變化驗之。此第二則所由來也。

第二則之前半。測力大之法。後半乃定其方向之法也。由(35)條。

$$f = ma$$

或
$$f = \frac{mv' - mv}{t}$$

$\therefore$
$$ft = mv' - mv$$

卽運動量之變化$(mv' - mv)$。等於力與時間之相乘積也。但於第二則不曰等。而曰正比例者。亦以力之單位未定故。今由(36)條所定單位常數等於1。故此節謂運動之變化。等於力與時間之相乘積也可。

第二則之後半與(34)條所述「以加速度之方向爲力之方向」者同何則若以 m 爲質量以 v 爲初時之速度以 v' 爲 t 秒後之速度則

初時之運動量 $= mv$

t 秒後之運動量 $= mv'$

t 秒間運動量之變化 $= mv' - mv = mat$

故若以速度之方向爲運動量之方向以加速度之方向爲運動量變化之方向則運動量變化之方向者力之方向也故靜止之物體若働以力則此物體運動於力之方向若已運動之物體更加力於運動之方向物體因增其速度幷增其運動量此時加速度之方向與運動之方向一致者若力之作用反對於運動之方向物體因減其速即減其運動量又若力作用不絕其速愈減以至於零勢趨反對之方向此時加速度與運動之方向爲反對如物體鉛直拋上之運動其一例也。

第三則述力本來之意義即如(34)條所述二物體之相互作用者曰力然則甲體動力於乙體時乙體亦動力於甲體甲働於乙之力曰 $\boxed{\text{正働}}$ 乙働於甲之力曰 $\boxed{\text{反働}}$ 由實驗二物體相互作用時一方運動量增則他方運動量減而增加之值與減少之值常相等故就其全體言之運動量無變化但其運動量之增減基於兩物體間之作用其增減之量相等者畢竟正働與反働相等也至其正働與反働之方

向爲正反對者。固不待言而知之矣。例如發射彈丸。礮車稍退於後。二物體相衝突。互反躍。一舟引他舟。兩舟互相接近。此等皆正働與反働相關聯之例也。

注意　觀上例彈丸前進。以著大之速度。礮車退後。僅覺微動。似背正働與反働相等之說。其實非也。何則。彈丸之質量。與礮車之質量有大小之差。而運動量乃質量與速度之相乘積。故同一力。對大質量之速度。自比對小質量之速度小也。

運動三則之實例　(1)　人以己手執帶。欲自舉其身。縱如何用力。而身終不能舉。以不受外力。有作用如無作用。由第一則而可知也。又置風車於船上。向帆吹之。而船終不前進者。亦同一理。

(2)　鐵道之客車。以數人之力。能推之使動。若以大鐵鎚擊之。即用極大之力。仍覺無效。蓋以人推送之力。比鎚打之力。費長時間。故同一力作用。推力比擊力效果大。甲擊力者。力縱如何大。若瞬時間。亦無甚效果也。又如彈丸衝擊玻璃窗。而玻璃不破。僅穿小孔而過。亦此故也。由上第二則。

$$速度之變化=\frac{力\times 時間}{質量}$$

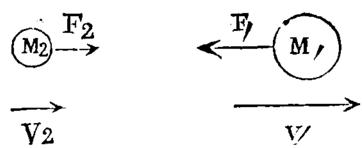
上式分子之時間愈大。則速度之變化亦大。又人欲躍過澗谷。必自遠處先奔馳。至澗邊加力踴躍。卽能超過。蓋力之方向。運動於速度變化之方向也。

(3)　第三則正働反働之例殊多。茲略舉數種。(a)敲竹煙管。而煙灰落者。他物體働力於煙管。煙管亦反働於他物體。而煙灰因與煙管同運動於對方。遂至墜落。又如刀柄脫落。鑲入時。欲固定之。必倒叩於他物體者。亦正働反働之作用也　(b)　鳥之飛揚也。以兩翼向下方扇擊。遂藉空氣之反

働.而昇於空中.(c) 以卵擊石.而卵碎者.卵働於石.而石亦働於卵也.

數學的之例 (1) 有二物體.質量爲 $m_1 m_2$ 以 $v_1 v_2$ 之速度.進行於同方向.今兩物體於進行間.互相牽引.若以 t 秒間互引後所得之速度爲 $u_1 u_2$ 則此等量之間.有如何之關係.

乙　第 28 圖　甲



由圖觀之.兩物體之作用時.甲速度漸減.(甲體受乙力働於反對之方向.故隨後漸減.)乙速度漸增.(乙體本有 v_2 之速度.更受甲體之引力.速度自不得不增.)甲運動量之減少.$m_1 v_1 - m_1 u_1$ 乙運動量之增加 $m_2 u_2 - m_2 v_2$

即
$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

茲以乙働於甲之力爲 F_1.以甲働於乙之力爲 F_2.則

$$F_1 = m_1 \frac{u_1 - v_1}{t} \qquad F_2 = m_2 \frac{u_2 - v_2}{t} \qquad \therefore \quad -F_1 = F_2$$

即正働與反働相等.其方向反對也.若兩體始靜止.則 $v_1 = o$. $v_2 = o$. 故由(1)式

$$-m_1 u_1 = m_2 u_2$$

即兩體所得之速度.逆比例於其質量.其方向相反.又得將(1)式變書之如次.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

即兩體所有運動量之和.作用之前後亦相等.若

$$v_1 = o \quad v_2 = o \quad 則 \qquad m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0$$

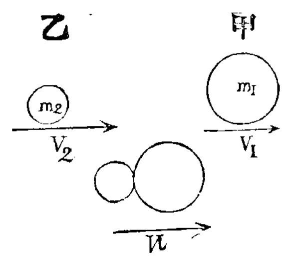
即其始兩物體若爲靜止.則運動之和常零也.

(2) 二物體之衝突時.其質量及速度間.有次之關係.但兩體衝突之

後.可看作合併為一體運動者.

茲以兩體之質量及初速度為 $m_1 . m_2 . v_1 . v_2 .$

第 29 圖



但($v_2 > v_1$)合併後之速度為 u.甲體增速度.乙體減速度.甲運動量之增加($m_1 u = m_1 v_1$).與乙體運動量之減少($m_2 v_2 = m_2 u$)相等.故

$$m_1 u - m_1 v_1 = m_2 v_2 - m_2 u$$

或 $$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u + m_2 u$$

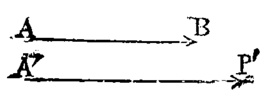
即兩體始之運動量之和.與衝突後運動量之和相等.

上式係看作甲乙運動於同方向者.若兩體運動於反對之方向.改定速度之符號.亦得適合此式.又甲體始若為靜止.則 $v_1 = o$

如上例所示.凡二物體互相作用時.其始所有運動量之和.與作用後運動量之和常相等.且此事不止單就二物體間之作用而言.即多物體相互作用.亦多恰能合此定則.又物體若只一個.不受外界作用.則以等速運動.其運動量自無變化.故凡由一物體.或多物體.所成物體羣之運動量.不論其間有作用無作用.常一定不變也.是為『運動量不變之法則.』

38. 運動量及力　運動量者.質量與速度之相乘積.力者質量與加速度之相乘積.故若以 $\overrightarrow{A'B'} = m \times \overrightarrow{AB}$.則 $\overrightarrow{AB}$ 可當作速度.或加速度.

第 30 圖

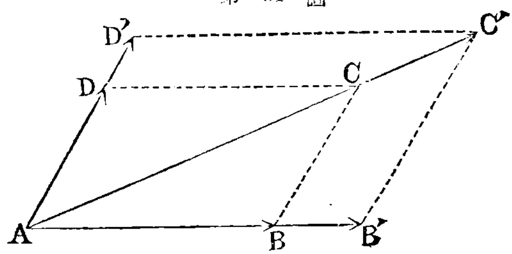


茲以 $\overrightarrow{AB}$ 為速度.則 $\overrightarrow{A'B'}$ 表以 m 克之物體所有 $\overrightarrow{AB}$ 速度之運動量.又或以 $\overrightarrow{AB}$

爲加速度則$\overrightarrow{A'B'}$表働於m克之物體所生AB加速度之力，由此可知運動量及力亦有變化者因得依前求速度方向之法而求加速度之合成分解。

今就力之組合而說明之由運動第二則之後半運動量之變化固即加速度起諸働力之方向。故m克之物體以$\overrightarrow{AB'}$之力働之，生加速度$\overrightarrow{AB}$。以$\overrightarrow{AD'}$働之生加速度$\overrightarrow{AD}$。此二力若同時幷働則同時生加速度AB, AD。故其結果生$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$之合速度$\overrightarrow{AC}$。今若以$\overrightarrow{AB'} = m \times \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD'} = m \times \overrightarrow{AD}$則其平行四邊形A B′ C′ D′之對角線$\overrightarrow{AC'}$等於$m \times \overrightarrow{AC}$,也明矣故$\overrightarrow{AC}$之力即$\overrightarrow{AB'}\ \overrightarrow{AD'}$二力之合力也。

第 31 圖



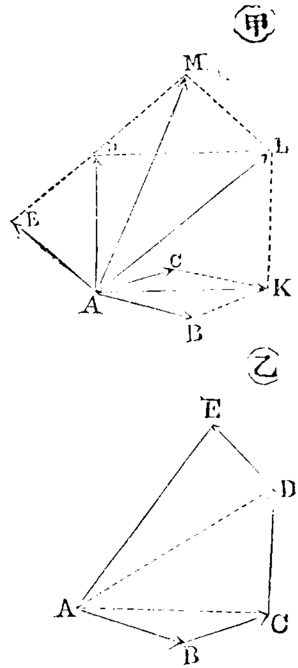
39. **力之合成分解**　由經驗一力作用於一物體之効果不論同時有他力之作用與否無以異也。(據第二則)故多力同時作用於一物體時其効果乃各力之効果相集而成者也。而以與此呈同一効果之一力表此衆力集成之効果者曰$\boxed{\text{合力}}$。而力之方向原與運動之方向同。而其大之比亦與速度變化之比同故求合力之方向及合力之大與於前所述求合速度加速度者無異。

$\boxed{\text{力之合法}}$　就作用於一點二力之方向及大自其點引

二直線表其方向及長以此二直線爲二邊作平行四邊形則其對角線者乃以表合力之方向及大也是爲力之『中斜法』又曰『平行四邊形之法』

凡求多力之總合力可依其各力之次序先以第一力及第二力求其合力次得其合力再與第三力組織求合力後更求此合力與第四力之合力。以下逐次求之最後之合力即總合力。

第 32 圖



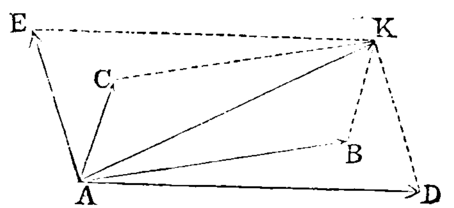
如右圖働於A點有四力。$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$等欲求其總合力先以$\overrightarrow{AB}$,與$\overrightarrow{AC}$,由平行四邊形法求合力$\overrightarrow{AK}$,次求$\overrightarrow{AK}$與$\overrightarrow{AD}$之合力得$\overrightarrow{AL}$再以$\overrightarrow{AL}$與$\overrightarrow{AE}$求合力$\overrightarrow{AM}$即總合力也。

又用三角形亦得求合力蓋三角形即平行四邊形之半。其斜邊即平行四邊形之對角線也作法如次。先以第一力之大與方向畫$\overrightarrow{AB}$次以第二力之大與方向畫$\overrightarrow{BC}$。結$\overrightarrow{AC}$。即$\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BC}$之合力次以第三力之大與方向畫$\overrightarrow{CD}$後結$\overrightarrow{AD}$。爲$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$之合力。後更以第四力之大與方向畫$\overrightarrow{DE}$。結$\overrightarrow{AE}$。爲$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DE}$之合力。即總合力也。

力之分解法　前例多力働於一物體。其所生之作用。

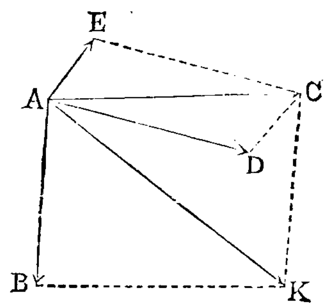
與一力之作用相等。此一力爲多力之合力。反而言之，則多力爲此一力之分力。故一力得任意分出種種之分力。

第 33 圖



於第33圖力AK。得看爲$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$之合力。又得看爲$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$之合力。故AK得隨意分解爲$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$或$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$。

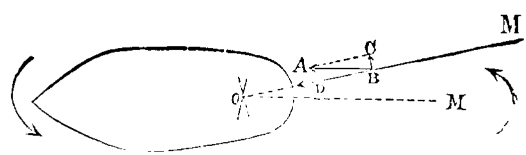
第 34 圖



由一力分爲多力。不止僅得以偶數分之。亦可分爲奇數。如第三十四圖AK之力。始分爲$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$。次將AC更分爲$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD}$。是一力得分爲$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$三力。若斯逐次更分爲多數之力。亦不難也。

一力雖得分解爲多數之力。其方向亦有一定。如一力先分爲二分力。其一分力大概與物體成直角。一分力大概與物體相平行。例如35圖舢板本進行於AB之方向。其舵在OM。茲欲轉船首於左方。其舵傾於OM'。此時河水與舵成直角。BC即垂直於舵

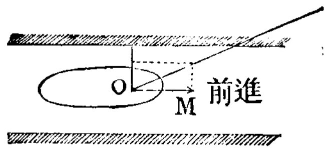
第 35 圖



之一分力也。又一分力乃進行於BD方向之力。卽平行於舵之方向。故曰力分解之方向。一對物體爲直角。一對物體爲平行。

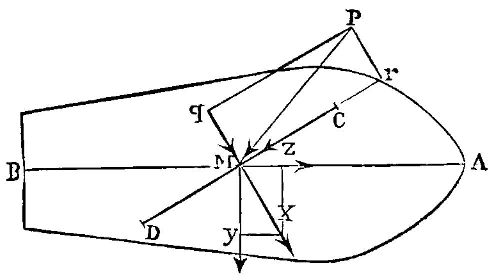
由力之分解生運動之實例　(1)『牽船進行之理』　如36圖。船戶在岸上牽船而行。若僅借牽引力。則船必衝突於河岸。而不能進行。故欲使無衝突。舟中人必以竿加力於與船爲直角之方向。餘一分力遂運動於與船平行之方向。(卽OM)而船得向M而前進。

第 36 圖



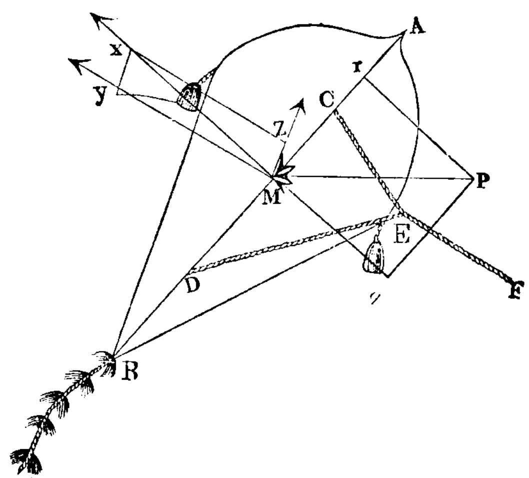
(2)『帆船借側面風力而進行之理』　於37圖CD示帆之方向。PM爲風力。由斜角吹於帆布。由上例凡力得分解爲直角之分力。與平行之分力。故右圖PM得分爲qM。與rM。而rM與帆布平行。此時無作用。則是風働於PM之力。無異乎働於qM之力今更將qM引長至X。由MX更分解MZ MY二分力。前者働於艫舳之方向。使船前進。後者分力之方向。與船身成直角。而壓於側方。但於側方受水之抵抗。比前方遙大。故船隨MZ之壓力而運動也。

第 37 圖



(3)『紙鳶上昇之理』　第38圖所示之紙鳶。AB上以ED及EC二線。繫於一線EF。紙鳶運動時。風以PM之速度。働於M點。依分解法分爲

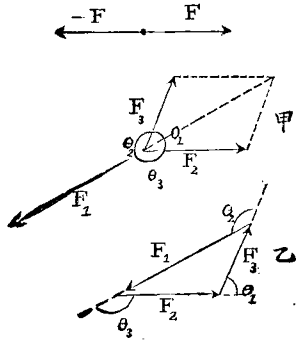
第 38 圖



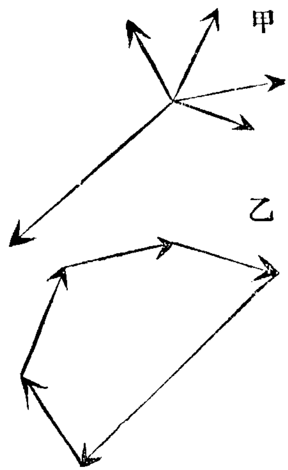
qM,rM,rM 平行於其面。無作用。所作用於紙鳶者。僅 qM。茲延長 qM 於紙鳶之後面。至 MX。(所以延長於後面者。不過以在前面畫圖。生複雜故也。非有他意。)次將 MX 更分為二分力。一分力乃反對地球引力之方向。(有時以 MZ 之分力。與地球引力不相均。於紙鳶之尾。另附紙片。以增其重。(此亦反働之理)一分力乃反對引繩之方向。故風力無變化時。紙鳶停止於此處。不再上昇。亦不下墜。又若引繩而走。以非常之速度。則反對於 EF 之方向 My 之力。亦非常增加。漸運動而上昇。

40. 力之相均 Equilibrium of forces　數力(二力或二力以上)同時働於一質點。固與以此等諸力之合力作用之者得同結果。若其多力為零。則該質點不起運動。與不受外力作用者同。此時乃各力之互相均也。凡力相均時。物體或保靜止之位置。或以等速度運動。例如在桌上之書。地球之引力。與桌上之反壓力相均。其合力為零。因靜止。又水上火輪船之蒸汽力。與水及空氣抵抗力。其合力為零時。船以等速運動。

第 39 圖



第 40 圖



二力互相均時。其二力之大要相等。方向要反對。

三力互相均時。三力之內任取其一力 F_1。要與餘二力 F_2 F_3 之合力相均。又三力順次得畫作三角形。總而言之。欲驗力能相均與否。可依各力之方向順次畫之。三力能成三角形。多力能成多角形。其各力必相均。如40圖五力乃相均者。故依力之合法畫之得成多角形。

三力相均之要件依三角法以次式表之。

$$\frac{F}{\sin\theta_1} = \frac{F_2}{\sin\theta_2} = \frac{F_3}{\sin\theta_3}$$

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=360^\circ$$

第二章之問題

1. 100 功之力。作用於 25 克之物體。5 秒間生如何之速度。

2. 有一力作用於質量 300 克之物體不絕。此物體由靜止運動至 3 秒間。經過 10 米。問此力之大有幾功。

3. 以力作用於質量 50 克之物體。1 分間。生 45 秒糎之速度。問力大如何。

4. 有力作用於質量 50 克之物體。30 秒間。其速度由 15 秒糎變爲 60 秒糎。求其力之大。

5. 質量 2 噸之大礮。裝 14 磅之彈丸。發射之。其彈丸得 300 秒尺之速。問因反働礮丸後退之初速度若干。但 1 噸合 2240 磅。

6. 質量百五十克之物體。速度每秒四十二糎。於其運動正反對之方向。作用以力。欲使五秒間減卻十二秒糎之速度。不可不用幾功之力。

7. 以繩曳 3 噸之車輛。每秒得 10 尺之速度。5 秒後中止運動。增重 2 倍。更以比前三倍之力曳之。10 秒後。有若干之速度。

8. 質量 200 克之彈丸以 500 秒糎之速。打於土壁。彈丸入於土壁中 80 糎而止。問土壁之抵抗力若干。

9. 兩無彈性體有 M_1 M_2 之質量。以 u_1 u_2 之速。進行於同方向。求其兩體衝突爲一體後之共同速度 V。

10. 水上大小二船。大船質量爲小船質量之1000倍。兩者相引時。求其速度之比較。

11. 有千六百斤重之大礮。立於平滑之水平面上。以五斤之礮丸每秒以百尺之速度。發射於水平之方向。當發射時。因其反働之力。大礮退卻之速度若干。

12. 三條之線結小球。相隔互爲百二十度。同時引三線其結果如何。但加於三線之力。其比猶四與七與十之比。

13. 於東南以强五十之力引之。此兩力若爲正東及正南二力所合成。則兩力之大若干。但五十之力與正東及正南所爲之角度相等。

14. 於平行四邊形ABCD。對角線AC。與AB成直角。今於A點以AB, CA, 及DA。表三力之大及方向。此三力互作用時。其合力之大如何。

15. A, B, C, D, 四力。働於一點。B力爲A之二倍。互成直角。C等於A, B, 之和。與其合力互成直角。又D等於A, B, C之和。亦與其合力成直角。此四力之合力。等於$5A\sqrt{2}$, 試證明之。

16. 有船浮於河流上。以二條之繩繫於對岸。一與河流之方向成30度之角。一成45度之角。問船所及於各繩之張力。其比如何。

17. 正六角形之中心。與各頂點相連結。沿於此線上以一二三四五六等六力相働。問合力之方向及其量如何。

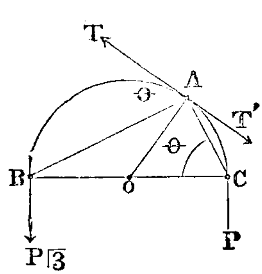
18. 於平行四邊形ABCD面上取任意之一點O設有OA, OB, OC, OD四力作用於此點其各力之强若卽以其長表之則合力之方向當通過對角線之交叉點H試證明之且求其量

19. 五個相等之力働於一點其第一與第二第二與第三第三與第四第四與第五之力各爲60°之角求其合力

20. 兩力相等互爲θ角若兩力各爲P則其合力等於$2P\cos\frac{1}{2}\theta$試證明之

21. 以能滑之金屬線作半圓形CAB置於水平半圓形上通小輪A於此繫二條之繩引於左右其端通直徑BC兩端之小穴而垂下吊$1:\sqrt{3}$之比之兩重量則當其一方之繩AC對直徑BC傾斜60度時小輪始靜止保平均之狀態試證明其理

第41圖



22. 以10兩重之物體繫於線之一端更以他線結於此線上引之於水平之方向使此原線之位置傾斜90°問其水平力及此時線之張力(卽線之牽引力)各如何

23. 直徑1尺2寸之球以6寸之線繫之懸於直立之壁上問球及於線之張力若干

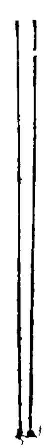
第三章　重力 Gravity

41. 間隔作用力　以手押棹。手接於棹。是手力及於棹。又以繩繫舟曳之。人引繩。次繩傳其力而引舟。是手接繩而繩接舟。始及其力也。此力爲物體相接時。始有作用。稱曰『觸接作用力』如手力。風力。水力。空氣之壓力。蒸汽力是也。

又如地球引其表面上之諸物體落下之力。(重力)磁石吸引鐵片之力。又帶電之物體生反撥力。或吸引力。此等力皆作用於相隔絕之物體間者。目視其間。皆如無作用之媒介。故以此力懸隔而有作用，曰『間隔作用力』

42. 萬有引力 Universal gravitation　因間隔而有作用之力也。遂想至宇宙間所有物體之間。不問其距離之遠近。皆互有吸引之力。名曰萬有引力。諸天體間之引力。由天文學上觀察甚顯著。但於地球上之諸物體。比較的小。故引力亦微。難徵之實見。然由次之實驗。得確證之。以二條各數十尺之線。吊鉛丸。相併極近而下垂。其靜止時。測其上端下端之距離。見下端比上端接近。是彈丸相互引力之證也。

第 42 圖



至牛頓時代。由卓拔之考察。初確定萬有引力之法則曰。

『二物體間之引力。以兩體質量之相乘積爲正比例。以其

間距離之自乘積爲反比例。』

今以數學式表之。以二物體之質量爲 $m\,m'$。以其距離爲 r。以引力爲 f。

$$f \propto \frac{m\,m'}{r^2}$$

(註) 就上之法則言之。二質點間之引力。各質點之質量相乘積愈大。則引力愈強。質量之距離愈遠。則引力愈弱。如距離2倍時。則引力 $\frac{1}{2^2}$ 卽 $\frac{1}{4}$，距離3倍時。則引力 $\frac{1}{3^3}$ 卽 $\frac{1}{9}$，

又變爲恆等式時。則

$$f = k\frac{m \times m}{r^2}$$

k 爲一常數凡比例之常數。旣詳述之於前矣。玆更就引力常數而說明之。引力之常數。或曰「係數」亦由實驗所得。例如兩質點間之距離1。其質量爲1000克時。其力爲6.5功，於公式 $f = k\frac{m \times m'}{r^2}$，$f$ 代以6.5，m 及 m' 代以10000。r 代以1。則

$$6.5 = k\,\frac{10000 \times 10000}{1^2} = k \times 10^8$$

$$\therefore \quad k = 6.5 \div 10^8 = 6.5 \times 10^{-8}$$

k 旣爲不變之數。則不論質量之多少。距離之遠近。引力之係數。常爲 6.5×10^{-8}。如兩體之質量 $m = 80000$ $m' = 100000$ $r = 20$。引力之係數亦同。此引力 f

$$f = k\,\frac{80000 \times 100000}{(20)^2} = 6.5 \times 10^{-8}\ \frac{8 \times 10^9}{2^2 \times 10^2}$$

$$= 6.5 \times 10^{-8} \times 2 \times 10^7 = 13 \times 10^{-1} = 1.3$$

卽1.3功

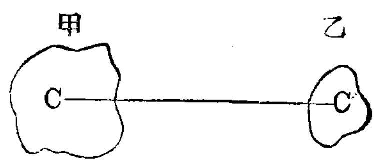
別法　以始之引力為f後之引力為f'則由算術之複比例式，

$$\frac{f}{f'}=\frac{10000\times10000}{80000\times100000}\times\frac{(20)^2}{1^2}$$

$$=\frac{10^8}{8\times10^9}\times4\times10^2=\frac{4\times10^{10}}{8\times10^9}=5$$

注意　上所謂二體間之距離r者。兩質量中心之距離也如43圖C及C'稱為兩質量之中心點物體質量之中心者。恰如物體之質量悉集合於其一點。故即以各質點之中心點為對他物體之關係（質量之中心點亦曰物體之重心詳處見第五章）例如以金屬物質所作之球體。其中心即為質量之中心於42圖甲體引乙體之力。謂甲體引乙體諸部分之質點也而乙體之諸部分悉歸聚於C'之一點故如覺C'之一點。被引於甲者。

第43圖



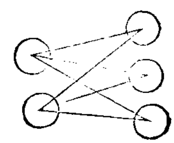
又如物體落於地上是地球與物體相互之引力也但地球之質量非常大。物體之質量比較的非常小。故若覺僅有地球引物體之力。

地球與物體間之關係。於萬有引力中。特名曰重力取其在地面之物體生重量之原因也（詳處見於下節）

43. 萬有引力法則之實證

上式引力正比例於質量者。可以質量看作衆多質點所集成。由是質量愈大

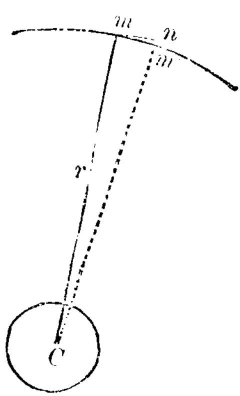
第 44 圖



則質點愈多。引力因愈强。如43圖。以m'之質量爲3。以m之質量爲2。其各質量互相牽引之力6也蓋即2與三之相乘積故曰力與各質量之相乘積爲正比例。其以距離之自乘爲反比例者。由地球及於月引力之强。與地面上重力之强相比較。得其確證。

凡地面上落下之加速度。通常爲980秒糎。次求地球引月之加速度。而月以地球爲中心二十七日七時四十三分。迴轉一周。今於月周迴之際。至某處m'時。地球引力。若忽然消滅。則月脫$m\,m'$之軌道。而進行於$m\,n$之方向。($m\,n$係與$C\,m$爲直角)一秒之後至n。但實際月受地球之引力。斷無脫其軌道之理。一秒之後至m'。是月一秒間被引於地球之距離爲$n\,m'$。而被引之加速度。由次式得求之。

第 45 圖



a爲被引於地球之加速度，

v爲月周迴之速度，

r爲軌道之半徑。($=\mathrm{C}\,m$)

$$a=\frac{v^2}{r}$$ (可參照圓運動之部)

而月一周軌道之長爲$2\pi r$。($\pi=3.1416\cdots$) 今以其一周之時間爲T。則

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2} \div r = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

而月軌道之半徑。($r = Cm$) 據天文學上所考察。爲地球之半徑 (R) 六十倍。故

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2(60\cdot R)}{T^2} = \frac{2\pi R\cdot 2\cdot 60\cdot \pi}{T^2}$$

$2\pi R$ 即等於地球周圍之長。而地球之周圍四千萬米突。

$$2\pi R = 4000,0000\ 米$$

又　　　$T = 27$ 日 7 時 43 分。$= 39343 \times 60$ 秒。

代入前式

$$a = \frac{4000,0000 \times 2 \times 60 \times 3.1416}{(3.9343 \times 60)^2}$$

$$= \frac{4000,0000 \times 3.1416}{(39343)^2 \times 30} = 0.002706\ 米$$

即地球引月之加速度爲 0.2706 糎。

而地球表面之加速度 $g = 980$ 糎

引力之強。若果逆比例於距離之自乘。則其所生之加速度，亦當爲逆比例。故但證明 980 與 0.2706 之比。能逆比例於地之半徑自乘 R^2 與月及地球間之距離自乘 $(60R)^2$ 之比可耳。

實際

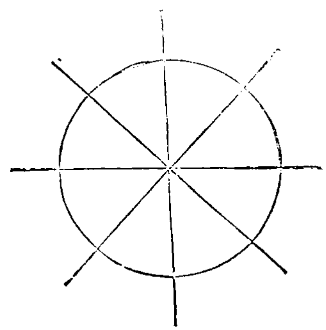
$$980 : 0.2706 :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{60^2 R^2}\ 即等於\ 1 : \frac{1}{60^2}$$

因之可知地球重力之強。正逆比例於距離之自乘也。

44. 重力之性質　重力者。物體對地球中心之引力。前已述之矣。茲更舉例以實之。如線之一端。繫以鉛錘。提

線之上端、而錘必垂直下墜者、其物體受地球中心引力之證也、蓋無論於何方向懸錘、錘皆鉛直下垂、延長其方向、恰悉達於地球之中心、故得斷定曰、物體向地球鉛直落下者。受地球中心引力而落下也。落下之加速度爲重力之加速度、通常以 g 表之。g 之值有種種、其變化之理由示之如次。

第 45 圖



(1)　凡物體於地面上同處者、其重雖因質量而有不同、而其落下之速、却不以質量而異、

何則在同處引質量 m, m', m'' 之物體、所要之重力爲 $K\frac{Mm}{r^2}$, $K\frac{Mm'}{r^2}$, $K\frac{Mm''}{r^2}$ 固正比例於質量、而此等所受之加速度 $K\frac{Mm}{r^2}\div m$。$K\frac{Mm'}{r^2}\div m'$。$K\frac{Mm''}{r^2}\div m''$ 等、皆 $K\frac{M}{r^2}$ 故知凡物體落下之速、於同地常相等、更詳言之、凡物體所受之重力、雖正比例於質量而增、惟因此力被動之速度、反比例於質量而減、故二者互相消。重力所生之加速度、仍無關於質量。即如加速度 980 糎者。不論如何質量之物體落下。第一秒終之速度常爲 980 糎、第二秒終爲 980×2。以下逐秒遞增常一定。然則欲證在同處物體、能否落下均等、但證其同處重力加速度、能否均等可耳。依萬有引力之法則、

$$F = K\frac{Mm}{r^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(甲)$$

又由運動第二則思之、

$$F = mg\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(乙)$$

甲乙兩式之左邊皆同。右邊自亦相等。

$$m\times\frac{KM}{r^2} = mg$$

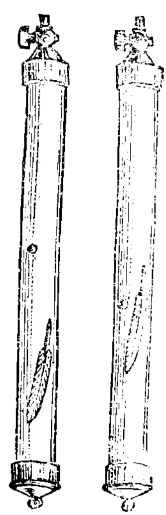
因之

$$g = \frac{KM}{r^2}$$

就上式觀之、K 爲常數。(即不變之數) M 爲地球之質量、r 爲地球之半徑。是亦一定不變者。故 $\frac{KM}{r^2}$ 乃不變之值。是以於同處之 g 亦不得不爲一定之值、即物體因地球引力落下之加速度、不論物體之質量如何常一定者也。又由上式 $g = \frac{KM}{r^2}$ 得知 $\boxed{地球之質量}$ 即 $g = 980$ $K = 6.5\times 10^{-8}$ 及地球半徑 $r = 6.4\times 10^8$ 糎、

$$M = \frac{gr^2}{K} = \frac{980\times(6.4\times 10^8)^2}{6.5\times 10^{-8}}$$
$$= 6.17\times 10^{27} 克約$$

第 47 圖



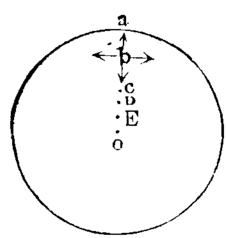
但通常於空氣中落紙片、比石塊緩者、因空氣之抵抗故也、若除却空氣、則落下之加速度皆相等、證明之法、可於長之玻璃筒內置銅塊及羽毛、用抽氣筒抽去玻璃筒內空氣、而緊閉之。將玻璃筒上下顚倒、銅塊與羽毛同時下落、毫無遲速之差、今開玻璃栓稍放入空氣、再密閉後、更上下倒管、則不能如前

同時下落。次放入空氣愈多。而落下遲速之差愈著。終至無異於在空氣中落下者。

(II) 重力於地表面最强。遠離地面或漸入地層中。重力漸弱。於地球中心引力爲零。即於高山比平地弱。於深坑比地面弱。至地球中心。各方向牽引力均等。而至於零。

在高處之物體.比在地面之物體.因距離地球中心遠故弱.此理自易了解.但入地面以下.重力減弱之理.似覺背萬有引力之法則.其實非也.由48圖.得說明之.如於地球表面之物體.固被引於地球之中心.其物若入地下.譬如至b處.上下左右受引.(蓋地球可看作無數質點集合而成者.)b以下之質點.有引b之力.b以上之質點.亦引b不絕.不過以b以上之質量小.b以下之質量大.故在b處之物體.所受引於地球中心之力.僅以其差之力耳.自比在地面之物體受全質量之引力者弱也.又若更深入至C,D等處.則其差愈小.其引力亦愈小.至中心O處.兩方引力均等而無差.故其引力爲零.

第48圖



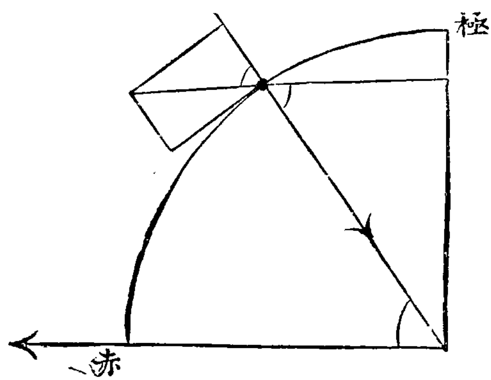
(III) 重力於地表面各有不同。於赤道最小。近兩極漸大。於兩極最大。其故有二。

(1) 地球爲橢圓形.近於兩極漸扁平.故自地面至地心之距離.愈近兩極.漸減少.於赤道各點比兩極距離地心約大二十一粁.故緯度愈高.重力愈强.g之值從愈大.

(2) 由地球自轉所生遠心力之作用. 凡物體以圓周運動.中心之力

引圓周之物體.物體對中心亦生反動力.欲遠其中心.是力曰遠心力.(詳處見諸圓運動部)遠心力與物體之速度共增加.卽物體之運動愈速.遠心力愈大.今就在地球上之物體思之.地球一晝夜之間.一迴轉其軸之周圍.故在其表面之物體.皆一晝夜迴轉圓周一次.在赤道近傍所畫之圓周.比極之近傍所畫之圓周大.而所畫大小圓周所要之時間.皆同一晝夜者.故近於赤道之速度.比近於兩極之速度大.因之遠心力於赤道近傍强.於兩極弱.此遠心力乃使物體遠地球中心之力.反對重力者也.此反對力若大.重力自小.反對力若小.重力自大.故重力之加速度g.於赤道地方小.於兩極大.又卽就方向言之.遠心力向外方作用.其方向在垂行圈之面.與地軸成直角.重力乃作用於內方.卽向於地心者.故兩者之方向.於赤道爲正反對.至漸近兩極.兩者方向成角度α.如49圖.卽假定地球爲正圓形.在赤道之遠心力與重力正反對之差.亦比在兩極近傍兩力斜反對之差小.反而言之.卽在兩極近傍.兩力斜反對之差.比在赤道大.況地球乃楕圓形.兩極之半徑小.其重力自大.則與遠心力相減.亦比在赤道之重力大也明矣.

第 49 圖



測g之公式如次

$$g=990.6056-2.5028\cos 2\lambda-0.000003h$$

上式各值.仍以C.G.S單位表之.但980.6056者.乃於緯度45°

之 g 之值。λ 爲地之緯度。h 爲海面上之高。故於同緯度每高 1 米。減少 0.0003 米。即 0.000003 糎也。

g 值之表		(C.G.S. 單位)	
赤道	978.1	緯度 45°	980.6
上海徐家匯	979.441 979	英國苦列基	981.3
		極	983.3
漢口	979.381	法國巴黎	980.89
香港	978.783	日本東京	979.8

因空氣抵抗與地球之回轉落下加速度實測之值比理論上之值稍小。上表乃實測之值也。

注意　g 之文字含二意義。

(1)　因重力所生加速度之大。

(2)　重力之強。

設如所作用於物體重力之大等於以質量與由重力所生之加速度之相乘積者。其 g 常稱爲 g 秒秒糎。

但若作用於 1 克之質量則其重力之強爲 g 功。故曰對重力之強。表 g 之數以功。對由重力所生加速度之大者。表 g 之數以秒秒糎。

45. 重量與質量之區別　物體之質量者。謂所有物質之分量。不論置於何處。均無差異。若重量則不然。由物體與地球之引力而起者。而引力乃以兩者之間距離之

自乘爲逆比例。若距離異。其引力自異。重量從之亦異。如在地面上與在高山之頂。引力之强常異。總而言之。質量者物體自身之量。重量者乃物質被引於地球之力。若無地球。則無重量。然則重量之差異。得以天秤稱其重以求之乎。固不能也。天秤僅示物體之質量。不能示其重量。蓋天秤稱物體之質量。與稱錘之質量。因相等。故平準。若將此已平準之質量。即置於高山之頂。亦無不平準之理。至於重力之重量。有幾功。斷難求出。如欲求之。不可不知秤物之處重力之强也。否則止能示物之重量。等於稱錘之重量。

46　重力單位　通常物覺有重者。不外因物體受重力之作用。觸吾人之感覺也。如質量大之物體。作用之之重力大。故手支之。覺其重。質量小之物體。作用之之重力小。故覺其輕。但在同處者。g之値皆一定。故物體之質量。與作用之之重量互爲正比例。由是以作用於單位質量之重力。爲力之單位。得測一般之力。例如若以作用於一克物體之重力爲單位。則其物體爲一克重之力。若以作用於一斤物體之力爲單位。則其物體爲一斤重之力。由此推之。凡m克之力。即等於所作用於m克物體之重力。此等力之單位名爲重力單位。

力之重力單位。與絕對單位之比較如次。

$$m\text{克之重} = mg\text{功}$$

$g = 980\ \frac{\text{糎}}{\text{秒}^2}$ 時。一克之重 $= 980$ 功

$$\therefore \quad 1\text{功} = \frac{1}{980}\text{克之重} \doteqdot 1\text{毿之重}$$

故1功略等於1毿之重。但 g 之值因地方而異。故計力用重力單位。不免不能十分精密。要精密測力。不可不用絕對單位。但重力單位。便於日用。故日常所用單位。以用重力單位爲常。

第三章之問題

1. 質量二與三之物體距離四十則引力六十質量二與五之物體距離二十時其引力如何。

2. 二物體質量1000瓩相距1米突其引力如何，

3. 二物體於20糎之距離以F功之力相引時於1米之距離當生幾功之引力。

4. 距地表面等於地球半徑之長問物體有如何之重。

5. 於重力加速度每秒980秒糎之處100兩之重合幾功。

6. 於極以天秤秤一鐵塊一斤二十兩若於赤道秤之有幾兩又於兩處此鐵塊重量之比如何。

7. 於緯度30°之處山高1200尺問山頂g之值。

8. 於前題山麓一斤重之物體於山頂測之其重若干但山麓可當作與海面同高者。

第四章　運動各論

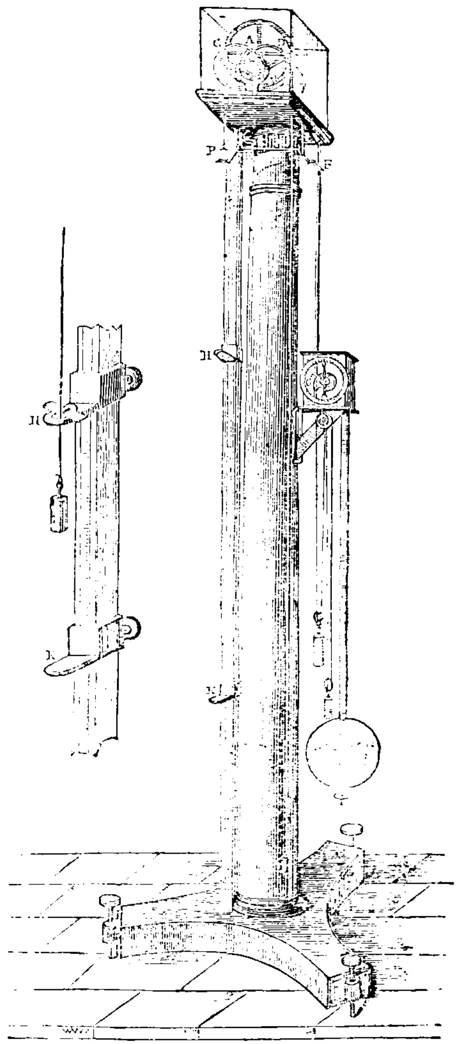
47. 運動之種類　凡由力之作用於物體上所發起運動之景況甚有差異茲列舉其重要者即如落下運動(落下運動已於第一章述之本章祇就實驗上說明)拋射運動循心運動單弦運動振子運動是也。

48. 落下運動之實驗　上古學者關於落下之加速度要用實驗以確證之或於高塔上或於深坑中種種試驗均不得其實證至千六百二年有加里黎氏 Galilei (即發明落下之定律者伊大利人)於傾斜之溝筐中轉落物體以實驗之然終不足爲完全之法又物體在空氣中因空氣抵抗之故運動必有不同然則欲實驗落下之加速度不可不於無空氣處(即於眞空中)驗物體之落下然於眞空中研究物體之運動更難故於空氣中惟能稍使其抵抗薄弱可已欲弱抵抗須緩運動蓋空氣之抵抗比例於物體速度之自乘即運動愈速抵抗愈強更難實驗故惟有緩運動之法而運動遲緩者比運動劇急者亦容易研究至千七百八十三年阿梯吾特 Atwood 氏(英人)者出據加里黎之推理以緩物體運動之方法製作一器械即名曰 $\boxed{\text{阿梯吾特器械}}$

高三米突多之木柱於其上端附以臺第50圖上有輕滑車 A 又以欲輕滑其運動故於其軸置相交叉二對之車輪 C D 以支之此四輪與 A 軸共旋轉。

通滑車以輕絹絲其兩端繫錘兩錘之重相等不論在何

第 50 圖



處常平均。若一方之上加以他錘。忽失平均。一上一落。三錘共同運動。但起此運動之力。即以加錘之重。而其運動之質量三錘也。若此三錘脫離器械。互結一團而落下。則起此運動之力。為此三錘重之和。而運動之質量亦此三錘也。依阿梯吾特器械落下。與自由落下而比較之。所落之質量與所起運動之力異。因之運動之速亦甚異。故於阿梯吾特器械線端所繫錘之運動比遊放直落之運動[illegible]緩也明矣。

器械之柱設秒時振子G。便計測落下之時間。又於振子上設E, F, 之金屬條相鉗製之。此金屬條使與小板P相通。P板乃活

動者。錘未運動時。P板恰支錘。

至振子一動。其力動於P板而板翻。錘遂起運動。當錘始運動之際。振子上之報時表恰指零秒。因得計秒而觀測錘之滑動。

關於路程之定律　因欲測錘落下之路程。於柱側立尺度。其零度與P板之位置相對。錘沿此尺度而落。又尺度之傍。鑲二片之金屬板。其上即H。穿有孔穴。下者爲K。藉以支錘。使得上下於尺度之傍。且得隨意定其位置。先以一錘與加錘共載於P板之上。報時表指零秒時。錘始運動。於其途衝突於K而發響。惟定K之位置。要使所衝突之響。與一秒時計所報之響能一致。再三反覆試驗後。因得確定板之位置。由零度之處。至此板之位置。爲一秒時間錘所經過之距離。表之以S_1。次更移圓板於下方。於板與錘衝突之響及第二秒終所報之響一致之處。定其位置。由是自零度至此板之處。爲二秒時間所經過之路程。表之以S_2。以下測三秒時四秒時之間。所經過之路程S_3 S_4。皆與前同樣之法。今就其所經過之路程而比較之。

$$S_2 = 4S_1 \quad S_3 = 9S_1 \quad S_4 = 16S_1 \cdots\cdots$$

即落下之路程。與時之平方爲比例者。是爲關於落下路程之定律。

關於速度之定律　求關於速度之定律。於尺度上置有孔之金屬板H。使綫端之錘。得自由通過。而加錘如圖所

示係細長形不能通過者。試驗之法。初置H板於零度下S_1之距離處。因於一秒之終。錘來此處。遺加錘於H板之上。其時速度爲等速運動者也。今欲求此速度。可於第二秒時之終。卽自加錘捨後。經一秒時。錘所至之處置K板。卽板與錘衝突之響。與第二秒終報時表所報之響一致之處置板。由是K板與H板之距離。爲等速運動之速度。卽表錘一秒時所得之速度。代之以V_1。以下以同法測二秒時三秒時…………之終。代之以V_2 V_3……………。以比較之。果見

$$V_2 = 2V_1 \qquad V_3 = 3V_1 \qquad V_4 = 4V_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

卽速度與時間爲比例者。是爲關於速度之定律。

$\boxed{\text{注意第一}}$ 於此時試驗所得結果之中。比較V_1之速及S_1之路。V_1常等於S_1之二倍。可知於第一秒時之終。其速度等於第一秒時間物體所經過路程之二倍。此關係不論時之單位之大小。凡以某時間爲時之單位者。則於其時之終。該速度常等於同一時間中。物體所經過路程之二倍。

於等加速運動。初速度爲零者。常有此關係。

蓋由前落下之公式 (1) (2)

$$V = gt \qquad S = \frac{1}{2}gt^2$$

t若爲1此式各爲V_1 S_1. 則

$$V_1 = g \qquad S_1 = \frac{1}{2}g$$

故 $V_1 = 2S_1$.

注意第二　因加錘之輕重。速度及路程而有差異也固矣。然速度與路程之關係。由上二定律及注意第一。可知其不變。

據前所得之二定律。可知於阿梯吾特錘之運動。爲等加速運動也。又此運動由加錘之輕重而生。其所生之速度。即以重力不絕牽引之故。然則凡重力不絕牽引者。其運動皆爲等加速運動也明矣。

又由注意第二。不拘加錘之運動。其關係常定。亦足知物體落下。其運動乃等加速運動者。

測定重力加速度之法　以線之兩端之錘重爲 P。以加錘爲 p。以阿梯吾特器械之加速度爲 a。又以自由落下之加速度爲 g。a 者 p 之重力作用於線兩端之錘之加速度。即於此時因 p 之力。三錘均起運動。又 g 者 $2P+p$ 之重。動於該物體之加速度。故由前加速度與力爲比例之理。

$$\frac{g}{a}=\frac{2P+p}{p}$$

故

$$g=a\frac{2P+p}{p}$$

a 即如前所云。依阿梯吾特器械。落下之加速度。即以一秒終之速度得測之。至於 Pp 之質量。自易得計算。故由理論上言之。得定重力之加速度 g 之值。但阿梯吾特器械之滑車。及線之重。幷摩擦力。不計算入。其影響亦不少。致不能精測路程及時間。因之 g 之值亦不能十分精密。

別法　求重力加速度之式用別法亦得證之且由以下之推理更能求出繫兩錘之線所受之張力。

今就其兩端之重思之。設 $P+p=Q$。以 Q 之質量落下加速度所以遲緩者乃以他端之 P 重以制之也。則是他端之力 P 亦有引 Q 之力。但據運動第三則 P 引 Q 之力。等於 Q 引 P 之力。即吊兩錘之糸所受之張力相等。若以其力為 T。則働 Q 於下方之力為 $Qg-T$。働 P 於上方之力為 $T-Pg$。(Qg 及 Pg 者重力也。)若以各錘之下行及上行之加速度為 a。則此等之力為 Qa 及 Pa。故

$$Qg-T=Qa\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{甲})$$

$$T-Pg=Pa\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{乙})$$

將兩式相加 $\{Qg-T\}+(T-Pg)=Qa+Pa$

$$=(Q+P)a$$

$$\therefore\qquad g=a\frac{Q+P}{Q-P}\qquad \text{即}\qquad g=a\frac{2P+p}{p}$$

又由甲乙二式

$$a=\frac{Qg-T}{Q}=\frac{T-Pg}{P}$$

$$P\{Qg-T\}=Q(T-Pg)$$

$$\therefore\qquad PQg-PT=QT-PQg$$

$$\therefore\qquad T=\frac{2PQ}{Q+P}g$$

注意　P 錘以其重之力。制限 Q 之錘。初學者每以其力 T 看作 Pg。是大誤也。何則。當 Q 下行之際。引 P 使之上行運動。其間 Q 之力。抗 P 之重 Pg。妨其下行之外。更要與以上行運動量之變化 Pa。故 T 之大。

非 Pg. 乃 $Pg+Pa$ 也. 卽 $Pg+Pa=T$. 或得 $Pa=T-Pg$

又以阿梯吾特器械得證力與加速度相比例之理於線之一端錘之上。置以 P 重之錘五. 則所運動之力爲 $5P$。測其運動之加速度 a. 次於五加錘之中. 移其一置於線之他端之錘上. 則所動之質量與前無異。而動之之力爲 $4P-P$。卽 $3P$。測此時運動之加速度爲 a'。比較 a, a'。$\frac{a}{a'}=\frac{5}{3}$, 故可知 $\frac{a}{a'}=\frac{5P}{3P}$ 卽加速度比例於力也,

$\boxed{例\ 1}$ 阿梯吾特器械兩錘之重. 一爲十二克半. 一爲十二克. 問各錘上行又下行之加速度 a 幾何.

(解)　由本條之理. $Q=12.5 \quad P=12$

由公式 $g=a\frac{Q+P}{Q-P} \qquad \therefore \quad a=\frac{Q-P}{Q+P}g$

故 $\qquad a=\frac{12.5-12.}{12.5+12.}\times 980=\frac{0.5}{24.5}\times 980=20$ 糎

卽加速度每秒二十秒糎也.

$\boxed{例\ 2}$ 阿梯吾特器械之錘重. 一方 $Q=25$ 克. 他方 $P=24$ 克. 問由靜止落下四秒之距離幾何. 又系之張力幾何.

(解)　$T=\frac{2\times 25\times 24}{25+24}\times 980=24000$ 功

又由 $a=\frac{T-Pg}{P}$ 之式知 $a=\frac{24000-24\times 980}{24}$

$$=1000-980=20$$

而每秒以 20 秒糎之加速度落下 4 秒間. 則所過之距離. 自易求出.

$$S=\frac{20}{2}\times 4^2=100 \text{ 糎}$$

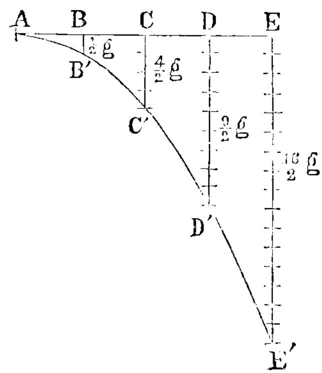
49. 擲射運動

拋射物體。常由瞬間之拋力。及不斷之重力。二力所作用而成之運動. 其二力之方向. 或在同

一直線上者爲『拋上運動』(卽如前32條所論)或二力相互爲直角者。曰『水平擲動』或二力相互成銳角者。爲『斜向擲動』所拋射之物體。名曰 拋物體 Projectile 其拋物體所通過之曲線爲 拋物線 Parabola

水平擲動及其定律 水平擲動者。物體以某速度於地表面一定之高向水平擲射也。該物體經過之路程。卽如第51圖所示。一物體 A 以 A B 之速度水平擲射。其物體若無毫末之重則擲射之後速度均等。AB = BC = CD = DE。於第一秒之終。達於 B。第二秒之終。達於 C。第三秒之終。達於 D。但以物體必受重力引下第一秒之終。至 $BB' = \frac{1}{2}g$。第二秒之終。至 $CC' = 4\frac{1}{2}g$。第三秒之終。至 $DD' = 9\frac{1}{2}g$。經過 A B′ C′ D′ E′ 之曲線。

第 51 圖

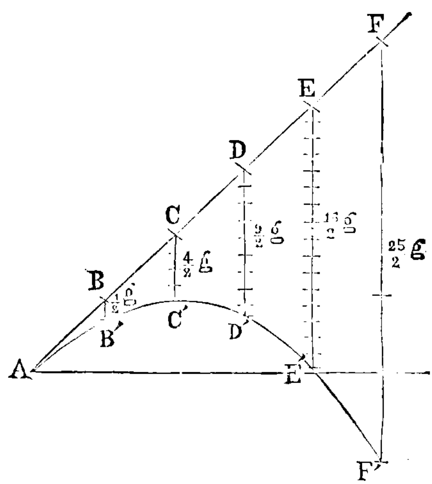


斜向擲動及其定律 斜向擲動者。物體以某速度斜向上方拋擲。該物體所經過之路程。卽如第52圖。有物體向 AB 擲射。若無地心吸力則各秒中皆以等速進行。AB = BC = CD = DE。但以地心引力。一秒之後。$BB' = \frac{1}{2}g$。落下達於 B′。二秒之後 $CC' = \frac{4}{2}g$。落下達於 C′。三秒之後 $DD' = \frac{9}{2}g$ 落下達於 D′。四秒之後 $EE' = \frac{16}{2}g$。落下達於 E′。經過

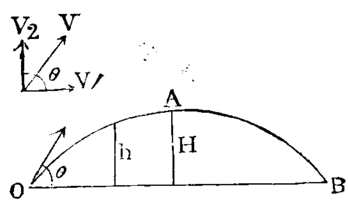
A′B′C′D′E′ 之曲線。

但欲研究其落下之位置或水平距離若干遠及其達於最高所要之時間。不可不求其擲射之方向與水平所成之角度若干。是宜用三角法。

第 52 圖



第 53 圖



今以射出之速度爲 V.分爲水平及垂直二分速度.卽云若以 V 之速度斜向擲射.其水平之距離.卽其斜向速度 V 之正射影 V_1 也.而就 V_2 思之.$V_1 = V\cos\theta$ 又其擲射之高.亦其斜向速度之正射影.$V_2 = V\sin\theta$ 而後由此關係可得各式如次.

註 此時不論拋射於何方向.重力加速度則一也.故物體以 V 之速斜射.或以 V_1 之速橫擲.與以 V_2 之速上拋得看作等速運動.

1. 自射出 t 時間後物體之位置.

$$S = V_1 t = V\cos\theta\, t \quad (\text{水平距離}) \qquad (1)$$

$$h = V_2 t - \frac{1}{2}gt^2 = V\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{高}) \qquad (2)$$

2. 達於最高點所要之時間. 就鉛直之速思之.物體拋上至某處.$V_2 - g\,t = c$.今以此時 t 之值代以 T.爲達於最高點之時間.其式如次.

$V_2 - gT = o \qquad \therefore \quad T = \frac{V_2}{g} = \frac{V\sin\theta}{g}$ (3)

卽與以 V 之速度鉛直拋上者同

3. 最高距離

$$H = V_2T - \frac{1}{2}gT^2$$

以 V_2 代以 $V\sin\theta$. 以 T 代以 $\frac{V\sin\theta}{g}$

則 $H = V\sin\theta\frac{V\sin\theta}{g} - \frac{g\times V^2\sin^2\theta}{2\times g^2} = \frac{V^2\sin^2\theta}{g} - \frac{V^2\sin^2\theta}{2g}$

$= \frac{V^2\sin^2\theta}{2g}$ (4)

4. 水平射距離　OB 爲 S. 若無地心引力. 則所過之距離. 卽 $V_1t = V\cos\theta$. 但此時以地心引力. 昇至極高處. 復落於地. 其所費之時間

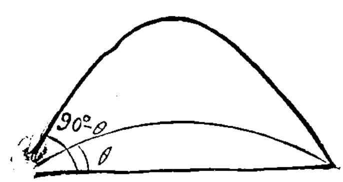
$t = \frac{2V_2}{g} = \frac{2V\sin\theta}{g}$

$\therefore \quad S = V_1t = V\cos\theta \times \frac{2V\sin\theta}{g} = \frac{V^2\cos\theta\ 2\sin\theta}{g} = \frac{V^2\times 2\sin\theta\cos\theta}{g}$

$= \frac{V^2\sin2\theta}{g}$ (5)

5. 最遠射距離　由上式 S 之値最大時. $\sin2\theta$ 須等於 1. 卽 $2\theta = 90°$. $\theta = 45°$. 故以 45° 之仰角射出時. 物體達於水平面上距離最大. 何則. 投射之仰角若比 45° 大. 則 2θ 比 90° 大而. $\sin(90°+A) = \cos A$. $\cos A$ 之値. (A 之角度固比 90° 小)不論何度. 皆比 1 小也. 故投射之仰角. 比 45° 大. 其値皆比 1 小. 又若投射之仰角比 45° 小. 則 $\sin2\theta$ 比 90° 亦小. 而比 90° 小之數. 固比 1 小也. 故得斷定曰. 仰角於 45° 時. 其發射之距離最遠.

第 54 圖



又由三角法思之. $\sin2\theta = \sin(180° - 2\theta)$ 故仰角 θ 時. 與 $90 - \theta$ 時. 其投射之距離相等. 何則. 因上式,

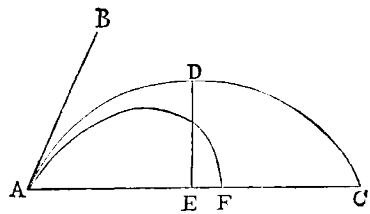
$$S=\frac{V^2 sin 2\theta}{g}=\frac{V^2 sin(180-2\theta)}{g}$$

卽

$$S=\frac{V^2 sin 2\theta}{g}=\frac{V^2 sin 2(90°-\theta)}{g} \qquad (6)$$

擲射運動之諸項。乃礮術之所最注目。凡礮丸能達其目的與否。視礮丸之速度。與銃器角度之大小。但擲射之物體。非如學說上所論述。得正形之拋物線。於實際有不正之形狀。蓋以空氣之抵抗。致減運動之速度。今於第55圖。示拋物線之不正者。卽如擲射於AB方向之物體。所至之水平距離。依理論測算宜達於C點但於實際却墜下於其線中之一點F。是理論之拋射體。所落下之點。與實際之拋射體。所至之點。有不同也。但空氣之抵抗。大有關於運動之速度。速度大則抵抗甚强。速度小。則抵抗弱。故拋射體之速度愈大。其進路愈不正。是則欲彈丸之達其目的。固要注意。

第 55 圖



擲射運動之定律。於西歷1600年。伊太利之碩學加里黎Galilei氏所發明。

例 1　由水平以30度之傾角。斜向上方放礮丸。其速度每秒百米。問礮丸當昇至幾何之高。

但空氣之抵抗不算入。

（解）　$V=100$　　$\theta=30°$　　$\therefore \quad \sin\theta=\frac{1}{2}$

由木條公式(4)

$$H=\frac{V^2 sin^2\theta}{2g}=\frac{100^2\times\frac{1}{4}}{2\times 9.8}=\frac{2500}{19.6}=127\text{米}\cdots\cdots$$

卽達於最高之距離爲127米突强也。

例 2 依前題礮丸所達之距離(由礮身水平之距離)若干。

(解) $V=100$　$\theta=30°$　$\therefore$　$sin2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

由木條公式(5)

$$S=\frac{V^2 sin2\theta}{g}=\frac{100^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{9.8}=\frac{10000\times\sqrt{3}}{9.8\times 2}=883\text{米}\cdots\cdots$$

卽水平射距離爲883米突强也。

例 3 以300秒米之速度射出。達5000米之水平距離。要用幾何之仰角。

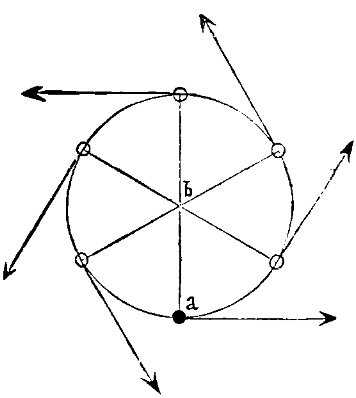
(解) $sin2\theta=\frac{Sg}{V^2}=\frac{5000\times 9.8}{300^2}=0.544$.

由對數表 $2\theta=33°$　$\therefore$　$\theta=16°,5$ 或 $90°-\theta=73°,5$

50. 循心運動 central motion

凡於宇宙間物體之運動。〔擴而言之卽天體諸恆星之運動〕該體之能力。〔卽Energy見第六章〕因他體之引力。於引力中心之周圍。取曲線路而運動者。爲循心運動。其運動之徑路。或爲橢圓形。或爲拋物線。或爲雙曲線。皆關自己之能力。與他世界之引力所生之作用。此等作用。向中心之力。曰**求心力**

第 56 圖

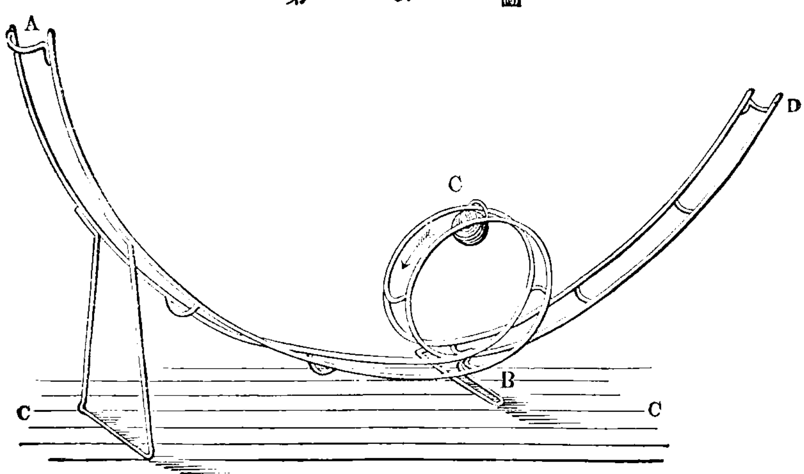


Centripetal force 運動體欲進行於切線之方向。向外牽引之力。曰遠心力 Centrifugal force 循心運動爲吾人所習見者。圓形運動居多。如ap之線端繫a球。以振迴之。所生之運動。卽循心運動也。此際求心力。卽藉線之固性。故不出圓圈之外。又如石磨臼車輪等之迴軸動。亦循心運動也。

遠心力之例 (1) 於前第56圖所示。若放線。則球子以切線之方向。運動於側方。其進行於切線之方向者。遠心力之作用也。

(2) 取充水之提桶。繫繩。執繩端以振迴之。使桶沿圓周運動。桶口卽至倒立。水亦不滴下。又置果於籃。繫線以振迴之。而果不落亦同一理。

第 57 圖



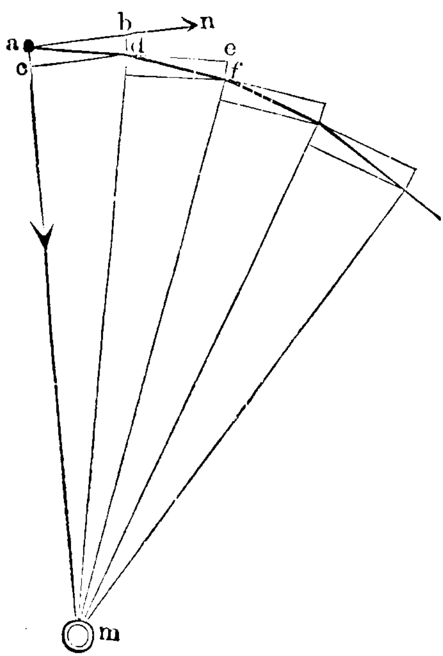
(3) 如第57圖所示。卽所謂遠心鐵道。由(A)架鋼鐵之線路中。爲BC之圓圈。達於D。今由(A)擲球於下方。因得甚大之速度。至圓圈之周邊。遂從慣性之定律。沿BC圓圈而昇。由C降下之際。復得昇至於D。此時球由遠心力。故固附圈緣。循路而轉無落下。

51　圓形循心運動之定律　上所載循心運動，雖有種種，但本書研究之範圍，只限圓運動，至於天體各種運動，於星學上研究之，非本書論述之範圍也，茲將圓形運動之定律，揭之於次，

『一物體以一定之速爲圓運動時，其所及之引心力，恩質量與速度自乘之相乘積爲正比例，以軌道之半徑爲逆比例』

今證明此定律，宜先詳察運動生起之理，卽依第58圖得說明之，於 a 一實質點，受中心牽引不絕，向 m 而進行，但此 a 點從起運動時，力常働於外方，此時求心力若失，則隨 n 之遠心力，以一定之速度，(卽於切線之方向所得之速度)而進行於 n 之方向，今不能進行於 an 之方向，又不能進行於 am 之方向，則以兩力作用，其必進行於其合力之方向也固矣，故就此理推之，得假設爲

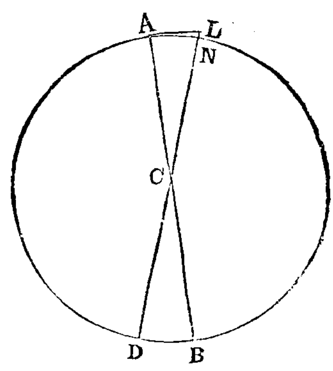
第 58 圖



瞬時間(如 t 時間中。求心力消失。而質點 a 至 b。次亦由 t 時間引力之作用。實質點復由 b 引至於 d。此時若更無引力作用。則瞬時間仍經 de 之線路。然若再受引力作用。實質點復變 de 之方向。而來於 f。此外所畫之多角形。皆以遠心力及求心力看作輪流操縱也。又各各皆畫平行四邊形者。示合力之意。但實際所起之運動。兩力作用。終始無間斷。故成曲線。其曲線之性質。即正圓也。

測力之法。即以其瞬時間過切線之方向求之。物體來A時。(第59圖)以其速度爲 v。若無引心力。則物體循切線上。t 時間至L。過 vt 之距離。但實際以引力作用。t 時之後。至於N。是 t 時間被引於中心之方。即LN之距離。t 者當作極短時間。故 $AL = AN = vt$。又L,N,C,即看爲在一直線上可也。蓋 t 愈小。AL,AN,亦愈小。

第 59 圖



今以引力之加速度爲 a。故 t 時間所經過LN之距離。由落下加速度之測法。則

$$LN = \frac{1}{2}at^2$$

次求LN之長。由上式得求 a 之值。據幾何學之定理。

$$\overline{AL}^2 = LN \times LD$$

而LN與ND原相差甚小。故LN極小時。即看作LD=ND。亦

無大差。蓋LA若極小。則LN從之愈小。LN至無窮小時。LD全等於ND。故

$$\overline{AL}^2 = LN \times ND$$

又若以圓之半徑爲r。則$ND=2r$故由上式

$$LN = \frac{AL^2}{2r}$$

由前所論$AL = vt$。　$LN = \frac{1}{2}at^2$。

故　$$\frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2t^2}{2r}$$

$$\therefore \quad a = \frac{v^2}{r} \cdots\cdots\cdots \text{(圓運動加速度之公式)}$$

次由上式之加速度。得求引心力之强。茲若以引心力之强爲f。以物體之質量爲m。則

$$f = ma = \frac{mv^2}{r} \cdots\cdots\cdots \text{(引心力之公式甲)}$$

由是觀之。物體沿圓周運動之間。必以$\frac{mv^2}{r}$强之力。引之於中心也。

遠心力乃正反對引心力之方向。與向中心作用者。以同大之力。牽引於外方。故$\frac{mv^2}{r}$之値。卽謂爲遠心力之强也可。

上式乃謂質量與速度不變者。引心力之强以半徑之長爲逆比例。譬如某質量運動於大圓周之速。與某質量運動於小圓周之速若相等。則小圓周之引心力。亡大圓周之引心力强。卽以引心力逆比例於其半徑也。但若某質量若一迴轉大圓周之速。與某質量一迴轉於小圓周之速相等者。

則運動於大圓周之速度比運動於小圓周之速度必大此時固不能泥守以半徑爲逆比例之說而謂運動於大圓周之引心力比運動於小圓周之引心力小也故因半徑之長而速度有變易者求半徑與引心力之關係宜用次式

因切線之速度v。乃等於以一迴圓周之時間。除其圓周之大。即

$$v=\frac{2\pi r}{T}$$

以之代入(甲)式,

故

$$f=m\times\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}=m\times\frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$=4\pi^2\frac{mr}{T^2}\quad\text{(引心力之公式乙)}$$

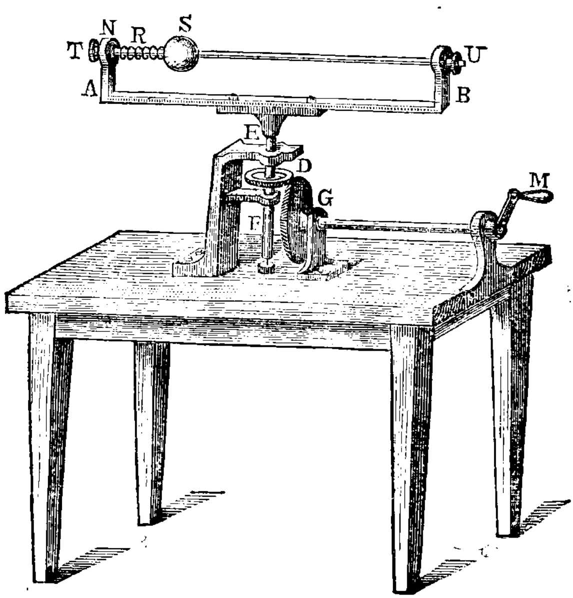
由此式可知速度因半徑之長而異者引心力正比例於其質量及圈路之半徑反比例於其一周迴所費之時間之自乘又圓運動之週期T。若以引心之加速度表之則因

$$T=\frac{2\pi r}{v}\qquad a=\frac{v^2}{r}$$

$$\therefore\qquad T=\frac{2\pi r}{\sqrt{ar}}=2\pi\sqrt{\frac{r}{a}}$$

52. 圓運動之實驗　上之定律。實驗上得確證之。即用遠心器械。今略述其構造。如次圖TABV之矩形。由M及CD齒輪之助。得迴轉於鉛直軸EF之周圍。此矩形一邊TU爲黃銅之棒。貫以球。此球與N端之間。置有彈性之纖條。回旋矩形時。S環圓形運動。因遠心力壓於R。視R短縮之度。得證遠心力之强弱。

第 60 圖



此球之重爲P。用前式(甲)得下式

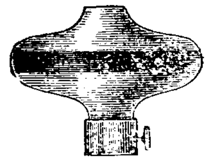
$$f=\frac{mv^2}{r}=\frac{Pv^2}{gr}$$

上式以g除之者。因P爲球之重量。變爲質量。須以該地之重力加速度除之也。

由上式可知遠心力乃比例於物體之重。又比例於其速度之平方。

又若除TU之棒。代以閉鎖之玻璃管置入空氣,水,木片等,而迴旋之。(第61圖)則見空氣集於中心之近側。木片次之。

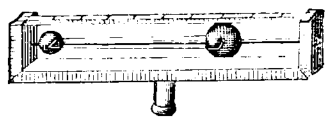
第 61 圖



鉛丸在管之兩端。最遠於中心之處。此卽示物體愈重遠心力愈强之意也。

又如62圖，乃示質量與半徑之關係。以金屬之小杆條，貫木製或象牙製之二球。橫置於水平，使得容易進退左右，兩球以線繫之，不使離開，又橫置於水平之筐上，置水平之小尺度，以觀兩球隔離中央之長短，

第 62 圖



此筐置於迴轉軸之上。使迴轉之。兩球因線條牽制不能離開。若兩球無運動，(此時筐仍迴旋運動也)則兩球之遠心力同大此時大球比小球，不可不近接於迴轉軸，卽兩球距迴轉軸之長，不可不倒比於質量。今示兩球之質量以M與M'，示兩球相距迴轉軸之長以r與r'。以T示時間，則兩球之遠心力如下式，

$$4\pi^2\frac{Mr}{T^2}\qquad\qquad 4\pi^2\frac{M'r'}{T^2}$$

因遠心力之大相等。故

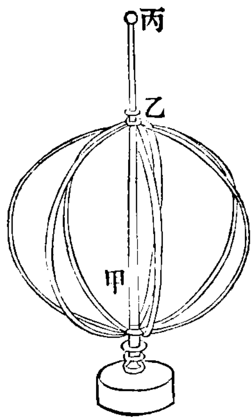
$$Mr = M'r'$$

$$\therefore\qquad M : M' = r' : r$$

又地球循自軸迴轉所以成楕圓形者，其原因亦由遠心力得證明之。如第63圖。以(甲)管插於遠心力器械之上，其

下端以多數之銅片固著之。此銅片於上方相輳合而鑲於鞘管之上。使得沿甲軸而上下。當靜止時。其彈機(卽銅板片)自能延長鞘管(乙)在其軸之頂尖(丙)。若迅速迴轉甲軸，則板片恰成如圖中之形狀。若迴轉愈疾，則銅片屈撓愈大。鞘管之牽引於下方。亦愈甚。此迴轉軸遂愈短，是地球所以爲楕圓之原因也。

第 63 圖



又銅片何故因迴轉而屈撓之理，由下文得說明之。蓋銅片之各部分。其半徑各異。於兩端之半徑最小，愈近中央半徑愈大。半徑大者，速度自大，故遠心力亦大。

例 1　地球之半徑爲 64×10^8 糎。24 時間一週轉 問作用於赤道上之質量 1 克之物體。其求心力若干。

(解)　$r = 6.4 \times 10^8$　$t = 24 \times 60 \times 60$ (因用 C.G.S 單位故時變作秒)

$m = 1$

由公式(乙) $F = 4\pi^2 \dfrac{mr}{T^2}$

卽　$F = 4 \times (3.1416)^2 \dfrac{1 \times 6.4 \times 10^8}{(24 \times 60 \times 60)^2} = 4 \times (9.869)^2 \dfrac{6.4 \times 10^8}{(86400)^2}$

例 2　地球須以如何之速迴轉。在赤道上之物體。始失其重乎。

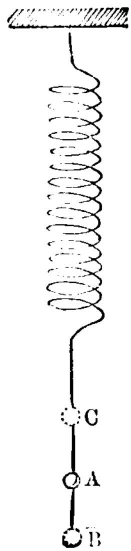
(解)　所要之速爲 v。由 $g = \dfrac{v^2}{r}$ 之式 $v = \sqrt{gr}$

$\therefore$　$v = \sqrt{978.1 \times 6.4 \times 10^8} = 772000$ 糎秒 約 $= 7.72$ 粁秒。

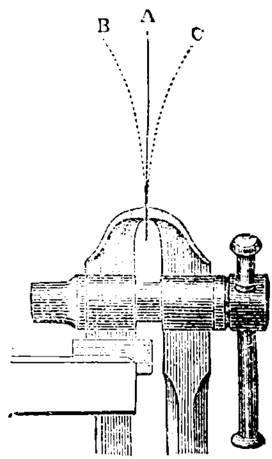
而地球本來週轉之速度 $\dfrac{2\pi r}{T} = 0.46$ 秒粁。故兩者比較。前者比後者要增加 17 倍大。

53. 單絃運動 Simple harmonic motion 前所述圓運動。乃對一定點。向圓周運動也。單絃乃對一定點直線上運動。其加速度與此點之距離爲比例。如64圖。螺旋金屬線下端之一點A。若擊動之則錘對一定點。以直線運動。又如65圖。金屬線之條受擊動。而左右運動。亦對一定點爲直線運動也。此等現象。名曰『單絃運動』

第64圖

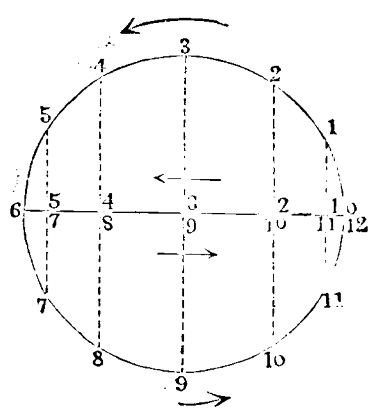


第65圖



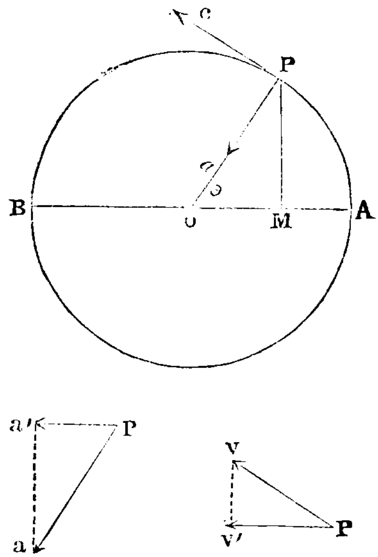
凡論單絃運動。須先懸擬一等速圓運動。然後易得證明。今假設一定點。其速度爲v。以中心O爲等速圓運動。而假設點之位置。正射於直徑AB上。其射影各點之運動。即單絃運動也。

第66圖



如66圖若爲等速圓運動時。則自零秒起。第一秒至圓

第 67 圖



周(1)處。第二秒至圓周(2)處。第三秒至圓周(3)處。漸次以12秒運動一周。若以單絃運動言之。則於直徑上。依圓周之正射影。自 0 以至 1,2,3,4,5,6,次又依下半圓之正射影。由 6 以至於12。是卽爲單絃運動之景況。其加速度與距離之關係。由次式得證明之。

以 P 之速 v。及加速度 a 分解爲與AB平行。及與AB垂直二線。垂直於AB之分線。無作用。其平行之分線 v_1 及 a_1 對 v 爲M點之速度。對 a 爲M點之加速度。

$$v_1 = v\sin\theta = v \times \frac{PM}{r}$$

$$a_1 = a\cos\theta = a \times \frac{OM}{r}$$

但 $\theta = \widehat{AOP}$。r = 圓之半徑。故M點之速度。於兩端AB爲零。以於兩端時PM爲0。於中央O點爲最大。($v_1=v$)。又加速度於O爲零。(以OM = 0)於兩端最大。($a_1 = a$)就上 a 及 v 均爲一定之數。故 a_1 正比例於OM之距離。

AO之長爲振幅。Amplitude 其二倍AB之長爲全振幅。

Double amplitude 一往復至振幅之時間為週期單絃運動之週期與圓運動之週期同故

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r}{a}}\qquad \begin{aligned} r &= \text{振幅} \\ a &= \text{最大加速度} \end{aligned}$$

