遵照三十年修正課程標準編著

新中國教科書
高級中學

平面解析幾何學

第二册

（第三學年第二學期用）

編著者 余介石

校訂者 何　魯

教育部審定

正中

目次

第七章 移軸術

第八章 切線與法線

第九章 極坐標

第七章

移軸術

78. **移軸術** 如一問題未定坐標軸，宜選取適當者，以使求出的結果最簡，如一曲線對定坐標軸的方程式爲已知，有時須求其對另一坐標軸的新方程式．欲研究這問題，須先知平面上一點，對於兩種坐標軸所得坐標間的關係．換句話說，卽求以一點原來的坐標，來表出其對於新軸的坐標，就是一種坐標上的變換．這法叫移軸術*，分平移和旋轉兩類．本章將論這二法和其對於二次錐線的應用．

〔註〕 廣義上坐標的變換，圖形的變位和變形，都叫變換*．初等解析幾何學所討論的變易，以移軸術爲主．

79. **平移** 如將坐標軸自第一位置 OX 與 OY 平行移到第二位置 $O'X'$ 與 $O'Y'$，卽使 $O'X' \parallel OX$，且 $O'Y' \parallel OY$，便叫做平移*．

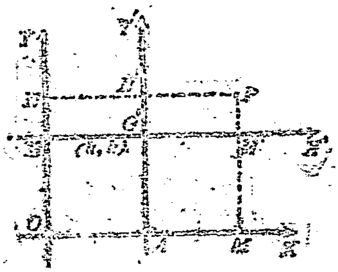
定理 一點 P 對於原來二軸的坐標爲 (x, y)．將軸平移至

---

*移軸術 Transformation of axis. 變換 Transformation. 平移 Translation.

一新原點(h, k)後的坐標爲(x', y')，則

(1) $\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$



證　如第 96 圖

$OM = x,\ OA = h,$

$O'M' = x',\ MP = y,$

$AO' = k,\ M'P = y'$

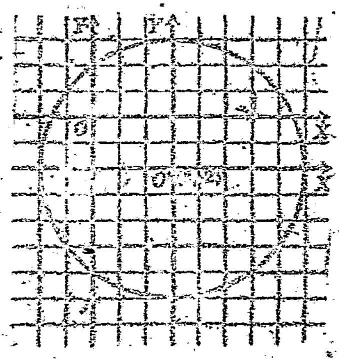
(第 96 圖)

$OM = OA + AM = OA + O'M';$

$MP = MM' + M'P = AO' + M'P.$

將OM等值代入，便得公式(1).

〔註〕 (1)式叫平移方程式*. 已知一曲線關於原軸的方程式，而欲求其對新軸的方程式時，可將(1)式中x和y值代入已知的方程式再化簡，即爲所求結果.



例　平移坐標軸到新原點$(2, -2)$後，方程式$x^2+y^2-4x+4y-1=0$，對於新軸應成爲何種形狀?

解　在此$h=2,\ k=-2$; (1)式即爲

$x = x'+2,\quad y = y'-2.$

代入已知方程式，便有

(第 97 圖)

---

*平移方程式 Equations for translation of axes.

$$(x'+3)^2+(y'-2)^2-6(x'+3)+4(y'-2)-12=0.$$

簡化，得 $$x'^2+y'^2=25.$$

注意 已知方程式的軌跡為一以(3, −2)為中心，以5為半徑的圓. 今將原點移至圓心上，則圓的方程式，必如所得形式，殆可預料(看第97圖).

0. 平移的應用 移軸術的應用，在化簡題中所設的方程式. 新軸的選定以能達這目的為標準，今以例詳其理.

例一 求作平移以化簡方程式

$$y^2-8x+6y+17=0.$$

解 按代數中的配方法，將含 y 各項配成整方，並將其餘各項移到他一端，則得 $(y^2+6y+9)=8x-17+9=8x-8,$

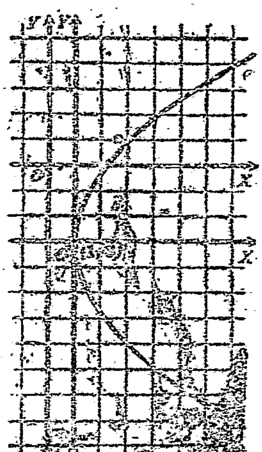
$$(y+3)^2=8(x-1). \qquad (1)$$

由這式便知，如令 $x-1=x'$, $y+3=y'$;

或 $$x=x'+1,\quad y=y'-3, \qquad (2)$$

則方程式簡化為 $$y'^2=8x' \qquad (3)$$

〔註〕 (2)式為平移坐標軸到新原點(1, −3)的公式. 因取(2)式與公式(I)相較，便知 $h=1$, $k=-3$. 現在就新軸 $O'X'$ 和 $O'Y'$ 作 $y'^2=8x'$ 的圖，可知其軌跡是一拋物線，對新坐標軸而言，焦點為(2, 0)，準線為 $x'=-2$. 由(2)便可知(1)的軌跡就是上述的拋物線，但焦點坐標為 $x=3, y=-3$，準線方程式為 $x=-1$ (看第98圖).



(第98圖)

例二 求作平移以化簡方程式

$$x^2+4y^2-2x-16y+1=0.$$

解 本例中含 x 和 y 的平方，故應一同配方，而將常數移到方程式右端，

即有 $$(x^2-2x+1)+4(y^2-4y+4)=-1+1+16=16,$$

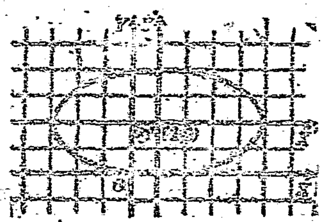
即 $$(x-1)^2+4(y-2)^2=16 \qquad (1)$$

由這式便知，如令 $x-1=x'$，$y-2=y'$，

或 $$x=x'+1,\quad y=y'+2; \qquad (2)$$

則方程式簡化為 $$x'^2+4y'^2=16. \qquad (3)$$

(2)式卽為平移坐標軸到新原點(1,2)的公式．就新軸作 $x'^2+4y'^2=16$ 的圖，可知這軌跡是一橢圓，且對新坐標軸而言，其心為(0,0)，$a=4$，$b=2$，且焦點在 x 軸上．所以(1)式也是一橢圓，其心為 $x=1$，$y=2$，其對稱軸為 $x=1$，$y=2$，如第99圖．


(第 99 圖)

上面所用的方法，可歸納成規則如下：

法則一 將含 x 與 y 諸項配方，卽可察出應如何選取新原點。

新原點的位置，也可藉未定係數法去求，舉例如下：

例三 用未定係數法解本節例一．

解 (一)設 $x=x'+h$，$y=y'+k$，便有

$$(y'+k)^2-8(x'+h)+6(y'+k)+17=0. \qquad (1)$$

展開，卽得 $$y'^2-8x'+(2k+6)y'+k^2-8h+6k+17=0. \qquad (2)$$

(二)命 $2k+6=0$, $k^2-8h+6k+17=0$, 試解得 $k=-3$, $h=1$.

(三)將 h 和 k 的值, 代入方程式(2), 則有 $y'^2-8x'=0$.

∴與第一法所得結果同.

例四 求作平移以化簡方程式 $3xy-2x-4y-3=0$.

解 (一)設 $x=x'+h$, $y=y'+k$, 便有

$$3(x'+h)(y'+k)-2(x'+h)-4(y'+k)-3=0. \qquad (1)$$

即

$$3x'y'+(3k-2)x'+(3h-4)y'+3hk-2h-4k-3=0. \qquad (2)$$

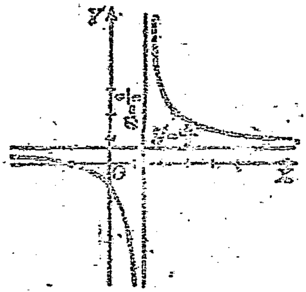
(二)命 x' 與 y' 的係數為零, 即

$3k-2=0$, $3h-4=0$;

而可解出 $h=\frac{4}{3}$, $k=\frac{2}{3}$.

(三)將所解出的值代入方程式(2), 即可化結果為

$$3x'y'-\frac{17}{3}=0. \qquad (3)$$



(第 100 圖)

所以平移坐標軸, 使 $x=x'+\frac{4}{3}$, $y=y'+\frac{2}{3}$, 則已知方程式呈(3)的形狀, 如第100圖.

注意 就(3)式可見 $x'=0$, $y'=0$ 為兩漸近線. 故就原來二軸, 則已知曲線的漸近線為 $x=\frac{4}{3}$, 和 $y=\frac{2}{3}$. 這例題不能用配方術解出, 是宜注意.

四. 按

由上述二例, 歸納得用未定係數求新原點坐標……下:

法則二 (一) $x=x'+h$, $y=y'+k$, $y'^2=8x'$.

開成新方程式.

(二)命含有 h 和 k 的兩適當係數爲零，求解 h 與 k 之值。

(三)將解出的 h 和 k 值代入含 x' 和 y' 的方程式內，然後簡化.

注意　平移的目標，可指明新方程式中，所應化除的，應爲那一種係數.

在例三中，乃命方程式(2)內 y' 的係數爲零，以化除 y' 的一次項，如此則按§23，知 $y'=0$ 成一對稱軸. 又命常數項等於零，即取拋物線的頂爲新原點. 在例四，乃命(2)式內含 x' 和含 y' 的一次項均化去，按§23知即以對稱中心爲新原點. 由上面各例，便知平移的目標，乃曲線平移到新位置時，能對稱於新軸或新原點.

習題二十一

1. 如平移坐標軸至新原點 (1) $(3,6)$; (2) $(-5,3)$; (3) $(-6,-7)$; (4) $(4,-3)$. 試求$(3,-5)$, $(-4,3)$, $(-2,-$[illegible]$)$各點的新坐標.

2. 如平移坐標軸至新原點(1) $(2,-1)$; (2) (a,b); (3) $(-a,b)$; (4) $(a,-b)$; 試求$(2,$[illegible]$)$, $(0,0)$, $(0,3)$各點的新坐標.

3. 下列各曲線方程式，如平移坐標軸至其後所示的新原點，應變爲何種形式? 並作新舊坐標軸和曲線:

(1) [illegible]$x-4y=6$, $(2,0)$;　　(2) [illegible]$x-y+2=0$, $(3,-2)$;

(3) $x^2+y^2-4x-2y=0$, $(2,1)$;　　(4) $y^2-4x+8=0$, $(2,0)$;

(5) $x^2+y^2-4x-6y=18$, $(-2,3)$;

[illegible]$-2y+6x=3$, $\left(\frac{3}{2},1\right)$;

[illegible]$4k+h^2=0$, (h,k);

(8) $y=4+(x-3)^3$, $(3,4)$;　(9) $y^2-6x+9=0$, $\left(\frac{3}{2},0\right)$;

(10) $y^2=x^3$, $(-2,-3)$.

如新原點在第二，第三，第四各象限內，平移方程式(I)是否依然成立？試說明其理.

注意　在第9圖中，連成折線 $OO'P$ 射影至二軸上，並注意 $O'P'$ 在新舊二橫軸(或縱軸)的射影相等，再按§10的射影第二定律，即得(I)式的普徧證明.

5. 平移兩軸至新原點(1)$(h-r, k)$;(2)$(h, k-r)$; 則 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 的方程式應如何?

6. 以 $\left(0,\frac{m}{m-n}\right)$ 爲新原點時，方程式 $(m-n)(x^2+y^2)-2mny=0$ 成何種形式?

7. 用平移法化簡下列各方程式，並作新舊二種軸與曲線:

(1) $x^2+6x+4y+8=0$;　(2) $4x^2-32x-4y-13=0$;

(3) $y^2-6x-10y+19=0$;　(4) $2x^2-6x+7y+15=0$;

(5) $x^2-y^2+32x+4y+40=0$;　(6) $2x^2+4y^2-12x-8y+7=0$;

(7) $x^2+4y^2+10x-12y+14=0$;　(8) $x^2-y^2+8x-10y-35=0$.

8. 用平移法化去下列各方程式中的一次項:

(1) $x^2-4xy+6y=0$;　(2) $x^2+xy+y^2+6x=0$;

(3) $2xy-8x+6y=0$;　(4) $2xy-4x+2=0$,

求下列各軌跡的方程式，並作平移以化簡其結

軌跡的條件，應如何改述?

9. 一動點與(3, −2)的距離，4倍於其與 x

10. 一動點與 $y-7=0$ 的距離，常爲與

11. 一動點與$(-2,4)$和$(6,4)$兩點連線的斜率乘積常等於 3.

12. 一動點至$(3,3)$一點和至直線 $2x+5=0$ 兩距離成 $1:3$ 的比.

13. 求與直線 $y=2$ 相切,並經過$(3,6)$一點的各圓圓心所成軌跡.

14. 求與 y 軸和圓 $x^2+y^2-12x+4y+31=0$ 都相切的各圓圓心所成軌跡.

15. 試按平移公式,由§22 的(VI)式推證§23 的(VII)式.

81. **不含 xy 項的二次方程式** 用上節所述的配方術(即第一法),便可證明一定理如下:

定理 平移坐標軸至適宜新原點,便能改方程式:

(一) $Ay^2+Bx+Cy+F=0$ 為 $Ay'^2+Bx'=0$;

(二) $Ax^2+Cx+By+F=0$ 為 $Ax'^2+By'=0$;

(三) $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ 為 $Ax'^2+By'^2+F'=0$.

式中 A 和 B 均為異於零的常數.

故(一)中軌跡表一拋物線,其軸與 x 軸平行;(二)中軌跡,也是一拋物線,但其軸與 y 軸平行;(三)中軌跡 當 $A\cdot B>0$,即 A 與 B 同號時,為一橢圓,或實或虛(看§67).如 $A\cdot B<0$,即 A 和 B 異號時,便表一雙曲線;二者的軸(即對稱軸)均與坐標軸平行.

可知作平移後,不論式中二次項(即最高次項)的係

程式,可以寫做

$+c,\ y=ax^2+bx+c.$

82. 二次諸標準式的推廣 用平移的理,即可將上章§§62, 65, 69 中(I)至(VI)各範式,推廣如下.

拋物線 $(y-k)^2=2p(x-h)$,

以(h, k)爲頂點,以 $y=k$ 爲對稱軸;

$$(x-h)^2=2p(y-k),$$

以(h, k)爲頂點,以 $x=h$ 爲對稱軸.

橢圓 $$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

以(h, k)爲對稱心,以 $x=h$, $y=k$ 爲二對稱軸.如 $a>b$, 則焦點在 $y=k$ 上;如 $b>a$, 則焦點在 $x=h$ 上.

雙曲線 $$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=\pm 1.$$

以(h, k)爲對稱心,以 $x=h$, $y=k$ 爲對稱軸.如右端爲 1, 則以 $y=k$ 爲貫軸, $x=h$ 爲配軸;如右端爲 -1, 則反之.

注意 如作平移 $x=x'+h$, $y=y'+k$, 則上列各方程式仍變爲第六章內各相當的範式.

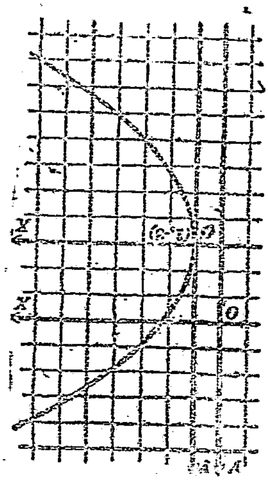
例一 設一拋物線的焦點爲$(3, -3)$, 準線爲 $x=-1$, 求其方程式.

解 拋物線頂點爲$(1, -3)$, $p=4$. 其對稱軸平行於 x 軸,如第 101 圖. 按本節第一公式,即得

$$(y+3)^2=8(x-1);$$

平移坐標軸,以頂點$(1, -3)$爲新原點,便有 $y'^2=8x'$.

在第 101 圖內,並示明新舊兩組的坐標軸.



(第 101 圖)

例二 設一橢圓以(−3,)和(5,2)二點為其長軸兩端點,而短軸的長為 ;求其方程式.

解 橢圓的對稱心為長軸兩端中點,故即(1,2).又因 $a=4$, $b=2$,故其方程式為

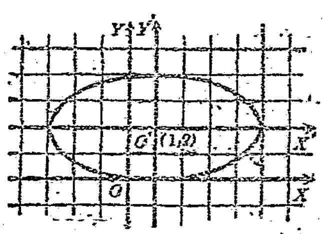
$$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1.$$

平移坐標軸,以橢圓的中心為原點,便有

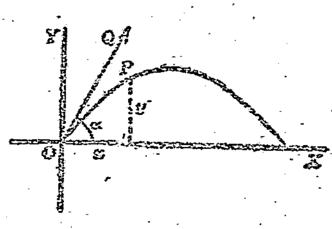
$$x'^2+4y'^2=16.$$

如第 102 圖,其中並表出新舊兩組坐標軸.

83. 拋物線與拋落體軌跡 設一物體從點 O 以速率 v 向 OQ 方向拋出,OQ 方向與 x 軸成角 α,如第 103 圖.



(第 102 圖)



(第 103 圖)

設 $P(x, y)$ 為拋體在拋出後 t 秒的位置,假定空氣阻力甚微,可以忽略不計,則按物理學,知在 t 秒時,拋體運動所經的橫

距離為 $v(\cos\alpha)t$ 呎，縱距離為 $v(\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2$ 呎.

故得 $$x=v(\cos\alpha)t, \tag{1}$$

與 $$y=v(\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

g 為常數，約等於 32.2 呎/秒^2.

自(1)得 $t=\frac{x}{v\cos\alpha}$，代入(2)式，並命

$$b=\tan\alpha,\ 2p=\frac{-g}{2v^2\cos^2\alpha},$$

即得 $$y-bx=2px^2. \tag{3}$$

即拋落體所經的軌跡的方程式，而表一拋物線.

［註］(1)與(2)二式，叫做(3)的參數方程式*.（以 t 為參數），詳見第十章.

84. **二次錐線二種定義的一致性** 由 §77 所述的二次錐線另一定義，求得其方程式為

$$(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0. \tag{1}$$

式中定比 e 為正，故按 §81（三）即知 $1-e^2>0$，即 $e<1$ 時，表一橢圓；$1-e^2<0$，即 $e>1$ 時，表一雙曲線．如 $e=1$，則表拋物線，已於 §77 中提明.

今更進而討論 §81 中的焦點與離心率，實與 §§66, 70 所

*參數方程式 Parametric equation.

說的完全一致.

（一）橢圓的情形　在此 $e<1$; 以 $(1-e^2)$ 遍除(1)式, 再用配方術, 即可化為

$$\left(x-\frac{p}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}. \tag{2}$$

作平移 $x'=x-\frac{p}{1-e^2}$, $y'=y$; 並令 $a=\frac{ep}{1-e^2}$, $b=\frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}$;

則(2)又變成範式 $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$. 按 § 65,

$$c^2=a^2-b^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}-\frac{e^2p^2}{1-e^2}=\frac{e^4p^2}{(1-e^2)^2}.$$

$$\therefore\quad c=\frac{e^2p}{1-e^2}. \qquad (c\text{取正值})$$

而 § 66 (五)中的離心率 $=\frac{c}{a}=\frac{e^2p}{1-e^2}\div\frac{ep}{1-e^2}=e$.

次取定點 $F(p,0)$, 則因新原點為 $\left(\frac{p}{1-e^2},0\right)$, 故平移後 F 的新橫標為 $p-\frac{p}{1-e^2}$ [illegible] $\frac{e^2p}{1-e^2}=c$. 可見這定點即是 § 66 (一)中所說的焦點之一.

由這新定義, 可知橢圓也和拋物線一樣, 不但有焦點, 更有準線, 其方程式為 $x-\frac{p}{1-e^2}=\frac{a}{e}$. 注意新原點本是橢圓的對稱

示，故由對稱關係，立知其有$(\pm c, 0)$二焦點和$x=\pm\dfrac{a}{e}$二準線。

（二）雙曲線的情形　討論的方法，與上一段相同，學生可自輸出。

注意　在此因$e>1$，故應取$a=\dfrac{ep}{e^2-1}$，$b=\dfrac{ep}{\sqrt{e^2-1}}$。

〔註〕本節可略。

習題二十二

1. 求下列各拋物線的方程式，並用平移化為§62中的[illegible]式；試作出其圖形，和新舊兩組坐標軸。

(1) 以$(3,4)$為頂點，以y軸為準線；

(2) 以$(-2,3)$為焦點，以$(3,3)$為頂點；

(3) 以$(0,-3)$為焦點，以$(2,-3)$為頂點；

(4) 以y軸為對稱軸，以$(0,-4)$為頂點，且經過$(6,0)$一點；

(5) 以$(0,0)$為焦點，以$y=4$為準線；

(6) 以x軸為對稱軸，以$(6,0)$為頂點，且經過$(0,$ [illegible]$)$一點。

2. 求下列各橢圓的方程式，並用平移法化簡，試作圖和新舊兩組坐標軸：

(1) $a=4$，以$(5,2)$與$(-1,2)$為焦點。

(2) $b=$[illegible]，以$(1,0)$與$(-4,0)$為焦點；

(3) $b=\sqrt{7}$，長軸的兩端為$(-2,0)$和$(8,0)$二點；

(4) $b=2$，以$(0,2)$和$(0,-4)$為焦點。

3. 求下列各雙曲線的方程式，並用平移法化簡，試作曲線和新舊兩組坐標軸。

(1)　實軸=[illegible]，以$(-2,0)$和$(6,0)$為焦點；

(2)　共軛軸=4，以$([illegible],2)$和$([illegible],-1[illegible])$為焦點；

(3)　共軛軸=6，以$(1,2)$和$(-5,2)$為兩頂點；

(4)　實軸=$2\sqrt{3}$，以$([illegible],[illegible])$和$(-4,0)$為焦點.

求下列二軌跡的方程式，簡化後再作圖：

4.　一動點與$(3,-2)$和$([illegible],4)$兩點距離的和為 8.

5.　一動點與$(8,-3)$和$(-1,-3)$距離的差為 3.

試作下列各曲線族的圖，並加討論：

6.　$xy=k$.　　　　7.　$kx^2+y^2-4x=0$.

8.　$(x-k)^2=2y$.　　　　9.　$(x-k)^2+9y^2=36$.

10.　$4(y-k)^2-9x^2=144$.　　　　11.　$4(x-k)^2-9(y-k)^2=36$.

12.　以每秒 4 呎的速度，平拋一球，求其軌跡所成的拋物線的方程式，並求其正焦弦.

13.　試照§84(一)的方法，討論(二)的情形.

85.　**旋轉**　固定原點 O，而將 OX 和 OY 同向旋轉，各經過角 θ，以至新軸 OX' 和 OY' 的位置，即稱為旋轉*. 以平面中某點對於新軸坐標表示其對於舊軸坐標的方程式，叫做旋轉方程式*.

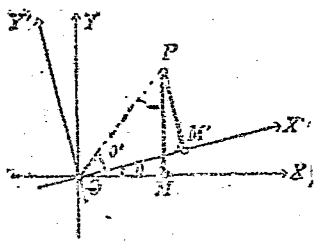
定理　旋轉過角 θ 的旋轉方程式為

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta. \end{cases}$$

---

*旋轉 Rotation；旋轉方程式 Equations for rotation of axis.

證 取任意一點 P，設其對於二種坐標各為 (x, y) 和 (x', y')，作 OP，如第 164 圖，則 $x = OM = OP\cos\angle XOP = OP\cos(\theta'+\theta)$



(第 164 圖)

準三角學中之和角公式以展 $\cos(\theta'+\theta)$，得

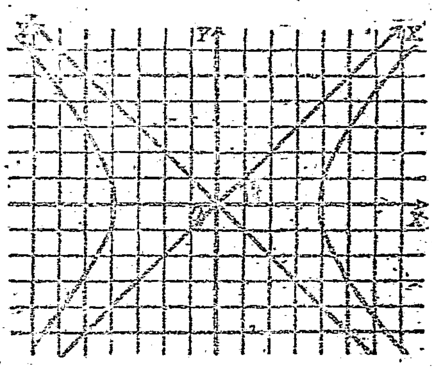
$$x = OP\cos\theta'\cos\theta - OP\sin\theta'\sin\theta. \qquad (1)$$

但 $x' = OM' = OP\cos\theta'$，

$y' = M'P = OP\sin\theta'$。

將結果代入 (1)，便得 (II) 中表 x 的公式。

同樣，可求出表 y 的公式。



(第 165 圖)

例 將坐標軸作 45° 的旋轉，以化方程式

$$x^2 - y^2 = 16.$$

解 因 $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

方程式 (II) 變為 $x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$，$y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$。

代入已知方程式中，便得

$$\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2=16, \text{或 } x'y'+8=0.$$

試作曲線和新舊兩組坐標軸，即得第 [illegible] 圖.

36. 消去 xy 項的方法 定理 如取旋轉角 θ 合於

$$\text{(III)} \qquad \tan 2\theta=\frac{B}{A-C},$$

則二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

中的 xy 項，可以化去.

證 按上節的公式(II)，即

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta,$$

代入(1)式而展開，再依 x' 與 y' 的各項排列，則得

$$\left.\begin{array}{l} A\cos^2\theta \\ +B\sin\theta\cos\theta \\ +C\sin^2\theta \end{array}\right| x'^2 \left.\begin{array}{l} -2A\sin\theta\cos\theta \\ +B(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\ +2C\sin\theta\cos\theta \end{array}\right| x'y' \left.\begin{array}{l} +A\sin^2\theta \\ -B\sin\theta\cos\theta \\ +C\cos^2\theta \end{array}\right| y'^2$$

$$\left.\begin{array}{l} +D\cos\theta \\ +E\sin\theta \end{array}\right| x' \left.\begin{array}{l} -D\sin\theta \\ +E\cos\theta \end{array}\right| y'+F=0.$$

式中縱線，係用以代表括弧，如 x'^2 的係數即為 $A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta$.

如使 $x'y'$ 的係數 B' 為零，則 $x'y'$ 項可以化去，所以應擇 θ，使

$$B'=-2A\sin\theta\cos\theta+B(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2C\sin\theta\cos\theta=0\text{。}\quad(3)$$

但按三角學公式，$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$，$\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$。

故(3)式便變為　　$B'=(C-A)\sin 2\theta+B\cos 2\theta=0$。　　(4)

以 $\cos 2\theta$ 除，而移項，即求得 $\tan 2\theta=\dfrac{B}{A-C}$。　　(5)

式中設 $2\theta<180°$，即取 θ 小於 $90°$ 的值。

例　求作旋轉，以化簡方程式 $x^2+4xy+y^2=4$

解　在此 $A=1$，$B=4$，$C=1$，按公式(II)，得 $\tan 2\theta=\infty$，故 $\theta=45°$。

由此知公式(II)成為

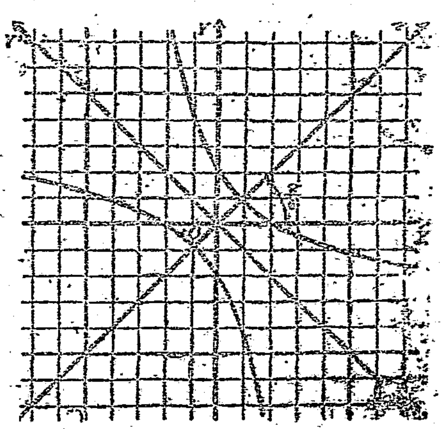
$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

代入已知方程式中，簡化，便得一雙曲線的方程式

$$3x'^2-y'^2=4.$$

今作其圖和新舊兩軸，如第106圖。

【註】　試將這題和上節的例題比較。



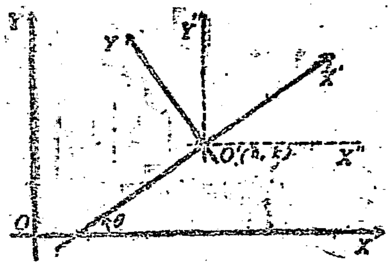
(第106圖)

87. **移軸通式**　不論坐標軸在平面上如何移動，均可將舊軸先作平移至新原點，然後作一適當角的旋轉，以達所求的

位置。

定理 如坐標軸平移至新原點(h,k)後,再旋轉過角θ,則移軸的方程式為

$$(\mathrm{IV})\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+h,\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+k.\end{cases}$$



(第 107 圖)

證 設任意一點P的坐標為(x,y),平移坐標軸至$O'X''$和$O'Y''$,如第 107 圖.則由公式(I)得

$$x=x''+h,\quad y=y''+k。$$

式中(x'',y'')為點P對於$O'X''$和$O'Y''$的坐標.次作一旋轉,按公式(II),便得

$$\begin{cases}x''=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\ y''=x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{cases}$$

將x''和y''值,代入$x=x''+h$, $y=y''+k$中,則得公式(IV)。

88. 反移軸術* 坐標軸經移軸術至新位置後,可再移,使復返原處.這二種移軸術互稱為相反.一方程式先後經二次相反的移軸後,必仍呈原來的形狀,理甚顯明.

按§79,知平移二軸,使(h,k)一點為原點後,原坐標(x,y)

*反移軸術 Inverse transformation of axis.

與新坐標 (x',y') 的關係式為

$$x=x'+h,\quad y=y'+k.\tag{1}$$

設 $x=y=0$，則得 $x'=-h,\ y'=-k$，即表示舊軸的原點 $O(0,0)$ 對於新軸的坐標為 $(-h,-k)$。所以與(1)相反的平移，其方程式為

$$\text{(I)}\qquad x=x'-h,\quad y=y'-k.$$

又§85中，示明旋轉經角 θ 後，新舊坐標的關係式為

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\quad y=x'\sin\theta+y'\cos\theta\tag{2}$$

欲返移至原位置，顯見須作一角 $(-\theta)$ 的旋轉。但 $\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$。故得與(2)相反的旋轉方程式

$$\text{(II}'\text{)}\quad x=x'\cos\theta+y'\sin\theta,\quad y=-x'\sin\theta+y'\cos\theta$$

再取§87的(IV)式討論，其相反的移軸法，乃先作一 $(-\theta)$ 的旋轉，然後平移至 $(-h,-k)$。設原坐標為 (x,y)，旋轉後為 (x'',y'')，再經平移為 (x',y')，則應有

$$x=x''\cos\theta+y''\sin\theta,\quad y=-x''\sin\theta+y''\cos\theta,\tag{3}$$

$$x''=x'-h,\quad y''=y'-k\tag{4}$$

將平移結果(4)代入旋轉式(3)中，便得

$$x=(x'-h)\cos\theta+(y'-k)\sin\theta,$$

$$y=-(x'-h)\sin\theta+(y'-k)\cos\theta$$

即　(IV′)
$$\begin{cases} x=x'\cos\theta+y'\sin\theta+(-h\cos\theta-k\sin\theta), \\ y=-x'\sin\theta+y'\cos\theta+(h\sin\theta-k\cos\theta). \end{cases}$$

總結起來說，平移旋轉和移軸通式，都有相反式.

