

題解中心

三角法辭典

索引

上海新亞書店印行

題 解 中 心

算 學 辭 典

冊 數 五 巨 冊 各附索引一小冊
 版口大小 長 20 公分 闊 13 公分
 裝訂式樣 布面精裝 背脊金字
 印刷用紙 上等米色桃林紙

分 冊 名	定 價	出 書 期
幾何學辭典	四 元	已 出
代數學辭典	五元五角	已 出
三角法辭典	五 元	已 出
續幾何學辭典	四 元	25年 2 月底
算 術 辭 典	五元五角	25年 6 月底

題 解 中 心

三 角 法 索 引

[附入辭典, 不另售]

編 譯 者 薛 德 炯
 吳 載 耀
 發 行 者 陳 邦 楨
 印 刷 者 新 亞 書 店
 總發行所 新 亞 書 店
 上海河南路中市

中 華 民 國 二 十 八 年 五 月 再 版

索引例言

●本辭典以問題解法爲中心，翻檢之時，有待於靈便之索引，自屬必要。●但本辭典與他種辭典不同，帶有練習問題之性質，故全書順序，如三角法之，或球面三角法之，深，以期單用本書！專有之特質，故另編，再使用辭典者，得隨時檢得所需之問題。●索引之編製，一以問題之種類爲歸；分類之法，詳於索引目次，讀者可先詳覽一過，以期瞭然於胸。●檢索之時，明辨所查問題，係屬何種性質，先就目次得其所屬，檢明頁數，再查索引本文，自能檢得所求之題。●但關於本書分類方法，有下列若干條項，應予特別注意。●單角及複角之三角函數中，如恆等式，三角形之性質等問題，爲數至夥，故又就 $\sin.$, $\cos.$, $\tan.$, 或其組合，或其次數，而爲之分類。●三角形之性質中，關於複雜解法之問題，按其所究之形，以爲類別標的，故分爲三角形，平行四邊形，梯形等。●測量應用之理論，問題之數，亦不在少，故或則依其所求之目的物，而區分爲高，距離等，或則依其題文中之主要物，而區分爲仰角，俯角，輕氣球等。●平面三角法中，自 De Moivre 氏定理以後，及球面三角法全部，問題之數，不能謂多，故索引之順序，一仍辭典之舊貫。

三角法辭典索引

目次

第一門 平面三角之部

第一 測角法 1

I. 六十分法 1 II. 弧度法... .. 3

III. 六十分法與百分法 4 IV. 六十分法與弧度法 5

V. 百分法與弧度法 6

VI. 六十分法,百分法,與弧度法 6

VII. 雜 6

第二 銳角之三角函數 7

I. 關於直角三角形之三角函數 7

(1) 算術的數值 7 (2) 代數的數值 8

II. 關於正方形四邊形之三角函數 8

III. 餘角之三角函數 8

IV. 三角形之證明的關係 9

V. 角之三角函數 9

VI. 知函數之一求其他 9

(1) \sin . 已知 9 (2) \cos . 已知 10

(3) \tan . 已知 10 (4) \cot . 已知 10

(5) \sec . 已知 11 (6) cosec . 已知 11

(7) vers . 已知 11

VII. 單角之恆等式 11

(1) \sin . \cos . 二次 11 (2) \sin . \cos . 三次 12

(3) \sin . \cos . 四次 12 (4) \sin . \cos . 六次 12

(5) \sin . \cos . 八次 12 (6) \sin . \cos . 分數式 13

(7) \sin . \tan 13 (8) \sin . \cot 13

(9) \sin . \sec 13 (10) \cos . \sec 13

(11) \cos . \tan 13 (12) \cos . \cot 13

(13) \cos . cosec 14 (14) \tan . \sec 14

(15) \tan . cosec 14 (16) \cot . cosec 14

(17) \sec . cosec 14 (18) \sin . \cos . \tan 14

(19) sin. cos. cot.15	(20) sin. cos. cosec.15
(21) sin. tan. sec.15	(22) tan. cot.15
(23) sin. cot. sec.15	(24) sin. cot. cosec.15
(25) cos. cot. cosec.16	(26) tan. sec. cosec.16
(27) sin. cos. tan. cot. ...	16	(28) sin. cos. tan. sec. ...	16
(29) sin. cos. cot. cosec.16
(30) sin. cos. sec. cosec.17
(31) sin. tan. sec. cosec.17
(32) sin. tan. cot. sec. ...	17	(33) cos. tan. cot. sec. ...	17
(34) cos. cot. sec. cosec.17
(35) tan. cot. sec. cosec.18
(36) 含五函數者18	(37) 含六函數者18
(38) 含 vers. 者19
VIII. 餘角19	(1) 恆等式19
(2) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$19	(3) 式之值20
IX. 關係式20	X. 等式20
(1) 條件等式20	(2) 等式21
XI. 式之表示22		

第三 普徧角 22

I. 關於象限者22	II. 以最小正角表示23
III. 求三角函數之值23	IV. 簡化24
V. 求25	VI. 追跡25
VII. 求證26	IX. 求公式28
VIII. 作角28		

第四 和及差之公式 28

I. 恆等式28	(1) sin.28
(2) cos.30	(3) tan.33
(4) cot.33	(5) sec. 或 cosec.34
(6) sin. cos.34	(7) sin. tan.40
(8) sin. cot.40	(9) sin. sec.41
(10) cos. tan.41	(11) cos. cot.41
(12) tan. cot.41	(13) tan. sec.42
(14) tan. cosec.42	(15) cot. sec.42
(16) cot. cosec.42	(17) sin. cos. tan.43
(18) sin. cos. cot.44	(19) 其他三角函數45
(20) 四函數或 vers.46	II. 簡化47

<p>III. 求值 47</p> <p>(1) 求 \sin. 47</p> <p>(2) 求 \cos. 48</p> <p>(3) 求 \tan. 49</p> <p>(4) 求 \cot. 50</p> <p>(5) 求 \sec. 50</p> <p>(6) 求 cosec. 51</p> <p>(7) 求式之值 51</p> <p>IV. 式之表示 51</p> <p>(1) 表 51</p> <p>(2) 表爲和爲差 52</p> <p>(3) 表成積之形 52</p> <p>V. 條件等式 53</p> <p>(1) 知角之關係者 53</p> <p>(2) 等式不含三角函數者 54</p> <p>(3) 含一三角函數者 55</p> <p>(4) 含 \sin. \cos. 者 56</p> <p>(5) 含 \sin. \tan. 者 57</p> <p>(6) 含 \sin. \cot. 者 58</p> <p>(7) 含 \cos. \tan. 者 59</p> <p>(8) 含他二函數者 60</p> <p>(9) 含 \sin. \cos. \tan. 者 60</p> <p>(10) 含他三函數者 62</p> <p>(11) 含四以上之函數者 62</p> <p>VI. 特別角 63</p> <p>(1) 含 30°, 45°, 60° 之函數之式之值 63</p> <p>(2) 含 30°, 45°, 60° 之函數之等式 63</p> <p>(3) 含 15°, 18°, 75°, 72° 之函數者 64</p> <p>(4) 含 18°, 36°, 54° 之函數者 64</p> <p>(5) 其他特別角之函數 65</p> <p>(6) 雜題 66</p>	<p>VII. 雜 67</p>
---	--------------------------------

第五 三角形之性質 69

<p>I. $A+B+C=180^\circ$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 69</p> <p>(1) \sin. 69</p> <p>(2) \sin. \cos. 70</p> <p>(3) \cos. 73</p> <p>(4) \tan. 或 \cot. 74</p> <p>(5) \sin. \tan. 74</p> <p>(6) \sin. \cot. 75</p> <p>(7) 其他二函數 75</p> <p>(8) 三個函數 76</p> <p>II. 恆等式 [角有限制者] 77</p> <p>III. 直角三角形 79</p> <p>(1) \sin. 81</p> <p>(2) \cos. 83</p> <p>(3) \sin. \cos. 86</p> <p>(4) \tan. 87</p> <p>(5) \cot. 88</p> <p>(6) 他一函數 88</p> <p>(7) 他二函數 89</p> <p>(8) 三函數 90</p> <p>(9) 雜題 90</p> <p>V. 內切圓外接圓面積等 91</p> <p>(1) 面積(一) 91</p> <p>(2) 面積(二) 92</p> <p>(3) 內切圓外接圓等之半徑 93</p> <p>(4) 重心中線 96</p> <p>(5) 二等分線 96</p>	<p>IV. 任意三角形 81</p>
--	-----------------------------------

- (6) 垂心垂線 97 (7) 交於同點 98
 (8) 九點圓 98 (9) 三角形雜題 99
 (10) 四邊形 102 (11) 多角形 103
 (12) 圓 105 (13) 二個或三個圓 106
 (14) 雜題 106

第六 對數 107

- I. 表之構成 107 II. 對數及對數級數 ... 108
 III. 表之用法 111 (1) 對數表,三角函數表 111
 (2) 三角函數表用法之問題 112
 (3) 五位對數表之問題 112
 (4) 七位對數表之問題 113
 (5) 五位三角函數之對數之問題 114
 (6) 七位三角函數之對數之問題 114
 IV. 論比例部分 115

第七 三角形 116

- I. 直角三角形之解法(理論) 116
 II. 斜三角形之解法(理論) 117
 III. 直角三角形之解法 120
 (1) 不用對數者 ... 120 (2) 五位對數 122
 (3) 七位對數 122
 IV. 斜三角形之解法 122
 (1) 不用對數者 ... 122 (2) 五位對數 124
 (3) 七位對數 124
 V. 複雜之解法 ... 127 (1) 三角形 127
 (2) 平行四邊形,菱形 127 (3) 梯形 127
 (4) 四邊形 127 (5) 內接外切四邊形 ... 128
 (6) 多角形 128 (7) 角,平行線 128
 (8) 圓 129 (9) 二圓 129
 (10) 多面體 129 (11) 旋轉體 130
 (12) 變化之研究 ... 130 VI. 測量應用 130
 (1) 理論 130 (i) 高 130
 (II) 距離 133 (III) 仰角俯角 135
 (IV) 輕氣球 136 (V) 等角,最大角 136
 (VI) 方向,角 137 (VII) 立體 138
 (VIII) 近似值,誤差 ... 139
 (2) 用三角函數表者 139
 (3) 單含已知三角函數者 142

IV. 用輔角之方程式解法	171
第十三 De Moivre 氏定理	171
第十四 三角函數之展開式	173
第十五 餘弦及正弦之指數值	174
第十六 級數之和	175
第十七 三角函數之因數分解	176
第十八 雙曲線函數	179

第二門 球面三角之部

第一 球面三角形中邊與角之關係	182
第二 球面直角三角形之解法	185
第三 球面斜三角形之解法	187
第四 內切圓,外接圓等	188
第五 球面三角形之面積及球面過剩	189
第六 近似公式	190
第七 測地術之問題	191
第八 球面三角形邊角之小變差	191
第九 平面及球面三角法公式之聯結	192
第十 多面體	194
第十一 球面上之弧	195
第十二 雜題	196
第十三 球面三角形解法之應用	198

三角法辭典

(索引)

第一門 平面三角之部

第一 測角法

I. 六十分法

- 直角之 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ 各爲幾度 4
- 直角之 $\frac{11}{60}$ 爲幾度... .. 5
- $\frac{11}{16}$ 直角, 0.678 直角, 0.241 直角各合幾度 6
- 以度分秒表 0.35 直角, 0.0875 直角, 2.01375 一直角, 直角之三十二分之五, 一直角之二十一分之八, 1.07 分, 46.75 分, 30.89 分 7
- 以秒表 $67^{\circ} 23' 40''$ 8
- 以度分秒表 $57398''$ 9
- $97^{\circ} 5' 15''$ 合幾直角... .. 10
- 56° 合幾直角 11
- 49° , $37'.8$, $32''.4$, $11^{\circ} 15'$, $8^{\circ} 0' 33''$, $45' 5''.4$, $61^{\circ} 51' 30''$ 各合幾直角 12
- 以度分秒表直角之 0.2875 13
- 以度分秒表 1.704535 直角 14
- 以度分秒表 12 時 15 分時時計上兩針交角 15
- 4 時至 5 時 30 分間時計兩針旋轉幾度... .. 16
- 以度分秒表 2 時 34 分 56 秒時時計兩針之夾角 ... 17
- 5 時與 7 時 40 分間時計兩針各轉幾度... .. 18
- 七時至八時間在何時時計兩針夾 54° 之角 ... 2954
- 二角之和爲 84° , 差爲 0.1 直角, 各幾度幾直角 ... 19
- 正三角形一角之度數 20

- 正五角形一角之度數 21
- 正六角形一角之度數 22
- 正七角形一角之度數 23
- 正八角形一外角之度數 24
- 正八角形一邊張於外接圓周上一點之角為幾度 ... 25
- 正十一角形一外角之度數 26
- 正十三角形一邊張於其中心之角為幾度 27
- 一角為 $120'$ 之正多角形之邊數 28
- 一角為 170° 之正多角形之邊數 29
- 三角形之三角成等差級數,則其一角為 60° 30
- 四邊形各角成等差級數,最大角最小角之差為 90° , 各幾度 2952
- 三角形第一角度數之 10 倍 120 倍各為第二角分數第三角秒數,則三角各幾度 31
- 圓內接四邊形二角為 $44^\circ 35'$ 及 $72^\circ 48' 12''$, 他二角各幾度 32
- 以分表正四十八邊形一角與二直角之差 33
- 多角形內角依次成等差級數,最小角 120° , 公差 5° , 邊數如何 34
- 以 $\frac{1}{2}R$ 為角度單位表 75 度 40
- 以某量為單位測 a 直角得 b , 則幾度之角得以 c 表之 87
- 3° 為單位之 1.5 倍,則此單位合幾度? 直角為此單位之幾倍 88
- 以某角為單位測得 15° 及 0.2 直角之和為 0.73, 此單位合幾度 89
- 正三角形一角之測度為 1, 則正方形一邊張於其外接圓周上一點之角如何 91
- 以相差 $10'$ 之二種單位測某角,得數如 3:2, 二種單位如何 2955
- 二正多角形邊數如 5:4, 其角相差 9° , 邊數各如何 2953
- 以 $1^\circ, 100', 200'$ 分測三角形之三角,得數相等,三角如何 2951
- 半徑 4 尺之圓中,長 10 尺之弧,所對中心角幾度 69
- 半徑 1 尺 2 寸之圓中,長 5 寸之弧所張中心角幾度 70
- 半徑 120 寸之圓中,長 9 寸之弧所對中心角幾度 ... 71

- 以繩繫馬，令馬作圓運動 52.36 呎時，繩轉動 75° ，則繩之長須為幾何。 2961
- 一人高 6 呎，某地對於此人之視角為 $1'$ ，其間距離幾何 63
- 距塔一哩處，對於塔之視角為 1° ，塔高幾碼 95
- 距物一哩，對於此物之視角為 $1'$ ，物體長幾何 ... 96
- 地球之半徑 (3963 哩) 以 $57'3''.16$ 之角對月，求地球與月之距離 99
- 設地球面上有相距定遠之二點，由此二點所下之鉛直線，其交角之度數為 n 秒；又若此點高出地面 h ，則交角之度數為 m 秒；求證地球之半徑為 $\frac{nh}{m \cdot n}$ 101
- 設地球之直徑 [7900 哩] 張於太陽之角為 $17''.8$ ，則太陽之光線經 8 分 13.3 秒時而達地球，求光線 1 秒之速度 102
- 地球與月之距離，約為地球半徑之 60 倍，求地球之半徑張於月之中心之角... .. 103
- 設眼對月之視角為 $30'$ ，今以直徑 6 吋之圓板障月，而適全蔽，求圓板與眼之距離 104
- 公元 1882 年，金星經過太陽面。由是測知地球之半徑 [3963 哩]，以 $8''.82$ 之角對太陽，求地球至太陽之距離 106
- 某人觀測太陽之直徑，含角 $32'$ ，今設由此觀測者至太陽之距離為九千萬哩，試求太陽直徑之近似值 ... 107
- Struve 氏在 Dorpat 地觀測太陽經過子午線，據其觀測二百四十一之結果，太陽之垂直及水平半徑對地球所含之角分別為 $960''.66$ ，及 $961''.12$ ，然則此二半徑各為幾何... .. 108
- 求同子午線上相距 145 哩之二地緯度之差 [$\pi = \frac{22}{7}$ ，地球直徑 = 7920 哩] 2962
- 某地球儀中，同子午線上二點之距離為 1 分，緯度之差為 $1\frac{1}{11}$ 度，求此球之半徑 [$\pi = \frac{22}{7}$] 2963

II. 弧 度 法

- 圓周乃隨其半徑而變者 46
- 與半徑等長之弧所含之中心角一定 47
- 設圓之中心角所對之弧等於直徑，則此角之幾部分為直角之三分之一 61

- 邊數爲 n 之正多角形, 其一內角之弧度幾何 65
- 設多角形各角之和爲 10π , 求其邊數 66
- 設正多角形之一外角爲一內角之六分之一, 試以弧度表各角, 並求此多角形之邊數 67
- 設三個形各角之比爲 3:5:7, 求各角之弧度 68
- 設圓之半徑爲 5 尺, 求其中心角爲 $\frac{2}{3}$ 直角之弧長 ... 73
- 半徑 25 尺之圓中, 長 $37\frac{1}{2}$ 尺之弧所張之中心角, 爲若干本位弧 74
- 半徑 $3\frac{1}{4}$ 寸之圓中, 長 1 尺 5 寸之弧所張之中心角爲幾直角 75
- 0.73 本位弧之中心角, 立於 219 尺之弧上, 求圓之半徑 2964
- 半徑爲 3.6 寸之圓中, 1.625 本位弧之中心角所對之弧長如何 2965
- 一秒迴轉 35 回之車輪, 迴轉 1 本位弧所需之時間 [$\pi = \frac{22}{7}$] 2966

III. 六十分法與百分法

- 一任意角之度數用公制表示與用法制表示, 其數的關係若何 1
- 一任意角之分數用公制表示與用法制表示, 其數的關係若何 2
- 一任意角之秒數用公制表示與用法制表示, 其數的關係若何 3
- 有二角, 其差爲 10 法度, 其和爲 45 度, 求各角 ... 35
- 設直角之三分之二, 分爲二部, 其一部之度數與他一部之法度數之比爲 3 與 10, 則各部如何 36
- 設分半直角爲二部, 其一部之度數對於他部法度數之比如 9 對 5, 則各部如何 37
- 設一角爲 n 度, 分成二部, 其一部之分數, 等於他部之法分數, 求各部 39
- 一角之法秒數, 乘以 0.324, 則得變爲此角之秒數 ... 42
- 有二角, 其一之秒數, 等於他一之法分數, 求此二角之比 43
- 化 $35^{\circ}10'3''$ 爲百分法之度分秒 44
- 化 $69^{\circ}22'50''$ 爲六十分法之度分秒 45
- 一角超過 $p^{\circ}q'$ 之數爲 $a^{\circ}b'$, 求此角與直角之比 2956
- 有二正多角形, 其一每角之度數, 與他每角法度數之比,

- 爲 3:5, 求各形之邊數. 此題唯有三解 2957
- 有二正多角形, 邊數之比爲 $m:n$, 其一每角之度數, 與他一每角法度數之比爲 $p:q$, 求邊數 2958
- 二正多角形, 其一每角之度數, 等於他一每角之法度數者, 有十一雙, 且限於十一雙, 又得以整數表其角者, 祇四雙 2959

IV. 六十分法與弧度法

- 任意角之弧度與同角之度數間, 其關係若何 48
- 求 90° , $180'$, $360'$ 等角之弧度 50
- 試用弧度法表以下各角: (I) $60'$. (II) $22^\circ\frac{1}{2}$. (III) 0.1° .
... .. 51
- 求 $42^\circ 45' 30''$ 角之弧度 52
- 求 $35^\circ 30''$ 之弧度 53
- $5^\circ 37' 30''$ 之弧度如何 54
- 化 13° 爲本位弧之小數 55
- 弧度 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ 之角, 其度數如何 56
- 試以六十分法表以下各角: (I) π . (II) $\frac{3}{4}\pi$. (III) 10π
... .. 57
- 弧度 $\pi/12$ 之角, 其度數若何 58
- 求 $\pi/13$ 之度數 59
- 設二角之差爲 1° , 其和之弧度爲 1, 則此二角之弧度各幾何 64
- 半徑 4 尺之圓中, 中心角爲 80° 之弧長若何 72
- 設圓之半徑爲 1 哩, 中心角爲 $1''$, 求此中心角所對之弧長, 而以吋表之 76
- 200° 之中心角所對之弧, 約爲半徑之 $3\frac{1}{2}$ 倍, 試求 π 之值至小數第二位 77
- 一汽車, 行於半徑爲 r 哩之圓弧上, 其速度爲每時 a 哩, 則 n 秒時走得角之幾秒 62
- 地球之半徑爲 4000 哩, 求赤道上一分之弧之長 ... 79
- 設地球爲直徑長 7912 哩之球, 則中心角 1 度所對之弧之長, 計至小數第二位, 爲 69.01 哩 80
- 設地球爲直徑長 7920 哩之球, 則地球之中心角 $1'$ 所對弧之長如何 81
- 一角, 其度數與本位弧數之二倍之和爲 $23\frac{2}{7}$, 求此角之度數. 但 $\pi = \frac{22}{7}$ 86

- 設三角形之各角成等差級數，且公差之度數與最大角之弧度之比為 $60^\circ:\pi$ ，求各角 92

V. 百分法與弧度法

- 任意角之弧度與同角之法度間，其關係若何 49
- $1^\circ 1'$ 之弧度如何 60

VI. 六十分法，百分法，與弧度法

- 設一角之度數，法度數，弧度數分別為 D, G, C ，則 $\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{2C}{\pi}$ 83
- 試以弧度，度及度之小數，法度及法度之小數，表直角之十六分之五 84
- 有三角，第一角之弧度較第二角之弧度大 $\pi/10$ ，又第二第三角之和為 30 法度，第一第二角之和為 36 度，求各度 85
- 一角之弧度為 $\frac{1}{20}n\pi$ ，則此角之度及法度俱為整數，但 n 為任意數 2967
- 一角之弧度，等於其度數與法度數之比，求其角為幾度 2970
- 試以各種測角法，表時計兩針在 12 點 1 刻時所成之角 94
- 以三種測角法，表時計之分針，在 25 分間所經之角 2969
- 一三角形，其各角成等差級數，且其最大角為最小角之二倍，試以度，法度，弧度表各角 90
- 四邊形之一角為 60° ，他一角為 50° ，又他一角之弧度為 $\frac{1}{2}\pi$ ；求各角之度數 2968

VII. 雜

- 設一車輪之直徑為 50 吋，則其 9 秒間之旋轉數，約等於一時間所走之哩數 78
- 設地球繞半徑為 95000000 哩之圓周運動，一年適為 365 日，則 1 秒間約行 19 哩 82
- 設取正十五角形一邊之延線與其隣邊間之角為單位，則直角之測度如何 93
- 設半徑 20 吋之圓，為三同心圓所四等分，求後三圓之半

- 徑 97
- 半徑一吋之圓，爲等於半徑之弦所截得之弓形，其面積如何，試以平方吋爲單位，計算至小數第四位 98
- 設大時計長針之長爲2尺8寸，則其端在20秒間行幾寸。但 $\pi = \frac{22}{7}$ 2960
- 地球中心與月之中心，其距離爲地球半徑之59.964倍，月繞地球一周，需時27日7時43分11秒，今設地球之半徑爲3963哩，則月每時運動之哩如何 105

第二 銳角之三角函數

I. 關於直角三角形之三角函數

(1) 算術的數值

- 設直角三角形之三邊爲3寸，4寸，5寸，則其最小角之正弦，餘弦，正切如何 109
- 設直角三角形之比爲25:24:7，求最小角之三角函數 110
- 設三角形之三邊比例於33, 56, 65，求最小角之餘切，正割，餘割 111
- 直角三角形中，直角之二邊之數值爲28, 45，求大銳角之正弦... .. 112
- P爲直角之三角形OPM中，設(I) OM=8寸，MP=4寸，則角POM之正弦及餘弦如何？(II) OP=5寸，MP=12寸，又如何？(III) OM=17寸，MP=15寸，又如何 113
- 設三角形ABC中，A爲直角，AB=6吋，AC=2吋，求角C之正弦，餘弦，及角B之正弦，餘弦 115
- 設直角三角形ABC中，B爲直角，AB=15，BC=8，求各銳角之正弦，餘弦，正切 116
- 設C爲直角之三角形ABC中，(I) AB=13，AC=12，(II) AB:BC=2:1，求角BAC之圓函數 122
- 設C爲直角之直角三角形ABC中， $\sin A = 3/5$ ， $c = 200.5$ ，求a 125
- 設C爲直角之直角三角形ABC中， $\cos A = 0.44$ ， $c = 30.5$ ，求b 126
- 設C爲直角之三角形ABC中， $\tan A = \frac{11}{3}$ ， $b = \frac{27}{11}$ ，求c 127

- 設三角形三邊之比為 $1:2:\sqrt{5}$, 則最小角之正弦, 正切, 正割之值如何 128
- 設直角三角形中, 一銳角之正切為 0.75 , 其周為 12 寸, 則斜邊為幾寸 129
- 二等邊直角三角形 ABC 中, 聯結底邊 BC 之一端 B 與對邊 AC 之中點 D , 則 $\hat{C}BD$ 之餘切之值如何 133

(2) 代數的數值

- 設 C 為直角之直角三角形中, $a = \sqrt{m^2 + n^2}$, $b = \sqrt{2mn}$, 求 $\sin A$ 117
- 設 C 為直角之直角三角形 ABC 中, $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$, 求 $\cos A$ 118
- 設 C 為直角之直角三角形中, $a = \sqrt{m^2 - 2mn}$, $b = n$, 求 $\sec A$ 119
- 設 C 為直角之直角三角形中, $a = \sqrt{m^2 + mn}$, $c = m + n$, 求 $\tan A$ 120
- 已知 $a = p^2 + pq$, $c = q^2 + pq$, 求 $\cot A$ 但 C 為直角 123
- 已知 $b = ln \div n$, $c = ln \div m$, 求 $\operatorname{cosec} A$, 但 C 為直角 124

II. 關於正方形, 四邊形之三角函數

- 聯結正方形 $ABCD$ 之頂點 C 與邊 AD 之中點 E , 則角 ECD 之正弦及餘弦各如何 114
- 設四邊形 $PQRS$ 中, 角 PSR 為直角, 其對角線 PR 垂直於邊 RQ , 今 $RP = 20$, $RQ = 21$, $RS = 16$, 求 $\sin PRS$, $\tan RPS$, $\cos RPQ$, $\operatorname{cosec} PQR$ 130
- 設四邊形 $ABCD$ 之二邊 AB , CD 皆垂直於其對角線 AC , 而 $AB = 15$, $AC = 36$, $AD = 85$, 求角 ABC , 角 ACB , 角 CDA , 角 CAD 之圓函數 139

III. 餘角之三角函數

- 某角之餘弦, 餘切, 餘割, 分別為其餘角之正弦, 正切, 正割. 又某角之正弦, 正切, 正割, 分別為其餘角之餘弦, 餘切, 餘割 135
- 以下各角之正弦, 等於何角之餘弦? 試計算之: (I) 23° . (II) $18^\circ 26' 41''$. (III) $50^\circ 49' 27''.6$ 136

- 何角之餘弦,等於以下各角之正弦? (I) $49' 56''$. (II) $79' 14' 39''$.8 137
- $\sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{3\pi}{10} = \sin \frac{\pi}{5}$ 138

IV. 三角形之證明的關係

- 設 $\triangle ABC$ 中, $C = 90^\circ$, $AB = 1$, $BC = 0.7$. 則 $\tan ABC = 1.02$ 121
- 設直角三角形 ABC 中, C 爲直角,今由 AB 之兩端引 AB 之垂線,令交 BC 及 AC 之延線於 E 及 D , 則 $\tan CED = \tan^3 BAC$ 134
- 設三角形 ABC 中,由 C 至對邊所引之中線爲 AC 之垂線, 則角 ACB 之補角之正切爲角 A 之正切之二倍 ... 132

V. 角之三角函數

- 設角不變,則其三角函數亦不變 140
- 正弦與餘割,餘弦與正割,正切與餘切互逆 141
- 試在所設圓周上取弦與餘弦相等之弧... .. 131

VI. 知函數之一求其他

(1) sin. 已知

- 用 $\sin A$ 求 A 之他三角函數 267
- $\sin A = \frac{1}{3}$ 時, $\tan A$, 及 $\sec A$ 268
- $\sin a = .012$ 時,他三角函數之值 269
- 正弦爲 $\frac{3}{5}$ 之角,求其他三角函數 270
- 知 $\sin A = \frac{12}{13}$. 依圖解求他三角函數 271
- $\sin A = \frac{99}{101}$ 時, $\cos A$ 及 $\cot A$ 272
- $\sin B = \frac{m}{n}$ 時, $\cos B$ 之值 273
- $\sin A = \frac{m}{n}$ 時, $\tan A$ 之值 264
- $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin \theta = \frac{7}{25}$, $\sin \phi = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ 時,他三角函數 304
- $\sin \theta = \frac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$ 時, $\tan \theta$ 之值 366

●某弧之弦爲 0.84357, 求他三角函數至百分之一. 274

(2) cos. 已知

●用 $\cos A$, 求 A 之他三角函數 275

●知 $\cos B = \frac{1}{3}$, 求 $\sin B$, 及 $\cot B$ 276

● $\cos A = 0.125$ 時, $\sin A$, $\cot A$, 及 $\operatorname{cosec} A$ 277

● $\cos \theta = \frac{1}{a}$ 時, $\sin \theta$, 及 $\tan \theta$ 278

● $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 時, $\sin \alpha$, 又其餘角之正弦, 及餘弦 ... 279

● $\cos A = \frac{7}{25}$ 時, $\sin A$ 380

● $\cos \alpha = 0.7$ 時, $\tan \alpha$ 至 0.01 281

● $\cos A = \frac{5}{13}$ 時, 他圓函數之值 282

●餘弦爲 $\frac{2}{3}$ 之角之他三角函數 283

● $\cos \alpha = \frac{m^2 + 2mn}{m^2 + 2mn + 2n^2}$ 時, $\tan \alpha$ 367

● $\cos A = \frac{8}{17}$ 時, 他三角函數 304

(3) tan. 已知

●用 $\tan A$, 求 A 之他三角函數 284

● $\tan \alpha = 1$ 時, 他三角函數之值 285

● $\tan B = \sqrt{3}$ 時, $\sin B$, 及 $\cos B$ 287

● $\tan \theta = 5$ 時, 他圓函數之值 288

● $\tan \alpha = \frac{m}{n}$ 時, $\sin \alpha$, 及 $\cos \alpha$ 之值 289

● $\tan A = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$ 時, $\cos A$, 及 $\operatorname{cosec} A$ 290

● $\tan \alpha = \frac{2x(x+1)}{2x+1}$ 時, $\sin \alpha$, 及 $\cos \alpha$ 之值 291

●正切爲 $\frac{1}{3}$ 之角之他三角函數值 286

● $\tan A = \frac{1}{2}$ 時, 他三角函數 304

(4) cot. 已知

●用 $\cot A$ 求 A , 之他三角函數 299

● $p \cot A = \sqrt{(q^2 - p^2)}$ 時, $\sin A$ 369

● $\cot A = \frac{8}{15}$ 時, $\sin A$, 及 $\cos A$	300
● $\cot \theta = \sqrt{3}$ 時, $\sin \theta$, 及 $\cos \theta$	301
● $\cot A = \frac{\sqrt{(q^2 - p^2)}}{p}$ 時, 他三角函數	304
● $\cot a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 時, $\sin a$, 及 $\cos a$	302
● $\cot a = \frac{p}{q}$ 時, 他三角函數之值	303
● $\cot A = \frac{p}{q}$ 時, $\frac{p \cos A - q \sin A}{p \cos A + q \sin A}$ 之值	363

(5) sec. 已知

● 用 $\sec A$, 求 A 之他三角函數	294
● $\sec A = \frac{m^2 + 1}{2m}$ 時, 他三角函數	298
● $\sec \theta = 4$ 時, $\cot \theta$, 及 $\sin \theta$	295
● $\sec A = \frac{41}{9}$ 時, $\sin A$, 及 $\cot A$	296
● $\sec A = 1.03$ 時, $\sin A$, 及 $\tan A$	297
● $\sec A = \sqrt{2}$ 時, $\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \cos A}}$	371
● $\sec A = \frac{13}{5}$ 時, $\frac{2 \sin A - 3 \cos A}{4 \sin A - 9 \cos A}$ 之值	362

(6) cosec. 已知

● 用 $\operatorname{cosec} A$, 求 A 之他三角函數	292
● $\operatorname{cosec} A = 5$ 時, $\sec A$, $\tan A$	293

(7) vers 已知

● 以 $\operatorname{vers} a$ 之項, 表他三角函數	305
● $\operatorname{vers} a = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$ 時, $\sin a + \cos a + \tan a + \cot a + \sec a$ + $\operatorname{cosec} a$ 之值	375

VII. 單角之恆等式

(1) \sin . \cos . 二次

● $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$	143
------------------------------------	-----

- $\sin^2 A + (1 - \cos A)^2 = 2(1 - \cos A) \dots \dots \dots$ **152**
 ● $(\sin A + \cos A)^2 = 1 + 2 \sin A \cos A \dots \dots \dots$ **153**
 ● $(\sin A - \cos A)^2 = 1 - 2 \sin A \cos A \dots \dots \dots$ **154**
 ● $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2 \dots \dots \dots$ **164**
 ● $(1 + \cos A)^2 + (1 + \sin A)^2 = 3 + 2(\sin A + \cos A) \dots \dots \dots$ **169**
 ● $(1 + \sin A + \cos A)^2 = 2(1 + \sin A)(1 + \cos A) \dots \dots \dots$ **207**
 ● $(1 - \sin A + \cos A)^2 = 2(1 - \sin A)(1 + \cos A) \dots \dots \dots$ **208**
 ● $(1 + \sin A - \cos A)^2 = 2(1 + \sin A)(1 - \cos A) \dots \dots \dots$ **209**
 ● $(1 + \sin A - \cos A)^2 + (1 + \cos A - \sin A)^2 = 4(1 - \sin A \cos A)$
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **210**

(2) sin. cos. 三次

- $\sin^3 A + \cos^3 A = (1 - \sin A \cos A)(\sin A + \cos A) \dots \dots \dots$ **155**
 ● $3(\sin A + \cos A) - 2(\sin^3 A + \cos^3 A) = (\sin A + \cos A)^3 \dots \dots \dots$
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **2978**

(3) sin. cos. 四次

- $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A \dots \dots \dots$ **156**
 ● $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A \dots \dots \dots$ **160**
 ● $\cos^4 B - \sin^4 B = 2 \cos^2 B - 1 \dots \dots \dots$ **161**
 ● $\sin^2 a \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 a = \sin^2 a - \sin^2 \beta \dots \dots \dots$ **232**
 ● $\cos^2 a \cos^2 \beta - \sin^2 a \sin^2 \beta = \cos^2 a - \sin^2 \beta \dots \dots \dots$ **233**
 ● $(\sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta)^2 + (\cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta)^2 = 1$
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **237**

(4) sin. cos. 六次

- $\sin^6 A + \cos^6 A = 1 - 3 \sin^2 A \cos^2 A \dots \dots \dots$ **157**
 ● $2(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1 = 0 \dots \dots \dots$ **159**
 ● $\sin^6 \beta - \cos^6 \beta = (2 \sin^2 \beta - 1)(1 - \sin^2 \beta + \sin^4 \beta) \dots \dots \dots$ **162**
 ● $(1 + \cos A - \sin^2 A)^2 (1 - \cos A)^2 + (1 + \sin A - \cos^2 A)^2 (1 - \sin A)^2 = \sin^2 A \cos^2 A \dots \dots \dots$ **221**
 ● $(\cos A - \cos^3 A)^2 + (\sin A - \sin^3 A)^2 = \sin^2 A \cos^2 A \dots \dots \dots$ **227**
 ● $\sin^6 A + \sin^4 A \cos^2 A - \sin^2 A \cos^4 A - \cos^6 A = \sin^2 A - \cos^2 A$
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **2981**

(5) sin. cos. 八次

- $\sin^8 \theta + \cos^8 \theta = 1 - 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \sin^4 \theta \cos^4 \theta \dots \dots \dots$ **158**

● $\cos^8 A - \sin^8 A = (\cos^2 A - \sin^2 A)(1 - 2\sin^2 A \cos^2 A)$ 163

● $\sin a \cos a = \sqrt{\{(\sin a - \sin^3 a)^2 + (\cos a - \cos^3 a)^2\}}$...
 263

(6) sin. cos. 分數式

● $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ 191

● $\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B} + \frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} = 0$ 198

(7) sin. tan.