由中點O至M之距離為x則單絃運動之加速度a_1正比例於x故得書$a_1=kx$。k者比例之常數也蓋以$a_1=a\cos\theta$
$=\frac{v^2}{r}\cos\theta=\frac{v^2}{r^2}\times r\cos\theta$此時$a_1$正比例於$x$即正比例於$r\cos\theta$。
而v及r乃一定不變之數故代$\frac{v^2}{r}$以k

又若以起加速度a之力為f則因f比例於a_1自比例於x故

$f=k'x$。k'亦比例之常數即指$m\times\frac{v^2}{r}$之數也。

此式乃以表單絃運動點之位置與起此運動之力之關係。

$\boxed{\text{例 1}}$　最大加速度30秒秒糎。振幅15糎。求單絃運動之週期。

（解）　由上式　$T=2\pi\sqrt{\frac{r}{a}}=2\times3.1416\sqrt{\frac{15}{30}}=6.2832\times1.414$

$\boxed{\text{例 2}}$　為單絃運動之物體。果受何方向之力所作用乎。

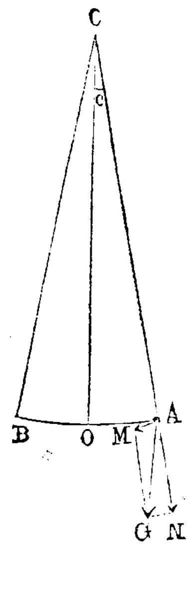
（解）　力之大者。乃正比例於由中點所至之距離。其方向常向於中點之方。

54　**振子運動**　對中心外懸垂一點而旋此點得自由運動之物體曰振子運動。振子區別為單一振子。Simple pendulum（或曰數學的振子）及合成振子。Compound pendulum（或曰理學的振子）單一振子。係以無重量之線條於其端

繫以質點。蓋以線條若有重量。則受地球吸力。或空氣抵抗。不能終始往復如一。因不便於研究。故必有無重量者。方無阻礙。但宇宙間決無此振子。故或有以白金之小球繫於極纖細之線條者。亦略近於單振子。實用振子。卽由理學的推得者。於杆條之下附螺旋。得隨意進退上下。詳處見於後節。

55. **單一振子** 如第68圖。CO為單振子。質點O引至A處放之。A因沿AO弧。下至於O。復沿弧而至於B。再下至於O。仍復至於A。若是者始終沿AB弧之上。而反復振動。今質點在於A時。因受重力而下。以AG表之。更分解為CA之方向AN。及對CA成直角之方向AM。AM卽質點運動於AO方向之力也。而由前論力章所述。同一物體受力作用。所生之加速度。比例於其力之大。故若以AM之分力。所生之加速度為a。則a乃比例於AM之力。而重力之加速度g。自亦比例於重力之方向AG。因得書之如次。

第68圖



$$g : a = AG : AM$$

卽

$$\frac{a}{g} = \frac{AM}{AG}$$

若以OCA角為θ。則以$\widehat{OCA} = \widehat{GAN} = \widehat{MGA}$

卽

$$\widehat{NGA} = \theta$$

故 $$\frac{AM}{AG}=sin\theta$$

因之 $$\frac{a}{g}=sin\theta$$

卽 $$a=g\ sin\theta \qquad (1)$$

而質點漸近於O時θ之值漸小。$sin\theta$亦小。a之值自減。今O若甚小時。(凡三度以內)弧AOB得看作直線。$\widehat{AOC}$爲直角。故

$$sin\theta=\frac{AO}{AC} \qquad (2)$$

以之代入(1)式 $$a=g\frac{AO}{AC}$$

式中AC爲絲之長乃一定之數。g亦定數。故質點之加速度a。乃比例於AO。而其方向當向O點。

又O甚小時。振子運動得看作單絃運動。其自A至B。再復至A之時間卽週期T。由前53條

$$T=2\pi\sqrt{\frac{r}{a}}=2\pi\sqrt{\frac{AO}{\text{於A之加速度}}}$$

但由(2)式 AO = AC $sin\theta$

AC卽絲之長若代以l。

則 $$AO=l\,sin\theta$$

由(1)式於A之加速度爲$g\,sin\theta$。

因之 $$T=2\pi\sqrt{\frac{l\,sin\theta}{g\,sin\theta}}$$

卽 $$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

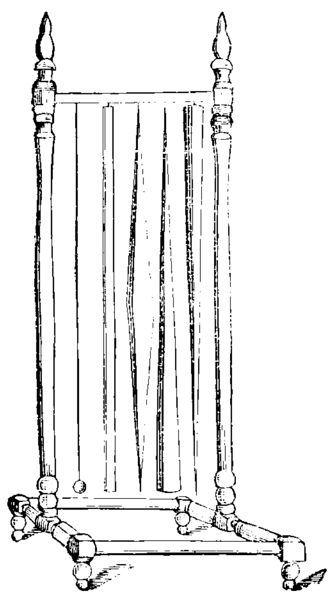
是即振子週期之公式也。

由此公式振幅小者。振子之週期。與其長之平方根爲正比例。與重力之加速度爲反比例。又其週期無關於振幅及質點之質量常相等。是爲振子之等時性 Isochronism (但振幅只限三度以內之角)

其關於質量者。由次所論合成振子。得證明之。

56. 合成振子　單一振子乃由理論推想的之振子不足以供實用。實際乃利用單一振子之理。而創製者。曰合成振子。合成振子有種種。如第69圖中。杆條之中心或在上。或在下。或在中。具隨意之形狀。但合成振子。欲使恰合單一振子之算式。不可不求合成振子所合單一振子之長。求其長之法有二。

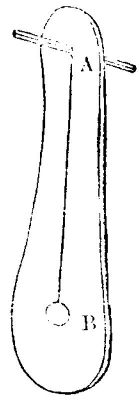
第 69 圖



一用纖絲繫小鉛球。(卽當單一振子)與合成振子掛於同處。(第70圖)使纖絲所繫之質點。與合成振子同時振動。加減絲之長。以增減其週期。再三反覆試驗。終至合成振子。與鉛球相連振動不離時。則該絲之長。卽合成振子之長。遂以其合成振子。與單一振子同一週期。故以其振子爲『相當單一振子之長』

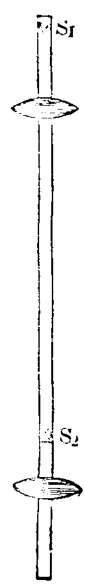
L length of the equivalent simple pendulum 在下方之一點B『爲振動點』Centre of oscillation

第 70 圖



又如第71圖所示。棒上鑲以三角刃。二刃之方向相對。支於S_1或S_2均得使之振動。實驗之際。使附着於棒之重錘。上下於適宜之位置。支於S_1點者。與支於S_2點者。若得以同週期振動。則此合成振子。爲『可逆振子』Reversible pendulum 於此時S_1 S_2之距離。爲相當單一振子之長。若以S_1爲軸。則S_2爲振動點。反之若以S_2爲軸。則S_1爲振動點。觀以上合成振子。其相當單一振子之長。由構造而無一定。初學者切勿誤爲合成振子與單一振子爲等長者也。玆更示以注意。並說明其所以不等長之理。

第 71 圖

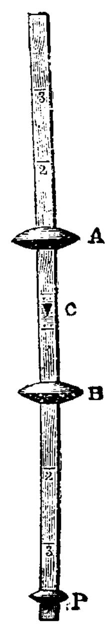


凡各種振子。形狀不一。其振動固無一定。自不得以其長短。定其懸點與振動點之距離。如直杆形之振子。比於等長之單一振子其振動必速是以直杆形。乃由實質小部分連合而成。而近於上邊之實質小部分所生之振動自速。全體遂因之而增速。何則玆設有無重量且不屈撓之一線條。懸垂二個之量a及b。此振子固已非單一振子。而成具有重量之合成

振子。而振子之週期。乃與其長之平方根爲正比例。則振子長者振動自緩。短者自速。由是在a處宜振動迅速。b宜振動緩慢。而ab二球子乃互相連結者。不能自由快慢。惟a固能催b使速振動。但以b窒礙之。不能如僅以a點之量者迅速振動耳。究亦比b之祇自身振動者速。故若用直杆。則各小部如a之重量者正復不少。自比單一振子者速。是可知合成振子。與單一振子。於同時間內同數振動者。其長必有差。又有時因振子之構造。其振子之振動。比等長之單一振子緩者。如第73圖。乃示不關懸點至振動點之長短。其振動有遲速者。即本圖之全長徑。爲正直之杆條。中劃以度。於其正中C。鑲一銳刃。爲支點。今若於此銳刃之上下各一粉之處。附以鉛製碁子狀之物二個。(A及B)一重約一斑。此時若支撐於銳刃之處。杆條在隨處平均之景態。蓋以支撐其全體之點。與其重心(重心見第五章)同一點也。但若杆條之下端加小重P。其裝置遂成振子之狀。此時若與等長之單一振子同振動。却比單一振子之振動緩。蓋P之小重。所使運動全體之重。非若單一振子僅

第72圖

第73圖



使自己之重運動者。更不得不使運動A及B二個之重量也。由是觀之。合成振子。關其構造之如何。其振動點之不同也明矣。

合成振子所相當單一振子之長既定。由是得依實驗以證明振子週期之公式。但前云振幅非甚小者。不能用之。卽今所述合成振子亦然。

前所述振子之等時性。由合成振子亦得確證其所以然。若振子運動不絕。受空氣抵抗。與懸點摩擦之影響。振動之幅漸減。但振幅卽至甚小。振動之週期常不變。

此事係加里黎所發見。實驗之法。如前所云用合成振子擺動之。振幅至極小時。計其若干回振動之時間後。振幅自必更小。次於其最小之振幅。更計其百回振動之時間仍相等也。

又振動之週期。無關於質點之質量者。由實驗亦得證其相等也。如繫於其端之錘。或鐵或鉛或象牙。若在同處擺動。其一往復之時間。皆相等。是可知重力傳於種種物體之加速度皆同。

57. 振子之應用　振子所以供實用者甚廣。茲舉二三之例於下。

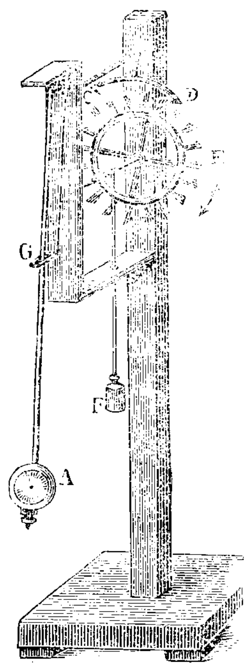
1　$\boxed{\text{用以調整時辰儀之旋轉}}$　於一定地方。定長之振子。以其振動時間常不變。故得用以調整時辰儀之運轉。

時辰儀者。卽終始不變其旋轉之機器。故可為計時間之

用。其發起之力源有二、一用重錘、一用撥條。故時辰儀區別之爲二類、一曰重錘時辰儀、一曰撥條時辰儀。

(a)　重錘時辰儀之要部　重錘時辰儀之要部。卽由重錘發起運動之部分。如第74圖所示。繫重錘於索之一端。卷纏於圓壔。其圓壔之軸。置於水平方向。使其重錘得循水平軸而迴轉繩索。遂以重錘下墜。徐徐引繩。而圓壔樞軸。亦隨之旋轉。由是傳其運動於所附圓軸上之齒輪板。外更以他齒輪嵌入。因亦傳其運動於他齒輪。遂使時辰儀全體發起旋動。但重錘墜下。漸次加速。因之時辰儀之旋動。不免有隨之加速之患。故於時辰儀機器。須設振子以節制其疾速。法於齒輪之端。附屬齒輪板E之上。設CD弧。左右兩鉤。使適合於齒輪之齒。CD弧能左右傾動。弧傾左時。左鉤嵌入圓板上之齒。或傾右時。右鉤嵌入圓板上之齒。以節制其運動。然若鉤無活動則齒輪靜止。不起運動。因於金屬板。懸振子A。遂於振子運動時。HG杆及CD亦擺動。遂及影響於B軸。弧傾右時。C鉤離齒。而圓柱迴轉。弧之右端D又下而入於齒之間。止圓柱之運動。次復因振子動於反對方向。E鉤復脫齒輪。圓軸暫迴轉。仍因C鉤下嵌。而止運動。

第 74 圖

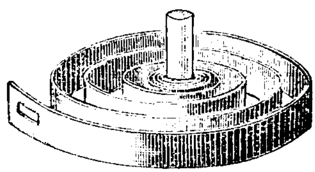


由是振子凡一擺動。每齒輪迴轉一齒。而振動之時間。常相等。故各齒之距離若相等。則圓軸同時間所迴轉之角度。亦相等。因於圓軸附以針。

測針之迴轉度.得計時間.又鉤與齒輪之形狀.配置適宜.鉤與齒輪相離時.鉤受齒輪之衝動.等之於振子.防其運動之停止

利用振子.自和蘭之海根司 *Huyghens* 始.千六百五十八年事也.時辰儀之發明.係千五百年.自時辰儀發明至百五十八年.始有振子之事云

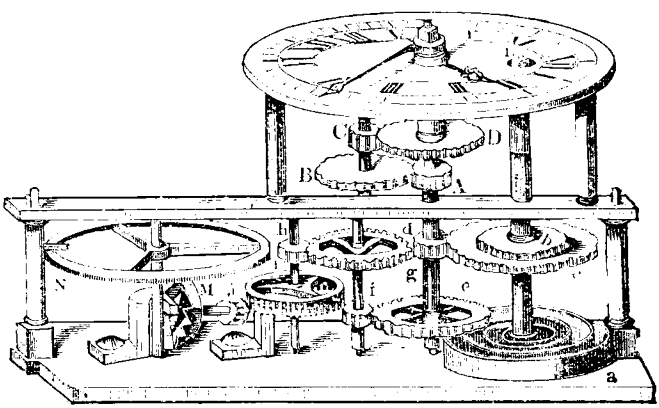
第 75 圖



(b)　撥條時辰儀.　撥條時辰儀.取其反戾之力以發動也.如懷中時辰錶.撥條卷纏於軸.因反戾之力而運動.

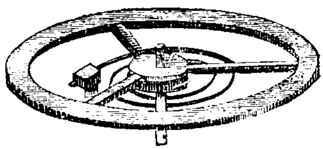
今就懷中時辰儀述其機器之大略.如第 76 圖.懷中時辰錶之機器.多置在二片金屬板之間.其兩板以直杆數條相連結之.於上板與示時板之間.所裝置齒輪之小部分.即以旋轉指時針之用. a 爲撥條.纏於 L 軸上.卷撥條時.由示時板之表面上端 L 迴轉之.遂以撥條之彈力.迴轉其所固着之軸於反對之方向.因之齒輪亦旋轉而迴動.而 c 之齒輪恰交

第 76 圖



嵌於d之小齒輪上.故小齒輪之軸亦迴轉.因之於上由A至B,由B至C,由C至D,漸次迴轉.於下由e至f,由g至h.由i至j,由M至N,漸次亦傳達其力而迴轉.但初時撥條反戾之彈力雖强.漸次微弱.時辰儀之迴動.致有不能均正.故附於M之車輪.即所謂爲正轉車者.如第77圖所示.旋小撥條.藉以均正運動.蓋欲使正轉車生迴轉運動時.先緊卷小撥條後放之.正轉車始雖受緊卷.有不能歸復原位之傾向.運動之際.已得速度.復不能止從前之平均點.而進於他方向.失其速度後.更迴復故位.運動不止.恰無異振子之狀.故因小撥條之長短.正轉車之運動有緩急.隨其緩急.時辰之運轉.亦生緩急也明矣.下更就正轉車之運轉.大撥條之反撥力.說明其如何關係處.但欲知其關係.不可不知各車輪之齒數.其數即如下表.

第77圖



<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>C</td><td></td><td>D</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td>:</td><td>32</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>B</td><td></td><td>A</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>24</td><td>:</td><td>8</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>h</td><td></td><td>g</td><td></td><td>d</td><td></td><td>e</td></tr>
<tr><td></td><td>6</td><td>:</td><td>36</td><td></td><td>10</td><td>:</td><td>60</td></tr>
<tr><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td>|</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>M − j</td><td>i</td><td></td><td>f</td><td></td><td>e</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>15 − 6 :</td><td>48</td><td></td><td>6</td><td></td><td>60</td><td></td><td></td></tr>
</table>

上表(:)乃示二齒輪交嵌之意(|)者同在一軸之標也.

凡整正袖珍時辰儀之運動.小撥條(卽擺動機)之長.須一定.卽 i 之齒輪.一分時間.不可不合週轉一度之長而 i 之齒48.j 有6齒.故 i 之齒數.恰合 j 之齒數八倍.由是 i 一週轉.j 不可不八週轉.又 M 具15齒.故每一週轉.小撥條運動三十回.(正轉車之軸有二齒故也.)但 M 與 j 同一軸.是正轉車於一分時間.運動 30×8 之數.卽二百四十之數.卽一秒時間有四週運動之比例.h 有6齒.以與 i 同一軸.故 h 一週轉.亦費一分時.且 h 交嵌於36齒之 g.g 之齒數.乃合 h 之齒數6倍.故 h 一週轉中.g 漸週轉六分之一.卽 g 全一週轉.不可不費六分時.又與 g 同軸者.爲 f.有6齒.與 g 同時間週轉.f 更交嵌於60齒之 e.卽 e 一週轉之時間.合 f 所週轉之時間十倍.卽不能不費六十分時.於此軸之上端.(卽突出示時板之部)固插長鍼.故此鍼週轉一時間.一周週示時板上.d 有10齒.以與 e 同軸.故一週轉亦費六十分時間.d 更交嵌 c 而週轉之.c 之齒數60.因之六倍於 d.是以 d 六週轉所費之時間.c 僅一週轉也卽 c 一週轉六時間.由是觀之.卷大撥條四週轉者.時辰儀之週轉.遂得保續二十四時間.卽一晝夜也.

上板示時板之間.所安置之齒輪.以爲週轉指時鍼之用.前已述之.茲更詳述其關係 A 有8齒.附着於具有指分鍼之軸.一時間一週轉.而 A 更交嵌於24齒之 B.以 B 之齒數.合 A 之三倍.故三時間一週轉.C 亦有8齒.以與 B 同軸.故與 B 所週轉之度同.亦三時間一週轉者.C 復交嵌於32齒之 D.故 D 一週轉之時間.合 C 之四倍.卽十二時間 (3×4) 一週轉.D 齒輪之上端.所固着之短鍼.外觀雖如覺與長鍼同一軸.其實不然.乃以中空之圓筒.被指分鍼之軸.其下端固着於32齒之車輪 D.其上端附以示時鍼.(卽十二時間一回之指鍼.)其空筒與軸不相固着.故軸之週動.自無關於空筒.

II $\boxed{用以測重力之强}$ 同一振子因緯度之高低而異。如其振動數於吾人所居住之地方振子雖有一定之數若攜其振子向北極而行則漸增其振動數若向赤道之方向卻漸減其振動數此事蓋法國星學家黎施 Richer 所實驗。於千六百七十三年黎施由其都府巴黎攜一旋轉適正之振子時辰儀向北緯五度加雲 Cayenne 地方渡航以其時辰儀每日遲二分半漸次減振子之長減至 2.8 粍時時辰儀始旋轉適正。其歸鄉之際此時辰儀仍舊帶回。再加 2.8 粍之長。遂得與旅行之前。同時振動推其原因不外重力強度之影響故秒時振子(卽一秒一振之振子)之長由地上之變遷而異地球之緯度既關係於振子之長然則以振子測重力之强爲最良之方法也。

以振子週期之公式兩邊自乘

$$T^2=4\pi^2\frac{l}{g}$$

$$\therefore \quad g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

故欲測某地方重力之强以所已知之振子之長於該地方擺動之測其一往復之時間可已。

例如於緯度四十度之處。秒時振子之長 (l) 爲 994 粍其擺動之時間。爲一秒。則其一往復爲 2 秒也。

故 $$g=\frac{4\times9.87\times99.4}{4}=980.8\text{ 約}$$

又一振子順次於二處擺動之計其擺動之週期得相異

之數因知重力之加速度有差異。今於一處重力之加速度爲g，其週期(卽擺動一往復之時間)爲T。於他處重力之加速度及週期爲g'與T'適用上式，得下之二式，

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2} \qquad g'=\frac{4\pi^2 l}{T'^2}$$

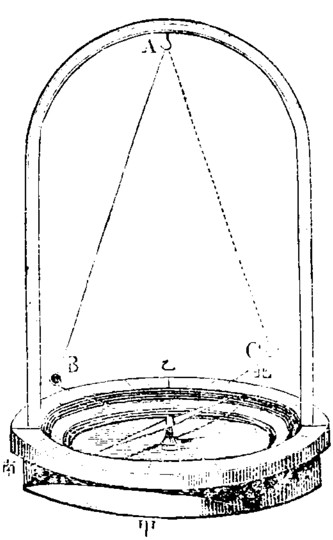
故

$$\frac{g}{g'}=\frac{T'^2}{T^2}$$

以言表之卽云於異處重力之加速度，與同振子週期之平方爲反比例。

III　用以證明地球自轉之理　自由振動之振子，因慣性其振動面常保持不變。凡對一點，外觀上却如振動面之變者，實非其面之變，乃其一點對振動面生變異之證也。此理由法人富哥爾Foucoult於千八百五十二年，在巴黎市，以振子確證地球以自軸迴轉之事實，今欲證明其理，用第78圖所示之裝置。卽ABC爲振子。因欲明其方向。於甲乙圓盤之周邊分割三百六十度，設磁鍼，今安置磁鍼於南北之方向，置圓盤於遠心力器械上，徐徐迴轉磁鍼及振子，無變其最初之面，設如於初時使振子與磁鍼取同一面，次迴轉圓盤，圓盤與磁鍼縱變其位置，振子與磁鍼

第78圖

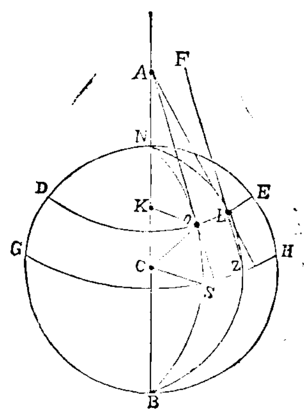


依然不變其面。或於初時磁鍼與振子運動之面。互成直角後迴轉圓盤。而磁鍼與振子相對之面，仍不變如前。此外卽取種種之方向。其成蹟不生毫末之差異。因知振子運動之方向斷不因圓盤之移動。而變易其振動面也。此時必用磁鍼者。以磁鍼除指南北之外。決不能靜止於他方向。故用爲標準。得以驗振子之振動面果變易與否。今於此試驗。由遠心力器械得推想出地球以自軸迴轉之理。亦足知振子之振動面。斷不以地球之迴轉而變。譬如以上之裝置。於北極施實驗，可不用迴轉之器械。只以地球自轉亦可想其裝置亦能迴轉如前也。如所劃三百六十度之圓盤(甲乙)。不必迴轉。漸見振子如變其原來之振動面。實則與前試驗同一理。乃圓盤與地球共迴轉振子毫不變其自己之面也。此際亦如前條由磁鍼得其確證而一晝夜二十四時間。全盤迴轉三百六十度。卽地球一時間迴轉十五度。一晝夜迴轉三百六十度之理也。

但此不過由理論上推想之。至於所云往北極之頂施行如此試驗。固實際所不能。故只得於北極與赤道之間。如吾人所居住之地方施行之。與於北極地方亦同一理。唯所異者於通常地方。所行試驗。二十四時間。不能周轉三百六十度耳。今於第79圖說明其所以然。卽NEHBGD爲地球。NB爲地軸。GH爲赤道之半圈。O卽假定爲吾人所居住處。在DE之並行圈上。NOSB乃過O地方之子午線也。茲於O之

一點。引AO之直線。與子午線於O點相切。其直線卽於O點對水平之北極線。於A點交於地軸。今於OA線方向。振動振子。經一定時間。匝地球自軸。吾人之居處O轉至L。此時振子之振動面。對某恆星振動。固無變其振動面。故於O點時循AO振動。卽於L點亦平行於AO。而振動於FL之方向。但水平之北極線。固不論在何方向。皆趨於地軸之極上。故振子之振動面FLZ。與由子午線L上所引水平之北極線LA。成ALF之角度。而地球迴轉之角度愈增。其北極線與振子振動面間之角度遂亦愈大。但若近於赤道。其差異卻少。終至赤道直下。北極線全與地軸平行。不見毫末之差。實行此試驗。大約用六十七米突長之線。下吊二十五瓩之振子。若無風衝動。振子可無變更振動面之虞。如阻滯之力。僅懸點之摩擦。空氣之抵抗。振動之得保續五六時間。

第79圖



第四章之問題

1. 阿梯吾特器械之兩端。各加10克重之錘。若落下時以20秒糎之加速度。問作用於錘之力若干。

2. 阿梯吾特器械之兩端。一錘50克重。一錘48克重。重力之加速度爲980秒秒糎。全體若以25秒糎之加速度落下。要用若干之力。

3. 於阿梯吾特之器械兩錘之重量各爲100克。若於一方載5克之加錘時。其加速度若干。又落下3秒間之距離。及第5秒之路程各如何。

4. 以同上之器械使3秒間落下72尺之距離。問兩錘重量之比如何。

5. 以同上之器械。兩錘各懸55克。及45克。當系之運動中。兩錘及於滑車之壓力爲99克。試證明其理。

6. 於上之器械大錘17磅。小錘15磅。8秒間運動後。將大錘之重量減却8磅。問幾秒之後運動之方向始轉倒。

本題所用之單位爲磅。乃英國制之單位。重力加速度亦須改爲英國制。

7. 以120秒米之速度。由150米高。發射於水平之彈丸。當達於水平距離若干。又其落下所要之時間如何。

8. 有二童在平地上拋球爲戲。甲童以與水平成60°之角拋球。7秒之後。乙童接球。問此球達於最高之距離若干。及甲童拋球時所與之速度如何。

9. 有直立之塔。由相隔5米之處。於45°之傾斜角。以30秒米之速度投物。恰打塔之頂點。問塔之高若干。

10 於256尺之高。以80尺之速度。向水平投射物體。問該物體當於水平距離幾何之處。達於地面。又其時之速度幾何。

11. 離地100米之高有輕氣球。於水平線上每秒以8米之速度進行。乘於其上之人。向上方以40米之速度發礮之彈丸。10秒後在地上幾何之高有幾何之速度。

12. 有彈丸以490米之速度發射。達水平面上之距離12250米之處。問發射之方向如何。

13. 於地面上置大礮。礮口與地面成30°之傾角。每秒若以100米之速度發礮。彈丸當於幾米突之距離達於地面。又自發彈丸至達於地面所費之時間幾何。

14. 有物體每秒以3米之速。運動於直徑42米之圓週上。其求心加速度若干。

15. 長1米之線端。結質量100瓦之石。使此石每秒以5米之速度。爲圓運動。問絲之張力(即石引絲之力)如何。

16. 欲試絲之强。以其長一米突。其端繫五克之重。振回之。及一秒間三迴圓周之速。絲始斷。問絲之强如何。但圓運動不關於重力。

17. 地球24時間自轉一次。若自轉忽止。於赤道上980秒秒糎之加速度。當生如何之變化。

18. 於緯度45度之遠心力若干。又其遠心力抵抗地球之重力若干。

19. 有二個振子。同一時間內。一振動20回。一振動50回。問兩振子之長。其比各如何。

20. 有振子長0.99384米。於某地一秒一振。問5秒一振之單振子。其長若干。

21. 一晝夜遲5分之時辰儀。其振子之長99.1糎。今欲正此時刻。其振子之長。要短縮若干。

22. 於某地長0.991米突之振子。一晝夜振動86400回。求其地之重力加速度。

23. 有人帶振子時辰儀坐輕氣球而上。輕氣球昇上之加速度。若每秒1呎。則該時辰儀每時間當加速幾秒。

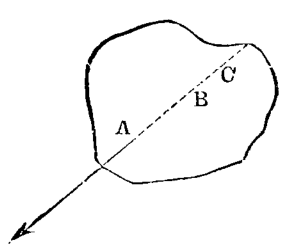
第五章　剛　體 Rigid body

58. 働於剛體之力　物體受働力。其形狀與體積不生變化者。曰剛體。如金屬熱至若干度。失其剛體之性。或受大力作用。變其體積與形狀。又如橡皮等韌體受力作用。變其運動之形態。且物體各部分互相變其位置。因之物體或變其體積或變其形狀此等物體各部分。互相變其位置者。曰伸縮 Strain 生伸縮之物體。變化複雜。難現其眞相。惟剛體受力作用無變化。故研究其力作用之結果甚簡單。然於世間物體受力作用不生變化者。殆無之不過所謂剛體者。只就想像上於固體中。働之之力小者。其體積與形狀。或無變異。此等物體。可看作剛體。如木石金屬等物體。皆剛體也。

力作用於物體時因力所作用之方向物體之變動有異形故力所作用之處須看作一點。方便於研究此力所作用於物體中之一點。爲其力之作用點。point of application

力之三要素　働於物體之力。以其大。與方向。及作用點。三者而定因名爲力之三要素。

第 80 圖

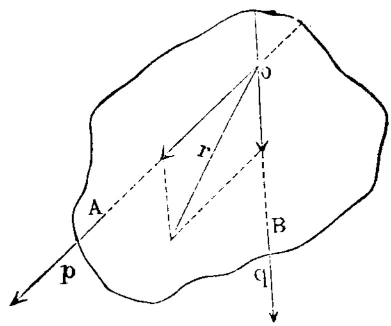


依實驗働力於剛體時通過作用點所延長之直線中。不論以何點爲力之作用點。其結果常不變。此線爲

作用線。例如某力F。働於A點者。郎看作働於AF之方向延長線上B.C等點。其結果亦同。

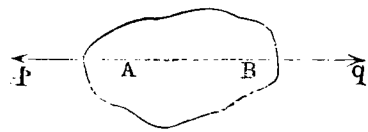
59. 二力在同一平面者　有二力p及q作用於物體中之二點A及B時。求其合力。先以二力之作用點。移於作用線之交點O。郎p,q二力作用於A,B二點者。得看爲作用於O之一點。而後由前39條組合之法得求其合力r。

第 81 圖



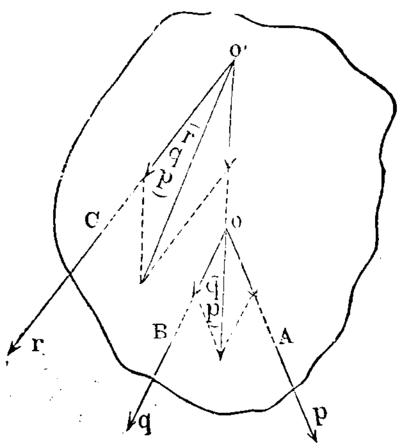
由此推之。働於物體之二力。若相均其方向不可不反對。且要在一直線上。(82圖)

第 82 圖



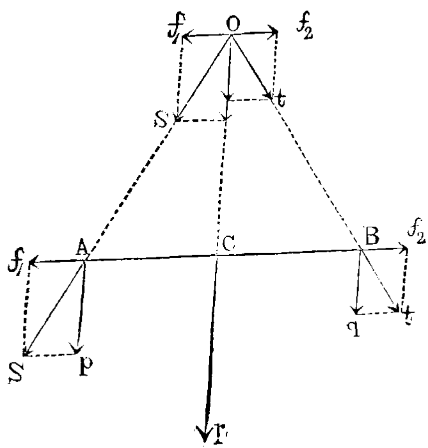
又三力同時作用者。先求內之二合力。次以所餘之一力。更與其合力。求總合力。與前39條所述者同。(83圖)此外多力作用於物體者。亦逐次得求其合力。

第 83 圖



60. 平行力之合法　二力平行時。其作用線無合於一點。不能適用前法。須用次法求合力。以平行二力 p 及 q 爲働於剛體AB二點之力。今於AB反對之方向。假設有兩相等之反對力 f_1、f_2（力若作用於反對。且相等者。有作用如無作用。故卽加此二力。其結果亦不變）次求 p, f_1, q, f_2 四力之合力。而 p f_1 二力之合力爲 S。q, f_2 二力之合力爲 t。又 S, t 二力之合力。卽 p, f_1, q, f_2 四力之合力。故卽 p, q 二力之合力也。

第 84 圖



求 S t 之合力。卽如前條所述。先移之於作用線之會點O。再分解爲平行於AB線。及平行於 p 與 q 之二力。則 S 者 p 及 f_1 之合力。t 者 q 及 f_2 之合力。而 f_1 與 f_2 其方向正反對。故其合力爲零。故畢竟 p q 二平行力。所作用於AB之合力者。當等於作用於O點 p q 二力之合力。故此合力 r 之大。當等於 $p+q$。其方向當平行於 pq。其合力之作用線。對AB線上。當在C點。但前者不過以圖形示力之方向。至力之作用點。於ACBC之間。有如何之比。由圖形亦得求之。圖上OAC ASP

爲相似形。故

$$AC : CO :: (Sp=f_1) : p$$

$$\therefore \qquad AC=\frac{CO\times f_1}{P} \qquad (a)$$

又三角形OCB與Bqt。亦相似形。故

$$BC : OC :: (tq=f_2) : q$$

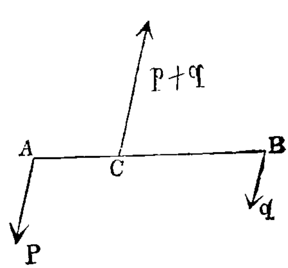
$$\therefore \qquad BC=\frac{CO\times f_2}{q} \qquad (b)$$

以(a)式除(b)式。則

$$\frac{BC}{AC}=\frac{p}{q} \text{ 卽 } BC : AC :: p : q$$

卽C點於AB線上。p與q互爲逆比例內分之。例如p若爲q二倍時。AC者BC之二分之一。又$p=q$時。AC＝BC。C於AB線上二等分之點也。由上證明。可知若於pq反對之方向。以與p q合力相等之力。作用於C點時。則此等之平行力當相均。

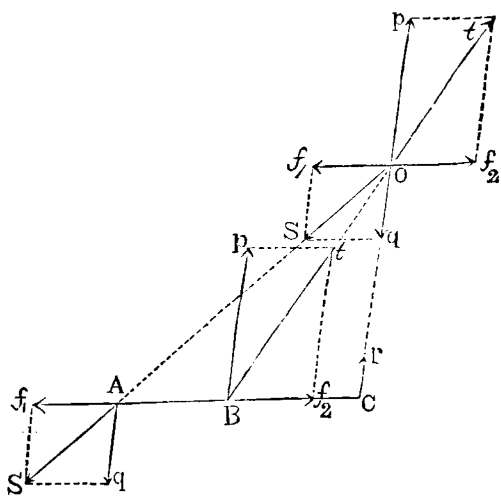
第 85 圖



次p q以平行力作用於反對之方向。其大互異者。($p>q$時。)作圖法亦與前同。先於AB之兩端。加f_1 f_2二力次延長其合力S,t會於一點O。移S,t二力於O之交點。更分解爲f_1, f_2與原力p q。而f_1 f_2二力相等。且方向正反對。故爲零。故所作用於O點之力。但加p q二力可已。然就圖觀之。作用於O點

之力 p 與 q，方向互反對。故 p 若爲正號，則 q 爲負號。即其合力 $p-q$ 也。又以 $p>q$ 故。其合力當在 p 之方向。至其 C 點之位置。由次式得證明之。

第 86 圖



$\triangle OAC$ $\triangle ASp$ 爲相似形。

$$\therefore \quad AC : CO :: (Sq = f_1) : q$$

$$\therefore \quad AC = \frac{CO \times f_1}{q}$$

又 $\triangle OCB$ $\triangle Bpt$ 爲相似形。

$$\therefore \quad BC : CO :: (tp = f_1) : p$$

$$\therefore \quad BC = \frac{CO \times f_1}{p}$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AC} = \frac{\dfrac{CO \times f_1}{p}}{\dfrac{CO \times f_1}{q}} = \frac{p}{q}$$

$$\therefore \quad BC : AC :: p : q$$

即 C 者。於直線 AB 上。以 pq 互爲逆比例之點也。

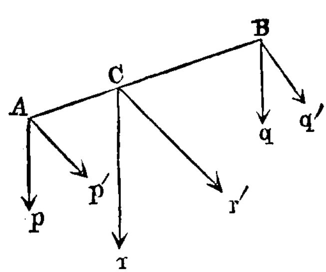
例如 p 爲 q 之二倍時。AC 爲 BC 之二分之一。

注意　若 $p=q$ 時。其合力之大為零。蓋以 $p.AC=q.BC$。故AB不可不等於BC。但C若在AB外。則AC萬無等於BC之理。若 $AC=BC$ 則C不可不在無窮遠之處。即 $AC=BC=\infty$。故其時萬無二力相等之結果。若二力相等者。為偶力。於次節述之。

61. 偶力 Couple　前節注意中所載兩力之方向反對。而大相等者。曰偶力。凡偶力作用於物體。必起迴轉運動。如捲時辰儀之撥條。兩指之力。以偶力迴轉錶匙。又以轆轤捲上船錨時。於轆轤之兩側。以力壓其柄者。偶力也。又陀螺之軸。夾於兩掌之間。欲使其迴轉時。以兩掌擦之。或以兩指撑之。皆偶力也。

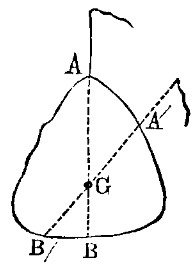
62. 重心 Centre of gravity　物體之各部。受地球引力之作用。被引於地球中心之方。此等之力皆得看作平行力。故其合力之作用線。乃一定之方向者。今假定物體以AB二質點而成。作用之力 p q。其合力為 r。即等於 $p+q$。其作用線通過AB線上。以 pq 之力互逆比例於內分點C。得定C之點。次將物體迴轉至某角度。則働於AB之重力為 p' q' 之方向。其合力為 r'。亦通過C點。而其大為 $p'+q'$。故此事推廣思之。凡働於物體各部重力之合力。不論位置之如何。常通過一

第 87 圖



定點此點爲物體之$\boxed{\text{重心}}$故地球之引力雖作用於物體之各部得看作地球引力以鉛直之方向作用於物體之重心即物體之全物質關於重力者得看作全物質之各點集於重心一點也。

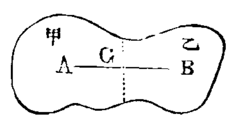
第 88 圖



扁平物體之重心由實驗上容易求之即於物體之一點A。繫系鉛直垂之重力當在糸之方向AB線中(第88圖)次於AB線外之一點A′。吊物體重心則在A′B′上。故AB, A′B′之會點G。即重心也。

等物質物體之重心(即各部之密度均等者)理論上容易得求之。

第 89 圖



一物體分爲二部分若知各部之重心。亦得求其合物體之重心即結二部重心之直線求二部質量逆比例之內分點即物體之重心證明之法。分物體爲甲與乙。A爲甲之重心B爲乙之重心若以甲之質量爲m。以乙之質量爲m'。則作用於甲之重力爲mg作用於乙之重力爲$m'g$。因二力相平行。故其作用線AB上所分之點G。有次之關係。

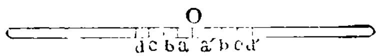
$$AG : BG = m'g : mg \text{ 即 } AG : BG = m' : m$$

又若$m = m'$時。因$AG : BG = m' : m$故$AG : BG = m : m = 1 : 1$。即$AG = BG$。而G爲AB之中點。

此原理求重心時應用最廣.

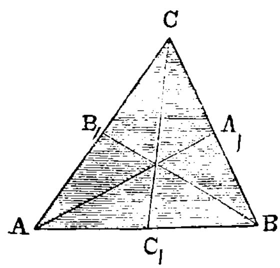
棒之重心　等物質而小之棒。其重心在中央點。如圖。AB為棒其中央為O。即AB之重心也。何則反而言之。由O任意於兩邊引等距離。如於a與a'其量均等。故所作用之重力亦等。故其合力當在aa'之中央即過O點。此外即就bb'cc'求之。亦恰合O之一點。故O者AB之重心也。

第 90 圖



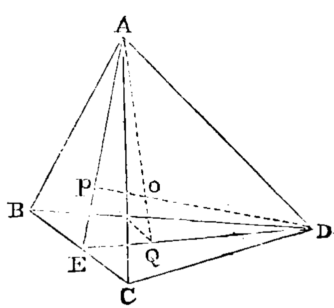
三角板之重心　同厚之三角板。其重心在三中央線之交點上。蓋就三角形之一邊AB思之。平行於AB者得分作無數之細片。各細片之重心。固在其各中央點。故三角形之全物質。當聚於中央線CC_1上。次平行於AC及BC之方向。亦在BB_1 AA_1上也固矣。故三角板之重心。在其三中線之會點G。又由幾何學所證明可知$GC_1=\frac{1}{3}CG$

第 91 圖



四面體之重心　得看作無數之三角板重疊而成者。故所求之重心。亦可知其即在三中線之交點。(各頂點與對面三角形之重心相結直線之交點。)自各角點至其交點。與各底面之

第 92 圖



重心至交點之比。猶3：1。其理證明如次。

以P為ABC三角形之重心。故P點在AE中線之上也明矣。故DPAQ當在同一平面上。今以其交點。為O。則就EAD三角形思之。以

$$AE : EP :: DE : EQ :: 3 : 1$$

故直線PQ平行於AD

$$\therefore \quad AD : PQ :: 3 : 1$$

$$\therefore \quad \triangle AOD \backsim \triangle POQ$$

$$\therefore \quad AD : PQ :: AO : OQ :: DO : OP :: 3 : 1$$

圓環之重心　就直徑兩端一對相等之部分思之。其重力之合力通過圓之中心。故圓輪之重心。在其中心。

圓板之重心　圓板得看作圓輪之厚等於半徑者。故圓板之重心與圓輪之重心同。卽在其中心上。

空球之重心　以圓環之直徑為軸所迴轉之周圍。卽球面形。而其直徑之重心。卽在直徑之中央。故空球之重心。亦卽在其中心。

球之中心　因圓板之重心。亦得推想至球之重心。卽在球之中心。

直圓壔之重心亦在軸之中點。

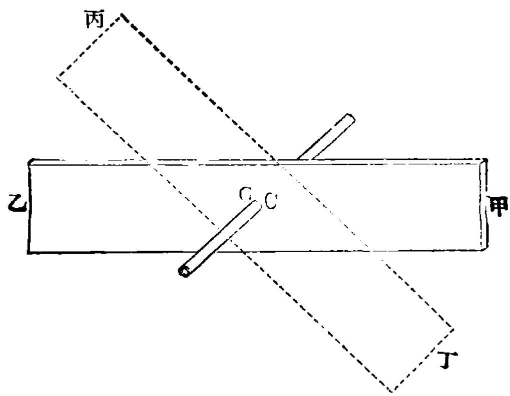
63. 物體之穩定要則 Condition of Equilibrium

凡物體之穩定有二種。以一點支持者。其穩定為平均。以多點支持者。(卽支持以面)其穩定為支止。

1. 以一點支持物體。其支點在通過物體重心之鉛直線上者。其重心與支點之關係有三。

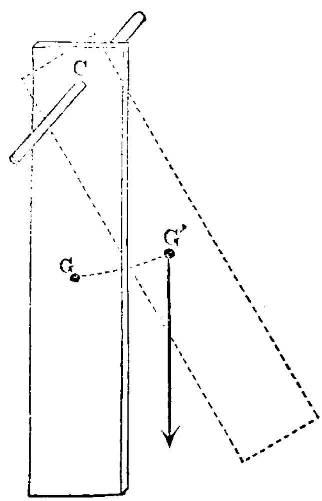
(a) 重心與支點同在一處時。不論物體之位置如何。常能平均。是曰隨處平均。Neutral equilibrium 如第93圖旋迴軸穿過物體之重心。即支點與重心同在一處。故由甲乙之方向迴轉丙丁之方向。亦穩定如前。

第 93 圖



(b) 重心 G 在支點下者。支點即如圖上穿過 C 以繫垂之者。縱使變易其位置。外力之作用若止。物體仍復歸原位置。此等平均為安定平均。Stable equilibrium (第 94 圖)

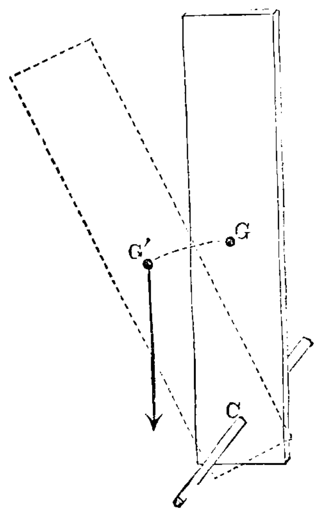
第 94 圖



(c) 重心 G 若在支點之垂直上。物體變位之後。無復其原位。反向他位置。此等平均為易變平均。Unstable equilibrium (第

95圖)

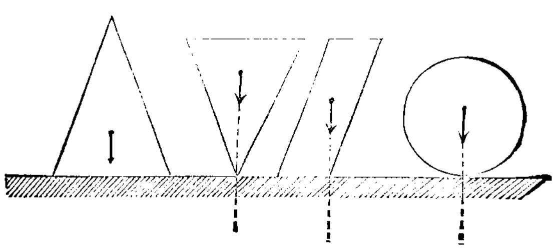
第95圖



2.　於平面上物體所以能靜止者，以作用於物體之重力，與其面之抵抗能正反對互相平均故也。然則物體能穩定者，通過重心之鉛直線，須不出相接面之外，此等重心鉛直線與支撐面之關係，亦有三種。

(a)　加力於物體，物體卽變易其初之方向，自重心至其面之距離常相等者，爲隨處支止，如第96圖丙。

第96圖



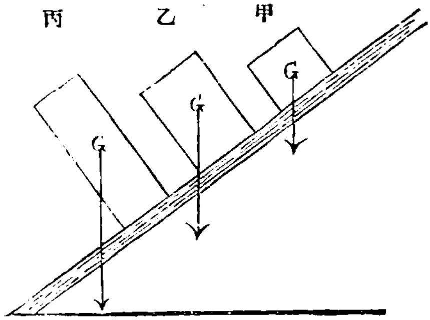
(b)　縱傾斜物體，過物體中心之鉛直線，若不易出其底外者，物體仍能復其原位，此爲安定支止，如第96圖甲。

(c)　稍傾斜物體，過重心之鉛直線，卽出基底外者，則物體易顚倒，此等平均，爲不安定支止，如第96圖乙。

總而言之，物體之穩定者，物體之重心愈低，支持面愈廣，其質愈重，基礎愈確固。例如圓錐及方錐，比同高之圓壔及

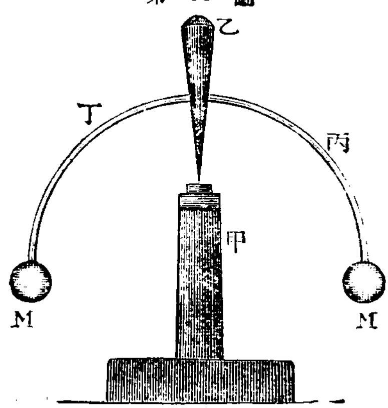
稜柱必確固。又如97圖三者同一物質之物體。甲之支撐面最大。即以其支板傾斜至若干度。尚能固定原處。蓋以通過重心之鉛直線。不出支撐面之範圍外也。乙之支撐面雖與甲同。因物體比甲高。故重心高。若與甲傾斜於同方向。已在將倒未倒之際。觀圖上所示重力所作用之垂直線自明。是爲臨界之位置。至丙之物體支撐面小。而重心高。最不安定之物體。若稍傾斜。則通過物體重心之垂直線已出支撐面之範圍外。今也傾斜至與甲同方向。其顛倒也必矣。

第 97 圖



兒童玩具之不倒翁。不論顚倒於何方向。仍能起立。卽由其重心在下方故也。又如第98圖。具有鐵尖之木片。以其下端豎立於支臺上。必顚仆。以其重心在支點上。易變平均故也。但若以弧線丙丁。貫木片乙。兩端各附以鉛球M。木片與鉛球之重心。在鐵尖之下。因得安定平均。不再仆倒。

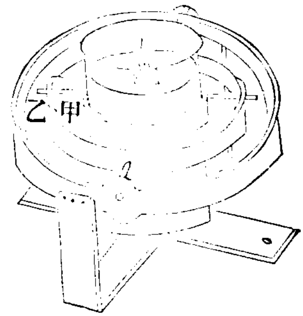
第 98 圖



又如船用懸燈。亦由上文之理。

而構造者也.卽如第99圖.以二輪懸垂之.其內輪甲.支持懸燈.以二鍼爲軸.一端各固內輪之兩邊.他端穿於外輪.左右迴轉時.懸燈仍安定如故.不使俱轉於左右.又以二鍼固外輪.縱前後迴轉.懸燈亦不變其原位置.內外兩輪之鍼條.恰交互成十字形.且懸燈之重心在下位.故船縱遊動於東西南北.而懸燈隨重心.常得下垂.無轉倒之患.

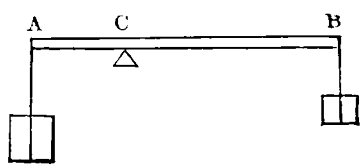
第 99 圖



64　力之能率 moment of force　支剛體之一點.加力於他點.使之動於其支點之周圍.其所作用之力.不止關於其力之大.且因支點至働點之距離而異.例如舉長梯使立.於其上端之點加力.與近於下端之點加力.大有差異.卽如此時同一力作用.其力之大小.有關於自力點至支點距離之遠近也.

又如槓杆 AB.支之於 C 點.能平均時.固因 AC,BC 距離之大小.於兩端支配之力反比例於其距離也.由前節所論平行力自明.

第 100 圖

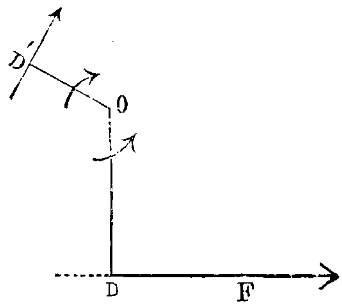


今又由力與距離之關係.而論力之能率.如 $P \times AC$ 之相乘積者.P 對 C 之能率.$Q \times BC$.爲 Q 對 C 點之能率.其定義曰對一點 O 之力 F.其能率(第 101 圖)卽由 O 點下於 F 垂線

之長與此力之强之相乘積。此垂線爲能率之臂。

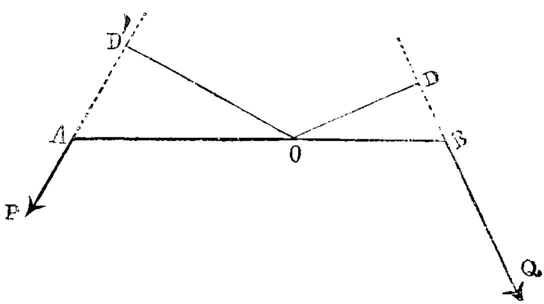
數力作用於剛體上之一點時。迴能率之臂於與錶鍼反對之方向者。其力之能率爲正。迴於與錶鍼同方向者。其力之能率爲負。

第 101 圖



凡力作用於剛體。其合力之着力點。即兩力對該點有相等之能率也。如第102圖。若O爲PQ合力之着力點。則OD'×P。常等於OD×Q。

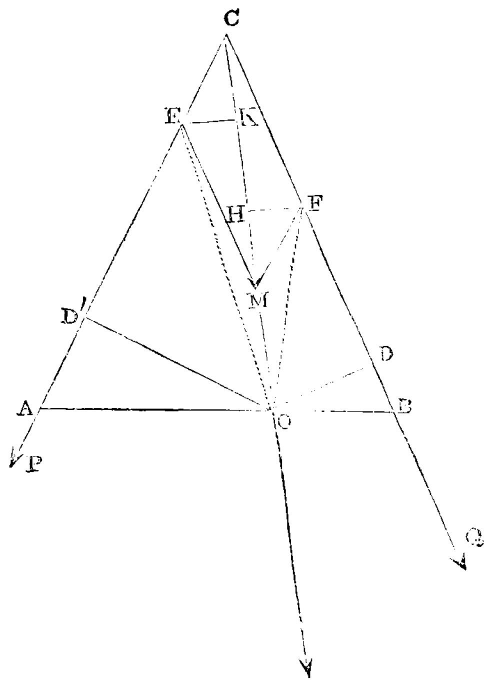
第 102 圖



其理即如第103圖所示。AB兩點。受PQ兩力作用。其合力即依59節引延兩力。會合於一點。移PQ兩力於C點之處。使CE等於P。CF等於Q。以CE及CF之大。作平行四邊形。得CM之對角線。更延長交於O點。因知O點爲其合力之着力點。即支點。今欲證對O點P之能率。等於對O點Q之能率。但證P與垂線OD'之相乘積。(由O點引於P方向之垂線)能等Q與垂線OD(由O點引於Q方向之垂線)之相乘積可也。

今就平行四邊形CEFM思之。$\triangle CEM=\triangle CFM$，故$EK=FH$，更結OE OF兩點線，$\triangle COE$與$\triangle COF$兩三角形面積乃相等者也。何則。CO乃兩三角形共通之邊，FH等於EK，凡三角形基底之長乘高，以二除之，若相等時，則其面積亦相等，幾何學上之定則也，此兩三角形既相等，然則此

第 103 圖



兩三角形即以CF及CE爲底線，以O爲頂點，由之引垂線於底線上，(即引垂線於其延長線上)即其高，以高乘底亦相等。故OD乘CF與OD′乘CE者。爲等積，但$CE=P$, $CF=Q$，故

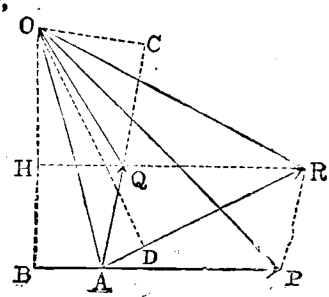
$OD\times Q=OD'\times P$,

上專就O在支點上者言之。次推廣其理說明分力能率。與合力能率之關係。

第一關係於任意一點上諸力能率之和，等於其合力之能率。今有二力PQ。作用於A。其關於O點能率之和，等於其

合力關於O點之能率。

第 104 圖



如104圖。由O點引垂線OB,OC,OD,於AP,AQ,AR,則關於O點

P之能率。 $AP\times OB$

Q之能率。 $AQ\times OC$

R之能率。 $AR\times OD$

就本圖觀之。各能率皆為正。而

$AP\times OB=2\triangle AOP$ ……………………(1)

$AQ\times OC=2\triangle AOQ$ ……………………(2)

$AR\times OD=2\triangle AOR$ ……………………(3)

今欲證 $AP\times OB+AQ\times OC=AR\times OD$

但證 $\triangle AOP+\triangle AOQ=\triangle AOR$ 可已

茲以OB,QR之交點為H。

$AP\times OB=AP(OH+HB)=AP\times OH+AP\times HB$

但以 $AP=QR$

故 $AP\times OB=QR\times OH+AP\times HB$

而 $QR\times OH=2\triangle OQR$(∵以三角形之底乘其高故)

$AP\times HB=$平行四邊形APRQ

故由(1)式 $2\triangle AOP=2\triangle OQR+$平行四邊形APRQ

兩邊以(2)除之

$\triangle AOP=\triangle OQR+\triangle QAR$

兩邊加以$\triangle AOQ$

$$\triangle AOP+\triangle AOQ=\triangle OQR+\triangle AOQ+\triangle QAR$$

即　$\triangle AOP+\triangle AOQ=\triangle AOR$

∴　$AP\times OB+AQ\times OC=AR\times OD$

又如O點在他點上者如105圖亦得證之,

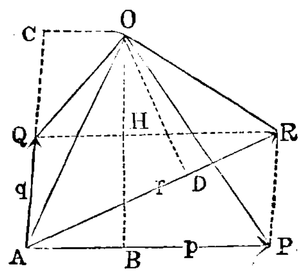
對O點

Q之能率,　$OC\times(-Q)$

P之能率,　$OB\times(+P)$

合力R之能率,　$OD\times(+R)$

第 105 圖



本圖對O點Q之能率,乃迴轉於與錶鍼同方向者,故爲負,餘皆正,故欲證本圖各能率之代數和,等於合力之能率,但證次式可也,

$$OB\times p-OC\times q=OD\times R\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而　$OB\times p=OH\times QR+HB\times AP=2\triangle OQR+2\triangle RAP$

又　$OC\times q=2\triangle OQA$,　$OD\times r=2\triangle OAR$

故欲證(1)式但證次式可也,

$$2\triangle OQR+2\triangle RAP-2\triangle OQA=2\triangle OAR$$

兩邊以2除之

$$\triangle OQR+RAP-\triangle OQA=\triangle OAR$$

而　APRQ爲平行四邊形,故$\triangle RAP=\triangle RAQ$

∴　$\triangle OQR+\triangle RAQ-\triangle OQA=\triangle OAR$

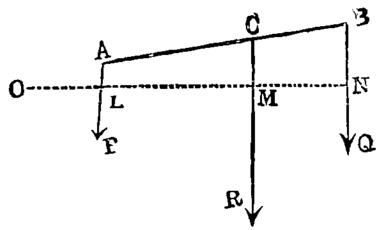
因得證。

注意　PQ二力之着力點異者。欲證上之定理。先求二力延長線之交點處。移此二力之著力點於其處。故與前同法得證之。

力之數二以上者。數力之內。任意以二力能率之和。各證其等於合力之能率。又於此合力之內。任意以其二力能率之和。再證其等於合力之能率。最後合力之能率。即其總合力之能率。

次PQ二力平行時。PQ二力之關於O點能率之和。等於其合力R關於O點之能率。

第 106 圖



證明之如次。

關於O點

$$P之能率 = AP \times OL$$

$$Q之能率 = BQ \times ON$$

$$R之能率 = CR \times OM$$

而
$$\begin{aligned} AP \times OL + BQ \times ON &= AP \times (ON - LN) + BQ \times ON \\ &= (AP + BQ)ON - AP \times LN \qquad (1) \end{aligned}$$

但以R乃PQ之合力故 $AP + BQ = CR$。

又由幾何學之定理

$$AC : CB = LM : MN$$

又由60條　$AC : CB = BQ : AP$

故　$LM : MN = BQ : AP$

由之　$LM + MN : MN = BQ + AP : AP$

卽　$LN : MN = CR : AP$

故以　$AP \times LN = CR \times MN$

(1) 式得變之如次。

$$AP \times OL + BQ \times ON = (AP+BQ)ON - CR \times MN$$
$$= CR \times ON - CR \times MN$$
$$= CR(ON - MN) = CR \times OM$$

故　$-AP \times OL - BQ \times ON = -CR \times OM$

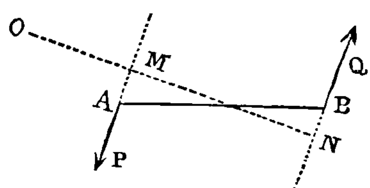
P,Q之方向反對時。或O之位置種種變時。P,Q,R之關於O點之能率。或爲正。或爲負。證明之法全同。

第二　關於任意一點偶力之能率。等於以其力乘二力間之距離。

P,Q二偶力關於O點之能率等於$BQ \times MN$證明如次

右圖關於O點

第107圖



P之能率 $-AP \times OM$

Q之能率　$BQ \times ON$

而AP,BQ之大相等,故二者能率之代數和。$-AP \times OM + BQ \times ON = BQ(ON - OM)$

$$= BQ \times MN$$

第五章之問題

1. 於剛體AB二點。働以平行二力。一20功。一60功。AB之距離爲24糎。問此二力同方向時之合力。及異方向時之合力各如何。

2. 三平行力P,Q,R順次排列在一直線上。働於三點A,B,C。其各力之大。P爲120斤。Q爲40斤。R爲80斤。P與Q之力同方向。R力之方向在其反對。AB二點之距離12寸。BC二點之距離8寸。求其合力。

3. 一直線上順次有A,B,C,D,E五點。其相隣二點之距離。各爲6寸。働於此五點之力爲1,2,3,4,5斤。同方向。相平行。求其合力之着力點。

4. 長3尺之棒。於其兩端。吊20斤及40斤之物體。棒保水平時。支點當在於何處。又問棒之重若爲6斤。則支點之位置如何。

5. 一邊a寸之正三角形。於其各頂點作用以同方向之平行力。若働之之力。各爲P克。其合力如何。

6. 以同質同大三條之棒。作二等邊三角形。其等邊各爲10寸。底邊12寸。問自頂點至重心之距離。

7. 有同質同厚平行四邊形之板。其重40克於一角點掛以80克之分銅。若於其相隣之角點上。結以絲懸之。板當取如何之位置而靜止。

8. 以15寸之鐵線。由起點4寸之處。折成直角。由他端

6寸之處。亦以同方向折成直角。於起點以線吊之。鐵線靜止時。第二屈曲點。恰在繫系延直線之下。試證明其故。

9. 結繩於直角三角板ABC之直角頂點B吊之。則於其靜止時。繩之延長線與AB,BC二邊所成之角。等於A及C角。

10. 以中線二等分三角形。所生之二個三角形之重心與重心連結之線。其長等於底邊之長之三分之一。試證明之

11. 求等質梯形板之重心。

12. 正方形ABCD之板。一邊12糎。以二對角線分為四個三角形。若切去其一。其餘之部分重心之位置如何。

13. 有一邊12寸之正三角形。於其一邊上。外側添正方形。求其重心之位置。但板為等質者。

14. 直徑30糎等質之圓板。內接此圓以直徑10糎之圓若將內圓切去。其餘部分重心之位置如何。

但內圓要接在大圓之圓緣。

15. 有直圓柱高合底面直徑之3倍。在一平面上。該面要傾至幾度。直立之圓柱轉倒。但圓柱所置之平面。要有摩擦。不使滑落者。

16. 有圓板棹。周邊直立四條之脚。問於二脚等距離之緣。載若干之重量。棹始轉倒。

但棹之重量為60磅。

17. 有棒長9呎，支之於由一端4呎之點，棒保平衡。今若以棒2倍之重量，加於一端，他端加三倍之重。支點當在於何處。

18. 長1.2米突，重800克等質之棒。於其兩端加以100克及150克之重，問支於何點，棒始平衡。

19. 有AB,BC,CA三力。作用於一剛體時。其合力爲偶力，其大比例於ABC三角形之面積，試證明之。

20. 梯子靠於垂直平滑之壁，與水平成四十五度之傾斜，此時地面與梯子下端之摩擦力。等於梯重之半。試證明之。

第六章　功用及能力

65. 功用 Work　物體受力作用。循力之方向。過若干之距離。爲此力所生之功用。如人曳車。舉物於高處。力之功用也。凡不論所作之事業。惟以多少之力。作用於物體。物體生運動者。於物理學上爲功用。凡功用不止對人力而言。即藉器械之力。亦生功用。如蒸汽機關。作種種之事業。水車舉重物等是。又火藥發火飛彈丸。火藥所爲之功用也。物體落下。地球引力所爲之功用也。

功用有難易。有大小。例如五斤之物。舉一尺之功用。爲一斤之物。舉一尺之五倍。即等於一斤之物五個。各舉一尺之功用也。又一斤之物。舉十尺高之功用。一斤舉一尺之功用有十倍也。何則。一斤之物舉十尺之功用。可看作一斤之物。先舉一尺。次更舉一尺。陸續以同功用行之十回者也。今一斤之物。抗重力以手揚之所要之力爲一斤。由是凡以一斤之力。作用於物體不絕者。若物體被動於一尺之距離。則其所相當功用之量。稱爲一斤尺之功用。

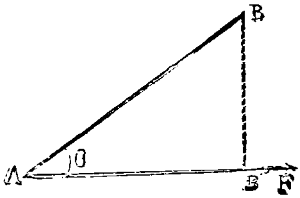
總之計功用之量 W。皆以作用於物體之力 F。與物體受作用所移動之距離 S 之相乘積。以式表之如次。

$$W = F \times S$$

但着力點所移動之方向。若與力之方向不同。或兩者方向成角度。則其移動之距離。以所示力之方向之直線上之射影。與其力之相乘積。表此力所生之功用。例如 F 之力。作

用於物體之一點A.A點所移動AB之距離。對AF上AB之正射影AB′也。

第 108 圖



故F力所爲之功用W

$$W=F\times AB'$$

$\angle BAF=\theta$ 故 $AB'=AB\cos\theta$

$$\therefore\quad W=F\times AB\cos\theta$$

又若對斜面之距離。求力之功用者。則因傾斜角愈大。過同一之距離。要以愈大之力。其所費之力即$F\times\sin\theta$(因其角度愈大。其垂線亦長故也。詳處見斜面章。)

又若力之方向。與運動之方向反對者。則以F力所生功用之量爲$-F\times S$。此即謂物體抵抗F力所生之功用也。

力F働於質量m靜止之物體不絕。其移動之距離。以與作用之力同方向。故F力所生功用之量爲$F\times S$但以力作用於物體不絕。必生加速度。若以所生之加速度爲a。物體進S距離後。得V之速。則以

$$F=ma \qquad V^2=2aS$$

故
$$W=F\times S=\left(m\times\frac{v^2}{2S}\right)\times S=\frac{1}{2}mv^2$$

即靜止物體以加速度運動者。有關於v之速故對此物體所生功用之量。等於$\frac{1}{2}mv^2$。

次就計算功用之例。舉其二三。

例(1) 質量m之物體．因重力落下h之距離時．問重力所生功用之量．

$F=mg$ 距離$=h$ $W=mgh$

例(2) 質量m之物體．抗重力舉至h之高．其功用之量若干．

此時反對重力之方向．固要作用以力．但不論其力若干．物體舉至h之高．其功用之量爲$-mgh$也．改言之．即物體抗重力所生功用之量爲mgh．

例(3) 物體動於水平方向之功用．

此時運動之方向．與重力之方向成直角．故抗重力所爲之功用爲0．今於物體靜止時．以力働之不絕．至某距離得v之速．則物體所爲功用之量．當等於$\frac{1}{2}mv^2$．但若働於物體之力極微．過某距離後．其v之速當爲0．則其功用之量亦自等於0．惟物體動於一面上．必生反抗運動之摩擦力．故此時物體動於水平面．當對摩擦力生功用．

66. 功用之單位 因測功用之量。即以力與距離之相乘積。故以單位之力。作用於物體所移動於單位距離者。其功用之量。即功用之單位。但以所定力之單位。與距離單位有兩種。故分功用單位亦爲兩種。一曰絕對單位一曰實用單位

絕對單位。即C.G.S.單位。如以1功之力所移動之距離爲1糎。則其功用之單位。爲『1愛格Erg.』

實用單位。如以1瓩重之力。所移動於1米突之距離者。

爲1瓩。若將實用單位。改爲絕對實位。則

1瓩 $=980\times1000\times100$ 爱格

[工程] 由器械所生功用。其時間有長短。因以工業器械於單位時間所生功用之量。名曰『工率』power逐以工率得測器械之作用。通常所用工率之單位曰『馬力』horsepowre馬力於法制所定。每秒有76瓩之效果。

[例1] 重3瓩之人。向傾斜10度之坂路。進行50米突。問抗重力之功用若干。

(解) 由對數表 $\sin 10°=0.1736$

$\therefore\quad W=F\sin 10°\times S=3\times0.1736\times50$

[例2] 由深60呎之坑中。一晝夜吸出5000噸之水。要用幾馬力之機關。但英國一馬力 $=550$ 呎磅。一噸 $=2240$ 磅。

(解) 5000噸 $=5000\times2240=11200000$ 磅。

1晝夜 $=24\times60\times60=86400$ 秒。

每秒所吸出之水 $=\dfrac{11200000}{86400}=129.63$ 磅。

故每秒間所爲之功用 $W=F\times S=129.63\times60=7777.8$ 呎磅

所要之馬力 $=\dfrac{7777.8}{550}=13$ 馬力强。

[例3] 沿傾斜30度之斜面上。引揚20瓩之物體於15米之距離。問所生功用之量若干。但斜面與物體間之摩擦力。等於4瓩之重。

(解) 抗20瓩之重力所生功用之量。

$$W=F\times\sin\theta\times S=20\times\sin 30°\times15$$

但 $\sin 30°=\dfrac{1}{2}\quad\therefore\quad W=20\times\dfrac{1}{2}\times15=150$ 瓩米。

又反抗4瓩之摩擦力所生功用之量。

$$W=4\times15=60\text{ 瓩米}$$

故反抗重力及摩擦力之功用 $=150+60=210$ 瓩米。

67. **能力或曰挨涅魯機** Energy 物體能生功用者。必有生功用之原因。卽曰『能力』如人之生也有能力。死則無之。故名曰能力者。卽取此意也。其所生功用之能力有種種。例如熱能運轉蒸汽機關。飛行之彈丸。可以破鐵艦。轟城堡。水能運轉水車。空氣能進動帆船。皆是也。要之凡物體能生功用者。皆有能力存焉。廣而言之。物體之運動也。熱也。光也。電氣也。種種形狀。無不根於能力。

68. **位置之能力。運動之能力。** 凡物體抗F力而舉於S之高。其所生功用之量爲FS。卽具有FS之能力。蓋以此能力雖未生作用。實處將作用之姿勢。若無以支之。遂依前受力所生之功用。落下。而顯其潛勢力。此能力名爲位置之能力。如在高處之水。始雖靜止。其流下時。或穿地中。或爲迴轉水車之用。是高處之水。具有能力也。又如引弓放箭。箭雖未發。當張弦時。其具有能力也。固人之所習知。但必稱位置之能力者。以水之位置愈高。其所生之功用愈大。引弓愈滿。箭飛愈遠。是水之能力。關係於水與地球位置之高低。弓之能力。關係於弓身與弦之距離。故此種能力。名曰位置之能力。

計算之法。卽依其功用之量。如以 F 力舉物體至 h 糎之

高。其功用爲 Fh。但物體舉至高。其所費之力。卽抵抗重力之量。故以力之絕對單位表之。F 功之力。等於 mg。故其所生之功用 Fh 爱格。卽等於 mgh 爱格。因之質量 m 之物體。舉至 h 高者。含 mgh 爱格之能力也。

註 物體在 h 高。保有位置之能力者。非物體能自生位置之能力。亦因受外力影響所生。如舉物體於高處者。或由人力。或由機械力。或由天然作用。

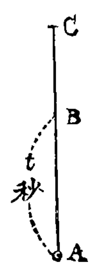
但若在高處之物體受力之作用變位置而落下。其物體之質量。若爲 m。其落下之加速度若爲 v。則其功用之量。等於 $\frac{1}{2}mv^2$ 爱格。(可參照前功用節)卽等於有 $\frac{1}{2}mv^2$ 爱格之能力。此時能力所以異於前者。蓋前之能力尙含在物體中。未現於外。此時 $\frac{1}{2}mv^2$。乃顯其能力之作用處。因名此能力爲**運動之能力**。

69. 能力有變化而無增減

物體運動之能力。得變爲位置之能力。又位置之能力。或變爲運動之能力。而其量毫無增減。

今有質量 m 之物體。以 v_1 之速垂直拋上。就其能力變化之模樣察之。物體發自 A 點某時間 t 之後。以 v 之速通過 B 點。遂達於最高點 C。今設於 A 點之高爲 0。則位置之能力自等於零。而因其所與之速度爲 v_1。故其時之能力可看爲 $\frac{1}{2}mv_1^2$

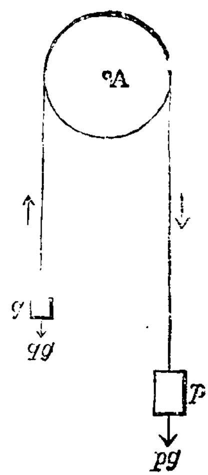
第 109 圖



高	速	位置之能力	運動之能力	兩能力之和
0	v_1	$mg\times 0$	$\frac{1}{2}mv_1^2$	$\frac{1}{2}mv_1^2$
$v_1t-\frac{1}{2}gt^2$	v_1-gt	$mg(v_1t-\frac{1}{2}gt^2)$	$\frac{1}{2}m(v_1-gt)$	$\frac{1}{2}mv_1^2$
$v^2/2g$	0	$v^2g\times v^2/2g$	$\frac{1}{2}m\times 0$	$\frac{1}{2}mv_1^2$

由是觀之。物體漸昇。運動之能力漸減。同時位置之能力漸增。兩者之和悉等於初時所與能力之量$\frac{1}{2}mv_1^2$。故一物體所有之能力。即自初態變爲他態。若對他物體不爲功用。則其所有能力之量無變化。

第110圖



次就一物體對他物體爲功用時能力之變化。於阿梯吾特器械p引上q。且落下。(設兩體之質量爲pq) p及q初速度爲0。終速度爲v。以$v^2=2ah$故速度可以$2\frac{p-q}{p+q}hg$表之。

	初位置	終位置
p之能力	pgh	$\frac{1}{2}p\times 2\frac{p-q}{p+q}gh$
q之能力	0	$qgh+\frac{1}{2}q\times 2\frac{p-q}{p+q}gh$
兩者之和	pgh	pgh

由是觀之。p使q為功用之際。p失能力q得能力而p及q所有能力之和常不變也。從可知一物體對他物體為功用時。當失其所為功用之量之能力也如斯物體之能力由一態變為他態。或由一物體移於他物體。其總量必一定不變。

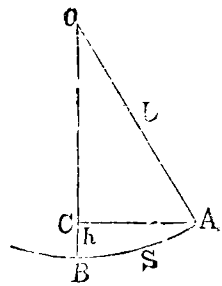
能力變化之例　卷鐘錶時。人必費若干之功用。是人賦位置之能力。於錶中之撥條。使以撥條之彈力牽率機關而運動。卽由位置之能力。漸變而為運動之能力也。此譬喩之法。與前移物高處。同一結果。卷撥條恰如前運石於高處。蓋運石於高處。所費功用。猶之卷撥條所費之功用。次撥條漸鬆。猶之物體之落下。

又容積相等之甲乙二瓶。甲盛綠化輕養氣。乙盛綠氣。與輕氣。同積混和。置於暗處。兩瓶氣體之質量雖相同。原子量之配置各異。於甲氣體之各分子。皆含輕氣綠氣之原子。於乙一分子含輕氣。一分子含綠氣。因之兩瓶氣體之能力不同。此時若落射光線。乙瓶之氣體。卒然爆裂。蓋其始乙瓶存有位置之能力也。

此外熱。光。電氣。一切之能力。皆互相變遷。如熱之能力。由蒸氣機械。變為運動之能力。又光照物體。一部藉能力變熱。他之一部。生物理的及化學的種種之作用。又如迴轉代那桫。運動之能力。變為電流之能力。又通此電流於電氣燈。得發熱及光。其種種變化。不遑枚舉。但其能力之量。全無變異。是為能力不滅之原理。Conservation of energy 與物質不滅之原理為理學界二大原理。研究物質之變化。歸諸化學。物理學可謂為研究能力變遷之學問也。

數理的之例　1.　由能力不滅則.算出振子之週期.

第 111 圖



如圖　$OA=OB=l$(絲之長)　$AB=S$(振幅)

$BC=h$(最高點與最低點之鉛直距離)

若以通過B之速爲V.則

$$週期\ T=\frac{2\pi S}{V}$$

但此時h得看作極小　故 $AC^2=2l\times h$　$AC=S$

$$\therefore\quad h=\frac{S^2}{2l}\qquad V=S\sqrt{\frac{g}{l}}\qquad \left(\because\ V=\sqrt{2gh}.\right)$$

$$T=\frac{2\pi S}{V}=\frac{2\pi S}{S\sqrt{\frac{g}{l}}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

2.　以與物體等重之力揚物體.及以比物體重更大之力揚物體.若舉至同高.試比較其功用之量.

此物之質量爲m.則與其重mgh同大之力.舉至h高之功用mgh也.次以比物體之重更大之力f舉之.則物體必以a加速度上昇.$(f=mg+ma)$蓋以物體受f力作用不絕.當物體舉至h高時.更得v之速度.$(v^2=2ah)$此時因f力所爲功用之量.

$$fh=mgh+mah=mgh+\frac{1}{2}mv^2$$

若此f力之作用止.物體遂因v之速度.更昇至h'.(但$v^2=2gh'$)

故　$fh=mgh+\frac{1}{2}mv^2=mgh+mgh'$.

即　等於以mg之力舉至$h+h'$之功用.

