題解中心

三角法辭典

索引

上海新亞書店印行

題解中心

算學辭典

册　　數	五巨册	各附索引一小册
版口大小	長 20 公分	闊 13 公分
裝訂式樣	布面精裝	背脊金字
印刷用紙	上等米色桃林紙	

分册名	定價	出書期
幾何學辭典	四元	已出
代數學辭典	五元五角	已出
三角法辭典	五元	已出
續幾何學辭典	四元	25 年 2 月底
算術辭典	五元五角	25 年 6 月底

題解中心

三角法索引

[附入辭典,不另售]

編譯者　薛德炯　吳載耀

發行者　陳邦楨

印刷者　新亞書店

總發行所　新亞書店
上海河南路中市

中華民國二十八年五月再版

索 引 例 言

●本辭典以問題解法為中心,翻檢之時,有待於靈便之索引,自屬必要.●但本辭典與他種辭典不同,帶有練習問題之性質,故全書順序 [illegible] ,或球面三角法之 [illegible] 深,以期單用本書 [illegible] 專有之特質,故另編 [illegible] ,俾使用辭典者,得隨時檢得所需之問題.●索引之編製,一以問題之種類為歸;分類之法,詳於索引目次,讀者可先詳覽一過,以期瞭然於胸.●檢索之時,明辨所查問題,係屬何種性質,先就目次得其所屬,檢明頁數,再查索引本文,自能檢得所求之題.●但關於本書分類方法,有下列若干條項,應予特別注意.●單角及複角之三角函數中,如恆等式,三角形之性質等問題,為數至夥,故又就 sin., cos., tan., 或其組合,或其次數,而為之分類.●三角形之性質中,關於複雜解法之問題,按其所究之形,以為類別標的,故分為三角形,平行四邊形,梯形等.●測量應用之理論,問題之數,亦不在少,故或則依其所求之目的物,而區分為高,距離等,或則依其題文中之主要物,而區分為仰角,俯角,輕氣球等.●平面三角法中,自 De Moivre 氏定理以後,及球面三角法全部,問題之數,不能謂多,故索引之順序,一仍辭典之舊貫.

三角法辭典索引

目　次

第一門　平面三角之部

第二門 球面三角之部

三角法辭典

(索引)

第一門 平面三角之部

第一 測角法

I. 六十分法

II. 弧度法

III. 六十分法與百分法

IV. 六十分法與弧度法

V. 百分法與弧度法

VI. 六十分法，百分法，與弧度法

VII. 雜

第二　銳角之三角函數

I. 關於直角三角形之三角函數

(1) 算術的數值

(2) 代數的數値

II. 關於正方形,四邊形之三角函數

III. 餘角之三角函數

IV. 三角形之證明的關係

V. 角之三角函數

VI. 知函數之一求其他

(1) sin. 已知

(2) cos. 已知

(3) tan. 已知

(4) cot. 已知

(5) sec. 已知

(6) cosec. 已知

(7) vers 已知

VII 單角之恆等式

(1) sin. cos. 二次

(2) sin. cos. 三次

(3) sin. cos. 四次

(4) sin. cos. 六次

(5) sin. cos. 八次

(6) sin. cos. 分數式

(7) sin. tan.

(8) sin. cot.

(9) sin. sec.

(10) cos. sec.

(11) cos. tan.

(12) cos. cot.

(13) cos. cosec.

(14) tan. sec.

(15) tan. cosec.

(16) cot. cosec.

(17) sec. cosec.

(18) sin. cos. tan.

●$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}$ **219**

(19) sin. cos. cot.

●$\sin A\cot A=\cos A$ **144**

●$(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)$ ... **201**

●$\dfrac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1-\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\cot\theta$ **254**

(20) sin. cos. cosec.

●$\sin A\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}=\cos A$ **165**

●$\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$ ... **220**

(21) sin. tan. sec.

●$\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}=(\sec A-\tan A)^2$ **196**

●$\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$ **197**

(22) tan. cot.

●$\tan A(1-\cot^2 A)+\cot A(1-\tan^2 A)=0$ **211**

●$(1+\tan A+\tan^2 A)(1-\cot A+\cot^2 A)=\tan^2 A+\cot^2 A+1$
... ... **217**

●$\dfrac{\tan A+\tan B}{\cot A+\cot B}=\tan A\tan B$ **234**

●$\dfrac{\cot\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha+\cot\beta}=\cot\alpha\tan\beta$ **235**

●$\dfrac{\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}=\dfrac{\cot\beta}{\cot\beta-\cot\alpha}$ **238**

●$\dfrac{1}{1+\tan^2 A}+\dfrac{1}{1+\cot^2 A}=1$ **182**

(23) sin. cot. sec.

●$\cot A\cdot\sec A\cdot\sin A=1$ **145**

●$\cot^2\theta\cdot\dfrac{\sec\theta-1}{1+\sin\theta}+\sec^2\theta\cdot\dfrac{\sin\theta-1}{1+\sec\theta}=0$ **216**

(24) sin. cot. cosec.

●$\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A-\cot A}-\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}$ **248**

(25) cos. cot. cosec.

(26) tan. sec. cosec.

(27) sin. cos. tan. cot.

(28) sin. cos. tan. sec.

(29) sin. cos. cot. cosec.

● $\operatorname{cosec} A-\sin A=\cot A\cos A$ **173**

(30) sin. cos. sec. cosec.

● $(\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta)(\sin\theta+\cos\theta)=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta+2$ ... **184**

● $(\sin A+\sec A)^2+(\cos A+\operatorname{cosec} A)^2=(1+\sec A\operatorname{cosec} A)^2$
... ... **244**

● $\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A-\sec^2 A-2\cos^2 A=(\sin^4 A+\cos^4 A)\operatorname{cosec}^2 A$
... ... **2976**

● $\sin^3 A+\cos^3 A+\sec^3 A+\operatorname{cosec}^3 A=(\sin A+\cos A)(1-\sin A\times\cos A)(1+\sec^3 A\operatorname{cosec}^3 A)$ **2979**

● $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$ **236**

● $\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{\sec\theta\operatorname{cosec}\theta}{2}\left(\dfrac{\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta}-\dfrac{\operatorname{cosec}\theta-\sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta}\right)$ **266**

● $\dfrac{(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2}{\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A}=1+2\sin A\cos A$ **225**

● $\left(\dfrac{1}{\sec^2 A-\cos^2 A}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 A-\sin^2 A}\right)\cos^2 A\sin^2 A$
$=\dfrac{1-\cos^2 A\sin^2 A}{2+\cos^2 A\sin^2 A}$ **251**

(31) sin. tan. sec. cosec.

● $\sin\theta\tan^2\theta+\operatorname{cosec}\theta\sec^2\theta-2\tan\theta\sec\theta=\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta$
... ... **204**

(32) sin. tan. cot. sec.

● $\dfrac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A}\cdot\dfrac{1+\cot^2 A}{\cot^2 A}=\sin^2 A\sec^2 A$ **213**

(33) cos. tan. cot. sec.

● $(\cos^2 A+\cot^2 A)\tan^2 A=\sec^2 A+(\cos^2 A-1)\tan^2 A$ ... **228**

● $\dfrac{\sec A}{\cos A}-\dfrac{\tan A}{\cot A}=1$ **186**

(34) cos. cot. sec. cosec.

● $\cos A\cot^2 A+\sec A\operatorname{cosec}^2 A-2\cot A\operatorname{cosec} A=\sec A-\cos A$
... ... **2977**

● $(\sec A\cot A+1)(\sec A\cot A-1)=\cos^2 A\operatorname{cosec}^2 A$ **259**

(35) tan. cot. sec. cosec.

(36) 含五函數者

(37) 含六函數者

(38) 含 vers. 者

VIII. 餘角

(1) 恆等式

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

(3) 式之值

IX. 關係式

X. 等式

(1) 條件等式

● $\frac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\sin^4\alpha}{\sin^2\beta}=1$ 時，$\frac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1$ **392**

● $\frac{\cos^3\theta}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\theta}{\sin\alpha}=1$ 時，$\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}-\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+1\right)=0$ **393**

● $m\sin\alpha=n\cos\alpha$ 時，$\sin\alpha=\pm\frac{n}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$ ... **2971**

● $\tan\alpha+\sin\alpha=m$，$\tan\alpha-\sin\alpha=n$ 時，$\cos\alpha=(m-n)/(m+n)$ **2972**

● $\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2+(\cos\alpha\cos\gamma)^2=1$ 時，$\sin\gamma=\tan\alpha\cot\beta$ **2988**

● $\tan^2\theta-\sec^2\alpha=1$ 時，$\sec\theta+\tan^3\theta\operatorname{cosec}\theta=(3+\tan^2\alpha)^{\frac{3}{2}}$ **2992**

● $(1+2\cos^{\frac{2}{3}}\alpha)(1+2\cos^{\frac{2}{3}}\beta)=3$ 時，$\frac{(1+8\cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3\alpha\cos\alpha}=\frac{(1+8\cos^2\beta)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3\beta\cos\beta}$ **2989**

● $(1+\sin\theta)(1+\sin\phi)(1+\sin\psi)=\cos\theta\cos\phi\cos\psi$ 時，$\sec^2\theta+\sec^2\phi+\sec^2\psi=1+2\sec\theta\sec\phi\sec\psi$ ... **2994**

● $\cos\theta+\cos\phi+\cos\psi+\cos\theta\cos\phi\cos\psi=0$ 時，$\operatorname{cosec}^2\theta+\operatorname{cosec}^2\phi+\operatorname{cosec}^2\psi\pm2\operatorname{cosec}\theta\operatorname{cosec}\phi\operatorname{cosec}\psi=1$ **2993**

● $\left(\frac{\tan\alpha}{\sin\theta}-\frac{\tan\beta}{\tan\theta}\right)^2=\tan^2\alpha-\tan^2\beta$ 時，$\cos\theta=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$ **2996**

● $\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\alpha}+\frac{\tan^2\phi}{\tan^2\beta}=1$ 及 $\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\phi}{\sin\beta}$ 時，

$\sin\theta=\frac{\pm\sin\alpha}{\sqrt{(1\pm\cos\alpha\cos\beta)}}$ **2997**

● $\sin x\sin y=\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$，$\cos x\cos y=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma$，及 $\cos^2x+\cos^2y=1+\cos^2(\alpha+\beta+\gamma)$ 時，$\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2\gamma=\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)$ **2995**

(2) 等 式

● $\sec A\operatorname{cosec}(90^\circ-A)-x\cot(90^\circ-A)=1$ 時，求 x **349**

● $\sec A\operatorname{cosec}(90^\circ-A)-x\cot(90^\circ-A)=1$ 時，求 x **2984**

● $x\sin(90^\circ-A)\cot(90^\circ-A)=\cos(90^\circ-A)$，求 x... **2983**

● $x\sin45^\circ\cos45^\circ\tan60^\circ=\tan^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ+\sin180^\circ$

XI. 式之表示

第三 普偏角

I. 關於象限者

II. 以最小正角表示

III. 求三角函數之值

IV. 簡 化

V. 求

VI. 追跡

VII. 求證

VIII. 作角

IX. 求公式

第四 和及差之公式

I. 恆等式

(1) sin.

● $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$ … … … **585**

● $\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=\sin 2\alpha\sin 2\beta$ … … **591**

● $\sin(\alpha+\beta)\sin 3(\alpha-\beta)=\sin^2(2\alpha-\beta)-\sin^2(2\beta-\alpha)$ **587**

● $\sin(\beta-\alpha)\sin(\delta-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)\sin(\delta-\alpha)=-\sin(\gamma-\alpha)$
$\times\sin(\beta-\delta)$ … … … … … … … … **872**

● $\sin(\delta-\beta)\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)\sin(\alpha-\delta)+\sin(\gamma-\delta)\sin(\alpha$
$-\beta)=0$ … … … … … … … … **1140**

● $\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin\gamma$ …
… … … … … … … … … … **1137**

● $\sin 3\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin 3\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin 3\gamma\sin(\alpha-\beta)=4$
$\times\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ … **875**

● $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$ … … … … … **711**

● $4\sin A\sin(60^\circ-A)\sin(60^\circ+A)=\sin 3A$ … … **714**

● $\sin^3 A+\sin^3(120^\circ+A)+\sin^3(240^\circ+A)=-\frac{3}{4}\sin 3A$ **715**

● $\sin^3\alpha+\sin^3(120^\circ+\alpha)-\sin^3(120^\circ-\alpha)=-\frac{3}{4}\sin 3\alpha$ **941**

● $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)=-4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$
$\times\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$ … … … … … … … … **813**

● $\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta$
$+\gamma)=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ … … … … … **820**

● $\sin(2x+\theta)+\sin(2y+\theta)+\sin(2z+\theta)-\sin(2x+2y+2z$
$+3\theta)=4\sin(x+y+\theta)\sin(y+z+\theta)\sin(z+x+\theta)$ **823**

● $\sin\alpha\sin\beta\sin(\beta-\alpha)+\sin\beta\sin\gamma\sin(\gamma-\beta)+\sin\gamma\sin\alpha$
$\times\sin(\alpha-\gamma)+\sin(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\beta)\sin(\alpha-\gamma)=0$ **1138**

● $\sin A\sin B\sin(A-B)+\sin B\sin C\sin(B-C)+\sin C\sin A$
$\times\sin(C-A)=\frac{1}{4}\{\sin(2A-2B)+\sin(2B-2C)+\sin(2C$
$-2A)\}$ … … … … … … … … … **1142**

● $\sin 5\alpha=16\sin^5\alpha-20\sin^3\alpha+5\sin\alpha$ … … … **738**

● $16\sin^5\alpha=\sin 5\alpha-5\sin 3\alpha+10\sin\alpha$ … … **840**

● $\sin 6\alpha=\cos\alpha(6\sin\alpha-32\sin^3\alpha+32\sin^5\alpha)$ … **739**

● $\sin 7\alpha=7\sin\alpha-56\sin^3\alpha+112\sin^5\alpha-64\sin^7\alpha$ **740**

● $-64\sin^7\alpha=\sin 7\alpha-7\sin 5\alpha+21\sin 3\alpha-35\sin\alpha$ …
… … … … … … … … … … … **842**

● $\{\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\beta+\gamma)\}\{\sin\gamma+\sin\alpha-\sin(\gamma+\alpha)\}$
$\times\{\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)\}=16\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}$
$\times\{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\}$ … … **824**

● $\sqrt{1+\sin\alpha}=1+2\sin\frac{\alpha}{4}\sqrt{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$ … … … **691**

(2) cos.

● $\cos^2 A+\cos^2(60^\circ+A)+\cos^2(60^\circ-A)=\frac{3}{2}$ **674**

● $1+\cos 3a\cos 5a=\cos^2 4a+\cos^2 a$ **596**

● $\cos^2 A+\cos^2(120^\circ+A)+\cos^2(120^\circ-A)=\frac{3}{2}$ **670**

● $\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos(B+C)\cos(B-C)+\cos(A+C)$
$\times\cos(A-C)=\cos 2A$ **854**

● $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$ **716**

● $4\cos A\cos(60^\circ-A)\cos(60^\circ+A)=\cos 3A$ **719**

● $\cos^3 A+\cos^3(120^\circ+A)+\cos^3(120^\circ-A)=\frac{3}{4}\cos 3A$ ... **725**

● $1+\cos a+\cos 2a+\cos 3a=2\cos a(2\cos^2 a+\cos a-1)$
... ... **718**

● $\cos 2a+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+\cos 2(a+\beta+\gamma)=4\cos(a+\beta)$
$\times\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+a)$ **801**

● $\cos(a+\beta+\gamma)+\cos(a+\beta-\gamma)+\cos(a+\gamma-\beta)+\cos(\beta+\gamma$
$-a)=4\cos a\cos\beta\cos\gamma$ **828**

● $\cos 2a\cos^2(\beta+\gamma)+\cos 2\beta\cos^2(\gamma+a)+\cos 2\gamma\cos^2(a+\beta)$
$=\cos 2a\cos 2\beta\cos 2\gamma+2\cos(\beta+\gamma)\cos(\gamma+a)\cos(a+\beta)$
... ... **829**

● $\cos 4A=8\cos^4 A-8\cos^2 A+1$ **737**

● $8\cos^4 a=\cos 4a+4\cos 2a+3$ **844**

● $\cos 10A+\cos 8A+3\cos 4A+3\cos 2A=8\cos A\cos^3 3A$ ...
... ... **795**

● $\cos 5a=16\cos^5 a-20\cos^3 a+5\cos a$ **738**

● $16\cos^5 a=\cos 5a+5\cos 3a+10\cos a$ **845**

● $\cos 6a=-(1-18\cos^2 a+48\cos^4 a-32\cos^6 a)$ ... **739**

● $32\cos^6 a=\cos 6a+6\cos 4a+15\cos 2a+10$ ... **846**

● $16(\cos^6 A-\sin^6 A)=\cos 6A+15\cos 2A$ **1049**

● $\cos 7a=-7\cos a+56\cos^3 a-112\cos^5 a+64\cos^7 a$ ...
... ... **740**

● $64\cos^7 a=\cos 7a+7\cos 5a+21\cos 3a+35\cos a$ **847**

● $128\cos^8 a=\cos 8a+8\cos 6a+28\cos 4a+56\cos 2a+35$
... ... **848**

● $\cos a\cos(\frac{2}{3}\pi+a)\cos(\frac{2}{3}\pi-a)=\frac{1}{4}\cos 3a$ **3014**

● $\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ **754**

● $\cos A\cos B=\cos^2\frac{A+B}{2}+\cos^2\frac{A-B}{2}-1$ **588**

● $\cos 2a=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-a\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$ .. . **676**

● $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{2}=2\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$ **760**

(3) tan.

● $\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)=2\tan 2A$ 706

● $\tan A+\tan(60^\circ+A)+\tan(120^\circ+A)=3\tan 3A$ ... 733

● $\tan 3\theta-\tan 2\theta-\tan\theta=\tan 3\theta\tan 2\theta\tan\theta$ ... 621

● $\tan 2A\tan 3A\tan 5A=\tan 5A-\tan 3A-\tan 2A$ 622

● $\tan(p+q)A-\tan pA-\tan qA=\tan(p+q)A\tan pA\tan qA$ 623

● $\tan A\tan(60^\circ+A)\tan(120^\circ+A)=-\tan 3A$ ... 720

● $\tan\theta+\tan\left(\frac{\pi}{5}+\theta\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{5}+\theta\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{5}+\theta\right)$
$+\tan\left(\frac{4\pi}{5}+\theta\right)=5\tan 5\theta$ 745

● $\tan(45^\circ\pm A)=\dfrac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$ 630

● $\tan(A+45^\circ)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$, $\tan(A-45^\circ)=\dfrac{\tan A-1}{\tan A+1}$ 629

● $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ 703

● $\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$ 731

● $\dfrac{\tan 4A-\tan 3A}{1+\tan 4A\tan 3A}=\tan A$ 626

● $\dfrac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\tan\alpha$ 619

● $\dfrac{\tan(n+1)A-\tan nA}{1+\tan(n+1)A\tan nA}=\tan A$ 627

● $\tan(A-B)=(\tan A-\tan B)/(1+\tan A\tan B)$ ... 624

● $\tan(A+B+C)=(\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C)$
$/(1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A)$ ... 636

● $\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^4 x}=\dfrac{\tan^2 2x}{2+\tan^2 2x}$ 3010

● $\tan(A+B)=(\tan A+\tan B)/(1-\tan A\tan B)$ ... 613

● $\dfrac{\tan(n+1)A+\tan(1-n)A}{1-\tan(n+1)A\tan(1-n)A}=\tan 2A$ 620

● $\tan 4A=(4\tan A-4\tan^3 A)/(1-6\tan^2 A+\tan^4 A)$ 703

● $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$ 904

(4) cot.

● $\cot A+\cot(60^\circ+A)+\cot(120^\circ+A)=3\cot 3A$ ... 735

(5) sec. 或 cosec.

(6) sin. cos.

$\times\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}=2\sin\frac{\gamma-\delta}{2}\cdot\sin\frac{\delta-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)/2\}$ **873**

● $2\sin^2\alpha\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}+2\sin^2\beta\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}+2\times\sin^2\gamma\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=-(\cos\alpha-\cos\beta)(\cos\beta-\cos\gamma)\times(\cos\gamma-\cos\alpha)$ **883**

● $\sin(A-B)\cos(C-B)\cos(A-C)+\sin(B-C)\cos(A-C)\cos(B-A)+\sin(C-A)\cos(B-A)\cos(C-B)=\frac{1}{4}\{\sin(2B-2A)+\sin(2C-2B)+\sin(2A-2C)\}$ **1143**

● $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-4\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma=2\sin\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\pi)\{\cos\frac{1}{4}(3\alpha-\beta-\gamma+\pi)+\cos\frac{1}{4}(3\beta-\gamma-\alpha+\pi)+\cos\frac{1}{4}(3\gamma-\alpha-\beta+\pi)+\cos\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma-\pi)\}$ ... **884**

● $\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\sin 3A}{\cos A}=2$ **1033**

● $\frac{\sin 19\alpha+\sin 17\alpha}{\sin 10\alpha+\sin 8\alpha}=2\cos 9\alpha$ **810**

● $\frac{\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=1+2\sin 2\alpha$ **723**

● $\sin(A+B)-\frac{\sin(2A+B)-\sin B}{2\cos A}=\frac{\sin B}{\cos A}$ **855**

● $\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}=\frac{\cos A+\cos B}{\sin B-\sin A}$ **788**

● $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)$ **870**

● $\frac{\sin 3\alpha\sin 2\beta-\sin 3\beta\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha\sin\beta-\sin 2\beta\sin\alpha}=1+4\cos\alpha\cos\beta$ ... **730**

● $\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\sin(2A+B)}{\sin A}-2\cos(A+B)$ **554**

● $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha=\frac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{2\sin\alpha}$ **849**

● $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\tan 4\alpha$ **811**

● $\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A=\frac{\sin 8A}{2\sin A}=4\cos A\cos 2A\times\cos 4A$ **850**

● $\cos A+\cos 2A+\cos 3A=\cos 2A\sin\frac{3}{2}A/\sin\frac{1}{2}A$ ... **1123**

● $\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\cos\alpha+\frac{\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}\cos\beta+\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\beta)}\cos\gamma=\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ ... **885**

(7) sin. tan.