〔註〕本節可略。本節及上節各公式中之(x,y)均指一點對於被移置之舊軸之坐標，而(x',y')均指同一點對於移置後新軸之坐標，讀者應加注意.

習題二十三

1. 下列各方程式，如將坐標軸依其後所註的角度旋轉，則應如何？試作曲線和新舊兩組坐標線：

(1) $x+y=0$, $45°$;　　(2) $x^2+y^2=9$, $60°$;

(3) $x^2+2xy+y^2=16$, $45°$;　　(4) $y^2-x^2=8$, $90°$;

(5) $4xy-3x^2=10$, $\tan\theta=2$;　　(6) $2x^2-3xy-y^2=5$, $\tan\theta=3$;

(7) $x^2+4xy+4y^2+12x-6y=0$, $\tan\theta=2$.

2. 試證方程式$x^2+y^2=r^2$不因軸作旋轉而變，並就幾何學說明其故.

用旋轉法以化去下列各方程式中的xy項，試作出曲線和新舊兩組坐標軸.

3. $x^2-2xy+y^2=12$.　　4. $x^2+2\sqrt{3}xy-y^2=4$.

5. $17x^2-16xy+17y^2=225$.　　6. $3x^2+2xy+3y^2=7$.

7. $x^2+4xy+y^2=16$.　　8. $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$.

9. $x^2-2xy+y^2+8x+8y=0$.　　10. $xy=12$.

11. $25x^2+14xy+25y^2=288$.　　12. $3x^2-10xy+3y^2=0$.

13. 求§87移軸通式(IV)中，舊原點對新軸的坐標.

14. 如先作一角θ的旋轉，而後再平移至(h,k)，求其通式，並與§87中(IV)一式比較.

15. 求證用移軸通式(IV)可化 $Ax+By+C=0$ 爲 $x'=0$，但旋轉角合於 $\tan\theta=\frac{B}{A}$，而新原點爲 $\left(-\frac{C}{A},0\right)$. 試更以幾何理作說明.

89. 方程式次數的不變性　定理　代數方程式的次數，不因移軸而減低或升高.

證　因 § 87 中的(IV)式爲含 x' 與 y' 的一次方程式，故如將(IV)代入任一代數方程式，其中含 x 與 y 的各項，次數必定不能升高. 次數不但不能升高，並且也不能降低. 因按 § 88，知移軸術有相反式，再如移軸能降低次數，則施反移軸時，這代數方程式須復返原狀，而其次數非增高不可.

[註]　代數曲線，可視其次數分類；如二次曲線，三次曲線，即是這個原因。

90. 普通二次方程式的討論　使坐標軸作一角爲 θ 的旋轉，則依公式(III)，知普通二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{1}$$

變爲

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0, \tag{2}$$

式中

$$A'=A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta, \tag{3}$$

$$C'=A\sin^2\theta-B\sin\theta\cos\theta+C\cos^2\theta. \tag{4}$$

按 § 81，卽知(2)式可用平移再簡化. 今分別討論如下：

(一)如(2)式只含 x' 或 y' 的一平方(卽 $A'=0$ 或 $C'=0$)，且含他一的一次項，則這方程式，可化爲一拋物線的範式.

(二)如只含 x'，或只含 y'，如 $A'=0$，$D'=0$，則得一只含 y

的二次方程式 $C'y'^2+E'y'+F=0$. 可更分三款如下:

(1)如這方程式有二實根，則按 § 42, 知其軌跡爲與 x 軸平行的兩直線.

(2)如這方程式二根相等，則由同理，知其軌跡表兩直線相合爲一.

(3)如這方程式的根爲虛數，則不表實軌跡.

(三)如 A' 和 C' 都不爲零，卽可平移至新原點 $\left(-\frac{D'}{2A'}, -\frac{E'}{2C'}\right)$, 方程式再變爲 $A'x''^2+C'y''^2+F'=0$. 今分爲二大款討論:

(1) A' 與 C' 同號，卽 $A'\cdot C'>0$, 而 F' 可爲負，爲零，或正.

(i) F' 與 A' 和 C' 異號，則軌跡表一實橢圓. 如 $A'=C'$, 則軌跡表一實圓.

(ii) F' 與 A' 和 C' 同號，則不能表實軌跡(卽虛橢圓).

(iii) $F'=0$, 則只表 $x'=0$, $y'=0$ 一點，叫點橢圓*.

(2) A' 與 C' 異號，卽 $A'\cdot C'<0$, 而

(i) $F'\neq 0$, 表一雙曲線.

(ii) $F'=0$, 表兩相交的直線.

平行線，相合線，相交線，和點橢圓四種，叫做二次錐線的變態情形. 總起來說: 二次曲線卽是二次錐線，但包括虛軌跡和

---

*點橢圓 Point ellipse.

變態情形.

91. **二次錐線的判別式** 今求一法,使不必實行移軸,即可判定一二次方程式軌跡的形狀.

將上節中的(3),(4)兩式相加減,再按 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 的關係,得

$$A'+C'=A+C. \qquad (5)$$

按 $2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$, $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$ 的關係,得

$$A'-C'=(A-C)\cos 2\theta+B\sin 2\theta. \qquad (6)$$

將(6)式兩端平方,有

$$(A'-C')^2$$
$$=(A-C)^2\cos^2 2\theta+2B(A-C)\sin 2\theta\cos 2\theta+B^2\sin^2 2\theta. \qquad (7)$$

又將§86中(4)式兩端平方得

$$0=(A-C)^2\sin^2 2\theta+2B(C-A)\sin 2\theta\cos 2\theta+B^2\cos^2 2\theta. \qquad (8)$$

(7)與(8)相加,便有 $(A'-C')^2=(A-C)^2+B^2$. (9)

再將(5)式兩端平方, $(A'+C')^2=(A+C)^2$. (10)

而自(9)減去(10),即得

$$\text{(V)} \qquad -4A'\cdot C'=B^2-4A\cdot C.$$

(一)如§90中(2)式軌跡為拋物線,則 $A'=0$, 或 $C'=0$, 由(V)即知必 $B^2-4A\cdot C=0$.

(二)如(2)式軌跡爲橢圓,則 $A'.C'>0$,故 $-A'\cdot C'<0$,即 $B^2-4A.C<0$.

(三)如(2)式軌跡爲雙曲線,則 $A'\cdot C'<0$,故 $-A'\cdot C'>0$,即 $B^2-4A\cdot C>0$.

將上面的結果列成一表,卽得定理如次:

定理 設有任意二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

則其所能表的軌跡分類如下表:

檢 驗	普通情形	特殊情形
$B^2-4A\cdot C=0$	拋物線	兩平行直線或一直線
$B^2-4A\cdot C<0$	橢圓	一點橢圓
$B^2-4A\cdot C>0$	雙曲線	兩相交直線

注意 各特殊情形(卽變態情形),可由(1)式能否分解成含 x 與 y 的兩個一次因式,以判定之.另有一種判別式可用,見第十一章§§144,145.

[註] $B^2-4A\cdot C$ 一式,叫做二次方程式的判別式.

92. 二次式的作圖 (一)先移軸改方程式爲範式,這法的手續如次:

(1)如式中原無 xy 項,則作平移化簡方程式,再就新軸作圖.

(2)如方程式中有 xy 項,應先按§86中(III)式,旋轉坐標軸過角 θ,以化去 xy 項,然後再用平移簡化.

注意 由§86中(III)式，即得 $\tan 2\theta$，再由三角公式 $\cos 2\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}$ 計算 $\cos 2\theta$. 實際上我們常取 θ 為銳角，所以 $\cos 2\theta$ 必與 $\tan 2\theta$ 同號. 再按三角公式，則得 $\sin\theta=+\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$, $\cos\theta=+\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$. 所以不必求 θ，即可知§85中旋轉方程式(II)的係數.

例一 作 $x^2+4xy+4y^2+12x-6y=0$ 的圖，並加討論.

解 因 $A=1, B=4, C=4$，故 $B^2-4A\cdot C=0$，而知這軌跡是一拋物線.

改書題中已知方程式為

$$(x+2y)^2+12x-6y=0.$$

再按(III)式得 $\tan 2\theta=\frac{B}{A-C}=\frac{4}{1-4}=\frac{-4}{3}$. 又由上面的公式，得

$$\cos 2\theta=-\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{-4}{3}\right)^2}}=\frac{-3}{5},\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}\text{與}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

故旋轉方程式為

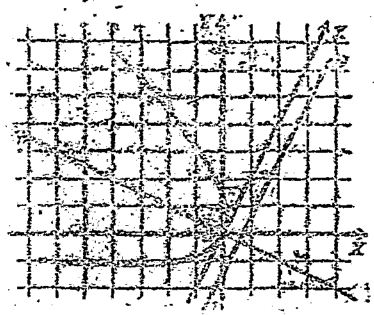
$$x=\frac{x'-2y'}{\sqrt{5}},\quad y=\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}.$$

代入，簡化，即得

$$x'^2-\frac{6}{\sqrt{5}}y'=0$$

第168圖中，指出新舊兩組坐標軸和拋物線形狀，其焦點爲 $x'=0$, $y'=\frac{3}{10}\sqrt{5}$，其準線爲 $y'=\frac{-3}{10}\sqrt{5}$. 又因 OX' 軸的斜率爲 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2$，所以 OX' 爲經過原點而以 2 爲斜率的直線.

由原方程式易得兩軸上的截距爲 $x=0$ 或 -12, $y=0$ 或 $\frac{3}{2}$，這結果可作爲核驗.



(第168圖)

例二 求作 $5x^2+6xy+5y^2+22x-6y+21=0$ 一式的軌跡.

解 在此 $A=5, B=6, C=5$.

$\therefore\ B^2-4A\cdot C=36-100=-64<0$.

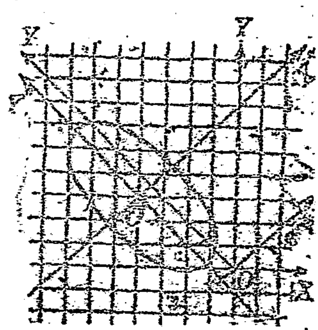
故知軌跡必爲一橢圓.

由公式(III)，得

$$\tan 2\theta=\frac{6}{5-5}=\infty,\quad \therefore\ \theta=45^\circ.$$

而知旋轉方程式爲

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$



(第169圖)

代入已知方程式並簡化，便得 $4x'^2+y'^2+4\sqrt{2}x'-7\sqrt{2}y'+\frac{21}{2}=0$.

再平移至新原點 $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{7}{2}\sqrt{2}\right)$，結果得新方程式 $4x''^2+y''^2=16$.

所以長軸爲 8，短軸爲 4，而焦點在 y'' 軸上.

第109圖，示出三組坐標軸和其軌跡的關係．對於 OX' 與 OY' 二軸的新原點坐標，爲 $O'\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{7}{2}\sqrt{2}\right)$．作圖時，宜注意這些地方．

注意　如 $4A\cdot C-B^2\neq0$，則二次錐線有一對稱心，可先作旋轉以消去 $x'y'$ 項．再代入 $x=x'+h, y=y'+k$，而命 x' 和 y' 的係數都爲零，以定 h 與 k，所求得 (h, k) 一點，即爲二次錐線的中心．

今仍取上面的例二，則求解 h 和 k 的方程式爲 $10h+6k+22=0$, $6h+10k-6=0$．解得 $h=-4, k=3$．即點 O' 對於 OX 和 OY 的坐標．如此得新方程式爲 $5x'^2+6x'y'+5y'^2-32=0$．再作旋轉過 45°，即有 $4x''^2+y''^2=16$，結果與前全同．

(二)直接描方程式的圖．　按§91的定理，以判定軌跡的種類；再討論方程式，而直接作圖．

例三　作方程式 $x^2-2xy+4y^2-4x=0$ 的軌跡．

解　在此 $A=1, B=-2, C=4$．　∵　$B^2-4A\cdot C=4-16=-12<0$．所以軌跡爲一橢圓．

討論　(1)截距　x 軸上的截距爲0與4；y 軸上的截距爲0．

(2)對稱　不以原點爲對稱心，坐標軸爲對稱軸．

(3)範圍　用配方法依 x 解出方程式，得

$$x^2-(2y+4)x+\left(\frac{2y+4}{2}\right)^2=-4y^2+\left(\frac{2y+4}{2}\right)^2,$$

$$\therefore\quad x=y+2\pm\sqrt{(2-y)(2+3y)}.$$

同法，得

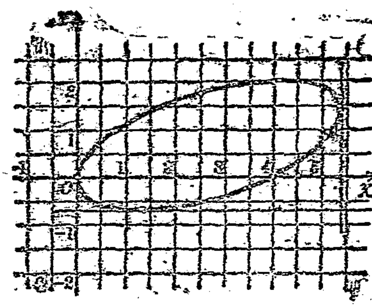
$$y=\frac{1}{4}x\pm\frac{1}{4}\sqrt{x(16-3x)},$$

可知: (i) y 值可在自 $-\frac{2}{3}$ 至 2 的範圍內.

(ii) x 值可在自 0 至 $\frac{16}{3}$ 的範圍內. 所以橢圓在 $y=-\frac{2}{3}$, $y=2$; $x=0$, $x=\frac{16}{3}$ 四直線所成的長方形內.

(4)列表作圖 求軌跡上數點如次表, 即可作出如第 110 圖.

x	y
$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$0, 4$	0
$3\pm\sqrt{5}$	1
4	2
$5\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$



(第 110 圖)

例四 試作方程式 $5x^2+4xy-y^2+24x-6y-5=0$ 的軌跡.

解 在此 $A=5$, $B=4$, $C=-1$, $\therefore$ $B^2-4A\cdot C=16+20=36>0$, 故知這軌跡為一雙曲線, 或相交的兩直線.

用配方術解 y, 得

$$y^2-(4x-6)y+(2x-3)^2=5x^2+24x-5+(2x-3)^2$$

$$=9x^2+12x+4=(3x+2)^2.$$

$$\therefore\ y-(2x-3)=\pm(3x+2).$$

所以這軌跡是 $y=5x-1$ 和 $y=-x-5$ 一對相交直線, 學生試自作圖.

習題二十四

用§92(一)的第一法以化簡下列各方程式．作變易中的各組坐標軸與曲線的圖：

1. $x^2+2xy+5y^2=11$.　　2. $x^2-2xy+y^2-5y=0$.

3. $x^2+3xy+y^2+4y=0$.　　4. $x^2+2xy+y^2+4x-4y=0$

5. $2xy+4x+8y+4=0$.　　6. $x^2+6x-2y+6=0$.

7. $3x^2+y^2-6x+y+4=0$　　8. $x^2+4y^2-16x+24y+84=0$.

9. $7x^2+50xy+7y^2=50$.

10. $12x^2+18y^2+10xy-42x+6y-27=0$.

試用§92(二)的第二法，作下列各方程式的圖：

11. $3x^2-4xy-1=0$.　　12. $4xy+4y^2-2x+3=0$.

13. $x^2-4y^2-4x-32y-60=0$.　　14. $x^2+y^2-4x-6y-18=0$.

15. $4xy-3x^2=9$.　　16. $2x^2+3y^2-16x+18y+53=0$.

17. $x^2+4xy+4y^2+12x-6y=0$.　　18. $3x^2+4xy+y^2-2x-1=0$.

作下列各方程式的圖，於§92的二種作圖法中，擇較便的一法去解：

19. $2x^2-2xy+y^2-4x-6=0$.　　20. $x^2-xy+y^2-2x-6y=0$.

21. $x^2+\sqrt{3}xy+y^2-4x-6y+5=0$.

22. $2x^2+4xy+5y^2-4x-22y+7=0$.

23. $xy-x^2+4=0$.　　24. $xy-2x-y+2=0$.

25. $x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0$.

26. $2x^2-5xy-3y^2-2x+13y-12=0$.

27. $x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$.

28. $y^2+4xy+4x^2-4=0$.

29. 如新原點 (h,k) 的坐標能適合方程式 $2Ah+Bk+D=0$ 與 $Bh+2Ck+E=0$，則普通二次方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，可用平移法化簡，使新方程式中不含各一次項，試加證明.

30. 試證除當 $B^2-4A\cdot C=0$ 時，不能用平移化去方程式的一次項外；在其餘情形，新原點必為曲線的心.

31. 化去方程式 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 的根式，以證其軌跡為一二次錐線，並決定其種類.

32. 試說明下列各種方程式所表的曲線:

(1) $(x-y)^2+(y-k)^2=0$;　　(2) $xy+h^2-h(x+y)=0$;

(3) $x^3-y^3-(x-y)(x^2-y^2)=0$.

93. 五條件定一二次錐線　在§§52,55已述及二條件可定一直線，三條件可定一圓. 今試論決定一二次錐線所需的條件數.

因二次錐線的普通方程式為

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

只須定出 $A:B:C:D:E:F$ 五個比值，即能定這曲線. 由一幾何條件，就可得一係數關係式，所以如知五條件，便可推出五個含係數的方程式，以定五個比值. 但有時所得為可約情形，或因所得方程式互相矛盾，而無軌跡.

如已知二次錐線為拋物線，則按§91，知係數間有關係式 $B^2-4A\cdot C=0$，故只需四條件，即可定拋物線.

例　求一二次錐線，使經過(0,2)，(−2,0)，(2,−6)三點，且以原點為對

稱心.

解 設所求二次錐線方程式為 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. 因原點為其對稱心,按§83, 知這式應不含一次各項. 即 $D=E=0$. 再以已知點坐標 $(0,2)$, $(-2,0)$, $(2,-8)$ 代入,依次求得

$$4C+F=0,\ 4A+F=0,\ 4A-16B+64C+F=0.$$

由第一第二兩式,有 $A:C:F=1:1:-4$,故令 $A=k, C=k, F=-4k$, 代入末式,得

$$4k-16B+64k+(-4k)=64k-16B=0,\ \text{而 } B=4k.$$

故所求方程式為 $$x^2+4xy+y^2-4=0.$$

在此 $B^2-4A\cdot C=4^2-4\cdot1\cdot1=12>0$, 所以軌跡是雙曲線(§91).

注意 由原點為對稱心的情形,得 $D=0$, $E=0$ 二式, 故這已知情形, 實相當於二條件.

[註] 自本節起至§97止,均可略去.

94. **不變式** 由§91中(5)式 $A+C=A'+C'$, 便知普通二次方程式係數所成 $A+C$ 一式, 不因旋轉而變. 又取§86中(4)式 $B'=(C-A)\sin 2\theta+B\cos 2\theta$ (在此不必使 $B'=0$), 和§91中(6)式 $A'-C'=(A-C)\cos 2\theta+B\sin 2\theta$, 將各式二端平方再相加, 得 $(A'-C')^2+B'^2=(A-C)^2+B^2$. 自兩端減去 $(A'+C')^2=(A+C)^2$, 即成 $4A'\cdot C'-B'^2=4A\cdot C-B^2$。所以係數式 $4A\cdot C-B^2$ 也不因軸的旋轉而變.

在§81的注意中, 曾提明普通二次方程式的二次項係數 A, B, C 不因平移而變, 故知 $A+C$ 和 $4A\cdot C-B^2$ 二式, 對於平

移也不改變. 移軸通式, 係由平移與旋轉合成, $A+C$ 與 $4A.C-B^2$ 不因之而變, 理甚顯然. 有這種特性的算式, 叫做對於移軸的不變式*

95. 變易積, 變易羣 繼續作二個變易, 所得仍為一變易, 叫做那二變易相乘的積*. 譬如 §87 的移軸通式(IV), 是以 §79 中(I)式乘 §85 中(II)式的積. 換句話說. 即通式(IV), 表先作平移, 再作旋轉的結果. 在此乘法的次序, 即所作變易的次序, 而不像普通乘法次序, 有可易性. 就 §88 中 (3), (4) 二式和其推得的(IV′)一式, 更知先作旋轉, 再作平移, 與先作平移, 後作旋轉的結果不同. 換句話說, 平移乘旋轉的積, 並不等於旋轉乘平移的積.

如一組變易合於下面二條件:

(一)任何變易的反變易, 也在這組內;

(二)任取二變易的積, 仍在這組內;

則這組變易, 稱為成一羣*, 譬如一切平移, 或一切旋轉, 各成一羣. 而普通的移軸變易 (即 P.18 公式(IV) 所代表的一切變易), 也成一羣. 前二者顯為後者的一部分, 可稱為其次羣*.

幾何學性質如何, 向少精確的說明. 近年德國算學大師克來恩(Klein)始借羣和不變性, 得幾何學的定義如下:

幾何學乃研究圖形對於某變易羣的不變性.

---

*不變式 Invariant. 積 Product. 羣 Group. 次羣 Subgroup.

所以幾何學的分類，即視所研究的不變性，屬於何種變易羣而定. 初等解析幾何學，以移軸變易做變易羣，稱為度量幾何學*. 其中不變性，如線段長，角，面積等皆是。

習題二十五

1. 以等軸雙曲線的漸近線爲坐標軸，求這雙曲線的方程式.

2. 移坐標軸，使下列各等軸雙曲線以漸近線爲軸，求其方程式，並作圖:

(1) $xy-2x-y+8=0$; (2) $2xy-6x-12y+30=0$,

(3) $4xy+12x-4y-3=0$; (4) $5xy+5x+20y+24=0$.

3. $A(x-h)(y-k)+C=0$ 表那一種二次錐線? 試說明其故.

4. 試證自橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一點 (x, y) 至其兩焦點的距離各爲 $a\pm ex$.

[註] 聯橢圓上任一點和其一焦點所成的線段，叫焦半徑*.

5. 在橢圓上取三點，使其橫坐標成等差級數. 試證各相當焦半徑也必成等差級數.

6. 求證雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一點的二焦半徑各等於 $ex\pm a$.

7. 三角形底邊的位置與長皆爲一定，並合於下列條件之一:

(1) 兩動邊斜率的和爲一常數;

(2) 一動邊的斜率與他動邊斜率的倒數成定比;

(3) 一底角倍於他底角;

(4) 兩底角的和爲一定;

(5) 兩底角的差爲一定;

---

*度量幾何學 Metrical geometry. 焦半徑 Focal radii.

試求其頂點的軌跡方程式，並作其圖.

求定一二次繼線，使合於下列各題中的條件:

8. 過$(0,0)$，$(2,0)$，$(0,2)$，$(4,2)$，$(2,4)$五點.

9. 過$(0,0)$，$(10,0)$，$(5,3)$而以x軸爲對稱軸.

10. 過$(0,5)$與$(5,0)$二點，而以二軸爲二對稱軸.

11. 過$(1,1)$一點；而以二坐標軸爲漸近線.

12. 過$(0,0)$，$(0,1)$，$(2,-2)$，$(-1,-2)$四點的拋物線.

13. 求證過四定點，在一般情形，可作二拋物線.

14. 求含兩個未知數的n次代數式的項數，並證明確定一n次代數曲線，應有$\frac{1}{2}n(n+3)$個條件.

第八章

切線與法線

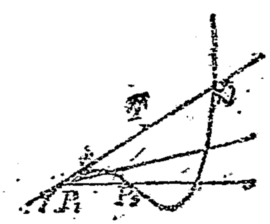
96. **切線的定義** 在初等幾何學中，只論及圓的切線，卽與圓只有一交點的直線是．推到二次錐線上去說，這種定義，還尙可用．因一直線的方程式是一次的，二次錐線的方程式是二次的，聯立後只有二組公解，每一實數公解，表一交點的坐標（§38）．故直線與二次錐線，至多只有二交點；如二交點漸合爲一（卽二組公解相等的情形），便得切線，與二次錐線只有一交點

但對於二次以上的代數曲線言，這定義便有改訂的必要．因一次式的直線與 n 次代數曲線，可有 n 組實數公解，卽一直線和 n 次曲線，能相交於 n 個實點．在一般情形，這 n 個交點，不能盡行相合爲一，卽未必能有一與 n 次曲線只交於一點的直線。今將切線立一新定義如下：

定義 自曲線 C 上一點 P_1，與一鄰近點 P_2，連成割線 P_1P_2．令 P_2 沿 C 移動，趨近於 P_1，漸至於相合．則 P_1P_2 的極限位置 P_1T 叫做曲線 C 上點 P_1 的切線*，P_1 叫切點*．如第 111 圖．

*切線 Tangent，切點 Point of contact.

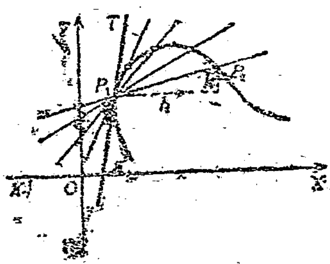
注意上圖中切線 P_1T 與曲線 C 尚另有一交點 Q.



(第 111 圖)

97. **切線的方程式** 由上述定義，即可知切線方程式的求法.

設在第 112 圖中，P_1 的坐標為 (x_1, y_1)，P_2 的坐標為 (x_1+h, y_1+k)，則按 §19，便知 P_1P_2 的斜率 $=\frac{(y_1+k)-y_1}{(x_1+h)-x_1}=\frac{k}{h}$. 當 P_2 趨近於 P_1 時，k 和 h 均趨於零. 求出 $\frac{k}{h}$ 的極限，即為切線 P_1T 的斜率. 再按 §43 的點斜式，便得切線 P_1T 的方程式.



(第 112 圖)

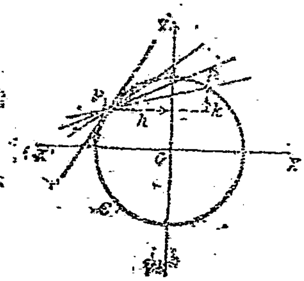
注意 求 $\frac{k}{h}$ 的極限值時，須用曲線 C 的方程式 $y=f(x)$ 方可推得. 其法看下例便知.

註 $\frac{k}{h}$ 一極限值，叫做函數 $y=f(x)$ 在 $x=x_1$ 時的導數*，或稱微係數*. 求各種函數的導數，為微分學*的基本問題，非本書所能論. 本章只論其對於二次錐線的切線的應用.

*導數 Derivative. 微係數 Differential coefficient. 微分學 Differential calculus.

例 試求與圓 $x^2+y^2=r^2$ 在 $P_1(x_1,y_1)$ 相切的切線方程式.

解 命 $P_1(x_1,y_1)$ 與 $P_2(x_1+h,y_1+k)$ 為圓上兩鄰近點.



(第 11[illegible] 圖)

因 P_1, P_2 兩點在圓上，故其坐標必定能適合於圓的方程式，即有

$x_1^2+y_1^2=r^2$, 和 $(x_1+h)^2+(y_1+k)^2=r^2$,

或 $x_1^2+2hx_1+h^2+y_1^2+2ky_1+k^2=r^2$.

將上面兩式二端各相減，得

$$2x_1h+h^2+2y_1k+k^2=0.$$

用 h 遍除上式，而命 $\frac{k}{h}=m'$，則得 $(2x_1+h)+(2y_1+k)m'=0$.

故得過 P_1 和 P_2 兩點所成割線的斜率 m' 為

$$m'=\frac{k}{h}=-\frac{2x_1+h}{2y_1+k}.$$

於上式中，設 h 與 k 趨近於零，即得在點 P_1 的切線斜率 m 為

$$m=-\frac{x_1}{y_1}.$$

再按 § 42 的點斜式，便得圓在點 P_1 的切線方程式為

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1).$$

又因 (x_1,y_1) 在圓上，故有 $x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2=r^2$.

定理一 切圓 $x^2+y^2=r^2$ 於點 $P_1(x_1,y_1)$ 的切線方程式為

(I) $$x_1x+y_1y=r^2.$$

由這例即可得求切線方程式的普通方法如下:

(一)依下法先求曲線上一點 P_1 的切線斜率:

第一步 設 $P_1(x_1,y_1)$ 與 $P_2(x_1+h,y_1+k)$ 爲在曲線上的兩鄰近點,將這兩點坐標,代入曲線方程式中,再取所得二式相減,以 h 徧除所得的結果,而命 $\frac{k}{h}=m'$,則可解出 $m'=\frac{k}{h}$,這便是經過 P_1 與 P_2 的割線斜率.

第二步 命 h 和 k 趨近於零,以求割線斜率的極限值,即爲切線的斜率.

(二)求得切線斜率後,用點斜式便得切線的方程式.

用上面的方法,學生便不難求出下列各定理:

定理二 設 $P_1(x_1,y_1)$ 爲切點,則得各種二次錐線的切線方程式如下表:

曲線	曲線方程式	切線斜率	切線方程式
橢圓($a=b$ 時爲圓)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$	$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$
雙曲線	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$	$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$
拋物線	$y^2=2px$	$\frac{p}{y_1}$	$y_1y=p(x+x_1)$

注意 證明這定理時,宜以 x_1 和 y_1 代已知曲線方程式中的 x 和 y,而用所得關係以化簡切線的方程式.

98. 二次錐線上已知切點的切線.

定理 二次方程式 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 所表二次錐線在切點 $P_1(x_1, y_1)$ 的切線方程式為

$$\text{(II)}\quad Ax_1x+B\frac{y_1x+x_1y}{2}+Cy_1y+D\frac{x_1+x}{2}+E\frac{y_1+y}{2}+F=0.$$

證 取二次錐線上兩相鄰點

$$P_1(x_1, y_1) \quad 和 \quad P_2(x_1+h, y_1+k),$$

則有

$$Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0,$$

$$A(x_1+h)^2+B(x_1+h)(y_1+k)+C(y_1+k)^2+D(x_1+h)$$
$$+E(y_1+k)+F=0.$$

去後式的括號而減去前式，則有

$$Ax_1h+Ah^2+Bx_1k+By_1h+Bhk+2Cy_1k+Ck^2$$
$$+Dh+Ek=0.$$

以 h 徧除，而命 $\frac{k}{h}=m'$，便為

$$2Ax_1+Ah+Bx_1m'+By_1+Bk+2Cy_1m'+Ckm'+D+Em'=0.$$

解出 m'，立得

$$m'=\frac{k}{h}=-\frac{2Ax_1+By_1+D+Ah+Bk}{Bx_1+2Cy_1+E+Ck}。$$

就是割線 P_1P_2 的斜率。

命 P_2 趨近 P_1，則 h 和 k 皆趨近於零，而切線的斜率 m 爲

$$m=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}.$$

故切線的方程式爲

$$y-y_1=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}(x-x_1).$$

化成直線方程式的普通式（§4.）,即有

$$(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y$$
$$-(2Ax_1^2+2Bx_1y_1+2Cy_1^2+Dx_1+Ey_1)=0.$$

但(x_1, y_1)在二次錐線上，故

$$Ax_1^2+Bx_1y_1+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=0.$$

由此卽可知上面直線普通式中的常數項（卽第三括號內全式）等於$-(Dx_1+Ey_1+2F)$. 所以切線的方程式爲

$$(2Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+2Cy_1+E)y+(Dx_1+Ey_1+2F)=0.$$

由這式立可化爲(II)的形狀.