第六章之問題

1. 9000 功之力。働於 50 瓩之物體不絕問物體動至 40 米之功用若干又終速度如何。

2. 長 1.5 米突之弓張之爲半圓形得位置之能力若干。但張之之力平均以 2 瓩之重

3. 於前問若以質量 200 克之矢發射。當以幾何之速射出。

4. 6 磅之彈丸每秒以 1600 呎之速度一分間發射 20 回。合幾馬力。

5. 有瀑布由 28 米之高流下 1 時間流出 86400 立方米之水問利用此瀑布所得之馬力若干

6. 有人體重 90 斤負 72 斤之物於背。3 分間登 10 米長之梯子問所生之功用合幾馬力又單就物體所生之功用如何。

7. 有二質量 M 及 M_1 以同力同時作用於該物體時。求次之比。

(一) 兩質量所起運動量之比。

(二) 兩質量所受功用之量之比。

8. 次物體所有之能力試列舉其名并申明其理。

(一) 受壓迫之空氣。

(二) 受引伸之橡皮。

(三) 轉於水平板上之球體。

(四) 落下之物體。

(五) 在井底之石。

9. 質量25克之石靜止於地上400米突之高其所有位置之能力試以爱格表之。又此石由落下至5秒後位置之能力及運動之能力若干又達於地面時運動之能力如何。

10. 質量3磅之石以96秒呎之速度鉛直拋上時二秒後石所有運動之能力及位置之能力如何。

11. 500克之石鉛直拋上。於其第一秒之終石之上昇之速度19.6秒米求此石達於最高點時位置之能力及其落下地面時運動之能力。

12. 100克之彈丸以400秒米之速度中的後全失速度,卽落下問彈丸所失運動之能力如何。

13. 每秒以200米突之速飛行之彈丸恰貫4糎厚之板,問以此彈丸要貫12糎之板(板與前同質)其速要如何。

14. 90克之彈丸每秒以二百米突之速度出銃口銃筒之長若爲百二十糎則彈丸受火藥之平均壓力若干。

15. 質量m之物體受F之力作用動於一直線上但此進行之經路與力之方向爲θ角今此物體進S之距離後若得v之速度則$FS\cos\theta=\frac{1}{2}mv^2$試證明之。

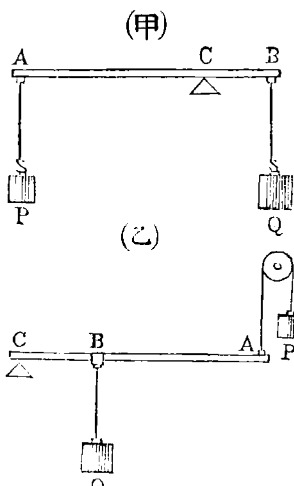
16. 二箇無彈性質之球相向進行而衝突。一球質量10克速度50糎他球之質量50克速度10糎問衝突前後運動能力之總量如何。

第七章　器　械

70. 凡力生功用，用人力之外，藉器械者殊多，如槓杆一器械也。吾人之筋力，藉其幫助，得運重大之物體。又各種水車，亦器械也，可以水力碎粉穀類，得爲各種之功用。器械分單式器械及複式器械。『單式器械』如槓杆，滑車，輪軸，斜面，螺旋，及尖劈等。以簡單部分能運動物體者。『複式器械』如水車。其構造稍複雜，究卽由單式器械之應用，夾合而成者也。

71　槓杆 Lever　(單式器械之一)槓杆者，不可屈撓之挺條，旋於一定點，至少受二力作用之器械也。解說槓杆之定律，先以槓杆看作無重量之線條，名爲數學上之槓杆。又名其迴旋點爲『支點』名力之作用點爲『力點』重之作用點爲『重點』由支點至力點之距離，爲力之槓杆臂，由支點至重點之距離，爲重之槓杆臂，而其各槓杆臂乘力或重之積曰平均量或曰能率。

第 112 圖



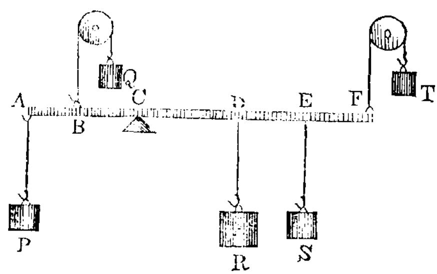
槓杆又別爲二種，兩臂槓杆及一臂槓杆是也，兩臂槓杆，其支點在力重二點之間者，(第 112 圖甲)一臂槓杆，其支點必偏在一方。(第 112 圖乙兩圖共以 C 爲支點，A 爲力點，B 爲

重點。但兩臂槓杆有等長有不等長者。其定律如次。

作用於槓杆上之力與重若反比例於其臂之長。卽其平均量若均等則槓杆在平均之景態。其支點不可不在合成力之點。例如第112圖甲、AC爲四尺。BC爲一尺時。則一斤之重P、與四斤之重Q、得相平均。

又如數力作用於槓杆。其平均之理亦無異於前。蓋惟左右各能率能相等。卽平均。

第113圖



例如第113圖。AF之槓杆上。P,Q,R,S,T,五力。互相作用。其五力中。P及T之二力乃協同旋轉於一方者。Q,R,S乃協同旋轉於反對之方向者。故雖多力作用。無異於二力作用之者。惟其能率之和、若能同等。AF必平均。卽如次式、

$$P\cdot AC+T\cdot FC=Q\cdot BC+R\cdot DC+S\cdot EC$$

今將此五力。代以實數。定其距離。示其能率之相等者、

$P=8$　　$AC=2$　　$T=2$　　$FC=4$　　$Q=8$

$BC=1$　　$R=9$　　$DC=2$　　$S=1$　　$EC=3$

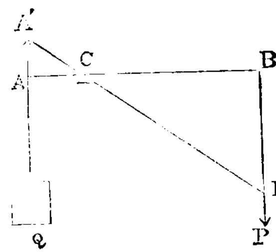
$8\cdot2+2\cdot4=8\cdot1+9\cdot2+1\cdot3$

假動之原理 如前所述。於A點吊Q重之物體。於B點。以P力作用之。其平均時有次之關係。

$$Q\times AC=P\times CB。$$

今設槓杆AB少傾斜。在移動之狀態。受力生功用時。B端引下至B'。其功用為$P\times BB'$。A端所為之功用為$Q\times AA'$。而三角形CAA',CBB'為相似形。故

第114圖



$$AC:CB=AA':BB'$$

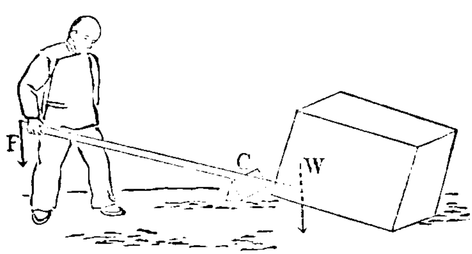
故　　$$Q\times AA'=P\times BB'$$

卽P所為之功用。等於Q所為之功用。是為假動之原理。(Principle of Virtual displacements)卽如利用槓杆。以五十斤之力能舉五百斤重之物體。於功用毫無利益也。

72. 槓杆之應用

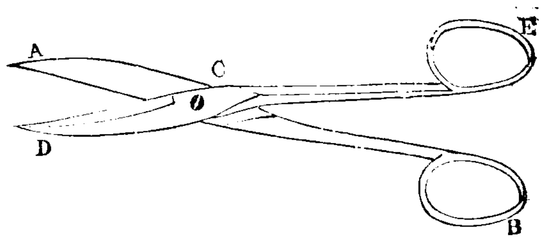
槓杆於實際上應用甚廣。如日常所用之器具及衡器等皆應用槓杆之理而製造者也。

第115圖



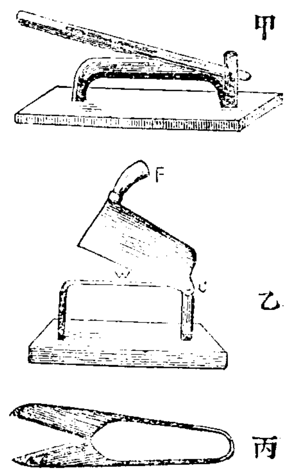
I. 兩臂槓杆之應用　(a)挺子以小力能運巨大之物。例如第115圖F為使用者用力之處卽力點。W為重點。C為支點。其支點愈近於W。以愈小之力得運愈重之物。此外又如以帚掃地。卽由挺子之理。(b)翦刀卽由二箇兩臂槓杆而成者。如第116圖AB與DE各為一箇槓杆。其支點共在C。刀鋒所在之處。卽所謂重點。以之翦物體。其物體之抵抗卽

第 116 圖



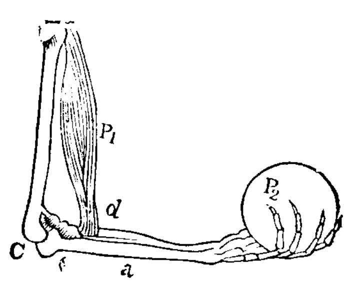
重也，FE為力點，即施力之處，若以剪刀欲剪堅硬之物體，不可不置之於近C之處，是欲重點近於支點也。又如鐵鉗(即拔釘之具)等，其柄長而上部短者，即由此理。

第 117 圖



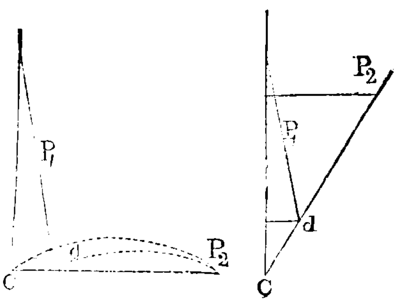
11. 一臂槓杆之應用 (a)藥鋪之割草刀，如117圖乙所示其一也，F為用力之點，W為重點，C支點也。又如117圖(甲)壓碎胡桃子之器等，皆屬此類。(b)燭心鋏，如第117圖丙，二箇一臂槓杆，互相連結而成者，其支點即在屈曲線之連繫部，把握加力之處為力點，刃鋩之部，即重點也。又如人手亦屬此類，如118圖，肘為支點，d為力點，即由F_1之肘筋擔持之，F_2為重點，若載P_2之重於手掌時，擔於上方力之臂Cd，比重之臂CP_2短，故手腕成直角時，難支重物，若屈曲

第 118 圖



手腕則因重點至支點延長線上之垂線短而重減輕從之膊筋所用之力易支持 P_2 之重若更收縮膊筋能舉大力（第118圖）又如箸亦一臂槓杆以長箸難夾菜者以其槓杆過長之故

第119圖

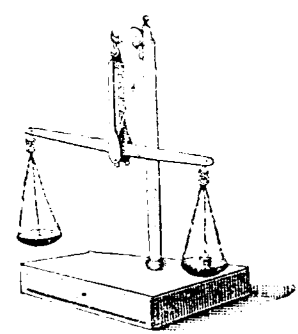


73. 衡器 Balande　衡器亦應用槓杆之理測物體質量之器也有『天秤』『桿秤』『臺秤』三種

【天秤】　天秤者等臂槓杆之應用更分爲二種一爲普通天秤一爲理化學用天秤

普通天秤如第120圖係以金屬製者於其秤杆之重心（卽槓杆之旋迴點）穿以圓形或三角形之軸於其軸之垂直上置指鍼秤杆在水平之位置時指鍼取垂直之位置（卽在鋏筐之中心）秤杆之兩端懸垂秤盤用時一邊置物體一邊置分銅至秤杆在水平之位置計算其分銅得知物體之質量

第120圖



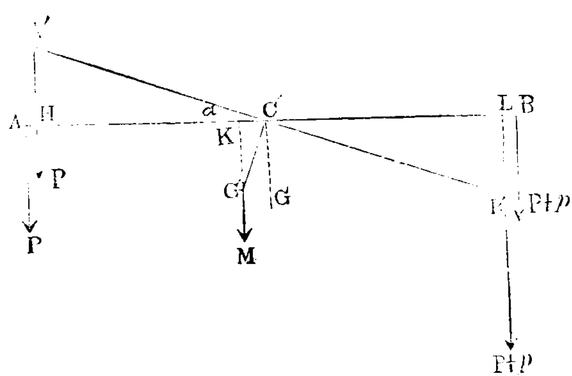
天秤之正者第一秤杆與秤盤之重心要通過支點之鉛直線第二支點要在秤杆之中點何則不適第一之要件兩盤卽載同質量

秤杆不能在水平之位置安定平均，又不適第二之要件。則秤杆縱水平平均兩盤之質量不相等。

天秤之靈者，兩盤所載之質量其差雖少，要傾斜多。第一秤杆要輕而長。第二天秤之重心要近於支點。此時重心要在支點之下。何則其重心若一致於支點，則隨處平均，不適天秤之用。又若重心在支點之上，則易變平均。而秤杆容易轉倒。

今欲證明天秤靈敏之要件，A端之杆盤載P之質量。B端載$P+p$之質量。因之秤杆由水平傾斜至α角。茲以秤杆與秤盤之重心為G。其合質量為M。所作用於此秤之重力者，一作用於P及M之質量，為Pg及Mg。一作用於$P+p$之質量，為$(P+p)g$。始之二力，以其迴轉秤之方向與時辰錶之針反對，故其關於C點之能率為正。第三力$(P+p)g$迴轉秤杆與時辰錶之針同方向，故其關於C點之能率為負。

第 121 圖



今以A′,G′,及B′,之三點，對AB上之正射影為H,K,及L。則作用於A′之Pg對C之能率。

$$Pg \times CH$$

作用於G點之Mg對C之能率，

$$Mg \times CK$$

作用於B′之$(P+p)g$對C之能率，

$$-(P+p)g \times CL$$

兩桿若能安定平均，則三能率之代數和當爲零，

即　$Pg \times CH + Mg \times CK - (P+p)g \times CL = 0$

即　$P \cdot CH + M \cdot CK - P \cdot CL - p\,CL = 0$　(1)

但以　$A'C = B'C$ 則CH自等於CL因之

$$P \cdot CH = P \cdot CL$$

故由(1)式　$M \cdot CK = p \cdot CL$，　(2)

但　$\widehat{CGK} = \widehat{ACH} = \alpha$（由幾何學相似三角形，自明其理。）

故　$CK = CG'sin\alpha = CGsin\alpha$

及　$CL = CB'cos\alpha = CBcos\alpha$

故(2)式得變之如次，

$$M \cdot CGsin\alpha = p \cdot CBcos\alpha$$

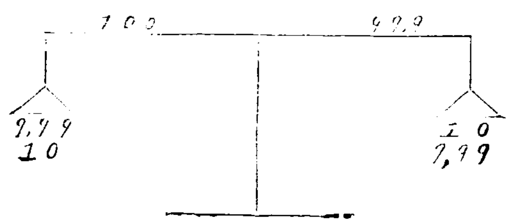
即　$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{p \cdot CB}{M \cdot CG}$$

即　$$tan\alpha = \frac{p \cdot CB}{M \cdot CG}$$

由上式，CB若大，則p雖小，而α因CB大而亦大，即云秤杆若長，其質祇須有些微之差，而傾斜之角度必大，又CG或M若小，C遂大，故支點與重心之距離要小，而秤之質量要輕。

驗天秤正否之法　凡天秤之均正與否。可於兩秤盤置適宜之重物先相平均之而後左右交換重物若能平均如故則足徵其天秤之準正。其理依第122圖得解明之。茲先假定一天秤杆臂即不等長亦能保其平均者例如左方之杆臂爲100粍右方稍短即如99.9粍此時右方置10克之重物左方非載9.99克之重物則不平均然若左右交換之決無平均之理蓋以其左右之平均量不等故也。是故以已平均之重物左右交換若無失其平均乃天秤均正之實證否則該天秤爲不正。

第　122　圖

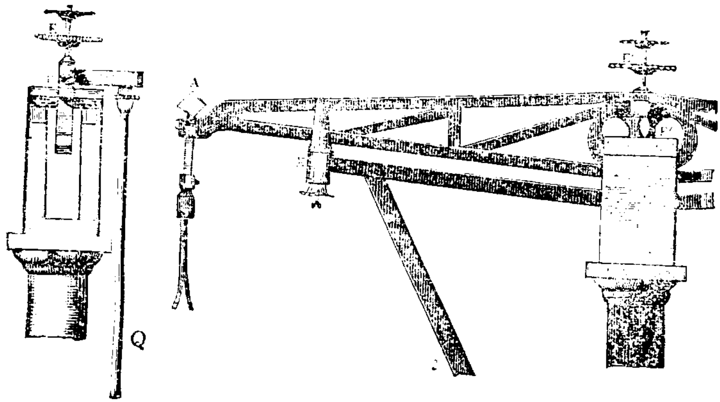


用不均正之天秤秤物量之法　設有不正之天秤以次之方法亦得測定物體之質量即先以物體載於一邊之秤盤上他盤用隨意之物平均之然後除去其所測定之物體代之以分銅再平均之其分銅之數即物體之重量

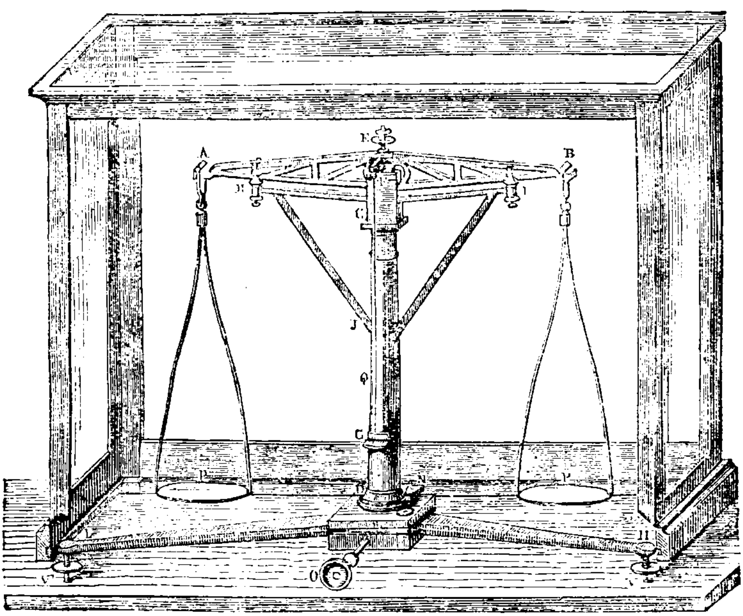
理化學用天秤　即具前之諸要件精製之天秤也其竿用鋼鐵或黃銅等之板截爲長菱形(第123圖)其中部穿大空隙以減其重竿之中央有鋼鐵製之小角壔F垂直貫通其平面其稜甚銳利向下觸於鋼鐵板或瑪瑙板上此稜爲竿之支軸又竿之兩端各有一小鋼鐵之角壔平行於其中央以支秤盤鈎之用。秤盤鈎亦係以鋼鐵之小板製者如圖

上A。此兩端角壔之稜。稱爲秤盤之支軸。以上三支軸要在

第　123　圖



第　124　圖



同一平面上。且由中央之支軸至兩端支軸之距離要相等。

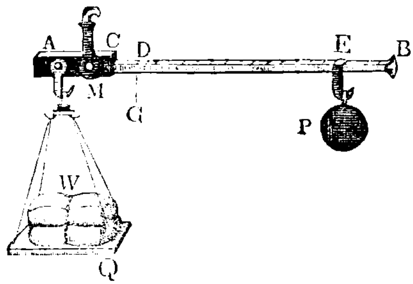
由秤竿與秤盤重心之位置。秤之感度有等差。前已述之。故因變重心之位置。於秤竿之中央樹鉛直之螺旋。因之上下離螺旋E。得上下重心。遂變秤之感度。又秤之中央附表針Q。垂於秤柱上之象牙板G之前。(如第124圖)板劃以度。秤杆水平時。針端恰對此板之零度。秤杆若少傾斜。針端遂動於他方向。因知秤杆有傾斜。

秤之全體載於鐵製之三足臺L,N,M之上。具螺旋V。若臺未水平安定。則動V之螺旋以正之。臺果安定水平與否。但視長針是否在零度G處。針若果在零度上。秤柱卽直立於臺之中心。其上角壔F安置硬板上。但以銳刃長壓硬板。妨其鋒稜磨損。故不用之時。要使銳刃離其支板。於柱之內部。裝置以齒輪。通於HIJ之支柱。由是迴轉下端之鈕鐶O。則HIJ上昇。以HI支秤杆F之稜。遂不觸於下之硬板。用時反回鈕鐶O。HIJ徐徐置竿於硬板上。又秤藏於玻璃盒之內。防空氣之動搖。或溼氣塵埃等。

桿秤 乃不等臂槓杆之應用。如125圖所示。A為重點。M與B之間為力點。其間分劃度數。秤錘隨物體之大小。進退於MB之間。(錘所在之點為力點)得測物量。故桿秤若比天秤便於使用。但不若天秤之精細。

製造桿秤。亦卽用槓杆之理。故劃度卽由兩臂長之比。證明如次。

第 125 圖



設G為秤杆之重。Q為秤盤之重。P為錘重。而D者秤杆之重心。C乃示錘與秤盤Q平均之位置。當未載物體。錘在C之際。其能率如下。

$$Q \cdot MA = P \cdot MC + G \cdot MD$$

次加W量之物體於秤盤上。欲使其平均。錘必移於E處。因得次之能率。

$$(Q+W) \cdot MA = P(MC+CE) + G \cdot MD$$

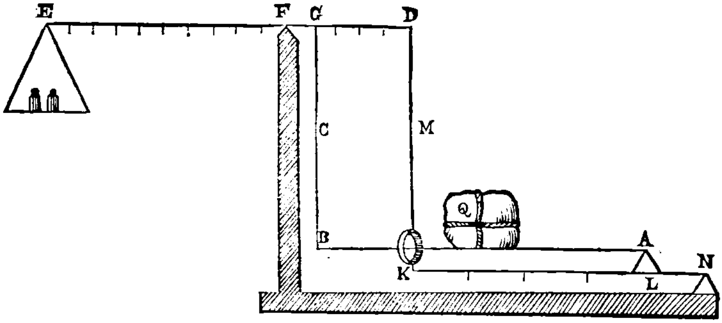
由此式減前式。得下式。

$$W \cdot MA = P \cdot CE$$

是關於MA與CE之距離也明矣

臺杆　乃以秤巨大重物之用。即連合一箇不同臂槓杆。與兩箇一臂槓杆。以完成其作用也。於第126圖示臺秤

第 126 圖



之概型。即重物Q在於AB之臺板。一端靠銳刃A上。他之一端B。連繫於C之杆條。(鏈鎖)杆條C之他端。繫於不同臂槓杆DE上(此杆條乃位於F銳刃上者)之一臂G點。又壓於AB之力。由A點復傳其力於第二層之板NK。其支點在N之銳刃上。一端K復由杆條M。固著於兩臂槓杆D點。NK為一臂槓杆也明矣。凡作臺秤。FG與FD距離之比。要等於NL與NK距離之比。(FG : FD=NL : NK) 其構造之原理說明於下。

臺秤之構造。第一要使物體不論置於臺板上何處均無輕重。若祇用AB之臺板。物體置於近B之處。所配置之分銅。縱或合物體之重。於近A之處。所配置之分銅必輕。蓋以物體置臺板上。不止對B有作用。且對A亦有作用。對B所作用之重。自達其作用於分銅。對A所作用之重。自消失因減其重。故必加NK板者。乃使物體作用於A點之重。亦能傳其作用於兩臂槓杆也。設以物體之重為Q。一壓A之銳刃上。以其力為q。一牽引於C之杆條。其力為p。則

$$p+q=Q$$

今欲驗物體之作用於A點。果否輸其作用於兩臂槓杆上。但證作用於G點之力為$p+q$可也。

今就q之力思之。KN若為LN之n倍。則引於K之力。必比下壓於A之力為$\frac{1}{n}$。由是壓於A之力為q者所傳其作用於D點。僅$\frac{1}{n}$。更就兩臂槓杆之一部思之。FG : FD=NL : NK

故以KN爲LN之n倍。則FD亦爲FG之n倍。今也作用於D點之力爲$\frac{q}{n}$。若移其臂於$\frac{1}{n}$處。則所費之力必須n倍。故對G點所作用之力。比對D點所作用之力當n倍大。卽$n\times\frac{q}{n}$。由是重物體所作用於P與q者。爲

$$p+n\times\frac{q}{n}=p+q=Q$$

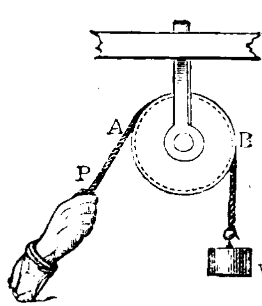
故物體在AB上任置何處。皆無變其重也。又其重與分銅之比。卽關於FG之槓杆臂與EF槓杆臂之比。如圖上EF之長爲FG之10倍。故所載之分銅。祗物量之十分之一。例如100克之物體。置於秤盤。祗須10克之分銅。

74. 滑車 Pulley　滑車者用平而厚之圓板所製。於其周邊穿凹溝。以繞細索。或鏈鎖之用。中心貫之以金屬製之軸。使得任意迴旋。擔軸之兩邊以鋏質。如第127圖。

依上作法分滑車爲二種。一曰『定滑車』Fixed pulley 一曰『動滑車』Movable pulley

(a) $\boxed{\text{定滑車}}$　乃同臂槓杆之變形。固定於一定之位置。以其中心爲軸。得自由回轉。通繩於其凹溝。其一端加力P。由他端舉上W重之器械也。但於定滑車力所作用之點A。與重所作用之點B。由支點至力重各點。得看作等距離之槓杆。故P＝W

第127圖

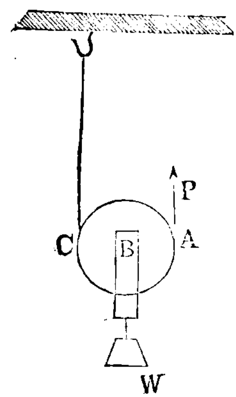


此等滑車不能省力。不過變其方向減摩擦而已。如高舉

重物,自井汲水,常應用此器。

(b) 動滑車　乃一臂槓杆之變形,掛其重於中心之處,繩之一端,固定於鈎上,加力於他端,如第128圖,舉重物時,滑車與繩索共相上下。動滑車之支點,在直徑 ABC 之一端 C,力之作用點,在其他端 A,重之作用點在滑車之中心 B,作用於 A 點之力 P,常與作用於 B 點之重 W 相均時,其能率之和,須等於 0,即

第128圖



$$P \times AC - W \times BC = 0$$

即　$P \times AC = W \times BC$　或　$P : W = BC : AC$

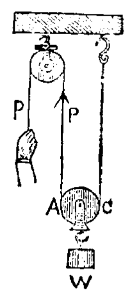
但以　$AC = 2BC$　　則　$P : W = 1 : 2$

$$\therefore \qquad P = \frac{W}{2}$$

即云物體一斤重者,只須以半斤之力得引上之。

但 P 引上 S 之長,僅能舉 W 於 $\frac{S}{2}$ 之長,是 P 所成之功用,與 W 所成之功用,乃相等者也。

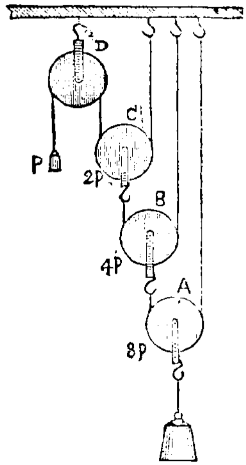
第129圖



動滑車固亦以舉重物之用,惟通常用動滑車時,須兼用定滑車,即如第129圖,所以用定滑車者,亦非藉以省力之故,惟變力之方向,恰如一臂槓杆之用法。

又定動兩種滑車,多數連合以供實用,省力更多,但功用

第 130 圖

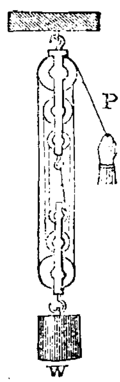


之量全同。例如第130圖。P作用於第一動滑車C。生2P之力。又由第二動滑車B。力增大二倍。生4P之作用。逐次動滑車之數若爲n箇時。則於最後之滑車。生$P\times 2^n$之作用。故懸於最後動滑車之重W。與力P相均時。

$$W=P\times 2^n \quad 或 \quad P=\frac{W}{2^n}$$

卽所費之力。對動滑車之關係。若動滑車一箇。則所費之力。只須重之$\frac{1}{2}$若動滑車二箇。則所費之力。只須重之$\frac{1}{4}$若動滑車爲n箇。則所費之力只須重之$\frac{1}{2^n}$。又如第131圖。連合三箇之動滑車。及三箇之定滑車。繩之一端加力P。由上之三箇定滑車。作用其下之三箇動滑車。以每一箇各生二倍之力。故懸於三動滑車之重當等於6倍之力。卽$W=P\times 3\times 2$。然則定滑車與動滑車。各爲n箇者。則P力卽等於該重之數。以動滑車2倍之數除者。

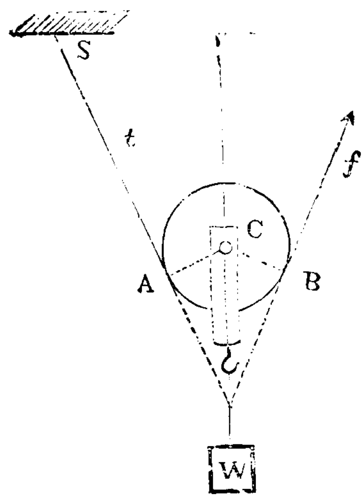
第 131 圖



$$P=\frac{W}{2n}$$

又如第132圖。繩比重力之方向傾斜θ之角。則重量與力之關係。略異於前。此時繩之AS部分之張力。(設爲t)與Bf部分之張力。固相等。共爲f。今f.t.W三力相平均時。f與t之

第 132 圖



合力。當在與 W 反對之方向，且相等。茲於線 W 上求 f 與 t 之合力。爲

$$f\cos\theta+t\cos\theta$$

故

$$W=f\cos\theta+t\cos\theta$$
$$=2f\cos\theta$$

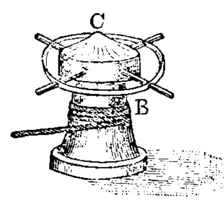
$$\therefore\quad f=\frac{W}{2\cos\theta}$$

故此時於力雖有些微利益。而不及於前。

以上所述。車重概不算入。

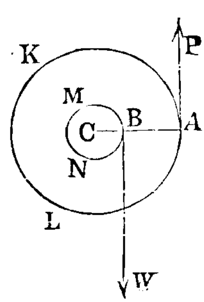
75. 輪軸 Wheel axile　輪軸者移動重物之器械也。即兩臂槓杆之變形。如第133圖。加力於車軸之緣，與軸 B 共迴轉於他之共通軸 C 之周圍。由是所繫於繩索之重物，隨之移動，原理如次。

第 133 圖



如第 134 圖，AKL 爲輪，BMN 爲卷繩之軸 C 爲共通之軸，力所作用之槓杆臂。即 CBA 之直線上。此器械以 C 爲支點。働力於 A。舉上掛於 B 之重，故得以 AC 看作力之槓杆臂，以 BC 看作重之槓杆臂。今若以加於 A 之力爲 P。以掛於 B 之重爲 W。則此二力相均時。對於 C 點能率

第 134 圖



之代數和。須等於零。而P者迴CA臂與時辰錶之針同方向。故其能率爲負。反之W之能率爲正。

故 $W\times BC-P\times AC=0$ 即 $W\times BC=P\times AC$

式中BC爲軸之半徑。AC爲輪之半徑。各表以r與R。

則 $W\times r=P\times R$ 即 $W:P=R:r$

故輪愈大。軸愈小。作用於A之力雖小。能舉重大之物。

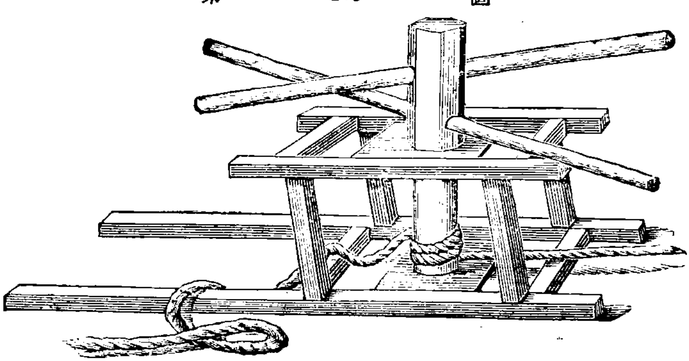
而輪A與軸B。乃同時一迴轉。故作用於A點之力P。迴輪一周者。其功用之量爲$P\times 2\pi R$。作用於B點之力W。迴軸一周者。其功用之量爲$W\times 2\pi r$。就兩功用之量而比較之。以$W\times r=P\times R$

$$\therefore \quad P\times 2\pi R=W\times 2\pi r$$

故P所生功用之量。與W所生功用之量亦相等也。輪軸之用途其種類甚多。卽如常用之器械。多爲輪軸之變形。下以一二之例。示其種類及用途

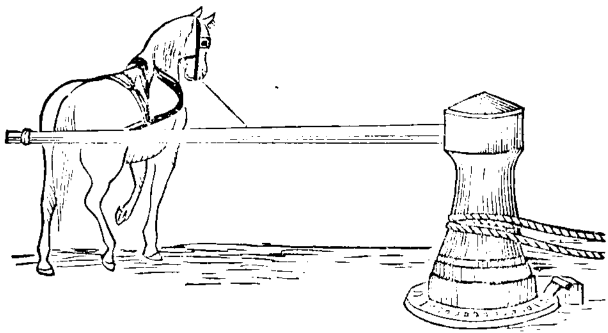
1. 如第135圖所示之器械。名爲捲轆轤。移重大物體

第 135 圖



於他處之用。貫橫杆於圓壔。以代圓輪。纏繩於圓壔之繩索。一端繫重。迴旋時無異以圓輪及圓軸所製造之器械。此際杆長卽示圓輪之直徑。故杆愈長。以愈小之力。得對抗愈大之重物。

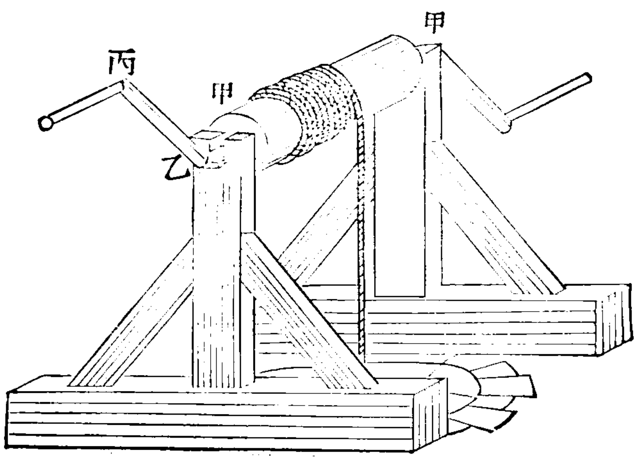
第 136 圖



又如第136圖。藉馬力運用之捲轆轤。及前135圖船舶所用以引錨之捲轆轤。亦同一理。

2. 第137圖所示之器械。用把柄迴轉。亦一變形之輪軸也。卽甲爲圓壔。支持於兩端。其中纏之以繩。繫重於繩端。圓壔之兩端。固插以杆。代圓板之半徑。兩端

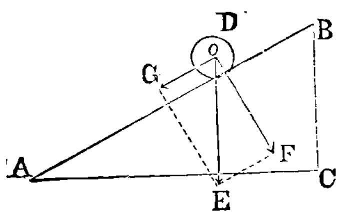
第 137 圖



之杆。互在反對之方向。恰爲圓板之直徑。而杆之終端。更固插他杆。與成直角。以便運用。今反重之方向施力。無異施力於圓板者。

76. 斜面 Inclined plane 斜面者。與水平面成角度之平面。沿其面舉上物體。以小力得舉重物。如第138圖所示卽斜面也。自B點引於AC水平面上C點之垂線BC爲斜面之高。AB間之部分爲斜面之長。AC爲斜面之基底。BAC角爲斜面之傾斜角。

第 138 圖



AB之上有物體D。其重心爲O。當物體沿AB引上時。作用於物體之力有二。一重力爲E。一反對牽引之力爲G。一直壓斜面之力爲F。(G、F 卽由重力 E 所分解者也)蓋人能舉上物體者。以人力能抗物體之重。茲作用於斜面時。人力與物體重力之方向。非作用於反對之方向。故此時分解爲平行與直角之分力也。而F之力。與斜面之反對力相均。故F之力乃無作用。所作用於物體者。惟G而已。故此時作用於反對方向之力。若與G之力相等。則D靜止。若更加稍大之力。則得引上D。

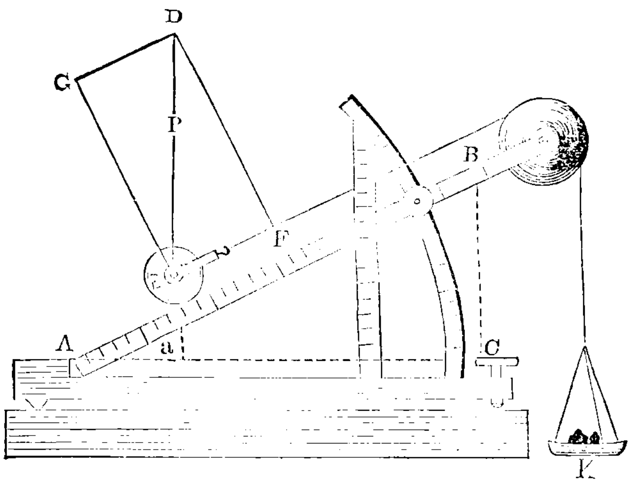
今就ABC三角形及OEG三角形思之。於幾何學上爲相似形。故其各邊之比如次。

$$OG : OE = BC : BA$$

故若BAC角爲α。則OEG角亦α。而

$$OG = OE\sin a = OE \times \frac{AC}{AB}$$

第 139 圖



a 角小時。卽AC小。而OG自亦小。則以小力得舉重物。

上之定律由實驗得證明之。卽如第139圖所示。BC與AB。示高與長。DE,DF,LG示重與其分力若同一物體沿斜面引上。則BAC角度小者。比BAC角度大者所載分銅之量必少也。

次就其功用思之物體之重P若由水平面AC鉛直舉至於B則其功用之量爲P×BC。

又由AB舉至於B之功用。

$$\therefore OG \times AB = P \times \frac{BC}{BA} \times AB = P \times BC$$

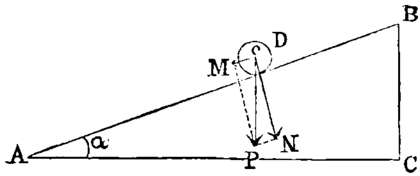
卽二者功用之量。乃相等也。

77. 物體沿斜面落下之狀况　物體沿斜面落下時。其重力之分力。比鉛直落下作用於物體之重力小。故斜面落下之速度。比鉛直落下之速度稍小。又落下之速度。

固有關於物體之質量其理由說明如次。

譬如有物體其質量若爲 m。其重若爲 P，其鉛直落下時，以 g 之加速度落下。則由前72條，

第 140 圖



$$P=mg$$

又若以 P 重之物體，沿斜面落下時，以 P 之分力爲 M。以沿斜面落下之加速度爲 a。則

$$M=ma$$

而以其斜面之傾斜角爲 α。故由前條，

$$M=P\sin\alpha$$

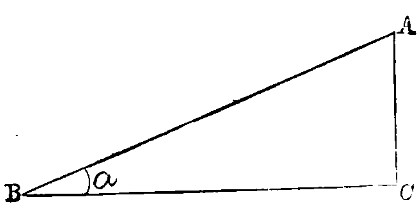
故 $$a=g\sin\alpha$$

$\sin\alpha$ 固比 1 小，則 a 自比 g 小。卽物體沿斜面落下之加速度，比鉛直落下之加速度小也。因之物體沿斜面落下之速度，比鉛直落下之速度自小。

【例 1】 於長 150 糎，高 75 糎之斜面上，在頂點 A 之物體，沿斜面落下，問達於最下點 B，所要之時間，及於 B 點之速度若干。

但 $g=$ 每秒 980 秒糎。

第 141 圖



（解） 此物體沿斜面落下之加速度 a

$$a=g\sin a$$

但 $\sin a=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{75}{150}=\dfrac{1}{2}$

故　　$a=\frac{g}{2}$

而物體沿斜面。由A至B所要之時間t。及於B之速度v。由落下體之公式(2)及(3)卽於

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \qquad V=\sqrt{2gs}$$

之式中。g代以a之値。則$a=\frac{980}{2}=490$糎。又S卽爲斜面之長。$S=150$糎。因得次之二式。

$$150=\frac{1}{2}\times 490\times t^2$$

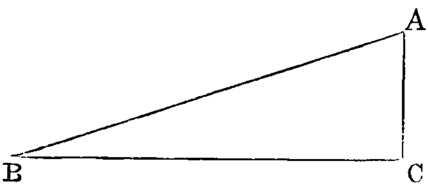
及　　$V=\sqrt{2\times 490\times 150}$

由之得　　$t=\frac{\sqrt{30}}{7}$秒　　$V=70\sqrt{30}$秒糎

|例2| 在斜面頂點A之物體。沿斜面至P。其速等於由A鉛直落下至C之速。試證明之。

但B,C要在同一水平面上。

第142圖



(解)　以斜面之傾斜角爲a。則物體沿斜面落下之加速度a

$$a=g\sin a$$

其達於B點之速V

$$V=\sqrt{2a\overline{AB}}=\sqrt{2g\sin a\,\overline{AB}}$$

又A鉛直落下至C之速爲V'

$$V'=\sqrt{2g.\overline{AC}}$$

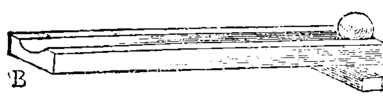
但　　$\overline{AC}=\overline{AB}\sin a$

故　　$V=\sqrt{2g\overline{AB}\sin a}$

∴　　$V=V'$

用斜面測g之值　以有溝之筐AB長三寸許A端稍高如圖形AB爲一斜面今由A使大理石球落下溝中由初時至第一秒第二秒第三秒之終球所過之位置各作一記號測其間之距離因知第一秒第二秒第三秒等各秒間所經過之距離表此距離之數即當各一秒間之平均速度由是因第二秒間之平均速度與第一秒間平均速度之差即爲於第一秒與第二秒之間一秒間速度之變化遂得其間之加速度又第二秒與第三秒間之加速度以同樣之方法亦得求之此等加速度由實驗上乃相等者也今以其加速度爲a則

第 143 圖

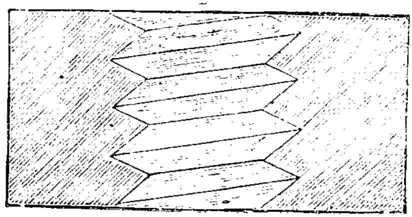


$$a=g\sin\alpha \quad \text{即} \quad g=\frac{a}{\sin\alpha}$$

由之得測g之值

78. 螺旋 Screw　螺旋者於圓壔周圍以終始均等之角度纏繞以凸隆線或凹陷線其凸隆線爲雄螺旋凹陷線爲雌螺旋雌螺旋之凹陷線在空圓壔之裏面使用時雌雄螺旋共同作用雄螺旋凸隆之部分要適合於空圓壔凹陷之部分今若以雌雄二螺旋一箇固定一旋迴之則雄者通過於雌或雌者旋迴

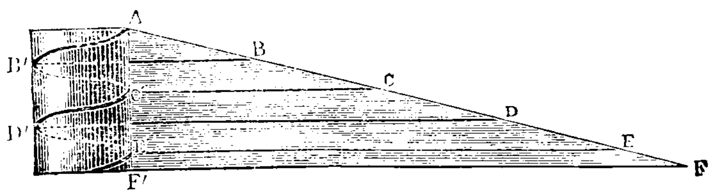
第 144 圖



於雄而進退。

螺旋之構造。卽本斜面之理。如145圖。以直角三角形之

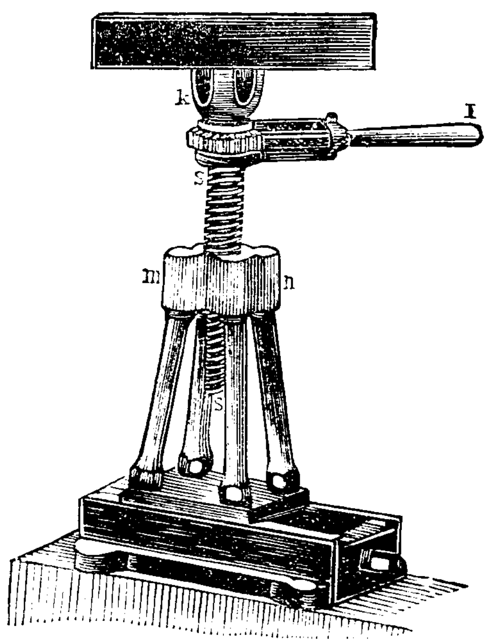
第 145 圖



紙片AFF'，卷纏圓柱。其三角形直角之一邊。平行於圓柱之軸。斜邊AF卽如圖形。於圓柱之表面AB'C'D'E'各處。成曲線。卽螺線也。

以螺旋乃斜面之變形。故舉重物體或壓縮物體利用螺旋。如第146圖卽舉上重物之器械。雄螺旋S由槓杆I。上下於雌螺旋mn中。故載於其頭K之重物。隨之上下。

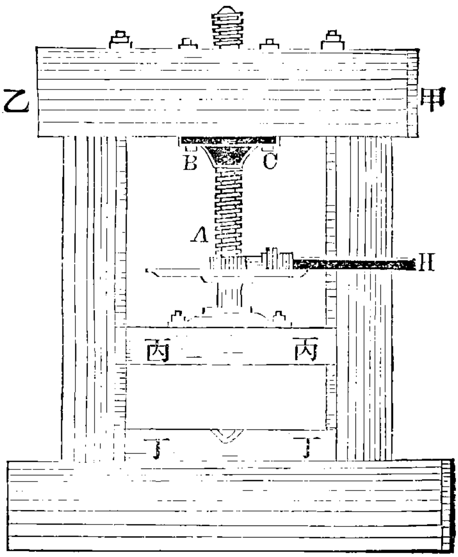
第 146 圖



又如第147圖。名為螺旋壓榨器者。卽鐵製之雌螺旋BC。固

定於甲乙橫杆之下。雄螺旋嵌合其中。雄螺旋之下端具橫杆H。以旋迴雄螺旋之用。雄螺旋旋上時。得推上丙板。置物體於丁板上。旋下雄螺旋。加壓力則丙板下之物體遂受壓縮。

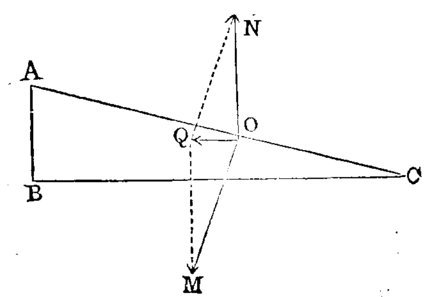
第 147 圖



由上例可知迴螺旋壓榨之力比直壓之力大。其理說明如次。

於第148圖直角三角形ABC。AB爲螺旋線之高。AC爲螺旋一迴轉之長。迴雄螺旋時。平行於BC之力爲Q。以Q分爲直角於AC之力M。(卽壓於AC之力)及直角於BC之力N。(卽力所作用之方向)而MO與AC斜面之反作用相均。有作用如無作用。N之力上頂於雌螺旋之面。故若固定雌螺旋。則雄螺旋動時。上押雌螺旋。遂由雌螺旋之反作用。以同力下壓。故加於平行BC之

第 148 圖



雄螺旋斜面之力Q。生直角於BC之力N。而ONQ三角形之各邊。以皆垂直於ABC三角形之各邊。故此兩三角形爲相似形。

$$OQ : ON = AC : BC$$

故 $$N = Q \times \frac{BC}{AB}$$

凡迴螺旋之力。非直接作用於螺旋之斜面。如前所作用於螺旋之力。乃作用於其把柄之一端H。若此力爲P。由螺旋之軸A至把柄H之距離爲R。以螺旋切口之半徑爲r。則所加於H之力P。押於螺旋之斜面。遂由輪軸之理。於斜面所受之力必加大。茲若以斜面所受之力爲Q。則

$$Q = P \times \frac{R}{r}$$

以Q之值。代入前式N之值。以AB表以l。(卽螺旋線路之高)BC以爲螺旋切口之周。表之以$2\pi r$。

則 $$N = P \times \frac{R}{r} \times \frac{2\pi r}{l} = P \times \frac{2\pi R}{l}$$

卽 $$\frac{N}{P} = \frac{2\pi R}{l}$$

卽加於把柄之力P。與由螺旋所生之力。其比等於螺旋線之高。與以螺旋至把柄之長爲半徑所成圓周之比。

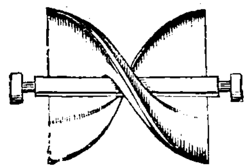
又由上式 $P \times 2\pi R = Nl$

此式之右邊。加於H之力P。所迴轉一周之功用。等於螺旋一迴轉。(卽螺旋線路之高)

螺旋用途之雜例 (a)固緊二箇物體用螺旋。又解離亦甚便。例如各種器具。及時辰儀銃器等。多用螺旋釘。(b)

如天秤縱尺電表等物理器械要使之坐居水平者必用螺旋脚。(c) 測微小之物體用螺旋。即如前總論第五圖所示之測微螺旋者是也。(d) 汽船之暗輪用螺旋即如第149圖。其螺旋以二箇之半螺旋路固著於水平軸裝置在船體後部。由汽機使急速旋迴則水之抵抗藉螺旋排開而船得前進。

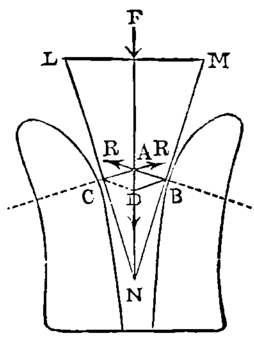
第 149 圖



79. 尖劈 Wedge 尖劈者乃二箇斜面相合而成之器械。以其尖端攻入物體用以割裂之

如第150圖。LMN 爲尖劈。LM 爲其底。直角於 LM。加以 F 之力。此力因傳於 A 點。於物體與尖劈之接觸面分解爲二力 AB,AC。(此二力乃垂直於接觸面者)以 AD 表 F 之力。則三角形 ACD 之二邊 AC AD。各直角於 LNM 三角形之二邊 NL LM。故此二三角形爲相似形。故

第 150 圖



$$AC : AD = NL : LM$$

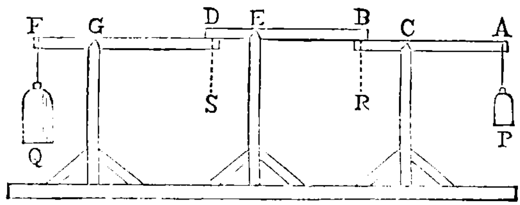
而 AC 乃破物體之力也故破物體之力與元力 F 之比。等於 NL 與 LM 之比。由之尖劈愈長。其底愈薄愈覺有效力。凡一切之刃物皆應用此理。

80. 複式器械 如章首所述由各種單一器械交互作用相合而成之器械者即複式器械也複式器械亦以

省力之用。其關係卽以各單式器械之能率互相乘之。而成複式器械之總能率。

如第151圖。三箇槓杆相連合而成之複式器械也。旋轉於C點之槓杆。(第一槓杆)一端A點受P力下引。一端對支持於E點之槓杆。(第二槓杆)向上旋轉。第二槓杆之他端。下壓於支G點槓杆之一端。(第三槓杆)恰與第三槓杆之他端相支持而平均。今以作用於B點及D點之力爲R及S。而AC爲BC之m倍。BE爲DE之n倍。DG爲FG之r倍。卽得下式。

第　151　圖



(1)　$R:P=\mathrm{AC}:\mathrm{BC}=m$　　故　$R=mP$

(2)　$S:R=\mathrm{BE}:\mathrm{DE}=n$　　故　$S=nR$

(3)　$Q:S=\mathrm{DG}:\mathrm{FG}=r$　　故　$Q=r.S$

今以(3)式$Q=rS$之值中。代入(2)式S之值。則

$$Q=n.r.R$$

更以(1)式R之值代入。則得

$$Q=m.n.r\mathrm{P}$$

今又連乘上之三式。則

$$R.S.Q=m.n.r.P.R.S$$

故以RS除之。則

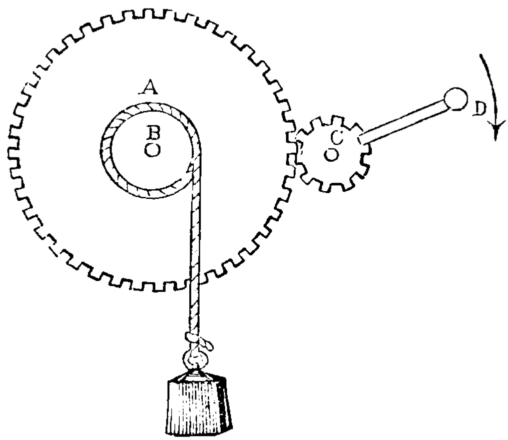
$$Q=m.n.r.P \quad \text{或} \quad P=\frac{Q}{m.n.r}$$

由上式可知複式器械之能率乃等於以單式之能率互相乘者明矣。

今以 m 爲四。n 爲五。r 爲六。則得百二十倍之效力。蓋四乘五得二十。二十乘六得百二十也。

第 152 圖所示之複式器械。卽以二箇之齒輪軸相連而成爲一器者。省力殊多。今欲舉纏絡於圓柱 B 繩索端之重物 Q 不可不施力於大輪之齒。若以此力爲 K。則

第 152 圖



$$K=\frac{r}{R}Q \qquad (1)$$

何則。R 者。圓板之半徑。r 者圓柱之半徑。故

$$K:Q=r:R \qquad K=\frac{r}{R}Q$$

茲不直接施力於圓板之齒。圓板之齒傍。更附小圓板之齒。與相嵌入。於小圓板更具一柄。由是所施於槓杆 D 之力。逐次達於大圓板。其力 P 之大如下。

$$P=\frac{r'}{R'}K \qquad (2)$$

茲以R'爲槓杆臂之長。r'爲小圓板之半徑。

今以(1)式之K代入(2)式,則

$$P=\frac{r}{R}\cdot\frac{r'}{R'}Q \qquad (3)$$

又直接(1)式與(2)式相乘。亦得(3)式。

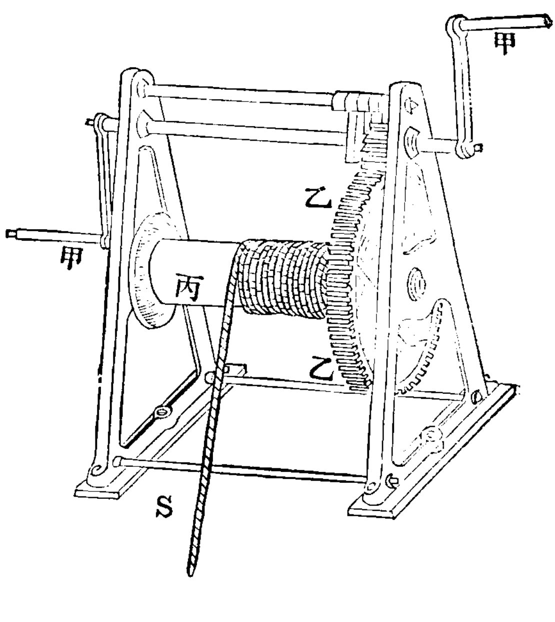
凡小圓板之半徑,與大圓板之半徑。其比卽等於小圓板圓周與大圓板圓周之比,而圓周之大。亦比例於圓板之齒數,故今以n示大圓板之齒數,以n'示小圓板之齒數,則得下式,

$$r':R=n':n$$

又以之代入(3)式,則

$$P=\frac{r}{R'}\cdot\frac{n'}{n}Q$$

第 153 圖



複式器械之實例。卽如第153圖所示,板周爲.5米突。丙之半徑爲.12米突,而小圓板有十二齒。大圓板有七十二齒。卽得左式。

$$P=\frac{0.12\times12}{72.\times0.5}Q$$
$$=0.04Q$$

極複雜之複式器械。即如前所述振子之條之時辰儀也。

觀以上各器械。大都爲省力之用。但功用之量決無增減。是爲功用不滅之原則

第七章之問題

1. 有等質之棒長4尺。重5斤。茲支棒之一端1尺之處。其長方之槓杆臂。若懸12斤之重。則短方槓杆臂之端。要懸若干之重始能相均。

2. 有長2米突重360克等質之棒。今由其中央0.2米突之處。懸2瓩之物。由兩端0.4米突之處。以兩人荷之。問及於各人之肩。其壓力若干。

3. 有天秤左盤載物體。右盤載29.62之分銅。天秤適相均。又以此物體移之右盤。左盤所加之分銅。只要28.70克能相均。問此物體本來之重。及兩臂長之比。

4. 長1.5米。重3.2克之棒AB。由A端支於0.9米突之處。棒適相均。今支於此棒之中點。要使其相均。於A端須掛若干之重。

5. 有100克之物體。支於長10米。高6米之斜面上。問沿斜面方向所作用之力若干。又對斜面底邊平行之方向。加以若干之力。

6. 於前題物體沿斜面落下。其達於最下點有若干之速。又其時運動之能力如何。

7. 有尖劈嵌於木之裂口。其長與厚之比。猶16：12之比。今加20斤之力於尖劈之背。問尖劈以幾何之壓力割木。又尖劈入木若3寸。木裂口大若干。

8. 有螺旋壓搾器。由螺旋之軸。至把柄之端。其長2尺。

螺旋一迴轉之高2分。今加100斤之力於此器械把柄之端。當生如何之壓力。

9. 有3糎高之圓柱。卷25回之螺旋。以之加於物體。要使生5瓩之壓力。須用幾何之力。

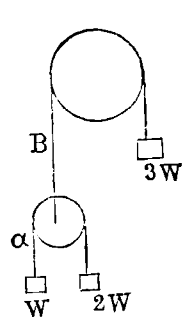
但自力點至螺旋切口中之長爲7糎。

10. 有輪軸。輪之半徑4寸。軸之半徑$\frac{3}{4}$寸。今欲舉上50斤之重。以省力之故。繫物於捲軸之繩。下更置於傾斜30度之斜面上。問此物由斜面滑上。所加於輪緣之力要若干。

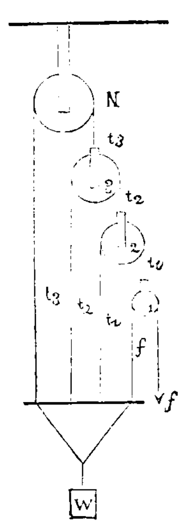
11. 以輪軸引舉井中30磅之弔桶。其輪軸迴轉七回。弔桶昇上$5\frac{1}{2}$尺。輪之半徑若爲15寸。問加於軸之力若干。

12. 通於定滑車之繩。一端結500克之物體。引於他端。要使生50秒秒糎之加速度。須以幾功之力。

第 154 圖



第 155 圖



13. 以定動滑車各2箇。爲一組。P重5斤。W重16斤時。P下降之加速度若干。

但滑車及繩共假定爲無重量者。

14. 於第154圖所示滑車之裝置。3W下降之加速度爲$\frac{g}{17}$試證明之。

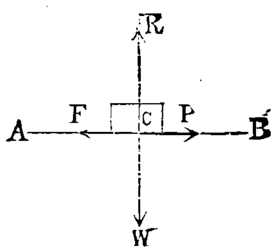
15. 如155圖之裝置。n爲定滑車。1.2.3爲

動滑車。動滑車之重爲 w_1 w_2 w_3 今掛重物W。要舉上之。宜用若干之力。

第八章　摩擦 Friction

81. 摩擦　有m質量之物體C。靜止於水平面AB之上時。働於其體之重力$W=mg$。與AB面之反働力R相平均,今平行於AB之一力P。作用於C時。此力至一定之大。C尙靜止。故物體與AB面之間。必有與P大相等之力。作用於反對之方向。(此力爲F)此F之力。乃阻礙物體運動。抵抗原働力者。曰$\boxed{\text{摩擦力}}$

第156圖



故摩擦力常與働此物體之力相等。而方向相反。次P之力漸增。摩擦力亦增。但摩擦力之大有限。若加於物體之力。大於摩擦力。則物體始運動。故可知摩擦力有一定之極限。名此極限。爲$\boxed{\text{最大摩擦力}}$

82. 毛霖之法則 Law of molen　由實驗之結果。一物體動於他物體之面上時。

第一　最大摩擦力。正比例於兩物體間之直壓力。直壓力者於兩物體接觸之面。互以直角相壓之力也。物體在水平面時。其直壓力卽物體之重。

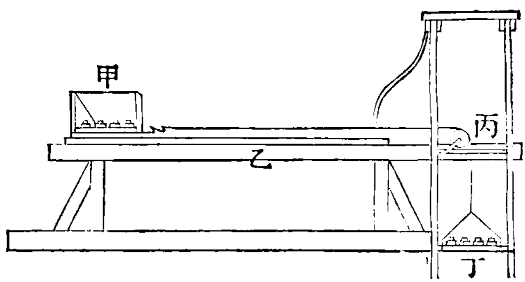
第二　最大摩擦力。關於二物體之性質。不關於摩擦面之大小。

今以二物體間之直壓力爲P。以其接觸面之面積爲a。則單位面積之直壓力。$\frac{P}{a}$也。由第一則單位面積間之最大

摩擦力。正比例於$\frac{P}{a}$。故全面積間之摩擦力。卽其a倍。(正比例於$\frac{P}{a}\times a=P$)。卽最大摩擦力。無關係於其接觸面之面積。

[實驗上證明]　科崙氏 Coulomb 用第 157 圖所示之裝置。就滑動摩擦。確證其定律。

第　157　圖



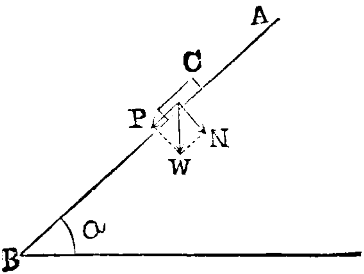
卽甲乃負載重量之小箱。置於水平之線路上。而此線路二條。並行敷設於乙臺上。箱之一邊。繫以線。繞丙之滑車而垂於下方。其末端繫丁之秤盤。置重錘於此秤盤上。以牽引甲小箱之用。箱之下面與其線路。若同爲金屬所製。甲之全量。與其所負載之重物。若爲六瓩。則置於秤盤之重錘與其秤盤之重量。祇共須一克。已能引下六克之重。今若甲箱之全量加至二倍。或三倍。則秤盤之重亦要加至二倍。或三倍。又線路之廣與狹。於實驗上不生毫末之差。

83. 摩擦係數 Coefficient of Friction

二物體間之最大摩擦力。若爲已定之數。則二物體間之最大摩擦力。與其間直壓力之比。亦一定。由前法則自明。此比爲其二物體間之[摩擦係數]通常以μ示之。

取一片之板。於其上置物體C。板水平時。作用於此物體之重力W。與板之反作用R相均。今以此板少傾斜。所作用於C之重力。分解爲P與N。如前斜面之作法。此時若C與接觸面AB無摩擦。則C受P之力。沿斜面之方向落下。但實際固有摩擦。C不易落下。今斜面之傾斜角漸增。則P之分力漸大。遂至P力等於二物體之最大摩擦力。然後更少增傾斜角。則P比最大摩擦力大。因之物體C遂落下。

第 158 圖



作用於物體之重力W。被傾斜至某角度。沿斜面之分力。至等於物體與斜面間之最大摩擦力時。其斜面之傾斜角。爲『摩擦之限角』

設物體C之質量爲m。物體與斜面間之限角爲α。則P之分力如83條所述$P=mg\sin\alpha$。是卽等於物體與斜面間之最大摩擦力。其接觸面間之直壓力。與斜面成直角。其分力$N=mg\cos\alpha$。

故此二面間之摩擦係數$\mu=\dfrac{P}{N}=\dfrac{mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha}=\tan\alpha$

故二物體間之摩擦係數。等於其間之摩擦限角之正切。由此理測摩擦之限角。容易得測摩擦係數。

由毛霖之法則。大略二物體間之摩擦係數如次。

磨光之玻璃與鋼鐵　　μ 0.11

磨光之大理石與大理石	0.16
黃銅與鍛鐵	0.17
鋼鐵與鍛鐵	0.20
樫與樫(纖維平行者)	0.62

84. **動摩擦** 物體運動於他物體之表面上。當運動時。其接觸面之間有妨運動之力。故若以勝此阻礙力之力。加於運動之方向不絕。則物體漸減其速度。如斯者。物體運動之間。於接觸面生妨此運動之力。曰【動摩擦】反之如前所述之摩擦。曰【靜摩擦】

動摩擦與直壓力之比。爲【動摩擦之係數】

由實驗之結果。二物體間之動摩擦係數。比其間之靜摩擦係數小。

物體滑動於他物體之面上。其運動間之動摩擦。爲【滑摩擦】又回轉運動之摩擦。曰【回轉摩擦】回轉摩擦係數。比滑摩擦係數小。

85. **摩擦之利害** 若無摩擦。則難把握物體。握物體如摑鱺鰻矣。步行亦易顛倒。至如走於冰上者。又諸機關之運轉。由一器傳於他器等。亦皆不能無摩擦。是摩擦之效用甚廣也。

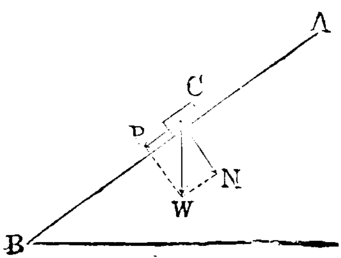
但摩擦力過强。有時亦覺不利。如阻礙諸機械之運動。幷門戶之開閉亦難。故物體貴磨平滑。或塗抹油質脂肪等。以減其摩擦。是曰【滑劑】

媒間體之抵抗　物體在水或空氣間運動之際常覺有障礙運動者故運動之物體因之速度不免減少然則要弱其抵抗物體之構造要注意即要使容易排開媒間體例如船舶之構造振子球之形狀皆從此理魚類鳥類之體格亦天然符合此理但若全無抵抗則以櫓不能進船魚類亦不能游泳於水中鳥亦不能飛翔於空氣中也

對摩擦之功用　物體動於水平面上時對重力雖毫無功用對摩擦得生功用又沿斜面舉上物體時對作用於物體之重力變而為對沿斜面之分力與摩擦生功用

沿傾斜 a 角之斜面引上質量 m 之物體斜面之長為 l 糎斜面與物體間之摩擦係數為 μ 時由之得計算其所為功用之量

第 159 圖



設作用於質量 m 物體之重力為 mg 功其直角於斜面之分力即直壓力為 N

$$N = mg\cos a \text{ 功}$$

又以其間之摩擦力為 P 則

$$\frac{P}{N} = \mu$$

即

$$P = \mu . N = \mu mg\cos a \text{ 功}$$

沿斜面之分力 H

$$H = mg\sin a \text{ 功}$$

故此二力之和

$$mg(\mu.cos a + sin a)\text{功}$$

若以此力動 l 糎，則所要之功用

$$l.mg(\mu.cos a + sin a)\text{爱格}$$

第八章之問題

1.　載物體於斜面之上。此斜面之傾斜角。漸增至 30° 時。物體始滑下。問物體與斜面間之最大摩擦力。及摩擦係數。

2.　有 1 瓩之物體。靜止於水平面。此物體與面間之摩擦係數若為 $\frac{1}{5}$。則働此物體。要以若干之力。

3.　沿傾斜 30° 之斜面。引上 45 克之物體。要使生 40 秒秒糎之加速度。物體與斜面間之摩擦係數若為 $\frac{2}{3}$。則引上物體要以幾何之力。

4.　有蒸汽機車。每時以 25 哩之速度。沿水平鐵道。引 150 噸之列車。鐵道之摩擦。每噸等於 20 磅之重。問機關車之馬力若干。

但 1 哩 = 5280 呎　　1 馬力每分 = 33000 呎磅

5.　質量 400 克之物體。沿斜面滑下。該斜面之長 100 尺。傾斜角之正弦 0.6. 摩擦係數 $\frac{1}{2}$。問該物體達斜面之底。所有之速度。及運動之能力如何。

6.　質量 1 瓩之物體。沿 9 糎高之斜面滑下。達於其底時。得 5 秒糎之速度。問因摩擦所失運動能力之量如何。

7.　每秒以 30 米之速度。轉於水平面上之物體。該體與此面之動摩擦係數。若為 $\frac{1}{10}$。幾秒之後。此物體當靜止。又其間經過幾何之距離。

8.　一物體置於 45 度之斜面。恰靜止而不滑下。問此時

之摩擦係數。

9. 有人於水平面上。其力能引30瓩之重量。在$\frac{1}{80}$之傾斜面上。得舉若干之重量。

但兩面之摩擦係數為$\frac{1}{10}$

10. 9斤之物體。沿傾斜60°之斜面上。以15斤之力引之。其加速度若干。

但其間之動摩擦係數為0.414。

第九章　彈性體 Eiastic Body.

86. **彈性** Elasticity　前所述質點及剛體。多就固體全體運動及靜止之狀況而研究之。於本章就力作用於固體之表面時。物體生伸縮者論之。凡物體表面受外力作用，物體起伸縮時。物體生反抗外力之內力。若取去外力。再復原狀態。該物體蓋有彈性者也。有彈性之物體。曰 彈性體 抵抗外物之內力。曰 彈力 通常物之伸縮小者。取去外力，易再復原狀態。但若物體之伸縮大時。至不能完全再復原狀態者。此時物體之伸縮爲過彈性之極限 Limit of elasticity 如橡皮體之物。其伸縮雖大。不踰彈性之極限。此等物體乃富有彈性者。又物體之伸縮雖小。若以長時間屢受外力作用。終至無能再復原形者。是以彈力屢受外力作用。因至薄弱故也。此名曰彈性之疲勞 Fatjgue of elasticity 如彈機永用時。終至不堪使用者。彈性疲勞之故也。

無彈性之極限及終不疲勞之物體。曰 完全彈性體 凡物體受力。其伸縮雖小。仍卽復原形者。皆得看爲彈性體。

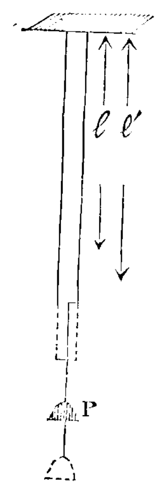
彈性之例　(a) 如以竹片一旦撓之復放。其伸縮若不大。仍復原形。但若撓之過甚則成曲形而不復原狀。蓋過彈性之極限也。(b) 火輪車之通路。如鐵橋。火輪車通過之際。生伸縮若在彈性極限以內。則火輪車通過之後。忽復原形。若火輪車之重過大。至踰彈性之極限。則橋遂有破損之虞。

87. 弗克之法則 Hocke's law 及陽古之彈性率 young's modulas

由實驗於完全彈性體之伸縮，正比例於起伸縮之力。是爲弗克之法則。例如以力引延鐵線，其長延至 $\frac{1}{100}$，若以二倍之力引延之，則延長 $\frac{2}{100}$，次由此法則對各種之伸縮述彈性。

延之彈性 Elongation　固定棒於一端，他端弔錘引延之，則棒之形狀與錘重及所延之長有次之關係。

第 160 圖



l ＝棒初時之長

l' ＝引延後之長

A＝斷面積　P＝錘之重則

$l'-l$＝所延之長

$\frac{l'-l}{l}$ ＝每單位所延之長

$P=AE\frac{l'-l}{l}$　或　$\frac{P}{A}=E\frac{l'-l}{l}$

E者比例之常數，稱爲引延之彈性率。$\frac{P}{A}$ 以棒大之面積除引延棒之外力者。是曰張力。

故若以 $\frac{P}{A}=p$ 則上式得書之如次。

1.　$p=E\frac{l'-l}{l}$　或

2.　$E=p\cdot\frac{l}{l'-l}$

譬如某物體因 p 之張力 $l'=2l$。則 $E=p$。故(1)及(2)得以文字述之如次。

1.　引延之長。正比例於張力。

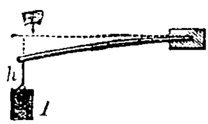
2.　彈性率者等於其長引至二倍之張力。

故可知彈性率大之物體。引延之要以大力。

引延之彈性率 瓩/粍²			
鍛鐵	21000	金	8100
鋼	19000	銀	7400
白金	17000	玻璃	6800
銅	13000	鉛	1800

左表所載之數。乃以斷面積1平方粍之金屬線。引延至其長之二倍。要若干瓩之重也。

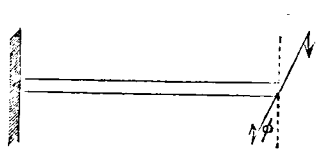
第161圖



屈撓彈性 Elasticity of Flexure　固定棒之一端。支之於水平。他端懸錘。則棒曲而其端下垂。去錘則仍復其原形。是爲屈撓之彈性。若以棒之闊爲 a。以棒之厚爲 b 以其長爲 l。以他端所弔之錘爲 P。則其端所屈撓之距離 h。正比例於 $\frac{l^3}{ab^3}P$。故其棒之不撓者。宜增其厚。

扭旋彈性 Elasticity of Torsion　固定圓棒之一端。(長 l 斷面半徑 r) 他端働以偶力時。視迴轉角度之大小與棒之長相比例。與力之大小相比例。與棒之橫切面之自乘積相反比例。如第162圖。迴轉角 ϕ 正比例於 $\frac{1}{r^4}$。

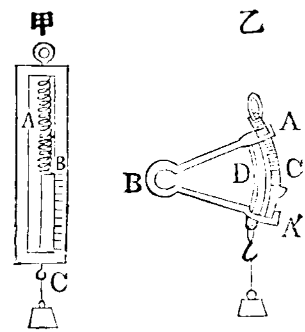
第162圖



88. 彈性之應用

如『撥條秤』Spring balance 卽應用弗克之法則。測物體之重。或計力之器械也。如163圖。最普通之形。

第 163 圖



於甲圖A爲撥條。於下端C之鈎弔物體撥條因受重而延長。逐由B指針之位置得知C之重。

於乙圖ABA'乃金屬棒於B處屈曲者。CD之弧狀亦係金屬所製。C固著於A'B。D固著於AB。在D下方之鈎弔物體時隨其重而B曲撓。AB下。逐由C之度。得知物體之重。

凡物體衝突受擊力激動不免有破損之虞故此時利用彈性體裝置彈機於衝突部以避其患如火輪車之客車於其前後常附彈機者。卽防有衝突破壞之虞也。又人力車馬車於其下亦附彈機以其曳於不平之地車不免有激動於上下故裝置彈機不使激動傳於乘客也。

又如吾人由高處跳下若以踵立地必感激動若以爪先立則激動少蓋以爪之關節有天然彈機突然跳下。不卽急止徐徐而止也。

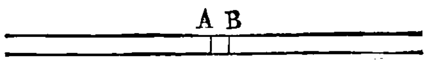
89. **伸縮** Strain **及伸縮力** Stress　以力作用於物體。物體之全部不起運動惟一部分對他部分變其位置因之物體或變其形或變其體積此等現象。爲『物體之伸縮』

例如機上之書若置重錘。書因被壓迫。減其厚。又如固定金屬線之一端他端引延之。金屬線略增其長。而稍減其大。

又挾書於兩掌之間。因掌沿表紙作用以力。書變其形。此類皆伸縮之明證也。

於上例置錘於書之上。壓其表面上之紙。此表紙遂壓於其下之紙面。其紙面又壓其下之紙面。逐次壓於各紙面。若是之力爲$\boxed{\text{壓力}}$

第 164 圖



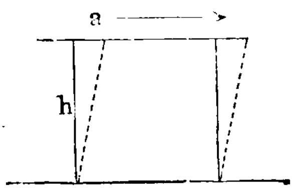
又引金屬線之一端時。直角於其長之方向。得於任意AB二點。看作相接近之二截面。則引於其端時。得看作A之截面。引B之截面。此等之力爲$\boxed{\text{張力}}$

所謂伸縮力者。於物體受外部作用。物體起伸縮時。外力與其反抗之彈力相均之結果。由是觀之。卽壓力與張力相均之結果也。

伸縮力者。正比例於所加之外力。譬以力愈大。伸縮愈甚。又伸縮力者。乃對於其面所作用之力。故通常所表之數。乃以其單位面積除其力。又對其面更得分解爲直角之方向。及切線之方向。直角分力。爲$\boxed{\text{縱伸縮力}}$切線分力。爲$\boxed{\text{橫伸縮力}}$縱伸縮力。卽張力壓力兩相作用者。於引延彈性之實驗。旣已述之。橫伸縮力說明如次。

取上下兩面平行h厚之物體。固定下底。上面固著於板。板上以a之力橫壓之。物體遂如圖生伸縮。此等伸縮力又名爲分行力Shear。以$\frac{a}{h}$表其分量。此時平行於底面沿各面所作用之伸縮力。卽橫伸縮力也。而$\frac{a}{h}$若小。則物體雖變

第 165 圖



其形狀而無變其體積故若於物體之表面作用以橫伸縮力物體生分行力除去橫伸縮力仍復原形狀是該物體有形狀之彈性然則因表面所作用之力若體積生變化者亦得謂體積之彈性也所謂爲橫伸縮力者究卽由働於表面之力與摩擦力所生蓋働於物體表面之力若無摩擦力則因其作用而直壓於表面而不分行於他方向今以摩擦抵抗故對底面所作用之力外更生對摩擦抵抗之反働力而動於矢之方向也

固體有體積及形狀之兩彈性若流體則雖有體積之彈性無形狀之彈性蓋以流體對形狀之變化其抵抗力小也流體之內使液體變其體積要以大力氣體則但以小力卽能使變其體積

90. 非彈性體之衝突　衝突之理已於前運動不變之法則述之茲於說明彈性體衝突之前更就一般衝突之法則詳述之并說明其與能力之關係

質量 m_1 之球 A 以 v_1 之速度運動與質量 m_2 靜止之球 B 衝突時兩球同運動其速度爲 v 其初時之運動量爲 $m_1 v_1$ 兩球同運動時之運動量爲 $(m_1+m_2)v$ 此二者之運動量不可不相等蓋以二球縱衝突之後對運動無加以他力也故

$$(m_1+m_2)v=m_1 v_1$$

$$\therefore \qquad v=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$$

若 B 於 A 所運動之直線上。與 A 同方向以 v_2 之速度運動。則兩球衝突後。仍合爲一體。與前同方向運動。其速度爲 v。則其兩球衝突前之全運動量 $m_1v_1+m_2v_2$ 其衝突後之全運動量 $(m_1+m_2)v$。

第 166 圖

故
$$(m_1+m_2)v=m_1v_1+m_2v_2$$

$$\therefore \qquad v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$

又 B 與 A 相對。同一直線上運動時。則以 v_2 爲負。前式變之如次。

$$v=\frac{m_1v_1-m_2v_2}{m_1+m_2}$$

衝突後兩球爲一團。與初之運動量大者之球。運動於同方向。

次就兩球衝突前後之能力思之。

若 B 靜止。A 以 v_1 之速度運動。則衝突前 A 所有運動之能力 E_1

$$E_1=\frac{1}{2}m_1v_1^2$$

以 B 之速度爲零。故衝突前兩球所有運動能力之總和。仍

$$E_1=\frac{1}{2}m_1v_1^2$$

又衝突後兩球所有運動能力之總和 E_2

$$E_2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$$

以此式代入上所得 v 之值。卽以

$$v=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$$

故
$$E_2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\times\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 v_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1^2}{m_1+m_2}v_1^2=\frac{1}{2}m_1^2v_1^2\div(m_1+m_2)=\frac{1}{2}m_1v_1^2\times\frac{m_1}{m_1+m_2}。$$

故
$$E_2<E_1$$

由此可知兩球衝突後。所有運動之能力。比衝突前小也。蓋因其衝突之際。所有運動之能力。半變爲熱之能力故。

91. 彈性體之衝突 有彈性之兩球衝突之後相分。以各異之速度。運動於反對之方向。而兩球運動量之和。亦如非彈性時。於衝突之前後相等。

據牛頓所實驗。同物質之二球。其運動時。若中心同在一直線。則衝突後速度之差。與衝突前速度之差。其比常一定。此比乃由其球之物質而大異。無關於球之質量。此比爲『反旋之係數』通常以 e 表之。e 之值常負。其絕對值決不比 1 大。

今 AB 以二球衝突前之速度。各表以 u_1 及 u_2。衝突後之速度。各表以 v_1 及 v_2。則

$$\frac{v_1-v_2}{u_1-u_2}=-e。\qquad(1)$$

又以此兩球之質量爲 m_1 及 m_2。則由運動量不變之法則。

$$m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2。\qquad(2)$$

由(1)(2)求 v_1 及 v_2 之值。則得

$$v_1=\frac{u_1(m_1-em_2)+m_2u_2(1+e)}{m_1+m_2} \tag{3}$$

$$v_2=\frac{u_1m_1(1+e)+v_2(m_2-em_1)}{m_1+m_2} \tag{4}$$

$e=0$時則兩球為非彈性體。而

$$v_1=v_2=\frac{u_1m_1+v_2m_2}{m_1+m_2}$$

與前條所得之結果同。

$e=1$時，則兩球為完全彈性體。此時

$$v_1=\frac{u_1(m_1-m_2)+2m_2u_2}{m_1+m_2}$$

$$v_2=\frac{2m_1u_1-u_2(m_1-m_2)}{m_1+m_2}$$

又　$e=1$　$m_1=m_2$時，

$$v_1=u_2 \qquad v_2=u_1$$

即二球質量之完全彈性體兩球衝突之後。交換其速度。

又彈性體之球垂直衝突於固定彈性體之壁者。則於上所述。得看m_2為∞。其速度v_2為零。此時以m_2除(3) (4)之分母子。

$$v_1=\frac{u_1\left(\frac{m_1}{m_2}-e\right)+u_2(1+e)}{\frac{m_1}{m_2}+1}$$

$$v_2=\frac{u_1\frac{m_1}{m_2}(1+e)+u_2\left(1-e\frac{m_1}{m_2}\right)}{\frac{m_1}{m_2}+1}$$

若$m_2=\infty$，則$\frac{m_1}{m_2}=0$。又以$u_2=0$故

$$v_1=-u_1e$$

$$v_2=0$$

若兩體爲完全彈性體。則以$e=1$

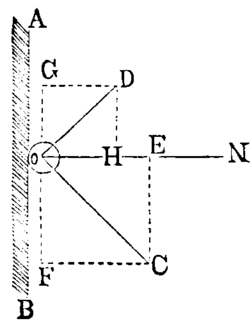
$$v_1=-u_1$$

卽球與壁衝突後之速度,與前之絕對值符號相反,蓋謂衝突後,與衝突前。以同一之速度反躍也。

次就彈性體之球與彈性體之壁衝突。其方向非垂直衝突於其壁面者論之。

設AB爲壁面。球O運動於CO之方向。衝突於壁,其速度爲u。u得看作二分速度所合成。一爲NO之方向。其分速度爲EO。一沿AB之面,其分速度爲FO。此FO之分速度,衝突AB之後,仍不變其方向及大。向於OG。EO卽如上文衝突之後,爲$-ue$。表之以OH。則衝突後球之速度。乃OH,OG之合速度OD也。

第167圖



$e=1$時。OH等於OE。由之　OD=OC。　NOD角=NOC角。卽投射之方向。與反射之方向。對投射點之鉛直線。爲等角者也。

第九章之問題

1. 長250糎,切口之半徑·3粍之銅線之端,懸12瓩之重,銅線被引延至8粍,求此銅線之彈性率。

2. 有非彈性體之球,其質量一爲8斤。一爲15斤。前者以6秒尺之速度,後者以3秒尺之速度循同方向,動於同一直線上,兩球衝突後之速度如何。又衝突前兩球運動之方向若相對則衝突後之速度如何。

3. 甲乙二球,運動於同一直線上,甲質量700克,速度5秒米,乙質量1300克,速度3秒米,求兩球運動於同方向衝突後之速度,及兩球運動於相對之方向,衝突後之速度。

但球之反旋係數爲$\frac{1}{2}$

4. 質量1瓩之球,由49米之高,落下衝突於地面而反躍球與地之間反旋之係數若爲$\frac{1}{3}$,則球當昇至如何之高,又球所失運動之能力如何。

5. 有AB二球,B球靜止於離壁20粉之處,A球向壁每秒以24粉之速度,運動於壁之方向,恰衝突於B球,B球因受運動衝突於壁而反躍,再衝突於A球,其點當在何處,

但二球之質量相等,二球間及球與壁之摩擦係數共爲$\frac{1}{2}$

第十章　物質之組成

92. 分子說 Molecular theory　物質之組成。到底非吾人得由實驗上探知其實際。就古來學者所唱之假說殊多。其最爲今世學者所信仰者。僅『分子說』『渦動說』而已。

分子說乃希臘之德謨頡利圖 Demobritos 所倡始。其後經多之學者修正。遂由其說。稱物質爲分子微小之部分所集合而成。分子與分子之間。有空隙。其空隙尙比各分子大。各分子於此空隙之間。種種運動不絕。衝突他分子。常相反躍。又此分子與分子之間。有名一種之凝聚力。防其相離。此力惟各分子甚接近時。始有作用。故其作用之範圍甚小。

由此說可知固體之分子。運動區域甚小。其分子僅得振動於一點之周。而受他分子之引力卻大。蓋以其凝聚力大也。液體比固體分子運動之區域稍大。故其凝聚力小。又氣體分子間之距離甚大。得自由運動。殆無凝聚力之作用。故非密閉於器中。直擴散。

凝聚力之例　固體凝聚力之強盛。固吾人所常見。畢竟卽物體生抵抗外力之內力。於彈性體已述之。故要分離固體。或扯裂之。或屈折之。或壓碎之。隨物體之性質。分裂之要以若干之力。

凡固體如絲線金屬線等。要牽扯而截裂之。因物質之橫斷面積及長徑。所費之力有大小。謨先布爾科 Muschenbroek 曾就各種之線而實驗之。凡一平方粍橫斷面之固性如次。

金線	46.45 瓩	鉛線	2.72 瓩
銅線	27.82	麻索	25.00 以至 36.20
鐵線	41.82	白玻璃	1.42 以至 2.33
錫線	4.17		
黃銅線	35.50	銀線	34.11

又固體之凝聚力。由彈性體亦得說明其理。凡物體分子以「以汰」包圍。故若壓陷彈性體之一部。物體之分子。使相近接。因之分子之相引力增加。但存於中間之「以汰」被壓縮。反撥力亦漸强。故若去外力卽復其故形。反之引延物體。物體之分子漸使相遠。因減其相引力。「以汰」之反撥力亦弱。但引力減不如反撥力急。故去外力。仍復其原形。

液體之凝聚力。如雨露等。形成點滴者是也。又如以少許水銀。撒注玻璃板上。殆成球形之滴粒。是亦凝聚力之作用而液體表面之凝聚力。概比內部之凝聚力大。故縫鍼得浮於水面。昆蟲走於水面而不溼潤。又吾人之身體擊於水面而覺痛。亦由水面之凝聚力也。

此分子引力。不啻於一物體之分子間。有作用。且於異物質之物體相接近時。亦相互作用。例如木片入於水中。水之分子。附著於木。此等分子引力行於異物質間者。爲附著力。由此假說。固體入於液體之後引出之。液體之附於固體者。其液體之凝聚力。比二物體間之附著力小也。又如玻璃置於水銀中。其液不附著於固體。其液之凝聚力。比二物體之

附著力大也。

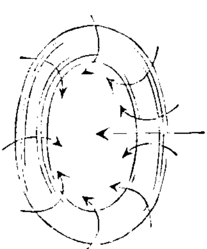
由種種之現象。學者多就分子之大及分子間之距離而研究之。於千八百三十五年。法國有克司者。由光學上。通過玻璃或水之光。窺物質之分子。由其分子之中心。至其鄰分子中心之距離。凡一糎之二億分之一。又英人威利亞墨孫 Williamson 言氣體分子之直徑。由一糎之一億四千萬分之一。至四億六千萬分之一之間。氏又言分子之大如次。

若一滴之水。膨脹至地球之大。其各分子亦膨脹。其一分子之大。約有蜜柑之大。

93. 渦動說 Vortex motion 渦動說為罕甯何爾 Helmholtz(德人)所研究。威利亞墨孫氏所創設。其說甚巧妙,但屬於高尚之程度.本非此書論述之範圍.茲姑述之,初學者即略去不讀可也.

