注意 $\dfrac{1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)}{n}>\sqrt[n]{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}$ ヨリ導ケ。

(2) $\left\{\dfrac{1}{6}(n+1)(2n+1)\right\}^{\frac{n}{2}}>1,2,3\ldots\ldots n$ ナルコトヲ示セ $(n\geqq 2)$.

注意 第二章恒等式 (19頁) ニヨリ $1^2+2^2+\ldots\ldots n^2=\dfrac{1}{6}(n+1)(2n+1)$ ナルコトニ着眼セヨ。

XXII. 應用

60. 根ノ吟味 二次方程式ニ關スル根ノ吟味ハ先ヅ根ノ實虚ヲ吟味シ，次ニ實根ヲ有スル場合ハ根ノ正負ヲ吟味スルノデアル。ソコデ二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ニ於テ

I. 根ノ實，虚ハ其ノ判別式 b^2-4ac ノ符號デ定マリ，$\geqq 0$ ナラバ實根ヲ有シ，<0 ナラバ虚根ヲ有スルノデアル 〔41 (115 頁)〕

II. 根ノ正負ハ二根ノ積 $\dfrac{c}{a}$ ガ <0 ナラバ正負二根ガアル。又 $\dfrac{c}{a}>0$ ナラバ二根ノ和 $-\dfrac{b}{a}$ ガ >0 ナルトキ兩根共正，$-\dfrac{b}{a}<0$ ナラバ兩根トモ負デアル。

(i). **一元方程式ノ問題**

例 1. $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$ ナル方程式ハ a, b, c ガ實數ナルトキハ其ノ値如何ニ拘ハラズ恒ニ實數ノ根ヲ有スルコトヲ證セヨ。

講義 分數方程式 $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}=0$ ノ根ハ分母ヲ拂ヒテ得タル方程式 $(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0\ldots\ldots(1)$ ノ根デアル，爰ニ $a=b=c$ ナラバ根ガ存在セズ，又 a, b, c 中二ツガ等シキトキハ一次方程式トナルカラ實根ヲ有スルコトトナル。次ニ a, b, c ガ悉ク相異ナルトスルト，(1) ハ $3x^2-2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0$ トナル。其ノ判別式ハ

$$\Delta\equiv 4(a+b+c)^2-12(bc+ca+ab)\equiv 4[a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab]$$

$\equiv 2[(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]$ トナルカラ >0 トナル，故ニ實根ヲ有スルノデアル。サレバ a, b, c 中少ナクモ二ツガ相異ナルトキノミ實根ヲ有ス

例 2. a ト b トノ値ノ如何ニ拘ハラズ $\dfrac{x^2}{x^2-a^2}+\dfrac{x^2}{x^2-b^2}=4$ ナル方程式ノ四ツノ根ハ常ニ實數ナルコトヲ示セ。

講義 分母ヲ拂フテ，$x^2(x^2-b^2)+x^2(x^2-a^2)=4(x^2-a^2)(x^2-b^2)\ldots\ldots(1)$ ガ得ラレル。コハ x ニ付テ復二次方程式デアル，從テ x^2 ノ値ヲ求メ，次ニ其ノ平方根ヲ求メテ最後ノ根ニ到達スルノデアルカラ，$x^2\equiv X$ トオイテ得ラル方程式 $X(X-b^2)+X(X-a^2)=4(X-a^2)(X-b^2)$ ガ正根ヲ有スルトキハ (1) ノ根ハ實根ヲ有スルノデアル。トコロガ X ノ方程式ハ

$2X^2-3(a^2+b^2)X+4a^2b^2=0$ トナルカラ判別式ハ

$$\Delta\equiv 9(a^2+b^2)^2-32a^2b^2\equiv 9a^4-14a^2b^2+9b^4\equiv 9\left[\left(a^2-\frac{7}{9}b^2\right)^2-\frac{49}{81}b^4+b^4\right]$$

$\equiv 9\left[\left(a^2-\dfrac{7}{9}b^2\right)^2+\dfrac{32}{81}b^4\right]>0$。サレバ實根ヲ有スルコトトナル，ソシテ二根ノ和 $3(a^2+b^2)>0$，積 $4a^2b^2>0$ デアルカラ兩根トモ正數デアル。從テ四根共ニ實根デアル

例 3. $a, b, p\ q$ ガ實數ナルトキハ次ノ方程式ハ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。$\dfrac{p^2}{a^2+x}+\dfrac{q^2}{b^2+x}-1=0$。

講義 分母ヲ拂フテ整頓スルト，$x^2+(a^2+b^2-p^2-q^2)x+(a^2b^2-a^2q^2-b^2p^2)=0\ldots\ldots(1)$ トナル。ソコデ $x=-a^2$ 或ハ $-b^2$ ヲ代入シテ分母ヲ 0 トナス根ノ有無ヲ吟味スルニ，左邊ハ $p^2(a^2-b^2)$ ト $q^2(b^2-a^2)$ ナルカラ，p 或ハ q ガ 0 ナルカ又ハ $a^2=b^2$ ニナラナケレバ與ヘラレタル方程式ト (1) トハ同値デアル。

ソコデ (1) ノ判別式ヲ吟味スルニ，$\Delta\equiv(a^2+b^2-p^2-q^2)^2-4(a^2b^2-a^2q^2-b^2p^2)$

$\equiv[(a^2-p^2)+(b^2-q^2)]^2-4[(a^2-p^2)(b^2-q^2)-p^2q^2]\equiv[(a^2-p^2)-(b^2-q^2)]^2+4p^2q^2>0$

トナル。何トナレバ a, b, p, q ハ實數デ，p, q ガ 0 デナイ場合ヲ考ヘテキルカラデアル。サレバ實根ヲ有スルコトニナル。

次ニ p 或ハ q ガ 0 ナラバ一次方程式トナルカラ必ズ實根ヲ有スル，p ト q ガ共ニ 0 ナラバ不能デアル。

例 4. 方程式 $x^2+ax+b=0$ ガ實根ヲ有スル時次ノ方程式ノ根ノ性質ヲ吟味セヨ。

$x^2+ax+b+(x+c)(2x+a)=0$ 但シ a, b, c ハ皆實數ナリ。

講義 第一ノ方程式ガ實根ヲ有スルカラ $a^2-4b\geqq 0\ldots\ldots(1)$ デアル。次ニ第二ノ方

程式ヲ整頓スルト．$3x^2+2(a+c)x+b+ac=0$ トナルカラ其ノ判別式ヲ吟味スルニ，

$$\Delta=(a+c)^2-3(b+ac)=a^2-ac+c^2-3b=c^2-ac+a^2-3b.=\left(c-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a^2-3b.$$

$=\left(c-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3(a^2-4b)}{4}$ トナル。ソシテ第一括弧ハ正カ 0，第二括弧モ正カ 0 ナルコトハ (1) ヨリ明ラカデアルカラ $\Delta\geqq 0$ トナル。サレバ第二ノ方程式モ實根ヲ有スルコトニナル。

練習

(1) $ax^2+2bx+c=0$ ノ二根ガ實數ニシテ相異ナルトキ $(a+b)(ax^2+2bx+c)=2(ac-b^2)(x^2+1)$ ノ二根ハ虚數ナルコトヲ示セ。

(2) $(a^2+p^2)x^2-2(aq+bp)x+b^2+q^2=0$ ノ根ガ實數ナルトキハ二ツノ根ハ相等シキコトヲ示セ。

例 5. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ絶對値ハ $\frac{|b|+\sqrt{|ac|}}{|a|}$ ヨリ大ナラズ，又 $\frac{|c|}{|b|+\sqrt{|ac|}}$ ヨリ小ナラザルコトヲ證明セヨ。

講義 先ヅ與ヘラレタル方程式ノ根ハ $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ デアル。サレバ複素數絶對値ト例 5 (116 頁) ニヨリ

$$\left|\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\frac{|-b\pm\sqrt{b^2-4ac}|}{2|a|}\leqq\frac{|b|+\sqrt{|b^2-4ac|}}{2|a|}\ldots\ldots(1)$$ トナル

トコロガ $|b^2-4ac|=|(b+2\sqrt{ac})||(b-2\sqrt{ac})|\leqq(|b|+2\sqrt{|ac|})(|b|+2\sqrt{|ac|})=(|b|+2\sqrt{|ac|})^2$

サレバ (1) ヨリ $\left|\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|\leqq\frac{|b|+\sqrt{|b^2-4ac|}}{2|a|}\leqq\frac{|b|+|b|+2\sqrt{|ac|}}{2|a|}=\frac{|b|+\sqrt{|ac|}}{|a|}$

トナル

又 $\left|\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|=\left|\frac{2c}{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}\right|=\frac{2|c|}{|-b\pm\sqrt{b^2-4ac}|}\geqq\frac{2|c|}{|b|+\sqrt{|b^2-4ac|}}$

$\geqq\frac{2|c|}{|b|+|b|+2\sqrt{|ac|}}$ サレバ $\left|\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right|\geqq\frac{|c|}{|b|+\sqrt{|ac|}}$ トナル

例 6. $x^2+ax+b=0$ ノ任意ノ一根ト，$x^2+ax+b'=0$ ノ任意ノ根トノ差ノ絶對値ハ $\frac{|b-b'|}{|a|+2\sqrt{c}}$ ヨリモ小ナラザルコトヲ證明セヨ。但シ c ハ $|b|$ ト $|b'|$ トノ中ノ小ナラザル ヲ表ハスモノトス

講義 第一方程式ノ根ハ $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ ニシテ第二方程式ノ根ハ $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b'}}{2}$

デアル。サレバ第一ト第二ノ方程式ノ各任意ノ一ツ宛ノ根ノ差ノ絶對値ハ

$\left|\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}-\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b'}}{2}\right|$ ニシテ二ツノ±ノ符號中前者ト後者トハ無關係デアル。

$=\left|\frac{\pm\sqrt{a^2-4b}\mp\sqrt{a^2-4b'}}{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{a^2-4b}\pm\sqrt{a^2-4b'}}{2}\right|$ トナル。ソコデ證明スル結果ニ着眼シテ，分子ニ $b-b'$ ガ生ズル樣ニスルカラ分子ヲ有理化シテ

$$=\left|\frac{2(b-b')}{\sqrt{a^2-4b}\mp\sqrt{a^2-4b'}}\right|=\frac{2|b-b'|}{|\sqrt{a^2-4b}\pm\sqrt{a^2-4b'}|}\geqq\frac{2|b-b'|}{|\sqrt{a^2-4b}|+|\sqrt{a^2-4b'}|}\ldots(1)$$

トナル。トコロガ $|\sqrt{a^2-4b}|=\sqrt{|a^2-4b|}\leqq\sqrt{|a-2\sqrt{b}||a+2\sqrt{b}|}$

$\leqq\sqrt{(|a|+2\sqrt{|b|})(|a|+2\sqrt{|b|})}=|a|+2\sqrt{|b|}$ トナル。又 $|\sqrt{a^2-4b'}|\leqq|a|+2\sqrt{|b'|}$ デアルカラ (1) ハ

$$\frac{2|b-b'|}{|\sqrt{a^2-4b}|+|\sqrt{a^2-4b'}|}\geqq\frac{2|b-b'|}{|a|+2\sqrt{|b|}+|a|+2\sqrt{|b'|}}=\frac{2|b-b'|}{2|a|+2(\sqrt{|b|}+\sqrt{|b'|})}$$

トナル。ソコデ c ガ $|b|$ ト $|b'|$ トノ中ノ小ナラザル方ヲ表ハスモノトスルト，

$$\sqrt{|b|}+\sqrt{|b'|}\leqq\sqrt{c}+\sqrt{c}.$$

デアルカラ $\frac{2|b-b'|}{2|a|+2(\sqrt{|b|}+\sqrt{|b'|})}\geqq\frac{2|b-b'|}{2|a|+4\sqrt{c}}=\frac{|b-b'|}{|a|+2\sqrt{c}}$ トナル

サレバ $\left|\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}-\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}\right|\geqq\frac{|b-b'|}{|a|+2\sqrt{c}}$ トナル。

(ii). 二元以上ノ方程式ノ問題

例 1. a, b, c ハ實數ニシテ方程式 $ax^2+2bx+c=0\ldots\ldots(1)$ ノ根ガ虚數ナルトキハ，聯立方程式 $ax^2+2bx+c=ay^2+2by+c\ldots\ldots(2)$, $axy+b(x+y)+c=0\ldots\ldots(3)$ ハ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

講義 先ヅ (2) ハ $a(x^2-y^2)+2b(x-y)=0$ 卽チ $(x-y)[a(x+y)+2b]=0$ トナル。サレバ $x=y$ 或ハ $x+y=-\frac{2b}{a}$ トナルカラ (2) ト (3) ノ聯立方程式ハ

$$\left.\begin{array}{l}x=y\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)\\ axy+b(x+y)+c=0\ldots(3)\end{array}\right\}(\mathrm{I})\qquad\left.\begin{array}{l}x+y=-\frac{2b}{a}\ldots\ldots\ldots(5)\\ axy+b(x+y)+c=0\ldots(3)\end{array}\right\}(\mathrm{II})$$

ノ二組ヲトクコトニナル。(I) ヨリハ，(4) ヲ (3) ニ代入シテ $ax^2+2bx+c=0$ ガ得ラル。トコロガ題意ニヨリ (1) ハ虚根ヲ有スルカラ x ノ値ハ虚數デアル，從テ y ハ虚數デアル

又 (II) ヲトクニ，(5) ヲ (3) ニ代入スルト，$axy-\frac{2b^2}{a}+c=0$ 卽チ $xy=\frac{2b^2-ac}{a^2}$ トナル。

サレバ (II) ノ解ハ $X^2+\frac{2b}{a}X+\frac{2b^2-ac}{a^2}=0$ トナル。卽チコノ二ツノ根ガ x ト y ノ値デアル。

トコロガコノ方程式ノ判別式 $\triangle\equiv\frac{b^2}{a^2}-\frac{2b^2-ac}{a^2}=\frac{ac-b^2}{a^2}$ トナル。ソコデ (1) ハ虚根ヲ有スルカラ $b^2-ac<0$ デアル。サレバ $\triangle>0$ トナル。サレバ X ノ方程式ハ實根ヲ有スルノデアル。

例 2. a, b, c ガ三角形ノ邊ヲ表ハストキ聯立方程式

$$y+z=a\ldots\ldots(1),\quad z^2+x^2+xz=b^2\ldots\ldots(2),\quad x^2+y^2-xy=c^2\ldots\ldots(3)$$

ノ根ハ何レモ實數ナルコトヲ證明セヨ。

講義 先ヅ (2) ヨリ (3) ヲ減ズルト, $(z+y)(z-y+x)=b^2-c^2$ トナル。サレバ (1)ヲ代入シテ $z-y+x=\frac{b^2-c^2}{a}\ldots.(4)$ トナル。次ニ (2)+(3) ヲ作ルト,

$2x^2+y^2+z^2+x(z-y)=b^2+c^2$ 卽チ $2x^2+\frac{1}{2}[(y+z)^2+(z-y)^2]+x(z-y)=b^2+c^2$ ニ於テ (1) ト (4) ノ値ヲ代入スルト, $2x^2+\frac{1}{2}[a^2+(x-\frac{b^2-c^2}{a})^2]+x\left(\frac{b^2-c^2}{a}-x\right)=b^2+c^2$ トナル, 之ヲ整頓シテ $3x^2+a^2+\frac{(b^2-c^2)^2}{a^2}-2(b^2+c^2)=0$ トナル。サレバ

$$x^2=-\frac{a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2}{3a^2}=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{3a^2}$$

トナル。トコロガ a, b, c ハ三角形ノ三邊ノ長サデアルカラ上式ノ右邊ハ正數デアル從テ實根ヲ有スルコトニナル。從テ (1) ト (4) トヨリ y, z ハ x ノ項デ表ハサレルカラ y, z モ實數デアル。サレバ x, y, z ガ實數デアル。

例 3. 與ヘラレタル實數 a, b ニ對シテ $x+y+z=a\ldots\ldots(1)$, $x^2+y^2+z^2=b\ldots\ldots(2)$ ヲ滿足スル實數 x, y, z ガ存在スルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ハ $3b-a^2\geqq0\ldots\ldots(3)$ ナルコトヲ證明セヨ。

講義 (3) ノ條件ガ十分ナルコトヲ先ヅ證明スルニ, ソレニハ (1) ト (2) ヲ滿足スル實數値ガ存在スルコトヲ示セバ足リル。ソコデ (1) ト (2) ハ x, y, z ニ付テ二ツノ方程式デアルカラ z ニ任意ノ値ガ與ヘラレル, 從テ之ニ實數値ヲ與ヘルコトニスル (適當ナル)。ソコデ (1) ト (2) ヨリ

$x+y=a-z\ldots.(1)'$, $x^2+y^2=b-z^2\ldots.(2)'$ ガ得ラレ, (1)′ ノ平方[illegible]ヨリ (2)′ ヲ減ズルト

$$-(x-y)^2=(a-z)^2-2(b-z^2)=3z^2-2az-2b-a^2=3\left\{\left(z-\frac{a}{3}\right)^2-\frac{2(3b-a^2)}{9}\right\}$$

トナル。トコロガ $3b-a^2\geqq0$ デアルカラ

$=3\left[z-\frac{a+\sqrt{2(3b-a^2)}}{3}\right]\left[z-\frac{a-\sqrt{2(3b-a^2)}}{3}\right]\ldots.(4)$ ノ様ニ實數界デ因數分解ガ出來ル。サレバ $\frac{a+\sqrt{2(3b-a^2)}}{3}$ ト $\frac{a-\sqrt{2(3b-a^2)}}{3}$ トノ間ノ値ヲ z ニトラシムルトキハ (4) ノ右邊ガ負數トナル, 從テ $(x-y)^2\geqq0$ トナル。從テ $x-y$ ハ實數デアリ, (1)′ ヨリ $x+y$ ハ實數デアルカラ結局 x ト y トハ實數デアル。

サレバ (3) ハ充分條件デアル。次ニ (3) ガ必要ナルコトヲ證明スルニ, x, y, z ガ實數ダカラ

$$3b-a^2=3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\geqq0$$

トナル。サレバ (3) ハ必要ナル條件デアル。

61. x ノ二次三項式ノ性質

x ノ二次三項式ト云フノハ ax^2+bx+c デ, a, b, c ガ悉ク 0 デハナイ式デアル。斯様ナル式ハ次ノ様ニ出來ル。

$$ax^2+bx+c\equiv a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}\equiv a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$

$$\equiv a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}\quad\ldots\ldots(A)$$