● $\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \sin^2 A$ 170

(8) sin. cot.

● $\cot^2 a - \cot^2 \beta = (\sin^2 \beta - \sin^2 a) \div \sin^2 a \sin^2 \beta$... 178

(9) sin. sec.

● $(1 - \sin^2 A) \sec^2 A = 1$ 146

● $\frac{1}{1 - \sin A} + \frac{1}{1 + \sin A} = 2 \sec^2 A$ 181

(10) cos. sec.

● $\frac{\cos A + \cos B}{\sec A + \sec B} = \cos A \cos B = \frac{\cos B - \cos A}{\sec A - \sec B}$ 199

(11) cos. tan.

● $(1 - \cos^2 A)(1 + \tan^2 A) = \tan^2 A$ 150

● $(1 - \tan^4 A) \cos^2 A + \tan^2 A = 1$ 226

● $1 - \tan^2 A + \tan^4 A = \cos^2 A(1 + \tan^6 A)$ 243

(12) cos. cot.

● $(1 - \cos^2 A)(1 + \cot^2 A) = 1$ 151

● $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cos^2 A$ 171

● $\frac{\cot A \cos A}{\cot A - \cos A} = \frac{\cot A + \cos A}{\cot A \cos A}$ 2985

(13) cos. cosec.

$$\bullet (\operatorname{cosec}^2 A - 1) \{2(1 - \cos A) - (1 - \cos A)^2\} = \cos^2 A \quad \mathbf{2975}$$

(14) tan. sec.

$$\bullet \sec^2 A = 1 + \tan^2 A \quad \dots \dots \dots \mathbf{143}$$

$$\bullet (\sec B - \tan B)(\sec B + \tan B) = 1 \quad \dots \dots \dots \mathbf{180}$$

$$\bullet \sec^4 \theta + \tan^4 \theta = 1 + 2 \sec^2 \theta \tan^2 \theta \quad \dots \dots \dots \mathbf{179}$$

$$\bullet \sec^4 B - \sec^2 B = \tan^4 B + \tan^2 B \quad \dots \dots \dots \mathbf{187}$$

$$\bullet (\sec a \sec \beta + \tan a \tan \beta)^2 - (\tan a \sec \beta + \sec a \tan \beta)^2 = 1 \quad \dots \dots \dots \mathbf{240}$$

$$\bullet \sec^2 a \tan^2 \beta - \tan^2 a \sec^2 \beta = \tan^2 \beta - \tan^2 a \quad \dots \dots \mathbf{205}$$

$$\bullet \sec^6 A = 1 + \tan^6 A + 3 \tan^2 A \sec^2 A \quad \dots \dots \dots \mathbf{258}$$

$$\bullet \frac{1 - \sec A + \tan A}{1 + \sec A - \tan A} = \frac{\sec A + \tan A - 1}{\sec A + \tan A + 1} \quad \dots \dots \dots \mathbf{218}$$

$$\bullet \frac{(\sec \theta \sec \phi + \tan \theta \tan \phi)^2 - (\tan \theta \sec \phi + \sec \theta \tan \phi)^2}{2(1 + \tan^2 \theta \tan^2 \phi) - \sec^2 \theta \sec^2 \phi} = \frac{\sec 2\theta \sec 2\phi}{\sec^2 \theta \sec^2 \phi} \quad \dots \dots \dots \mathbf{2987}$$

$$\bullet \tan \theta + \frac{1}{2 \tan \theta} \frac{1}{+ 2 \tan \theta + \dots} = \sec \theta \quad \dots \mathbf{2999}$$

(15) tan. cosec.

$$\bullet \tan^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \tan^2 \theta - 1 \quad \dots \dots \dots \mathbf{188}$$

(16) cot. cosec.

$$\bullet \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A \quad \dots \dots \dots \mathbf{143}$$

$$\bullet \cot^4 A + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^4 A - \operatorname{cosec}^2 A \quad \dots \dots \dots \mathbf{202}$$

$$\bullet 1 + \operatorname{cosec}^4 A - \cot^4 A = 2 \operatorname{cosec}^2 A \quad \dots \dots \dots \mathbf{222}$$

$$\bullet \operatorname{cosec}^6 A - \cot^6 A = 1 + 3 \operatorname{cosec}^2 A \cot^2 A \quad \dots \dots \mathbf{2982}$$

$$\bullet \frac{1 + \operatorname{cosec} A + \cot A}{1 + \operatorname{cosec} A - \cot A} = \frac{\operatorname{cosec} A + \cot A - 1}{\cot A - \operatorname{cosec} A + 1} \quad \dots \dots \mathbf{250}$$

(17) sec. cosec.

$$\bullet \sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \sec^2 a \operatorname{cosec}^2 a \quad \dots \dots \dots \mathbf{175}$$

(18) sin. cos. tan.

$$\bullet \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \text{ 及 } \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \quad \dots \dots \dots \mathbf{142}$$

$$\bullet \tan \theta = \frac{\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \dots \dots \dots 219$$

(19) sin. cos. cot.

$$\bullet \sin A \cot A = \cos A \dots \dots \dots 144$$

$$\bullet (2 - \cos^2 A)(1 + 2 \cot^2 A) = (2 + \cot^2 A)(2 - \sin^2 A) \dots 201$$

$$\bullet \frac{2 \sin \theta \cos \theta - \cos \theta}{1 - \sin \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = \cot \theta \dots \dots \dots 254$$

(20) sin. cos. cosec.

$$\bullet \sin A \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1} = \cos A \dots \dots \dots 165$$

$$\bullet \frac{1 + \sin \theta - \cos \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} + \frac{1 + \sin \theta + \cos \theta}{1 + \sin \theta - \cos \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta \dots 220$$

(21) sin. tan. sec.

$$\bullet \frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} = (\sec A - \tan A)^2 \dots \dots \dots 196$$

$$\bullet \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = (\tan \theta + \sec \theta)^2 \dots \dots \dots 197$$

(22) tan. cot.

$$\bullet \tan A(1 - \cot^2 A) + \cot A(1 - \tan^2 A) = 0 \dots \dots 211$$

$$\bullet (1 + \tan A + \tan^2 A)(1 - \cot A + \cot^2 A) = \tan^2 A + \cot^2 A + 1$$

... .. 217

$$\bullet \frac{\tan A + \tan B}{\cot A + \cot B} = \tan A \tan B \dots \dots \dots 234$$

$$\bullet \frac{\cot \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha + \cot \beta} = \cot \alpha \tan \beta \dots \dots \dots 235$$

$$\bullet \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{\cot \beta}{\cot \beta - \cot \alpha} \dots \dots \dots 238$$

$$\bullet \frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \cot^2 A} = 1 \dots \dots \dots 182$$

(23) sin. cot. sec.

$$\bullet \cot A \cdot \sec A \cdot \sin A = 1 \dots \dots \dots 145$$

$$\bullet \cot^2 \theta \cdot \frac{\sec \theta - 1}{1 + \sin \theta} + \sec^2 \theta \cdot \frac{\sin \theta - 1}{1 + \sec \theta} = 0 \dots \dots \dots 216$$

(24) sin. cot. cosec.

$$\bullet \frac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A} - \frac{1}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A} \dots 248$$

(25) cos. cot. cosec.

- $\text{cosec}^4\theta(1 - \cos^4\theta) - 2 \cot^2\theta = 1 \quad \dots \dots \dots 247$
- $\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = (\text{cosec } A + \cot A)^2 \dots \dots \dots 192$
- $\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = (\cot \theta - \text{cosec } \theta)^2 \dots \dots \dots 193$
- $\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = 4 \cot \theta \text{ cosec } \theta \dots \dots \dots 194$

(26) tan. sec. cosec.

- $\sec A + \tan^3 A \text{ cosec } A = \sec^3 A \dots \dots \dots 223$
- $\sec A \cdot \cot A = \text{cosec } A \dots \dots \dots 147$

(27) sin. cos. tan. cot.

- $\cos a \tan a + \sin a \cot a = \sin a + \cos a \quad \dots \dots 168$
- $(\tan A + \cot A) \sin A \cdot \cos A = 1 \quad \dots \dots \dots 148$
- $\sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2 \sin A \cos A = \tan A + \cot A$
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots 203$
- $\sin^2 C \tan^2 C + \cos^2 C \cot^2 C = \tan^2 C + \cot^2 C - 1 \quad \dots 183$
- $\frac{\sin A \cot^2 A}{\cos A} = \frac{1}{\tan A} \dots \dots \dots 190$
- $(1 + \tan A)(1 + \cot A) = (\sin A + \cos A)^2 \div \sin A \cos A \quad \dots$
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots 172$
- $\sin^2 a \tan a + \cos^2 a \cot a = \frac{1 - 2 \sin^2 a \cos^2 a}{\sin a \cos a} \quad \dots 206$
- $\frac{\tan^3 A}{1 + \tan^2 A} + \frac{\cot^3 A}{1 + \cot^2 A} = \frac{1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A}{\sin A \cos A} \quad \dots \dots 257$

(28) sin. cos. tan. sec.

- $\tan a \sin a + \cos a = \sec a \quad \dots \dots \dots 166$
- $\sec A - \cos A = \tan A \sin A \quad \dots \dots \dots 174$
- $(\tan a - \sin a)^2 + (1 - \cos a)^2 = (\sec a - 1)^2 \dots \dots 230$
- $\cos \theta (\tan \theta + 2)(2 \tan \theta + 1) = 2 \sec \theta + 5 \sin \theta \quad \dots 200$
- $\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \frac{1 + \sin A}{\cos A} \dots \dots \dots 252$
- $(\tan A - \sin A)^2 + (1 - \cos A)^2 = (\sec A - 1)^2 \dots \dots 245$

(29) sin. cos. cot. cosec.

- $\cot a \cos a + \sin a = \text{cosec } a \quad \dots \dots \dots 167$

● cosec A - sin A = cot A cos A... .. 173

(30) sin. cos. sec. cosec.

● (sec θ + cosec θ)(sin θ + cos θ) = sec θ cosec θ + 2... 184

● (sin A + sec A)² + (cos A + cosec A)² = (1 + sec A cosec A)²
... .. 244

● sec² A cosec² A - sec² A - 2cos² A = (sin⁴ A + cos⁴ A)cosec² A
... .. 2976

● sin³ A + cos³ A + sec³ A + cosec³ A = (sin A + cos A)(1 - sin A
× cos A)(1 + sec³ A cosec³ A) 2979

● $\frac{\sin a + \cos a}{\sec a + \operatorname{cosec} a} = \sin a \cos a$ 236

● $\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \frac{\sec \theta \operatorname{cosec} \theta}{2} \left(\frac{\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta}{\operatorname{cosec} \theta - \sec \theta} - \frac{\operatorname{cosec} \theta - \sec \theta}{\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta} \right)$ 266

● $\frac{(\sec A + \operatorname{cosec} A)^2}{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A} = 1 + 2 \sin A \cos A$ 225

● $\left(\frac{1}{\sec^2 A - \cos^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A - \sin^2 A} \right) \cos^2 A \sin^2 A$
 $= \frac{1 - \cos^2 A \sin^2 A}{2 + \cos^2 A \sin^2 A}$ 251

(31) sin. tan. sec. cosec.

● sin θ tan² θ + cosec θ sec² θ - 2 tan θ sec θ = cosec θ - sin θ
... .. 204

(32) sin. tan. cot. sec.

● $\frac{\tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \cdot \frac{1 + \cot^2 A}{\cot^2 A} = \sin^2 A \sec^2 A$ 213

(33) cos. tan. cot. sec.

● (cos² A + cot² A) tan² A = sec² A + (cos² A - 1) tan² A ... 228

● $\frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$ 186

(34) cos. cot. sec. cosec.

● cos A cot² A + sec A cosec² A - 2 cot A cosec A = sec A - cos A
... .. 2977

● (sec A cot A + 1)(sec A cot A - 1) = cos² A cosec² A 259

(35) tan. cot. sec. cosec.

- $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A \dots \dots \dots 149$
 ● $\tan^2 A - \cot^2 A = \sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 A \dots \dots \dots 177$
 ● $(1 + \tan A)^2 + (1 + \cot A)^2 = (\sec A + \operatorname{cosec} A)^2 \dots 212$
 ● $(\tan a - 1)^2 + (1 - \cot a)^2 = (\sec a - \operatorname{cosec} a)^2 \dots 231$
 ● $(1 + \cot A - \operatorname{cosec} A)(1 + \tan A + \sec A) = 2 \dots \dots 242$
 ● $(\tan a + \operatorname{cosec} \beta)^2 - (\cot \beta - \sec a)^2 = 2 \tan a \cot \beta (\operatorname{cosec} a + \sec \beta) \dots \dots \dots 256$
 ● $\tan^2 a + \cot^2 a + 2 = \sec^2 a \operatorname{cosec}^2 a \dots \dots \dots 176$
 ● $\tan^2 \theta \sec^2 \theta + \cot^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta = \sec^4 \theta \operatorname{cosec}^4 \theta - 3 \sec^2 \theta \times \operatorname{cosec}^2 \theta \dots \dots \dots 265$
 ● $\sec^3 A \operatorname{cosec}^3 A - 3 \sec A \operatorname{cosec} A = \tan^3 A + \cot^3 A \dots 2980$
 ● $(1 + \cot A + \tan A)(\sec A - \operatorname{cosec} A) = \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec} A} - \frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec A} \dots \dots \dots 249$
 ● $\frac{\operatorname{cosec} a + \cot a}{\sec a + \tan a} = \frac{\sec a - \tan a}{\operatorname{cosec} a - \cot a} \dots \dots \dots 239$
 ● $\frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A} = \sec A \operatorname{cosec} A + 1 \dots \dots 241$

(36) 含五函數者

- $\cot A - \sec A \operatorname{cosec} A(1 - 2 \sin^2 A) = \tan A \dots \dots 224$
 ● $\frac{1 + \sin A}{1 + \cos A} \cdot \frac{1 + \sec A}{1 + \operatorname{cosec} A} = \tan A \dots \dots \dots 195$
 ● $\tan^4 A = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A - \sec^2 A}{\sin^2 A + \cos^2 A - \operatorname{cosec}^2 A} \dots \dots \dots 264$
 ● $(\sec A - \cos A)(1 + \cot A + \tan A) = \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\sec A}{\operatorname{cosec}^2 A} \dots \dots \dots 2986$

(37) 含六函數者

- $(\sin \theta + \cos \theta)(\tan \theta + \cot \theta) = \sec \theta + \operatorname{cosec} \theta \dots 185$
 ● $\sin A(1 + \tan A) + \cos A(1 + \cot A) = \operatorname{cosec} A + \sec A \dots 229$
 ● $(\sin a - \operatorname{cosec} a)^2 - (\tan a - \cot A)^2 + (\cos a - \sec a)^2 = 1 \dots \dots \dots 255$
 ● $(\operatorname{cosec} A + \cot A)(1 - \sin A) - (\sec A + \tan A)(1 - \cos A) = (\operatorname{cosec} A - \sec A) \{2 - (1 - \cos A)(1 - \sin A)\} \dots 253$
 ● $\cos^2 A(\sec^2 A - \tan^2 A) + \sin^2 A(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A) = 1 \dots 189$

● $\tan \theta + \cot \theta = 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^3 \theta \sec \theta + \cos^3 \theta \operatorname{cosec} \theta$
 246

● $\frac{1}{\cos \theta + \tan^2 \theta \sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta + \cot^2 \theta \cos \theta}$
 $= \frac{\operatorname{cosec} \theta - \sec \theta}{\sec \theta \operatorname{cosec} \theta - 1}$ 262

(38) 含 vers. 者

● $\sin^2 A + \operatorname{vers}^2 A = 2(1 - \cos A)$ 260

● $2 \operatorname{vers} \theta - \operatorname{vers}^2 \theta = \sin^2 \theta$ 261

VIII. 餘角

(1) 恆等式

● $\sin(90^\circ - A) \cot(90^\circ - A) = \sin A$ 348

● $\frac{\cos^2(90^\circ - A)}{1 - \cos A} = 1 + \sin(90^\circ - A)$ 354

● $\sin A \cot A \cot(90^\circ - A) \sec(90^\circ - A) = 1$ 346

● $\cot(90^\circ - A) \cot A \cos(90^\circ - A) \tan(90^\circ - A) = \cos A$ 353

● $\frac{\cot(90^\circ - A)}{\operatorname{cosec}^2 A} \cdot \frac{\sec(90^\circ - A) \cot^3 A}{\sin^2(90^\circ - A)} = \sec A$ 356

● $\{\sec(90^\circ - \theta) - \sec \theta\} \{\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) - \operatorname{cosec} \theta\} + (1 - \tan \theta)^2 + (\cot \theta - 1)^2 = 0$ 387

● $\frac{\cot^2 A \sin^2(90^\circ - A)}{\cot A + \cos A} = \tan(90^\circ - A) - \cos A$ 351

● $\frac{\sin(90^\circ - A)}{\sec(90^\circ - A)} \cdot \frac{\tan(90^\circ - A)}{\cos A} = \cos A$ 352

● $\sin A \tan(90^\circ - A) \sec(90^\circ - A) = \cot A$ 345

● $\frac{\operatorname{cosec}^2 A \tan^2 A}{\cot(90^\circ - A)} \cdot \frac{\cot A}{\sec^2 A} = \sec^2(90^\circ - A) - 1$ 347

● $\sec(90^\circ - A) - \cot A \cos(90^\circ - A) \tan(90^\circ - A) = \sin A$...
 344

(2) $a + \beta = \frac{\pi}{2}$

● $(\sin a - \sin \beta)^2 = 1 - \cos a \cos \beta$ 343

● $\cos^2 a + \cos^2 \beta = (\sin a + \sin \beta)(1 - \sin a \sin \beta)$... 343

● $(\tan a + \tan \beta) \cos a \cos \beta = 1$ 343

● $\sin^2 a \tan a + \sin^2 \beta \tan \beta = \frac{1 - 2 \sin^2 a \sin^2 \beta}{\cos a \cos \beta}$... 343

(3) 式之值

- $\cos A \tan A \tan(90^\circ - A) \operatorname{cosec}(90^\circ - A)$ 之數值 ... 355
- $\tan(90^\circ - A) + \cot(90^\circ - A)$ 與 $\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec}(90^\circ - A)$ 相等否 ... 350

IX. 關係式

- 設 $\cos \theta = h$, $\tan \theta = k$, 聯結 h 及 k ... 358
- $a \sec A - c \tan A = d$, $b \sec A + d \tan A = c$ 時, $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$... 359
- $\tan A + \sin A = m$, $\tan A - \sin A = n$ 時, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$... 386
- $\cos \alpha = C$, $\sin \alpha = S$ 時, $C^{12} + 4C^{10}S^2 + 5C^8S^4 - 5C^4S^6 - 4C^2 \times S^{10} - S^{12} = C^2 - S^2$... 391
- $\sin x + \sin^2 x = 1$ 時, 求 $\sin x$ 而證 $\cos^2 x + \cos^4 x = 1$... 2973

X. 等式

(1) 條件等式

- $\tan^3 \phi = \frac{a}{\beta}$ 時, $a \operatorname{cosec} \phi + \beta \sec \phi = \left(a^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$... 374
- $\sin A = \frac{m}{n}$ 時, $\sqrt{(n^2 - m^2)} \tan A = m$... 364
- $\sin \theta = \frac{m^2 + 2mn}{m^2 + 2mn + 2n^2}$ 時, $\tan \theta = \frac{m^2 + 2mn}{2mn + 2n^2}$... 366
- $\cos A = n \sin B$, $\cot A = \sin B / \tan C$ 時, $\cos C = n / \sqrt{(1 + n^2 \cos^2 B)}$... 365
- $\sin \alpha = m \sin \beta$, $\tan \alpha = n \tan \beta$ 時, $\cos \alpha = \sqrt{\frac{m^2 - 1}{n^2 - 1}}$... 370
- $a \sin \theta \sin \psi + b \cos \theta \cos \psi = c$ 時, $(c^2 - a^2) \tan^2 \theta \tan^2 \psi + c^2 (\tan^2 \theta + \tan^2 \psi) - 2ab \tan \theta \tan \psi + (c^2 - b^2) = 0$... 390
- $\cot^2 A = \left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)^2 + \left(\frac{\cos B}{\tan C}\right)^2$ 時, 求證 $\operatorname{cosec}^2 A = \left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)^2 + \left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2$... 388
- $\sin \alpha = 1$ 時, $\cos \alpha + \cot \alpha + \operatorname{cosec} \alpha = 1$... 389

● $\frac{\cos^4 \alpha}{\cos^2 \beta} + \frac{\sin^4 \alpha}{\sin^2 \beta} = 1$ 時, $\frac{\cos^4 \beta}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^4 \beta}{\sin^2 \alpha} = 1$ 392

● $\frac{\cos^3 \theta}{\cos \alpha} + \frac{\sin^3 \theta}{\sin \alpha} = 1$ 時, $\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \theta} - \frac{\sin \alpha}{\sin \theta}\right)\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \theta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} + 1\right) = 0$
 393

● $m \sin \alpha = n \cos \alpha$ 時, $\sin \alpha = \pm \frac{n}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$... 2971

● $\tan \alpha + \sin \alpha = m, \tan \alpha - \sin \alpha = n$ 時, $\cos \alpha = \frac{(m-n)}{(m+n)}$ 2972

● $\left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}\right)^2 + (\cos \alpha \cos \gamma)^2 = 1$ 時, $\sin \gamma = \tan \alpha \cot \beta$...
 2988

● $\tan^2 \theta - \sec^2 \alpha = 1$ 時, $\sec \theta + \tan^3 \theta \operatorname{cosec} \theta = (3 + \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}$
 2992

● $(1 + 2 \cos^{\frac{2}{3}} \alpha)(1 + 2 \cos^{\frac{2}{3}} \beta) = 3$ 時, $\frac{(1 + 8 \cos^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3 \alpha \cos \alpha}$
 $= \frac{(1 + 8 \cos^2 \beta)^{\frac{3}{2}}}{\sin^3 \beta \cos \beta}$ 2989

● $(1 + \sin \theta)(1 + \sin \phi)(1 + \sin \psi) = \cos \theta \cos \phi \cos \psi$ 時,
 $\sec^2 \theta + \sec^2 \phi + \sec^2 \psi = 1 + 2 \sec \theta \sec \phi \sec \psi$... 2994

● $\cos \theta + \cos \phi + \cos \psi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi = 0$ 時, $\operatorname{cosec}^2 \theta$
 $+ \operatorname{cosec}^2 \phi + \operatorname{cosec}^2 \psi \pm 2 \operatorname{cosec} \theta \operatorname{cosec} \phi \operatorname{cosec} \psi = 1$...
 2993

● $\left(\frac{\tan \alpha}{\sin \theta} - \frac{\tan \beta}{\tan \theta}\right)^2 = \tan^2 \alpha - \tan^2 \beta$ 時, $\cos \theta = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}$..
 2996

● $\frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \phi}{\tan^2 \beta} = 1$ 及 $\frac{\sin \theta}{\sin \alpha} = \frac{\sin \phi}{\sin \beta}$ 時,
 $\sin \theta = \frac{\pm \sin \alpha}{\sqrt{(1 \pm \cos \alpha \cos \beta)}}$ 2997

● $\sin x \sin y = \sin(\alpha + \beta) \sin \gamma, \cos x \cos y = \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma,$
 及 $\cos^2 x + \cos^2 y = 1 + \cos^2(\alpha + \beta + \gamma)$ 時, $\sin^2(\alpha + \beta)$
 $+ \sin^2 \gamma = \sin^2(\alpha + \beta + \gamma)$ 2995

(2) 等 式

● $\sec A \operatorname{cosec}(90^\circ - A) - x \cot(90^\circ - A) = 1$ 時, 求 x 349

● $\sec A \operatorname{cosec}(90^\circ - A) - x \cot(90^\circ - A) = 1$ 時, 求 x 2984

● $x \sin(90^\circ - A) \cot(90^\circ - A) = \cos(90^\circ - A),$ 求 x ... 2983

● $x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ = \tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ + \sin 180^\circ$

- $\times \cot 90^\circ$ 時, 求 x 之值 453
 ● $\sec a \sec \theta + \tan a \tan \theta = \sec \beta$ 時, 求 $\tan \theta$... 2998
 ● $\cos A = n \sin B$, $\cot A = \frac{\sin B}{\tan C}$ 時, 求 $\cos C$ 365
 ● $2 \tan a + 3 \sin \beta = 7$, $\tan a - 6 \sin \beta = 1$ 時, 求 $\sin a$, 及 $\sin \beta$ 360
 ● $\sin A = m \sin B$, $\cos A = n \cos B$ 時, 求 $\tan A$, 及 $\tan B$ 361
 ● $\sin A - \cos A = 0$ 時, 求 $\operatorname{cosec} A$ 之值 368
 ● $\tan \theta + 3 \cot \theta = 4$ 時, 求 $\sin \theta$ 372
 ● $\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = 2 + \sqrt{3}$ 時, 求 $\cos \theta$ 373

XI. 式之表示

- 以 $\sec A$, $(\operatorname{cosec} A - \cot A)^2$ 2974
 ● 用 $\sin \theta$, $(\sec \theta - \tan \theta)^2$ 376
 ● 以 $\operatorname{cosec} A$, $(\sec A - \tan A)^2$ 377
 ● 用 $\cos \theta$, $1 + \tan^4 \theta$ 378
 ● (I) $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$, (II) $(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)^2$, (III) $1 - \tan^4 \theta$, (IV) $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta$, 先以 $\cos \theta$ 之項, 又以 $\sin \theta$ 之項 380
 ● 用 $\tan A$, $\sin^6 A + \cos^6 A$ 379
 ● $\tan^2 A + \cot^2 A$, 以 $\sin A$ 之項 383
 ● $\sec^4 \theta - \sec^2 \theta$, 以 $\tan \theta$ 之項 382
 ● $\sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$, 以 $\cos \theta$ 之項 381
 ● (I) $\sin^4 A + (\cos^2 A + 2 \sin^2 A) \cos^2 A$. (II) $\tan^2 A (\tan^2 A - 2 \times \sec^2 A) + \sec^4 A$ 與 A 無關 385
 ● 設直線 AD 之三等分點爲 B, C , BC 爲徑之圓周上之任意點爲 P , $\widehat{APB} = \theta$, $\widehat{CPD} = \phi$, 則 $\tan \theta \tan \phi = \frac{1}{3}$... 395
 ● 矩形 $ABCD$ 中, $AP \perp BD$, $PX \perp BC$, $PY \perp CD$, 則 $(PX)^{\frac{2}{3}} + (PY)^{\frac{2}{3}} = (BD)^{\frac{2}{3}}$ 396
 ● $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$ 之值恆不易 384

第三 普徧角

I. 關於象限者

- 次之各角中, 動徑在第幾象限 (I) 290° . (II) 160° . (III) 255° . (IV) -110° . (V) 570° . (VI) -420° . (VII) -660° .

- (VIII) 1120° 407
- 次之各角之動徑, 在第幾象限 (I) 370° . (II) 420° . (III) $\frac{1}{2}\pi$. (VI) -40° . (V) -100° . (VI) -365° . (VII) -750° . (VIII) $-\frac{5}{2}\pi$ 408
- 次之二角之動徑在第幾象限 (I) 2000° . (II) -4600° 409
- $130^\circ, 290^\circ, -340^\circ$ 之三角函數之符號 410
- 導 $3848^\circ, 648^\circ$ 於第一圓周, 又導 $8542^\circ, 539^\circ, 600^\circ, -100^\circ$ 於第一象限 411
- 餘弦與正切爲負之角之動徑, 在第幾象限, 又有一切三角函數爲負之角否 412

II. 以最小正角表示

- $\sin(-300^\circ), \tan 1345^\circ, \cos(-1000^\circ)$, 以 90° 以下之三角函數 421
- (I) $\sin 740^\circ$, (II) $\cos(-300^\circ)$, (III) $\tan \frac{9}{2}\pi$, (IV) $\cot(-\frac{1}{3}\pi)$, (V) $\operatorname{cosec} 1120^\circ$, (VI) $\operatorname{cosec}(-60^\circ)$, (VII) $\operatorname{vers} 100^\circ$, (VIII) $\operatorname{covers}(-100^\circ)$, 以小於 45° 即 $\frac{1}{2}\pi$ 之正角之函數 423
- $\sin 7321^\circ, \cos(-8146^\circ), \tan 7389^\circ, \cot 375^\circ, \sec(-8325^\circ), \operatorname{cosec} 1732^\circ$, 以 45° 以下之角之三角函數 424
- $\sin 25^\circ, \cot \frac{\pi}{8}$, 用鈍角之同函數 426
- $\sin 112^\circ, \cos(-350^\circ)$, 用銳角之正弦 427
- (I) $\sin 1005^\circ$, (II) $\tan(-2232^\circ)$, 以最小正角之函數 449
- $-23^\circ, -157^\circ$, 及 157° 之同三角函數, 有同值者爲何 488
- 60° , 及 -120° 之同三角函數, 有同值者爲何 ... 489
- $\sin 2\theta$ 中, 不變其值而得加於 θ 之最小正角 ... 493
- $\tan 5\theta$ 中, 不變其值而得加於 θ 之最小正角 ... 494
- 不變 $\sec(a\theta + b)$ 之值, 而得加於 θ 之最小正角 ... 495
- $\cos \frac{\theta}{3}$ 中, 不變其值而得加於 θ 之最小正角 ... 496
- $\operatorname{cosec} \frac{3\theta + a}{4}$ 中, 不變其值而得加於 θ 之最小正角 497

III. 求三角函數之值

- (I) 120° . (II) 135° . (III) 150° 413

- (I) $\sin 210^\circ$. (II) $\cos 240^\circ$. (III) $\tan 225^\circ$... 414
- (I) $\sin 495^\circ$, $\cos 495^\circ$, $\cot 495^\circ$. (II) $\sec 120^\circ$, $\tan 120^\circ$, $\operatorname{cosec} 120^\circ$. (III) $\operatorname{cosec} 315^\circ$, $\sec 315^\circ$, $\cot 315^\circ$. (IV) $\tan(-300^\circ)$, $\cot(-300^\circ)$, $\sec(-300^\circ)$. (V) $\cos(-240^\circ)$, $\sec(-240^\circ)$, $\tan(-240^\circ)$... 416
- 585° ... 417
- 690° ... 418
- 930° ... 419
- $6420'$... 420
- $\sin 480^\circ$, $\cos 4080'$, $\tan 8400'$... 422
- $A = -270^\circ$... 425
- $A = -25^\circ 19'$ 及 $\sin A = -\frac{3}{7}$ 時, $\cos A$ 及 $\cot A$... 431
- $\operatorname{vers} \frac{n\pi}{4}$ 之一切值, 但 n 爲零或任意正整數... 432
- $\sin \left\{ \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{6} \right\}$ 之一切值, 但 n 爲零或任意正整數
... 433
- $A = 90^\circ$ 及 $A = 180^\circ$... 492
- 在一角之二邊間, 以 6 呎之半徑畫弧, 此弧之正弦爲 4 呎時, 此角之正弦 ... 499

IV. 簡 化

- $\sin(180^\circ + \theta)\cos(90^\circ + \theta) - \sin(90^\circ - \theta)\cos(180^\circ - \theta)$... 463
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$... 464
- $\tan(180^\circ + \theta)\cot(180^\circ - \theta) - \cos(180^\circ + \theta)\sin(90^\circ + \theta)$... 465
- $\tan(180^\circ + A)\sin(90^\circ + A)\sec(90^\circ - A)$... 466
- $\sec(180^\circ + A)\sec(180^\circ - A) + \cot(90^\circ + A)\tan(180^\circ + A)$... 467
- $a \cos(90^\circ - A) + b \cos(90^\circ + A)$... 468
- $(a - b)\sin(90^\circ - A) + (a + b)\cot(90^\circ + A)$... 469
- $(a + b)\tan(180^\circ - a) + (a + b)\cot(90^\circ + a)$... 470
- $\frac{\sin A \tan(90^\circ + A)}{\tan A \cos(90^\circ - A)}$... 471
- $\frac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ + A)} - \frac{\tan(90^\circ + A)}{\cot A} + \frac{\cos A}{\sin(90^\circ + A)}$... 472

$$\bullet \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(\pi + \alpha)} + \frac{\sin(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin(\pi + \alpha)} \dots \mathbf{473}$$

$$\bullet \frac{(a^2 - b^2)\cot(\pi - \alpha)}{\cos(\pi + \alpha)} + \frac{(a^2 + b^2)\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cot(\pi - \alpha)} \dots \dots \mathbf{474}$$