由煙管吹出之煙.往往為輪狀而運動.固吾人所目擊.又製燐化輕氣通玻璃管導之於水中.氣泡達於水面.接空氣直為白煙.成輪狀而上騰,此等之運動曰渦動.又實驗渦動之法.亦可以一面開放之木箱.一面貼以紙.或橡皮膜.於板之中心穿小孔.置紙煙或線香之煙於其中.輕叩橡皮膜之中心.則見煙由口而出.生渦動如圖形.凡形成渦動之煙.其分子對渦輪之軸.常成直角.如圖所示.乃渦輪之平面.其煙循輪之方向.不絕迴轉也.

第168圖



以煙所為之渦動.由煙內部之摩擦.及煙與空氣接觸面之摩擦.致漸漸消滅.苟無摩擦.并不受壓縮.起諸理想上流體

內之渦動.大異其趣.茲列舉其諸性質於下.

第一　渦動決不能起諸人爲的.然一旦起渦動.永久不消滅.

第二　爲渦動之分子.永遠渦動.與他之不爲渦動之分子.全示區別.不混雜.

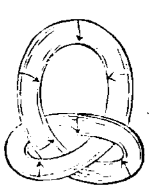
第三　爲渦動之流體.分子廻轉於對渦軸成直角之平面內.而渦動通常爲輪環狀.無終端.但於流體之境界面.渦動之輪.不在此例.或有終端.

第四　渦者有完全彈性體之性質也.以煙所爲之渦.若切之以棒.渦從棒而變形.若除去棒仍復輪狀.

第五　二箇之渦.或一箇之渦.其各部決無互相交之理.

上記渦之諸性質.乃罕爾何爾氏以力學的所證明之事實也.而威利亞墨孫.基上記渦動之諸性質.研究物質之構造.建設渦動說.現今物理學者之假說.謂分子間有「以汰」者.乃無摩擦.且不可壓縮.故「以汰」之渦動.亦合上記之諸性質.故威利亞墨孫以爲物體之原子.起於「以汰」內者.乃渦形.第二之性質.渦不得假諸人爲.又一旦生渦.遂終不消滅.恰與原子不滅.物質不滅之說.出一致.而渦之形不止如前所示.顯簡單之形狀.且亦有如第169圖現複雜之形狀者.渦之各部.互相切而不相交.故一定之渦.永久不變其輪環之狀.但異體元素之原子.其輪環之狀.得看作異渦者.

第169圖



上記渦動說.不過屬諸臆測.世界尚無全採用其說者.

94. 固體之性質

固體中有特殊之性質.今舉其重要者如下.

(*a*) 展性 Malleability 展性者。物體得打成薄葉之性也。金鉛銀銅鐵等皆有此性。而此性之最富者爲金。若金打至成爲極薄之金箔。重疊四萬片。其厚僅分許。

(*b*) 伸性 Ductility 伸性者。物體得引延成細線之性也。金銀鋼鐵中。雖均有此性。而以白金爲最强。銀次之。由實驗上。凡白金一兩重。得引至三四十里長之線。

(*c*) 硬度 Hardness 物體與他物體相觸。兩物體起强弱抵抗之度。曰硬度。例如以一物體爬他物體。他物體生傷痕。反之以後者爬前者。若不生傷痕。則前者比後者硬度大。玆比較硬度之大小。曰硬度表。列舉如次。

1.	滑石	2.	石膏	3.	方解石
4.	螢石	5.	燐灰石	6.	長石
7.	石英	8.	黃玉石	9.	剛玉石
10.	金剛石				

(*d*) 脆度 Brittleness 受擊力容易破碎之物體。謂之脆度大。如赤熱之小鋼鐵線。急冷之甚硬。但一握卽折。又如融解之玻璃。滴入冷水中。固結而其質甚硬。卽以極硬之鋼鐵爬之。不生傷痕。但若以鐵鎚破碎其一端。可使粉碎如微塵。則是雖硬而甚脆也。凡硬度增者。脆度亦增。故欲使其脆度弱不易破碎。熱後須緩冷之。

第二編
流體力學
第一章 液體靜力學

1. 流體 Fluid 二物體相接。動於其接觸面，每生反抗運動之力，即靜摩擦力，此種性質，惟於固體有之。若取流體之一部。對他部分使動之。毫不呈反抗力。蓋以流體之分子，凝聚力薄弱，故一為外物所働，即變其形。由是觀之，流體者乃為無定之形也，因得書定義如次。

無靜摩擦力之物體，為流體，

變化形狀。不生抵抗之物體，為流體，

觀上二定義乃相因而起者，無靜摩擦力，故隨形狀之變化，不生反抗，隨形狀之變化。不生反抗。故無靜摩擦力，但於流體中，雖無靜摩擦力，不能謂幷無動摩擦力，凡物體劇急運動於流體中。每生抵抗。故即謂流體有動摩擦力可也。且液體粘著力大者，動摩擦力隨之俱大。

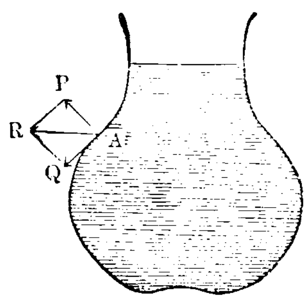
分流體為液體與氣體，Liquid and gas 壓縮體積比較的（比氣體）要以大力者為液體，以小力得壓縮其體積者，為氣體，氣體惟其易壓縮也，亦易膨脹。故液體通常雖有一定之體積，氣體乃無一定之體積者。又氣體之性質，以容易膨脹。故貯之要以密閉之容器。但液體受重力作用於下方，故容之於器。上方生不接容器之面。此面為 液之自然表面 Free Surface

2. 流體之壓力 Hydrostatic Pressure 貯藏液體必以有橫側與底之器。若器之一部穿孔。則液體由其處流出。蓋以接於器壁之液。受其後之液之壓力故也。塞孔以置之。則壁生抵抗器內壓力之力。而液成靜止之狀態。故器與液相接之處。常有壓力。但器壁不過妨液之壓出非以抵抗液之流動。故靜止液之壓力。常對其器壁。作用於直角之方向。

液靜止時。壓力所及於器壁。其方向常成直角。由次得證明之。

先假定此壓力不垂直於器壁。斜向於AR之方。則其力得如圖分解爲直角之分力P與沿器壁之分力Q。P之分力。雖支於器壁。Q之分力自不能支於器壁。A液不可不流於Q之方向。但由假定液體爲靜止。今流動於AQ之方向。是背假定矣。故液之壓力。舍直角器壁之外。皆不合理。

第1圖



注意 壓力之强。就一定區域之面言之。乃作用於其全面壓力之意也。若無一定區域。單就一點之壓力言之。乃作用於其附近之單位面積之壓力之意也。此二者區別之。前者爲 全壓力 Total pressure 後者爲 壓力之强 Intencity of pressure

今以作用於A糎²面積之壓力。爲P克之重。則壓力之强。

每糎²平均等於$\frac{P}{A}$克之重。

以上所述不止對液體而言也。凡一切流體皆能適合此定理。

例1 長20糎。幅15糎。高5糎。重500克之木片。橫置於水平之檯上。求全壓力及壓力之强。

答 全壓力500克之重（500×g功）

壓力之强每糎² $\frac{500}{20\times15}$克之重$\left(\frac{500}{20\times15}\times g\text{功}\right)$

例2 上例之木片。橫於傾斜30°之斜面上。其壓力之强幾何。

答 每糎² $\frac{500}{20\times15}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$克之重

註 力者作用於物體之全物質。或作用於物體之面（不論表面與物體內部所想像之面）而言也。如汎言重力，意謂作用於其全面積之力也。若作用於單位面積。則稱爲重力之强。壓力之稱名。亦略與重力同。作用於其全物體之面者曰壓力。作用於其單位面積之力者。曰壓力之强。

壓力於各部分或有不同。故稱壓力之强。必對某點（如於A點壓力之强若干）但若於其一點之周圍。就其極小之面積思之。則其所懸擬面積之內。卽看爲同等之壓力可也。由是以其面積除全壓力。得壓力之强。

因壓力之强。卽以單位面積除全壓力。故其單位。常以面積單位除力之單位表之。

C.G.S.重力單位爲$\left(\frac{\text{克(重)}}{\text{糎}^2}\right)$卽每糎有幾克之重。

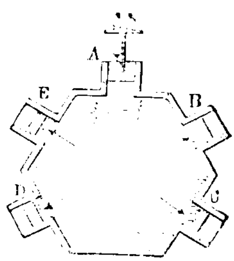
C.G.S.絕對單位爲$\left(\frac{\text{功}}{\text{糎}^2}\right)$卽每糎有幾功。

3. 液體中壓力之波及

加壓力於密閉之液體。其壓力波及於全部，卽各部所受之力。不關器壁與液體之內部，悉與原力之強弱相等。若其面爲 n 倍，則其壓力亦須 n 倍。是爲巴司格之原理。Pascals principle 發見自西歷千六百五十年。

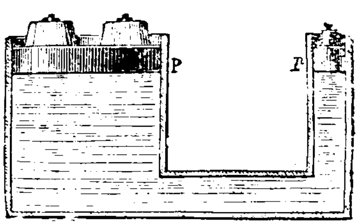
實驗 1　如第 2 圖以空心器。周圍有同形同大之圓筒口 A,B,C,D,E，今盛水或液體於此。各附以活塞，諸活塞皆受若干之壓力，今若於活塞 A 加 10 瓩之重，各活塞皆增 10 瓩之壓力，是物體受壓力之面積若相等，則所傳之壓力亦相等。

第 2 圖



實驗 2　於連底器(第 3 圖)以小筒 B 之面積，爲 1 平方糎，大筒 A 之積爲 m 平方糎，則於 B 若載 p 克面之重，於 A 須載 mp 克之重，始能相均，

第 3 圖

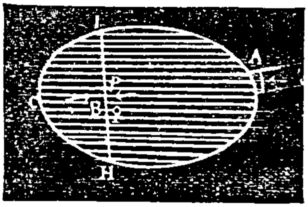


據上巴斯格之原理，其壓力不止及於容器之面積，隨意取液內之一點，亦以均等之壓力波及，

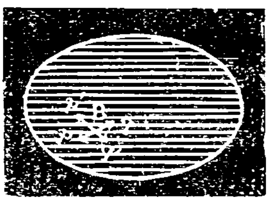
如第 4 圖以一器 CA，盛液體閉之，使保平均。由其面之一部，以活塞 A 壓之，此壓力遂及於液內部之全體，今欲證明壓力均等之故，得任意以液體中之一點 B，假定爲亦受

同壓力者。過B點之IH。得想像爲有平面。此平面中之分子。互相密附。卽看爲固體之平面亦可。由是AIBH得當爲盛液之器。於IH平面中。以pq爲受壓力之面。則其面所受壓力之强。與加於A口壓力之比。卽等於pq面積。與活塞面積之比。且此壓力垂直於pq之面。今若以pq爲靜止。餘皆爲流動者。則pq能保平均。必與前所加之壓力相等。且反對方向亦要受相等之壓力。是可知所加於A之壓力。卽任意取pq一點。亦以均等之壓力波及也。且所取之點。卽不關於pq之方向。於B點之周圍。取種種$pqp'q'$………之位置。與垂直於此面之壓力亦無不均等。故得斷言曰。凡保平均之液體中。於一點之周圍。各方向之壓力皆相等。

第 4 圖



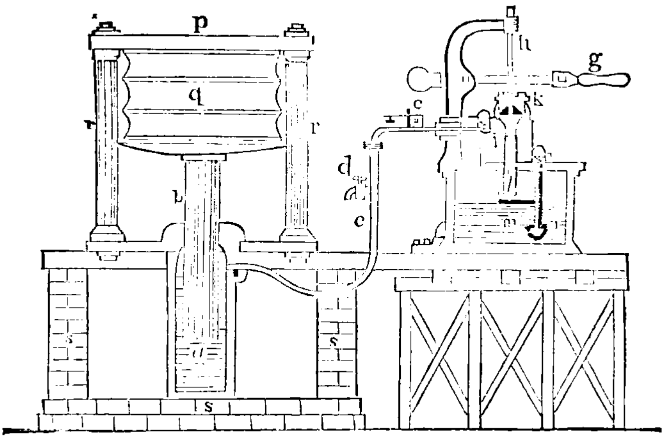
第 5 圖



4. 液壓波及之應用 依前定律。以適當之方法。由液體上起壓力。得任意倍重之。卽如第6圖之水壓機。此水壓機係千七百九十七年白賴禡氏Brahma所發明。故亦名曰白賴禡氏壓榨機。其搆造說明如次。

l及a爲二圓筒。a廣而l狹。由c管互相交通。a中有吸子b。l中有吸子h由g之槓杆臂。得任意上下h之吸子。穿貫於空筒之中k部。密合不使通氣。吸子h。由槓杆臂扛舉。則m

第　6　圖



器中之水。因外氣之壓力。(氣壓詳於後章)通過n管而進於l。n管之下端。因防水中之汚物流入。附以篩囊。而上端壓下h之際。防水逆流於m器中。故於n管特設瓣門。h管舉上而瓣門開。h管壓下而瓣門復合。故壓下h。水漸壓縮。通於c管i部之瓣門開。水流入於a中。b之吸子因被壓上。在其上之物體q。向p之厚鐵板上壓。其鐵板螺旋於rr之鐵柱上。此鐵柱又樹立於以磚瓦所造之堅實臺上。h之吸子。若再扛舉。則i之瓣門閉鎖。水昇於l中。此時下h。水又進於a。如斯反覆不止。壓p之力愈强。今欲退却作用於p之壓力。開d之活栓。放射被壓縮之水。又以壓力過强防機器破裂。具安全瓣e。此裝置乃以一臂槓杆之重點。塞水口。至水壓之强度過甚。自能避開。水略溢出。至得平均而復合。

此效果若無運動之障礙，得計算之如下。即以r爲小吸子之半徑。以R爲大吸子之半徑。以壓下之力爲k。以壓上之力爲K。則得下式。

(1) $$K=k\frac{R^2}{r^2}$$

今以l表小吸子所繫著槓杆臂之長，以L表所施人力之槓杆臂之長，以D爲人力所加之壓力。則

(2) $$k=D\frac{L}{l}$$

故以(2)之$D\frac{L}{l}$。代入(1)式之k。則

(3) $$K=D\frac{L.R^2}{lr^2}。$$

今以 $r=1cm$, $R=20cm$, $D=50kg$, $l=8cm$。$L=80cm$。則

$$K=50\frac{80\cdot 20^2}{8\cdot 1^2}=200,000kg$$

實際此作用，大約四分之一，由吸子之摩擦消失，故所及於大吸子之力。僅以150000瓩之壓力。

水壓機之作用甚强盛，故於油砂糖之製造所，常備此器，以供壓搾之用，又用以壓縮絨布紙棉等，得減其容積，又試驗礮身汽鍋等之耐壓力，亦用之。

$\boxed{\text{例 1}}$ 於白籟瑪氏水壓機。小圓筒之半徑，僅有大圓筒半徑之100之一。今加於小圓筒之力五斤。大圓筒受若干之壓力。

(解) 以所加於小圓筒之力 $k=5$。

故大圓筒所受之壓力 $K=5\times\frac{(100)^2}{(1)^2}=5\times 10000=50000$

但因摩擦失去$\frac{1}{4}$故大圓筒所受之壓力K

$$K=\frac{3}{4}\times 50000=37500$$

例2　小圓筒之半徑2糎.大圓筒之半徑60糎.又附屬於柄之槓杆.其兩臂$L=3$糎.$l=1$糎.若柄之端.置一瓩之重量.則及於大圓筒之重量若干.

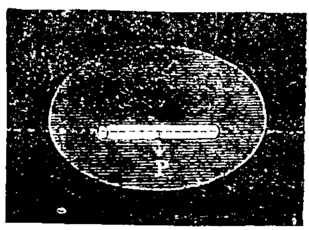
以加於槓杆臂端之力$D=1$瓩.大圓筒之半徑$R=60$糎.小圓筒之半徑$r=2$糎.

由公式(3)　$K=1\times\frac{3\times 60^2}{1\times 2^2}=\frac{10800}{4}=2700$瓩

又除摩擦所失$\frac{1}{4}$　$K=\frac{3}{4}\times 2700=2025$

5. 液體之平均　液體保平均時。在同一水平面中所有各點其壓力皆相等。第7圖所示液體保平均之狀態。其內部同一平面中取二點。又於此點之周圍。取相等之半徑。作二圓。兩圓相結之圓柱形。可想像作直圓柱。由是其所成圓柱體之液。其分子互相密附而平均。但其圓柱體所以能平均者。固不外以其重力及受側面所作用之壓力相平衡故也。然若壓於圓柱兩底之力不相等。則液柱必不免傾向於左或右之方向。但依假定液柱乃平均靜止者。則是左右之壓力亦相等。故曰液體保平均時。於同一平面中各點之壓力皆相等。

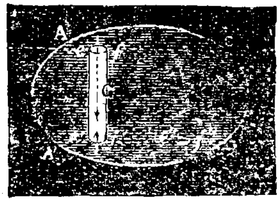
第7圖



6. 不在同一平面中相等之部分所受壓力之差　如第8圖於二水平面AC,A′C′,中。取$ef, e'f'$.兩部分

以cc', ff', 相連結成一圓柱體。仍想像爲一固體。則作用於其圓柱軸之力。乃作用於重心G之重P及鉛直作用於其兩底p,p'之壓力也。而圓柱體所以能成平均者。固以由下向上之壓力p',與由上向下之二力$p+P$之合力(卽其和$p+P$)相等故也。然則由下向上之壓力p'。與由上向下之壓力$p+P$其差卽等於P重。卽其兩水平面距離間液體之重也。故曰$c'f'$小部分所受之壓力。與cf所受之壓力。其差等於以此小部分爲底。以兩水平面ACA'C'之距離爲高液柱之重。

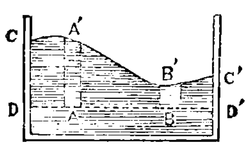
第 8 圖



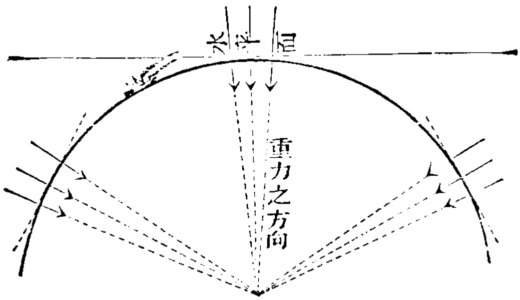
又若於A'C'之平面。取$c''f''$之小部分。與$c'f'$之小部分相等。則其所受之壓力亦相等。但若不在同一水平面上。則所取之小部分雖相等。其壓力不能相等也。

7. 液體之自然表面 Surface of liquids 液體容之於器。不受液壓力之面。卽表面常水平者也。今欲證明所以水平之理。先假定此面爲不水平,如CC'。由此表面下設DD'之水平面。於此面中取相等之兩小部分A,B。以之爲底。由此底至表面作圓柱體AA', BB'。於表面之壓力爲零。故A所受之壓力。等於AA'液柱之重。B所受之壓力。等於BB'液柱之重。當液保平均時。(依第5條)其重要相等。故由A,B至表面A'B'皆要在相等之距離。

第 9 圖



第 10 圖



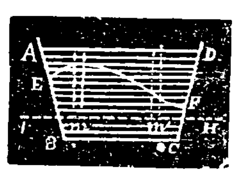
卽其表面當爲水平者也。但由一般所經驗海面及湖面甚廣闊之處。如第10圖。其液面部分因重力之方向。成彎曲形者。似背水面坦平之理。究不過所謂水平面者。取其一部分言也。

8. 異種液體之平均 凡一種液體保其平均時。於同一水平面所有各點其壓力均等。前已述之。此理不止於同種液體有然。卽混雜二種以上之液體。盛於一器。亦適合此理。故二種以上之液體。同在一器。保平均時。

1. 液之表面爲水平。
2. 二種之液相接之面爲水平。

何則。若液相接之面不水平。傾於EF之方向。如第11圖形。則是液體之水平面IH中。所取相等之小部分mm'。所受之壓力不能相等矣。是背液體水平之理。又重液在上。輕液在下。固不待言而可知也。

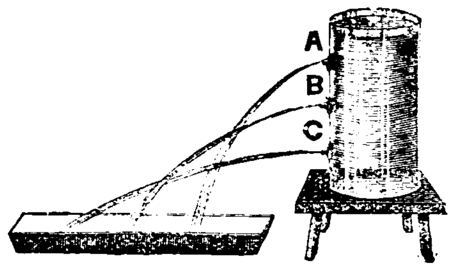
第 11 圖



9. 深與壓力之關係 由前所論。因液體之重。所生壓力之强。關於其深也明矣。今於高三四尺之桶側面穿小孔。盛水於此。則見其由孔噴出之水。孔愈低者流愈遠。故

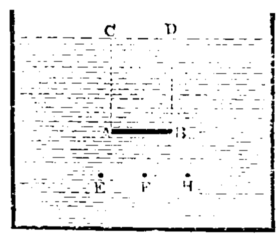
可知孔至液面之距離深者水之壓力强,又欲測由各孔噴出水所達之距離,但測由水面至各孔之距離,卽知各孔高低與流出遠近之比,

第 12 圖



今於第13圖所示,於液體之內部如AB,爲水平之平面,所及於液之壓力,卽如前所論等於ABCD液柱之重,今以AB之面積爲a平方寸,AC爲b寸,則此壔形之容積,爲ab立方寸,而一立方寸之液重,若爲c克,則此壔形內之液重爲abc克,故對AB平面各立方寸之壓力bc克也,是爲其處壓力之强,於此式b乃表液體內部之一定點至液面之深,故其値依點之位置而變,c爲液體一立方寸之重,乃定數也,故深若二倍,則bc之値亦二倍,深三倍,則bc之値亦三倍,卽bc之値比例於深,

第 13 圖



凡構造隄防,愈近底部,築造愈要堅固,若上下同一造法,則底邊必先受破損,以深處壓力强也,又大檣之下多施嵌箍,亦同一理,

$\boxed{\text{例 1}}$ 水銀一立方寸之重13·6克.深67糎.問及於底面一平方糎之壓力.等於幾克之重.

(解) 底面一平方糎。深76糎之體積。爲76×1=76立方糎。每一立方糎重13·6克。故76立方糎。乃其76倍。即

13·6×76=1033·6克之重之壓力。

=1033·6×g 功

[例2] 於上例每一平方糎。若加1000克重之壓力。則底面所受之壓力如何。

(解) 本有1033·6克重之壓力。更加1000克重之壓力。所及於底面一平方糎之壓力。即等於2033·6克之重。

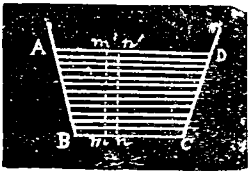
[例3] 於例2器底之面積。若有40平方糎。則其底面所受之全壓力如何。

2033·6克重×40=81344克重

10. 器底之壓力 底壓力正比例於其底面。及其高(其高即等於由液面至器底距離之高液柱之重)故壁面垂直之器。其下壓力即等於器中所有液體之重。反之上方狹而下方廣之器。下壓之力。却比其液之重量大。又上方廣而下方狹之器。其下壓之力。又比液之重量小。然則下壓力者。毫不關於液體之量。惟視其器底之如何耳。是爲下壓之定律。亦曰靜水學異象。今先證其器底之壓力。關於器底之面積。次證其無關於器壁之形。

於ABCD水平之器底。取 mn 之小部分。如前作 $mn\ m'n'$ 鉛直之圓柱體。此時 mn 所受之壓力。即等於 $m'n'$ 所受之壓力。加 $mn\ m'n'$ 液柱之重。今若以BC爲底。得分爲 mn 多數之小部

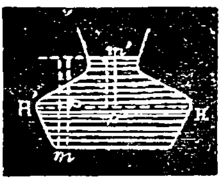
第 14 圖



分由是各部分所受之壓力卽等於 mn 所受之壓力故底面全壓力卽 mn 各部分所受壓力之合力故液體容之於器及於水平底之壓力等於以其底面爲底以由此底至液表面之鉛直距離爲高之液柱之重

又如上下廣狹不同之器亦適合此定律之理卽如第 15 圖上狹而下廣之器設 m 之小部分以之爲底其圓柱體之稜雖不會於液之表面其及於 m 部分之壓力得先假定爲等於 mp 液柱之重又於 p 同一平面上取 p' 之一點由 p' 作圓柱達於液面由是 p' 部分所受之壓力卽等 $p'm'$ 之重而 p 與 p' 同在一水平面上故 p 所受之壓力與 p' 所受之壓力相等因之 m 所受之壓力等於 $p'm'$ 液柱之重加 mp 液柱之重卽等於以 m 爲底由 m 至液之表面之鉛直距離爲高之液柱之重故曰液容於器不關於上下之廣狹其底壓力惟以水平底面積與底至液面之深爲比例

第 15 圖

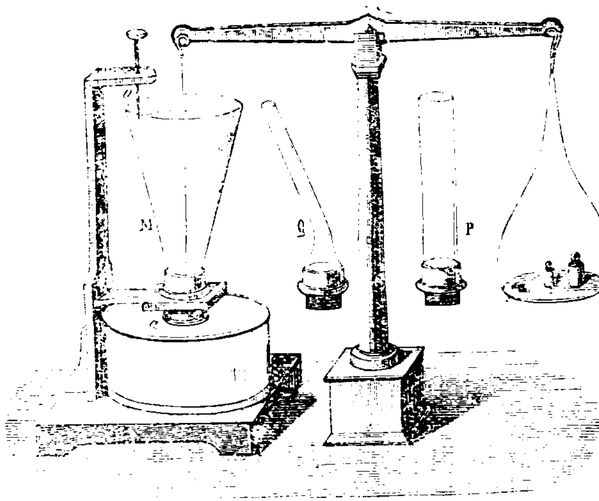


[實驗法] 實驗此理可以底面相等形狀各異之器一上廣而下狹一上狹而下廣一器壁傾斜者如第 16 圖水入之至同高其底面所受之壓力不論何器皆相等茲欲求壓力相等之明徵用次之器械得證之

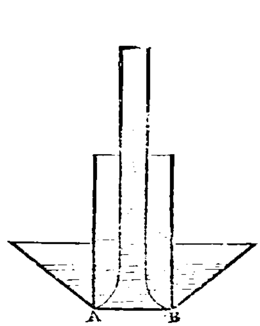
MPQ 乃如上所言異形之器而無底以 ac 板塞之作底其底之面積乃相等者也此器之下部各有螺旋各器置臺上

時。以之附於臺上之雌螺旋。又於 a 之中心。附以絲線。其上端懸於秤之一端。秤之他端置重。以其力壓蓋塞於器底。次徐注水於器。下蓋因受水之壓力。漸增加水量。終至蓋脫離而水漏出。視此時水面之高。以螺旋針O。測定其位置。次更換器以試驗之。不論M與P或Q之器。皆於水面至同高時。水卽漏出。故水壓器底之力。底之同面積者。不拘器之形狀如何。又不拘水量之多少常同也。

第　16　圖



第 17 圖

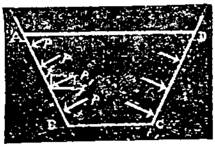


反之如第17圖。AB之面積。等於一平方粉圓柱形之器。盛重一瓩之水。則高爲一粉。底面所受之壓力。卽等於水重一瓩。若廣器之上部。水面之高。爲一糎。則底所受之壓力減爲百克。若又縮少器之上部。使水之高達百糎。則底所

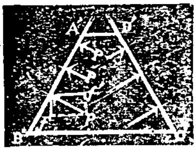
受之壓力增加爲十瓩。是同一水量。因器形而有差異。則他端所加之分銅亦不能無差異也。但水重爲一克。以分銅平均之。亦只有一克。宜無差異之理。而據前實驗。竟以器形之異。若增減其水量然者。是前後若矛盾矣。

雖然。就液及於器側面之壓力思之。(側面壓力見次節)決非有所異也。例如上部廣而底面狹之器。ABCD。(第18圖)AB側面各部分所受之壓力p。得分爲二分力。一爲水平之力f。一爲鉛直之力f。此鉛直之力壓側面更加壓底之力。間接壓於秤盤也。故秤盤所受之力。等於底所受之壓力。加側面各部分鉛直分力之合力。如f等。故比底所受之壓力強。又A'B'C'D'上部狹而底面廣之器。(第19圖)A'B'側面之力。雖如前得分爲二分力。其鉛直者反對重力之方向。故秤盤所受之力。等於由底所受之壓力。減去側面各部分鉛直分力之合力。故比底所受之壓力弱。

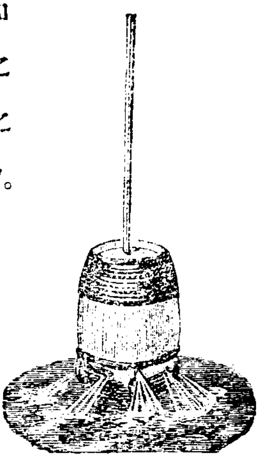
第18圖



第19圖



第20圖

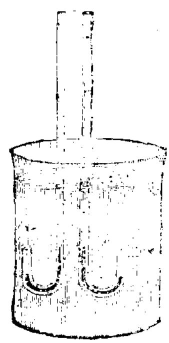


又液體之下壓。不關水量。只關底面之廣與水柱之高。尚有著明之實驗。如第20圖。即堅牢之樽。若插以長十米突之細管。充水於此。立見以猛烈之勢。破

裂其櫓。例如櫓底之面積五平方粉，水柱之高十米突時，底面所受之壓力五百瓩也。

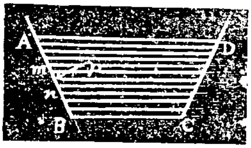
11. 側面之壓力　於容液體之器之側面穿小孔，則液由此孔噴出，因知液亦壓於側面者，如前第12圖見其噴出形態，近器底之處，流出之液垂直於器面，漸遠器底，因重力而屈曲，故液之壓力，可知其垂直於器之側面，又下壓力與側壓力相等之理由，次亦得證之，如第21圖取兩玻璃管，一曲於上方，一曲於側方，置曲端於水銀中，以口吸之，水銀少入於管中，次以指頭閉上端，入水中，置各曲端於同一平面上，放指頭，兩管中水銀之高相等，是下壓力與側壓力相等故也。

第21圖



今欲測此壓力之強弱，於盛液之器ABCD之側面，設mn之小部分。mn若極小，則不拘器之形狀如何，常得看作平面。又由其各點至液之表面之距離，皆得看作相等者，是小部分受垂直之壓力，其壓力之強，既不論其小部分之方向均相等，故其一點所受之壓力，卽等於水平位置所受之壓力，故mn小部分所受之壓力，等於以此小部分爲底，由底至表面之距離爲高之液柱之重，

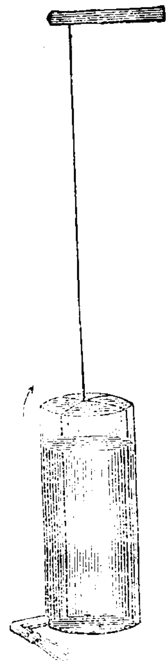
第22圖



又若取在側面中廣而平之部分思之，則其中各極小之

部分。皆受垂直之壓力。因之此壓力有一合力。其合力垂直於側面之重心。即等於各極小部分所受壓力之和。由是計算其壓力之强。等於以側面中所取之部分爲底。由此底之重心至液之表面之鉛直距離爲高之液柱之重。

第 23 圖

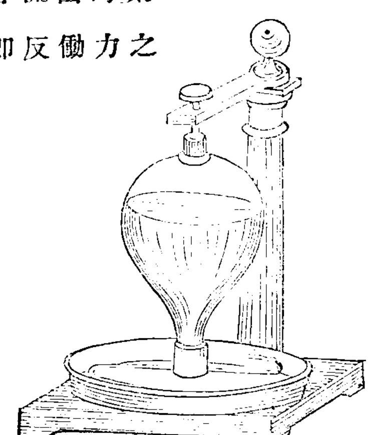


12. 流射水之反働

盛水於器。水壓側面。側面亦以均等之壓力反壓。故保平均。若於其側面穿孔。遂不保平均。水由孔口流出。則孔口受反對方向之壓力。而器運動於與水噴出反對之方向。是亦因有正働必有反働之理也。

[實驗法] 如第23圖以大竹筒之側方穿穴。插入曲管。入水以吊之。水由管流出時。則見竹筒迴轉於反對之方向。是即反働力之作用。

第 24 圖

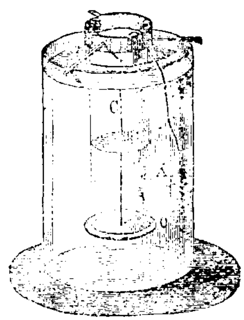


水力旋轉器亦由此理。於鉛直之軸上。得自由旋轉。器之下端。附水平之曲管。置其端於反對之方向。盛水於器中。水由管端流出時。以其反働力。器遂旋轉。(第24圖)

13. 上壓力 Upward pressure　凡液體之各層。必有下壓力。前已述之。更細觀液體各層。對上部又有上壓力。蓋液體若祇有下壓力。無反對抵制之上壓力。則液體之內部。不免生起運動之狀態。故液體保平均時。下方必以均等之壓力上抵無疑也。其上壓力之強。亦卽等於以其被壓之液層爲基底。以自表面至基底之距離爲高液柱之重。

實驗之。用圓筒形之玻璃器入水。另以O板附糸。爲無底小圓筒A之底。沈入於水中。卽放c糸。而板亦不落。今徐徐注水於此圓筒中。初時板尚未落。惟至圓筒內部之水。與圓筒外部之水。達於同高時。板忽落下。是上壓力卽等於載其上之液重也。(第25圖)

第25圖

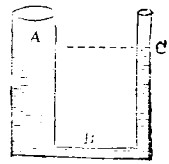


14. 連底器 Communicating Vessel　連底器者二三之器相連有一底者也。注液其一部。得流移於他部。注入之液。其平均之狀態有二。茲列之如次。

(一)　於連底器注入同種之液體時。其表面在同一水平面上。例如第26圖。連底器盛一種之液體。其保平均時。可於底邊連接之部分。截一平面而想像之。於切口中取一小部分B。由此部分至左右相等。且受垂直於此面之壓力P,P,'。此B之部分。一方得看爲AB器面之一部分。他一邊得看爲CB器面之一部分。故P之壓力。卽等於以B爲底。以自

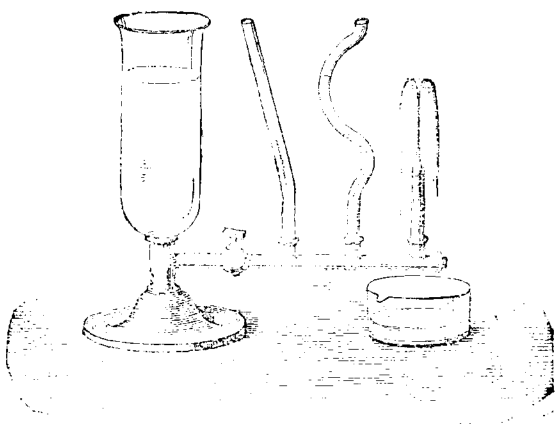
B至AB器中之液面A之鉛直距離爲高之液柱之重。又P'等於以B爲底以自B至CB中之液面之鉛直距離爲高之液柱之重。此二壓力相等。故自B至A之鉛直距離與自B至C之鉛直距離乃相等。

第26圖



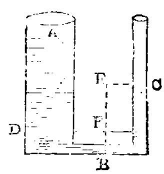
實驗法用上樹異形之管。下之部分爲相連之器。(第27圖)入水於此則不論何管之水皆升至同高。其表面同一水平面。若短管者。則因其上端比水平面低。水由上端噴出與他管之水平面同高。但實際水所噴出之高或有不能與他管之水平面同高者。蓋以孔口之摩擦與空氣之抵抗故也。

第 27 圖



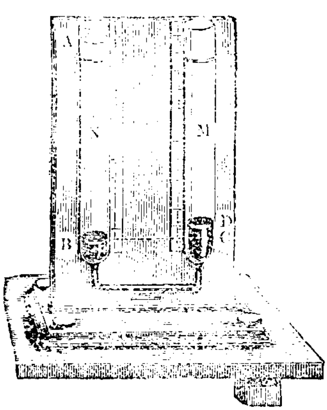
(二) 連底器若放異種液體。其表面之高反比例於其各液體之比重。如第28圖ABC之連底器。先入水銀。次由A方注水。水遂壓水銀。於C方之水銀面稍昇。茲待其平均時。由B之一點。引鉛直線。使會於

第 28 圖



左右表面之延長面E,F,二點。由A方壓於B之力。等於以B爲底。自B至兩液相接之面D之鉛直距離爲高(卽以BF爲高)之水銀柱之重、與以B爲底、以DA之距離爲高之水柱之重之和、由C之方。壓於B之力等於以B爲底、以BE(卽BF+EF)爲高之水銀柱之重。當液體保平均時。由左右所受之壓力要相等。而BF高之水銀柱之重。通有於左右方。故殘餘之部分、卽以自D至A之鉛直距離爲高之水柱之重、要與以FE爲高之水銀柱之重相等、但水與水銀同積者、其重乃1與13·6之比。故同底之水柱、與水銀柱之重要使相等、其高亦要13·6與1之比、故曰連底器若爲二種之液體。其相平均時、由兩液相接面至各器中液面鉛直距離之比,要反比例於同積兩液之重。

第 29 圖



今於第29圖確證其液體之高、反比例於各液體之比重、連底器之右方容水銀、左方容水、則見DC高9分。AB高11寸8分,是水柱之高約合水銀之十三倍,恰反比例於各液之比重。

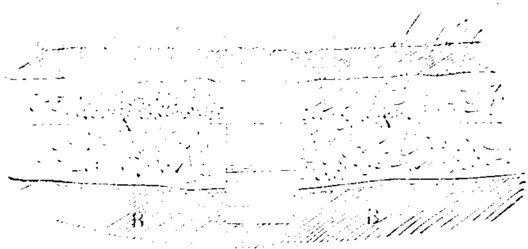
15. 連底器之應用

於次所舉之實例、或因實際推廣連底器之理、或應用連底器之理以製造器具

1. [井戶]　地中種種地層、如砂或小石之類、水則得由

之通過若粘土等。水則不易透過今於第30圖。以A爲砂石之層。以B爲粘土之層地上之水通過A層時浸潤於B。以B層爲粘土。不能再流於他方。故若於此處穿孔。

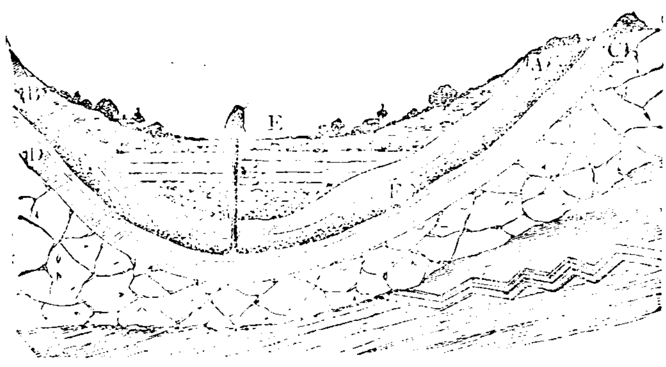
第30圖



達至B層則水集於此孔內通常之掘井得水者多由此理。

2. 噴泉　如第31圖ABCD爲上下不通之層水由F溝中通過且此等地層彎曲由是邱上之水漸漸流下終至滿其空層其低部分生大壓力故若於此處穿孔達於地層則層內之水通此孔噴出

第31圖



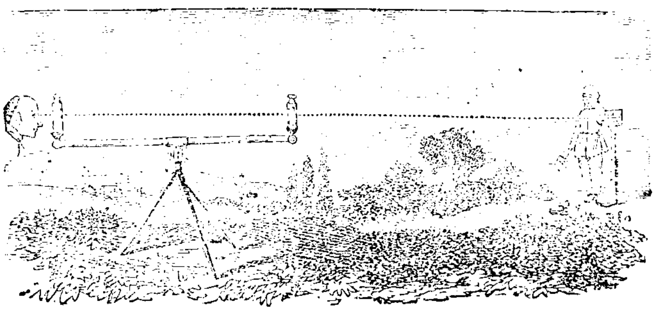
於地上升至於E。恰與邱上之水同在一平面上。鑽井即由此理。

3. 導水管　布設水道。亦基同理。由水源通鐵管於市街各處。更設枝管導於屋內開捻拴。則水流出。但使水達於

各處。水源之水面。要比各處高。因於水源之傍。設大水溜。以唧筒吸水輸送之於鐵管。

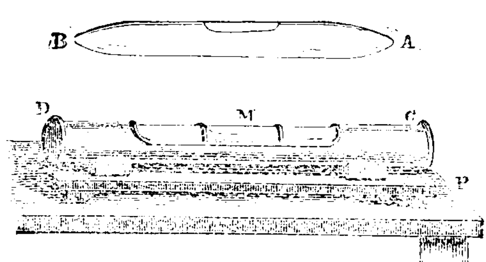
4. 水準器 Water level　水準器乃測量家之所常用者。今如第32圖所示兩金屬管垂直向於上方。其端插玻璃管。注有色液於此。以帶色易視故用有色液視玻璃管中。其液同高時。則知金屬管平行於地面。若金屬管於地面未平行則進退三脚以平之。今測量者向遠隔之一點瞻望。若其點與液體之面同一直線。其線卽水平也。

第　32　第



5. 泡準器 Spirlt level　泡準器亦以驗平面水平與否之器械。稍爲凸形之玻璃管。充水或火酒。遺少量之空氣。第33圖。因防破損。置玻璃管於金屬管。留細長隙。以便知氣泡之位置。製此器械。金屬管之下面要水平。由是置於平面上。氣泡恰在玻璃之中

第　33　圖



央。倘所置之面未水平。則氣泡必傾於一方。因氣泡之方向，得定其面之傾斜。

例 1　於U字管之一方。入水銀。他方盛水。互保平均時。由水與水銀之相接面。至水銀面之高爲15糎。問水面之高。

但水銀比重爲13·59。水之比重爲1。

（解）由本節各液面之高。乃反比例於各液體之比重。故若以水面之高爲x。則

$$1\times x=15\times 13{\cdot}59=203{\cdot}85$$

卽水面之高230·85糎。

例 2　U字形管口之半徑。各爲2糎。一方入水36立方糎。一方入比重·92之油若干立方糎。兩液互保平均。求兩液面高之差。

但油之比重爲0·92。

（解）水之高爲$36\div\left\{\left(\frac{2}{2}\right)^2\pi\right\}=36\div\pi$

而油與之平均時其高爲$\frac{36}{\pi}\times\frac{1}{0{\cdot}92}$。

故所求之差。$\frac{36}{\pi}\times\left(\frac{1}{0{\cdot}92}-1\right)=0{\cdot}996$ 糎。

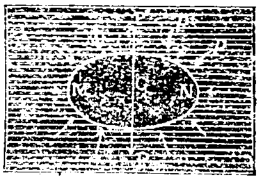
16. 阿機美逖之原理 Archimedes, principle

入物體於水中。其重若較輕者。是水反壓物體之證。且不特於水有然。凡一切液體中。置入物體。常呈此現象。於西歷紀元前二百五十年。阿機美逖。因發見此理。其原則曰。

『凡物體置於液體中。各方向皆受壓力。其壓力之合力（卽浮力）鉛直向上。其強等於此物體所排除之液重。其着力點與所排除液體之重心一致。』

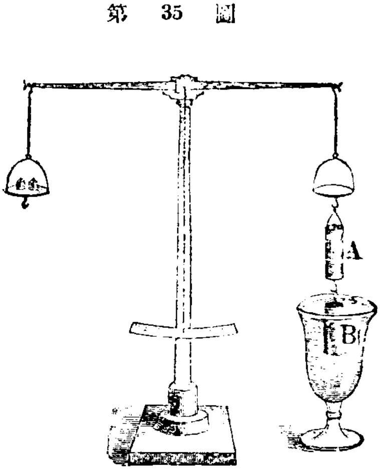
證明之法。如第34圖液體保平均時。其內部之一部分。得看爲固體。作用於MN各部分之力。如p垂直於其面之各部分。又其重P卽以其重心G爲着力點。此等諸力相平均。故如p等之總壓力。卽等於其重P。且其合力必在反對之方向。是MN液體之重P。卽等於反壓力P'。又卽另取MN之位置。亦得保其平均也明矣。故不論所取之形狀如何。其壓力之合力。常反對作用於其重心G。然則以MN所想像之固體。若代以同形同質之實固體。其壓力之合力亦如之。故曰物體在平均之液體中。受液由下向上之壓力。此壓力卽等於物體所占位置之液之重。且作用於此液之重心。

第34圖



|實驗法| 上之原理由實驗得證明之。卽如第35圖A爲有底內空之圓壔。B爲實體之圓壔。B之圓壔須適合於A之內部。卽其容積要恰等於A內部之容積。

第 35 圖



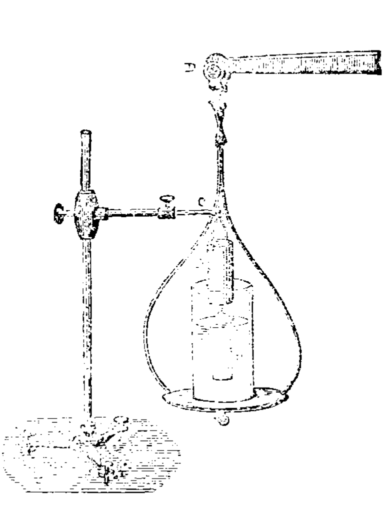
今於天秤竿之一端。吊A之圓壔。其下吊B之圓壔。次置B圓壔於水中時。B圓壔因爲浮力所壓。天秤忽失平均。傾於分銅之方。茲更徐注

水於A圓壔滿後。天秤仍復平均。可知水之壓力。等於與物體同積之水重。

由上之實驗可推想至液壓物體。物體亦反働液體之理。其反働卽等於液之壓力。且正反對。實驗之法。於秤之一盤上置盛水之器。其側兼載一物體。他盤載適宜之重。使平均後取其側之物體。投於器中之水。此時秤仍不失其平均。但由前所言物體入於水中。受水向上之壓力。而此時尙不破其平均者。可知物體向下以液上壓物體之力同力下壓也。故曰物體亦及反働力於液。此反働力。乃等於液壓物體之力。且正反對者也。

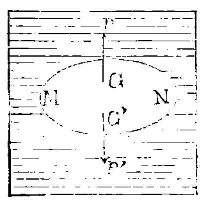
又或如次亦得說明之。卽若以前之試驗。懸實圓壔於空圓壔之下。釣之於與秤無關係之捧端C。若浸B於秤盤上器中之水。則秤直失平均。載器之秤盤下降。若更少取器中之水。入於A空圓壔。至充滿時。秤仍復原位。故可知B入於水中。水因增重。其所增之重。卽等於與圓壔同積之水重。故物體壓液體。乃等於液體壓物體。且反働於正反對之方向。

第　36　圖



17. 上壓力與逐下力之關係幷就其現象述其結果 凡物體沈沒於液中。互受反對之二力。前已述之。此兩力之關係有三。茲就各特別之現象示之如次。

第17圖



i 深入液中之物體。比所排除之液體重者。即下壓力 P' 比上壓力 P 大也。此合力等於 $P'-P$。液中之物體。垂直運動於下方。此現象稱曰沈。如金石等物體若爲等質。則 G 與 G' 雖不相合。亦必在其鉛直線上。而 P 與 P' 亦即等於其差之合力。故不論物體之如何。其落下之力。常等於 $P'-P$。此合力名曰『視重』視重比實重小。故物體在液中。失其重之一分。

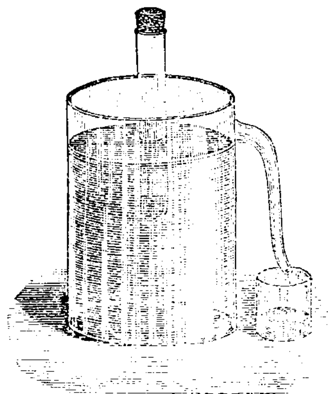
ii 浸入液中之物體。與等容積之液體同重者。即下壓力與上壓力均等。此時兩力之差爲零。物體保平均於液體中。此現象曰懸中。如琥珀在水中。雞卵在食鹽溶液中等是。

iii 浸入液中之物體。比排却之水輕者。即下壓力比上壓力小也。此時 $P>P'$。物體受由下向上合力之作用。運動於上方。此現象曰浮。例如瓶塞木於水中。鐵於水銀上等。

18. 浮體之平均 物體之下壓力比上壓力輕。則物體運動於上方。達於液面。至物體漸出液之外。因之物體所受液體之壓力漸減少。遂至液體之壓力。與物體之重相等時物體得保平均。故物體浮於液之表面保平均者其重即等於此物體在液中之部分所排除液體之重。

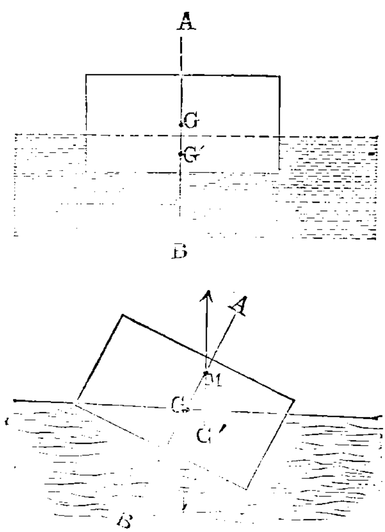
實驗之如第38圖。用玻璃圓筒具流出管者。先充水至口端。以浮體徐徐插入水中。因之所排除之水流下於受水器中。今以此水置於天秤之一盤。更抹乾浮體。置於他一盤上。恰相平均。故可知其重即等於所排除之水重也。

第 38 圖



例如有松材稜柱。底面十平方粉。高四粉。其一立方粉之重爲0·5瓩。則其全體之重。即20瓩。故當下壓力等於上壓力時。其所排除水量之重。固與松材之重相等。然則稜柱沈入水中部分當至二粉之處。蓋其所沒入之部分即等於所排除之水(10×2=20ℓ)20瓩也。

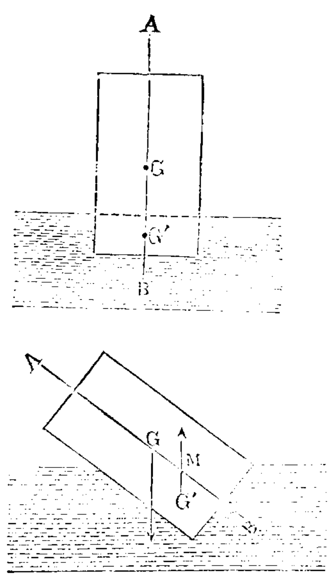
第 39 圖



通常浮體之安定平均其重心必比所排除液體之重心在深處。但實際物體之安定浮游者。其重心不盡在上壓力集合點之下。祗須其重心在擬中點之下可耳。(由液體上壓力之集合點。上引之鉛直線。交於物體之中線者。爲擬中點。)如第39圖。(甲)示物體浮游平均之景態。物體之重心假定爲在上壓力集合點G′

上者。由AB以直線連結GG'二點。此線卽物體之中線。今若以手壓之。使此浮體變其平均之景態。取中線傾斜之方向。則手一放。仍復原位是顯然安定平均也其所以能平均者。卽以擬中點在物體重心之上故。又如第40圖。其重心與浮心雖在同一鉛直線上。而擬中點在重心下。故一動卽顚仆。是爲不安定平均。又如球體浮於水面。卽如何變其位置擬中點常與原重心相會。是曰隨處平均。

第 40 圖



19. 加術浮泛卽游泳 物體比等容積之水輕者。爲自然浮泛。加術浮泛。乃用方法使物體比等容積之水重者。亦能浮游水面。其法有種種。或繫比水輕之物體(卽密度比水小者)於重體。或張大重體之容積爲空洞。或對水衝突。如人體及魚類之游泳等。今就加術浮泛之物體。舉其一二之例如次。

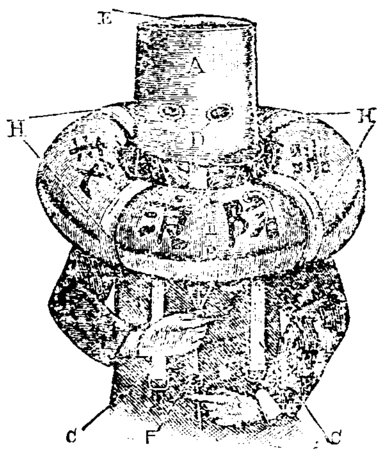
(1) 鐵釘結於大瓶塞木。得浮遊於水面又備船遇難時用救命水器。如浮帶浮環等。卽與瓶塞木同一理。

此等浮器之最優者。爲日本小栗栖香平氏之所改良。名爲防浪救命器者是也。茲示其構造。及效用之大略如次。

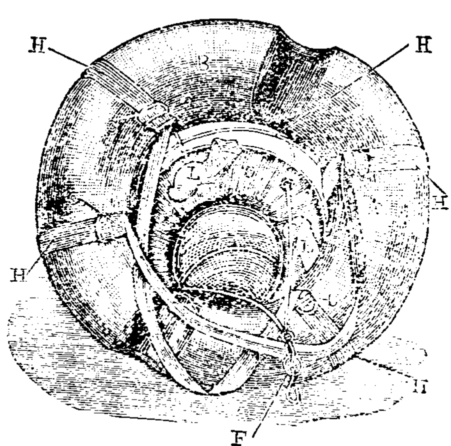
(a) 構造 此器如第41圖以至43圖所示。掛身體之浮環(B)以供浮

泛之用。甲兜A以防禦波浪。此器卽不知游泳之人，帶衣著之。長時間在激浪中。得保全其生命。今略記其搆造。甲兜之骨爲鋼鐵線之螺旋彈機。其上部全體五分之四，以防水布包圍之。而其包布之四方。附四箇眼鏡(D)。備透視遠近。其頭項部施開閉隨意之裝置(E)。若有激浪侵入之虞，則緊結之，防其侵入。晴朗平穩之時，則開放之。取清爽之空氣。如第43圖，又包布之下部。以防水布縫合其末端，在甲兜之底。名曰防浪布。蓋以防禦由浮環之內外。侵擊入之波浪也。此防浪布附二箇之排水囊(L)卽於偶有激浪侵入甲兜內時。由排水囊得排泄之。不使妨害呼吸。浮環部(B)。有瓶塞木製與橡皮製二種。船舶用者多爲瓶塞木製。(如第42圖)取其堅牢故也。橡皮製者，伸縮自如，極便攜帶。第41圖卽以橡皮製之浮環。充塞空氣。着用之狀也。第43圖之M。乃排出空氣。容於甲兜內。而浮環與甲兜螺旋之最下線。纏以四條之紐。名曰四方紐。(H)此四方紐結合甲兜浮環之外。更以一種之彈機齒控子。連繫力紐。通於使用者

第　41　圖

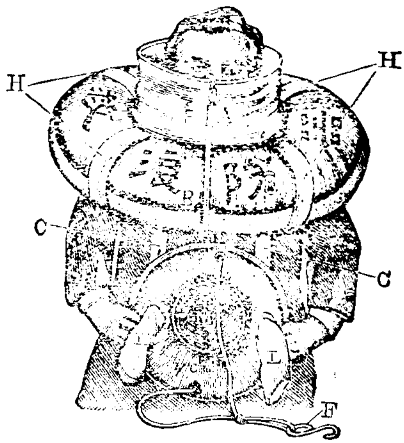


第　42　圖



之兩腕。(即如第41圖C)。此彈機齒控子。得自由緊縮。無使力紐有弛緩之患。此外於甲兜螺旋之最上線。垂下兩帶。由銅鈕連絡二條之小紐。以緊縛甲兜如F是也。

第 43 圖



(b) 用法　使用之法。其浮環若為橡皮製者。則先充盈空氣。四方紐配置於四隅。力紐由末端穿過彈機齒控子。齒控子在浮環周圍之下邊。力紐之交叉點。在後頭部。用時通兩腕於其兩側。入頭部於甲兜內。如欲浮環緊懸於身體。可強引左右力紐之末端於前方。以肩膊部與浮環緊接為度。若是則入於水中萬無沈沒之患。倘有激浪侵入甲兜部。則緊縮頭部之防水布E.以防之。浪平穩時。則開放之。掛其條端之鈎。於甲兜之最上線。顏面因得露出。呼吸爽快之空氣。瓶塞木製者之用法。不必充盈空氣。惟左右之凹部。套於兩肩。此外與橡皮製品之用法同。故不再述。

(C) 効用　用此器。第一不必熟游泳術。第二得着衣使用之。第三無波浪撲面之患。第四逢如何等之風濤。萬不顛倒沉沒。不若他之救命具。遇風濤鼓動。易致沉沒。第五藉器械力浮泛。故手足得攜帶他物品。或牽救他人。

(2)　即如金有19·26之比重。若製一極薄金盃。或空洞之金球。亦得浮游於水面。

(3)　人體之比重平均為1·06。故若非帶浮器。又若非熟

練游泳者永不能浮游於水不知游泳術之人誤落於水手腕由水露出致不得保續呼吸故救命甚難凡溺死之人體因水侵入身體中遂沉沒於水底但二三日之後由肉體腐敗發生一種瓦斯其體復浮出於水面而其脈管破裂時再沒入不再浮出。

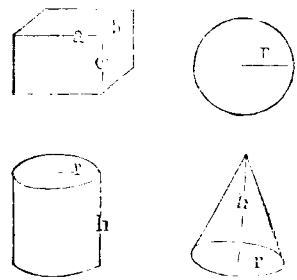
(4)　魚類之容易浮沈於水中以其體中具有浮囊故也。而魚類欲沉於水中時口中含水由唇之壓力壓縮其浮囊中之空氣以增身體之重其欲浮時去其壓力以減輕身體因得任意浮沉此理即與下文所記之潛水人形同如第44圖所示取玻璃製之小人型內部空洞沒入於盛水之玻璃筒中(水要滿蓋)其人型浮游於水面茲以豚之膀胱密閉其圓筒人型之下端有一小孔其內部留存空氣防水流入但若於膀胱上加壓力其壓力遂由水及於人型下端孔口之處因逹內部之空氣使被壓縮之水擁入於其內部由是其全體增加重量人型下於圓筒之基底今再去膀胱上之壓力則最初之空氣逞自己之壓力壓出內部之水人型因其重量減輕復如故浮於水面若是者隨壓力之有無得浮沉恰與魚類之浮沉無異。

第44圖

註　以下例題因求各物體之壓力不得不乘以密度但密度之定義前未論過讀者可參照次節密度之符號爲 d。

又體積之公式如次。

第 45 圖



1　立方體　$a\times b\times c$

2　球　$\frac{4}{3}\pi r^3$

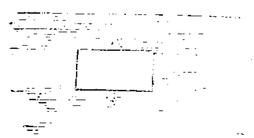
3　圓壔　πr^2h

4　直圓錐　$\frac{1}{3}\pi r^2h$

$\boxed{\text{例 1}}$　高5糎.底面積40糎²之立方體,入於水中.則此物體所受之浮力幾何.

(解)　凡同深處之壓力相等.故前後左右水平方向之合力.乃互相平均者.然則求壓力之合力.但求上下壓力之差可耳。今以由水面至A面之距離爲h糎.至B面之距離爲$h+5$糎.故若以密度爲d 克/糎³.(密度之單位用克/糎³之理見次節自明.)則

第 46 圖



A面上之全壓力　　$h\times d\times 40$克之重

B面上之全壓力　　$(h+5)d\times 40$克之重

差　　$5\times 40\times d$克之重

今以水之密度爲1克/糎³則$d=1$故合壓力卽浮力等於$5\times 40=200$克之重

$\boxed{\text{例 2}}$　前問物體之密度若爲0.8克/糎³則露出水面上部分之高幾何.

(解)　以沉於水中部分之高爲x糎.以水上部分之高爲$5-x$糎.則

物體之重 = 浮力 = 所排斥之水重

‖　　　　‖

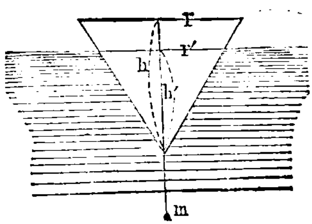
$40\times 5\times 0.8$克 = $40\times x\times 1$克

$\therefore \qquad 40\times5\times0\cdot3=400\times x \qquad x=4$

即所求之高 $5-x=1$ 糎。

例 3 有直圓錐之木片。如圖高 h。底面之半徑 r。密度 d。求沈於水中之部分 h'。(水之密度爲 1)。

第 47 圖



(解) 於水面截面之半徑爲 r'。則

$$r':r=h':h.$$

圓錐體之重 = 所排斥之水重。

$$\frac{1}{3}\pi r^2hd=\frac{1}{3}\pi r'^2h'\times1$$

$$\therefore \qquad r^2hd=\left(\frac{h'}{h}r\right)^2h'=\frac{h'^3r^2}{h^2}$$

$$h'^3=h^3\times d$$

由之得沈於水中部分之高 h'。

但實際要使木片沈水如圖狀。要吊以重。今以所吊之重看做無大之質點。以其重爲 m。則

$$\frac{1}{3}\pi r^2hd+m=\frac{1}{3}\pi r'^2h'=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h'}{h}r\right)^2h'$$

由是得求出 h'。

例 4 有直圓錐形之木片。($h=5$ 糎。$r=4$糎。$d=0\cdot8$ 克/糎³) 使沈於水銀中要幾何之力。(水銀之密度 $d'=13\cdot6$ 克/糎³)

(解) 木片之重 $\qquad \frac{1}{3}\pi r^2hd$

所排斥水銀之重 $\qquad \frac{1}{3}\pi r^2hd'$

$$\therefore \qquad p=\frac{1}{3}\pi r^2hd'-\frac{1}{3}\pi r^2hd=\frac{1}{3}\pi r^2h(d'-d)$$

$$=\frac{1}{3}\times\pi4^2\times5\times12\cdot8=1072\text{ 克 (重)}$$

即要 1072 克重之力壓之。

例 5 有圓柱 ($h=3,\quad r=5,\quad d-0.8$) 浮之盛於圓筒器之水。(圓筒器

之半徑 $r'=10$) 問圓筒器之水面增高若干。又於器底之壓力增加幾何。(皆用 CGS 重力單位。)

(解) 以水面之增高為 x。由阿機美巡之原理。

水片之重＝所排斥之水重。＝πr^2hd 克之重所排斥水之體積。

$$= \pi r^2hd \text{ 糎}^3 = \pi r'^2x$$

$$\therefore \quad x = \frac{r^2hd}{r'^2} = \frac{5^2\times3\times0{\cdot}8}{10^2} = 0{\cdot}6 \text{ 糎}$$

故器底壓力之增加 $= 0{\cdot}6$ 克重/糎^2

20. 密度 Density 俗云綿為輕質。鉛為重質。雖然若綿之量多。則比一小片之鉛重。故以輕重之語。區別物質。實未盡其意義也。又比較鉛及棉同容積中所含之質量。鉛質量大自重。綿質量小自輕。即如前所云。重質之物體沈。輕質之物體浮。是輕重之語亦不過習俗所用之意義。又物體之質量與其同容積流體之質量比較。其大者重而沈。其小者輕而浮。故輕重之語。含有二意義。一不關於物體之大。單用以比較二箇物體之重。一比較二箇物體所有同容積之質量。然則單用輕重以區別物質。不能確定其意義。故要用一名詞以確定輕重與質重相關連之語。曰「密度」如云某物質之密度者。乃謂『其物質之單位體積中所含之質量』由是密度大者為重質。密度小者為輕質。

今以某物質之全質量為 m。以其體積為 v 糎^3。其密度平均一糎。若為 d 克。則

$$d = \frac{m}{v}$$

若密度各部不同。則述其物質之密度。必述對於某點之密度。凡於某點之密度。得於某點之周。看爲極小體積之部分。則表其密度。即以其體積除其部分之全質量。蓋以小部分之密度得看作一様也。

因密度乃以單位體積除全質量。故其單位。即以體積之單位除質量之單位表之。

C.G.S. 單位爲$\left(\frac{\text{克}}{\text{糎}^3}\right)$即每1糎³若干克。

液體比氣體難以小壓力壓縮之。故若以小壓力壓物體。其受壓體積縮少之度極微。故於本章液體。即受壓。密度仍看作不變者。

凡物體概受熱則膨脹。惟其質量無增減。故物體之密度亦無一定。溫度若高。則密度減。溫度若減。則密度高。

下之二表乃示於零度時諸種固體及液體之密度。但物體之密度由其物質之純否而有不同。故即同種之物質中。常有多少之差。氣體之密度。於後論之。

固體密度之表　　溫度爲零者

鋁	26.00兩/寸³	鉍	73.29兩/寸³
黃金		銅	
鎚打者	144.49 „	鑄者	66.25 „
鑄者	143.72 „	天生者	65.58 „
錫	54.41 „	鉛	84.72 „
鐵		白金	164.69 „
鋼鐵	58.33 „	鎚打者	164.69 „

鑄鐵	53.73 $\text{兩}/\text{寸}^3$	鍛者	151.77 $\text{兩}/\text{寸}^3$
銀	78.18 ,,	白銅	66.42 ,,
硫黃(結晶)	15.17 ,,	炭	11.94 ,,
白蠟	7.41 ,,	粘土	14.18 ,,
燒瓦	15.67 ,,	玻璃	由 18.5 ,, 至 20.3 ,,
松	4.9 ,,	柳	2.9 ,,

液體密度之表　　溫度爲零者

水	7.42 $\text{兩}/\text{寸}^3$	海水	7.66 $\text{兩}/\text{寸}^3$
火酒	5.92 ,,	以脫	5.30 ,,
血	7.91 ,,	乳	7.60 ,,
石油	6.27 ,,	阿列布油	6.83 ,,
水銀	101.46 ,,	硝酸	11.04 ,,
硫酸	13.81 ,,	鹽酸	9.48 ,,

上所示密度之表，祇就每立方寸合幾兩重之物體列之。又用法制單位所表之密度，因與比重同數，故不載入，如有欲求以法制單位所表之密度，可用後之比重表。

又次表乃示水密度之增減，關係於溫度之高低者也。

水之密度之表　　壓力一氣壓

溫度C			
零度以下	10	7.407734 $\text{兩}/\text{寸}^3$	0.998294 $\text{克}/\text{糎}^3$
,, ,,	5	7.415481 ,,	0.999338 ,,
,, ,,	0	7.419547 ,,	0.999886 ,,
零度以上	1	7.419963 ,,	0.999942 ,,
,, ,,	2	7.420258 ,,	0.999982 ,,

零度以上	3	7.420432 兩/寸^3	1.000005 克/種^3
,, ,,	4	7.420490 ,,	1.000013 ..
,, ,,	5	7.420432 ,,	1.000005 ,,
,, ,,	6	7.420266 ,,	0.999983 ,,
,, ,,	7	7.419990 ,,	0.999940 ,,
,, ,,	8	7.419610 ,,	0.999894 ,,
,, ,,	9	7.419126 ,,	0.999829 ,,
,, ,,	10	7.418541 ,,	0.999750 ,,
,, ,,	11	7.417860 ,,	0.999659 ,,
,, ,,	12	7.417083 ,,	0.999554 ,,
,, ,,	13	7.416212 ,,	0.999437 ,,
,, ,,	14	7.415250 ,,	0.999307 ,,
,, ,,	15	7.414198 ,,	0.999165 ,,
,, ,,	16	7.413060 ,,	0.999012 ,,
,, ,,	17	7.411836 ,,	0.998847 ,,
,, ,,	18	7.410528 ,,	0.998671 ,,
,, ,,	19	7.409139 ,,	0 998483 ,,
,, ,,	20	7.407669 ,,	0.998285 ,,
,, ,,	21	7.406121 ,,	0.998077 ,,
,, ,,	22	7.404497 ,,	0.997858 ,,
,, ,,	23	7.402797 ,,	0.997629 ,,
,, ,,	24	7.401022 ,,	0.997390 ,,
,, ,,	25	7.399176 ,,	0.997141 ,,
,, ,,	26	7.397258 ,,	0.990882 ,,
,, ,,	27	7.395271 ,,	0.996

零度以上	28	7.393215 兩/寸^3	0.996337 克/糎^3
,, ,,	29	7.391092 ,,	0.996051 ,,
,, ,,	30	7.388901 ,,	0.995756 ,,
,, ,,	35	7.377001 ,,	0.994152 ,,
,, ,,	40	7.363605 ,,	0.992347 ,,
,, ,,	45	7.348815 ,,	0.990354 ,,
,, ,,	50	7.332735 ,,	0.898187 ,,
,, ,,	55	7.315431 ,,	0.985855 ,,
,, ,,	60	7.296983 ,,	0.983369 ,,
,, ,,	65	7.277433 ,,	0.980734 ,,
,, ,,	70	7.256353 ,,	0.977961 ,,
,, ,,	75	7.235244 ,,	0.975049 ,,
,, ,,	80	7.212636 ,,	0.972009 ,,
,, ,,	85	7.189169 ,,	0.968840 ,,
,, ,,	90	7.164761 ,,	0.965550 ,,
,, ,,	95	7.139423 ,,	0.962136 ,,
,, ,,	100	7.113244 ,,	0.958603 ,,
,, ,,	120	6.999852 ,,	0.943327 ,,
,, ,,	140	6.872939 ,,	0.926224 ,
,, ,,	160	6.732336 ,,	0.907276 ,,
,, ,,	180	6.577470 ,,	0.880406 ,,
,, ,,	200	6.407392 ,,	0.863486 ,,

就上表觀之,由零度至四度,溫度愈增。密度亦增,至四度以上,溫度雖昇。密度漸減,故水於溫度 4°C 有最大之密度。

而此溫度之水以在密度增減之境界。故溫度卽稍變更，密度之變更甚少。

21. **比重** Specicfic gravity 今比較鐵與銅之密度。鐵一立方寸之質量。凡 58·12 兩。銅一立方寸之質量，凡 66·25 兩。故

$$\frac{\text{鐵之密度}}{\text{銅之密度}} = \frac{58.12}{66.25} \ 0{\cdot}877$$

是鐵對銅密度之比也，又若以鐵銅之容積，各爲 8 立方寸時。則其質量各爲 58·12×8 兩。及 66·25×8 兩。求此兩數之比。仍得 0·877 如前。又如二種之物質 m 及 m'。其容積 a 箇之質量，各爲 ma 及 $m'a$ 也。由之求兩方質量之比。卽

$$\frac{ma}{m'a} = \frac{m}{m'}$$

是比較二種之密度。不必各定以一立方寸之質量。但比較同容積之質量可耳。

凡以物質之密度。與他物質之密度比較時。必以一種之物質爲標準。其標準之物質。常用攝氏溫度四度之水。蓋以水最爲純粹之物質。且各處皆有。其物質亦同。又以攝氏溫度四度爲標準者。蓋凡各種物質。溫度變更時。密度亦變更。而水於此溫度。密度之變更最少。故以某物體之密度，對溫度四度純粹之水密度之比，爲其物體之$\boxed{\text{比重}}$比重之語。雖對兩物質重之比較而言。由其質量之比。亦得其比重。以式表之如次。

$$\text{比重} = \frac{\text{某物質之某體積之重}}{\text{於 }4°\text{C 同體積水之重}} = \frac{\text{單位體積之重}}{\text{水之單位體積之重}}$$

$$= \frac{\text{單位體積之質量}}{\text{水之單位之質量}} = \frac{\text{某物質之密度}}{4°\text{C水之密度}}$$

卽某物質之比重。得看作其物質之密度。與4°C水之密度之比。水之密度依C.G.S.單位爲1。故物質之比重。及C.G.S.單位之密度得看作同值。

當初定法制之單位。溫度四度之水。一立方糎之質量爲一克。是爲質量之單位。遂以之爲標準。制造分銅。其後復發見一克之分銅。與4°C之水一立方糎之質量之間。略有微差。但此差以僅不過爲0.000013克。特非精細之實驗故不算入。

如前所論。依C.G.S.單位。物體之密度與比重。得示以同數。但決不可視爲同一者。密度者以乃本來容積之單位中所含之質量。故欲求物質之密度。不可不以容積除其質量。故密度之性。以質量對容積之比表之。而比重乃密度之比。故其性非可以質量容積之比表之。只一種單純之數也。故示密度與比重以同數者。但限C.G.S.單位。若以他種單位。則其數全異。如若用寸與兩之單位。則依前條液密度之表水爲7.42兩/寸^{3}若用C.G.S.單位。則水之密度爲1。若比重則不論何種單位。其值皆不變。故爲無名數。如水銀之比重約13.6。(參照後文比重表)玆卽以寸與兩之單位計之。亦得13.6。(水銀之比重 $= \frac{\text{水銀之密度}}{\text{水之密度}} = \frac{101.46}{7.42} = 13.6$ 約)

22. 固體之比重　所測定物體之比重。若爲固體。且爲幾何的單一之形狀。如立方體稜柱體球體等。則但以

衡器得測定物體之重。而其容積由幾何學上亦易得計算。譬如立方體之稜為五糎。其重量三百七十五克則物體之重 $=375\div5^3=375\div125=3$。因水一立方糎之重為 1 克。故物體每立方糎 3 克之重，即其比重也。但物體有單一之形狀者少。且大小不一。或如粉末。或如棉絮。故測定比重之法。有種種。茲大別為三項如次。

第一 由阿機米遜之原理測定固體之比重。

A 固體能沈於水中者 用水學的天秤。將所欲測定比重之物體。以纖細之線。繫垂於天秤之鈎子。於空氣中他盤置分銅平均之所得之重量為 p。次沈其物體於水中。即如第 35 圖之 B 沈於水中之狀則天秤失平均，今要使其平均。其盤上添入若干之分銅，其所加入分銅。由阿機米遜之原理乃物體所失之重，即等於同體積之水重。今以 v 表之。則比重 S 如下式，

$$S=\frac{p}{v}$$

或如前法。沈入水中時。再平均之。右盤不加分銅。減却最初於左盤所置之分銅。其成績亦同一理。今示物體之重以 p 所減分銅之量。即等於前右盤所加之分銅，仍以 v 表之。以左盤上所餘分銅之量為 p'。由是物體在水中所失之重。為 $p-p'$（即 v 之值）故比重之式如次。

$$S=\frac{p}{p-p'}=\frac{p}{v}$$

譬如有一塊之銀。其重 $p=12.369$ 克。投之於水中秤之。有 11.188 之重。

然則 v 者，$12.369-11.188=1.181$ 克

$$\therefore\quad S=\frac{12.369}{1.181}=10.474$$

B　$\boxed{\text{固體浮於水上者}}$　固體若比水輕，則不能沈沒於水中，欲測其比重，須繫重錘，方能沈沒於水中，測定之法，仍先以固體就空氣中秤之，其重為 p，次繫錘墜於水中，更秤其重為 p'。但欲求該固體在水中所失之重 v，不可不捨却所加之重錘。今僅以重錘入於水中秤之，則重錘在水中之重為 p''。以 p' 減却 p''，即等於該固體在水中之重。又以該固體在水外之重，減該固體在水中之重，即等於該固體在水中所失之重，故 $v=p-(p'-p'')$，即為與此固體同體積之水重也，故比重之式如次。

$$S=\frac{p}{p+p''-p'}=\frac{p}{v}$$

譬如一片之櫻，在空氣中秤之，其重 $p=10.29$ 次因欲使其沈沒於水中之故，另加以鉛錘，沒入水中秤之，得 $p'=1.894$，今但求櫻在水中所失之重，須以鉛錘與櫻在水中所失之重，減去鉛錘在水中所失之重，因單以鉛錘沈入水中秤之，$p''=23.06$，由是櫻在水中之重，等於 $18.94-23.06=-4.92$（櫻在水中之重為負號者，以櫻比同容積之水輕，受水之上壓力故也。）是水之上壓力，勝於櫻之下壓力有 4.92 也。然則櫻在水中所失之重，$10.29-(-4.92)=10.29+4.92=14.41$ 即與櫻同容積之水重也。何則水之上壓力，勝於櫻之下壓力為 4.92，故要使櫻之下壓力與水之上壓力均等，櫻之重外要加 4.92，即與水同容積之重，以此失重之數，除其重量之數，得櫻之比重如次。

$$S=\frac{10.29}{14.41}=0.714$$

(C) 固體沈入水能溶解於水或與水化合者　此時可用不溶解此固體之液體。及與此固體不化合之液體。依前(A)或(B)之法。測該固體對此液之比重。求得S'。則固體之重。比此液同體積之重爲S'倍。次求此液對水之比重(其方法列於後文)以之爲S''。則此液之重比水同體積之重爲S''倍。故此固體對水之比重S如次。

$$S=S'S''$$

例如有鹽類之硫酸加里。今欲測其比重。因水能溶解此物。代之以火酒。如A法先以硫酸加里。如常法秤之。其重量p爲5.94克。再秤於火酒中。其重p'爲3.83克。硫酸加里在火酒中所失之重$r=5.94-3.83=2.11$。由是以其所失之重除硫酸加里之量。卽硫酸加里對火酒之比重S'。

$$S'=\frac{5.94}{2.11}=2.81$$

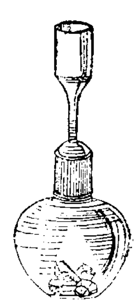
又火酒對水之比重S''。爲0.839，故硫酸以水爲單位之比重如次。

$$S=2.81\times0.839=2.40$$

第二用比重瓶測定法

如巖石金屬等細片。及砂碎等。欲測其比重。須用比重瓶 Specific gravity bottle 比重瓶之形有種種。通常如第48圖。用口廣之瓶。附屬之以玻璃製杵形之空栓。其下部入於瓶口之處。以金剛砂礱磨其外面。要使能密合於口之內面。且其栓所入於瓶口周圍之各部分。要同深。栓中部細管之處。記一標點。入水時。常要使至此處。今要入水至此標點。先除栓。盛水於瓶後。更插入栓。此時

第48圖



栓排水而入於瓶口故水必入於栓中上至於細管內但此時水之上昇或比所定之標點高於是用紙捻少吸取過分之水使其表面至標點而止

今測金屬碎之比重時先以此物載秤之一盤上置瓶於其側(瓶內已盛水者)他之秤盤上載鉛碎使平均之然後除却物體代以分銅再平均之此分銅固以表物體之重名之曰P次去此分銅更置物體於瓶中此時以物體投入瓶中必溢出與物體同容積之水仍如前法塞栓於口使水面至標點之處爲度抹乾所溢出之水再載於前之秤盤上此時以物體代與物體同容積之水故其重必有差異因置分銅於瓶之側再使平均之此新加入之分銅即表溢出之水(即與物體同積之水)重之數以之爲P′故以P′除P即物體之比重。

例如金屬之細粉重100兩.并盛水之比重瓶同置一盤秤之.重524兩.此金屬粉投入瓶中時.抹乾溢出之水後再秤之.重508兩.因金屬粉入瓶中。水所溢出之重 $P'=524-508=16$ 此時水所溢出之容積.固與金屬粉之積同.故以16除金屬粉之原重100.得6.25.即金屬粉之比重.