トナル。ソコデ (i) $b^2-4ac>0$ ナルトキハ,

$$ax^2+bx+c\equiv a\left\{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$ トナル。ソシテ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ α, β トスルト, $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ トナル。

(ii) $b^2-4ac=0$ ナルトキハ $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ トナル

(iii) $b^2-4ac<0$ ナルトキハ (A) ノ形ヨリ進ムコトガ出來ナイ(實數界デハ)。カヽル b^2-4ac ヲ x ノ三項式 ax^2+bx+c ノ判別式ト名ヅケル。コレダケヲ準備シテ次ノ定理ヲ證明スル。

定理 I. **三項式 ax^2+bx+c ニ於テ $b^2-4ac>0$ ナル場合 $\alpha<\beta$ ナラバ, $\alpha<x<\beta$ ナルトキ $a(ax^2+bx+c)<0$ ニシテ, $x<\alpha$ 或ハ $x>\beta$ ナルトキ $a(ax^2+bx+c)>0$ トナル。**

證明 (i) ニヨリテ $a(ax^2+bx+c)=a^2(x-\alpha)(x-\beta)$ トナル。トコロガ $\alpha<x<\beta$ ノトキハ $x-\alpha>0$, $x-\beta<0$ ニシテ ax^2+bx+c ハ三項式デアルカラ $a\neq0$, 從テ $a^2>0$ デアル。サレバ $a(ax^2+bx+c)<0$ トナル。

又 $x<\alpha$ 或ハ $x>\beta$ ノトキハ $x-\alpha<0$, $x-\beta<0$ ($\because$ $\alpha<\beta$ デアルカラ), 或ハ $x-\alpha>0$, $x-\beta>0$ ($\because$ $\alpha<\beta$ デアルカラ) ノ二組ハソレゾレ同時ニ成リ立チ, $a^2>0$ デアルカラ $a(ax^2+bx+c)>0$ デアル。

例 (1). $x<\dfrac{3}{5}$ ナルトキハ $-15x^2+29x-12<0$;

(2). $\dfrac{3}{5}<x<\dfrac{4}{3}$ ナルトキ $-15x^2+29x-12>0$;

(3). $x>\dfrac{4}{3}$ ナルトキ $-15x^2+29x-12<0$ ナルコトヲ示セ。

講義 $-15x^2+29x-12=0$ ノ根ハ $x=\dfrac{3}{5}$ 或ハ $\dfrac{4}{3}$ 從テ定理ニヨリ明ラカデアル。

練習 次ノ不等式ガ成立スル x ノ範圍ヲ求メヨ。

(1) $-5x^2-10x+15>0$.　(2) $-5x^2-10x+15<0$.

答 (1) $1>x>-3$; (2) $x>1$ 或ハ $x<-3$.

定理 II. **同式ニ於テ $b^2-4ac=0$ ニシテ $x\neq-\dfrac{b}{2a}$ ナルトキハ $a(ax^2+bx+c)>0$ トナル。**

證明 (ii) ニヨリ $a(ax^2+bx+c)=a^2\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ トナル。ソシテ $x\neq-\dfrac{b}{2a}$ デアルカラ $x+\dfrac{b}{2a}\neq0$, $a^2>0$ デアルカラ $a(ax^2+bx+c)>0$ トナル。

例 $x\neq\dfrac{3}{2}$ ナルトキ $12x^2-36x+27>0$ ナルコトヲ示セ。

定理 III. **同式ニ於テ $b^2-4ac<0$ ナルトキハ $a(ax^2+bx+c)>0$ トナル。**

證明 (iii) ニヨリ $ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}=a\left\{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$ トナル。ソシテ假定ニヨリ $4ac-b^2>0$ デアルカラ $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}>0$ デアル。又 $\left(x+\dfrac{b}{2b}\right)^2\geqq0$ デアルカラ {} 内ハ正數デアルサレバ $a(ax^2+bx+c)=a^2\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]>0$ トナル。

例 1. $-3x^2+4x-6<0$ ナルコトヲ示セ。

講義 判別式 $16-4(-3)\times(-6)=16-72<0$ トナル, 又 x^2 ノ係數ハ -3 デアルカラ $-3x^2+4x-6<0$ トナル。

例 2. a, b, c ノ二ツガ等シカラザルトキ

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab>0$$ ナコトヲ證セヨ。

講義 與ヘラレタル不等式ノ左邊チ a ニ關スル三項式ト見レバ $a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2$ トナル。ソコデ判別式チ調ベルト $(b+c)^2-4(b^2-bc+c^2)=-3(b^2-2bc+c^2)=-3(b-c)^2$ トナル。今 $b\neq c$ トスレバ判別式 <0 トナル。サレバ a^2 ノ係數ハ 1 デアルカラ定理ニヨリ $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab>0$ トナル。同樣ニ $a\neq b$ 或ハ $c\neq a$ ナルトキハソレゾレ c 或ハ b ニ付テノ三項式ト考ヘテ證スコトガ出來ル。

別法 $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$ デアル。トコロガ a, b, c 中ノ二ツガ相等シクナイカラ $a-b$, $b-c$, 及 $c-a$ 中ニ必ズ 0 ナラザルモノガ存在スル。從テ右邊ハ正數トナル。

例 3. p ガ 1 ト 7 トノ間ノ任意ノ値ヲ取ルトキハ $\dfrac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ ハ x ノ實數値ニ對シテ總テノ實値ヲ取リ得ルコトヲ示セヨ。

講義 實數中ノ任意ノ一ツチ a トシ, 之チ x ガトルトキ, $\dfrac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ ガ b ニナレリトスル, $(p+3a-4a^2\neq0)$ トナル樣ナ a トスル;

$$\frac{pa^2+3a-4}{p+3a-4a^2}=b \qquad (1)$$

トナル。從テ分母チ拂フテ得ラルヽ a ニ付テノ方程式

$$(p+4b)a^2+3(1-b)a-(4+pb)=0$$

ハ a ガ實數デアルカラ實根チ有スル筈デアル。從テ判別式ガ 0 ヨリ小ナラズ, 卽チ

$$(9+16p)b^2+2(2p^2+23)b+(9+16p)>0 \text{ 或ハ } =0 \qquad (2)$$

トナラネバナラナイ。トコロガ $1<p<7$ デアレバ $\dfrac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ ハ, x ガスベテノ實數値チトルト, 何ナ實値デモトル。從テ (2) ハ b ノ値ニ拘ハラズ成立シナケレバナラナイ。

トコロガ $1<p<7$ ナルトキハ $9+16p>0$ デアルカラ, 結局 (2) ノ左邊ノ判別式

$$\Delta=(2p^2+23)^2-(9+16p)^2=4(p+1)^2(p-1)(p-7)$$ >0

ガ <0 ナルコトチ示セバ足リル。トコロガ $1<p<7$ ナルトキハ明ラカニ成立スルカラ $\dfrac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ ハスベテノ實數値チトルコトニナル。

例 4. 三角形ノ三邊ヲ a, b, c ニテ表ハストキハ二次三項式 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$ ハ x ノ値ニ拘ハラズ常ニ正ナルコトヲ證明セヨ。

講義 與式ノ判別式 $\triangle$ ハ

$$\triangle\equiv(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2\equiv[b^2+c^2-a^2+2bc][b^2+c^2-a^2-2bc]$$
$$\equiv[(b+c)^2-a^2][(b-c)^2-a^2]\equiv(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(b-c-a)$$

トナル。トコロガ a, b, c ハ三角形ノ三邊デアルカラ $a+b>c, a+c>b, b+c>a$ デ, $a>0$, $b>0, c>0$ デアルカラ $a+b+c>0$ デアル。從テ $a+b-c>0, -a-c+b<0, b+c-a>0$ デアルカラ $\triangle<0$ トナル。ソシテ x^2 ノ係數 b^2 ハ正數デアルカラ x ノ値ニ拘ハラズ

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0$$

例 5. a, b, c ハ三角形ノ三ツノ邊ノ長サヲ表ハス數ナルトキ $a^2(x-y)(x-z)+b^2(y-z)(y-x)+c^2(z-x)(z-y)$ ハ x, y, z ノスベテノ實數値ニ對シテ, 決シテ負ナラザルコトヲ示セ。

講義 先ヅ與ヘラレタル函數ヲ x ノ函數ト考ヘルト, 二次三項式トナルコトニ着眼シテ

$$F(x)\equiv a^2x^2-\{a^2(y+z)+(b^2-c^2)(y-z)\}x+a^2yz+(b^2y-c^2z)(y-z)$$

ノ判別式 $\triangle$ ヲ調ベルト, $\triangle\equiv\{a^2(y+z)+(b^2-c^2)(y-z)\}^2-4a^2\{a^2yz+(b^2y-c^2z)(y-z)\}$ トナルガ, コレヲ整頓スルニハ何ノ文字ニ付テデモ宜シイガ, 出來ルダケ二次カ複二次三項式ニ導ク方ガ德策デアル。ソコデ a^2 ニ付テ整頓スルト

$$\triangle\equiv a^4[(y+z)^2-4yz]+2a^2[(y+z)(y-z)(b^2-c^2)-2(b^2y-c^2z)(y-z)]+(b^2-c^2)^2(y-z)^2$$
$$\equiv a^4(y-z)^2-2a^2(b^2+c^2)(y-z)^2+(b^2-c^2)^2(y-z)^2\equiv(y-z)^2[a^4-2a^2(b^2+c^2)+(b^2-c^2)^2]$$
$$\equiv(y-z)^2(a+b+c)(a-b-c)(a+c-b)(a+b-c)$$

トナル。

サテ a, b, c ハ三角形ノ三邊ノ長サヲ表ハス數デアルカラ $a+c-b>0$, $a+b-c>0$, $a-b-c<0$, $a+b+c>0$ デアルカラ $y\neq z$ デアレバ $\triangle<0$ トナル。ソシテ $F(x)$ ノ x^2 ノ係數ハ正數デアル從テ定理 III ニヨリテ $F(x)>0$ デアル。次ニ $y=z$ ナラバ $\triangle\equiv0$ トナルカラ $F(x)$ ハ完全平方ニナル。其レハ直接ニ與式カラ求ムルト, $F(x)=a^2(x-z)^2$ トナル。從テ $x=z$ ナルトキハ $F(x)\equiv0$ トナル。サレバ x, y, z ノ値ニ拘ハラズ $F(x)\geqq0$ デアル。

練習 (1) $(b^2-4ac)x^2+2(2ac'+2a'c-bb')x+b'^2-4a'c'=0$ ナル方程

式ニ於テ $b^2-4ac<0$ ナルトキハ實根ヲ有スルコトヲ示セ。

注意 判別式ヲ b' ニ付テ整頓シテ其ノ三項式ノ又判別式ヲ吟味シテ示セヨ。

(2) p, q, p', q' ガ與ヘラレタル實數ナルトキ $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ α, β トシ, $x^2+p'x+q'=0$ ノ二根ヲ α', β' トシ $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ 及ビ $\alpha\beta'+\alpha'\beta$ ヲ二根トスル二次方程式ヲ作リ, 且ツ此ノ方程式ノ根ハ與ヘラレタル二ツノ方程式ガ共ニ實根ヲ有スルカ或ハ共ニ虛根ヲ有スルトキハ實數ニシテ其何レカ一方ガ虛根ヲ有シ他方ガ相等シカラザル實根ヲ有スルトキハ虛數ナルコトヲ證明セヨ。

62. 簡單ナル不等式ノ解法

一般ノ不等式ノ解法ハ後章ニ考究スルコトニシテ今簡單ノ不等式ノ解キ方ヲ考究スル。サテ不等式ヲ**解ク**ト云フコトハ既ニ述ベテル(168頁)ガ, コヽニ詳細ニ述ベルト, 例ヘバ $7x-28<0$ ナル不等式ガ成リ立ツタメノ條件 $x<4$ ヲ求ムルコトデアル。即チ $x<4$ ナラバ $7x-28<0$ トナル。カヽル條件ヲ求ムルコトヲ不等式ヲ解クト云フノデアル。

例 次ノ不等式 $\dfrac{3x}{8}-\dfrac{2x-1}{12}>\dfrac{3x+1}{6}-\dfrac{5}{4}$......(1) ヲ解ケ。

講義 (1) ガ成リ立ツタメノ x ニ對スル條件ヲ求ムレバ良イ。ソコデ (1) ノ兩邊ニ分母ノ最小公倍數 24 ヲカケタル不等式 $9x-2(2x-1)>4(3x+1)-30$ 即チ $5x+2>12x-26$....(2); ガ成リ立ツトキニ, (1) ガ成リ立ツコトハ 56 定理 III (166頁) ニヨリテ明ラカデアル。次ニ (2) ガ成リ立ツタメニハ兩邊ニ $-12x-2$ ヲ加ヘタル不等式ガ成立スルトキデアル〔56 定理 II (166頁)ニヨル〕即チ $5x+2-12x-2>12x-26-12x-2$, 即チ $5x-12x>-26-2$ ガ成立スルトキデアル, 即チ $-7x>-28$....(3). 最後ニ (3) ガ成立ツタメニハ兩邊ヲ -7 デ割リテ得ラルヽ $x<\dfrac{-28}{-7}=4$ ガ成立ツトキデアル (定理 III) サレバ $x<4$ ナラバ (1) ガ成リ立ツコトトナルノデアル。以上ト全ク同様ニシテ一般ニ一次整不等式ノ解キ方ガ得ラレル。

(i). **一次整不等式ノ解キ方** 一次整方程式ノ解キ方ト同様デアル, 但シ乘除ノ際ハ基礎定理ニ從フコト。ソシテ條件ヲ求ムル文字ヲ**未知變數**ト名ヅケル。

例 1. $5x+9>13x-7$。

講義　與ヘラレタル不等式ノ未知變數ヲ左邊ニ已知數ヲ右邊ニ移項シテ整頓スレバ $-8x>-16$ トナル。次ニ兩邊ヲ -8 ニテ除シテ $x<2$ ヲ得，之レ求ムル條件デアル。

練習　次ノ不等式ヲ解ケ。

(1)　$5x+2-\frac{x}{2}>3x+1.$　　(2)　$2x-\frac{3x}{2}+4>\frac{x}{2}+2$。

例 2. x ガ 0 ヨリ $-\frac{1}{2}$ マデ變ズル間ニ於テ

$1-kx \geqq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geqq 1-lx \ldots\ldots(a)$ ガ常ニ成立ツタメニ k 及ビ l ガトルベキ値ヲ求ム。

講義　未知變數ハ常ニ x デアルト思フテ x ニ對スル條件ヲ求メテハ駄目デアル。良ク問題ヲ注意シテ，コヽデハ k ト l ガ未知變數デアル。又未知變數ガ二ツアルカラトテ驚イテハイケナイ，コノ問題ハ x ガ 0 ヨリ $-\frac{1}{2}$ マデ變ズル間ニ

$1-kx \geqq \frac{1}{\sqrt{1+x}} \ldots.(1)$ ト $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \geqq 1-lx \ldots.(2)$ トガ成立スル樣ニ k, l ヲ定メヨト云フニ過ギナイ。唯ダ x ノ値ガ同一ノトキト云フニ過ギナイノデ，別々ノ不等式デアル。

サテ先ヅ (1) ヲトクニ，x ガ 0 ヨリ $-\frac{1}{2}$ マデ變ズルト云フコトデアル。其レハ次ノ表ノ通リデアル。

x	$0 \ldots\ldots\ldots\ldots -0.1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -0.2$
不等式(1)	$1-k\times 0 \geqq \frac{1}{\sqrt{1+0}} \ldots 1-k(-0.1) \geqq \frac{1}{\sqrt{1+(-0.1)}} \ldots 1-k(-0.2) \geqq \frac{1}{\sqrt{1+(-0.2)}} \ldots$

x	$-0.3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -0.4$
不等式(1)	$1-k(-0.3) \geqq \frac{1}{\sqrt{1+(-0.3)}} \ldots 1-k(-0.4) \geqq \frac{1}{\sqrt{1+(-0.4)}}$

x	-0.5
不等式(1)	$1-k(-0.5) \geqq \frac{1}{\sqrt{1+(-0.5)}}$

ト云フニ過ギナイ。其レ等ノ各々ニ於ケル k ノ條件ヲ求メヨト云フノガ先ヅ第一ノ問題デアル。ソコデ一々各ノ場合ニ付テ條件ヲ求メラレナイカラ，先ヅ x ガ 0 ト $-\frac{1}{2}$ ノ間ノ一ツノ數デアルト考ヘテ解クノデアル。

サテ $0 \geqq x \geqq -\frac{1}{2}$ ノトキハ $\sqrt{1+x}>0$ デアルカラ (1) ノ兩邊ニカケテ $(1-kx)\sqrt{1+x} \geqq 1$ ガ得ラレ，移項シテ $-kx\sqrt{1+x} \geqq 1-\sqrt{1+x}$ トナル。ソコデ $\sqrt{1+x}$ デ割リテ $-kx \geqq \frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}=\frac{1-(1+x)}{\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})}=\frac{-x}{\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})}$ トナル。トコロガ $x=0$ ナラバ $0 \geqq \frac{0}{\sqrt{1}(1+\sqrt{1})}$ トナルカラ k ニ無關係ノ不等式トナリテ「=」ダケハ成立ツ。ソシテ $x \neq 0$ ナルトキハ $x<0$ デアルカラ

$k \geqq \frac{1}{\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1+x} \ldots.(3)$ トナル。卽チ x ガ 0 以外ノ $-\frac{1}{2}$ マデノ各數ニ對シテ (3) ノ關係，卽チ條件ガ得ラルヽノデアル。

(2) モ同樣ニシテ $1 \geqq \sqrt{1+x}-lx\sqrt{1+x}$ 卽チ $-lx\sqrt{1+x} \leqq 1-\sqrt{1+x}$ トナル。兩邊ヲ $\sqrt{1+x}$ デ割リテ $-lx \leqq \frac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}=\frac{-x}{\sqrt{1+x}+1+x}$ トナル。サレバ $x<0$ ナルトキハ $l \leqq \frac{1}{\sqrt{1+x}+1+x}$ トナリ，$x=0$ ノトキハ l ニ無關係ニ成立ツ。コレデ解キ終ツタガ，以上ノ結果ヲマトメテ書クノガ習慣デ次ノ樣ニ書ク。