V. 求

- (I) $\cos 0^\circ \sin 270^\circ + 2 \cos 180^\circ \tan 45^\circ$, (II) $3 \sin 0^\circ \sec 180^\circ + 2 \operatorname{cosec} 90^\circ - 3 \cos 360^\circ$ 之值 **451**
- $\tan 20^\circ + \tan 230^\circ + \tan 245^\circ$ 之值 **452**
- $\cos 570^\circ \sin 510^\circ - \sin 330^\circ \cos 390^\circ$ 之值 **454**
- $\tan 225^\circ \cot 405^\circ + \tan 765^\circ \cot 675^\circ$ 之值 **455**
- $2 \cos 120^\circ \sin 225^\circ - 3 \sin 120^\circ \tan 135^\circ$ 之值 **456**
- $\tan 150^\circ \cos 0^\circ + 3 \cos 180^\circ \cot 150^\circ$ 之值 **457**
- $a^2 \cos 0^\circ - b^2 \sin 270^\circ - 2ab \tan 135^\circ \cot 225^\circ$ 之值 **458**
- $\cos 180^\circ \tan(-45^\circ) + \sin 150^\circ \sec 210^\circ$ 之值 **459**
- $\cos 0^\circ \cos 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \sin 60^\circ \sin 90^\circ$ 之值 **460**
- $\cos^2 18^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin^2 20^\circ + 2 \cos 45^\circ \cos 90^\circ$ 之值 **461**
- $\sin 420^\circ \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ) \sin(-330^\circ)$ 之值 **462**
- 角 A 變化時, $\tan^2 A + \cot^2 A$ 之最小值及其條件 ... **525**
- 角 A 變化時, $4 \cos^2 A + \sec^2 A$ 之最小值, 及其條件 **526**

VI. 追 跡

- 從角之變化而生之正弦變化 **401**
- 從角之變化而生之餘弦變化 **402**
- 從角之變化而生之正切變化 **403**
- 從角之變化而生之餘割變化 **404**
- 從角之變化而生之正割變化 **405**
- 從角之變化而生之餘切變化 **406**
- 角 A 由 0° 增至 360° 時, $1 - \cos A$ 之值之變化 ... **439**
- 角 A 由 0° 增至 360° 時, $1 - \sin A$ 之變化 **440**
- 角 A 由 0° 增至 360° 時, 函數 $\sin^2 A$ 之變化 ... **441**
- 角 A 由 0° 增至 360° 時, 函數 $\cos^2 A$ 之變化 ... **442**
- A 由 0° 增至 90° 時, $\sec A - \tan A$ 之變化 **443**
- 弧由 $-\frac{\pi}{2}$ 變至 $+\frac{\pi}{2}$ 時, 其正弦, 正切, 餘切可取得其所

有一切之值, 而弧由 0 變至 π 時, 其餘弦, 正切, 餘切亦然

- 444
- 角 θ 由 0 變至 2π , 時 $\cos \theta - \sin \theta$ 之符號及值之變化
... .. 436
- 角 θ 由 0 變至 2π 時, $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ 之符號及值之變化
... .. 437
- 角 θ 由 0 變至 2π 時, $\tan \theta + \cot \theta$ 之符號及值之變化
... .. 438

VII. 求 證

- $\cos B = \cos A$, $\tan B = \tan A$ 時, $A + B$ 爲 0° 或 360° 之倍數 523
- $\sin B = \sin A$, $\cos B = \cos A$ 時, $A - B$ 爲 0° 或 360° 之倍數 524
- $\frac{\sin(180^\circ - A)}{\tan(180^\circ + A)} \cdot \frac{\cot(90^\circ - A)}{\tan(90^\circ + A)} \cdot \frac{\sin(270^\circ + A)}{\sin(-A)} = -\sin A$ 3000
- $\frac{\operatorname{cosec}(180^\circ - A)}{\sec(180^\circ + A)} \cdot \frac{\cos(-A)}{\cos(90^\circ + A)} = \cot^2 A$ 3001
- $\{\cos(90^\circ + A)\operatorname{cosec}(270^\circ + A)\tan(180^\circ - A)\} / \{\sec(360^\circ - A) \times \sin(180^\circ + A)\cot(90^\circ - A)\} = 1$ 3002
- $\sin(180^\circ - A) = \sin A$, $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$, $\tan(180^\circ - A) = -\tan A$ 397
- $\operatorname{vers}(180^\circ - A) = 1 + \cos A$ 397 注意 1
- $\sin(-A) = -\sin A$, $\cos(-A) = \cos A$, $\tan(-A) = -\tan A$
... .. 398
- $\operatorname{vers}(-A) = \operatorname{vers} A$ 398 注意
- $\sin(180^\circ + A) = -\sin A$, $\cos(180^\circ + A) = -\cos A$, $\tan(180^\circ + A) = \tan A$ 399
- $\operatorname{vers}(180^\circ + A) = 1 + \cos A$ 399 注意 1
- $\sin A = -\sin(A - 180^\circ)$, $\cos A = -\cos(A - 180^\circ)$ 399 注意 2
- $\sin(90^\circ + A) = \cos A$, $\cos(90^\circ + A) = -\sin A$, $\tan(90^\circ + A) = -\cot A$ 400
- $\operatorname{vers}(90^\circ + A) = 1 + \sin A$ 400 注意
- $\sin(270^\circ - A) = -\cos A$, $\cos(270^\circ - A) = -\sin A$, $\tan(270^\circ - A) = \cot A$ 446
- $\operatorname{cosec}(270^\circ - A) = -\sec A$, $\sec(270^\circ - A) = -\operatorname{cosec} A$,
 $\cot(270^\circ - A) = \tan A$ 466 注意
- $\sin(270^\circ + A) = -\cos A$, $\cos(270^\circ + A) = \sin A$, $\tan(270^\circ$

- +A) = -cot A... .. 447
- cosec(270° + A) = -sec A, sec(270° + A) = cosec A, cot(270° + A) = -tan A 447 注意
- 對於 A 之一切值, cos(90° - A) = sin A, 及 cot(90° - A) = tan A 448
- sin(360° - A) = -sin A, cos(360° - A) = cos A, tan(360° - A) = -tan A 450
- cosec(360° - A) = -cosec A, sec(360° - A) = sec A, cot(360° - A) = -cot A 450 注意
- cot(3A - 180°) = cot 3A 475
- sec(a + 3π) = -sec a 476
- sin a = -cos(3π/2 - a) 477
- cot 3(π/2 - a) = tan 3a 478
- sin(π/2 - 2a) = sin(π/2 + 2a) 479
- cot(-a) cosec(-a)(1 - cos²a) = cos(-a) 480
- cosec(90° + A)sec(360° - A) + sin(180° + A)sec A tan(180° + A) = (tan(45° + A)tan(45° - A)) 481
- cos A + sin(270° + A) - sin(270° - A) + cos(180° + A) = 0 482
- sec(270° - A)sec(90° - A) - tan(270° - A)tan(90° + A) + 1 = 0 483
- cot A + tan(180° + A) + tan(90° + A) + tan(360° - A) = 0 484
- cos² A + cos²(90° + A) + cos²(180° + A) + cos²(270° + A) = 2 485
- {sin(90° + A) + cos(90° + A)} {sec(90° - A) - sec A} = sec A × sec(90° - A) - 2 486
- $\frac{\sin^3(90° + A) + \cos^3(90° + A)}{\sin(180° + A) + \cos(360° - A)}$ = 1 + sin(90° + A) cos(270° + A) 487
- 設角 A 小於 90°, 就幾何學求證 (I) sec(A - 180°) = -sec A, (II) tan(270° + A) = -cot A, (III) cos(A - 90°) = sin A 491
- n 為整數時 tan(n·180° + A) = tan A 498
- 與 a 有等正弦且等餘弦之一切角含於公式 2nπ + a 中 517

- $\theta + \frac{\pi}{4} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ 及 $\theta + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 所代表之角相同 522

VIII. 作 角

- 以 $\frac{\pi}{4}$ 爲正弦 490
- 正矢 a 之角, 等於 $1-a$ 爲餘弦之角, 故由 500 題 502 注意
- 知正弦或餘弦 500
- 知正切或餘切 501
- 知正割或餘割 502

IX. 求 公 式

- 表有所設正弦之一切角者 503
- 表與 a 有同餘割之一切角之公式爲 $n\pi + (-1)^n a$ 503 注意
- 表有所設餘弦之一切角者 508
- 表與 a 有同正割之一切角之公式爲 $2n\pi \pm a$ 508 注意
- 令二弧相等且有異號餘弦之條件 515
- 表有所設正切之一切角者 516
- 表與 a 有同餘切之一切角之公式爲 $n\pi + a$ 516 注意

第四 和 及 差 之 公 式

I. 恆 等 式

(1) \sin .

- $\sin(36^\circ + a) - \sin(36^\circ - a) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sin a$ 973
- $\sin(45^\circ + A) - \sin(45^\circ - A) = \sqrt{2} \sin A$ 749
- $\sin A + \sin(36^\circ - A) + \sin(72^\circ + A) = \sin(36^\circ + A) + \sin(72^\circ - A)$ 798
- $\sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) \sin A$ 751
- $\sin(72^\circ + a) - \sin(72^\circ - a) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sin a$ 974
- $\sin A + \sin(120^\circ + A) - \sin(120^\circ - A) = 0$ 752
- $\sin A \sin B = \sin^2 \frac{A+B}{2} - \sin^2 \frac{A-B}{2}$ 588

- $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{585}$
- $\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) = \sin 2\alpha \sin 2\beta \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{591}$
- $\sin^2(\alpha + \beta)\sin 3(\alpha - \beta) = \sin^2(2\alpha - \beta) - \sin^2(2\beta - \alpha) \quad \mathbf{587}$
- $\sin(\beta - \alpha)\sin(\delta - \gamma) + \sin(\gamma - \beta)\sin(\delta - \alpha) = -\sin(\gamma - \alpha)$
 $\times \sin(\beta - \delta) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{872}$
- $\sin(\delta - \beta)\sin(\alpha - \gamma) + \sin(\beta - \gamma)\sin(\alpha - \delta) + \sin(\gamma - \delta)\sin(\alpha - \beta) = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{1140}$
- $\sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin\beta = \sin^2(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma) - \sin\alpha \sin\gamma \quad \dots$
 $\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{1137}$
- $\sin 3\alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin 3\beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin 3\gamma \sin(\alpha - \beta) = 4$
 $\times \sin(\alpha - \beta)\sin(\beta - \gamma)\sin(\gamma - \alpha)\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \dots \quad \mathbf{875}$
- $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{711}$
- $4 \sin A \sin(60^\circ - A)\sin(60^\circ + A) = \sin 3A \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{714}$
- $\sin^3 A + \sin^3(120^\circ + A) + \sin^3(240^\circ + A) = -\frac{3}{4} \sin 3A \quad \mathbf{715}$
- $\sin^3\alpha + \sin^3(120^\circ + \alpha) - \sin^3(120^\circ - \alpha) = -\frac{3}{4} \sin 3\alpha \quad \mathbf{941}$
- $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) = -4 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2}$
 $\times \sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{813}$
- $\sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{820}$
- $\sin(2x + \theta) + \sin(2y + \theta) + \sin(2z + \theta) - \sin(2x + 2y + 2z + 3\theta) = 4 \sin(x + y + \theta)\sin(y + z + \theta)\sin(z + x + \theta) \quad \mathbf{823}$
- $\sin\alpha \sin\beta \sin(\beta - \alpha) + \sin\beta \sin\gamma \sin(\gamma - \beta) + \sin\gamma \sin\alpha \sin(\alpha - \gamma) + \sin(\beta - \alpha)\sin(\gamma - \beta)\sin(\alpha - \gamma) = 0 \quad \mathbf{1138}$
- $\sin A \sin B \sin(A - B) + \sin B \sin C \sin(B - C) + \sin C \sin A \sin(C - A) = \frac{1}{4} \{\sin(2A - 2B) + \sin(2B - 2C) + \sin(2C - 2A)\} \dots \dots \dots \mathbf{1142}$
- $\sin 5\alpha = 16 \sin^5\alpha - 20 \sin^3\alpha + 5 \sin\alpha \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{738}$
- $16 \sin^5\alpha = \sin 5\alpha - 5 \sin 3\alpha + 10 \sin\alpha \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{840}$
- $\sin 6\alpha = \cos\alpha(6 \sin\alpha - 32 \sin^3\alpha + 32 \sin^5\alpha) \quad \dots \quad \mathbf{739}$
- $\sin 7\alpha = 7 \sin\alpha - 56 \sin^3\alpha + 112 \sin^5\alpha - 64 \sin^7\alpha \quad \mathbf{740}$
- $-64 \sin^7\alpha = \sin 7\alpha - 7 \sin 5\alpha + 21 \sin 3\alpha - 35 \sin\alpha \quad \dots$
 $\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{842}$
- $\{\sin\beta + \sin\gamma - \sin(\beta + \gamma)\} \{\sin\gamma + \sin\alpha - \sin(\gamma + \alpha)\}$
 $\times \{\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha + \beta)\} = 16 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2}$
 $\times \{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma)\} \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{824}$
- $\sqrt{1 + \sin\alpha} = 1 + 2 \sin \frac{\alpha}{4} \sqrt{1 - \sin \frac{\alpha}{2}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{691}$

- $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A} \} \dots \dots 892$
- $\sin 3^\circ = \frac{\sin^2 3^\circ - \sin^2 1^\circ}{\sin 1^\circ} \dots \dots \dots 597$
- $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} + \frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin \beta \sin \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin \gamma \sin \alpha} = 0 \dots \dots 567$
- $\frac{\sin A + 2 \sin 3A + \sin 5A}{\sin 3A + 2 \sin 5A + \sin 7A} = \frac{\sin 3A}{\sin 5A} \dots \dots \dots 790$
- $\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma)} + \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \gamma) \sin(\beta - \alpha)}$
 $+ \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma - \alpha) \sin(\gamma - \beta)} = 0 \dots \dots \dots 867$
- $\frac{\sin(\theta - \beta) \sin(\theta - \gamma)}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma)} + \frac{\sin(\theta - \gamma) \sin(\theta - \alpha)}{\sin(\beta - \gamma) \sin(\beta - \alpha)}$
 $+ \frac{\sin(\theta - \alpha) \sin(\theta - \beta)}{\sin(\gamma - \alpha) \sin(\gamma - \beta)} = 1 \dots \dots \dots 869$
- $\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma)} + \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \gamma) \sin(\beta - \alpha)}$
 $+ \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma - \alpha) \sin(\gamma - \beta)} = 0 \dots \dots \dots 1146$
- $\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma)} + \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\beta - \alpha) \sin(\beta - \gamma)}$
 $+ \frac{\sin(\theta - \gamma)}{\sin(\gamma - \alpha) \sin(\gamma - \beta)} = 0 \dots \dots \dots 1147$
- $\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha - \gamma)} + \frac{\sin(\theta - \beta)}{\sin(\beta - \gamma) \sin(\beta - \alpha)}$
 $+ \frac{\sin(\theta - \gamma)}{\sin(\gamma - \alpha) \sin(\gamma - \beta)} = 0 \dots \dots \dots 868$
- (2) cos.
- $\cos 10^\circ + \cos 110^\circ + \cos 130^\circ = 0 \dots \dots \dots 600$
- $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0 \dots \dots \dots 598$
- $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ = 0 \dots \dots \dots 599$
- $\cos(45^\circ + A) + \cos(45^\circ - A) = \sqrt{2} \cos A \dots \dots 750$
- $\cos(60^\circ + A) + \cos(60^\circ - A) = \cos A \dots \dots \dots 751$
- $\cos A + \cos(120^\circ + A) + \cos(120^\circ - A) = 0 \dots \dots 752$
- $\cos A + \cos(120^\circ - A) + \cos(120^\circ + A) = 0 \dots \dots 557$
- $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 \dots \dots \dots 650$
- $1 + \cos 2A = 2 \cos^2 A \dots \dots \dots 651$
- $2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B) \dots \dots \dots 831$
- $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B \dots \dots \dots 748$

- $\cos^2 A + \cos^2(60^\circ + A) + \cos^2(60^\circ - A) = \frac{3}{2}$ 674
- $1 + \cos 3a \cos 5a = \cos^2 4a + \cos^2 a$ 596
- $\cos^2 A + \cos^2(120^\circ + A) + \cos^2(120^\circ - A) = \frac{3}{2}$ 670
- $\cos(A+B) \cos(A-B) - \cos(B+C) \cos(B-C) + \cos(A+C)$
 $\times \cos(A-C) = \cos 2A$ 854
- $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$ 716
- $4 \cos A \cos(60^\circ - A) \cos(60^\circ + A) = \cos 3A$ 719
- $\cos^3 A + \cos^3(120^\circ + A) + \cos^3(120^\circ - A) = \frac{3}{4} \cos 3A$... 725
- $1 + \cos a + \cos 2a + \cos 3a = 2 \cos a (2 \cos^2 a + \cos a - 1)$
 718
- $\cos 2a + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + \cos 2(a + \beta + \gamma) = 4 \cos(a + \beta)$
 $\times \cos(\beta + \gamma) \cos(\gamma + a)$ 801
- $\cos(a + \beta + \gamma) + \cos(a + \beta - \gamma) + \cos(a + \gamma - \beta) + \cos(\beta + \gamma$
 $- a) = 4 \cos a \cos \beta \cos \gamma$ 828
- $\cos 2a \cos^2(\beta + \gamma) + \cos 2\beta \cos^2(\gamma + a) + \cos 2\gamma \cos^2(a + \beta)$
 $= \cos 2a \cos 2\beta \cos 2\gamma + 2 \cos(\beta + \gamma) \cos(\gamma + a) \cos(a + \beta)$
 829
- $\cos 4A = 8 \cos^4 A - 8 \cos^2 A + 1$ 737
- $8 \cos^4 a = \cos 4a + 4 \cos 2a + 3$ 844
- $\cos 10A + \cos 8A + 3 \cos 4A + 3 \cos 2A = 8 \cos A \cos^3 3A$...
 795
- $\cos 5a = 16 \cos^5 a - 20 \cos^3 a + 5 \cos a$ 738
- $16 \cos^5 a = \cos 5a + 5 \cos 3a + 10 \cos a$ 845
- $\cos 6a = -(1 - 18 \cos^2 a + 48 \cos^4 a - 32 \cos^6 a)$... 739
- $32 \cos^6 a = \cos 6a + 6 \cos 4a + 15 \cos 2a + 10$... 846
- $16(\cos^6 A - \sin^6 A) = \cos 6A + 15 \cos 2A$ 1049
- $\cos 7a = -7 \cos a + 56 \cos^3 a - 112 \cos^5 a + 64 \cos^7 a$...
 740
- $64 \cos^7 a = \cos 7a + 7 \cos 5a + 21 \cos 3a + 35 \cos a$ 847
- $128 \cos^8 a = \cos 8a + 8 \cos 6a + 28 \cos 4a + 56 \cos 2a + 35$
 848
- $\cos a \cos(\frac{2}{3}\pi + a) \cos(\frac{2}{3}\pi - a) = \frac{1}{4} \cos 3a$ 3014
- $\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$ 754
- $\cos A \cos B = \cos^2 \frac{A+B}{2} + \cos^2 \frac{A-B}{2} - 1$ 588
- $\cos 2a = 2 \cos(\frac{\pi}{4} - a) \cos(\frac{\pi}{4} + a)$.. . 676
- $\cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{2} = 2 \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$ 760

- $(x - 2 \cos^2 \frac{\pi}{4})(x - 2 \cos^2 \frac{\pi}{3})(x - 2 \cos^2 \frac{\pi}{6}) = x^3 + x^2 - 2x - 1$
 933
- $\cos(x - y) + \cos(y - z) + \cos(z - x) + 1 = 4 \cos \frac{x - y}{2} \cos \frac{y - z}{2}$
 $\times \cos \frac{z - x}{2}$ 822
- 求 $(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2})(\cos \frac{\alpha}{2^2} + \cos \frac{\beta}{2^2}) \dots (\cos \frac{\alpha}{2^n} + \cos \frac{\beta}{2^n})$
 之積 1077
- $\cos \theta \cos(\frac{2\pi}{3} + \theta) + \cos \theta \cos(\frac{2\pi}{3} - \theta) + \cos(\frac{2\pi}{3} + \theta)$
 $\times \cos(\frac{2\pi}{3} - \theta) = -\frac{3}{4}$ 988
- $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$ 800
- $\cos 11A + 3 \cos 9A + 3 \cos 7A + \cos 5A = 16 \cos^3 A \cos(4A + \frac{\pi}{4}) \cos(4A - \frac{\pi}{4})$ 1127
- $(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2})(\cos \frac{\alpha}{2^2} + \cos \frac{\beta}{2^2}) \dots (\cos \frac{\alpha}{2^n} + \cos \frac{\beta}{2^n})$
 $= \frac{1}{2^n} \left\{ (\cos \alpha - \cos \beta) / (\cos \frac{\alpha}{2^n} - \cos \frac{\beta}{2^n}) \right\}$... 1113
- $\cos 2(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(2\alpha + \beta + \gamma) + \cos(2\beta + \gamma + \alpha) + \cos(2\gamma + \alpha + \beta) + \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) + \cos(\alpha + \beta) = 8 \cos(\alpha + \beta + \gamma) \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - 1$ 830
- $\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$ 215, 888
- $(2 \cos \theta - 1)(2 \cos 2\theta - 1)(2 \cos 2^2\theta - 1) \dots (2 \cos 2^{n-1}\theta - 1)$
 $= \frac{2 \cos 2^n\theta + 1}{2 \cos \theta + 1}$ 1070
- $(2 \cos \theta - 1)(2 \cos 2\theta - 1)(2 \cos 2^2\theta - 1) \dots (2 \cos 2^{n-1}\theta - 1)$
 $= \frac{2 \cos 2^n\theta + 1}{2 \cos \theta + 1}$ 1114
- $\frac{\cos 3A}{\cos A} - \frac{\cos 6A}{\cos 2A} + \frac{\cos 9A}{\cos 3A} - \frac{\cos 18A}{\cos 6A} = 2(\cos 2A - \cos 4A + \cos 6A - \cos 12A)$ 729
- $2 \cos \theta = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + 2 \cos 2^n\theta}}}}$. 但根號之數為 n 個 1116

(3) tan.

- $\tan(45^\circ + A) - \tan(45^\circ - A) = 2 \tan 2A \dots \dots \dots$ **706**
- $\tan A + \tan(60^\circ + A) + \tan(120^\circ + A) = 3 \tan 3A \dots$ **733**
- $\tan 3\theta - \tan 2\theta - \tan \theta = \tan 3\theta \tan 2\theta \tan \theta \dots$ **621**
- $\tan 2A \tan 3A \tan 5A = \tan 5A - \tan 3A - \tan 2A$ **622**
- $\tan(p+q)A - \tan pA - \tan qA = \tan(p+q)A \tan pA \tan qA$
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **623**
- $\tan A \tan(60^\circ + A) \tan(120^\circ + A) = -\tan 3A \dots$ **720**
- $\tan \theta + \tan\left(\frac{\pi}{5} + \theta\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{5} + \theta\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{5} + \theta\right)$
 $+ \tan\left(\frac{4\pi}{5} + \theta\right) = 5 \tan 5\theta \dots \dots \dots$ **745**
- $\tan(45^\circ \pm A) = \frac{1 \pm \tan A}{1 \mp \tan A} \dots \dots \dots$ **630**
- $\tan(A + 45^\circ) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}, \tan(A - 45^\circ) = \frac{\tan A - 1}{\tan A + 1}$ **629**
- $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \dots \dots \dots$ **703**
- $\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} \dots \dots \dots$ **731**
- $\frac{\tan 4A - \tan 3A}{1 + \tan 4A \tan 3A} = \tan A \dots \dots \dots$ **626**
- $\frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha - \beta) \tan \beta} = \tan \alpha \dots \dots \dots$ **619**
- $\frac{\tan(n+1)A - \tan nA}{1 + \tan(n+1)A \tan nA} = \tan A \dots \dots \dots$ **627**
- $\tan(A - B) = (\tan A - \tan B) / (1 + \tan A \tan B) \dots$ **624**
- $\tan(A + B + C) = (\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C)$
 $/ (1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A) \dots$ **636**
- $\frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^4 x} = \frac{\tan^2 2x}{2 + \tan^2 2x} \dots \dots \dots$ **3010**
- $\tan(A + B) = (\tan A + \tan B) / (1 - \tan A \tan B) \dots$ **613**
- $\frac{\tan(n+1)A + \tan(1-n)A}{1 - \tan(n+1)A \tan(1-n)A} = \tan 2A \dots \dots \dots$ **620**
- $\tan 4A = (4 \tan A - 4 \tan^3 A) / (1 - 6 \tan^2 A + \tan^4 A)$ **703**
- $\tan \frac{A}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A} \dots \dots \dots$ **904**

(4) cot.

- $\cot A + \cot(60^\circ + A) + \cot(120^\circ + A) = 3 \cot 3A \dots$ **735**

- $\cot A \cot(60^\circ + A) + \cot(60^\circ + A) \cot(120^\circ + A) + \cot(120^\circ + A) \cot A = -3$ 786
- $\cot(45^\circ \pm A) = \frac{\cot A \mp 1}{\cot A \pm 1}$ 633
- $\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$ 708
- $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3 \cot A}{3 \cot^2 A - 1}$ 734
- $\cot(A + B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$ 631
- $\cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$ 632
- 連分數 $2 \cot \theta + \frac{1}{2 \cot \theta + \frac{1}{2 \cot \theta + \dots}}$ 等於 $\cot \frac{\theta}{2}$ 1111
- $\cot(A + B + C) = (\cot A \cot B \cot C - \cot A - \cot B - \cot C) / (\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot A \cot C - 1)$... 637

(5) sec. 或 cosec.

- $\sec^2 A (1 + \sec 2A) = 2 \sec 2A$ 1025
- $\sec A + \sec(120^\circ + A) + \sec(240^\circ + A) = -3 \sec 3A$... 728
- $\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec}(120^\circ + A) + \operatorname{cosec}(240^\circ + A) = 3 \operatorname{cosec} 3A$ 753

(6) sin. cos.

- $\cos(A + 45^\circ) + \sin(A - 45^\circ) = 0$ 547
- $\cos(45^\circ - A) - \sin(45^\circ + A) = 0$ 546
- $\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta + \sin \theta)$ 548
- $\cos(A + 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A - \sin A)$ 543
- $\sin(45^\circ + A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A + \sin A)$ 542
- $2 \sin(30^\circ - A) = \cos A - \sqrt{3} \sin A$ 540
- $\cos(A - 30^\circ) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \cos A + \sin A)$ 541
- $\cos A - \sin A = \sqrt{2} \cos(45^\circ + A) = \sqrt{2} \sin(45^\circ - A)$ 544
- $\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos(45^\circ - A) = \sqrt{2} \sin(45^\circ + A)$ 545
- $\cos A = \sin(54^\circ + A) + \sin(54^\circ - A) - \sin(18^\circ + A) - \sin(18^\circ - A)$ 799

- $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$ 650
- $1 - \cos 2A = 2 \sin^2 A$ 651
- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ 650
- $\sin(a + \beta) \sin(a - \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 a$ 585
- $\cos(n+1)a \cos(n-1)a + \sin^2 a = \cos^2 na$ 595
- $\cos nA \cos(n+2)A - \cos^2(n+1)A + \sin^2 A = 0$... 558
- $\cos^2(a + \beta) - \sin^2(a - \beta) = \cos 2a \cos 2\beta$ 592
- $\cos(a + \beta) \cos(a - \beta) = \cos^2 a - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 a$...
... .. 586
- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$, $\cos(A \pm B) = \cos A$
 $\times \cos B \mp \sin A \sin B$ 527
- $2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$ 831
- $2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$ 831
- $2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$ 831
- $\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$ 748
- $\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$ 748
- $\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \sin A \sin B$ 748
- $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ 644
- $\sin 7A - \sin 2A = 2 \cos 6A \sin A$ 758
- $3 \sin A - \sin 3A = 2 \sin A(1 - \cos 2A)$ 713
- $\sin(a + \beta) \cos \beta - \sin(a + \gamma) \cos \gamma = \sin(\beta - \gamma) \cos(a + \beta + \gamma)$
... .. 3007
- $\cos(n-1)A \cos(n+1)A - \sin(n-1)A \sin(n+1)A = \cos 2nA$
... .. 539
- $\cos(n-1)A \cos A - \sin(n-1)A \sin A = \cos nA$... 538
- $\sin A \cos(B + C) - \sin B \cos(A + C) = \sin(A - B) \cos C$...
... .. 549
- $2 \sin 2a \cos a + 2 \cos 4a \sin a = \sin 5a + \sin a$... 851
- $\cos(a + \beta) \sin \beta - \cos(a + \gamma) \sin \gamma = \sin(a + \beta) \cos \beta - \sin(a$
 $+ \gamma) \cos \gamma$ 1135
- $\sin 3(a - 15^\circ) = 4 \cos(a - 45^\circ) \cos(a + 15^\circ) \sin(a - 15^\circ)$...
... .. 934
- $\sin 5a + \cos 5a = (\sin a + \cos a)(2 \cos 4a + 2 \sin 2a - 1)$
... .. 742
- $\sin 5a - \cos 5a = (\sin a - \cos a)(2 \cos 4a - 2 \sin 2a - 1)$
... .. 743
- $\sin nA \cos A + \cos nA \sin A = \sin(n+1)A$ 537
- $\sin(a + \beta) + \cos(a - \beta) = (\sin a + \cos a)(\sin \beta + \cos \beta)$...
... .. 563

- $\sin 3\theta - \sin \theta - \sin 5\theta = \sin 3\theta(1 - 2 \cos 2\theta) \dots$ **796**
- $\sin(\beta - \gamma)\cos(\alpha - \delta) + \sin(\gamma - \alpha)\cos(\beta - \delta) + \sin(\alpha - \beta) \times \cos(\gamma - \delta) = 0 \dots \dots \dots$ **853**
- $\cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + \cos(\beta + \gamma)\sin(\beta - \gamma) + \cos(\gamma + \delta) \times \sin(\gamma - \delta) + \cos(\delta + \alpha)\sin(\delta - \alpha) = 0 \dots \dots$ **1139**
- $\sin(\alpha + \beta - 2\gamma)\cos \beta - \sin(\alpha + \gamma - 2\beta)\cos \gamma = \sin(\beta - \gamma) \times \{ \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\alpha + \gamma - \beta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) \} \dots$
 $\dots \dots \dots$ **1136**
- $(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \{ \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma - \cos(\beta + \gamma) - \cos(\gamma + \alpha) - \cos(\alpha + \beta) \} - (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \{ \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma - \sin(\beta + \gamma) - \sin(\gamma + \alpha) - \sin(\alpha + \beta) \} = \cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma - 3 \cos(\alpha + \beta + \gamma) \dots$ **746**
- $(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \{ \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma - \cos(\beta + \gamma) - \cos(\gamma + \alpha) - \cos(\alpha + \beta) \} + (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \{ \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma - \sin(\beta + \gamma) - \sin(\gamma + \alpha) - \sin(\alpha + \beta) \} = \sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma - 3 \sin(\alpha + \beta + \gamma) \dots$ **747**
- $\cos^3 A - \sin^3 A = \sqrt{2} \cos(45^\circ + A)(1 + \sin A \cos A) \dots$ **804**
- $\sin^2(A - B) + \sin^2 B + 2 \sin(A - B)\sin B \cos A = \sin^2 A \dots$
 $\dots \dots \dots$ **556**
- $\cos^2(\alpha - \beta) + \cos^2 \beta - 2 \cos(\alpha - \beta)\cos \alpha \cos \beta = \sin^2 \alpha \dots$
 $\dots \dots \dots$ **865**
- $\sin^2(\alpha - \beta) + \sin^2 \beta + 2 \sin(\alpha - \beta)\sin \beta \cos \alpha = \sin^2 \alpha \dots$
 $\dots \dots \dots$ **864**
- $\cos^2(A - B) + \cos^2 B - 2 \cos(A - B)\cos A \cos B = \sin^2 A \dots$
 $\dots \dots \dots$ **555**
- $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha = 4 \sin 5\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha \dots$
 $\dots \dots \dots$ **797**
- $4 \sin(\theta - \alpha)\sin(m\theta - \alpha)\cos(\theta - m\theta) = 1 + \cos(2\theta - 2m\theta) - \cos(2\theta - 2\alpha) - \cos(2m\theta - 2\alpha) \dots \dots \dots$ **1134**
- $\sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta - \gamma) = 4 \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \dots \dots \dots$ **821**
- $\sin(A + B + C) = \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \times \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C \dots \dots \dots$ **560**
- $\cos(A + B + C) = \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C - \sin A \times \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C \dots \dots \dots$ **561**
- $\sin \alpha \sin(\beta - \gamma)\cos(\beta + \gamma - \alpha) + \sin \beta \sin(\gamma - \alpha)\cos(\gamma + \alpha - \beta) + \sin \gamma \sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta - \gamma) = 0 \dots \dots$ **871**
- $\sin \alpha \sin(\beta - \gamma)\cos(\beta + \gamma - \alpha) + \sin \beta \sin(\gamma - \alpha)\cos(\gamma + \alpha - \beta) + \sin \gamma \sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta - \gamma) = 0 \dots \dots$ **1141**

- $\cos \beta \cos \gamma \sin(\gamma - \beta) + \cos \gamma \cos \alpha \sin(\alpha - \gamma) + \cos \alpha \cos \beta \times \sin(\beta - \alpha) = \sin(\alpha - \beta)\sin(\beta - \gamma)\sin(\gamma - \alpha) \dots$ **1144**
- $8 \sin^4 a = \cos 4a - 4 \cos 2a + 3 \dots \dots \dots$ **839**
- $\sin 4A = \cos A(4 \sin A - 8 \sin^3 A) \dots \dots \dots$ **737**
- $\sin 3A \sin^3 A + \cos 3A \cos^3 A = \cos^3 2A \dots \dots \dots$ **726**
- $\sin 4A = 4 \sin A \cos^3 A - 4 \cos A \sin^3 A \dots \dots \dots$ **659**
- $2 \sin 7A \cos A + 16 \sin A \cos^3 A = \sin 6A + 4 \sin 2A(1 + 2 \times \cos^2 2A) \dots \dots \dots$ **1124**
- $\cos^2 2A = (\cos A - \sin 3A)^2 + 2 \cos A \sin 3A(\cos A - \sin A)^2 \dots \dots \dots$ **559**
- $2 \sin^2 A \sin^2 B + 2 \cos^2 A \cos^2 B = 1 + \cos 2A \cos 2B \dots$ **675**
- $2 \cos^2 a \cos^2 \beta - 2 \sin^2 a \sin^2 \beta = \cos 2a + \cos 2\beta \dots$ **852**
- $2 \sin^2 A \sin^2 B + 2 \cos^2 A \cos^2 B = 1 + \cos 2A \cos 2B$ **672**
- $\cos^3 A \cdot \frac{\sin 3A}{3} + \sin^3 A \cdot \frac{\cos 3A}{3} = \frac{\sin 4A}{4} \dots \dots$ **727**
- $\cos 3a \sin(\beta - \gamma) + \cos 3\beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin 3\gamma \sin(\alpha - \beta) = 4 \sin(\alpha - \beta)\sin(\beta - \gamma)\sin(\gamma - \alpha)\cos(\alpha + \beta + \gamma) \dots$ **876**
- $\cos(\alpha + \beta + \gamma) \cos(\alpha + \beta - \gamma) \cos(\beta + \gamma - \alpha) \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma)\sin(\alpha + \beta - \gamma)\sin(\beta + \gamma - \alpha)\sin(\gamma + \alpha - \beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma \dots \dots \dots$ **874**
- $\sin^6 A + \cos^6 A = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2A \dots \dots \dots$ **663**
- $-32 \sin^6 a = \cos 6a - 6 \cos 4a + 15 \cos 2a - 10 \dots$ **841**
- $\cos^6 A - \sin^6 A = \cos 2A(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2A) = \frac{1}{8} \cos 2A(7 + \cos 4A) \dots \dots \dots$ **664**
- $8(\cos^6 A + \sin^6 A) = 5 + 3 \cos 4A \dots \dots \dots$ **1048**
- $\sin 6a = 2 \sin a(16 \cos^5 a - 16 \cos^3 a + 3 \cos a) \dots$ **739**
- $\sin A \cos^5 A - \cos A \sin^5 A = \frac{1}{4} \sin 4A \dots \dots \dots$ **1041**
- $\sin^3 A \cos^3 A = \frac{1}{3} \frac{1}{2} (3 \sin 2A - \sin 6A) \dots \dots \dots$ **1039**
- $\sin^4 A \cos^3 A = \frac{1}{26} (\cos 7A - \cos 5A - 3 \cos 3A + 3 \cos A) \dots \dots \dots$ **1163**
- $64(\cos^8 a + \sin^8 a) = \cos 8a + 28 \cos 4a + 35 \dots \dots$ **665**
- $\cos^8 a - \sin^8 a = \cos 2a(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a) = \frac{1}{8} (\cos 6a + 7 \cos 2a) \dots \dots \dots$ **666**
- $128 \sin^8 a = \cos 8a - 8 \cos 6a + 28 \cos 4a - 56 \cos 2a + 35 \dots \dots \dots$ **843**
- $\cos 9a + \cos 7a - 4(\cos 5a + \cos 3a) + 6 \cos a = 256 \sin^4 a \times \cos^5 a \dots \dots \dots$ **816**
- $\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \dots \dots \dots$ **754**

- $\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$ 754
- $1 \pm \sin A = \left(\cos \frac{A}{2} \pm \sin \frac{A}{2} \right)^2$ 647
- $\cos A - \cos 2A = 2 \sin \frac{3A}{2} \sin \frac{A}{2}$ 761
- $\cos A - \cos 2A = 6 \sin^2 \frac{A}{2} - 8 \sin^4 \frac{A}{2}$ 1040
- $\sin \theta \sin \phi = \cos^2 \frac{\theta - \phi}{2} - \cos^2 \frac{\theta + \phi}{2}$ 593
- $\cos \theta \cos \phi = \cos^2 \frac{\theta + \phi}{2} - \sin^2 \frac{\theta - \phi}{2}$ 594
- $\sin \frac{A}{2} (1 + 2 \cos A + \cos 2A) = \sin 2A \cos \frac{A}{2}$ 692
- $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$... 566
- $\cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$ 764
- $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$... 565
- $\cos^2 \frac{A}{2} (1 - 2 \cos A)^2 + \sin^2 \frac{A}{2} (1 + 2 \cos A)^2 = 1$... 1054
- $(\cos \theta + \sin \theta)(\cos 2\theta + \sin 2\theta) = \cos \theta + \cos\left(3\theta - \frac{\pi}{2}\right)$...
... .. 1132
- $\sin \theta \cos \frac{1}{2}\theta = 8 \sin \frac{1}{2}\theta \sin^2 \frac{1}{4}(\pi - \theta) \sin^2 \frac{1}{4}(\pi + \theta)$ 1055
- $\sin \theta - 3 \sin(\theta + \alpha) + 3 \sin(\theta + 2\alpha) - \sin(\theta + 3\alpha) = 8 \sin^3 \frac{\alpha}{2}$
 $\times \cos\left(\theta + \frac{3\alpha}{2}\right)$ 825
- $\sin \theta = 2^n \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^2} \cdot \cos \frac{\theta}{2^3} \dots \cos \frac{\theta}{2^{n-1}} \cdot \cos \frac{\theta}{2^n} \sin \frac{\theta}{2^n}$
... .. 1115
- $\sin^2 \frac{A+B}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2} + \cos^2 \frac{A+B}{2} \sin^2 \frac{A-B}{2} = 1 - \frac{1}{2} \cos^2 A - \frac{1}{2}$
 $\times \cos^2 B$ 1052
- $\sin \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right\} \cos \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right\}$
 $= 2 \sin \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right\} \sin \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right\}$... 765
- $\cos \beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma - \delta}{2} + \cos \gamma \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\delta - \beta}{2} + \cos \delta$

- $\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 + \sin \theta} \quad \dots \dots \dots 1053$
- $\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad \dots \dots \dots 888$
- $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad \dots \dots \dots 215$
- $\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A} \} \quad \dots \dots 892$

(7) sin. tan.