注意　由上述定理，卽得二次錐線上已知切點的切線方程式，求法如下：

設任意二次方程式所表二次錐線上一切點爲 $P_1(x_1,y_1)$，則應以 x_1x 和 y_1y 代已知方程式中的 x^2 與 y^2，以 $\frac{y_1x+x_1y}{2}$ 代 xy,

再以 $\frac{x+x_1}{2}$ 和 $\frac{y+y_1}{2}$ 代 x 和 y，即得所求的切線方程式。

例 一 二次錐線 $x^2+3xy-4y+5=0$ 上，以 (x_1, y_1) 為切點的切線方程式如何?

解 由上理即知為

$$x_1x+\frac{3}{2}(x_1y+y_1x)-\frac{4}{2}(y+y_1)+5=0,$$

或

$$(2x_1+3y_1)x+(3x_1-4)y-4y_1+10=0.$$

習題二十六

設切點為 (x_1, y_1)，試求下列各曲線的切線方程式:

1. $3y^2=4x$.
2. $x=Ay^2+By+C$.
3. $x^2+[illegible]y^2=16$.
4. $x^2+y^2+2hx+2ky+r^2=0$.
5. $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$.
6. $4x^2-2y^2=7$.
7. $xy=k$.
8. $y=x^3$.
9. $2x^2=4y^3$.

下列各曲線的切線方程式，如以其後註明的點為切點，應如何?

10. $x^2+9y^2=40$: $(-2, 2)$.
11. $x^2+4y^2+2x+8y-20=0$: $(2, -3)$.
12. $2x^2+3y^2=50$: $(-1, -4)$.
13. $y=x^3+2x$: $(1, 3)$.
14. $2y^2=x^3$: $(2, 2)$.
15. $y=2x^3+3$: $(-2, -13)$.
16. $2x^2-3y^2=12$: $(3, \sqrt{2})$.
17. $y=2x-x^2$: $(0, 0)$.
18. $xy=x+5$: $(3, 2)$.
19. $xy-2x+y=0$: $(x_1=3)$.
20. 有拋物線 $y=x^2$，取其上 $P_1(1, 1)$ 和 $P_2(1+h, 1+k)$ 二點，令

$h=\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ 時，求割線 P_1P_2 的斜率.

99. **法線　定義**　過曲線上的點 P_1，作在點此上之切線的垂直線，便叫做曲線上點 P_1 處的法線*．切線的方程式既已求得如前，故法線的方程式卽不難求出：由這條和 § 97 的定理二，卽得一定理如下：

定理　在點 $P_1(x_1, y_1)$ 的二次錐線法線方程式，表列如下：

曲　線	曲線方程式	法線斜率	法線方程式
橢　圓 (a=b 時為圓)	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$	$\frac{x}{b^2x_1}-\frac{y}{a^2y_1}=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$
雙曲線	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$	$\frac{x}{b^2x_1}+\frac{y}{a^2y_1}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}$
拋物線	$y^2=2px$	$-\frac{y_1}{p}$	$\frac{x}{px_1}+\frac{y}{x_1y_1}=\frac{1}{p}+\frac{1}{x_1}$

註　將這表和 § 97 中的表相較，注意二者斜率互為負倒數，便可證明.

注意　法線的方程式，不如切線的方程式之易於記憶．所以求法線時，不如由切線方程式去推，而毋需引用公式．申言之，卽先求法線斜率，再用點斜式 $y-y_1=m(x-x_1)$ 去求.

100. **求已知斜率的切線**　已知切線的斜率，而求其方程式的法則，可舉例說明如下：

例　求橢圓 $5x^2+y^2=5$ 的切線方程式，使其斜率為 2.

---

*法線 Normal.

解 設第114圖中，$P_1(x_1, y_1)$為切點；則按§97得所求的切線方程式，為

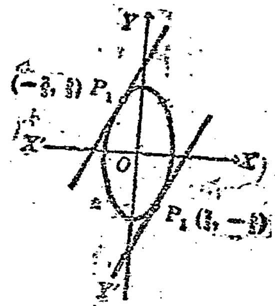
$$5x_1x+y_1y=5.$$

但這直線的斜率應等於2，即

$$-\frac{5x_1}{y_1}=2,\ 或\ y_1=-\frac{5}{2}x_1.$$

又因P_1在橢圓上，而有$5x_1^2+y_1^2=5$.

將所得二方程式聯立解出(x_1, y_1)，則得



(第114圖)

所求兩平行切線的切點為$\left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$與$\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. 由此便易得切線方程式為

$$2x-y-3=0,\ 2x-y+3=0.$$

由上述求法，可得一定理如下:

定理 二次錐線上已知斜率m的切線方程式，表列如下:

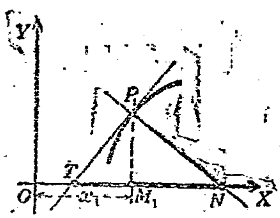
曲　線	曲線方程式	切線方程式
圓	$x^2+y^2=r^2$	$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$
橢　圓	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
雙曲線	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$
拋物線	$y^2=2px$	$y=mx+\frac{p}{2m}$

101. 次切距與次法距　定義　設曲線C上點P_1的切線和法線與x軸各相交於點T和點N，如第115圖，則稱

P_1T＝在點P_1的<u>切距</u>*

P_1N＝在點P_1的<u>法距</u>*

又P_1T與P_1N在x軸上的射影M_1T和M_1N，名稱為在P_1的<u>次切距</u>*與<u>次法距</u>*.



(第115圖)

定理　如m為在點$P(x_1, y_1)$的切線斜率，則

$$-\frac{y_1}{m}=\text{次切距},\ my_1=\text{次法距}.$$

證　在第115圖中，$\angle PTM_1$與$\angle M_1P_1N$二角各邊互相垂直，所以相等．原設m為$\angle P_1TM_1$的正切，故

$$\text{在}\triangle P_1TM_1\text{中},\ m=\frac{M_1P_1}{TM_1}=\frac{y_1}{-M_1T}=-\frac{y_1}{\text{次切距}},$$

$$\text{在}\triangle M_1P_1N\text{中},\ m=\frac{M_1N}{M_1P_1}=\frac{\text{次法距}}{y_1}.$$

即可證明所求的二公式．

註　次切距與次法距，自縱坐標M_1P_1的垂趾，向相反方向量得，故兩者

*切距 Length of tangent. 法距 Length of normal. 次切距 subtangent. 次法距 Subnormal.

必異號.

注意 切距 P_1T 與法距 P_1N，易由幾何理求出，見下例.

例 拋物線 $x^2=4y$ 上有一點，其橫坐標為 3，試求在這點的切線與法線方程式，並求出次切距和次法距.

解 (一) 設切點為(x_1, y_1)，因 $x_1=3$，故 $4y_1=3^2$，即 $y_1=\frac{9}{4}$.

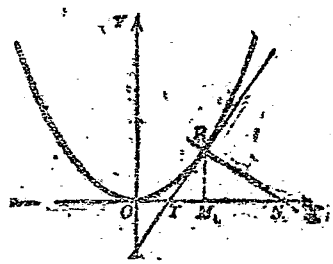
按§97的定理二，知在(x_1, y_1)的切線方程式為 $x_1x=2(y+y_1)$.

將 x_1 和 y_1 值代入，便有

$$3x=2\left(y+\frac{9}{4}\right),$$

或 $$6x-4y-9=0.$$

便是所求的切線方程式.



(第 116 圖)

(二) 切線的斜率為 $\frac{3}{2}$，故過 $\left(3,\frac{9}{4}\right)$ 一點的法線方程式為

$$y-\frac{9}{4}=-\frac{2}{3}(x-3)，\text{或 } 8x+12y-51=0.$$

(三) 按本節公式，將 $m=\frac{3}{2}$，$y_1=\frac{9}{4}$ 代入，即得次切距 $M_1T=-\frac{3}{2}$，次法距 $M_1N=\frac{27}{8}$（見第 116 圖）.

(四) 因 $\triangle P_1TM_1$ 與 $\triangle M_1P_1N$ 各有一直角，且其兩邊長也為已知，故可得切線長 P_1T，法線長 P_1N。

習題二十七

求下列各曲線,經過後面標明一點的法線方程式:

1. $2x^2+3y^2=35$, $(2,3)$.　　　2. $y^2=4x+4$, $(3,4)$.

3. $x^2+xy=4$, $(-2,0)$.　　　4. $xy^2=9$, $(1,-3)$.

5. $3y^2=x^3$, $(3,3)$.　　　6. $x^2+4y^2+5x=0$, $(-1,1)$.

7. 求第1題至第6題中的次切距和次法距.

8. 求證拋物線 $y^2=2px$ 的次切距的絕對值兩倍於切點橫坐標，又其次法距為常數 p.

已知切線的斜角或斜率，試求以下諸二次曲線的切線方程式:

9. $2x^2+3y^2=6$, $m=-1$.　　　10. $y^2=4x$, $\alpha=30^\circ$.

11. $x^2+y^2=25$, $m=-\frac{3}{4}$.　　　12. $2y^2-16x^2=1$, $m=\sqrt{2}$.

13. $y^2-12y-8x+20=0$, $\alpha=90^\circ$.

14. $5x^2-8y^2+20x+32y-137=0$, $m=\sqrt{2}$.

15. 已知法線的斜率，試求下列各二次曲線的法線方程式:

(1) $xy=4$, $m=\frac{1}{4}$;　　　(2) $4x^2+16y^2=25$, $m=-\frac{5}{4}$;

(3) $x^2-4y^2=9$, $m=\frac{1}{2}$;　　　(4) $2y^2-16x^2=1$, $m=\pm 2\sqrt{2}$.

102. 由曲線外一點所作的切線　下例示明如何求自曲線外一點所作的切線方程式.

例　求過 $A(-2,-1)$ 一點，而與橢圓 $4x^2+y^2=5$ 相切的切線方程式.

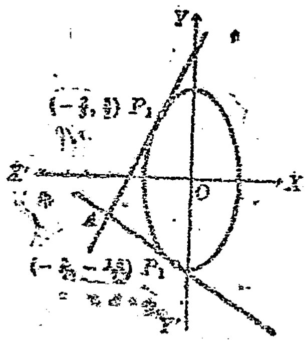
解　設第117圖中，$P_1(x_1,y_1)$ 為切點. 由§98得所求切線的方程式為

$$5x_1x+y_1y=5.$$

但 $A(-2, -1)$ 為此切線上一點，故有 $-10x_1-y_1=5$. 又因切點 $P_1(x_1, y_1)$ 在曲線上，故 x_1 與 y_1 必定適合於曲線方程式，即

$$5x_1^2+y_1^2=5.$$

就所得兩關係式，聯立解出 x_1, y_1，即得自點 A 所作兩切線的切點為 $\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 和 $\left(-\frac{2}{7}, -\frac{15}{7}\right)$. 由此便得切線方程式為



(第 117 圖)

$$2x-y+3=0; \quad 2x+3y+7=0$$

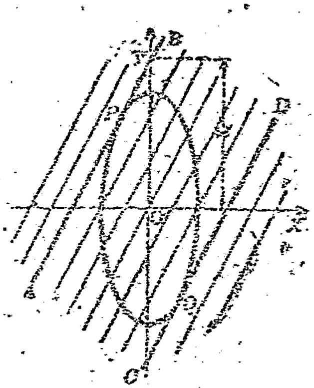
103. 求切線別法 在§96中，曾述及一直線與二次錐線，只能有二交點，如聯合為一，便成切點。所以切點即聯立方程式公解為等根的一種情形。應用這理，也可求切線，舉例說明求法如下：

例一. 求橢圓 $5x^2+y^2=5$ 上切線方程式，使其斜率為 2.

解 斜率為 2 的直線族方程式為 $y=2x+k$，式內 k 為參數。按上述的理，可定 k 使依此直線與橢圓相切。

先求直線與橢圓的交點，即從二者的方程式中，任消去一未知數。設消去 y，得

$$5x^2+(2x+k)^2=5,$$


(第 118 圖)

即　　$$9x^2+4kx+k^2-5=0. \qquad (1)$$

其根即直線與橢圓交點的橫坐標.

如二交點相合爲切點，則(1)式應有等根.按代數學二次方程式的理，知等根的條件爲:

$$B^2-4A\cdot C=(4k)^2-4\cdot 9(k^2-5)=16k^2-36(k^2-5)=20(9-k^2)=0,$$

故得 $k=\pm 3$. 代入直線族方程式，則

$k=3$ 時，$y=2x+3$ 爲切線 AB.

$k=-3$ 時，$y=2x-3$ 爲切線 CD，如第 118 圖.

例二　求自 $A(-2,-1)$ 至橢圓 $5x^2+y^2=5$ 上的切線方程式.

解　過 $A(-2,-1)$ 的直線族方程式爲 $y+1=m(x+2)$，式中以斜率 m 爲參數.照上法求得定交點橫坐標的方程式爲

$$5x^2+[m(x+2)-1]^2=5,$$

即　　$$(5+m^2)x^2+2m(2m-1)x+4(m^2-m-1)=0.$$

按等根條件，得

$$B^2-4A\cdot C=[2m(2m-1)]^2-4(m^2+5)\cdot 4(m^2-m-1)=0,$$

即　　$$m^2(4m^2-4m+1)-4(m^4-m^3+4m^2-5m-5)=0$$

或　　$$(3m+2)(m-2)=0.$$

$m=2$，得 $y+1=2(x+2)$，或 $2x-y+3=0$.

$m=-\frac{2}{3}$，得 $y+1=-\frac{2}{3}(x+2)$，或 $2x+3y+7=0$.

與上節例中所求得者全同.

註　求切線尚有他種方法，見§124 的例一.

習題二十八

由下列各二次錐線方程式,求合於其後所標明條件的切線方程式:

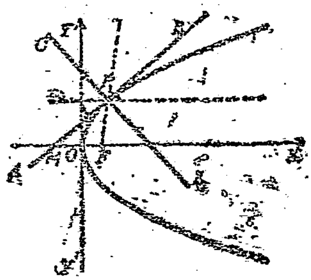
1. $x^2+y^2=36$; 過$(2,6)$.
2. $x^2+4y^2=18$; 過$(2,2)$.
3. $12x^2-10y^2=120$; 過$(0,2)$.
4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 過$(3,4)$.
5. $y^2=6x$; 過$(8,13)$.
6. $x^2+y^2=16$; $m=-\frac{4}{3}$.
7. $y^2=4x$; $m=1$.
8. $xy-12=0$; $m=-\frac{3}{2}$.
9. $x^2+y^2-10x-6y-135=0$; $m=-\frac{5}{12}$.
10. $x^2+y^2-2y=0$; $\alpha=90°$.
11. $4x^2+7y^2=79$; $m=\frac{8}{21}$.
12. $x^2-4y^2=9$; 與直線 $x-2y-5=0$ 垂直.
13. $x^2+9y^2=40$; 與直線 $x-9y=0$ 垂直.
14. $x^2-y^2-4x+6y+7=0$; 與直線 $x+2y=7$ 平行.
15. $9x^2-16y^2=32$; 與直線 $18x-8\sqrt{7}y=15$ 平行.
16. $2x^2+5y^2=10$; $\alpha=60$.
17. $x^2-2y^2=1$; $m=\frac{3}{4}$.
18. $x^2+2y^2=22$; 與直線 $7x-6y+11=0$ 平行.
19. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+1=0$; 與 $5x+2y=7$ 垂直.
20. $xy+y^2-4x+8y=0$; $m=\frac{1}{2}$.
21. $x^2+2xy+y^2+8x-6y=0$ $m=\frac{4}{3}$,
22. $x^2+2xy-4x+2y=0$ $m=2$.

23. 已知一二次錐線方程式為

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;　　(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;　或 (3) $y^2=2px$;

求其切線斜率為 m 者的切點。

104. **二次錐線的光學特性** (一)在第119圖中，F 為拋物線的焦點，$P_1(x_1,y_1)$ 為其上任意一點，在 P_1 的切線為 AB，而與 x 軸交於 $M(x',0)$，則按§97定理二中切線方程式



(第119圖)

$$y_1y=p(x+x_1),$$

得　　$$MO=-x'=x_1,$$

而　　$$MF=MO+OF=-x'+\frac{p}{2}=x_1+\frac{p}{2}.$$

又按§62中拋物線定義，知焦點半徑 P_1F 與 P_1 至準線的距離相等，今準線方程式為 $x=-\frac{p}{2}$，故

$$P_1F=x_1+\frac{p}{2}=MF.$$

由幾何學的理，便知 $\angle FMP_1=\angle MP_1F$。過 P_1 作拋物線軸(在此即 x 軸)的平行線 P_1F'，則 $\angle MP_1F=\angle MP_1F'$，故得

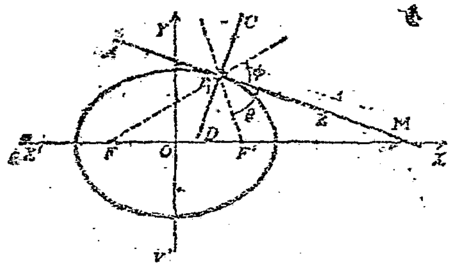
定理一 拋物線上任意一點的焦點半徑，與過這點而平行

於拋物線軸的直線所成內外兩角，順次被在這點的切線與法線所平分.

(二)在第 120 圖中，F 與 F' 為橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的二焦點，$P_1(x_1,y_1)$ 為其上任意一點，則



(第 120 圖)

$$|P_1F|=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}.$$

但按 § 65 中(2)式

$$a\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}=a^2+cx_1,$$

又由 § 66 (五)，$e=\frac{c}{a}$；故

$$|P_1F|=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2}=\frac{1}{a}(a^2+cx_1)=a+ex_1.$$

又設橢圓在 P_1 的切線為 AB，與 x 軸交於 $M(x',0)$．則按 § 97 中切線方程式 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$，得 $x'=\frac{a^2}{x_1}$；故

$$|MF'|=|OF'-OM|=|c-x'|=\left|c-\frac{a^2}{x_1}\right|=\left|\frac{a}{x_1}(ex_1-a)\right|$$

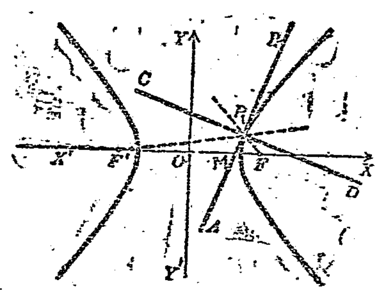
同理，可得

$$|P_1F'|=a-ex_1, \quad |MF|=\left|\frac{a}{x_1}(ex_1+a)\right|.$$

故
$$\left|\frac{P_1F'}{MF'}\right|=\left|\frac{P_1F}{MF}\right|=\left|\frac{x_1}{a}\right|.$$

按綜合幾何的理，便知切線 AB 平分 P_1F' 與 P_1F 二焦點半徑所成的外角即 $\theta=\phi$. 且過 P_1 的法線 CD 與 AB 垂直，所以法線 CD 平分 $\angle FP_1F'$.

對於雙曲線(第 121 圖)，也可證明有同一性質；故得



(第 121 圖)

定理二 橢圓(或雙曲線)上任意一點的切線和法線，順次平分二焦點半徑所成的外角與內角(或內角與外角).

註 按光學與聲學的理，光線或聲波遇一面而反射，則其射入角和反射角必相等. 由上面定理二，即知如光源或聲源在一焦點，則遇橢圓或雙曲線後，各光線或聲波經反射而復集於第二焦點. 建築上細語廊*，即依這理建造. 一人在一焦點作很細的聲音，在他一焦點處的人，也能聽見. 又由定理一，便知光源從拋物線的焦點出發，反射後爲平行；反之，平行光線遇拋物線後，集於焦點. 電筒內反射面，即爲一拋物線依軸旋轉而成的拋物反射器*. 故將燈頭推至焦點時，發出的光即因平行而在一小圓形內增强. 凸凹透鏡能聚日光燒燃物體，也是這理.

---

*細語廊 Whispering gallery. 拋物反射器 Parabolic reflector.

105. 共焦點族中曲線的直交性　在二曲線的交點，作其二切線，如為垂直，則叫這二曲線為直交.

按§75中之解和註，便知一族共焦點的二次錐線式包含橢圓和雙曲線，或含公共焦點和軸的一切拋物線.

(一)如為一族橢圓和雙曲線，則一橢圓和一雙曲線有四交點，而二橢圓或二雙曲線則不能相交. 由上節定理二，即明經過交點的橢圓切線與法線，必與雙曲線的法線和切線，各各相合，因為一角只有一內分角線和一外分角線. 所以共焦點族中的任一橢圓和任一雙曲線必為直交.

(二)如為一族拋物線，則同向一方張開者，不相交；向相反二方張開者，必相交於二點，按上節定理一，即知共焦點族中向相反二方張開的二拋物線必直交.

學生試自作出上述二種情形的圖來。

習題二十九

1. 證明雙曲線上任一切線被二漸近線所截取的一段，被切點所平分.

2. 過拋物線焦點，作其焦弦的垂線，則這垂線與焦弦兩端所作兩切線，三線共交於準線上，試加證明.

3. 試證上題中的兩切線，必互相垂直.

4. 自拋物線焦點作一直線，與切線垂直，則這垂線與準線的交點，必在經過切點而平行於拋物線軸的直線上，試加證明.

5. 拋物線上任意一點的切線，與準線和正焦弦延長相交於兩點，求證這兩

交點與焦點距離相等.

6. 將拋物線的焦點與其兩切線交點連成直線，求證這直線必為兩切點焦點半徑所成角的分角線.

7. 拋物線任意兩切線的交角，必等於兩切點焦點半徑所成角的一半，試加證明.

8. 自橢圓（或雙曲線）的兩焦點至其任意切線的垂直距離，其相乘積必為一定，試加證明.

9. 試證在拋物線正焦弦二端點所作切線，必互相垂直.

10. 以拋物線 $y^2=2px$ 的正焦弦兩端點的切線為坐標軸，試求其新方程式.

11. 過有心錐線上一點 P 的法線，與坐標軸交於 A 與 B. 求證點 P 分線段 AB 所成的比有定值.

12. 過雙曲線的一頂點，作一切線，與其共軛雙曲線相交於兩點. 試證過這兩點的切線必經過他一頂點.

13. 雙曲線上任一切線，與在頂點處兩切線的交點，與兩焦點共在一圓上. 試加證明.

14. 試求橢圓上次切距與次法距等長的各點.

15. 有兩等軸雙曲線，其一的漸近線為他一的對稱軸，試證二者必直交，

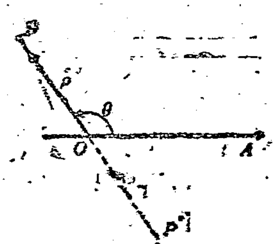
16. 雙曲線上一任意切線，與其兩漸近線相交，所成的三角形有一定的面積，試加證明。

第九章

極坐標

106. 極坐標 在§11中說過，坐標法的主旨，在使數與形的中間，建立一種對應關係．笛氏直坐標，不過是這類方法中的一種，本章卽論決定平面上點的第二種方法．

如第122圖；有一定點O，叫做極*，和經過點O的一條有向定直線OA，叫做極軸*．則平面上任意一點P的位置，可由$\overrightarrow{OP}$之代數值ρ的長和$\angle AOP=\theta$決定．ρ與θ兩數合稱爲點P的極坐標，ρ叫向徑*，θ叫矢角*．矢角的正負，與三角學相同（可參看本局出版之新中國高中三角學，§§31，32）．如P在矢角的終邊上，則命向徑爲正；如P在矢角終邊過極點O的延長線上，則命向徑爲負．如第122圖中P的向徑爲正，而P'的爲負．



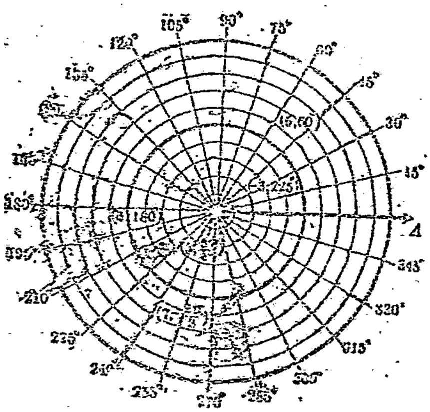
（第122圖）

---

*極 Pole．極軸 Polar axis．向徑 Radius vector．矢角 Vectorial angle．

由上面的規定,可知每一對實數(ρ,θ)必能決定一點。如知坐標$(\rho;\theta)$,則描點的方法如下:

作矢角θ的終邊.如向徑為正,則在終邊上取點P,使OP的長,與ρ相等,則P為所求的點;如向徑為負,則將終邊過點O延長,而在其上取點P',使OP'的長等於ρ的絕對值,則P'為所求的點.


(第 123 圖)

如第 123 圖中各點,其極坐標為

$(6,60^\circ)$,$(3,\frac{4}{3}\pi)$,$(-3,225^\circ)$,$(6,180^\circ)$與$(7,-\frac{5}{9}\pi)$.

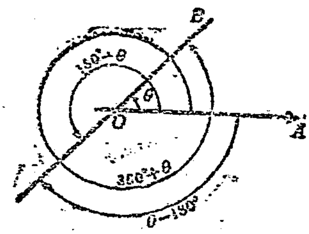
笛氏坐標與極坐標,有很重要不同的地方,每一對實數做坐標,都可定一點,這是二種坐標所同的;但是笛氏坐標中,每一點都只有唯一的坐標,而在極坐標中,則任意一點,可有無限數的極坐標.

設$OB=\rho$則就第 124 圖,可知點B的坐標,可為(ρ,θ),$(-\rho,180^\circ+\theta)$,$(\rho,360^\circ+\theta)$,$(-\rho,\theta-180^\circ)$等等,一般言之,為

$$(\rho,\theta+2n\times180^\circ)$$

或 $$[-\rho,\theta+(2n+1)180^\circ],$$

式中 n 爲任意整數.



(第 124 圖)

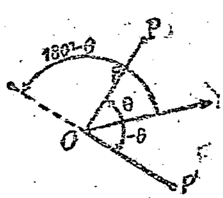
〔註〕 極的坐標爲 $(0,\theta)$, θ 可爲任何角, 而完全不定. 這是極坐標中很特殊的一點.

在普通情形, 當設 θ 爲正或零, 而小於 360°; 即 $0\leqq\theta<360^\circ$; 遇不受這限制時, 當隨時另加聲明.

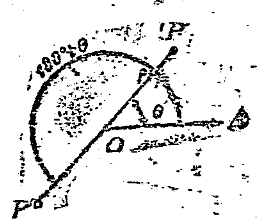
〔注意〕 曲線 C 上任一點的坐標 (ρ,θ) 都合於方程式 $f(\rho,\theta)=0$, 反過來說, 凡適合於 $f(\rho,\theta)=0$ 的值 (ρ,θ) 所表的點都在 C 上, 則稱 $f(\rho,\theta)=0$ 爲曲線 C 的極坐標方程式*, 或簡稱極方程式*.

107. **極坐標中的對稱性** 因任何點可有無限的不同極坐標, 故其對稱性較爲複雜, 今只就最重要者略論如下:

(一)對於極軸的對稱性 如第 125 圖 $P(\rho,\theta)$ 與 P' 對於極軸 OA 成對稱. 則點 P' 的極坐標爲 $(\rho,-\theta)$ 或 $(-\rho,180^\circ-\theta)$.



(第 125 圖)



(第 126 圖)

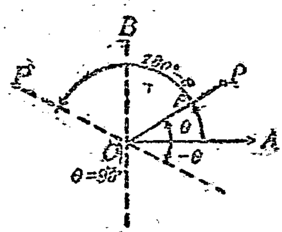
(二)對於極點的對稱性: 如第 126 圖, P 與 P' 對於極點

---

*極坐標方程式 Equation in polar coordinates. 極方程式 Polar equation.

O 成對稱，則點 P' 的極坐標為 $(\rho, 180^\circ+\theta)$ 或 $(-\rho, \theta)$.

（三）對於過極點的極軸垂線的對稱性 如第 127 圖，P 與 P' 對於 OA 的垂線 OB 成對稱，則點 P' 的極坐標為 $(\rho, 180^\circ-\theta)$ 或 $(-\rho, -\theta)$.



（第 127 圖）

綜合上文所述情形，得判定極方程式 $f(\rho, \theta)=0$ 所表曲線的對稱性方法如下表：

θ 改為	θ	$-\theta$		$180^\circ-\theta$		$180^\circ+\theta$
ρ 改為	$-\rho$	ρ	$-\rho$	ρ	$-\rho$	ρ
$f(\rho, \theta)=0$ 不變時，其曲線的對稱性	對於極點 O	對於極軸 OA	對於過極點的極軸垂線 OB		對於極軸 OA	對於極點 O

例一 極方程式 $\rho=a+b\cos\theta$ 中不改 ρ，而改 θ 為 $-\theta$，原式不變，故所表曲線對極軸 OA 為對稱.

例二 $\rho^2=a^2\sin 2\theta$ 中，不改 θ，而改 ρ 為 $-\rho$，方程式不變，故所表曲線對極點 O 成對稱.

例三 $\rho=a\sin 3\theta$ 中，θ 改為 $-\theta$，ρ 改為 $-\rho$，方程式不變，故所表曲線對過極點的極軸垂線 OB 成對稱.

例四 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 中，θ 改為 $-\theta$，而不改 ρ，又 θ 改為 $-\theta$ 或不改而改 ρ 為 $-\rho$，方程式都不變，故所表曲線對極軸 OA、極軸垂線 OB，極點 O，都成對稱.

注意 適合於上述條件者，雖可斷其必有某種對稱性；但不合時，不能斷其必無。

108. **極方程式的作圖** 就 ρ 解方程式，成 $\rho=F(\theta)$ 形，(有時這種解法，竟不可能)。以 θ 的各適宜數值代入而求 ρ 的相當值，至所得諸點足以決定曲線的形狀爲止，然後綴各點而連成曲線。

作極方程式曲線，以用如第 128 圖的極坐標紙爲便，又本書附有三角函數本值簡表，以便計算之用。

例 作極方程式 $\rho=\dfrac{2a}{1+\cos\theta}$ 的圖。

解 先作出 θ 與 ρ 的相當值的表如下：

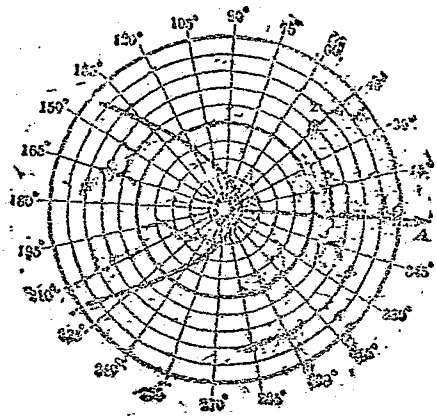
$\rho=2a\div(1+\cos\theta)$, $(a=1)$							
θ	$\cos\theta$	$1+\cos\theta$	ρ	θ	$\cos\theta$	$1+\cos\theta$	ρ
0	1	2	1	105°	−.259	.741	2.7
15°	.966	1.966	1.02	120°	−.500	.500	4
30°	.866	1.866	1.07	135°	−.707	.293	6.8
45°	.707	1.707	1.2	150°	−.866	.134	14
60°	.500	1.500	1.3	165°	−.966	.034	59
75°	.259	1.259	1.6	180°	−1	0	∞
90°	0	1	2				

欲明曲線的形態，宜就下列各層，分別討論：

(一)對稱 不改 ρ，而改 θ 爲 $-\theta$，方程式不變，故曲線對稱於極軸。

(二)範圍 如 $1+\cos\theta=0$，則 ρ 為 ∞；即 $\theta=180°$ 時，曲線上點向無窮遠處移動. θ 本可為任意值，但因(一)中所述的對稱關係，故只須取自 $0°$ 至 $180°$ 各值如上表. 按表作出曲線的一部分，再由對稱於極軸的關係，即得全圖. 第128圖，乃於 $a=1$ 作出.