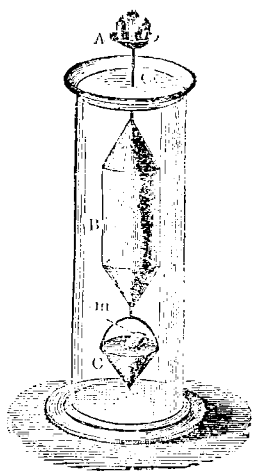
注意　凡精測物體之比重投物體於瓶中後防空氣附著於物體故物體投入瓶中之時當置於排氣鐘內抽出空氣則附著於物體之空氣因外部之壓力弱出於瓶外。

第三用尼哥爾遜浮秤 Nicholson's hydrometer 測定法

如第49圖之裝置用空圓壔B下端懸重錘C。使圓筒之重心在下方遂能直立於水中上部細桿之頂設平盤A。以

載物體及分銅之用。今以所欲測比重之物體。載於平盤A上。則此器少沈於水中。茲更置分銅。至桿之一定點O。恰在水面後除却物體。更加載分銅以再至O點爲度。茲所增加分銅之重。卽爲該物體之重量也明矣。以之爲P克。今以物體入於圓壔下。重錘C上。此時物體因入於水中。必失若干之重量。故若與前物體在平盤上時。置同量之分銅。則水面當比前所定之O點稍低。今要使其更沒入O點。不可不加若干之分銅。茲所加載分銅之重。卽物體在水中所失之重P′。(卽同積之水重)由是以P′除前所秤定之重量P。卽得物體之比重。

第 49 圖



例如所用之物體。若爲鋅。則如前法所秤定之P爲18.5克。水中之失重P′爲2.4克。則其比重如次。

$$S=\frac{p}{p'}=\frac{18.5}{2.4}=7.708$$

用尼氏浮秤。如有所測定比重之固體。能溶解於水者。則如前條(C)法先於不溶解此固體之液中。求其對此液之比重。而後由液體求比重之法。求此液對水之比重。前後所得之二數相乘。卽該固體對水之比重。

注意 由化學上所言。卽同質之物體。因其狀態。其比重。不免有差異。例如金屬不受器械作用。與受過槌打。或製

爲金屬線者。其比重有多少之差。又如同一炭素之物質。金剛石與石墨之比重不同。又他之物體諸如此類者殊多。次所揭之表中。各金屬之比重皆係未受過器械力者。

固體比重之表(0°. C)

白金	22.069	黃金	19.26
銀	10.530	鉛	11.35
蒼鉛(即鉍)	9.820	鋁	2.560
銅	8.850	靑銅	8.440 以至 9.340
黃銅	7.300 以至 8.650	白銅	8.333
鋼	7.816	鐵	7.79
錫	7.290	鑄鐵	6.790 以至 7.840
銻	6.712	鋅	7.708
金剛石	3.510	水晶	3.330
大理石	2.710	琥珀	1.078
象牙	1.917	玻璃	3.329
鹽	2.220	冰(無度)	0.930
木炭	1.000	白蠟	0.993
粘土	1.900	煉瓦	2.100
松	0.660	柳	.590
榆	.800	瓶塞木	.240
黃杉	.657	磁器	2.0 以至 2.5
硫黃(結晶)	2.033	麻	1.790
棉	1.95	人體(平均)	1.07

23. 液體之比重 求液體比重之法亦有四。如次。

第一由阿機美遜之原理。測定液體之比重。

(A) $\boxed{\text{用水秤之法}}$ 以固體之一片。秤其重為 p 克。沈之於所欲測定之液中。秤其重。得 p' 克。則 $p-p'$ 克。乃其液與此固體同體積之重。次更以此固體沈於水中。測固體為 p'' 克。則 $p-p''$。乃水與此固體同體積之重也。故此液體之比重。

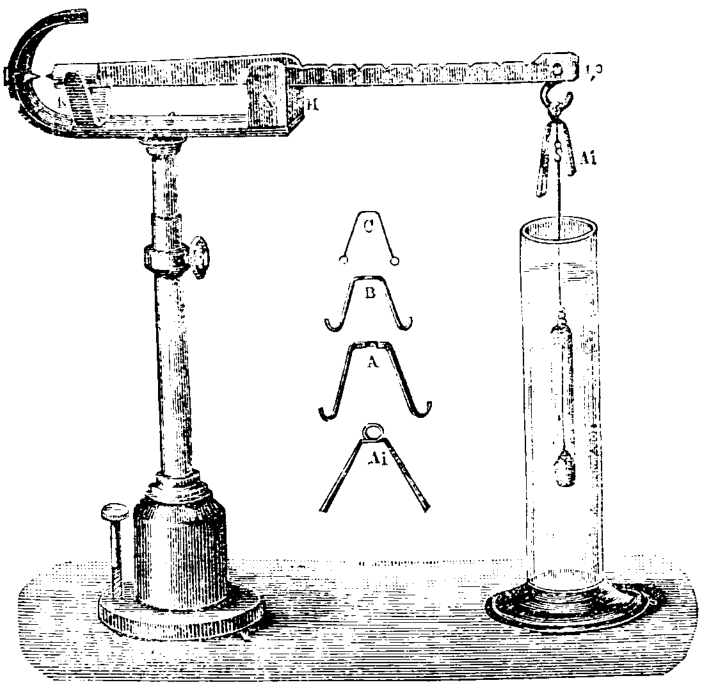
$$S=\frac{p-p'}{p-p''}$$

例如求醋酸之比重。用一固體為媒介。先秤其重。為 14.625. 沈入醋酸中。再秤之。得 8.28. 則該固體在醋酸中。所失之重為 14.625－8.280＝6.345. 次沈於水中秤之。得 7.578. 則該固體在水中所失之重。為 14.625 － 7.578 ＝ 7.047, 水所失重之容積。與醋酸所失重之容積固同。故醋酸之比重。

$$S=\frac{6.345}{7.047}=0.9003$$

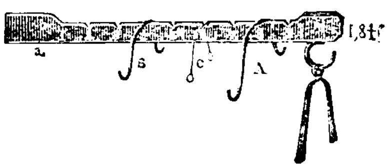
(B) $\boxed{\text{用毛氏天秤法}}$ 毛氏天秤之構造。如第50圖。甚便利。速得測液體之比重。秤桿支於H之支點。右臂十等分之。左臂之端鑲以針。秤架之右端J處。亦鑲以針。天秤水平時。二針恰相對成一直線。則其重為零。測液體之比重時。以玻璃製之圓柱體。內插小寒暑表。以纖細之白金線懸垂之。沈於液中。有四箇之分銅 A,A_1,B,C, 支配於秤桿上。使相平均。製造此分銅時。A_1 與 A 之重要均等。但區別其形狀。B要等於 A_1 之十分之一。C要等於 A_1 之百分之一。又當玻璃柱沈入水中。鈎上懸 A_1。秤要水平。此法惟使沈於水中玻璃柱之重。要適當耳。由是以此天秤求液之比重時。其液若比水重。

第 50 圖

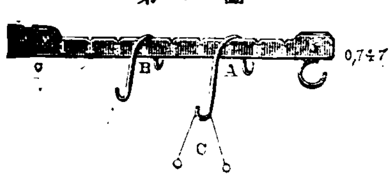


則於鈎上所懸A_1之外。更加各種分銅，如第51圖A, B, C, 之位置，A之位置。以在秤上8處，故由槓杆之理乃A_1之十分之八。B在4處，乃A_1之$\frac{1}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{4}{100}$，C在6處，乃$A_1$之$\frac{1}{100}\times\frac{6}{10}=\frac{6}{1000}$，故可知其液比水重1·846也。又如第52圖。

第 51 圖



第 52 圖



其液比水輕，故除却鈎上之A_1。餘用法與前同。

第二 用比重瓶測定法

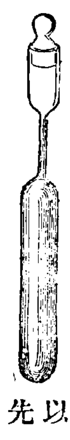
例如以一玻璃瓶，秤其重量為13.818克，充水秤之。為49.005克，由此數減瓶之重量，則瓶中之水重49.005－13.818＝35.187。茲傾瀉去瓶中之水，代以所欲測比重之液，譬如充以火酒，再秤之。測其重為44.150克。又由此重減瓶之重量，卽得與水同積火酒之重量44.150－13.818＝30.332。今以同積之水重，除火酒之重量，卽得火酒之比重如次。

$$S=\frac{30.332}{35.187}=0.86$$

由上法測物體之比重，不過就其大略，欲精測物體之比重須用次法。

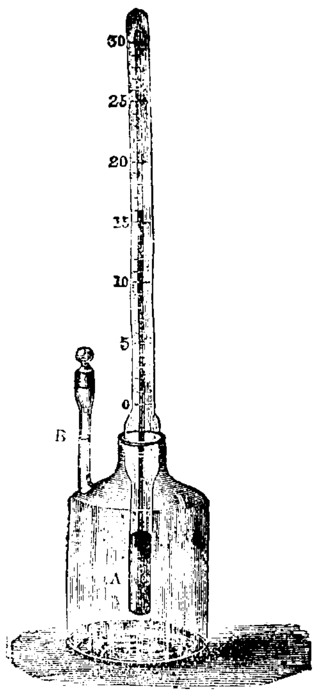
用上下兩端大而中部細之瓶，如第53圖，上端之口以玻璃栓塞之，蓋試驗易蒸發之液，防其蒸發故也，中部細管之處記標點，如前固體時所用之瓶，此瓶盛液時，仍使至標點之處為度。多者皆以紙捻吸取。又以中央之處甚細，故由上端注入之液，不能直達於下部，因先以火酒燈暖其下部，後直倒瓶，入其口於液體中。因內部之空氣冷，液少入於瓶中。

第53圖



測比重時，先充以水，或先充以所測之液均可。今先以所欲測比重之液，入此瓶至標點，秤其重。次傾瀉出瓶中之液，燥之再載於秤盤上，仍不動於他端前所置之分銅，但加分

第54圖



銅於其側。與前重相稱後。其所加之分銅。卽表瓶中液體之重也明矣。以之爲P。次就水同法試驗。得與前液體同積之重P′。以P′除P。所得者卽液之比重。

又欲測某溫度時液之比重。不可不兼用寒暑表。如第54圖。用有支管之玻璃瓶。瓶上插寒暑表。以測液之溫度。外更以一寒暑表。測水之溫度。其瓶之標點。卽在支管上B。測比重之法與前同。

第三　用連通器測定法

連通器一方之脚入水。他脚入所欲測比重之液。測由兩液境界面。至各脚液面之高。以之爲h糎h'糎。兩液之密度。爲d克d'克則據14條以兩液之境界面至兩液面之高。反比例於兩液之密度。故

$$\frac{h'}{h}=\frac{d'}{d}$$

但以所測比重乃求液之密度。與水之密度之比也。爲此液之比重。故若以此液之比重爲S。則

$$S=\frac{h'}{h}$$

此方法固甚便利。惟僅能求與水不混合之液。若該液與

水能混合或化合於水則不適用。

第四 用浮秤測定液體之比重。

(a) 用尼氏浮秤 此器沈入液中載自己之重量及所加之分銅常至一定點故沈此器於液中乃佔液體一定之容積因得測其所佔液體之容積其重有若干試驗此法先要稱浮秤自己之重量即以之為 p。今沈入水中。要使至O點不可不加一定之分銅其分銅之重量為 q。即浮秤至O點之際所排開之水量為 $p+q$ 也茲更以浮秤沈入他液中達O點時所加分銅之量為 q'。而此 q' 視液之輕重或比 q 重。或比 q 輕蓋比水輕之液體已得小重即沈比水重之液體不加重不達於標點O也。

例如浮秤之重量為70克。使沈入水中至O點。所載置之分銅20克。次在火酒中。沈之於同點。只要1.37克。故火酒之比重如次。

$$S=\frac{70+1.37}{70+20}=0.783$$

(b) 用劃度浮秤 此器即如第55圖所示玻璃製之圓筒其下部大下端有空球以浮游於液中要使直立故於此空球中盛水銀此器若沈於水中則其沈入之部分所排却之水重等其全重若更入於他液中則隨液之輕重或深沈或淺沈今假設此劃度浮秤之重有10克沈沒於水中之際。所排開之水10立方糎沈至一定之深更沈於火酒中比於水中雖見其深沈而排却火酒之重亦不可不為10克。今以 d 及 d'。示二液之比重。以 V 及 V'。示由浮秤所排開之容積。

G 爲其重量。由之得左式。

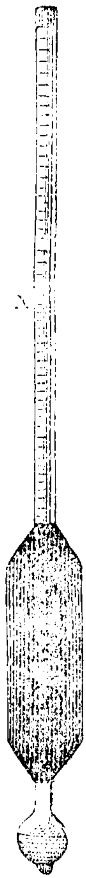
$$G=Vd=V'd'$$

故 $$V:V'=d':d$$

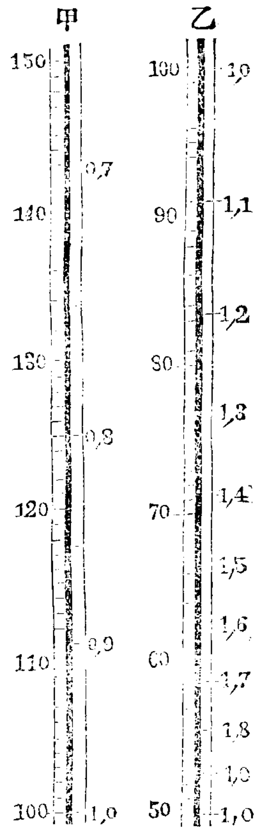
卽由浮秤所排開之容積。反比於液體之比重。

凡劃度浮秤之種類殊多。劃度之方法有種種。以嘒留薩克(Gay-lussac)氏所創設者爲最良。劃度時。先以此器沈於水中。於接水面之處。記以一點。(卽X點)遂以此點爲標準逐次製度。其法要使在各度中間之容積。等於其管入水中部分之百分之一。例如此管入於水中之部分10立方糎。則二度中間所有之容積。要0·1立方糎。始所標記之點。通常標之以百。其上部與下部記百以上百以下之數作度。但測比水重之液體。與比水輕之液體。其劃度有別。實際要製二箇。得測各種之液體。重之液體所用者。其上端標百。輕之液體。其下端標百。且於其傍。記比重之度。如第56圖甲與乙所示者是也。

第55圖



第56圖



例如以浮秤沈於某液中。至八十度。則其液之八十容積與水之百容積。乃同重量者也。故其液之比重如次。

$$S=\frac{100}{80}=1.25$$

是由上之 $Vd=V'd'$。故 $d'=\frac{V}{V'}\times d$。而 d 者水之比重。乃爲一。故 $d'=\frac{V}{V'}$ 也。

又或沈之他液中。至百十六度。則與上同一理。其液之比重如次。

$$S=\frac{100}{116}=0.862$$

故凡浮秤沈於某液中。示一般之記號以 Y。則其比重式如次。

$$S=\frac{100}{Y}$$

如以上所記之浮秤。兩度之中間隔離愈遠。因之所得之比重亦愈精密。故測比水輕之液。不止製二箇特別之器。當分製數箇者不少。

24. 定重浮秤　定重浮秤者。測液體濃淡之度。即用以知液中所混和水量有多少之器也。譬如於鹽液糖液類。其液愈濃稠者。同一浮秤沈入愈淺。其液體愈良之證也。反之如火酒類之液體。愈稀薄。含火酒分愈多。即浮秤沈入愈深者。其液體愈良之證也。其浮秤之種類雖多。其形大抵相同。惟其所異者。不過劃度之法耳。但此器非可以測比重。不過略比較液之濃淡而已。茲揭一二之例於次。

(1) 劃度浮秤　依前先測液體之比重。然後於右表中與比重一致之處。求其含量。例如純火酒原料之比重本爲0.763。有水夾雜者。則比重當比純火酒大。蓋以沈入於有含

比重 15 C	百分中所含火酒之量
0·999	0·53%
0·983	10·71%
0·977	15·59
0·971	20·52%
0·965	25·09%
0·957	30·43%
0·939	40·37%
0·918	50·29%
0·896	60·02%
0·872	70·27%

水之火酒中比沉入純火酒中淺也今若浮秤所沉入之處其比重為0·971，則其液百分中所含火酒之量僅有20·52，但有時所求之比重與表中不合者則但求其近似之數可耳，

(2) 百分一浮秤　製作此器乃以驗混和之液體百分中含有幾分者對各種之液體各有其名稱茲列一二例於次，

酒精表劃度之法先沈器於一定溫度之蒸溜水中。其所沈入之位置標記以零點次混九十分之水十分之火酒更投入浮秤以其所沈入之位置標記以十更混和八十分之水二十分之火酒沈其液中標記以二十順次如斯製法至沈入無水之火酒中標記以百又於各度之間十分之故入浮秤於某火酒中時沈至五十五度之點即可知該液百分中含有火酒五十五分又沈至八十三度之點則百分中含有八十三分之火酒之證也，

注意　凡二液混和所成液體之成分量不能直接測其比重何則例如有火酒以五十分之純火酒五十分之水混和其比重不能得二液之中數却得高位之比重蓋以火酒與水混和之後起收縮作用異於二液總加之容積也，

此外又有鹽液表用以測定食鹽溶液中所有食鹽之量。

糖液表。用以測定液體含糖分之量。牛乳表。用以檢查牛乳等。其劃度之法。大約皆從實驗上施行。又以上所述者之外。尚有播美 Baume 氏。卞爾制 Cartier 氏。柏克 Beck 氏等。各種浮秤。其劃度雖異。實際略同。茲略之。

液體比重表　表中惟水之比重。以攝氏四度為標準。餘皆無度之比重。

水銀	13.598	人血	1.060
硫酸	1.841	水四度時	1.000
硝酸	1.420	水無度時	0.999
鹽酸	1.240	人乳	1.029
硫化炭素	1.293	海水	1.0275
以脫	0.713	石油	0.836
甘油	1.260	波以德葡萄酒	0.990
純火酒	0.793	橄欖油	0.870

25. 氣體之比重

氣體之比重概以空氣為標準。法於瓶內。入所欲測比重之氣體。測其重。次入空氣於此。更測之。則得知其氣體之重。及與此同體積空氣之重。由是與測定液體比重同一理。可求其氣體之比重。但氣體一定體積之重。因溫度與壓力甚有差異。故其方法於第三編熱學內說明之。

[例1]　U字管之一脚。入水銀。他脚入某液體。由其境界面至水銀面之高。為 0.175 米。由境界面至他液面之高。為 0.420 米突。求此液對水銀之比重。及對水之比重。但水銀對水之比重為 13.6。

(解) 以此液之密度爲 d. 以水銀之密度爲 d'. 則

$$\frac{0.175}{0.420}=\frac{d}{d'}$$

$\frac{d}{d'}$ 乃此液對水銀之比重. 以之爲 S. 則

$$S=\frac{0.175}{0.420}=0.416$$

又以水銀對水之比重爲 13.6. 故此液對水之比重 S′

$$S'=0.416\times13.6=51.66$$

$\boxed{例 2}$ 以比重 0.8 之木. 作一邊二糎之立方體. 浮之於水上時. 問此木片所排除水之體積若干.

(解) 此木片之重爲 0.8×2^3. 卽等於所排除水之重. 故木片所排除水之體積 $0.8\times2^3=6.4$ 立方糎也.

$\boxed{例 3}$ 比重 2.8 之石. 沈於水中時以如何之速度沈下. 又達至 490 糎之深. 要幾秒.

(解) 以石之體積爲 v 立方糎. 則此石之重爲 $2.8\times v$ 克. 卽 $2.8\,v\times980$ 功也. 作用於此石之浮力. 等於與此石同體積之水重. 卽 v 克. 卽 $980v$ 功. 而石落下水中時. 使其落下之力. 乃石之重與水之浮力之差也. 故其力 $2.8v\times980-980v=1.8v\times980$ 功. 又此石之質量爲 $2.8\times v$ 克. 而使運動物體之力. 等於以其物體之質量. 乘物體所得之加速度. 故若所得之加速度爲 γ 秒秒糎. 則

$$1.8v\times980=2.8\times v\times\gamma$$

由之 $$\gamma=\frac{1.8v\times980}{2.8v}=630 \text{ 秒秒糎}$$

又此石以此加速度落下 490 糎之深. 所要之時間爲 t. 則

$$S=\frac{1}{2}\gamma t^2$$

由之 $$490 = \frac{1}{2}\,630\,t^2$$

$$t^2 = \frac{490 \times 2}{630} = \frac{14}{9}$$

故 $$t = \frac{1}{3}\sqrt{14} = 1.247 \text{ 秒}$$

第一章之問題

1. 於第三圖連底器小活塞之面積五平方寸大活塞之面積五百平方寸小活塞之上若載二十兩之分銅大活塞須載若干之分銅其壓力方能平均

2. 依前問小活塞壓下二寸時大活塞當壓上幾寸又此時所載於小活塞之分銅若爲P。載於大活塞之分銅若爲Q,則P分銅由外向器內之水所爲之功用與水向外壓上Q分銅所爲之功用其得失如何試證明之。

3. 又問上記連底器之利率如何

4. 白賴碼水壓機小圓筒之口徑一寸大圓筒之口徑二尺則小活塞若以十五斤之力壓之大活塞當以幾何之力壓於上方又計算此水壓機之利率。

5. 試驗水道用鐵管之耐壓力管之長十二呎內徑一呎充水於此中以水壓機壓之凡每一平方吋加以百五十磅之壓力水道管仍不破問此時鐵管之總內面所受之全壓力如何

6. 白賴碼水壓機小圓筒之口徑2粴附屬於小圓筒之柄爲一槓杆其兩臂由支點至力點之長等於由支點至重點之長10倍今加300瓩之重量於力點要使與大圓筒上2000瓩之重量相均大口徑要幾何

7. 各邊十米之大箱充滿以水時壓於其底面及各側面之全壓力若干。(但大氣之壓力不算入)

8. 1呎平方之板,鉛直沈於水中,上邊與水平面平行,且使由水面至其上邊之深10呎,問一面所受之壓力幾何。

但水1立方呎之重量爲62.5磅,

9. 一邊4尺之方板,沈於一液中,一邊與液面一致,板面對水平傾斜30°。問一面所受之壓力幾何。

但液1立方尺之重量爲30兩,

10. 有三角板,其底面向水平沈之水銀中,其板之面積6平方糎,由液面至底邊之深9糎,由液面至頂點之深12糎,問及於三角板一面之壓力若干。

11. 於海中1哩之深,及於1平方呎之壓力幾何。

12. 於器內入水銀至10糎之深,其上入水至75糎之深。問器底一平方糎所受之壓力有幾何。

13. 半徑2糎之圓筒中入水,高50糎,其上加入比重0.92之油,高8糎,又其上加入比重0.79之火酒,高25糎。問及於底之全壓力幾何,

14. 有口徑2糎U字形之管,於其一方入水36立方糎,他方入若干立方糎之油,(該油之比重0.92)保平均後,管內兩液面高之差若干

15. 入水於U字形管之兩腕,高至2尺。次酌出一管之水一半,代以比重0.7之油加入,再復平均之狀態時,於兩腕水高各若干。

16. 有一邊4糎立方體之鉛,附瓶塞木之球,沈於水中,

恰相均。求此瓶塞木球之直徑。但鉛因受器械力。其比重比尋常多0.15為11.4。

17. 300克之瓶塞木。附鉛塊沈於水中。恰相均。求鉛塊之比重。

18. 有4米長之銅線。在空氣中之重為1720克。在水中之重1520克。求此銅線之半徑。

19. 有立方體之木材。其比重0.6浮於比重1.5之液。其一邊成鉛直時。僅沒二糎於液中。此木材若載10克之錘時。當沈入於液中若干。

20. 有重540克之浮標。其體積之$\frac{2}{3}$現於水面。今全沈之於水中。在水中測量。須附幾克之錘。

21. 有三角板ABC。B角之等分線。與AC邊交於D點。AB邊之長。等於BC邊之長之$\frac{3}{5}$今以其板鉛直沈於水中。A點觸水面。BD之等分線使取水平位置。則於三角面ABD水之壓力。與三角面BCD壓力之比。猶9與35之比。試證明之。

22. 一立方粉之白金。使能支於水銀中。要以若干之力。

23. 闊2糎。長5糎。厚0.5糎之鐵片。在水中測之。其重若干。又支於水銀中。要以若干之力。但鐵之比重為7.8。

24. 質量100克之物體。在水中秤之。得64克。在鹽水中秤之。得60克。求此鹽水之比重。

25. 有一固體。重25克。附金屬之棒秤之水中。得重36克。又若僅以錘在水中秤之。則重45克。求此固體之比重。

26. 有比重瓶,充之以水,其重61.485克,充之以火酒,則其重爲53.462克。瓶重已知爲15.068克,求火酒之比重。

27. 有比重瓶,充水時,其重爲39.74克,裝入8.5之鐵更充水稱之,得47.12克,問該鐵之比重若干。

28. 於容積1000立方糎之瓶中,滿盛以食鹽,其重量864克,而其瓶更加以600立方糎之石油,仍不溢出,問食鹽之密度如何。(但食鹽毫不溶於石油中者也)

29. 有瓶塞木其質量300克,密度0.25克,入之於水槽中,水當溢出若干。

30. 於天秤之兩臂,吊重25克之甲體,與36克之乙體,入之於水中,兩臂仍相均,甲體之比重若爲5.6,則乙體之比重如何。

31. 北海有冰山,現於水面部分之體積爲15立方粁,冰之比重,爲0.97,海水之比重1.02,求此冰山之全體積。

32. 比重1.3及0.7二種之液,混合之,得比重0.9之液,其混合之際,看作體積無變化,求各液混合之比。

33. 有三種之液,其密度1:2:3,以其等容積混合,又三等分之,各分更混入各種原液,其原液各與前之容積相等,問所混入之液,其密度之比如何。

34. 欲測定松木之比重,取其一片,先在空氣中稱其重三十三克,附之以銅塊,共沈於水中秤之,得八十七克,若僅鉛塊在水中之重爲百四克,由之測此松木之比重。

35. 欲測純火酒之比重先秤比重瓶之重得13·425克。次充以火酒秤之得總量33·268克此時火酒之溫度爲十五度次以同大之比重瓶充十四度之蒸溜水秤之得38·408克問攝氏十五度之純火酒對攝氏四度之水其比重如何。

36. 有物體在水中秤之得a克在比重S之液中秤之。得b克求物體之重量及容量各幾何。

37. 有金銅合金之鐲其重量爲4兩8錢。在水中秤之得4兩4錢8分金之比重若爲19·4銅之比重若爲8·8。問此鐲24分中金有幾分。

38. 有金銀之合金其比重1·6質量650克合金之體積等於各成分金屬體積之和。

但金之比重爲19·4。銀之比重10·5。

39. 有金銀之合金質量979克。在水中之重爲890克。求此合金成分各金屬之質量。

但合金之體積等於各金屬體積之和。

40. A物體在水中之重10克B物體在空氣中之重有14克結合此兩物體秤於水中得7克。求B物體之比重。

41. 有物體在空氣中重128克在比重1·1之液中重106克求此比重及體積。

42. 有質量100兩之木圓壔其軸垂直入於水中。所沒於水中之部分。合全體之$\frac{2}{3}$又若附60克之錘於此時當在水中相均。由之求木及錘之比重。

43. 在水中之瓶塞木。以若干之加速度。浮出於水面。

但須看作水無摩擦抵抗者。

44. 有物體比重 8。重 12 斤。以糸吊之。垂入比重 0.92 之油中。問及於糸之張力幾何。

45. 以樫之木作直圓錐體。高 16 寸。底之半徑 4 寸。今以角頂向下浮於水中。當浮至幾何之高。但樫木之比重爲 0.85。

46. 有立方體之底面。向水平浮於火酒中。其上載 320 克之分銅。立方體始沈入 1.2 糎。火酒之比重若爲 0.8 則立方體之容積如何。

47. 20克之銀塊。與錫之一塊。結繩之兩端。通於滑車。沈於水中。得相均。問錫塊之重量。

但銀之比重 10.5。錫之比重 7.3。

48. 於前問換水用比重 1.51 之液。依然保平均時。則錫塊之重量幾何。

49. 密度 δ 之物體。靜載於密度 δ' 深 d 之液面。則沈至液底所要之時間爲 $\sqrt{2d\delta/g(\delta-\delta')}$。試證明之。但 δ' 比 δ 小。

50. 有一固體半容沈於水中。半容浮於水上。其水若混以同容之他液。則固體所沈於水中之部分。僅全容之 $\frac{1}{3}$，問固體及液之比重。

51. 有玻璃球。其密度 2.8。投入水與水銀之混合液中。當靜止於如何之位置乎。

52. 浮秤之盤上載60.3克。在水中恰沈至標點。若沈入於火酒中。至同點時。所載之分銅僅6.8克。浮秤之重量若爲200克。則火酒之比重幾何。

53. 有三角形ABC之薄板。垂直浮於某液中。B點位於液面。A角上浮於液外時。AC邊必取垂直之方向。試證明之。又求液與板比重之比。

第二章 液體動力學

26. 水運動之原因及速度 水所以生運動者，即以液體小部分易動搖，與重力作用之結果也，或由水自己之壓力生運動。即如川河之傾斜者，上流之水，必傾瀉於下流，遂因其傾斜愈大。水流愈急。但流水之速度，比於等傾斜之斜面上，轉落固體之速度小，此速度減却之原因，即以水內外之摩擦及邊岸之不平或屈曲之故也。

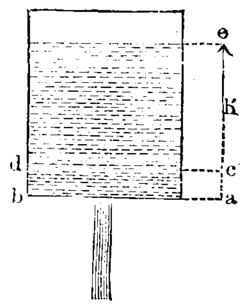
因水受重力作用，常有由上流下之趨勢，可知其具有位置之能力。又因流動水衝突於物體生運動者，亦即可想其有運動之能力也。然則可以水爲原動力，應用於作業上。

27. 流射速度之定律 上面開放之器，於其底面或側壁，穿一小孔，則盛於此器之液體，由其小孔流出，其流出之速度，與液體面之關係，乃托里賽離 Torricelli 氏所發明，因名爲托里賽離之定律。其定律曰『流出水之速度，因液表面至流射孔之高，而無一定，即與鉛直落下之物體，因距離之高低，其落下之速度而無一定者同，若其流出口至液面之深，與落下之物體所至之距離均等者，則其速度亦均等』故計流出水之速度，即以自流出口至液面之高，依落下公式計之可也，其理由說明如次。

如第57圖所直接於ab孔口之abcd，流液層若無受其上層流液之重壓，則以ac之高，由孔口流出之速度爲v，今示此ac之高以S，則由落下體之公式得書之如次。

$$v=\sqrt{2gS}$$

第 57 圖



又若射出液體之部分。不只因自己之重力。更受在上部液重之壓。則其速度自不得不異。故 g 與 g' 之比。如下式，

$$g:g'=S:h$$

故

$$g'=\frac{gh}{S}$$

此式 h 乃示下壓液柱之高。(卽 ac) 如上式射出液體之加速度。非 g 乃 g'。故其射出之加速度。亦不得不如左式，

$$v'=\sqrt{2g'S}$$

今於此式中以 g' 代 $\frac{gh}{S}$，則射出之速度如次。

$$v'=\sqrt{2gh}$$

又就位置能力及運動能力觀之。當水未流出時。其位置之能力爲 mgh。至水由孔口流出。雖失位置之能力。而其所得運動之能力。亦卽爲 $\frac{1}{2}mv^2$。今以容器之斷面積爲 Q 糎^2。由液面至孔口之高爲 h 糎。以液之密度爲 $\frac{d\,\text{瓦}}{\text{糎}^3}$，以因液流出。液面低降之高爲 a 糎。以流出之速度爲 v 秒糎。則質量 $m=Qad$ 故

所失位置之能力 $=Qad\times gh$

所得運動之能力 $=\frac{1}{2}Qad\times v^2$

由能力不滅。則所失位置之能力。與所得運動之能力當相等。卽

$$Qad \times gh = \frac{1}{2} Qad \times v^2$$

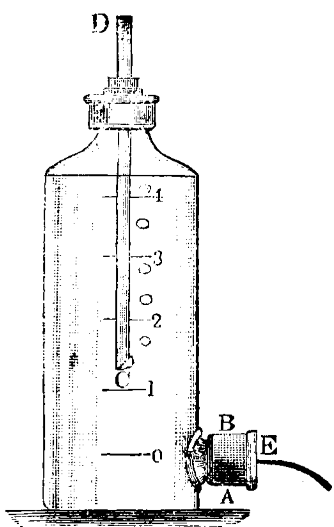
$$\therefore \quad v^2 = 2gh \quad \text{即} \quad v = \sqrt{2gh}$$

即物體由h高落下之速度,與同高之液體,射出之速度毫無差異也,茲更由此定律推述次之二項。

(第一) 液體射出之速度,只關於自液面至孔口之深,不關於物體之性質,即如不論水與水銀,其液柱之高若相等流射之速度皆同也。蓋雖水銀之各層,比水之各層,受13.6倍之壓,而水銀所射出各部分之質量比其同容積之水各部分之質量,大13.6倍也。

(第二) 液體射出之速度比例於所壓之液柱之高之平方根,例如孔口若在百糎高液柱之下,所射出之速度,比孔口在高一糎之液柱下射出者,有十倍大也。

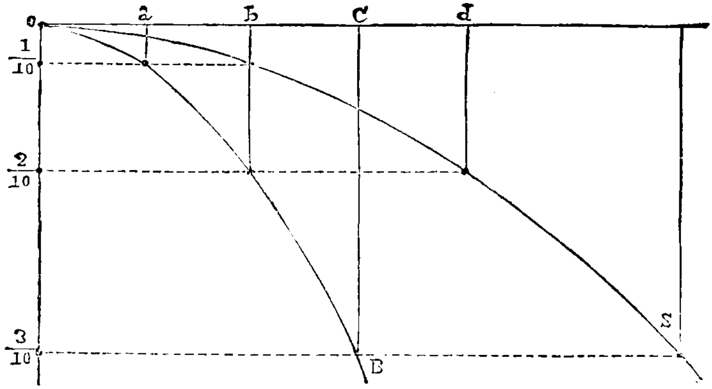
第 58 圖



實驗法　實驗射出之速度,用馬氏瓶最便,即如第58圖所示,側壁垂直之高瓶,其下部於側面開口,插以短管,被其管以黃銅製之把鞘AB,瓶之頸部,亦以黃銅之把鞘被之,其孔口嵌入木栓,使相密合,又此木栓插入上下開口之玻璃管CD,管之下端,達於瓶內水面之下,水若由下口E流出時,

空氣通過玻璃管CD。由下端C出氣泡。於C以上之全水量。與氣壓平均。故射出之液至C高而止。瓶劃以度。其0度與流射之孔口在於同位，以上各隔1粉標1,2,3,4等。今若引上玻璃管使下端在1,2,3,4,等度之高。則由流射口所流射

第 59 圖



出之水。因1,2,3,4粉各水柱之高。其速度亦必有差異也明矣。例如玻璃管之下端。在1時。則由水平射出至$\frac{3}{10}$秒時至B。玻璃管在4時則由水平射出。$\frac{3}{10}$秒時至S。是在1之際$\frac{1}{10}$秒時。得oa, ab等距離之速度。在4之際得ob, bd等距離之速度。後者恰爲前之二倍。與水平擲射者同。

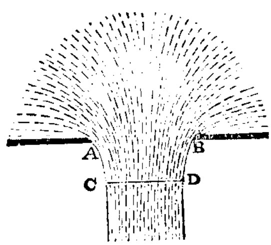
28. **射出量** 如上文所記由孔口一定時間射出之液量。關於孔口之大小。及流射之速度。故通過孔口液量之多寡。因流射之孔口。及一秒時間所經過之道路而定。(所經過之道路。卽由孔口至水面之高。)道路之長。與流出之速度均等。卽$\sqrt{2gh}$。是故若以F示孔口之面積。以M示射出之液

量，則一秒間之射出量如次。

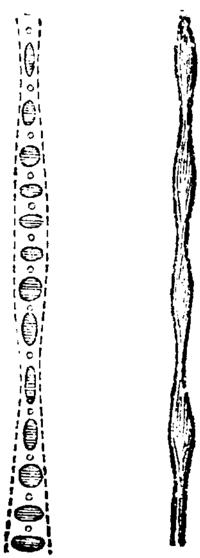
$$M=F\sqrt{2gh}$$

但此不過於理論上言之。實際其量必有多少之差。何則。射出液體之速度。通過孔口中央之部分。雖符合上文之定律。其愈近側傍。速度愈減少。蓋與孔口成直角之水柱。其各層不能同時有同一之速度。故遠於孔口者。其運動自緩慢。且水之上部與射出水線之軸不平行。故雖由各邊聚向孔口而流。因各邊水流之速度不齊。致射出之水線。不能成完全圓柱形。於孔口外收縮。此縮少之部分曰［縮脈］Vena controcta 今於本圖 CD 之部。其水線之橫截面。比孔口 ab 之部。約只有三分之二。故實際之射出量。較之理論上只有三分之二。今以 Q 示射出之實量。即如下式。

第 60 圖



第 61 圖



$$Q=\frac{2}{3}M=F\sqrt{2gs}$$

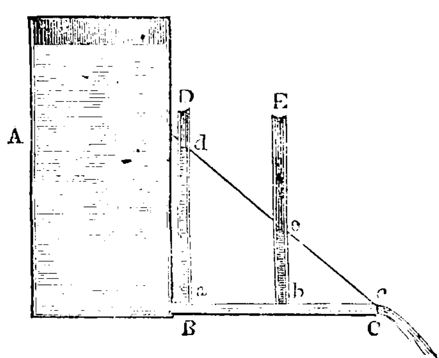
流出之液柱。縮脈以下之部分。於一定距離。或膨脹或縮小。成不透明之液柱。若在暗室以電氣火花觀此不透明之部分。能見此不透明之部分如圖形。為橢圓迴轉形及球形之液滴集合而成者。膨脹之部分常膨脹。縮少之部分常縮少。故一個之液柱降下。其如

圖所示成種種之形。

或者謂亦由於空氣之振動。故若用適當之裝置(如鐘以玻璃管使從玻璃管中流下)遮斷其所及於孔口之振動。且防空氣之振動。則液成端整之柱狀流下。不呈膨脹及縮少之形。

29. 由管流射之狀態 依禿里賽離定律。須對壁面極薄之孔口流出之液而言。且其緣毫不可有摩擦之抵抗。若於器底設水平管。(如第62圖)則液體由之流過。其速度亦大減少。管愈長且愈細。則速度之減少愈多。何則。水若通於由槽器各部均等之管。流射之際。則不受管壁摩擦粘着力等之抵抗。水自依定律上說明。以一定之速度流出。但實際於其管器之各部。因有抵抗。則水所流出者。不得不比例於各抵抗之和。今欲確知此關係。於水平管之上部。插以玻璃管。(例如圖DE管)則見水上昇於管中。且其愈遠射出口之處。(即愈近槽器)水面愈低。

第 62 圖



今以由水平管至槽器中水面之高爲h。槽內之水以其重量。通過管全長之際。固受抵抗。故其水柱自低。今以等於所

受抵抗之和水柱之高爲k。以V示無抵抗之水流出之速度。則實際所流射之速度若爲V'。則從前節所述之理得次式。

$$V^2=2gh \text{ 及 } V'^2=2g(h-k)$$

以$2gh$代以V^2則$V'^2=V^2-2gk$

故 $$k=\frac{V^2-V'^2}{2g}$$

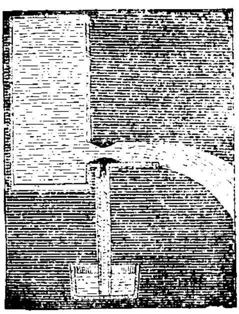
由是觀之於水平管之抵抗。愈遠槽器。抵抗力愈大也明矣。於本圖所設之兩玻璃管。其比較如左。

$$ad : bc = ac : bc$$

然則河川之水流。及導水溝渠等。因水之摩擦減速者不少。

30. 液體流動之壓力　於徑一尺高二尺許桶側之下部。插入長八寸徑六分許之管。於管接桶之處穿小孔。插入小玻璃管。其下端置於充水之器中。而桶內入水。使由橫管流出。其速度極大時。橫管內之水。不止不流入於所接近桶邊之直管。且其下小槽之水。却升於玻璃管內。倒入橫管。與桶內之水。共由射出口流出。蓋以橫管接續於桶之部分。管內之壓力比大氣之壓力弱故也。(大氣壓力見次章)

第63圖



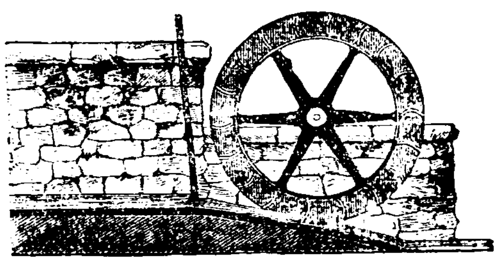
由禿里賽離之定理。水流出所要之壓力。要比例於水速

度之自乘。故使水以大速度流出。要以頗大之壓力。於上之實驗桶內水壓力之作用有二。一維持水之速度。卽使桶內之水陸續流出須附加運動之能力。一加壓力於管內。但此時流水之速度頗大。所加於管內之壓力。亦直由孔口而出。故桶內水之壓力。儼變爲專以維持流出水速度之用。管內之壓力勢不得不小。故橫管流水之速度若大。則直管下之水。遂至上騰。

31. 水車　水動力之機械最著明者卽水車。水車通常置於垂直之面。匝水平之軸而迴轉。分之爲二種。下擊水車及上擊水車是也。

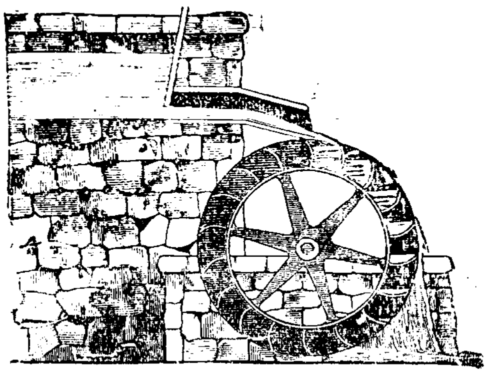
（第一種）下擊水車。卽如第64圖所示。其下部藉流水之能力而迴轉者。由水量及水流之緩急。其迴轉有遲速。蓋水量多。則如前節所示m之量大。水流急。則V之量大。而全車受衝突最強者。在當中垂直之齒。於觸水流之際。則其齒右轉。而車運動。但若水量過多。則水車難免有沒於水中之患。遂以防車急轉之故。於水流衝擊之處遮以板。是曰『水門』使水由下端流出。惟其流出之水重。要使克勝水車之重。否則車不迴轉而不適於用矣。

第 64 圖



（第二種） 上擊水車。其溝造與第一種之水車。大同小異。惟受水之處。在於車之上部而其迴轉。卽藉其滯留於水車中翅板之水量。故第二種之水車。比第一種之水車運動緩。但如於山間中之小川。水量小者。以使用此種之水車爲便。蓋使滯留於翅板中之水。不要其多量也。

第 65 圖



第二章之問題

1. 由流出口至水面深90糎。問流出之水。依理論上言之。其流出之速度如何。

2. 一圓筒深2呎充水。其表面1平方吋之處。更加以6磅之壓力。以活塞壓之。問筒底之孔。初流出之水。每秒以幾呎之速度。

3. 有盛水器。深55糎。圓孔之面積0·196平方糎。問22秒間流出之水量。

但流出係數。爲0·699。水深看作終始不變者。

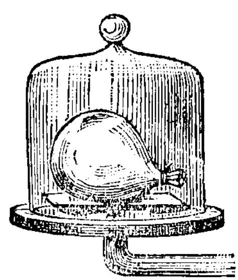
4. 貯水器之側面。有一孔。在水面下25尺之處。又其孔離地上之高1444·72尺。問流出水落於地面之點。其水平距離若干。

第三章　氣體力學

32. 氣體之性質　氣體卽如第一章所述。比水容易動搖之流體也其原因卽以分子間之反撥力勝於凝聚力故其分子進行運動甚活潑擴散於四方。充塡於空際又因其有擴張性也。得於其所擴散之境界面上施壓力。而使其縮小。但氣體之本性具有反撥力。常衝突於其境界面由是遂名其衝突於境界面之力。(卽反抗壓制之力)曰張力或曰彈力

實驗法　欲實驗氣體之擴張性,及其張力。可以橡皮球內入少許之空氣緊紮其口置於排氣機之鐘下排除鐘內之空氣因其空氣稀薄球子漸擴張終至破裂。是球內之空氣初與外氣壓平均。不能逞其張力。至置於排氣機之鐘下。因球外之氣壓減少。內部之張力。逞其擴張性也。

第 66 圖



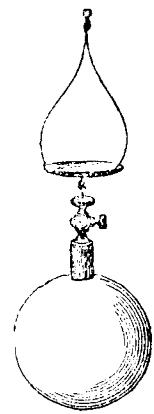
又空氣泡由水瓶之底。上昇於水面。其氣泡昇愈高,體積愈漲大。是以壓力漸減輕。張力漸顯著也。此事於化學實驗捕聚瓦斯時。常呈此現象。

又氣體有重。由實測上凡有一立方粉之空氣其重1.293克蓋空氣所以能瀰漫於地球者以地球之引力作用。故覺其重。否則以其擴張性。不得不散於地球之外矣。

又用直接實驗亦得證明之。如67圖用有活拴之玻璃球。

置於排氣機之鐘臺上。排除球內之空氣。秤量此球之重。今再充空氣於球中。再秤之。比前所增加之重量。即空氣之重量也明矣。例如玻璃球之重千克。充空氣秤之。重千零四克。則與其球同積之空氣。可知為四克。

第67圖

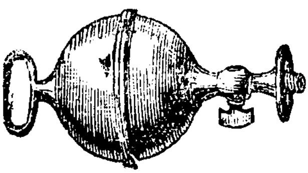


33. 大氣之壓力 Atmospheric pressure

大氣者。無色透明之氣體。瀰漫於地球表面。擴散空際。不下數千里。但實際空氣所達之最高點。尚無確實之數。即前有二三學者曾測空氣之所至。因測法不一。故其得數亦不同。挨倫氏基隕石發光。測得空氣所達之最高點。離地球表面有百二十里。里挨義氏。基光線分極。測定為百三十里。黑魯曼氏。由薄明現象。測定為二十七里。而拉布拉斯氏。又謂空氣飛散。必其分子之反撥力。與重力牽引力互相平均處。始靜止。因測其距離。得一萬四千四百二十四里。依以上所測。雖無定數。究其大部分總在百餘里以上。以百餘里有重之空氣。壓於物體。物體之受壓力也自明矣。其壓力之傳播。亦與液體同一理。於一點之周圍。其壓力常相等。實驗之法。亦與液體同一理。用連底器得證之。即如於連底器中。置氣體於活塞之下。所載於兩活塞上之重。其比若等於活塞面積之比時。則左右之重當相等。但以氣體有受壓之性。活塞不少沈於圓筒中。不能平均。

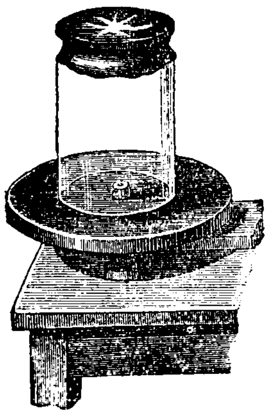
氣壓之實例 (一) 取一玻璃杯。滿盛以水。蓋以紙片。以手掌固掩其上顚倒之。退手掌而紙片不離脫。水亦不散流。是空氣壓力存在之證也。又以兩端共開口之管。沉於水中。充水後。以指閉上端。即出水外。置於空氣中。水亦不流出。是空氣由下壓上管口之水也。然若放指。則因空氣由上口壓下。水始流出。又以細頸之玻璃瓶充水顚倒之。水不流出。亦同一理。然空氣與水。以互不吸收。故生抵抗壓力。若取能吸收於水之瓦斯。如以充安母尼亞之器顚倒。向其口於水中。則見水昇器中。殆全充之。

第 68 圖



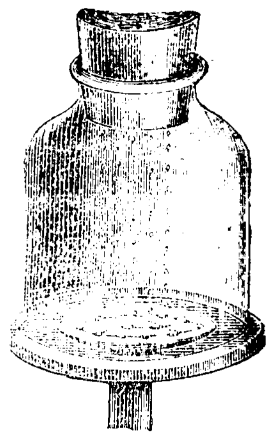
(二) 用兩銅造之半球。交互密合之。如第 68 圖。其一半球有一孔。配以螺旋。先放開螺旋。置於排氣機臺上。抽出球內空氣。初時以球內之空氣。與外部之空氣平均。尙易取開。次以球內之空氣抽盡。外部空氣之壓力偏勝。故若密閉其螺旋。即以強盛之力。不易開放。又如以兩片平滑玻璃板密合之。欲使離開。須費大力。是亦以內部無空氣。偏受外部空氣之壓力故也。

第 69 圖



(三) 於玻璃圓筒上。張胞膜。置於排氣機之臺上。若去其內之空

第70圖

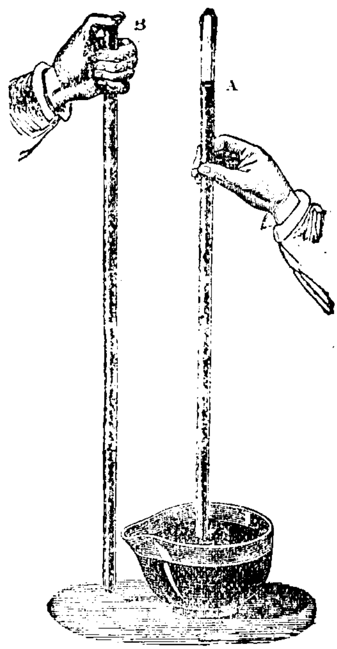


氣,則因外部空氣之壓力,胞膜當破裂,又由此可知人體內之空氣,與外部之空氣,亦互相平均者。否則皮膚必為外部空氣之壓力壓破矣,

(四) 如第70圖以上下開放之玻璃鐘置於排氣機之臺。上口放堅實之木皿。密嵌合之。木皿盛以水銀,鐘內若抽出空氣,則見水銀降下如雨,是因偏受一面之氣壓也。小兒之吸母乳亦然。

34. 空氣壓力之強度 昔者於伊太利國佛老令斯地方。有園丁。製造吸水筒,欲於十八挨爾令(挨爾令乃伊太利之尺度約合法國十米突)以上之高處。吸水,終不達其目的,當時考究其所以然,未得發見其理由,蓋往昔水之升於筒中者,當時人皆以為乃液體有昇騰之性,惟有碩學加里黎氏,就此吸水筒之現象,以當時淺近之說明,未足確信,直想至乃空氣壓力之原因,不過尚無實驗以徵證之。不數年。氏之門弟子忒里賽離 Torricelli 氏,確證空氣之壓力。有一定,其試驗卽如第71圖所示。約以一米突長之玻璃管,其一端閉塞,他端開口,充以水銀。以指頭閉口,倒豎於水銀盂中後。放指,則管中之水銀。下至一定之高,卽於海面行試驗時,由盂中之水銀面至管內水銀之高大約七十六糎,其以上生眞空。若無外氣之壓力,則依前連通管之定律,內外當同高。茲因外氣之壓力。

第71圖



壓於水銀面。管內之水銀。與外氣隔絕。遂不能直接受大氣之壓力。故管內之水銀。雖受重力之作用。因器中之水銀。受空氣之壓力。卻升騰於管內。至兩力相平均而止。由此觀之。空氣壓力之強度。大約等於七十六糎之水銀柱也。無可疑矣。茲以玻璃管內水銀之面上。所餘之空處。眞無空氣者。故因發明者秃里賽離氏之名。名曰秃里賽離氏之眞空。

基以上試驗。不論玻璃管之大小。常一定不變者也。其理如次。

茲以所及於器中水銀表面空氣壓力之強。每一平方糎爲A克。此壓力由巴斯格之原理。四方無增減。傳達於水銀中。故管內之部分。與器中水銀同一水平面者。押揚水銀之力。每一平方糎亦必爲A克。故管之大若二平方糎。則押揚水銀於管內之力。亦爲2A克。管之大若爲三平方糎。則押揚之力爲3A克。次若爲四平方糎。則4A克。若爲S平方糎。則SA克。故押揚水銀於管內之力。比例於管之大。

次計算管內水銀之重。由器中水銀表面至管內水銀表面之距離。若爲l糎。則管內水銀之容積。爲Sl立方糎。而水

銀一立方糎之重。爲13 59克。則管內水銀之重。當爲13·59Sa克故管大若二倍則水銀之重亦二倍。管大若三倍。則水銀之重亦三倍。卽管內水銀之重。亦比例於管之大。

然則管大二倍則水銀之重二倍。押揚於管內之力亦二倍。管大三倍。則水銀之重三倍押揚之力亦三倍。由是管大若增減。則管內水銀之重。與空氣押揚之之力。亦同時增減。故不論管大之如何。空氣之壓力非有變更者。卽管內水銀之表面。至器中水銀之表面常止於一定之高。

今更依數理的證明之。卽如前所述。管內水銀之重爲13·59Sa克。押揚之之力爲SA克。而此兩力等時。管內水銀止於一定之高。故於此時不可不如次。

$$135{\cdot}9Sa = SA$$

今於此方程式之兩邊。消去S。爲

$$13{\cdot}59a = A。$$

此方程式兩邊之量。不關於管之大。故不論管大之如何。此方程式不可不成立。卽不因管之大小。大氣壓力之强A。常比例於管內水銀之高a。

又由氏試驗之結果觀之。若管內之水銀易以水則水因氣壓壓上。必比水銀高。蓋水銀比水重故也。今由水銀柱之高推算因氣壓所壓上水柱之高。據前連底器之理。壓上之高反比例於其重。故以水銀比水重13·6倍。則水柱之高。不得不爲水銀柱之13·6倍。因之水柱之高得如次之算式。

$$76 \times 13.6cm = 1033.6cm = 10.336m$$

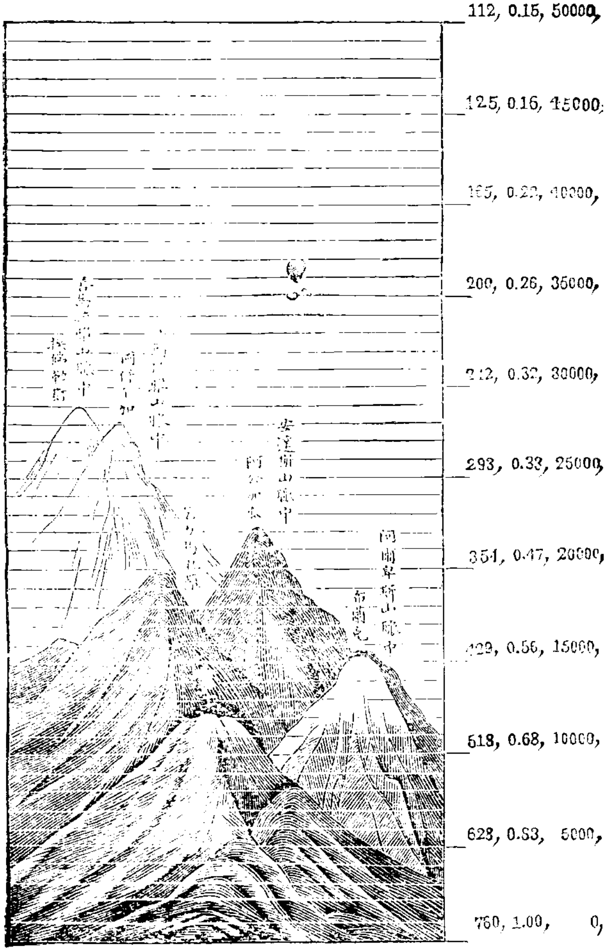
由是觀之。因空氣壓力。水之昇上之數。可知爲大約十米突之高。又由上之算式。於一定之面積。(例如於一平方糎之面上)得算出空氣壓力之强度。卽如其底面一平方糎。其高大約十米突之水柱。重等於一平方糎之面積。受千克之壓力。卽一瓩也。蓋其一平方糎之底面所有十米高之水柱。卽如以一立方糎之水。(卽有一克之重者)疊積千箇者也。更推考此理。一平方米之面所受之壓力。當爲一萬瓩。何則。一平方米之面。含有一平方糎之面積一萬箇也。今若以人體之表面平均爲1.5平方米。則因外氣所受之壓力。當爲一萬五千瓩。人所以不爲壓倒者。以上下前後左右各方面。壓力均等之故。又不爲壓扁者。以存於身體腔窩內之空氣。與外部之壓力相平均。且骨架之堅固。亦足以抵制外部之壓力故也。但體內之氣壓。與外部之氣壓相抵制。則飲液之際。或疑其何以得流入於口內。蓋空氣雖壓飲液之表面。因胸腔及肺葉擴張。此兩部及口腔內生稀薄室。故以作用於飲液表面外部之空氣壓。比較的濃厚。飲液遂由外部之空氣壓。壓入於口內。又體內之空氣壓。與外部之空氣壓。若不平均。體內空氣壓。偏勝於外部。則體內所存之空氣膨脹。而壓於外部。由毛孔出血。此事吾人得實行試驗。如以口向皮膚吸之。則因壓縮胸腔內之空氣。口內成眞空。被吸之皮膚處。立見其出血。又登於高山之際。吾人皮膚之氣孔或唇及鼻孔。屢見出血者。亦以壓於吾

人身體壓力之强度。在山上者比在平地弱。故及於身體之壓力小。則從前所蘊藏於身體內部稠密之空氣。自不得不減少。故內部之空氣。以劇勢膨脹。小血管遂破潰。血液流出。又吾人當非常暑熱之際。或於暴風雨之先。往往全身覺疲勞不快者。蓋以溫熱。或由他原因空氣稀薄。大氣中濕氣充滿而減其重。因之壓於吾人身體之氣壓。非尋常之强度。存於體內之空氣。遂與外部不保平均。其空氣自有膨脹之勵勢。施壓於血管及神經上。致感覺不快。

35. 氣壓所以變更之故 於前節所述。大氣壓力之强。合水銀柱七十六糎者。對海面之氣壓言也。但各處氣壓時有不同。因之水銀柱之高。亦無一定。如於高處之壓力。比低處之壓力小。而大氣之密度。乃比例於壓力。故漸登高處空氣次第減疎。於非常之高處。密度遂甚小。蓋氣體不比液體。液體受壓難收縮。故以尋常之壓力。不能變更其密度。空氣則甚易壓縮。故其密度隨位置之高低而有不同。如第72圖示空氣之壓力及其密度因高而有變更之比。右端所載之數。乃以尺爲單位。示自海面上之高。其鄰所記載之分數。乃其處空氣之密度。對海面上空氣密度之比。又次行所記載之數。乃以粍示其處空氣之壓力。即如此圖所示。高與空氣之壓力。有一定之關係也。

又氣壓亦因氣候而有不同。蓋風者空氣之流動也。而空氣之流動。各處無一定。如於同水平面上之甲乙二處。大氣

第 72 圖



之壓力不平均則風由高處向低處吹是大氣之壓力各地帶刻刻變更者。

水之蒸發氣比純粹之空氣輕潔之空氣(含水氣量者多氣蒸者)比乾燥之空氣輕於雨天空氣中自多含水蒸氣因之氣壓小而水銀柱低反之於好天氣時氣壓大而水銀柱高。然則於好天氣時、水銀柱低者天氣將變之前兆也於風雨陰天之際、水銀柱高者將復好天氣之兆也。故欲豫知天氣之良否須經驗之水銀柱但以水銀柱不便使用之故因應用水銀柱之理而製出驗氣壓變更之器械

者不少。是名曰氣壓表於次節述之。

36. 氣壓表 (卽晴雨表)氣壓表者。測空氣壓力所用之器械也。凡測氣壓必有標準。如水銀柱七百六十粍名爲標準壓力又曰一氣壓之壓力。如謂瓦斯之張力有二氣壓者等於七百六十粍之二倍也。三氣壓者。等於七百六十粍之三倍也。餘倣此。

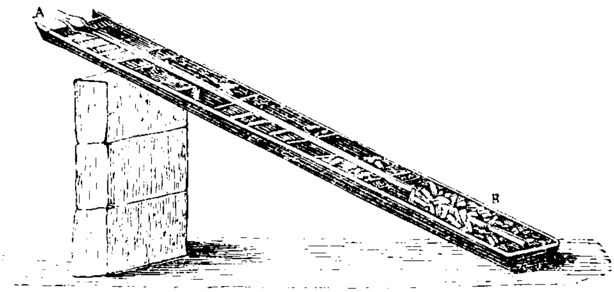
氣壓表別爲二種。水銀氣壓表及無水銀氣壓表是也。水銀氣壓表大約以長八十糎之玻璃管。充以水銀者也。究卽不外禿里賽離氏試驗裝置之變形。無水銀氣壓表。乃眞空之金屬管所製利用其彈性而作者也。

水銀氣壓表之要點 (一)水銀要純淨。否則以水銀之比重變。其高生差異。(二)管徑不可過狹。至狹只可四粍。否則水銀不易運動於上下。(三)管中毫不可有空氣及水蒸氣之留存。否則水銀之高不精密。(四)觀察氣壓表之高。要注意溫度蓋攝氏寒暑表昇騰一度。水銀當延長其原長之五千五百五十分之一也。

水銀氣壓表之製法 於玻璃管之內部。選無凹凸者。先以沸騰之硝强水洗之。次滌以蒸溜水。乾燥後。熔其一端閉之。又於他端作一球。後盛清淨之水銀於管。以慮有空氣及溼氣附著於管之故。如第73圖。以管靠於傾斜之鐵網AB之上。暖之以炭火。先置炭於下端强熱之使水銀沸騰。凡經五分時後。移炭於管之上部。漸使上部之水銀沸騰。遂

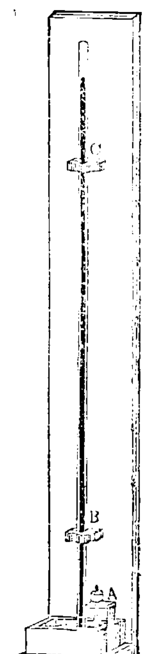
去全管之空氣及溼氣。待管冷後，截取管端之球。若管端水銀未滿。則加乾燥之水銀。使超管緣凸起爲度。遂以指頭壓塞管口。倒立於盛水銀之器中。

第 73 圖



水銀氣壓表之種類 (第一)固定氣壓表 常固定一處。不得移他處之氣壓表也。管與下部之器附以板。板固定於壁上。如第 74 圖。又器緣有小螺旋 A。以測定水銀柱之高。欲測大氣之壓力時先回螺旋。使其下端觸於水銀面，則螺旋之上端，與管中之水銀面之鉛直距離，以縮尺得測定之。次加螺旋之長。爲水銀柱之總高。

第 74 圖



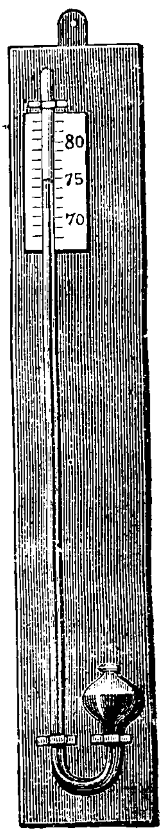
螺旋要鉛直。又螺旋之下端。欲使與水銀面相接。可動螺旋，使映於水銀之影。與螺旋之尖端相接觸。

第二室內用球狀氣壓表 此氣壓表即如第 75 圖所示。以長八十二糎直徑五粍之玻璃管。上端閉塞。下部屈曲於上方。其末端開口。如球盂形。此玻

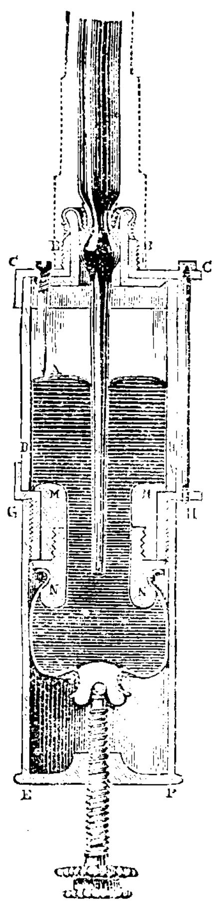
璃管使固着於板上。近於玻璃管上端之處。置小板。劃以度。示自球盂之水銀面。至管中水銀面之高。由是觀其度。得知快晴,晴,雨,風等之氣候。

但此種氣壓表。不甚精細。蓋以球盂中水銀面高低之變化。無以驗之。故或有氣壓表高者。實際却低。氣壓表低者。實際却高。又有以玻璃管之廣狹不等。亦不免無不準之處。不過以所差者微。於日用尙無甚礙。

第75圖



第76圖

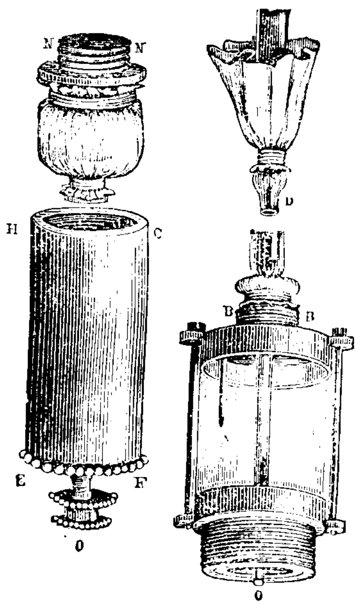


(第三)佛爾秦Fortin氣壓表　佛氏氣壓表。便於移動之器械內容水銀。其上部銅與木二重板。相接合以爲蓋。其中央有管BB。(第76圖)氣壓表之管通之入於其下壺之水銀中。中部DD爲玻璃之圓筒。上下之兩端鑲於CC,GH之金屬筒。更以螺旋固結之。(即如圖上之GH)下部有黃楊之圓筒。如MM.NN者是也。MM固着於中部之金屬筒

GH.NN。又以螺旋聯MM。其下有羊皮製之囊。即以爲容水銀之器底。外以螺旋O支之。此螺旋通於包圍皮囊之管底。(即EFGH)上頂於皮囊之下。若上下O。則器底亦上下。因之水銀之表面。亦隨之上下。測空氣之壓力。推上水銀面。使接於附屬蓋邊象牙針之尖端A。由此尖端得測水銀柱之高。又以一張之羊皮連續BB。與氣壓表之管。(第77圖)羊皮不透水銀。故即倒器。水銀無漏出之患。然水銀雖不能漏出。空氣却能透入。故直立器械。空氣遂透是皮。其壓力及於水銀面。

此氣壓表之外形。即如第78圖以銅管包氣壓表之管。以防其破損。此銅管之外面劃度。其零度恰與象牙之下端A相對。又管上之部分。前後相對有二條之空隙。藉以窺水銀之表面。由是沿此空隙。得測定水銀面之高。

第77圖



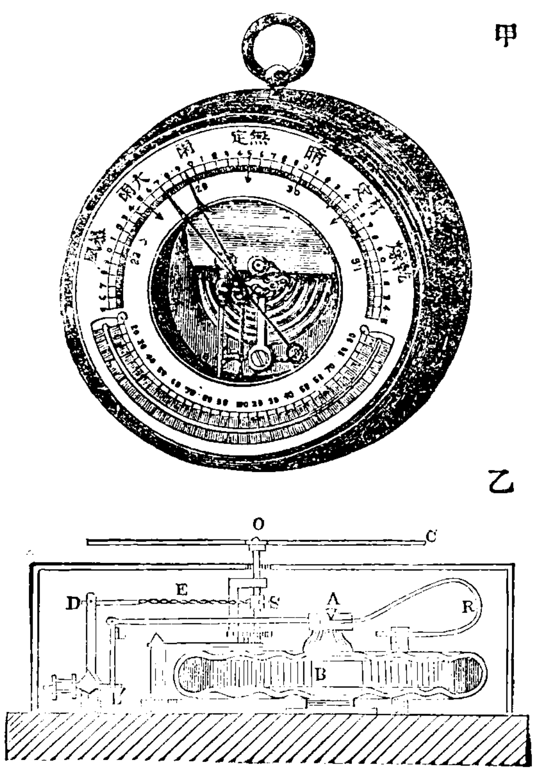
第78圖

移動此氣壓表。先徐回螺旋O。使水銀面漸昇。則器中之空氣。因受壓迫。透羊皮而逃於外。終至水銀充滿器中。今欲驗器中空氣已否出盡。但回螺旋即知之。蓋若回螺旋不上。則水銀必至充滿於器中。是即空氣出盡之證。於是回螺旋覺有抵抗。即知水銀已充滿於管。至水銀充滿時。縱傾倒其器。水銀毫不動搖。管自無破損之患。又空氣亦不入於管中。

無水銀氣壓表及其種類　無水銀氣壓表。不若水銀氣壓表之易破損。頗適於用。又於嚴寒之地。用水銀氣壓表。或有凍結之虞。無水銀氣壓表自無此患。但不若水銀氣壓表之精密。爲缺點耳。其種類有二如次。

第 79 圖

甲



乙

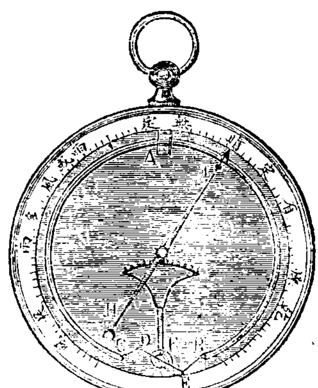
（第一）盒形氣壓表　甲圖乃示其外形。乙圖示其縱斷面。

今就乙圖而說明之。B爲金屬製

眞空之箱。其表面多凸凹。其下面固定於他器。當上面中心之處。有一金屬棒A。固着有彈性彎形之金屬板R。又A接續於ALLD之槓杆。D連於E之細鏈。此鏈捲纏於OC指針之軸OS。今氣壓增時。B之上面受氣壓。稍凹下。因之ALL'亦下。鏈DE少使OS迴轉。指針CC。遂應此運動體而轉移。

（第二）金屬製氣壓表　此氣壓表利用金屬之彈性者。以薄圓筒作橢圓形之管。捲之爲圓狀。塞其兩端。（第80圖）管之內部爲眞空。大氣之壓力若增。則管之兩端CB相近。壓力若減。則兩端相離。DE二點或推或引。回F之小車。因傳運動於在中央之齒輪。遂動H之針。

第 80 圖



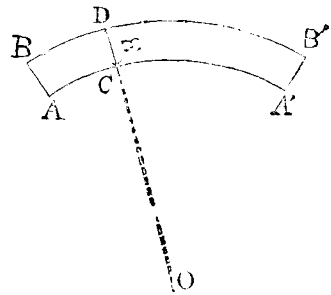
無水銀氣壓表。劃度之法。乃與水銀氣壓表比較而定者。如於水銀氣壓表若干度時。視此針之位置。亦劃以若干度。此氣壓表極小。得置之懷中。故便於攜帶。且其價比他種之氣壓表廉。故多用之者。

今說明其理。設管之一部分爲ABB'A'。設管屈曲之內半徑OC爲r。其外半徑OD爲R。兩半徑之差CD爲x。（第81圖）則有次之關係。

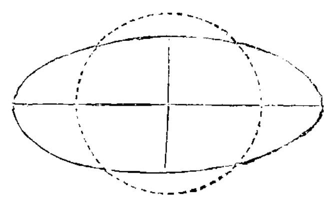
$$\frac{ACA'\text{弧}}{BDB'\text{弧}} = \frac{r}{R}$$

或　$\dfrac{BDB'\text{弧}-ACA'\text{弧}}{ACA'\text{弧}}=\dfrac{x}{r}$

第 81 圖



第 82 圖



今若外部空氣之壓力不變管內氣體之張力加或內部氣體之張力不變外部空氣之壓力減則管之容積增其直截面有變爲圓形之勢。而 x 大。若反之外部空氣之壓力不變內部氣體之張力減。或內部氣體之張力不變外部空氣之壓力加則管減其容積有變爲扁平之勢。而 x 小。但在前式左邊之弧皆不拘 x 之大小常同也。故 r 與 x 相比例而變故內部之張力一定。外部之壓力強。則 x 大時。r 亦大。而管之兩端因相遠而管之內部爲眞空者也故因大氣壓力之強弱管之兩端或相近或相離。

37. 用氣壓表測山之高　因登高處氣壓所以漸減少之故前已詳述茲更就氣壓低降之數與兩地鉛直距離之比而論之由推理上其低降之度。大約猶 10.5 米突。與 1 粍之比。蓋水與水銀比較。其重水比水銀輕 13.6 倍。故 1 粍之水銀柱。與 13.6 粍之水柱得相平均更比較水與空氣水比空氣約重七百七十倍。故 1 粍之水銀柱。欲與氣柱平均。不可不爲 1.36 乘 770 之數。卽如下式。

$$13.6 \times 770 = 10472mm = 10.472m$$

由是觀之。大約 10.5 米突之氣柱，與 1 粍之水銀柱必能平均。然則登 10.5 米突之高，氣壓表當下降一粍也明矣。更推此理，凡登高處，視氣壓表之度，亦得略測其距海面之高有幾許也。但此法不能十分精確，蓋以平地與高地空氣濃厚稀薄之度不同等，且以溫度有差異，氣壓不免有變化。不得簡單測之。須用次之公式。

$$X = 16000\left(1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right)\frac{H-h}{H+h}$$

式中 T 爲山麓空氣之溫度，H 爲山麓空氣之壓力，t 爲山頂之溫度。h 爲山頂之壓力。X 表兩處間鉛直距離米突之數。此式爲巴彼湼之公式。但此式只限測千米突以下者。若測千米突以上，須用拉布拉士之公式，即

$$X = 18393(1+0.002837\cos 2\lambda)\left(H\frac{2(T+t)}{1000}\right)\log\frac{H}{h}$$

X 爲所求之高米突之數，λ 爲其地之緯度，T, H 表於山麓之溫度與壓力。t, h 表於頂上之溫度與壓力。

38. 氣體之積與壓力之關係　同量之氣體，減其積，則張力增，增其積，則張力減，就氣體之積與張力之關係，於西歷千六百七十年之頃，法國之馬栗太 Mariotte 氏，及英國之波勒 Boyle 氏，同時發明此定律，其定律曰『溫度若同，某質量氣體之積，與其張力爲反比例。』

如某質量之氣體，其立積爲 V 時，其張力爲 P。立積爲 V' 時，其張力爲 P'，則定律得以下式表之。

$$\frac{V}{V'} = \frac{P'}{P}$$

或

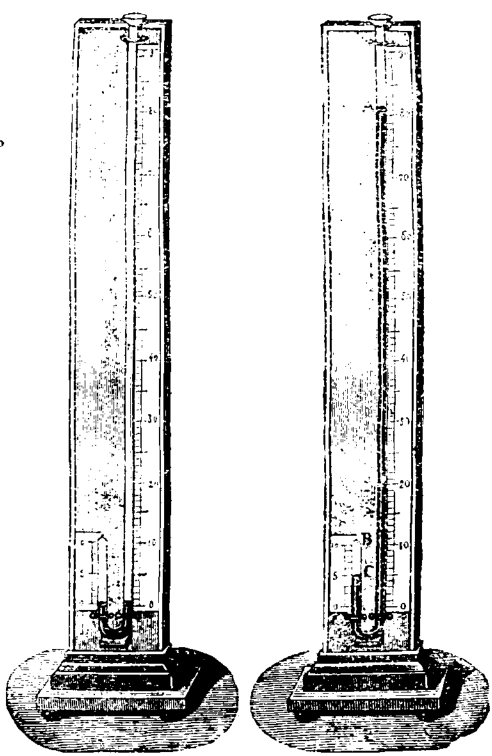
$$VP = V'P'$$

故波勒之定律得如次表之曰『某質量氣體之立積與其壓力之相乘積爲定數』

又某質量氣體之立積若變其密度亦變其變之數卽反比例於立積也明矣卽密度與張力皆反比例於立積者故曰氣體之密度與張力相爲比例者也

【實驗法】試驗波勒之定律所用之器械乃以玻璃管一枝折作彎管短方無口乃閉塞者長方有口以注入水銀之用茲由開放之一端注入水銀使兩管中水銀之表面同在一平面上此時短管內部空氣之壓力外部空氣之壓力相等也明矣遂由支管之板上所刻之度數得定空氣之積次更由開放之端注入水銀至短管空氣之積爲前之

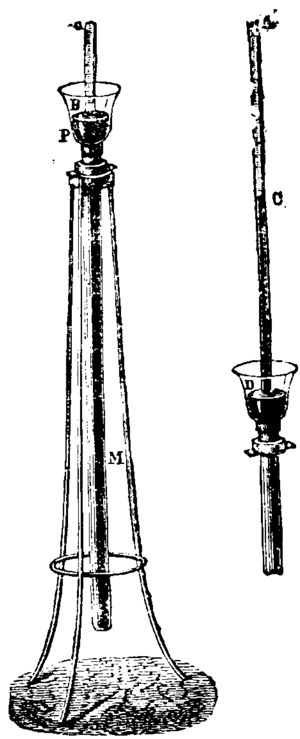
第83圖



二分之一時。長管之水銀面。恰至A。此時波勒之定律若確。則其張力當等於大氣壓力之二倍。茲於其壓於長方管口空氣之壓力。由他之氣壓表測水銀柱之高。卽等於此器兩水銀面之鉛直距離。是外部空氣之壓力。與水銀柱自A至C之壓力。恰等於空氣壓力之二倍。又開口之管若極長。則更注水銀。至短管空氣之積。爲最初之積三分之一時。其張力當爲三倍。

以上所記之實驗。乃就增壓力減容積者論之。次逆證其定律。卽就減壓力增容積者實驗之也。

第 84 圖



以一端閉塞之管A。注入水銀。留少量之空氣。以指塞之。如禿里賽離之實驗。倒插入深底之PM器中。管中之水銀面。與管外之水銀面。同一水平面時。測空氣之積。此時空氣之壓力。與大氣之壓力相等也明矣。今徐徐引上之則見其管內之水銀面。漸比管外之水銀面高。管內空氣之積亦漸張大。至空氣之積。等於前之二倍時。水銀所昇於管內之高CD。與管內空氣之張力。當等於外氣之壓力。故波勒之定律若確。則空氣之

張力。當等於初時張力之二分之一。卽等於外氣壓力之二分之一。故管中水銀柱之高。不可不等於尋常氣壓表水銀柱高之二分之一。今觀其傍之劃度。得知其果然。又若更引上管。空氣之積比最初之積之三倍時。則管中水銀所昇之高。當等於氣壓表之三分之二。蓋水銀所昇之高。加空氣之張力。等於外氣之壓力。故空氣之張力。等於外氣壓力之三分之一。卽最初之張力之三分之一也例如外部空氣之壓力。爲七十六糎。今上昇於管中水銀柱之長CD。爲五十七糎。則管中空氣之壓力。卽十九糎。(76－57)＝19然則管中空氣之容積。當爲原容積之四倍。其張力爲四分之一也明矣。由是觀之。凡氣體張力減時容積必增。

$\boxed{\text{備考}}$ 馬累太之定律。於各氣體果悉合與否。又加大壓力時。其所減却之容積。果皆反比例於所加之壓力與否。是亦重要之問題。爲當世學者之所研究者也。尤以學者中所研究此問題最深者。如杜布勵。秋朗。及亞刺哥。黎高等。

杜布勵以前。非無研究之之學者。但皆賛成此定律之正確耳。至杜布勵始斷定各種氣體受同壓力者。其收縮有不同。若以空氣爲標準。則亞硫酸。阿謨尼亞。靑氣(卽衰氣)等。比空氣收縮强。反之輕氣比空氣收縮弱。然則若空氣果得合此定律。則他氣體不合此定律。又若以他氣體中得合此定律。則空氣不合此定律。故馬累太之定律。不能適合於各氣體也明矣。

秋朗及亞刺哥二人。加壓力至二十七氣壓。測空氣之收縮。僅有些微之差。此差大約爲二人觀測之誤。因就空氣加此壓力。得確信此定律。

黎高更爲精密之試驗.壓力加至三十氣壓.測空氣淡氣炭輕氣等之收縮.據其測定之結果.空氣淡氣各氣體.壓力增時.比定律所言收縮殊甚.獨於輕氣壓力雖增.收縮比定律所言反少.又易變液之氣體.違定律特甚.如炭氣施十五氣壓之壓力.其積減初容積之十六分之一.又如亞硫酸與阿謨尼亞.僅加以二氣壓之壓力.其積已不能符合定律矣.