- $(\sin 2A - \sin 2B) \tan(A+B) = 2(\sin^2 A - \sin^2 B) \quad \dots 812$
- $\sin 4a \tan^4 a + 4 \tan^3 a + 2 \sin 4a \tan^2 a - 4 \tan a + \sin 4a = 0 \quad \dots \dots \dots 667$
- $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \quad \dots \dots \dots 691$
- $\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A} = \tan^2 \left(45^\circ \pm \frac{A}{2} \right) \quad \dots \dots \dots 648$
- $\frac{1 - \tan^2(45^\circ - A)}{1 + \tan^2(45^\circ - A)} = \sin 2A \quad \dots \dots \dots 661$
- $\frac{4 \tan A (1 - \tan^2 A)}{(1 + \tan^2 A)^2} = \sin 4A \quad \dots \dots \dots 662$
- $\frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B} = \frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} \quad \dots \dots \dots 576$
- $\frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{\sin(A+B) - \sin(A-B)} = \frac{\tan A}{\tan B} \quad \dots \dots \dots 574$
- $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \tan \frac{A+B}{2} / \tan \frac{A-B}{2} \quad \dots \dots \dots 771$

(8) sin. cot.

- $\cot B \pm \cot A = \frac{\sin(A \pm B)}{\sin A \sin B} \quad \dots \dots \dots 570$
- $\frac{\cot \theta + \cot \phi}{\cot \theta - \cot \phi} = -\frac{\sin(\theta + \phi)}{\sin(\theta - \phi)} \quad \dots \dots \dots 580$
- $\frac{\cos(A+B+C)}{\sin A \sin B \sin C} = \cot A \cot B \cot C - \cot A - \cot B - \cot C$
 $\dots \dots \dots 562$
- $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1 + \frac{\sin(A+B+C)}{\sin A \sin B \sin C}$
 $\dots \dots \dots 985$

(9) sin. sec.

● $\frac{\sec \theta - 1}{\sec \theta} = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta \dots \dots \dots 681$

(10) cos. tan.

● $\frac{\tan \theta \tan \phi + 1}{1 - \tan \theta \tan \phi} = \frac{\cos(\theta - \phi)}{\cos(\theta + \phi)} \dots \dots \dots 578$

● $\frac{\tan 5A + \tan 3A}{\tan 5A - \tan 3A} = 4 \cos 2A \cos 4A \dots \dots \dots 1038$

● $\frac{\cos A + \cos B}{\cos B - \cos A} = \cot \frac{A+B}{2} \cot \frac{A-B}{2} \dots \dots \dots 772$

● $\tan(a + 60^\circ) \tan(a - 60^\circ) = \frac{1 + 2 \cos 2a}{1 - 2 \cos 2a} \dots \dots \dots 1099$

● $\tan(30^\circ + \frac{1}{2}a) \tan(30^\circ - \frac{1}{2}a) = \frac{2 \cos a - 1}{2 \cos a + 1} \dots \dots \dots 656$

(11) cos. cot.

● $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \dots \dots \dots 699$

● $\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A \dots \dots \dots 685$

● $\frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{\cos(A-B) - \cos(A+B)} = \cot A \cot B \dots \dots \dots 575$

● $\tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B$
 $= 1 - \frac{\cos(A+B+C)}{\cos A \cos B \cos C} \dots \dots \dots 987$

(12) tan. cot.

● $\tan A - \cot A = -2 \cot 2A \dots \dots \dots 709$

● $2 \cot a = \cot \frac{1}{2}a - \tan \frac{1}{2}a \dots \dots \dots 710$

● $\tan A + 2 \tan 2A + 4 \cot 4A = \cot A \dots \dots \dots 1050$

● $\tan A + 2 \tan 2A + 4 \tan 4A + 8 \cot 8A = \cot A \dots \dots \dots 1078$

● $\tan a + 2 \tan 2a + 4 \tan 4a = \cot a - 8 \cot 8a \dots \dots \dots 707$

● $\frac{1 - \cot \gamma \tan \delta}{\cot \gamma + \tan \delta} = \tan(\gamma - \delta) \dots \dots \dots 582$

● $\frac{1 + \cot \gamma \tan \delta}{\cot \gamma - \tan \delta} = \tan(\gamma + \delta) \dots \dots \dots 581$

● $\frac{1 + \tan 2A \tan A}{\tan A + \cot A} = \frac{1}{2} \tan 2A \dots \dots \dots 1045$

$$\bullet \frac{1}{\tan 3A - \tan A} + \frac{1}{\cot A - \cot 3A} = \cot 2A \quad \dots \dots 584$$

(13) tan. sec.

$$\bullet 1 + \tan a \tan \frac{a}{2} = \sec a \dots \dots \dots 583$$

$$\bullet \tan(45^\circ + A) + \tan(45^\circ - A) = 2 \sec 2A \quad \dots \dots 1029$$

$$\bullet \sec A \pm \tan A = \tan(45^\circ \pm \frac{1}{2}A) \quad \dots \dots \dots 1028$$

$$\bullet \frac{\sec 8A - 1}{\sec 4A - 1} = \frac{\tan 8A}{\tan 2A} \quad \dots \dots \dots 1037$$

$$\bullet (1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 4\theta)(1 + \sec 8\theta)\dots\dots(1 + \sec 2^n\theta) \\ = \frac{\tan 2^n\theta}{\tan \theta} \quad \dots \dots \dots 1074$$

(14) tan. cosec.

$$\bullet \frac{\operatorname{cosec} 2A}{1 + \operatorname{cosec} 2A} = \frac{1 + \tan^2 A}{(1 + \tan A)^2} \quad \dots \dots \dots 1043$$

$$\bullet \tan^2(45^\circ + \frac{1}{2}A) = \frac{\operatorname{cosec} A + 1}{\operatorname{cosec} A - 1} \quad \dots \dots \dots 1030$$

$$\bullet \tan \frac{1}{2}(a + \beta) \tan \frac{1}{2}(a - \beta) = \frac{\operatorname{cosec} 2a \operatorname{cosec} \beta - \operatorname{cosec} 2\beta \operatorname{cosec} a}{\operatorname{cosec} 2a \operatorname{cosec} \beta + \operatorname{cosec} 2\beta \operatorname{cosec} a} \\ \dots \dots \dots 882$$

(15) cot. sec.

$$\bullet \frac{\cot^2 A + 1}{\cot^2 A - 1} = \sec 2A \quad \dots \dots \dots 684$$

$$\bullet \sec^2 \frac{1}{2}A \sec A \frac{\cot^2 \frac{1}{2}A - \cot^2 \frac{3}{2}A}{1 + \cot^2 \frac{1}{2}A} = 8 \dots \dots \dots 1071$$

$$\bullet \sec^2 \frac{1}{2}a \sec a (\cot^2 \frac{1}{2}a - \cot^2 \frac{3}{2}a) = 8(1 + \cot^2 \frac{3}{2}a) \quad \dots 1101$$

(16) cot. cosec.

$$\bullet \cot \frac{a}{2} - \cot a = \operatorname{cosec} a \quad \dots \dots \dots 572$$

$$\bullet \operatorname{cosec} A + \cot A = \cot \frac{A}{2} \quad \dots \dots \dots 683$$

$$\bullet \operatorname{cosec} 2A = \frac{\cot^2 A + 1}{2 \cot A} \quad \dots \dots \dots 696$$

$$\bullet \operatorname{cosec} 2A + \cot 4A = \cot A - \operatorname{cosec} 4A \quad \dots \dots \dots 660$$

$$\bullet \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} 2a \operatorname{cosec} 3a = 2 \cot a \operatorname{cosec} 3a \\ = \operatorname{cosec} a (\cot a - \cot 3a) \quad \dots \dots \dots 802$$

(17) sin. cos. tan.

- $(3 - 4 \sin^2 A)(1 - 3 \tan^2 A) = (3 - \tan^2 A)(4 \cos^2 A - 3)$... **3006**
- $\{\tan(A + B) + \tan(A - B)\}(\cos 2A + \cos 2B) = 2 \sin 2A$... **1133**
- $\tan(a + \beta + \gamma) = \{\sin 3a \sin(\beta - \gamma) + \sin 3\beta \sin(\gamma - a) + \sin 3\gamma \sin(a - \beta)\} / \{\cos 3a \sin(\beta - \gamma) + \cos 3\beta \sin(\gamma - a) + \cos 3\gamma \sin(a - \beta)\}$... **877**
- $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$... **688**
- $\frac{3 \sin A + \sin 3A}{\cos 3A + 3 \cos A} = \tan^3 A$... **721**
- $\frac{\sin a - \sin \beta}{\cos a + \cos \beta} = \tan \frac{a - \beta}{2}$... **778**
- $\frac{\sin 2\theta + \sin \theta}{\cos \theta + \cos 2\theta} = \tan \frac{3\theta}{2}$... **775**
- $\frac{1 - \cos A}{\sin A} = \tan \frac{1}{2} A$... **678**
- $\frac{\cos 2A - \cos 4A}{\sin 4A - \sin 2A} = \tan 3A$... **792**
- $\frac{\cos A - \cos 3A}{\sin 3A - \sin A} = \tan 2A$... **791**
- $\tan(A + 45^\circ) = \frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A}$, $\tan(A - 45^\circ) = \frac{\sin A - \cos A}{\sin A + \cos A}$... **629 注意**
- $\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$... **214**
- $\frac{1 + \sin A}{1 + \cos A} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan \frac{A}{2}\right)^2$... **677**
- $\tan \frac{A}{2} = \frac{1 + \sin A - \cos A}{1 + \sin A + \cos A}$... **658**
- $\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1 + \tan \frac{1}{2} \theta}{1 - \tan \frac{1}{2} \theta}$... **680**
- $\frac{\sin A + \sin 3A + \sin 5A}{\cos A + \cos 3A + \cos 5A} = \tan 3A$... **793**
- $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{A + B}{2}$... **774**
- $\frac{\cos B - \cos A}{\sin A - \sin B} = \tan \frac{A + B}{2}$... **776**
- $\frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = \tan \frac{B - A}{2}$... **779**

- $\tan(A+B) = \frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2A - \sin 2B} \dots \dots \dots 777$
- $\frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)} = \tan A \dots \dots \dots 573$
- $\tan \frac{A+B}{2} - \tan \frac{A-B}{2} = \frac{2 \sin B}{\cos A + \sin B} \dots \dots \dots 856$
- $\frac{\sin A + \sin 4A + \sin 7A}{\cos A + \cos 4A + \cos 7A} = \tan 4A \dots \dots \dots 807$
- $\frac{\sin A \pm \sin nA + \sin(2n-1)A}{\cos A \pm \cos nA + \cos(2n-1)A} = \tan nA \dots \dots \dots 794$
- $\frac{\cos(\theta - 3\phi) - \cos(3\theta + \phi)}{\sin(3\theta + \phi) + \sin(\theta - 3\phi)} = \tan(\theta + 2\phi) \dots \dots \dots 780$
- $\frac{\sin 3A + \cos 3A}{\sin 3A - \cos 3A} = \frac{1 + 2 \sin 2A}{1 - 2 \sin 2A} \cdot \tan(A - 45^\circ) \dots \dots \dots 724$
- $\frac{\cos 3A + 2 \cos 5A + \cos 7A}{\cos A + 2 \cos 3A + \cos 5A} = \cos 2A - \sin 2A \tan 3A \dots \dots \dots 808$
- $\frac{1}{\cos \frac{2}{7}\pi + \cos 2\phi} + \frac{1}{\cos \frac{4}{7}\pi + \cos 2\phi} + \frac{1}{\cos \frac{6}{7}\pi + \cos 2\phi} = \frac{7 \tan 7\phi - \tan \phi}{2 \sin 2\phi} \dots \dots \dots 881$
- $\tan(a + \beta) \tan(a - \beta) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 \beta}{\cos^2 a - \sin^2 \beta} \dots \dots \dots 590$
- $\tan A \pm \tan B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B} \dots \dots \dots 568$
- $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} \cdot \frac{\cos A}{1 + \cos A} = \tan \frac{A}{2} \dots \dots \dots 689$
- $\tan(a + \beta) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 \beta}{\sin a \cos a - \sin \beta \cos \beta} = \frac{\sin a \cos a + \sin \beta \cos \beta}{\cos^2 a - \sin^2 \beta} \dots \dots \dots 857$
- $\frac{\sin \beta \cos a (\tan a + \tan \beta)}{1 - \cos(a + \beta)} + \sin \frac{1}{2}(a - \beta) / \cos \beta \sin \frac{1}{2}(a + \beta) = 1 \dots \dots \dots 1057$
- $\frac{\sin 5\theta - \cos 5\theta}{\sin 5\theta + \cos 5\theta} = \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \frac{1 - 2 \sin 2\theta - 4 \sin^2 2\theta}{1 + 2 \sin 2\theta - 4 \sin^2 2\theta} \dots \dots \dots 744$
- $\frac{\sin(a + \beta + \gamma)}{\cos a \cos \beta \cos \gamma} = \tan a + \tan \beta + \tan \gamma - \tan a \tan \beta \tan \gamma \dots \dots \dots 995$
- $\tan^2 a - \tan^2 \beta = \frac{\sin(a + \beta) \sin(a - \beta)}{\cos^2 a \cos^2 \beta} \dots \dots \dots 589$

(18) sin. cos. cot.

- $\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A \dots \dots \dots 688$

- $\frac{1 + \cos A}{\sin A} = \cot \frac{1}{2}A \dots \dots \dots 679$
- $\frac{\sin a + \sin \beta}{\cos \beta - \cos a} = \cot \frac{a - \beta}{2} \dots \dots \dots 785$
- $\frac{\sin 3\theta + \sin 2\theta}{\cos 3\theta - \cos 2\theta} = -\cot \frac{\theta}{2} \dots \dots \dots 786$
- $\frac{\sin 2\theta - \sin \theta}{\cos \theta - \cos 2\theta} = \cot \frac{3\theta}{2} \dots \dots \dots 784$
- $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \beta} = \frac{\cot \frac{1}{2}\theta + 1}{\cot \frac{1}{2}\theta - 1} \dots \dots \dots 673$
- $\cot(A + B) = \frac{\cos 2A + \cos 2B}{\sin 2A + \sin 2B} \dots \dots \dots 782$
- $\frac{\cos A + \cos B}{\sin B - \sin A} = \cot \frac{B - A}{2} \dots \dots \dots 787$
- $\frac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \frac{A + B}{2} \dots \dots \dots 783$
- $\frac{\cos A + \cos B}{\sin A + \sin B} = \cot \frac{A + B}{2} \dots \dots \dots 781$
- $\frac{\sin^2 A + \cos 2A + \cos^2 A}{\sin 2A} = \cot A \dots \dots \dots 1036$
- $\frac{1 + \cos \theta + \cos \frac{1}{2}\theta}{\sin \theta + \sin \frac{1}{2}\theta} = \cot \frac{\theta}{2} \dots \dots \dots 657$
- $\frac{\cos 7\theta + \cos 3\theta - \cos 5\theta - \cos \theta}{\sin 7\theta - \sin 3\theta - \sin 5\theta + \sin \theta} = \cot 2\theta \dots \dots \dots 809$
- $\frac{\sin(A + 30^\circ) + \sin(B - 30^\circ)}{\cos A - \cos B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \frac{B - A}{2} + \frac{1}{2} \dots \dots \dots 805$

(19) 其他三角函數

- $\frac{\sin A + \sin 5A}{\sin 4A + \sin 2A} = 2 \cos A - \sec A \dots \dots \dots 1122$
- $\sin(2a + \beta) \operatorname{cosec} a - 2 \cos(a + \beta) = \sin \beta \operatorname{cosec} a \dots \dots \dots 604$
- $\operatorname{cosec} A = \frac{2 \sin 2A + 2 \cos 2A}{\cos A - \sin A - \cos 3A + \sin 3A} \dots \dots \dots 770$
- $\cot^2 A - \tan^2 A = \frac{4 \cot 2A}{\sin 2A} \dots \dots \dots 1034$
- $\tan A + \cot A = \frac{2}{\sin 2A} \dots \dots \dots 697$
- $\frac{2 \tan A - \sin 2A}{2 \cot A - \sin 2A} = \tan^4 A \dots \dots \dots 1044$
- $\frac{\tan A \cot B + 1}{\tan A \cot B - 1} = \frac{\sin(A + B)}{\sin(A - B)} \dots \dots \dots 577$

- $\frac{\sin 2A}{1 + \sin 2A} = \frac{2}{(1 + \tan A)(1 + \cot A)} \dots \dots \dots 690$
- $\frac{\sin \theta - \sin \phi}{\sin \theta + \sin \phi} = \cot\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) \dots \dots \dots 773$
- $\operatorname{cosec} A - \cot A = \tan \frac{A}{2} \dots \dots \dots 682$
- $\frac{1}{2} \tan A \operatorname{cosec}^2 \frac{A}{2} - \cot \frac{A}{2} = \tan A \dots \dots \dots 1032$
- $2 + \tan^2(A + 90^\circ) + \cot^2(A - 90^\circ) = 4 \operatorname{cosec}^2 2A \dots 1027$
- $\tan^2(45^\circ + \frac{1}{2}A) = \frac{2 \operatorname{cosec} 2A + \sec A}{2 \operatorname{cosec} 2A - \sec A} \dots \dots \dots 1031$
- $\{\sec A + \operatorname{cosec} A(1 + \sec A)\} \{1 - \tan^2 \frac{1}{2}A\} \{1 - \tan^2 \frac{1}{2}A\}$
 $= (\sec \frac{1}{2}A + \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A) \sec^2 \frac{A}{4} \dots \dots \dots 1072$
- $(\cot^2 A - \tan^2 A)(1 - \cos 4A) = 8 \cos 2A \dots \dots \dots 1042$
- $\tan^2 x + \cot^2 x = 2 \times \frac{3 + \cos 4x}{1 - \cos 4x} \dots \dots \dots 3011$
- $\frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A + B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A + B)} = \tan \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \dots 1151$
- $\sec 2A - \cos 2A = \frac{4 \tan^2 A}{1 - \tan^4 A} \dots \dots \dots 1035$
- $\frac{1}{a + b \cos \theta} = \frac{\sec^2 \frac{1}{2}\theta}{a + b + (a - b) \tan^2 \frac{1}{2}\theta} \dots \dots \dots 1087$
- $\cot A + \cot 2A + \cot 4A = \operatorname{cosec} 4A(2 + 2 \cos 2A + 3 \cos 4A)$
 $\dots \dots \dots 668$
- $(1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 4\theta)(1 + \sec 8\theta) \dots \dots (1 + \sec 2^n \theta)$
 $= \tan 2^n \theta \cot \theta \dots \dots \dots 1112$

(20) 四函數或 vers.

- $\tan \alpha + \cot \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta} \dots \dots \dots 569$
- $\cot(A + 15^\circ) - \tan(A - 15^\circ) = \frac{4 \cos 2A}{1 + 2 \sin 2A} \dots \dots 1120$
- $\tan \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} - \cot \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{2(\cos B - \cos A)}{\sin A \sin B} \dots 1152$
- $\cot A \pm \tan B = \frac{\cos(A \mp B)}{\sin A \cos B} \dots \dots \dots 571$
- $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \tan 2A + \sec 2A \dots \dots \dots 674$
- $\sin 3A \operatorname{cosec} A - \cos 3A \sec A = 2 \dots \dots \dots 722$
- $\{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + 3\beta)\} \sec 2\beta = (\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$

- × cosec(a - β) 866
- sin nA cosec²A sec A - cos nA sec²A cosec A = 4 sin(n-1)A
× cosec²2A 649
- $\frac{\tan \theta + \cot \phi}{\cot \phi - \tan \theta} = \cos(\theta - \phi) \sec(\theta + \phi)$ 579
- tan A + $\frac{1}{2}$ cos 2A sec A cosec A = cosec 2A 1026
- (cosec² $\frac{1}{2}\theta$ - sec² $\frac{1}{2}\theta$) tan $\frac{1}{3}\theta$ = (tan² $\frac{1}{2}\theta$ cosec² $\frac{1}{2}\theta$ - sec² $\frac{1}{2}\theta$) cot $\frac{2}{3}\theta$
... .. 997
- $\sqrt{\text{vers } a \text{ vers } \beta} = \text{vers } \frac{a + \beta}{2} - \text{vers } \frac{a - \beta}{2}$ 861
- vers(180° - a) = 2 vers $\frac{180^\circ + a}{2}$ vers $\frac{180^\circ - a}{2}$ 693

II. 簡 化

- cos²A + cos²(A + B) - 2 cos A cos B cos(A + B) 564
- cos(15° - A) sec 15° - sin(15° - A) cosec 15° 989
- sin(180° + x) sin(90° + y) - sin(90° - x) sin(180° - y)
... .. 990
- cos²(a + β) + cos²(a - β) - cos 2a cos 2β 858
- {sin A + sin B + sin(A + B)}² + {1 + cos A + cos B + cos(A + B)}² 806
- cos 2A + $\frac{2}{\cot^2 A + 1}$ 1023
- $\frac{\cos a - \cos 5a}{\sin a + \sin 5a}$ 803
- (x cos 2a + y sin 2a - 1)(x cos 2β + y sin 2β - 1) - {x cos(a + β) + y sin(a + β) - cos(a - β)}² 1010
- {x cos(a + β) + y sin(a + β) - cos(a - β)} {x cos(γ + δ) + y sin(γ + δ) - cos(γ - δ)} - {x cos(a + γ) + y sin(a + γ) - cos(a - γ)} {x cos(β + δ) + y sin(β + δ) - cos(β - δ)}
... .. 1011

III. 求 值

(1) 求 sin

- sin A = $\frac{1}{5}$ 時, sin 2A 之值 654
- sin 2A = $\frac{1}{4}$ 時, sin A 之值 896
- sin A = $\frac{1}{2}$, A 較 90° 小時, sin 2A 之值 645
- sin a = $\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ 時, sin $\frac{a}{2}$ 897

- $\sin a = -\frac{24}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$ 時, $\sin \frac{a}{2}$ 898
- $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = \frac{1}{3}$, A, B 為較 90° 小之正角時, $\sin 2(A+B)$ 1065
- 有二弧, 其一之正弦為 $\frac{1}{2}$, 他一之正弦為 $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 時, 此二弧和之正弦... .. 533
- $\sin A = 0.6$, $\sin B = \frac{5}{13}$ 時, $\sin(A-B)$ 之值 530
- m 為 2 之冪數, $\sin a$ 為已知時, $\sin \frac{a}{m}$ 之值 ... 3019
- $\sin A = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{3}{5}$ 時, $\sin(A-B)$ 之值 528
- $\sin A = \frac{3}{5}$ 時, $\sin 3A$ 之值 712
- $\sin A = \frac{3}{5}$, $\sin B = \frac{12}{13}$, $\sin C = \frac{7}{25}$ 時, $\sin(A+B+C)$ 之值, 但 A, B, C 各為較 90° 小之正角 3005
- $270^\circ < \theta < 360^\circ$, $\cos \theta = \frac{1}{3}$ 時, $\sin 2\theta$ 之值 646
- $\cos A = \frac{3}{5}$ 時, $\sin 2A$ 之值 655
- $\tan A = 3$ 時, $\sin 2A$ 之值 701
- $\tan \theta = \frac{1}{4}$ 時, $\sin 2\theta$ 之值 700
- $\tan A = \frac{3}{4}$ 時, $\sin \frac{A}{2}$ 之值 891
- $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}-1$ 時, $\sin x$ 之值 695
- 知 $\tan x = 3$, $\sin 4x$ 之值 3008
- $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{5}{13}$ 時, $\sin(A+B)$ 之值, 但 A, B 為銳角 532
- A, B 為正銳角, $\sin A = \frac{1}{3}$, $\cos B = \frac{4}{5}$ 時, $\sin(A-B)$ 之值 982
- $\sin \theta + \cos \theta = \frac{5}{4}$ 時, $\sin 2\theta$ 之值 1046
- $\sec A = \frac{17}{15}$, $\operatorname{cosec} B = \frac{6}{11}$ 時, $\sin(A+B)$ 之值 ... 536

(2) 求 \cos .

- $\sin A = \frac{1}{2}$ 時, $\cos 2A$ 之值 654
- $\sin A = \frac{1}{4}$ 時, $\cos 2A$ 之值 653
- $\sin \theta = \frac{120}{169}$ 時, $\cos \frac{3\theta}{2}$ 之值 917
- $\sin A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$ 時, $\cos(A-B)$ 之值, 但 A, B 為銳角 534
- $\sin A = \frac{1}{11}$, $\sin B = \frac{9}{11}$ 時, $\cos(A-B)$ 之值 529

- $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = \frac{3}{5}$ 時, $\cos(A+B)$ 之值 528
- $\sin \theta$ 與 $\sin \frac{\theta}{2}$ 之比為 8:5 時, $\cos \theta$ 之值 ... 1022
- $\sin A = 0.6$, $\sin B = \frac{5}{13}$ 時, $\cos(A+B)$ 之值... .. 530
- $\sin a = -\frac{24}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$ 時, $\cos \frac{a}{2}$ 898
- $\cos A = \frac{1}{2}$ 時, $\cos 2A$ 之值 652
- $\cos A = \frac{1}{2}$ 時, $\cos 3A$ 之值 717
- $\cos A = \frac{3}{5}$ 時, $\cos 2A$ 之值 655
- m 為 2 之冪數, $\cos a$ 為已知時, $\cos \frac{a}{m}$ 3019
- 知 $\cos 4a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 求 $\cos 2a$ 及 $\cos a$, 又 $\cos a$ 之值之一, 何故為正數 $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 889
- $\tan A = 3$ 時, $\cos 2A$ 之值 701
- $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 時, $\cos 2\theta$ 之值 732
- $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}-1$ 時, $\cos x$ 之值 695
- $\tan \theta = \frac{1}{7}$ 時, $\cos 2\theta$ 之值 700
- $\tan \theta + \cot \theta = 2\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)$ 時, $\cos 2\theta$ 698
- $\sin A = \frac{1}{3}$, $\cot B = \frac{15}{8}$, A, B 為正銳角時, $\cos(A-B)$ 984
- A, B 為正銳角, $\tan A = \frac{1}{3}$, $\cos B = \frac{7}{25}$ 時, $\cos(A-B)$ 983

(3) 求 \tan .

- $\sin A = \frac{1}{2}$ 時, $\tan 2A$ 之值 654
- $\sin \theta = \frac{120}{169}$ 時, $\tan \frac{\theta}{2}$ 之值 917
- $\cos A = \frac{3}{5}$ 時, $\tan 2A$ 之值 655
- $\cos \theta = \frac{5}{11}$ 時, $\tan \frac{\theta}{2}$, $\tan \theta$ 及 $\tan 2\theta$ 686
- $\tan A = 3$ 時, $\tan 2A$ 之值 701
- $\tan \theta = \frac{7}{24}$ 時, $\tan \frac{\theta}{2}$ 之值 905
- $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}-1$ 時, $\tan x$ 之值 695
- $\tan A = \frac{1}{2}$ 時, $\tan 2A$ 之值 704
- $\tan 2a = \sqrt{3}$ 時, $\tan 3a$ 之值 3009
- $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 時, $\tan 3\theta$ 之值 732

- m 爲 2 之冪數, $\tan a$ 爲已知時, $\tan \frac{a}{m}$ 之值 ... 3019
- $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$ 時, $\tan(A+B)$ 之值 ... 614
- $\tan x = 2$, $\tan y = \frac{1}{3}$ 時, $\tan\{2(x+y)\}$ 之值 ... 1020
- $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$, $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ 時, $\tan(A-B)$... 625
- $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\tan \theta + c - 1}{\tan \theta + c + 1}$ 時, $\tan \frac{\theta}{2}$... 1061
- $\tan \theta = \frac{\sin \alpha \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma}{\cos \alpha \sin \gamma - \cos \beta \sin \gamma}$, $\tan \phi = \frac{\sin \alpha \sin \gamma - \sin \beta \cos \gamma}{\cos \alpha \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma}$
時, $\tan(\theta + \phi)$... 1102
- $\cot A = \frac{5}{7}$, $\cot B = \frac{7}{3}$ 時, $\tan(A-B)$ 之值 ... 634
- $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = \frac{2}{3}$ 時, $\tan(\alpha + \beta)$ 之值, 但 α, β 皆爲較直
角小之正角 ... 1012
- $\cot A = \frac{11}{2}$, $\tan B = \frac{7}{24}$ 時, $\tan(A+B)$ 之值 ... 635

(4) 求 \cot .

- $\sin A = \frac{1}{5}$ 時, $\cot 2A$ 之值 ... 654
- $\cos A = \frac{3}{5}$ 時, $\cot 2A$ 之值 ... 655
- $\tan A = 3$ 時, $\cot 2A$ 之值 ... 701
- $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1$ 時, $\cot x$ 之值 ... 695
- $\cot A = \frac{5}{7}$, $\cot B = \frac{7}{3}$ 時, $\cot(A+B)$ 之值 ... 634
- A, B 爲銳角, $\tan A = \frac{24}{7}$, $\sin B = \frac{5}{13}$ 時, $\cot(A-B)$...
... 1019
- $\cot A = \frac{11}{2}$, $\tan B = \frac{7}{24}$ 時, $\cot(A-B)$ 之值 ... 635
- 直角二等邊三角形 ABC 中, 聯結底 BC 之一端 B 與對邊
之中點 D 時, $\cot DBA$ 及 $\cot CBD$... 1014

(5) 求 \sec .

- $\sin A = \frac{1}{5}$ 時, $\sec 2A$ 之值 ... 654
- $\cos A = \frac{3}{5}$ 時, $\sec 2A$ 之值 ... 655
- $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1$ 時, $\sec x$ 之值 ... 695
- $\tan A = 3$ 時, $\sec 2A$ 之值 ... 701
- $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$ 時, $\sec(A+B)$... 535

(6) 求 cosec.