〔註〕 這曲線為一拋物線.（參看§§112和114).



(第128圖)

習題三十

1. 描出 $(3, 30°)$, $(6, 120°)$, $(-5, -145°)$, $(-10, -30°)$, $(-4, 60°)$ 各點.

2. 試描 $(10, 0°)$, $(-2, 90°)$, $(5, 180°)$, $(5, 18°)$, $(5, 100°)$, $(4\frac{1}{2}, 135°)$ 各點.

3. 試將上二題中各點，換用另一組坐標表出.

4. 求下列各組二點間的距離:

(1) $(2, 210°)$, $(4, 30°)$; (2) $(4, 45°)$, $(-3, 45°)$;

(3) $(1, 30°)$, $(-2, 240°)$; (4) (ρ_1, θ_1), (ρ_2, θ_2).

〔註〕 求(3)與(4)須用餘弦定律（見本局出版的新中國數學書高中三角學§57).

5. 求 $(4, 60°)$ 與 $(3, 30°)$ 兩點的連線與極軸所成的角.

試作下列各極方程式的圖:

6. $\rho=8$.　　7. $\theta=135^\circ$　　8. $\rho=2\cos\theta$.

9. $\rho=10\sin\theta$.　　10. $\rho=2\sin\theta+3\cos\theta$.

11. $\rho\sin\theta=5$.　　12. $\rho=\dfrac{4}{1+\cos\theta}$.

13. $\rho=\dfrac{8}{2+\cos\theta}$.　　14. $\rho=\dfrac{8}{1+2\cos\theta}$.

15. $\rho=a\sin 2\theta$.　　16. $\rho^2\sin 2\theta=9$.

17. $\rho=2(1+\tan\theta)$.　　18. $\rho^2\cos 2\theta=a^2$.

19. $\rho=a\sin\theta\tan\theta$.　　20. $\rho^2=a^2\sin 2\theta$.

[註] 第 19 題的曲線,叫代俄克利斯 (Diocles) 的蔓葉線*; 第 20 題的曲線,叫二葉玫瑰線*.

22. 求極坐標中,以直線 $\theta=45^\circ$ 為對稱軸的對稱情形.

22. 求極坐標中,以直線 $\theta=135^\circ$ 為對稱軸的對稱情形.

23. 不改極點,而將極軸作一角 α 的旋轉,求新坐標 (ρ',θ') 與舊坐標 (ρ,θ) 的關係.

109. 極方程式的討論, 雙紐線 就上節的例,可見作一極方程式的圖形時,宜注意二點:

(一)對稱 按 § 107 的理,討論其對稱性.

(二)範圍 察 ρ 能否為 ∞,以定曲線能否伸張到無窮遠處.又察 θ 值有無限制,如曲線有對稱性,則 θ 的範圍常可縮小,先求曲線的一部分,再依對稱性作出全圖.今再舉一著名曲線為例.

---

*蔓葉線 Cissoid. 二葉玫瑰線 Two-leaved rose.

例　作極方程式 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 的曲線.

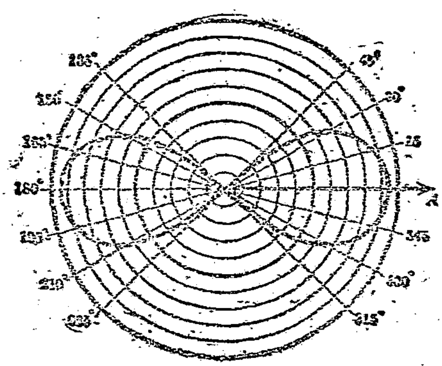
解　(一)對稱　按§107例四，知這曲線對稱於極軸，極點，和直線 $\theta=90°$.

(二)範圍　$\cos 2\theta$ 的極大值是 1，所以 ρ 的極大值是 a，故這曲線不能到無窮遠處.

如 $90°<2\theta<270°$，即 $45°<\theta<135°$ 時，$\cos 2\theta<0$，因此 ρ 為虛數，故曲線不得在自矢角 45° 至矢角 135° 二向徑夾角的中間.

今取 $a=9.5$ 而列 θ 值自 0° 至 45° 如下表:

$\rho^2=a^2\cos 2\theta$			
θ	2θ	$\cos 2\theta$	ρ
0	0	1	$\pm a$
15°	30°	.866	$\pm .93a$
30°	60°	.500	$\pm .7a$
45	90°	0	0



(第 129 圖)

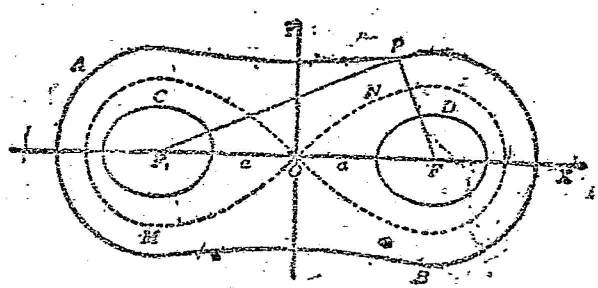
依此可畫出曲線的四分之一，再依對稱於極點和極軸的關係，即成全圖，如第 129 圖.

〔註〕　這曲線叫柏努利(Bernoulli)雙紐線*或稱雙交叉線.(習題三十第 20 題　但該題中圖形，曾將本例極軸作一 45° 的旋轉).

---

*雙紐線 Lemniscate.

注意　上述雙紐線是卡西尼(Cassini)卵線*的特例，這種卵線的極方程式為 $\rho^4-2a^2\rho^2\cos 2\theta=b^4-a^4$．當 $a=b$ 時，便得 $\rho^2(\rho^2-2a^2\cos 2\theta)=0$，即 $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$，在第130圖中，卵形 PAB 表 b 的絕對值大於 a 者時的情形；二個卵形線 C 和 D，表 b 的絕對值小於 a 者時的情形，如二絕對值相等，則得雙紐線，圖中以虛線表出.



(第 130 圖)

卵形線上任一點 P 到 $F(a, 0°)$，和 $F_1(a, 180°)$ 二點距離的乘積，即為 b^2，學生不難按習題三十中第4題(4)的結果自行證明(可參看§112中例題的註).

110.　蚶線　有時曲線形狀，視其中任意常數而有變化．今以一著名曲線，叫做巴斯噶(Pascal)蚶線*的為例.

例　求作極方程式 $\rho=a+b\cos\theta$ 的曲線.

解　(一)對稱　在§107的例一中，已證明這曲線對稱於極軸 OA.

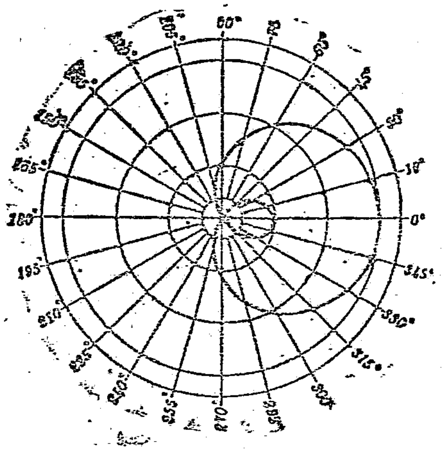
(二)範圍　$\cos\theta$ 的值，必介於 $+1$ 與 -1 間，故 ρ 不能為 ∞，即曲線不能至無窮遠處．θ 的值原無限制，但因對稱性的關係，只須取 θ 的值，從 0° 起至 180° 止．今取 $a=1$, $b=2$，而表列 ρ 與 θ 的相當值如下:

*卵線 Oval　蚶線 Limaçon.

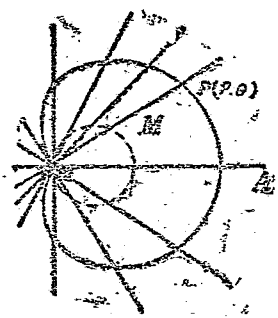
θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\theta$	1	0.87	0.7	0.5	0	−0.5	−0.7	−0.87	−1
ρ	3	2.7	2.4	2	1	0	−0.4	−0.7	−1

描點連成曲線，再依對稱性，便得全圖如第 131 圖.

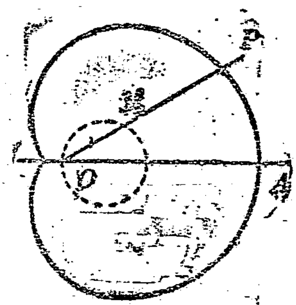
[註] 當 a 與 b 的絕對值相等，例如 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 時，曲線便如第 132 圖，這時曲線又叫做心臟線*. 在 a 的絕對值大於 b 者時，曲線如第 133 圖. 設這二圖中的小圓，以 b 為直徑，則 $\overline{OM}=b\cos\theta$, $MP=a$. 又如以 $180°-\theta$ 代 θ，則就是將極軸作 180° 的旋轉，圖形卻變為其以 $\theta=90°$ 為軸的對稱形（也即是自紙背面看原圖



(第 131 圖)



(第 132 圖)



(第 133 圖)

*心臟線 Cardioid.

的形狀),這時極方程式變成 $\rho=a-b\cos\theta$, 仍為蚶線

111. 玫瑰線 有時我們只須知一圖的大概情形, 則可將極方程式的圖, 以簡捷的手續畫出.

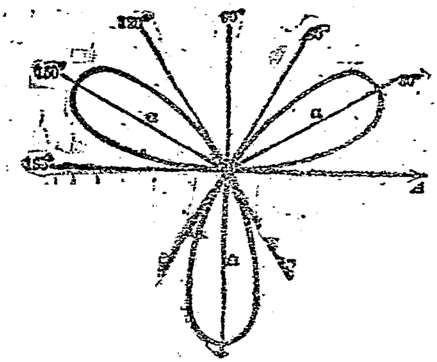
例 求作極方程式 $\rho=a\sin 3\theta$ 所表三瓣玫瑰線*的圖.

解 設 θ 自 0° 漸大時, ρ 也隨着變化, 如下表:

3θ	0°	—	90°	—	180°	—	270°	—	360°	—	450°	—	540°
θ	0°	—	30°	—	60°	—	90°	—	120°	—	150°	—	180°
ρ	0	↗	a	↘	0	↘	$-a$	↗	0	↗	a	↘	0

表中 ↗ 表 ρ 的數值漸增, ↘ 則表其漸減.

作出 $\theta=0°, 30°, 60°, 90°$, 各相當向徑, 而就 ρ 與 θ 相應變化的情形, 即可得圖的一半. 再依對稱性即得全圖, 如第 134 圖.



(第 134 圖)

這曲線對稱於過極點的極軸垂線(§107, 例三); 又對於 $\theta=30°$ 和 $\theta=150°$ 二直線亦然. 因 $a\sin 3[\alpha+(\alpha-\theta)]=a\sin(6\alpha-3\theta)$, 於 $\alpha=30°$ 及 150° 時, 等於 $a\sin 3\theta$ 也.

*三瓣玫瑰線 Three-leaved rose.

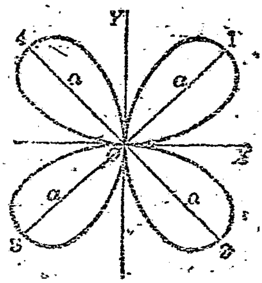
習題三十一

試作下列各極方程式的曲線:

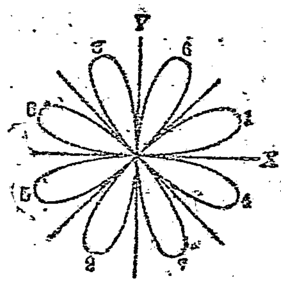
1. $\rho=1+\cos\theta$.　2. $\rho=2-\cos\theta$.　3. $\rho=1-\sin\theta$.

4. $\rho=1-2\sin\theta$.　5. $\rho=2-\sin\theta$.　6. $\rho=a\cos 3\theta$.

7. $\rho=a\sin 2\theta$.　8. $\rho=2a\cos 2\theta$.　9. $\rho=a\sin 4\theta$.



(第135圖)



(第136圖)

〔註〕第6題為三瓣玫瑰線,即將第134圖中之軸旋轉過90°而成.第7題為四瓣玫瑰線,如第135圖;如作45°的旋轉,即表第8題.第9題為八瓣玫瑰線,如第136圖.

10. $\rho=a\cos\frac{1}{2}\theta$.　11. $\rho=a\sin\frac{2}{3}\theta$.　12. $\rho=a\cos 4\theta$.

13. $\rho=a(1+2\sin\theta)$.　14. $\rho=a(2+\cos\theta)$.　15. $\rho=a\sin(\theta+45^\circ)$.

16. $\rho=a\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$.　17. $\rho=a\sin\frac{1}{2}\theta$.　18. $\rho=a\cos\frac{2}{3}\theta$.

19. $\rho=a\cos\frac{1}{3}\theta$.　20. $\rho=a\sin^2\frac{1}{2}\theta$.　21. $\rho=a\cos^2\frac{1}{2}\theta$.

22. $\rho=a\sin^3\frac{1}{3}\theta$.　23. $\rho=a\cos^3\frac{1}{3}\theta$.　24. $\rho^2=4\sin\theta$.

25. $\rho^4-2\rho^2\cos 2\theta-15=0$.　　26. $\rho^4-8\rho^2\cos 2\theta+15=0$.

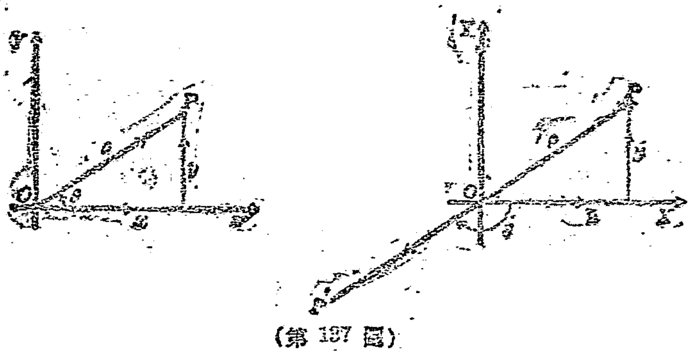
112. 直角坐標與極坐標的互換式 定理 以直角坐標的原點為極坐標的極,以前者的 x 軸正向為後者的極軸,則任意一點 P 的 (x, y), (ρ, θ) 二種坐標互換式為

$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta \\ y&=\rho\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad 和 \quad \left.\begin{aligned} \rho^2&=x^2+y^2 \\ \theta&=\tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\}$$

證 (一)設 ρ 為正,如第 137 圖的左圖,則按定義,知不論 P 在任何象限內,均有

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho},\quad \sin\theta=\frac{y}{\rho};$$

即 $$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$



(第 137 圖)

(二)設 ρ 為負,如第 137 圖的右圖;則作點 P 對於極點的對稱點 P',其直坐標為 $(-x, -y)$,而極坐標為 $(-\rho, \theta)$. 因 $-\rho$

爲正,按(一)便得

$$-x=-\rho\cos\theta,\quad -y=-\rho\sin\theta;\text{或 } x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

(三)將二式兩端平方相加,即得 $\rho^2=x^2+y^2$. 如以第一式除第二式,立有 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ 或 $\theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$.

又因 $\sin\theta=\dfrac{y}{\rho}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{\rho}$, 而 $\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, 故可得

$$\sin\theta=\frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},\quad \cos\theta=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}.$$

注意 已知一點的極坐標時,其相當的直坐標爲唯一確定.反之則不然,因 $\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}$,有正負二築,而反三角函數 $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ 爲多值函(關於這種多值性,可看本局出版的新中國教科書高中三角學).這種現象的原由,乃因一點的極坐標,不爲唯一確定的綠故,可看 § 103.

例一 求化 § 100 中雙紐線的極方程式 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 爲直角坐標方程式.

解 因 $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$, 故 $\rho^2=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$.將上面定理中公式代入,得 $x^2+y^2=a^2\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}-\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right)$,即 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

[註] 同法可化卡西尼卵線的極方程式爲直角坐標方程式

$$[(x+a)^2+y^2][(x-a)^2+y^2]=b^4,$$

即表示第 130 圖中 $PF\cdot PF_1=b^2$.

例二 求證 $P_1(\rho_1, \theta_1)$ 與 $P_2(\rho_2, \theta_2)$ 二點間距離 l，合於

$$l^2=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2).$$

證 設這二點的直角坐標各爲 $P_1(x_1, y_1)$ 與 $P_2(x_2, y_2)$，則

$$x_1=\rho_1\cos\theta_1,\quad x_2=\rho_2\cos\theta_2,\quad y_1=\rho_1\sin\theta_1,\quad y_2=\rho_2\sin\theta_2.$$

代入 § 14 中的公式 $l^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ 中，卽得

$$l^2=(\rho_1\cos\theta_1-\rho_2\cos\theta_2)^2+(\rho_1\sin\theta_1-\rho_2\sin\theta_2)^2.$$

去括弧，而用三角公式 $\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2$，$\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1=1$ 等.（見本局出版的新中國高中三角學），卽可證明.

［註］這公式也可用餘弦定律直接證得［習題三十第 4 題(4)］.

113. 直線和圓的極方程式 由上節的公式，立可證明下面的二定理：

定理一 直線的普通極方程式爲

$$\rho(A\cos\theta+B\sin\theta)+C=0;$$

式中 A, B, C 表任意常數.

定理二 圓的普通極方程式爲

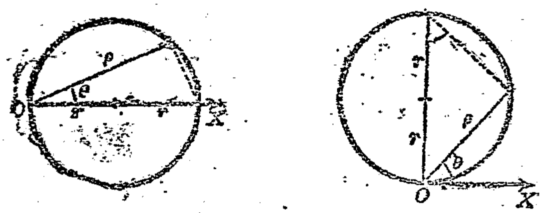
$$\rho^2+\rho(D\cos\theta+E\sin\theta)+F=0.$$

式中 D, E, F 表任意常數.

特例 （一）如極在圓上，且令圓的直徑與極軸相合，則方程式變爲 $\rho=2r\cos\theta$. 式中 r 表圓的半徑.

(二)同理,如以圓與極軸的切點為極,則方程式變為 $\rho=2r\sin\theta$.

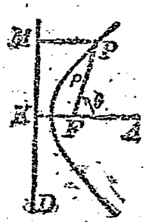
這兩式也可由第 138 圖直接推出,學生試自證明.



(第 138 圖)

114. **二次錐線的極方程式** 二次錐線的定義,在本書已說過二種,而於 § 84 中證明其一致.如用 § 77 中的定義,而求其極方程式,結果頗為簡單.

以焦點 F 為極,在過 F 且與準線 DD' 垂直的線上,取自 DD' 至 F 為正向,而以這直線做極軸.設垂趾為 K,而命 $KF=p$.



(第 139 圖)

如第 139 圖,$P(\rho,\theta)$ 為 DD' 的右邊一點,而在所求的二次錐線上,則有

$$FP=\rho\ (\text{為正}),\quad MP=\rho\cos\theta+p.$$

按定義 $FP/MP=e$,故點 P 軌跡的方程式為

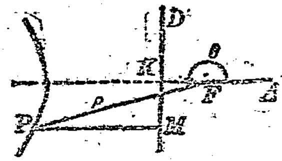
$$\frac{\rho}{\rho\cos\theta+p}=e,\ \text{即}\ \rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}. \qquad (1)$$

橢圓和拋物線只在準線的右邊(參看§84)，故在 $e \leqq 1$ 時，(1)式表橢圓和拋物線曲線的全部.

但在 $e>1$ 時的雙曲線情形下，(1)式只表雙曲線的右枝，其左枝的極方程式應爲

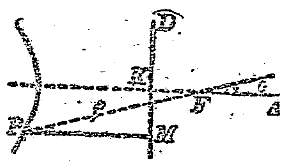
$$\rho=-\frac{ep}{1+e\cos\theta} \tag{2}$$

因如 $P(\rho,\theta)$ 在雙曲線左枝上，如第 140 圖時，卽在準線 DD' 左邊，而應有 $PM=-\rho\cos\theta-p$，代入 $FP/PM=e$，爲 $\frac{\rho}{-\rho\cos\theta-p}=e$，解出 ρ 卽爲(2)式.



(第 140 圖)

我們也可以一式表雙曲線的兩枝，只須撤去 ρ 爲正數的限制. 如第 141 圖中，點 P 在左枝上時，則命 ρ 爲負，便得



(第 141 圖)

$$FP=-\rho,\ PM=-\rho\cos\theta-p,$$

代入 $FP/PM=e$，解出 ρ 卽爲(1)式.

[註] 取 ρ 正值或零的限制，較爲妥當，因爲如此就可以一單純算式(1)或(2)來表一枝曲線. 在解析幾何學中，我們雖只注意曲線全體，對於二枝，無分軒輊，但應用算學方面，有時只一枝曲線有意義，例如一彗星運行的軌道爲雙曲線時，只

在其一枝上．又在高等算學上，須須避去多值函數的含混，而須分別考察出其各枝．

注意　雙曲線二枝的分別，不僅這一法，例如取方程式 $y^2-x^2=1$ 為一貫軸合於 y 軸的雙曲線，將這式可分成 $y=\sqrt{1+x^2}$ 與 $y=-\sqrt{1+x^2}$，前者表上枝，後者表下枝(參看§69下注意)．

習題三十二

1．求$(5,12)$，$(13,12)$，$(-4,-3)$，$(\sqrt{3},1)$，$(-2\sqrt{3},2)$，$(1,-1)$，$([illegible],5)$各點的極坐標．

2．化下列各方程式為極方程式，並求作其軌跡：

(1) $2x-5y=0$;　　(2) $4x-2y+[illegible]=0$;

(3) $x^2+y^2=25$;　　(4) $x^2+y^2+2x=0$;

(5) $xy=a$;　　(6) $x^2-y^2=a^2$;

(7) $y^2=2x^3$;　　(8) $x^2+y^2-2x+4y=5$;

(9) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

(10) $(x^2+y^2+bx)^2-a^2(x^2+y^2)=0$;

(11) $(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0$.

3．化下列各極方程式為直角坐標方程式：

(1) $\rho=7$;　　(2) $\theta=15$;

(3) $\rho=4\sin\theta$;　　(4) $\rho=6\cos\theta$;

(5) $\rho^2=9\cos 2\theta$;　　(6) $\rho^2=4\cot\theta$;

(7) $\rho=4\sec\theta$;　　(8) $\rho(2\cos\theta+3\sin\theta)+5=0$;

(9) $\rho(7\cos\theta-5\sin\theta)=7$;　　(10) $\rho=5\csc\theta$;

(11) $\rho^2\cos 2\theta=16$;　　(12) $\rho=\frac{1}{3}\tan\theta$;

(13)　$\rho+3\cot\theta\csc\theta=0$;　　(14)　$\rho=\dfrac{\quad}{1+2\cos\theta}$.

4. 已知二圓的普通方程式，求其等冪軸(§57)的極方程式.

5. 試求(1)螺線(2)心臟線(3)四瓣玫瑰線的直角坐標方程式.

6. 就上題所得結果，反求其極方程式.

7. 將極軸依其極作 90° 的旋轉，則§114中的(1)與(2)二式，應作何形狀?

8. 將下列各二次錐線的極方程式，與§114中結果比較，或與上題比較，以求 e 與 p，試作圖並定其準線:

(1)　$\rho=\dfrac{7}{2-2\cos\theta}$;　　(2)　$\rho=\dfrac{16}{2+\sin\theta}$;

(3)　$\rho=\dfrac{12}{1+3\cos\theta}$;　　(4)　$\rho=\dfrac{10}{2-\sin\theta}$.

9. 將§85的旋轉方程式改為極坐標，應得何種結果? 試與習題三十的第22題比較.

10. 限定取 ρ 的正值，求化 $\rho=a\sin 2\theta$ 所成的直角坐標方程式. 如不限定取正值，結果應如何?

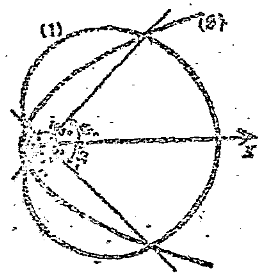
115. 極坐標曲線的交點　這種交點求法與§38的情形相類，在一般情形，以消去 ρ 為便；所得結果，每為一含 θ 的超性方程式*. 茲舉例題說明如下:

[註] 含有未知數的指數，對數，或三角函數等方程式，叫超性方程式.

例　求下列極坐標曲線的交點:

*超性方程式 Transcendental equation.

$$\rho=1+\cos\theta,\quad \rho=\frac{1}{2(1-\cos\theta)}.$$



(第 142 圖)

解 消去 ρ，得

$$1+\cos\theta=\frac{1}{2(1-\cos\theta)}.$$

或 $1-\cos^2\theta=\frac{1}{2}$，即 $\cos=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解得 $\theta=\pm 45°,\ \pm 135°$.

代入任一已知方程式中，則得四交點如下:

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2},\pm 45°\right),\ \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\pm 135°\right).$$

結果可就第 142 圖中驗明. 第一已知式的軌跡為心臟形曲線(1)，他一式則為拋物線(2).

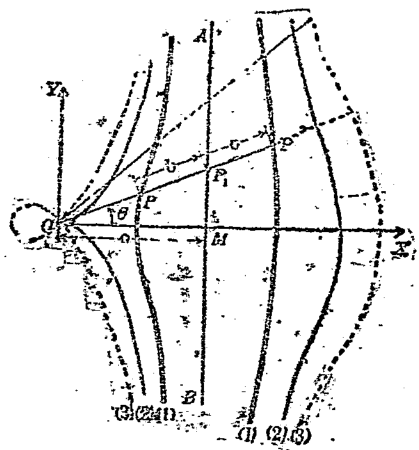
116. 以極坐標求軌跡，蚌線 如一變直線段有一端固定，則他端所成的曲線，宜用極坐標求其極方程式. 今取一著名曲線為例.

例 經過定點 O 作一直線，與定直線 AB 相交於點 P_1. 在直線 OP_1 上，取點 P，使 $P_1P=\pm b$ (b 為常數)，試求點 P 的軌跡.

解 直線段 OP 的一端為定點 O，故宜用極坐標法，取點 O 為極，而取 AB 的垂直線 OM 做極軸，以 OM 為正向，則 $OP=\rho$; $\angle MOP=\theta$. 令自 O 至 AB 的距離為 a，則在直角三角形 OMP_1 中，

$OP_1=OM\sec MOP_1=a\sec\theta$. 故按作法中 $\rho=OP=OP_1\pm b$ 的關係，得軌跡方程式為

$$\rho=a\sec\theta\pm b.$$



(第 143 圖)

〔註〕 這軌跡叫做尼科美德(Nicomedes)蚌線*，依a的絕對值大於，等於或小於b者，而有三種不同形狀，在第 143 圖，依次以(1)，(2)，(3)各曲線表出．其中(3)爲虛線，又在此設a與b爲正數．

習題三十三

求下列各組的曲線的交點，並作圖證明結果：

1. $\begin{cases}\rho=4\sin\theta,\\ \rho=2.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}\rho=1+\cos\theta,\\ \rho=\frac{1}{2}.\end{cases}$ 3. $\begin{cases}\rho=2a\sin\theta,\\ \rho=2a.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\rho\cos\theta=4a,\\ \rho=4a\cos\theta.\end{cases}$ 5. $\begin{cases}\rho=\sin\theta,\\ \rho=\cos 2\theta.\end{cases}$ 6. $\begin{cases}\rho=\cos 2\theta,\\ \rho=\frac{1}{2}.\end{cases}$

---

*蚌線 Conchoid.

7. $\begin{cases}\rho=4+4\cos\theta,\\ \rho(1-\cos\theta)=3.\end{cases}$　8. $\begin{cases}\rho^2=\sin 2\theta,\\ \rho=\sqrt{2}\sin\theta.\end{cases}$　9. $\begin{cases}\rho=5-2\sin\theta,\\ \rho=\dfrac{6}{1+\sin\theta}.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\rho^2\cos 2\theta=a^2,\\ \rho=\sqrt{2}a.\end{cases}$　11. $\begin{cases}\rho\cos(\theta-60^\circ)=a,\\ \rho\cos(\theta-30^\circ)=a.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\rho=\dfrac{3}{2-\cos\theta},\\ \rho=2.\end{cases}$　13. $\begin{cases}\rho=a\sin\theta.\\ \rho\cos(\theta-90^\circ)=\frac{3}{4}a.\end{cases}$

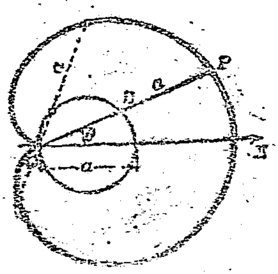
14. $\begin{cases}\rho\cos\theta=4,\\ \rho\cos(\theta-60^\circ)=2.\end{cases}$　15. $\begin{cases}\rho=2+\cos\theta,\\ 4\rho(1-\cos\theta)=9.\end{cases}$

16. 在 $\rho=2r\cos\theta$ 一圓上，取一定點爲極點，試求過這定點各弦中點的軌跡方程式.

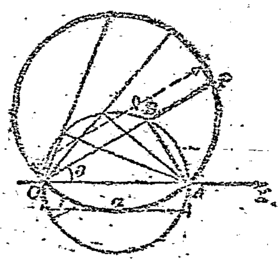
17. 在定圓 $\rho=a\cos\theta$ 內取定弦 OB，延長至點 P，而照下述各條件決定 BP 的長.試求點 P 的軌跡，並作其圖:

(1) BP=自 B 至極軸的距離;

(2) BP=圓的直徑$=a$ (第 144 圖).



(第 144 圖)



(第 145 圖)

(3) BP=半徑$=\frac{1}{2}a$;　(4) $BP=AB$ (參看第 145 圖);

(5) $BP=2AB$;　　　　(6) $BP=\frac{3}{2}a$.