(8) sin. cot.

(9) sin. sec.

● $\frac{\sec\theta-1}{\sec\theta}=2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ 681

(10) cos. tan.

● $\frac{\tan\theta\tan\phi+1}{1-\tan\theta\tan\phi}=\frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos(\theta+\phi)}$ 578

● $\frac{\tan 5A+\tan 3A}{\tan 5A-\tan 3A}=4\cos 2A\cos 4A$ 1038

● $\frac{\cos A+\cos B}{\cos B-\cos A}=\cot\frac{A+B}{2}\cot\frac{A-B}{2}$ 772

● $\tan(\alpha+60^\circ)\tan(\alpha-60^\circ)=\frac{1+2\cos 2\alpha}{1-2\cos 2\alpha}$ 1099

● $\tan(30^\circ+\frac{1}{2}\alpha)\tan(30^\circ-\frac{1}{2}\alpha)=\frac{2\cos\alpha-1}{2\cos\alpha+1}$ 656

(11) cos. cot.

● $\cos 2A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ 699

● $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$ 685

● $\frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{\cos(A-B)-\cos(A+B)}=\cot A\cot B$ 575

● $\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B$

$=1-\frac{\cos(A+B+C)}{\cos A\cos B\cos C}$ 987

(12) tan. cot.

● $\tan A-\cot A=-2\cot 2A$ 709

● $2\cot\alpha=\cot\frac{1}{2}\alpha-\tan\frac{1}{2}\alpha$ 710

● $\tan A+2\tan 2A+4\cot 4A=\cot A$ 1050

● $\tan A+2\tan 2A+4\tan 4A+8\cot 8A=\cot A$ ... 1078

● $\tan\alpha+2\tan 2\alpha+4\tan 4\alpha=\cot\alpha-8\cot 8\alpha$ ... 707

● $\frac{1-\cot\gamma\tan\delta}{\cot\gamma+\tan\delta}=\tan(\gamma-\delta)$ 582

● $\frac{1+\cot\gamma\tan\delta}{\cot\gamma-\tan\delta}=\tan(\gamma+\delta)$ 581

● $\frac{1+\tan 2A\tan A}{\tan A+\cot A}=\frac{1}{2}\tan 2A$ 1045

(17) sin. cos. tan.

● $(3-4\sin^2 A)(1-3\tan^2 A)=(3-\tan^2 A)(4\cos^2 A-3)$ ... 3006

● $\{\tan(A+B)+\tan(A-B)\}(\cos 2A+\cos 2B)=2\sin 2A$ ... 1133

● $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\{\sin 3\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin 3\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin 3\gamma\sin(\alpha-\beta)\}/\{\cos 3\alpha\sin(\beta-\gamma)+\cos 3\beta\sin(\gamma-\alpha)+\cos 3\gamma\sin(\alpha-\beta)\}$ ... 877

● $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$ ... 688

● $\dfrac{3\sin A+\sin 3A}{\cos 3A+3\cos A}=\tan^3 A$ ... 721

● $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ ... 778

● $\dfrac{\sin 2\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\cos 2\theta}=\tan\dfrac{3\theta}{2}$ ... 775

● $\dfrac{1-\cos A}{\sin A}=\tan\frac{1}{2}A$ ... 678

● $\dfrac{\cos 2A-\cos 4A}{\sin 4A-\sin 2A}=\tan 3A$ ... 792

● $\dfrac{\cos A-\cos 3A}{\sin 3A-\sin A}=\tan 2A$ ... 791

● $\tan(A+45^\circ)=\dfrac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}$, $\tan(A-45^\circ)=\dfrac{\sin A-\cos A}{\sin A+\cos A}$ ... 629 注意

● $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A}$ ... 214

● $\dfrac{1+\sin A}{1+\cos A}=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan\dfrac{A}{2}\right)^2$ ... 677

● $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}$ ... 658

● $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1+\tan\frac{1}{2}\theta}{1-\tan\frac{1}{2}\theta}$ ... 680

● $\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}=\tan 3A$ ... 793

● $\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\tan\dfrac{A+B}{2}$ ... 774

● $\dfrac{\cos B-\cos A}{\sin A-\sin B}=\tan\dfrac{A+B}{2}$ ... 776

● $\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}=\tan\dfrac{B-A}{2}$ ... 779

(18) sin. cos. cot.

● $\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=\cot\frac{1}{2}A$ … … .. … … … .. **679**

● $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ … … … … … … **785**

● $\dfrac{\sin 3\theta+\sin 2\theta}{\cos 3\theta-\cos 2\theta}=-\cot\dfrac{\theta}{2}$ … … … … … **786**

● $\dfrac{\sin 2\theta-\sin\theta}{\cos\theta-\cos 2\theta}=\cot\dfrac{3\theta}{2}$ … … … … … … **784**

● $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\beta}=\dfrac{\cot\frac{1}{2}\theta+1}{\cot\frac{1}{2}\theta-1}$ … … … … … … **673**

● $\cot(A+B)=\dfrac{\cos 2A+\cos 2B}{\sin 2A+\sin 2B}$ … … … … … **782**

● $\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin B-\sin A}=\cot\dfrac{B-A}{2}$ … … … … … … **787**

● $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos B-\cos A}=\cot\dfrac{A+B}{2}$ … … … … .. … **783**

● $\dfrac{\cos A+\cos B}{\sin A+\sin B}=\cot\dfrac{A+B}{2}$ … … … … … … **781**

● $\dfrac{\sin^2 A+\cos 2A+\cos^2 A}{\sin 2A}=\cot A$ … … … … **1036**

● $\dfrac{1+\cos\theta+\cos\frac{1}{2}\theta}{\sin\theta+\sin\frac{1}{2}\theta}=\cot\dfrac{\theta}{2}$ … … … … … **657**

● $\dfrac{\cos 7\theta+\cos 3\theta-\cos 5\theta-\cos\theta}{\sin 7\theta-\sin 3\theta-\sin 5\theta+\sin\theta}=\cot 2\theta$ … … **809**

● $\dfrac{\sin(A+30^\circ)+\sin(B-30^\circ)}{\cos A-\cos B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cot\dfrac{B-A}{2}+\dfrac{1}{2}$ … **805**

(19) 其他三角函數

● $\dfrac{\sin A+\sin 5A}{\sin 4A+\sin 2A}=2\cos A-\sec A$ … … … **1122**

● $\sin(2\alpha+\beta)\operatorname{cosec}\alpha-2\cos(\alpha+\beta)=\sin\beta\operatorname{cosec}\alpha$ … **604**

● $\operatorname{cosec}A=\dfrac{2\sin 2A+2\cos 2A}{\cos A-\sin A-\cos 3A+\sin 3A}$ … … **770**

● $\cot^2 A-\tan^2 A=\dfrac{4\cot 2A}{\sin 2A}$ … … … … … **1034**

● $\tan A+\cot A=\dfrac{2}{\sin 2A}$ … … .. .. … … **697**

● $\dfrac{2\tan A-\sin 2A}{2\cot A-\sin 2A}=\tan^4 A$ … … … … … **1044**

● $\dfrac{\tan A\cot B+1}{\tan A\cot B-1}=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$ … … … … … **577**

(20) 四函數或 vers.

II. 簡　化

III. 求　値

(1)　求 sin

(2) 求 cos.

(3) 求 tan.

(4) 求 cot.

(5) 求 sec.

(6) 求 cosec.

(7) 求式之值

IV. 式之表示

(1) 表

(2) 表爲和或差

(3) 表成積之形

V. 條件等式

(1) 知角之關係者

(2) 等式不含三角函數者

●$\cos 60^\circ=\sin 36^\circ\cos A$, $\cos 36^\circ=\sin 60^\circ\cos B$, 及 $\cos C=\cos A\cos B$ 時, $A+B+C$ 之一值爲 90° ... **1175**

●$\sin A=\sin B$, $\cos A=\cos B$ 時, A 與 B 相等,或其差爲正或負 4 直角之若干倍 **552**

●$\dfrac{6\sin B}{\cos(A+B)}=\dfrac{3\sin 2B}{\cos(A+2B)}=\dfrac{2\sin 3B}{\cos(A+3B)}$ 時, 不能命 B 爲 $n\pi$ 外之任意值 **1085**

●$\operatorname{vers}\alpha=x$, $\operatorname{vers}\beta=mx$, $\operatorname{vers}\gamma=1-m$, $\alpha+\beta=\gamma$ 時, $x=1\pm\sqrt{\dfrac{2m}{1+m}}$ **1004**

(3) 含一三角函數者

●α,β,γ 及 x 爲任意角時, $\sin(2\alpha+x)+\sin(2\beta+x)+\sin(2\gamma+x)-\sin(2\alpha+2\beta+2\gamma+3x)=4\sin(\alpha+\beta+x)\sin(\beta+\gamma+x)\sin(\gamma+\alpha+x)$ **1145**

●$\cos(\phi-\alpha)$, $\cos\phi$, $\cos(\phi+\alpha)$ 成調和級數時, $\cos\phi=\sqrt{2}\times\cos\frac{1}{2}\alpha$ **1157**

●$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ 時, $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=12\times\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ **1103**

●$x=y\cos R+z\cos Q$, $y=z\cos P+x\cos R$ 及 $P+Q+R=(2n+1)\pi$ 時, $z=x\cos Q+y\cos P$, 及 $\cos P=\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}$, 但 n 爲正整數 **603**

●$\dfrac{\cos\theta\cos\frac{\phi}{2}}{\cos\left(\theta-\frac{\phi}{2}\right)}+\dfrac{\cos\phi\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\left(\phi-\frac{\theta}{2}\right)}=1$ 時, $\cos\theta+\cos\phi=1$ **1153**

●$\tan A=1$, $\tan B=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 時, $\tan(A+B)=2+\sqrt{3}$ ... **616**

●$\tan A=\frac{5}{6}$, $\tan B=\frac{1}{11}$ 時, $\tan(A+B)=1$ **615**

●$\tan\alpha=\frac{1}{7}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$ 時, $\tan(\beta-2\alpha)=\frac{2}{11}$ **705**

●$\tan A=m$, $\tan B=\dfrac{1}{m}$ 時, $\tan(A+B)=\infty$ **618**

●$\tan\alpha=\dfrac{m}{m+1}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{2m+1}$ 時, $\tan(\alpha+\beta)=1$ **617**

●$\tan 2\alpha=\dfrac{2(ab+cd)}{a^2-b^2+c^2-d^2}$, $\tan 2\beta=\dfrac{2(ac+bd)}{a^2-c^2+b^2-d^2}$ 時, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{b-c}{a+d}$ **1108**

(4) 含 sin. cos. 者

... ... **1128**

● $m\sin(\theta+\phi)=\cos(\theta-\phi)$ 時，$\dfrac{1}{1-m\sin 2\theta}+\dfrac{1}{1-m\sin 2\phi}$

$=\dfrac{2}{1-m^2}$ **1154**

● $a\sin\alpha+b\sin\beta+c\sin\gamma=0$, $a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=0$

時，$\dfrac{\sin(\beta-\gamma)}{a}=\dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{b}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{c}$ **606**

● $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\dfrac{a}{b}$，及 $\dfrac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\dfrac{a'}{b'}$ 時；$\cos(\alpha-\beta)$

$=\dfrac{aa'+bb'}{ab'+a'b}$ **1002**

●對於 θ 之一切值，$\dfrac{A\cos(\theta+\alpha)+B\cos(\theta+\beta)}{A'\sin(\theta+\alpha)+B'\cos(\theta+\beta)}$ 爲同値時，

$AA'-BB'=(A'B-AB')\sin(\alpha-\beta)$ **3015**

● $\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}$，及 $\cos\phi$
$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\sqrt{(1-c^2\sin^2\phi)}$ 時，$\cos\theta+\cos\phi$

$=\dfrac{2\cos\alpha\cos\beta}{1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$ **1081**

● $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1$，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，及

$\cos A\cos\alpha+\cos B\cos\beta+\cos C\cos\gamma=0$ 時，$\dfrac{\sin\alpha\sin 2\alpha}{\cos A}$

$+\dfrac{\sin\beta\sin 2\beta}{\cos B}+\dfrac{\sin\gamma\sin 2\gamma}{\cos C}+\dfrac{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos A\cos B\cos C}=0$ ...

... ... **1079, 2990.**

(5) 含 sin. tan. 者

● $\tan A=2\tan B$ 時，$\sin(A+B)=3\sin(A-B)$ ... ...
... ... **986, 2990**

● $\tan^2x=\tan(\alpha+x)\tan(\alpha-x)$ 時，$\sin 2x=\sqrt{2}\sin\alpha$...
... ... **1082**

● $\tan^2x=\tan(\alpha+x)\tan(\alpha-x)$ 時，$\sin 2x=\sqrt{2}\sin\alpha$
... ... **1006**

● $\sin(\beta+\gamma-\alpha)$，$\sin(\gamma+\alpha-\beta)$，$\sin(\alpha+\gamma-\gamma)$ 成等差級數
時，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，$\tan\gamma$ 亦成等差級數 **887**

● $\tan\beta$，$\tan 2\beta$，$\tan\alpha$ 成等差級數時，$\tan(\alpha-\beta)=\sin 2\beta$
... ... **1017**

● $\tan A=a$，$\tan B=b$ 時，$\sin(A+B)=\dfrac{a+b}{\sqrt{\{(1+a^2)(1+b^2)\}}}$

... ... **610**

(6) 含 sin cot. 者

$\times \cot AC$ 時, $\sin AB : \sin BC = \sin AD : \sin DC$ ... **611**

●$\cot\alpha$, $\cot\beta$, $\cot\gamma$ 成等差級數時, $\cot(\beta-\alpha)$, $\cot\beta$, $\cot(\beta-\gamma)$ 亦成等差級數,又 $\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha}$, $\frac{\sin(\gamma+\alpha)}{\sin\beta}$, $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma}$ 亦成等差級數... ... ... **643**

●A, B, C 爲任意數, α, β, γ 爲適合 $A\cot\alpha+B\cot\beta+C\cot\gamma=(A+B+C)\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$, $(B+C)\cot\beta\cot\gamma+(C+A)\times\cot\gamma\cot\alpha+(A+B)\cot\alpha\cot\beta=0$ 之角時, $A\sin 2\alpha+B\sin 2\beta+C\sin 2\gamma=0$ **1172**

(7) 含 cos. tan. 者

●$\tan\alpha=\frac{n}{m}$ 時, $\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}+\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}=\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$ ... **1106**

●$\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$ 時, $\tan^2\frac{\theta}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$ **1105**

●$\cos\theta=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1-\cos\alpha\cos\beta}$ 時, $\tan\frac{\theta}{2}=\pm\tan\frac{\alpha}{2}\Big/\tan\frac{\beta}{2}$ **687**

●$\cos\theta=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ 時, $\tan^2\frac{\theta}{2}=\tan^2\tfrac{1}{2}\alpha\tan^2\tfrac{1}{2}\beta$ **1104**

●$\cos\theta=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}$ 時, $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$ ... **1097**

●$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{\alpha}{2}$, $r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ 時, $\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{a(1-e)}\times\cos\frac{\alpha}{2}$ **1098**

●$\tan^2\theta=2\tan^2\phi+1$ 時, $\cos 2\phi=2\cos 2\theta+1$ ... **669**

●$\frac{\tan^2\alpha}{\tan^2\beta}=\frac{\cos\beta(\cos x-\cos\alpha)}{\cos\alpha(\cos x-\cos\beta)}$ 時, $\tan^2\frac{x}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}$ **1060**

●$\tan\theta\tan\phi=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ 時, $(a-b\cos 2\theta)(a-b\cos 2\phi)=a^2-b^2$ **1096**

●$\cos A=\frac{a\cos B-b}{a-b\cos B}$ 時, $\frac{\tan^2\frac{1}{2}A}{\tan^2\frac{1}{2}B}=\frac{a+b}{a-b}$, 或 $\frac{\tan\frac{1}{2}A}{\sqrt{(a+b)}}=\frac{\tan\frac{1}{2}B}{\sqrt{(a-b)}}$ **1051**

●若 $x\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=x\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=x$

(8) 含他二函數者

(9) 含 sin. cos. tan. 者

●$b\sin(x+\theta)=c\sin(y-\theta)$, $b\cos x=c\cos y$ 時, $2\tan\theta=\tan y-\tan x$ **602**

●$\dfrac{\tan\theta}{\tan\alpha}=\dfrac{1+\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta}$ 時, $\sin(3\theta+\alpha)=7\sin(\theta-\alpha)$... **1075**

●$\tan\dfrac{z}{2}=\tan\dfrac{x}{2}\tan\dfrac{y}{2}$ 時, $\tan z=\dfrac{\sin x\sin y}{\cos x+\cos y}$... **1148**

●$\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tan\dfrac{\alpha}{2}$, $r=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ 時, $\sqrt{r}\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{a(1+e)}\times\sin\dfrac{\alpha}{2}$ **1098**

●$\sin^2\phi=\dfrac{\cos 2\alpha\cos 2\alpha'}{\cos^2(\alpha+\alpha')}$ 時, $\tan^2\frac{1}{2}\phi=\dfrac{\tan(\frac{1}{4}\pi\pm\alpha)}{\tan(\frac{1}{4}\pi\pm\alpha')}$ **1150**

●$2\tan A=3\tan B$ 時, $\tan(A-B)=\dfrac{\tan B}{2+3\tan^2 B}=\dfrac{\sin 2B}{5-\cos 2B}$ **1067**

●$\tan\phi=\dfrac{\sin\theta\cos\theta'}{\sin\theta'+\cos\theta}$ 時, $\tan\dfrac{\phi}{2}$ 之一値爲 $\tan\dfrac{\theta}{2}\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta'}{2}\right)$ **1058**

●$\tan\theta=\dfrac{x\sin\alpha}{y-x\cos\alpha}$, $\tan\phi=\dfrac{y\sin\alpha}{x-y\cos\alpha}$ 時, $\tan(\theta+\phi)=-\tan\alpha$ **638**

●$n^2\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$ 時, $\tan\alpha=\dfrac{1\pm n}{1\mp n}\cdot\tan\beta$ **1003**

●$\tan\theta=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}$ 時, $\tan\dfrac{\theta}{2}=\pm\dfrac{(1\mp\sin\beta)(1\mp\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\beta}$ **1094**

●$\tan^2\theta=2\tan^2\phi+1$ 時, $\cos 2\phi=2\cos 2\theta+1$, $\cos 2\theta+\sin^2\phi=0$ **669**

●$\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tan\dfrac{\alpha}{2}$, $r=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ 時, $\sqrt{r}\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{a(1-e)}\times\cos\dfrac{\alpha}{2}$, 及 $\sqrt{r}\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{a(1+e)}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ **1098**

●$\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sqrt{(1-c^2\sin^2\theta)}$, 及 $\cos\phi=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\sqrt{(1-c^2\sin^2\phi)}$ 時, $\cos\theta+\cos\phi=\dfrac{2\cos\alpha\cos\beta}{1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$ 及 $1+\cos\theta\cos\phi=\dfrac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{1-c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$, 由是證 $\sin\theta\sin\phi$ 及 $\tan\frac{1}{2}\theta\tan\frac{1}{2}\phi$ **1081**

(10) 含他三函數者

(11) 含四以上之函數者

$=\frac{2ab}{c^2-a^2-b^2}$ **1066**

● $\sin x\cos y=\tan\alpha\cot\gamma$, $\sin y\cos x=\tan\beta\cot\gamma$, $\cos^2 y-\cos^2 x=\cos^2\gamma$ 時, $\sec^2\alpha-\sec^2\beta=\sin^2\gamma$ ... **1009**

VI. 特 别 角

(1) 含 30°, 45°, 60° 之函数之式之値

● 30° 之三角函數 **307**, **308**

● 45° 之三角函數 **306**, **308**

● 60° 之三角函數 **307**, **308**

● $\frac{1-\tan^2 30°}{1+\tan^2 30°}$ **355**

● $2\sin 30°\cos 30°\cot 60°$ **321**

● $\sin^3 60°\cot 30°-2\sec^2 45°+3\cos 60°\tan 45°-\tan^2 60°$ **332**

● $3\tan^2 30°+\frac{1}{4}\sec 60°+5\cot^2 45°-\frac{2}{3}\sin^2 60°$ ... **333**

● $\cos 60°-\tan^2 45°+\frac{3}{4}\cot^2 60°+\cos^2 30°-\sin 30°$ **335**

● $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 60°+\sec^2 45°-2\cot^2 60°$ **338**

● $\cot 60°\tan 30°+\sec^2 45°$ **324**

● $\frac{1}{3}\sin^2 60°-\frac{1}{2}\sec 60°\tan^2 30°+\frac{1}{3}\sin^2 45°\tan^2 60°$ ... **336**

● $\tan^2 60°+2\tan^2 45°$ **326**

● $\tan 60°\sin^2 45°$ **355**

● $\tan^2 45°-\cos^2 60°=x\sin 45°\cos 45°\tan 60°$ 時, x **342**

(2) 含 30°, 45°, 60° 之函数之等式

● $\frac{\cos 45°-\cos 60°}{\sin 45°+\sin 30°}=(\operatorname{cosec} 45°-\cot 45°)^2$ **339**

● $3\tan^2 30°+\frac{4}{3}\cos^2 30°-\frac{1}{2}\sec^2 45°-\frac{1}{3}\sin^2 60°=\frac{3}{4}$ ... **330**

● $\sin 60°+\cos 60°+\tan 60°=\sin 30°+\cos 30°+\cot 30°$ **320**

● $\frac{\cos 60°+\cos 30°}{\sec 60°+\operatorname{cosec} 60°}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ **340**

● $\operatorname{cosec}^2 45°\sec^2 30°\cos 60°=1\frac{1}{3}$ **328**

● $\sin^2 60°-\sin^2 30°=\frac{1}{6}\tan 60°\cot 30°$ **337**

● $\cot 60°(1+\cos 30°+\cos 60°)=\sin 30°+\sin 60°$ ... **319**

● $\cos 60°-\tan^2 45°+\frac{3}{4}\tan^2 30°+\cos^2 30°-\sin 30°=0$ **334**

● $\tan^2 30°+2\sin 60°+\tan 45°-\tan 60°+\cos^2 30°=2\frac{1}{12}$ ..