近年楷搖底及亞馬卡.各研究此問題.楷搖底加壓力至水銀柱之百八十二米突.漸次測淡氣之收縮.亞馬卡遞加壓力至三百二十七米突餘.就淡氣試驗此定律.二人所得之結果.殆相符合.即如楷搖底之試驗所加之壓力.約至六十米以下.與黎高所示之試驗略同.比定律所云收縮殊甚.亞馬卡之試驗所加之壓力.至四十七米以內者亦然.但若過此壓力.則生反對之現象.收縮之度.反比定律所云者弱.恰如黎高之試驗輕氣者然.亞馬卡又以同樣之法.就空氣養氣輕氣施試驗.與淡氣殆同結果.

上所載乃就壓力一氣壓以上者而言.若壓力甚弱.輕氣及他氣體.皆比馬梨太定律所云收縮甚強.此蓋就西爾頓士多倫所實驗者也.

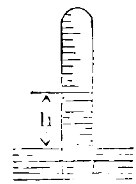
又萌德列夫及蒋米廉二人試驗之結果.所有氣體.恰與輕氣受常壓者同.收縮之度皆比定律所云者弱.又亞馬卡專就關於空氣之結果.得適合馬梨太之定律.據前各學者所試驗之結果.各互相矛盾.可見此問題仍未決定尙待研究也.

要之謂一切氣體.皆適合馬氏之定律.固無是理.若不容易變液之氣體.所增壓力不大.亦得符合此定律.即有些微之差.可棄而不算.故通例計算此定律.均看作氣體壓力變時.積隨之增減也.

標準壓力氣體之積　凡比較氣體之量.又比較其積之

大小。欲知其多少。非各氣體之壓力相等。則不能。實際使氣體之壓力相等。雖非甚易。用馬梁太之定律。得計算各氣體受一定之壓力者。(例如受七百六十耗之壓力)所佔之積。譬如以等積劃度之管入氣體。倒立之盛水銀之器中。(第85圖)管中之水銀昇至h耗。此時大氣之壓力。以晴雨表。得測爲H耗。此氣體之壓力。等於H－h。又其積V。看管之度得知之。若以張力七百六十耗。氣體之積爲V。則據馬梁太之定律。得計算V'。即

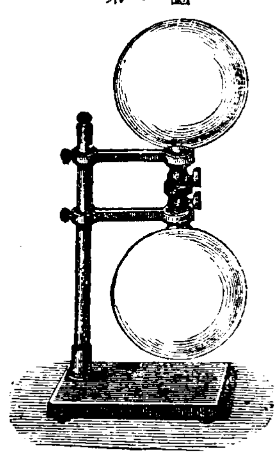
第85圖



$$V'=V\cdot\frac{H-h}{760}$$

39. 氣體之混合　馬梁太之定律。不止適合單一之氣體。即衆多混合之氣體。若不起化學作用者。亦能符合此定律。證明此事實。係由柏爾多列之試驗。柏爾多列嘗以容積相等之二玻璃球。球口裝螺旋。得互相連合。(第86圖)其一盛炭酸。一盛輕氣。使兩氣體之壓力相等。連繫兩球如圖形。先閉捻栓。斷其通路。安置於靜處。以重之炭酸置下。輕之輕氣置上。因其重之故。兩氣體如不混和者。但若開捻栓數時之後驗之。兩氣體之重。縱或有差異。而上下兩球各氣體同擴散。混合體之張力。常與

第86圖



最初各氣體之合張力無異。蓋就一氣體言之。不論他氣體之有無。必擴散於兩球之全體。若果無他氣體。則依馬梁太之定律。其張力自必減少。今也有他氣體在。則混合體之張力。自不能不等於各氣體張力之和也。

又不止限於二種之氣體。卽多氣體亦然。譬如其立積爲 v, v', v''…… 其張力爲 p, p', p''…… 入 V 容積之器中。先假定作僅有一種之氣體。無他氣體者。則依馬梁太之定律。各氣體之張力 $\frac{vp}{V}, \frac{v'p'}{V}, \frac{v''p''}{V}$, ……。而以各氣體混合之。

故混合體之張力 P。等於以上各張力之和。故

$$VP = vp + v'p' + v''p'' + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

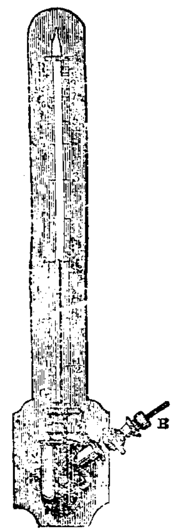
是爲關於混合氣體之定律。

40. 壓力表 壓力表者。測某處氣體之張力。或蒸氣張力之器械也。其種類不一。列之如次。

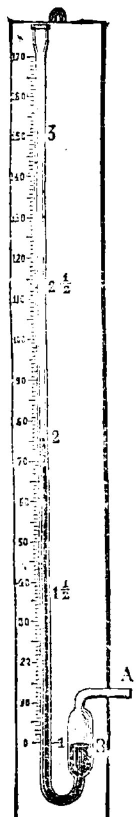
$\boxed{\text{開放壓力表}}$ 開放壓力表。如第87圖乃以兩端開口之長玻璃管爲之。下端盛水銀。上端開放於空氣中。水銀之下端彎曲之部。通於所測壓力之氣體。若蒸氣與外部空氣之壓力相等。則兩管之水銀在同一水平面上。若蒸氣之力增時。則長管內之水銀上昇。觀管之右邊所載之數。卽知蒸氣之張力。有幾氣壓也。

$\boxed{\text{閉鎖壓力表}}$ 此壓力表所以異於開放壓力表者。用短管密閉其上端。且其中置乾燥之空氣。(第88圖)蒸氣之壓力若增。則水銀昇於上端。管中之空氣受壓縮。由是管內空氣

第 88 圖



第 87 圖



之壓力與水銀柱重之和。等於蒸氣之張力。水銀之昇愈高。空氣之張力亦愈增。故蒸氣之張力雖增加。水銀之昇騰常不一。因張力愈增。水銀之昇愈少。故管之上方所劃之度極細。看度時。易生錯誤。不若前之開放壓力表之劃度明瞭。得一望而知其壓力之數。但此器械小。故便於攜帶。此器械劃度之法。乃與開放壓力表。比較而刻劃者也。

或又由直接計算。得劃度。管中空氣之壓力。與壓於外器水銀面之力。共爲七百六十粍時。則管內外之水銀面。當同一平面。茲以由此表面。至上端之管長爲 h。以管內部之半徑爲 r。則此時空氣之立積爲 πr^2h。氣體之張力增至 n 氣壓時。以水銀昇於管中之高爲 x。則空氣之立積爲 $\pi r^2(h-x)$ 同時以水銀昇於管中，則器內之水銀面必低降。以其低降之數爲 y。則昇於管中水銀之積。與器中所低降水銀之積必相等。故得下式。

$$\pi r^2x=\pi(R^2-r^2)y$$

R 者表器之半徑。由上式得下式。

$$y=\frac{r^2}{R^2-r^2}\cdot x$$

又器中之水銀面。與管內之水銀面。其高之差爲 $x+y$。故管中空氣之張力。等於由 n 氣壓減 $x+y$ 者。即以 y 代上之值如次。

$$n\cdot 760-\left(1+\frac{r^2}{R^2-r^2}\right)\cdot x$$

或

$$n\cdot 760-\frac{R^2}{R^2-r^2}\cdot x$$

管中之空氣.依馬梟太之定律.各立積與張力之相乘積當相等.因得次式.

$$h\cdot 760=(h-x)\left(n\cdot 760-\frac{R^2}{R^2-r^2}x\right)$$

或

$$h=(h-x)\left(n-\frac{1}{760}\cdot\frac{R^2}{R^2-r^2}x\right)$$

茲以書法簡單之故.得以 $\frac{1}{760}\cdot\frac{R^2}{R^2-r^2}=K$.蓋以 R 與 r.皆爲已知數.故 K 亦已知數.由是上之方程式得如次書之.

$$h=(h-x)(n-Kx)$$

解此二次方程式,得 x 之值如次.卽

$$x=\frac{1}{2K}\cdot\left(n+Kh\pm\sqrt{(n+Kh)^2-4Kh(n-1)}\right)$$

x 固無二值之理.須由推理上採其一.而棄其一.若 $n=1$ 時.則 x 之值.不可不等於零.何則.其壓力爲一氣壓者.管內外之水銀面.當在同一水平面故也.就此方程式思之.根號之前.若取正號之符號.則 x 之值爲正數.是不合於理.又若取負數.則 x 之值恰爲零.故上之方程式.當用負號.卽 x 之值如次.

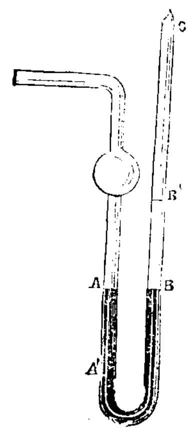
$$x=\frac{1}{2K}\cdot\left(n+Kh-\sqrt{(n+Kh)^2-4Kh(n-1)}\right)$$

由上式順次.代 n 之值以2.3.4.………等.則 x 之值得定爲 x' x'' x'''……….因以一氣壓之水銀面爲起點.由之於 x' x'' x'''………之處.劃2.3.4.………等度.由是水銀之頂點.若在2之劃度之處.則氣體之張力爲二氣壓.水銀之頂點.若在3處.則氣體之張力.爲三氣壓.餘可推知.

此壓力表之形.亦有如圖所示.成U字形者.(第89圖)則開放之管端.

受所測定之壓力。他端內存乾燥之空氣。壓力七百六十耗時。水銀之表面A,B同在一水平面。壓力若增至n氣壓。則一方A降至A′。一方B昇至B′。此AA′或BB′。若皆爲x。則前之y等於x。因於前式$x+y$。得代以$2x$。餘與前同法計算。得x之值如下。

第89圖

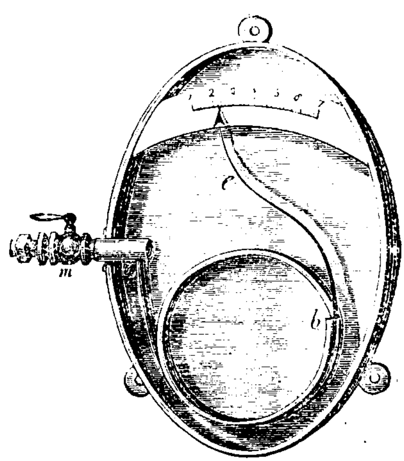


$$x=\frac{2h+n.760}{4}-\sqrt{\frac{(2h+n760)^2}{16}-\frac{h(n-1)760}{2}}$$

其劃度如前。

金屬製壓力表　此壓力表內鑲橢圓形金屬製之管。曲成渦旋狀。如圖形。其一端B依A捻栓之媒介。通於所測壓力之氣體處。(第90圖)其他端D。得動於圓弧前劃度處。氣體之張力若增。則渦旋開。針之D端。因之動於圖上之右方。張力若減。則管仍因彈力復舊形。D端移於圖上之左邊。因視D端之位置。得知氣體之張力。此器械劃度之法。乃與已劃度之壓力表比較而劃也。

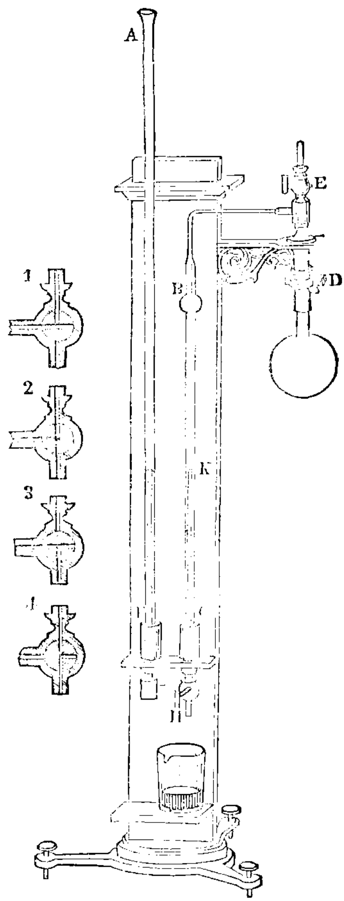
第90圖



此器械測強張力時。多用之。

41. 立積表 立積表。卽如其名所定。測物立積之器械也測物之比重。照常法要浸於水但如粉末類不能浸於水者因之測此等物之比重。但測其立積可耳。故立積表之必要者爲此也。

第91圖



以二條之玻璃管A,B。插於鐵之U字形FHC。第91圖B管之上端。折成直角。於D處連接玻璃球。開E之捻栓則得與外部之空氣連通。H者卽具三徑之捻栓也。迴轉之得如(1)(2)(3)(4)任意定其位置。以上所云。乃立積表構造之要點也。捻栓若置(1)之位置。則A,B兩管相交通。若置如(2)之位置。則兩管不止可以相通。且通外氣。故於管中若有水銀。則水銀由兩管同時流出。次若使其所移之位置。如(3)形。則A管與外氣通。塞通B之路。B管遂與外氣隔絕。故管中若有水銀。則A之水銀流出。B之水銀不流出。又若置之如(4。)則水銀由B管流出。A管水銀。因被塞而不

流。又B管有標點B,K。茲以二點間之容積爲v。由B點以上之部分與球容積之和設爲V。欲求V之積，須先求v。欲定v之積。當盛水銀至B點，置H如(4)之位置，使漏B,K二點間水銀，遂以水銀之比重，除其重。所漏出水銀之積。卽得KB二標點間之積也。又欲定V。置H如(1)之位置。開放E，由A之上端，注水銀。使其表面至B點。然後閉E。則在球與管間空氣之積。爲V。其壓力等於大氣之壓力也明矣。以之爲H。次由兩管漏水銀，使其表面至K。則空氣之積增爲$V+v$。其張力自減，張力所減之數，乃空氣之壓力，與兩管水銀表面高相差之差。此高之差以縱尺測之，得h。於前後試驗，空氣之質量，固無變易，故據馬累太之定律，

$$VH=(V+v)(H-h)$$

故
$$V=v\frac{H-h}{h}$$

若球中置立積x之物體。則前之V爲$V-x$。餘無異於前。故若以水銀之表面降至K時。兩面高之差爲h'。則

$$(V-x)H=(V-x+v)(H-h')$$

卽
$$x=V+v-v\frac{H}{h'}$$

遂得定物之立積，旣得定其立積。更測其重。則容易算出其比重。

第三章之問題

1. 空氣之壓力。等於水銀之30吋時。試各舉以下之數。30吋卽標準壓力也。

(1) 及於1平方吋之壓力如何。

(2) 及於1平方糎之壓力如何。

(3) 及於1平方糎之壓力。以功示之如何。

2. 有製氣壓表用之直管大1平方吋。滿盛以水。倒立於水槽。由水面至管頂之高。爲8·5吋。問管中之上壓力。

但空氣之壓力。等於水銀柱30吋之重。

3. 當行禿里賽離之實驗。管內水銀之上部殘少量之空氣。此空氣若等於水銀柱之高46糎。當占20立方糎之容積。若等於水銀柱之高10·8糎。則占9立方糎之容積。問當時實驗空氣之壓力如何。

4. 有同大U字形之管。一端有口。一端無口。使兩管之水銀面至同高時。閉管中水銀面上空氣柱之長。有15糎。但若入之排氣鐘內。排除其空氣。使薄弱之。則閉管中之水銀面上空氣柱之長。增至19糎。問鐘內空氣之壓力。及閉管中空氣之壓力各幾何。

但外部空氣之壓力爲一氣壓。

5. 氣壓表用之直管。注加以水銀。上部餘10立方糎之空氣。倒立於水銀槽中。管中空氣漲至25立方糎。水銀昇至45·8糎之高。求外部空氣之壓力。

6. 有長62糎氣壓表用之直管。下端之口。垂直插入水銀中。使沉至閉端與水銀面一致時。水銀浸入於管內之長有幾何。

但外氣爲一氣壓。

7. 有直徑1寸之氣泡。在海底深26.0米之處。浮上於海面。求瞬間之直徑。

但空氣之壓力76糎。海水之比重1.02。水銀之比重13.6。

8. 有一端閉塞之直管。長60糎。閉口之端向下鉛直押入海水。使海水浸入其管之三分之一時。問此管當沉入至幾何之深。

但空氣之壓力76糎水銀及海水之比重各爲13.6。及1.03。

9. 有高18糎。口徑6糎之玻璃鐘。滿盛以水銀使倒立於他之水銀面。要以幾何之力支持之。

但空氣之壓力77糎。

10. 於密閉圓筒內之中央。置以活塞時。兩面之空氣同一分量。又使其活塞更壓下1吋之處時。其兩面空氣壓力之比當如何變化。

但圓筒之長爲10吋。

11. 以5氣壓之輕氣2立方粉。半氣壓之淡氣3立方粉。4氣壓炭養氣4立方粉。混入3立方粉之器。器內之壓力有幾氣壓。

12. 長50糎。截斷面積5平方糎。圓筒之口緘以380克之

活塞當下至幾何粍始與器內之氣壓平均。

13. 空氣之密度不論高低若悉假定爲與海面同一者。則其高當幾何。

14. 氣壓表之水銀柱。若比在海面之水銀柱低下1粍。則離海面有幾何之高。

15. 氣壓表用之直管遺留空氣管內外之水平面同高時。空氣所佔之長爲 h 粍。今管引上 g 粍。水銀當昇至幾何之高。

16. 用大一平方粍之直管行秃里賽離之試驗。眞空爲15粍今導之以一立方粍之空氣水銀柱降下幾何。

但空氣之壓力爲一氣壓。

17. 有一固體在眞空中之重量若爲W。在水中之重量若爲W'則在 d 密度之空氣中。當爲 $W-(W-W')d$。試證明之。

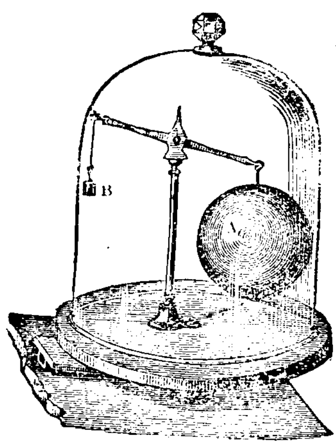
18. 有鉛一塊。在空氣中秤之，爲7·86克。在水中秤之。爲7·19克。在火酒中秤之。爲7·33克。又樫之一片。在空氣中秤之。爲13·21克。茲以鉛與樫相結。而秤於水中。得重量4·87克由之求鉛樫及火酒之比重。

第四章 流體器械

42. 空氣之上壓力 前所載阿機美狄之原理。理論上之證明。亦適合於氣體也明矣。故在氣體中之物體。受壓力其壓力等於物體所排除氣體之重。由下向上。且作用於所排除氣體之重心。

在空氣中之物體。受壓力時。依次之試驗得知之。於小秤竿之兩端。繫重相等。而大甚異之物。例如懸內部空虛之圓球A。與充實之分筒B。置竿於水平之位置。使平均之。(第92圖)次入之於排氣鐘內。抽出空氣。則竿失平均。而大物下。推想其理。初二物在空氣中平均時。實非其重平均也。所平均者各爲視重。卽等於由其實重減去其物所受壓力之殘餘者平均也。今抽去空氣。省其壓力。故前受大壓力者下降。球下而圓錘上。

第 92 圖



由理論上論秤物之重所當注意者 於空氣中秤物之重。物與分銅均受空氣之壓力。故不能得實重。因之必思有以更正之。其法如次。

今以物體之實重爲 x。以平均之分銅所記之重爲 P。P 者分銅之實重。卽表於眞空中之重也。物體於空氣中平均時。其視重卽等於由實重減空氣之壓力。今以式表之。以物體之比重爲 D。以造分銅物質之比重

爲 D'。以空氣對水之比重爲 a。則物體之積爲 $\frac{x}{D}$，物體所排除空氣之重爲 $\frac{x}{D}\cdot a$。物體之視重爲 $x-\frac{x}{D}\cdot a$。即 $x\left(1-\frac{a}{D}\right)$，又由同樣之理。分銅之視重。爲 $P\left(1-\frac{a}{D'}\right)$，故得下式。

$$x\left(1-\frac{a}{D}\right)=P\left(1-\frac{a}{D'}\right)$$

故
$$x=\frac{1-\frac{a}{D'}}{1-\frac{a}{D}}\cdot P$$

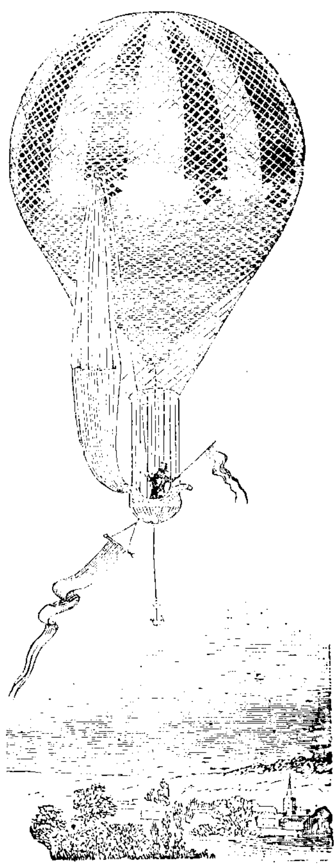
但比重 DD'。爲已知之數。又空氣之比重。於溫度零度壓力七百六十粍時。爲 0.0013。溫度或壓力變時。雖或有多少之差。但此差比之固體或液體之重甚微。故得看作爲無變者。即用此 0.0013 之數可也。然若論氣體之重。則各氣體重與空氣之重略同。故空氣比重之差。所及之影響決不少。不能常用此數。當實行試驗。求空氣之比重。代入前式中之 a。但此事由後熱學論之。

43. 輕氣球 Balloon 輕氣球以堅緻之布帛爲之。外漆以樹膠或貼附橡皮。使不漏氣體。製爲袋囊。如球形。下留狹小之管口。由之送入比空氣輕之氣體。如輕氣等。球囊漸擴張。由是球囊比所排却空氣之量輕。故藉空氣之壓力。球囊之下。卽繫以附屬物。亦利用此壓力得昇騰於空中。充於球之氣體。若用輕氣。費用殊多。有時或代輕氣以石炭氣。或入以通常之空氣。下口置火。使內部之空氣膨脹。致輕薄。但用暖空氣之法。則試驗者乘於籃中。須不絕燃火。以熱球內之空氣。難免無罹火災之患。古來試驗罹此火災者不少。故用石炭氣者爲多。

輕氣球之上昇力 輕氣球所受空氣之壓力。即推球於上方之力。與球及附屬於球各物重之差。名爲『輕氣球之上昇力』

輕氣球離地。不可過於膨脹。乃以留昇高時。更當膨脹之餘地也。蓋達於高處時。空氣之壓力漸弱。故球內之氣體過膨脹時。有破球之患。蓋其自由膨脹之度。因昇愈高。其立積反比例於外氣之壓力。然則球昇高時。其立積愈大。因之上昇力愈強。上昇之速度將愈大。其實不然。何則。球所排除處之空氣。其密度薄時。張力自弱。故球所受之壓力。即以立積乘密度之積。故毫無附屬物之輕氣球。其袋囊如不少透出氣體。其張力常同也。又即有附屬物。其上昇力單因附屬物及袋囊等一切氣體以外之物。所受壓力之減少。雖或有些微變更。究其所變更有限。故上昇力得看作無變者。惟有時氣體不免透過袋囊而出。外氣因入於球中。由是內外之氣體交換。所入之空氣。比漏出之輕氣

第 93 圖



重且其積漸收縮。即密度變小。故因之輕氣球之重增。壓力減。上昇力遂薄弱。

高昇空中時、或更使其昇騰。或欲使下降、坐於籃中之人。得任意操縱之。但使其昇至一定之高、近傍須有目標、以防其昇至過高。有礙生命、故坐於籃中之人、要帶一氣壓表、由是視其氣壓表之下降、得判定之。如欲其上昇。投棄所蓄之砂囊、以減其重、又若欲使其下降、則開附於球上部之瓣。使漏出氣體、瓣繫以長繩得引開之。

計算上昇力之法　今就使用輕氣之輕氣球。計算其上昇力。於溫度零度。壓力七百六十粍時。空氣一立方粉之重。爲 1.293 瓩。但若以空氣某積之重爲一。則同溫度同壓力輕氣之重爲 0.0693。故溫度零度。壓力七百六十粍時。輕氣一立方粉之重爲 1.293×0.0693 瓩。今入於球中氣體之積。以立方米計之爲 V。其張力等於外氣之壓力 H。又以氣體以外一切物體之積爲 v 立方米。以其重爲 P。且以計算簡單之故。以全體之溫度爲零度。

入於球之氣體。其張力變爲七百六十粍時。因馬梨太之定律。其積爲 $V\cdot\frac{H}{760}$，故其重爲 $1.293\times0.0693\times V\times\frac{H}{760}$ 瓩。球所排除空氣之重。由同樣之理。爲 $1.293\times V\times\frac{H}{760}$ 瓩。又氣體以外之物。所排除空氣之重。爲 $1.293\times v\times\frac{H}{760}$ 瓩。故上昇力以瓩爲單位。當得下式

$$1.293(1-0.0693)V\cdot\frac{H}{760}+1.293\times v\frac{H}{760}-P$$

P 及 v 欲作輕氣球時。當豫知者也。因之上昇力若爲已知之數。如 A。則欲求球之積若干。可以前式書等於 A。作方程式解之。得定 V 之值。V

乃所入於球之氣體立方米之數也.球之積.因前所云防其破裂之故.當比 V 稍大.約其三分之四以上.

又石炭氣之重.與同溫度同壓力同積之空氣重之比.若該空氣之重爲一.則石炭氣之重爲 0.55, 故用此氣體造輕氣球.則其上昇力以延表之如次.

$$1{\cdot}293(1-0.55)V\frac{H}{760}+1{\cdot}293\times v\frac{H}{760}-P$$

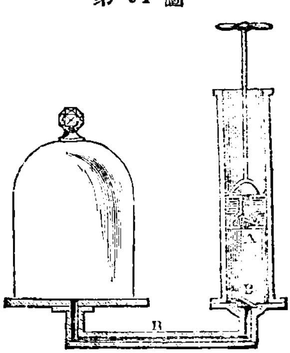
此數比用輕氣上昇力之數小.故 Pv 若同.要使得同一之上昇力.V 不可不大.因之需用之材料不得不多。但石炭氣比輕氣價甚廉.故比較的用石炭者爲多.

輕氣球之用途及其歷史　輕氣球於軍事上多用之者。西歷一千八百七十年至七十一年之間法德戰爭之際嘗利用輕氣球以探敵軍。茲就輕氣球發明以來記述其沿革之大略。即一千七百八十三年之六月發明輕氣球者爲莽哥爾灰耶 Mongolfier 氏兄弟充塡受熱之空氣於球囊飛揚於法國亞那遑 Anonay 地方。又同年九月謝魯 Charles 氏。始製充塡輕氣之輕氣球飛揚於巴黎。又同年十月霏拉多爾德羅這 Pilatre de Rozier 氏乘莽哥魯灰耶所創造之輕氣球。昇登於空中。初坐輕氣球蓋自霏氏始也。其後霏氏更與這爾萌 Germain 氏謀共昇登於空中。不幸至四百米突之處。因失檢。球內發火兩氏遂墜落於空中。受傷重而至於死亡。竟不能識別其身體。一千七百八十五年之正月。布朗謝爾 Blanchard 氏復駕輕氣球發自法蘭西。遂越海峽而達於英

國。一千八百六十二年九月五日之正午。英國物理學者古列施 Glaisher 及氣船師柯古士威爾 Coxwell 氏。入九萬立方封士之氣體於輕氣球。昇騰空中。此時半天陰雲遮蔽。不見天日。兩氏駕輕氣球。通過雲層之後。則天日全清朗。由球中臨望下界。煙雲密蔽於高山之頂。自發氣球至經過二十五分間之後。竟與歐洲有名之高山莽布朗同高。即達四千八百米突。更除却重物。過三十六分時。已與南亞米利加之高山秦波拉曹同高。即昇至六千七百六十米突。又四十六分時之後。昇至八千一百二十米突。雖喜馬拉耶之山顚無以過之。當時於地上空氣之溫度。爲攝氏十五度。兩氏昇至該高時。其溫度已爲零下十三度。兩氏坐氣船上時。曾攜二鳩而昇。一鳩於四千米突處放下。如紙片放下空中之狀。至八千米突。又將其餘之一鳩放下。恰如下墜石塊之狀。可想該處空氣之稀薄也。此時兩氏精神恍惚。覺四肢不能隨意運動。計其達於最高處。距地面一萬一千米突之位置。

44. 排氣器 排氣器者。排除某器中空氣之器械也。其構造大略如左。

第 94 圖



以玻璃或金屬造之圓筒。有上下運動之活塞。(第 94 圖)活塞之下有一孔。以由下向上之開瓣 A 塞之。圓筒之底又有一孔。亦鑲以瓣 B。其開瓣

之方向與A同，亦由下向上者。此孔在R管之上端。R板以金屬或玻璃製者，達於圓板中心之處。欲抽却物體外部之空氣時，載之圓板之上。以玻璃鐘蓋之。或欲抽袋內瓶內之氣，則以其袋口觸中央之孔。

今欲知此器械作用之法，假定活塞爲密着圓筒之底圓板之上。如圖所示。有玻璃鐘。引上活塞，則其下爲真空，鐘中之空氣以其張力。開在圓筒之底瓣B，氣充入圓筒之中。於是下活塞則圓筒中之空氣，以其張力閉B瓣。不能再返於R管中。因其積小張力增，遂以勝過外部空氣之壓力，開A而逃於外。再引上活塞，仍與前同理，鐘中之空氣，推開B入於圓筒中。又下活塞，則圓筒中之空氣積小，故增張力，至其張力比外部之壓力大，仍如前開A而逃於外。以下循是法，凡上活塞，鐘中空氣之一分，入於圓筒中，活塞下，則入於圓筒中之空氣逃於外。故活塞一度上下，每得抽出鐘中之空氣也。茲欲求鐘中空氣張力減少之數，合鐘之積，與R管之積，表之以V。表圓筒之積爲v，又初時鐘中空氣之張力，與外部空氣之壓力相等，設爲H，活塞始在圓筒之底時空氣之積爲V。其張力爲H，至一度引上活塞，空氣之積爲$V+v$，其張力變爲H_1，則依馬榮太之定律，得下式。

$$\frac{H_1}{H}=\frac{V}{V+v}\qquad 故\ H_1=H.\frac{V}{V+v}$$

此張力，乃活塞一上再下至圓筒之底時，鐘中所有空氣之張力也。故活塞一度上下時，空氣之張力，等於以始之張

力乘$\frac{V}{V+v}$之分數。但此事於始之張力。不限於H時。如初處一度上下活塞。空氣之張力變爲H_1。則二度上下活塞空氣之張力等於H_1乘$\frac{V}{V+v}$之數。卽等於以H乘$\left(\frac{V}{V+v}\right)^2$者。由同理活塞$n$回上下後。空氣之張力$H_n$如次。

$$H_n=H.\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$$

$\frac{V}{V+v}$之分數。以比1小。故其n乘羃。如代數學所證明。n愈增。該分數值愈小。不論n至如何大。則該分數至無限小。故以此羃數乘H。卽空氣之壓力H_n之數。關於活塞上下之回數。其回數愈增。空氣之壓力漸弱。

但實際卽製造如何精密之器械。活塞不能密着於圓筒之底。其間不免有小空隙。因之縱上下活塞若干回。活塞來於圓筒之底時。與外部空氣同壓力之空氣。常存於其空隙中。此活塞一上。則此空氣擴於圓筒中。尙有微弱之張力。如f。茲假定B瓣爲無重。鐘中空氣之張力f强時。則藉其張力。尙能開B入圓筒中。若至上下之力相等。則鐘中之空氣不能入於圓筒。自此以後。不能再抽空氣。今以此空隙之積爲v，則此內之空氣充於圓筒中時之張力f。由馬梁太之定律得定之。卽

$$\frac{f}{H}=\frac{u}{v}$$

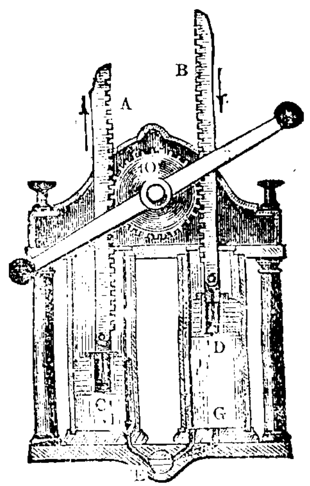
故
$$f=H\frac{u}{v}$$

由此式觀之。u愈比v小。則此極限之張力當亦小。

$\boxed{\text{雙筒排氣器}}$ 外部空氣壓於活塞上面之力。如前所

云。每平方糎爲1·033瓩。初時活塞下面。(卽鐘內)所受空氣之壓力。與外部空氣之壓力。上下無甚差異。故祗以小力舉活塞可耳。但若鐘內空氣之張力減少。上下壓力之差漸增加。故舉活塞。漸要以强力。茲以避此困難之故。併置相等之圓筒CD。鑲以二活塞。下設E之導管。共同通於同一之鐘。(第95圖)活塞之柄AB。共具齒。與其間之齒輪相嚙。回齒輪時。活塞更相升降。若是則二圓筒不論鐘內空氣之張力如何。引上一活塞時。雖有外部空氣壓於活塞之面。而同時外氣以等力推下他活塞。故藉他活塞之助。其作用相平均。外氣壓力毫不及影響。惟阻礙上下活塞之力。僅器械諸部之摩擦耳。

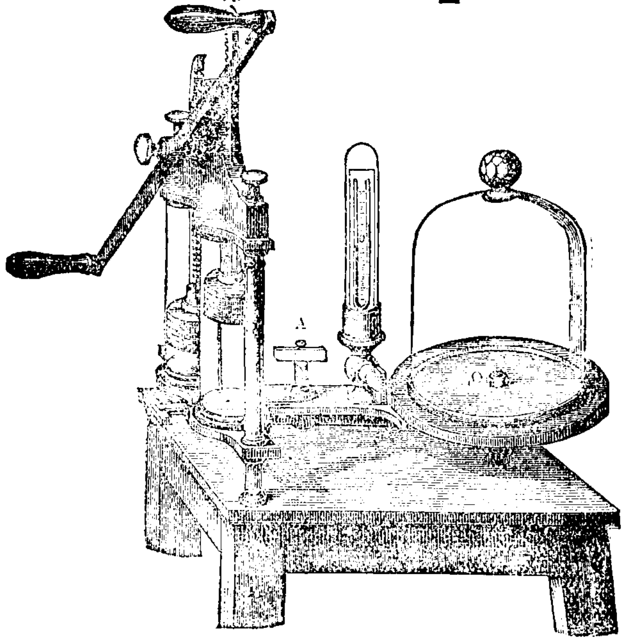
第95圖



附屬品　此器械安置於堅牢之臺上。(第96圖)於兩圓筒之底。共通管之中點。如前圖E處。聯接以管。達於圓板之中央點O。圓板乃以玻璃或金屬薄磨至極平者。鐘緣亦薄磨平滑。使用時塗脂於鐘緣。置之圓板之上。因鐘內之空氣減。大氣壓鐘於圓板。故鐘密合圓板。無空氣侵入之患。

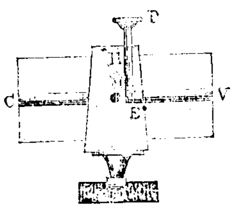
鐘與圓筒之通路。有捻拴A。間有細徑貫通之。(第97圖)又與原通路成直角。別有通路EH。由外以P拴得閉之。此

第 96 圖

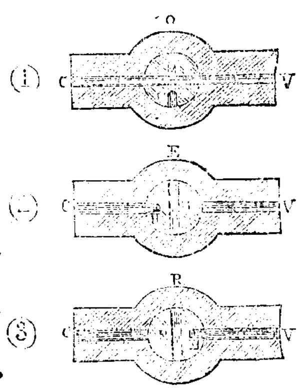


捻拴如第98圖所示。取種種之位置。若其拴置如(1)之位置時。由M徑通鐘U,及筒C。則得抽鐘內之空氣。移之如(2)之位置時。鐘與圓筒隔絕。圓筒C由EH與外部相通。更回拴至(3)之位置。鐘V由EH得與外氣通。去P(第97圖)則空氣入於鐘內。鐘得任意移動。

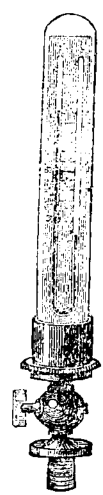
第 97 圖



第 98 圖



第 99 圖

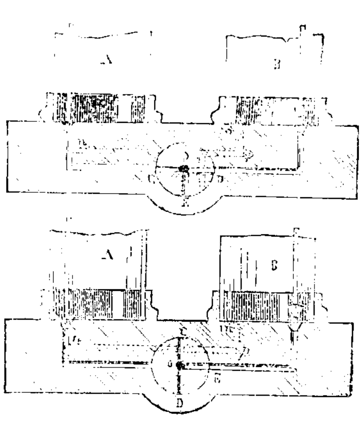


排氣器乃以計空氣之壓力。須附壓力表。此壓力表以細玻璃管曲成U字形。一端F爲閉管。一

端G爲開管。閉管之端充滿水銀。但當鐘內空氣非常弱時。則水銀降下。兩管水銀高之差漸小。至空氣全無。則水銀表面同在水平面。

巴比湼排氣器 巴比湼所製之排氣器。能使空氣更稀薄。即如第100圖。由兩圓筒之底。通二管於中點之處。設捻拴。圖上所示。乃垂直捻拴之軸切成平面之切口也。CD爲普通之通路。OE乃垂直CD之徑。A及B之圓筒。由之通於鐘內。又以點線所畫之 mpn。乃比紙面稍在後方之通路。於(1)圖斷其點線之通路。固不適其用。於(2)圖B圓筒之底。達於A管之間。新作一通路。使用時。捻拴初置(1)之位置。上下活塞如常法。此時尙未用點線之通路。至鐘內之空氣十分稀薄。不能推活塞。出於圓筒之外。則移動捻拴如(2)之位置。B圓筒之底。由 mpn 之管通於A。又通於鐘者。僅以B圓筒。於是上B之活塞。則鐘內之空氣入圓筒。活塞下時。此空氣經 mpn 之通路。入於A圓筒。A之活塞下時。此通路閉塞。空氣不能返於B方。此時B之活塞上。故鐘之空氣又入於圓筒。活塞下。則復如前入於A圓筒。故 mpn 之通路微時。入於B中之空氣。雖無推開附於B活塞之

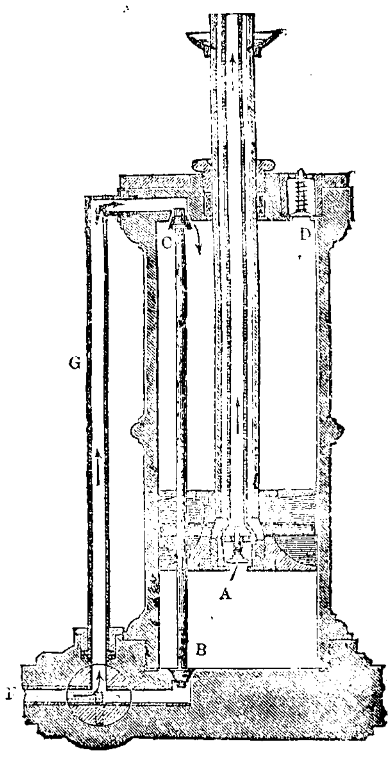
第 100 圖



瓣之力。至上下活塞數回此空氣經 mpn。悉集於A。張力漸增加。遂推開活瓣而逃出。初時B之活塞一下。每入多量之空氣於A。故A之活塞下時。每開其瓣。空氣逃出於外。後因空氣稀薄。每上下二回。瓣門一開。如空氣更成稀薄。則活塞每上下三回。開瓣一回。繼至每四回五回。開一回。由是瓣開之回數漸少。遂至終不復開。空氣之張力。自不能再減矣。

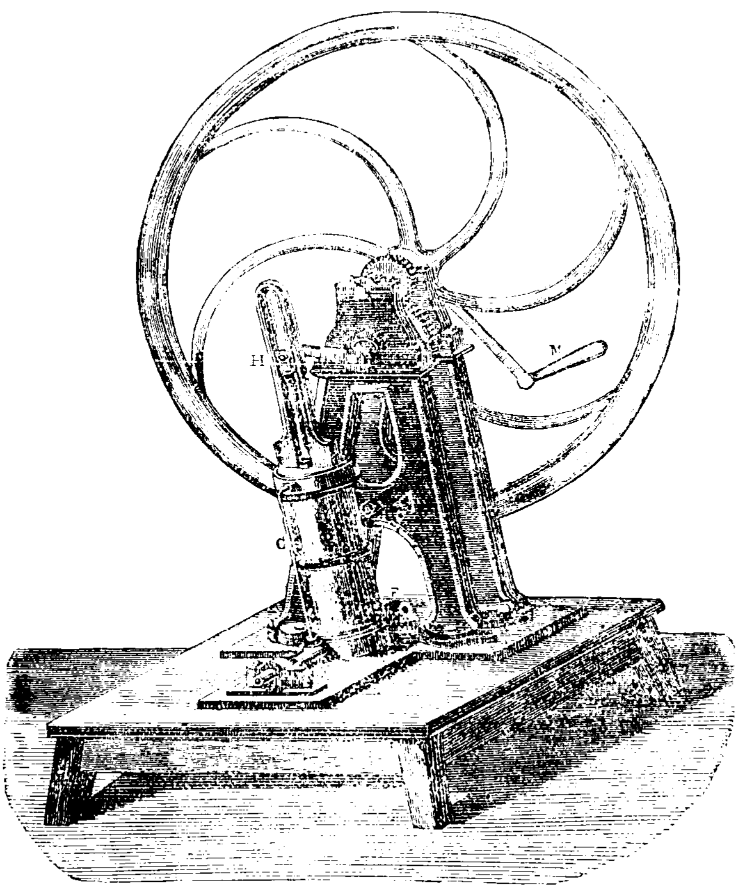
畢安基排氣器 此排氣器惟以一圓筒成者。圓筒上蓋及下底。各有圓錐狀之孔CB。以CGF。及BF之管。通於抽空氣之鐘。(第101圖)其二孔。即藉該棒之兩端CB塞之。圓筒內有運動於上下之活塞。圖上乃橫斷圓筒二部分之形狀也。活塞之軸。內部空虛。爲管形。上端與大氣通。此管之下端有孔。得通於圓筒之下部。此孔以瓣A塞之。此瓣由下向上開。其構造與通常之排氣器所附之活塞同。又圓筒上之蓋。亦有孔。以與A同様之瓣D塞之。活塞下時。與CB棒共降。故C之孔開。B之孔

第 101 圖



塞、因之在圓筒下部之空氣。減其積。故張力增。遂開A瓣逃於外氣中。與之同時D瓣閉。圓筒之上部、與大氣之通路塞。而C開。故鐘內之空氣、入於圓筒之上部。次活塞升、A與C之瓣閉。B與D開、故上部之空氣、逃於外氣中、鐘內之空氣、入於下部、若斯圓筒、雖僅有一。實與雙筒排氣器同作用、又

第　102　圖



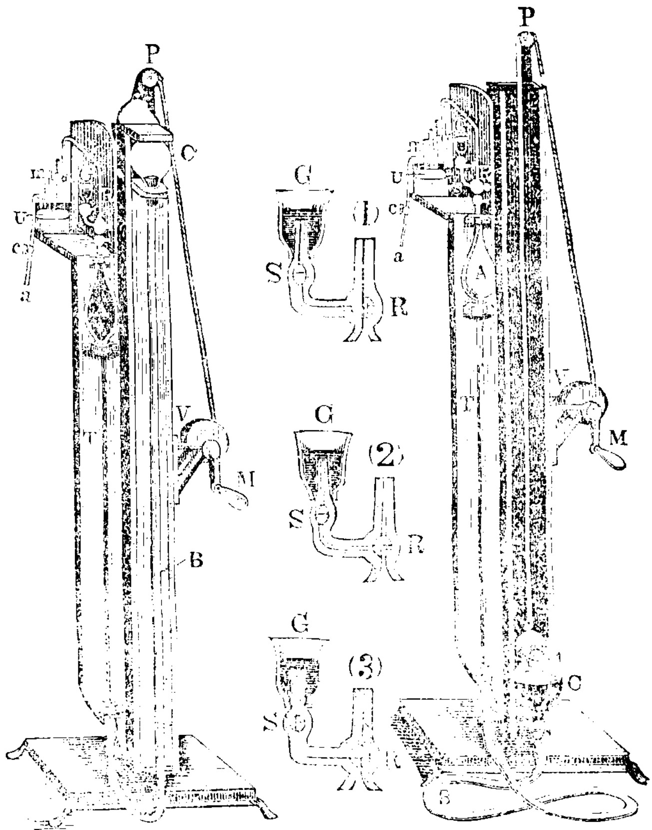
外部空氣皆不壓於上下面。故動之不覺困難。亦與雙筒排氣器無異。此器械之圓筒。在於橫軸 EP 之上。得擺動之。P 處曲成螺旋狀之金屬線。附橡皮管。以接合於所排除空氣之器。動活塞以大輪名曰飛輪。以 H 之柄回轉之。飛輪一回轉。則活塞上下運動一次。

水銀製排氣器 此排氣器比通常之排氣器。更得減少氣體之張力。

T 爲玻璃製之管。其上部有 A 器。(第 103 圖)與 B 之橡皮管連續。B 管之上端。通於 C 器。此器開放，與外氣通。A 及 T 固定於鉛直之板壁。C 沿此板得上下。以 M 之柄回 V 之輪。遂依 P 輪之助。得動 C。R 者具有三徑之捻拴。回之如次圖(1)所示之位置。則 A 與其上部之 t 管通。遂經 f,U,C。得達於所抽氣體之器。若回此捻拴。如次圖(3)之位置。則 A 與 t 之通路斷經 S 與 G 器通。A.T.C 及 G。如圖所示有水銀者。欲使用此器械。要先去在 A 中之空氣。欲去 A 中之空氣。先置 R 如(2)之位置。引 C 至上方。此時 C 中之水銀流入於 A。壓迫在其上部之空氣。因之空氣之張力增。比外部空氣之壓力大。於是靜開 S 之捻拴。空氣通過 G 中之水銀。而逃於外。C,B,A 內之水銀充滿至 S。此時閉 S 下 C。水銀由 A 降至 C。A 內生真空。

若是之後。用此器械抽出某器之氣體時。密接 a 管於其器。開 C 及 f 之捻拴。則氣體入於 A。壓水銀。水銀面遂稍降。

第 103 圖



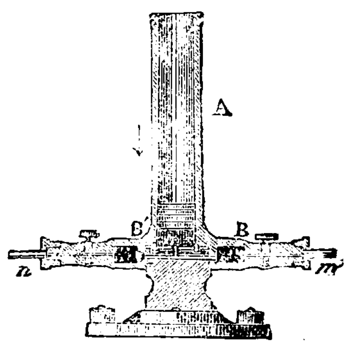
待其平均。置R如(2)形。引上C。壓迫氣體。開S使漏於外。循此方法。反復數次。氣體之張力。至甚弱。m壓力表之管中。液面幾若無差。

圖中U乃盛强硫酸之器。氣體中含有水蒸氣者。均被吸收。由是所入於A之氣體。皆乾燥之氣體。

45. 壓氣器　壓氣器與排氣器相反對。收貯空氣或他之氣體於某器之器械也。排氣器之活塞。於圓筒所開之瓣。乃由下向上。壓氣器之活塞。則由上向下開。初時活塞在圓筒之底。引上之。其下生眞空。外氣以其壓力。推開活塞之瓣。入於圓筒中。次活塞下。入於其下之空氣。推開底瓣而入於鐘中。故活塞上時。空氣入於圓筒中。更下活塞。則空氣入於鐘中。

壓氣器與雙筒排氣器。雖得作同樣之形。而空氣之彈力强大時。器械有破裂之虞。甚危險。故壓氣器不用此形 常用手唧筒。

第 104 圖



手唧筒如圖所示。A之圓筒中有活塞。圓筒之下部通於二筒之孔。孔各備開閉之瓣。其一B開於內方。他之一B。開於外方。引上活塞時。氣體自 m 管開瓣B入於筒內。次下活塞時。B瓣閉。左瓣B'開。氣體出。由 n 管送於他器。因之上下活塞時。繫於 m 器內之氣體。由 m 經圓筒至 n 移於繫在 n 之器。

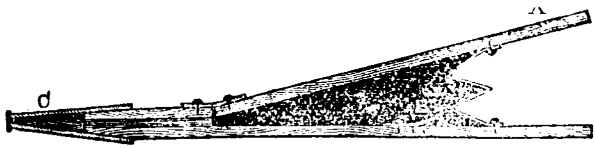
因壓器之應用所製出之器械。種類殊多。茲列舉於次。

風筒　風筒者輸送空氣之器械。有單式風筒。複式風筒二種。

(1)　單式風筒。如第105圖所示。即以革聯繫二板。一端

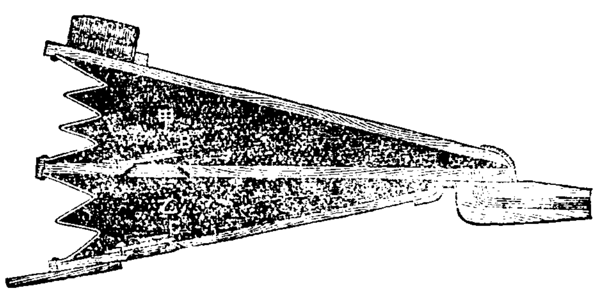
有口。一端有把柄。今舉B柄時。在於底面之瓣B開。空氣入其中。又壓下其柄時。則前所蓄入之空氣。由C口流射。蓋壓下A則瓣閉塞。空氣之通路。只限於C口也。

第 105 圖



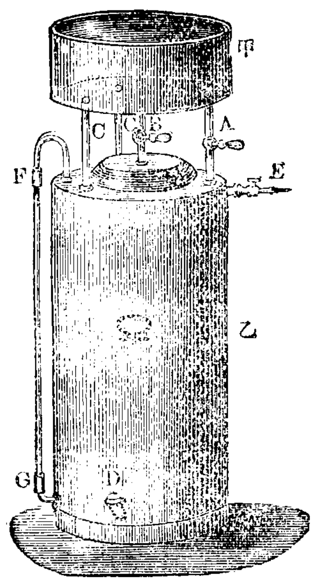
(ll) 複式風筒　以單式風筒製造過簡單不能使氣流無間斷。如打鐵店。及各工場所用之風筒。多複式製成者。即如第106圖所示者是。即其於上部。所包有之空氣。由蓋上所置之重。位置於甲乙間之瓣閉鎖。故壓縮之則空氣從A口逃出。今舉乙之下板時。在於乙中之空氣。受壓縮。因之向甲層推瓣而出。空氣入於甲中。從下板之降下。B復閉而C開。空氣仍更入於乙中。再扛舉下板。空氣又如前入於乙。故若反覆不斷。空氣由A口流出。亦無間斷也明矣。

第 106 圖



聚氣槽　聚氣槽。乃利用水壓力以捕聚氣體之器。其構造即如第107圖所示。乙乃鐵板製之圓筒。塗以漆者。高約

第 107 圖



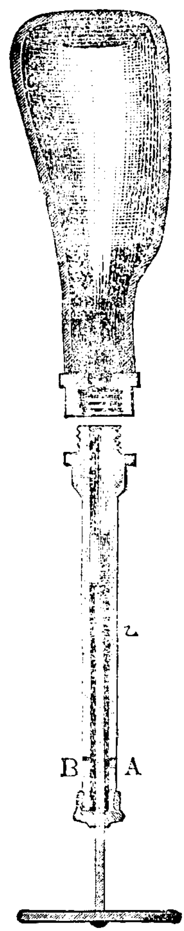
五十糎。直徑三十糎。其上蓋少向上方成穹窿狀。此蓋上有四箇支柱ABCD。支持短圓筒甲。短圓筒乃上方開放者。此短圓筒之高。爲長圓筒乙之三分一。甲與乙二管交互連通。其一管B。在乙上蓋之中央。不使突出於乙中。他管A。殆達乙之底面。此二管B及A。各有活拴。因之甲與乙得隨意開通。或隔絕。於E鑲水平之管條。亦具有活拴。近乙之底面。有喙孔D。其位置稍傾斜於上方。此孔口以螺旋拴或抱拴。得閉塞之。

欲捕集氣體時。先閉塞D之孔口。開三箇之活拴。由短圓筒甲注水。則水流下長圓筒乙中。至水由E管流射。則閉其活拴。尙殘留於圓筒中之空氣。使通B管而出。若是則長圓筒中水充滿時。旋閉連通上下管之活拴。而除去當D之拴。此時水不能流射。空氣亦不能侵入。今於D孔插入導氣管。則氣泡由其管昇於圓筒之上部不絕。而水流出。漸至圓筒中充塡多量之氣體。茲欲知氣體已否充滿圓筒。由FG管得見之。蓋以此管。與長圓筒連通。其管中之水。必與圓筒中之水同高。氣體如果充滿於圓筒中。則閉D之喙孔。開活拴

A。遂由外氣壓A管中之水柱。故E之活拴一開。則前所貯藏於圓筒中之氣體。由E管。以一致之速度流出。

濃氣機　濃氣機卽前壓氣器之變形。如第108圖。以金屬製之空圓壔乙。與壓搾氣體之局部甲之二部而成。乙鑲密閉之活塞。甲之口端。內向外方開瓣。近於乙端之部。因輸流氣體。設AB小孔。又以欲使甲乙二部固着之故。用螺旋。

第108圖

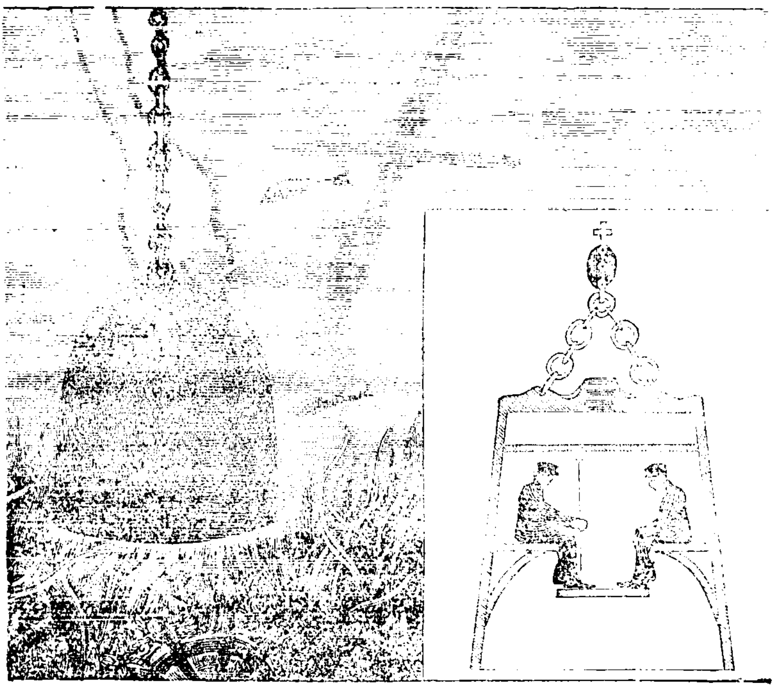


活塞若向甲壓之。則以其稠密之氣體。壓開瓣門。入於甲中。今活塞引出。稠密氣之張力。閉瓣塞其通路。若是則氣體之密度。得任意使其濃稠。所謂空氣銃者。卽此理也。於甲內之空氣稠密後。除却乙筒。螺定銃筒。裝塡彈丸。由所裝置於筒身之彈機幫助。卒然開瓣。濃氣以勵急之勢迸出。飛射彈丸。頗劇烈也。而其空氣稠度愈大。得連發數回。蓋其瓣一開。雖已逸出多少之空氣。以止一回。不甚減少也。

泳氣鐘(卽潛水機)　泳氣鐘者。基空氣之拒性而製作。使人得久留水底之器也。人坐此泳氣鐘內。入於海底。得營造海港或建築海堡等之工事。又有因破船。物品沈落海中。則坐泳氣鐘取上。其構造述之如次。

昔初製泳氣鐘時，用鑄鐵製，如寺觀之鐘形。至後世漸改良，如第109圖。以鐵製成無基底之一大箱。其下置橫架，上可坐三四人。降下於水中。箱上繫鐵鏈。凡使用此器。沈入水

第 109 圖



底之人，當先坐橫架上，由船上徐徐下鐵鏈，入於水中。其際箱內之空氣抵拒海水，不使入於箱中，故無溺死之患。但箱內咫尺之地，所容空氣不多，箱內之氣暫時隙敗，受呼吸不利之性，是故若不以新氣交換，則箱內之人，蒙其傷害，甚至有窒息絕命之虞。今欲避此傷害，由船以橡皮管通於海中

之箱內。用濃氣機。輸送新鮮之空氣不絕。逆毫無窒息之恐。又欲通日光於箱內。箱之上面。穿多數之孔穴。鑲以厚玻璃。此器沈於海中。由空氣之拒性。似水全不攙入然者。但實際入於海底愈深。則水昇於鐘內益高。蓋由水之上壓力。壓縮鐘內之空氣故也。其比例凡下於水中約十米突時。空氣縮小其半容。若至二十米突時。則縮小原容之三分之一。何則。其氣在水面時。惟受一氣壓。若於水面下十米突之深。則等於受二氣壓之壓力（水柱十米突之壓力即等於一氣壓也）由是推之。以至二十氣壓。三十氣壓。漸次深降。其壓力亦漸次强盛。鐘內之氣自益縮小。但若以濃氣機輸送多量之空氣。則鐘內之氣濃稠。其張力亦强。足以抵制水之侵入。其廢氣却由下方逐出於水中。

鐘內與船之通信法　在鐘內之人。若欲通報操縱之令於船上之人。用槌子敲鐘。以其鐘之度數。得察知其命意之如何。若要多言時。以小板書文字。浮於水面。船上若欲送答語於箱內。或有所通報。亦書文字於小板。繫鉛片附着一圈輪。由船達於箱之下口。沿所置之線使得達於箱內。

泳氣鐘之略歷　泳氣鐘之發明者乃英國人挨德曼德哈爾列 Edmund halley 氏。當一千七百十六年。由英國一船沈沒。欲拾取其船中之貨物之際。始實用之。氏之發明此器。蓋基於下文所記載之古事云。即古代之羅馬人。曾坐倒覆之大釜中。得不溺死。暫能居住於水中。又西班國帝加魯第

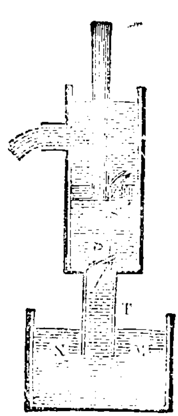
五世之時代。有希臘人。在帝前。被大釜。手執燭火。沈於水中。少時之後。燭火不滅。體亦不溼潤。而浮於水面。

近今尙有潛水衣 Skaphander 者。用橡皮製之衣服。被潛水者之全體。頸部覆以兜。用堅牢之玻璃板製者。設橡皮管達於上方。以通氣。又以使潛水者便於浮沈進退之故。懸繩梯於排氣鐘下。沈於海底時。欲使得容易留止。不爲海水漂流。足胸脊各部。附着鉛板。

46. 抽水器 抽水器者。導低處之水於高處之器械。利用空氣之壓力而作者。

吸上抽水器 於圓筒之中有活塞。圓筒之底。接長管T。此管爲吸水管。其上端有瓣S。由下向上開。活塞有孔。亦有瓣S′。與S開於同方向。圓筒之上部。有流水管。以上乃吸上抽水器構造之大略。

第 110 圖



以此抽水器吸水時。入T管於水中。動活塞。初時如排氣器之用法。漸減T管之張力。水遂以空氣之壓力壓其表面MN。昇於管中。恰與禿里賽離之試驗。水銀滯藏於管中者無異。動活塞至數回。水遂排S瓣而入於圓筒。於是降下活塞。則水壓S閉之。開S′出於活塞之上。至活塞復上時。水與活塞俱上。遂由側面之橫管流出。

水之昇於吸水管。達於圓筒者。全以外氣壓力之故。但若

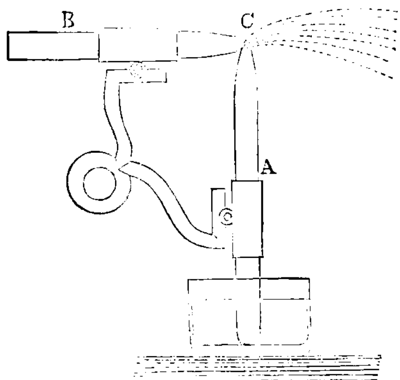
吸水管過長其中水柱之重至與大氣壓力平均則水不能復昇由前算水所得昇之高其極限凡十米故吸水管之長要在十米以下又以吸水管之空氣全不能抽去如前之排氣器者或以大氣壓力時時變更亦有比七百六十粍弱者故尋常吸水管只限七米或八米

當使用抽水器下活塞時其瓣開上下之水連續故其上下之壓力相等因之下活塞者僅以摩擦力尙費力無多其舉上時頗費力其費力之數由次得計之茲以空氣之壓力合水柱H長以由活塞所在之處至外部水面之鉛直距離爲h以由活塞至上端橫管之長爲h',活塞上方所受之壓力等於由橫管之端所及空氣之壓力與上部水柱重之和故單位面積所受之壓力爲H+h'又活塞之下面所受之壓力每面積之單位爲H−h此二力之合力爲H+h'−(H−h)即以h'+h之力由上壓下故若以活塞之面積爲S則其由上壓下之力與由下壓上之力其合力爲S(h+h')即以此力由上壓下故上活塞時其所費之力不可不比以活塞之面爲底以由外部之水面至橫管之鉛直距離爲高之水柱重之力大

吸上抽水器類似之器械　如噴霧器等排除空氣使液體昇騰恰與吸上抽水器同一理如第111圖所示乃噴霧器之最簡單者即以直管A之下端沒入於液中上端狹窄茲更橫置B管其狹端與A管之狹端相對成直角今若送

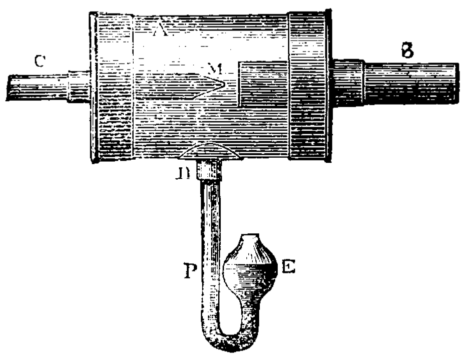
空氣吹入於B管中。至氣流强時。流液由A管吸上。昇至於C。飛散水滴。如噴霧然。

第 111 圖



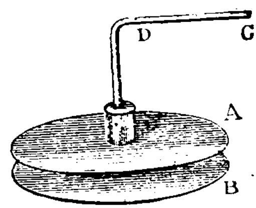
此吸引作用。如第112圖所示。得證明其故。且可說明其理。卽以稍大之短玻璃管A。其兩端以銅製之蓋閉鎖之。其蓋插入玻璃管B。他蓋插比B稍小之玻璃管C。而管之M端。大約有二粍之口。近於B管之端。又於A管當n點。穿一孔。以氣體壓力表附於銅製把鞘。其一端廣爲球形。此氣體壓力表。充有色之液。大約至PE之高。今由C管之端送空氣於C管中。則見於氣體壓力表之管P中之液面約昇至四糎之高。是由吹入空氣。致A中空氣稀薄之證。其空氣稀薄之理。卽以出於M端之氣流。以著大之速度。擴散於A中故也。又此吸引作用之現象。最著明之一例。如第113圖。於圓板A之中央。穿一孔。以玻璃管D之一端貫之。又取圓板B與A。二箇相對。約離二三粍。則由管

第 112 圖



口C吹氣時。因AB距離間空氣稀薄。則見圓板B昇而附着於A。若更强吹之則其間當緊接不相離。

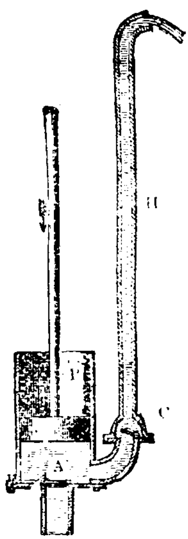
第 113 圖



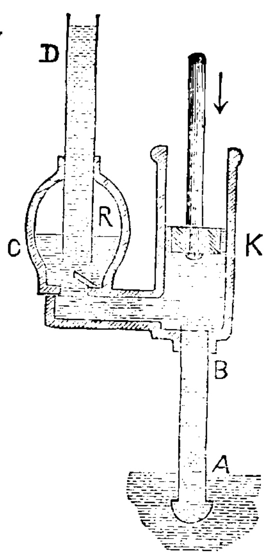
壓上抽水器　壓上抽水器。無吸水管。圓筒直入於水中(第114圖)圓筒之底有孔。以由下向上開之瓣A塞之。又近於底之側面。有管H。以由內向外之瓣C塞之。活塞上時。水開A入於圓筒。活塞下時。A閉而C開。水昇於H管。遂由其口溢出。

壓上抽水器所以異於前者。前舉活塞。費力殊多。於茲却不費力。惟下活塞要以大力。其所費之力。如圖活塞之上。若無水。則其力等於以活塞之面爲底。由H管上端至活塞下面之鉛直距離爲高之水柱之重。

第 114 圖



第 115 圖



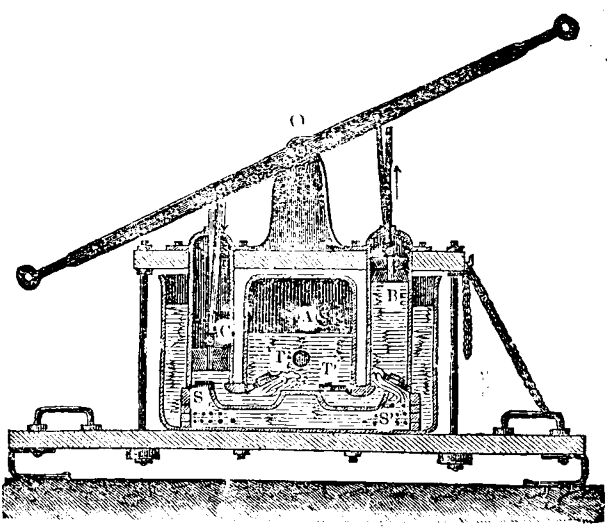
吸壓抽水器　吸壓抽水器。即具吸水管之抑壓抽水器也。其作用之法。參觀前二者自明。

於前所述之抽水器。水不能流出不絕。吸上抽水器只於活塞上時水始流出。壓上抽水器。只於活塞下時流出。故欲使

水流出無間斷須設氣槽R插入以管活塞下時水入槽內壓迫空氣遂因空氣之張力水由管流出不絕。

救火用抽水器　救火用抽水器乃具二圓筒之抑壓抽水器兩圓筒間有氣槽A。(第116圖)兩活塞繫於長棒之二點兩端更相上下二圓筒同在一水槽中如圖中左方之活塞下右方之活塞上時則左方之瓣S因圓筒中水之壓力S閉而T開水入於氣槽此時於右方之S'開水入於圓筒。T'因氣槽之水壓力閉塞。次左方之活塞上右方之活塞下時則S開而T閉S'閉而T'開。水由T'入於氣槽因之水入於氣槽不絕遂藉空氣之張力流出無間斷。

第　116　圖



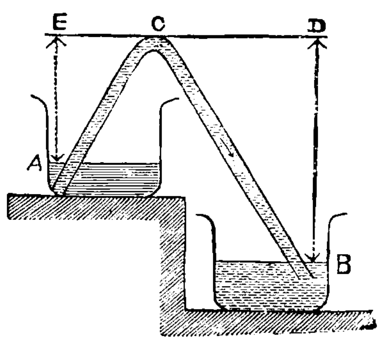
47. 吸液器又轉液器

吸液器者使槽器中之某液體移於他器之用也以兩脚不等長之屈曲玻璃管或金屬管製者使用吸液器時插短脚於液中由長脚端吸取空

氣後則液體由其口流出不絕又若充盈該液體於吸液器閉其兩端插入短脚於液中開其口水亦由長脚連續流出吸液器但使能達於液體中外脚之口端祇須比液體之表面稍下則得轉移液體而其外口端若比液表面下愈低則液體之流出愈强盛若外脚之口端與液面在一水平面上則器中之液體不能更流移於長脚而滿於兩脚中之液體依然留止不進出外脚之口端設少高昇則由液面吸至上方之液體反流於原器中。

如第117圖。ABC爲吸液器。移水於下方時。以A插於水中。吸B端。水遂由A昇至C。由B出不止。其理由蓋如次。器中之水已如前章所述空氣之壓力大約等於受十米突水柱之重壓而此壓不止及於器中之水因水壓波及之理且波及於吸液管中之水此管中之水與器中之水面A若在同高則兩面受同强之壓力當水達於吸液器之最高點C時。其所受之壓力等於(10m－AE)高之水柱之重同時吸液器之外端B亦大約受十米突水柱之重此壓力亦由所充盈於CB管之水波及於C。而CB脚中之水重對氣壓之作用反對故於C所受之壓力。等於(10m－DB)高之水柱之重。由是於吸液

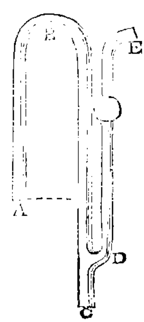
第117圖



器中之D點。互受相反對之二壓力。然則由何方向壓力之强。從可知其液所運動之方向矣。而第一之壓力爲$10m-AE$。第二之壓力爲$10m-DB$。DB比AE長。則第一之壓力。自不得不比第二之壓力强也。故隨其壓力偏勝。液自由ACB之方向流出。其速度等於$\sqrt{2g(DB-AE)}$。

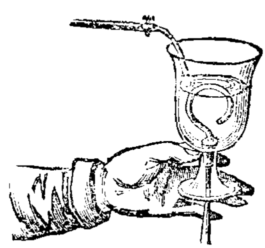
毒液用吸液器　如有毒之液體。不能直接用口吸取者。由一器移液體於他器之際。用特別之吸液器。如第118圖。ABC爲尋常之吸液器。別具DE之吸管。今欲使用之。沈管口A於液中。塞其他端C。由E吸之。液遂來於AB之管中。於其液將至D口中時。開放C口。E口止吸。則液由C口流出不止。無異尋常之吸液器。

第118圖



間斷曲管　基吸液器之理而製造者。即如第119圖所示。以金屬製之圓筒。作曲管。置杯中。長管之口透過底面。短管接觸於底面。今注水於杯中。其水面至與曲管之最高點同高。水尚未從底管流出。但若更少加以水。則由底管流出不止。終至短管離水面始止。

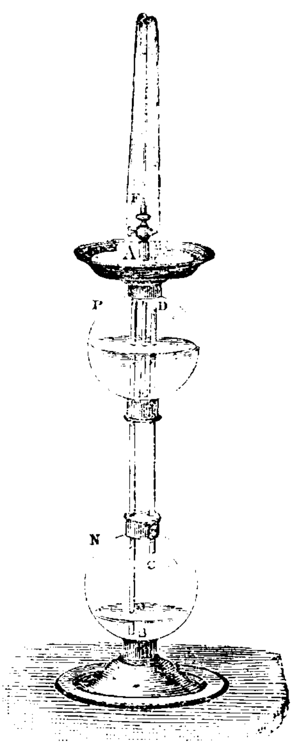
第119圖



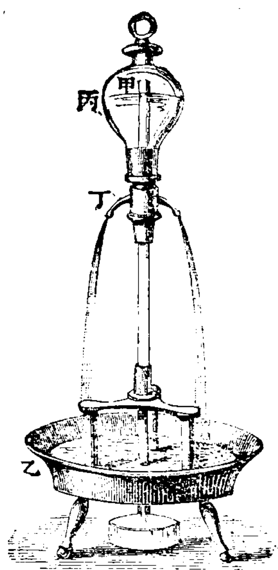
希羅噴水器　此器以一皿A。及在其下之二器P,N而成。(第120圖)AB管連A之底。與N下之部分。P與N上之部分。以DC管相通。又以細管穿A之中央。突出於P底。使用

時。先入水於P器，次如法置管後，注水於A皿。則水由AB傳達於N器中，N中之空氣，因減其積增張力。此張力乃等於空氣之壓力，與以AN兩水面之鉛直距離爲高之水柱重之和，P器之水，亦受此張力，遂以此張力，達於所穿過A皿中央之管，則穿於A皿中央之管若短，當由上端噴出，蓋以穿A皿中央之管。所生之張力。卽等於前所加於AB管之水所生之張力，故以理論上言之，其所昇之高，當等於自A至P之水面，與自A至N之水面之差，但以管內摩擦，及空氣抵抗等之阻力，其高常不及此數，

第120圖



第121圖



又如第121圖，以玻璃瓶一具，如丙，瓶之長管另出小管數枝。如丁，瓶口復置兩端皆通之長管，如甲。上端幾至瓶頂，下端置

近盤中之小孔上。其盤如乙。中有小孔。水可流出。注水於瓶。約三分之二。水自小管丁流出。并注於盤。惟盤之受水。多於出水。即自盤中小孔流出故盤水漸高。及甲管下端一沒於水。則丙內無復有空氣入。其積漸薄。以至瓶內水面所受壓力。加瓶內水重。與丁口之壓力相等。則瓶內之水。不復流出。至是盤水有出無入。故水漸低。未幾而甲管下端。復出於水。氣復入於瓶。及其積既厚。壓力既足。則水復從丁管流出。故丁管之水或流或止。