18. 自極點 O 作一直線，交直線 $\rho\cos\theta=4$ 於點 M，在 OM 上，取一點 P，合於下列條件，試求點 P 軌跡的方程式，並作其圖：

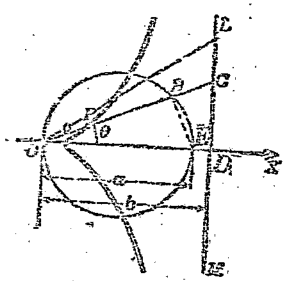
(1) $MP=4$;　　　　(2) $MP=OM+4$;

(3) $OM\cdot OP=12$.

117. 蔓葉線與環索線　今再論一軌跡問題.

自定圓上一定點 O，作一直線，與定圓另交於一點 B，與又一定直線 LM 交於 C。在 OC 上，取 $OP=BC$，求點 P 的軌跡。

解　取 O 爲極，依自 O 至 LM 的方向，所作垂線爲極軸，如第 146 圖，卽得 $BC=OP=\rho$. 又命定圓直徑爲 a，自 O 至 LM 距離爲 b；則在直角三角形 ODC 中，$OC=b\sec\theta$；在直角三角形 OBE 中；$OB=a\cos\theta$。代入軌跡條件 $BC=OC-OB$，得軌跡的方程式爲



(第 146 圖)

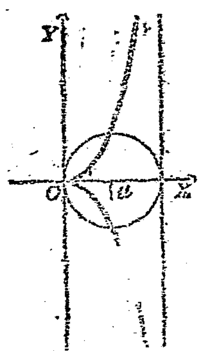
$$\rho=b\sec\theta-a\cos\theta,$$

或
$$(x-b)(x^2+y^2)+ax^2=0.$$

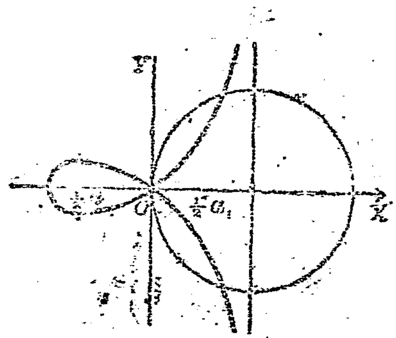
此式爲按 §112 中公式所化得的直角坐標方程式。

〔註〕 如 $b=a$，則所得的曲線爲蔓葉線，如第 147 圖，其極方程式化爲 $\rho=a(\sec\theta-\cos\theta)=a\sec\theta(1-\cos^2\theta)=a\sec\theta\sin^2\theta=a\sin\theta\tan\theta$ (看習題三

十第 19 題)，如化爲直角坐標方程式，則可就 y 解出，得 $y=\pm\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}$.



(第 147 圖)



(第 148 圖)

若 $a=2b$，曲線叫歪索線*，如第 148 圖，其極方程式變爲 $\rho=b(2\sec\theta-\cos\theta)$.

化成直角坐標方程式，而就 y 解出，得 $y=\pm x\sqrt{\frac{b+x}{b-x}}$.

118. **螺線** 以上所說的極坐標式，大概都含矢角 θ 的三角函數，有一類式子不含 θ 的三角函數，所表曲線，因象形的緣故，叫螺線*. 今舉其一種以爲例.

例 設 x 軸與 $x^2+y^2=a^2$ 一圓相交於 A. 在圓上取弧 AB，使其長等於拋物線 $y^2=4cx$ 上一點 (x_0, y_0) 的橫坐標 x_0. 延長圓半徑 OB 到 OP，使 $BP=y_0$，則點 P 的軌跡，叫拋物線螺線*. 試求其方程式.

解 取(0, 0)爲極點，自 O 至 A 的有向線做極軸. 設 P 的極坐標爲 (ρ, θ)，

則 $$OP-BP=\rho-y_0=OB=a,$$

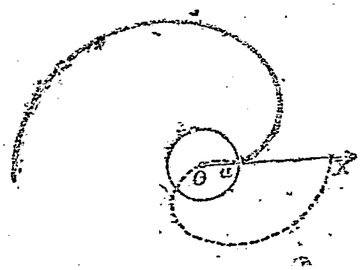
---

*歪索線 Strophoid. 螺線 Spiral. 拋物線螺線 Parabolic spiral.

故 $y_0=\rho-a$. 又 $AB=a\theta=x$. 代入 $y_0^2=4cx_0$ 中，便得方程式

$$(\rho-a)^2=4ac\,\theta.$$

依法作圖.得曲線如第 149 圖.



(第 149 圖)

119. 直交坐標法 就幾何的觀點來說，坐標法是用二族曲線來定平面內一點的位置.笛氏直角坐標所用為二族互相垂直的平行直線.極坐標所用為一族同心圓，和過圓心的一族共點線，這二族也是互相垂直的.再按習題二十內第 16 題的理，可知一族共焦點的二次曲線內的橢圓族和雙曲線族，也可組成一種直交坐標法，叫做橢圓坐標*. 非直交的，如由二族同心圓所組成坐標法，叫做雙極坐標*. 但在初等解析幾何學內，他種坐標法用處甚少，故從略.

習題三十四

求作下列各極坐標曲線:

1. $\rho=a\sin\theta+b\sec\theta$.
2. $\left(\rho-\frac{a}{2}\right)^2=a^2\cos 2\theta$.
3. $\rho=a(\cos 2\theta+\sin 2\theta)$
4. $\rho=a\cos 2\theta+\frac{1}{2}a\sec\theta$.
5. $\rho=a\sin 2\theta+\frac{1}{2}a\sec\theta$
6. $\rho=a\cos 2\theta+b\cos\theta$.
7. $\rho=a\sin 2\theta+b\cos\theta$.
8. $\rho=a\cos 2\theta+b(\sin\theta+1)$.

*橢圓坐標 Elliptic coördinates. 雙極坐標 Bi-polar coördinates.

9. $\rho=a\cos 3\theta-b\cos\theta$.

10. $\rho=\cos 3\theta+\cos\theta+1$.

11. $\rho=\cos 3\theta+\cos 2\theta$.

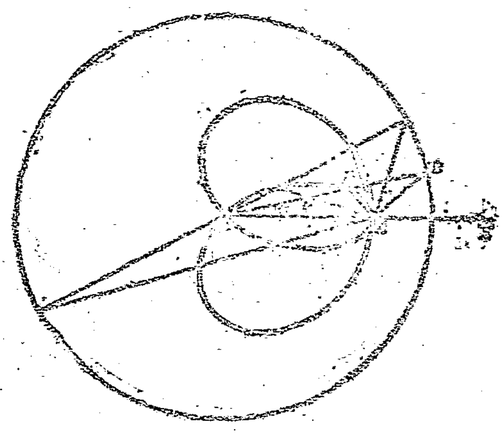
12. $\rho=\cos 3\theta-\sin 2\theta$.

13. $\rho^2\cos\theta=a^2\sin 3\theta$.

14. $\rho^2=\dfrac{2\cos\theta}{\cos 2\theta}+1$.

15. $\rho^2=\dfrac{2\cos 2\theta}{\cos\theta+2}+1$.

16. 取橢圓 $\rho=\dfrac{6}{2-\cos\theta}$ 的焦半徑 OQ，自 Q 向 P，設一線段 $QP=4$. 試求點 P 的軌跡(線段 QP=半長軸).



(第150圖)

17. 第150圖中 O 為定圓圓心，A 為圓內一定點，作任意半徑 OB，聯結 A 與 B 兩點，又作 AP 與 AB 垂直，而交 OB 於 P. 試求 P 的軌跡方程式.

如 $OB=a=4$, $OA=c=2$，試作其圖，並[illegible]相兩.

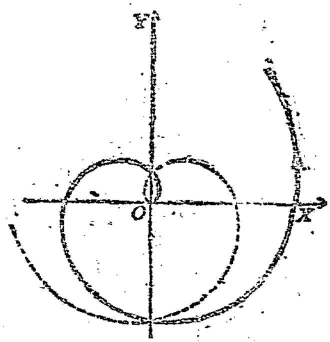
18. 求合於下列各條件的點所成的軌跡.

(1)　其向徑與其矢角成正比例(叫阿基米德螺線[*] 見第151圖).

(2)　其向徑與其矢角成反比例(叫雙曲線螺線[*] 或逆數螺線[*]);

(3)　其向徑平方與其矢角成反比例(叫連鎖螺線[*]);

(4)　其向徑的對數與其矢角成正比例(叫對數螺線[*]).

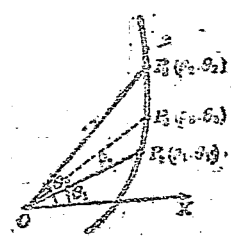


$\rho = a\theta$
(第 151 圖)

19.　如在對數螺線上,已知 P_1 和 P_2 兩點,則軌跡上介於這兩點間的任何點,可由下述定理,以幾何方法作出:

在 $\angle P_2OP_1$ 的分角線 OP_3 上,取 OP_3 使為 OP_1 與 OP_2 的比例中項,則 P_3 必在軌跡上.

看第 152 圖,以證明這定理.



(第 152 圖)

---

[*]阿基米德螺線 Spiral of Archimedes. 雙曲線螺線 Hyperbolic spiral. 逆數螺線 Reciprocal spiral. 連鎖螺線 Lituus. 對數螺線 Logarithmic spiral.

第十章

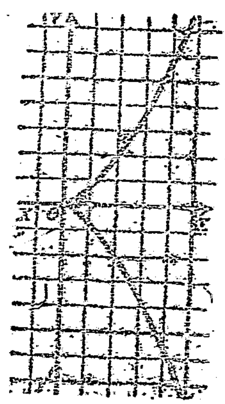
參數方程式

120. **參數方程式** 在§83中，曾將拋物線上任意一點P的坐標x和y，用一參數t表出，這種表示法，便叫參數方程式．參數方程式在作圖和求軌跡上，有很大的應用，本章卽專論這種方程式，並附及用這法求得的幾種著名曲線．今舉數例說明參數方程式圖形的淺易作法．

例一 求作$x=\frac{1}{2}t^2$，$y=\frac{1}{4}t^3$的曲線，式中以t爲參數．

解 列表如下，卽可得第153圖．

t	x	y
-3	4.5	-6.75
-2	2	-2
-1	0.5	-0.25
0	0	0
1	0.5	0.25
2	2	2
3	4.5	6.75
等	等	等



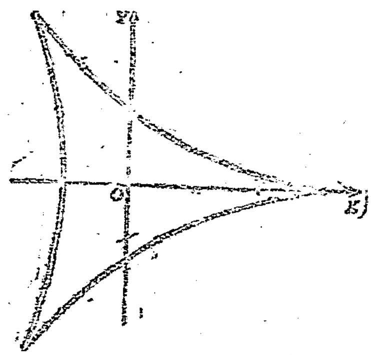
(第153圖)

〔註〕 這圖叫半立方拋物線.

例二 求作 $x=2r\cos\theta+r\cos 2\theta$, $y=2r\sin\theta-r\sin 2\theta$ 的曲線. 式中以 θ 爲參數.

解 命 $r=5$, 列表如下, 即可得第154圖.

$x=10\cos\theta+5\cos 2\theta$, $y=10\sin\theta-5\sin 2\theta$						
θ	$\cos\theta$	$\cos 2\theta$	x	$\sin\theta$	$\sin 2\theta$	y
0°	1	1	15	0	0	0
30°	.866	.5	11.2	.5	.866	0.7
60°	.5	−.5	2.5	.866	.866	4.3
90°	0	−1	−5	1	0	10
120°	−.5	−.5	−7.5	.866	−.866	13.0
150°	−.866	.5	−6.2	.5	−.866	9.3
180°	−1	1	−5	0	0	0
210°	−.866	.5	−6.2	−.5	.866	−9.3
240°	−.5	−.5	−7.5	−.866	.866	−13.0
270°	0	−1	−5	−1	0	−10
300°	.5	−.5	2.5	−.866	−.866	−4.3
330°	.866	.5	11.2	−.5	−.866	−0.7
360°	1	1	15	0	−0	0



(第 154 圖)

〔註〕 這圖叫三尖內擺線*.

121. **化參數式爲直角坐標式法** 從參數式化爲直角坐標式，須消去其中的參數，但無一定的方法.

例一 求化下列參數式爲直角坐標式:

$$x=2t+3,\quad y=\frac{1}{2}t^2-4.$$

解 自第一方程式，解得 $t=\frac{1}{2}(x-3)$，如將其代入第二方程式內，便有 $y=\frac{1}{8}(x-3)^2-4$，展開并簡化，得 $x^2-6x-8y-23=0$，而表一拋物線.

例二 求化下列參數式爲直角坐標式:

$$x=3+4\cos\theta,\quad y=2\sin\theta.$$

解 自第一方程式解出 $\cos\theta$；第二方程式解出 $\sin\theta$，便得

---

*三尖內擺線 Hypocycloid of three cusps.

$$\cos\theta=\frac{1}{4}(x-3),\quad \sin\theta=\frac{1}{3}y.$$

但按三角學 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，故得其一般的直角坐標方程式為

$$\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

習題三十五

下列各參數方程式中，t 或 θ 為參數，求其直角坐標式，并作其圖：

1. $x=t,\ y=2-t.$
2. $x=2+t,\ y=1-2t.$
3. $x=t^2,\ y=\frac{1}{2}t.$
4. $x=\frac{1}{2}t,\ y=t^2-8.$
5. $x=t^2-2t,\ y=t^2+2.$
6. $x=t^2+t,\ y=\frac{1}{2}t^2-3t.$
7. $x=\frac{2}{t},\ y=4t.$
8. $x=t+2,\ y=\frac{t}{t-2}.$
9. $x=\frac{1}{2}t^2+1,\ y=\frac{1}{3}t^3-2.$
10. $x=2\cos\theta,\ y=2\sin\theta.$
11. $x=3\sin\theta,\ y=4\cos\theta.$
12. $x=5+\cos\theta,\ y=\sin\theta-5$
13. $x=3\sec\theta,\ y=3\tan\theta.$
14. $x=\csc\theta,\ y=5\cot\theta.$
15. $x=2\cos\theta,\ y=\cos2\theta.$
16. $x=3\tan\theta,\ y=\cot\theta.$
17. $x=5t\cos30^\circ,\ y=5t\sin30^\circ-16t^2.$
18. $x=3+4\cos\theta,\ y=3\sin\theta-2.$
19. $x=3+4\sec\theta,\ y=3\tan\theta-2.$
20. 求作下列各參數方程式的曲線（以 t 或 θ 為參數）：

(1) $x=t^2-4t,\ y=t^3-3t^2-3t$

(2) $x=t+\sin t,\ y=1+\cos t$

(3) $x=2r\cos\theta-r\cos 2\theta,\quad y=2r\sin\theta-r\sin 2\theta$

(4) $x=3r\cos\theta-\frac{1}{2}r\cos 3\theta,\quad y=3r\sin\theta-\frac{1}{2}r\sin 3\theta;$

(5) $x=r\cos\theta+r\theta\sin\theta,\quad y=r\cos\theta-r\theta\cos\theta;$

(6) $x=a\theta-\frac{1}{2}a\sin\theta,\quad y=a-\frac{1}{2}a\cos\theta;$

(7) $x=a\theta-2a\sin\theta,\quad y=a-2a\cos\theta;$

(8) $x=b\cos^2\theta,\ y=a\tan\theta.$

122. 化直角坐標式為參數式法 自上節可知由參數式化成的直角坐標式為唯一確定，但其逆理不能成立。因為任作一參數式表 x，都可代入直角坐標式以解出 y。

例 取直角坐標式 $4x^2+y^2=16$. 令 $x=2\cos\theta$ 代入，解得

$$y^2=16(1-\cos^2\theta)=16\sin^2\theta;\ 故\ y=4\sin\theta.$$

如取 $y=tx+4$ 代入，則得 $4x^2+t^2x^2+8tx+16=16$.

或
$$(4+t^2)x^2+8tx=0.$$

故
$$x=-\frac{8t}{4+t^2},\quad y=tx+4=\frac{16-4t^2}{4+t^2}.$$

注意 用參數方程式，有時只表曲線上的一部分，例如取直線 $x+y=1$；令 $x=t^2$，則 $y=1-t^2$. 因不論 t 值為任何實數，x 只有正值，故這參數式只表一半直線，即在 y 軸右邊的一半．又如令 $x=\sin^2\theta$，則 $y=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$，則 x 與 y 的值皆只介於 0 與 1 間，而表原直線被二坐標軸所截取的一線段．

[註] 如所設參數式得宜，則結果可整齊簡便，但於此無定則可言．

123. 箇氏蔓形線 直坐標式，有不易直接作圖者，如化為

逕當由參數式再作，每較爲簡易。

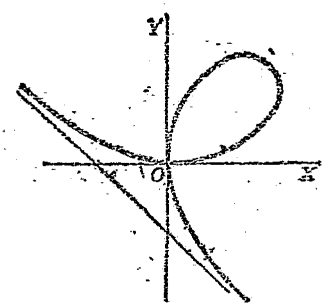
例　求作方程式 $x^3+y^3-3axy=0$ 的軌跡。

解　取 $y=tx$，式中 t 爲參數。代入原式，得

$$x^3+t^3x^3-3atx^2=0.$$

用 x^2 去除，並解出 x，得

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$



（第 155 圖）

就是所求的參數式。其軌跡如第 155 圖。這曲線叫笛氏葉形線*。其一斜漸近線，爲 $x+y+a=0$，也在圖中畫出。

注意　按 § 93 的說明，知以一直線割三次式的曲形線，在一般情形可得三交點。在此作參數式的方法，即以過原點的直線 $y=tx$ 與曲線相交。因這直線上有一定點爲原點，經過曲線二股，所以這一交點，乃由二交點重合而成；第三交點，即由參數式 $x=\frac{3at}{1+t^3}$，$y=\frac{3at^2}{1+t^3}$ 決定。故對於任一 t 值，只再得一交點。有一類代數曲線（二次錐線爲其中一種，看 § 125）的方程式能化爲有理參數式，上面的例子，就是一個特例。

124.　直線的參數式　在 § 43 直線的點斜式 $\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$ 中，設 $m=\frac{a}{b}$，則 $\frac{y-y_1}{a}=\frac{x-x_1}{b}$。令這比值爲參數 t，則得直線的一

---

*笛氏葉形線 Folium of Descartes.

$$x=x_1+br,\quad y=y_1+ar.$$

如直線的斜角為 α，可令 $a=\sin\alpha$，$b=\cos\alpha$，則由 $r=\frac{y-y_1}{\sin\alpha}$

$=\frac{x-x_1}{\cos\alpha}$ 得 $r^2=\frac{(y-y_1)^2}{\sin^2\alpha}=\frac{(x-x_1)^2}{\cos^2\alpha}=\frac{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=(y-y_1)^2+(x-x_1)^2$。所以這時的參數 r 即是自直線上任意點 $P(x,y)$ 到定點 $P_1(x_1,y_1)$ 的距離。

茲舉二例，以明直線參數式的應用。

例一　求自 $P_1(-2,-1)$ 所作至橢圓 $5x^2+y^2=5$ 的切線方程式。

解　取過 P_1 的直線參數式 $x=-2+br$，$y=-1+ar$ 而求其與橢圓的交點，可消去 x 與 y 而求 r。自每一 r 值，可得一交點坐標，故本題即在求 r 為等根的條件。自橢圓方程式，得

$$5(br-2)^2+(ar-1)^2=5,\ 即\ (5b^2+a^2)r^2-2(10b+a)r+16=0。$$

得判別式　$\frac{1}{4}B^2-A\cdot C=(10b+a)^2-16(5b^2+a^2)=0$。

簡化，得　$3a^2-4ab-4b^2=(a-2b)(3a+2b)=0$。

故　$m=\frac{a}{b}=2$ 或 $-\frac{2}{3}$，與§133的例二結果全同。

例二　求上節中笛氏葉形線的漸近線方程式。

解　由上節中的結果，可知 $t=-1$，即 $1+t^3=0$ 時，x 與 y 均趨於 ∞，就是 $y+x=0$ 與葉形線有一交點，移到無窮遠處，這時斜角 $\alpha=135°$。

如將割線向下平行移動，則如第155圖，可見在無窮遠的交點固定，而原來雙

合的二交點分而爲二，且漸遠離．當割線移至漸近線的位置，這二交點也漸移至無窮遠處，今取這平行變動直線上與 x 軸的交點爲 $(c, 0)$，而以直線的參數式

$$x=c+r\cos 135^\circ=c-\frac{\sqrt{2}}{2}r,\quad y=r\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}r.$$

代入 $x^3+y^3-3axy=0$，得 $\left(c-\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^3-3a\frac{\sqrt{2}}{2}r\left(c-\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)=0.$

簡化爲

$$\frac{3}{2}(c+a)(r^2-\sqrt{2}cr)+c^3=0.$$

其根爲二交點到 $(c, 0)$ 的距離．欲交點皆爲無窮遠點，必這式有二無窮大根．按代數學中定理，知應使 r^2 和 r 的係數爲 0，卽 $c+a=0$ 故 $c=-a$．由此得漸近線的方程式，爲 $x+y+a=0$.

125． 二次錐線的參數式　今按 §123 注意中的提示，以求二次錐線 $y^2=ax^2+bx+c$ 的參數式．這法在積分學*中有致用處。

（一）設 $ax^2+bx+c=0$ 有二實根爲 x_1, x_2，則 $y^2=a(x-x_1)\times(x-x_2)$．取 $A(x_1, 0)$ 爲定點，而作直線族 $y=t(x-x_1)$．消去 y，有 $t^2(x-x_1)^2=a(x-x_1)(x-x_2)$．解得 $\frac{1}{a}t^2=\frac{x-x_2}{x-x_1}$.

故 $$x=\frac{x_2-\frac{x_1}{a}t^2}{1-\frac{1}{a}t^2}=\frac{x_2-x_1}{1-\frac{1}{a}t^2}$$ t 爲有理參數式。

*積分學 Integral calculus.

(二)設 $ax^2+bx+c=0$，則必 $a>0$，該二次錐線為一雙曲線。今取其上一無窮遠點為定點，則應作與其一漸近線平行的一族直線。故命 $y=x\sqrt{a}+t$。依上法即求出有理參數式

$$x=\frac{c-t^2}{2t\sqrt{a}-b},\ y=t+\sqrt{a}\frac{c-t^2}{2t\sqrt{a}-b}.$$

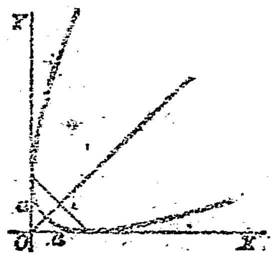
［注意］ 若 $a<0$，則無論 x 為任何實數值，ax^2+bx+c 之值均為負，故 y 之值恆為虛，而二次錐線為一虛橢圓。

［註］ 本節和上節例二，對初學可酌量略去。

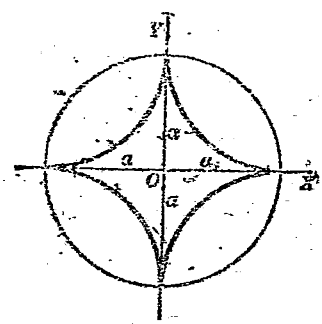
習題三十六

以 t 或 θ 為參數，求作下列各曲線的參數式，並作其圖：

1. $y^2=4x^2-5x^3$; $y=tx$.
2. $y^2=x^2-8x^3$; $y=tx$.
3. $4x^2+y^2-16x+12=0$; $y=2\cos\theta$.
4. $x^2-4xy+13y^2=9$; $y=\sin\theta$.
5. $x^2y^2=b^2x^2-a^2y^2$; $y=b\sin\theta$.
6. $x^2y^2=a^2y^2+b^2x^2$; $y=b\csc\theta$.
7. $x^2+2xy+y^2+2x-2y=0$; $x=t-t^2$.
8. $17x^2-16xy+4y^2-34x+16y+13=0$; $x=1+2\cos\theta$.
9. $y^2(2a-x)=x^3$; $y=tx$.
10. $y^2=x^2\dfrac{a+x}{a-x}$; $y=tx$，或 $x=a\cos\theta$.
11. $x^2+xy+2y^2+2x+1=0$; $x=y-1$.
12. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, $x=a\cos^3\theta$.



(第 156 圖)



(第 157 圖)

「註」 第9題應為蔓葉線，第10題為環索線. 參看§117和§120. 第12題為拋物線(如第156圖).

13. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; $x=a\sin\theta$.

這題的圖叫四尖內擺線看第157圖.

14. $x^4+2ax^2y-xy^3=0$; $y=tx$. 15. $x^2=y(y-2)^2$; $y-2=tx$.

16. $(x^2+y^2+4ay-a^2)(x^2-a^2)+4a^2y^2=0$; $x^2=a^2-t^2y^2$.

17. $(x^2-\frac{1}{4}b^2)^2+y^2(x^2-b^2)=0$; $x^2=\frac{1}{4}b^2+ty$.

126. 用參數式求軌跡 當軌跡的直角坐標式難於求出時，可藉適宜方法，以參數表軌跡上動點的坐標，往往較為簡便.

例 一定長線段 AP 上，BP 為定長，且 A 與 B 兩點各在兩垂直線上移動；求點 P 的軌跡.

解 在第158圖，A 在 $X'X$ 上移動，B 在 YY' 上移動. 卽取為坐標軸，而設 P 的坐標為 (x,y). 今以 $\angle XAB=\theta$ 為參數，并命 $AP=a$，$BP=b$，自 P 作至 $X'X$ 上垂線，其垂足為 M. 在直角

(第 158 圖)

三角形 MPA 中，$\sin\theta=\frac{MP}{AP}=\frac{y}{a}$. 又在直角三角形 BSP 中，$\angle PBS=\theta$，故

$\cos\angle PBS=\cos\theta=\frac{BS}{BP}=\frac{x}{b}$.

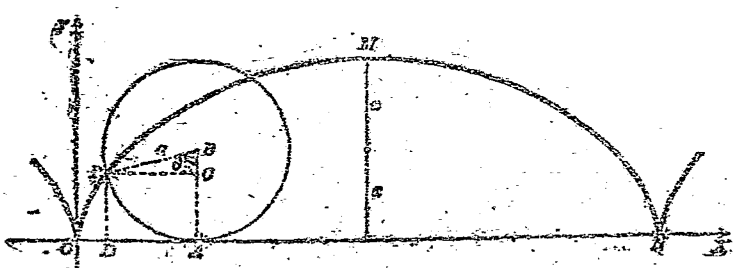
$$\therefore\quad x=b\cos\theta,\quad y=a\sin\theta.$$

即為所求軌跡的參數式.

將參數式兩端平方相加，得 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$，故知點 P 軌跡為一橢圓，其長短兩軸為 $2a$ 與 $2b$，而在已知的兩垂直線上.

127. **擺線**　(一)有一圓在一定直線上，作不滑的滾動，圓上一點 P 的軌跡，叫擺線*，動圓叫母圓*. 今求這曲線的參數方程式.

解　取定直線為 x 軸，定直線與母圓相切於 P 點時的切點做原點 O. 命母圓半徑為 a，并取變角 CBP 的弧度 θ 為參數，如第 159 圖。



(第 159 圖)

*擺線 Cycloid. 母圓 Generating circle.

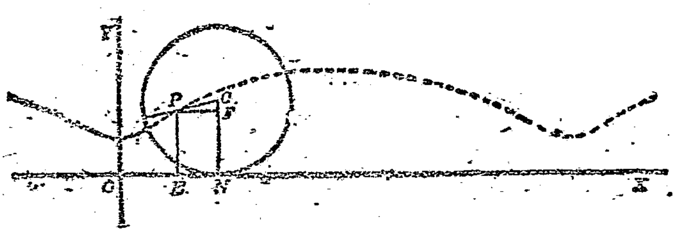
設 P 的坐標為 (x,y)，則有

$$x=OD=OA-PC,\ y=DP=AB-CB.$$

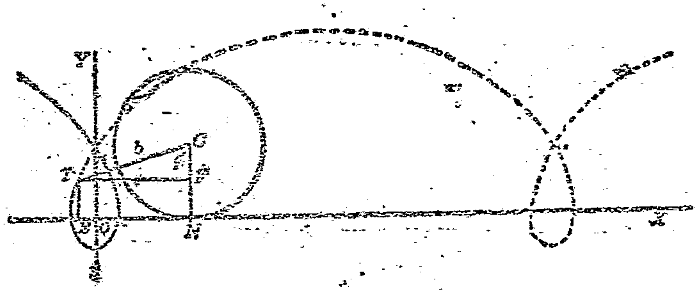
但 $PC=a\sin\theta$，$CB=a\cos\theta$，母圓既在 x 軸上作不滑的滾動，故 $OA=\widehat{AP}=a\theta$（因按弧度的定義，圓弧等於圓半徑與所對角的乘積），所以得擺線的參數方程式

$$x=a(\theta-\sin\theta),\quad y=a(1-\cos\theta).$$

由軌跡構成的方法即可知這曲線向左右二方面，可以無限伸展，但每段弧，皆和 OMN 全合 如第 159 圖。



（第 160 圖）



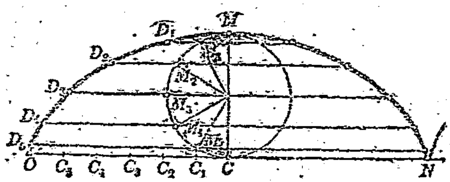
（第 161 圖）

〔註〕如教授時間不敷，則本節以下一部分，可以略去，而逕接§128.

注意　如P為母圓中定半徑或其延長線上一點，且$CP=b$；則當$a>b$時，P在圓內，其軌跡叫短擺線*（第160圖）；$a<b$時，P在圓外，其軌跡叫長擺線*（第161圖）.

擺線的作圖　由上述定義，即得一簡便作圖法如下：

取線段ON與母圓圓周長$2\pi a$相等，取ON的中點C為切點，而作一母圓，與ON相切，分OC為任意幾等分，并等分半圓使分數與OC者相同．標明各相當等分為C_1，C_2……；



(第162圖)

M_1，M_2……如第162圖．過M_1，M_2等點，作ON的各平行線，如取$M_1D_1=CC_1$，$M_2D_2=CC_2$，$M_3D_3=CC_3$……；則D_1，D_2，D_3，…各點在擺線上．其理由如下：

令母圓向左作不滑的滾動，點M即變移而成這曲線．當母圓在點C_1，與ON相切時，M與M_1同在一水平線上，且在M_1左邊，又與M_1的距離與CC_1等，同理可論D_2，D_3，……各點．

既得曲線的弧MO，因其對稱於CM的關係，即得一段全弧．

（二）一圓在另一定圓內，作不滑的滾動時，則動圓上一點P

---

*短擺線 Curtate cycloid．長擺線 Prolate cycloid．

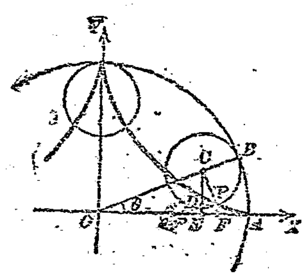
的軌跡，叫內擺線*，動圓仍叫母圓．今求其參數式．

解　以定圓圓心爲原點，設定圓與母圓相切於 P 點時的一點爲 A，而以 OA 爲 x 軸，又命 $OA=R$，$BC=r$．

則　　$OC=R-r$.