(3) 含 15°, 18°, 75°, 72° 之函數者

(4) 含 18°, 36°, 54° 之函數者

(5) 其他特別角之函數

- $\sin 3^\circ=\{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{3}+1)-\sqrt{(10+\sqrt{5})}(\sqrt{3}-1)\}/8\sqrt{2}$ ... 966
- $\sin 7^\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ... 947
- $\tan 7^\circ 30'$ ... 907
- $\sin 9^\circ$, $\cos 9^\circ$ ... 978
- $\tan 9^\circ=\sqrt{5}+1-\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$ ... 979
- $\tan 11^\circ 15'$ ... 313
- $\cot 11^\circ\frac{1}{4}=1+\sqrt{2}+\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$ ... 925
- $\sin 12^\circ=\frac{1}{8}\{\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\}$ ... 955, 309
- $\cos 12^\circ=\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1+\sqrt{30+6\sqrt{5}})$ ... 956
- $22^\circ\frac{1}{2}$ 之三角函數 ... 924, 311
- $2\cos\frac{45^\circ}{2^n}=\sqrt{\{2+\sqrt{[2+\sqrt{(2......}}}$至 $(n+1)$ 項$)]\}$ 981
- $\sin 27^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{(8-2\sqrt{10-2\sqrt{5}})}=\frac{1}{4}(\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}})$ ... 960
- $\cos 27^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$ ... 959
- $\tan 27^\circ=\sqrt{5}-1-\sqrt{(5-2\sqrt{5})}$ ... 961
- $\cos 33^\circ 45'=\frac{1}{2}\sqrt{\{2+\sqrt{(2-\sqrt{2})}\}}$ ... 926
- $\tan 37^\circ\frac{1}{2}=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2$ ... 948
- $\cos 42^\circ=\frac{1}{8}(\sqrt{15}-\sqrt{3}+\sqrt{10+2\sqrt{5}})$ ... 962
- $\tan 52^\circ\frac{1}{2}=\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2$ ... 950
- $\sin 63^\circ=\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}+\sqrt{5}-1}{4\sqrt{2}}$ ... 965
- $67^\circ 30'$ 之三角函數 ... 312
- $\sin 67^\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$ ... 927
- $\sin 81^\circ$, $\cos 81^\circ$ ... 978
- $\tan 82^\circ\frac{1}{2}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$ ... 951
- $\sin 87^\circ=\frac{1}{8}\{(\sqrt{5}-1)\sqrt{(2-\sqrt{3})}+\sqrt{(10+2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})}\}$ ... 967
- $\tan 97^\circ.5$ ... 1181
- $\sin 105^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ ... 949
- $\cos 105^\circ=-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ ... 949
- $\tan 112^\circ\frac{1}{2}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ ... 928
- $\sin 157^\circ.5$, $\cos 157^\circ.5$ ... 1173
- 知 $\sin 7846^\circ$，求 $\sin\frac{7846^\circ}{2}$，又示在 892 題之公式中之符

(6) 雜題

VII. 雜

● $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin A\sin B\sin C-1$，以四因數表之 **1161**

● 1145 題之結果中，導出 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$ 之二特款，由是等特款導出 $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$［但 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$］及 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=1+4\mathrm{isn}\,\alpha\sin\beta\sin\gamma$［但 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2}\pi$］ **1171**

● 求正切為 $\sqrt{7}+\sqrt{6}$, $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ 之二銳角之和 ... **1015**

● 連用知 $\tan\alpha$ 求 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 之公式二次以計算 $\tan\frac{\alpha}{4}$ **906**

● 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 中 x 之二値為 $\tan A$, $\tan B$ 時，求 $\tan(A+B)$ 之値 **642**

● 由三角形 ABC 之角頂 A，至 BC 作垂線 AD，而 BD, CD, AD 與 2, 3, 6 成比例時，頂角之大小如何 **1013**

● 知 $\sec\alpha$ 及 $\sec\beta$，求 $\sec(\alpha+\beta)$ **1005**

● $x^2\cos\alpha\cos(\alpha-\frac{1}{2}\beta)+x\cos(\alpha-\beta)=2\cos\frac{1}{2}\beta$ 時，求 x **1167**

● $\sec\alpha\cos(x+y)=1+\tan x\tan y$, $\sec\beta\cos(x-y)=1-\tan x\tan y$ 時，求 $\cos(x-y)$ 及 $\cos(x+y)$ ... **1008**

● $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}\}$，及 $\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}\}$ ... **892**

● $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, $\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ ... **888**

第五　三角形之性質

I.　$A+B+C=180°$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$

(1)　sin

● $\sin(A+B+C)=0$ **1193**

● $\sin(A+B)=\sin C$ **1194**

● $\sin\frac{1}{2}(A+B+C)=1$ **1196**

● $\sin\alpha\sin(\alpha+2\gamma)+\sin\beta\sin(\beta+2\alpha)+\sin\gamma\sin(\gamma+2\beta)=0$ **1217**

● $\sin^2\alpha\sin 2\gamma+\sin^2\gamma\sin 2\alpha=\sin^2\beta\sin 2\alpha+\sin^2\alpha\sin 2\beta$

(2) sin. cos.

●$\sin A(\cos B+\cos C)+\sin B(\cos C+\cos A)+\sin C(\cos A$
$+\cos B)=\sin A+\sin B+\sin C$ 1215

●$\sin\alpha\sin\beta+\cos^2(\alpha+\frac{1}{2}\gamma)=\cos^2\frac{1}{2}\gamma$ 1219

●$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$
$=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$ 1221

●$\cos 3\alpha\sin(\beta-\gamma)+\cos 3\beta\sin(\gamma-\alpha)+\cos 3\gamma\sin(\alpha-\beta)$
$=-4\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$... 1222

●$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ ... 1224

●$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$
$\times\cos\frac{C}{2}$ 1225

●$\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ... 1226

●$(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\beta+\cos\gamma)(\cos\gamma+\cos\alpha)+(\sin\beta+\sin\gamma)$
$\times(\cos\gamma+\cos\alpha)(\cos\alpha+\cos\beta)+(\sin\gamma+\sin\alpha)(\cos\alpha$
$+\cos\beta)(\cos\beta+\cos\gamma)=(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\beta+\sin\gamma)$
$\times(\sin\gamma+\sin\alpha)$... 1229

●$\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}+\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$
$\times\cos\frac{\beta}{2}+\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$
$\times\cos\frac{\gamma}{2}$ 1231

●$\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\sin B\cos C$ ... 1234

●$\sin A\cos A-\sin B\cos B+\sin C\cos C=2\cos A\sin B\cos C$
... ... 1235

●$\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C$
$=3\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C+\cos\frac{3}{2}A\cos\frac{3}{2}B\cos\frac{3}{2}C$ ... 1238

●$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ ... 1245

●$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}$
$=4\cos\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)-1$ ...
... ... 1247

●$\sin(B+C-A)-\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)$

●$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$

$=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ **1283**

●$\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma=4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}$. 但 n 爲正整數 $4m+1$ 或 $4m+3$ **1284**

●$\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma=-4\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n\beta}{2}\sin\frac{n\gamma}{2}$. 但 n 爲正整數 $4m$ 或 $4m+2$... ... ... **1285**

●$\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha+1$

$=2\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$ **1288**

●$\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha$

$=2\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$ **1289**

●$\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\left(\gamma+\frac{\alpha}{2}\right)+1$

$=4\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\beta-\gamma}{4}\cos\frac{\gamma-\alpha}{4}$ **1290**

●$(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2+(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2+4(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1)=4(\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha+\sin\alpha\times\sin\beta)$ **1291**

●$2\sin B\sin C=2\cos^2\frac{1}{2}A$ 時, $b=c$ **1293**

●$x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma=0$ 時, $(y+z\cos\alpha)(z+x\cos\beta)\times(x+y\cos\gamma)+(y\cos\alpha+z)(z\cos\beta+x)(x\cos\gamma+y)=0$ **1301**

●$\cos B=\frac{\sin A}{2\sin C}$ 時, $B=C$ **1376**

(3) cos.

●$\cos(A+B+C)=-1$ **1198**

●$\cos(A+B)=-\cos C$ **1199**

●$\cos(A+B-C)=-\cos 2C$ **1201**

●$\cos\frac{1}{2}(A+B+C)=0$ **1202**

●$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}$

$=4\cos\frac{180^\circ-A}{4}\cos\frac{180^\circ-B}{4}\cos\frac{180^\circ-C}{4}$ **1242**

(4) tan 或 cot.

(5) sin. tan.

● $(\sin B+\sin C-\sin A)/(\sin A+\sin B+\sin C)=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ 1228

● $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(\sin\alpha+\sin\gamma-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma)}{(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha)}$ 1254

● $\sin 2\alpha:\sin 2\beta:\sin 2\gamma=5:4:3$ 時, $\tan\alpha=\pm 1$, $\tan\beta=\pm 2$, $\tan\gamma=\pm 3$ 1296

● $\sin\left(A+\frac{C}{2}\right)=n\sin\frac{C}{2}$ 時, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{n-1}{n+1}$... 1297

● 三角形各角之正弦成等差級數時, 其最大最小各角半分之正切之積爲 $\frac{1}{3}$ 1372

(6) sin. cot.

● 式 $\cot A+\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$, 雖將 A, B, C 之任何二角互換, 有同一之值 1216

● $(\sin\beta-\sin\gamma)\cot\frac{\alpha}{2}+(\sin\gamma-\sin\alpha)\cot\frac{\beta}{2}+(\sin\alpha-\sin\beta)\times\cot\frac{\gamma}{2}=0$... 1218

● $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=x:y:z$ 時,

$(x-y)\cot\frac{\gamma}{2}+(y-z)\cot\frac{\alpha}{2}+(z-x)\cot\frac{\beta}{2}=0$ ... 1299

● $\sin^3\omega=\sin(\alpha-\omega)\sin(\beta-\omega)\sin(\gamma-\omega)$ 時,

$\cot\omega=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma$ 1300

● △ 各角之正弦成等差級數時, 其各角半分之餘切亦成等差級數... 1371

(7) 其他二函數

● $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$ 成等差級數時,

$\cos(\beta+\gamma-\alpha)=\frac{4+5\cos 2\gamma}{5+4\cos 2\gamma}$ 1298

● $\frac{1-\tan B\tan C}{\cos^2 A}+\frac{1-\tan C\tan A}{\cos^2 B}+\frac{1-\tan A\tan B}{\cos^2 C}$

$=-\frac{3}{\cos A\cos B\cos C}$ 1200

● $\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}=\frac{\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{2\cos A\cos B\cos C}$ ... 1276

(8) 三個函數

II. 恆 等 式

(角有限制者)

●$\alpha+\beta+\gamma=2s$ 時, $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
$=\sin 2(s-\alpha)+\sin 2(s-\beta)+\sin 2(s-\gamma)-\sin 2s$ **1324**

●$A+B+C+D=360°$ 時, $\sin A+\sin B+\sin C+\sin D$
$=4\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(C+A)$ **1329**

●$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ 時, $\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha+\delta)$
$=\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta+\delta)$... ... ... **1332**

●$\sin(A+B+C+D)=0$ 時, $\sin(A+C)\sin(A+D)$
$=\sin(B+C)\sin(B+D)$ **1335**

●$A+B+C=360°$ 時, $2(\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin C\sin A$
$+\cos C\sin A\sin B)+\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=0$ **1307**

●$\sin\alpha(1+2\cos\beta)+\sin\beta(1+2\cos\gamma)+\sin\gamma(1+2\cos\alpha)$
$=-4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}$, 但 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$... ... ... **1309**

●$A+B+C=(2n+1)\pi$ 時, $\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}$
$+\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\cos\frac{B}{2}+\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)$
$\times\cos\frac{C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ **1311**

●$\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha=2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$,
但 $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$ **1312**

●$A+B+C=(2n+1)\pi$ 時,
$\sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C+2\cos 2A\cos 2B\cos 2C=2$ **1315**

●$\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$ 或 $(2n+\frac{1}{2})\pi$ 時,
$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)(\sin\gamma+\cos\gamma)$
$=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+1$ .. **1316**

●$\alpha+\beta+\gamma=2n\pi$, 或 $(2n-\frac{1}{2})\pi$ 時,
$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)(\sin\gamma+\cos\gamma)$
$=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1$... **1317**

●$A+B+C=2S$ 時,
$1+2\cos A\cos B\cos C-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C$
$=4\sin S\sin(S-A)\sin(S-B)\sin(S-C)$ **1321**

●$A+B+C+D=360^\circ$ 時, $\sin A-\sin B+\sin C-\sin D$
$=4\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(B+C)\sin\frac{1}{2}(C+A)$ 1330

●$\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma-\cos\delta=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$,
但 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ 1331

●$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ 時,
$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}$
$=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}$ 1333

●$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}$,
但 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ 1334

●$\alpha+\beta+\gamma=2s$ 時, $\tan(s-\alpha)+\tan(s-\beta)+\tan(s-\gamma)-\tan s$
$=\frac{4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$ ... 1325

●$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, 但 $\alpha+\beta+\gamma$
$=2\pi$ 1308

●$\cos^4\frac{\alpha}{2}+\cos^4\frac{\beta}{2}+\cos^4\frac{\gamma}{2}-2\Big(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}$
$+\cos^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\Big)+4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}=0$,
但 $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$ 1313

●$\alpha+\beta+\gamma=2s$ 時,
$1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma$
$=4\cos s\cos(s-\alpha)\cos(s-\beta)\cos(s-\gamma)$ 1322

●$1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0$ 時, 求
α, β, γ 間之關係 1327

●$A+B+C+D=360^\circ$ 時, $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$
$=4\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(B+C)\cos\frac{1}{2}(C+A)$ 1328

●$\cos\alpha=\frac{(d-a)(b-c)}{(d+a)(b+c)}$, $\cos\beta=\frac{(d-b)(c-a)}{(d+b)(c+a)}$,
$\cos\gamma=\frac{(d-c)(a-b)}{(d+c)(a+b)}$ 時, $\tan\frac{1}{2}\alpha+\tan\frac{1}{2}\beta+\tan\frac{1}{2}\gamma=\pm1$,
但 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ 1310

●$s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ 及 $\cos(s-2\alpha)+\cos(s-2\beta)$
$=\cos(s-2\gamma)+\cos(s-2\delta)$ 時, $\tan\alpha\tan\beta=\tan\gamma\tan\delta$
... ... 1326

●三角形之各角 A, B, C 成等差級數;
cosec 2A, cosec 2B, cosec 2C 亦成等差級數時,

其角之公差之餘弦為 $\sqrt{\frac{5}{8}}$ **1336**

● $A+B+C=90°$ 時,

$\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B=1$ ... **1303**

● $A+B+C=m\pi$, m 為任意整數時, $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ **1319**

●四角之和為二直角時, 其各角正切之和等於其正切三三相乘之積之和 **1320**

● $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma+\sec\alpha\sec\beta\sec\gamma$, 但 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2}\pi$ **1304**

● $(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)$

$=1+\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\operatorname{cosec}\gamma$, 但 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ ... **1305**

● $\cot\alpha(\tan\beta+\tan\gamma)+\cot\beta(\tan\gamma+\tan\alpha)+\cot\gamma(\tan\alpha+\tan\beta)+2=\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\operatorname{cosec}\gamma$, 但 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{1}{2}\pi$ **1306**

● $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi$ 時,

$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma-2(\cot 2\alpha+\cot 2\beta+\cot 2\gamma)$

$=\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\right)(\sec\alpha-1)(\sec\beta-1)(\sec\gamma-1)$

... ... **1314**

III. 直角三角形 (C 為直角)

● $\sin 2A=\sin 2B$ **1337**

● $\sin(A-B)+\sin(2A+C)=0$ **1340**

● $\sin 2A=\dfrac{2ab}{c^2}$ **1350**

● $\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{c-b}{2c}$ **1353**

● $\sin 3A=\dfrac{3ab-a^3}{c^3}$ **1357**

● $\sin(A-B)+\cos 2A=0$ **1339**

● $(\sin A-\sin B)^2+(\cos A+\cos B)^2=2$ **1342**

● $\cos 2B=\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}$ **1343**

●直角△中, 其各邊等於隣角之餘弦乘斜邊之積, 又等於對角之正弦乘斜邊之積 **1347**

● $\left(\cos\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{A}{2}\right)^2=\dfrac{a+c}{c}$ **1349**

● $\cos 2A+\cos 2B=0$ **1338**

● $\cos(A-B)+\cos(2A+C)=0$ **1341**

●求直角 △ABC 中,內切圓之中心至△三角頂之距離 α, β, γ 間所成立之關係 3024

●直角 △ ABC 中,直角傍之二邊 $AB=2mn$, $AC=m^2-n^2$ 已知,以 m 及 n 之函數求 $\tan\frac{B}{2}$, $\tan\frac{C}{2}$ 3022

IV. 任意三角形(ABC)

(1) sin.

●各邊與對角之正弦成比例 1381

●$\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{b-c}{\sin B-\sin C}$ 1383

●$\frac{\sin A+2\sin B}{a+2b}=\frac{\sin C}{c}$ 1384

●$b\sin B-c\sin C=a\sin(B-C)$ 1386

●$\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$ 1389

●$a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=(b+c)\sin\frac{A}{2}$ 1390

●$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$ ... 1400

●$b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$ 1418

●$b^2\sin 2C-c^2\sin 2B=2bc\sin(B-C)$ 1419

●$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{(a+2b-3c)\sin A}{\sin A+2\sin B-3\sin C}}$ 1423

●$(b+c)\sqrt{bc\sin B\sin C}=b^2\sin C+c^2\sin B$ ... 1424

●$c(\sin^2 A+\sin^2 B)=\sin C(a\sin A+b\sin B)$ ... 1425

●$\frac{\sin^2 A-m\sin^2 B}{a^2-mb^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2}$ 1426

●$(b^2-c^2)\sin A=a^2\sin(B-C)$ 1427

●$\frac{\sin(A-B)}{ab}+\frac{\sin(B-C)}{bc}+\frac{\sin(C-A)}{ca}=0$ 1431

●$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$ ... 1432

●$\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}$ 1433

●$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$ 1436

●$a\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}+b\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C-A}{2}+c\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}=0$
... ... 1444

(2)　cos.

● $\frac{b+c}{a}=(\cos B+\cos C)/(1-\cos A)$ … … … **1385**

● $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$ … … … … **1387**

● $c(a\cos B-b\cos A)=a^2-b^2$ … … … … **1391**

● $a\cos A+b\cos B-c\cos C=2c\cos A\cos B$ … **1395**

● $\left(a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}\right)\Big/(\cos A+\cos B+\cos C)$

$=\frac{a+b+c}{2}$ … … … … … … … … **1397**

● $a(\cos B\cos C+\cos A)=b(\cos A\cos C+\cos B)=c(\cos A$

$\times\cos B+\cos C)$ … … … … … … … **1398**

● $a(\cos C-\cos B)=2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$ .. … … **1403**

● $\frac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B}=\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$ … … … … **1406**

● $\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{c-a}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{a-b}{c}\cos^2\frac{C}{2}=0$ … **1408**

● $\frac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}+\frac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\frac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}=0$ **1409**

● $\frac{(\cos B+\cos C)(1+2\cos A)}{1+\cos A-2\cos^2 A}=\frac{b+c}{a}$ … … … **1410**

● $c(1-\cos^2 B-\cos^2 A)=\cos C(a\cos A+b\cos B)$ … **1414**

● $a\cos A\cos 2B+b\cos B\cos 2A+c\cos C=0$ … **1415**

● $(a^2-b^2)\cos C=c(b\cos B-a\cos A)$ … … … **1428**

● $a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)+c^2(\cos^2 A-\cos^2 B)$

$=0$ … … … … … … … … … … **1429**

● $\frac{a\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}+\frac{b\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C+A}{2}}+\frac{c\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}=2(a+b+c)$ **1435**

● $\sqrt{c+(a-b)\cos\frac{C}{2}}+\sqrt{c-(a-b)\cos\frac{C}{2}}=2\sqrt{c}\cos\frac{A-B}{4}$ …

… … … … … … … … … … **1438**

● $\frac{a\cos 2(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{b\cos 2(C-A)}{\cos C\cos A}+\frac{c\cos 2(A-B)}{\cos A\cos B}=8(a\cos A$

$+b\cos B+c\cos C)$ … … … … … … **1440**

● $a^3\cos 3B+b^3\cos 3A=c^3-3abc\cos(A-B)$ … **1441**

● $\frac{a^2\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}+\frac{b^2\cos\frac{1}{2}(C-A)}{\cos\frac{1}{2}(C+A)}+\frac{c^2\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=2(ab+bc$

● $\frac{b^2\cos A}{a}+\frac{c^2\cos B}{b}+\frac{a^2\cos C}{c}=\frac{a^4+b^4+c^4}{2abc}$ … … 1502

● $b^2\cos 2C+2bc\cos(B-C)+c^2\cos 2B=a^2$ … … 1506

● $a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})\cos A+b^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}})\cos B+c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})\cos C$
$=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}})$ … … … … … 1507

● $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$, 但 $s=\frac{1}{2}$
$\times(a+b+c)$ … … … … … … … … … 1508

● $s(s-a)-(s-b)(s-c)=bc\cos A$, 但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ …
… … … … … … … … … … … 1509

● $2\cos A+\cos B+\cos C=2$ 時, $2a=b+c$ … … … …
… … … … … … … … 1511, 1543

● 角 A, B, C 成等差級數時, $2\cos\frac{A-C}{2}=\frac{a+c}{b}$
$=\frac{a+c}{\sqrt{(a^2-ac+c^2)}}$ … … … … … … 1517

● $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{a+b+c}{2}$ … … … … 1530

● $4\left(bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}\right)=(a+b+c)^2$ …
… … … … … … … … … … … 1531

● $\cos^2\frac{A}{2}\Big/a+\cos^2\frac{B}{2}\Big/b+\cos^2\frac{C}{2}\Big/c=\frac{s^2}{abc}$ … 1532

● $a\left(b\cos^2\frac{C}{2}-c\cos^2\frac{B}{2}\right)^2=(b-c)\left(b^2\cos^2\frac{C}{2}-c^2\cos^2\frac{B}{2}\right)$
… … … … … … … … … … … 1534

● a, b, c 成等差級數時, $\cos\frac{1}{2}(A-C)=2\cos\frac{1}{2}(A+C)$ … …
… … … … … … … … … … … 1541

● a, b, c 成等差級數時, $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3}{2}b$ … …
… … … … … … … … … … … 1547

● $\frac{\cos A\cos B}{ab}+\frac{\cos B\cos C}{bc}+\frac{\cos C\cos A}{ca}=\frac{\sin^2 A}{a^2}$ 1551

● 由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, 證 $a<b+c$ … … 1552

● 欲令 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 中實數角 A 成立, 正數 a, b,
c 間須具如何之條件 … … … … … … 3021

● △之高, 將頂角分爲二, 而兩分角之餘弦與兩隣邊成反比
例 … … … … … … … … … … … 1369

● a, b, c 成等差級數時, $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$ 1482

(3) sin. cos.