サレバ結局 x カ $0>x \geqq -\frac{1}{2}$ ナルトキハ $l \leqq \frac{1}{\sqrt{1+x}+1+x} \leqq k \ldots.(4)$ トナル，$x=0$ ノトキハ k, l ニ無關係ニ「=」ガ成リ立ツ。

ソコデ未ダ問題ガ殘ツテヰル，ソレハ l ト k ノ數値デアル，(a) ガ成立ツ，或ハ (4) ガ成リ立ツ，卽チ x ガ 0 ヨリ $-\frac{1}{2}$ マデ變ズルトキ l, k ノトリ得ラルヽ數値デアル。ソレニハ $\frac{1}{\sqrt{1+x}+1+x}$ ノ値ノ變化ヲ考究シナケレバナラナイ。

x	$0 \ldots -0.1 \ldots\ldots -0.2 \ldots\ldots -0.3 \ldots\ldots -0.4 \ldots\ldots -0.5$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}+1+x}$	$\frac{1}{2} \cdots \frac{1}{\sqrt{0.9}+0.9} \cdots \frac{1}{\sqrt{0.8}+0.8} \cdots \frac{1}{\sqrt{0.7}+0.7} \cdots \frac{1}{\sqrt{0.6}+0.6} \cdots \frac{1}{\sqrt{0.5}+0.5}$

トナル，卽チ $\frac{1}{\sqrt{1+x}+1+x}=\frac{1}{\left[\sqrt{1+x}+\frac{1}{2}\right]^2-\frac{1}{4}}$ トナルカラ x ガ 0 ヨリ $-\frac{1}{2}$ マデ減少スレバ $\sqrt{1+x}$ ガ減少シ，從テ $\sqrt{1+x}+\frac{1}{2}$ ガ正デ減少スルカラ其ノ平方 $\left[\sqrt{1+x}+\frac{1}{2}\right]^2$ モ減少シ。從テ $\left[\sqrt{1+x}+\frac{1}{2}\right]^2-\frac{1}{4}$ ガ減少スルカラ，$\frac{1}{\left[\sqrt{1+x}+\frac{1}{2}\right]^2-\frac{1}{4}}$ ガ增大スルコトトナル，サレバ $x=0$ ナルトキ $\frac{1}{2}$ ガ最小値デ $x=-\frac{1}{2}$ ノトキ $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ ガ最大値トナル。

サレバ x ガ 0 ヨリ $-\frac{1}{2}$ マデ變化スルトキ (4) ガ成リ立ツ樣ナ k, l ノ數値ハ $l \leqq \frac{1}{2}$

$b \geqq \dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$ デアル。

例 3. $ax(a+1)+x+1>a^2$ ヲ解ケ。

講義 カヽル不等式ハ a ハ已知數デ x ガ未知變數トナルコトハ方程式ニ於ケルト異ナラナイ。併シ a ノ値ハ不定デアルカラ，其ノ値ニ付テ吟味シナケレバナラヌ

サテ未知變數ノ項ヲ左邊ニ，已知項ヲ右邊ニ移スト，$ax(a+2)+x>a^2-1$，卽チ $(a^2+2a+1)x>a^2-1\ldots\ldots(1)$ 卽チ $(a+1)^2x>a^2-1$ トナル，ソコデ $a+1\neq 0$ トスレバ $(a+1)^2>0$ トナルカラ $x>\dfrac{a^2-1}{(a+1)^2}=\dfrac{a-1}{a+1}$ トナル。又 $a+1=0$ ノトキモ調ベナケレバナラナイガ．コノトキハ兩邊ヲワルコトガ出來ナイ，(1) ヲ見ルト $0>0$ トナル。サレバコノトキハ x ノ如何ナル値デモ與ヘラレタル不等式ハ成リ立ナイ。

(ii). 二次整不等式ノ解キ方

$\boldsymbol{f(x)\equiv ax^2+bx+c}$ ガ與ヘラレ，$\alpha,\ \beta$ ヲ $f(x)=0$ ノ根トスルトキ $(a>0$ トス)。

I　$b^2-4ac>0$ **ナルトキ**

$$\begin{cases} f(x)>0 \ \textbf{ナラバ} \ \ a(x-\alpha)(x-\beta)>0 \ \textbf{トナシ},\ \alpha>x \ 或ハ \ \beta>x \\ \qquad\qquad\qquad (\alpha<\beta \ \textbf{トス}) \\ f(x)<0 \ \textbf{ナラバ} \ \ a(x-\alpha)(x-\beta)<0 \ \textbf{トナシ},\ \alpha<x<\beta \\ \qquad\qquad\qquad (\alpha<\beta \ \textbf{トス}) \end{cases}$$

II　$b^2-4ac=0$ **ナルトキ**

$$\begin{cases} f(x)>0 \ \textbf{ナラバ} \ \ a(x-\alpha)^2>0 \ \ \textbf{トナシ},\ x\neq\alpha \\ f(x)<0 \ \textbf{ナラバ} \qquad\qquad \textbf{不能} \end{cases}$$

III　$b^2-4ac<0$ **ナルトキ**

$$\begin{cases} f(x)>0 \ \textbf{ナラバ} \ \ a\left[\left(x-\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right]>0 \ \textbf{トナシ} \ x \ \textbf{ノスベテノ値} \\ f(x)<0 \ \textbf{ナラバ} \qquad\qquad \textbf{不能} \end{cases}$$

コレ等ハ二次三項式ノ性質ヨリ明ラカデアル。

例 1. $3(x-2)^2>(2x+1)(4x-3)$ ヲ解ケ。

講義 與ヘラレタル不等式ノ右邊ヲ全部左邊ニ移シテ整頓スルト，$-5x^2-10x+15>0$，ソコデ兩邊ヲ -5 デ割リテ $x^2+2x-3<0$，卽チ $(x+3)(x-1)<0$ トナル。サレバ 1 ニヨリ $-3<x<1$ トナル。

練習 次ノ不等式ヲトケ。

(1) $\dfrac{x^2+1}{6}>x-2$. 答 絕對不等式　(2) $x^2-5x+6<0$ 答 $2<x<3$

(3) $x^2-4x+3>0$. 答 $x<1$ 或ハ $x>3$　(4) $4x^2-4x+1>0$ 答 $x\neq 2$

(5) $-x^2+x-2>0$. 答 不能

例 2. 次ノ方程式ヲ吟味セヨ。$x^4-(3\lambda+4)x^2+(\lambda+1)^2=0\ldots\ldots(1)$

講義 先ヅ $x^2=X$ トオクト，(1) ハ $X^2-(3\lambda+4)X+(\lambda+1)^2=0\ldots\ldots(2)$ トナル。次ニ (2) ノ判別式ヲ吟味スルニ，$\Delta\equiv(3\lambda+4)^2-4(\lambda+1)^2\equiv5\left(\lambda+\dfrac{6}{5}\right)(\lambda+2)$ トナル。

(I) $\Delta>0$ ナルトキ；$\lambda\geqq-\dfrac{6}{5}$ 或ハ $\lambda\leqq-2$；(II) $\Delta<0$ ナルトキハ $-\dfrac{6}{5}>\lambda>-2$，ソコデ (I) **ナルトキニ** (2) ノ根ヲ吟味スルト，(a) $\lambda\geqq-\dfrac{6}{5}$ **ナルトキ** (2) ノ二根ノ和ト積ヲ吟味スルニ，二根ノ和ガ正トナルハ，$3\lambda+4>0$ 卽チ $\lambda>-\dfrac{4}{3}$ ノトキ．トコロガ $-\dfrac{6}{5}>-\dfrac{4}{3}$ ニヨリ $3\lambda+4>0$ ガ成立チ，$(\lambda+1)^2\geqq 0$ トナル。サレバ (1) ノ二根ハ正，從テ (1) ノ四根ハ實數トナル。

(b) $\lambda\leqq-2$ ナルトキ $3\lambda+4<0$，$(\lambda+1)^2>0$ デアルカラ (2) ノ二根共ニ負デアル。從テ (1) ノ四根共ニ虛デアル。

(II) ナルトキハ (2) ノ根ガ虛數デアルカラ (1) ノ四根トモ虛數デアル。結局 $\lambda\geqq-\dfrac{6}{5}$ ノトキノミ實根ヲ有スルコトニナル。

練習

(1) 次ノ方程式ノ四根ヲシテ共ニ實數ナラシムルタメニハ如何ナル値ヲ m ニ與フベキヤ $x^4-x^2-m=0$. 答 $0\geqq m\geqq-\dfrac{1}{4}$.

(2) 次ノ方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ。

$x^4+2(m-1)x^2+m+7=0$. 答 $-7\leqq m\leqq\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$ ナルトキノミ實根ヲ有ス。

(3) 方程式 $(m+1)x^2-2(m+2)x+m-1=0$ ハ m ノ値ガ如何ナル

トキ相異ナル實根ヲ有スルカ，且ツ其場合ニ於ケル根ノ符號如何。

答　二根ヲ α, β トスルト，(i) $-1>m>-\frac{5}{4}$ ナルトキ $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta<0$ ニテ二根共負，(ii) $1>m>-1$ ナルトキ $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta<0$ 正ト負，(iii) $m\geqq1$ ナルトキ $\alpha+\beta>0,\ \alpha\beta\geqq0$ 二根共正或ハ正ト 0.

(4)　次ノ方程式ニ適合スル x ノ値ガ實數ナルタメノ條件ヲ求メヨ。 $x^2+1+\frac{1}{x^2+1}=2a.$

注意　$x^2+1=y$ トオキ $y\geqq0$ ナル條件ヲ求ムレバ良イ。與ヘラレタル式ヨリ $a>0$ ナルコトガ x ノ實數ナル必要條件トナル，次ニ y ノ二次方程式ガ實根ヲ有スルコトヨリ $a>1$ ガ得ラレ，コレガ必要ニシテ且ツ充分ナル條件トナル。

63. 數 α ト二次方程式ノ根トノ比較

例ヘバコヽニ方程式 $5x^2-20x+4=0$ ガアツテ，コノ根ト $1\frac{1}{2}$ ナル數トノ大小ヲ調ベル必要ガ生ジタトスルトキハ直ニ方程式ヲ解イテ，$x=2\pm\sqrt{\frac{4}{5}}$ ト $1\frac{1}{2}$ トヲ直接ニ比較ショウトスルデショウ。併シコノ場合ニハ根號ガ含マレテルカラ近似計算ヲシテ比較シナケレバナラナイ，其レモ今ノ例ノ樣ナ方程式ナラバ困難トイフ程デモナイガ，比較スル數ニヨリテハ可ナリ困難ヲ生ズル。

ソコデカヽル困難ヲサケテ，方程式ヲトカズニ與數 $1\frac{1}{2}$ ト與方程式ノ根トノ大小ヲ比較スル方法モガナト，考ヘラレル。又解カズニ根ト與數トヲ比較スルコトハ他ノ理由(後章デ自然ニ解ル)ニヨリテモ亦生ズルノデアル。サテ其レニハ二次三項式ノ性質ヲ利用シテ探リヲ入レルノデアル。今ノ方程式 $5x^2-20x+4=0$ デアレバ左邊ヲ二次三項式 $f(x)=5x^2-20x+4$ トシテ $x=1\frac{1}{2}$ ヲ代入スルト，$f\left(1\frac{1}{2}\right)=11\frac{1}{4}-30+4<0$ トナル。サレバ $1\frac{1}{2}$ ハ二根ノ間ニアルコトガワカル，卽チ大根ヨリ小デ小根ヨリ大デアルコトガワカル。コノ樣ニシテ一般ニ論ズルコトガ出來ル。

一般ニ二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ト與ヘラレタル數 α トノ大小ヲ比較スルニ ($b^2-4ac\geqq0$ トス)，$f(x)\equiv ax^2+bx+c$ トオキ，$f(\alpha)=a\alpha^2+b\alpha+c$ ヲ計算シテ

I. $f(\alpha)=0$ **トナレバ** α **ハ** $f(x)=0$ **ノ一根トナル，ソシテ二根ノ和半** $-\frac{b}{2a}$ **ト比較シテ** $\alpha<-\frac{b}{2a}$ **ナラバ** α **ハ小根デアリ，** $\alpha=-\frac{b}{2a}$ **ナラバ等根デ，其レハ** α **トナル，** $\alpha>-\frac{b}{2a}$ **ナラバ** α **ハ大根デアル。**

何トナレバ $f(x)=0$ ノ二根ヲ x_1, x_2 トスルト，$f(\alpha)=0$ トナルカラ確カニ $x=\alpha$ ハ根デアル。ソシテ $x_1<x_2$ トスルト，$x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$ デアルカラ $\alpha<\frac{x_1+x_2}{2}$ デアレバ $x_1=\alpha$ デナケレバナラナイシ，$\alpha=\frac{x_1+x_2}{2}$ ナラバ $x_1=x_2$ トナラナケレバナラナイ。最後ニ $\alpha>\frac{x_1+x_2}{2}$ デアレバ $x_2=\alpha$ デナケレバナラナイ。

II. $af(\alpha)<0$ **ナルトキハ** α **ハ** x_1 **ト** x_2 **トノ間，卽チ** $x_1<\alpha<x_2$ **トナル。**

III. $af(\alpha)>0$ **ナルトキハ** $\alpha<\frac{x_1+x_2}{2}$ **ナラバ** $\alpha<x_1<x_2$ **ニシテ** $\alpha>\frac{x_1+x_2}{2}$ **ナラバ** $x_1<x_2<\alpha$ **トナル。**

何トナレバ定理 I (198頁)ニヨリ α ハ $f(x)=0$ ノ二根ノ外ニアル。トコロガ $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$ デアルカラ $\alpha<\frac{x_1+x_2}{2}$ ナラバ $\alpha<x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$ トナリ，$\alpha>\frac{x_1+x_2}{2}$ ナラバ $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2<\alpha$ トナルコトハ明ラカデアル。

例 1.　方程式 $2x^2+rx-2r^2=0$ ノ根ト r トヲ比較セヨ。コヽニ r ハ實數トシ，且ツ $r\neq0$ トス。

講義　與ヘラレタル方程式ノ左邊ヲ $f(x)$ トオクト，$f(r)=2r^2+r^2-2r^2=r^2$ トナル。ソコデ判別式 $\triangle$ ヲ調ベルニ，$\triangle=r^2+4\times4r^2>0$ トナル。サレバ r ハ二根ノ外ニアル。ソコデ二根ノ和半ハ $-\frac{r}{4}$ トナルカラ，$r>0$ ナラバ $-\frac{r}{4}<r$ トナル，從テ二根ハ $<r$ トナル。又 $r<0$ ナラバ $r<-\frac{r}{4}$ トナルカラ二根ハ r ヨリ大トナル。

例 2.　$0<a<b$ ナルトキ $x^2-4ax+2ab=0$......(1) ノ根ト a トヲ比較セヨ。

講義　先ヅ與ヘラレタル方程式ノ根ノ實虛ヲ吟味スルタメニ其ノ判別式 $\triangle$ ヲ調ベルニ，$\triangle=(2a)^2-2ab=4a^2-2ab=2a(2a-b)$... (2) トナル。ソシテ $0<a<b$ ナル假定ダケデハ $2a-b$ ノ符號ガ不明デアル。サレバ I $2a-b<0$ **卽チ** $2a<b$ **ナルトキハ**方程式ハ虛根ヲ有スルカラ實數 a ト比較スルコトガ出來ナイ，II $2a-b>0$ **卽チ**

$a<b<2a$....(3) ノトキハ與ヘラレタル方程式ハ實根ヲ有スルコトニナル。ソコデ a トノ比較ヲ手順スルタメ與ヘラレタル方程式ノ左邊ヲ $f(x)$ トオクト，

$f(a)\equiv a^2-4a^2+2ab=2ab-3a^2\equiv a(2b-3a)$....(4) トナルカラ (3) ノ條件ダケデハ (4) ノ符號ガ不明デアル。ソコデ (A) $2b-3a>0$ 卽チ $\frac{3}{2}a<b<2a$ トスルト，$f(a)>0$. 二根ノ外ニ a ガ在ル。ソコデ根ノ和半 $2a>a$ デアルカラ a ハ兩根ヨリ小デアル。次ニ (B) $\frac{3}{2}a=b$ ナラバ小根ガ a デアル。最後ニ (C) $a<b<\frac{3}{2}a$ デアレバ $f(a)<0$ トナルカラ兩根ノ間ニ a ガ存在スルコトトナル。

64. 根ノ分離

定理 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ左邊ノ x ニ或ル二ツノ與ヘラレタル數ヲ代入シタルトキ其ノ二ツノ結果ガ異符號ナラバ方程式ハ必ズ二ツノ不等ナル實根ヲ有シ，ソシテ二根中ノ一ツガ與ヘラレタル二數ノ間ニ挾マル。而シテコノコトノ逆モ亦眞デアル。從テ**二數ガ與ヘラレタル二次方程式ノ根ヲ分離スルタメノ必充條件ハ x ノ代リニコレ等ノ値ヲ代入シタル結果ガ異符號ナルコトデアル。**

證明 先ヅ方程式ガ不等ノ實根ヲ有シナイトスルト，$b^2-4ac\leqq 0$ トナリ，從テ三項式 ax^2+bx+c ハ x ノ値ニ拘ハラズ a ト同符號ヲトルコトニナリテ假設ニ反スルコトトナル。

次ニ二ツノ與ヘラレタル二數ヲ ax^2+bx+c ニ代入シタルトキ異符號デアルカラ一ツハ a ト同符號デアリ，他ハ a ト異符號トナル。トコロガ二次方程式ノ根ト與數 α トノ比較(201頁)ニヨリテ與數中ノ一ツハ二根ノ間ニ，他ハ二根ノ外ニアルコトトナルカラ結局二ツノ與ヘラレタル數ノ間ニ根ノ一ツガ介在スルコトニナル。逆ニ二ツノ數ガ一根ヲ挾メバコレ等ノ値ヲ方程式中ノ，x ノ代リニ代入シタル結果ガ，一ツハ a ト同符號デ，他ハ異符號トナル。從テ二ツハ異符號トナル。