但　　$x=OF=OE+DP$,

$$y=FP=EC-DC \quad (1)$$



(第 163 圖)

而在直角三角形 OEC 內，

$$OE=(R-r)\cos\theta,$$

$$EC=(R-r)\sin\theta. \quad (2)$$

又在直角三角形 DPC 內，

$$DP=r\sin\angle PCD, \quad DC=r\cos\angle PCD. \quad (3)$$

且 $\angle BCP+\angle PCD=90^\circ+\theta$，故 $\angle PCD=90^\circ-\angle BCP+\theta$.

原設母圓在定圓內滾動而不滑，應有弧 $BP=$ 弧 AB，即 $r\cdot\angle BCP=R\theta$，或 $\angle BCP=\frac{R\theta}{r}$；因此有

$$\angle PCD=90^\circ-\frac{R-r}{r}\theta.$$

代入(3)式，即得

*內擺線 Hypocycloid.

$$DP=r\cos\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta,\quad DC=r\sin\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta. \tag{4}$$

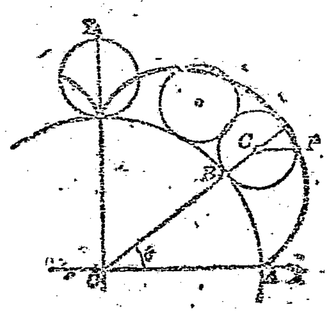
用(2)和(4)代入(1)式內，便求得所需的參數式為

$$x=(R-r)\cos\theta+r\cos\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta,$$

$$y=(R-r)\sin\theta-r\sin\left(\frac{R-r}{r}\right)\theta.$$

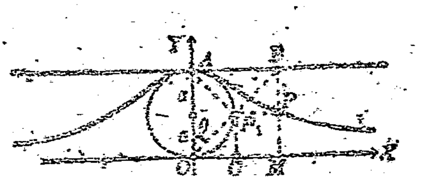
如 r 和 R 二半徑有公度，則曲線成封閉形，如第 163 圖．例如 $R=4r$，所得曲線名叫四尖內擺線，或叫星形線*，可看第 157 圖．又如 §120 中例二，乃 $R=3r$ 的情形．

〔註〕 母圓如在定圓外，作不滑的滾動，則所成曲線，叫外擺線*，看第 164 圖．



(第 164 圖)

128. **蔓舌線** 如第 165 圖，OA 為一圓的直徑，過點 O 作一直線，與圓相交於 P_1，與圓上點 A 處的切線相交於 B．過 P_1 作



(第 165 圖)

*星形線 Astroid.　外擺線 Epicycloid

AB 的平行線，與 AB 在點 B 的垂線相交於 P，則直線 OP_1 依 O 旋轉時，P 的軌跡，叫做阿內齊(Agnesi)的箕舌線*。

取 O 爲原點，OA 爲 y 軸，圓上點 O 的切線爲 x 軸，命定圓的半徑爲 a，取 $\angle AOP_1=\theta$ 爲參數。設 BP 與 x 軸交於 M，則 BM 爲 x 軸的垂線，故如 P 的坐標爲(x, y)，則有 $x=OM=AB$，$y=MP=CP_1$。

在直角三角形 OAB 內，立得 $AB=2a\tan\theta$。

又在直角三角形 OCP_1，有 $CP_1=OP_1\cos\angle CP_1O=OP_1\cos\theta$。

但自直角三角形 OP_1A 中，得 $OP_1=2a\cos\theta$，故 $CP_1=2a\cos^2\theta$。

如此便得箕舌線的參數式

$$x=2a\tan\theta,\quad y=2a\cos^2\theta.$$

就這二式消去 θ，便得直角坐標式。按三角學公式 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$，自參數式解出 $\tan\theta=\frac{x}{2a}$，$\cos^2\theta=\frac{y}{2a}$，代入，得 $1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2=\frac{1}{\frac{y}{2a}}$，簡化，得 $y(x^2+4a^2)=8a^3$。

習題三十七

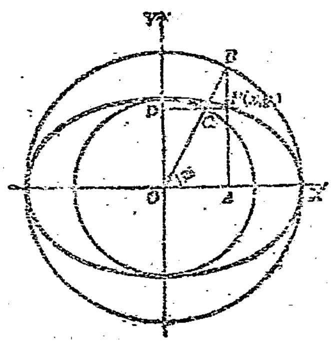
在下列各題中，求 x 和 y 的參數方程式，並作其軌跡的圖：

---

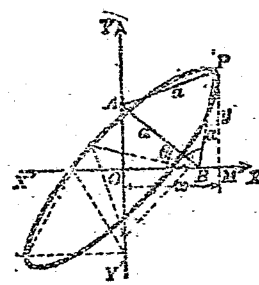
* 箕舌線 Witch.

1. 求以離心角 ϕ 爲參數時的橢圓參數方程式.

〔註〕 離心角〔§68(二)〕即橢圓長軸與過 $x^2+y^2=a^2$ 一圓上點 B 所作半徑的夾角，但點 B 的橫標與橢圓上點 $P(x, y)$ 的橫標同. 又半徑 OB 與 $x^2+y^2=b^2$ 一圓交於 C，其縱標與點 P 的縱標相同(看第 166 圖).



(第 166 圖)



(第 167 圖)

2. 第 167 圖中，ABP 是一等邊三角形. 如點 A 沿直線 YY' 移動，點 B 沿直線 XX' 移動，試求頂點 P 的軌跡.

3. 設一半徑爲 r 的圓，在半徑爲 R 的圓外作不滑的滾動，試證動圓上一點所成外擺線的方程式爲

$$x=(R+r)\cos\theta-r\cos\frac{R+r}{r}\theta;\quad y=(R+r)\sin\theta-r\sin\frac{R+r}{r}\theta.$$

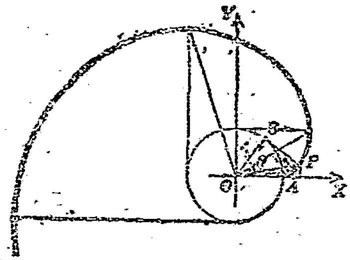
提示 以 $-r$ 代圓內擺線方程式中的 r 即得，如 r 與 R 有公度，卽二者的比爲一分數時，這圖成封閉曲線.

4. 倣§127 的作圖法，推求圓內外二種擺線的作圖法.

5. 試求短與長二種擺線的方程式.

6. 設圓上纏繞一線，放開並拉直這線．線的動端點所成軌跡，叫做圓的漸伸線*，如第 168 圖，試求其參數式．

提示 以圓心爲原點，設未解開時，線端所在處爲 A，過點 A 作 x 軸．令解開時線端爲 B，取 $\angle AOB=\theta$ 爲參數．

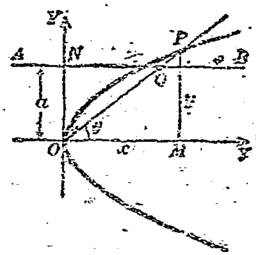


(第 168 圖)

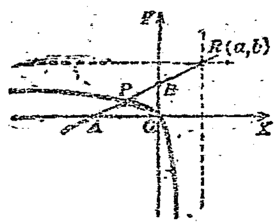
〔註〕 同法可得他種曲線的漸伸線，但初等解析幾何學不能求出其方程式．反言之，原曲線叫做漸伸線的漸屈線*．

7. 試用 § 126 的方法，直接求出 § 117 中雙紐線的直角坐標方程式．

8. 設有一定直線 AB，和一定點 O，過點 O 作 OX 與 AB 平行，又作 ON 垂直於 AB．過點 O 作一直線與 AB 交於 Q．在 OQ 上取一點 P，使 $MP=NQ$，試求點 P 的軌跡(見第 169 圖，圖中 $PM\perp OX$)．



(第 169 圖)



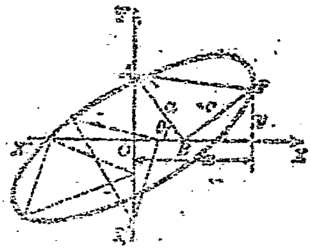
(第 170 圖)

9. 過一定點 $R(a,b)$，作諸直線，交二坐標軸於 A 和 B．求 AB 中點的軌跡方程式(第 170 圖)．

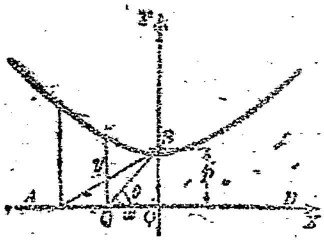
*漸伸線 Involute．漸屈線 Evolute．

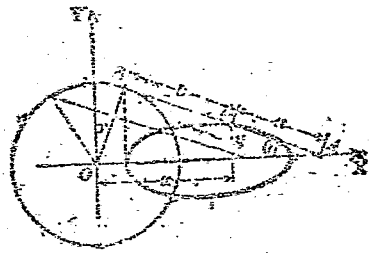
10. 在第171圖中，ABP為一二等邊直角三角形，$\angle ABP=90^\circ$，如A與B兩點各在兩垂直線上移動，試求頂點P的軌跡.

[註] 本題是§126中例題的推廣.


(第171圖)

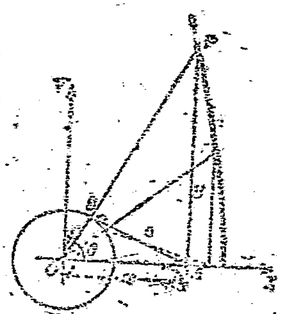
11. 取一定直線AB，一定點R，自R任作一直線，交AB於點Q，自點Q作QP垂直於AB，並使$QP+QR$等於一常數c，求點P的軌跡(看第172圖).


(第172圖)


(第173圖)

12. 在第173圖中，一引擎的曲柄*OB上，連有長桿AB. 如B在一圓上移動，其圓心為O；點A在定直線OX上移動，求AB上任意一點P的軌跡.

13. 在上題中，過點A作OX的垂線，與OB的延長線交於P. 求OB依點O旋轉時點P的軌跡(看第174圖).


(第174圖)

*引擎的曲柄 Crank of engine.

129. 以線系交點定軌跡法　如二線系（直線或曲線）方程式中，含相同的參數，則其參數有一定值時所得的兩線，叫做<u>對應線</u>*．許多曲線爲對應線交點的軌跡所成．

例　在第175圖中，AB 爲定圓的一定直徑，而 LM 爲其平行弦，連 BL 與 OM 交於 P，求點 P 的軌跡．

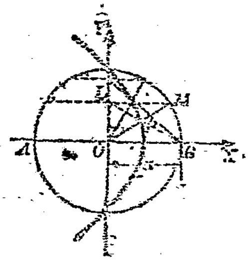
解　命 $\angle XOM=t$，則 OM 的方程式爲

$y=x\tan t$.

又因 M 的坐標爲 $(a\cos t,\ a\sin t)$，而 L 的坐標爲 $(0,\ a\sin t)$．故得 BL 的方程式爲

$y=\sin t\,(a-x)$.

就所得的 OM 與 BL 二種直線系方程式解出 x 和 y，便得軌跡的參數式



（第175圖）

$$x=\frac{a\cos t}{1+\cos t},\quad y=\frac{a\sin t}{1+\cos t}.$$

如自參數式消去 t，又得直角坐標式 $y^2=a^2-2ax$，而表一拋物線．或自二直線系方程式消去 t 亦可．

歸納上題的方法，得法則如下：

（一）求含同一參數的兩線系方程式．

（二）解所得的兩方程式，用參數表 x 和 y，即爲所求軌跡的參數式．如自二線系方程式中消去參數，便得直坐標方程式．

〔註〕由二系線交點的觀念，很爲重要，坐標法卽由此而生．譬如笛氏坐標，

---

*對應線 Corresponding lines.

卽由二系平行線定點: 極坐標,由一系同心圓和過圓心的一系直線定點.

130. **垂趾曲線** 　自一定點,作一已知曲線上變動切線的垂線,其垂趾所成的軌跡,便叫做這已知曲線的垂趾曲線*.

例 　以一拋物線的頂點爲定點,而求其垂趾曲線.

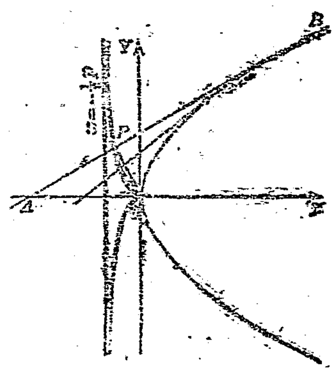
解 　取拋物線的範式 $y^2=2px$,則其頂點爲原點$(0,0)$.以切線的斜率 t 爲參數,則按 § 100 得其上變動切線 AB 的方程式爲

$$y=tx+\frac{p}{2t}.$$

設 P 爲所求垂趾,則因 OP 與切線垂直,故其方程式爲 $y=-\frac{1}{t}x$. 解出 $t=-\frac{x}{y}$,代入上式中,簡化,便得切線與 OP 交點的軌跡方程式

$$y^2\left(x+\frac{1}{2}p\right)=-x^3,$$

而表一蔓葉線(§ 117),如第 176 圖.



(第 176 圖)

［註］ 如用拋物線的軸與其準線交點爲定點,而取爲原點,以拋物線的軸爲 x 軸,準線爲 y 軸,並設頂點的坐標爲$(-a,0)$,則得拋物線方程式爲

$$y^2+4ax+4a^2=0.$$

依上法可推得其垂趾曲線爲環索線 $y^2=a^2\frac{a+x}{a-x}$(§ 117),學者試自求出.

［註］ 本節可酌量略去.

*垂趾曲線 Pedal curve.

習題三十八

1. 取等軸雙曲線的心爲定點，則其垂趾曲線爲雙紐線，試加證明.

2 三角形一底邊固定，且在這邊上的高有一定長，試求其高心（即三高交點）的軌跡.

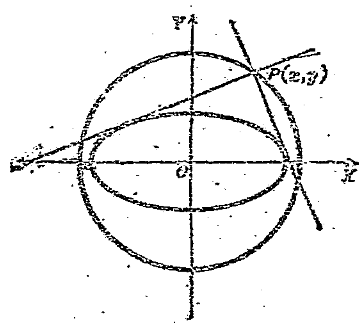
3. 試求橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上兩垂直切線交點的軌跡（看第 177 圖）.

提示 按 § 100 知斜率爲 t 與 $-\frac{1}{t}$ 的切線方程式.各爲

$$y-tx=\sqrt{a^2t^2+b^2},$$

和 $$ty+x=\sqrt{a^2+b^2t^2}$$

平方兩邊相加，以消去 t.



（第 177 圖）

4. 取橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一切線，與 OX 交於 A，與 OY 交於 B. 自點 A 作 y 軸的平行線，自點 B 作 x 軸的平行線.求這兩直線交點的軌跡.

5. 在第 4 題中，以雙曲線代橢圓，求其軌跡.

6. 求(1)拋物線，(2)雙曲線上兩垂直切線交點的軌跡.

7. 以一焦點爲定點，而求(1)拋物線；(2)橢圓；(3)雙曲線的垂趾曲線.

8. 以原點爲定點，求一圓 $x^2+y^2+2ax+a^2-b^2=0$ 的垂趾曲線.

9. 在橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上任意一點 M 作切線.過橢圓心作一直線與這切線垂直，而與 M 的縱坐標或其延長線交於點 P，試求 P 的軌跡.

10. 在拋物線上任意一點 M 作切線，自拋物線頂點作一直線與他垂直，而

與 M 的焦半徑或其延長線交於 P. 試求點 P 的軌跡.

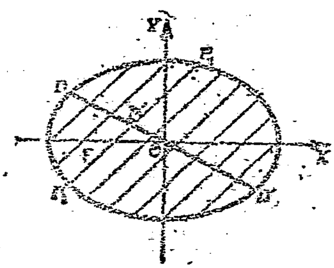
11. 求證以原點為定點時，拋物線 $y^2+4ax+4a^2=0$ 的垂足曲線為環索線 $y^2=x^2\dfrac{a+x}{a-x}$.

12. 作橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上任一點的法線，與長軸補助圓 $x^2+y^2=a^2$ 上同橫標點的法線相交於 P. 試求點 P 的軌跡.

13. 設 AB 為一圓的定直徑，在圓上任意一點 M 作切線，又自點 A 作這切線的垂線. 設這垂線與 BM 的延長線交於 P，試求 P 的軌跡.

14. 有 A 與 B 兩定點和一定直線 LM；自一點 P 作 PA 和 PB 兩直線，在 LM 上截取定長線段. 求 P 的軌跡.

131　二次錐線的直徑　圓內的一系平行弦上中點所成軌跡，即為圓的直徑，在二次錐線，也有同樣的情形.



(第 178 圖)

今取橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 來討論. 在第 178 圖中，設平行弦的斜率為 $m=\tan\alpha$，而 α 表斜角. 取其上中點為 $P'(x',y')$，則按 §124 知這些平行弦的參數方程式為

$$x=x'+r\cos\alpha,\quad y=y'+r\sin\alpha.$$

代入橢圓方程式，就得

$$\frac{(x'+r\cos\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y'+r\sin\alpha)^2}{b^2}=1.$$

這方程式所定的 r_1 與 r_2 二根，即自 P' 至二交點的距離．但 P' 爲二交點聯線的中點，故二距離同値異號，即 $r_1+r_2=0$．按二次方程式的理，上式中 r 的係數應爲零，即

$$\frac{2x'\cos\alpha}{a^2}+\frac{2y'\sin\alpha}{b^2}=0.$$

以 $2\cos\alpha$ 徧除，幷代入 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=m$，即得這中點的軌跡方程式

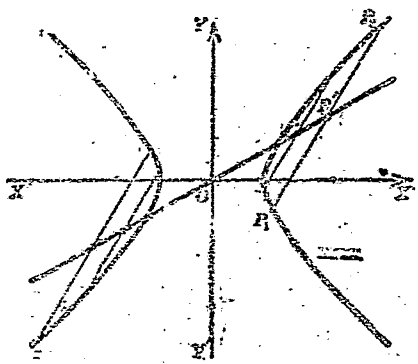
$$\frac{x'}{a^2}+\frac{my'}{b^2}=0,$$

而表一直線．這軌跡叫做橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，依斜率 m 的直徑*．換句話說，橢圓依斜率 m 的直徑，即斜率爲 m 的平行弦中點所成的軌跡．至於這軌跡本身的斜率，則爲 $m'=-\frac{b^2}{ma^2}$．

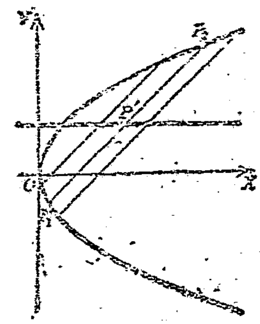
依上法可求得雙曲線或拋物線依斜率 m 的直徑，今表列各結果如下(看第179圖和第180圖)：

二次錐線	橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	拋物線 $y^2=2px$
依斜率 m 的直徑	$\frac{x}{a^2}+\frac{my}{b^2}=0$	$\frac{x}{a^2}-\frac{my}{b^2}=0$	$my-p=0$

*直徑 Diameter.



(第 179 圖)



(第 180 圖)

證　拋物線的直徑,必與其軸平行,即其本身的斜率 $m'=0$ 而與所依的斜率 m 無關,在雙曲線則有 $mm'=\frac{b^2}{a^2}$ 的關係.

注意　就綜合幾何學看來,弦應與二次錐線相交,因此橢圓的直徑只能為一線段,雙曲線的為二條半直線,而拋物線的,則為一條半直線,但由解析幾何學所求得的,則表一條全直線,其原因乃由解析上的推廣,解析幾何學的範圍,遂較綜合幾何學為廣大,綜合幾何學,受實元素的限制,故直線不與二次錐線相交得實點時,即無中點可言.但在解析幾何學,則不相交的情形,可視為有虛交點.上面的方程式(1),有二相配虛根,但相配複數之和為實數,所以二相配虛交點聯線的中點,卻是實點.因此經過解析的推廣後,不相交的情形,仍然有一中點,遂得使線段或半直線擴充成全條直線,在一般情形,綜合幾何學既無正負量

的區別，又不致虛元素的存在，故由同一條件所定軌跡，往往不及解析幾何學者範圍的廣大。故綜合幾何學討論一問題，往往要分別許多特款，而解析幾何學，卻能一以貫之。

132. **二次曲線的中心** 橢圓和雙曲線各有一對稱心，簡稱爲中心*。今通普通二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

表橢圓或雙曲線的中心，如何求得。

設其對稱心爲 $P_1(x_1, y_1)$，則過 P_1 的直線參數方程式爲

$$x=x_1+r\cos\alpha, \quad y=y_1+r\sin\alpha,$$

α 表直線的斜角，代入(1)式，得一含 r 的二次方程式，二根卽表 P_1 至二交點的距離。但原設 P_1 爲心，卽爲交點聯線的中點，故二根同值異號，因而式中 r 的係數應爲零而得

$$(2Ax_1+By_1+D)\cos\alpha+(Bx_1+2Cy_1+E)\sin\alpha=0.$$

欲這式對於任何斜角 α 均能成立，必須

$$2Ax_1+By_1+D=0, \quad Bx_1+2Cy_1+E=0. \qquad (2)$$

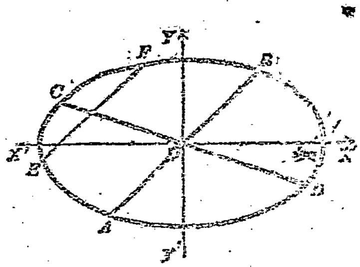
因(1)式表橢圓或雙曲線，故必 $B^2-4A\cdot C\neq 0$（§91），所以聯立式(2)有獨解

$$x_1=\frac{2C\cdot D-B\cdot E}{B^2-4A\cdot C}, \quad y_1=\frac{2A\cdot E-B\cdot D}{B^2-4A\cdot C}.$$

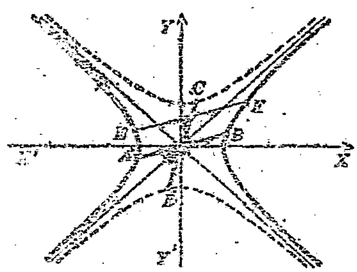
---

*中心 Center.

133. 有心錐線的共軛直徑 §131中，曾述及依斜率m的有心錐線的直徑. 其本身斜率如爲m'，則有$mm'=\pm\frac{b^2}{a^2}$的關係. 可見如取m'爲直徑所依的斜率，則本身斜率必爲m. 這二種直徑，叫做共軛直徑*。由上節的理，可知一直徑必平分其共軛直徑，及與後者平行的一切平行弦，如第181, 182二圖.



(第181圖)



(第182圖)

習題三十九

求下列各二次錐線的直徑方程式，並作其圖：

1. $4x^2+9y^2=36$, $m=\frac{1}{2}$.
2. $x^2=8y$，各弦的方程式爲$x+y=k$.
3. $4x^2-y^2=16$，各弦的方程式爲$3x-y+k=0$.
4. $x^2=12$, $m=-3$.
5. $x^2-4y^2+4x-16=0$，各弦的方程式爲$x+y=k$.

---

*共軛直徑 Conjugate diameter.

6. $xy-y^2+2x-4=0$，各弦的方程式為 $3y=2x+3$.

試求下列各二次錐線，依其後所記條件的直徑方程式，並求被這直徑所等分各弦的斜率：

7. $y^2=6x$，直徑過 $(5,-1)$.

8. $9x^2+36y^2=324$，直徑過 $(4,2)$.

9. $4x^2-16y^2=25$，直徑過 $(3,-2)$.

10. $x^2+2y^2-x-7y-6=0$，直徑過 $(8,0)$.

11. $y^2+xy-8=0$，直徑過 $(3,-3)$.

12. 如拋物線 $y^2=6x$ 的弦，被 $(4,3)$ 一點所等分，試求這弦的方程式.

13. 如橢圓 $9x^2+36y^2=324$ 的弦，被 $(4,2)$ 一點所等分，試求這弦的方程式.

14. 如雙曲線 $4x^2-y^2=9$ 的弦，被 $(4,2)$ 一點所等分，試求這弦的方程式.

15. 如雙曲線 $xy-4=0$ 的弦，被 $(2,-1)$ 一點所等分，試求這弦的方程式.

16. 自橢圓 $4x^2+y^2=25$ 上 $(2,3)$ 一點，作一直徑，求其共軛直徑的兩端點的坐標.

17. 在二次錐線與其一直徑的交點處，作一切線，證明這切線與被直徑所等分的弦平行.

18. 設 $A(x,y)$ 為在橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的一點，過 A 作一直徑 AB，試證下列各定理：

(1) 其共軛直徑 CD 兩端的點坐標為 $\left(\pm\frac{ay}{b},\ \mp\frac{bx}{a}\right)$；

(2) 取 AB 與 CD 兩共軛直徑的四端點各作一切線，成一四邊形，則這四邊形為平行四邊形，而面積等於 ΔOAC 的面積的 8 倍，即等於 $4ab$.

(3) 如 OB 與 OC 為兩任意共軛直徑長的一半，則

$$\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=a^2+b^2.$$

19. 上題中的橢圓，如代以雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，試述其相當各定點，並加說明.

求定下列各二次錐線;何者為有心，並求其心:

20. $x^2+xy-4=0$.

21. $x^2-2xy+y^2-4x=0$.

22. $xy-2y^2+4x-4y=0$.

23. $x^2+4xy+y^2-8x=0$.

24. $4x^2+12xy+9y^2-2x+3=0$.

25. 求證 $x^2-8xy+16y^2+2x-8y-3=0$ 的中心為直線 $x-4y+1=0$ 上任何點，試作這二次錐線的圖，以說明其故.

第十一章

超性曲線

134. **超性方程式** 本書以前各章所論，以含 x, y 的代數方程式爲主（參看 § 33 的註）。此外的方程式如

$$y=2^x,\quad y=\log x,\quad x=\sin y,$$

等叫做超性方程式，其所表軌跡叫超性曲線*。初等超性式即爲上列的指數函數，對數函數，三角函數等，本章依次論其曲線。

135. **指數與對數，反函數** （一）以未知數 x 做指數的算式，叫指數函數*，如 $y=10^x$, $y=a^x$ ($a>0$ 且 $\neq 1$) 等式，皆表 y 爲 x 的指數函數。反過來說，求表 x 爲 y 的函數，那二方程式，即可寫爲 $x=\log_{10}y$, $x=\log_a y$，而稱 x 爲 y 的對數，式中 10 或 a 叫做底*。用 10 做底的對數，爲普通計算上利器，叫做常用對數*。此外另有一種對數，爲理論算學所通用，即以 $e=2.718$ 代 10 爲底，而稱爲自然對數*或納氏對數。底數 e 是一個不循環的

---

*超性曲線 Transcendental curve. 指數函數 Exponential function. 底 Base. 常用對數 Common logarithm. 自然對數 Natural logarithm. 納氏對數 Naperian logarithm.

無限小數.

(二)兩種對數互換法. 普通的對數表,爲常用對數,但用變底法卽可改爲自然對數.其公式如下:

設 $e^x=N$, 卽 $x=\log_e N$. 將前式兩端取常用對數,則得

$$\log_{10}e^x=x\log_{10}e=\log_{10}N,$$

故　$$x=\log_{10}N/\log_{10}e,$$

卽　$$\log_e N=\log_{10}N/\log_{10}e.$$

式內常數 $\log_{10}e=0.434$, 叫做常用對數的模,常以 M 代表;其逆數 $\frac{1}{M}=\frac{1}{\log_{10}e}=2.303$, 叫做自然對數的模.

註　關於對數的計算,可參看本局出版的新中國教科書高級中學三角學 §§14—25, 那書并附有四位對數表,頗便初學檢查.

注意　解析幾何學所用的爲自然對數.故底數 e 略去不寫,但底數 10 反要標明.譬如 $\log N$ 是指 $\log_e N$, 并非指 $\log_{10}N$. 此處的約定,與代數學和三角學不一致,宜辨別淸楚.本書附有自然對數值簡表,以便初學檢查,而省計算的麻煩.

(三)二種函數的關係. 指數函數與對數函數,互爲反函數*,普徧的說,如 y 是 x 的函數, x 卽是 y 的反函數.譬如 $y=x^2$ 的反函數是 $x=\pm\sqrt{y}$.

*反函數 Inverse function.

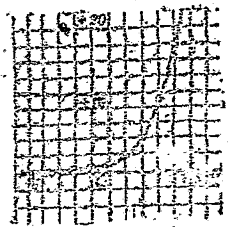
函數與反函數的圖形，有極簡單的關係．因二者表同一關係，所不同的地方，不過一就 x 解出，一就 y 解出而已．但在解析幾何學中，常以 y 指解出的變數，x 表所含之變數，故常寫成 $y=e^x$，$y=\log x$，如書後式為 $x=e^y$，即可知二者圖形上的差異，不過在於將 x 與 y 互換．以直線 $y=x$ 為對稱軸，作原曲線的對稱圖，即得其反函數的圖形．

但我們宜特別注意互反的二種函數，往往在某一方面，有很重要的區別．大凡一單值函數的反函數，往往為多值；$y=x^2$ 與 $y=\pm\sqrt{x}$ 即為一例．反三角函數的多值性，尤為初學所難解，宜加注意(可參看本局新中國教科書高中三角學§§78—83)．

136. 指數曲線與對數曲線 (一)指數函數 $y=a^x$ 的圖，叫指數曲線*．為作圖便利計，設 $a=2$，即可表列相當對應值如下：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

描點連成曲線，如第183圖．



(第183圖)

討論 (1)因為冪數不能為負，故不論 x 如何，y 必為正數．所以曲線不與 x 軸相交．

*指數曲線 Exponential curve.

又不論 a 為何數，$x=0$ 時，$y=a^0=1$，故與 y 軸交於 $(0,1)$.

(2)對稱性　對原點與兩軸皆不成對稱，實則對任何點、線皆然.

(3)範圍　y 不能為負，故 x 軸下(即第三、第四兩象限內)無曲線。如 x 值漸增，y 也隨着無限增大，故可在第一象限內趨於無窮遠.

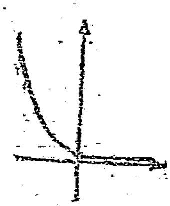
(4)漸近線　但是 x 如為負數，而絕對值無限增大，可設 $x=-x'$，則

$$y=a^x=a^{-x'}=\frac{1}{a^{x'}}.$$

因 x' 為正數，且無限增大，故 $a^{x'}$ 亦然，因此可知 y 漸小而趨於零. 所以 x 軸是其水平漸近線.