$=\frac{(a+b)\sin\theta}{2\sqrt{(ab)}}$, $\cos\frac{A+B}{2}=\frac{c\sin\theta}{2\sqrt{(ab)}}$ 1469

● $\frac{a\cos B-b\cos A}{\sin(A-B)}=\frac{c}{\sin C}$ 1496

● $\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{\sin B}{\sin A}$ 1497

● $\frac{\cos A}{b}-\frac{\cos B}{a}=\frac{\cos C}{c}\left(\frac{\sin B}{\sin A}-\frac{\sin A}{\sin B}\right)$ 1500

●△之二邊爲 $x+y\cos A$, $y+x\cos A$, 其間之角爲 A, 第三邊爲 a, 則 $a=\sin A(x^2+y^2+2xy\cos A)^{\frac{1}{2}}$ ... 1512

● $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ 成調和級數,則 $1-\cos A$, $1-\cos B$, $1-\cos C$ 亦成調和級數 1539

● a, b, c 成調和級數,則 $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin C\sin A}{\cos C+\cos A}}$ 1542

●二等分角 A, 止於底之直線之長爲 l, θ 爲其與底所成之角, $2s$ 爲三角形之周時, $s\left(\sin\theta-\sin\frac{A}{2}\right)=l\sin\theta\cos\frac{A}{2}$ 1545

(4) tan.

● $\frac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}=\frac{a-b}{c}$ 1420

● $\frac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{c-b}{c}$ 時, $A=60°$ 1460

● $a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$ 時, $A=B$ ... 1461

●各邊爲 a, b, c, 其對角爲 2θ, 3θ, 4θ 時, $\tan^2\theta=\left(\frac{2b}{a+c}\right)^2-1$ 1463

●△之底分爲三等部, t_1, t_2, t_3 爲其各部張於頂點之角之正切,則 $\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t_3}\right)=4\left(1+\frac{1}{t_2}\right)$ 1466

● $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+c^2-a^2}$ 1503

● $1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{2c}{a+b+c}$ 1521

● $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{b+c-a}{b+c+a}$ 1522

(5) oot.

(6) 他一函數

● $\triangle$ABC 之外角為 A', B', C' 時, $2bc \operatorname{vers} A' + 2ca \operatorname{vers} B' + 2ab \operatorname{vers} C' = (a+b+c)^2$. 1546

● $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ 成等差級數時, $\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}$, $\operatorname{cosec}^2\frac{B}{2}$, $\operatorname{cosec}^2\frac{C}{2}$ 亦成等差級數... 1540

● a^2, b^2, c^2 成等差級數時, $a\sec A$, $b\sec B$, $c\sec C$ 成調和級數... 1519

● $a^2(s-a)\sec^2\frac{A}{2} + b^2(s-b)\sec^2\frac{B}{2} + c^2(s-c)\sec^2\frac{C}{2} = 2abc$ 1527

(7) 他二函數

● $\frac{b}{c}(\cot A + \cot B) = \operatorname{cosec} A$... 1412

● $\cos B - \cot A = \frac{a^2-b^2}{ab}\operatorname{cosec} C$ 1413

● $\frac{\cot\frac{1}{4}A - \operatorname{cosec}\frac{1}{2}A}{\cot\frac{1}{2}B + \cot\frac{1}{2}C} = \frac{b+c-a}{2a}$ 1529

● $\cot\frac{A}{4} - \operatorname{cosec}\frac{A}{2} : \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = b+c-a : 2a$ 1538

● 周為 $2c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sec\frac{A+B}{2}$ 1471

● $a\sin\frac{1}{2}(B-C)\sec\frac{1}{2}A + b\sin\frac{1}{2}(C-A)\sec\frac{1}{2}B + c\sin\frac{1}{2}(A-B) \times \sec\frac{1}{2}C = 0$. 1446

● $\triangle$之一角分成二部, 令其各部之正弦如隣邊之比時, 其餘切之差等於其隣邊對角之餘切之差 1465

● $\cot A + \cot B = \frac{c}{b\sin A}$... 1411

● $a\sec A + b\sec B + c\sec C = a\sec A\tan B\tan C$ 1421

● $\left(b\tan\frac{B}{2} - c\tan\frac{C}{2}\right)\cos^2\frac{B+C}{2} + \left(c\tan\frac{C}{2} - a\tan\frac{A}{2}\right) \times \cos^2\frac{C+A}{2} + \left(a\tan\frac{A}{2} - b\tan\frac{B}{2}\right)\cos^2\frac{A+B}{2} = 0$ 1439

● 邊 BC 二等分於 D, 引 AD, 則 $\tan ADB = \frac{2bc\sin A}{b^2-c^2}$ 1515

● $\cos\theta = \frac{a}{b+c}$, $\cos\phi = \frac{b}{c+a}$, $\cos\psi = \frac{c}{a+b}$ 時, $\tan^2\frac{\theta}{2} + \tan^2\frac{\phi}{2} + \tan^2\frac{\psi}{2} = 1$, 及 $\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}\tan\frac{\psi}{2} = \pm\tan\frac{A}{2} \times \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ 1549

(8) 三函數

(9) 雜題

與其外角之二等分線與此邊之交點之距離，又是等二距離間成如何之關係 3026

V. 內切圓外接圓面積等

(1) 面積 (一)

●試求表面積 [S 或 Δ] 之公式 $\frac{1}{2}ac\sin B$, $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B}$, 或 $\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin(A+C)}$, 等 1553

●設 $B=45°$, $C=60°$, $a=2(\sqrt{3}+1)$, 則 $S=6+2\sqrt{3}$ 1554

●設 $a=35$, $b=84$, $c=91$, 則 $S=1470$ 1555

●設三邊為 $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}$, $\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$, $\frac{z}{x}+\frac{x}{y}$, 則面積 $S=\sqrt{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)}$ 1556

●在二等邊直角△內,作一等邊△,令其各角頂在原△之各邊上,且其一邊平行於原△之斜邊,命原△等邊之一為 a, 則所作等邊△之面積為 $2a^2\sin 60\ (\sin 15°)^2$ ... 1557

●$s^2/(\cot\frac{1}{2}A+\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C)=S$ 1560

●$\frac{a^2}{2(\cot B+\cot C)}=S$ 1561

●$\left(\frac{a^2}{\sin A}+\frac{b^2}{\sin B}+\frac{c^2}{\sin C}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=S$ ... 1562

●$S=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$ 1564

●$S=\frac{a^2-b^2}{2}\times\frac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$ 1565

●$S=\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ 1566

●面積 $\Delta=s(s-a)\tan\frac{A}{2}$ 1567

●$a^2\{\cos(B-C)+\cos A\}/4\sin A=S$ 1568

●$\frac{1}{12}\{(a^2+b^2)\sin 2C+(b^2+c^2)\sin 2A+(c^2+a^2)\sin 2B\}=S$ 1571

●設各邊比例於 $gh(k^2+l^2)$, $kl(g^2+h^2)$, $(hk+gl)(hl-gk)$, 則其面積及角之三角函數俱為有理數 1559

●引所設角之一邊之垂線,以其在角之二邊間之部分為底,以所設之一點為頂點,作△,令其面積等於所設面積,且玩

(2) 面積（二）

(3) 內切圓外接圓等之半徑

●內切圓與外接圓直徑之和等於 $a\cot \mathrm{A}+b\cot \mathrm{B}+c\cot \mathrm{C}$ … … … … … … … … … … 1617

●$a\cos \mathrm{A}+b\cos \mathrm{B}+c\cos \mathrm{C}=4\mathrm{R}\sin \mathrm{A}\sin \mathrm{B}\sin \mathrm{C}$ 1618

●$\tan\frac{\mathrm{A}}{2}+\tan\frac{\mathrm{B}}{2}+\tan\frac{\mathrm{C}}{2}=4\mathrm{R}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{s}{r}$ 1619

●$\frac{r_1}{bc}+\frac{r_2}{ca}+\frac{r_3}{ab}=\frac{1}{r}-\frac{1}{2\mathrm{R}}$ … … … … … … 1620

●$\sqrt{abc}\left(\sqrt{\frac{a}{r_1}}+\sqrt{\frac{b}{r_2}}+\sqrt{\frac{c}{r_3}}\right)=16\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}\cos\frac{180^\circ-\mathrm{A}}{4}\cos\frac{180^\circ-\mathrm{B}}{4}$ $\times\cos\frac{180^\circ-\mathrm{C}}{4}$ … … … … … … … 1621

●設過三角形三傍心之圓，其半徑爲 R'，則 $\mathrm{R}'=\frac{a}{\sin \mathrm{A}}$，$\mathrm{R}'=\frac{abc}{2\mathrm{S}}$ … … … … … … … … … 1622

●設O爲△ABC之外心，I爲內心，J爲傍心，則 $\overline{\mathrm{OI}}^2=\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}r$，$\overline{\mathrm{OJ}}^2=\mathrm{R}^2+2\mathrm{R}r_1$，但 r_1 爲屬於J之傍切圓之半徑 1623

●直角△中，內切圓與外接圓中心之距離之二倍，若爲斜邊及內切圓之直徑之比例中項，則內切圓之半徑等於斜邊之 $\frac{1}{8}$ … … … … … … … … … … 1624

●$(s-a)^2\sin \mathrm{A}+(s-b)^2\sin \mathrm{B}+(s-c)^2\sin \mathrm{C}=4r(2\mathrm{R}-r)$ $\times\cos\frac{\mathrm{A}}{2}\cos\frac{\mathrm{B}}{2}\cos\frac{\mathrm{C}}{2}$ … … … … … … 1625

●△之內切圓之半徑，決不大於外接圓之半徑之半分 … … … … … … … … … … … 1676

●設直角△中，包直角之二邊之差爲 h，其面積爲S，則其外接圓之直徑爲 $\sqrt{(h^2+4\mathrm{S})}$ … … … … … … 1684

●由各角頂至對邊各引垂線，命聯結其垂足而生之△爲A′B′C′，則絕對値上 B′C′ 等於 $\mathrm{R}\sin 2\mathrm{A}$ … … 1690

●設由各角頂至對邊所引垂線之足爲 D，E，F，△ABC 及 △DEF 之外接圓之半徑爲 R 及 R_1，又命 △DEF 之內切圓之半徑爲 r_1，則 $\mathrm{R}_1=\frac{\mathrm{R}}{2}$ 及 $r_1=2\mathrm{R}\cos \mathrm{A}\cos \mathrm{B}\cos \mathrm{C}$ … … … … … … … … … … … 1691

●設傍切圓之中心爲 A′，B′，C′，而三角形 ABC 及 A′B′C′ 之內切圓之半徑爲 r 及 r'，則 $\frac{r'}{r}=\frac{\cot\frac{\mathrm{A}}{2}\cot\frac{\mathrm{B}}{2}\cot\frac{\mathrm{C}}{2}}{\cos\frac{\mathrm{A}}{2}+\cos\frac{\mathrm{B}}{2}+\cos\frac{\mathrm{C}}{2}}$ … … … … … … … … … … … 1697

●設聯結內切圓之三切點而成之三角形之三邊爲 a'，b'，c'，

則 $\frac{a'b'c'}{abc}=\frac{r^2}{2R^2}$ 1724

●設 O 爲 △ 之內切圓之中心, D, E, F 爲切 BC, CA, AB 之點,則 $OA\cdot OB\cdot OC(AF+BD+CE)=4R\cdot AF\cdot BD\cdot CE$ ... 1733

●設三角形之外接圓之半徑爲 R, 內切於此圓外切於三角形之各邊之最大圓之半徑爲 r', r'', r''', 則 $64Rr'r''r'''=\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)^2$ 1757

●設 A, B, C 所對之傍切圓之中心爲 D, E, F; r', r'', r''' 爲三角形 DBC, ECA, FAB 之外接圓之半徑, 則 $r'r''r''=2R^2r$ 1762

(4) 重心中線

●邊 a 所對中線之長爲 $\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$ ... 1646

●設 $a=7$, $b=8$, $c=9$, 試求聯結 B 與對邊中點之直線之數値 1647

●設三中線之長爲 h, k, l, 則 $4(h^2+k^2+l^2)=3(a^2+b^2+c^2)$, $16(h^2k^2+k^2l^2+l^2h^2)=9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$, $16(h^4+k^4+l^4)=9(a^4+b^4+c^4)$ 1758

●已知邊 AB, AC 及其夾角 A, 求自邊 BC 至重心 G 之距離 GD. 又求此三角形繞邊 BC 迴轉而生成之體積　3042

(5) 二等分線

●A 之內角及外角之二等分線之長爲 $\dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$ 及 $\dfrac{2bc\sin\frac{A}{2}}{b\sim c}$ 1648

●設 A 之內角及外角之二等分線交 BC 之點分別爲 D, E, 則 $DE=\frac{2abc}{b^2\sim c^2}$ 1649

●命角 A, C 之二等分線與外接圓周之交點爲 A′, C′, 則 A′C′ 爲 CB, BA 所分三部之比爲 $\sin^2\frac{A}{2}:2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\times\sin\frac{C}{2}:\sin^2\frac{C}{2}$ 1683

●過各角頂, 引其外角之二等分線作新△,命其面積爲 S′, 又命原△之面積爲 S, 則 $S'=\frac{S}{2}\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\operatorname{cosec}\frac{B}{2}\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$ 1699

●設角 A 及 B 之二等分線與對邊之交點爲 D 及 E, 則

$\triangle$CDE 之面積爲 $\dfrac{S\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}(C-A)\cos\frac{1}{2}(C-B)}$ 1727

●設各角 A, B, C 之二等分線與其對邊之交點爲 D, E, F, 則 $\triangle$ DEF 之面積應爲 $2S\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\Big/\left(\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\times\cos\frac{A-B}{2}\right)$ 1731

●設以各外角之二等分線作一新$\triangle$, 則其各邊爲 $4R\cos\frac{A}{2}$, $4R\cos\frac{B}{2}$, 及 $4R\cos\frac{C}{2}$ 1739

●如前題所作之$\triangle$, 各邊上之正方形之和爲 $8R(4R+r)$ 1740

●將各角之二等分線延長, 令交外接圓周, 則聯結其交點而得之$\triangle$之面積決不小於原形之面積... 1750

(6) 重心垂線

●設垂心爲 O, $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$, 則 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{xyz}$ 1657

●由各角頂 A, B, 及 C 至各對邊引垂線, 分別命爲 h_1, h_2, 及 h_3, 則 $2h_3(ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B)=ab(a\sin A+b\times\sin B+c\sin C)$ 1658

●設對應於 a, b, c 之垂線爲 h_1, h_2, h_3, 則 $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{s}{S}$ 1659

●設由各角頂 A, B, 及 C 至各對邊所引之垂線順次爲 h_1, h_2, 及 h_3, 則 $\frac{h_1^2}{h_2h_3}+\frac{h_2^2}{h_1h_3}+\frac{h_3^2}{h_1h_2}=\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}$ 1660

●設由各角頂 A, B, C 至對邊所引之垂線分別爲 h_1, h_2, h_3, 則 $(h_1\sin A+h_2\sin B+h_3\sin C)^2=18S\sin A\sin B\sin C$ 1661

●設邊 a, b, c 與由其對角頂 A, B, C 至其自身所引之垂線之比爲 α, β, γ, 則 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4=0$ 1710

●設垂心爲 P, 則 $\overline{PA}^2=4R^2-a^2$ 1738

●設外心爲 O, 其垂心爲 P, 則 $\overline{OP}^2=2R^2(\frac{3}{2}+\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$ 1745

●設銳角$\triangle$之垂心爲 P; $AP=\alpha$, $BP=\beta$, $CP=\gamma$, 則 $S=\frac{1}{4}(a\alpha+b\beta+c\gamma)$, $2abc=a^2\alpha\operatorname{cosec}A+b^2\beta\operatorname{cosec}B+c^2\gamma\operatorname{cosec}C$

(7) 交於同點

(8) 九點圓

(9) 三角形雜題

$a_1 : a_2 = \sin B + \sin C - \sin A : \sin A + \sin C - \sin B$ 1694

● 命 △ABC 之內切圓之半徑爲 r, 其各邊之和爲 $2s$, 關於聯結其傍切圓之中心而生之三角形者, 命爲 r' 及 $2s'$, 則 $\frac{rs}{r's'} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ 1698

● 設由 △ABC 之一角頂 A, 至內心及切邊 a 與切他二邊延線之圓之中心之距離爲 α, α_1, 仿上又設關於角 B 者爲 β, β_1, 關於角 C 者爲 γ, γ_1, 則 $\alpha\beta\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1 = (abc)^2$ ... 1700

● 又前題中 $\frac{bc}{\alpha_1^2} + \frac{ca}{\beta_1^2} + \frac{ab}{\gamma_1^2} = 1$ 1701

● 1700 題中, $\alpha^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) + \beta^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \gamma^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 0$ 1702

● 1700 題中, $\frac{b-c}{a\alpha_1^2} + \frac{c-a}{b\beta_1^2} + \frac{a-b}{c\gamma_1^2} = 0$ 1703

● △內之點, 具下之條件者僅一: 由此點引各邊之垂線, 作三個四邊形, 內切於各四邊形, 得作一圓, 又設 ρ_1, ρ_2, ρ_3 爲此諸圓之半徑, ρ 爲原△之內切圓之半徑, 則 $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho}\right) + \left(\frac{1}{\rho_3} - \frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho_2}$ 1704

● 作 △ABC 之內切圓, 又作切此圓與二邊 AB, AC 之第二圓, 又作切此第二圓與二邊 AB, AC 之第三圓, 如是以往, 又仿上作切 BC, BA, 及 CA, CB 之圓, 則此內切圓之面積與一切他圓之面積之和之比爲 $1 : \sin^4\frac{B+C}{4}\operatorname{cosec}\frac{A}{2} + \sin^4\frac{C+A}{4} \times \operatorname{cosec}\frac{B}{2} + \sin^4\frac{A+B}{4}\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$ 1705

● 設 △ABC 之內心及外心爲 O′ 及 O; 聯結 OA, OB, OC, O′A, O′B, O′C. 命 R_a, R_b, R_c, r_a, r_b, r_c 爲三角形 BOC, COA, AOB, BO′C, CO′A, AO′B 之外接圓之半徑. 又命 △ABC 之外接圓之半徑爲 R, 則 $\frac{r_a r_b r_c}{abc} = \frac{R}{a+b+c}$, 及 $\frac{a}{R_a} + \frac{b}{R_b} + \frac{c}{R_c} = \frac{abc}{R^3}$ 1706

● 由 △ABC 之內或外之任意點 P 至 BC, CA, AB 引垂線 PA′, PB′, PC′, 作三角形 PA′B′, PB′C′, PC′A′ 之外接圓, 則聯結其中心而生之△之面積爲 △ABC 之面積之 $\frac{1}{4}$ 1707

● 設△之各邊成等比級數, 則以由其各角項至對邊所引之

(10) 四 邊 形

(四)　多　角　形

(12) 圓

(13) 二個或三個圓

(14) 雜題

●設四角 A, B, C, D 之和爲四直角，其正切成等比級數，則其公比爲 -1，或 $\tan A \tan D = \tan B \tan C = 1$ **1656**

●橢圓上各點之二動徑之積，乘此點之法線與一動徑所成角之餘弦之自乘，等於短徑半分之自乘 … … **1763**

●將無窮圓錐倒置，納一球於其中，設欲令球之體積等於球面與圓錐頂點間之容積，則錐體頂點上之半角須爲幾何 … … … … … … … … … … **3070**

●在外切於半徑爲 R 之球之平行六面體中，各稜與其他二稜間之角之正弦成比例 … … … … … **3074**

●試定四點是否在同平面上，若在同平面上，又是否在同圓周上 … … … … … … … … … **3080**

●直角 O 之一邊上有定點 A, B，而 $OA=a$, $OB=b$. 在他邊上試求一點M 命角 AMB 爲極大. 且應用 a 及 b，求三角形 AMB 之外接圓之半徑 … … … … … **3033**