カヽル與ヘラレタル二數ハ與ヘラレタル方程式ノ**根ヲ分離スル**ト云フノデアル。

例 1. $9x^2-3mx+m-3=0$ ノ一根ハ $m\neq 3$ ナルトキ 0 ト 1 トノ間ニアルコトヲ示セ。

講義 本題ハ 0 ト 1 トデ與ヘラレタル方程式ノ根ヲ分離スルコトヲ示セバ足リル。

サレバ $(9\times 0-3m\times 0+m-3)(9\times 1^2-3m\times 1+m-3)<0$.........(1)

ガ $m\neq 3$ ナルトキ成立スルコトヲ示セバ充分デアル。トコロガ (1) ノ左邊ハ

$$(1)\text{ ノ左邊}\equiv(m-3)(6-2m)\equiv-2(m-3)^2$$

トナル。從テ $m\neq 3$ デアルカラ (1) ガ成立スル。

練習 方程式 $3x^2+6mx-3m-1=0$ ノ根ノ一ツハ m ノ如何ニ拘ハラズ 0 ト 1 トノ間ニアルコトヲ示セ。

例 2. a, b, c ハ何レモ實數ニシテ $a<b<c$ ナルトキ方程式 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$......(1) ノ根ハ a ト b トノ間及ビ b ト c トノ間ニ挾マレタル實數ナルコトヲ證明セヨ。

講義 (1) ハ，$a<b<c$ デアルカラ，$(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$..(2) ト同値デアル。トコロガ (2) ノ左邊ヲ $f(x)$ トスルト，$a<b<c$ デアルカラ

$$f(a)\equiv(a-b)(a-c)>0,\quad f(b)\equiv(b-a)(b-c)<0,\quad f(c)\equiv(c-a)(c-b)>0$$

トナル。從テ上ノ定理ニヨリテ a ト b; b ト c トノ間ニ實根ガ介在スル。

例 3. 二ツノ方程式 $x^2+ax+b=0$, $x^2+a'x+b'=0$ ノ根ガ互ニ他ヲ分ツタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ヲ求メヨ。

講義 第一方程式ノ根ヲ α, β トスルト，α, β ガ第二方程式ノ根ヲ分ツトキハ又第二方程式ノ根ハ第一方程式ノ根ヲ分ツ。サレバ二ツノ方程式ノ根ガ互ニ他ヲ分ツタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ムルニハ，第一方程式ノ根 α, β ガ第二方程式ノ根ヲ分ツタメニ必要ニシテ且ツ十分ナル條件ヲ求ムレバ良イ。トコロガ上ノ定理ニヨリ其ノ條件ハ $(\alpha^2+a'\alpha+b')(\beta^2+a'\beta+b')<0$....(1) ナルコトデアル。ソコデ

$$(\alpha^2+a'\alpha+b')(\beta^2+a'\beta+b')\equiv\alpha^2\beta^2+a'\alpha\beta^2+a'\alpha^2\beta+b'\beta^2+b'\alpha^2+a'^2\alpha\beta+a'b'\beta+a'b'\alpha+b'^2$$
$$\equiv\alpha^2\beta^2+a'\alpha\beta(\alpha+\beta)+b'(\alpha^2+\beta^2)+a'^2\alpha\beta+a'b'(\alpha+\beta)+b'^2$$

デアル。トコロガ $\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$ デアルカラ

$$(\alpha^2+a'\alpha+b')(\beta^2+a'\beta+b')=b^2-aa'b+b'(a^2-2b)+a'^2b-a'b'a+b'^2$$
$$=b^2-2bb'+b'^2-a'b(a-a')+ab'(a-a')$$
$$=(b-b')^2+(a-a')(ab'-a'b)$$

トナル。サレバ求ムル條件ハ $(b-b')^2+(a-a')(ab'-a'b)<0$ ナルコトデアル。

65. 文字無理方程式 スベテ平方根ハ正數ヲ表ハスコト

ハ特別ニ述ベナイカラ注意セヨ。

例 1. 次ノ方程式ヲ解ケ $x+\sqrt{2ax}=b\ldots\ldots1)$, 但シ a, b ハ共ニ正數ニシテ $\sqrt{}$ ハ平方根中ノ正ナルモノヲ表ハスモノトス。

講義 先ヅ與ヘラレタル方程式ヲ變形シテ $\sqrt{2ax}=b-x$ トナシテ兩邊ヲ平方スルト $2ax=b^2-2bx+x^2$ 卽チ $x^2-2(a+b)x+b^2=0$ トナル。コレヲトイテ $x=a+b\pm\sqrt{2ab+a^2}$ トナル。

ソコデ $x=a+b+\sqrt{2ab+a^2}$ トスルト,

$$(1)\text{ ノ左邊}=a+b+\sqrt{2ab+a^2}+\sqrt{2a(a+b)+2a\sqrt{2ab+a^2}}$$

$$=a+b+\sqrt{2ab+a^2}+\sqrt{a^2+2a\sqrt{2ab+a^2}+a(a+2b)}$$

ソコデ a, b ハ共ニ正デアルカラ

$$=a+\sqrt{2ab+a^2}+a+\sqrt{a^2+2ab}=2a+2\sqrt{2ab+a^2}$$

トナル。從テ右邊ニ等シクナラナイカラ, コノ x ノ値ハ (1) ノ根デハナイ。

次ニ $x=a+b-\sqrt{2ab+a^2}$ トスルト, 上ノ結果ヲ利用シテ

$$(1)\text{ ノ左邊}=a+b-\sqrt{2ab+a^2}+\sqrt{a^2-2a\sqrt{2ab+a^2}+a(a+2b)}$$

トナル。トコロガコヽニ問題ガ生ジタ, ソレハ a ト $\sqrt{2ab+a^2}$ トノ大小デアル。ソコデ $a-\sqrt{2ab+a^2}=\dfrac{a^2-2ab-a^2}{a+\sqrt{2ab+a^2}}<0$ トナル。從テ $a<\sqrt{2ab+a^2}$ デアルカラ

(1) ノ左邊$=a+b-\sqrt{2ab+a^2}+(\sqrt{2ab+a^2}-a)=b$ トナル。サレバコノ値ハ (1) ノ根トナル。

例 2. 次ノ方程式ヲトケ。$\dfrac{\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{b-x}}=\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}\ldots\ldots(1)$

講義 先ヅ注意スルコトハ $\sqrt{x-a}$, $\sqrt{b-x}$ ガ共ニ正ナルコトデアル。從テ (1) ノ右邊ハ $\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}}$ トナルカラ分母ヲ拂フテ整頓スルト, $2x-a-b=2\sqrt{x-a}\sqrt{b-x}\ldots.(1)'$ トナル。ソコデ兩邊ヲ平方シ $(2x-a-b)^2-4(x-a)(b-x)=0$ トナル。括弧ヲホドイテ整頓スルト, $8x^2-8(a+b)x+(a+b)^2+4ab=0\ldots.(2)$ トナル, コレヲトイテ

$x=\dfrac{1}{8}[4(a+b)\pm\sqrt{8(a-b)^2}]$ トナル。トコロガコヽニ問題ガ生ズル, ソレハ a ト b ノ大小デアル。(I) $a>b$ トスルト, $x=\dfrac{1}{8}[4(a+b)\pm2\sqrt{2}(a-b)]$ トナリ, (II) $a=b$ ナラバ $x=\dfrac{1}{2}(a+b)$, (III) $a<b$ トスルト, $x=\dfrac{1}{8}[4(a+b)\pm2\sqrt{2}(b-a)]$ トナル。トコロガ (1), (II) ハ成立セズ, 何トナレバ $x-a>0$, $b-x>0$ デアルカラデアル。

サレバ (2) ノ根ニテ採用セラルヽ形ハ $x=\dfrac{1}{4}[2(a+b)\pm\sqrt{2}(b-a)]$ デアル。トコロガ

コレガ (1) ノ根デアルトハ斷言出來ナイ。ソレニハ $\sqrt{b-x}$, $\sqrt{x-a}-\sqrt{b-x}$ ヲ共ニ 0 ニナサズシテ (1)′ ヲ滿足スルモノヲ求メナケレバナラナイ。ソコデ

$x=\dfrac{1}{4}[2(a+b)\pm\sqrt{2}(b-a)]$ ナルトキ

$$\sqrt{x-a}=\sqrt{\frac{1}{4}[2(a+b)\pm\sqrt{2}(b-a)]-a}=\frac{1}{2}\sqrt{2(b-a)\pm\sqrt{2}(b-a)}=\frac{1}{2}\sqrt{b-a}\sqrt{2\pm\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{b-x}=\sqrt{b-\frac{1}{4}[2(a+b)\pm\sqrt{2}(b-a)]}=\frac{1}{2}\sqrt{2(b-a)\mp\sqrt{2}(b-a)}=\frac{1}{2}\sqrt{b-a}\sqrt{2\mp\sqrt{2}}$$

トナル。サレバ $b>a$ デアルカラ $x-a\neq0$ ニシテ

$$\sqrt{x-a}-\sqrt{b-x}=\frac{1}{2}\sqrt{b-a}[\sqrt{2\pm\sqrt{2}}-\sqrt{2\mp\sqrt{2}}]\neq0 \text{ デアル。ソコデ}$$

$$(1)'\text{ ノ右邊}=2\times\frac{1}{2}\sqrt{b-a}\sqrt{2\pm\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\sqrt{b-a}\sqrt{2\mp\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(b-a)\sqrt{2} \text{ トナリ。}$$

$$(1)'\text{ ノ左邊}=\frac{1}{2}[2(a+b)\pm\sqrt{2}(b-a)]-a-b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a) \text{ トナル。}$$

サレバ複號ノ $+$ ノトキノミ兩邊相等シクナルカラ求ムル根ハ

$x=\dfrac{1}{4}[(a+b)+\sqrt{2}(b-a)]$ デアル。

練習 次ノ方程式ヲ解キ且ツ之ヲ吟味セヨ。

$\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b$, 但シ a 及ビ b ハ正數ニシテ $\sqrt{x-a}$ 及ビ $\sqrt{x-b}$ ハ正數タルベキモノトス。

注意 左邊ハ約分セラレテ $x-a-\sqrt{x-a}\sqrt{x-b}+x-b=a-b$ トナル。

答 $a>b$ ナルトキ $x=\dfrac{4a-b}{3}$, $a\leqq b$ ナルトキ根ナシ。

例 3. $\sqrt{x^2-7ax+10a^2}-\sqrt{x^2+ax-6a^2}=x-2a\ldots\ldots(1)$ ヲトケ。但シ a ハ與ヘラレタル實數ナリ。

講義 (1) ノ兩邊ヲ平方スルト,

$$x^2-7ax+10a^2+x^2+ax-6a^2-2\sqrt{x^2-7ax+10a^2}\sqrt{x^2+ax-6a^2}=(x-2a)^2$$

卽チ $(x-2a)[x-5a+x+3a-x+2a]=2\sqrt{x^2-7ax+10a^2}\sqrt{x^2+ax-6a^2}$

卽チ $(x-2a)x=2\sqrt{x^2+ax-6a}\sqrt{x^2-7ax+10a^2}$ トナル。ソコデ又兩邊ヲ平方シテ

$$x^2(x-2a)^2=4(x^2+ax-6a)(x^2-7ax+10a^2) \text{ 卽チ } (x-2a)^2[x^2-4(x-5a)(x+3a)]=0$$

卽チ $(x-2a)^2(3x^2-8ax-60a^2)=0$. サレバ $x=2a$, $x=\dfrac{1}{3}(4a\pm\sqrt{16a^2+180a^2})$ 卽チ $x=2a,\ 6a,\ -\dfrac{10}{3}a$ トナル。

サテ $x=2a$ ナラバ (1) ノ兩邊ハ共ニ 0 トナルカラ根ノ一ツデアル。

次ニ $x=6a$ デアルト,

(1) ノ左邊$=\sqrt{(6a-2a)(6a-5a)}-\sqrt{(6a-2a)(6a+3a)}=2\sqrt{a^2}-6\sqrt{a^2}$ トナル。ソコデ a ノ正負ガ問題ニナル $a>0$ トスルト (1) ノ左邊$=2a-6a=-4a$, (1) ノ右邊$=6a-2a=4a$ トナルカラ $x=6a$ ハ根デナイ。又 $a<0$ トスルト, (1) ノ左邊$=-2a+6a=4a$ トナルカラコノトキハ根トナル。

最後ニ $x=-\frac{10}{3}a$ デアルト,

(1) ノ左邊$=\sqrt{\left(-\frac{10}{3}a-2a\right)\left(-\frac{10}{3}a-5a\right)}-\sqrt{\left(-\frac{10}{3}a-2a\right)\left(-\frac{10}{3}a+3a\right)}=\frac{20}{3}\sqrt{a^2}-\frac{4}{3}\sqrt{a^2}$ トナル。サレバ $a>0$ ナラバ (1) ノ左邊$=\frac{16}{3}a$, $a<0$ ナラバ $-\frac{16}{3}a$ トナル, 而シテ a ノ値ニ拘ハラズ (1) ノ右邊$=-\frac{16}{3}a$ トナルカラ $a<0$ ナルトキニ $x=-\frac{10}{3}a$ ハ根トナル。

結局 $a>0$ ナルトキハ $x=2a$ ノミデ, $a<0$ ナルトキハ $x=2a$, $6a$, $-\frac{10}{3}a$ ノ三根ニナル。

例 4. 次ノ方程式ヲ解ケ $\dfrac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{b}=\dfrac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{x}$...(1), 但シ a,b ハ實數ニシテ b ハ正ナリトス。

講義 分母ヲ拂ツテ整頓スルト, $(b+x)\sqrt{a^2-x^2}=(a+x)(b-x)$....(2) トナル。ソコデ兩邊ヲ平方シテ整頓スルト, $x(x+a)(x^2-2ab+b^2)=0$ トナル。トコロガ $x\neq0$ デアルカラ $a\neq0$, $2a\neq b$ ナルトキ $x=-a$ 或ハ $x=\pm\sqrt{b(2a-b)}$ トナル。

サテ $x=-a$ トスルト, (2) ノ左邊$=(b-a)\sqrt{a^2-a^2}=0$, 右邊$=(a-a)(a+b)=0$ トナル, サレバコハ根デアル。次ニ $x=\pm\sqrt{b(2a-b)}$ トスルト,

(2) ノ左邊$=\left[(b\pm\sqrt{b(2a-b)}\right]\sqrt{a^2-b(2a-b)}$,....(3)

(2) ノ右邊$=\left[(a\pm\sqrt{b(2a-b)}\right](b\mp\sqrt{b(2a-b)})=ab\mp b(2a-b)\pm(b-a)\sqrt{b(2a-b)}$....(4) トナル。

ソコデ $a>b$ ナラバ (3) ハ $(b\pm\sqrt{b(2a-b)})(a-b)$ トナルカラ複號ノ上號ヲトルト, (2) ノ左邊ハ $(b+\sqrt{b(2a-b)})(a-b)$ トナリ, (2) ノ右邊ハ $b(b-a)+(b-a)\sqrt{b(2a-b)}$ トナルカラ不成立トナル。又複號ノ下號ヲトルト, (2) ノ左邊ハ $(b-\sqrt{b(2a-b)})(a-b)$. (2) ノ右邊ハ $3ab-b^2-(b-a)\sqrt{b(2a-b)}$ トナリ不成立トナル。

次ニ $a=b$ ナラバ (2) ノ左邊$=0$, (2) ノ右邊$=ab\mp ab$ トナルカラ上號ノトキノミ成立スル。

又 $a<b$ ナラバ (2) ノ左邊$=(b\pm\sqrt{b(2a-b)})(b-a)$,

(2) ノ右邊$=ab\mp b(2a-b)\pm(b-a)\sqrt{b(2a-b)}$

トナル。サレバ上號ノトキノミ成立スル。

サレバ結局 $a\neq0$, $2a\neq b$ ナルトキ $a>b$ ナラバ $x=-a$, $a\leqq b$ ナラバ $x=-a$, 或ハ $\sqrt{b(2a-b)}$ ガ求ムル根トナル。

例 5. 次ノ方程式ヲ解ケ, $\sqrt{x-4+\sqrt{x-3}}=m$......(1), 但シ m ハ正ノ數トス。

講義 (1) ノ兩邊ヲ平方シテ同値ノ方程式 $x-4+\sqrt{x-3}=m^2$....(2) ガ得ラレル, 何トナレバ右邊ハ未知數ヲ含マナイ正數デアルカラデアル。ソコデ (2) ノ $\sqrt{x-3}$ ヲ分離シテ兩邊ヲ平方スルト, $x-3=m^4-2m^2(x-4)+(x-4)^2$, 卽チ

$x^2-(9+2m^2)x+m^4+8m^2+19=0$ トナル。之レヲトイテ

$x=\frac{1}{2}\left[9+2m^2\pm\sqrt{(9+2m^2)^2-4(m^4+8m^2+19)}\right]=\frac{1}{2}\left[9+2m^2\pm\sqrt{4m^2+5}\right]$ トナル。

サテコノ値ヲ (2) ノ左邊ニ代入スルニ

$$\text{左邊}=\frac{1}{2}\left[9+2m^2\pm\sqrt{4m^2+5}\right]-4+\sqrt{\frac{1}{2}(9+2m^2\pm\sqrt{4m^2+5})-3}$$

$$=\frac{1}{2}+m^2\pm\sqrt{m^2+\frac{5}{4}}+\sqrt{\frac{3}{2}+m^2\pm\sqrt{m^2+\frac{5}{4}}}$$

$$=\frac{1}{2}+m^2\pm\sqrt{m^2+\frac{5}{4}}+\sqrt{\left[\sqrt{m^2+\frac{5}{4}}\pm\frac{1}{2}\right]^2}\quad\because\ m^2+\frac{5}{4}>\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}+m^2\pm\sqrt{m^2+\frac{5}{4}}+\sqrt{m^2+\frac{5}{4}}\pm\frac{1}{2}=\begin{cases}1+m^2+2\sqrt{m^2+\frac{5}{4}} & (+\text{ ヲトリテ})\\ m^2 & (-\text{ ヲトリテ})\end{cases}$$

トナル。サレバ求ムル根ハ $x=\frac{1}{2}\left[9+2m^2-\sqrt{4m^2+5}\right]$ デアル。

例 6. m ハ實數ヲ表ハスモノトシ, 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}=m\ \text{.........................}(1)$$

講義 (1) ノ兩邊ヲ平方スルト, $x+1+2x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}=m^2$ トナル, 尙ホ根號ヲ分離シテ兩邊ヲ平方スルト, $(3x+2)^2-2m^2(3x+2)+m^4=4(x+1)(2x+1)$

卽チ $9x^2+12x+4-6m^2x-4m^2+m^4=8x^2+12x+4$.