(5)底數 a 的影響　a 雖不能為負，但可為小於 1 的正數，設 $a=\frac{1}{a_1}$，則 a_1 為大於 1 的正數，而

$$y=a^x=\left(\frac{1}{a_1}\right)^x=a_1^{-x}.$$



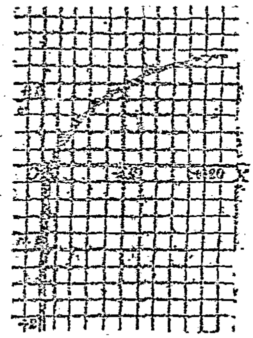
(第 8 圖)

即在 $a>0$ 的情形中，將 x 換為 $-x$ 而得. 所以這時的曲線，為 $a>0$ 時的曲線對稱於 y 軸所成的圖形. 試將第 183 與 184 二圖比較.

如 $a=1$，則 $y=a^x=1$，而成一直線，與 x 軸平行.

函數 $y=be^{ax}$ 的圖，不外上述二種形狀．最重要的爲 $a=e$ 的情形，計算時可用本書所附 e^x 的函數值表．

（二）對數曲線* 即 $y=\log_a x$ 的圖．依上節（3）的手續，立可得表 $y=\log_a x$ 的曲線如第185圖．

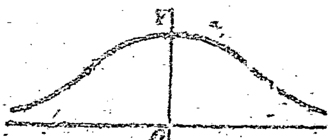


（第185圖）

由指數曲線的討論，即可知對數曲線 $y=\log_a x$ 不與 y 軸相交，而交 x 軸於 $(1,0)$．曲線仍在第一象限內，有無窮遠枝，而以 y 軸爲漸近線．又對於 a 的影響，也與（一）相同．

137．兩種重要含指數函數的曲線 （一）機率曲線． 函數 $y=e^{-x^2}$ 在統計學上，頗有應用．其所表的圖，叫機率曲線*．今詳作討論如下：

不論 x 的值如何，y 常爲正，故不與 x 軸相交，且常在其上．$x=0$ 時，$y=1$，即曲線在 y 軸上的截距爲 $+1$．

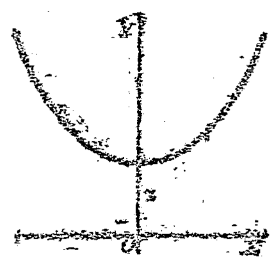


（第186圖）

以 $-x$ 易 x，y 不變，故對稱於 y 軸．x 的絕對值愈大，y 漸小，以趨於零，故曲線以 $(0,1)$ 一點爲最高點，向二旁下趨，而以 x 軸爲漸近線，如第186圖．

*對數曲線 Logarithmic curve，機率曲線 Probability curve．

(二)懸鏈線 $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $\left(\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\right.$ 叫 x 的雙曲線餘弦*$\left.\right)$ 其圖叫懸鏈線*. 因取一柔韌的重繩,懸其兩端,即下垂成這形狀. 這曲線也不因設 x 的號而變,故對稱於 y 軸,且與這軸相交於$(0,a)$. 又除 1 外,任何正數與其逆數的和必大於 2,故曲線以$(0,a)$為最低一點,而向二旁上升,如第 187 圖.



(第 187 圖)

注意 因$k^2-2k+1=(k-1)^2\geqq 0$,故$k^2+1\geqq 2k$;若$k>0$,則$k+\frac{1}{k}\geqq 2$,除$k=1$外,均取不等號.

雙曲線餘弦的符號為 cosh,即

$$\cosh\frac{x}{a}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

雙曲線函數*也如三角函數,共有六種,都係由指數函數構成,而與三角函數有許多相同的特性(看下面第 12 到 16 各題).

注 本節可以酌量略去.

---

*雙曲線餘弦 Hyperbolic cosine, 懸鏈線 Catenary, 雙曲線函數 Hyperbolic function.

習題四十

試作下列各方程式的軌跡:

1. $y=3e^{-x}$. 2. $y=2e^{-\frac{1}{2}x}$. 3. $y=\frac{1}{2}e^{2x}$.

4. $y=xe^{-\frac{1}{2}x}$. 5. $y=x^2e^{-x}$. 6. $y=2\log_{10}\sqrt{x}$.

註 上面各題計算時可取近值 $e=3$.

7. $y=\log_{10}(2+x)$. 8. $y=\log_e(9-x^2)$.

9. $y=\log_{10}\sqrt{x+3}$. 10. $y=\log_e(4x-x^2)$.

11. 求利率 r 時，複利公式 $a=(1+r)^x$ 的圖線.

註 這曲線叫複利曲線*.

12. $y=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\sinh x$ (叫雙曲線正弦*).

13. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\tanh x$ (叫雙曲線正切*).

14. 求證 (1) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, (2) $\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$.

15. 求以對數函數表雙曲線正弦，餘弦，正切的反函數.

16. 求證 $\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$.

158. 逆圓函數. (一)普通量角有弧度法*與角度制*二種方法，其單位角各爲弧度*，與度*。二者的基本關係爲 π 弧度

---

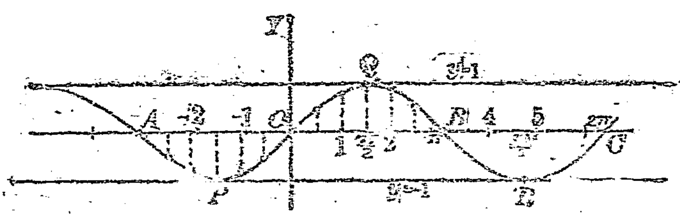
*複利曲線 Compound interest curve. 雙曲線正弦 Hyperbolic sine. 雙曲線正切 Hyperbolic tangent. 弧度法 Radian measure. 角度制 Degree measure 弧度 Radian. 度 Degree.

$=180°$, 卽一弧度 $=57°17.8'$. 普通應用, 皆為角度制, 但在高等算學中則均採弧度法, 其理由見本局出版的新中國高中三角學§91下的注意. 例如 $x=1$ 弧度, 則

$$\sin 2x=\sin 2\text{ 弧度}=\sin 114°35'=0.909.$$

解析幾何學中所用為弧度法。

(二)方程式 $y=\sin x$ 的圖, 叫正弦曲線*. 今作圖如下:



(第188圖)

例 取 x 的間隔為 $30°$, 並以弧度表各角的值, 由三角函數本值表檢出 $y=\sin x$ 的值如下表:

x 度	x 弧度	y	x 度	x 弧度	y
0	0	0	0	0	0
30	0.52	0.50	−30	−0.52	−0.50
60	1.05	0.87	−60	−1.05	−0.87
90	1.57	1.00	−90	−1.57	−1.00
120	2.09	0.87	−120	−2.09	−0.87
150	2.62	0.50	−150	−2.62	−0.50
180	3.14	0	−180	−3.14	0

*正弦曲線 Sine curve.

在 x 軸上取適宜單位表一弧度，並以同單位表縱坐標，照表作圖，即得曲線 $APOQB$，如第 133 圖.

在點 P 右邊的曲線，可按 $\sin(2\pi+x)=\sin x$ 的關係求得換句話說；即 x 各值如增加 2π，y 值即重行出現. 就圖上看去，即曲線上任意一點，如右依 x 軸的方向平移，經過 2π 的距離，則這點必仍在曲線上，所以如將弧 APO 依同法平移過 2π 的距離，以至 BRC 的新位置，則這弧仍當是曲線上的一段. 同理弧 OQB 也可如法作平移. 又因

$$\sin(\pi+x)=-\sin x,$$

就是將曲線平移過 π 的距離後，縱標變成同值異號的數. 即成對稱於 y 軸的圖形. 因此可知正弦曲線的全部，含無窮個全等的弧，交錯分居於 x 軸的上下二側.

討論 (1) 截距 命 $x=0$，$y=\sin 0°=0$；故曲線經過原點. 又不論 n 為任何整數，均有 $\sin n\pi=0$，即這曲線與 x 軸的交點，在原點左右兩側者，各有無窮次，而相鄰兩點間距離為 π.

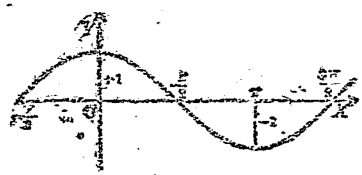
(2) 對稱 因 $\sin(-x)=-\sin x$，故在 $y=\sin x$ 一式中以 $(-x,-y)$ 代 (x,y) 結果不變. 故原點為曲線的對稱中心.

(3) 範圍 x 值無限制，故曲線可向左右兩方無限伸展. 但 $\sin x$ 的絕對值小於 1 或等於 1，即曲線必介於 $y=+1$ 與 $y=-1$ 兩直線的中間.

(三)如平移坐標軸至$(\frac{1}{2}\pi, 0)$,則 $y=\sin x$ 一式,變為

$$y'=\sin(x'+\tfrac{1}{2}\pi)=\sin(90^\circ+x')=\cos x'.$$

可見餘弦曲線* $y=\cos x$ 的圖,實與正弦曲線相同,其相異點只在 y 軸的位置相差 $\frac{1}{2}\pi$ 耳,看第 189 圖。



(第 189 圖)

139. 週期函數　因

$$\sin x=\sin(x+2\pi),\quad \tan x=\tan(x+\pi),$$

故 $\sin x$ 與 $\tan x$ 叫做週期函數*,其定義如次:

設有一常數 p,以 $x+p$ 代 x 時,不論 x 的值如何,恆有 $f(x+p)=f(x)$,則稱這函數為週期函數,其曲線叫週期曲線*.

如 p 為最小的數時,能使函數有週期性質,則這常數 p 叫週期*. 由上式可知 $\sin x$ 和 $\tan x$ 皆是週期函數. $\sin x$ 的週期為 2π, $\tan x$ 的週期為 π. 雖然 $\tan(x+2\pi)$ 也等於 $\tan x$, 但 $\tan(x+\pi)$ 已如此,故其週期為 π, 而不是 2π.

在 $\sin kx$ 中,以 $x+\frac{2\pi}{k}$ 代 x,則 kx 變為 $kx+2\pi$, $\sin kx$ 變

---

*餘弦曲線 Cosine curve. 週期函數 Periodic function. 週期曲線 Periodic curve. 週期 Period.

$\sin(kx+2\pi)$，其值仍相等，故 $\sin kx$ 的週期為 $\frac{2\pi}{k}$。

同理可知 $\tan ax$ 的週期為 $\frac{\pi}{a}$.

140. **正弦曲綫的作圖**　今論方程式 $y=a\sin kx$ 的圖($a>0$).

函數 $\sin kx$ 的週期為 $\frac{2\pi}{k}$. 又因 $\sin kx$ 的值介於 -1 和 $+1$，故 y 的數值介於 $-a$ 和 a 間，這最大值 a 叫做幅角*.在求作這種曲綫的圖時，可用下法：

(一)求幅角 a 和週期 p.

(二)在兩坐標軸上取同單位.

(三)在 x 軸上，取 $\frac{1}{4}$ 的週期為一段，自原點起，向左右記各段端點，則曲綫最高和最低點，必在奇數段端點上，曲綫與軸的交點在偶數段端點上.

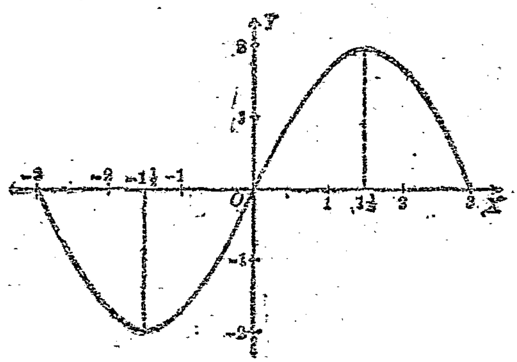
例如在第 133 圖中，$\frac{1}{4}p=\frac{1}{2}\pi$，最高點為 $x=\frac{1}{2}\pi$ 等如 Q，最低點為 $x=\frac{3}{2}\pi$ 等如 R，與 x 軸交點為 $x=\pi$ 等如 B.

例一　試作正弦曲綫 $y=2\sin\frac{\pi x}{3}$.

---

*幅角 Amplitude.

解 在本題,有幅角 $a=2$, 週期 $p=6$, 故 $\frac{1}{4}p=1\frac{1}{2}$. 在 x 軸標出 $x=0$, $x=\pm1\frac{1}{2}$, $x=\pm3$ 各點, y 的對應值爲 0, ±2, 0 等. 第190圖內的曲線示明 $x=-3$ 至 $x=3$ 的一部分.



(第 190 圖)

例二 作方程式 $y=2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x+\frac{1}{6}\pi\right)$ 的曲線.

解 書原式爲 $y=2\sin\frac{1}{3}\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)$, 而命 $x+\frac{1}{2}=x'$, 即 $x=x'-\frac{1}{2}$; $y=y'$; 則得 $y'=2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x'\right)$. 故可作一平移, 以 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 爲新原點, 這式的圖形便與上例同.

由上二例, 可知正餘弦曲線的方程式, 可寫做

$$y=a\sin(kx+c) \text{ 或 } y=a\cos(kx+c).$$

其幅角爲 a, 週期爲 $\frac{2\pi}{k}$, 如將坐標軸作一平移, 命 $x=x'-\frac{c}{k}$, $y=y'$, 則上二方程式各改爲

$$y'=a\sin bx' \text{ 與 } y'=a\cos bx'.$$

習題四十一

1. 求 $\cos x$ 各值，列成一表，直接討論方程式 $y=\cos x$ 而作其圖，并與§138(三)相比較.

求作下列各方程式在一整週期內的圖:

2. $y=\sin 3x$. 3. $y=2\sin\frac{1}{2}x$. 4. $y=2\,\text{ces}\,\pi x$.

5. $y=\frac{1}{2}\cos 2x$. 6. $y=\cos\frac{1}{2}\pi x$. 7. $y=2\sin\frac{1}{3}\pi x$.

8. $y=3\cos\frac{1}{4}\pi x$. 9. $y=3\sin(x+2)$. 10. $y=2\cos(1-3x)$.

11. $y=2\cos(2\pi x+\frac{2}{3}\pi)$. 12. $y=\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2})$.

13. $y=\sin(\frac{1}{3}\pi x-\frac{1}{4}\pi)$. 14. $y=a\sin(kx+\pi)$.

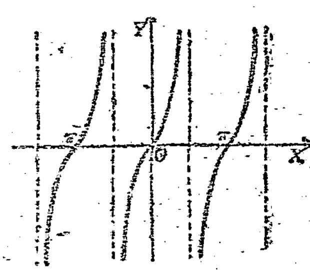
15. $y=a\cos\left(\frac{2\pi t}{p}+\beta\right)$.

141. 各種三角曲線 今再述他種三角曲線如下:

(一)正切曲線 正切曲線*就是方程式 $y=\tan x$ 的圖,如下面的第131圖.

這式的週期為 $p=\pi$,當 x 為一週期的整倍數時,y 的相當值如右表.

x	y	x	y
0	0	0	0
$\frac{1}{4}\pi$	1	$-\frac{1}{4}\pi$	-1
$\frac{1}{2}\pi$	∞	$-\frac{1}{2}\pi$	∞
$\frac{3}{4}\pi$	-1	$-\frac{3}{4}\pi$	1
π	0	π	0



(第131圖)

*正切曲線 Tangent curve,

討論 (1)截距 曲線經過原點，此外不再與 y 軸相交. x 軸上的截距為 $\pm n\pi$, n 為任何整數.

(2)對稱 曲線對稱於原點.

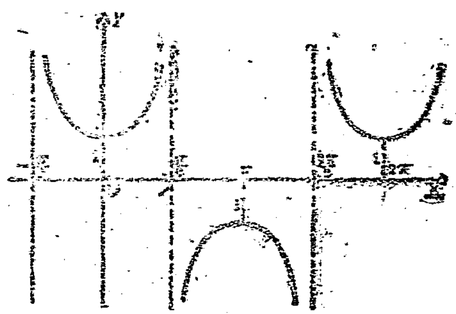
(3)範圍 x 和 y 皆可有任意的值，並無限制.

(4)漸近線 $x=\frac{1}{2}\pi\pm n\pi$, n 為任何整數時, $y=\pm\infty$, 所以有無窮數的垂直漸近線. 而每二相鄰者間的距離，都是週期 π.

(二)正割曲線 方程式 $y=\sec x$ 的圖，叫正割曲線*，如第192圖.

解 在此的週期 $p=2\pi$, 在 x 軸上，配出 x 值為$\frac{1}{4}$週期$\left(\text{即}\frac{1}{2}\pi\right)$倍數時的各段端點. 又因 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$, 所以各值可由 $\cos x$ 各值導出.

x	y	x	y
0	1	$\frac{1}{3}\pi$	2
$\frac{1}{2}\pi$	$\pm\infty$	$-\frac{1}{3}\pi$	2
π	-1		



(第192圖)

*正割曲線 Secant curve.

註 在正切曲線上取介於 $x=-\frac{1}{2}p$, $x=\frac{1}{2}p$ 兩相鄰漸近線間的一段曲線；在正割曲線上取介於 $x=-\frac{1}{4}p$, $x=\frac{3}{4}p$ 兩漸近線間的二段曲線；即可表二曲線的形態.

(三)餘切曲線 關於餘切曲線* $y=\cot x$ 的圖,可用簡單的幾何變易,由正切曲線推得.

在第 191 圖中，平移坐標軸至新原點 $(\frac{1}{2}\pi, 0)$，即命 $x=x'+\frac{1}{2}\pi$, $y=y'$,代入 $y=\tan x$,得

$$y'=\tan(x'+\tfrac{1}{2}\pi)=-\cot x'.$$

這式的圖形,除縱軸由平移至漸近線 $x=\frac{1}{2}\pi$ 上外,其餘均與第 191 圖相同.再單改 y' 的號,得

$$-y'=-\cot x', \text{ 或 } y'=\cot x'.$$

故得餘切曲線的作法如次:平移縱軸與漸近線 $x=\frac{1}{2}\pi$ 相合，再作其對於 x' 軸的對稱圖便得.換句話說,即平移後,再將紙面依這軸作一 180° 的旋轉,自紙背透視原圖即成.

(四)餘割曲線 在第192圖中,平移坐標軸至新原點$(-\frac{1}{2}\pi, 0)$，即以 $x=x'-\frac{1}{2}\pi$, $y=y'$ 代入 $y=\sec x$,得

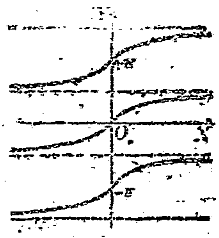
$$y'=\sec(x'-\tfrac{1}{2}\pi)=\csc x'.$$

就是作 y' 軸使與原圖左第一漸近線相合，即得餘割曲

*餘切曲線 Cotangent curve. 餘割曲線 Cosecant curve.

線.

142. 反三角函數 如 $x=\tan y$, 則 $y=\tan^{-1}x$, 叫做反正切*. 按§136的理, 立可從第191圖, 推得反正切曲線*如第193圖. 他種三角函數, 也各有其反三角函數*, 其曲線不難由第188, 189, 192各圖推得.



(第193圖)

註 德, 法各國多用符號 arctan 表反正切, arcsin 表反正弦*等等, 英, 美則通用 $\tan^{-1}$, $\sin^{-1}$ 等符號. 但在後者中, (-1) 並非代數上的負指數, 而係一反函數, 如欲用負指數, 須寫作 $(\tan x)^{-1}$ 等式.

關於反三角函數, 可參看本局出版的新中國高中三角學第六章.

由各種反三角函數圖形, 卽易明其多值性, 而爲三角函數所無, 與 x 一已知值 a 而求 y, 在圖形上, 卽以平行於 y 軸的直線 $x=a$ 去割曲線, 在各三角函數, 每一直線和曲線只一交點, 故爲單值, 在各反三角函數, 則有無窮交點, 而爲多值.

如欲除去多值性的易引起含混, 對反三角函數, 可定一種主值*, 以資辨別. 在圖形上言, 則因反三角函數的各枝爲全等, 故可定在某範圍內的一枝爲主. 例如反正切的主值, 常定爲介於 $-\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{\pi}{2}$ 間, 第193圖中定經過原點的一枝爲主.

*反正切 Arctangent. 反正切曲線 Arctangent curve. 反三角函數 Inverse trigonometric function. 反正弦 Arcsine. 主值 Principal value.

習題四十二

1. 試作餘切曲線與餘割曲線，并討論之.

求作下列各曲線在一週期內的圖:

2. $y=3\tan x$.

3. $y=3\tan\left(\frac{1}{2}\pi x-\frac{2}{3}\pi\right)$.

4. $y=\cot\frac{2}{3}\pi x$.

5. $2y=3\cot 3x$.

6. $y=4\cot\left(\frac{1}{4}\pi x+\frac{3}{4}\pi\right)$.

7. $3y=\sec[-(x+1)]$.

8. $2y=\sec\frac{1}{2}x$.

9. $4y=\csc\frac{1}{4}\pi x$.

10. $2y=3\csc 2x$.

11. $y=\cos^{-1}\frac{1}{2}x$.

12. $y=\csc\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)$.

13. $x=2\sin\frac{2}{3}\pi y$.

14. $x=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{3}\pi y$.

15. $y=\tan^{-1}(2x)$.

16. $y=\frac{\pi}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)$.

143. **函數相加法** 如一曲線的方程式，就 y 解出時，其右端為兩式代數和，如

$$y=\sin x+\cos x,\quad y=\frac{1}{2}x+\sin^2 x$$

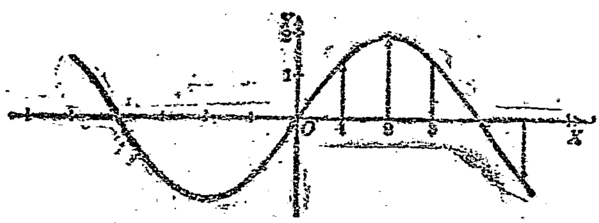
等例，則可用函數相加法，作出圖形，舉例如下:

例 求作 $y=2\sin\frac{1}{4}\pi x+\frac{1}{2}x$ 的圖

解 先作兩輔曲線*

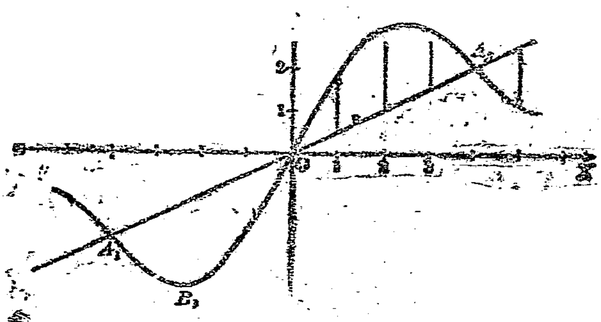
$$y_1=2\sin\frac{1}{4}\pi x,\qquad y_2=\frac{1}{2}x.$$

如第194圖表正弦曲線 $y_1=2\sin\frac{1}{4}\pi x$，而第195圖中直線表 $y_2=\frac{1}{2}x$. 注意這二圖中所取單位應當相同.



(第194圖)

取第194圖中各函數值加在第195圖中相當函數值上，而求其代數和，即二函數值同號時相加，異號時相減，如此便成湊合曲線* $A_1B_1OB_2A_2$，便是方程式



(第195圖)

*輔曲線 Auxiliary curve 湊合曲線 Compound curve.

$y=y_1+y_2=2\sin\frac{1}{4}\pi x+\frac{1}{2}x$的圖

注意這曲線始終在直線 $y=\frac{1}{2}x$ 上下作波動，且與這直線交於 $x=0$，±4，±8，±12 等處，也就是 $y=2\sin\frac{1}{4}\pi x$ 中曲線交 x 軸處。

註 自本節到§148，均可酌量略去。

144. 對二次曲線的應用 取普通二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{1}$$

其各二次項係數 A，B，C 必不皆為零。本節先論 A 與 C 有一不為零的情形。

§92 中(二)所用，就是函數相加法，今假定 $C\neq0$ 而論其通例。如 $C=0$ 而 $A\neq0$，也可用同法討論。

將(1)式視為 y 的二次方程式，寫成下形：

$$Cy^2+(Bx+E)y+(Ax^2+Dx+F)=0.$$

按二次方程式解法公式，即得

$$y=-\frac{1}{2C}(Bx+E)\pm\frac{1}{2C}\sqrt{(Bx+E)^2-4C(Ax^2+Dx+F)}$$

$$=y_1\pm\frac{1}{2C}\sqrt{f(x)}. \tag{2}$$

而分成
$$y_1=-\frac{1}{2C}(Bx+E). \tag{3}$$

與 $f(x)\equiv(B^2-4A\cdot C)x^2+2(B\cdot E-2C\cdot D)x+(E^2-4C\cdot F)$ (4)

二函數. 由(2)式可知(3)式所表直線，爲(1)式所表二次錐線的一直徑，所依方位爲 y 軸，因這直線顯見平分與 y 軸平行的各弦，而弦的半長即 $\frac{1}{2C}\sqrt{f(x)}$。

如欲研究曲線的情形，須看 $f(x)=0$ 的根，即須先求其判別式

$$(B\cdot E-2C\cdot D)^2-(B^2-4A\cdot C)(E^2-4C\cdot F)=-C\begin{vmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{vmatrix}$$

$$=-C\Delta. \qquad (5)$$

(一) $\Delta=0$, 則按二次方程式的理，知 $f(x)$ 爲一整方.

(I) 如 $B^2-4A\cdot C=0$, 由 (5) 知必 $B\cdot E-2C\cdot D=0$, 故

$$f(x)\equiv(E^2-4C\cdot F)=h,$$

所以在 $E^2-4C\cdot F>0$ 時，二次錐線(1)約爲二平行線

$$y=-\frac{1}{2C}(Bx+E)\pm\sqrt{h};$$

在 $E^2-4C\cdot F=0$ 時，二平行直線合爲一條；而在 $E^2-4C\cdot F<0$ 時，不能表實軌跡(可以叫做虛平行線).

(II) 如 $B^2-4A\cdot C\neq0$, 則由(5)式，如

$$f(x)\equiv(B^2-4A\cdot C)(x-\alpha)^2,$$

$x=\alpha$ 爲 $f(x)=0$ 的重根. 故(2)式成

$$y=-\frac{1}{2C}(Bx+E)\pm\sqrt{B^2-4A\cdot C}(x-\alpha);$$

在 $B^2-4A\cdot C>0$ 時, 表二相交直線; 在 $B^2-4A\cdot C<0$ 時, 只有 $x=\alpha$ 一點, 即爲點橢圓; 也可當做相交於一實點的二虛直線.

(二) $-C\Delta>0$, 在此應分二款研究:

(I) $B^2-4A\cdot C\neq 0$, 則 $f(x)=0$ 有 $\alpha>\beta$ 二實根, 即

$$f(x)\equiv(B^2-4A\cdot C)(x-\alpha)(x-\beta).$$

如 $B^2-4A\cdot C>0$, x 之值應在二根外(即 $x>\alpha>\beta$ 或 $\alpha>\beta>x$), 始能令 $f(x)$ 之符號爲正. 在圖形上就是曲線在 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$ 二直線外, 而爲一雙曲線. 如 $B^2-4A\cdot C<0$, x 之值應在二根內(即 $\alpha>x>\beta$), 始能令 $f(x)$ 之符號爲正. 在圖形上, 就是曲線在 $x=\alpha$ 和 $x=\beta$ 二直線內, 而爲一橢圓.

(II) $B^2-4A\cdot C=0$. 由(5)式知必 $B\cdot E-2C\cdot D\neq 0$,

故 $$f(x)\equiv 2(B\cdot E-2C\cdot D)x+(E^2-4C\cdot F).$$

在 $B\cdot E-2C\cdot D>0$ 時, 應取

$$x>-\frac{E^2-4C\cdot F}{2(B\cdot E-2C\cdot D)},$$

在 $B\cdot E-2C\cdot D<0$ 時, 應取

$$x<-\frac{E^2-4C\cdot F}{2(B\cdot E-2C\cdot D)}.$$

所以曲線是一拋物線.

(三) $-C\Delta<0$,在此 $B^2-4A\cdot C$ 決不能爲零,否則按(5)式,知 $-C\Delta=(B\cdot E-2C\cdot D)^2$,而不是負數.如 $B^2-4A\cdot C>0$,則按二次方程式的理,不論 x 爲何值,$f(x)$ 均爲正,但不爲零,所以曲線是一雙曲線,總不與其直徑

$$y=-\frac{1}{2C}(Bx+E)$$

相交.如 $B^2-4A\cdot C<0$,則不論 x 爲何值,$f(x)$ 均爲負,且不能爲零.所以無實軌跡,而可叫做虛橢圓.

145. $A=C=0$ 的情形.如 $A=C=0$,則必 $B\neq0$,在此可書(1)式爲

$$y(Bx+E)+Dx+F=0 \tag{6}$$

而
$$\Delta=2B(E\cdot D-B\cdot F),$$

且
$$B^2-4A\cdot C=B^2>0.$$

(一) $\Delta=0$,即 $E\cdot D-B\cdot F=0$.可令 $\dfrac{B}{D}=\dfrac{E}{F}=\dfrac{1}{l}$,

則 $$y(Bx+E)+Dx+F=(Bx+E)(y+l)=0,$$

而表二垂直線.

(二) $\Delta\neq0$，可書(6)式爲

$$y=-\frac{Dx+F}{Bx+E}=-\frac{D}{B}+\frac{E\cdot D-B\cdot F}{Bx+E}.$$

當x值與$-\frac{E}{B}$相近時，y的絕對值無限增大，故$x=-\frac{E}{B}$即$Bx+E=0$爲一垂直漸近線．又如x無限增大，則y值與$-\frac{D}{B}$相趨近，故$y=-\frac{D}{B}$即$By+D=0$是一水平漸近線．由此可知曲線有二垂直的漸近線，而爲一等軸雙曲線．

歸納本節和上節的討論，可列成一表如下：

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="3">$\Delta\neq0$</td><td colspan="3">$\Delta=0$（變態情形）</td></tr>
<tr><td colspan="2">$-C\Delta$或$-A\Delta$</td><td>$A=0$</td><td colspan="3">$C\neq0$</td></tr>
<tr><td>正</td><td>負</td><td>$C=0$</td><td>$k>0$</td><td>$k=0$</td><td>$k<0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$B^2-4A\cdot C=0$</td><td rowspan="2">抛物線</td><td rowspan="2">* * *</td><td rowspan="2">* * *</td><td colspan="3">二平行直線</td></tr>
<tr><td>（實）</td><td>（相合）</td><td>（虛）</td></tr>
<tr><td>$B^2-4A\cdot C<0$</td><td>橢圓</td><td>虛橢圓</td><td>* * *</td><td rowspan="2">二相交直線</td><td colspan="2">（虛線，也可視爲點橢圓）</td></tr>
<tr><td>$B^2-4A\cdot C>0$</td><td colspan="2">雙曲線</td><td>等軸雙曲線</td><td colspan="2">（實線，如$A=C=0$則互爲垂線）</td></tr>
</table>

表內$\Delta=2[2A\cdot C\cdot F+B\cdot E\cdot D-(A\cdot E^2+B^2\cdot F+C\cdot D^2)]$，$k=E^2-4C\cdot F$．但如$C=0$，$A\neq0$，則應取$k=D^2-4A\cdot F$．

由此便得一定理如下：

普通二次方程式(1)，當 $\Delta=0$ 時表二次錐線的變態情形，而為二直線，可實可虛，可合可分，可相交，可平行；且僅在這時方能如此。

習題四十三

求作下列各曲線：

1. $y=2\sin x+\frac{1}{5}x$.
2. $y=2\cos x+\frac{1}{10}x^2$.
3. $y=\sin x-\cos 2x$.
4. $3y=x-3\sin\frac{1}{3}\pi x$.
5. $y=\log_{10}x-4\cos\frac{1}{4}\pi x$.
6. $y=e^{\frac{1}{2}x}-\cos\pi x$.
7. $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.
8. $y=\sin\pi x+\cos\frac{1}{3}\pi x$.
9. $y=\sin 2x+\cos 2x$.
10. $y=2\sin x+3\cos x$.
11. $y=2\sin 2x+3\cos\frac{1}{2}x$.