●設 S－ABCD 爲一四角錐，其底之兩對邊 AB, DC 之交點爲 E，他二邊 DA, CB 之交點爲 F，於是面 ASB, CSD 交於直線 SE，而 ASD, BSC 交於直線 SF. (I) 求證以平行於面 ESF 之平面截四角錐，其截口 MNPQ 爲一平行四邊形. (II) 決定一點 M，令截口 MNPQ 與所設正方形 ^{2} 等積 … … … … … … … … … … **3034**

●命角 $VPY=\alpha$，角 $YPH=\beta$，設此二角之平面互相垂直，試以 α 及 β 之項，求此二角之公邊 PY 與 PV 及 PH 所定之平面所成之角 x … … … … … … … **3035**

●由直角 BOC 之頂點 O 引直線 OA，令與 OB 成角 ，由 A 至 OB 引垂線 AP，由 P 至 OA 引垂線 PQ，由 Q 至 OB 引垂線 QR，以下仿此，命無數垂線 AP, PQ, QR,……之和爲 S，又由 A 至 OC 引垂線 AP′，命仿前所得無數之垂線 AP′, P′Q′, Q′R′,……之和爲 S′，設 $S:S'=2$，求 $\tan\frac{c}{2}$ … … … … … … … … … … **3041**

●直徑 $d=1.25$ 粍之圓壔上有一螺線，其旋角爲 15°8′9″，則 (I) 此螺線一旋之長及 (II) 一步之長如何… **3043**

第六　對數

I. 表之構成

●設小於直角之正角之弧度爲 θ，則 θ 大於 $\sin\theta$ 而小於 $\tan\theta$ … … … … … … … … … **1769**

II. 對數及對數級數

... ... 1791

●求證 $\log_e 2=0.6931471\ldots\ldots$, $\log_e 3=1.0986122\ldots\ldots$, $\log_e 10=2.3025850\ldots\ldots$ 1792

●$\mu\log_e(n+1)-\mu\log_e n=2\mu\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\ldots\right\}$, 從而 $\log_{10}(n+1)-\log_{10}n=2\mu\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\ldots\ldots\right\}$ 1793

●$\log_{10}(1+x)=\mu\left\{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\right\}$ ... 1794

●e 爲不可通約數 1795

●設 $\log_a x=\log_b y=\log_c z$, 則此對數乃 $a^p b^q c^r$ 爲底 $x^p y^q z^r$ 之對數 1796

●$\log_a b\times\log_b c=\log_a c$, 及 $\log_a b\times\log_b a=1$ ... 1797

●設 $a^p=b^q$, 則 $q\log_a x=p\log_b x$ 1798

●設 a, b, c 之對數分別爲 p, q, r, 則 $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1$ 1799

●設 $\log_8 9=a$, $\log_3 5=b$, 則 $\log_{10}2=\frac{2}{3ab+2}$ ... 1800

●設 $\log_{2a}a=x$, $\log_{3a}2a=y$, 則 $2^{1-xy}=3^{y-xy}$ ... 1801

●$(ab)^{\log a+\log b}=a^{\log a}b^{\log b}a^{2\log b}$... 1802

●$2\log_a x+2\log_a x^2+2\log_a x^3+\ldots\ldots+2\log_a x^n=n(n+1)\times\log_a x$ 1803

●將 $a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$ 中根號內之式變爲 $b+c$, 或 $b-c$ 完全平方形,而化之爲對數式 1804

●將 $x=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ 化爲對數式,而命 $a=113, b=335$ 以計算之... 1805

●解 $(a+b)^{2x}(a^4-2a^2b^2+b^4)^{x-1}=(a-b)^{2x}$... ... 1806

●解 $a^x=2b^yc^z$, $b^y=3c^za^x$, $c^z=4a^xb^y$ 1807

●知 $\log 224=a$, $\log 125=b$, 求 $\log 2$ 及 $\log 7$ 1808

●設 $\log_8 9=a$, $\log_2 5=b$, $\log_5 7=c$, 求由 1 至 7 之諸整數 10 爲底時之對數 1809

●知 10 爲底 8, 14, 21 之對數,則可求得由 1 至 10 之諸整數之對數 1810

●設 $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$ 成等差級數, 則 $\log(A+C)$, $\log(A-C)$, $\log(A+C-2B)$ 亦成等差級數 1811

●$7\log_a\frac{15}{16}-6\log_a\frac{3}{8}+5\log_a\frac{2}{5}-\log_a\frac{25}{32}=\log_a 3$... ...,

● $\frac{\log\sqrt{27}+\log 8-\log\sqrt{1000}}{\log 1.2}$ 之値 1847

● $\log\frac{75}{16}-2\log\frac{5}{9}+\log\frac{32}{243}$ 之値 1848

● $\log\sqrt{54}-\log\left(\frac{7\frac{1}{2}}{27}\right)^2+\log\frac{8}{3}\sqrt{.\dot{6}}$ 之値... ... 1849

● $7\log_2\frac{16}{15}+5\log_2\frac{25}{24}+3\log_2\frac{81}{80}$ 之値... 1850

● $\frac{1}{6}\sqrt{\left(\frac{3\log 1728}{1+\frac{1}{2}\log .36+\frac{1}{3}\log 8}\right)}$ 之値 1851

● $\log_2\sin 45^\circ$ 之値... 1852

● $\log_e\sqrt{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots\right)$ 1853

● 無窮級數 $\frac{2}{\underline{|3}}+\frac{4}{\underline{|5}}+\frac{6}{\underline{|7}}+\cdots\cdots$ 之總和... ... 1854

● $\frac{e}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1+2}{\underline{|3}}+\frac{1+2+3}{\underline{|4}}+\frac{1+2+3+4}{\underline{|5}}\cdots\cdots$ (至無窮)
... ... 1855

● 無窮級數 $\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{4}{\underline{|3}}+\frac{9}{\underline{|4}}+\frac{16}{\underline{|5}}+\cdots$ 之總和 ... 1856

● 若 x 小於 1, 則 $\frac{1}{x}+\frac{1}{\log_e(1-x)}$ 亦小於 1 ... 1857

● 無窮級數 $(1+2)\log 2+\frac{1+2^2}{\underline{|2}}(\log 2)^2+\frac{1+2^3}{\underline{|3}}(\log 2)^3+$
$\cdots\cdots$ 之總和... 1858

● $\log\cot\theta=\cos 2\theta+\frac{1}{3}(\cos 2\theta)^3+\frac{1}{5}(\cos 2\theta)^5+\cdots\cdots$ ...
... ... 1859

● 設 $\sin\theta(1+\tan^2\alpha\tan^2\beta)^{\frac{1}{2}}+\cos\theta(1-\tan^2\alpha\tan^2\beta)^{\frac{1}{2}}$
$=\tan\alpha+\tan\beta$, 試用對數算式決定 θ 1860

● 若 $\tan^2\theta$ 小於 1, 則 $\tan^2\theta-\frac{1}{2}\tan^4\theta+\frac{1}{3}\tan^6\theta-\cdots\cdots$
$=\sin^2\theta+\frac{1}{2}\sin^4\theta+\frac{1}{3}\sin^6\theta+\cdots\cdots$ 1861

III 表之用法

(1) 對數表及三角函數表

● 求所設數之對數... 1862
● 用比例部分表,求所設數之對數 1863
● 求對應於所設對數之數 1864
● 3670.257 及 12.61158 之積 1865

(2) 三角函数表用法之問題

(3) 五位對數表之問題

●解 $8^{5-3x}=12^{4-2x}$ 1892

●解 $\left(\frac{203}{200}\right)^{2x}=2$ 1893

(4) 七位對數表之問題

●已知 $\log 12440=4.0948204$, 又 $\log 12441=4.0948553$, 求 $\log 12440.35$ 1894

●已知 $\log 1.0686=.0288152$, 又 $\log 1.0687=.0288558$, 求有對數 .0288558 之數 1895

●已知 $\log 23456=4.3702540$, $\log 23457=4.3702725$, 製中間諸數之比例部分表,求 $\log .2345638$ 1896

●已知 $\log 1.3325=.1246672$, $\log 1.3326=.1246998$, 求以 $-(1.8753145)$ 爲對數之數 1897

●已知 $\log 3.855=.5860244$, $\log 3.8551=.5860356$, 求 $\log(.00385504)^{\frac{1}{4}}$ 1898

●已知 $\log 24=1.3802112$, $\log 4.8089=.6900986$, 以及 $\log 4.8090=.6901074$, 求 $24^{\frac{1}{2}}$ 至小數第六位 ... 1899

●已知 $\log 14271=4.1544544$, $\log 20313=4.3077741$, $\log 20314=4.3077954$, 求 $(142.71)^{\frac{1}{7}}$ 1900

●知 $\log 7=.8450980$, $\log 58751=4.7690153$, $\log 58752=4.7690227$, 求 $(.07)^{\frac{1}{5}}$, 但須至小數點下第七有效數字 1901

●知 $\log 2=.3010300$, $\log 5.743491=.7591760$, 求 .0625 之五次根 1902

●知 $\log 2.7=.4313638$, $\log 5.172818=.7137272$, 求 $27^{-\frac{1}{5}}$ 之値 1903

●知 $\log 71968=4.8571394$ 及 1 之差爲 .0000061, 求 $\sqrt[5]{(.0719686)}$ 1904

●已知 $\log 103=2.0128372$, $\log 7440942=6.871628$, 求 $(1.03)^{-10}$ 1905

●已知 $\log 105=2.0211893$, $\log 37689=4.5762140$, 求 $64\times\{1-(1.05)^{-20}\}$ 1906

●知 $\log 2=.301030$, $\log 1.562944=.193943$, $\log 349485=5.543428$, $\log 3.655=.562887$, $\log 3.656=.563006$, 求 $5^{\sqrt{5}}$ 之近似値 1907

●已知 $\log 12=1.0791812$, $\log 1.257915=.0996512$, 以及 $\log 1.121568=.0498256$,求 $(1.44)^{-6}-(1.44)^{-12}$ 1908

●已知有 $\log 105=2.0211893$, $\log 5303214=6.7245391$,

(5) 五位三角函數之對數之問題

(6) 七位三角函數之對數之問題

求 $L\sin 26^\circ 24' 12''$ … … … … … … **1929**

●知 $L\cos 20^\circ 35' 20'' = 9.9713351$，及 $10''$ 之差爲 $.0000079$，求 9.9713383 爲 $L\cos$ 之角 … … … … **1930**

●知 $L\cos 34^\circ 24' = 9.9165137$，及 $1'$ 之差爲 $.0000865$，求 $L\cos 34^\circ 24' 26''$，及 9.9165646 爲 $L\cos$ 之角 **1931**

●已知 $L\cot 72^\circ 15' = 9.5052891$，$L\cot 72^\circ 16' = 9.5048538$，求 $L\cot 72^\circ 15' 35''$ … … … … … … **1932**

●知 $L\cot 81^\circ 46' = 9.1604569$，及 $10''$ 之差爲 $.0001486$，求 9.1603493 爲 $L\cot$ 之角 … … … … **1933**

●知 $L\sin 37^\circ 19' = 9.7826301$，及 $1'$ 之差爲 $.0001657$，又知 $L\cos 37^\circ 19' = 9.9005294$，及 $1'$ 之差爲 $.0000963$，求 $L\sec 37^\circ 19' 47''$ 及 $L\tan 37^\circ 19' 47''$ … … **1934**

●知 $L\sin 32^\circ 18' = 9.7278277$，及 $1'$ 之差爲 $.0001998$，又知 $L\cos 32^\circ 18' = 9.9269913$ 及 $1'$ 之差爲 $.0000799$，求 $32^\circ 18' 24''.6$ 之 $L\sin$，$L\cos$，$L\tan$ … … **1935**

●求 $\log\sin 38^\circ 27' 12''.43$，$\log\tan 59^\circ 17' 34''.87$，以及 $\log\cos 12^\circ 27' 58''.31$ … … … … … **1936**

●知 $\sin x = \frac{3}{7}$，$\sec^2 y = 5$，$\cos z = -\frac{3}{5}$，求角 x，y，z 之値 … … … … … … … … … … **1937**

●已知 $\log\sin a = \bar{1}.8190457$，$\log\tan b = 0.3197415$，以及 $\log\cos c = \bar{1}.9227436$，求角 a，b，c … … **1938**

●求 $x = \sqrt{\dfrac{(0.0157)^4 \times \sin 22^\circ 17' 6''}{0.056437}}$ … … … **1939**

●有某弧，其正弦爲 15 度之弧之正弦之十五分之一，計算某弧 … … … … … … … … … … **1940**

IV　論比例部分

●對數之變化與數之變化，約略成比例 … … **1941**

●角之正弦之變化，與角之變化約略成比例 … **1942**

●角之餘弦之變化，與角之變化約略成比例 … **1943**

●角之正切變化，與角之變化，約略成比例 … … **1944**

●角之餘切之變化，與角之變化約略成比例 … **1945**

●角之正割之變化，與角之變化約略成比例 … **1946**

●角之餘割之變化，與角之變化約略成比例 … **1947**

●角之正弦對數之變化，與角之變化約略成比例 **1948**

●角之餘弦對數之變化，與角之變化約略成比例 **1949**

●角之正切對數之變化，與角之變化約略成比例 **1950**

●角之餘切對數之變化，與角之變化約略成比例 **1951**

第七 三角形

I. 直角三角形之解法(理論)

II. 斜三角形之解法(理論)

III 直角三角形之解法

(1) 不用對數者

●C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中，知 $a=37$, $c=100$, 解本形，但 $\sin 21^\circ 43'=0.37$, $\cos 21^\circ 43'=0.93$ 2038

●設 $a=5$, $b=6$, 解直角 $\triangle ABC$ 2039

●解 $\triangle ABC$: 已知 $b=37$, $a=50$, $C=90^\circ$ 2040

●解 $\triangle ABC$. 已知 $b=12$, $A=42^\circ 10'$, $C=90^\circ$ ... 2041

●C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中，知 $b=20$, $A=78^\circ 20'$, 求 c 2042

●C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中.知 $B=25^\circ 43'$, $c=100$, 求 A, a, b, 但 $\tan 25^\circ 43'=0.482$, $\cos 25^\circ 43'=0.901$ ... 2043

●解 $\triangle ABC$: 已知 $c=16$, $B=38^\circ 20'$, $C=90^\circ$ ... 2044

●C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中，$A=38^\circ 10'$, $c=50$, 求 a 2045

●設一直線上有與其成 A 角且長 a 尺之直線，求其正射影之長.次，設 $A=72^\circ$, $a=\sqrt{5}+1$, 則如何？ ... 2046

●有二等邊直角 $\triangle ABC$, B 爲直角，將 BC 三等分於 E, F, 求角 EAF 及 FAC 之正切 2047

●A 爲直角之 $\triangle ABC$ 中，知 $\frac{b}{c}=2+\sqrt{3}$, 求 $\cos\frac{B-C}{2}$ 2048

●設直角 $\triangle ABC$ 之一銳角之正切爲 0.75, 其周爲 1 尺 2 寸，求斜邊之長.但 A 爲直角 2049

●C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中，知 $\tan A=\frac{11}{3}$, $AC=\frac{27}{11}$, 求 AB 2050

●$\triangle ABC$ 中，知 $BC=50$, $B=30^\circ$, $C=120^\circ$, 求由頂點 A 至 BC 所引垂線之長 2051

●計算前題中三角形之面積 2052

●$\triangle ABC$ 中，知 $A=30^\circ$, $B=135^\circ$, $AB=100$ 尺，求由 C 至 AB 之延線所引之垂線之長 2053

●設 $\triangle ABC$ 中，AD 爲至 BC 之垂線，$AD=5$, $A\hat{B}D=60^\circ$, $A\hat{C}D=45^\circ$, 解本形 2054

●直角 $\triangle PQR$ 中，知 $QR=8$, $Q\hat{R}P=60^\circ$, $Q\hat{P}R==30^\circ$, 求由 Q 至斜邊 PR 所引垂線將斜邊所分二部之長 ... 2055

●設 CD 爲至直線 DBA 所引之垂線 $CD=20$, $C\hat{B}A=135^\circ$, $C\hat{A}D=30^\circ$, 求 BA... 2056

●設 CD 爲至直線 DBA 所引之垂線，$AB=59$, $C\hat{B}D=45^\circ$, $C\hat{A}B=32^\circ 50'$, $\cot 32^\circ 50'=1.5497$, 求 DC 及 BD 2057

●知 $\triangle ABC$ 之頂角及底與高之比，求由頂角至底所引之垂線將頂角所分各部之正切.次，設頂角爲 75°, 底與高之比爲 $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$, 則如何？ 2058

(2) 五位對數

(3) 七位對數

IV. 斜三角形之解法

(1) 不用對數者

(2) 五位對數

(3) 七位對數

●設 $\triangle ABC$ 之二邊之比如 9 與 7，夾角爲 $47°25'$，求他各角．但 $\log 2 = .3010300$，$L\tan 66°17'30'' = 10.3573942$，$L\tan 15°53' = 9.4541479$ 及 $1'$ 二者之差爲 $.0004797$ **2113**

●$\triangle ABC$ 中，$a=30$，$b=20$，其夾角爲 $22°$，求他各角．但 $L\cot 11° = 10.7113477$，$L\tan 45°48' = 10.0121294$，$L\tan 45°49' = 10.0123821$，$\log 2 = .3010300$... **2114**

●$\triangle ABC$ 中，$b=14$，$c=11$，$A=60°$，求證 $B=71°44'29''$．但 $L\tan 11°44'29'' = 9.3177364$，$\log 2 = .3010300$，$\log 3 = .4771213$ **2115**

●設 $\triangle ABC$ 之二邊爲 80 及 100，夾角爲 $60°$，求其他各角．但已知 $\log 3 = .4771213$，$L\tan 10°53'36'' = 9.2843156$ **2116**

●設 $\triangle ABC$ 之二邊爲 3 及 5，夾角爲 $120°$，求其他各角．但已知 $\log 4.8 = .6812412$，$L\tan 8°12' = 9.1586706$，及 $60''$ 之差爲 $.0008940$ **2117**

●設 $\triangle ABC$ 中，$\frac{a}{b} = 1\dot{2}$，$C=60°$，則他各角如何？但 $\log 3 = .4771213$，$L\cot 9°49' = 10.7618797$ 及 $1'$ 二者之差爲 $.0007514$ **2118**

●已知 $\log b = 3.2714872$，$\log c = 1.1159263$ 及 $A = 69°51'28''.5$，解 $\triangle ABC$ **2119**

●設 $\triangle ABC$ 二邊之長已知爲 8870.5 米，及 13121.5 米，其間夾角已知爲 $65°16'30''$，求第三邊 **2120**

●$\triangle ABC$ 中，$a = 35960.18$，$b = 98712.97$，$C = 35°18'57''.17$，求 A, B, c 及 S **2121**

●設 $\triangle ABC$ 之二邊及其夾角爲 187.1212 米，93.1478 米，及 $70°47'25''.4$，求 (I) 他二角，(II) 第三邊，(III) 面積，(IV) 內切圓之半徑，(V) 自內心至各角頂之距離 **2122**

●計算前題中 $\triangle$ 之外接圓半徑 **2123**

●已知 $a=279$，$b=386$，$c=203$，求 A, B, C ... **2124**

●已知 $a=18$，$b=20$，$c=22$，求 $L\tan\frac{A}{2}$．但已知 $\log 2 = .3010300$，$\log 3 = .4771213$ **2125**

●設 $\triangle ABC$ 之各邊爲 7, 8, 9，試決定各角．但已檢得 $\log 2 = .3010300$，$L\tan 24°5'40'' = 9.6505069$，$L\tan 24°5'50'' = 9.6505634$，$L\tan 29°12'20'' = 9.7474183$，及 $L\tan 29°12'30'' = 9.7474677$ **2126**

●設 $\triangle ABC$ 之各邊爲 32, 40, 66，求最大角．但 $\log 207$

V. 複雜之解法

(1) 三角形

(2) 平行四邊形,菱形

(3) 梯形

(4) 四邊形

(5) 內接外切四邊形

(6) 多角形

(7) 角，平行線

明其所以得二値之理由．又若所得値之一等於圓之半徑，則 $a=\frac{1}{3}\pi$，證之 … … … … … … … 2157

●在所設角之兩邊間，自此角之二等分線上之一定點引一定長之直線 … … … … … … … … … 3062

●距所設二平行線等遠 [l] 之一平行線上，有二所設點 [其距離爲 d]．試由其一點引一直線，令在其平行線間之部分張於他點之角爲 45° … … … … … … 2151

(8)　圓

●設兩餘弧之弦爲 $\sqrt{12}$ 及 $\sqrt{6}$，求圓之半徑及兩弧之度數 … … … … … … … … … … 2160

●設有一象限，求引一切線，令 $OP+OQ=m$．但 m 爲一定之長，且 $OM=R$ 爲所設量 … … … … … 3061

●由半圓 ACA′ 之一端 A′ 引一切線．試更由他端 A 引一直線 ACB 與之相交，令其在圓周與切線間之部分 CB 等於定長 … … … … … … … … … 2161

●作一正三角形，其頂點在所與之三同心圓之三圓周上 … … … … … … … … … … … 3101

(9)　兩　圓

●知二圓之中心距離 a，外公切線之角 2α，內公切線之角 2β．求兩圓之半徑．又試令 $a=714$ 米，$\alpha=36°\,8'$，$\beta=75°\,48'$，而計算之 … … … … … … … … 2154