卽チ $x^2-6m^2x+m^4-4m^2=0$。サレバ $x=3m^2\pm2m\sqrt{2m^2+1}$ トナル。

ソコデ (1) ノ左邊ニ代入スルト

(1) ノ左邊$=\sqrt{3m^2\pm2m\sqrt{2m^2+1}+1}-\sqrt{6m^2\pm4m\sqrt{2m^2+1}+1}$

$$=\sqrt{2m^2+1\pm2m\sqrt{2m^2+1}+m^2}-\sqrt{2m^2+1\pm4m\sqrt{2m^2+1}+4m^2}$$

トナル。トコロガ $2m^2+1>m^2$ デアルガ, $2m^2+1$ ト $4m^2$ トノ大小ハ明ラカデナイカ

ラ，コヽニ假定チ設ケルコトニスル。

(i) $2m^2+1>4m^2$, 卽チ $\frac{1}{2}>m^2$, 卽チ $-\frac{1}{\sqrt{2}}<m<\frac{1}{\sqrt{2}}$ トスルト，

(1) ノ左邊 $=\sqrt{2m^2+1}\pm m-[\sqrt{2m^2+1}\pm 2m]=\begin{cases}-m\ldots\ldots + \text{チトリテ}\\ m\ldots\ldots - \text{チトリテ}\end{cases}$

トナル。サレバコノ場合ニハ求ムル根ハ $x=3m^2-2m\sqrt{2m^2+1}$ トナル。

(ii) $2m^2+1=4m^2$ 卽チ $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或ハ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ トスルト

$m=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ノトキ

(1) ノ左邊 $=\frac{2}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}-\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\pm\frac{2}{\sqrt{2}}\right]=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或ハ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$m=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ノトキ

(1) ノ左邊 $=\frac{2}{\sqrt{2}}\mp\frac{1}{\sqrt{2}}-\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\mp\frac{2}{\sqrt{2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或ハ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

トナル。サレバコノトキ $x=3m^2-2m\sqrt{2m^2+1}$ ガ求ムル根デアル。

(iii) $2m^2+1<4m^2$, 卽チ $\frac{1}{2}<m^2$, 卽チ $m<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或ハ $m>\frac{1}{\sqrt{2}}$ トスルト

$m<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ トスルトキ

(1) ノ左邊 $=\sqrt{2m^2+1}\pm m-[\mp(\sqrt{2m^2+1}\pm 2m)]$

$=\sqrt{2m^2+1}\pm m\pm(\sqrt{2m^2+1}\pm 2m)=\begin{cases}2\sqrt{2m^2+1}+3m\ldots\ldots + \text{チトリテ}\\ m \quad - \text{チトリテ}\end{cases}$

$m>\frac{1}{\sqrt{2}}$ トスルトキ

(1) ノ左邊 $=\sqrt{2m^2+1}\pm m-(2m\pm\sqrt{2m^2+1})$

$=\begin{cases}-m\ldots\ldots\ldots + \text{チトリテ}\\ 2\sqrt{2m^2+1}-3m\ldots\ldots - \text{チトリテ}\end{cases}$

サレバ $m<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルトキ $x=3m^2-2m\sqrt{2m^2+1}$ デ $m>\frac{1}{\sqrt{2}}$ ノトキ根ナシ

以上チマトメテ $m\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ ノトキ $x=3m^2-2m\sqrt{2m^2+1}$ ニシテ $m>\frac{1}{\sqrt{2}}$ ノトキ根ナシ。

第十章

函數ノ値ノ變化

XXIII. 極限概念[1]

66. 變數ノ極限値　コヽニ重要ナル變數ノ極限値ノ定義ヲ定ムルニ，具體ヨリ描象ニ説明ヲ進メルタメニ先ヅ次ノ例ヲ取ルコトニスル。

例 1. 長サ u ガ次ノ樣ニ限リナク變化スルモノトスル，1.寸9, 1.寸99, 1.寸999, ……(1) 卽チ**變化ノ法則**ガ各數ノ最下位ニ，先立ツモノヨリ 9 ヲ附加スル樣ニ增ストシ，而シテ之ヲ圖ニ示スト，

第一圖

上圖ニ於ケル A_0B=2寸, A_0A_1=1.寸9; A_0A_2=1.寸99; A_0A_3=1.寸999; ……ニトレルモノトスル。

サテ A_1, A_2, A_3…… ナル諸點ハ順次 B ニ近迫スルコトヲ，吾人ハ容易ニ感知シ得ラルルコトデアル，而シテ其ノ近迫ノ狀況ヲ詳細ニ吟味センニ，A_1B=0.寸1; A_2B=0.寸01; A_3B=0.寸001; ……(2) トナル，卽チ A ト B トノ間隔ハ順次狹メラレ，コノ間隔ガ $(0.1)^{100}$ 寸ヨリモ狹メラルヽ場所ノ有無ヲ吟味スレバ，其ハ (2) 中第 101 番目以上，卽チ 101, 102, 103, ……番目ニ相當スル點ハ AB ノ間隔ガ $(0.1)^{100}$ 寸以上ニ狹メラル。而シテコレ等ハ變數 u ガ (1) 中ノ第 101,

(1) 拙著微積分概念微分編第一章參照。

102, 103, ...番目ノ値ヲ通過スル際ニ生スル現象デアル。

斯ノ如ク A ト B ノ間隔ハ任意ニ十分小サク狹メラレ，而シテ 2 ナル値ハ (1) 中ノ數ナラザルトキハ B 點ヲ A_1, A_2, A_3, ...ノ**極限點**ト云ヒ，2 ヲ變數 (1) ノ**極限値**ト稱スルノデアル。

以上ノコトヨリ一般ニ變數ノ極限値ヲ定義スルト，

變數 u ノ値ガ $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ ノ如ク變化スルトキ，此ノ數列以外ノ一定數 a ニ付テ $|u_n-a|$ ガ，任意ニ取レル十分小ナル正數 ε ニ對シテ $|u_n-a|<\varepsilon$ ニシテ且ツ $n>m$ ナル如キ m ヲ定メ得レバ **a ヲ變數 u ノ極限値或ハ u ハ a ニ限リナリ近迫スル**ト稱シ，之ヲ記號 $\lim u=a$ ニテ表ハス。

換言スルト

$|u_n-a|, |u_{n+1}-a|, |u_{n+2}-a|$, ...ガ限リナク零ニ近迫スルトキ即チ $u_n=a+h$, $\lim\limits_{n>\infty} h=0$ 或ハ $\lim u=a$

デアル。

注意 サレバ上ノ例ニ於テ例ヘバ 3 ナル數ヲトリテ $|u_n-3|$ ヲ作ルト，

$$3-1.9;\ 3-1.99;\ 3-1.999;\ 3-1.9999;\ \dots\dots$$

トナリ，即チ $3-\left(2-\frac{1}{10}\right);\ 3-\left(2-\frac{1}{10^2}\right);\ 3-\left(2-\frac{1}{10^3}\right);\ \dots;\ 3-\left(2-\frac{1}{10^n}\right);\ \dots$

トナル，從テ $1+\frac{1}{10};\ 1+\frac{1}{10^2};\ 1+\frac{1}{10^3};\ \dots;\ 1+\frac{1}{10^n};\ \dots$

トナリテ n ナル番目ガ如何程進ミテモ零ニ近迫セズ。故ニ 3 ハ極限値ナラズ。

例 2. 例 1 ニ於テ 2 ガ極限値ナルコトヲ上述ノ定義ニ從テ證明セヨ。

講義 變數 u ノ値ハ 1.9; 1.99; 1.999; .... ト變化スルカラ $u_1, u_2, u_3, \dots$ ニ相當スル値ハ $2-\frac{1}{10};\ 2-\frac{1}{10^2};\ 2-\frac{1}{19^3};\ \dots;\ 2-\frac{1}{10^n};\ \dots$ トナリ。從テ $|u_n-2|=\left|2-\frac{1}{10^n}-2\right|=\frac{1}{10^n}<\varepsilon$ ニシテ $n>m$ ナル如キ m ノ値ヲ定ムレバ良イ。

サテ Bernoulli ノ不等式 $(1+h)^n>1+nh$〔不等式ノ證明法（　頁）〕ニヨリテ $10^n=(1+9)^n>1+9n$ トナリ。從テ $\frac{1}{10^n}<\frac{1}{1+9n}$ トナル。ザレバ $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$ ハ $\frac{1}{1+9n}<\varepsilon$

ヲ成立セシムル n ノ値ニヨリテ確カニ成立ス，即チ $n>\frac{1-\varepsilon}{9\varepsilon}$ ノ樣ナル整數値ニヨリテ成立ス。從テ $\left[\frac{1-\varepsilon}{9\varepsilon}\right]=m$ トスレバカヽル m ノ値ニ對シテ $|u_n-2|<\varepsilon$ ニシテ $n>m$ ガ成立ス。故ニ定義ニヨリテ 2 ハ u ノ極限値デアル。コヽニ m ハ $\frac{1-\varepsilon}{9\varepsilon}$ ノ最大整數ヲ表ハスノデアル。

定理 $|a|<1$ ニシテ變數 u ノ値ガ $a.\ a^2.\ a^3.\ a^4.\ \dots\dots a^n, \dots\dots$（限リナク續ク）ノ如グ變化スルトキハ 0 ニ近迫ス. 即チ $\lim a^n=0$ ナリ[1]。

講義 コノ定理ノ證明ハ例 2 ト全ク同樣ニ證明スルコトガ出來ルカラ，コヽニ省略スル。コノ定理ヲ例 2 ニ適用スルト，$|u_n-2|=\left(\frac{1}{10}\right)^n$ トナルカラ，直ニ $|u_n-2|$ ガ 0 ニ近迫スルコトヲ斷言スルコトガ出來ル。從テ定義ニヨリテ u_n ノ極限値，即チ $\lim u_n=2$ ナルコトヲ斷言スルコトガ出來ル。

練習 次ノ値ヲトル各變數ノ極限値ヲ求メヨ，又之ヲ長サト考ヘテ極限點ヲ示セヨ。

(1) $1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots\dots,\ \frac{1}{n},\ \dots\dots$（限リナク續ク）　（答 0）

(2) 2,1. 2.01, 2.001, 2.0001, ...（　〃　）　（答 2）

(3) $2+\frac{1}{1},\ 2-\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{3},\ 2-\frac{1}{4},\ \dots$（　〃　）　（答 2）

(4) $1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8},$（　〃　）　（答 2）

(5) $a,\ a+ar,\ a+ar+ar^2,\ a+ar+ar^2+ar^3\dots\dots$（限リナク續グ），但シ $|r|<1$ トス。　（答 $\frac{a}{1-r}$）

67. 無限大（擴張セラレタル極限値）

變數 u ハ常ニ極限値ヲ有スルトハ限ラナイ。

例ヘバ變數ガ $\frac{1}{0.1},\ \frac{1}{(0.1)^2},\ \frac{1}{(0.1)^3},\ \dots,\ \frac{1}{(0.1)^n},\ \dots$ ト變化スルトキハ u ノ値ハ 10, 100, 1000, ... ノ如ク變化シテ，コノ數列以外ノ一定數ニ近迫セズシテ，寧ロ

---

[1] 拙著微積分概念微分編 11 頁參照。

任意ノ十分大ナル數ヲ越エテ u ノ値ハ增大スル，卽チコヽニ 10 萬，100 萬，....ナル如キ十分大ナル數ヲ考フルモ，u ノ値ノ中第五番目，第六番目 .... 以上ヲ考フルトキハコレ等ノ値ヲ越スコトヲ知ル。斯カル場合ニハ**極限值存在セズ**ト云ヒ，變數 u ハ**無限大**ナリト云フノデアル。

一般ニ無限大ヲ定義スルト，

變數 u ノ値ガ $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n, \ldots\ldots$ (限リナク) ヲトルトキ，任意ニトレル十分大ナル正數 G ニ對シテ $|u_n|>G$ ニシテ且ツ $n>m$ ナル如キ m ガ定メラルヽトキハ

變數 u ハ無限大ナリ

ト云ヒ，之ヲ記號

$$\lim u_n \to \infty$$

ニテ表ハス。

注意 變數 u ノ値ノ十分先キノ方ガ悉ク負數ナレバ u ハ**負ノ無限大**ナリト云ヒ，之ヲ $-\infty$ ニテ表ハシ，又正數ナレバ**正ノ無限大**ト云ヒ，$+\infty$ ナル記號ニテ表ハス。而シテ之等ハ矢張リ變數ノ極限值ト云ヒ，其ハ無限大ナリト云フノデアル。

尙ホ眞ノ極限值ノ存在セザル場合ガアル，例ヘバ u ガ $1, 1-1, 1-1+1, 1-1+1-1,$ .... ノ如ク變化スルトキハ 1 或ハ 0 トナリテ一定值ニ近迫セズ，斯カル場合ハ**不定**デアルト云ヒ，之モ**極限值ハ不定ナリ**ト云ヒ，先キノ眞ノ極限值ヲ**有限確定值**ト云フノデアル。

例 變數 u ノ値ガ $\frac{1}{1.0}, \frac{1}{(0.1)^2}, \frac{1}{(0.1)^3}, \ldots\ldots \frac{1}{(0.1)^n} \ldots\ldots$ ト變化スルトキ，コノ極限值ガ無限大トナルコトヲ定義ニ從テ精確ニ證明セヨ。

講義 コノ場合ハ $u_n=\frac{1}{(0.1)^n}$ デアルカラ $10^n>G$ ニシテ且ツ $n>m$ ナル如キ m ヲ定ムレバ良イ。トコロガ Bernoulli ノ不等式ニヨリテ $10^n=(1+9)^n>1+9n$ トナル。サレバ $1+9n>G$ ナル如ク n ヲ定ムルコトヲ得レバ，確カニ，$10^n>G$ トナル，卽チ $n>\frac{G-1}{9}$ ナルトキ $10^n>G$ ハ成立ス。從テ $m=\left[\frac{G-1}{9}\right]$ トスレバ上式ハ成立スルカラ定義ニヨリテ $\lim u_n \to \infty$ トナル。

定理 $|a|>1$ ナルトキハ，變數 u ガ $a, a^2, a^3, \ldots\ldots a^n, \ldots\ldots$ ノ如ク變化スレバ $\lim u \to \infty$ トナルコトヲ示セヨ。

講義 コノ定理ノ證明ハ前例ト全ク同樣デアルカラコヽニ省略スル。コノ定理ガ前例ノ先ニ證明セラレ，之ヲ前例ニ適用スルト，直ニ極限值ガ無限大ナルコトヲ斷言スルコトガ出來ル。

練習 次ノ各變數ノ極限值ヲ求メヨ。

(1) $1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots$(限リナク) (答 $+\infty$)

(2) $a, a+ar, a+ar+ar^2, a+ar+^2+ar^3, \ldots\ldots$(限リナク)，

但シ $|r|\geqq 1$ (答 $r=-1$ ノトキ不定，其他ノ場合 $\pm\infty$)

XXIV. 函數ノぐらふ

68. 函數概念

次ニ函數概念ヲ定ムルタメニ次ノ例ヲトル。

例ヘバ前諸例ニ於ケル變數ノ値ノ變化ヲ考察スルニ，第一章ニテハ（1頁）

時間(秒)	1	2	3	4	5	6	......
落下距離	490	490×4	490×9	490×16	490×25	490×36	......

(1)

ノ如ク時間ヲ定ムルト，其レニ從テ**落下距離**ガ定マル。カヽル場合ニ前者ヲ**自變數**後者ヲ前者ノ**函數**ト云フ。又前々節ノ例（210頁）ニ於テハ

番目	1	2	3	4	5	6	......
u	$2-\frac{1}{10}$	$2-\frac{1}{10^2}$	$2-\frac{1}{10^3}$	$2-\frac{1}{10^4}$	$2-\frac{1}{10^5}$	$2-\frac{1}{10^6}$	......