第四章之問題

1. 用截面4平方糎之轉液器。使其1分間移流25立方粉之水。問長管之口。比水槽內之水面低下若干。

但流出係數為0.625。

2. 於排氣機吸筒之容積。與氣鐘之容積。為2與3之比。今上下活塞10回。問鐘內空氣之壓力幾何。

3. 槍身40立方糎之空氣銃。蓄8氣壓之空氣。今於外氣之壓力741粍時一度發射。所漏泄之空氣。合80立方糎之容積。問發射後銃身內之氣壓幾何。

4. 陸上示30吋之氣壓表。移之於潛水器內。高為18吋。問潛水器沉於海中幾何之深。

5. 有抑壓抽水器。其活塞為4平方呎。問壓上水至80呎之高。要加幾何之力於活塞。

6. 於吸上抽水器吸水管之斷面積。為活塞之$\frac{1}{10}$,其長為6米突。今活塞由圓筒之底。引上之。至0.5米。則水之昇於吸水管若干。

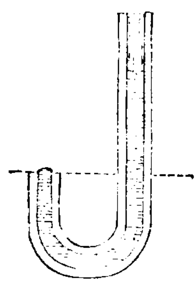
但吸水管內外之水同高。當時大氣之壓力為水柱10米。

7. 以樹膠塗絹為外被之輕氣球。外被1平方米之重。為250克。其全重量為62.5瓩。今充不純之輕氣於輕氣球。其密度約合空氣之$\frac{1}{13}$則其上昇力若干。

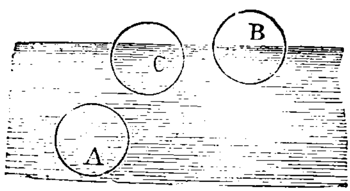
第五章　流體之分子力

48. 表面之分子力　入水於杯。水之表面。比杯口稍高。至呈凸形。水尚不流出。又以直徑一二分許之玻璃管。研磨平滑。曲成如第122圖狀，一端長而一端短。由長端之口。徐徐注水於管內。長管內之水面。縱比短管內之水面稍高。水依然不流出。就以上水不流出之現象觀之。其表面有特別之性質也明矣。其性質為何。想亦不外接近於液體表面分子之境遇。與內部之分子。有所異焉耳。蓋物體分子之間。有相引力。固吾人所想像得到也。又其引力所及之距離甚小。已於第一編之末分子說之條說明之矣。故由此假說。凡靜止液體之分子。與其作用於其周圍之分子。其引力。雖互相均。而表面與內部之牽引力。自不能無所異。蓋其內部之分子。前後左右以均等之力牽引之。故所及於A分子之分子力。乃互相均者。若接近於表面之分子。如B,C等。則所受液體內部之引力。僅以下半之大部分。上半無液之分子引之之力。故失分子力之平均。生向下方引下之力。由之於液體表面之各部。對表面直角之方向。有引入其處之分子之力。此力蓋由分子力之不平均。所生之壓力也。如盛於盃中

第122圖



第123圖

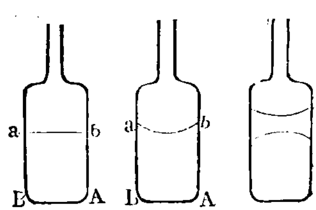


之水,雖滿而不流出。又彼之屈曲玻璃管。水面縱有高低而不溢。皆此力之作用也。卽表面之水。由重力作用,雖欲流出,因引入內部之分子力以阻之。不使流出也。今若以指觸杯或細管之口緣,水忽流出,又碗中之水。傾之欲使流出之際,若濕其緣,導流出之路,則水傳此道而流,是皆由表面之壓力也。

49. 表面張力 Surface tension 由前條,可知液體之表面有勉爲收縮之力也,如雨水成滴,滴於棹上之水銀成球狀,皆收縮之力使然,蓋同一容積之物,於諸形中以球形之表面最狹,如團子藥丸,所以圓者,以掌由四方壓其表面,至面積最小,造成球形,液體之收縮時。亦如藥丸團子之類內部引力牽引表面各部分。恰如以掌由四方壓團子者然,故不可不成最狹之面,如球狀,由是因收縮之故,沿其表面生一種之張力,表面之各方向,有如張橡皮膜者,此力名曰『表面張力』由次實驗得證明之。

由金屬線如圖形,若甲圖乃以細絲 ab。結鐵線之兩邊。入於石鹼之水溶液中。其液之膜。被於絲與鐵線之上,若引上之,則絲如乙圖收縮成 AabB 之液面,又若以前鐵線之兩傍結以二條之絲,置之石鹼液中,取上時,則其間所生之膜,如丙圖狀又若以細管

第 124 圖

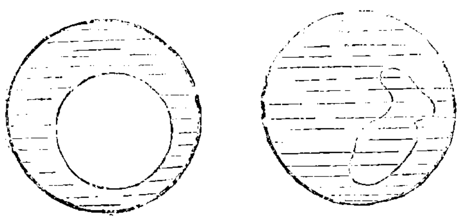


甲　乙　丙

之一端入石鹼之水溶液後，由他端吹之。成球狀，若止吹，則石鹼球仍收縮。是亦表面張力之現象也。

又以金屬線作直徑約五糎之輪，入於石鹼液中後引上之，則輪之內面張液膜，若別以短絲線之兩端相結者，靜置之膜上，則絲如第125圖之右方所示，成不規則之曲線，於是破曲線內部之液膜，則曲線忽爲圓形（第125圖左）蓋其始曲線之內部在液膜之間表面張力相平均，固不能變其曲線之形。而曲線內部之液膜既破之後，受外部液膜之張力牽牽，曲線之內部自擴張，因成圓形。

第 125 圖



注意　此種試驗所用之液最適當者。以蒸溜水一立使沸騰。後入乾之馬耳塞石鹼十五克於此，使溶解，累次濾過，爲透明之液，此液每百立方糎中加三十克之砂糖。更使沸騰之。或以二十五克之馬耳塞石鹼溶於水一立，濾過之。其三立積與純粹之克里司林二立積混和亦可。

表面之張力。不止由物質而有不同。因其質之純粹與否，亦大有差異。通常之液體此力於水銀最大。水次之，火酒及油類遙小。又水及水銀若不純粹，則表面之張力弱。

以玻璃板磨之清潔，置於水平。若滴水銀於其上，則水銀成凸形。但若滴以水，則水伸張於四方。溼潤玻璃。又豫先塗

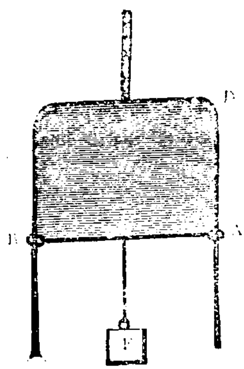
油於玻璃之表面。滴水於其上。則水復如水銀成凸形。此蓋因物質而異也。方磨墨時。墨汁倒由硯池逆流於硯陸。是以水表面之張力弱。硯陸已磨之墨。表面之張力強。故張力弱者遂被引於張力強者之方。火酒混以清水。入於玻璃器振盪之。使瀉於器之內側。見周圍之液。漸流至接近於液之表面。如淚滴。停滯不落。且時時下部之液。却逆流於上部。是亦由表面張力所起之現象也。蓋以火酒比水易蒸發。且液之蒸發。常起自其表面。故附着於器內側之液。其量少。又曝露於空氣之表面亦廣。初所含之火酒。暫時蒸發。至其漸流達於下底之時。已失火酒之過半。稍近於純粹之水矣。故其表面之張力。比下底之液大。下底之液之表面部分。遂被引於張力強之方。而逆騰也。

投樟腦之粉末於清水。頻見其旋轉活動。是又表面張力之作用也。樟腦本不易溶解於水。茲以各粉末之形狀不規則。故其溶解於水。四方不一。其善溶解之處。表面之張力薄弱。其少溶解於水之處。其張力強。故各粉末之張力弱者。被引於張力強者之方。因生活動。

滴純良之火酒於清水中。忽發散四方。又於清水之表面。撒布白墨之粉末。其中央注以一滴之石油或水油之類。則見白墨之粉末。直散於四方。開成圓形。又於器入少量之清水。器之底部至漸蔽滿。於其中央落一滴之以脫。水忽激動。開於四方。至器底露出。又以脫之瓶傾斜其口向於清水之

表面。瓶口縱稍傾斜。以脫不易流出。若少注於水。則其處如笑靨生窪。蓋以其蒸發氣比水重故也。此等皆由液體表面之張力所起之現象。行此實驗。須於太陽所及之處。照器中水之表面。得明察水之運動。

第126圖



測表面張力之強。用鐵線曲成如圖形。沿其緣另附AB。加液於其上。使張液之薄膜於ABCD。此時因表面張力之收縮。AB必動於CD之方。然則欲使AB平均。對AB直角之方向不可不加以F之力。故以此時對AB之長。作用之力為F。則作用於單位之長。表面張力之強T當如次。

$$T=\frac{F}{AB}$$

由是可測表面張力之強。

表面張力。乃氣體與液體。或固體與液體相接之面而起者。又不論液體氣體。表面張力。由其物質所接之面。及溫度而有差異。次表乃由科陰克氏所測定之結果也。

水與	空氣之間	每糎	31 功
	水銀 〃	〃	418 〃
水銀與	空氣 〃	〃	540 〃
	水 〃	〃	418 〃
火酒與	空氣 〃	〃	25.5 〃
	水銀 〃	〃	399 〃

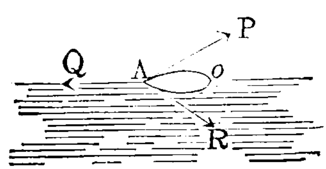
石油與	空氣 ,,	,,	31.7 ,,
	水 ,,	,,	27.8 ,,
	水銀 ,,	,,	284 ,,

若水與火酒混和之。則其相接之面無表面張力也明矣。

由表面張力所起之諸現象。前已略述。玆更就前表所得之結果。對實際上略爲說明。

(第一)注石油一滴於水面時。石油直擴於水面。於圖O爲石油之一滴。其與水表面相接之點A。乃受石油與空氣間之表面張力P。及石油與水間之表面張力R。幷水與空氣間之表面張力Q。三力共同作用。而P與R兩者皆作用於石油滴之面切線之方向。Q乃沿水面而作用者。

第127圖



由前所示科陰克之結果。

$$P=31.7 \text{ 功}$$

$$R=27.8 \text{ 功}$$

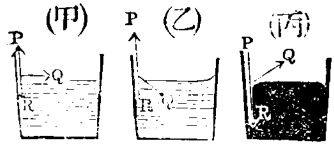
$$Q=81. \text{ 功}$$

$$\therefore \qquad Q>P+R$$

故此三力決不平均。Q比P與R之合力大也。故於A之分子。當引於AQ之方向。由之此油滴容易擴於水面。

(第二)入水於玻璃器。則接於器壁之水面稍上昇。蓋接於器壁之水。乃受玻璃與空氣間之表面張力P。及水與空氣間之表面張力Q。幷水與玻璃間之表面張力R。三力所作

第 128 圖



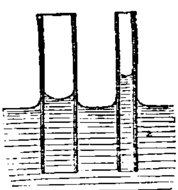
用。其中P與R其方向相反。且P>R。故A點引上於P之方。(如乙圖)但Q常沿水面作用之力。故少向於下。因之於其R方向之分力與R之和。至等於P而止。

由是觀之。凡液得溼於器壁者。常P>R也。又玻璃器入水銀時。則其面接於器壁之處下。(如丙圖)蓋由空氣與玻璃間之表面張力P。比水銀與玻璃間之表面張力R小故也。由是觀之。凡液不溼於器壁者。P>R也。

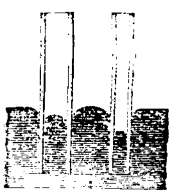
於上液面與器壁所為之銳角。(即P,Q,R三力相均時Q與R所為之角)曰接觸角。

50. 毛管現象 Capillary phenomena 以纖細之玻璃管立於水中。則水昇於管內。於管內之水面成凹形。反之立管於水銀中。則水銀管內之部分。比管外之部分低降。此現象以管之愈細者愈著。是名曰『毛管現象』毛管者其管有如毛髮之細孔之謂也。如筆及吸墨紙等吸取墨汁。燈心吸上油。草木之毛根吸上水。皆此現象也。又如以二片之玻璃板相合。其間入薄尖劈。稍開一方。以絲縛

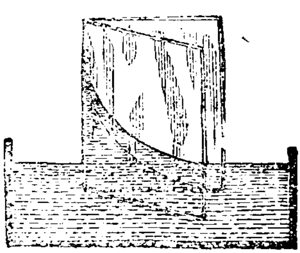
第 129 圖



第 130 圖



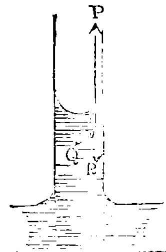
第 131 圖



之立於水中。則水入於板之間。而以兩板接觸之處最高昇。至漸開處。次第低降。又立之於水銀中。則兩板間水銀之表面。從近於板之緊接之部分而益降。此等現象。亦由表面張力。與前條第一例同一理。

就毛細管之現象思之。於管內之液。保平均時。其各種關係當如次。

第132圖



液昇於管內之高爲 h 糎。以管之半徑爲 r 糎。以液之密度爲 d 克。則管面液柱之重。

$$\pi r^2 dg \text{ 功}$$

而支之之力。作用於管內液面之周圍。又空氣與玻璃間之表面張力爲 $2\pi rP$。（$2\pi r$ 者管周圍之長）液與玻璃間之表面張力爲 $2\pi rR$。兩者之差。等於空氣與液間之表面張力 $2\pi rQ$ 所沿管壁之分力。茲若以接觸角爲 θ。則此分力爲 $2\pi rQ\cos\theta$。故此力以功爲單位表之。則與管內液柱之重相均時。

$$\pi r^2 h dg = 2\pi r.Q.\cos\theta$$

由之得　$$h = \frac{2Q\cos\theta}{rdg} \qquad (1)$$

其液若爲水則 $\theta = 0^\circ$　$d = 1$ 而以 $\cos 0^\circ = 1$

故　$$h = \frac{2Q}{rg}$$

又於水銀時。以其接觸角爲鈍角。$\cos$ 爲負數。則 h 亦負數。卽示水銀於管中下降也。

由(1)式得關於毛管現象之定則如次。

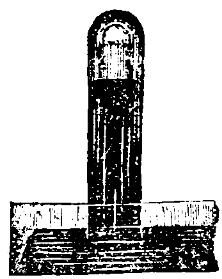
『毛管中液之昇或降。其高由液與管之性質而異。同一液同在一管中。其高反比例於管之半徑及液之密度。』

51. **表面之粘性** 於液表面之張力。有密接關係者。表面之粘性也。入水於器。輕放針於水面。而針浮。(此實驗少塗針於油易成效)注視針所浮於水面之近邊。其處儼成凹形。水不少濡於針。是比水重之物質。有時亦浮於水面者。又蟲類得自由步行於水面。人所習知也。今張極薄之橡皮膜於水面。於其上載鐵線。則其狀恰與浮於水面之針同。此液之表面。卽如前數節所論。本來與內部之境遇異。除二三之液外。其表面頗富有粘性。恰如張薄膜之作用者。吹石鹼球卽至石鹼液成薄膜而不破。亦以其表面富粘性之故。且有內外二重之表面也。入油於硯磨墨。若多量之油。尙不甚難磨。但如以少量之油參之以水。則殆不能磨矣。由是觀之。表面之粘性。因液之種類而有不同也。又可知油比水富此粘性者。機械注油。原以滑運動。但若不屢屢滴以油。則機械甚轢。却爲油妨礙運轉。是蓋油與油雖無粘性。油與機械不免有表面之粘性也。

52. **固體吸收氣體** 固體亦如液體。其表面有特別之性質。

今以徑二三寸。深一尺許之玻璃筒。充阿謨尼亞。(第133圖)以其口倒立於盛水銀之器中。又以燒熱之木炭置於圓筒之內。木炭浮於水銀之表面。漸因木炭冷却。吸收阿謨尼

第133圖



亞。致水銀上騰於筒內。終至充塞之。凡木炭所能吸收阿謨尼亞之量。合木炭容積九十倍以上。吸收鹽酸之量。合木炭所有之容積八十倍。亞硫酸六十五倍。硫化輕氣五十五倍。炭養氣三十五倍。其餘之氣體亦多少吸收之。

木炭雖若斯吸收多量之各氣體。其物質無少變化。由是觀之。可知氣質非眞能爲木炭之質中所吸收者。不過與木炭之空隙中所存之氣體互交換耳。其理當更述之如次。

玻璃板磨拭清潔。使其表面少無所觸。茲以指頭觸其一部。指跡雖不少留於玻璃之表面。若呵氣於此。指跡忽現出。又新磨之玻璃板上。載銅線放置數時間後。取去之呵氣於玻璃之表面。亦現銅線之紋章。此等之事。固不限於玻璃。以新磨之金屬板驗之亦然。此事係德人毛制爾始研究之。由是其現出於固體之表面之形者。名爲毛制爾形。

就毛制爾形附說明者。爲培枝爾。凡固體之表面。長久曝於空氣中。由附著力之作用。常有空氣及水蒸氣等粘着之。新磨固體之表面。無此等粘着物。遂因曝於空氣之物體。如銅線等載於其上。則附着該物體之氣質。其一部移於新鮮之表面。故取去物體時。其表面接觸於物體之部分。與其他部分所粘着氣質之量。必有多少之差。故若呵氣於此。則氣息所附着於兩部分者。固不同。因之其間之區劃判然現出。

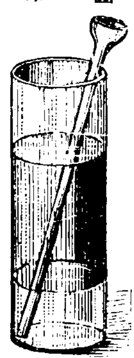
如上所說明凡固體表面常有氣體凝結於此也此性質由固體及氣體之物質而有異同如毛布之類甚易濕潤是因空氣中所含之水蒸氣凝結於表面上玻璃亦甚易濕。

固體之表面廣者氣質所凝集之量自大白金之粉末所吸收養氣之量殆其容積之二百五十倍若是吸收多量者。以粉末之表面甚廣故也木炭有多少之空竅於其空竅周壁之表面空氣常凝集之今受熱空氣遂膨脹而飛散於他處故若置入之氣體中(例如阿讀尼亞)因其冷却氣遂入其空竅凝集於周壁上遂如始之實驗至吸收多量之氣體也。

固體吸收氣體者不止凝集於其表面爲固體之組織中所吸收者亦不少如鈀最富此性其吸收輕氣之量約合其容積九百八十倍。

液體亦吸收氣體如啤酒曹達水啢囒水等固常人所習知就固體液體吸收氣體之事研究最精密者爲德人非森。由氏之實驗液當吸收氣體之際其既被吸收之氣體與未被吸收之氣體其壓力全同。

第134圖



53. 液之擴散 以玻璃器貯以水漏斗之端繫以玻璃管插之器中使達於底部由此漏斗徐注入濃硫酸銅之溶解液初時上下兩液之境界判然至經時日之後漸不明瞭青色之部分次第擴散於上部色漸淡薄數日之後竟至全部爲薄青色之液是下部硫酸銅之溶解液漸昇而混

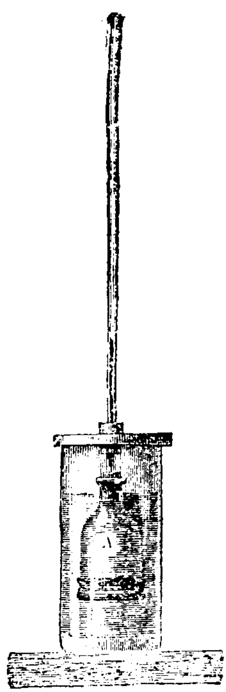
於上部之水中。上部之水漸降而混於硫酸銅之溶解液也。

蓋以液之凝集力。本來薄弱。其分子常運動。故異種之液互溶解時。一方液之分子運動之際。突入於他分子間。經數日。兩方之分子互混交。遂成一樣之液。若斯異種液體之混交。名爲液之擴散。

54. 液之滲透　上所說明之實驗。乃就異種之液直接相觸者言之。若兩者之間。有物以界限之。其境界物之通路如爲液之分子所能通過。則兩方之液。經此通路互擴散。

實驗之用徑四五寸許無底之瓶。張膀胱。(第135圖)瓶內入砂糖之濃溶液施拴。拴上插長四尺許之玻璃管。通拴而過。以此瓶置於水中。如圖形。經時之後。瓶內之液。漸次增加。昇於玻璃管。而瓶外之水。同時漸次減小。就其瓶內之液所增加者觀之。乃外部之水。通過膀胱入於瓶內也明矣。試嘗瓶外之水。則常有甘味。又可知水入瓶內時。砂糖亦同時出於瓶外。但其瓶內液所增加之數殊多。是可知水之入於瓶內。與液之出於瓶外。互有遲速也。今若代砂糖之液。以火酒食鹽硫酸銅。硫酸鋅等之溶解液。亦得同一之結果。惟其所費之時間有長短耳。

第135圖



由是觀之若於二種互能溶解之液之境界面隔以如膀胱類及其他有細孔之物體時則兩方之液互通此境界面而移動於他方名此種之擴散曰『滲透』

滲透之現象吾人平常所目擊者殊多如浸穀類於水漸生膨脹乃滲透之作用也又以瓜類開以小穴置砂糖於穴口數日之後則見瓜收縮成皺此蓋糖液互生滲透作用凡濃液滲透於薄液中甚緩薄液滲透於濃液中甚速瓜之液薄液也速由瓜之內部滲透於外故數日之後因液乾而收縮又草木之吸收肥料者以其根接觸於肥料所溶解於地中之水故由滲透之作用吸收之

混澱粉硫酸銅食鹽亞剌伯樹膠等溶解於水入之膀胱之袋密閉其口置於水中數日後食鹽硫酸漏出水中惟澱粉樹膠等依然留存膀胱內是滲透之作用由物質通過於境界物有遲速也砂糖食鹽硫酸銅等乃易通過之物質澱粉樹膠等殆不能通過之物質也善通過之物質者爲結體其通過極遲者爲不結體結體多易結晶不結體多不易結晶故以易結晶之物與不易結晶之物混合入於膀胱置水中數日後則兩者得相分離此方法化學者及衛生學者屢所使用名之曰滲透分析法

滲透之作用從來雖未有完全之說明就兩方之液體通於境界物之細孔互出入之點思之則與毛管現象及液之表面張力有大關係無可疑也若一方之液得濡境界之物

體他方之液不能濡之。則能濡於境界之物體。通過境界而出於他方。而不能濡於境界面之物體者。自不能更通過境界。故於滲透之作用。液體通境界物之遲速。不止由其液體之性質。亦由境界物之性質也。

如於前所說明之實驗。若於膀胱之底塗油。入火酒於瓶內。置之於水中。則瓶內之火酒漸減。瓶外之水漸加。是火酒雖能濡油。水不濡之也。

55. 氣體之擴散 既如前二節所論。相接觸異種之液體。有能混有不能混者。若接觸異種之氣體。則不盡如液體。述之如次。

以試驗管充養氣。用洋火點後吹滅之餘燼。置於試驗管之內則洋火立見其盛燃。又倒持充輕氣之試驗管。以洋火點之。則輕氣試驗管之口邊燃。次更以試驗管充輕氣與養氣。點之以火。則卒然以勵勢爆發。

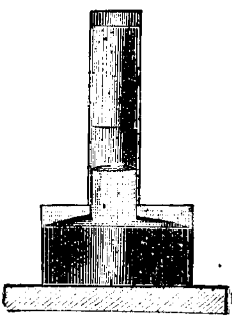
今更以試驗管二箇。一方充輕氣。他方入養氣。入輕氣之方。置於上。以兩方之口與口相合。經一二分間。點之以火。兩方共爆發。其所以爆發者。乃養氣混入輕氣。輕氣混入養氣之證也。

氣體比液體分子之運動頗活潑。縱極小之間隙。得自由通過。如上之實驗。養氣比輕氣雖重十六倍。其分子幾分上騰移於輕氣中。又輕氣之分子。幾分下降。移於養氣中。故曰氣體與液體異。不論何種氣體。以異種者相接觸之。當互混

交成一種之氣體。又異種之氣質不止直接相觸之際始混交於其中間縱隔以有小孔之境界氣質之分子亦通此孔而擴散也。

以少量之水練石膏塞之於長一尺徑一寸許之玻璃管。爲厚二三分之拴。待其乾燥後管內充輕氣則見其拴忽凹下。又若立之於水銀之器中。則見水銀忽昇於管內是以石膏之拴有無數之細孔故管內之輕氣通此孔出於大氣中。但水銀決不滿於管內管之上部必殘空虛之部分其所殘之氣非輕氣。何則輕氣既能逸出斷無半留於管內之理是不外管內之輕氣通拴而出時外部之空氣亦同時通拴入於管內又逆行試驗以管內依然充塡空氣入於水銀槽中如前。上以入輕氣之器蓋之則管內之空氣由管之下端出於外部。

第 136 圖



由此等之實驗可知空氣及輕氣能自由通過有細孔之物體也明矣。即其他之氣體亦莫不然。又就輕氣與空氣出入之量固是不同輕氣之通過比空氣之通過遙速即氣體通過有細孔之物體者。由其種類而有遲速也。

就氣體通過有細孔之境壁所以生遲速之理思之此現象固起於分子之運動由其運動之遲速。通過於境壁亦不可不遲速。而重質之氣體。分子之質量比較的大故與他之

輕質之氣體。在同一之境界面。不能以同速運動。故如輕氣輕質之氣體。速通過境界。如空氣稍重質之氣體。比輕氣不得不遲。故曰氣體通過境壁之遲速。關於其質之輕重。就此事初試精密之實驗者。爲古拉喊氏。古氏曾發見一定律曰。『凡氣體於一定時間通過境壁之量。逆比例於其密度之平方根。』是爲古拉喊之法則。

物理學講義
上卷
問題解答
第一編
第一章之問題（45頁）

1.　圓周之長 $S=\pi\times 25$.

$$v=\frac{S}{t}=\frac{3\cdot14\times25}{10}=7.85\text{ 分丈.}$$

2.　以20秒失100秒米之速度.故每秒失5秒米之速度.卽其加速度每秒5秒米.但以係減速.須用負號.卽－5秒秒米也.

3.　此動體30秒間速度之變化 $40-10=30$ 秒米.

故平均加速度每秒 $\frac{30}{30}=1$ 秒米.

又1秒米之速度者.1秒間經過1米之速度.卽1分間經過60米之速度.故每秒1秒米之加速度.等於每秒60分米之加速度.

又以1米＝3.15尺故每秒1秒米之加速度.等於每秒3.15尺之加速度.

4.　以問題所求之某時刻.爲由初時刻至第 t 秒之時刻.以其時之速度爲 v 秒米.以其物體運動之加速度爲 a 秒秒米.則

$$v'=at$$

是 v' 爲某時刻之終速度.亦卽5秒前之初速度.據題意物體以 v' 之速度.運動5秒後.經過125米.故由等加速運動之公式(6) v 代以 v'（卽 at）.爲某時刻之初速度.

$$125=at\times5+\frac{1}{2}a\times5^2\text{............(1)}$$

又以再經8秒間經過340米.卽自某時刻至 $5+8=13$ 秒經過 $125+340=465$ 米.故

$$465=at\times13+\frac{1}{2}a\times13^2\text{............(2)}$$

由(1)(2)兩式.前者 $at=\dfrac{125-\frac{1}{2}a\times5^2}{5}$

$$\text{後者 } at=\frac{465-\frac{1}{2}a\times13^2}{13}$$

$$\therefore\quad \frac{125-\frac{1}{2}a\times 5^2}{5}=\frac{465-\frac{1}{2}a\times 13^2}{13}$$

由之求a之值得　$a=\frac{35}{13}$

以之代入(1)式.得　$t=\frac{95}{14}$.

故所求之加速度爲$\frac{35}{13}$秒秒米.某時刻者.由初至第$\frac{98}{14}$秒也.

5. 如每秒以5秒米之加速度.運動1分間所得之速度v_1及其間所經過之距離S_1由等加速運動之公式(4)(7).

$v_1=0+5\times 60$ 秒米.　　$S_1=\frac{1}{2}\times 5\times 60^2=9000$ 米.

次以v_1之速度1分間爲等速運動.故其所經過之距離S_2.

$S_2=v_1\times 60=5\times 60\times 60=18000$ 米.

終每秒減速6秒米.至停車場之時間t.及經過之距離S_3.於等加速運動之公式.以加速度漸減.故a爲負.卽

$0=v_1-6t$　　$\therefore$　$t=\frac{v_1}{6}$　卽　$t=\frac{5\times 60}{6}$ 秒

$S_3=v_1t-\frac{1}{2}\times 6\times t^2=5\times 60\times\frac{5\times 60}{6}-\frac{1}{2}\times 6\times\frac{(5\times 60)^2}{6^2}$

$=15000-7500=7500$ 米.

故兩停車場之距離$S_1+S_2+S_3$

$9000+18000+7500=34500$ 米.

6. 據本書32節末條所論.物體拋上昇至最高之時間與復歸原位置之時間相等.故以本題往復之時間.爲12秒.則昇至最高時.不可不爲6秒.但依公式昇至最高之時間$t=\frac{v}{g}$　故　$6=\frac{v}{9.8}$　卽$v=58.8$.

7. 物體由靜止墜落至第2秒終之距離$S=\frac{1}{2}9.8\times 2^2$

　,,　,,　至第7妙終之距離$S=\frac{1}{2}9.8\times 7^2$

故由第3秒初至第7秒終所通過之距離$s=\frac{1}{2}9.8(7^2-2^2)=220.5$ 米.

8. 以初速爲v.以終速爲$-v$.(速相等而方向相反故用負號)

$\therefore$　速之變化＝終速－初速$=-v-v=-2v$

9. 於此題落下加速度g.旣爲已知之值.因之

$g=980$,　　$t=2$,　　$S=\frac{1}{2}gt^2=1960$ 糎.

由落下公式 $v=gt=1960$ 秒糎。

或由落下公式 (3) $v^2=2gS$　$v=\sqrt{2gS}=1960$ 秒糎。

10. 物體拋上往復之時間 $=\frac{2v}{g}=\frac{100\times 2}{980}=0.2$ 秒。

11. (解一)　第一石拋上後經 $x+8.7$ 秒。第二石亦拋上經 8.7 秒。兩者相會。故若以其高爲 S 米。則

第一石 $S=100(8.7+x)-\frac{1}{2}\times 9.8(8.7+x)^2$

第二石 $S=100\times 8.7-\frac{1}{2}\times 9.8\times 8.7^2$

$$\therefore\quad 100(8.7+x)-\frac{1}{2}\times 9.8(8.7+x)^2$$

$$=100\times 8.7-\frac{1}{2}\times 9.8\times 8.7^2$$

次依代數二次方程式解法。得 $x=3$ 秒

(解二)　第一石達於最高處所費之時間，由拋上公式。

$$t=\frac{v}{g}=\frac{100}{9.8}$$

又此石與第二石相遇後落下之時間。與第二石拋上至相會之點所費之時間相等。卽 8.7 秒也。而第一石由出發至與第二石相會之時間 $(8.7+x)$ 秒也。故第一石由出發達於最高點。次轉方向復歸原位置之時間。爲 $(8.7+x+8.7)$ 秒。不可不等於 $\frac{100}{9.8}$ 之二倍。因得次之方程式。

$$8.7+x+8.7=\frac{100}{9.8}\times 2$$

由之得　$x=3.008$

卽所求之時間 3 秒也。

(解三)　本題又由兩石相遇時。其速度均等得解之。卽第一石自出發至衝突所要之時間爲 $8.7+x$ 秒。達於最高點要 $\frac{100}{9.8}$，故第一之石。由最高點落下 $\left(8.7+x-\frac{100}{9.8}\right)$ 秒。其相會之速度。由落下體之公式 (1)。當爲 $g\left(8.7+x-\frac{100}{9.8}\right)$ 秒米。第二石至相會之速度。爲 $(100-g\times 8.7)$ 秒米。此兩者相等。

$$g\left(8.7+x-\frac{100}{9.8}\right)=100-g\times 8.7$$

卽
$$9.8\left(8.7+x-\frac{100}{9.8}\right)=100-9.8\times 8.7$$

兩邊以9·8除之。則 $8{\cdot}7+x-\frac{100}{9{\cdot}8}=\frac{100}{9{\cdot}8}-8{\cdot}7$

因得與前同值

$$8{\cdot}7+x+8{\cdot}7=\frac{100}{9{\cdot}8}\times 2$$

12. 由塔頂落下之石。與由下方拋上之石。相會於塔之中途。即經過144尺。如以所費之時間爲 t 秒。則

$$144=\frac{1}{2}\times 32\times t^2 \text{（本題單位用尺故 } g=32\text{）}$$

由之得 $t=3$ 秒。

故拋上之石。與落下之石相會之時間。要3秒。

即其間經過144尺之距離也。因之以石之初速度爲 v。則由拋上體之公式(8)。

$$144=v\times 3-\frac{1}{2}\times 32\times 3^2$$

因得　　$v=96$ 秒尺。

又以與落下之石相會之速度爲 v'。則由拋上體之公式(7)。

$$v'=96-32\times 3$$

由之　　$v'=0$

13. 以 S 爲所求井戶之深。以 t 爲石達於井戶之時間。以 t' 爲石擊水面後音達於耳之時間。是

$$t+t'=2\text{秒}\qquad \therefore\ t'=2-t$$

由落下公式　$S=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}9{\cdot}8t^2=330t'$（因音皆以等速進行故）

$$\therefore\quad \frac{1}{2}9{\cdot}8t^2=330(2-t)$$

去分母簡單之如次。

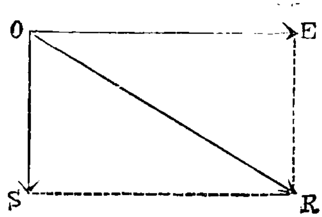
$$9{\cdot}8t^2+660t-1320$$

由代數二次方程式解法

$$t=\frac{1}{9{\cdot}8}\left(-330\pm\sqrt{330^2-(-1320)}\right)$$

以 t 斷無負數之理。故兩根中只取其正者可也。因之由前式 $t=\frac{19}{9{\cdot}8}$，

故井之深 $S=\frac{1}{2}\times 9{\cdot}8\times\left(\frac{19}{9{\cdot}8}\right)^2=18.4$ 米

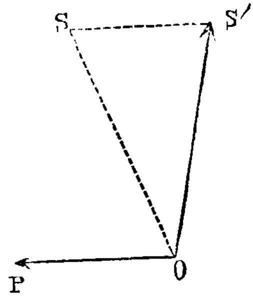


14. 船之速力每時8海里。故若河水無流動。則一時間之後。當至正東E處。進行10海里。但以河流一時間流於正南6海里。故舟受兩面運動。不可不進行於O

R之方向。以OR為長方形之對角線。故

$$OR=\sqrt{OE^2+OS^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10\text{ 海里}$$

15. 彈丸離礮口之際。更分騎手疾驅之速度。故若以彈丸之速度為OS′。與騎手走速OP之合速度為OS。則野獸在S之時。銃首不可直望S而望獸之後方S′。但若野獸初在S′。與騎手等速平行於OP而走。則目的不可不直望野獸。蓋野獸由S′走至S時。得看作SS′=OP。恰如人至P時。彈丸至OS之方向。與野獸於S相會。



16. 用組合之例三u之值代以x得

$$x^2=10^2+15^2+\sqrt{2}\times15\times10=325+150\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad x=\sqrt{325+150\sqrt{2}}\text{ 秒米}$$

17. 此題解法與42頁例1同。惟例1之解法。用幾何學。茲依三角法解之如次。

用組合之例五公式

$$u^2=2(1+\cos\theta)v^2$$

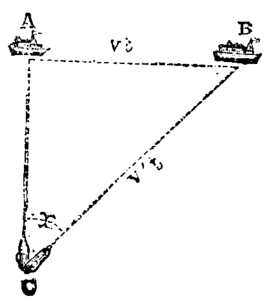
今 $$\cos\theta=120^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad u^2=2v^2-v^2=v^2$$

$$\therefore\quad u=v=v'$$

18. 東北方向與正東方向其角必為45°。故正北正東與東北方向所成之角相等。用組合之例(1)。$u=\sqrt{2}\,v$ 之公式。u 等於12。v 為所求之速度。卽 $12=\sqrt{2}\,v$

$$\therefore\quad v=\frac{1}{\sqrt{2}}\times12=\frac{\sqrt{2}}{2}\times12=6\sqrt{2}$$



19. 船 t 秒之後自 A 達於 B，彈丸同時間自 C 達於 B。

今 $$\sin x=\frac{AB}{BC}=\frac{vt}{v't}$$

故 $\frac{v}{v'}$ 為 $\sin x$ 所求之角度也。

20. $$\frac{v}{v'}=\frac{100}{200}=\frac{1}{2}$$

故 $\frac{1}{2}$ 為 $\sin x$ 之角度而 $\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$

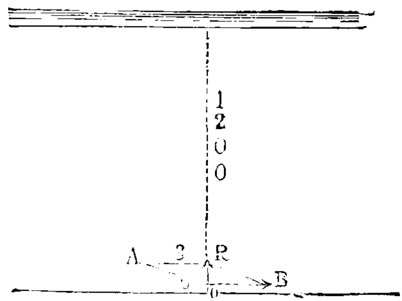
故所求之角度爲 $30°$

21. 以汽船之速度爲 x. 以河流之速度爲 y. 依題意

$x+y=3$　　　$x-y=2$

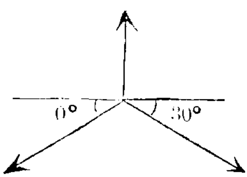
故　$x=5$　　　$y=3$

今以所求之時間爲 t. 此時間中欲橫衝河流. 直抵對岸. 船首不可不向 OA 而航行. 河流本 OB 之方向. 茲依平行四邊形法. 得於 AR 示河流之方向. 由是 $\sqrt{5^2-3^2}=4$ (卽對角線 OR 之長. 爲每時間所經過之路程.)



因之　$1200\div4=300$. 卽 $t=300$ 時. 卽 125 日也.

22. 第一與第三速度同爲 60 尺. 故以其 $120°$ 之夾角所爲之合速度. 亦必 60 尺. 且 88 尺不可不在其反對之方向. 故總合速度爲西 $30°$ 以南. $(88-60)=28$ 尺.



第二章之問題

1. 100 功之力働於質量 25 克之物體. 所生之加速度 $\frac{100}{25}=4$ 秒秒糎. 故 5 秒間作用生 $4\times5=20$ 秒糎之速度.

2. 此物體 3 秒間經過 10 米.(卽 1000 糎)以其加速度爲 a 秒糎. 由等加速運動之公式

$$1000=\frac{1}{2}a\times3^2$$

$$\therefore\qquad a=\frac{2000}{9}$$

由 (1) 式　　$F=ma$

$$F=300\times\frac{2000}{9}=\frac{200000}{3}\text{功}$$

3. 力一分間作用於物體. 生 45 秒糎之速度. 一秒間作用於物體. 自生 $\frac{45}{60}$ 秒糎之速度. 故此物體運動之加速度 $\frac{45}{60}$ 卽 $\frac{3}{4}$ 秒秒糎. 故所求之力. 由 $F=ma$

$$50\times\frac{3}{4}=\frac{75}{2}\text{功}$$

4. 此物體一秒間運動量之變化.

$$\frac{50\times 60-50\times 15}{30}=75\text{功}$$

又如次式亦得求之

此物體之加速度 $\frac{60-15}{30}=\frac{3}{2}$ 秒秒𥳑故其力 $F=ma$

即　$50\times\frac{3}{2}=75$ 功。

5.　彈丸之運動量 14×800 磅秒尺.又大礮始運動之速度爲 v 秒尺.其運動量 $2240\times 2\times v$ 磅秒尺也。

由運動之第二則此兩運動量當相等。

故　$2240\times 2\times v=14\times 800$

$$\therefore\quad v=\frac{14\times 800}{2240\times 2}=2\cdot 5\text{ 秒尺}$$

6.　以力爲 F.5 秒間所作用之力.即 F 功 $\times 5$ 秒.本有四十二秒𥳑之速度者.今欲減去 12 秒𥳑之速度.則是本有 150×42 之運動量者.減去 150×12 之運動量.由運動之第二則.

$$F\times 5=150\times(42-12)\text{ 運動量之變化}$$

$$\therefore\quad F=900\text{ 功}$$

7.　3 頓 $=3\times 2240$ 磅始曳車輛之力.由運動之第二則

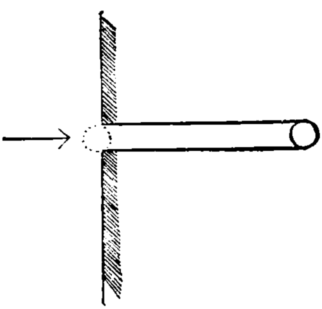
$$F\times 5=3\times 2240(10-0)$$

$$\therefore\quad F=13440$$

次加力 3 倍.增重 2 倍.則

$$3\times 13440\times 10=2(3\times 2240)(v-0)$$

$$v=\frac{3\times 13440\times 10}{2(3\times 2240)}=30\text{ 尺}$$



8.　$m=200\quad v'=0\quad v=500$

由　$v'^2-v^2=2as$

故　$a=-\frac{500^2}{2\times 80}$

以之代入 $F=ma$ 之式中。$F=-200\frac{500^2}{2\times 80}$

a 用(−)號者。示速度漸減之意。F 用(−)號者。力之方向。與運動之方向相反對之意也。

9.　衝突前甲所有之運動量 M_1u_1

　,,　,,乙　,,　,,　,, M_2u_2

故衝突前全體之運動量 $M_1u_1+M_2u_2$

衝突後合體之質量 M_1+M_2

,, ,, ,, 速度 v

故衝突後合體之運動量$(M_1+M_2)v$

而衝突前後兩運動量之總和常相等.故

$$M_1u_1+M_2u_2=(M_1+M_2)v$$

$$\therefore \qquad v=\frac{M_1u_1+M_2u_2}{M_1+M_2}$$

又若u_1比u_2大時.v比u_1小.比u_2大.且因衝突M_1所失之運動量$M_1(u_1-v)$等於M_2所得之運動量$M_2(v-u_2)$

故 $$M_1(u_1-v)=M_2(v-u_2)$$

改書之 $M_1(u_1-v)-M_2(v-u_2)=0$

又 $$M_1u_1+M_2u_2=(M_1+M_2)v$$

10. 兩船靜止由運動量不變之法則

$$m_1u_1+m_2u_2=0$$

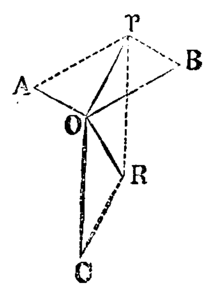
m_1m_2為大小兩船之質量u_1u_2為兩船相引某時間後所得之速度.

依題意$m_1=1000\times m_2$ 故$u_2=-1000\times u_1$即小船以千倍之速向大船運動.是質量與速度為逆比例.此時兩船速度相差甚大.故僅見小船動於大船之方向.而大船若覺其無動者.

11. 礮丸進行之運動量與礮身退却之運動量相等.其方向相反者也.故依題意.

$$5\times 100=1600\times v$$

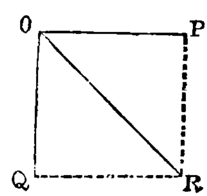
$$\therefore \qquad v=\frac{5}{16}$$



12. 依題意作OA,OB,OC.相互為120°之角.又OA:OB:OC=4:7:10

先以OA.OB之合力.求Or.次求Or,OC之合力OR.此即三力之合力也.

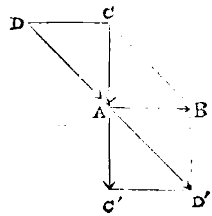
又先求OA,OC之合力.次將此合力與OB.再求合力.亦得OR.與前同.或先由OB,OC.求之其結果亦不變.



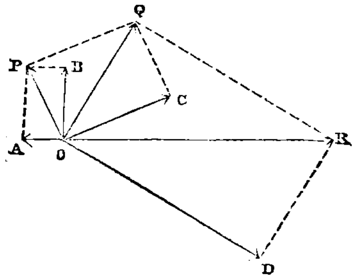
13. 向於東南50之力OR.得看作正東之力OP與正南之力OQ二力之合力.$P\hat{O}Q$為直角.OR二等分之.故

$$OP=OQ=\sqrt{\frac{OR^2}{2}}=\sqrt{\frac{50^2}{2}}=35.3\cdots\cdots$$

14. 欲求AB,CA,DA,三力之合力.不可不延長於同方向.今以CA延長至AC′,使與CA相等.DA延長至AD′.使與DA相等.AB,AC′,AD′.即所求之三分力也.而AB.AC′之合力,即AD′.故AB.AC′AD′之合力.等於2AD′.即2DA也.



15. 以AB之合力爲P.A,B,C,之合力.即P,C,之合力.以其力爲Q.又A,B,C,D之合力爲R.



$R^2=D^2+Q^2 \quad Q^2=C^2+P^2 \quad P^2=B^2+A^2$

∴ $R^2=D^2+C^2+B^2+A^2$

但 $B=2A$. $C=A+B=3A$.

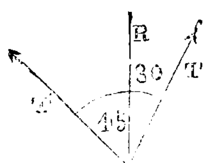
$D=A+B+C=6A$.

∴ $R^2=(6A)^2+(3A)^2+(2A)^2+A^2$

$=50A^2$

∴ $R=5\sqrt{2}\,A$

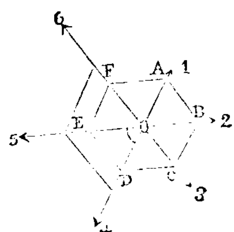
16 設T與T′爲繩之張力.其所成之合力R.不可不在於與河流成一直線而反對之方向.今分解R爲T與T′之方向.作平行四邊形.則



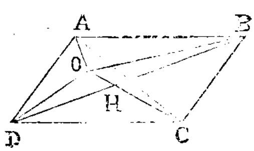
$$\frac{\sin 30^\circ}{T'}=\frac{\sin 45^\circ}{T}$$

即 $$\frac{T}{T'}=\frac{\sin 45}{\sin 30}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

17. 就右圖觀之.於各反對之方向相作用之力1與4 2與5,3與6相消.所作用於O點之力.僅D,E,F,三角.其大各爲3.D角與F角之合力爲F.亦3也.更加E方向固有之力3.共爲6.其方向即在第五力之方向.

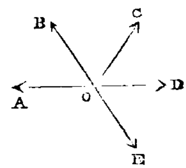


18. 今於ABCD內採O點論之.組立OA及OC之二力.則其合力通過AC之中點H.而其量不可不爲OH之二倍.又即以OB及OD之二



力組合之亦同.故四力之合力為OH之4倍.又卽採O點於四邊形外.其理亦同.

19. 相等五力各以A,B,C,D,E,表之.

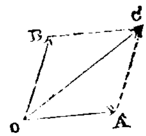


$$A\hat{O}B=B\hat{O}C=C\hat{O}D=60^\circ$$

∴ $A\hat{O}B+B\hat{O}C+C\hat{O}D=180^\circ$

故AOD在一直線.AD二力相抵消.無作用.而B,E二力亦然.故所求之合力為C.

20. 以OA,OB,為相等之二力.$A\hat{O}B=\theta$



由33條組合之例王

$$\overline{OC}^2=\overline{AC}^2+\overline{OA}^2+2OA\times OB\times\cos\theta$$

但 $OA=OB$

∴ $OC^2=\overline{2OA}^2+\overline{2OA}^2\times\cos\theta$

而 $OA=P$

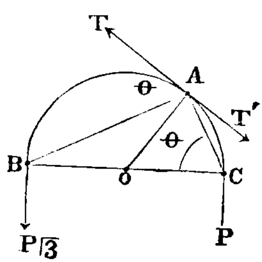
∴ $OC^2=2p^2+2p^2\cos\theta$

$=2p^2(1+\cos\theta)$

由三角法公式 $(1+\cos\theta)=2\cos^2\frac{1}{2}\theta$

∴ $OC^2=2p^2 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$

21. 分解P力為AO及AT之方向.又分解P√3力為AO及AT之方向.則AT及AT′者.共為於A點之切線也.其分解於AO方向之分力.以直角之方向作用於圓輪.以其抵抗而平均.AT及AT′乃共使A輪運動於左右之力也.故今A輪在平均之狀態時.AT及AT′不可不相等.



而以∠ACB=∠BAT假定之為θ.則∠ABC=∠CAT′=$(90-\theta)$

因得 $AT=P\sqrt{3}\cos\theta$

又 $AT'=P\cos(90-\theta)$

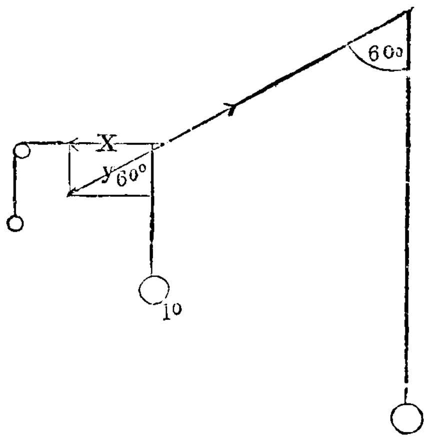
此二力相等時. $P\cos(90-\theta)=P\sqrt{3}\cos\theta$

卽 $P\sin\theta=P\sqrt{3}\cos\theta$ 或 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=\sqrt{3}$.

從之得　　$\theta=60^\circ$.

故 θ 等於 60° 時. $AT=AT'$. A 輪在平均之狀態而靜止.

22. 線引於上方.水平力與10磅之力.引於下方.上方與下方之力相等.故水平力及10磅所成之合力.與線之張力相均.而作用於反對之方向.今以水平力為 x 則



$$\tan 60=\frac{x}{10}$$

即　$$\sqrt{3}=\frac{x}{10}$$

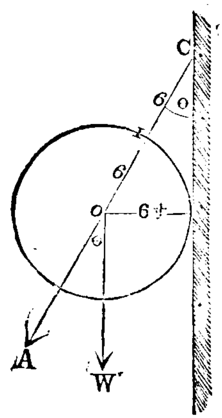
$$x=10\sqrt{3}$$

又以 y 為線之張力.則

$$\cos 60^\circ=\frac{10}{y}$$

即　$$\frac{1}{2}=\frac{10}{y}\quad\text{或 } y=20$$

23. 就球對壁之力思之.以球之重量為W.此W之力.得分為OB及OA之方向.蓋壁對球有作用之力.故球對壁亦有必反動力.又OA.即球及於線之張力.何則線牽球以力.而球對線亦必有相等之反動力也固矣.今欲求OA之分力.不可不求OA與OW所成之角.欲求 $A\hat{O}W$.但求 $O\hat{C}B$ 可矣.



就 $O\hat{C}B$ 思之. $\sin\theta=\dfrac{6}{6+6}=\dfrac{1}{2}$ (因 θ 為 30°.)

故 θ 之角既求出.則OA自易求之.

遂以　$$\frac{W}{OA}=\cos 30^\circ$$

即　$$\frac{W}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

得　$$OA=\frac{2W}{\sqrt{3}}$$

第三章之問題

1. 以後之引力爲F.則

$$F:60=\frac{5\times 2}{20^2}:\frac{2\times 3}{40^2} \qquad \therefore \qquad F=400$$

2. 1米 =100糎. 1瓩 =1000克. 依CGS式. 質量須用克 長須用糎. 因將題中米與瓩. 變爲糎與克. 代入$F=\frac{mm'}{r^2}$之公式

但 $K=65\times 10^{-8}$

$$\therefore \qquad F=6{\cdot}5\times 10^{-8}\times\frac{1000000\times 1000000}{100^2}$$

$$=6{\cdot}5\times 10^{-8}\times 10^{12}\times 10^{-4}$$

$$=6{\cdot}5\times 10^{0}$$

$$=6{\cdot}5 \text{ 功}$$

3. 以所求之引力爲x功.而引力乃反比例於距離之二乘者.故

$F:x=100^2:20^2$ (∵ 1米 =100糎)

$$\therefore \qquad x=\frac{20^2\times F}{100^2}=F\times\left(\frac{200}{100}\right)^2=F\times\frac{4}{100}$$

4. 依題意物體離地球中心.比在地表面之物體.離中心之長.有二倍.而引力乃反比例於兩體距離之自乘.故該物體之重.比在地表面之物體.只有$\frac{1}{2^2}$ 卽 $\frac{1}{4}$重也.

5. 欲求幾功之數.不可不將100兩.變爲C.G.S單位.由重量單位 1克 =.027288兩.故1兩 $=\frac{1}{.027288}$克. ∴ 100兩 $=\frac{100}{.027288}$克. 卽$\frac{100000000}{27288}$.

若每秒有980秒糎之加速度.則所生之力$F=mg=\frac{100000000\times 980}{27288}=3591322$功.

6. 於兩處鐵塊重量之比.卽重力之比.

(赤道:極 =9781:983)

此鐵塊不論於赤道秤之.或於極秤之.皆一斤十二兩.蓋以鐵塊與秤錘之重量.共以重力之强同增減故也.

7. 由測g式

$$g=980{\cdot}6056-2{\cdot}5028\cos 2\lambda-0{\cdot}000003h$$

依題意 $\lambda=30°$ $\cos 2\lambda=\cos 60°=\frac{1}{2}$ 又以1糎 =0.0031尺

故 1 尺 $=\frac{1}{0.0031}$ 粍。 1200 尺 $=\frac{1200}{0.0031}$ 粍。 卽 $\frac{12000000}{31}$ 粍。$=387097$ 粍。

$\therefore \quad g=980.6056-2.5028\times\frac{1}{2}-0.000003\times387097$ 粍

$=980.6056-1.2514-1.16129$

$=978.192909$ 粍 $=978.19$

8. 依前題山頂重力之强 $=978.19$

山麓重力之强 $=980.6056-1.2514=979.3542$

山麓與山頂物體重量之比。卽重力加速度之比。故若以山頂物體之重爲 x。則

$1:x::979.3542:978.19$

$\therefore \quad x=\frac{978.19}{979.3542}=998\ldots$

第四章之問題

1. 因兩力之重相等。故作用於錘之重力互相均。今全體所生之加速度爲 20。故作用於錘之力。不可不爲 $2P\times a$ 卽 $2\times10\times20=400$ 달。

2 $P=48$ $Q=50$ $a=25$ 秒秒糎 $g=980$ 秒秒糎

由公式 $(Q-P)g=(Q+P)a$ 以上之各值代入。其兩邊之不相等也明矣。然則全體以加速度 a 運動時。其所費 $(Q-P)g$ 之力外。不可不更加以 F 之力也。故

$$(Q-P)g+F=(Q+P)a$$

$$\therefore \quad F=(Q+P)a(Q-P)g=98\times25-2\times980=490$$

3. 由公式 $a=\frac{p}{2P+p}\times g$ 本題 $P=100$ $p=5$

$\therefore \quad a=\frac{5}{205}\times980$ 卽 $a=23.9$ 秒秒糎

求 3 秒間之距離。應用落下之公式 $S=\frac{1}{2}\times23.9\times3^2$

卽 $S=107.55$ 糎。

次第五秒之路程。卽以 5 秒間之路程。減去 4 秒間之路程可已。而 5 秒間之路程 $S_5=\frac{1}{2}\times23.9\times5^2$。4 秒間之路程 $S_4=\frac{1}{2}\times23.9\times4^2$。

$$\therefore \quad S_5-S_4=\frac{1}{2}\times23.9\times5^2-\frac{1}{2}\times23.9\times4^2=\frac{1}{2}23.9(5^2-4^2)=107.55$$

卽第五秒之路程。爲 107.55 糎也。

4. 3 秒間使運動 72 尺距離之加速度依加速度之公式 $72=\frac{1}{2}\ 3^2$ 由之得 $a=16$ 尺。

又依(48)條之公式　$g=t\frac{2P+p}{p}$代入重力加速度32尺與錘落下之加速度16尺．爲

$$32=16\frac{2P+p}{p}$$

由之得　　　$p=2P$

而一錘之重量爲$P+p=3P$一錘之重量爲P是兩錘重量之比爲1:3也．

5.　由公式$T=\frac{2PQ}{Q+P}g$　本題$Q=55$　$P=45$

$$\therefore\quad T=\frac{2\times55\times45}{55+45}\times980\quad 即\quad 49.5\times980\ 功$$

但依題意．乃求其壓力．故表之以重力單位．宜用49.5克．故及於滑車軸之重量．爲系張力之二倍．49.5×2卽99克也．

(註)　本題所及於滑車軸之重量．爲及於滑車傍之重量卽系之張力)二倍．其理可參考滑車節自明．

6.　本題先求8秒間錘之速度．

由公式　$g=\frac{Q+P}{Q-P}a$　卽　$a=\frac{Q-P}{Q+P}g$

本題　$g=32$呎　$Q=17$　$P=15$

故　　$a=\frac{17-5}{17+15}\times32=2$呎

以此加速度8秒間所生之速度．爲2×8 (因$v=gt$) 卽16尺．

次由大錘減8磅時．固必反前之方向而迴轉．其迴轉之加速度設爲a'

則　　$a'=\frac{15-9}{15+9}\times32.$　卽　$a'=8$呎．

玆欲求其至反倒之方向．所要之時間．須反解題意．卽如以16呎之初速度．抵抗8呎之加速度．要幾時間繼續其運動．推而言之．恰如拋上物體．以v之速度抵抗g之加速度．要幾時間之後．始反倒其方向．故本題得應用$t=\frac{v}{g}$之公式．卽$t=\frac{16}{8}=2$．

卽2秒之後．始轉倒其運動之方向也．

7.　由若干高之處．水平發射之彈丸至落下所要之時間．與由其高鉛直落下所要之時間相等．

故若以其時間爲t．據落下之公式

$$150=\frac{1}{2}\times9.8\times t^2\quad\therefore\quad t=\frac{300}{9.8}=\frac{1500}{49}秒$$

又此彈丸所至之水平距離.等於此時間中以初速爲等速所經過之距離.故若以其距離爲S.則

$$S=120\times\frac{1500}{49}=\frac{180000}{49}\text{米突.}$$

8. 以球7秒落地.則達於最高點必要$\frac{7}{2}$秒.由最高點落下至地.亦要$\frac{7}{2}$秒.而此球初速度之鉛直分速度v_0.$\frac{7}{2}$秒間達至於最高點之處.其v_0之速度不可不至於0. 卽 $0=v_0-g\times\frac{7}{2}$.

由之求v_0之值.$v_0=\frac{7}{2}\times9{\cdot}8=34{\cdot}3$秒米.

又其達於最高點之距離.卽等於以v_0之速度$\frac{7}{2}$秒間所至之距離.據拋上體之公式.

$$S=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 \quad \text{由之代入實數求}S\text{之值}$$

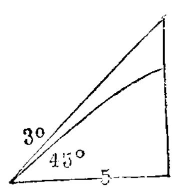
$$S=34{\cdot}3\times\frac{7}{2}-\frac{1}{2}9{\cdot}8\times\left(\frac{7}{2}\right)^2=60{\cdot}025\text{ 米突}$$

而拋球之方向因與水平面成60°之角.卽與鉛直線成30°之角.茲若以拋球之速度爲v.則$v=\frac{v_0}{\cos 30^\circ}$

$$\therefore \quad v=\frac{34{\cdot}3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{68{\cdot}6\sqrt{3}}{3}\text{秒米.}$$

9. 每秒30米突之水平分速度$=30\times\cos45^\circ$.

卽$\frac{30}{\sqrt{2}}$.以此速度至塔麓之時間.卽物體達塔頂之時間爲$5\div\frac{30}{\sqrt{2}}$ 又其間物體爲重力引下之距離.由落下公式

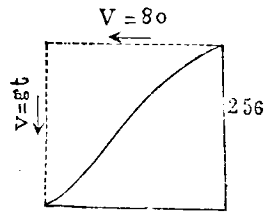


$$S=\frac{1}{2}\times9{\cdot}8\times\left(5\div\frac{30}{\sqrt{2}}\right)^2\text{卽 }0{\cdot}272\text{ 米突}$$

故塔之高爲$5-{\cdot}272$.卽4·728米突.

(註) 上$5-{\cdot}272$者.非底邊之5減0.272也.乃以本題直角三角形之一銳角爲45°.餘一銳角亦爲45°也明矣.是本題之圖爲二等邊直角三角形也.故高等於底.

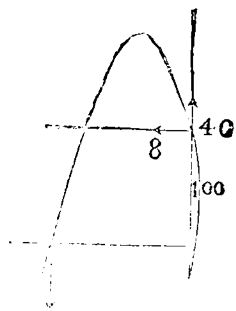
10. 物體達於地面之時間。與由垂直線上256之高落下之時間同。



由落下公式 $256=\frac{1}{2}\times 32t^2$ 卽 $t=4$ 秒。

此時物體所進行於水平線上爲 4×80。卽進行320尺。又物體達於地面時。所有之速度。於垂直方向 32×4 卽128尺。與水平方向80尺之速度。求合速度。則 $\sqrt{128^2+80^2}=150{\cdot}94$ 尺。卽其時之速度爲150 94尺。

11. 10秒間彈丸所昇上之距離依公式



$$S=40\times 10-\frac{1}{2}\times 9{\cdot}8\times 10^2=-90\text{ 米}$$

卽在輕氣球90米之下。其離地上之數。爲 $100-90$。卽在10米之處。

次垂直速度 $v=40-9{\cdot}8\times 10$

卽 $v=-58$ 是乃向於下方58米也。又以水平線上之速度爲8米。故合速度爲 $\sqrt{58^2+8^2}$。卽其原速度爲58 55米。

12. 用49節公式(4)　$S=\frac{V^2 sin 2\theta}{g}$

卽　$$12250\sqrt{3}=\frac{490^2 sin 2\theta}{9{\cdot}8}$$

$\therefore$　$$sin 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=sin 60^\circ \text{　或　} 120^\circ$$

故　$$\theta=30^\circ \text{　或　} 60^\circ$$

卽彈丸向水平面 30° 角方向發射。或 60° 角之方向發射。

13. 斜方100米突之速度。若分解爲鉛直及水平之二方向。則垂直分速度 $v_2=v sin\theta$。卽 $100 sin 30$ 水平分速度 $v_1=v cos\theta$。卽 $100 cos 30$ 彈丸達於地面之時間。不可不等於至垂直上方最高點之時間二倍。故其時間 $2\times\frac{100 sin 30}{9{\cdot}8}$ 卽10·204秒。

又於此時間內。所至水平距離。卽彈丸達於地面之距離。$S=v_1t=v cos 30t$

卽 $(100 cos 30^\circ)\,10{\cdot}204$ 但 $cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故達於地面之距離$=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times10.204=883.67$米突

14. 由公式$a=\frac{v^2}{r}$本題之直徑爲4.2.則半徑r爲$\frac{1}{2}\times4.2$卽2.1又$v=3$.

故以之代入本式$a=\frac{32}{2.1}$秒秒米

15. 物體爲圓運動時.絲之張力與所有之遠心力相均.故其值卽等於求心力.而絲之長1米$=100$糎.卽爲圓道之半徑.故

$$F=\frac{100\times500^2}{100}=50000\text{ 功}$$

16. 物體之質量$m=5$克.圓道之半徑$r=100$

由圓運動之週期$T=\frac{2\pi r}{v}$故速度$v=2\pi r\div\frac{1}{3}$.

卽於本題每秒之速度$=(2\times3.1416\times100)\times3$糎.

凡物體繫系振迴圓運動.系所以不斷者.以其系之張力能支持遠心力.今也系忽切斷.則是系之張力不能支持遠心力之故.而其始切斷之時期.卽其系之張力最大之時期.故系之强

$$F=5\times\frac{(2\times3.1416\times100\times3)^2}{100}=177655\text{ 功}$$

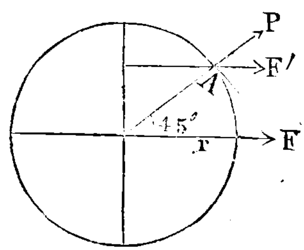
17. 若以赤道半徑之長爲640000000.則遠心力之加速度.由引力之加速度(乙)式

$$F=4\times3.1416^2\times\frac{640000000}{(24\times60\times60)^2}(C.G.S)$$

由之.得3.3846糎.卽地球之自轉止時.則此加速度消失.重力之加速度增加.而$g=980+3.3846$.

18. 物體在緯度45°爲圓運動時.其半徑等於以赤道之半徑乘$\cos45°$.

卽$\frac{r}{\sqrt{2}}$.今欲求緯度45°遠心力之加速度.不可不求赤道上之加速度.若以赤道遠心力之加速度爲F.以緯度45°之重方加速度爲F'.則有次之關係.



$$F:F'::r:\frac{r}{\sqrt{2}}::1:\frac{1}{\sqrt{2}}$$

但赤道上遠心力之加速度.由前題之答案$F=3.3846$.

故　$3.3846 : F' = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \quad F' = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{3.3846} = 2.353 \text{ 餘}$$

卽於緯度45°地方質量一克之遠心力爲1×2.393功。

次以重力之方向。乃向地心鉛直線方向。故欲求抵抗重力加速度之遠心力。不可不分解F'之遠心力。於鉛直線之方向。卽於圖中分解P之方向。而$P = F' \cos 45°$ 卽 $P = \frac{2.393}{\sqrt{2}} = 1.69$若以此加速度作用於一克之質量。則其力爲1×1.69功。

19. 以振動時間正比例於振子之長之平方根。故若以其時間爲1。

則　$\frac{1}{20} : \frac{1}{50} :: \sqrt{l'} : \sqrt{l}$

由之得　$l' : l :: 6.25 : 1$

20. 一秒一振之振子一往復時間$T=1$。而其長爲0.99384米突

$$\therefore \quad 1 = 2\pi\sqrt{\frac{0.99384}{g}} \qquad (1)$$

又5秒一振之振子一往復之時間$T=5$而其長爲l。則

$$5 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (2)$$

以(1)式除(2)式

$$5 = \sqrt{\frac{l}{0.99384}}$$

由之得　$l = 25 \times 0.99384 = 24.846$ 米突

21. 以一晝夜之分數爲m。以此時辰儀一晝夜之分數爲m'。以正之時辰儀一晝夜之振動數爲n。以此時辰儀一晝夜之振動數爲n'。

則　$m : m' = n : n'$

但各時辰儀於同時間之振動數n, n'。與其週期T, T'爲逆比例。故

$$m : m' = T' : T$$

又以正之振子之長爲l。以此時辰儀振子之長爲l'。則

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}$$

$$\therefore \quad T' : T = \sqrt{l'} : \sqrt{l}$$

因之　$m : m' = \sqrt{l'} : \sqrt{l}$

而　$m=24\times60=1440,\quad m'=1440-5=1435$

$l'=99\cdot1$

$$\therefore\quad l=\frac{1435^2\times99\cdot1}{1440^2}=98\cdot4$$

故所短縮之長 $99\cdot1-98\cdot4=0\cdot7$ 糎.

22. 案本題一晝夜 86400 回擺動.乃指擺子自右之極端至左之極端之回數.故依擺子之公式.其週期當為2秒.

故
$$2=2\times3\cdot1416\sqrt{\frac{0\cdot991}{g}}$$

$$\therefore\quad g=\overline{3}\cdot1416^2\times0\cdot991=9\cdot782\ \text{米突}$$

23. 重力加速度為32呎.氣球之每秒以1呎之加速度上昇.恰等於每秒受(32+1)呎之加速度而運動.

由公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 2π 固為一定之數. l 之長亦一定者.故 $T\propto\sqrt{\frac{1}{g}}$.若以在地球上擺子之週期為 T.在輕氣球上擺子之週期為 T'.則

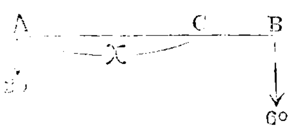
$$T:T'::\sqrt{\frac{1}{32}}:\sqrt{\frac{1}{33}}$$

由之得　$T:T'::1:0\cdot9847$

故在地上一秒一擺之擺子時鐘.若3600秒間擺動3600回.則於輕氣球同一時間之擺動回數.要 $3600\div0\cdot9847$.即3656回.即於一時間內增進56秒也.

第五章之問題

1. 二力同方向時.其合力之大為80功.若以合力之着力點為C.設AC=x糎.則



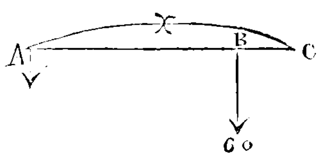
$$x:24-x=60:20$$

由之得　$x=18$ 糎

二力方向反對時.合力之大.為40功.若以合力之着力點為C'.設AC'=x糎.則

$$x:x-24=60:20$$

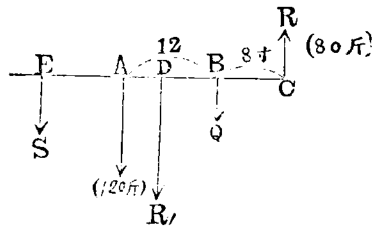
由之得　$x=36$ 糎.



2. 先求AB之合力 P_1 其大 $P+Q=120+40=160$ 斤.以其着力點為D.以BD=x寸.則

$$x : 12-x = 120 : 40$$

$$\therefore \quad x = 9$$



次求R_1與R之合力S。其大$R_1-R=160-80=80$斤。其着力點爲E。以$CE=x$寸。則

$$x : x-CD = R_1 : R$$

即
$$x : x-17 = 160 : 80$$

$$\therefore \quad x = 34$$

故P,Q,R之合力。當在自C以左方34寸之處。其大80斤。方向與PQ同。

（注意）此等問題用能率定理解法較簡單。

即以合力爲S。以其着力點爲E。以$CE=x$寸。則關於E點諸力之能率如次。

P之能率	$-P\times AE$	即	$-120(x-20)$
Q之能率	$-Q\times BE$	即	$-40(x-8)$
R之能率	$R\times CE$	即	$80x$

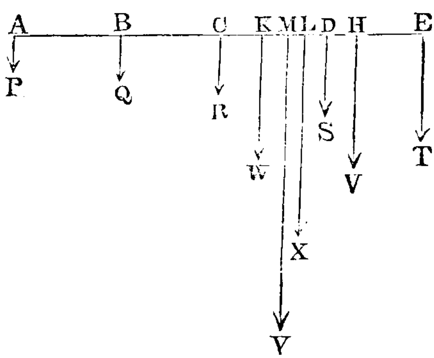
S之能率因爲零。而分力能率之和等於合力之能率。故得以式表之如次

$$-120(x-20)-40(x-8)+80x=0$$

即
$$-80x=-2720$$

$$\therefore \quad x=34$$

3. 働於A,B,C,D,E五點之力。表以P,Q,R,S,T。先以P,T合力之作用點爲H。則



$$AH : EH = T : P = 5 : 1$$

設 $EH = x$寸

$AE = 24$寸

$$24-x : x = 5 : 1$$

$$\therefore \quad x = 4$$

即 $EH = 4$寸

而P,T之合力V之大$5+1=6$斤。

次Q,S之合力W之大$Q+S=2+4=6$斤。若以其着力點爲K。設$DK=x_1$寸。則因$BD=12$寸。故

$$12-x_1 : x_1 = S : Q = 4 : 2$$

$\therefore \qquad x_1=4$

即　　DK＝4 寸

但以 EH＝4 寸.則 DH＝2 寸.故 KH＝6 寸.由之 WV 之合力着力點在 KH 之中點 L. KL＝3 寸.又其合力 X 之大 W＋V＝12 斤.

次求 X 與 R 之合力 Y.則得 P,Q,R,S,T 之合力.

由 KL＝3 寸. DK＝4 寸. CK＝2 寸.故 CL＝5 寸.若以 X 與 R 之合力着力點爲 M.則

$$CM : LM = X : R = 12 : 3$$

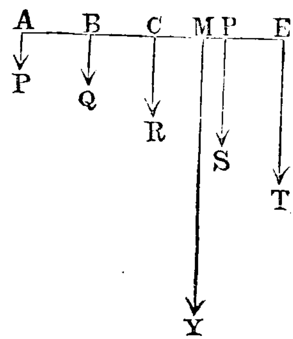
因得　　CM＝4 寸.

又 X 與 R 之合力 Y.其大 X＋R＝12＋3＝15 斤.

由之得次之結果.

所求合力之大.等於五分力之和.其着力點在 C 之右 4 寸.即自 A 至右 16 寸之處.

(注意) 用能率定理之解法.如次.



合力 Y 之大.等於五分力之和者.由平行力合成之定理明矣.故但定其合力 Y 之着力點 M 之位置可也.

求關於 M 點分力及合力之能率以 AM＝x.則

P 之能率	$P\times AM=1\times x=x$
Q 之能率	$Q\times BM=2\times(x-6)=2x-12$
R 之能率	$R\times CM=3\times(x-12)=3x-36$
S 之能率	$-S\times DM=-4\times(18-x)=-72+4x$
T 之能率	$-T\times EM=-5\times(24-x)=-120+5x$
Y 之能率	0

但分力能率之和.乃等於合力之能率.故

$$x+2x-12+3x-36-72+4x-120+5x=0$$

即　　$15x=240 \qquad x=16$

故　　AM＝16 寸.

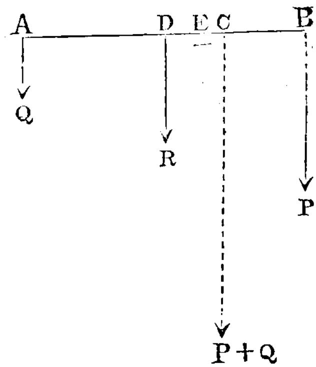
4.　　$P\times BC=Q\times AC$.

本題　　$P=40 \quad Q=20 \quad AB=3$.

故若以 AC 之距離爲 x.則

$$20\times x=40(3-x)$$

∴　　$60x=120$　即　$x=2$



又若棒之重算入則其重R=6斤。得看作6斤之重作用於中央R處。

玆以P,Q之合力作用點爲C。以棒重之作用點爲D。更求(P+Q)與R之合力着力點。設其點爲E。則

$$(P+Q)\times CE=R\times DE$$

今以　$AB=3$　$AD=\frac{AB}{2}=1.5,$

$BC=1$ (∵$AC=2$)

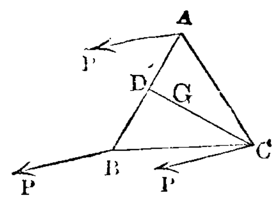
由之　$DC=AB-AD-BC=.5$

故以CE爲x_1則　$60\times x_1=6\times(.5-x_1)$

由之　$66x_1=3$　∴　$x_1=0.045$ 約

$x-x_1=1.955$　(即其支點在自A至1.955尺之處也。)

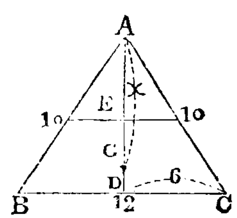
5.　作用於AB之二力P克兩相等。故其合力作用於AB之中點D。其大爲2P克。次以所作用於D點2P克之力。與作用於C點之合力。其大爲3P克。以其着力點爲G。則DG：CG=1：2



故G者三角形ABC之重心也。

由之所求之合力。即等於以3P克之力作用於三角形之重心者。

6.　先就各邊之重心言之。固不可不在其中央點。今欲求此三角環之重心。但求各邊合成之重心可也。底邊之重心在其中央點。兩邊重心之合成。亦在其中線上也明矣。故本題但求作用於E,D二力之合成可耳。惟欲求E,D二力之合成。不可不求ED之長。



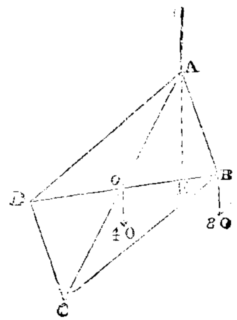
玆就AD思之。$AD=\sqrt{10^2-6^2}=8$。故$ED=4$。

由作用於E點之力=20。作用於D點之力=12。故若以A至重心之距離爲x。以E至重心之距離爲x_1

$20\times x_1=12(4-x_1)$　由之得 $x_1=1.5$

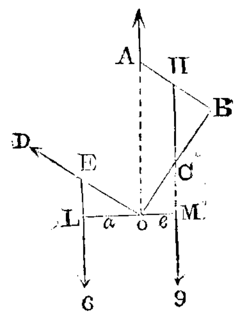
而　$AE=4$　∴　$x=4+1.5=5.5$。

即自頂點至重心之距離爲5.5寸也。



7. 板能靜止。乃作用於板之重心40克之力。與作用於角頂80克之力相均之故。今欲求板靜止時之位置。不可不於BO線上求着力點。而作用於B之力。比作用於O點之力二倍。故BE不可不爲OE之$\frac{1}{2}$卽不可不爲BO之三分之一。故若以E爲支點由此點以力作用於反對之方向。其力恰相均。

故作用於A點之力。其延長線對BD對角線上。當在自B點$\frac{1}{6}$處而靜止。



8. 以AD爲鐵線之長。其各邊之重心固各在其中央點。而4寸與5寸之重心。恰在一鉛直線內。其合力爲9。於O點對他端6之力相均時。其兩臂ab不可不反比例於其重。

今就ab兩邊之比思之。

△AOB與△OCM兩三角形爲相似形。故

$$\frac{AB}{AO}=\frac{b}{OC}\qquad\therefore\quad b=\frac{AB\cdot OC}{AO}$$

又△AOB與△OEL亦相似形。故

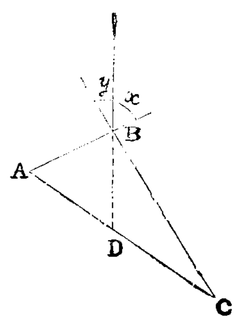
$$\frac{EO}{a}=\frac{AO}{BO}\qquad\therefore\quad a=\frac{EO\cdot BO}{AO}$$

故
$$\frac{a}{b}=\frac{EO\cdot BO}{AO}\times\frac{AO}{AB\cdot OC}=\frac{EO\cdot BO}{AB\cdot OC}$$

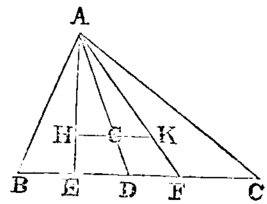
由　$EO=3\quad BO=5\quad AB=4\quad OC=2.5$

$$\therefore\quad\frac{a}{b}=\frac{3\times5}{4\times2.5}=\frac{3\times2}{4}=\frac{3}{2}$$

故　$6\times3=9\times2$ 卽於O之兩邊能率相等。故能平均。



9 三角板靜止時。繩不可不與中線BD成一直線。卽系之延長線須會於中點D據。直角三角形之性質AD=BD=CD故△ADB及△BDC爲二等邊三角形故$x=\angle A\quad y\times=\angle C$

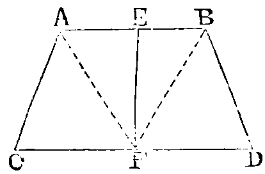


10. 設HK爲所分之二個三角形之重心所連結之線平行於BC。故

$$HK : EF :: AH : AE :: 2 : 3$$

從之　　$HK=\frac{2}{3}EF$　但EF爲$\frac{1}{2}BC$

故　　$HK=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}BC=\frac{1}{3}BC$



11. 以ABCD爲梯形。以AB,CD之中點爲E,F.

EF相結。AB,CD之長表以a, b。以EF之長爲C。結AF,BF。分梯形爲三箇三角形。所求重心之位置。卽此三箇三角形之重所作用於各三角形之重心合力着力點也。

三角形ACF,BFD乃等底等高者。故兩三角形爲等積三角形也。各以其面積爲A。以三角形AFB之面積爲A′。則此等三角形。以其高皆相等。故其面積比例於底邊。卽

$$\frac{A}{A'}=\frac{\frac{b}{2}}{a}=\frac{b}{2a}$$

此三角形重心之位置。與相等之三平行力作用於各頂點之合力着力點之位置同。(參照前第5題)故其重所作用於三角形ABF之重心者。得看作以其重$\frac{1}{3}$之力作用於各頂點。

故於上所云三箇三角形之重心。各受三角形之重所作用之合力及着力點。得如次述之。卽

作用於A,B,F各點之力$=\frac{A'}{3}$.

作用於C,A,F,F,B,D各點之力$=\frac{A}{3}$.