●已知兩圓之半徑爲 3 米及 4 米，二中心間之距離爲 2 米，求 (I) 以二中心及二圓周交點之一爲頂點之三角形之面積，(II) 公弦之長，(III) 對此弦之二弧之長，(IV) 二圓之公共部分之面積 … … … … … … … … 3097

●有兩圓周，其半徑之比爲 1.8，在中心聯結之線上有一點 O，係距一中心爲 200 米，他中心爲 300 米者；自 O 點見一圓周之角等於他圓周之角之三倍，求兩圓周之半徑 … … … … … … … … … … … 3099

(10)　多　面　體

●計算立方體之兩對角線間之角 … … … … 2155

●有一方錐，其底邊爲 200 尺，各棱爲 150 尺，求各面之斜度．但 $\log 2=.30103$，$L\tan 26°33'=9.69868$，$L\tan 26°34'=9.69900$ … … … … … … … … … 2163

(11) 旋轉體

(12) 變化之研究

VI 測量應用

(1) 理論

(I) 高

(II) 距離

●有同高之二旗竿，相距 x 尺．今在此二旗竿足所在之直線上，擇一距二竿之近者爲 b 尺之地［不在旗竿與旗竿之間］，以望二旗竿，則近者含 α 度之角，遠者含 β 度之角．求證 $x=b(\tan\alpha\cot\beta-1)$ **2201**

●設紀念碑 ABCD 立於過 P 之水平面上，AB，AC，AD 等部分張於 P 之角分別爲 α，β，γ．命 $AB=a$，$AC=b$，$AD=c$，$AP=x$，$\alpha+\beta+\gamma=180°$，則 $(a+b+c)x^2=abc$ **2203**

●有一高 a 尺之旗竿，立於高 b 尺之塔頂上，玆欲於塔基之水平面上擇一點，令觀測者視旗竿及塔得相等之角，則眼至塔基之距離當如何？但 h 爲眼之高 **2217**

●將竿之上端置於壁頂，則此竿與過壁頂之水平面成角 A，又將竿之上端置於窗戶，則竿之下端較前遠於壁 a 尺，且其斜度爲 B，然則壁頂與窗戶之垂直距離爲 $a\cot\frac{1}{2}(A+B)$ **2250**

(III) 仰角，俯角

●設塔 CD 之高爲 h 尺，二物體 A，B 在過塔脚 C 之一水平線上，玆由塔頂 D 望 A，B，則其俯角爲 $45°-A$，及 $45°+A$，求二物體之距離 **2178**

●設雲之仰角爲 α，其映於湖水之像之俯角爲 β，雲之高 m 倍於眼之高，則 $\tan\beta=\dfrac{m+1}{m-1}\tan\alpha$ **2179**

●湖面上高 h 尺之處，停雲一朵，望之得仰角 α，同時望其湖中之像，得俯角 β，求雲高 **2180**

●一人在高 h 尺之絕壁頂上，見正西方一船，得俯角 α，自此經一時，見此船於南方，其俯角爲 β，求船每時之速度 **2193**

●一人自山麓測山頂之仰角，得 2α，由是沿傾斜角爲 α 之山坡，向頂上行 1 哩，再測山頂之仰角得 3α，求山之高 **2194**

●有一木製之二等邊三角形板，面太陽而垂直立於地上．設三角形之底爲 $2a$ 尺，高爲 h 尺，太陽之仰角爲 $30°$，求此三角形之影之頂角之半分之正切 **2207**

●某日正午，一人立於高出海面 h 丈之絕壁，在其子午圈之平面中，有雲一朵，測其仰角，得 α，測其海面上之影，得俯角 β．設其人對雲觀測時，太陽在其後方，其仰角爲 γ，則雲高於海面 $\dfrac{h\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\sin(\gamma+\alpha)}$ **2226**

(IV) 輕氣球

(V) 等角,最大角

A, 求塔之高及竿之長... ... ... **2186**

●塔頂上有一旗竿, 距塔基 a 尺處, 旗竿含 α 度之角, 又在同直線上, 距塔基 b 尺處, 亦含 α 度之角, 求旗竿之長 **2187**

●一人在一直線之路上, 前進至某處, 觀測二個目標, 知其含最大角 α, 由是更進 c, 見二目標若相合為一者然, 其方向與路線成角 β. 則此二目標間之距離等於 $\dfrac{2c\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$ **2221**

●設 2221 題中, 在兩目標成最大角時, 測定各目標與直線路所成之角, 又測定 c, 求兩目標間之距離 ... **2259**

●有二點 P, Q, 在 P 南之一地 L 上望之, 知 $P\hat{L}Q=A$. 次, 由 L 西行 a 而至 M, 知 $P\hat{M}Q=A$. 依同方向更進 b 而達 Q 南之 N. 然則 P, Q 之距離為 $\sqrt{\{(a+b)^2+b^2\tan^2A\}}$ **2228**

●知二點 A, B 之距離含於同水平面上之二點 C, D 之角相等, 則 $AB\sin CBD=CD\sin ADB$... ... ... **2229**

●在相距 c 之二水平地上, 遙望山上之紀念碑, 知其仰角為 α, β, 又在過此二地之垂直面上含同一之角, 則紀念碑高 $c\cos(\beta+\alpha)/\sin(\beta-\alpha)$ **2252**

(VI) 方向, 角

●直線狀之路傍, 有三電桿 A, B, C, 其距離相等, 設點 P 上含 AB, BC 之角, 其正切為 τ, τ', 又設 PB 與路 BC 所成角之正切為 T, 則 $\dfrac{2}{T}=\dfrac{1}{\tau}-\dfrac{1}{\tau'}$... ... ... **2211**

●設 ABC 乃 C 為直角之三角形. 今由 B 及 C 測 A 處之塔之仰角, 得 15° 及 45°, 然則 $\tan B=\frac{1}{2}\{3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}}\}$ **2210**

●兩汽船依平行之航路同一之方向航行, 初由一汽船望他汽船, 知其視線與直北之方向成 $\alpha°$ 之角, 經一時後, 此線變為 $\beta°$, 更 1 時後, 此角又變為 $\gamma°$, 求兩船航路之方向 **2241**

●有一塔立於斜面之上, 命其塔基為 A, 在此斜面上之點 C 測塔所含之角, 得 α. 在直線 AC 之延線上取點 D, 令 CD $=$ AC, 由 D 測塔所含之角, 得 β. 設 ϕ 為塔及 AC 間之角, 則 $\cot\phi=2\cot\alpha-\cot\beta$, 又在他直線 AC′D′ 上作同一之測量, 得 $\tan\alpha'=2\tan\beta'$, 命角 CAC′ 為 γ, 斜面與水平

(VII) 立體

(VIII) 近似值，誤差

(2) 用三角函數表者

●在距塔 ALB 48 尺高 14 尺之台上之 C 望塔,知 $A\hat{C}L=L\hat{C}B$,若 $AL=30$ 尺,則塔之高爲幾何… … … … … 2312

●設東西二地 A,B,相距 1 哩,由此望輕氣球,知其方向爲西北及東北,仰角皆爲 $45°$. 球之高爲幾哩 … … 2313

●有一輕氣球飛揚於空中,自其正南之甲地望之,仰角爲 $60°$,同時自甲地正東 1 里之乙地望之,仰角爲 $45°$. 輕氣球之高爲何 … … … … … … … … 2314

●有一圓柱台,建於河岸上,高 200 尺,上塑一佛像,高 30 尺.今自對岸測佛像,知其所含之角,等於台下高 6 尺之人所含之角,然則河闊如何 … … … … … … 2315

●高 20 尺之旗竿,立於高 10 尺之城壁上,此旗竿張於地上某點之角,有正切 0.5,然則城壁張於其點之角,正切如何 … … … … … … … … … … … … 2316

●塔 BCD 立於水平面上,其頂上有塔尖 DE,由水平線 BA 之一端 A,見 BC 及 DE 含等角,今設 $BC=9$ 尺,$CD=72$ 尺,$DE=36$ 尺,則 BA 之距離如何 … … … 2317

●有一直立之棒,其影之長與棒之比爲 $\sqrt{3}:1$. 今將此棒在垂直面上迴轉,令其下端固定,且保持影恆在同一方向,然則影之長等於最初之影之長時,棒與水平面所成之角如何… … … … … … … … … … … 2318

●塔東有二地,相隔 200 尺,望塔頂,得 $45°$ 及 $30°$. 塔高幾何… … … … … … … … … … … … 2319

●在市樓之窗中,測對屋之高,知其含直角,而屋頂之仰角爲 $60°$,今設街寬 30 尺,則屋高如何 … … … 2320

●有等高之煙囱二,自其基底聯結之直線上之一點望之,較近之煙囱之仰角爲 $60°$,今依此直線之垂直方向行 80 尺而測之,則兩煙囱之仰角爲 $45°$ 及 $30°$. 求兩煙囱之高及其間之距離… … … … … … … … … 2321

●有成正三角形之三點,其兩兩之距離皆爲 500 粍,由一點 D 觀二邊 AB 及 AC,其角各爲 $120°$,則 AD 之距離幾何 … … … … … … … … … … … … 2322

●由地上之一點,望空中之輕氣球,得視角 $30°$,中心之仰角 $45°$,設此球之直徑爲 6 丈,則其中心至地面之鉛直高幾何… … … … … … … … … … … … 2323

●燈臺 L 之西南及南 $15°$ 東有二船 A,B,AB 之方向爲東南,AL 之長爲 4 哩. 二船之距離如何 … … 2324

●一船向正東開航,某時船中一人觀測正南拋錨之他二船,由是航行 3 浬後測之,見此二船自西偏南 $60°$ 及 $30°$,求此時觀測者至二船之距離… … … … … … 3225

(3) 單含已知三角函數者

$3\sqrt{3}$ 尺,然則太陽之仰角及塔之高如何 … … **2291**

●斜度爲 $\frac{1}{5}$ 之路,長 1 里 120 丈,設斜度爲 $\frac{1}{12}$ 之路,與前同高,則長幾里 … … … … … … … **2292**

●一路長 100 尺,與水平面成 45° 之傾斜,若將傾斜改爲 30°,則路長幾尺… … … … … … … … **2293**

●有一直立之塔,在其底之水平面上之一點 A 測之,則塔在正北,含角 15°,於是恆以同角度測塔,而前進 100 丈,則見塔在東北,然則此塔之高及至 A 之距離如何 **2294**

●有一塔,在其正南之一地 A 測之,得仰角 30°,在 A 之正西距 A 爲 a 之一地 B 測之,得仰角 18°,然則塔之高爲 $a/\sqrt{(2+2\sqrt{5})}$ … … … … … … … **2295**

●塔之正東有二地,相距 200 丈,由此二地望塔頂,得仰角 45° 及 30°,求塔高 … … … … … … **2296**

●一燈台高出海面 200 尺,自其頂上測二船之俯角,得 45° 及 30°,兩船之方向,一在正南,一在正北,二船之距離如何 … … … … … … … … … **2297**

●設直立之塔之頂爲 P,基礎爲 Q,水平面上之二點 A, B 之距離爲 32 尺,$Q\hat{A}B=90^\circ$, $\cot PAQ=\frac{2}{5}$, $\cot PBQ=\frac{3}{5}$,則塔高幾何 … … … … … … … … **2298**

●在地上之一點望煙囪之頂,得仰角 60°,由此點直上 40 尺,再測之,得仰角 45°,然則煙囪之高及由其頂至二觀測點之距離如何… … … … … … … … **2299**

●一塔與一樓建於同一水平面上,樓之高爲 30 尺,由樓底望塔頂,得仰角 45°,由樓頂望之,得仰角 30°,求塔高及塔至樓之距離 … … … … … … … **2300**

●自高 300 尺之塔頂望他塔頂,得俯角 30°,二塔間之距離爲 90 尺,小塔之高爲幾何… … … … … **2301**

●設 A, B 爲海面上之二點,其間之距離爲 2500 粨,自 A, B 兩處,望直線 AB 直上之輕氣球 C,則視線與水平面所成之角分別爲 45° 及 60°,然則輕氣球在水平面上之高如何… … … … … … … … … … **2302**

●在直線狀之海岸上,有三點 A, B, C,而 $AB=BC=2$ 哩,今一船依垂直於此岸之方向而來,在某點上見 AC 張 60° 之角,由是航 10 分後,見 AC 張 120° 之角,然則船速每時幾何?但船向 B 進航 … … … … … … **2303**

●河岸上之二點 A, B,相距 100 丈,由是望對岸之一點 P,知 $P\hat{A}B=60^\circ$, $P\hat{B}A=45^\circ$,河闊如何 … … … **2304**

●一人立於河岸,測對岸之樹,知其含 60° 之角,歸退 40 丈測之,則爲 30°,然則樹高及河闊各如何 … … **2305**

正西行至 A，仰角爲 45°，更依同方向行至 B，仰角爲 30°，求 AB 之距離 **2334**

(4) 用五位對數表者

● 2167 題中，設 $AB=14.982$，$D\hat{C}S=43°19'$，$S\hat{C}Z=32°27'$，$CB=1.2$，則目標之高如何？但以粎爲單位 ... **2335**

● 2169 題中，設 $BC=158.27$，$A\hat{C}B=52°28'$，$A\hat{B}C=61°19'$，$A\hat{B}S=25°17'$，$S\hat{B}Z=52°34'$，則燈臺之高如何？但以粎爲單位 **2336**

● 2170 題中，設 $BC=577.19$，$A\hat{C}B=58°25'$，$A\hat{B}C=67°47'$，$A\hat{B}H=39°38'$，求山之高．但測器之高爲 1.25，單位爲粎 **2337**

● 2171 題中，設 $AB=248$ 粎，$A=39°28'$，$B=71°42'$，求 AC **2338**

● 一人欲測山之高，在某所得山頂之仰角 15°，由是向山在水平線上進 7.2 里，又得山頂之仰角 75°，山之高如何 **2339**

● 次之圖中，設 $AB=352$ 丈，$C\hat{A}B=95°17'$，$D\hat{A}B=41°28'$，$C\hat{B}A=53°36'$，$D\hat{B}A=103°51'$，$D\hat{B}C=57°43'$，求 CD **2340**

● 在山頂上測同方向之二屋，得俯角 23°20′ 及 18°10′，又二屋之距離爲 449 丈，求山高 **2341**

● 一人自點 B 望山頂 C，得 27°18′，又在同水平面上退後 500 丈而自點 A 測之，得 16°10′，求山高．但 A，B，C 在同一平面上 **2342**

● 一人見北及北 30° 西之方向，有二物體 A，B，由是依北西之方向進 10 里，則 A，B 之方向變爲北東及東，問 A，B 之距離如何 **2343**

● 由山麓望岩之上端，得仰角 47°，由是登 32° 傾斜之直線狀山路，向岩行 1000 尺，再測岩之仰角，得 77°，求岩之高 **2344**

● 一船航向北方，見一燈臺在北東及北北東之方向，由是行 20 浬後，再望二燈臺，見皆在東方．求二燈臺之距離 **2345**

● 有一向南 59°5′ 東延長且高 20 尺之土壁，太陽在南方仰角爲 30° 時，此壁之影之闊爲幾何 **2346**

(5) 用四位或六位對數表者

● 設 $B=60°40'$，$C=59°10'$，$a=10.62$，求 b ... **2347**

● 設軍艦之甲板與海岸之一點在同水平面，由此點測檣頂

(6) 用七位對數表者

第八 逆三角函數

I. 證明問題

(1) 基本式

$=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$, 但對於普徧値,不能 $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ **2359**

●$\sin^{-1}a=\cos^{-1}\sqrt{(1-a^2)}=\tan^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{(1-a^2)}}=\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{(1-a^2)}}{a}$

$=\sec^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{(1-a^2)}}=\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{a}$ **2360**

●$\cos^{-1}a=\sin^{-1}\sqrt{(1-a^2)}=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{(1-a^2)}}{a}=\cot^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{(1-a^2)}}$

$=\sec^{-1}\dfrac{1}{a}=\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{(1-a^2)}}$ **2362**

●$\tan^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}=\cot^{-1}\dfrac{1}{a}$

$=\sec^{-1}\sqrt{(1+a^2)}=\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{\sqrt{(1+a^2)}}{a}$ **2363**

●$\cot^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}=\cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{(1+a^2)}}=\tan^{-1}\dfrac{1}{a}$

$=\sec^{-1}\dfrac{\sqrt{(1+a^2)}}{a}=\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{(1+a^2)}$ **2364**

●$\sec^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{(a^2-1)}}{a}=\cos^{-1}\dfrac{1}{a}=\tan^{-1}\sqrt{(a^2-1)}$

$=\cot^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{(a^2-1)}}=\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{(a^2-1)}}$ **2365**

●$\operatorname{cosec}^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{1}{a}=\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{(a^2-1)}}{a}=\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{(a^2-1)}}$

$=\cot^{-1}\sqrt{(a^2-1)}=\sec^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{(a^2-1)}}$ **2366**

(2) 和及差之正弦餘弦

●$\sin^{-1}a\pm\sin^{-1}b=\sin^{-1}\{a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2}\}$ **2367**

●$\sin^{-1}\dfrac{1}{2}+\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=90°$ **2368**

●$\sin^{-1}\dfrac{4}{5}+\sin^{-1}\dfrac{5}{13}=\sin^{-1}\dfrac{63}{65}$ **2369**

●$\sin^{-1}\dfrac{77}{85}=\sin^{-1}\dfrac{3}{5}+\sin^{-1}\dfrac{8}{17}$ **2370**

●$\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{82}}+\sin^{-1}\dfrac{4}{\sqrt{41}}=\dfrac{\pi}{4}$ **2371**

●$\sin^{-1}\dfrac{4}{5}+\cos^{-1}\dfrac{12}{13}+\sin^{-1}\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2}$ **2372**

●$\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{1}{2}+\cos^{-1}\dfrac{1}{2}\right)=1$ **2373**

●$\sin^{-1}\dfrac{4}{5}+\sin^{-1}\dfrac{5}{13}+\sin^{-1}\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2}$ **2374**

(3) 和及差之正切

● $4\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{120}{119}$ ……………… 2394

● $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}=45^\circ$ ……………… 2395

● $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{4}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}=45^\circ$ …… 2396

● $\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-2\tan^{-1}\frac{1}{408}+\tan^{-1}\frac{1}{1393}$ … 2397

● $\frac{\pi}{4}=5\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{3}{79}$ ……………… 2398

● $2\tan^{-1}y=\sin^{-1}\frac{2y}{1+y^2}$ ……………… 2399

● $2\tan^{-1}\frac{8}{15}=\sin^{-1}\frac{240}{289}$ ……………… 2400

● $2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}=\cos^{-1}\frac{a-x}{a+x}$ ……………… 2401

● $\tan(2\tan^{-1}a)=2\tan(\tan^{-1}a+\tan^{-1}a^3)$ …… 2402

● $\tan^{-1}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\tan^{-1}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}$ ……………… 2403

● $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan 2A\right)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3 A)=0$ ……………………… 2404

● 求 $3\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{26}-\frac{\pi}{4}$ 之正切 2408

● $2\tan^{-1}a=\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}$ ……………… 2405

● $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\frac{1}{1985}$ …… 2409

(4) 和及差之餘切

● $\cot^{-1}a\pm\cot^{-1}b=\cot^{-1}\frac{ab\mp 1}{b\pm a}$ ……………… 2410

● $\cot^{-1}\frac{3}{4}+\cot^{-1}\frac{1}{7}=135^\circ$ ……………… 2411

● $2\cot^{-1}a=\cot^{-1}\frac{a^2-1}{2a}$ ……………… 2413

(5) 雜題

● $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=45^\circ$ ……………… 2412

● $\sin^{-1}\frac{12}{13}=\cot^{-1}\frac{5}{12}$ ……………… 2361

II. 方程式

(1) 解

(2) 雜題

第九 方程式

I. 角有限制者

II. 角無限制者

(1) sin

(2) cos

(3) tan.

(4) cot.

(5) sec.

(6) cosec.

(7) sin. cos.

(8) tan. cot.

(9) sin. tan.

(10) cos. tan.

(11) cot. cosec.