(2)

ナル如ク，**番目**ヲ定ムルト，其レニ從テ**變數 u** ノ値ガ定マル。カヽル場合ニ前者ヲ**自變數**又ハ**變數**後者ヲ前者ノ**函數**ト云フコトハ既ニ第一章（2頁）ニテ述ベタルコトデアル。

一般ニ函數ノ定義ヲ定ムルト

二種類ノ變數アリテ一方ノ變數ノ値ヲ定ムレバ其レニ對シテ他

ノ變數ノ値ガ定マルトキ前者ヲ自變數又ハ單ニ變數ト稱シ，後者ヲ從變數又ハ函數ト稱スルノデアル。

例 次ノ表ヨリ變數及ビ函數ヲ述ベヨ。

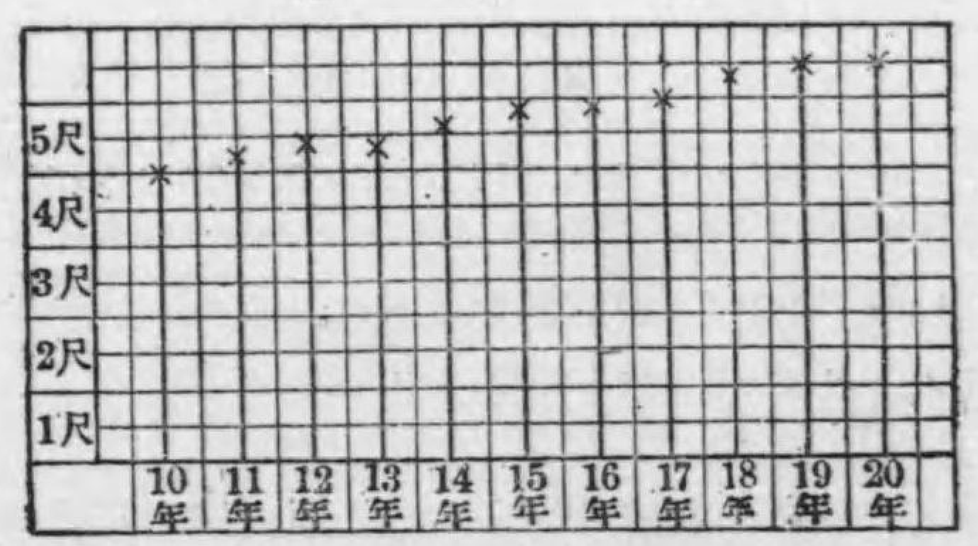
明治三十三年ヨリ大正二年ニ到ル十四ケ年間ノ兒童ノ平均身長(寸未滿四捨五入ヲ)示セバ，

年齢	歳 10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
男	尺 4.0	4.1	4.3	4.4	4.6	4.8	4.8	5.0	5.2	5.3	5.3
女	尺 3.9	4.1	4,2	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	4.9	4.9	4.9

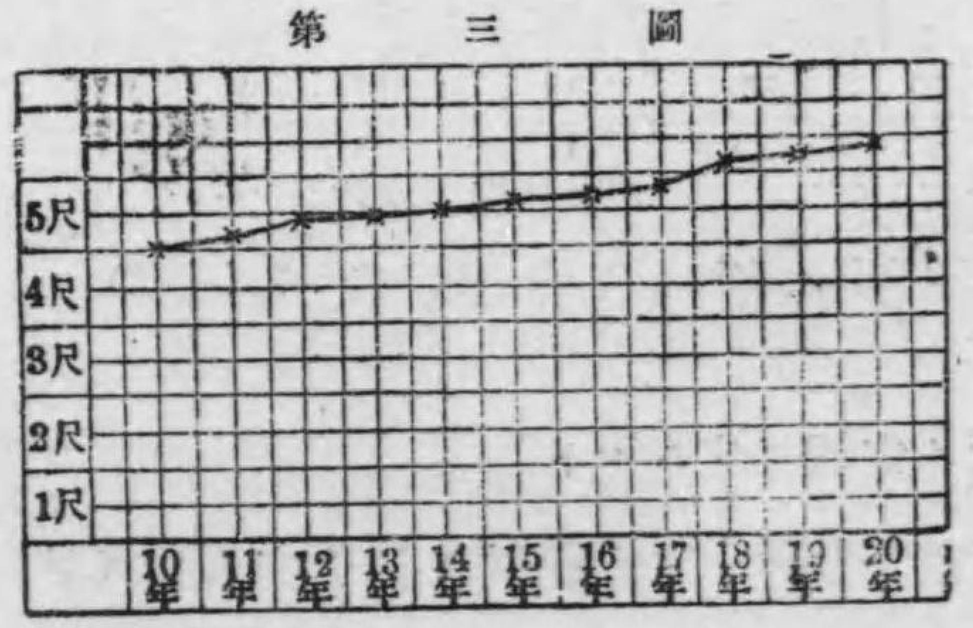
講義 各年齢ヲ定ムレバ其レニ對スル男女ノ身長ガ確定ス。從テ年齢ヲ變數トスレバ身長ハ其ノ函數デアル。

茲ニ於テ一般ニ上掲ノ如キ統計アルトキ身長即チ函數ノ變化ノ狀況ヲ一目瞭然ナラシムルタメニ次ノ圖ヲ用フノデアル(第二圖)。而シテ尙一層變化ヲ明瞭ニスルタメニ第三圖ヲ採用スルノデアル。

第二圖



第三圖



斯ノ如キ圖ヲ函數ノぐらふト云フノデアル。

練習

(1) 次ノ表ヨリ變數及ビ函數ヲ區別シ，且ツ其ノぐらふヲ示セヨ。

水蒸氣ノ溫度ト壓力トノ關係ヲ示セバ

溫度	100	105	110	115	120	125	130	135	140
壓力	760	906	1074.7	1268.7	1490.5	1743.3	2029.8	2353.7	2717.9

ナリ。但シ壓力ハ水銀柱ノ高サヲ，粍ヲ單位トシテ，表ハシタルモノナリトス。[1]

(2) 日本ノ輸出入額ニ付テノ次ノ表ヨリ變數及ビ函數ヲ區別シ，且ツ其ノぐらふヲ示セヨ。

年次	輸出(千圓單位)	輸入(千圓單位)
大正 3年	613,129	610,422
4	729,438	545,276
5	1,153,187	770,537
6	1,603,005	1'035,811
7	1,962,101	1,668,144
8	2,098,812	2,172,245
9	1,948,415	2,335,691
10	1,252,837	1,614,154
11	1,637,451	1,890,308
12	713,84)	1,107,935

69. 函數記號

サテ上述ノ諸例ニ於ケル函數ノ値ノ變化表並ニぐらふハ函數ノ値ノ變化ヲ明瞭ニスルヲ目的トスル許リカ，函數ト變數トノ間ノ關係[2]ヲ發見スルコトヲ目的トスル

例ヘバ第一節ノ例ヨリ，時間ヲ t トシ，落下距離ヲ s トスレバ t ト s トノ間ニハ

$$s=490t^2 \tag{1}$$

ナル關係ノ存在ヲ感知スルコトガ出來ル。又第 66 節例2ヨリハ，變數 n ト函數 u トノ間ニハ

$$u=2-\frac{1}{10^n} \tag{2}$$

(1) 拙著微積分概念微分編 17 頁參照。
(2) コノ關係ハ變數ノ一ツノ値ト其レニ對應スル函數ノ値ニヨリテ成立スルモノナルヲ以テ，コレヲ方程式トモ云フ。

ナル關係アリ。又其ノ節ノ練習 (1) ヨリハ

$$u=\frac{1}{n} \qquad (3)$$

(2) ヨリハ

$$u=2+\frac{1}{10^n} \qquad (4)$$

(3) ヨリハ

$$u=2+(-1)^{n-1}\frac{1}{n} \qquad (5)$$

ガ得ラレル。

トコロガ第68節ノ例並ニ練習ニ於テ斯カル變數ト函數トノ關係ヲ求メントシテモ容易ナル業デナイ。斯ノ如キ場合ハ既ニ統計學ニ於テ論ズル所デ統計學ノ最終ノ目的ハ變數ト函數トノ關係卽チ原因ト結果トノ關係ナル因果關係ヲ發見スルニ在ルカラ其ノ方ニ讓ル。

サレバ今其ノ關係ヲ發見スルコトガ出來ナイガ兎ニ角, 變數ト函數トノ間ニ或ル關係ノ存在ダケハ推定シ得ラルヽノデアル。カヽル場合ハ, 記號ヲ用ヒテ思考ノ對象トスルノデアル。

例ヘバ變數ヲ x 函數ヲ y トスルト $y=f(x)$ ナル記號ニテ表ハス, 尤モ f ハ function (函數) ノ頭文字ヲトルニ過ギナイ。又ハ $y=\varphi(x)$ 等ノ記號ヲ以テシ, 其ノ採用ノ度毎ニ x ノ函數ナルコトヲ明記スルノデアル。

又斯カル記號ヲ用フルコトハ叙述ニ際シテモ便利ナル場合ガ多々アル,

例ヘバ $f(x)=x^3+3x^2+1$ トスレバ $f(2)=2^3+3.2^2+1=21$; $f(0)=0^3+3.0^2+1=1$; $f(-3)=(-3)^3+3(-3)^2+1=1$; $f(a)=a^3+3a^2+1$ ト表ハサレテ, 變數ノ値ト函數ノ値トノ對應ヲ明瞭ニスルノ利ガアル。

練習

(1) x ガ $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ト變化スルトキ, コノ x ノ函數 y ガ

$$y=5x-1$$

ナレバ對應スル函數ノ値ハ幾許ナルカ, 又其ノぐらふ如何。(方眼紙上ニ畫ケ)

(2) 前題 (1) ニ於テ $y=2x^3-2x-3$ ノ對應値ヲ求メ, 且ツ其ノぐらふヲ求メヨ。(方眼紙上ニ畫ケ)

70. 連續變化 サテ上ニ述ベタル變數ノ値ノ變化ヲ考察スルトキハ正或ハ負ノ整數値ヲ取リテ變化スルコトニ着目スルコトデアラウ。

トコロガ身長ノ變化ハ一年毎ニ急ニ延ビ行クモノニアラズシテ, 月日ト共ニ, 毎時毎秒ト共ニ, 刻々ト變化シ, 恰モ汽車ノ車輪ガ線路上ヲ順次進行スル如ク, 時間ナル變數ノ値ハ連續變化ヲナシ其レ等ニ對シテ身長ナル函數ノ値ガ連續變化ヲナスモノデアル。從テ時間ノ連續變化ニ對スル身長ノ變化ヲ測定シテ始メテ眞ノ變數ト函數ノ關係並ニ性質ガ得ラルルノデアルガ, 斯ノ如キコトハ實際ニハ不可能デ唯ダ理論上可能デアルノミデアル。茲ニ於テ斯カル缺點ヲ補足スルタメニ第三圖ニ於テ一年毎ノ身長ノ端點ヲ直線ニテ連續シタルモノニテ, 必ズシモ函數ガ斯ノ如キ變化ヲナスモノデハナイ。トコロガ第二圖ヨリモ一層變數ト函數トノ關係ヲ明瞭ニスル便アルコトハ上述ノ理由ニ基ヅクノデアル。從テ函數ノ變化ノ性質ヨリ推定シテ, 端點ヲ適當ナル曲線デ連續スルトキハ, 層一層函數ノ値ノ連續變化ヲ, 完全ニ近ク, ぐらふニ寫スコトガ出來ル, 斯クシテカヽル曲線ヲ函數ノ値ノ連續變化ノ眞ノぐらふトシテ採用スルモノデアル。

練習 x ノ函數 $y=2x^2-2x-3$ ニ於テ變數 x ノ値ヲ適當ニ變化セ

シメテぐらふヲ畫ケ。

71. 點ノ座標

今迄殆ンド常識的ニ取扱ツテ來タぐらふノ根抵トナル**點ノ座標**ニ付テ考究ヲ進メマシヨウ。

先ヅ平面上ノ點ノ位置ヲ考究スルニ,

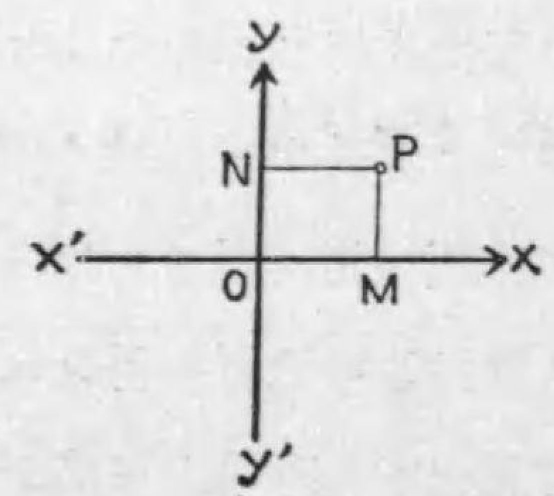
例ヘバ前頁紙面上ニテ眞ナル文字ノ位置ハ第 3 列, 第 17 行ナルコト, 卽チ最下ノ列ヨリ 3 列目ニシテ左端ヨリ 17 行目ナルコト明カデアル。 ソシテ此ノコトヲ發表スルニ斯ノ如ク表ステシヨウ。 從テ眞ハ, 下端ノ列ト左端ノ行トヲ目標トスルトキ, (3, 17) ナル二數ニテ其ノ位置ガ確定スルノデアル。

一般ニ一ツノ平面上ノ點 P ノ位置ハ

其ノ平面上ニテ直交スル二ツノ直線 X′OX, Y′OY ヲ引キ, 之ヲ基本トシテ次ノ二要素ニヨリテ確定スル,

I. OM[1] ノ長サヲ表ハス數

II. ON ノ長サヲ表ハス數



第四圖

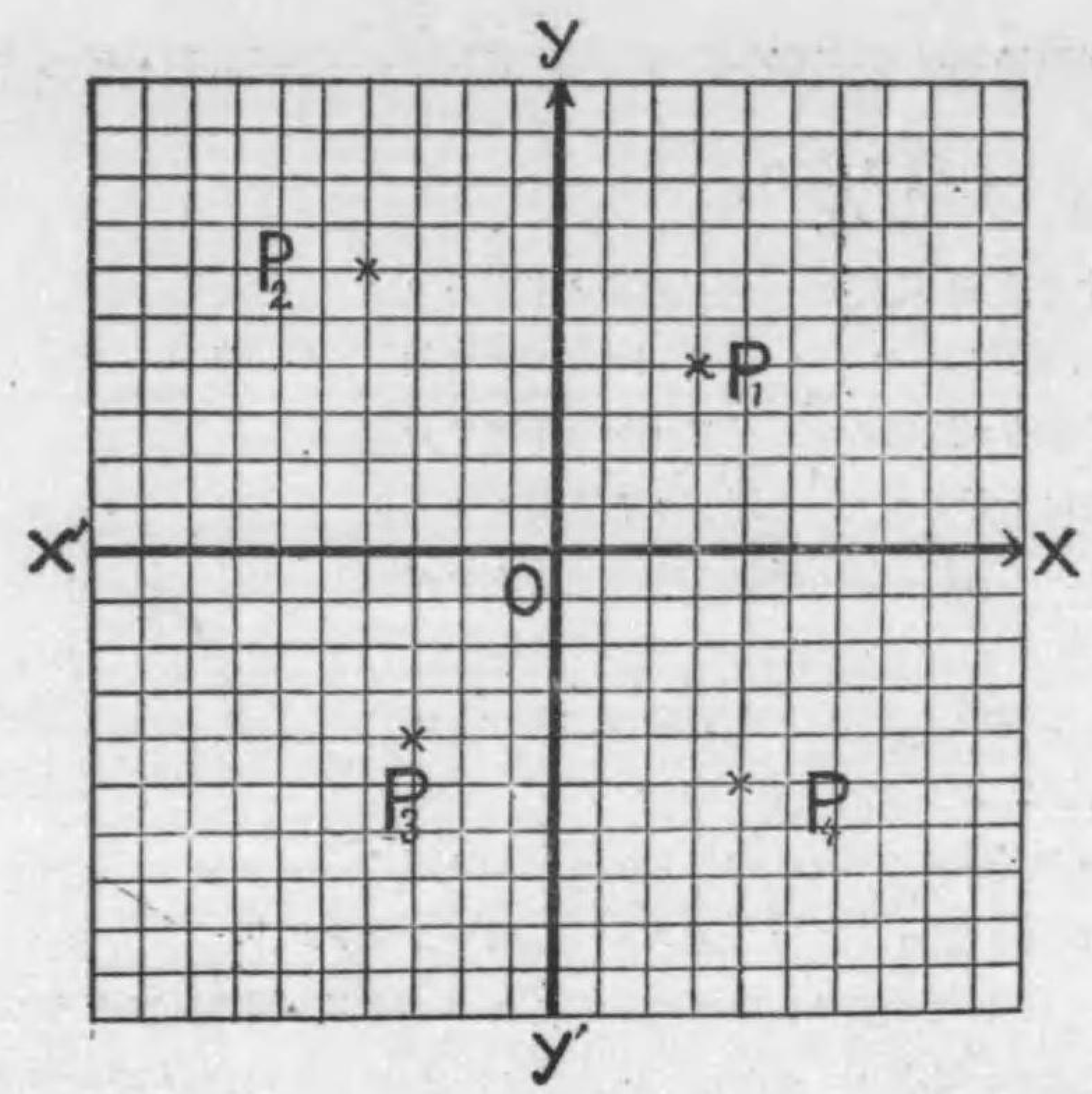
爰ニ M, N ハ P ヨリソレゾレ X′OX, Y′OY ニ下シタル垂線ノ足ニテ長サノ單位ハ X′OX ト Y′OY 上ニ於テ區別シテモ良イ。

斯クシテ OM ト ON ノ表ハス數ヲ夫々點 P ノ**橫線**, **縱線**ト名ヅケ, 之レ等ヲ總稱シテ點 P ノ**座標**[2]ト名ヅケル。 又 X′OX ト Y′OY ヲソレゾレ X 軸, Y 軸; 其ノ交點 O ヲ座標ノ**原點**ト名ヅケル.

例ヘバ次圖ニ於テ P_1 ノ橫線, 縱線ハ夫々 3, 4 ニシテ之ヲ (3, 4) ニテ表ハス。 又 P_2 ハ (−4, 6); P_3 ハ (−3, −4); P_4 ハ (4, −5) ナル座標ヲ有スルノデアル。

(1) OM, ON ノ長サヲ測ルニハ矢ノ方向ニ測ルトキニハ正數トシ, 反對ノ方向ニテハ負數トスル。

(2) 座標ハ點ノ座セル位置ノ標ヲ意味スルニ過ギズ。



第五圖

斯ノ如ク座標ニハ正負ノ符號ヲ有スルコトトナル, 其ノ一般ノ法則ハ下表ノ通リデアル。

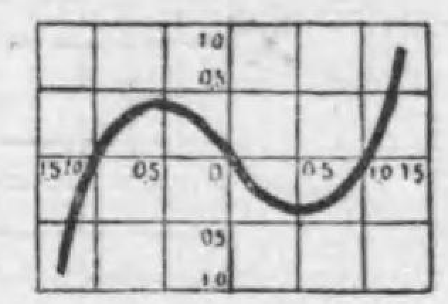
X 軸ノ	Y 軸ノ	橫線	縱線
上方	右側	+	+
上方	左側	−	+
下方	右側	+	−
下方	左側	−	−

サテ x ノ函數ｙガ, x ノ變化ニ從テ, 如何ニ變化スルカヲ示ストコロノぐらふ或ハ曲線ハ x ノ各値ニ對應スルｙノ各値ト x ノ各値トニテ成ス座標ヲ有スル各點ノ集合ト考ヘラル. 從テ函數ノぐらふ或ハ曲線ハ其ノ函數關係ヲ有スル點ノ**軌跡**デアルト云フコトガ出來ル。

例 1. 變數 x ト函數 y トノ關係ガ $y=x(x^2-1)$ ナルトキ，コノ函數ノ表ハス曲線ヲ求ム。

講義 サテ方程式ガ與ヘラレテ其ノぐらふヲ求ムル場合ハ，變數 x ガ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ マデ實數ノスベテヲ連續的ニ通過スルト云フコトガ省略サレテアルカラ其レヲ考慮ニ入レテ適當ニ不連續ニ x ノ値ヲ變化セシメテ函數ノ値ノ變化ヲ吟味シナケレバナラナイ。

第 六 圖



先ヅ函數 y ガ零トナル x ノ値ヲ吟味スルニ，0, ±1 ニシテ之等ヲ x ガ通過スルトキ y ハ零トナル。次ニ x ガ零ニ近迫スルトキハ，方程式ガ $y=-x+x^3$ デアルカラ，函數ノ値ハ $-x$ ニ近迫スルコト明ラカデアル。(1)

最後ニ y ハ x ト共ニ符號ヲ變ズルカラ唯 x ノ正數値ノ變化，即チ 0 ヨリ $+\infty$ マデ連續的ニ變化スル場合ノミヲ吟味スレバ良イ，次ニ x ト y トノ變化表ヲ示スト，

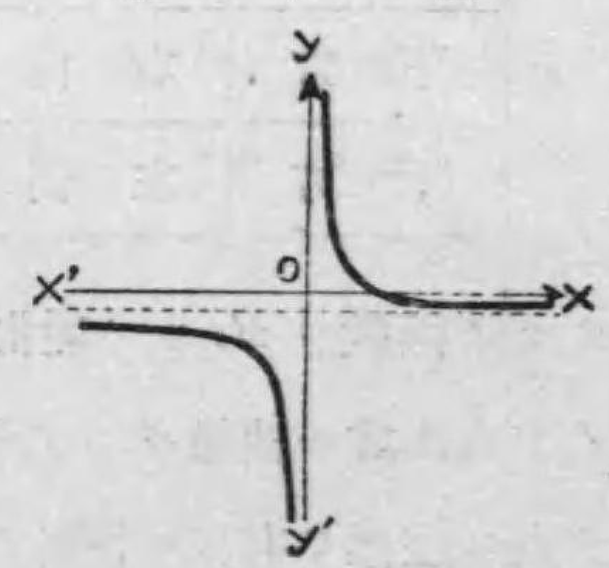
x	0.1	0.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0	1.1	1.2	1.3	....$+\infty$
y	−0.10	−.19	−.27	−.34	−.38	−.38	−.36	−.29	−.17	0	.23	.51	.88	....$+\infty$

トナル。サレバ上ノ第六圖ガ得ラレル。

例 2. 方程式 $y=\dfrac{1-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x}$ ノぐらふヲ畫ケ.