此五力更組合之。則

作用於A之力　　$\frac{1}{3}(A+A')$

作用於B之力　　$\frac{1}{3}(A+A')$

作用於F之力　　$\frac{1}{3}A'+\frac{2}{3}A$

作用於C之力　$\frac{A}{3}$

作用於D之力　$\frac{A}{3}$

但作用於A,B者.各以$\frac{1}{3}(A+A')$之力.卽等於以$\frac{2}{3}(A+A')$之力.作用於E.又作用於C,D以$\frac{A}{3}$之力.亦與作用於F.以$\frac{2}{3}$A之力同.故上五力所作用於五點之結果.又得變之如次.

作用於E點之力　$\frac{2}{3}(A+A')$

作用於F點之力　$\frac{1}{3}A'+\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}A$

$=\frac{1}{3}A'+\frac{4}{3}A$之力

故此等合力之着力點G.當在EF線上.而

$$EG:FG=\left(\frac{1}{3}A'+\frac{4}{3}A\right):\frac{2}{3}(A+A')$$

$$=(A'+4A):2(A+A')$$

由(1)式　$\frac{A}{A'}=\frac{b}{2a}$　$\therefore$　$A=\frac{b}{2a}A'$

故　$A'+4A=\left(1+\frac{4b}{2a}\right)A'$　　$A+A'=\left(\frac{b}{2a}+1\right)A'$

因之(2)式得變更如次.

$$EG:FG=\left(1+\frac{2b}{a}\right):2\left(\frac{b}{2a}+1\right)$$

$$=(a+2b):(b+2a)$$

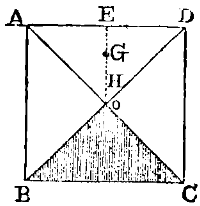
若以　$EG=x$　則　$FG=C-x$

故　$x:C-x=a+2b:b+2a$

卽　$(b+2a)x=(a+2b)(c-x)$

由之得　$x=\frac{a+2b}{3(a+b)}c$

又作用於重心之合力$\frac{2}{3}(A+A')+\frac{1}{3}A'+\frac{4}{3}A=2A+A'$為梯形之重也明矣.



12. 今切去三角形BOC.所餘之三箇三角形之中所作用於AOB及DOC重力之合力.即作用於O點.其大亦即等於二箇三角形重之和也明矣.又作用於三角形AOD重力之合力.即作用於其重心.其大亦即等於三角形之重.

若以此板1平方糎之重爲a克.則其全重爲$a\times 12^2$克.由之一三角形之重爲其四分之一.即$36a$克.

故作用於ABOCDE板上之力於O爲$36a$克之二倍.即$72a$克之重.於G有$36a$克之重.此二平行力中心.即所求之重心也.

若以此重心爲H.則

$$OH\times 72=GH\times 36$$

故 $$2\cdot OH=GH$$

∴ $$OG=OH+GH=3\cdot OH$$

而G者乃爲三角形AOD之重心.故由幾何學之定理

$$OG=\frac{2}{3}OE$$

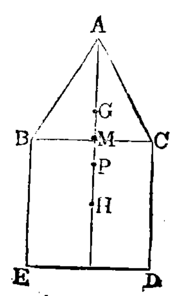
故 $$OH=\frac{1}{3}OG=\frac{2}{9}OE$$

因 $$AB=12c.m.\quad 故\quad OE=c.m.$$

∴ $$OH=\frac{2}{9}\times 6=\frac{4}{3}c.m.$$

即所求之重心H自O至$\frac{4}{3}$ c.m. 之處.

13. ABC爲正三角形.BCDE爲正方形.以BC之中點爲M.結A,M.△ABC之重心.在AM上G點.$AG=\frac{2}{3}AM$.正方形BCDE之重心在MN之中點H.



以正三角形及正方形之一邊爲12寸.

故 $$AM=AB\sin 60^\circ=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\text{寸}$$

∴ $$GM=6\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=2\sqrt{3}\text{寸}$$

又 $MH=\frac{12}{2}=6$ 寸

∴ $GH=6+2\sqrt{3}$ 寸

次此三角形之面積

$$\frac{1}{2}AM\cdot BC=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 12=36\sqrt{3}\text{ 平方寸}$$

正方形之面積 $\overline{BC}^2=12^2=144$ 平方寸

若以此板一平方寸之重爲 p 克.則作用於 G 及 H 之重力.當爲 $36\sqrt{3}\,p$ 克及 $144p$ 克.

故所求之重心於 GH 上以 $36\sqrt{3}$ 及 144 兩數.與所內分之距離爲逆比例之點也.若以此點爲 P.則

$$GP:PH=144:36\sqrt{3}$$

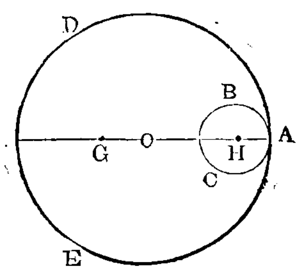
由合比之理 $GH:PH=144+36\sqrt{3}:36\sqrt{3}$

卽 $6+2\sqrt{3}:PH=144+36\sqrt{3}:36\sqrt{3}$

∴ $$PH=\frac{36\sqrt{3}(6+2\sqrt{3})}{144+36\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}(6+2\sqrt{3})}{4+\sqrt{3}}$$

卽所求之重心之位置.由 HA 之上 H 點.至 $\frac{\sqrt{3}(6+2\sqrt{3})}{4+\sqrt{3}}$ 寸之處.

14. 圓板 ADE 之重心爲 O,ABC 之重心爲 H.今由 ADE 切去 ABC.只餘 DEACBA 之部分.以其重心爲 G.茲假定爲小圓鑲入時.其重心固在其外圓之中心 O 上.故此時 ABC 所作用於 H 之重.與 DEACBA 所作用於 G 之重.等於 ADE 之重作用於 O 也明矣.



今以 $OG=x$ 糎.又 $AO=\frac{30}{2}=15$ 糎.$AH=\frac{10}{2}=5$ 糎.故 $OH=15-5=10$ 糎.

又以此圓板一平方糎之重爲 a 克.則 ABC 之重所作用於 H 點者爲 $\pi\overline{AH}^2a$.卽 $\pi\times 5^2a$ 克.作用於 DEACBA 之重者爲

$\pi\overline{AO}^2a-\pi\overline{AH}^2a=\pi(\overline{AO}^2-\overline{AH}^2)a$.卽 $\pi(15^2-5^2)a$ 克由之

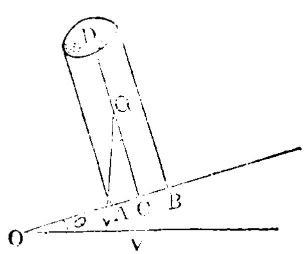
$$GO:OH=\pi\times 5^2a:\pi(15^2-5^2)a$$

卽 $$x:10=25:200$$

$$\therefore \qquad x=\frac{250}{200}=\frac{5}{4}$$

故所求之重心在AO之延長線上。由O點以左$\frac{5}{4}$糎之處。

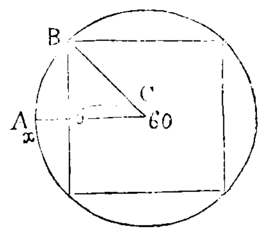
15. G爲圓柱之重心。GA之鉛直線通過A點時。圓柱當轉倒。故θ即所求之角度也。今欲求θ之角度。但求AGC之角度可也。蓋以AGC。AOV爲相似三角形。故今就AGC直角三角形思之。



$$tan\angle AGC=\frac{AC}{GC}=\frac{AB}{CD}=\frac{1}{3}=0{\cdot}333$$

由之得　$\theta=\angle AGC=18°26'$

16. 以圓板之半徑爲r。$\angle BCO=45°$。



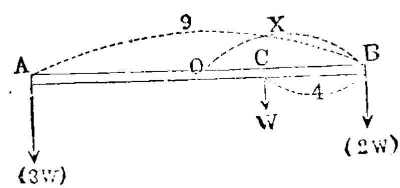
故　$CO=rcos45°=\frac{r}{\sqrt{2}}$　$OA=r-\frac{r}{\sqrt{2}}$

今以所要之重量爲x磅。則棹當在轉倒之臨界時。60磅及x磅之重心在二脚連結之線上O點。故

$$x\times r\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=60\times\frac{r}{\sqrt{2}}.$$

由之得$x=144{\cdot}92$磅。卽置於棹緣A點之物體。至144·92時始轉倒也。

17. 以棒之重量爲W。作用於由初端4呎之點。故若以由初端至所求支點之距離爲x則



$BO=2W\times x$　　$CO=W(x-4)$

$AO=3W(9-x)$

今於O點得保平衡。故各力能率之代數和。不可不等於0。

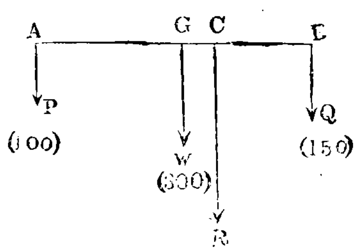
卽　　$3W(9-x)-W(x-4)-2W\times x=0$

約去W爲$3(9-x)-x+4-2x=0$

由之得　$x=5\frac{1}{6}$

18. 等質之棒。其重心在其中點G。故若以棒之重爲W。以掛於兩端A,B之重爲P,Q。則所求之點C，卽三力P,Q,W，之合力着力點也。今設

GC=x米突。關於C點三力。及其合力之能率如次。



P之能率 $P\times AC=100\times(0.6+x)$

W之能率 $W\times GC=300x$

Q之能率 $-Q\times BC=-150\times(0.6-x)$

R之能率 $=0$

故由能率之定理

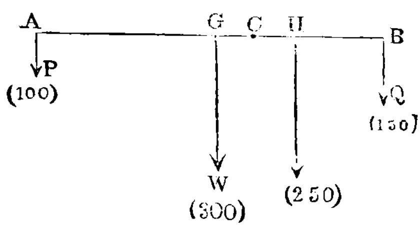
$$100(0.6+x)+300x-150(0.6-x)=0$$

由之得 $x=\frac{3}{55}$

故所求之點由G至B之方$\frac{3}{55}$米突之處。

又不用能率之定理。如次亦得解之。

先以PQ合力之着力點爲H。



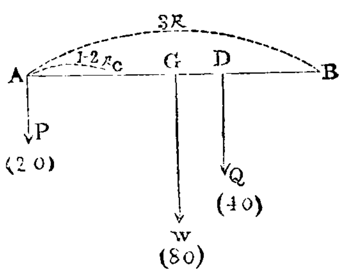
AH=x米。

則 $x:1.2-x=150:100$

∴ $x=0.72$

即作用於H點AB之合力爲250克。

次以作用於H點之力。與作用於G點300瓦之力。求其合力。遂以其着力點爲C。則此點爲A,B,W三力之合力着力點。即所求之支點也。今以GC=x_1則



$x_1:GH-x_1=250:300$

但 AH=0.72米突

AG=0.6米突

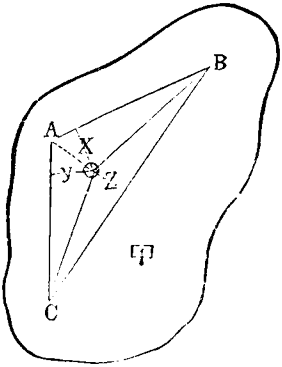
故 GH=0.12米突

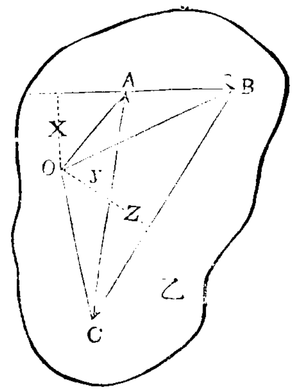
故 $x_1:0.12-x_1=250:300$ 由之得 $x_1=\frac{3}{55}$

12. 今於任意一處取一點O。求三力能率之代數和。則

$-AB\times x-BC\times Z-AC\times Y$

或　$-2(\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle AOC)$　即　$-2\triangle ABC$(甲圖)



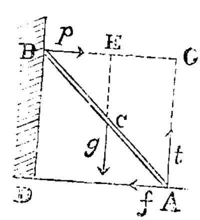


又　$-AB\times x-BC\times Z+AC\times y$

或　$-2(\triangle AOB+\triangle BOC-\triangle AOC)$　即　$-2\triangle ABC$(乙圖)

以其始終爲零.其和皆爲ABC三角形之積之二倍.此力爲偶力.其大即比例於三角形之面積.

20. 設AC爲梯子.$\angle BAD=45$度.今就作用於梯子之力思之.第一其重量作用於重心C.在垂直g之方向地上之摩擦力f.引於壁之方向AD.即水平也.又地面以t之力支梯子之重.其方向垂直向上.又壁以p之力抵抗梯子.而g,f,t,p之四力.互相平均則靜止.此時對任意一點能率之數當爲零.今就四力對t線與p線之交點O.求其能率爲$g\times OE$, $f\times OA$, $t\times 0$, $p\times 0$.梯平均時.此四能率之數爲零.其結果



$$g\times OE+f\times OA=0$$

但以　$OA=2OE$　故　$g\times OE=-f\times(2OE)$

$\therefore$　$f=-\dfrac{g}{2}$

即地面與梯下端間之摩擦力.等於梯重之半.

第六章之問題

1. $W=F\times S=9000\times 4000=36000000$爾格.

又以前後之能力不減故若以終之速度爲v.則

$$36000000=\frac{1}{2}\times 50000\times v^2$$

$$\therefore \quad v=\sqrt{\frac{2\times 36000000}{50000}}=\sqrt{1440}=38\text{ 弱}$$

2. 本題須先求S之値.即不可不求其半徑r.依題意半圓形之長爲1·5米突.故$2\pi r=2\times 150$糎

即 $$r=S=\frac{150}{\pi} \qquad F=2000\times 980$$

$$\therefore \quad W=2000\times 980\times\frac{150}{\pi}=9{\cdot}36\times 10^7$$

3. 矢所射出之速度.其運動之能力.即等於前之位置之能力.故

由公式 $$mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

$$\therefore \quad 93000000=\frac{1}{2}\times 200\times v^2$$

$$\therefore \quad v=\sqrt{930000000}=968\text{ 秒糎}$$

4. 6磅之質量以1600呎之速度運動.其功用之量爲$6\times\frac{1600^2}{2\times 32}$呎磅.

以1分間發射20回.

故1秒間當發射$\frac{20}{60}$回.故1秒間功用之量.

$$\frac{6\times 1600^2}{2\times 32}\times\frac{20}{60}=80000\text{ 磅呎}$$

又以英國1馬力每秒間爲550磅呎.故以此功用變爲馬力數.則

$$80000\div 550=145\frac{5}{11}\text{馬力.}$$

5. 以一立方糎水之重量爲一克.故一立方米之重量爲1000瓩.又以一馬力每秒爲76瓩米之功用.故所要之馬力.

$$\frac{86400\times 1000}{60\times 60}\times 38\div 76 \quad \text{即} \quad 12000$$

6. 本題欲將功用之量變爲馬力.不可不將重量之單位斤變爲瓩.由本書質量單位之表1瓩$=27{\cdot}29$兩

故 $1\text{兩}=\frac{1}{27{\cdot}29}\text{瓩}$ 即 $1\text{斤}=\frac{1\times 16}{27{\cdot}29}=586\text{瓩}$

$$\therefore\qquad W=\left\{\frac{(90+72)\times\cdot586}{3\times60}\right\}\times10=94\cdot932\text{ 瓩米}$$

所費之馬力 $=94\cdot932\div76=1\cdot249$ 馬力

又單就物體所生功用之量

$$72\times\cdot586\times10=421\cdot92\text{ 瓩米}$$

7. (一)兩質量所起之運動量相等

由牛頓運動之第二則.運動量之變化正比例於力與時間之相乘積.故同一力作用之.等時間其運動量變化之相等也固矣.

(二) 等時間同一力作用於異質量之物體.其功用之量.逆比例於其質量.

蓋 $W=F\times S$ 而 $F=ma$ 質量變時.其力自變.若同一力作用於異質量.其加速度因質量之變自亦不得不變.今以兩質量爲 M_1 M_2.各質量所受之加速度爲 a_1 a_2.若同一力 t 時間作用於各質量時.則

$$M_1\text{ 所受之加速度 }a_1=\frac{F}{M_1}$$

$$M_2\text{ 所受之加速度 }a_2=\frac{F}{M^2}$$

又以 F 作用之.t 秒時所經過之距離爲 S_1 S_2.則

$$S_1=\frac{a_1}{2}t^2,\qquad S_2=\frac{a_2}{2}t^2$$

由之二者所受功用之量 W_1 W_2

$$W_1=F\times S_1=F\times\frac{a_1}{2}t^2=F\times\frac{F}{2M_1}t^2\qquad(1)$$

$$W_2=F\times S_2=F\times\frac{a_2}{2}t^2=F\times\frac{F}{2M_2}t^2\qquad(2)$$

就(1)(2)兩式各功用之結果.所異僅質量耳.

故 $$W_1:W_2=\frac{1}{M_1}:\frac{1}{M_2}=M_1:M_2$$

卽兩者功用之量逆比例於質量.

8. (一)受壓迫之空氣有位置之能力.何則.若鬆其壓則必膨脹.有推動他物之功用故也.

(二)被引延之橡皮亦有位置之能力也明矣.

(三)轉走於水平板上之球體.固爲運動之能力.

（四）落下之物體。併有位置之能力及運動之能力。

由質量 m 在 h 之高者。其位置之能力為 mgh 落下時位置能力漸減。運動能力增加。至 $\frac{1}{2}mv^2$。前之位置能力。與後之運動能力。其量毫無增減。已於能力不滅節證之。今就物體之落下。即不由始之位置能力與終之運動能力之比較。就半途運動之能力與半途位置之能力。比之。亦得證能力不滅之理。

今以落體在高處初落下過距離 S 其速度為 v。

$$v^2=2gS$$

故若以此時所有運動之能力 $K=\frac{1}{2}mv^2$。

則
$$K=m\times\frac{(\sqrt{2gS})^2}{2}=mgS.$$

而此時 m 在地上 $h-S$ 之高。故其位置之能力 P。

$$P=mg(h-S)$$

兩者之和。

$$K+P=mgS+mg(h-S)=mgh$$

仍等於 mgh。亦能力不滅之一證也。

（五）物體 m 在地面下 h 深之井底比在地表者。為減却 mgh 之位置能力。何則。若以此物體再持於地表。則不能不以 mg 之力舉上 h 之高。即不可不加以 mgh 之能力也。

但在井底之物體。若對比井底更低之點。（例如比井底更低 S 距離之點）則尚有 mgS 位置之能力也明矣。

9.　位置之能力 $=25\times980\times40000=980000000$ 愛格

次此石 5 秒間落下時。其終之速度 v 與其間所經過之距離 S。由落下體之公式。

$$v=980\times5=4900\text{ 秒糎}$$

$$S=\frac{1}{2}\times980\times5^2=12250\text{ 糎}$$

以在地上 $40000-12250=27750$ 糎之處。故其時所有位置之能力 $25\times980\times27750=679875000$ 愛格

運動之能力由 $\frac{1}{2}mv^2$ 之式

$$\frac{1}{2}\times 25\times 4900^2=300125000\text{ 愛格}$$

終以此石達地面時之速度爲 v'. 則由 $v'=\sqrt{2gS}$. 故

$$v'=\sqrt{2\times 980\times 40000}$$

故其所有運動之能力.

$$\frac{1}{2}\times 25\times 2\times 980\times 40000=980000000\text{ 愛格}$$

10. 以此石二秒後之速度爲 v. 以其間所經過之距離爲 S. 則重力之加速度爲 32 秒秒呎.

由
$$v=v_0-gt$$
$$S=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

故
$$v=96-32\times 2=32$$
$$S=96\times 2-\frac{1}{2}\times 32\times 2^2=128$$

即 2 秒後之速度 32 秒呎. 2 秒間所經過之距離爲 128 呎. 故其時所有

運動之能力　$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 3\times 32^2=1536$ 呎磅

位置之能力　$mgS=3\times 32\times 128=12288$ 呎磅

11. 第一秒之終.石上昇之速度爲 19·6 秒米. 故初速度 $19{\cdot}6+9{\cdot}8=29{\cdot}4$ 秒米. 故其得達最高點之高 $\frac{(29{\cdot}4)^2}{2\times 9{\cdot}8}$ 米. 即 $\frac{(29{\cdot}4)^2}{2\times 9{\cdot}8}\times 100$ 糎, 故於最高點位置之能力.

$$mgS=500\times 980\times\frac{(29{\cdot}4)^2}{2\times 9{\cdot}8}\times 100$$
$$=2160900000\text{ 愛格}$$

又落下此距離達於地面所得之速度 v. 由 $v=\sqrt{2gS}$

$$v=\sqrt{2\times 980\times\frac{(29{\cdot}4)^2}{2\times 9{\cdot}8}\times 100}$$

故其時所有之運動能力.

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 500\times 2\times 980\times\frac{29{\cdot}4^2}{2\times 9{\cdot}8}\times 100$$
$$=2160900000\text{ 愛格}$$

12.　$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times100\times(400\times100)^2$

$=80000000000$

13.　以板之平均抵抗力爲F功。則於初時彈丸所克勝此抵抗而動於4糎者。其彈丸所生之功用。固爲F×4愛格。而其彈丸中板不可不等於其所有運動之能力$\frac{1}{2}mv^2$。(m者彈丸之質量v乃其速度)故

$$4F=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

次於彈丸貫12糎之板時。其功用爲F×12功。

亦卽等於彈丸運動之能力。故若以次之速度爲v'則

$$12F=\frac{1}{2}mv'^2 \qquad (2)$$

由(1)(2)兩式 $\frac{v'^2}{v^2}=3$

卽　$v'^2=3v^2$

但以　$v=200$ 米

故　$v'=200\sqrt{3}=3464$ 秒米

14.　彈丸運動之能力爲$\frac{90\times20000^2}{2}$愛格。

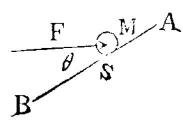
以其所要爆發之壓力爲P。則火藥所生之功用爲$P\times120$愛格。由是

$$P\times120=\frac{90\times20000^2}{2} \qquad \therefore \quad P=15\times10^7 \text{ 功}$$

改算爲瓩。則1瓩之重 $=98\times10^5$ 功。故

$$P=15\times10^7\div(9\cdot8\times10^5)=153 \text{ 瓩餘}$$

15.　例如物體m沿BA之斜面而上。則力之方向本爲Fm者。因斜面傾斜θ之角。故所作用於m質量者。非F力之全部。乃其一部分F×$\cos\theta$。



m之物體。遂受此力而動於S距離。終得v之速。卽F×$\cos\theta$×S之功用。得$\frac{1}{2}mv^2$之運動能力。

故　$FS\cos\theta=\frac{1}{2}mv^2$

16.　以運動量爲mv。(m爲質量v爲速度)則二球之運動量。一爲10×

50。一爲50×10。兩運動量相等。且正反對於運動之方向。又二球乃無彈性球。故衝突時運動共停。而運動之能力消失。衝突前運動能力之和。

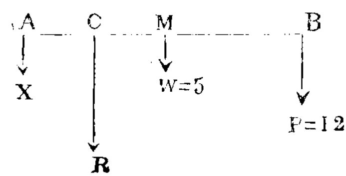
$$\frac{10\times50^2}{2}+\frac{50\times10^2}{2}=15000\text{ 愛格。}$$

至衝突之際。兩體分子振動。因變其分子之位置。此時運動之能力變態。或爲熱。二球之溫度昇。或爲音。傳去於空氣。固目所不能見也。

第七章之問題

1. 棒重所歸聚之點在重心。卽重乃作用於AB之中點M。今以吊於A之重爲x斤。與棒相平均時。對之所作用諸力之合力R。不可不過支點C。今求關於C點諸力之能率。得適用能率之定理。

$$x\cdot\overline{AC}-W\cdot\overline{CM}-P\cdot\overline{BC}=0$$



但 $AC=1$ 尺 $AM=2$ 尺

∴ $CM=1$ 尺 $BC=3$ 尺

∴ $x-5-12\times3=0$

∴ $x=41$

或不用能率之定理。如次亦得解之。

以支點C。爲A與M之中點。其與棒之重W=5斤相均時。於A要亦吊5斤之重。又對B要與P=12斤相均。所加於A之重若爲x斤。則由槓杆之理。

$$x\cdot\overline{AC}=P\cdot\overline{BC}$$

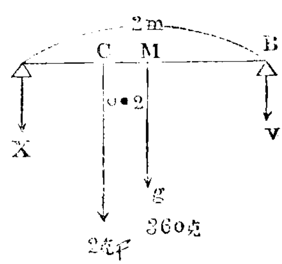
卽 $x\times1=12\times3$ ∴ $x=36$

故所求之重5+36=41斤。

2. 以AB爲載兩人肩上之位置。

$AC=1-(0.2+0.4)=0.4$ 米

$BC=1-0.4+0.2=0.8$ 米



M以爲AB之中點。則棒之重作用於M點。爲360克。其分於A,B二點之力。各爲180克。又作用於C之力爲2瓩。卽2000克。其分擔於A,B二點之分力。各當作x克。或y克。則由槓杆之理。

$$x\cdot\overline{AC}=y\cdot\overline{BC}$$

即　　$x\times 0.4=y\cdot 08$

∴　　$\dfrac{y}{x}=\dfrac{0.4}{0.8}$　即　$\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}$　　(1)

但x,y之合力。其和乃等於2瓩

$$x+y=2000 \qquad (2)$$

由(1)(2)式　　$x=1333\frac{1}{3}$　　$y=666\frac{2}{3}$

故作用於A之壓力。　$1333\frac{1}{3}+180=1513\frac{1}{3}$克

作用於B之壓力　$666\frac{2}{3}+180=846\frac{2}{3}$克

3.　載物體於左盤時.與載於右盤時.對相均之分銅.其質量異.故其天秤兩臂之長.其不相等也明矣。今以左臂之長爲x。以右臂之長爲y。物體之重爲p。則由槓杆之理。得

$$p\cdot x=29.62y \qquad (1)$$

及　　$28.70x=py$　　(2)

以(2)式除(1)式

$$\frac{p}{28.70}=\frac{29.62}{p} \qquad \therefore \quad p^2=28.70\times 29.62$$

由之得　　$p=\sqrt{28.70\times 29.62}=29.16$

次由(1)式　$\dfrac{y}{x}=\dfrac{p}{29.64}$，　由(2)式　$\dfrac{y}{x}=\dfrac{28.70}{p}$

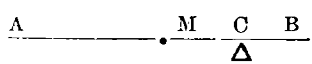
將兩式相乘　$\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{28.70}{29.62}$

∴　　$\dfrac{y}{x}=\sqrt{\dfrac{28.70}{29.62}}=0.985$

即物體之重爲29.16克。短臂與長臂之比爲0.985.

4.　由棒之A端0.9米之點C支之。若得平均。則棒之重心在於C點也明矣。故此棒得看作於C點作用以3.2克之重。今支棒於中點M。棒所以能平均者。則於A端必吊以重P瓩。由槓杆之理。

$P\times \overline{AM}=3.2\times\overline{CM}$



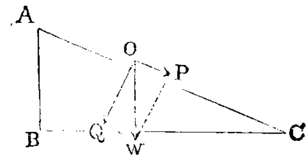
但以　　AB=1.5米　　AC=0.9米

則　　AM=0.75米　　CM=0.15米

故　　$P\times 0.75=3.2\times 0.15$

由之得　　$P=0.64$

5. 以ABC爲斜面.以O爲物體.以OW爲其重.以沿其斜面之分力爲OP.則



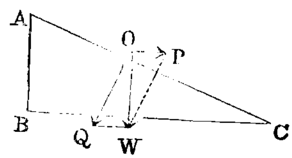
$$\frac{OP}{OW}=\frac{AB}{AC}$$

卽　　$$OP=OW\times\frac{AB}{AC}$$

但　　OW=100克　AC=10米　AB=6米

$$\therefore\quad OP=100\times\frac{6}{10}=60$$

故此物體之重.對斜面之分力爲60克.卽若欲使此物體支持於斜面上.於反對方向不可不加以60克之力.



次以OW之重.分解爲平行斜面底邊之分力OP.與垂直斜面之分力OQ.則

$$\frac{OP}{OW}=\frac{AB}{BC}$$

但　　$$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8\text{米}$$

$$\therefore\quad OP=OW\times\frac{AB}{BC}=100\times\frac{6}{8}=75\text{克}$$

是平行於斜面底邊有此數.然則欲使此物體支於斜面上.不可不亦以75克.加於OP之方向也.

6. 物體沿斜面落下之速.與由同高鉛直落下之速相等.故所求之速度.等於物體由1米之高落下之速度.故應用落下體之公式$v=\sqrt{2gS}$

$$v=\sqrt{2\times 9.8\times 1}=4.43\text{秒米}$$

次求其所有運動之能力

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times 100\times 443$$

$$=9800000\text{爾格}$$

7. 長爲16.厚爲12寸.故尖劈側面之長.爲$\sqrt{16^2+6^2}$.卽17.1故由定理.割力與元力之比.等於尖劈之底.與尖劈側面長之比.卽$\frac{20}{W}=\frac{12}{17.1}$

$$W=27.5\text{斤}.$$

次以力雖有效。其距離損失。故 $P:W$ 若等於 12 : 27·5. 則打入之距離。與裂開之距離。當爲反比例。卽

$$3:x::27{\cdot}5:12$$

由之得 $x=1{\cdot}31$ 寸

8. 以P爲把柄端之力。以N爲由螺旋所生之壓力。以R爲由螺旋之軸至把柄端之長。以 l 爲螺旋一週轉之長。則由螺旋之公式

$$\frac{N}{P}=\frac{2\pi R}{l}$$

由之 $N=P\times\dfrac{2\pi R}{l}$

以之代入P R l 之值

$$N=100\times\frac{2\pi\times200}{2}=62832\text{ 斤}$$

9. 由公式 $\dfrac{5}{P}=2\times\dfrac{22}{7}\times7\div\dfrac{3}{25}$ (右式 $\dfrac{3}{25}$ 乃螺旋一週轉之高) $\dfrac{22}{7}$ 乃圓周率之數也。

卽 $P=0{\cdot}013\dfrac{7}{11}$

10. 對傾斜30度之斜面上。以50斤。分解爲平行之分力。則爲 $50\sin30$。卽 $50\times\dfrac{1}{2}=25$ 斤。

由公式 $\dfrac{W}{P}=\dfrac{R}{r}$ 卽 $\dfrac{25}{P}=\dfrac{4}{\frac{3}{4}}$

∴ $P=4{\cdot}7$

11. 若以軸之半徑爲 r 吋。則依題意。$7\times2\pi r=5{\cdot}5\times12$ 吋卽 $r=1{\cdot}5$ 吋。以之代入公式得

$$\frac{30}{P}=\frac{15}{1{\cdot}5}\quad\text{卽}\quad P=3\text{ 磅}$$

12. 所加之力。要與50克之物體相均。且要使生50秒秒糎之加速度。則加 $500g$ (以質量變重量)之外 更要加以 500×50 之力。故所求之力。

$$500g+500\times50=500\times980+980+500\times50$$

$$=515000\text{ 功}$$

13. 以所求P下降之加速度爲a。P以a之加速度運動之力爲$P\times a$。是爲P之重量。卽由5×32減去。當爲繩之張力。故此力爲$(5\times 32-5a)$次P以a之加速度下降。則W以$\frac{a}{4}$上昇。由是懸W繩之張力。可知爲

$$\left(16\times 32+16\times\frac{a}{4}\right)$$

而此張力不可不爲懸P邊張力之4倍。因得

$$5\times 32-5a=\frac{1}{4}\left(16\times 32+16\times\frac{a}{4}\right)$$

卽 $$a=5\frac{1}{3}\text{尺}$$

14 及於a之張力。由阿梯吾特節之末。T之公式爲$\frac{2PQ}{P+Q}g$

卽 $\frac{2\times 2W\times W}{2W+W}=\frac{4W}{3}$ 而此力作用於B。B繩生2倍之張力。其量爲

$2\times\frac{4W}{3}$此力與$3W$之力。作用於上部之滑車。$3W$之力。下降之加速度。

仍由阿梯吾特器械之公式。$a=\frac{P-Q}{P+Q}g$由之代入PQ之值。

$$a=\frac{8W-\frac{8W}{3}}{3W+\frac{8W}{3}}\times g \quad \text{卽}\ \frac{g}{17}$$

15. 依本書第七章第155圖。以動滑車之重爲w_1, w_2, w_3以繩之張力爲t_1, t_2, t_3,及f。

則 $W=f+t_1+t_2+t_3$

$t_1=2f+w_1$

$t_2=2t_1+w_2=2^2f+2^2w_1+w_2$

$t_3=2t_2+w_3=2^3f+2w_1+2w_2+w_3$

∴ $W=f\times(1+2+2^2+2^3)+w_1\times(1+2+2^2)+w_2\times(1+2)+w_3$

第八章之問題

1. 以物體之質量爲m則最大摩擦力$mg\sin 30^\circ=\frac{1}{2}mg$

摩擦係數 $$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. 在水平面上之物體.欲推之使動.所加之力.要比最大摩擦力大.今以其最大摩擦力為 N.以物體之直壓力為 P.以摩擦係數為 μ.則

$$N=P\mu.$$

於本題　$\mu=\frac{1}{5}$ 又直壓力等於物體之重.卽 $1000g$ 功

故　$N=1000g\times\frac{1}{5}=200\times980=196000$ 功

故所求之力.要比 196000 功大

3. 無摩擦時.支此物體所要之力為　$45g\sin30°$ 功.

物體與斜面間之最大摩擦力為　$45g\cos30°\times\frac{2}{3}$ 功.

要使物體生 40 秒秒糎之加速度.所須之力為 45×40 功.

而所求之力.乃此三力之和.卽

$$45g\sin30°+45g\cos30°\times\frac{2}{3}+45\times40$$

$$=45\times980\times\frac{1}{2}+45\times980\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}+45\times40$$

$$=22050+25331+1800=49181 \text{ 功}$$

4. 列車之全摩擦力為 20×150 磅.機關車克勝此摩擦.每時動於 25 哩.則其一時間之功用為 $20\times150\times25\times5280$ 呎磅.

故其一分間之功用.卽 $\frac{20\times150\times25\times5280}{60}$ 呎磅.

故機關車之馬力.

$$\frac{20\times150\times25\times5280}{60\times33000}=200.$$

5. 斜面若無摩擦則此物體落下之加速度 $g\sin\theta$.(θ 乃斜面之傾斜角)卽 32×0.6 秒秒尺.但以此斜面之摩擦係數為 $\frac{1}{2}$.故若作用於物體斜面之直壓力為 P.以最大摩擦力為 N.則 $\frac{N}{P}=\frac{1}{2}$.故 $N=\frac{P}{2}$.由斜面之理.直壓力 $P=mg\cos\theta$.(m 為物體之質量)故 $N=\frac{1}{2}mg\cos\theta=m\times\frac{1}{2}m\cos\theta$.而此力作用之方向.以與落下之方向反對.故因摩擦.物體對落下之方向損卻 $\frac{1}{2}g\cos\theta$ 之加速度.卽得 $-\frac{1}{2}g\cos\theta$ 之加速度.

故若以物體沿此斜面落下之加速度為 a.則

$$a=g\sin\theta-\frac{1}{2}g\cos\theta$$

$$=32\times0.6-\frac{1}{2}\times32\sqrt{1-0.6^2}=32\times0.2 \text{ 秒秒尺}$$

由之達於斜面之底時.物體之速度 v.

$$v=\sqrt{2aS}$$

卽

$$v=\sqrt{2\times32\times0.2\times100}$$

$$=16\sqrt{5} \text{ 秒尺}$$

其時所有運動之能力.

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times400\times2\times32\times0.2\times100$$

$$=256000$$

6. 物體沿無摩擦之斜面落下.所得之速度.等於由同高鉛直落下之速度.故於本題斜面無摩擦時.此物體達於斜面之底所得之速 v.

由 $v=\sqrt{2gS}$ 之式.

$$v=\sqrt{2\times980\times9} \text{ 秒糎}$$

其時運動之能力.

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times1000\times2\times980\times9 \text{ 爱格}$$

但由題意.此物體達於斜面之底時.所得之速度5秒糎故其所得運動之能力.爲

$$\frac{1}{2}\times1000\times5^2 \text{ 爱格.}$$

故兩者之差.卽

$$\frac{1}{2}\times1000\times2\times980\times9-\frac{1}{2}\times1000\times5^2=8807500 \text{ 爱格}$$

全由摩擦所失之能力也.

7. 以物體之質量爲 m 克.則其重爲 mg 功.此乃作用於水平面之直壓力也.故物體與水平面之最大摩擦力爲 $mg\times\frac{1}{10}$ 功.以此力與物體進行之方向反對.故因此力反對物體進行之方向.生 $\frac{mg\times\frac{1}{10}}{m}=\frac{g}{10}$

秒秒糎之加速度。卽其於進行之方向。生 $-\frac{g}{10}$ 秒秒糎之加速度。故此物體至靜止。所要之時間。爲

$$3000\div\frac{g}{10}=3000\div98=30.61\ \text{秒}$$

又其間所經過之距離 S。

$$S=\frac{3000^2}{2\times\frac{g}{10}}\times 40816\ \text{糎}$$

8. 假定物體之重量爲 m 瓩。分解之。爲平行於斜面之力，及直角於斜面之力。共爲 $\frac{m}{\sqrt{2}}$。故由 $P=N\mu$ 之式 $\frac{m}{\sqrt{2}}=\mu\times\frac{m}{\sqrt{2}}$ 故 $\mu=1$

9. 動 30 瓩於水平面上。由公式 $P=N\mu$。卽要 $30\times\frac{1}{10}$ 之力。又以所求之重量爲 W。動之於斜面上。要生平行於斜面之力 $W\times\frac{1}{80}$。與摩擦力 $W\times\frac{1}{10}$（以傾斜角度極微故得看做直壓）之二力。故依題意

$$30\times\frac{1}{2}=W\times\frac{1}{80}+W\times\frac{1}{10}\quad \text{由之得}\ W=26.66\ \text{瓩}$$

10. 分解 9 斤爲平行於斜面之方向。及直角於斜面之方向。則平行於斜面之方向者爲 $9\sin 60°$。卽 $9\times\frac{\sqrt{3}}{2}$。直角於斜面之方向者。爲 $9\cos 60°$。卽 $9\times\frac{1}{2}$。後者爲直壓。故摩擦力爲 $9\times\frac{1}{2}\times .414$。而 15 斤之內。實際引上物體所用之力爲 $15-\left(9\times\frac{\sqrt{3}}{2}+9\times\frac{1}{2}\times0.414\right)$ 今以所求之加速度爲 β。則得次式。

$$\frac{9}{32}\times\beta=15-\left(9\times\frac{\sqrt{3}}{2}+9\times\frac{1}{2}\times0.414\right)\ \text{由之得}\ \beta=19$$

第九章之問題

1. 由延之彈性節公式 (2) $E=\frac{P}{A}\cdot\frac{l}{l'-l}$

本題 $P=12000 \qquad A=\pi r^2=\pi\times0.03^2$

$l=250 \qquad l'-l=0.8$

$$\therefore\qquad E=\frac{12000}{\pi\times0.03^2}\times\frac{250}{0.8}=1.33\times10^7\ \text{克（每平方糎）}$$

2. 由90條兩球動於同方向時

$$v=\frac{8\times6+15\times3}{8+15}=\frac{93}{23}\text{秒尺}$$

又相向動時

$$v=\frac{8\times6-15\times3}{8+15}=\frac{3}{23}\text{秒尺}$$

3. 由92條(3)及(4)

(甲球) $$v_1=\frac{5\left(700-\frac{1}{2}\times1300\right)+1300\times3\left(1+\frac{1}{2}\right)}{700+1300}$$

$$=3{\cdot}05\text{秒米}$$

(乙球) $$v_2=\frac{5\times700\left(1+\frac{1}{2}\right)+3\left(1300-\frac{1}{2}\times700\right)}{700+1300}$$

$$=4{\cdot}05\text{秒米}$$

4. 球由S米之高。落下達於地面之速度v。

$$v=\sqrt{2gS}\qquad(1)$$

此球反旋係數以$\frac{1}{3}$衝突於地。則衝突後速度之大$u=\frac{1}{3}v$。反躍之後。上至最高點之高若爲S'米。則$u=\sqrt{2gS'}$

即 $$\frac{1}{3}v=\sqrt{2gS'}\qquad(2)$$

以(1)除(2) $$\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{S'}{S}}$$

但$S=49$米 $\therefore\quad S'=\frac{49}{9}$

次由(1)式 $$v=\sqrt{2\times9{\cdot}8\times49}$$

$$\therefore\qquad u=\frac{\sqrt{2\times9{\cdot}8\times49}}{3}$$

衝突地面瞬間所有運動之能力

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times1\times2\times9{\cdot}8\times49\text{瓩米}$$

反躍時瞬間所有運動之能力

$$\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2\times9{\cdot}8\times49}{9}\text{瓩米}$$

故球所失運動之能力

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}\times1\times2\times9{\cdot}8\times4-\frac{1}{2}\times1\times\frac{2\times9{\cdot}8\times49}{9}$$

$$=\frac{3841{\cdot}6}{9}=426\frac{76}{90}\text{瓩米}$$

5. 由彈性體衝突之公式 (3)

$$v_1=\frac{u_1(m_1-em_1)+m_2u_2(1+e)}{m_1+m_2}$$

但依題意. B 球不運動. 故 $u_1=$ 零又 $m_1=m_2$

故衝突後 B 球之速度 v_1

$$v_1=\frac{m_1\times24}{2m_1}+\frac{m_1\times\frac{1}{2}\times24}{am_1}\quad\text{即}\quad18$$

又衝突後 A 球之速度 v_2

$$v_2=\frac{m_1\times24}{2m_1}-\frac{m_1\times\frac{1}{2}\times24}{2m_1}\quad\text{即}\quad6$$

又 B 球當壁反躍之速度. 由 $v_1=-u_1e$ 之式. $v_1=-\frac{1}{2}\times18$ 即 9. (即云於衝突前反對之方向每秒 9 粉之速度) 今以所求衝突點至壁之距離爲 x. 則得次式.

對 B 球 $t=\frac{20}{18}+\frac{x}{9}$, 對 A 球 $t'=\frac{20-x}{6}$, 但兩球由前之衝突. 至後之衝突. 其時間相等.

故 $t=t'$ 即 $\frac{20}{18}+\frac{x}{9}=\frac{20-x}{6}$ 由之得 $x=8$

第　二　編

第　一　章　之　題　問

1.　五平方寸.若載20兩.則壓力之强爲$\frac{20}{5}$兩.此壓力之强傳達於水中.及於500平方寸上之全壓力.乃$\frac{20}{5}\times 500=2000$兩.故大活塞上.要2000兩重之分銅.方能平均.

2.　(第一)以小活塞爲A.以大活塞爲B.因A活塞有五平方寸之面.故若押下二寸.則其所押送之水.於B筒之方.爲$5\times 2=10$立方寸也.由是此水來B筒押B活塞之高.爲$\frac{10}{500}=0.02$寸.

(第二)凡以P力押下A活塞至h高.則P力向器中之水所爲功用之量爲$P.h$.又因P押下之力.押上B活塞Q之重物至h'高.則B活塞受此功用.所舉上重物功用之量爲$Q.h'$.遂以此功用間之得失.由次得求之.

今以A活塞之面積爲A.B活塞之面積爲B.則

壓力之强　$\frac{P}{A}=\frac{Q}{B}$

故　$\frac{P}{Q}=\frac{A}{B}$　或　$Q=P.\frac{B}{A}$

次押下A活塞若爲h.則B活塞押上爲$\frac{Ah}{C}$故B活塞所爲功用之量$Q.h'$.

$$Qh'=P.\frac{B}{A}\times h\frac{A}{B}=P.h$$

等於P所爲功用之量.故可知於水壓機之功用無得失者.惟於力有增加.卽如以P之全力.能得$Q=P.\frac{B}{A}$之全力.其所增加之力.卽$\frac{B}{A}$倍.乃力之利率也.凡不論用如何之器械.力雖能使之增大.功用決不增加也.

3.　利率者乃由外向器械所加之力.與器械受之所出之力之比也.故連底器$\frac{Q}{P}$卽等於$\frac{B}{A}$.今A=5平方寸.B=500平方寸.故此連底器之利率$\frac{500}{5}=100$,

4. 大活塞與小活塞面積之比為$\frac{20^2}{1^2}=400$. 故此連底器之利率為400.(觀前題解法自知)大活塞所出之力.即$15\times400=6000$斤.

5. 管之總內積$3.1416\times1\times12\times12^2$平方吋.(3.1416圓周率.1呎乃12吋也.)故全壓力為$3.1416\times12^3\times150=81400$听約.

6 由槓杆之理.作用於重點之重量.不可不為30×10瓩.又以活塞上之重量.比例於其面積.故若以大活塞之口徑為x.

則 $\frac{300}{2000}=\frac{2^2}{x^2}$ 故 $x^2=\frac{2000\times2^2}{300}=26.66$

由之得$x=5.164$糎

7. 本題計壓力之單位用瓩.故必先求水一立方容積合瓩之數.而水之密度一立方糎.等於一克.則一瓩當等於水之一立方粉.然則欲求底面之全壓力.但求其全體積有若干立方粉可矣.而水之深10米即100粉底面積為100^2平方粉也.故

底面上之全壓力$=100\times100^2=1000000$立方粉

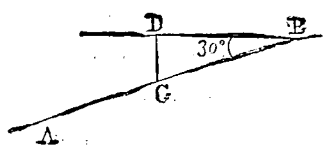
即 1000000瓩.

又側面之全面積雖為100^2平方粉.而其上部與下部水之壓力之强異也.此强即正比例於深.在上部表面之處.其壓力為零.(以空氣之壓力不算入故)至下部底面之處.以每一平方粉100瓩.故由側面之上部至下部平均壓力之强$\frac{0+100}{2}$瓩.(每一平方粉)故

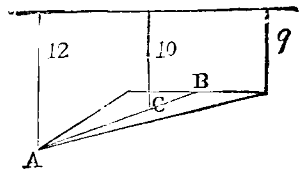
側面上之全壓力$=100^2\times\frac{100}{2}=50000$瓩

8. 板一邊之長為1呎.則其重心即在由一邊之中點至0.5呎之處.故由水面至方板重心之深.為10.5呎. 由本章11條.側面壓力之强等於以側面中所取之部分為底.由此底之重心.至液之表面之鉛直距離為高之液柱之重.故以$1^2\times10.5\times62.5=656.25$磅.即側面所受之全壓力也.

9. AB為板之斷面.C乃重心之處.



以AB=4. 故CB=2. 由之CD之深.為$2\sin30°$. 即$2\times\frac{1}{2}=1$尺.故所求之壓力與前題同法.$300\times4^2\times1$即4800兩.



10. 今欲求三角板所受之全壓力．須先求三角板重心至液面之鉛直距離．此三角板之重心．在C即在AB中線上．由C點至底邊．即等於中線三分之一．而A與B之鉛直距離爲12−9．．故由水面至三角板之重心C之深．$9+3\times\frac{1}{3}$即10糎．遂以水銀一立方糎之重量．爲13·6克．故所求之壓力．與前法同．即$13·6\times6\times10=816$克．

11. 所求之壓力．即依前法求其若干立方呎海水之重可耳．而海水每立方呎之重$=62·5\times1·0275$．(62.5爲尋常水之重合磅數者1·0275乃海水之比重)由海面至1哩之深爲5280呎．蓋每呎=12吋．今以呎爲單位．故1平方吋改爲平方呎．等於$\frac{1}{12^2}$．由是所求之壓力如次．

$$(62·5\times1·0275)\times\frac{1}{12^2}\times5280=2354·7$$

即　　2354.7磅

12. 此器底所受水銀之壓力．由前法．即等於底面1平方糎．高10糎水銀柱之重．又水銀上面．更加以水．高75糎．則所增壓力之數．但加以1平方糎爲底．以15糎爲高之水柱之重可也．故所求之總壓力．

$$13·6\times1^2\times10+1\times1^2\times75=211\text{ 克之重即}$$

$$980\times211=206780\text{ 功}$$

13. 3液所及於1平方糎之合壓力．由前法$50\times1+8\times·92+25\times·79$即77·11克之重．依題意圓筒之半徑爲2糎．故以$3·1416\times2^2$乘之．即得總壓力．其式如次．

$$3·1416\times2^2\times77·11=969\text{ 克}$$

14. 水之高爲$36\div\pi\left(\frac{2}{2}\right)^2$ 即 $\frac{36}{\pi}$與之相均之油．其高不可不爲$\frac{36}{\pi}\times\frac{1}{0·92}$．故所求高之差爲$\frac{36}{\pi}\left(\frac{1}{0·92}-1\right)$即·996糎．

15. 以加油之管爲A．以水管爲B．當其平均時．兩管之壓力要相等．蓋以加油於管時．水之新昇上之高爲x．則加油之管內．兩液之高爲$(2-x)$尺．而加入之油高爲一尺．故A管水高之數爲$(1+x)$尺．又B管之水因A管比前高x呎．則B管之高爲$(2-x)$尺也明矣．今兩管壓力能相均．

卽其兩管液之重相等也。因以各數乘比重。得方程式如次。

$$0.7\times1+1\times(1+x)=1\times(2-x)$$

由之得　$x=.15$　A管之水高 $=1+0.15=1.15$

B管之水高 $=2-0.15=1.85$

16. 鉛之立方體之重等於1克 $\times11.4\times4^3$ 以瓶塞木球之半徑爲 x。則瓶塞木球之重。等於1克 $\times0.24\times\frac{4}{3}\pi x^3$。結合此二者置於水中。要使得保平均。此重之和。不可不等於同體積之水重。卽 $4^3+\frac{4}{3}\pi x^3$ 克。故

$$1\times11.4\times4^3+1\times0.24\times\frac{4}{3}\pi x^3=4^3+\frac{4}{3}\pi x^3$$

卽

$$\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{4^3\times10.4}{0.76}$$

$\pi=3.1416$ 由之得

$$x^3=\frac{4^3\times10.4\times3}{4\times0.76\times3.1416}=209 \quad 卽 \quad x=5.43$$

卽所求之直徑。爲11.86糎。

17. 以所要鉛之質量爲 x 克。則其體積爲 $\frac{x}{11.4}$ 立方糎。(鉛之比重爲11.4故)又300克瓶塞木之體積爲 $\frac{300}{0.24}$ 立方糎。(瓶塞木之比重爲0.24故)故此二體積與同體積之水重。爲 $\frac{x}{0.24}+\frac{300}{0.24}$ 克。而此二物體相結在水中。使得保其平均。此水之重要等於其物體之重。故得方程式如次。

$$x+300=\frac{x}{11.4}+\frac{300}{0.24}$$

由之得　$x=1041$

卽所求之質量爲1041克也。

18. 此銅線與同體積之水重。以爲 $1720-1520=200$ 克。故此銅線之體積爲200立方糎。而其長4米。卽400糎故此銅線切口之面積。$200:400=\frac{1}{2}$ 立方糎。故若以其半徑爲 r 糎。則

$$\pi r^2=\frac{1}{2}$$

由之得

$$r=\sqrt{\frac{1}{3.1416\times2}}=\sqrt{0.6}=0.4$$

故此銅線之半徑爲0.4糎。

19. 以此立方體之一邊爲 a 糎.則其體積爲 a^3 立方糎.初沒於液中部分之體積.$2a^2$ 立方糎.以液之比重爲 1·5.故其 $2a^2$ 立方糎之重.爲 $1{\cdot}5\times 2a^2$ 克.又以之立方體之比重爲 0·6.故其重爲 $0{\cdot}6a^3$ 克.此二重不可不相等.故

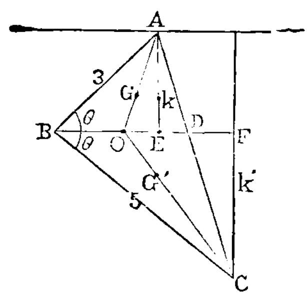
$$1{\cdot}5\times 2a^2=0{\cdot}6a^3$$

由之得　　$a=5$ 糎

故此木立方體之重.乃 $0{\cdot}6a^3=0{\cdot}6\times 5^3=75$ 克.而此木以其重 75 克沒於液中 2 糎.故載 10 克之錘時.更當沈至 $2\times\frac{10}{75}=\frac{4}{15}$ 糎.

20. 此浮標在水中部分之體積.以爲全面積之 $\frac{1}{3}$.故合浮標之 $\frac{1}{3}$ 之體積之水重.等於浮標之重.因之浮標之重.要使與浮標同體積之水重.不可不三倍浮標之重.卽 $540\times 3=1620$ 克.故使浮標沈於水中.其押上之力.爲 $1620-540=1080$ 克.卽此浮標要使在水中.保其平均.須附 1080 克之重錘.

21. 由題意 AB 與 BC 長之比.等於 3 : 5.而垂直線 $AE=3\sin\theta$($\because AB=3$ $\angle ABC=\theta$) 垂直線 $CF=5\sin\theta$ ($\because BC=5$, $\angle CBF=\theta$) 由是 AE 與 CF 長之比.等於 $3\sin\theta : 5\sin\theta$.卽 3 : 5.故 △ABD 與 △BCD 面積之比.亦不可不爲 3 : 5.(凡三角形面積之比.底邊相同者.則比其垂直線.)但欲求兩三角面所受壓力之比.須求兩三角面之重心.至液面之距離.今以 △ABD 之重心爲 G. △BCD 之重心爲 G'.因 AG 比例於 AK. CG' 比例於 CK'.遂以 AG 爲 AO 之三分之二.故 AK 亦卽 AE 之三分之二.又以 OG' 爲 CO 之三分之一.故 FK' 亦卽 CF 之三分之一.由是 △ABD 重心.至水面之深.與 △BCD 重心至水面之深.其比卽等於 $3\times\frac{2}{3} : 3+5\times\frac{1}{3}$ 比.



由之兩面積所受壓力之比.爲

$$3\left(3\times\frac{2}{3}\right) : 5\left(3+5\times\frac{1}{3}\right)\quad \text{卽}\quad 9 : 35\ \text{也}.$$

22. 以白金之比重爲 22·069 其一立方糎之重.(卽等於千立方糎之

重）1克 $\times 22.069\times 1000=22069$ 克.又以水銀之比重爲 13.6.其千立方糎之重.當爲 1 克 $\times 13.6\times 1000=13600$ 克.故白金在水中之重.爲 $22069-13600=7469$.故支此白金於水銀中.要以 7469 克之力.

23. 此鐵片之體積.爲 $2\times 5\times 0.5=5$ 立方糎.而以鐵之比重爲 7.8.故此鐵片之重 1 克 $\times 7.8\times 5=39$ 克.遂因與此同體積之水重爲 5 克.故於水中此鐵片之重 $39-5=34$ 克.

又與此鐵片同體積之水銀重 1 克 $\times 13.6\times 5=68$ 克.故此鐵片受水銀之浮力.乃 $68-39=29$ 克之力也.故若非以此力壓下鐵片.則不能支之於水銀中.

24 與此物體同體積鹽水之重 $100-60=40$ 克.

與此物體同體積之水重 $100-64=36$ 克.

故此鹽水之比重.

$$\frac{40}{36}=1.11.$$

25. 本題解法.依 22 條之 (B).自能明瞭.茲更略爲述之.物體在水中之重.即等於以物體在空氣中之重.減同體積之水重.即物體在水中之重.及與此物體同體積之水重之和.等於此物體在空氣中之重.故該固體在空氣中之重 25 克.與錘在水中之重 45 克之和.等於物體與錘在水中之重.加與此物體同體積之水重者.

故由 $25+45$ 克.減物體與錘在水中之重 36.得與物體同體積之水重.因之此物體之比重.

$$\frac{25}{25+45-36}=\frac{25}{34}=0.735$$

26. 由 23 條第二法之理.瓶與水之總重.減瓶之重.乃水之重.瓶與火酒之總重.減瓶之重.乃火酒之重.故火酒之比重 S.

$$S=\frac{38.399}{46.422}=0.827.$$

27. 47.12 克爲比重瓶充水與鐵釘之重.即等於由 39.74 克與鐵釘重 8.5 克之和.減此釘所排除之水重者.故此鐵釘所排除之水重.爲 $39.74+8.5-47.12=1.12$ 克.由是此釘之比重 S.

$$S=\frac{8.5}{1.12}=75.9$$

28. 1立為1000立方糎．瓶內滿盛食鹽外．更能受容600立方糎之石油而不溢．是食鹽之眞容積為400．故所求之密度為$864\div400==2.16$．

29. 瓶塞木之容積為$300\div0.25$．卽1200立方糎．今壓入瓶塞木於水中不可不壓出與此同容積之水．

30. 甲體之體積$\frac{28\text{克}}{1\text{克}\times5.6}=5$立方糎．故甲體在水中之重$28-5=23$克．但以乙體在水中．亦與甲體同重．故乙體在水中所失之重（卽與甲體同體積之水重）$36-23=13$克．故乙體之比重S．

$$S=\frac{36}{13}=2.77$$

31. 以冰山之全體積為x立方粁．則其在水中之部分．$x-15$立方粁．次以水1立方粁之重為a瓩．則冰一立方粁之重為$0.97a$瓩．海水1立方粁之重$1.02a$瓩．

故冰山之全重量$0.97ax$瓩．與其在水中之部分同體積海水之重．$1.02a(x-15)$瓩．此二重以相等故．

$$0.97ax=1.02a(x-15)$$

由之得　$x=1530$

32. 以各液之體積．代以x立方糎．及y立方糎．則各液之重為$1.3x$克及$0.7y$克．混合液之重為$(x+y)\times0.9$克．因得方程式如次．

$$0.9(x+y)=1.3x+0.7y$$

卽　$4x=3y$

故　$\frac{x}{y}=\frac{0.2}{0.4}=\frac{1}{2}$

卽所求比重1.3之液．及比重0.7之液之比．猶1與2之比也．

33. 取等容積之液三種．三等分之．則其比重$\frac{1+2+3}{3}$．卽2也．更以之混入各種原液．且該原液之容積．各等於前．則其比重之比$2+1:2+2:2+3$．卽$3:4:5$也．

34. 松木片在空氣中之重P……………………33克（+
木片及鉛塊共在水中之重P′……………………87克（−
僅有鉛塊在水中之重P″……………………104克（+
故木片所排斥之水重$P+P''-P'=$　　50克

由之此木片之比重$=\frac{33}{50}=0.66$

35. 比重瓶容積中所有15°c火酒之重 $P=33.268-13.425=19.843$ 克

同容積14°c之水重 $P'=38.408-13.425=24.983$ 克

故15°c之火酒.對14°c之水之比重 $\frac{P}{P'}$ 而14°c之水.對4°c之水之比重.爲0.99930.則15°c之火酒.對4°c水之比重

$$\frac{19.843}{24.983}\times 0.9993=0.7637$$

36. 以所求物體之重量爲 x.則 $(x-a)$ 乃與物體同容積水之重量.又 $(x-b)$ 乃與物體同容積液之重量.而以比重 S 除後者.當爲同一容積水之重量故得等式如次.

$$x-a=\frac{x-b}{S}$$

由之得

$$x=\frac{b-aS}{1-S}$$

又以物體之比重.除其重量.卽得所求之容積.而其物體之比重.卽等以其重量減去在水中之重者.除其原重量.

卽

$$\frac{\frac{b-aS}{1-S}}{\left(\frac{b-aS}{1-S}-a\right)}.$$

故求其容積之式卽如次.

$$\frac{b-aS}{1-S}\div\frac{\frac{b-aS}{1-S}}{\left(\frac{b-aS}{1-S}-a\right)}=\frac{b-a}{1-S}$$

37. 解此問題有二法.(第一法)合金之比重由22條(a) $S=\frac{P}{P-P'}=\frac{480}{480-448}$ 卽15.今以金之重量爲 x.以銅之重量爲 $(480-x)$.則金銅各個之容積.以等於合金之容積.故 $\frac{x}{19.4}+\frac{480-x}{8.8}=\frac{480}{15}$.

(第二法)以前之合金中金之重量爲 x.銅之重量爲 $(480-x)$.則金在水中之重量 $x\times\frac{19.4-1}{19.4}$.銅在水中之重量.爲 $(480-x)\frac{8.8-1}{8.8}$.故

$$x\times\frac{18.4}{19.4}+(48-x)\frac{7.8}{8.8}=448.$$

由兩法.不論何法求出 x 之值.同得金363兩.銅117兩.卽18:6之比.則是

合金之全量24之內。金18。銅6。因知此爲18金。

38. 以金銀之各質量。爲x克及y克。則此合金得看爲金$\frac{x}{19.4}$方立糎。與銀$\frac{y}{10.5}$立方糎所成者。又合金之體積爲$\frac{650}{16}$立方糎。由題意以合金之體積。等於各成分金屬體積之和。故得列式如次。

$$\frac{x}{19.4}+\frac{y}{10.5}=\frac{650}{16} \qquad (1)$$

又由題意金銀質量之和。等於650。卽

$$x+y=650. \qquad (2)$$

遂以(1)(2)兩式。依聯立方程式解法。得

$$x=487$$

$$y=163$$

39. 此合金之比重$\frac{979}{979-890}=\frac{979}{89}=11$。

又其成分各金屬之質量。金爲x克。銀爲y克。遂與前問同理。得次之方程式。

$$\frac{x}{19.4}+\frac{y}{10.5}=\frac{979}{11} \qquad (1)$$

又 $$x+y=979$$

(1)(2)兩式依聯立方程式解之得

$$x=97 \qquad y=882$$

40 $14+10-7=17$克。爲B物體在水中所失之重。卽與B物體同體積之水重也。故B之比重$\frac{14}{17}$。

41 比重1·1之液。與該物體同體積之重。爲$128-106=22$克。因之與此液被物體所佔之部分體積之水重。爲22克$\div 1.1=20$克。故該物體之體積爲20立方糎。

又以與此物體同體積之水重爲20克。故物體之比重。

$$S=\frac{128}{20}=6.4$$

42. 木圓壔之重。等於其$\frac{2}{3}$之體積之水重。由題意自明矣。故木之重與同體積之水重之比。爲

$$\frac{100}{100\div\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$$

卽水之比重爲$\frac{2}{3}$

次以錘之比重爲x則60兩重錘之體積爲$\frac{60}{x}$立方糎。與之同體積之水重爲$\frac{60}{x}$克。又以此水之比重爲$\frac{2}{3}$。則100克之木之體積爲$\frac{100}{\frac{2}{3}}$立方糎。

與此同體積之水重。$\frac{100}{\frac{2}{3}}=150$克。

結合此二者沉之於水中。要使在水中保其平均。則此二重要等於與之同體積之水重。故

$$\frac{60}{x}+150=100+60$$

由之得 $x=6$

43. 以瓶塞木之容積爲v。則水上壓瓶塞木之力爲$v\times1\times g$。(絕對單位)瓶塞木之下壓力爲$v\times\cdot24\times g$。(絕對單位)此二數之差。卽上昇瓶塞木之力。故若以所求之加速度爲a。則瓶塞木之浮力爲$v\times\cdot24\times a$。故

$$v\times g(1-\cdot24)=v\times\cdot24\times a$$

$g=980$ 消去兩邊v。得次式。

$$980-.24\times980=\cdot24\times a$$

$$\therefore \quad a=\frac{980-235\cdot2}{\cdot24}=3103\cdot3 \text{ 秒糎。}$$

44 與12斤之物體同容積之油重。爲$12\times\frac{0\cdot92}{8}$，卽1·38斤。物體重與油重之差。爲物體在水中之重。卽及於系之張力。故所求之量。$12-1\cdot38$。卽10·62斤。

45. 由圓錐體之公式。圓錐之體積。等於$\frac{1}{3}\pi$。及底面積與高之相乘積。故圓錐體之重。爲$\frac{1}{3}\pi4^2\times16\times\cdot85$。

茲以在水中部分之高爲x。則在水中部分之圓錐體。其底邊之半徑爲$\frac{x}{4}$何則。全圓錐體之高。與半徑之比。乃16：4。卽1：$\frac{1}{4}$故也。由是與x高之圓錐體。同容積之水爲$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{4}\right)^2\times x\times1$。此與全圓錐體之重。不可不相等。故$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{4}\right)^2\times x\times1=\frac{1}{3}\pi4^2\times16\times\cdot85$

由之得　　$x=14{\cdot}75$ 寸

46. 以立方體一邊之長爲 x。因載以分銅立方體新沈入之容積。爲 $x^2\times12$。與此同容積火酒之重量爲 $x^2\times1{\cdot}2\times0{\cdot}8$ 而此重量。以等於所加入分銅之重。故

$$x^2\times1{\cdot}2\times{\cdot}8=320$$

由之得　　$x=18{\cdot}25$ 糎

故所求立方體之容積乃 $\overline{18{\cdot}25^3}=6078$ 立方糎。

47. 銀塊之容積爲 $\frac{20}{10{\cdot}5}$ 與此同容積之水重 $\frac{20}{10{\cdot}5}\times1$。故及於線之張力爲 $20-\frac{20}{10{\cdot}5}\times1$。

又由同理以錫塊之重量爲 x。及於其線之張力爲 $x-\frac{x}{7{\cdot}3}\times1$。今二塊保平均時。此二力當相等。

卽　　$$20-\frac{20}{10{\cdot}5}\times1=x-\frac{x}{7{\cdot}3}\times1$$

由之得　　$x=20{\cdot}97$ 克

48. 與前問同理。以錫塊之重量爲 x 克。則

$$20-\frac{20}{10{\cdot}5}\times1{\cdot}51=x-\frac{x}{7{\cdot}3}\times1{\cdot}51$$

由之得　　$x=21{\cdot}57$ 克。

49. 假定物體之重量爲 v。物體之重量。以絕對單位表之。爲 $v\times\delta\times g$。又與之同容積液之重量。爲 $v\times\delta'\times g$。液中物體之下降力。等於前後重量之差。卽 $vg(\delta-\delta')$。以此力使運動 $v\times\delta$ 之質量。其加速度固不可不等於 $vg(\delta-\delta')\div v\delta$。次以此加速度落下 d 之距離。所要之時間。依第一篇加速度之公式。$S=\frac{1}{2}at^2$。則 $t=\sqrt{\frac{2S}{a}}$

以 S 代入本題 d。以 a 代入本題 $\frac{vg(\delta-\delta')}{v\delta}$

則　　$$t=\sqrt{2d\Big/\frac{vg(\delta-\delta')}{v\delta}}=\sqrt{2d\delta\big/g(\delta-\delta')}$$

50. 沈半容於水中之物體。其比重爲0·5也明矣。今以二液同容混之。若以所求之比重爲 x。則混合液之比重。不可不爲 $\frac{1+x}{2}$。故依題意 $\frac{v}{3}\times\frac{1+x}{2}=v\times0{\cdot}5$。但 v 假定爲物體之容積。由之得消去 v 求 x。得 $x=2$。

51. 以玻璃球之容積為 v. 當沈入水銀中時. 以其玻璃球在水銀中之部分為 x 容. 則

$$v\times2\cdot8=x\times13\cdot6+(v-x)\times1$$

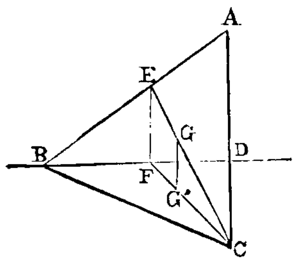
即　$$x=\frac{1}{7}v$$

52. 同一浮秤.沈於液中.皆過一定點.是在液中所佔之容積常一定.然則以水之比重.除(200+60·3).與以火酒之比重.除(200+6·8)者.不得不相等也明矣.故若以火酒之比重為 x. 則

$$\frac{200+60\cdot3}{1}=\frac{200+6\cdot8}{x}$$

由之得　$$x=0\cdot7944$$

53. G 為 ABC 三角板之重心又 G′ 為被排除液體之重心.即 BCD 三角形之重心.當三角板靜止時.此二點必在同一鉛直線內.則 AC 邊因平行於 GG′.故亦必垂直於水面.AC 所以平行於 GG′ 之理.依幾何學得證明之.茲略述於次.



由 C 點過重心 G 引一直線.會於 AB 線上之點 E. 即 AB 之中點.又由 C 點過重心 G′ 引一直線.會於 BD 線上之點 F. 亦即 BD 之中點.結 EF 自必平行於 AD.何則.由幾何學之定理.凡於三角形之兩中點相結.必平行於他邊也明矣.故今欲證 GG′ 平行於 AC. 但證 EF 平行於 GG′ 可耳.而 CF 與 G′F. 猶 3 與 1 之比. CE 與 GE 亦 3 與 1 之比.故 CF : G′F : : CE : GE. 故 GG′ 乃平行於 FF 者.

次以三角板 ABC 之重量.與上壓三角板之液重共相等.故若以液之比重為 a. 以三角板之比重為 b. 則 $\frac{1}{2}BD\times CD\times a=\frac{1}{2}BD\times AC\times b$ 由之 $\frac{a}{b}=\frac{AC}{CD}$ 而 $CD=BC\cos BCA$. 故液與三角板比重之比.即 $AC : BC\cos BCA$.

第二章之問題

1. 由脫里賽離之定律.流出之速度為 $\sqrt{2gS}$. 本題 $S=0\cdot9$. 代入公式.即 $\sqrt{2\times9\cdot8\times\cdot9}=4\cdot2$ 米突.

2. 於水面上 1 平方吋加 6 磅之壓力.更加若干呎水高之壓力.即流

出口所受之全壓力。今以其高為 x 呎。當加 6 磅之力於液面時。由反動之理。反壓於 1 平方吋之力。不可不亦為 6 磅。故次式不可不相等。

$$x\times\frac{1}{12^2}\times 62\cdot5=6$$

(上 $\frac{1}{12^2}$ 者一平方吋之面積以呎為單位之面積也。62·5 者乃一立方呎之重量也)

卽 $$x=13\cdot82$$

下與前問同解法流出之速度。為

$$\sqrt{2\times32\times(2+13\cdot82)}\qquad \text{卽}\quad 31\cdot8\text{ 呎}$$

3. 依 28 條公式 $M=F\sqrt{2gh}$。本題 $F=0\cdot196$ 糎$^2\times h=55$。流出係數 $=0\cdot699$。故 22 秒間所要之量如次。

$$0\cdot699\times0\cdot196\sqrt{2\times980\times55}\times22=98\cdot5\text{ 克。}$$

4. 流出水之速度。每秒 $\sqrt{2\times32\times25}$。卽 40 尺。凡靜止體由 144·72 尺高落於地上之時間，依落下公式。

$$144\cdot72=\frac{1}{2}\times32t^2$$

由之得 $$t=3\cdot01\text{ 秒}$$

故所求之水平距離。為 $40\times3\cdot01$。卽 120·4呎。

第三章之問題

1. (I) 水 1 立方呎之重為 62·5 磅。又與此同容積水銀之重量。為 $62\cdot5\times13\cdot6$ 磅。而於 1 平方吋空氣之壓力。等於同面上 30 吋水銀之重量。故及於 1 平方吋之壓力。為 $\frac{1\times30}{12^2}\times62\cdot5\times13\cdot6$ 卽 1475 磅。

(II) 以 30 吋卽為 76 糎。故及於 1 平方糎之壓力為 $1\times76\times13\cdot6$。卽 1033·6 克。

(III) 重力單位之克。以功表之。當如次。

$$1033\cdot6\times980\qquad \text{卽 }1012928\text{ 功。}$$

2. 空氣之壓力合水柱之數。為 $30\times13\cdot6\div12$。卽等於 34 呎之重量。但依題意。水只昇至 8·5 呎。則上壓力所作用者。合水柱之重量。常等於其差 $(34-8\cdot5)$ 而以此力及於 1 平方吋之全壓力。為 $\frac{1}{12^2}\times(34-8\cdot5)\times62\cdot5$。

卽 為 11·068 磅

3. 以所要空氣之壓力爲x糎.則管內空氣之壓力.前者爲$(x-46)$糎.後者爲$(x-10.8)$糎. 由馬黎太之定律.氣體之容積.反比於其所受之壓力.故

$$\frac{20}{9}=\frac{x-10.8}{x-46}$$

由之得　$x=74.8$ 糎.

4. 以容積與壓力爲反比例.故若以閉管內空氣之壓力爲x.則

$$\frac{19}{15}=\frac{76}{x}$$

卽　$x=60$ 糎

以閉管內之水銀面低降 4 糎.則兩管內水銀高之差爲 8 糎.此 8 糎水銀之重.與所求鐘內空氣之壓力相加.當等於閉管口之 60 糎.故鐘內空氣之壓力.不可不爲 $60-8$.卽 52 糎.

5. 以所求外部空氣之壓力爲x.則所倒立之直管空氣之壓力爲$x\times\frac{10}{25}$.加水銀柱之壓力於此.則等於外部空氣之壓力.

卽　$x\times\frac{10}{25}+45.8=x$.

由之得　$x=76.5$ 糎.

6. 以水銀所浸入於管內爲x糎.則密度閉於管內空氣之壓力.爲$76\times\frac{62}{62-x}$與之平均之壓力.乃$(62-x)$糎深之水銀柱之重.與空氣壓力之和.故

$$76\times\frac{62}{62-x}=(62-x)+76$$

由之得　$x=21.54$ 糎.

7. 以所求之直徑爲x寸.則以氣泡之容積.反比例於氣泡直徑之3乘.故由馬黎太之法則.

$$1^3\times 26000\times\frac{1.02}{13.6}=x^3\times 76$$

卽　$x^3=26.63$ 寸　x約等於 3 寸.

8. 以由水面至管內海水所浸入之深爲x糎.則管內空氣之壓力爲$76\times\frac{3}{2}$.此壓力乃等於深x糎之海水之重量.與 76 糎之氣壓之和.故

$$76\times\frac{3}{2}=x\times\frac{1.03}{13.6}+76$$

即　　$x=501.747$

故由水面至管之開端之深爲 $501.7+\frac{60}{3}$ 即 521.7 糎。由水面至管之閉端之深。爲 $501.7-60\times\frac{2}{3}$ 即 461.7 糎。

9. 不關空氣之壓力如何。所要之力。等於鐘內所充滿水銀之重。故其力爲 $\pi 3^3\times 13.6$。即 6.9276 瓩。

10. 最初於活塞兩面空氣之壓力爲 p。活塞變位後。兩面壓力之比。當如下。

上面之壓力。：下面之壓力：：$p\times\frac{5}{9}:p\times\frac{5}{1}$

即　　$1:9$

11. 混合氣體之壓力。等於各氣體壓力之和。故所求之壓力。

$$5\times\frac{2}{3}+0.5\times\frac{3}{3}\times 4\times\frac{4}{3}\text{ 即 }9\frac{1}{6}\text{ 氣壓。}$$

12. 以活塞所下之距離爲 x 糎。則圓管內受壓縮空氣之壓力。每 1 平方糎爲 $76\times\frac{50}{50-x}\times 13.6$ 克。

由上方下壓活塞之力。對 1 平方糎上爲 $\frac{380}{5}+76\times 13.6$。以此二力乃相等。則

$$\frac{380}{5}+76\times 13.6=76\times\frac{50}{50-x}\times 13.6$$

由之得　　$x=3.406$。

13. 於海面大氣之壓力。爲水銀柱 76 糎。水之比重爲水銀之 $\frac{1}{13.6}$。又空氣之比重。爲水之 $\frac{1}{770}$ 則以水銀柱之高。換算空氣之高。爲

$$76\times 13.6\times 770\quad\text{即}\quad 7958.7\quad\text{或}\quad 5\text{ 哩約。}$$

14. 水銀之一耗換算以空氣柱。爲 $1\times 1.36\times 770$。即 10.472 米。即昇至此高時。水銀當下降 1 耗。

15. 以所要之高爲 x 糎。則引上管時。管內空氣所占之長。爲 $h+g-x$。以當時實驗空氣之壓力爲 b。則管內空氣之壓力爲 $b\times\frac{h}{h+g-x}$ 而加之以水銀柱之重當等於大氣之壓力。故

$$b\times\frac{h}{h+g-x}+x=b$$

由之得 $x=\frac{b+h+g}{2}-\sqrt{\left(\frac{b+h+g}{2}\right)^2-bg}$

16. 以所求水銀柱下降之長爲 x 糎。則所導於眞空中空氣之壓力爲 $76\times\frac{1}{51+x}$。因之水銀下降 x 糎。故其所下降之水銀重。不可不等於前之空氣之壓力。故

$$76\times\frac{7}{15+x}=x$$

由之得 $x=4$

17. $(W-W')$ 者。爲與固體同容積之水之重量。以水之密度爲1。故得卽以 $(W-W')$ 看作固體之容積。故以之乘空氣之密度 d。則 $(W-W')d$ 者。乃空氣與固體同容積之重量也。此力作用於上方。使輕固體。故固體之視重爲 $W-(W-W')d$。

18. 鉛之比重爲 $\frac{7\cdot86}{7\cdot86-7\cdot19}$ 卽 11·73。又火酒之比重 $\frac{7\cdot86-7\cdot33}{7\cdot86-7\cdot19}$ 卽 ·79。次單以鉛入於水中。與樫相結之重量爲 $7\cdot19+13\cdot21$。亦入樫於水中。則減其重量 4·87。故 $(7\cdot91+13\cdot21)-4\cdot87$ 卽 15·53 克。不可不爲與樫同容積水之重量。故樫之比重 $\frac{13\cdot21}{15\cdot53}$ 卽 ·8506 也。

第四章之問題

1. 以所求之數爲 x。則流出之水量。由液體射出量之公式。當等於流出係數。乘口面積與速度之相乘積。故每秒流出之量。爲 $\cdot625\times4\sqrt{2\times980\times x}$。而依題意。此量等於每分25立方糎之水量。故

$$\cdot625\times4\sqrt{2\times980\times x}=\frac{25\times1000}{60}$$

卽 $x=6$ 糎

2. 由排氣器之公式 $P_n=P\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$ 故

$$P_{10}=760\left(\frac{3}{3+2}\right)^{10} \text{ 卽 } P_{10}=4\cdot59 \text{ 粍}$$

或 $\frac{1}{166}$ 氣壓

3. 發射後之壓力爲 $\frac{40\times760\times8-80\times741\times1}{40}$

卽 4598 糎或 $\frac{4598}{760}$ 卽 6·05 氣壓。

4.　水銀柱僅有15吋高者.由於海水之壓力.故18吋之水銀柱.與若干深之海水柱.其重量當相等.故若以所求之深為 x 吋.則 $x\times 10{\cdot}3=18\times 13{\cdot}6$.(海水之比重看作10·3者)由之得 $x=237{\cdot}67$ 吋.或19·8呎.

5.　活塞壓上水之重量為 $4\times 80\times 62{\cdot}5$ 即20000磅.則活塞壓上之力亦為20磅明矣.

6.　以吸水管之斷面積為1.則活塞之面積當為10.故吸水管之容積為6.(即 1×6)圓筒之容積為5.(即 $10\times 0{\cdot}5$)今水升於吸水內為 x 米.則器內空氣之壓力為 $10\times\frac{6}{6+5-x}$ 加之以 x 米之水壓力.則不可不等於外氣之壓力.故 $\frac{60}{6+5-x}\times x=10$ 由之得 $x=2{\cdot}75$ 米.

7.　外殼之全面積為 $4\pi r^2$.即 $4\times 3{\cdot}1416\times r^2$.其重量為62·5瓩.故 $4\times 3{\cdot}1416r^2\times{\cdot}250=62{\cdot}5$.即 $r=4{\cdot}459$ 米.因之輕氣球之容積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 即 $\frac{4}{3}\times 3{\cdot}1416\times 4{\cdot}459^3$ 即371·52立方米.次以空氣之1立方米為1·293瓩.故充滿於輕氣球空氣之全重量.為 $371{\cdot}52\times 1{\cdot}293$ 即480·375瓩.又同容輕氣之重量.其 $\frac{1}{13}$ 即36·88瓩.故所求之上昇力 $480{\cdot}375-(36{\cdot}88+62{\cdot}5)$ 即380·995瓩.