(12) 二函數雜題

(13) 三函數

(14) 雜題

第十 消去法

(1) 消去 (一)

(2) 消去(二)

●$\sin\alpha+\sin\beta=a$, $\cos\alpha+\cos\theta=b$, 及 $\cos(\alpha-\beta)=c$ 中; α, β **2635**

●$\sin\alpha=2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2}$, $\cos\alpha=\cos\beta\cos\phi=\cos\gamma\cos\theta$ 中, θ, ϕ **2652**

●$x+x'\cos\phi+y'\sin\phi\cos\theta$, $y=x'\sin\phi-y'\cos\phi\cos\theta$, $z=y'\sin\theta$ 中, θ, ϕ **2653**

●$x=a\sin\phi\cos\theta$, $y=b\sin\phi\sin\theta$, $z=c\cos\phi$ 中, θ, ϕ **2654**

●$\tan\theta\cot\phi=\tan\alpha\cot\alpha'$, $\cos^2\theta=\cos\alpha\sec\beta$, $\cos^2\phi=\cos\alpha'\times\sec\beta$ 中, θ, ϕ **2655**

●$a\sin\phi=b\sin\theta$, $c\sin\theta=a\sin(\theta+\phi)$, $\cos\theta-\cos\phi=2m$ 中, θ, ϕ **2656**

●$a=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\cos\alpha\cos\theta$, $b=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta$, $c=\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$ 中, α, β ... **2665**

●$\sin\theta+\sin\phi=a$, $\cos\theta+\cos\phi=b$, $\cos(\theta-\phi)=c$ 中, θ, ϕ **2668**

●$x\cos\theta+y\sin\theta=a$, $x\cos(\theta+2\phi)-y\sin(\theta+2\phi)=a$, $b\times\sin(\theta+\phi)=a\sin\phi$ 中, θ, ϕ **2669**

●$\tan x+\tan y=a$, $\cot x+\cot y=b$, $x+y=c$ 中, x, y **2670**

●$c\sin\theta=a\sin(\theta+\phi)$, $a\sin\phi=b\sin\theta$, $\cos\theta-\cos\phi=2m$ 中, θ, ϕ **2682**

●$a^2\cos^2\theta-b^2\cos^2\phi=c^2$, $a\cos\theta+b\cos\phi=r$, $a\tan\theta=b\times\tan\phi$ 中, θ, ϕ **2683**

●$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\phi-\theta)}{\sin(\phi+\theta)}$, $\frac{c}{x}=\cos(\phi-\theta)$, $\frac{b}{x}=\frac{\sin\theta}{\sin\phi}$ 中, θ, ϕ **2684**

●$\cos\theta+\cos\phi=a$, $\cot\theta+\cot\phi=b$, $\operatorname{cosec}\theta+\operatorname{cosec}\phi=c$ 中, θ, ϕ **2695**

●$a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=a\cos^2\phi+b\sin^2\phi=1$, $a\tan\theta=b\tan\phi$ 中, θ, ϕ **2696**

●$x\cos\theta+y\sin\theta=2a\sqrt{3}$, $x\cos(\theta+\phi)+y\sin(\theta+\phi)=4a$, 及 $x\cos(\theta-\phi)+y\sin(\theta-\phi)=2a$ 中, θ, ϕ ... **2697**

(3) 求證(一)

●$\frac{x\cos 3\theta+y\sin 3\theta}{\cos^3\theta}=\frac{y\cos 3\theta-x\sin 3\theta}{\sin^3\theta}=x^2+y^2$ 時, x^2

(4) 求證(二)

(5) 雜題

第十一

I. 值之變化及極限

(1) 求證

(2) 研究變化

(3) 歸於零時

(4) 無限增大時

(5) 求值

●$x=\frac{\pi}{3}$ 時，$\frac{1-2\cos x}{\sin 3x}$ **2717**

●$a=b$ 時，$\frac{\sin a-\sin b}{\tan a-\tan b}$ **2716**

(6) 雜 題

●試就三角形 ABC，作式 $a=(b-c)\cos\frac{A}{2}\Big/\sin\frac{B-C}{2}$，又命 $b=c$ 而玩索之 **2718**

●若 $\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{863}{864}$，則 θ 殆為 $5'$ **2727**

●設三角形之一角為 $30°$，其隣邊為 1 尺，又其對邊為 250 尺，則他銳角為幾分 **2726**

●若 γ 不較 $\frac{1}{2}\pi$ 大，則 $\sin\theta\{1+\sin(\gamma-\theta)\}$ 隨 θ 之由 0 增大至 γ，而不絕增大 **2728**

II. 不 等 式

(1) 求 證

●$\sin^2\alpha+\sin^2\beta>2(\sin\alpha+\sin\beta-1)$ **2731**

●方程式 $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1$ 中三銳角之和較 $180°$ 小... ... ... **2735**

●$\alpha=60°$ 時，$\alpha-\sin\alpha<\frac{\alpha^3}{4}$ **2736**

●θ 為正，且較 $\frac{\pi}{2}$ 小時，$\sin\theta$ 較 $\tan\theta-\frac{\tan^3\theta}{2}$ 大 **2737**

●若 θ 在 0 及 π 之間，則 $\cot\frac{\theta}{2}$ 決不較 $1+\cot\theta$ 小 **2738**

●若 $\tan\theta=n\tan\phi$，則 $\tan^2(\theta-\phi)$ 不能超過 $\frac{(n-1)^2}{4n}$ **2739**

●若 θ 在 0 及 $\frac{\pi}{2}$ 之間，則 $\theta-\sin\theta$ 較 $\tan\theta-\theta$ 小 **2742**

●若 θ 為較 $\frac{\pi}{2}$ 小之正角，則 $\sqrt{(\cos\theta)}$ 較 $\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ 小... ... ... **2743**

●若 A, B, C 為適合方程式 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=1$ 之正角，則 $A+B+C$ 較 $90°$ 大 **2741**

●設角 A, B, C 各較 $90°$ 小，則 $\sin(A+B+C)$ 較 $\sin A+\sin B+\sin C$ 小 **2734**

(2) 三角形 A, B, C 中

III. 極大極小

(1) 極大值

(2) 極小值

(3) 極大極小值

第十二

I. 對稱式

II. 交代式

III. 代數學及三角法中公式之變換

$-\gamma)=0$ **2794**

●用代數學之公式, $\Sigma\{\sin^4\alpha\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)\}=-\Pi\times\sin(\beta+\gamma)\Pi\sin(\beta-\gamma)$ **2795**

●用代數學之公式, $\Sigma\{\cos 3\alpha(\cos\beta-\cos\gamma)\}=-4(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\Pi(\cos\beta-\cos\gamma)$ **2796**

●用代數學之公式, $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma>\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha+\tan\alpha\tan\beta$ **2797**

●用代數學之公式, $\Sigma\cos^3(\alpha+\theta)\sin^3(\beta-\gamma)=3\Pi\cos(\alpha+\theta)\times\sin(\beta-\gamma)$... ... ... **2798**

●用三角法之公式, $x+y+z=xyz$ 時, $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}$ **2799**

●用三角法之公式, $x+y+z=xyz$ 時, $x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$ ... **2800**

●用三角法之公式, $x+y+z=xyz$ 時, $\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{(3x-x^3)(3y-y^3)(3z-z^3)}{(1-3x^2)(1-3y^2)(1-3z^2)}$ **2801**

IV. 用輔角之方程式解法

●用輔角藉三角函數以求二次方程式根之數値之方法 **2802**

●用輔角藉三角函數以求三次方程式根之數値之方法 **2803**

●解 $x^3-6x+4=0$... ... ... **2804**

●$x^3-3x-1=0$ 之根爲 $2\cos 20^\circ$, $-2\sin 10^\circ$, $-2\sin 40^\circ$ **2805**

●若 $p^2=5q$, $\left(\frac{r}{2}\right)^2$ 不較 $\left(\frac{p}{5}\right)^5$ 大,則五次方程式 $x^5-px^3+qx+r=0$ 之五根爲 $2\left(\frac{p}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\alpha$, $2\left(\frac{p}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\pm\alpha\right)$, 以及 $2\left(\frac{p}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\pm\alpha\right)$, 但 $\cos 5\alpha=\frac{r}{2}\left(\frac{5}{p}\right)^{\frac{5}{2}}$ **2806**

第十三

De Moivre 氏定理

●[De Moivre 氏定理] n 之値不論爲正數負數整數或分

... ... 2822

● $\{\cos\theta+\cos\phi+\sqrt{(-1)}(\sin\theta+\sin\phi)\}^n+\{\cos\theta+\cos\phi-\sqrt{(-1)}(\sin\theta+\sin\phi)\}^n=2^{n-1}\left(\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right)^n\cos\frac{n(\theta+\phi)}{2}$ 2823

● 求圓之小弧之長,有次之定則,試證明之.卽由半弧之弦之8倍,減全弧之弦,所餘之 $\frac{1}{3}$ 約等於其弧之長 ... 2824

● 假定 $x=\cos 2\theta+\sqrt{(-1)}\sin 2\theta$, 同時又就 a, b, c 作同樣之假定,試依此由假定 $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(a-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$ 恆等式,導出下式: $\frac{\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\gamma)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}\times\sin 2(\theta-\alpha)+\frac{\sin(\theta-\gamma)\tan(\theta-\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}\times\sin 2(\theta-\beta)+\frac{\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}\sin 2(\theta-\gamma)=0$ 2825

● 方程式 $x^4-x^3+x^2-x+1=0$ 之四根爲 $\cos 36^\circ\pm\sqrt{(-1)}\times\sin 36^\circ$ 及 $\cos 108^\circ\pm\sqrt{(-1)}\sin 108^\circ$ 2826

● $k^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$, $\tan\beta=\frac{b\sin\alpha}{a-b\cos\alpha}$ 時, $\{a[\cos\theta+\sqrt{(-1)}\sin\theta]-b[\cos\overline{\theta-\alpha}+\sqrt{(-1)}\sin\overline{\theta-\alpha}]\}^{\frac{1}{n}}$ 之一値爲 $k^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\frac{\theta+\beta}{n}+\sqrt{(-1)}\sin\frac{\theta+\beta}{n}\right\}$ 2827

● 試由方程式 $[\cos\theta+\sqrt{(-1)}\sin\theta][\cos 2\theta+\sqrt{(-1)}\sin 2\theta]\ldots\ldots[\cos n\theta+\sqrt{(-1)}\sin n\theta]=1$ 求 θ 之普徧値 2828

第十四

三角函數之展開式

● 設 $\cos\theta+\sqrt{(-1)}\sin\theta$ 表以 x, 則 $x^n+\frac{1}{x^n}=2\cos n\theta$, 及 $x^n-\frac{1}{x^n}=2\sqrt{(-1)}\sin n\theta$ 2829

● 設 n 爲正整數,試以 θ 之倍數之餘弦表 $\cos^n\theta$ 2830

● 設 n 爲偶數,且爲正整數,試以 θ 之倍數之餘弦表 $\sin^n\theta$ 2831

● 設 n 爲奇數,且爲正整數,試以 θ 之倍數之正弦表 $\sin^n\theta$ 2832

● 設 n 爲正整數,試以 $\cos\theta$ 之降冪級數表 $\cos n\theta$ 2833

●設 n 爲正偶數,試展開 $\cos n\theta$ 爲 $\sin^2\theta$ 之冪級數 2834

●n 爲正偶數時,試證 $\sin n\theta = n\cos\theta\left\{\sin\theta - \frac{n^2-2^2}{3!}\sin^3\theta\right.$

$\left.+\frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\sin^5\theta - \ldots\ldots\right\}$ 2835

●n 爲奇數時,試仿前求證 $\sin n\theta = n\sin\theta - \frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3\theta$

$+\frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\theta - \ldots\ldots$, $\cos n\theta = \cos\theta\left\{1-\frac{n^2-1}{1\cdot 2}\right.$

$\left.\times\sin^2\theta + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4\theta - \ldots\ldots\right\}$... 2835 注意

●n 爲偶整數時, $(-1)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta = 1 - \frac{n^2}{2!}\cos^2\theta + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}$

$\times\cos^4\theta - \ldots\ldots$, $(-1)^{\frac{n}{2}+1}\sin n\theta = n\sin\theta\left\{\cos\theta - \frac{n^2-2^2}{3!}\right.$

$\left.\times\cos^3\theta + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\cos^5\theta - \ldots\ldots\right\}$, n 爲奇整數時,

$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos n\theta = n\cos\theta - \frac{n(n^2-1)}{3!}\cos^3\theta + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}$

$\times\cos^5\theta - \ldots\ldots$, $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\theta = \sin\theta\left\{1 - \frac{n^2-1}{2!}\cos^2\theta\right.$

$\left.+\frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\cos^4\theta - \ldots\ldots\right\}$ 2836

●試以 θ 之倍數之餘弦爲項表明 $(\sin\theta)^{4n+2}$ ... 2837

●試以 θ 之倍數之正弦爲項表明 $(\sin\theta)^{4n+1}$ ... 2838

●試以 θ 之倍數之餘弦爲項表明 $(\cos\theta)^{2n}$ ... 2839

●簡化 $\frac{\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10}{\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta}$ 2840

●試以 θ 之諸倍數之正弦爲項表 $\sin^5\theta\cos^6\theta$ ... 2841

第十五

餘弦及正弦之指數值

●$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} + e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{2\sqrt{(-1)}}$, 從而

$\tan x = \frac{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}}{\sqrt{(-1)}\{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{-x\sqrt{(-1)}}\}}$ 2842

●試以 $\tan\theta$ 之冪表 θ 2843

●$\tan\theta = x$ 時, $\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots$ 2843 注意

●[Euler 氏級數] $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \ldots\ldots + \frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3\cdot 3^3}-\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\cdots\cdots$ **2844**

●[Machin 氏級數] $\frac{\pi}{4}=4\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\cdots\cdots\right\}$

$-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{3(329)^3}+\frac{1}{5(239)^5}-\cdots\cdots\right\}$ **2845**

●$\frac{\pi}{4}=4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}$... ... **2845 注意**

●知 $\sin x=n\sin(x+a)$, 試以 n 之冪表 x... ... **2846**

●知 $\tan x=n\tan y$, 求 x 之級數 **2847**

●以 x 之冪表 $e^{ax}\cos bx$ 之之中, x^n 之係數如何 **2848**

●以 x 之冪表 $e^{ax}\sin bx$ 之式中, x^n 之係數如何 **2849**

●知三角形之二邊及夾角,求第三邊對數之級數 **2850**

●試應用正弦, 餘弦之指數值, 求證 $\frac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}=\cot\theta$ ...

... ... **2851**

●知三角形 ABC 之角 C, 內隣邊 a, b 殆相等,則他二邊殆等

於 $90^\circ-\frac{C}{2}\pm\frac{180^\circ}{\pi}\left\{\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\right)^3\right\}$ ...

... ... **2852**

●設三角形之二邊為 a 及 b, 其對角為 A 及 B, 則 $\log b$ $-\log a=\cos 2A-\cos 2B+\frac{1}{2}(\cos 4A-\cos 4B)+\frac{1}{3}(\cos 6A$ $-\cos 6B)+\cdots\cdots$ **2853**

●若 $A+Bi=\log(m+ni)$, 則 $\tan B=\frac{n}{m}$, 及 $2A=\log(n^2$ $+m^2)$ **2854**

●將 $\cos(\theta+\phi i)$ 及 $\sin(\theta+\phi i)$ 化成 $\alpha+\beta i$ 之形 **2855**

●設 $u=(a+bi)^{p+qi}$, 試將 $\log u$ 化成 $\alpha+\beta i$ 之形 **2856**

●試將 $(a+bi)^{p+qi}$ 化成 $\alpha+\beta i$ 之形 **2857**

●$\{\sin(a-\theta)-e^{\pm ai}\sin\theta\}^n=\sin^{n-1}a\{\sin(a-n\theta)+e^{\pm ai}$ $\times\sin n\theta\}$ **2858**

第十六　級數之和

●設諸角成等差級數,求其餘弦之和,及正弦之和 **2859**

●$\cos a-\cos(a+2\beta)+\cos(a+4\beta)-\cdots\cdots$(至 n 項)之和 ...

... ... **2860**

●$\operatorname{cosec} a+\operatorname{cosec} 2a+\operatorname{cosec} 4a+\cdots\cdots$(至 n 項)之和 ...

... ... **2861**

●$\frac{1}{\cos a\cos 3a}+\frac{1}{\cos 3a\cos 5a}+1/(\cos 5a\cos 7a)\cdots\cdots$(至 n

第十七

三角函數式之因數分解

● x^n+1 … … … … … … … … … 2877

● 視 n 爲偶數或奇數而 $\sqrt{n}=2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{4\pi}{2n}\cdots\cdots\sin\frac{n-4}{2n}\times\pi\sin\frac{n-2}{2n}\pi$, 或 $\sqrt{n}=2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{4\pi}{2n}\cdots\cdots\sin\frac{n-3}{2n}\pi\times\sin\frac{n-1}{2n}\pi$. 又視 n 爲偶數或奇數而 $1=2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\cdots\sin\frac{n-3}{2n}\pi\sin\frac{n-1}{2n}\pi$, 或 $1=2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\cdots\times\sin\frac{n-4}{2n}\pi\sin\frac{n-2}{2n}\pi$ … … … … … 2878

● $x^{2n}-2x^n\cos\theta+1$ … … … … … … 2879

● $\sin n\phi=2^{n-1}\sin\phi\sin(2a+\phi)\sin(4a+\phi)\cdots\cdots\sin(2na-2a+\phi)$. 但 $a=\frac{\pi}{2n}$ … … … … … … … 2880

● $\cos n\phi=2^{n-1}\sin(a+\phi)\sin(3a+\phi)$si [illegible] $\cdots\cdots\sin(2na-a+\phi)$. 但 $a=\frac{\pi}{2n}$ … … … … … 2881

● $a=\frac{\pi}{2n}$ 時, $1=2^{n-1}\sin a\sin 3a\sin 5a\cdots\cdots\sin(2na-a)$, $n=2^{n-1}\sin 2a\sin 4a\sin 6a\cdots\cdots\sin(2na-a)$ 2882

● $\tan n\phi=\{\sin\phi\sin(2a+\phi)\sin(4a+\phi)\cdots\cdots\cdots\cdots\sin(2na-2a+\phi)\}/\{\sin(a+\phi)\sin(3a+\phi)\sin(5a+\phi)\cdots\cdots\sin(2na-a+\phi)\}$, 又 n 爲奇數時, $\tan n\phi=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\tan\phi\tan\left(\phi+\frac{\pi}{n}\right)\cdots\cdots\tan\left(\phi+\frac{n-1}{n}\pi\right)$. 但 $a=\frac{\pi}{2n}$ … … 2883

● 視 n 爲偶數或奇數, 而 $\sin n\phi=2^{n-1}\sin\phi\cos\phi(\sin^2 2a-\sin^2\phi)\cdots\cdots\{\sin^2(n-4)a-\sin^2\phi\}\{\sin^2(n-2)a-\sin^2\phi\}$, 及 $\cos n\phi=2^{n-1}(\sin^2 a-\sin^2\phi)(\sin^2 3a-\sin^2\phi)\cdots\cdots\{\sin^2(n-3)a-\sin^2\phi\}\{\sin^2(n-1)a-\sin^2\phi\}$, 或 $\sin n\phi=2^{n-1}\times\sin\phi(\sin^2 2a-\sin^2\phi)(\sin^2 4a-\sin^2\phi)\cdots\cdots\{\sin^2(n-3)a-\sin^2\phi\}\{\sin^2(n-1)a-\sin^2\phi\}$, 及 $\cos n\phi=2^{n-1}\cos\phi\times(\sin^2 a-\sin^2\phi)(\sin^2 3a-\sin^2\phi)\cdots\cdots\{\sin^2(n-4)a-\sin^2\phi\}\times\{\sin^2(n-2)a-\sin^2\phi\}$. 但 $a=\frac{\pi}{2n}$ … … … 2884

● $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ … … … … … … … … 2885

● $x^{2n}-2x^n a^n\cos\theta+x^{2n}$ … … … … … 2886

● [D. Moivre 氏圓之性質] 設圓之中心爲 O, 圓內之任意點爲 P, 將全周分爲 n 等弧 BC, CD, DE 等 [但自點 B 始], 而聯結 O 及 P 於各分點 B, C, D, 等, 命角 POB 爲 θ, 則

●$\cos x+\tan\frac{1}{2}y\sin x=\left(1+\frac{2x}{\pi-y}\right)\left(1-\frac{2x}{\pi+y}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi-y}\right)$
$\times\left(1-\frac{2x}{3\pi+y}\right)$…… … … … … … … … 2901

●$\cos x-\cot\frac{1}{2}y\sin x=\left(1-\frac{2x}{y}\right)\left(1+\frac{2x}{2\pi-y}\right)\left(1-\frac{2x}{2\pi+y}\right)\left(1\right.$
$\left.+\frac{2x}{4\pi-y}\right)$…… … … … … … … … 2902

●$\frac{\cos x-\cos y}{1-\cos y}=\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)[1-\{x^2\div(2\pi-y)^2\}]\left\{1-\frac{x^2}{(2\pi+y)^2}\right\}$
$\times\left\{1-\frac{x^2}{(4\pi-y)^2}\right\}$…… … … … … … 2903

●$\frac{\sin x+\sin y}{\sin y}=\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x}{\pi-y}\right)\left(1-\frac{x}{\pi+y}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi+y}\right)$
$\times\left(1-\frac{x}{2\pi-y}\right)$…… … … … … … … 2904

●$\tan\frac{y}{2}=\frac{2}{\pi-y}-\frac{2}{\pi+y}+\frac{2}{3\pi-y}-\frac{2}{3\pi+y}+$…… 2905

●$\cot\frac{y}{2}=\frac{2}{y}-\frac{2}{2\pi-y}+\frac{2}{2\pi+y}-\frac{2}{4\pi-y}+$…… … 2906

●$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}$ … … 2907

●$\frac{1}{\sin y}=\frac{1}{y}+\frac{1}{\pi-y}-\frac{1}{2\pi-y}-\frac{1}{\pi+y}+\frac{1}{2\pi+y}+\frac{1}{3\pi-y}-\frac{1}{4\pi-y}$
$-\frac{1}{3\pi+y}+$ … … … … … … … … 2908

第十八　雙曲線函數

●三角函數與圓之扇形間之關係如何… … … 2909

●試舉雙曲線函數間之單純關係[基礎關係] … 2910

●在六種雙曲線函數中，試將其一之數值，以其他各函數爲項表之… … … … … … … … … 2911

●試在六種雙曲線函數中，區別孰爲偶數函數，孰爲奇數函數… … … … … … … … … … 2912

●設 P, Q, R, S 爲在直角雙曲線之一分枝上依次所取之點，若 QR 與 PS 平行，則扇形 POQ, ROS 相等．反之，若扇形 POQ, ROS 相等，則 QR 與 PS 平行 … … .. 2913

●設 POQ, ROS 爲直角雙曲線之相等扇形，又 P, Q, R, S 投於漸近線上之正射影爲 p, q, r, s，則 $Op:Oq=Or:Os$ … … … … … … … … 2914

●$\tanh x+\tanh y=\dfrac{\sinh(x+y)}{\cosh x\cosh y}$ 2928

●$\cosh(x+y)\cosh(x-y)=\cosh^2x+\sinh^2y=\cosh^2y+\sinh^2x$ 2929

●$\sinh(x+y)\sinh(x-y)=\sinh^2x-\sinh^2y=\cosh^2x-\cosh^2y$ 2930

●$\cosh(x+y+z)=\cosh x\cosh y\cosh z+\Sigma\cosh x\sinh y \times\sinh z$ 及 $\sinh(x+y+z)=\sinh x\sinh y\sinh z +\Sigma\sinh x\cosh y\cosh z$ 2931