- $\sin A = \frac{1}{2}$ 時, cosec $2A$ 之值 654
- $\cos A = \frac{2}{3}$ 時, cosec $2A$ 之值 655
- $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1$ 時, cosec x 之值 695
- $\tan A = 3$ 時, cosec $2A$ 之值 701

(7) 求式之值

- $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ 1119
- $8 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$ 862
- $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$ 862
- $\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ$ 862
- $\cos^4 20^\circ + \cos^4 40^\circ + \cos^4 60^\circ + \cos^4 80^\circ$ 1189
- $\cos 108^\circ \cos 132^\circ + \cos 132^\circ \cos 12^\circ + \cos 12^\circ \cos 103^\circ$ 862
- $\frac{\tan 52^\circ.5 + \tan 7^\circ.5}{\tan 82^\circ.5 + \tan 37^\circ.5}$ 1184
- 知 $\tan a = \frac{m}{n}$, $m \cos 2a + n \sin 2a$ 702
- $\sin \theta + \cos \theta = \frac{5}{4}$ 時, $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ 1046
- $\cos 2\theta = \frac{2}{3}$ 時, $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ 1047
- $\sin^2 10^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin 10^\circ \cos 40^\circ$ 1188
- $\sin 100^\circ \sin(-160^\circ) + \cos 200^\circ \cos(-280^\circ)$... 992
- $x^2 + px + q = 0$ 之根爲 $\tan a, \tan \beta$ 時, 以 p, q 求 $\sin^2(a + \beta) + p \sin(a + \beta) \cos(a + \beta) + q \cos^2(a + \beta)$... 3016
- $x = 83^\circ 24' 36''$ 時, $\frac{\sin 7x}{\sin x} - 2 \cos 2x - 2 \cos 4x - 2 \cos 6x$ 3013

IV. 式之表示

(1) 表

- 用 $\sin 100^\circ, \sin 452^\circ, \sin 50^\circ, \sin 226^\circ$ 895
- 知 $\sin A, \sin \frac{A}{3}$ 910
- 知 $\sin 3\theta, \tan \theta$ 諸值之數 920
- 知 $\cos A, \cos \frac{A}{3}$ 909

- 以 $\cos A$ 之項, $\cos \frac{A}{2^n}$, 但 n 爲任意正整數 ... 1174
- 以 $\cos a, \tan \frac{a}{2}$ 915
- 知 $\cos a$, 計算 $\sin \frac{a}{4}$ 時, 可得幾值 918
- 以 $\tan a, \tan \frac{a}{4}$ 914
- 知 $\tan a$, 求 $\tan \frac{a}{2}$ 時, 試用方程式及圖求證 $\tan' \frac{a}{2} \tan'' \frac{a}{2} = -1$ 919
- 以 $\tan a$ 表 $\sin 3a$, 可得幾答 3017
- $\tan(a - \beta + \gamma - \delta)$, 以 $\tan a, \tan \beta$ 等項 3012
- 知 $\cot a$ 求 $\cot \frac{a}{2}$, 次玩索 908
- 知 $\cot a$ 之值, $\sin 2a$ 1021
- 以 $\sec a, \cot \frac{a}{2}$ 916
- $\sin \theta + \sin \phi = a, \cos \theta + \cos \phi = b$ 時, 以 a, b 之項表 (I) $\sin \theta \sin \phi$, (II) $\cos \theta \cos \phi$, (III) $\tan \theta + \tan \phi$, (IV) $\cos 2\theta + \cos 2\phi$, (V) $\tan \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\phi}{2}$, (VI) $\cos 3\theta + \cos 3\phi$ 767

(2) 表爲和或差

- $2 \sin 6^\circ \sin 5^\circ$ 837
- $\sin 3A \sin 2B$ 833
- $4 \sin a \sin \beta \sin \gamma$, 表成四正弦和之形 859
- $2 \cos 77^\circ \cos 4^\circ$ 837
- $\cos(A+B)\cos(A-B)$ 838
- $4 \cos a \cos \beta \cos \gamma$, 表成四餘弦和之形 860
- $2 \sin 50^\circ \cos 12^\circ$ 837
- $2 \cos 70^\circ \sin 15^\circ$ 837
- $2 \sin 2a \cos 3\beta$ 834
- $2 \sin \frac{3A}{2} \cos \frac{A}{2}$, 表成圓函數之和或差 836
- $\cos 45^\circ \sin 15^\circ$, 以和或差之形表後, 再簡化 ... 835

(3) 表成積之形

- $\sin 60^\circ + \sin 20^\circ$ 756
- $\sin 10\theta + \sin 4\theta$ 755

● $\sin \frac{360^\circ}{7} + \sin \frac{720^\circ}{7} - \sin \frac{1080^\circ}{7}$	942
● $\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C)$	768
● $\cos 8\theta + \cos 2\theta$	759
● $\cos 6\theta - \cos 4\theta$	762
● $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C - 1$...	769
● $\cos A + \sqrt{3} \sin A$	1117
● $\sqrt{3} \cos A - \sin A$	550
● $a \cos A + b \sin A$	551
● $\sin \theta + \sin \phi - \cos \theta \sin(\theta + \phi)$	1118
● $\cos \theta + \sin \theta$ 及 $\sin 3\theta + \sin 2\theta + 2 \sin \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$...	766
● $2 \cos 2\theta \cos \theta - 2 \sin 4\theta \sin \theta$	832

V. 條件等式

(1) 知角之關係者

● $x = \frac{\pi}{7}$ 時, $\cos 3x - \cos 2x + \cos x = \frac{1}{2}$	878
● $\alpha = \frac{2\pi}{15}$ 時, $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 8\alpha = \frac{1}{2}$...	826
● $17A = 180^\circ$ 時, $(\cos A \cos 13A) / (\cos 3A + \cos 5A) = -\frac{1}{2}$	1121
● $\alpha + \beta + \gamma = 2\delta$ 時, $\cos 2\delta + \cos 2(\delta - \alpha) + \cos 2(\delta - \beta)$ $+ \cos 2(\delta - \gamma) = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$	827
● $A+B+C=90^\circ$ 時, $\tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B$ $= 1$	636 注意
● $A+B+C=180^\circ$ 時, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B$ $\times \tan C$	636 注意
● $\alpha + \beta = 45^\circ$ 時, $(1 + \tan \alpha)(1 - \tan \beta) = 2$	639
● $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ 時, $\tan \gamma = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$	640
● $A+B+C=180^\circ$ 時, $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B$ $= 1$	637 注意
● $A+B+C=90^\circ$ 時, $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C$	637 注意
● $\gamma = \alpha + \beta$ 時, $\sin^2 \gamma = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$	607
● $\alpha + \beta = \omega$ 時, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \omega = \sin^2 \omega$	1158

- $\cos 60^\circ = \sin 36^\circ \cos A$, $\cos 36^\circ = \sin 60^\circ \cos B$, 及 $\cos C = \cos A \cos B$ 時, $A+B+C$ 之一值為 90° ... **1175**
- $\sin A = \sin B$, $\cos A = \cos B$ 時, A 與 B 相等, 或其差為正或負 4 直角之若干倍 **552**
- $\frac{6 \sin B}{\cos(A+B)} = \frac{3 \sin 2B}{\cos(A+2B)} = \frac{2 \sin 3B}{\cos(A+3B)}$ 時, 不能命 B 為 $n\pi$ 外之任意值 **1085**
- $\text{vers } a = x$, $\text{vers } \beta = mx$, $\text{vers } \gamma = 1 - m$, $a + \beta = \gamma$ 時, $x = 1 \pm \sqrt{\frac{2m}{1+m}}$ **1004**

(3) 含一三角函數者

- a, β, γ 及 x 為任意角時, $\sin(2a+x) + \sin(2\beta+x) + \sin(2\gamma+x) - \sin(2a+2\beta+2\gamma+3x) = 4 \sin(a+\beta+x) \sin(\beta+\gamma+x) \sin(\gamma+a+x)$ **1145**
- $\cos(\phi - a)$, $\cos \phi$, $\cos(\phi + a)$ 成調和級數時, $\cos \phi = \sqrt{2} \times \cos \frac{1}{2}a$ **1157**
- $\cos a + \cos \beta + \cos \gamma = 0$ 時, $\cos 3a + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 12 \times \cos a \cos \beta \cos \gamma$ **1103**
- $x = y \cos R + z \cos Q$, $y = z \cos P + x \cos R$ 及 $P+Q+R = (2n+1)\pi$ 時, $z = x \cos Q + y \cos P$, 及 $\cos P = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}$, 但 n 為正整數 **603**
- $\frac{\cos \theta \cos \frac{\phi}{2}}{\cos(\theta - \frac{\phi}{2})} + \frac{\cos \phi \cos \frac{\theta}{2}}{\cos(\phi - \frac{\theta}{2})} = 1$ 時, $\cos \theta + \cos \phi = 1$ **1153**
- $\tan A = 1$, $\tan B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 時, $\tan(A+B) = 2 + \sqrt{3}$... **616**
- $\tan A = \frac{5}{8}$, $\tan B = \frac{1}{11}$ 時, $\tan(A+B) = 1$ **615**
- $\tan a = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{1}{2}$ 時, $\tan(\beta - 2a) = \frac{2}{11}$ **705**
- $\tan A = m$, $\tan B = \frac{1}{m}$ 時, $\tan(A+B) = \infty$ **618**
- $\tan a = \frac{m}{m+1}$, $\tan \beta = \frac{1}{2m+1}$ 時, $\tan(a+\beta) = 1$ **617**
- $\tan 2a = \frac{2(ab+cd)}{a^2-b^2+c^2-d^2}$; $\tan 2\beta = \frac{2(ac+bd)}{a^2-c^2+b^2-d^2}$ 時, $\tan(a-\beta) = \frac{b-c}{a+d}$ **1108**

- $\cot a, \cot \beta, \cot \gamma$ 成等差級數時, $\cot(\beta - a), \cot \beta, \cot(\beta - \gamma)$ 亦成等差級數 643

(4) 含 \sin, \cos 者

- $\cos A = \frac{40}{41}, \cos B = \frac{60}{61}, A$ 及 B 較直角小時, $\sin^2 \frac{A-B}{2}$
 $= \frac{1}{41 \times 61}$ 1068
- $x = r \sin \frac{1}{2}(\theta - a), y = r \sin \frac{1}{2}(\theta + a)$ 時, $x^2 - 2xy \cos a + y^2$
 $= r^2 \sin^2 a$ 1064
- $\sqrt{2} \cos a = \cos \beta + \cos^3 \beta$, 及 $\sqrt{2} \sin a = \sin \beta - \sin^3 \beta$
 時, $\pm \sin(\beta - a) = \cos 2\beta = \frac{1}{2}$ 1107
- $l \cos(\theta - \beta) - m \cos(\theta - a) = n$ 時, $l \sin(\theta - \beta) - m \sin(\theta - a)$
 $= \sqrt{\{l^2 + m^2 - n^2 - 2lm \cos(a - \beta)\}}$ 1000
- $\sin a$ 及 $\sin \beta$ 爲 $\sin \theta$ 及 $\cos \theta$ 之等差中項及等比中項時,
 $\cos 2a = \frac{1}{2} \cos 2\beta = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right)$ 1086
- $x^2 \cos a \cos \beta + x(\sin a + \sin \beta) + 1 = 0, x^2 \cos \beta \cos \gamma + x$
 $\times (\sin \beta + \sin \gamma) + 1 = 0$ 時, $x^2 \cos \gamma \cos a + x(\sin \gamma + \sin a)$
 $+ 1 = 0$ 1168
- $p = 2 \cos A - 5 \cos^3 A + 4 \cos^5 A$ 及 $q = 2 \sin A - 5 \sin^3 A + 4$
 $\times \sin^5 A$ 時, $p \cos 3A + q \sin 3A = \cos 2A$ 及 $p \sin 3A$
 $- q \cos 3A = \frac{1}{2} \sin 2A$ 1084
- $p = 2 \cos a - 5 \cos^3 a + 4 \cos^5 a, q = 2 \sin a - 5 \sin^3 a + 4 \sin^5 a$
 時, $p \cos 3a + q \sin 3a = \cos 2a$, 及 $p \sin 3a - q \cos 3a$
 $= \frac{1}{2} \sin 2a$ 1159
- $\cos \left(\beta + \frac{\gamma - a}{2} \right), \cos \frac{\gamma + a}{2}, \cos \left(\beta - \frac{\gamma - a}{2} \right)$ 成等比級數時,
 $\sin \left(\frac{\gamma + a}{2} - \beta \right), \sin \frac{\gamma - a}{2}, \sin \left(\frac{\gamma + a}{2} + \beta \right)$ 亦成等比級數
 612
- $x + y \cos a + z \sin a = \cos(\beta - \gamma), x + y \cos \beta + z \sin \beta$
 $= \cos(\gamma - a)$, 及 $x + y \cos \gamma + z \sin \gamma = \cos(a - \beta)$ 時, x
 $= 4 \cos \frac{1}{2}(a - \beta) \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \cos \frac{1}{2}(\gamma - a)$ 1169
- $x \cos \beta + y \cos a = z, x \sin \beta - y \sin a = 0$ 時, $\frac{x}{\sin a} = \frac{y}{\sin \beta}$
 $= \frac{z}{\sin(a + \beta)}$ 601
- $\frac{\cos x}{a_1} = \frac{\cos 2x}{a_2} = \frac{\cos 3x}{a_3}$ 時, $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{2a_2 - a_1 - a_3}{4a_2}$...

- 1128
- $m \sin(\theta + \phi) = \cos(\theta - \phi)$ 時, $\frac{1}{1 - m \sin 2\theta} + \frac{1}{1 - m \sin 2\phi}$
 $= \frac{2}{1 - m^2}$ 1154
- $a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 0$, $a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0$
 時, $\frac{\sin(\beta - \gamma)}{a} = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{b} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{c}$ 606
- $\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta - \beta)} = \frac{a}{b}$, 及 $\frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos(\theta - \beta)} = \frac{a'}{b'}$ 時; $\cos(\alpha - \beta)$
 $= \frac{aa' + bb'}{ab' + a'b}$ 1002
- 對於 θ 之一切值, $\frac{A \cos(\theta + \alpha) + B \cos(\theta + \beta)}{A' \sin(\theta + \alpha) + B' \cos(\theta + \beta)}$ 爲同值時,
 $AA' - BB' = (A'B - AB') \sin(\alpha - \beta)$ 3015
- $\cos \theta = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}$, 及 $\cos \phi$
 $= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \phi}$ 時, $\cos \theta + \cos \phi$
 $= \frac{2 \cos \alpha \cos \beta}{1 - c^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$ 1081
- $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 及
 $\cos A \cos \alpha + \cos B \cos \beta + \cos C \cos \gamma = 0$ 時, $\frac{\sin \alpha \sin 2\alpha}{\cos A}$
 $+ \frac{\sin \beta \sin 2\beta}{\cos B} + \frac{\sin \gamma \sin 2\gamma}{\cos C} + \frac{2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\cos A \cos B \cos C} = 0$...
 1079, 2990.

(5) 含 sin. tan. 者

- $\tan A = 2 \tan B$ 時, $\sin(A + B) = 3 \sin(A - B)$
 986, 2990
- $\tan^2 x = \tan(\alpha + x) \tan(\alpha - x)$ 時, $\sin 2x = \sqrt{2} \sin \alpha$...
 1082
- $\tan^2 x = \tan(\alpha + x) \tan(\alpha - x)$ 時, $\sin 2x = \sqrt{2} \sin \alpha$
 1006
- $\sin(\beta + \gamma - \alpha)$, $\sin(\gamma + \alpha - \beta)$, $\sin(\alpha + \gamma - \gamma)$ 成等差級數
 時, $\tan \alpha$, $\tan \beta$, $\tan \gamma$ 亦成等差級數 887
- $\tan \beta$, $\tan 2\beta$, $\tan \alpha$ 成等差級數時, $\tan(\alpha - \beta) = \sin 2\beta$
 1017
- $\tan A = a$, $\tan B = b$ 時, $\sin(A + B) = \frac{a + b}{\sqrt{\{(1 + a^2)(1 + b^2)\}}}$
 610

- $\sin \beta = m \sin(2\alpha + \beta)$ 時, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1+m}{1-m} \tan \alpha \dots \dots$
 818
- $\frac{\sin(x+A)}{\sin(x+B)} = \sqrt{\frac{\sin 2A}{\sin 2B}}$ 時, $\tan^2 x = \tan A \tan B \dots$ 2991
- $\frac{\sin(x+A)}{\sin(x+B)} = \sqrt{\frac{\sin 2A}{\sin 2B}}$ 時, $\tan^2 x = \tan A \tan B \dots$ 1083
- $\frac{\tan(A-B)}{\tan A} + \frac{\sin^2 C}{\sin^2 A} = 1$ 時, $\tan A \tan B = \tan^2 C \dots$ 999
- $\sin \beta = m \sin(2\alpha + \beta)$ 時, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1+m}{1-m} \tan \alpha \dots \dots$
 605
- $\tan \theta = m, \tan \phi = n$ 時, $\sin 2(\theta + \phi) = \frac{2(m+n)(1-mn)}{(1+m^2)(1+n^2)}$
 1095
- $\alpha + \beta = \omega$ 及 $\sin \frac{1}{2}\alpha = m \sin \frac{1}{2}\beta$ 時, $\tan \frac{1}{4}(\alpha - \beta) = (m - \dots)$
 $\times \tan \frac{1}{4}\omega / (m+1) \dots \dots \dots$ 1155
- $\tan^2 \theta = \tan(\theta - \alpha) \tan(\theta - \beta)$ 時, $\tan 2\theta = \frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$
 1091
- $\tan(A+B) = 3 \tan A$ 時, $\sin(2A+2B) + \sin 2A = 2 \sin 2B$
 1125
- $\alpha + \beta = \omega$ 及 $\tan \alpha = m \tan \beta$ 時, $\sin \omega = (m+1) \sin(\alpha - \beta)$
 $/ (m-1) \dots \dots \dots$ 996
- $\sin \alpha, \sin \beta, \sin \gamma$ 成等差級數時, $\tan \frac{\beta+\gamma}{2}, \tan \frac{\gamma+\alpha}{2},$
 $\tan \frac{\alpha+\beta}{2}$ 亦成等差級數... .. 886
- 若 $\tan A, \tan B, \tan C$ 成等差級數, $\tan A, \tan B, \tan D,$
 成調和級數, 則 $\frac{\tan C}{\tan D} = 1 - \frac{8 \sin^2(A-B)}{\sin 2A \sin 2B} \dots \dots$ 1069
- $\frac{\tan(\theta + \alpha)}{x} = \frac{\tan(\theta + \beta)}{y} = \frac{\tan(\theta + \gamma)}{z}$ 時, $\frac{x+y}{x-y} \sin^2(\alpha - \beta)$
 $+ \frac{y+z}{y-z} \sin^2(\beta - \gamma) + \frac{z+x}{z-x} \sin^2(\gamma - \alpha) = 0 \dots \dots$ 1166

(6) 含 $\sin \cot$ 者

- $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\sin \theta}$ 時, $\cot \beta - \cot \theta = \cot(\alpha + \theta) + \cot(\alpha$
 $- \beta) \dots \dots \dots$ 1001
- A, B, C, D 爲圓周上順次所取之四點, $\cot AB + \cot AD = 2$

- × cot AC 時, $\sin AB : \sin BC = \sin AD : \sin DC$... 611
- cot α , cot β , cot γ 成等差級數時, cot($\beta - \alpha$), cot β , cot($\beta - \gamma$) 亦成等差級數, 又 $\frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \alpha}$, $\frac{\sin(\gamma + \alpha)}{\sin \beta}$, $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \gamma}$ 亦成等差級數... .. 643
- A, B, C 爲任意數, α, β, γ 爲適合 $A \cot \alpha + B \cot \beta + C \cot \gamma = (A + B + C) \cot \alpha \cot \beta \cot \gamma$, $(B + C) \cot \beta \cot \gamma + (C + A) \cot \gamma \cot \alpha + (A + B) \cot \alpha \cot \beta = 0$ 之角時, $A \sin 2\alpha + B \sin 2\beta + C \sin 2\gamma = 0$ 1172

(7) 含 cos. tan. 者

- tan $\alpha = \frac{n}{m}$ 時, $\sqrt{\frac{m-n}{m+n}} + \sqrt{\frac{m+n}{m-n}} = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}$... 1106
- cos $\theta = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{1 - \cos \alpha \cos \beta}$ 時, $\tan^2 \frac{\theta}{2} = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \tan^2 \frac{\beta}{2}$ 1105
- cos $\theta = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{1 - \cos \alpha \cos \beta}$ 時, $\tan \frac{\theta}{2} = \pm \tan \frac{\alpha}{2} / \tan \frac{\beta}{2}$ 687
- cos $\theta = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{1 + \cos \alpha \cos \beta}$ 時, $\tan^2 \frac{\theta}{2} = \tan^2 \frac{1}{2} \alpha \tan^2 \frac{1}{2} \beta$ 1104
- cos $\theta = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$ 時, $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2}$... 1097
- tan $\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\alpha}{2}$, $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$ 時, $\sqrt{r \cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{a(1-e)}$
 × cos $\frac{\alpha}{2}$ 1098
- tan² $\theta = 2 \tan^2 \phi + 1$ 時, $\cos 2\phi = 2 \cos 2\theta + 1$... 669
- $\frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \beta} = \frac{\cos \beta (\cos x - \cos \alpha)}{\cos \alpha (\cos x - \cos \beta)}$ 時, $\tan^2 \frac{x}{2} = \tan^2 \frac{\alpha}{2} \tan^2 \frac{\beta}{2}$ 1060
- tan $\theta \tan \phi = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ 時, $(a - b \cos 2\theta)(a - b \cos 2\phi) = a^2 - b^2$ 1096
- cos A = $\frac{a \cos B - b}{a - b \cos B}$ 時, $\frac{\tan^2 \frac{1}{2} A}{\tan^2 \frac{1}{2} B} = \frac{a+b}{a-b}$, 或 $\frac{\tan^2 \frac{1}{2} A}{\sqrt{a+b}}$
 = $\frac{\tan^2 \frac{1}{2} B}{\sqrt{a-b}}$ 1051
- 若 $x \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = x \cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma) = x$

● $b \sin(x+\theta) = c \sin(y-\theta)$, $b \cos x = c \cos y$ 時, $2 \tan \theta = \tan y - \tan x$ 602

● $\frac{\tan \theta}{\tan \alpha} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta}$ 時, $\sin(3\theta + \alpha) = 7 \sin(\theta - \alpha)$... 1075

● $\tan \frac{z}{2} = \tan \frac{x}{2} \tan \frac{y}{2}$ 時, $\tan z = \frac{\sin x \sin y}{\cos x + \cos y}$... 1148

● $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\alpha}{2}$, $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$ 時, $\sqrt{r \sin \frac{\theta}{2}} = \sqrt{a(1+e)}$
 $\times \sin \frac{\alpha}{2}$ 1098

● $\sin^2 \phi = \frac{\cos 2\alpha \cos 2\alpha'}{\cos^2(\alpha + \alpha')}$ 時, $\tan^2 \frac{1}{2} \phi = \frac{\tan(\frac{1}{4} \pi \pm \alpha)}{\tan(\frac{1}{4} \pi \pm \alpha')}$ 1150

● $2 \tan A = 3 \tan B$ 時, $\tan(A-B) = \frac{\tan B}{2+3 \tan^2 B} = \frac{\sin 2B}{5-\cos 2B}$
 1067

● $\tan \phi = \frac{\sin \theta \cos \theta'}{\sin \theta' + \cos \theta}$ 時, $\tan \frac{\phi}{2}$ 之一值爲 $\tan \frac{\theta}{2} \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta'}{2})$ 1058

● $\tan \theta = \frac{x \sin \alpha}{y - x \cos \alpha}$, $\tan \phi = \frac{y \sin \alpha}{x - y \cos \alpha}$ 時, $\tan(\theta + \phi) = -\tan \alpha$ 638

● $n^2 \sin^2(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta)$ 時,
 $\tan \alpha = \frac{1 \pm n}{1 \mp n} \cdot \tan \beta$ 1003

● $\tan \theta = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta + \cos \alpha}$ 時, $\tan \frac{\theta}{2} = \pm \frac{(1 \mp \sin \beta)(1 \mp \cos \alpha)}{\sin \alpha \cos \beta}$
 1094

● $\tan^2 \theta = 2 \tan^2 \phi + 1$ 時, $\cos 2\phi = 2 \cos 2\theta + 1$, $\cos 2\theta + \sin^2 \phi = 0$ 669

● $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\alpha}{2}$, $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$ 時, $\sqrt{r \cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{a(1-e)}$
 $\times \cos \frac{\alpha}{2}$, 及 $\sqrt{r \sin \frac{\theta}{2}} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{\alpha}{2}$ 1098

● $\cos \theta = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}$, 及 $\cos \phi = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \phi}$ 時, $\cos \theta + \cos \phi = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta}{1 - c^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$ 及 $1 + \cos \theta \cos \phi = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{1 - c^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$
 由是證 $\sin \theta \sin \phi$ 及 $\tan \frac{1}{2} \theta \tan \frac{1}{2} \phi$ 1081

(10) 含他三函數者

- $\tan B = \frac{2 \sin A \sin C}{\sin(A+C)}$, $\cot A, \cot B, \cot C$ 成等差級數 ... 991
- $\tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\theta) = \tan^5(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\phi)$ 時, $\sin \theta = 5 \sin \phi$
 $\times \left\{ \begin{array}{l} (1 + \sin^2 \phi \cot^2 \frac{1}{2}\pi)(1 + \sin^2 \phi \cot^2 \frac{3}{2}\pi) \\ (1 + \sin^2 \phi \tan^2 \frac{1}{2}\pi)(1 + \sin^2 \phi \tan^2 \frac{3}{2}\pi) \end{array} \right\}$... 1018
- $\tan^2 x + \sec 2x = \frac{7\sqrt{3}-10}{\sqrt{3}}$ 時, $\cos 2x = \frac{-5-4\sqrt{3}}{23}$... 1100
- $\tan \alpha = \frac{5}{12}$, $\cos 2\beta = \frac{527}{625}$ 時, $\operatorname{cosec} \frac{\alpha-\beta}{2} = 5\sqrt{13}$... 890
- $\sec \alpha \sec \beta + \tan \alpha \tan \beta = \tan \gamma$ 時, $\cos 2\gamma$ 不能為正 ... 1080

(11) 含四以上之函數者

- $\sin \theta \sin \phi = \sin \alpha \sin \beta$, $\tan \phi \cos \beta = \cot \frac{\alpha}{2}$ 時, $\sin \frac{\theta}{2}$ 之
 一值為 $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta$... 1062
- $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta) = n^2(\sin \alpha - \sin \beta)^2$
 時, $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 \pm n}{1 \mp n} \cot \frac{\beta}{2}$... 1165
- $\frac{2}{1+x} = \frac{\sin \beta \sin \theta}{\cos(\beta - \theta)} = \frac{\tan(\theta - \alpha)}{\cot \beta}$ 時, $x^2 = \left(\cot \frac{\alpha}{2} - 2 \cot \beta \right)$
 $\times \left(\tan \frac{\alpha}{2} + 2 \cot \beta \right)$... 1063
- $\tan \theta = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta + \cos \alpha}$ 時, $\tan \frac{\theta}{2} = \tan \frac{\alpha}{2} \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right)$, 或
 $-\cot \frac{\alpha}{2} \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \right)$... 1089
- $\frac{\sin(\theta - \beta) \cos \alpha}{\sin(\phi - \alpha) \cos \beta} + \frac{\cos(\alpha + \theta) \sin \beta}{\cos(\phi - \beta) \sin \alpha} = 0$, 以及 $\frac{\tan \theta \tan \alpha}{\tan \phi \tan \beta}$
 $+ \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = 0$ 時, $\tan \theta = \frac{1}{2}(\tan \beta + \cot \alpha)$, $\tan \phi = \frac{1}{2}$
 $\times (\tan \alpha - \cot \beta)$... 998
- $\cos \theta = \cos \alpha \cos \beta$, $\cos \theta' = \cos \alpha' \cos \beta$, $\tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta'}{2} = \tan \frac{\beta}{2}$
 時, $\sin^2 \beta = (\sec \alpha - 1)(\sec \alpha' - 1)$... 1059
- $a \sin \theta + b \cos \theta = c = a \operatorname{cosec} \theta + b \sec \theta$ 時, 求證 $\sin 2\theta$

$$= \frac{2ab}{c^2 - a^2 - b^2} \dots \dots \dots 1066$$

● $\sin x \cos y = \tan a \cot \gamma, \sin y \cos x = \tan \beta \cot \gamma, \cos^2 y - \cos^2 x = \cos^2 \gamma$ 時, $\sec^2 \alpha - \sec^2 \beta = \sin^2 \gamma \dots 1009$

VI. 特別角

(1) 含 30°, 45°, 60° 之函數之式之值

- 30° 之三角函數 307, 308
- 45° 之三角函數 306, 308
- 60° 之三角函數 307, 308
- $\frac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} \dots \dots \dots 355$
- $2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ \cot 60^\circ \dots \dots \dots 321$
- $\sin^3 60^\circ \cot 30^\circ - 2 \sec^2 45^\circ + 3 \cos 60^\circ \tan 45^\circ - \tan^2 60^\circ \dots \dots \dots 332$
- $3 \tan^2 30^\circ + \frac{1}{2} \sec 60^\circ + 5 \cot^2 45^\circ - \frac{2}{3} \sin^2 60^\circ \dots 333$
- $\cos 60^\circ - \tan^2 45^\circ + \frac{1}{2} \cot^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ \dots 335$
- $\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 60^\circ + \sec^2 45^\circ - 2 \cot^2 60^\circ \dots \dots \dots 338$
- $\cot 60^\circ \tan 30^\circ - \sec^2 45^\circ \dots \dots \dots 324$
- $\frac{1}{3} \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2} \sec 60^\circ \tan^2 30^\circ + \frac{1}{3} \sin^2 45^\circ \tan^2 60^\circ \dots 336$
- $\tan^2 60^\circ + 2 \tan^2 45^\circ \dots \dots \dots 326$
- $\tan 60^\circ \sin^2 45^\circ \dots \dots \dots 355$
- $\tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ$ 時, $x \dots \dots \dots 342$

(2) 含 30°, 45°, 60° 之函數之等式

- $\frac{\cos 45^\circ - \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ + \sin 30^\circ} = (\operatorname{cosec} 45^\circ - \cot 45^\circ)^2 \dots \dots 339$
- $3 \tan^2 30^\circ + \frac{1}{3} \cos^2 30^\circ - \frac{1}{2} \sec^2 45^\circ - \frac{1}{3} \sin^2 60^\circ = \frac{2}{3} \dots 330$
- $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ + \tan 60^\circ = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ + \cot 30^\circ \dots \dots \dots 320$
- $\frac{\cos 60^\circ + \cos 30^\circ}{\sec 60^\circ + \operatorname{cosec} 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4} \dots \dots \dots 340$
- $\operatorname{cosec}^2 45^\circ \sec^2 30^\circ \cos 60^\circ = 1\frac{1}{2} \dots \dots \dots 328$
- $\sin^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = \frac{1}{3} \tan 60^\circ \cot 30^\circ \dots \dots \dots 337$
- $\cot 60^\circ (1 + \cos 30^\circ + \cos 60^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ \dots 319$
- $\cos 60^\circ - \tan^2 45^\circ + \frac{1}{2} \tan^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ = 0 \dots \dots \dots 334$
- $\tan^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \tan 60^\circ + \cos^2 30^\circ = 2\frac{1}{2} \dots$

- 329
- $\tan 60^\circ \sin^2 45^\circ = \cos 30^\circ$ 327
- $\tan 30^\circ \tan 60^\circ = \tan 45^\circ$ 316
- $\frac{1 - \tan^2 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \cos 60^\circ$ 341
- $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$ 325
- $(1 + \sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1 - \cos 45^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{7}{4}$... 322
- $\cos 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 30^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 318
- $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = 1$ 317
- $\sin^2 30^\circ, \sin^2 45^\circ, \sin^2 60^\circ, \sin^2 90^\circ$ 成等差級數 ... 323

(3) 含 $15^\circ, 18^\circ, 75^\circ, 72^\circ$ 之函數者

- 15° 之三角函數 314, 946
- $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 時, $\sin 15^\circ$ 894
- $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 時, $\tan 15^\circ$ 907
- 75° 之正弦, 及餘弦 315
- 18° 之 \sin, \cos, \tan, \cot 308, 954
- 72° 之正弦, 及餘弦 310
- $3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ 331
- $\frac{\sin 45^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 45^\circ - \cos 75^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cot 15^\circ$ 789

(4) 含 $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ$ 之函數者

- $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ 957
- $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{5} + 1)$ 309, 957
- $\tan 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ 958
- $\cot 36^\circ = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$ 958
- $\tan 54^\circ = \sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$ 963
- $\sec 54^\circ = \sqrt{\frac{2(\sqrt{5} + 1)}{\sqrt{5}}}$ 964
- $\sin 18^\circ + \sin 30^\circ = \sin 54^\circ$ 968
- $4 \sin 18^\circ \cos 36^\circ = 1$ 971
- $\cos 36^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$ 969
- $\cos^2 36^\circ + \sin^2 18^\circ = \frac{3}{4}$ 975
- $\cos^2 18^\circ \sin^2 36^\circ - \cos 36^\circ \sin 18^\circ = \frac{1}{16}$ 970

(5) 其他特別角之函數

- $\sin 3^\circ = \{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) - \sqrt{(10+\sqrt{5})(\sqrt{3}-1)}\} / 8\sqrt{2}$ 966
- $\sin 7^\circ \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ 947
- $\tan 7^\circ 30'$ 907
- $\sin 9^\circ, \cos 9^\circ$ 978
- $\tan 9^\circ = \sqrt{5} + 1 - \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$ 979
- $\tan 11^\circ 15'$ 313
- $\cot 11^\circ \frac{1}{4} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2(2 + \sqrt{2})}$ 925
- $\sin 12^\circ = \frac{1}{8}\{\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\}$... 955, 309
- $\cos 12^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1 + \sqrt{30+6\sqrt{5}})$ 956
- $22^\circ \frac{1}{2}$ 之三角函數 924, 311
- $2\cos \frac{45^\circ}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \text{至}(n+1)\text{項}}}}$ 981
- $\sin 27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(8 - 2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5})$ 960
- $\cos 27^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$ 959
- $\tan 27^\circ = \sqrt{5} - 1 - \sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$ 961
- $\cos 33^\circ 45' = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{(2 - \sqrt{2})}}$ 926
- $\tan 37^\circ \frac{1}{2} = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2$ 948
- $\cos 42^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{15} - \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})$ 962
- $\tan 52^\circ \frac{1}{2} = \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2$ 950
- $\sin 63^\circ = \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})} + \sqrt{5} - 1}{4\sqrt{2}}$ 965
- $67^\circ 30'$ 之三角函數 312
- $\sin 67^\circ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2 + \sqrt{2})}$ 927
- $\sin 81^\circ, \cos 81^\circ$ 978
- $\tan 82^\circ \frac{1}{2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)$ 951
- $\sin 87^\circ = \frac{1}{8}\{(\sqrt{5}-1)\sqrt{(2-\sqrt{3})} + \sqrt{(10+2\sqrt{5})(2+\sqrt{3})}\}$ 967
- $\tan 97^\circ.5$ 1181
- $\sin 105^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ 949
- $\cos 105^\circ = -\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ 949
- $\tan 112^\circ \frac{1}{2} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ 928
- $\sin 157^\circ.5, \cos 157^\circ.5$ 1173
- 知 $\sin 7846^\circ$, 求 $\sin \frac{7846^\circ}{2}$, 又示在 892 題之公式中之符