講義 x ガ 1 ヲ通過スルトキ y ハ零トナリ，x ガ 0 ニ近迫スルトキハ $y\to\pm\infty$ トナル。(2) 又 x ガ $1>x>0$ ノ如ク變化スルトキハ y ハ正値ヲトリ，コノ範圍外ニテハ y ハ負値ヲトル，ソシテ $x\to\pm\infty$ ナルトキハ y ハ $-\dfrac{1}{2}$ ニ近迫スル。(3) 尙ホ x ト y トノ變化表ヲ求ムルト，次ノ通リデアル。

第 七 圖



x	$-\infty$ ..	−3	−2	−1	−.5	0	.5	1	2	3	....$+\infty$
y	−.5	−.67	−.75	−1	−1.5	$\pm\infty$	.5	0	−.25	−.33	....−.5

練習 次ノ各函數ノぐらふヲ求メヨ。

(1) $y=4x^2$, (2) $y=\sqrt{1-x^2}$, (3) $y=x+\dfrac{1}{x}$

(4) $y=\dfrac{x^2}{1-x^5}$.

---

(1)

x	0.1,	0.01,	0.001,	0.0001	....
y	−0,099	−0.009999,	−0.000999999,	−0.000099990999....	

(2)

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	......	0
y	4.5	49.5	499.5	4999.5	49999.5	......	$+\infty$

(3)

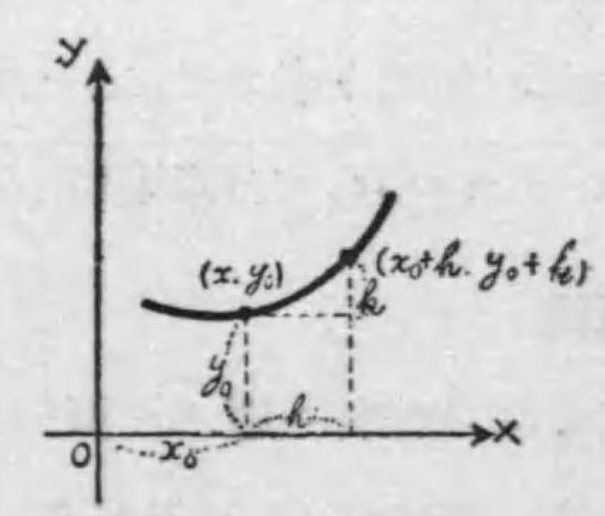
x	10	100	1000	10000	100000	......	$+\infty$
y	−0.45,	−0.495,	−0.4995,	−0.49995,	−0.499995,	......	−0.5

72. 平均變化率一定ノ曲線卽チ直線

先ヅ平均變化率ノ意義ヲ說明スルニ，

例ヘバ $\begin{array}{c|cc} x & x_0 & x_0+h \\ \hline y & y_0 & y_0+k \end{array}$ ノ様ニナツタトスルト $\dfrac{k}{h}$ ヲ函數 y ノ**平均變化率**ト云フ。

第 八 圖



サテ y ガ x ノ函數ナルトキ

x	x_0	x_1	x_2	x_3	......	x_n	......
y	y_0	y_1	y_2	y_3	......	y_n	......

ノ如ク變化シタトスルト，其ノ平均變化率ガ恒ニ一定値 m デアルトスルト，

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=\frac{y_3-y_0}{x_3-x_0}=\cdots\cdots=\frac{y_n-y_0}{x_n-x_0}=m\ \cdots\cdots(1)$$

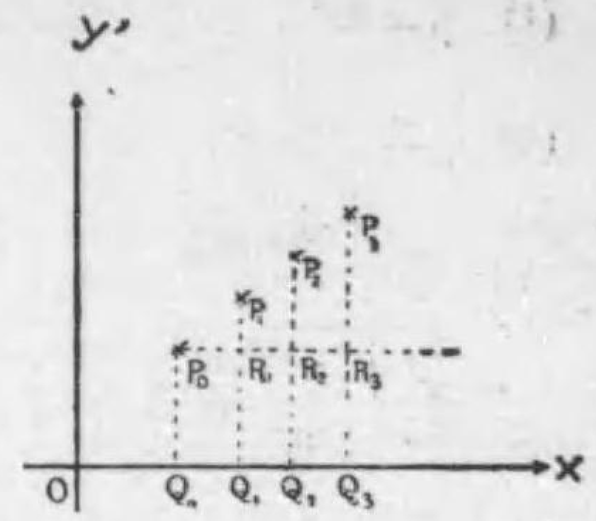
トナル，卽チ x, y ナル二ツノ變數ノ間ニ恒ニ

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=m \quad 卽 \quad y-y_0=m(x-x_0) \qquad (2)$$

ナル關係成立スル。而シテ (2) ノ表ハスぐらふ或ハ曲線ハ (1) ノ關係ニ在ル點ノ集合ニシテ此ハ直線デアル.

何トナレバ (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) .... ナル點ヲソレゾレ P_0, P_1, P_2, ... トスルトキハ (1) ハ $\frac{P_1R_1}{Q_0Q_1}=\frac{P_1R_1}{P_0R_1}=m$, $\frac{P_2R_2}{Q_0Q_2}=\frac{P_2R_2}{P_0R_2}=m$, $\frac{P_3R_3}{Q_3Q_3}=\frac{P_3R_3}{P_0R_3}=m$, ... ニシテ幾何學ニヨリテ P_0, P_1, P_2, P_3, ...ハ一直線上ニアル。 從テ (2) ハ $P_0\,P_3$ ナル直線ヲ表ハシ, x ト y ニ關シテ一次ノ方程式デアル。

第九圖



逆ニ變數 x ト y トニ關シテ一次ノ關係式

$$Ax+By+C=0 \qquad (3)$$

ガ成立スルトキハ y ノぐらふハ直線デアル。

何トナレバ (3) ヲ滿足スル x ト y トノ値ヲ x_0, y_0 トスルト (3) ヨリ $Ax_0+By_0+C=0$ トナリ, (3) ト邊々相減ジテ, $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ 卽チ $\frac{y-y_0}{x-x_0}=-\frac{A}{B}$ トナルカラ, 平均變化率ガ一定デアル, 從テ (3) ハ直線ヲ表ハス。

直線ノ方程式, (2) ニ於テハ m, (3) ニ於テハ $-\frac{A}{B}$ ヲ直線ノ**方向係數**或ハ**勾配**ト名ヅク, 之ハ直線ガ X 軸ノ正ノ方向トナス角 (例ヘバ α トスレバ) ノ正切卽チ $\tan\alpha$ デアル.

練習

(1) 次ノ條件ニ適スル直線ノ方程式ヲ作レ,

(i) 點 (2, 0) ヲ過ギテ X 軸ト 35° ノ角ヲナス直線

(ii) 點 (0, −3) ヲ過ギテ X 軸ト −45° ノ角ヲナス直線

(2) 二點 (2, 1), (−4, −1) ヲ結ブ直線ノ方程式ヲ求メヨ。 次ニコノ直線ガ X 軸ト交ル點ノ座標, y 軸ト交ル點ノ座標, 及ビ X 軸トナス角ヲ求メヨ。

又 $x=3$ ニ對應スル此ノ直線上ノ點ノ y ノ値ト, $y=0.5$ ニ對應スル此ノ直線ノ點ノ X ノ値ヲ求メヨ。

(3) 華氏ノ溫度 x ト攝氏ノ溫度 y トノ關係式ヲ求メ, 且ツ其ノぐらふヲ求メヨ。

(4) 等速運動ノ公式 $s=s_0+vt$ ヲ說明セヨ, 但シ t ハ時間, v ハ速度, s ハ經過距離, s_0 ハ $t=0$ ナルトキノ s ノ値ナリ。

73. 二次三項式ノ値ノ變化

二次三項式

$$ax^2+bx+c$$

ヲ考ヘ, 一般ニ其ノ値ヲ y ト表ハシテ

$$y=ax^2+bx+c$$

トオキ, 次ノ如ク變形スル

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a} \qquad [D=b^2-4ac]$$

サテ上式ノ右邊ニ於テ, x ノ値ガ變化スルトキ, 變化スルモノハ唯 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ノミニシテ其ノ他ハ常數デアルカラ, y ノ値ノ變化ハ主トシテ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ノ變化ニ由ル。

今 x ノ變化スルトキ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ノ變化ヲ考フルニ, x ガ如何ナル實數ヲトルモ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ハ $x=-\frac{b}{2a}$ ノ外ニテハ常ニ正ニシテ $x=-\frac{b}{2a}$ ノトキノミコハ 0 トナルコトヲ知ル, コヽニ於テ x ガ $-\frac{b}{2a}$ ヨリ漸次增大シテ任意ノ充分大ナル數ヲ越ヘテ增大スルトキハ $x+\frac{b}{2a}$, 從テ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ モ亦 0 ヨリ漸次增大シテ任意ノ大ナル數ヲ越ヘテ增大スル, 又 x ガ $-\frac{b}{2a}$ ヨリ漸次減少スルトキハ $x+\frac{b}{2a}$ ハ負數トナリテ漸次減少スルガ, 其ノ絕對値ハ漸次增大スルカラ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ハ漸次增大シテ任意ノ充分大ナル數ヲ越ヘテ增大スルノ

デアル。

74. 函數ノ極値 上ニ述ベタル變化ノ狀態ヲ次ノ如ク簡單ニ云ヒ表ハスコトガ出來ル。

x ガ $-\infty$ ヨリ漸次増大シテ $-\frac{b}{2a}$ ニ至ルトキハ, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ハ $+\infty$ ヨリ漸次減少シテ 0 ニ至リ, 次ニ x ガ $-\frac{b}{2a}$ ヲ越ヘテ $+\infty$ マデ増大スルトキハ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ハ 0 ヨリ漸次増大シテ $+\infty$ ニ至ル。

サテ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ノ變化ハ a ガ正ナルカ, 又ハ負ナルカニ從ツテ其ノ趣ヲ異ニスル, 即チ $a>0$ ナルトキハ此ノ式ノ數値ノ變化ハ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ト同樣ナレドモ, $a<0$ ナルトキハ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ノ數値ハ常ニ負ニシテ其ノ絶對値ノ變化ハ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ノ變化ト同樣デアル而シテ負數ノ大小ハ其ノ絶對値ノ大小ト相反スルカラ x ガ $-\infty$ ヨリ $-\frac{b}{2a}$ マデ増大スルトキハ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ノ絶對値ハ $+\infty$ ヨリ漸次 0 マデ減少シ, 之ニ伴ヒテ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ナル負數自ラハ $-\infty$ ヨリ漸次 0 マデ増大スル, 同樣ニシテ x ガ $-\frac{b}{2a}$ ヲ越ヘテ漸次 $+\infty$ マデ増大スルトキハ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ハ 0 ヨリ $-\infty$ マデ漸次減少ス, 次ニ y ハ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ニ $-\frac{D}{4a}$ ナル一定數ヲ加ヘタル結果デアルカラ y ノ値ノ増減ハ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ノ増減ト平行シ, 常ニ $-\frac{D}{4a}$ ナル一定ノ差ヲ持テ伴フ, x ガ $-\frac{b}{2a}$ トナリテ $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ガ 0 トナルトキ y ハ $-\frac{D}{4a}$ ナル値ヲトル。

以上ヲ表ニ示セバ次ノ通リデアル

$a>0$

x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{b}{2a}$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	減ズ	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	増ス	$+\infty$

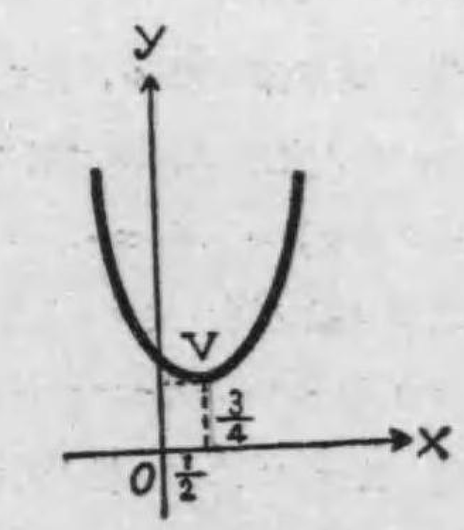
$a<0$

x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{b}{2a}$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	増ス	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	減ズ	$-\infty$

是ニヨリテ $a>0$ ナルトキハ y ハ $-\frac{D}{4a}$ ヲ經テ減少ヨリ増大ニ轉ズ, カカル函數 y ノ値ヲ y ノ**極小値**ト名ヅケ, $a<0$ ナルトキハ y ハ $-\frac{D}{4a}$ ヲ經テ増大ヨリ減少ニ移ル, カカル場合ノ函數ノ値 $-\frac{D}{4a}$ ヲ y ノ**極大値**ト云フ, 即チ極小値ハ減少ヨリ増大ニ移リ, 極大値ハ増大ヨリ減少ニ移ル, 其ノ分界點ニ於ケル函數ノ値ニシテ一般ニ函數ノ値ノ最小値又ハ最大値ト常ニ一致スルモノデハナイガ二次三項式ニ於テハ x ガ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ マデ變化スルトキノ最小値及ビ最大値ハ夫々極小値, 極大値ト一致スル。而シテ此等極大極小値ヲ纏メテ**極値**ト云フノデアル。

例 1. $y=x^2-x+1$ ノぐらふヲ畫ケ。

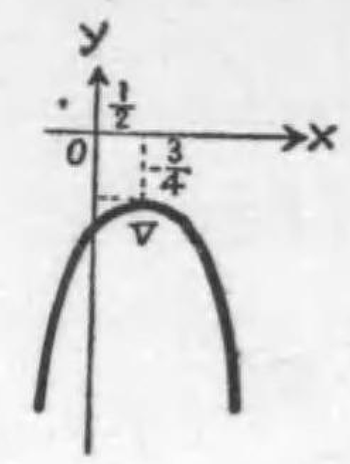
講義 コノ函數ハ $a>0$, $-\frac{D}{4a}=\frac{3}{4}$, 〔D<0〕デアル, D<0 デアルカラ y ハ常ニ正數デアル。サレバ y ノ曲線ハ全ク X′X ノ上部ニアリ, $x=\frac{1}{2}$ ナルトキ $y=\frac{3}{4}$ ナル點 V ハ曲線ノ最低點デアル。



第 十 圖

x ガ $-\infty$ ヨリ $\frac{1}{2}$ ニ至ル間ハ y ハ常ニ減少スル, サレバ y ヲ表ハス曲線ハ左方ヨリ右方ニ向ヒ漸次 X 軸ニ近ヅキ, x ガ $\frac{1}{2}$ トナルトキ V 點ニ達スルノデアル, x ガ $\frac{1}{2}$ ヨリ $+\infty$ ニ至ル間ハ y ハ常ニ増加スル, 曲線ハ V 點ヨリ右ニ向ヒ漸次 X 軸ニ遠ザカル。

例 2. $y=-x^2+x-1$ ノぐらふヲ畫ケ。



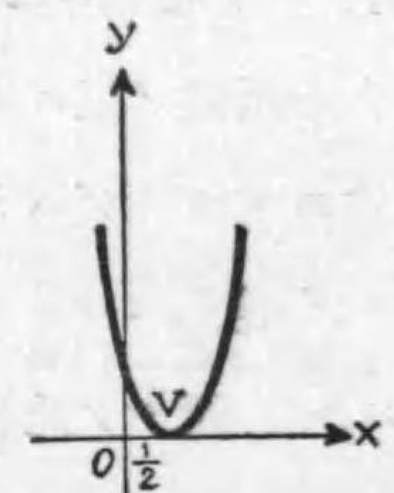
第十一圖

講義 コノ二次式ハ例 1 ノ二次式ノ符號ヲ變ヘタモノデアルカラ曲線ハ例 1 ニ於テ X′X 軸ヲ軸トシテ折リ返シタモノデアル。

茲ニ注意スルコトハ例 1, 2 ニ於テハ y ノ曲線ハ全ク X′X ノ上部或ハ下部ニアリテ決シテ X 軸ニ交ハラナイ，コレハ x ヲ如何ナル實數トスルモ y 卽チ x^2-x+1 又ハ $-x^2+x-1$ ガ決シテ 0 トナラナイコト，換言スレバ $x^2-x+1=0$ ナル方程式ニハ實根ガナイコトヲ示シテ居ルノデアル。

(D<0 ナルコトニ注意セヨ)