●$\tanh(x+y+z)=\dfrac{\tanh x\tanh y\tanh z+\Sigma\tanh x}{1+\Sigma\tanh y\tanh z}$ 2932

●$\cosh 3u=4\cosh^3u-3\cosh u$, $\sinh 3u=4\sinh^3u+3 \times\sinh u$ 2933

●$\tanh 3x=\dfrac{\tanh^3x+3\tanh x}{1+3\tanh^2x}$ 2934

●$\theta=gdu$ 時, $\cos\theta=\operatorname{sech}u$, $\sin\theta=\tanh u$, $\cot\theta=\operatorname{cosech}u$, $\operatorname{cosec}\theta=\coth u$ 2935

●$\cosh^{-1}a=\sinh^{-1}\sqrt{(a^2-1)}$ 2936

●$\sinh^{-1}a=\pm\cosh^{-1}\sqrt{(a^2+1)}$. 但視 a 爲正或負而取上或下之符號 2937

●$\tanh^{-1}a+\tanh^{-1}b=\tanh^{-1}\dfrac{a+b}{1+ab}$ 2938

●由直角雙曲線上之點 P, 引切線 PT, 交半徑 OQ 於 T, 則 $\dfrac{PT}{OP}=\tanh\dfrac{2POQ}{OA^2}$ 2939

●由直角雙曲線上之點 P 之縱線之足N,引切副圓於 Q 之直線 NQ, 則角 AOQ 之二等分線將雙曲線之扇形 AOP 二等分 2940

●若 $\dfrac{a^2}{\sin^2x}-\dfrac{\beta^2}{\cos^2x}=1$ 及 $\dfrac{a^2}{\cosh^2y}+\dfrac{\beta^2}{\sinh^2y}=1$, 則 $a^2=\sin^2x \times\cosh^2y$ 及 $\beta^2=\cos^2x\sinh^2y$ 2941

●$\dfrac{u}{\sin 2x}=\dfrac{v}{\sinh 2y}=\dfrac{1}{\cos 2x+\cosh 2y}$ 時, $u^2+v^2+2u\cot 2x =1$ 及 $u^2+v^2-2v\coth 2y=-1$ 2942

●$(\cosh u+\sinh u)(\cosh v+\sinh v)=\cosh(u+v)+\sinh(u +v)$ 2943

●$(\cosh u_1+\sinh u_1)(\cosh u_2+\sinh u_2)\ldots(\cosh u_n+\sinh u_n) =\cosh(u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n)+\sinh(u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n)$ 2944

第二門 球面三角之部

第一

球面三角形中邊與角之關係

$$\tan\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{C}{2},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}\cot\frac{c}{2},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}\cot\frac{c}{2} \quad \ldots \ \mathbf{3136}$$

●Delambre 氏比例式

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c=\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A-B)\sin\tfrac{1}{2}c=\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C \ldots \ \mathbf{3137}$$

●二球面三角形中,若彼此之二邊分別相等,而其夾角不等,則第三邊不相等,角之大者,其第三邊較大,其逆亦眞. … … … … … … … … … … .. **3138**

●球面三角形 ABC 中,設 $A=a$, 則 B 與 b 或相等,或互爲補角,就 C 及 c 亦然 … … … … … … **3139**

●設球面三角形 ABC 之一角,等於他二角之和,則最長邊爲對角至其中點之距離之 2 倍 … … … … **3140**

●極三角形在何時與原三角形一致 … … … **3131**

●球面三角形 ABC 中,設邊 AB 之中點爲 D, 則 $\cos AC+\cos BC=2\cos\frac{1}{2}AB\cos CD$ … … … … **3142**

●設球面上之四點 A, B, C, D, 以大圓之弧聯結之,命 E, F 分別爲弧 AC, BD 之中點,則 $\cos AB+\cos BC+\cos CD+\cos DA=4\cos AE\cos BF\cos FE$ … … … **3143**

●球面三角形 ABC 中, $A=B=2C$ 時, $\cos a\cos\frac{a}{2}=\cos\left(c+\frac{a}{2}\right)$ … … … … … … … … … **3144**

●設球面三角形 ABC 之二角分別等於其對邊,則其餘之一邊爲其餘一角之補角. 設此三角形有二個象限及二個直角,則其餘一邊等於其餘一角 … … … … **3145**

●球面等邊三角形 ABC 中, $2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{A}{2}=1$ … **3146**

●球面等邊三角形 ABC 中, $\tan^2\frac{a}{2}=1-2\cos A$. 又試由是求等邊三角形之邊及角之界限… … … … **3147**

●球面等邊三角形 ABC 中, $\sec A=1+\sec a$. … **3148**

●以球面三角形 ABC 之三邊之半分,作一新三角形,命 θ 爲

緯度爲l_1, l_2, l_3,各時間中所進航之路程爲s,則$s=r\cos^{-1}[\{\sin\frac{1}{2}(l_1+l_3)\cos\frac{1}{2}(l_1-l_3)\}/\sin l_2]$,但$r$爲地球之半徑.又其經度之變化,可以此三緯度求得之 3162

第二

球面直角三角形之解法

●就斜角三角形所得3129, 3131, 3132, 3134題等之公式,其對應之直角三角形之解法所必要之公式如何?又試由此公式導出直角三角形之性質... 3163

●設球面三角形ABC之各邊皆爲象限,O爲內切圓之極,P爲球面上之任意點,則$(\cos PA+\cos PB+\cos PC)^2=3\times\cos^2 PO$ 3164

●已知斜邊c與一角A,解直角三角形ABC ... 3165

●已知一邊b及隣角A,解直角三角形ABC ... 3166

●已知二邊a及b,解直角三角形ABC 3167

●知斜邊c及一邊a,解直角三角形ABC 3168

●知二角A及B,解直角三角形ABC 3169

●知一邊a及對角A,解直角三角形ABC 3170

●C爲直角之三角形ABC中,$\sin^2\frac{c}{2}=\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{a}{2}\times\sin^2\frac{b}{2}$ 3171

●C爲直角之三角形ABC中,$\tan\frac{1}{2}(c+a)\tan\frac{1}{2}(c-a)=\tan^2\frac{b}{2}$ 3172

●C爲直角之三角形ABC中,$\sin(c-b)=\tan^2\frac{A}{2}\sin(c+b)$ 3173

●C爲直角之球面△ABC中,$\sin a\tan\frac{1}{2}A-\sin b\tan\frac{1}{2}B=\sin(a-b)$ 3174

●C爲直角之球面三角形ABC中,$\sin(c-a)=\sin b\cos a\times\tan\frac{1}{2}B$, $\sin(c-a)=\tan b\cos c\tan\frac{1}{2}B$ 3175

●設ABC乃C爲直角之球面三角形,$\cos A=\cos^2 a$,而A非直角,則視b及c俱較$\frac{\pi}{2}$小或大,而$b+c=\frac{\pi}{2}$,或$b+c=\frac{3\pi}{2}$ 3176

●C爲直角之球面三角形ABC中,設α, β爲由直角垂直於斜邊及二等分斜邊所引之弧,則$\sin^2\frac{c}{2}(1+\sin^2\alpha)=\sin^2\beta$

第 三

球面斜三角形之解法

第四　內切圓, 外接圓等

之中心與極三角形之角頂合 … .. … … 3221

第 五

球面三角形之面積及過剩

●設球面過剩以 E 表之，$\sin\frac{1}{2}\mathrm{E}=\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}/(2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c)$. [Cagnoli 氏定理] … … … … … … … … … … 3222

●$\tan\frac{1}{4}\mathrm{E}=\sqrt{\{\tan\frac{1}{2}s\tan\frac{1}{2}(s-a)\tan\frac{1}{2}(s-b)\tan\frac{1}{2}(s-c)\}}$ [Lhuilier 氏定理] … … … … … … 3223

●$\cos\frac{1}{2}\mathrm{E}=\{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\mathrm{C}\}\sec\frac{1}{2}c$, $\tan\frac{1}{2}\mathrm{E}=(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\mathrm{C})/(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\mathrm{C})$, $\cos\frac{1}{2}\mathrm{E}=(\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1)/(2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\times\cos\frac{1}{2}c)$, $\sin^2\frac{1}{4}\mathrm{E}=\{\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)\}/(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c)$, $\cos^2\frac{1}{4}\mathrm{E}=\{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\times\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)\}/(\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c)$, $\sin(\mathrm{C}-\frac{1}{2}\mathrm{E})=\sqrt{\{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\}}/(2\sin\frac{1}{2}a\times\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c)$, $\cos(\mathrm{C}-\frac{1}{2}\mathrm{E})=(\cos^2\frac{1}{2}c-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b+1)/(2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c)$, $\sin^2(\frac{1}{2}\mathrm{C}-\frac{1}{4}\mathrm{E})=\{\cos\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)\}/(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c)$, $\cos^2(\frac{1}{2}\mathrm{C}-\frac{1}{4}\mathrm{E})=\{\sin\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)\}/(\sin\frac{1}{2}a\times\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c)$ … … … … … … … 3224

●球面上有一等邊三角形，其面積爲球面積之四分之一，則其各角及各邊如何 … … … … … … 3225

●設球面上有一等邊且等角之 n 邊多角形，求其面積，又設其面積爲球面積之半分，試決定各角之値 … 3226

●設球面三角形 ABC 中，$a=b=\frac{\pi}{3}$ 及 $c=\frac{\pi}{2}$，則 $\mathrm{E}=\cos^{-1}\frac{7}{9}$ … … … … … … … … … … 3227

●設球面三角形 ABC 之角 C 爲直角，則 $\sin\frac{1}{2}\mathrm{E}=\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\times\sec\frac{1}{2}c$，而 $\cos\frac{1}{2}\mathrm{E}=\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sec\frac{1}{2}c$ … … 3228

●球面三角形 ABC 中，若 C 爲直角，則 $\frac{\sin^2c}{\cos c}\cos\mathrm{E}=\frac{\sin^2a}{\cos a}+\frac{\sin^2b}{\cos b}$ … … … . … … 3229

●球面三角形 ABC 中，$a=b$，$\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$ 時，$\tan\mathrm{E}=\frac{\sin^2a}{2\cos a}$ … … … … … … … … … … 3230

●球面直角三角形 ABC 中，各角之和較 4 直角小 3231

●過球面三角形 ABC 之一邊上之已知點，作一大圓弧，令由

第六 近似公式

●試由公式 $\tan^2\frac{A}{2}=\{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(c+a-b)\}/\{\sin\frac{1}{2}(b+c-a)\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\}$ 導 Legendre 氏定理 … … … … … … … … … 3249

●由 3245 題及 3246 題, 約 $\log\beta=\log a+\log\sin B+\frac{S}{3r^2}\times(\cot A-\cot B)$ … … … … … … … … 3250

●3242 題中之近似法, 若連續至 r^4 之項, 則可得約 $\cos A=\cos A'-\frac{\beta\gamma\sin^2 A'}{6r^2}+\frac{\beta\gamma(a^2-3\beta-3\gamma^2)\sin^2 A}{180r^4}$ … 3251

●由前題之結果,若 $A=A'+\theta$, 則約 $\theta=\frac{\beta\gamma\sin A'}{6r^2}\{1+(7\beta^2+7\gamma^2+a^2)/120r^2\}$ … … … … … … 3252

第七　測地術之問題

●設地面球上所作之球面三角形, 其面積之平方呎數爲已知,求以秒計算其球面過剩之法則 … … … 3253

●就一三角形觀測之,可得各角爲 $42°2'32''$, $67°55'39''$, $70°1'48''$, 角 A 之對邊長 27404.2 呎,求觀測之誤差 … … … … … … … … … … … 3254

●觀測三角形之三角, 且假定其一邊 例如 a 爲已知, 試發見一三角形,令觀測之誤差,對他二邊之影響爲最小 … … … … … … … … … … … 3255

●求水平上小角距之二點間之水平角. 但二點標間之角,及其仰角或俯角爲已知… … … … … 3256

第　八

球面三角形邊角之小變差

●設球面三角形 ABC 之一邊 c 及其對角 C 爲常數,求他二元之小變差間之聯結式 … … … … … 3257

●球面三角形 ABC 中,若 a 及 b 分別增加微小之 δa 及 δb, 而 C 及 c 爲常數, 則 $\delta a/\sqrt{(1-n^2\sin^2 a)}+\delta b/\sqrt{(1-n^2\times\sin^2 b)}=0$, 但 $n=\sin C/\sin c$ … … … 3258

●球面三角形 ABC 中, 設 C 及 c 爲常數, 若施小變化於 a, 則他邊及角所生之變化如何? 又面積之變化如何 … … … … … … … … … … … … … 3259

●球面三角形 ABC 中, 設 A 及 c 爲常數, 求證聯結他邊及

第　九

平面及球面三角法公式之聯結

之位置如何… … … … … … … … … 3271

●設 3268 題中所決定之點爲 P, 3269 題中所決定之點爲 G, 前題, 再前題, 等中所論之圓之極爲 N, 則 P, G, N 在一大圓周上… … … … … … … … 3272

●設球之半徑無限增大,試由公式 $\sin\frac{a}{2}$

$=\sqrt{\left\{\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\sin B\sin C}\right\}}$[見 3135 題]設法導出求平面三角形之面積之公式,卽 $\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$ … … 3273

●設 ABC, abc 爲一切關係相等惟位置稍異之二球面或平面三角形, 則 $\cos ABb\cos BCc\cos CAa+\cos ACc\cos CBb\times\cos BAa=0$ … … … … … … … … 3274

●試由 Napier 氏比例式, 導出平面三角法中之公式 … … … … … … … … … … … 3275

●試由 Delamber 氏比例式導出平面三角法之之公式 … … … … … … … … … … … 3276

●試由公式 $\cos\frac{c}{2}\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ [3137 題] 導出以各邊及一角求平面三角形面積之公式… … 3277

●3203 題中,若球之半徑爲無窮大,則得如何之結果… … … … … … … … … … … … 3278

●由球面三角形之角 C 至聯結邊 a 及 b 之中點之弧引垂線, 則此垂線與邊 a 成角 $S-B$, 與邊 b 成角 $S-A$ … … … … … … … … … … … … 3279

●由球面三角形 ABC 之各角至聯結隣邊中點之弧引垂線, 則此各垂線交於同一之點. 又若由此交點至邊 a, b, c 所引垂線分別爲 x, y, z, 則 $\sin x/\{\sin(S-B)\sin(S-C)\}$ $=\sin y/\{\sin(S-C)\sin(S-A)\}=\sin z/\{\sin(S-A)\sin(S-B)\}$ … … … … … … … … … … … 3280

●過球面三角形 ABC 之各角引一弧, 令其與一邊所成之角等於底上之垂線與他邊所成之角, 則此各弧交於同一之點,又設由此交點至邊 a, b, c 所引之垂線分別爲 x, y, z, 則 $\frac{\sin x}{\cos A}=\frac{\sin y}{\cos B}=\frac{\sin z}{\cos C}$ … … … … 3281

●在 3280 題及 3281 題中所決定之二點與 3272 題之點N 在一大圓周上. 又試述平面幾何學中之對應定理 3282

●設球面三角形之一角爲常數,則夾之之二邊增大時, 其面積及他二角之和亦增大 … … … … … 3283

●設球面三角形二角之二等分弧相等, 而被二等分之二角

第十　多面體

●以任意平行六面體之各角頂爲中心，作相等之球，則平行六面體被夾截之部分之和，等於球之全體積 … 3305

●在立方體內作一正八面體，其法令八面體之各角頂，在立方體之面之中心，此時立方體之體積爲八面體體積之6倍 … … … … … … … … … … 3306

●除立方體外，以同種之正多面體若干個不能塡充已知之空間，然若借有相等之面之四面體及八面體，卽能塡充，但四面體之數，須爲八面體數之2倍 … … … 3308

●在半徑 ρ 之球面上作三角形，聯結其各角頂於中心，則生一錐體，此錐體之體積爲 $\frac{1}{3}\rho^3\sqrt{(\tan r\tan r_1\tan r_2\tan r_3)}$，但 r, r_1, r_2, r_3 爲此三角形之內切圓及傍切圓之半徑 … … … … … … … … … … … 3308

●內接於半徑 r 之球，作正四面體，以各角頂爲極，作四相等之小圓，且令相切，於是卽得各圓所包球面部分之面積爲 $2\pi r^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ … … … … … … … 3309

●設 O 爲球面三角形 ABC 內之任意點，則任意二邊之正弦與其夾角之正弦之積爲 $\sin AO\sin BO\sin CO\{\cot AO\sin BOC+\cot BO\sin COA+\cot CO\sin AOB\}$ … … … 3010

第十一　球面上之弧

●設 ABC 乃各邊爲象限弧之球面三角形，今命 T 爲同球面上之一任意點，則 $\cos^2 TA+\cos^2 TB+\cos^2 TC=1$ 3311

●設 ABC 乃各邊爲象限弧之球面三角形，命 T 及 U 爲同球面上之任意點，則 $\cos TU=\cos TA\cos UA+\cos TB\cos UB+\cos TC\cos UC$ … … … … … … … … 3312

●球面上有若干定點，命之爲 H_1, H_2, H_3……，又設 T 爲此球面上之任意點，今將 T 與各定點聯結，試推究表此弧之餘弦之和之式 … … … … … … … 3313

●作正多面體之外接球，由球面上之一任意點至多面體之各立體角引弧，則此諸弧之餘弦之和爲零 … 3314

●球面上有若干定點，命爲 H_1, H_2, H_3……，又設 T 爲此球面上之任意點，今 T 與此諸定點聯結，則所得諸弧餘弦之平方和之式如何… … … … … … … … 3315

●作正多面體之外接球，由球面上之任意點至多面體之各立體角頂點引弧，求此諸弧餘弦之平方和 … 3316

●球面上有若干定點，命爲 H_1, H_2, H_3 ……，由此球面上之任意二點 T 及 U，至是等定點引諸弧，求其中對應二弧之

第十二　雜題

●設球面三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 之極分別爲 A′, B′, C′, 則三大圓 AA′, BB′, CC′ 交於同一之點 P, 而 $\cos PA \times \cos BC = \cos PB \cos CA = \cos PC \cos AB$ ... **3329**

●由球面三角形 ABC 之各角頂引直交對邊於 D, E, G 之三弧 AD, BE, CE, 命其交點爲 O, 則 $\frac{\tan AD}{\tan OD}$, $\frac{\tan BE}{\tan OE}$, $\frac{\tan CF}{\tan OF}$ 三者分別等於 $1+\frac{\cos A}{\cos B\cos C}$, $1+\frac{\cos B}{\cos A\cos C}$, $1+\frac{\cos B}{\cos A\cos C}$ **3330**

●由球面三角形 ABC 之各角項,至對引邊垂直大圓弧,命爲 p, q, r, 將是等分弧分成 (α, α'), (β, β'), (γ, γ') 部分,則 $\tan\alpha\tan\alpha' = \tan\beta\tan\beta' = \tan\gamma\tan\gamma'$, 及 $\frac{\cos p}{\cos\alpha\cos\alpha'} = \frac{\cos q}{\cos\beta\cos\beta'} = \frac{\cos r}{\cos\gamma\cos\gamma'}$ **3331**

●由球面三角形 ABC 之各角項至對邊之中點引弧,命 α, α' 爲邊 a 之二等分弧之二部分,則 $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = 2\cos\frac{a}{2}$ **3332**

●球面三角形 ABC 中,命二等分邊 AB, AC 之大圓弧與 BC 之延弧之交點爲 Q, 則 $\cos AQ \sin\frac{a}{2} = \sin\frac{c-b}{2}\sin\frac{c+b}{2}$ **3333**

●設 ABCD 爲球面四邊形,延長其二對邊 AB, CD, 令交於 E, 又延長 AD, BC, 令交於 F, 則由 E 至此四邊形之對角線所引之二垂直弧之正弦比,等於由 F 所引二弧之正弦比... ... ... **3334**

●設 ABCD 爲球面四邊形,延長邊 AB, DC, 令交於 P, 又延長 AD, BC, 令交於 Q, 又命對角線 AC, BD 之交點爲 R, 則 $\sin AB \sin CD \cos P \sim \sin AD \sin BC \cos Q = \sin AC \sin BD \times \cos R$ **3335**

●設球面三角形 ABC 中,角應於之 A 角通弦三角形之角爲 A′, 則 $\cos A' = \sin(S-A)\cos\frac{1}{2}a$... ... ... **3336**

●球面三角形外接圓半徑之正切,若爲兩切圓半徑正切之2倍,則此三角形爲等邊 **3337**

●以一圓與中心 O 之球有同一之半徑之圓弧 AP 與球面三角形二邊中之大者相等,依同方向取弧 AQ, 令與小邊等,將 AP 之正弦 PM 分於 E, 令 $\frac{EM}{PM}$ 與二邊夾角之眞數餘弦等,平行於在 Q 之圓之切線引 EZ, 則此球面三角形之一邊等於弧 QPZ **3338**

第十三

球面三角形解法之應用

I. 直角三角形

II. 斜三角形

A, B, C… … … … … … … … … 3351

●知 $a=68°\,20'\,25''$, $b=52°\,18'\,15''$, $C=117°\,12'\,20''$, 求 A, B, c… … … … … … … … … 3352

●知 $a=50°\,45'\,20''$, $b=69°\,12'\,40''$, $A=44°\,22'\,10''$, 求 B, C, c… … … … … … … … … 3353

●知 $A=129°\,5'\,20''$, $B=142°\,12'\,42''$, $C=105°\,8'\,10''$, 求 a, b, c… … … … … … … … … 3354

新亞