號 893

(6) 雜 題

- $\sin^4 22^\circ.5 + \sin^4 67^\circ.5 + \sin^4 112^\circ.5 + \sin^4 157^\circ.5 = \frac{1}{2}$... 1191
- $\sin 36^\circ \sin 72^\circ \sin 108^\circ \sin 144^\circ = \frac{1}{16}$... 1182
- $\sin 36^\circ \sin 30^\circ = \sin^2 33^\circ - \sin^2 3^\circ$... 1177
- $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{16}$... 935
- $\tan \frac{1}{10}\pi \tan \frac{3}{10}\pi = \frac{1}{\sqrt{5}}$... 972
- $\tan 6^\circ \tan 42^\circ \tan 66^\circ \tan 78^\circ = 1$... 1183
- $\sin^2 24^\circ - \sin^2 6^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$... 976
- $\sin^2 72^\circ - \sin^2 30^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{8}$... 976
- $\frac{\frac{1}{2}}{\sin 10^\circ} - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 2$... 929
- 簡化 $\cos 47^\circ - \cos 61^\circ - \cos 11^\circ + \cos 25^\circ$... 1186
- 簡化 $\cos 10^\circ + \sin 40^\circ$... 763
- 簡化 $\cos 80^\circ - \sin 70^\circ$... 763
- $\cot \frac{1}{3}\pi - \tan \frac{1}{3}\pi = 2$... 1177
- $(\tan 7^\circ \frac{1}{2} + \tan 37^\circ \frac{1}{2} + \tan 67^\circ \frac{1}{2})(\tan 22^\circ \frac{1}{2} + \tan 52^\circ \frac{1}{2} + \tan 82^\circ \frac{1}{2}) = 17 + 8\sqrt{3}$... 952
- $1 + \tan 65^\circ + \tan 70^\circ = \tan 65^\circ \tan 70^\circ$... 1187
- $\cos 47^\circ - \cos 61^\circ - \cos 11^\circ + \cos 25^\circ = \sin 7^\circ$... 817
- $4(\cos^3 10^\circ + \sin^3 20^\circ) = 3(\cos 10^\circ + \sin 20^\circ)$... 940
- $\sin 40^\circ - \sin 10^\circ = 2 \cos 25^\circ \sin 15^\circ$... 757
- $\cos^2 48^\circ - \sin^2 12^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{8}$... 976
- $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 0$... 814
- $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = 0$... 930
- $\cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{6}{7}\pi = -\frac{1}{2}$... 880
- $\cos \frac{11}{36}\pi + \cos \frac{13}{36}\pi + \cos \frac{35}{36}\pi = 0$... 931
- $\cos \frac{1}{13}\pi + \cos \frac{3}{13}\pi + \cos \frac{9}{13}\pi = \frac{1+\sqrt{13}}{4}$ 及 $\cos \frac{5}{13}\pi + \cos \frac{7}{13}\pi + \cos \frac{11}{13}\pi = \frac{1-\sqrt{13}}{4}$... 945
- $4 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$... 1176

- $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8} \dots \dots \dots \mathbf{936}$
- $\cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\frac{1}{8} \dots \dots \dots \mathbf{937}$
- $\cos 55^\circ \cos 65^\circ \cos 175^\circ = -\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} \dots \dots \dots \mathbf{1179}$
- $\cos^2 \frac{\pi}{7} \cos^4 \frac{\pi}{7} \cos^6 \frac{\pi}{7} = \frac{1}{8} \dots \dots \dots \mathbf{879}$
- $\cos^4 22.5^\circ + \cos^4 67.5^\circ + \cos^4 112.5^\circ + \cos^4 157.5^\circ = \frac{3}{2} \dots$
 $\dots \dots \dots \mathbf{1190}$
- $(\cos \frac{1}{3}\pi)^8 + (\cos \frac{2}{3}\pi)^8 + (\cos \frac{4}{3}\pi)^8 + (\cos \frac{5}{3}\pi)^8 = \frac{17}{8} \dots \mathbf{1178}$
- $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16} \dots \dots \dots \mathbf{938}$
- $16 \cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 96^\circ \cos 168^\circ = 1 \dots \dots \mathbf{1192}$
- $\cos 60^\circ + 2 \cos 70^\circ + \cos 80^\circ = 4 \cos^2 25^\circ \cos 70^\circ \dots \mathbf{939}$
- $\cos 84^\circ + \cos 60^\circ + \cos 12^\circ = \cos 48^\circ + \cos 24^\circ \dots \mathbf{1185}$
- $\cos 55^\circ \cos 65^\circ + \cos 65^\circ \cos 175^\circ + \cos 55^\circ \cos 175^\circ = -\frac{3}{4}$
 $\dots \dots \dots \mathbf{815}$
- $\cos 40^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ \cos 160^\circ + \cos 160^\circ \cos 40^\circ = -\frac{1}{4}$
 $\dots \dots \dots \mathbf{943}$
- $\sin 10^\circ \sin 50^\circ - \sin 10^\circ \sin 70^\circ - \sin 70^\circ \sin 50^\circ = -\frac{1}{4}$
 $\dots \dots \dots \mathbf{944}$
- $\cos^2 \frac{\pi}{7} \cos^4 \frac{\pi}{7} + \cos^4 \frac{\pi}{7} \cos^6 \frac{\pi}{7} + \cos^6 \frac{\pi}{7} \cos^2 \frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2} \dots \mathbf{932}$
- $\cos 24^\circ \cos 48^\circ \cos 72^\circ \cos 96^\circ \cos 120^\circ \cos 144^\circ \cos 168^\circ$
 $= (\frac{1}{2})^7 \dots \dots \dots \mathbf{977}$
- $\cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15} = (\frac{1}{2})^7$
 $\dots \dots \dots \mathbf{1180}$
- $\frac{(\tan 67\frac{1}{2}^\circ - \tan 7\frac{1}{2}^\circ)(\tan 127\frac{1}{2}^\circ + \tan 22\frac{1}{2}^\circ)}{(\tan 22\frac{1}{2}^\circ + \tan 7\frac{1}{2}^\circ)(\tan 127\frac{1}{2}^\circ - \tan 67\frac{1}{2}^\circ)} = 1 \dots \mathbf{953}$

VII. 雜

- 將角 A 二分, 令其分角之正弦之比等於 m:n $\dots \mathbf{608}$
- $\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2}$ 及 $\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2}$ 之符號之決定 $\dots \mathbf{899}$
- $2 \sin \frac{A}{2} = -\sqrt{1+\sin A} - \sqrt{1-\sin A}$ 時, $\frac{A}{2}$ 之界限 \dots
 $\dots \dots \dots \mathbf{900}$
- $2 \sin \frac{A}{2} = -\sqrt{1+\sin A} + \sqrt{1-\sin A}$ 時, $\frac{A}{2}$ 之界限 \dots
 $\dots \dots \dots \mathbf{901}$

- $2\sin\frac{A}{2} = +\sqrt{1+\sin A} - \sqrt{1-\sin A}$ 時, $\frac{A}{2}$ 之界限 ... 902
- $2\sin\frac{A}{2} = +\sqrt{1+\sin A} + \sqrt{1-\sin A}$ 時, $\frac{A}{2}$ 之界限 903
- 證 $\cos\frac{x}{3} = -\sin\frac{1}{3}(x - \frac{3}{2}\pi)$, 由是導三分之一之弧之餘弦之求法於三分之一之弧之正弦之求法... 911
- 以 $\tan\alpha$ 計算 $\tan\frac{\alpha}{3}$... 912
- 知 $\tan\alpha$ 求 $\tan\frac{\alpha}{3}$ 時, 得三值, 說明其理 ... 913
- $\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1-\sin A}$ 公式中之複符號, 得以 $(-1)^m$ 代之, 但 m 爲式 $\frac{270^\circ + A}{360^\circ}$ 中所含之最大整數, 角 A 以度表之 ... 921
- $\tan\frac{A}{2} = \frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 A} - 1}{\tan A}$ 公式中之複符號, 得以 $(-1)^m$ 代之, 但 m 爲式 $\frac{90^\circ + A}{180^\circ}$ 中所含之最大整數, 角 A 以度表之 ... 922
- 由方程式 $\cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$ 導出以 $\sin 2x$ 之項求 $\sin x$ 之公式, 又根號中決定之適當符號如何 ... 923
- 以 $\tan\frac{x}{2}$ 所表之 $\sin x, \cos x$ 爲有理式, 又此式之計算 ... 3018
- 知 $\tan\alpha$ 求 $\tan\frac{\alpha}{3}$ 之方程式不能有二等根 ... 3020
- $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 時, $\operatorname{cosec} 15^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$... 993
- $\cos\beta\sqrt{(a^2-x^2)} + a\sin\alpha = x\sin\beta$ 時, 求 x ... 994
- 不問 θ 之值如何, 得與 x, y, z 以定值, 使 $x\sin(\theta-\beta)\sin(\theta-\gamma) + y\sin(\theta-\gamma)\sin(\theta-\alpha) + z\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)$ 有已知之常數值 ... 1007
- 不問 θ 之如何, $a\sin^2\theta + b\sin\theta\cos\theta + c\cos^2\theta$ 之值介乎 $\frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}\sqrt{\{b^2 + (a-c)^2\}}$ 及 $\frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}\sqrt{\{b^2 + (a-c)^2\}}$ 之間 ... 1076
- 分解 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C - 1$ 爲因數 ... 1160

- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin A \sin B \sin C = 1$, 以四因數表之 1161
- 1145 題之結果中, 導出 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{2}$ 之二特款, 由是等特款導出 $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ [但 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$] 及 $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 1 + 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ [但 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}\pi$] 1171
- 求正切爲 $\sqrt{7} + \sqrt{6}$, $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ 之二銳角之和... 1015
- 連用知 $\tan \alpha$ 求 $\tan \frac{\alpha}{2}$ 之公式二次以計算 $\tan \frac{\alpha}{4}$ 906
- 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 中 x 之二值爲 $\tan A$, $\tan B$ 時, 求 $\tan(A+B)$ 之值 642
- 由三角形 ABC 之角頂 A, 至 BC 作垂線 AD, 而 BD, CD, AD 與 2, 3, 6 成比例時, 頂角之大小如何 1013
- 知 $\sec \alpha$ 及 $\sec \beta$, 求 $\sec(\alpha + \beta)$ 1005
- $x^2 \cos \alpha \cos(\alpha - \frac{1}{2}\beta) + x \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \frac{1}{2}\beta$ 時, 求 x 1167
- $\sec \alpha \cos(x+y) = 1 + \tan x \tan y$, $\sec \beta \cos(x-y) = 1 - \tan x \tan y$ 時, 求 $\cos(x-y)$ 及 $\cos(x+y)$... 1008
- $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A} \}$, 及 $\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A} \}$... 892
- $\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$, $\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$... 888

第五 三角形之性質

I. $A + B + C = 180^\circ$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

(1) \sin .

- $\sin(A + B + C) = 0$ 1193
- $\sin(A + B) = \sin C$ 1194
- $\sin \frac{1}{2}(A + B + C) = 1$ 1196
- $\sin \alpha \sin(\alpha + 2\gamma) + \sin \beta \sin(\beta + 2\alpha) + \sin \gamma \sin(\gamma + 2\beta) = 0$ 1217
- $\sin^2 \alpha \sin 2\gamma + \sin^2 \gamma \sin 2\alpha = \sin^2 \beta \sin 2\alpha + \sin^2 \alpha \sin 2\beta$

- 1220
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$... 1232
- $8(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \sin 2\alpha + \sin 2\beta$
 $+ \sin 2\gamma$ 1236
- $\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -4 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$...
 1239
- $\sin 6\alpha + \sin 6\beta + \sin 6\gamma = 4 \sin 3\alpha \sin 3\beta \sin 3\gamma$
 1240
- $\sin(A - 60^\circ) + \sin(B - 60^\circ) + \sin(C - 60^\circ) = -4 \sin(\frac{1}{2}A$
 $- 30^\circ) \sin(\frac{1}{2}B - 30^\circ) \sin(\frac{1}{2}C - 30^\circ)$ 1241
- $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - 1 = 4 \sin \frac{180^\circ - A}{4} \sin \frac{180^\circ - B}{4}$
 $\times \sin \frac{180^\circ - C}{4}$ 1246
- $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) = 4 \sin A$
 $\times \sin B \sin C$ 1248
- $\sin(B + 2C) + \sin(C + 2A) + \sin(A + 2B)$
 $= 4 \sin \frac{B - C}{2} \sin \frac{C - A}{2} \sin \frac{A - B}{2}$ 1250
- $\sin \frac{B + C - A}{2} + \sin \frac{C + A - B}{2} + \sin \frac{A + B - C}{2} - 1 = 4 \sin \frac{A}{2}$
 $\sin \frac{B}{2} \times \sin \frac{C}{2}$ 1252
- $\sin^2 \frac{C}{2} = \frac{(\sin B + \sin C - \sin A)(\sin C + \sin A - \sin B)}{4 \sin A \sin B}$...
 1256
- $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = -2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1$...
 1274
- $y \sin^2 A + x \sin^2 B = z \sin^2 B + y \sin^2 C = x \sin^2 C + z \sin^2 A$ 時,
 $x : y : z = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$ 1302

(2) sin. cos.

- $\sin \frac{1}{2}(A + B) = \cos \frac{1}{2}C$ 1197
- $\cos \frac{1}{2}(A + B) = \sin \frac{1}{2}C$ 1203
- $1 + \cos A \cos B \cos C = \cos A \sin B \sin C + \cos B \sin A \sin C$
 $+ \cos C \sin A \sin B$ 1211
- $\frac{\sin \alpha - \sin \beta \cos \gamma}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta - \sin \alpha \cos \gamma}{\cos \alpha}$ 1214

$$\bullet \sin A(\cos B + \cos C) + \sin B(\cos C + \cos A) + \sin C(\cos A + \cos B) = \sin A + \sin B + \sin C \quad \dots \dots \dots 1215$$

$$\bullet \sin a \sin \beta + \cos^2(a + \frac{1}{2}\gamma) = \cos^2 \frac{1}{2}\gamma \quad \dots \dots \dots 1219$$

$$\bullet \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \\ = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1 \quad \dots \dots \dots 1221$$

$$\bullet \cos 3a \sin(\beta - \gamma) + \cos 3\beta \sin(\gamma - a) + \cos 3\gamma \sin(a - \beta) \\ = -4 \sin(\beta - \gamma) \sin(\gamma - a) \sin(a - \beta) \dots \dots \dots 1222$$

$$\bullet \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad \dots 1224$$

$$\bullet \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \\ \times \cos \frac{C}{2} \quad \dots \dots \dots 1225$$

$$\bullet \sin A - \sin B + \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad \dots 1226$$

$$\bullet (\sin a + \sin \beta)(\cos \beta + \cos \gamma)(\cos \gamma + \cos a) + (\sin \beta + \sin \gamma) \\ \times (\cos \gamma + \cos a)(\cos a + \cos \beta) + (\sin \gamma + \sin a)(\cos a + \cos \beta)(\cos \beta + \cos \gamma) \\ = (\sin a + \sin \beta)(\sin \beta + \sin \gamma) \\ \times (\sin \gamma + \sin a) \dots \dots \dots 1229$$

$$\bullet \left(1 - \sin \frac{\beta}{2}\right) \left(1 - \sin \frac{\gamma}{2}\right) \cos \frac{a}{2} + \left(1 - \sin \frac{\gamma}{2}\right) \left(1 - \sin \frac{a}{2}\right) \\ \times \cos \frac{\beta}{2} + \left(1 - \sin \frac{a}{2}\right) \left(1 - \sin \frac{\beta}{2}\right) \cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta}{2} \\ \times \cos \frac{\gamma}{2} \quad \dots \dots \dots 1231$$

$$\bullet \sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C \dots 1234$$

$$\bullet \sin A \cos A - \sin B \cos B + \sin C \cos C = 2 \cos A \sin B \cos C \\ \dots \dots \dots 1235$$

$$\bullet \sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C \\ = 3 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C + \cos \frac{3}{2} A \cos \frac{3}{2} B \cos \frac{3}{2} C \quad \dots 1238$$

$$\bullet \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \dots 1245$$

$$\bullet \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2} \\ = 4 \cos \left(45^\circ - \frac{A}{4}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{B}{4}\right) \sin \left(45^\circ - \frac{C}{4}\right) - 1 \quad \dots \\ \dots \dots \dots 1247$$

$$\bullet \sin(B + C - A) - \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C)$$

- $\cos \frac{A}{2} - \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$
 $= 4 \cos \frac{180^\circ + A}{4} \cos \frac{180^\circ - B}{4} \cos \frac{180^\circ + C}{4} \dots \dots 1243$
- $\cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} = 4\Sigma \left(\Sigma - \cos \frac{A}{2} \right) \left(\Sigma - \cos \frac{B}{2} \right) \left(\Sigma - \cos \frac{C}{2} \right)$. 但 $2\Sigma = \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \dots \dots 1244$
- $\cos \left(\frac{3a}{2} + \beta - 2\gamma \right) + \cos \left(\frac{3\beta}{2} + \gamma - 2a \right) + \cos \left(\frac{3\gamma}{2} + a - 2\beta \right)$
 $= 4 \cos \frac{5a - 2\beta - \gamma}{4} \cos \frac{5\beta - 2\gamma - a}{4} \cos \frac{5\gamma - 2a - \beta}{4} \dots \dots 1253$
- $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \cos A \cos B \cos C + 1 = 0 \dots \dots 1261$
- $\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C + 1 = 4 \cos 2A \cos 2B \cos 2C \dots \dots 1265$
- $\cos^2 a + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos a \cos \beta \cos \gamma \dots \dots 1266$
- $\cos^4 a + \cos^4 \beta + \cos^4 \gamma$
 $= \frac{1}{2} (1 - 4 \cos a \cos \beta \cos \gamma + \cos 2a \cos 2\beta \cos 2\gamma) \dots \dots 1267$
- 三角形各角餘弦之平方和爲 1 時，其最大最小二角之差爲他角 $\dots \dots \dots 1379$

(4) \tan . 或 \cot .

- $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \dots \dots 1277$
- $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1 \dots \dots 1280$
- $\cot ma \cot m\beta + \cot m\beta \cot m\gamma + \cot m\gamma \cot ma = 1 \dots \dots 1286$
- $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ 成等差級數時， $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{C}{2} = 3 \dots \dots 1373$
- $\tan(A+B+C) = 0 \dots \dots \dots 1204$
- $\tan(A+B) = -\tan C \dots \dots \dots 1205$
- $\tan \frac{1}{2}(A+B+C) = \infty \dots \dots \dots 1206$
- $\tan \frac{1}{2}A = x, \tan \frac{1}{2}B = y$ 時， $\tan C$ 之值 $\dots \dots \dots 1208$
- $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C \dots \dots \dots 1275$
- $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1 \dots \dots 1278$

(5) \sin . \tan .

- $\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A-B}{2} \dots \dots \dots 1210$

- $(\sin B + \sin C - \sin A) / (\sin A + \sin B + \sin C) = \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$... 1223
- $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(\sin \alpha + \sin \gamma - \sin \beta)(\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma)}{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)(\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha)}$... 1254
- $\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma = 5:4:3$ 時, $\tan \alpha = \pm 1, \tan \beta = \pm 2, \tan \gamma = \pm 3$... 1296
- $\sin\left(A + \frac{C}{2}\right) = n \sin \frac{C}{2}$ 時, $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{n-1}{n+1}$... 1297
- 三角形各角之正弦成等差級數時, 其最大最小各角半分之正切之積爲 $\frac{1}{3}$... 1372

(6) sin. cot.

- 式 $\cot A + \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$, 雖將 A, B, C 之任何二角互換, 有同一之值 ... 1216
- $(\sin \beta - \sin \gamma) \cot \frac{\alpha}{2} + (\sin \gamma - \sin \alpha) \cot \frac{\beta}{2} + (\sin \alpha - \sin \beta) \cot \frac{\gamma}{2} = 0$... 1218
- $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = x : y : z$ 時,
 $(x - y) \cot \frac{\gamma}{2} + (y - z) \cot \frac{\alpha}{2} + (z - x) \cot \frac{\beta}{2} = 0$... 1299
- $\sin^3 \omega = \sin(\alpha - \omega) \sin(\beta - \omega) \sin(\gamma - \omega)$ 時,
 $\cot \omega = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma$... 1300
- \triangle 各角之正弦成等差級數時, 其各角半分之餘切亦成等差級數 ... 1371

(7) 其他二函數

- $\tan \alpha, \tan \beta, \tan \gamma$ 成等差級數時,
 $\cos(\beta + \gamma - \alpha) \frac{4 + 5 \cos 2\gamma}{5 + 4 \cos 2\gamma}$... 1298
- $\frac{1 - \tan B \tan C}{\cos^2 A} + \frac{1 - \tan C \tan A}{\cos^2 B} + \frac{1 - \tan A \tan B}{\cos^2 C}$
 $= \frac{3}{\cos A \cos B \cos C}$... 1200
- $\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \frac{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}{2 \cos A \cos B \cos C}$... 1276

- $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma$ 時, $\cot \beta \cot \gamma = \frac{1}{2}$ 1294
- $\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C + \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B$
 $\times \operatorname{cosec} C$ 1212
- $(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A)(\cot A + \cot B)$
 $= \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C$ 1195
- $\frac{\tan A}{\tan B} + \frac{\tan B}{\tan C} + \frac{\tan C}{\tan A} + \frac{\tan A}{\tan C} + \frac{\tan B}{\tan A} + \frac{\tan C}{\tan B}$
 $= \sec A \sec B \sec C - 2$ 1287
- $\cos \alpha \operatorname{cosec} \beta \operatorname{cosec} \gamma + \cos \beta \operatorname{cosec} \gamma \operatorname{cosec} \alpha + \cos \gamma \operatorname{cosec} \alpha$
 $\times \operatorname{cosec} \beta = 2$ 1233
- $\cot \frac{A+B}{2} = \tan \frac{C}{2}$ 及 $\tan \frac{A+B}{2} = \cot \frac{C}{2}$ 1207
- $\frac{\cot B + \cot C}{\tan B + \tan C} + \frac{\cot C + \cot A}{\tan C + \tan A} + \frac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} = 1$
 1281

(8) 三個函數

- $\sin \alpha = \cos \beta \cos \gamma$ 時, $\tan \beta + \tan \gamma = 1$ 1295
- $\tan \frac{1}{2} A + \cos \frac{1}{2} A \sec \frac{1}{2} B \sec \frac{1}{2} C = \tan \frac{1}{2} B + \cos \frac{1}{2} B \sec \frac{1}{2} C \sec \frac{1}{2} A$
 $= \tan \frac{1}{2} C + \cos \frac{1}{2} C \sec \frac{1}{2} A \sec \frac{1}{2} B$ 1227
- $\tan A - \cot B = \cos C \sec A \operatorname{cosec} B$ 1209
- $\left(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right) \left(\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} \right)$
 $= 1 + \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cosec} \frac{\beta}{2} \operatorname{cosec} \frac{\gamma}{2}$ 1279
- $\tan \frac{3\alpha}{2} = \frac{\sin 3\beta - \sin 3\gamma}{\cos 3\gamma - \sin 3\beta}$ 1213
- $\frac{\sin A}{\cos B} + \frac{\sin B}{\cos C} + \frac{\sin C}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos C} + \frac{\sin B}{\cos A} + \frac{\sin C}{\cos B}$
 $= \sin A + \sin B + \sin C + (\cos A + \cos B + \cos C) \tan A \tan B$
 $\times \tan C$ 1223
- $\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} = \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} + \sec \frac{\alpha}{2} \sec \frac{\beta}{2}$
 $\times \sec \frac{\gamma}{2} = (4 + 4 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma) / (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$
 1230
- $\sec^2 \beta + \sec^2 \gamma + 2 \sec \beta \sec \gamma \cos \alpha$
 $= \sec \beta \sec \gamma \sin \alpha (\tan \beta + \tan \gamma)$ 1292

II. 恆等式

(角有限制者)

- $\alpha + \beta + \gamma = 2s$ 時, $4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$
 $= \sin 2(s - \alpha) + \sin 2(s - \beta) + \sin 2(s - \gamma) - \sin 2s \dots \dots$
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **1324**
- $A + B + C + D = 360^\circ$ 時, $\sin A + \sin B + \sin C + \sin D$
 $= 4 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(B + C) \sin \frac{1}{2}(C + A) \dots \dots$ **1329**
- $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ 時, $\sin(\alpha + \gamma) \sin(\alpha + \delta)$
 $= \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta + \delta) \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **1332**
- $\sin(A + B + C + D) = 0$ 時, $\sin(A + C) \sin(A + D)$
 $= \sin(B + C) \sin(B + D) \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **1335**
- $A + B + C = 360^\circ$ 時, $2(\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A$
 $+ \cos C \sin A \sin B) + \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 0$ **1307**
- $\sin \alpha (1 + 2 \cos \beta) + \sin \beta (1 + 2 \cos \gamma) + \sin \gamma (1 + 2 \cos \alpha)$
 $= -4 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \sin \frac{\gamma - \alpha}{2}$, 但 $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi \dots \dots$
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **1309**
- $A + B + C = (2n + 1)\pi$ 時, $\left(1 - \sin \frac{B}{2}\right) \left(1 - \sin \frac{C}{2}\right) \cos \frac{A}{2}$
 $+ \left(1 - \sin \frac{C}{2}\right) \left(1 - \sin \frac{A}{2}\right) \cos \frac{B}{2} + \left(1 - \sin \frac{A}{2}\right) \left(1 - \sin \frac{B}{2}\right)$
 $\times \cos \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \dots \dots \dots \dots \dots$ **1311**
- $\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha = 2 \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$,
 但 $\alpha + \beta + \gamma = (2n + 1)\pi \dots \dots \dots \dots \dots$ **1312**
- $A + B + C = (2n + 1)\pi$ 時,
 $\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C = 2 \dots$
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **1315**
- $\alpha + \beta + \gamma = (2n + 1)\pi$ 或 $(2n + \frac{1}{2})\pi$ 時,
 $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \beta + \cos \beta)(\sin \gamma + \cos \gamma)$
 $= 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + 1 \dots$ **1316**
- $\alpha + \beta + \gamma = 2n\pi$, 或 $(2n - \frac{1}{2})\pi$ 時,
 $(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \beta + \cos \beta)(\sin \gamma + \cos \gamma)$
 $= 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 \dots$ **1317**
- $A + B + C = 2S$ 時,
 $1 + 2 \cos A \cos B \cos C - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$
 $= 4 \sin S \sin(S - A) \sin(S - B) \sin(S - C) \dots \dots$ **1321**

- $A+B+C+D=360^\circ$ 時, $\sin A - \sin B + \sin C - \sin D$
 $= 4 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(B+C) \sin \frac{1}{2}(C+A) \dots \dots 1330$
- $\cos \alpha - \cos \beta + \cos \gamma - \cos \delta = 4 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\gamma+\alpha}{2}$,
 但 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi \dots \dots \dots 1331$
- $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ 時,
 $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\delta}{2}$
 $= \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\gamma+\alpha}{2} \cos \frac{\alpha+\delta}{2} \dots \dots \dots 1333$
- $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2}$,
 但 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi \dots \dots \dots 1334$
- $\alpha+\beta+\gamma=2s$ 時, $\tan(s-\alpha) + \tan(s-\beta) + \tan(s-\gamma) - \tan s$
 $= \frac{4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \dots \dots 1325$
- $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, 但 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi \dots \dots \dots 1308$
- $\cos^4 \frac{\alpha}{2} + \cos^4 \frac{\beta}{2} + \cos^4 \frac{\gamma}{2} - 2 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) + 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 0$,
 但 $\alpha+\beta+\gamma=(2n+1)\pi \dots \dots \dots 1313$
- $\alpha+\beta+\gamma=2s$ 時,
 $1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma$
 $= 4 \cos s \cos(s-\alpha) \cos(s-\beta) \cos(s-\gamma) \dots \dots 1322$
- $1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 0$ 時, 求
 α, β, γ 間之關係 $\dots \dots \dots 1327$
- $A+B+C+D=360^\circ$ 時, $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D$
 $= 4 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(B+C) \cos \frac{1}{2}(C+A) \dots \dots 1328$
- $\cos \alpha = \frac{(d-a)(b-c)}{(d+a)(b+c)}$, $\cos \beta = \frac{(d-b)(c-a)}{(d+b)(c+a)}$,
 $\cos \gamma = \frac{(d-c)(a-b)}{(d+c)(a+b)}$ 時, $\tan \frac{1}{2} \alpha + \tan \frac{1}{2} \beta + \tan \frac{1}{2} \gamma = \pm 1$,
 但 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi \dots \dots \dots 1310$
- $s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ 及 $\cos(s-2\alpha) + \cos(s-2\beta)$
 $= \cos(s-2\gamma) + \cos(s-2\delta)$ 時, $\tan \alpha \tan \beta = \tan \gamma \tan \delta$
 $\dots \dots \dots 1326$
- 三角形之各角 A, B, C 成等差級數;
 $\operatorname{cosec} 2A, \operatorname{cosec} 2B, \operatorname{cosec} 2C$ 亦成等差級數時,

其角之公差之餘弦爲 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 1336

● $A+B+C=90^\circ$ 時,

$\tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B = 1$... 1303

● $A+B+C=m\pi$, m 爲任意整數時, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ 1319

● 四角之和爲二直角時, 其各角正切之和等於其正切三三相乘之積之和 1320

● $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma + \sec \alpha \sec \beta \sec \gamma$,
但 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}\pi$ 1304

● $(\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma)(\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma) = 1 + \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta \operatorname{cosec} \gamma$, 但 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$... 1305

● $\cot \alpha(\tan \beta + \tan \gamma) + \cot \beta(\tan \gamma + \tan \alpha) + \cot \gamma(\tan \alpha + \tan \beta) + 2 = \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta \operatorname{cosec} \gamma$, 但 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}\pi$
... .. 1306

● $\alpha + \beta + \gamma = (2n+1)\pi$ 時,
 $\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma - 2(\cot 2\alpha + \cot 2\beta + \cot 2\gamma) = \left(\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2}\right)(\sec \alpha - 1)(\sec \beta - 1)(\sec \gamma - 1)$
... .. 1314

III. 直角三角形 (C 爲直角)

● $\sin 2A = \sin 2B$ 1337

● $\sin(A-B) + \sin(2A+C) = 0$ 1340

● $\sin 2A = \frac{2ab}{c^2}$ 1350

● $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{c-b}{2c}$ 1353

● $\sin 3A = \frac{3ab - a^3}{c^3}$ 1357

● $\sin(A-B) + \cos 2A = 0$ 1339

● $(\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B)^2 = 2$ 1342

● $\cos 2B = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B}$ 1343

● 直角 \triangle 中, 其各邊等於隣角之餘弦乘斜邊之積, 又等於對角之正弦乘斜邊之積 1347

● $\left(\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}\right)^2 = \frac{a+c}{c}$ 1349

● $\cos 2A + \cos 2B = 0$ 1338

● $\cos(A-B) + \cos(2A+C) = 0$ 1341

- 直角 \triangle 之斜邊等於直角之各邊乘其傍角之餘弦之積之和
 1348
- $\cos 2A = \frac{b^2 - a^2}{c^2}$ 1351
- $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$ 1354
- $\cos(2A - B) = \frac{a(3c^2 - 4a^2)}{c^3}$ 1355
- $\cos 3A = \frac{b^3 - 3a^2b}{c^3}$ 1356
- $\tan^2\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right) = \tan^2 \frac{B}{2}$ 1344
- $\tan A + \tan B = \frac{c^2}{ab}$ 1359
- $\tan 2A = \frac{2ab}{b^2 - a^2}$ 1360
- $\tan \frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$ 1362
- $\tan \frac{B}{2} = \frac{c-a}{b}$ 1363
- $\frac{a-b}{a+b} = \tan \frac{A-B}{2}$ 1364
- $\tan^2(45^\circ - \frac{1}{2}A) = \frac{c-a}{c+a}$ 1365
- $\tan^2(45^\circ + \frac{1}{2}A) = \frac{c+a}{c-a}$ 1366
- $\tan^2(45^\circ + \frac{1}{2}A) = \cot^2 \frac{1}{2}B$ 1345
- $\tan B = \cot A + \cot C$ 1346
- 直角 \triangle 中,其直角傍之各邊,等於對角之正切乘他一邊之積,又等於隣角之餘切乘他一邊之積 1358
- $\cot \frac{A}{2} = \frac{b+c}{a}$ 1361
- $\operatorname{cosec} 2B = \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a}$ 1352
- $a+b=3c$ 成立時,計算直角 \triangle 之角 1367
- $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{2 \sin A}{\sqrt{\cos 2B}}$ 1368
- 在直角二等邊三角形二邊之延線上,取距頂角等遠之二點,而以長為底邊 n 倍之直線聯結之,則所成之四邊形,其對角線之交角為 $2 \tan^{-1} \frac{n-1}{n+1}$ 3027

- 求直角 $\triangle ABC$ 中, 內切圓之中心至 \triangle 三角頂之距離 α, β, γ 間所成立之關係 3024
- 直角 $\triangle ABC$ 中, 直角傍之二邊 $AB = 2mn, AC = m^2 - n^2$ 已知, 以 m 及 n 之函數求 $\tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ 3022

IV. 任意三角形 (ABC)

(1) sin.

- 各邊與對角之正弦成比例 1381
- $\frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C}$ 1383
- $\frac{\sin A + 2 \sin B}{a + 2b} = \frac{\sin C}{c}$ 1384
- $b \sin B - c \sin C = a \sin(B - C)$ 1386
- $\frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}$ 1389
- $a \sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b + c) \sin \frac{A}{2}$ 1390
- $a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0$... 1400
- $b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B = 2bc \sin A$ 1418
- $b^2 \sin 2C - c^2 \sin 2B = 2bc \sin(B - C)$ 1419
- $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{(a + 2b - 3c) \sin A}{\sin A + 2 \sin B - 3 \sin C}}$ 1423
- $(b + c) \sqrt{bc \sin B \sin C} = b^2 \sin C + c^2 \sin B$... 1424
- $c(\sin^2 A + \sin^2 B) = \sin C(a \sin A + b \sin B)$... 1425
- $\frac{\sin^2 A - m \sin^2 B}{a^2 - mb^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2}$ 1426
- $(b^2 - c^2) \sin A = a^2 \sin(B - C)$ 1427
- $\frac{\sin(A - B)}{ab} + \frac{\sin(B - C)}{bc} + \frac{\sin(C - A)}{ca} = 0$ 1431
- $\frac{a^2 \sin(B - C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin C} = 0$... 1432
- $\frac{a \sin(B - C)}{b^2 - c^2} = \frac{b \sin(C - A)}{c^2 - a^2} = \frac{c \sin(A - B)}{a^2 - b^2}$ 1433
- $\frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = 0$ 1436
- $a \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B - C}{2} + b \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C - A}{2} + c \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A - B}{2} = 0$
 1444

(?) \cos .