試辨別下列各二次方程式所表的二次錐線：

12. $3x^2-4xy+8x-1=0$.
13. $4x^2+4xy+y^2+8x-16y=0$.
14. $41x^2-24xy+34y^2+25=0$.
15. $xy-6x+5y-30=0$.
16. $17x^2-12xy+8y^2-68x-24y-12=0$.
17. $x^2-6xy+9y^2+4x-12y+4=0$.
18. $4x^2-12xy+9y^2+2x-3y-12=0$.
19. $14x^2-4xy+11y^2-88x+34y+149=0$.
20. $9x^2+24xy+16y^2-18x-38y+61=0$.
21. $x^2+2xy-7y^2+6x+9y+9=0$.

22. $2xy-11x+10y-25=0$.

23. $2x^2+3xy-2y^2+x+2y=0$.

24. 求方程式 $(1-e^2)x^2+y^2-2px+p^2=0$ 的判別式 Δ.

146. 同週期正弦曲線的疊合線　由上面的第 9 第 10 二題，便可歸納成一定理如下：

定理　兩個同週期正弦函數的和所成的疊合曲線，還是一同週期的正弦曲線.

證　取方程式

$$y=a\sin(kx+\alpha)+b\sin(kx+\beta),$$

式中 a, b, α, β, 和 k 均是常數. 按三角學公式，展開右端，即可化為下形：

$$y=A\sin kx+B\cos kx.$$

式中 A 和 B 皆是常數，今以 A 與 B 為二腰作一直角三角形，則其斜邊為 $C=\sqrt{A^2+B^2}$. 設對 B 腰的角為 γ，則又有

$$B=C\sin\gamma,\ A=C\cos\gamma.$$

代入上式，得

$$y=C(\sin kx\cos\gamma+\cos kx\sin\gamma)=C\sin(kx+\gamma)$$

卽知這方程式所表曲線，仍為一正弦曲線，其週期為 $\frac{2\pi}{k}$ 與原式中二項的週期相同；但幅角為

$$C=\pm\sqrt{A^2+B^2}.$$

註 如由異週期的兩正弦函數相加，所得的綜合曲線，決非簡單正弦曲線.

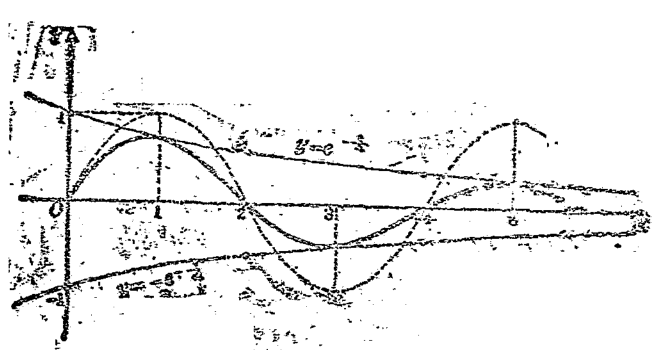
147. 函數相乘法 如一方程式就 y 解出時，其右端為二函數的積，而有一因式為 $\sin x$ 或 $\cos x$，則宜用函數相乘法，如下例.

例 作 $y=e^{-\frac{1}{4}x}\sin\frac{1}{2}\pi x$ 的曲線.

解 未作圖以前，宜察下列各點:

(一)因正弦的絕對值決不能大於1，故上式中 y 的絕對值，決不能大於第一因式 $e^{-\frac{1}{4}x}$ 的相當值，故須作

$$y=e^{-\frac{1}{4}x} \text{ 和 } y=-e^{-\frac{1}{4}x}$$



(第 195 圖)

限曲線，則所求曲線必定全在這兩曲線的中間。因此兩曲線叫界限曲線*。作出這二曲線如第196圖。

(二)因原式中 $e^{-\frac{1}{4}x}$ 一因式的值常為有限，所以 $\sin\frac{1}{2}\pi x=0$ 時，則 $y=0$。故可知所求的曲線與 x 軸的交點與 $y=\sin\frac{1}{2}\pi x$ 者相同。

(三)當第二因式 $\sin\frac{1}{2}\pi x$ 等於 $+1$ 或 -1 時，所求的曲線和兩界限曲線相切(但其證明須用微分)。

(四)作正弦曲線 $y=\sin\frac{1}{2}\pi x$，如第196圖中的虛線，其週期為4，幅角為1.

(五)由上所述，可知所求曲線與 x 軸交於 $x=0, \pm2, \pm4, \pm6$ 等點，與兩界限曲線相切於 $x=\pm1, \pm3, \pm5$ 等點。如此便可作出所求曲線如第196圖中的波形實線。

(六)所求曲線各弧交錯分居 x 軸上下。譬如自 $x=0$ 至 $x=2$ 間，$y=e^{-\frac{1}{4}x}$ 與正弦函數共為正，則曲線在 x 軸上；自 $x=2$ 至 $x=4$ 間，$y=e^{-\frac{1}{4}x}$ 與正弦函數異號，故曲線在 x 軸下。

148. **超性方程式解法** 如一超性方程式的係數為已知數字，而求其根的近似值，其解法原理，和高等代數中數字代數方程式相同，但運算則不能與和納 (Horner) 法相類。其要點在作曲線以求出解的首一二位數值，再用比例部分法，求諸值後幾位數字。今舉例說明如下：

---

*界限曲線 Boundary curve.

例 求超性方程式 $2\log_{10}x=\sqrt{4-x^2}$ 的根.

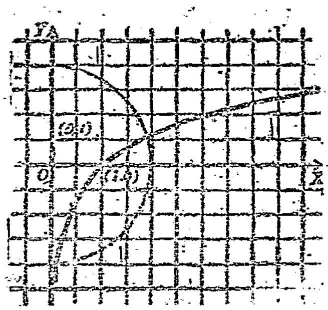
解 作 $y_1=2\log_{10}x$ 與 $y_2=\sqrt{4-x^2}$ 二曲線如第 197 圖. 在交點處 $y_1=y_2$, 其橫標即爲所求的根, 立可看出根的二位近似值約爲 1.9. 欲求到第三位, 須用比例部分法, 算式如下:

x	1.9	根	1.95	$1.95-1.9=0.05$
$2\log_{10}x$	0.558		0.580	
$\sqrt{4-x^2}$	0.624		0.433	
$2\log_{10}x-\sqrt{4-x^2}$	-0.066	0	$+0.147$	$0.147-(-0.066)=0.213$

設根爲 $1.9+d$, 則 d 的近似值由下面的比例式決定:

$$\frac{d}{0.05}=\frac{0.066}{0.213}, \quad \therefore \quad d=0.02.$$

而得 $x=1.9+0.02=1.92$(求到第二位小數).



(第 197 圖)

設 $x=1.92$, 則可求得

$$2\log_{10}x-\sqrt{4-x^2}=0.567-0.560>0,$$

故點 $(1.92, y_1)$ 在點 $(1.92, y_2)$ 上面. 但 $x=1.91$ 時, $2\log_{10}x-\sqrt{4-x^2}<0$. 故點 $(1.91, y_1)$ 在點 $(1.91, y_2)$ 下面, 所以這二曲線必在 $x=1.91$ 和 $x=1.92$ 間相交.

注意 取 x 二相當值時, 宜使 $2\log_{10}x-\sqrt{4-x^2}$ 的二相當函數差異號, 且不可距離太遠. 譬如取 $x=1.9$ 和 $x=2$, 則二相當函數差爲 -0.066

與 $+0.606$；依比例部分法去求 x 值，結果即不能合用．

註 因根式有只取正值的規定，故 $y_2=\sqrt{4-x^2}$ 只在 x 軸上方的半圓，而與 $y_1=2\log_{10}x$ 只有一交點．第[illegible]圖中 x 軸下的半圓 $y_2'=-\sqrt{4-x^2}$，與 $y_1=2\log_{10}x$ 的交點的橫坐標，為超越方程式 $2\log_{10}x+\sqrt{4-x^2}=0$ 的根。

習題四十四

求作下列各曲線:

1. $y=x\sin x$.　　2. $y=\sin x$.

3. $xy=\cos x$.　　4. $2y=x\cos\pi x$.

5. $10y=x^2\sin\frac{1}{2}\pi x$.　　6. $y=3e^{-\frac{1}{2}x}\sin 2x$.

7. $ye^x=\cos 2x$.　　8. $y=e^{-\frac{1}{2}x^2}\sin\frac{1}{3}\pi x$.

9. $y=(x+1)\sin 2x$.　　10. $x^2y=\cos\frac{1}{2}x$.

11. $ye^{\frac{1}{2}x}=\cos\frac{1}{4}\pi x$.　　12. $y=2e^{-\frac{1}{3}x}\sin\pi(x+1)$.

求下列各超越方程式根的近似值到三位有效數字:

13. $\tan x=\frac{1}{2}x$.　　14. $x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{10}$.

15. $e^x=x^2$.　　16. $\log x=\frac{1}{5}x$.

附 錄 二

代數，幾何，三角公式撮要

解析幾何學，常須應用代數，幾何，三角各定理．今摘其要錄如下，以便參查．

一．代 數

(一)聯立一次方程式解法公式．

$$a_1x+b_1y=c_1,\quad a_2x+b_2y=c_2$$

的解爲

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad (a_1b_2-a_2b_1\neq0).$$

(二)二次方程式．(I)解法公式 $Ax^2+Bx+C=0$ 的根爲

$$x_1=\frac{1}{2A}(-B+\sqrt{D}),\quad x_2=\frac{1}{2A}(-B-\sqrt{D}),\quad (D=B^2-4A\cdot C).$$

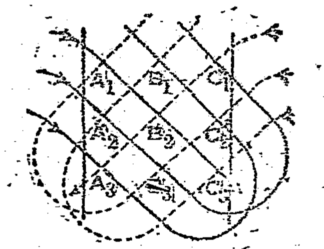
(II)根的性質．

$D=B^2-4A.C$	>0	二實根，不相等
	$=0$	二實根，相等
	<0	二虛根，不相等

(III) 根與係數關係.

$$x_1+x_2=-\frac{B}{A}, \quad x_1x_2=\frac{C}{A}.$$

(三)三級行列式展法.



$$=+\begin{cases}A_1B_2C_3\\A_2B_3C_1\\A_3B_1C_2\end{cases}-\begin{cases}A_1B_3C_2\\A_2B_1C_3\\A_3B_2C_1\end{cases}$$

(四)對數. (I) 定義 $A^x=N$, 則 $x=\log_A N$, ($A\neq 1$, 且 >0)

(II) 特性 $\log_a a=1$, $\log 1=0$, $\log\frac{1}{a}=-\log a=\operatorname{colog} a$.

(III) 運算 $\log ab=\log a+\log b$, $\log a^n=n\log a$

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b=\log a+\operatorname{colog} b, \quad \log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a.$$

二. 幾何.

下列公式內, r 表半徑, c 表圓周, a 表高, l 表斜高, B 表底的面積, A 表面積或總面積, L 表側面積, V 表體積.

圓: $c=2\pi r$, $A=\pi r^2$.

角柱體: $V=Ba$.

角錐體: $V=\frac{1}{3}Ba$.

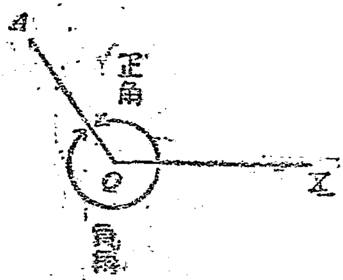
正圓柱體: $V=\pi r^2a$, $L=2\pi ra$, $A=2\pi r(r+a)$.

正圓錐體：　$V=\frac{1}{3}\pi r^2 a$，　$L=\pi r s$，　$A=\pi r(r+s)$.

球：　$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，　$A=4\pi r^2$.

三. 三　角

(一)旋轉角． 取一半直線OX，依原點O旋轉到OA，其旋轉量的$\angle XOA$，旋轉方向，與鐘錶上針的方向相反時，所得的角為正角；方向相同時的角，叫負角，半直線OX叫始邊，OA叫終邊．OA旋轉一周後，仍與OX相合，所成的角叫周角．



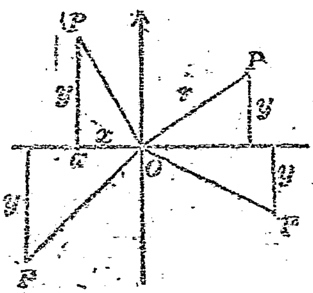
(二)角的度量． 量角有兩種單位：

(1)角度法　單位為度，即周角的$\frac{1}{360}$.

(2)弧度法　單位為弧度，即與半徑等長的弧所對的圓心角.

(3)互換式　$180°=\pi$弧度.

(三)三角函數定義． 將一角的頂點與坐標軸原點相合，始邊與x軸正向相合，而在終邊OA上任取一點$P(x,y)$，并命$OP=r$常為正值，則



$$\sin XOA=\frac{y}{r},\quad \cos XOA=\frac{x}{r},\quad \tan XOA=\frac{y}{x};$$

$$\csc XOA=\frac{r}{y},\quad \sec XOA=\frac{r}{x},\quad \cot XOA=\frac{x}{y}.$$

(四)單角三角函數基本關係.

(1) 倒數關係.

$$\sin \alpha \csc \alpha = \cos \alpha \sec \alpha = \tan \alpha \cot \alpha = 1,$$

(2) 商數關係.

$$\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha.$$

(3) 平方關係.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha, \quad \csc^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha.$$

(五)化任意角函數爲銳角函數的表.

角度	正弦	餘弦	正切	餘切	正割	餘割
$-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90°-x$	$\cos x$	$\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$\csc x$	$\sec x$
$90°+x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180°-x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180°+x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270°-x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cot x$	$\tan x$	$-\csc x$	$-\sec x$
$270°+x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\cot x$	$-\tan x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360°-x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\tan x$	$-\cot x$	$\sec x$	$-\csc x$

(六)多角三角函數.

(1) 基本關係.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}.$$

(2) 半角與倍角.

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x;$$

$$\sin\frac{1}{2}x=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},\quad \cos\frac{1}{2}x=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}};$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x,\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x.$$

(七)任意三角形元素關係. 設$\triangle ABC$中, a, b, c為A, B, C的對邊, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, S表三角形面積, 則有

(1) 正弦定律　$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$.

(2) 餘弦定律　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 等三式.

(3) 面積公式　$S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 等三式;

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

附 錄 二

平面解析幾何學撮要

(一)基本方法與問題.

(I)連續原則 使幾何理有普徧性.

(1)有向量 沙爾氏定理

$$OA = AB + BC + \cdots\cdots + MN + NO = 0.$$

(2)無窮遠元素.

(3)虛元素.

(II)射影 $\mathrm{proj}_l AB$ 為 AB 在 l 上的射影.

(1)第一定理 $\mathrm{proj}_l AB = AB\cos(AB, l)$.

(2)第二定理 $\mathrm{proj}\, PP_1 + \mathrm{proj}\, P_1P_2 + \cdots\cdots + \mathrm{proj}\, P_{n-1}P_n + \mathrm{proj}\, P_nQ = \mathrm{proj}\, PQ$.

(III)坐標 (1)坐標制 點與一對實數的相應.

(i)笛氏坐標(特例: 直角坐標).

(ii)極坐標.

(2)坐標制互換.

(i) $x=\rho\cos\theta$; $y=\rho\sin\theta$.

(ii) $\rho^2=x^2+y^2$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$.

(IV)基本問題.

(1) 已知曲線的構成條件，求其方程式.

(2) 已知方程式，求作所表的曲線.

(i) 截距. (ii) 對稱. (iii) 範圍. (iv) 漸近線.

(二)幾何量的解析表示.

(1) 二點距離. $l=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

(2) 斜率. $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

(3) 已知二直線斜率，求夾角 θ.

$$\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

式中 m_1 爲較大斜角的斜率.

(4) 定比分點. 如 $\frac{P_1P}{PP_2}=r$，則 $x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$, $y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$.

特例: $r=1$ 時，得中點 $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$.

(5) 三角形面積. $A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

(三)直線與圓. (I) 直線方程式. 二條件定一直線.

(1) 普通式. $Ax+By+C=0$.

(2) 點斜式. $y-y_1=m(x-x_1)$.

特例: 斜截式 $y=mx+b$.

(3) 二點式．$\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ 或 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$．

特例：截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

(4) 法線式． $x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$．

(II) 關於直線的問題．

(1) 二直線的關係．

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2=0.$$

(i) $A_1A_2+B_1B_2=0$，則二直線垂直；

(ii) $A_1:A_2=B_1:B_2\neq C_1:C_2$，則二直線平行；

(iii) $A_1:A_2=B_1:B_2=C_1:C_2$，則二直線相合爲一．

(2) 法線式應用．

(i) 化普通式爲法線式：$\dfrac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$．

如 $C\neq0$，根式與 C 異號；如 $C=0$，根式與 B 同號．

(ii) 線點距離． $d=x_1\cos\omega+y_1\sin\omega-p=\dfrac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$．

(3) 共點與共線．

	三點共線	三線共點
條件	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$

(III) 圓．

(1) 圓的方程式． 由三條件決定．

(i) 已知心(h,k)與半徑r.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

(ii) 普通方程式. $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

以$\left(-\frac{1}{2}D,\ -\frac{1}{2}E\right)$爲心，$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$爲半徑.

(2) 關於圓的問題.

(i) 冪. $P_1(x_1,y_1)$對於圓C　$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$的冪爲

$$t^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-r^2$$

如右邊的値爲正，則表自P_1到圓C的切線長平方.

(ii) 等冪軸.　　$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$

$$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.$$

二圓的等冪軸爲　$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0.$

(iii) 共軸圓.

(iv) 切線與法線　依次爲　$x_1x+y_1y=r^2$;　$y_1x-x_1y=0$

(四)幾何變易.　(x',y')爲變易後新坐標.

(I)移軸法.

(1) 平移.　$x=x'+h$, $y=y'+k$, (h,k)爲新原點.

(2) 旋轉.　$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha$, $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$, α爲旋轉所經的角，常取其小於$180°$.

(3) 通式.　$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+h$,　$y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+k$.

(II) 變易羣與幾何學　一組變易中任何變易之反變易及任二變易的積，均在組中，稱爲成一羣. 幾何學乃研究圖形對於某種變易羣的不變性.

(五)二次曲線.　(1)定義.

(1) 若點 P 與定點 F(焦點)距離對於距定線 l(準線)距離的比等於常數 e(離心率)，則點 P 軌跡為二次錐線. 如 $e=1$，則為拋物線，$e<1$ 為橢圓，$e>1$ 為雙曲線.

(2) 一動點 P 距二定點距離和為一定，就是橢圓；差為一定，就是雙曲線.

(II) 二次方程式與二次錐線.

(1) 判別式

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="3">$\Delta\neq0$</td><td colspan="3">$\Delta=0$ (退縮情形)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$-C\Delta$ 或 $-A\Delta$</td><td>$A=0$</td><td colspan="3">$C\neq0$</td></tr>
<tr><td>正</td><td>負</td><td>$C=0$</td><td>$k>0$</td><td>$k=0$</td><td>$k<0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$B^2-4A\cdot C=0$</td><td rowspan="2">拋物線</td><td rowspan="2">* * *</td><td rowspan="2">* * *</td><td colspan="3">二平行直線</td></tr>
<tr><td>(實)</td><td>(相合)</td><td>(虛)</td></tr>
<tr><td>$B^2-4A\cdot C<0$</td><td>橢圓</td><td>虛橢圓</td><td>* * *</td><td rowspan="2">二相交直線</td><td colspan="2">(虛線，也可視為點橢圓)</td></tr>
<tr><td>$B^2-4A\cdot C>0$</td><td colspan="2">雙曲線</td><td>等軸雙曲線</td><td colspan="2">(實線，如 $A=C=0$ 則為垂線)</td></tr>
</table>

(2) 化普通式為標準式法.

第一步: 由 $\tan 2\theta=\dfrac{B}{A-C}$ 以定旋轉時的角 θ,

第二步: 再平移.

(III) 二次錐線之標準式及極方程式，并其要件列如次表.

	拋物線	橢圓	雙曲線
直角坐標方程式(標準式)	$y^2=4px$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm1$
焦點	$(p,0)$	$(\pm c,0)$, $c^2=a^2-b^2$	$(\pm c,0)$, $c^2=a^2+b^2$
離心率	$e=1$	$e=\frac{c}{a}<1$	$e=\frac{c}{a}>1$
準線	$x=-p$	$x=\pm\frac{a}{e}$	$x=\pm\frac{a}{e}$
焦半徑	x_1+p	$a\pm ex_1$	$ex_1\pm a$
正焦弦	$4p$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
直徑	$my-p=0$	$\frac{x}{a^2}+\frac{my}{b^2}=0$	$\frac{x}{a^2}-\frac{my}{b^2}=0$
漸近線	* * *	* * *	$y=\pm\frac{b}{a}x$
切線	$y_1y=2p(x+x_1)$, $y=mx+\frac{p}{2m}$	$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$, $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$	$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=\pm1$, $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$
法線	$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{y_1}{2p}$	$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$	$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$
次切距 次法距	$-2x_1$, $2p$	$\frac{a^2y_1^2}{b^2x_1^2}$, $-\frac{b^2x_1}{a^2}$	$-\frac{a^2y_1^2}{b^2x_1^2}$, $\frac{b^2x_1}{a^2}$
極坐標方程式	$\rho=\frac{2p}{1-\cos\theta}$	$\rho=\frac{e}{1-e\cos\theta}, e=\frac{b^2}{a}$	$\rho=\frac{e}{1-e\cos\theta}, e=-\frac{b^2}{a}$

(六)高次代數曲線.

(I) 三次曲線.

(1) 半三級拋物線. $y^3=ax^2$ 或 $y^2=ax^3$

(2) 箕舌線. $y(x^2+4a^2)=8a^3$ 或 $x=2a\tan\theta$, $y=2a\cos^2\theta$.

(3) 蔓葉線.

(i) 方程式. $y^2(a-x)=x^3$ 或 $\rho=a\sin\theta\tan\theta$.

(ii) 特性: 拋物線的垂足線(頂點為定點),

(4) 環索線.

(i) 方式式. $y^2=x^2\dfrac{a+x}{a-x}$, 或 $\rho=a(2\sec\theta-\cos\theta)$.

(ii) 特性. 拋物線的垂足線(軸與準線交點為定點).

(II) 四次曲線.

(1) 蚌線. $\rho=a\sec\theta\pm b$ 或 $(x^2+y^2)(x-a)^2=b^2x^2$.

(2) 卡西尼卵線. $\rho^4-2a^2\rho^2\cos 2\theta=b^4-a^4$, 或

$$[(x+a)^2+y^2][(x-a)^2+y^2]=b^4.$$

(3) 雙紐線(卽卵線中 $a=b$ 時特例).

方程式. $\rho^2=a^2\cos 2\theta$, 或 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

(4) 蚶線. (方程式中 $a=b$ 時, 叫心臟線).

方程式. $\rho=a+b\cos\theta$; 或 $(x^2+y^2-bx)^2=a^2(x^2+y^2)$.

(III) 高次曲線. 玫瑰線 $\rho=a\sin n\theta$.

(七)超性曲線.

(I) 初等基本函數.

(1) 指數曲線.

(i) 方程式. $y=ab^x$; 特例: $b=e$, $b=10$.

(ii) 機率曲線．$y=e^{-x^2}$．

(iii) 雙曲線函數．與三角函數很相似，共六種．

雙曲線正弦：$y=\sinh x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

雙曲線餘弦：$y=\cosh x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$(也叫懸錘線)

餘可做三角函數關係得成．

(2) 對數曲線．即指數函數的反函數所表的曲線

(i) 方程式．$y=\log_a x$ [特例：$a=e$，$a=10$]．

(ii) 反雙曲線函數．如 $y=\sinh^{-1}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ 等．

(3) 三角函數曲線．

(4) 反三角函數曲線．

(II) 螺線．

(1) 拋物線螺線．$(\rho-a)^2=4ac\theta$．

(2) 阿基米德螺線．$\rho=a\theta$．

(3) 雙曲螺線．$\rho\theta=a$．

(4) 連鎖螺線．$\rho^2\theta=a$．

(5) 對數螺線．$\log\rho=a\theta$．

(III) 擺線．

(1) 擺線．$x=a\theta-b\sin\theta$，$y=a-b\cos\theta$．

$a=b$ 時，爲有尖點的擺線；$a>b$ 時，叫短擺線，無尖點．$a<b$ 時，叫長擺線，曲線有自相交的節點．

(2) 圓上擺線．設動點與動圓心距離爲 b．

(i) 內擺線．$x=(R-r)\cos\theta+b\cos\frac{R-r}{r}\theta$．

$$y=(R-r)\sin\theta-h\sin\frac{R-r}{r}\theta.$$

(ii) 外擺線. $$x=(R+r)\cos\theta-h\cos\frac{R+r}{r}\theta.$$

$$y=(R+r)\sin\theta-h\sin\frac{R+r}{r}\theta.$$

這二種曲線,也有三種情形: 如 $h=r$, 則爲有尖點的圓上擺線; 如 $h<r$, 則無尖點; 如 $h>r$, 則有節點.

附表

(一) 希臘字母表

字母		讀法	字母		讀法	字母		讀法
Α	α	Alpha	Ι	ι	Iota	Ρ	ρ	Rho
Β	β	Beta	Κ	κ	Kappa	Σ	σ, ς	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	Τ	τ	Tau
Δ	δ	Delta	Μ	μ	Mu	Υ	υ	Upsilon
Ε	ε	Epsilon	Ν	ν	Nu	Φ	φ	Phi
Ζ	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	Χ	χ	Chi
Η	η	Eta	Ο	ο	Omicron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

(二) 三角函數本值略表

弧度	度	sin	cos	tan	cot		
.000	0°	.000	1.000	.000	∞	90°	1.571
.017	1°	.017	1.000	.017	57.29	89°	1.553
.035	2°	.035	.999	.035	28.64	88°	1.536
.052	3°	.052	.999	.052	19.08	87°	1.518
.070	4°	.070	.998	.070	14.30	86°	1.501
.087	5°	.087	.996	.088	11.43	85°	1.484
.175	10°	.174	.985	.176	5.67	80°	1.396
.262	15°	.259	.966	.268	3.73	75°	1.309
.349	20°	.342	.940	.364	2.75	70°	1.222
.436	25°	.423	.906	.466	2.14	65°	1.134
.524	30°	.500	.866	.577	1.73	60°	1.047
.611	35°	.574	.819	.700	1.43	55°	.960
.698	40°	.643	.766	.839	1.19	50°	.873
.785	45°	.707	.707	1.000	1.00	45°	.785
		cos	sin	cot	tan	度	弧度

(三) 指數函數表

x	.0		.1		.2		.3		.4	
	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}
0	1.00	1.00	1.11	0.90	1.22	0.82	1.35	0.74	1.49	0.67
1	2.72	0.37	3.00	0.33	3.32	0.30	3.67	0.27	4.06	0.25
2	7.39	0.14	8.17	0.12	9.03	0.11	9.97	0.10	11.0	0.09
3	20.1	0.05	22.2	0.05	24.5	0.04	27.1	0.04	30.0	0.03
4	54.6	0.02	60.3	0.02	66.7	0.02	73.7	0.01	81.5	0.01
5	148	0.01	134	0.01	181	0.01	200	0.00	221	0.00

x	.5		.6		.7		.8		.9	
	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}	e^x	e^{-x}
0	1.65	0.61	1.82	0.55	2.01	0.50	2.23	0.45	2.46	0.41
1	4.45	0.22	4.95	0.20	5.47	0.18	6.05	0.17	6.69	0.15
2	12.2	0.07	13.5	0.07	14.9	0.07	16.4	0.06	18.2	0.05
3	33.1	0.03	36.6	0.03	40.4	0.02	44.7	0.02	49.4	0.02
4	90.0	0.01	99.5	0.01	110	0.01	122	0.01	134	0.01
5	245	0.00	270	0.00	299	0.00	330	0.00	365	0.00

(四) 自然對數表

(I) 小於1各數的自然對數

數	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
對數		7.697	8.391	8.796	9.084	9.307	9.489	9.643	9.777	9.895

表中各對數，皆須減去10．例如 $\log_e 0.4 = 9.084 - 10 = \bar{1}.084$.

(H)　整數(1—100)的自然對數

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	.	6930	6932	1.0986	3863	6094	7918	9459	*0794	1972
1	2.3026	3979	4849	5649	6391	7081	7726	8332	8904	9441
2	2.9957	*0445	0910	1355	1781	2189	2581	2958	3322	3673
3	3.4012	4340	4657	4965	5264	5553	5835	6109	6376	6636
4	3.6889	7136	7377	7612	7842	8067	8286	8501	8712	8918
5	3.9120	9318	9512	9703	9890	*0073	0254	0431	0604	0775
6	4.0943	1109	1271	1431	1589	1744	1897	2047	2195	2341
7	4.2485	2627	2767	2905	3041	3175	3307	3438	3567	3694
8	4.3820	3944	4067	4188	4308	4427	4543	4659	4773	4886
9	4.4998	5109	5218	5326	5433	5539	5643	5747	5850	5951

定位部只在第一行各對數上註明，有星號和其後同行各對數，用下一橫行的定位部.

例如 $\log_e 54=3.9890$，$\log_e 55=4.0073$，$\log_e 58=4.0604$.

(一)中文索引

(二)西文索引

中華民國三十三年十月渝初版
中華民國三十五年八月平一版

新中國教科書 高中平面解析幾何學

第二冊 定價國幣九角
(外埠酌加運費匯費)

編著者 余介石
校訂者 何魯
發行人 吳秉常
印刷所 正中書局
發行所 正中書局

(1852)

平●

0.90