例 3. $y=4x^2-4x+1$ ノぐらふヲ畫ケ。

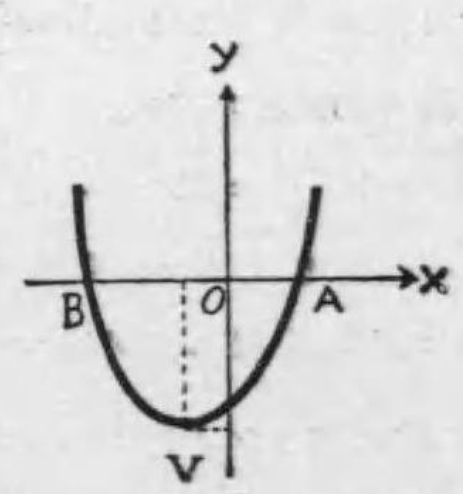


第十二圖

講義 D=0, $a>0$ デアルカラ $x\neq\frac{1}{2}$ ノトキ y ハ常ニ正デアル，サレバ曲線ハ X 軸ノ上部ニアル又，$x=\frac{1}{2}$ ナルトキハ $y=0$ デ，之ニ相當スル點 V ハ最低點デ，X′X ニ曲線ガ V デ切スル，卽チ $x=\frac{1}{2}$ ハ二次方程式 $4x^2-4x+1=0$ ノ等根デアル。

例 4. $y=x^2+x-2$ ノぐらふヲ畫ケ。

講義 D>0 デアルカラ y ハ符號ガ一定デナイ，サレバ曲線ハ一部 X′X ノ上部又一部ハ X′X ノ下部ニアル，從テ曲線ハ X′X ニ交ハル，其ノ交點 A, B ニ對スル x ノ値 (OA, OB ノ長サ) ハ $x^2+x-2=0$ ノ二根デアル，x ガ二ツノ根ノ間ニ挾マルトキハ y ハ負，卽チ A ヨリ B マデノ間ニアツテハ曲線ハ X′X 軸ノ下部，又 x ガ二ツノ根ノ間ニ挾マレザルトキハ y ハ正卽チ A ヨリ右及ビ B ヨリ左デハ，曲線ハ X′X ノ上部ニアル。



第十三圖

XXV. 函數ノ最大最小値

75. 一ツノ變數ノ函數ノ最大最小値

例ヘバ二次三項式ノ値ノ變化ノ節ニ於ケル例ヲ回顧スルニ，例 1 (225頁) ニ於ケル函數 $y=x^2-x+1$ ノ値ノ變化 (x ガ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ マデ變化スルトキ) ハぐらふヨリ明カナル如ク，x ガ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ マデノ凡テノ値ヲトルトキ，函數 y ハ種々ノ値ヲトル，其レ等ノ値ハ x 軸ヨリ曲線マデノ高サニテ表ハサル，サレバ $x=\frac{1}{2}$ ナルトキノ函數 y ノ値 $\frac{3}{4}$ ガ最小値ナルコトハぐらふヨリ知ル所デアル。

又例 2 ニ於ケル $y=-x^2+x-1$ ノ種々ノ値ニテ $x=\frac{1}{2}$ ノトキノ函數 y ノ値 $-\frac{3}{4}$ ガ最大値ナルコトヲ知ル。

一般ニ x ノ函數 $y=f(x)$ アリテ x ガ變化スル範圍内ニ於ケル函數 $f(x)$ ノ値ノ最大ナルモノヲ最大値，最小ナルモノヲ最小値ト名ヅケル。

注意 茲ニ注意スベキ事ハ最大値及ビ最小値ハ必ズシモ極大値及ビ極小値ニアラズ幸ニシテ二次三項式ノ場合ハ一致シタケレドモ，一般ニハ然ラズ，極値ト云ハルヽ値ハ函數ガ x ノ連續的變化ニ對シテ，連續的變化ヲナス際ニ，極値ノ附近ニテ（極ク近所）增大ヨリ減少ニ，又減少ヨリ增大ニ，函數ノ値ガ變化スル場合デアルガ，最大，最小値ハ連續的變化，兎ニ角變化トイフコトヲ考ヘズ，x ガトル値ニ對スル函數ノ採ル値中最大或ハ最小ナルモノヲ指スモノデ，便宜上 x ノ値ヲ變化サセテ吟味スルノデアル。

76. 二次三項式ノ最大最小値ノ求メ方

一般ノ函數 $f(x)$ ノ最大或ハ最小値ノ求メ方ハ微分學ノ力ヲ借リナケレバ困難デアルカラ此處ニ略シテ二次三項式ノ場合ニ付テ考ヘル．此ノ場合ハ既ニ極値ト一致スルコトヲ注意ニ述ベタカラ直ニ次ノ如ク求ムルコトガ出來ル。

$$y=ax^2+bx+c$$

ナルトキ

$a>0$ ナラバ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ガ最小値ニシテ

$a<0$ ナラバ $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ガ最大値デアル;

77. 多クノ變數ノ函數ノ最大最小値

茲ニ n 個ノ變數

$$x_1, x_2, \dots\dots\dots\dots x_n$$

ノ函數 $f(x_1, x_2 \dots\dots, x_n)$ アリテ, $x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ ガ同時ニ種々ノ値ヲトルトキ其レ等ニ對スル函數ノ値ノ中最大ナルモノヲ**最大値**, 最小ナルモノヲ**最小値**ト名ヅケル。

サテ本節ニ於テハ一般ノ函數 $f(x_1, x_2, \dots\dots, x_n)$ ヲ考フルニアラズ, 唯

$$x_1+x_2+\dots\dots+x_n$$

叉ハ

$$x_1x_2\dots\dots\dots\dots\dots x_n$$

ナル形ノ函數ニテ變數 $x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ ノ變化スル範圍ガ正數界ヲトル場合ニ於ケル最大最小値ノ求メ方ヲ考究スル。

78. 定理 I.

n 個ノ正ナル變數ノ和ガ定マレルトキハ其ノ積ガ最大値ヲトルハ此等 n 個ノ變數ガ悉ク相等シキ値ヲトルトキナリ。

何トナレバ $x_1, x_2, \dots, x_n$ デアルカラ n 個ノ正ナル變數トスルト, 相加平均ト相乘平均トノ關係ニヨリテ

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n} \qquad \dots\dots\dots(1)$$

デアル, トコロガ假定ニヨリテ $x_1+x_2+\dots+x_n$ ハ一定常數 k ニ等シイカラ

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n \geqq x_1x_2\dots x_n \qquad \dots\dots\dots(2)$$

トナル, 變數 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ガ正ノ如何ナル値ヲトルモ函數 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ノ値ハ常ニ $\left(\dfrac{k}{n}\right)^n$ ヲ越ヘルコトガ出來ナイ, サレバ $x_1x_2\dots x_n$ ノ最大値ハ $\left(\dfrac{k}{n}\right)^n$ デナケレバナラヌ。而シテカヽル値ヲ函數ガトルハ $x_1=x_2=\dots=x_n$ トナリタル場合ナル

コトヲ知ルカラ, 本定理ハ證明セラレタノデアル。

例 1. $x^2+y^2=\mathrm{R}^2$ ナルトキ xy ノ最大値ヲ求ム, 但シ $x, y>0$ トス。

講義 サテ x^2y^2 ガ最大値ヲトルトキニハ xy モ亦最大値ヲトル, サレバ定理 I ニ由テ

$$x^2=y^2$$

ナルトキ x^2y^2 ガ最大値ヲトル, 從テ

$$x=y=\mathrm{R}/\sqrt{2}$$

ナルトキ xy ガ最大値ヲトル。

例 2. x, y, z ガ三角形ノ三邊ヲ表ハストキ

$$\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$$

ガ最大値ヲトルハ $x=y=z$ ナルトキナリ。

講義 サテ

$$\mathrm{S}=\sqrt{p(p-x)(p-\ )(p-z)}$$

ト置ケバ, コノ S ノ最大値ヲ求メナケレバナラナイ, 處ガ $\dfrac{\mathrm{S}^2}{p}$ ガ最大トナルトキ s ガ最大トナルカラ, $\dfrac{\mathrm{S}^2}{p}$ ノ値大値ヲ求メレバ宜イ。卽チ

$$\frac{\mathrm{S}^2}{p}=(p-x)(p-y)(p-z)$$

ノ最大値ヲ求メレバ宜イ。

處ガ右邊ノ三因數ノ和

$$\begin{aligned} p-x+p-y+p-z &= 3p-(x+\ +z) \\ &= 3p-2p \\ &= p \end{aligned}$$

デアツテ常數デアル, サレバ定理 I ニ由テ三因數ナル變數ノ値ガ相等シイトキ $\dfrac{\mathrm{S}^2}{p}$, 從テ S ガ最大値ヲトル。卽チ,

$$p-x=p-y=p-z$$

或ハ

$$x=y=z$$

ナルトキデアル。

例 3. x, y, z ガ正ノ變數ナルトキ, $yz+zx+xy$ ガ一定ナレバ, xyz ガ最大値ヲトルハ $x=y=z$ ナルトキナリ。

講義 サテ $$yz+zx+xy=s(=\mathrm{const})$$
ト置ク，然ルニ問題ハ $x^2y^2z^2$ ノ最大ナル場合チ求ムレバ宜イ。

處ガ $$x^2y^2z^2=yz.zx.xy$$
デアツテ，$yz+zx+xy$ ハ一定デアル

從テ $$yz=zx=xy$$
ナルトキ $x^2y^2z^2$ ガ最大値チトル，卽チ
$$x=y=z$$
ナルトキ $x.y.z$ ガ最大値チトル。

79. 定理 II. n 個ノ正ナル變數ノ積ガ定マレルトキハ其ノ和ノ最小ナルハ此等ノ n 個ノ變數ガ悉ク相等シトキナリ，

何トナレバ n 個ノ正ナル變數チ $x_1, x_2, \dots, x_n$ トルストキ積ハ一定デアルカラ
$$x_1x_2\dots x_n=p$$
ト置クコトガ出來ル。

トコロガ相加平均ト相乘平均トノ關係
$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\geqq\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$$
ニヨリテ
$$x_1+x_2+\dots+x_n\geqq n\sqrt[n]{p}$$
トナル，卽チ函數 $x_1+x_2+\dots+x_n$ ノ値ハ正ノ變數 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ノ如何ナル値ニ拘ラズ $n\sqrt[n]{p}$ ヨリ小ナルコトガ出來ナイ。

サレバ $x_1+x_2+\dots+x_n$ ノ最小値ハ $n\sqrt[n]{p}$ デアル，而シテコノ値チ
$$x_1+x_2\dots+x_n$$
ガトル場合ハ
$$x_1=x_2=\dots=x_n$$
ナルトキデアル。

例 1. x, y, z ガ三角形ノ三邊ヲ表ハストキハ
$$\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}$$
ガ一定ナルトキ，$x+y+z$ ノ最小値ヲ求ム，但シ $x, y, z>0$ トス

講義 サテ $$16S^2=(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)\dots\dots(1)$$

トオク，ソコデ x, y, z ハ何レモ正數デアルカラ
$$x+y+z=X_1$$
$$x+y-z=X_2$$
$$x-y+z=X_3$$
$$-x+y+z=X_4$$
トオケバ，X_1, X_2, X_3, X_4, ハ變數デアツテ $x+y+z$ ハ次ノ樣ニナル，
$$x+y+z=\frac{3}{4}\left(\frac{X_1}{3}+X_2+X_3+X_4\right)\dots\dots(2)$$
而シテ $$\frac{16}{3}S^2=\frac{X_1}{3}.X_2.X_3.X_4$$
ノ樣ニ一定デアルカラ結局 (2) ノ括弧内ノ最小値チ求ムレバ宜イ。

サレバ $$\frac{X_1}{3}=X_2=X_3=X_4$$
ノトキ $$\frac{X_1}{3}+X_2+X_3+X^4$$
ハ最小値チトル。

卽チ $$\frac{x+y+z}{3}=x+y-z=x-y+z=-x+y+z$$
ノトキ

卽チ $$x=y=z$$
ノトキ $x+y+z$ ハ最小値チトル。

80. 定理 III. 多クノ正ナル變數ノ和ガ常數ナルトキハ其等ノ變數ノ種々ノ正數羃ノ積ハ此等ノ因數ガ指數ト比例ヲナストキ最大値ヲトル。

何トナレバ，例ヘバ次ノ積チ考フルニ
$$f(x.y.z)=x^my^nz^p\dots\dots(1)$$
但シ x, y, z ハ正ノ變數ニシテ m, n, p ハ與ヘラレタル正數トスル。

今 $x+y+z=a$ ナルトキ $f(x..z)$ ノ最大値チ求ムルタメニ二ツノ場合ニ分ケテ述ベル

I. m, n, p ガ正整數ナル場合

サテ $f(x.y.z)$ ノ最大値チ求ムルニハ
$$\frac{f(x,y,z)}{m^m.n^n.p^p}\dots\dots(2)$$
ノ最大値チ求ムレバ良イ。

卽チ $$=\frac{x^m}{m^m}\cdot\frac{y^n}{n^n}\cdot\frac{z^p}{p^p}$$

$$=\underbrace{\frac{x}{m}\cdot\frac{x}{m}\cdots\cdots\frac{x}{m}}_{m\text{個}}\cdot\underbrace{\frac{y}{n}\cdot\frac{y}{n}\cdots\cdots\frac{y}{n}}_{n\text{個}}\cdot\underbrace{\frac{z}{p}\cdot\frac{z}{p}\cdots\cdots\frac{z}{p}}_{p\text{個}}$$

トナル，然ルニ

$$\frac{x}{m}+\frac{x}{m}+\cdots\cdots+\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{y}{n}+\frac{y}{n}+\cdots\cdots+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}+\frac{z}{p}+\cdots\cdots+\frac{z}{p}$$
$$=m.\frac{z}{m}+n\frac{y}{n}+p\frac{z}{p}$$
$$=x+y+z$$
$$=a$$

デアルカラ

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$$

ナルトキ (2) ハ最大値ヲトル，從テ (1) ガ最大値ヲトル。

II. m, n, p ガ正ノ分數ナル場合

例ヘバ $m=\frac{m'}{d},\quad n=\frac{n'}{d},\quad p=\frac{p'}{d}$

トオクコトガ出來ル，何トナレバ異分母ナレバ通分スレバ良イカラデアル。

カクスレバ

$$f(x, y, z)=x^{\frac{m'}{d}}y^{\frac{n'}{d}}z^{\frac{p'}{d}}$$

トナルカラ此ハ，

$$\{f(x, y, z)\}^d=x^{m'}.y^{n'}.z^{p'}$$

ガ最大値ヲトルトキ最大値ヲトル。

サレバ I ニ依テ

$$\frac{x}{m'}=\frac{y}{n'}=\frac{z}{p'}$$

ナルトキ，即チ

$$\frac{x}{\frac{m'}{d}}=\frac{y}{\frac{n'}{d}}=\frac{z}{\frac{p'}{d}}$$

或ハ

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$$

ナルトキ $f(x, y, z)$ ハ最大値ヲトル。

例 1. x ガ變化スルトキ $(r+x)^2(r-x)$ ノ最大値ヲ求ム。但シ $-r<x<r$ トス。

講義 サテ $f(x)=(r+x)^2(r-x)$

トオクト， $r+x,\quad r-x$

ノ和ハ $2r$ ニナツテ一定デアルカラ定理 III ニ由テ

$$\frac{r+x}{3}=r-x \qquad \text{即チ} \qquad x=\frac{r}{2}$$

ノトキ $f(x)$ ハ最大値ヲトル，此ノ場合ニ $r+x$, $r-x$ ハ正數デナケレバナラナイガ $\frac{3}{2}r$, $\frac{r}{2}$ トナツテ正數デアル。

サレバ $f\left(\frac{r}{2}\right)=\left(r+\frac{r}{2}\right)^2\left(r-\frac{r}{2}\right)=\frac{9}{8}r^3$ トナル。

例 2. $0<x<h$ ナルトキ $\frac{x^3}{(x-h)^2}$ ノ最小値ヲ求ム。

講義 サテ $\frac{x^3}{(x-h)^2}$ ノ最小ノ値ヲ求ムルニハ，其ノ逆數 $\frac{(x-h)^2}{x^3}$ ノ最大値ヲ求ムレバ足リル，處ガ此式ハ $\frac{1}{x}\left(1-\frac{h}{x}\right)^2$ ト書キ換ヘルコトガ出來ル，ソコデ之ハ $\frac{h}{x}\left(1-\frac{h}{x}\right)^2$ ト同時ニ其ノ最大値ヲトル。

サテ $\frac{h}{x}$ ト $1-\frac{h}{x}$

トノ和ガ 1 ニ等シイコトニ着眼シテ

$$\frac{h}{x}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{x}\right)$$

トオイテ $x=3h$

ヲ得ラル。

81. 定理 IV. 多クノ正ナル變數ノ種々ノ正數冪ノ積ガ常數ナルトキハ其ノ變數ノ和ハ此等ノ變數ガ其ノ指數ト比例ヲナストキ最小値ヲトル.

之定理 III ト同様ニ證セラルヽカラ諸君自ラ證セヨ。

例 $y(y^2+3x^2)=a^3(=\text{const})$ ナルトキ x^2+y^2 ノ最小値ヲ求ム。

但シ $x, y>0$ トス。

講義 サテ $s=x^2+y^2$

變形スレバ

$$s=\frac{1}{3}\{2y^2+(y^2+3x^2)\}$$

然ルニ $2y^2$ ト (y^2+3x^2) トノ積ハ

$$2y^2(y^2+3x^2)^2=2a^6$$

デアッテ一定デアル，サレバ定理 IV ニ由テ s ノ最小値チトルハ

$$\frac{2y^2}{1}=\frac{y^2+3x^2}{2}$$

ナルトキ，卽チ $x=y$

ノトキデアル。

新高等代數學 第一卷

版權所有

出版部ノ印　著者ノ印

定價金參圓

東京市外中澁谷四二七番地
著者 田島正一

東京市神田區北神保町三番地
發行者 楊井久二郎

東京市小石川區久堅町百〇八番地
印刷者 東勇治

東京市小石川區久堅町百〇八番地
印刷所 共同印刷株式會社

發行元
東京市神田區北神保町三番地
長門屋書房出版部
振替東京五二七二七番

大正十五年四月七日印刷
大正十五年四月十日發行

終