- $\frac{b+c}{a} = (\cos B + \cos C) / (1 - \cos A) \dots \dots \dots 1385$
- $b \cos B + c \cos C = a \cos(B - C) \dots \dots \dots 1387$
- $c(a \cos B - b \cos A) = a^2 - b^2 \dots \dots \dots 1391$
- $a \cos A + b \cos B - c \cos C = 2c \cos A \cos B \dots \dots 1395$
- $\left(a \cos^2 \frac{A}{2} + b \cos^2 \frac{B}{2} + c \cos^2 \frac{C}{2} \right) / (\cos A + \cos B + \cos C)$
 $= \frac{a+b+c}{2} \dots \dots \dots 1397$
- $a(\cos B \cos C + \cos A) = b(\cos A \cos C + \cos B) = c(\cos A$
 $\times \cos B + \cos C) \dots \dots \dots 1398$
- $a(\cos C - \cos B) = 2(b - c) \cos^2 \frac{A}{2} \dots \dots \dots 1403$
- $\frac{1 + \cos(A - B) \cos C}{1 + \cos(A - C) \cos B} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2} \dots \dots \dots 1406$
- $\frac{b-c}{a} \cos^2 \frac{A}{2} + \frac{c-a}{b} \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{a-b}{c} \cos^2 \frac{C}{2} = 0 \dots \dots 1408$
- $\frac{a^2 - b^2}{\cos A + \cos B} + \frac{b^2 - c^2}{\cos B + \cos C} + \frac{c^2 - a^2}{\cos C + \cos A} = 0 \dots 1409$
- $\frac{(\cos B + \cos C)(1 + 2 \cos A)}{1 + \cos A - 2 \cos^2 A} = \frac{b+c}{a} \dots \dots \dots 1410$
- $c(1 - \cos^2 B - \cos^2 A) = \cos C(a \cos A + b \cos B) \dots 1414$
- $a \cos A \cos 2B + b \cos B \cos 2A + c \cos C = 0 \dots \dots 1415$
- $(a^2 - b^2) \cos C = c(b \cos B - a \cos A) \dots \dots \dots 1428$
- $a^2(\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2(\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2(\cos^2 A - \cos^2 B)$
 $= 0 \dots \dots \dots 1429$
- $\frac{a \cos \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}} + \frac{b \cos \frac{C-A}{2}}{\cos \frac{C+A}{2}} + \frac{c \cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} = 2(a+b+c) \dots 1435$
- $\sqrt{c + (a-b) \cos \frac{C}{2}} + \sqrt{c - (a-b) \cos \frac{C}{2}} = 2\sqrt{c} \cos \frac{A-B}{4} \dots$
 $\dots \dots \dots 1438$
- $\frac{a \cos 2(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{b \cos 2(C-A)}{\cos C \cos A} + \frac{c \cos 2(A-B)}{\cos A \cos B} = 8(a \cos A$
 $+ b \cos B + c \cos C) \dots \dots \dots 1440$
- $a^3 \cos 3B + b^3 \cos 3A = c^3 - 3abc \cos(A-B) \dots \dots 1441$
- $\frac{a^2 \cos \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}(B+C)} + \frac{b^2 \cos \frac{1}{2}(C-A)}{\cos \frac{1}{2}(C+A)} + \frac{c^2 \cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} = 2(ab + bc$

- +ca) 1449
- $\frac{\cos A}{b} = \frac{\cos B}{a}$ 時, \triangle 爲二等邊或直角 \triangle 1451
- $A = 2B$ 時, $a = 2b \cos B$ 1452
- $b - a = mc$ 時, $\cos\left(A + \frac{C}{2}\right) = m \cos \frac{C}{2}$ 1454
- $a^2 = bc$ 時, $\cos(B - C) = 1 - \cos A - \cos 2A$ 1458
- 由角頂 A 至底引垂線 AD , 由 D 至邊 AB , AC 引垂線 DE , DF , 則 $AE \cdot EB \cos^2 C = AF \cdot FC \cos^2 B$ 1462
- 有各邊成等差級數之 \triangle , 其最大及最小角爲 θ 及 ϕ , 則 $4(1 - \cos \theta)(1 - \cos \phi) = \cos \theta + \cos \phi$ 1470
- $a = c \cos B + b \cos C$, $b = a \cos C + c \cos A$, $c = b \cos A + a \cos B$ 1476
- $\frac{\cos B}{\cos C} = \frac{c - b \cos A}{b - c \cos A}$ 1477
- $\frac{a - b}{c} = \frac{\cos B - \cos A}{1 + \cos C}$ 1478
- $(a + b + c)(\cos A + \cos B + \cos C) = 2a \cos^2 \frac{A}{2} + 2b \cos^2 \frac{B}{2} + 2c \cos^2 \frac{C}{2}$ 1480
- $a(b^2 + c^2) \cos A + b(c^2 + a^2) \cos B + c(a^2 + b^2) \cos C = 3abc$ 1481
- $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 1484
- $a : b : c = 2 : 3 : 4$ 時, $\cos A = \frac{7}{8}$, $\cos B = \frac{11}{16}$, $\cos C = -\frac{1}{4}$ 1485
- $b = 6$, $c = 4$, $\cos A = \frac{1}{2}$ 時, $a = 6$ 1486
- $a = 2c$, $b = 3c$ 時, $\cos B = -1$ 1487
- $b + c : c + a : a + b = 4 : 5 : 6$ 時, $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ 之值 1489
- $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$ 1494
- $a^2 - 2ab \cos(60^\circ + C) = c^2 - 2bc \cos(60^\circ + A)$ 1495
- $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = c \left(\frac{\cos B}{b} - \frac{\cos A}{a} \right)$ 1493
- $\frac{a}{\cos B} - \frac{b}{\cos A} = \cos C \left(\frac{b}{\cos B} - \frac{a}{\cos A} \right)$ 1499

- $\frac{b^2 \cos A}{a} + \frac{c^2 \cos B}{b} + \frac{a^2 \cos C}{c} = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{2abc} \dots \dots 1502$
- $b^2 \cos 2C + 2bc \cos(B - C) + c^2 \cos 2B = a^2 \dots \dots 1506$
- $a^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}) \cos A + b^{\frac{1}{2}}(c^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}}) \cos B + c^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}) \cos C$
 $= a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}) \dots \dots \dots 1507$
- $a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$, 但 $s = \frac{1}{2}$
 $\times (a+b+c) \dots \dots \dots 1508$
- $s(s-a) - (s-b)(s-c) = bc \cos A$, 但 $s = \frac{1}{2}(a+b+c) \dots$
 $\dots \dots \dots 1509$
- $2 \cos A + \cos B + \cos C = 2$ 時, $2a = b+c \dots \dots \dots$
 $\dots \dots \dots 1511, 1543$
- 角 A, B, C 成等差級數時, $2 \cos \frac{A-C}{2} = \frac{a+c}{b}$
 $= \frac{a+c}{\sqrt{(a^2-ac+c^2)}} \dots \dots \dots 1517$
- $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{a+b+c}{2} \dots \dots \dots 1530$
- $4 \left(bc \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cos^2 \frac{C}{2} \right) = (a+b+c)^2 \dots$
 $\dots \dots \dots 1531$
- $\cos^2 \frac{A}{2} / a + \cos^2 \frac{B}{2} / b + \cos^2 \frac{C}{2} / c = \frac{s^2}{abc} \dots 1532$
- $a \left(b \cos^2 \frac{C}{2} - c \cos^2 \frac{B}{2} \right)^2 = (b-c) \left(b^2 \cos^2 \frac{C}{2} - c^2 \cos^2 \frac{B}{2} \right)$
 $\dots \dots \dots 1534$
- a, b, c 成等差級數時, $\cos \frac{1}{2}(A-C) = 2 \cos \frac{1}{2}(A+C) \dots \dots$
 $\dots \dots \dots 1541$
- a, b, c 成等差級數時, $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3}{2}b \dots \dots$
 $\dots \dots \dots 1547$
- $\frac{\cos A \cos B}{ab} + \frac{\cos B \cos C}{bc} + \frac{\cos C \cos A}{ca} = \frac{\sin^2 A}{a^2} \dots 1551$
- 由 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 證 $a < b+c \dots \dots 1552$
- 欲令 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 中實數角 A 成立, 正數 $a, b,$
 c 間須具如何之條件 $\dots \dots \dots 3021$
- \triangle 之高, 將頂角分爲二, 而兩分角之餘弦與兩隣邊成反比
 例 $\dots \dots \dots 1369$
- a, b, c 成等差級數時, $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2} \dots 1482$

(3) \sin . \cos .

- 各邊 a, b, c 成等差級數時, $\cos \frac{A-C}{2} = 2 \sin \frac{B}{2}$ 1482
- $\cos B = \frac{\sin A}{2 \sin C}$ 時, 此 \triangle 爲二等邊 1378
- $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{m}{n}$ 及 $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{p}{q}$ 時, $\cos C = \frac{mp-nq}{np-mq}$... 1380
- $2(a \cos A - b \cos B) \sin C = c(\sin 2A - \sin 2B)$... 1388
- $a(\cos B + \cos C) = 2(b+c) \sin^2 \frac{A}{2}$ 1392
- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{2a \sin B \sin C}{a+b+c}$ 1393
- $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C$... 1394
- $\frac{a}{2 \sin A} = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$ 1396
- $(a+b) \sin \frac{C}{2} = c \cos \frac{A-B}{2}$ 1401
- $(b-c) \cos \frac{A}{2} = a \sin \frac{B-C}{2}$ 1402
- $(b+c)^2 \sin^2 \frac{A}{2} + (b-c)^2 \cos^2 \frac{A}{2} = a^2$ 1404, 1490, 1501
- $(a-b) \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2} = (a+b) \sin \frac{A-B}{2} \sin \frac{C}{2}$... 1405
- $a \sin(B-C) \cos(B+C-A) + b \sin(C-A) \cos(C+A-B) + c \times \sin(A-B) \cos(A+B-C) = 0$ 1416
- $a \sin^2 C = c(\cos C \cos A + \cos B)$ 1417
- $4(a \sin A + b \sin B + c \sin C) \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = (a+b+c) \times (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$ 1422
- $\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\cos A \cos B}{ab} + \frac{\cos A \cos C}{ac} + \frac{\cos B \cos C}{bc}$ 1430
- $\left\{ \frac{2(a^2 - b^2)}{\cos 2B - \cos 2A} \right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{abc}{\sin A \sin B \sin C}$ 1437
- $a \cos(B-C) + b \cos(C-A) + c \cos(A-B) + a \cos A + b \cos B + c \cos C = 6a \sin B \sin C$ 1443
- $\left(\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{a+b+c} \right)^2 = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{2abc}$ 1450
- θ 爲由 $\cos \theta = \frac{a-b}{c}$ 所決定之角, 則任意 \triangle 中, $\cos \frac{A-B}{2}$

- $= \frac{(a+b)\sin \theta}{2\sqrt{(ab)}}, \cos \frac{A+B}{2} = \frac{c \sin \theta}{2\sqrt{(ab)}} \dots \dots \dots 1469$
- $\frac{a \cos B - b \cos A}{\sin(A-B)} = \frac{c}{\sin C} \dots \dots \dots 1496$
- $\frac{a - c \cos B}{b - c \cos A} = \frac{\sin B}{\sin A} \dots \dots \dots 1497$
- $\frac{\cos A}{b} - \frac{\cos B}{a} = \frac{\cos C}{c} \left(\frac{\sin B}{\sin A} - \frac{\sin A}{\sin B} \right) \dots \dots \dots 1500$
- \triangle 之二邊爲 $x + y \cos A, y + x \cos A$, 其間之角爲 A , 第三邊爲 a , 則 $a = \sin A(x^2 + y^2 + 2xy \cos A)^{\frac{1}{2}} \dots 1512$
- $\sin A, \sin B, \sin C$ 成調和級數, 則 $1 - \cos A, 1 - \cos B, 1 - \cos C$ 亦成調和級數 $\dots \dots \dots 1539$
- a, b, c 成調和級數, 則 $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin C \sin A}{\cos C + \cos A}} \dots 1542$
- 二等分角 A , 止於底之直線之長爲 l, θ 爲其與底所成之角, $2s$ 爲三角形之周時, $s \left(\sin \theta - \sin \frac{A}{2} \right) = l \sin \theta \cos \frac{A}{2} \dots$
 $\dots \dots \dots 1545$

(4) $\tan.$

- $\frac{\tan \frac{A}{2} - \tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}} = \frac{a-b}{c} \dots \dots \dots 1420$
- $\frac{\tan A - \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{c-b}{c}$ 時, $A = 60^\circ \dots \dots \dots 1460$
- $a \tan A + b \tan B = (a+b) \tan \frac{A+B}{2}$ 時, $A = B \dots 1461$
- 各邊爲 a, b, c , 其對角爲 $2\theta, 3\theta, 4\theta$ 時, $\tan^2 \theta = \left(\frac{2b}{a+c} \right)^2 - 1 \dots \dots \dots 1463$
- \triangle 之底分爲三等部, t_1, t_2, t_3 爲其各部張於頂點之角之正切, 則 $\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) \left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) = 4 \left(1 + \frac{1}{t_2} \right) \dots \dots 1466$
- $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2} \dots \dots \dots 1503$
- $1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{2c}{a+b+c} \dots \dots \dots 1521$
- $\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = \frac{b+c-a}{b+c+a} \dots \dots \dots 1522$

- $(b+c-a)\tan\frac{A}{2}=(c+a-b)\tan\frac{B}{2}=(a+b-c)\tan\frac{C}{2}$, 即
 $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$... 1523
- $a=35, b=84, c=91$ 時, $\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{5}, \tan\frac{B}{2}=\frac{2}{3}, \tan\frac{C}{2}$
 $=1$ 1524
- $\tan\frac{A}{2}=\frac{5}{6}, \tan\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$ 時, 求 $\tan\frac{C}{2}$ 及 $\tan C$, 且 $a+c$
 $=2b$ 1525
- $\frac{bc}{(b-a)(c-a)}\tan^2\frac{B}{2}\tan^2\frac{C}{2}+\frac{ca}{(c-b)(a-b)}\tan^2\frac{C}{2}\tan^2\frac{A}{2}$
 $+\frac{ab}{(a-c)(b-c)}\tan^2\frac{A}{2}\tan^2\frac{B}{2}=1$ 1537
- a, b, c 成等差級數時, $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$ 1548

(5) cot.

- 高將底邊分成比例於兩底角餘切之部分... .. 1370
- $(a-b)\cot\frac{C}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(b-c)\cot\frac{A}{2}=0$... 1407
- $\frac{\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{B}{2}}{b-c}=\frac{\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{C}{2}}{c-a}=\frac{\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{A}{2}}{a-b}$ 1434
- $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$ 1442
- 邊 BC 之中點為 D, 則 $\cot BAD-\cot B=2\cot A$ 1464
- a^2, b^2, c^2 成等差級數時, $\cot A, \cot B, \cot C$ 亦成等差級數... .. 1473
- 角頂 A 與 BC 上之點 P 聯結時, $EP\cot PAB-CP\cot PAC$
 $=CP\cot B-BP\cot C$ 1475
- 三角形各角之餘切成等差級數時, 其各邊之平方亦成等差級數... .. 1518
- $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{a+b+c}{b+c-a}\cot\frac{A}{2}$ 1526
- $\frac{\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C}{\cot\frac{1}{2}A}=\frac{a}{s-a}$ 1528

(6) 他 一 函 數

- $\frac{\text{vers } A}{\text{vers } B}=\frac{a(c+a-b)}{b(b+c-a)}$ 1533

- $\triangle ABC$ 之外角爲 A' , B' , C' 時, $2bc \text{ vers } A' + 2ca \text{ vers } B' + 2ab \text{ vers } C' = (a+b+c)^2$ 1546
- $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成等差級數時, $\text{cosec}^2 \frac{A}{2}, \text{cosec}^2 \frac{B}{2}, \text{cosec}^2 \frac{C}{2}$ 亦成等差級數... .. 1540
- a^2, b^2, c^2 成等差級數時, $a \sec A, b \sec B, c \sec C$ 成調和級數... .. 1519
- $a^2(s-a)\sec^2 \frac{A}{2} + b^2(s-b)\sec^2 \frac{B}{2} + c^2(s-c)\sec^2 \frac{C}{2} = 2abc$
... .. 1527

(7) 他二函數

- $\frac{b}{c}(\cot A + \cot B) = \text{cosec } A$ 1412
- $\cos B - \cot A = \frac{a^2 - b^2}{ab} \text{cosec } C$ 1413
- $\frac{\cot \frac{1}{2}A - \text{cosec} \frac{1}{2}A}{\cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C} = \frac{b+c-a}{2a}$ 1529
- $\cot \frac{A}{4} - \text{cosec} \frac{A}{2} : \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = b+c-a : 2a$ 1538
- 周爲 $2c \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sec \frac{A+B}{2}$ 1471
- $a \sin \frac{1}{2}(B-C) \sec \frac{1}{2}A + b \sin \frac{1}{2}(C-A) \sec \frac{1}{2}B + c \sin \frac{1}{2}(A-B) \times \sec \frac{1}{2}C = 0$ 1446
- \triangle 之一角分成二部, 令其各部之正弦如隣邊之比時, 其餘切之差等於其隣邊對角之餘切之差 1465
- $\cot A + \cot B = \frac{c}{b \sin A}$ 1411
- $a \sec A + b \sec B + c \sec C = a \sec A \tan B \tan C$ 1421
- $(b \tan \frac{B}{2} - c \tan \frac{C}{2}) \cos^2 \frac{B+C}{2} + (c \tan \frac{C}{2} - a \tan \frac{A}{2}) \times \cos^2 \frac{C+A}{2} + (a \tan \frac{A}{2} - b \tan \frac{B}{2}) \cos^2 \frac{A+B}{2} = 0$ 1439
- 邊 BC 二等分於 D , 引 AD , 則 $\tan \angle ADB = \frac{2bc \sin A}{b^2 - c^2}$ 1515
- $\cos \theta = \frac{a}{b+c}, \cos \phi = \frac{b}{c+a}, \cos \psi = \frac{c}{a+b}$ 時, $\tan^2 \frac{\theta}{2} + \tan^2 \frac{\phi}{2} + \tan^2 \frac{\psi}{2} = 1$, 及 $\tan \frac{\theta}{2} \tan \frac{\phi}{2} \tan \frac{\psi}{2} = \pm \tan \frac{A}{2}$
 $\times \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$ 1549

- $\tan A(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A) = \tan B(\sin^2 C + \sin^2 A - \sin^2 B)$
 1504
- $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin A}{\sin B}$ 時, \triangle 爲二等邊 1375
- $\frac{\tan B}{\tan C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$ 時, \triangle 爲二等邊, 成直角 \triangle ... 1377

(8) 三 函 數

- 若 $b - a = mc$, 則 $\cot \frac{B-A}{2} = \frac{1+m \cos B}{m \sin B}$ 1455
- $b \cos A \cot B + c \cot C = a \sin B$ 1399
- 由 \triangle 各角頂順次引三直線, 令與三邊分別在同方成角 α , 則此三直線相交而生之 \triangle 與原形相似, 其邊長之比爲 $\cos \alpha - \sin \alpha (\cot A + \cot B + \cot C)$: : 1468
- 若 $\tan \phi = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b} \sin \frac{C}{2}$, 則 $c = \pm (a-b) \sec \phi$ 1516
- $\tan A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}$ 1479

(9) 雜 題

- $\triangle ABC$ 中, 若 $b = c$, $A = 60^\circ$, 則 \triangle 等邊 1374
- 設三角爲 30° , 60° 及 90° , 則其對邊順次成比 $1 : \sqrt{3} : 2$
 1382
- 若 $C = 2B$, 則 $c^2 - b^2 = ab$ 1453
- $a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 則 $A = 15^\circ$, $B = 45^\circ$, $C = 120^\circ$ 1488
- 各邊爲 $x^2 + x + 1$, $2x + 1$, $x^2 - 1$ 時, 則其最大角爲 120°
 1491
- 三邊爲 m , n , $\sqrt{m^2 + mn + n^2}$ 時, 則其最大角爲 120°
 1492
- 三邊爲 3 , 4 , $\sqrt{38}$ 時, 其最大角如何? 1493
- $C = 60^\circ$ 時, 則 $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ 1513
- $a^2 = b^2 + bc + c^2$ 時, 求角 A 之大小 1514
- 設 a , b , c 成等差級數, 且 $C - A = 90^\circ$ 時, 則三邊之比爲 $\sqrt{7} + 1 : \sqrt{7} : \sqrt{7} - 1$. 但 C 爲最大角, A 爲最小角 ...
 1544
- 若已知一邊 a 及二角 B , C , 試求自邊之中點, 至其對角

與其外角之二等分線與此邊之交點之距離，又是等二距離間成如何之關係 3026

V. 內切圓外接圓面積等

(1) 面積 (一)

- 試求表面積 [S 或 Δ] 之公式 $\frac{1}{2}ac \sin B$,
 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $\frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}$, 或 $\frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin(A+C)}$,
 等 1553
- 設 $B = 45^\circ$, $C = 60^\circ$, $a = 2(\sqrt{3} + 1)$, 則 $S = 6 + 2\sqrt{3}$ 1554
- 設 $a = 35$, $b = 84$, $c = 91$, 則 $S = 1470$ 1555
- 設三邊為 $\frac{x}{y} + \frac{y}{z}$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, $\frac{z}{x} + \frac{x}{y}$, 則面積 $S = \sqrt{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)}$ 1556
- 在二等邊直角△內，作一等邊△，令其各角頂在原△之各邊上，且其一邊平行於原△之斜邊，命原△等邊之一為 a ，則所作等邊△之面積為 $2a^2 \sin 60 (\sin 15^\circ)^2$ 1557
- $s^2 / (\cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C) = S$ 1560
- $\frac{a^2}{2(\cot B + \cot C)} = S$ 1561
- $\left(\frac{a^2}{\sin A} + \frac{b^2}{\sin B} + \frac{c^2}{\sin C}\right) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = S$ 1562
- $S = \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A)$ 1564
- $S = \frac{a^2 - b^2}{2} \times \frac{\sin A \sin B}{\sin(A-B)}$ 1565
- $S = \frac{2abc}{a+b+c} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ 1566
- 面積 $\Delta = s(s-a) \tan \frac{A}{2}$ 1567
- $a^2 \{ \cos(B-C) + \cos A \} / 4 \sin A = S$ 1568
- $\frac{1}{4} \{ (a^2 + b^2) \sin 2C + (b^2 + c^2) \sin 2A + (c^2 + a^2) \sin 2B \} = S$
 1571
- 設各邊比例於 $gh(k^2 + l^2)$, $kl(g^2 + h^2)$, $(hk + gl)(hl - gk)$ ，則其面積及角之三角函數俱為有理數 1559
- 引所設角之一邊之垂線，以其在角之二邊間之部分為底，以所設之一點為頂點，作△，令其面積等於所設面積，且玩

索之 1651

- $S = \frac{1}{2}la(b+c)\sin\frac{A}{2}$, 或 $\frac{1}{2}la'(b-c)\cos\frac{A}{2}$, 但 la 及 la' 各爲角 A 及其外角之二等分線之長 3025

(2) 面積 (二)

- 內切圓之面積爲 A , 傍切圓之面積爲 A_1, A_2, A_3 則 $\frac{1}{\sqrt{A}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{A_1}} + \frac{1}{\sqrt{A_2}} + \frac{1}{\sqrt{A_3}}$ 1595
- 內切圓面積與 Δ 面積之比爲 $\pi : \cot\frac{A}{2} \cot\frac{B}{2} \cot\frac{C}{2}$ 1575
- 設 ΔABC 之傍切圓之中心爲 O_1, O_2, O_3 , 則 $\Delta O_1O_2O_3$ 之面積等於 ΔABC 之面積與 $1 + \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c}$ 之積 1695
- 設 Δ 之內切圓之半徑爲 r , 則聯結其傍切圓中心而生之 Δ 之面積爲 $\frac{abc}{2r}$ 1696
- 延長各角之二等分線, 令交其外接圓, 則聯結三交點而成之 Δ 之面積爲 $\frac{R^2}{2}$ 1747
- 內切圓, 或一傍切圓之三切點聯結而生之 Δ 之面積爲 $\frac{aS}{2R}$. 但 ρ 爲圓之半徑 [即內切圓時爲 r , 傍切圓時爲 r_1, \dots] 1748
- 內切圓之中心與角 A 及 B 所對之傍切圓之中心聯結而成之 Δ 之面積爲 $\frac{abc}{2} \cot\frac{C}{2}$ 1751
- 三傍心兩兩聯結而成之 Δ 之面積爲 $\frac{abc}{2} \left\{ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \tan\frac{C}{2} + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \tan\frac{A}{2} + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \tan\frac{B}{2} \right\}$ 1755
- 各邊成等差級數之 Δ , 其面積與同周等邊 Δ 面積之比如 3 與 5 時, 求其三邊之比及最大角 1558
- $8S^2(\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 1) = a^4 + b^4 + c^4$ 1569
- $(b^2 - c^2)\cot^2\frac{A}{2} + (c^2 - a^2)\cot^2\frac{B}{2} + (a^2 - b^2)\cot^2\frac{C}{2} + 2s^2(a - b)(b - c)(c - a)/S^2 = 0$ 1570
- 任意 Δ 之面積與以此 Δ 之三中線所成之 Δ 之面積之比如

4 與 3 1759

(3) 內切圓外接圓等之半徑

- Δ 之內切圓之半徑 $r = \frac{S}{s}$ 1572
- $r = a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} / \cos \frac{A}{2}$, 及 $r = (s-a) \tan \frac{A}{2}$, 等 1573
- 試求 Δ 之傍切圓之半徑 r_1, r_2, r_3 1576
- $r_1 = a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} / \cos \frac{A}{2}$, 或 $r_1 = s \tan \frac{A}{2}$, 等 1577
- $\frac{s}{r} = \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}$ 1574
- $\frac{a \tan \frac{A}{2}}{r_1 - r} = \frac{b \tan \frac{B}{2}}{r_2 - r} = \frac{c \tan \frac{C}{2}}{r_3 - r}$ 1578
- $rr_1 \cot \frac{A}{2} = \Delta$ 1579
- $\sqrt{rr_1 r_2 r_3} = \Delta$ 1580
- $3\sqrt{\frac{r_1 r_2 r_3}{r}} - \sqrt{\frac{rr_2 r_3}{r_1}} - \sqrt{\frac{rr_3 r_1}{r_2}} - \sqrt{\frac{rr_1 r_2}{r_3}} = 2s$... 1581
- $r_1 + r_2 = c \cot \frac{C}{2}$ 1582
- $\frac{r_1 - r}{a} + \frac{r_2 - r}{b} = \frac{c}{r_3}$ 1587
- $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{rr_1}{r_2 r_3}$ 1583
- $r_1 r_2 + rr_3 = ab$ 1584
- $r_1 r_2 r_3 = rs^2$ 1585
- $r_1 r_2 r_3 = r^3 \cot^2 \frac{A}{2} \cot^2 \frac{B}{2} \cot^2 \frac{C}{2}$ 1586
- $r_2 r_3 + r_3 r_1 + r_1 r_2 = s^2$ 1588
- $\Delta = \frac{r_1 r_2 r_3}{\sqrt{(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)}}$ 1589
- $a = \frac{r_1 (r_2 + r_3)}{\sqrt{(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)}}$ 1590
- $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}$ 1591
- $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta^2}$ 1592
- $\frac{ab - r_1 r_2}{r_3} = \frac{bc - r_2 r_3}{r_1} = \frac{ca - r_3 r_1}{r_2} = r$ 1593

- $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} = \frac{r(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}{r_1 r_2 r_3} \dots 1594$
- 若 $r_1 = r_2 + r_3 + r$, 則 \triangle 中有直角 1596
- 命 \triangle 之內切圓之半徑為 r , 在此圓與角 A 之二邊間作切圓, 命其半徑為 r_a , 則 $r_a = r \frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} = r \frac{\left(\cos \frac{A}{4} - \sin \frac{A}{4}\right)^2}{\left(\cos \frac{A}{4} + \sin \frac{A}{4}\right)^2}$ 1597
- 設 \triangle 之內切圓之半徑為 r , 在此圓與角 A, B, C 之各二邊間作切圓, 命其半徑為 r_a, r_b, r_c , 則 $\sqrt{(r_a r_b)} + \sqrt{(r_b r_c)} + \sqrt{(r_c r_a)} = r$ 1598
- 求三角形外接圓之半徑 R 1599
- $4Rrs = abc$ 1600
- $Rr(\sin A + \sin B + \sin C) = \Delta$ 1601
- $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C)$ 1602
- $r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ 1603
- $r = 2R \left(\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} \right)$ 1604
- $r_1 = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ 1605
- $r_1 - r = 4R \sin^2 \frac{A}{2}$, 及 $r_2 + r_3 = 4R \cos^2 \frac{A}{2}$ 1606
- $R = \frac{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3)(r_3 + r_1)}{4(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)}$ 1607
- $r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R$ 1608
- $(4R + r)(4R + r + s\sqrt{3})(4R + r - s\sqrt{3}) = r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 - 3r_1 \times r_2 r_3$ 1609
- $r(\sin A + \sin B + \sin C) = 2R \sin A \sin B \sin C$... 1610
- $\frac{1}{r_1 - r} + \frac{1}{r_2 + r_3} = \frac{4R}{a^2}$ 1611
- $\frac{1}{Rr} = \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca}$ 1612
- $\frac{r}{R} = 4 \left(\frac{s}{a} - 1 \right) \left(\frac{s}{b} - 1 \right) \left(\frac{s}{c} - 1 \right)$ 1613
- $\frac{r}{R} = \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a + b + c}$ 1614
- $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 + \frac{r}{2R}$ 1615
- $a \cos^2 \frac{A}{2} + b \cos^2 \frac{B}{2} + c \cos^2 \frac{C}{2} = s + \frac{s}{R}$ 1616

- 內切圓與外接圓直徑之和等於 $a \cot A + b \cot B + c \cot C$
 1617
- $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C$ 1618
- $\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} = 4R \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{s}{r}$ 1619
- $\frac{r_1}{bc} + \frac{r_2}{ca} + \frac{r_3}{ab} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2R}$ 1620
- $\sqrt{abc} \left(\sqrt{\frac{a}{r_1}} + \sqrt{\frac{b}{r_2}} + \sqrt{\frac{c}{r_3}} \right) = 16R \cdot \frac{1}{4} \cos \frac{180^\circ - A}{4} \cos \frac{180^\circ - B}{4}$
 $\times \cos \frac{180^\circ - C}{4}$ 1621
- 設過三角形三傍心之圓，其半徑為 R' ，則 $R' = \frac{a}{\sin A}$ ， $R' = \frac{abc}{2S}$ 1622
- 設 O 為 $\triangle ABC$ 之外心， I 為內心， J 為傍心，則 $OI^2 = R^2 - 2Rr$ ， $OJ^2 = R^2 + 2Rr_1$ ，但 r_1 為屬於 J 之傍切圓之半徑 1623
- 直角 \triangle 中，內切圓與外接圓中心之距離之二倍，若為斜邊及內切圓之直徑之比例中項，則內切圓之半徑等於斜邊之 $\frac{1}{3}$ 1624
- $(s-a)^2 \sin A + (s-b)^2 \sin B + (s-c)^2 \sin C = 4r(2R-r)$
 $\times \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ 1625
- \triangle 之內切圓之半徑，決不大於外接圓之半徑之半分 1676
- 設直角 \triangle 中，包直角之二邊之差為 h ，其面積為 S ，則其外接圓之直徑為 $\sqrt{(h^2 + 4S)}$ 1684
- 由各角頂至對邊各引垂線，命聯結其垂足而生之 \triangle 為 $A'B'C'$ ，則絕對值上 $B'C'$ 等於 $R \sin 2A$ 1690
- 設由各角頂至對邊所引垂線之足為 D, E, F ， $\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ 之外接圓之半徑為 R 及 R_1 ，又命 $\triangle DEF$ 之內切圓之半徑為 r_1 ，則 $R_1 = \frac{R}{2}$ 及 $r_1 = 2R \cos A \cos B \cos C$ 1691
- 設傍切圓之中心為 A', B', C' ，而三角形 ABC 及 $A'B'C'$ 之內切圓之半徑為 r 及 r' ，則 $r' = \frac{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}}$
 1697
- 設聯結內切圓之三切點而成之三角形之三邊為 a', b', c' ，

$$\text{則 } \frac{a'b'c'}{abc} = \frac{r^2}{2R^2} \dots \dots \dots 1724$$

●設 O 為 \triangle 之內切圓之中心, D, E, F 為切 BC, CA, AB 之點, 則 $OA \cdot OB \cdot OC (AF + BD + CE) = 4R \cdot AF \cdot BD \cdot CE \dots 1733$

●設三角形之外接圓之半徑為 R , 內切於此圓外切於三角形之各邊之最大圓之半徑為 r', r'', r''' , 則 $64Rr'r''r''' = \left(\frac{abc}{a+b+c}\right)^2 \dots \dots \dots 1757$

●設 A, B, C 所對之傍切圓之中心為 D, E, F ; r', r'', r''' 為三角形 DBC, ECA, FAB 之外接圓之半徑, 則 $r'r''r''' = 2R^2r \dots \dots \dots 1762$

(4) 重心中線

●邊 a 所對中線之長為 $\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc \cos A} \dots 1646$

●設 $a=7, b=8, c=9$, 試求聯結 B 與對邊中點之直線之數值 $\dots \dots \dots 1647$

●設三中線之長為 h, k, l , 則 $4(h^2+k^2+l^2) = 3(a^2+b^2+c^2)$, $16(h^2k^2+k^2l^2+l^2h^2) = 9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$, $16(h^4+k^4+l^4) = 9(a^4+b^4+c^4) \dots \dots \dots 1758$

●已知邊 AB, AC 及其夾角 A , 求自邊 BC 至重心 G 之距離 GD . 又求此三角形繞邊 BC 迴轉而生成之體積 3042

(5) 二等分線

● A 之內角及外角之二等分線之長為 $\frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$ 及 $\frac{2bc \sin \frac{A}{2}}{b \sim c}$
 $\dots \dots \dots 1648$

●設 A 之內角及外角之二等分線交 BC 之點分別為 D, E , 則 $DE = \frac{2abc}{b^2 \sim c^2} \dots \dots \dots 1649$

●命角 A, C 之二等分線與外接圓周之交點為 A', C' , 則 $A'C'$ 為 CB, BA 所分三部之比為 $\sin^2 \frac{A}{2} : 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \times \sin \frac{C}{2} : \sin^2 \frac{C}{2} \dots \dots \dots 1683$

●過各角頂, 引其外角之二等分線. 作新 \triangle , 命其面積為 S' , 又命原 \triangle 之面積為 S , 則 $S' = \frac{S}{2} \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \operatorname{cosec} \frac{B}{2} \operatorname{cosec} \frac{C}{2}$
 $\dots \dots \dots 1699$

●設角 A 及 B 之二等分線與對邊之交點為 D 及 E , 則

$\triangle CDE$ 之面積爲 $\frac{S \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B}{\cos \frac{1}{2}(C-A) \cos \frac{1}{2}(C-B)}$ 1727

●設各角 A, B, C 之二等分線與其對邊之交點爲 D, E, F , 則 $\triangle DEF$ 之面積應爲 $2S \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} / \left(\cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \times \cos \frac{A-B}{2} \right)$ 1731

●設以各外角之二等分線作一新 \triangle , 則其各邊爲 $4R \cos \frac{A}{2}$, $4R \cos \frac{B}{2}$, 及 $4R \cos \frac{C}{2}$ 1739

●如前題所作之 \triangle , 各邊上之正方形之和爲 $8R(4R+r)$ 1740

●將各角之二等分線延長, 令交外接圓周, 則聯結其交點而得之 \triangle 之面積決不小於原形之面積 1750

(6) 重心垂線

●設垂心爲 O , $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$, 則 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{abc}{xyz}$ 1657

●由各角頂 A, B , 及 C 至各對邊引垂線, 分別命爲 h_1, h_2 , 及 h_3 , 則 $2h_3(ab \cos C + bc \cos A + ca \cos B) = ab(a \sin A + b \sin B + c \sin C)$ 1658

●設對應於 a, b, c 之垂線爲 h_1, h_2, h_3 , 則 $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{8}{S}$ 1659

●設由各角頂 A, B , 及 C 至各對邊所引之垂線順次爲 h_1, h_2 , 及 h_3 , 則 $\frac{h_1^2}{h_2 h_3} + \frac{h_2^2}{h_1 h_3} + \frac{h_3^2}{h_1 h_2} = \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2}$ 1660

●設由各角頂 A, B, C 至對邊所引之垂線分別爲 h_1, h_2, h_3 , 則 $(h_1 \sin A + h_2 \sin B + h_3 \sin C)^2 = 18S \sin A \sin B \sin C$ 1661

●設邊 a, b, c 與由其對角頂 A, B, C 至其自身所引之垂線之比爲 α, β, γ , 則 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 4 = 0$ 1710

●設垂心爲 P , 則 $\overline{PA}^2 = 4R^2 - a^2$ 1738

●設外心爲 O , 其垂心爲 P , 則 $\overline{OP}^2 = 2R^2(\frac{1}{2} + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$ 1745

●設銳角 \triangle 之垂心爲 P ; $AP = \alpha, EP = \beta, CP = \gamma$, 則 $S = \frac{1}{4}(a\alpha + b\beta + c\gamma)$, $2abc = a^2\alpha \operatorname{cosec} A + b^2\beta \operatorname{cosec} B + c^2\gamma \operatorname{cosec} C$

... .. 1756

(7) 交於同點

- 由各角頂至對邊所引之三垂線交於一點... .. 1664
- 各角之二等分線交於一點... .. 1665
- 各角頂與對邊之中點聯結之三直線交於一點... 1666
- 各角頂與內切圓切對邊之點聯結之三直線,交於一點 ...
... .. 1667
- 各角頂與其所對傍切圓切對邊之點聯結之三直線,交於
一點 1668
- 1576 題之圖中, BE, CF, 及 AD 交於一點 ... 1669
- 由銳角三角形之各角頂 A, B, C, 至其對邊引垂線, 延長
之, 令交外接圓, 命各延線為 α, β, γ , 則 $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} = 2$
 $\times (\tan A + \tan B \tan C)$ 1687

(8) 九點圓

- 設 EDH 為一三角形, 二邊 ED 與 DH 相等 將 DH 延長至任
意點 N, 將 EH 延長至 I, 令 $EI^2 = 4DH \cdot DN$. 垂直於 DE 引
DM, 平行於 DE 引 IM. 於是中心 I 半徑 IM 之圓與中心 N
半徑 ND 之圓相切 1677
- 九點圓, 與其三角形之內切圓及傍切圓相切 ... 1678
- 1678 題之圖中, 聯結 PO, 則 PO 及 DF 互相二等分 ...
... .. 1679
- 1678 題之圖中, PO 將 DA 分成 DA 二部, 各部之比如 1 與
2 1680
- 外心, 九點圓之中心, 垂心, 重心四點, 皆在同一直線上 ...
... .. 1714
- 由九點圓之中心至 BC 所引之垂線之長為 $\frac{R}{2} \cos(C-B)$
... .. 1715
- 由九點圓之中心至 1678 題之 AG 所引垂線之長為 $\frac{R}{2}$
 $\times \sin(C-B)$ 1716
- 1678 題之圖中, $OP^2 = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$ 1717
- 由一角頂 A 至九點圓之中心之距離為 $\frac{1}{2}R\sqrt{1 + 8 \cos A}$
 $\times \sin B \sin C$ 1718
- 九點圓之中心, 若 \triangle 非等邊, 則不能與外接圓之中心相合
... .. 1719

- 九點圓之中心, 若 \triangle 非等邊, 則不能與內切圓之中心相合
... .. 1720
- 設聯結 ABC 之三傍切圓之中心而生之三角形為 DEF , 則
 ABC 之外接圓即 DEF 之九點圓 1744

(9) 三角形雜題

- 由各角頂 A, B, C , 過任意點 P , 引三直線交對邊於點 A', B', C' , 則 $AB' \cdot BC' \cdot CC' = AC' \cdot BA' \cdot CB'$ 1662
- 反之, 若有前題之關係式, 則三直線 AA', BB', CC' 相交於
同一點... .. 1663
- 由二銳角 A 及 B 引 AC 及 BC 之垂線 AD 及 BD , 命 ρ 為
 $\triangle ABD$ 之內切圓之半徑, 則 $AB = \rho(\sec A + \sec B + \tan A$
 $+ \tan B)$ 1670
- 設 ABC 為以 C 為中心之象限, AP, AQ , 及 AR 為三弧, 其
大小成遞昇順序, 但各弧皆小於 AB , 且其和等於 AB 之二
倍, 引半徑 CP, CQ , 及 CR , 延長之, 令交 A 上之切線於 $p,$
 q, r , 以 Ap, Aq, Ar 作一 \triangle , 則欲令此 \triangle 成立, 其條件若
何? 求 Aq 之內極及 Ap 之外極. 又如是之一切 \triangle 中, 其內切
圓與外接圓之半徑成反比例 1681
- 設 $\triangle ABC$ 中, [但 C 為直角], E 為其內切圓與邊 BC 之切
點. F 為其 C 角內之傍切圓與邊 CA 之延線之切點. 求證
 $\triangle EFC$ 為 $\triangle ABC$ 之半分 1682
- 設銳角 $\triangle ABC$ 之外接圓之中心為 O , 延長 AO 交 BC 於 D ,
則 $DO \cos(B - C) = AO \cos A$ 1685
- 作已知 \triangle 之內切圓, 聯結其切點作 \triangle , 又作其內切圓, 聯結
其切點作 \triangle 等, 如是以往, 則其遞次所作 \triangle , 終變為等邊
... .. 1686
- 以銳角 \triangle 之各邊為底, 在其外方作二等邊 \triangle , 令各等邊等
於外接圓之半徑, 則聯結此各角頂, 得與原形相似且等積
之 \triangle 1688
- 設 $\triangle ABC$ 之外心為 O , 由此至各邊引垂線 OD, OE, OF , 則
 $4(\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 + \overline{OF}^2) = a^2 \cot^2 A + b^2 \cot^2 B + c^2 \cot^2 C$ 1689
- 有各邊成等差級數之 \triangle , 其中邊上由對角所引之垂線, 及
切中邊與他二邊延線之圓之半徑, 各為內切圓之半徑之
三倍 1692
- 由三傍心至內心之三距離, 分別為 $a \sec \frac{A}{2}, b \sec \frac{B}{2}, c \sec \frac{C}{2}$
... .. 1693
- 設二相似 \triangle , 有切於不對應邊 a_1, b_2 之一公傍切圓, 則

- 垂線爲邊之新△之各角,等於原△之各角 ... 1709
- 在任意△ABC之各邊上,就外方作等邊△,聯結其中心,則得等邊△ ... 1711
- 銳角△ABC之垂足三角形之各邊爲 $a \cos A, b \cos B, c \cos C$, 且 $(a^2 \cos^2 A - b^2 \cos^2 B - c^2 \cos^2 C) / 2bc \cos B \cos C = \cos 2A$... 1712
- 在三傍切圓與角頂之間,作切一邊及一邊延線之六圓,則一間一所取三半徑之積相等 ... 1713
- 有一得作內切及外接圓之四邊形,今將其各邊向兩方延長,命 r_a, r_b, r_c, r_d 爲二邊與延線所構成之△之內切圓之半徑及他二邊上傍切圓之半徑,則 $r_a r_b r_c r_d = r^4$. 但 r 爲原四邊形之內切圓之半徑..... 1721
- 設由△之外心至各邊所引之三垂線爲 l, m, n , 則 $4 \left(\frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \right) = \frac{abc}{lmn}$... 1729
- 在中心爲 O , 半徑爲 ρ 之半圓 ABC 中, 引與 OC 成角 2α 之直線 OB , 又作 OAB, OCB 二三角形之內切圓, 則其中心間之距離爲 $\frac{\rho \sqrt{(2 - \sin 2\alpha)}}{\sqrt{(1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha)}}$... 1734
- 以△ABC各外角之二等分線作第二△, 又由第二△用同法作第三△, 如是以往, 求第 n △之各角 ... 1735
- 對角頂 A 之傍切圓切邊 BC 於 D , 則 $a(s^2 - AD^2) = 4s(s-b) \times (s-c)$... 1736
- 設三傍心兩兩聯結而得之直線之長爲 x, y, z , 又設其三傍心與內心聯結而生之直線之長爲 a, β, γ , 則 $\frac{\beta z + \gamma y}{x} = \frac{\gamma x + a z}{y} = \frac{a y + \beta x}{z}$... 1746
- 設△ABC之內心爲 O ; r_a, r_b, r_c 分別爲三角形 OBC, OCA, OAB 之內切圓之半徑, 則 $\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = 2 \left(\cot \frac{A}{4} + \cot \frac{B}{4} + \cot \frac{C}{4} \right)$... 1752
- 作同一面積之諸△, 則其各角餘切之和隨其各邊上之正方形之和而變 ... 1753
- 設△之內心爲 I , 外心爲 O , 又三傍心爲 D, E, F , 則 $OI^2 + OD^2 + OE^2 + OF^2 = 12R^2$... 1754
- 在△ABC內取任意點, 設由此點至 A, B, C 之距離爲 h, k, l , 又設至 BC, CA, AB 之距離爲 a, β, γ , 則 $h^2 a \sin A$

- $+k^2\beta\sin B+l^2\gamma\sin C=a\beta\gamma+b\gamma a+ca\beta\dots\dots 1760$
- 前題中設 D, E, F 爲由一點 O 至三角形之各邊上所引之垂線之足, 則 $a\beta\gamma+b\gamma a+ca\beta=4R\times(\text{面積 } DEF)$ 1761
- 有同在底 AB 上之三個二等邊 \triangle , 其高分別爲 $CD=\frac{AB}{2}$, $C'D=AB$, $C''D=\frac{3}{2}AB$, 於是頂角 $ACB, AC'B, AC''B$ 之和爲二直角 $\dots\dots\dots 1764$
- 凡於 $\triangle ABC$ 中, 設自外接圓上之一點至三邊之距離爲 a, β, γ ; 自內切圓上之一點至三邊之距離爲 λ, μ, ν , 則依適當之符號規約, 成立如下之二式: $\beta\gamma\sin A+\gamma a\sin B+a\beta\sin C=0, \sqrt{\lambda}\cos\frac{A}{2}+\sqrt{\mu}\cos\frac{B}{2}+\sqrt{\nu}\cos\frac{C}{2}=0\dots\dots 3063$
- 於 $\triangle ABC$ 中, 已知邊 a , 角 B 及 C , 試在邊 a 上求一點 M , 由此點至邊 b, c 引垂線 MP 及 MQ , 當三角形繞邊 a 迴轉時, 使 $\triangle MPC$ 與 $\triangle MQB$ 旋生相等之體積...3072
- 已知 \triangle 之二邊 a, b , 及夾角 C , 在求得外接圓之半徑後, 乃發見於 C 生小差誤 γ , 則與此對應之該半徑之誤差爲 $\frac{ab\gamma}{2c}\cot A\cot B\dots\dots 3075$
- (I) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知一邊 a , 對角 A , 及對邊 a 之高 h , 求決定其他二邊 b, c 之方程式. (II) 若 \triangle 爲直角 \triangle 時, a, A , 及 h 之間須適合如何之條件 $\dots\dots 3023$
- 知三角形 ABC , 今令其繞邊 AB 之周迴轉, 則 (I) 邊 AC, AB 所生面積之和如何? (II) 三角形 ABC 所生之體積如何? 設角 A, B 之和及邊 AB 一定, 則此體積之極大如何 $\dots\dots 3032$
- 將等邊三角形 ABC 之底邊 BC 四等分, 聯結各分點於頂點 A , 求頂角 A 所分成之四部分, 及分線與底邊之比 $\dots\dots 3039$
- 一切 \triangle 中, 內心與外心間之距離, 爲外接圓之半徑與由此半徑減內切圓之直徑所得剩餘之比例中項... 1767
- $a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\operatorname{cosec}\frac{A}{2}=S\dots\dots 1563$
- 銳角 \triangle 之垂足三角形之周爲 $\frac{2S}{R}\dots\dots 1749$

(10) 四邊形

- 求任意四邊形之面積... 1627
- 1627 題中, 命對角線之交角爲 ϕ , 則四邊形之面積 $S=\frac{1}{2}$

- $\times (b^2 + d^2 - a^2 - c^2) \tan \phi \dots \dots \dots 1630$
- 命四邊形之對角線為 m, n , 命 θ 為其夾角, 則面積 $S = \frac{1}{2}mn \sin \theta \dots \dots \dots 1629$
- 將四邊形之各邊按 m 與 n 之比分之, 聯結此分點, 作一新四邊形, 則此四邊形之面積與原四邊形之面積之比如 $m^2 + n^2$ 與 $(m+n)^2 \dots \dots \dots 1726$
- 在四邊形 $ABCD$ 內取任意點 O , 引 AB, BC, CD, DA 之垂線 OP, OQ, OR, OS , 則四邊形 $PQRS$ 之面積為 $\frac{ABCD}{2} - \frac{1}{8}(OA^2 \times \sin 2A + OB^2 \sin 2B + OC^2 \sin 2C + OD^2 \sin 2D) \dots \dots \dots 1728$
- 有一四邊形, 試在其內作距四邊等遠之四平行線, 令兩四邊形之周間之面積等於一定之面積 $S \dots \dots 3069$
- 四邊形之對角線為 h, k , 其面積為 C 時, 則其外接正方形之面積為 $h^2k^2 - 4C^2/h^2 + k^2 - 4C \dots \dots 3028$
- 設四邊形之三邊互等, 第四邊為此各邊之二倍, 求第四邊兩端之角之關係 $\dots \dots \dots 1765$
- 求圓之內接四邊形之面積及對角線之長 $\dots \dots 1626$
- 有一四邊形, 若其相對之二角互為補角, 則相對之二邊不等時, 二對角線不能相等 $\dots \dots \dots 1632$
- 求圓之外切四邊形之面積 $\dots \dots \dots 1628$
- 有一四邊形, 若得作其內切圓及外接圓, 則此四邊形之面積等於四邊之積之平方根 $\dots \dots \dots 1631$
- 由矩形之一角頂, 至其對角線引垂線, 由其交點至此角之對角之二隣邊引垂線, 命其長為 p 及 q , 又命 c 為矩形之對角線, 則 $p^2 + q^2 = c^2 \dots \dots \dots 1645$
- 設矩形之相鄰二邊為 m 寸及 n 寸, 求此矩形之二對角線之交角之正切 $\dots \dots \dots 3065$

(11) 多 角 形

- 求正多角形之內切圓及外接圓之半徑 r 及 $R \dots \dots 633$
- 試以正多角形之內切圓或外接圓之半徑, 表正多角形之面積 $\dots \dots \dots 1635$
- 內接於圓作一正多角形, 更以其邊數之半為邊數, 內接及外切於同圓作二正多角形, 則第一正多角形之面積, 為後二正多角形之面積之比例中項 $\dots \dots \dots 1636$
- 外切於圓作一正多角形, 更內接及外切於同圓分別作同邊數及半邊數之正多角形, 則第一正多角形之面積為後

- 二正多角形之面積之調和中項... .. 1637
- 設一圓之半徑為 r , 其內接正多角形之一邊為 a , 邊數二倍於前之他內接正多角形之一邊為 b , 則 $b = \sqrt{r\left(r + \frac{a}{2}\right) - \sqrt{r\left(r - \frac{a}{2}\right)}}$ 1638
- 設正多角形之邊數為 n , 其面積為 S , 而仿 1641 題推考, 則得 $\sum \sin \frac{3\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} = S \cos^2 \frac{2\pi}{n}$, 但 \sum 表面積之和. 又試就 n 為 3 或 4 時說明之 1642
- 設 A, B, C, D, E, \dots 為圓之內接多角形之角頂. 今由其中心至各邊引垂線, 聯結其足作第二多角形, 而第一多角形之面積為第二多角形之面積之 $\frac{1}{2}$ 倍, 則 $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C + \sin 2D + \sin 2E + \dots = 0$ 1732
- 在邊數為偶數之正多角形內取任意點, 由此順次至各邊上引垂線, 則其一間一之垂線之和相等 1741
- 作一圓之內接 n 邊正多角形. 由圓周上之任意點至各角頂引弦, 以 c_1, c_2, \dots, c_n 表之, 但其順序以至最近之角頂所引之弦始, 以下為順次所取者. 然則 $c_1c_2 + c_2c_3 + \dots + c_{n-1}c_n - c_n c_1$ 之值與引諸弦時所自始之點之位置無關 1742
- $ABC \dots K$ 為一邊為 a 之正多角形, 自其各角頂依同向延長各邊, 引長為 x 之 AB', BC', \dots, KA' . 則將 B', C', \dots, A' 順次兩兩聯結時, (I) 得 n 邊正多角形 $A'B'C' \dots K'$, (II) 若正多角形 $A'B'C' \dots K'$ 與一已知之正方形 m^2 等積時, 試求 x 之值且玩索之, (III) 令此面積為極小之 x 值 3031
- 設正五角形及正十角形之一邊分別為 a 及 a' . 其外接圓之半徑同為 R , 其內切圓之半徑為 r 及 r' , 則 $a^2 - a'^2 = R^2$, 及 $a/r + a'/r' = 2R/r'$ 1634
- 設圓之內接正五角形之一邊為 c , 則其半徑為 $\frac{c\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}$ 1639
- 設正五角形之一邊為 a , 其外接圓之半徑為 R , 則 $\frac{R}{a} = \frac{17}{20}$ 1640
- 若由圓之內接正五角形之一邊之兩端至其鄰邊所張之弧之中點引二直線, 則其差等於圓之半徑, 其積等於半徑之平方, 又其平方之和等於半徑之平方之三倍 ... 1725
- 以直線聯結正六角形一間一之角頂, 則於形內又生一正

六角形,再以直線聯結此形一間一之角頂,則於此形內又生一正六角形,如是以往,則所生各正六角形面積之和,為原形面積之半分... .. 1641

●內切於各邊為 a 之正六角形作圓,內接於此圓作他正六角形,如是作 n 個正六角形,則諸六角形面積之總和為 $6\sqrt{3}\{1-(\frac{1}{4})^n\}a^2$ 1737

(12) 圓

●求圓之面積... .. 1643

●求圓之扇形及弓形之面積... .. 1644

●一圓之二平行弦,在中心之同側,張於中心之角為 72° , 144° ,則弦之距離等於半徑之半分 1652

●有半徑 a 尺之圓,求其中心角 A 所對之弦長 ... 1653

●設 P 為直徑 AB , 中心 C 之半圓周上之任意點. 今引 AB 之垂線 PM , 又引 PA, PB , 試由此作圖法注目於二角 BPM 及 PAM 為角 PCB 之半分以導出公式 $\frac{1-\cos \frac{\alpha}{2}}{1+\cos \frac{\alpha}{2}} = \tan^2 \frac{\alpha}{4}$ 1655

●在不大於象限之弧上取一任意點,由此引二直線,令其一止於此弧之一端,他一垂直於其弦,且止於此弦,則此二直線之和不大於是弧 1672

●設圓之直徑為 AB , C 為其中心,引直線 AP , 將半圓二等分,命 θ 為角 PCB 之餘角之弧度,則 $\cos \theta = \theta$... 1722

●設 P 為半圓周 APB 上之任意點,作切此半圓周與 AP, BP 之中點之二圓,則以其半徑所作之矩形,等於以三角形 APB 之內切圓之半徑 r 所作之正方形之 $\frac{1}{2}$... 1723

●設半徑 r 之圓內切於半徑 a , 弦 $2c$ 之扇形,則 $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ 1730

●設圓之二扇形具一公弦,且等積,其角之比如 2 與 1 , 則其一必為半圓形,他一為象限 1743

●以 AB 為直徑,作半圓周,自點 A 及中心 C 引二平行線 AD, CE , 與 AB 成角 x , 且交半圓周於 D 及 E . 聯結 DE, BD, BE . 若梯形 $ADEC$ 之面積為三角形 BED 之面積之 2 倍,則角 x 可決定 3030

●設截半徑之比如 1 與 n (n 為大於 1 之正整數) 之二同心圓之弦,其夾截部分對中心張角 2α 及 2β 時,則其與內圓之交點 (任意一者均可) 將弦所分之二部分,有比如 $n^2 - 2n \times \cos(\alpha - \beta) + 1$ 及 $n^2 - 1$ 3029

- 自圓周上之一點，視同心之正方形之兩對角線時，其二視角之關係如何 3036
- 欲令 75 呎之弧與其正弦之差較 1 耗小，圓之半徑須如何 3037
- 試將 $a \cos A + b \cos B + c \cos C$ 化成對數算式，但各文字表三角形之邊及角 3038
- 自圓之直徑 AB 之一端引弦 AC，自點 C 引平行於直徑 AB 之弦 CD 時，若 $AC = 2CD$ ，則角 BAC 可決定，試解此求至秒為止 3040
- 設有一點 P 及一圓周 O，由點 P 所引之割線 PAB，不問其位置之如何，乘積 $\tan \frac{AOP}{2} \tan \frac{BOP}{2}$ 之值一定 1766
- 將圓之定直徑向兩方延長，在其上取相等之二定長，則其張於圓周上之一點之二角間，在三角法上之關係如何 1768

(13) 二個或三個圓

- 有半徑為 a 及 b 之二圓，互相外切，今引此二圓之公切線二條，命 θ 為其間之角，則 $\sin \theta = 4(a-b)\sqrt{a'}/(a+b)^2$ 1654
- 設半徑 a 及 b 之二圓以 γ 角相交，則其公弦之長為 $2ab \sin \gamma / \sqrt{a^2 + 2ab \cos \gamma + b^2}$ 1675
- 設半徑 a 之三等圓互相外切，則其中間之面積為 $(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})a^2$ 1671
- 設半徑為 a, b, c 之三圓互相外切，則其各切點上之切線交於一點，此點距任意切點皆為 $(\frac{abc}{a+b+c})^{\frac{1}{2}}$... 1673
- 有相外切之三圓，其半徑為 a, b, c ，其各切點間之弧之弦為 α, β, γ ，則 $\frac{8}{\alpha\beta\gamma} = (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})(\frac{1}{c} + \frac{1}{a})$ 1674
- 設三圓互相外切，則聯結其各中心而生之三角形之面積之二乘幕，等於其半徑之和及差之相乘積 ... 1708

(14) 雜 題

- 在所設角 $XOY = \alpha$ 之一邊 OX 上，取 $OA = d$ ，引 OY 之垂線 AB，引 OX 之垂線 BC，準是以往，求所得折線 ASCD ... 之長 1650

- 設四角 A, B, C, D 之和為四直角，其正切成等比級數，則其公比為 -1 ，或 $\tan A \tan D = \tan B \tan C = 1$ 1656
- 橢圓上各點之二動徑之積，乘此點之法線與一動徑所成角之餘弦之自乘，等於短徑半分之自乘 ... 1763
- 將無窮圓錐倒置，納一球於其中，設欲令球之體積等於球面與圓錐頂點間之容積，則錐體頂點上之半角須為幾何 ... 3070
- 在外切於半徑為 R 之球之平行六面體中，各稜與其他二稜間之角之正弦成比例 ... 3074
- 試定四點是否在同平面上，若在同平面上，又是否在同圓周上 ... 3080
- 直角 O 之一邊上有定點 A, B ，而 $OA = a, OB = b$ ，在他邊上試求一點 M 命角 AMB 為極大，且應用 a 及 b ，求三角形 AMB 之外接圓之半徑 ... 3033
- 設 $S-ABCD$ 為一四角錐，其底之兩對邊 AB, DC 之交點為 E ，他二邊 DA, CB 之交點為 F ，於是面 ASB, CSD 交於直線 SE ，面 ASD, BSC 交於直線 SF 。(I) 求證以平行於面 ESF 之平面截四角錐，其截面 $MNPQ$ 為一平行四邊形。(II) 決定一點 M ，令截面 $MNPQ$ 與所設正方形 2 等積 ... 3034
- 命角 $VPY = \alpha$ ，角 $YPH = \beta$ ，設此二角之平面互相垂直，試以 α 及 β 之項，求此二角之公邊 PY 與 PV 及 PH 所定之平面所成之角 x ... 3035
- 由直角 BOC 之頂點 O 引直線 OA ，令與 OB 成角 γ ，由 A 至 OB 引垂線 AP ，由 P 至 OA 引垂線 PQ ，由 Q 至 OB 引垂線 QR ，以下仿此，命無數垂線 AP, PQ, QR, \dots 之和為 S ，又由 A 至 OC 引垂線 AP' ，命仿前所得無數之垂線 $AP', P'Q', Q'R', \dots$ 之和為 S' ，設 $S:S' = 2$ ，求 $\tan \frac{\gamma}{2}$... 3041
- 直徑 $d = 1.25$ 呎之圓磚上有一螺線，其旋角為 $15' 8'' 9''$ ，則 (I) 此螺線一旋之長及 (II) 一步之長如何 ... 3043

第 六 對 數

I. 表 之 構 成

- 設小於直角之正角之弧度為 θ ，則 θ 大於 $\sin \theta$ 而小於 $\tan \theta$... 1769

- 設 θ 無限減小, 則 $\frac{\sin \theta}{\theta}$ 及 $\frac{\tan \theta}{\theta}$ 之極限為 1... 1770
- 設 m 無限增大, 則 $m \sin \frac{a}{m}$ 之極限為 a ... 1771
- 設 m 無限增大, 則 $m \tan \frac{a}{m}$ 之極限為 a ... 1772
- 設小於直角之正角之弧度為 θ , 則 $\sin \theta$ 大於 $\theta - \frac{\theta^3}{4}$... 1773
- 設 θ 在零及直角之間, 則 $\sin \frac{\theta}{2}$ 大於 $\frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{32}$ 1774
- 設 θ 在零及直角之間, 則 $\cos \theta$ 大於 $1 - \frac{\theta^2}{2}$, 而小於 $1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{16}$... 1775
- 設小於直角之正角之弧度為 x , 則 $\sin x$ 大於 $x - \frac{x^3}{6}$... 1776
- $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$... 1777
- 求 a 趨近零時比 $\frac{a}{\tan a}$ 之極限 ... 1778
- 設 a 為第一象限之弧, 則 $\tan a - a > \frac{a^3}{3}$... 1779
- $a < \frac{1}{3} \tan a + \frac{2}{3} \sin a$, 但 a 為第一象限之弧 ... 1780
- $a - \sin a < \frac{2a^2}{\pi}$, 但 a 為第一象限之弧 ... 1781
- 計 $10''$ 之角之正弦近似值 ... 1782
- 設各角成 $10''$ 為公差之等差級數, 求此諸角正弦之算法... 1783

II. 對數及對數級數

- 1 之對數, 不問其底如何, 常為 0, 又底之對數常為 1 ... 1784
- 積之對數, 等於其因數之對數之和 ... 1785
- 商之對數, 等於由被除數之對數減除數之對數所得之差 ... 1786
- 某數任意次冪之對數, 不論其指數之為整數及分數, 常等於本數之對數與其指數之積 ... 1787
- 求同數異底之對數間之關係 ... 1788
- 常用對數中, 若已知任意數之對數, 則其數以 10 之任意冪乘除所得之積或商之對數, 逕得決定之 ... 1789
- 試將 a^x 依 x 之升冪順序展開為一級數 ... 1790
- 試將 $\log_e(1+x)$ 依 x 之升冪順序, 展開為一級數 ...

- 1791
- 求證 $\log_e 2 = 0.6931471\dots$, $\log_e 3 = 1.0986122\dots$, $\log_e 10 = 2.3025850\dots$ 1792
 - $\mu \log_e(n+1) - \mu \log_e n = 2\mu \left\{ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right\}$, 從而 $\log_{10}(n+1) - \log_{10} n = 2\mu \left\{ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right\}$ 1793
 - $\log_{10}(1+x) = \mu \left\{ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right\}$ 1794
 - p 為不可通約數 1795
 - 設 $\log_a x = \log_b y = \log_c z$, 則此對數乃 $a^p b^q c^r$ 為底 $x^p y^q z^r$ 之對數 1796
 - $\log_a b \times \log_b c = \log_a c$, 及 $\log_a b \times \log_b a = 1$ 1797
 - 設 $u^p = b^q$, 則 $q \log_a x = p \log_b x$ 1798
 - 設 a, b, c 之對數分別為 p, q, r , 則 $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$ 1799
 - 設 $\log_8 9 = a$, $\log_3 5 = b$, 則 $\log_{10} 2 = \frac{2}{3ab+2}$ 1800
 - 設 $\log_2 x = x$, $\log_3 2a = y$, 則 $2^{1-xy} = 3^{y-xy}$ 1801
 - $(ab)^{\log a} + \log b = a^{\log a} b^{\log b} a^2 \log b$ 1802
 - $2 \log_a x + 2 \log_a x^2 + 2 \log_a x^3 + \dots + 2 \log_a x^n = n(n+1) \times \log_a x$ 1803
 - 將 $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$ 中根號內之式變為 $b+c$, 或 $b-c$ 完全平方形, 而化之為對數式 1804
 - 將 $x = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b}$ 化為對數式, 而命 $a = 113, b = 335$ 以計算之 1805
 - 解 $(a+b)^{2r}(a^4 - 2a^2b^2 + 4b^4)^{r-1} = (a-b)^{2r}$ 1806
 - 解 $a^x = 2b^y c^z, b^y = 3c^z a^x, c^z = 4a^x b^y$ 1807
 - 知 $\log 224 = a, \log 125 = b$, 求 $\log 2$ 及 $\log 7$ 1808
 - 設 $\log_8 9 = a, \log_2 5 = b, \log_5 7 = c$, 求由 1 至 7 之諸整數 10 為底時之對數 1809
 - 知 10 為底 8, 14, 21 之對數, 則可求得由 1 至 10 之諸整數之對數 1810
 - 設 $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}$ 成等差級數, 則 $\log(A+C), \log(A-C), \log(A+C-2B)$ 亦成等差級數 1811
 - $7 \log_a \frac{15}{16} - 6 \log_a \frac{3}{8} + 5 \log_a \frac{2}{5} - \log_a \frac{25}{32} = \log_a 3$

... ..	1812
● 2^{17} 中數字之個數	1813
● $\log_3 13, \log_{13} 3, \log_7 350$ 之指標	1814
● $\log_6 725, \log_6 \sqrt[5]{.0725}$ 之指標	1815
● $\log_3 \sqrt{27}$ 之值	1816
● $\log_4 0.125$ 之值	1817
● $\log_2 0.1024$ 之值	1818
● $\log_2 4, \log_{\frac{1}{2}} 8$ 之值	1819
● $\log_{\frac{1}{2}} 4$ 之值	1820
● $\log_{27} 9$ 之值	1821
● $\log_{10} 10$ 之值	1822
● $\log_{25} 125$ 之值	1823
● $\log_8 8\sqrt{2}$ 之值	1824
● $\log_8 \sqrt{2}$ 之值	1825
● $\log_{\frac{1}{2}} 4$ 之值	1826
● $\log_{49} 343\sqrt{7}$ 之值	1827
● $\log_{49} \sqrt[3]{7}$ 之值	1828
● $\sqrt{3}$ 爲底, $243\sqrt[3]{9}$ 之對數	1829
● $\sqrt[3]{4}$ 爲底, 128 之對數	1830
● $\sqrt[3]{4}$ 爲底, 32 之對數及 $\sqrt[3]{9}$ 爲底, $81\sqrt[3]{3}$ 之對數	1831
● $\log_4 \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$ 之值	1832
● $\log_{\frac{1}{25}} 3.375$ 之值	1833
● $\log_5 \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}}$ 之值	1834
● $\log_{\frac{1}{3}} 81$ 之值	1835
● $\log_{25} 25$ 之值	1836
● $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ 之值	1837
● $\log_{27} \sqrt[3]{3}$ 之值	1838
● $\log_4 \sqrt[3]{16}$ 之值	1839
● $\log_4 \sqrt[5]{.5}$ 之值	1840
● $\log_5 .04$ 之值	1841
● $\log_3 1$ 之值	1842
● $\log_{3.375} (\frac{2}{3})$ 之值	1843
● $\log_4 \sqrt[3]{.015625}$ 之值	1844
● $10 \log \frac{3}{2} + 7 \log \frac{5}{18} + 4 \log \frac{48}{25}$ 之值	1845
● $3 \log \frac{3}{5} + 2 \log 2\frac{1}{3} + 4 \log \frac{5}{14} - \log \frac{15}{784}$ 之值	1846

- $\frac{\log \sqrt{27} + \log 8 - \log \sqrt{1000}}{\log 1.2}$ 之值 1847
- $\log \frac{75}{16} - 2 \log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243}$ 之值 1848
- $\log \sqrt{54} - \log \left(\frac{71}{27}\right)^2 + \log \frac{8}{3} \sqrt{.6}$ 之值... .. 1849
- $7 \log_2 \frac{16}{15} + 5 \log_2 \frac{25}{24} + 3 \log_2 \frac{81}{80}$ 之值... .. 1850
- $\frac{1}{6} \sqrt{\left(\frac{3 \log 1728}{1 + \frac{1}{2} \log 36 + \frac{1}{3} \log 8}\right)}$ 之值 1851
- $\log_2 \sin 45'$ 之值... .. 1852
- $\log_e \sqrt{2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.5} + \dots\right)$ 1853
- 無窮級數 $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots$ 之總和... .. 1854
- $\frac{e}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1+2}{3} + \frac{1+2+3}{4} + \frac{1+2+3+4}{5} \dots$ (至無窮)
... .. 1855
- 無窮級數 $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \dots$ 之總和 ... 1856
- 若 x 小於 1, 則 $\frac{1}{x} + \frac{1}{\log_e(1-x)}$ 亦小於 1 ... 1857
- 無窮級數 $(1+2 \log 2 + \frac{1+2^2}{2} (\log 2)^2 + \frac{1+2^3}{3} (\log 2)^3 + \dots)$ 之總和... .. 1858
- $\log \cot \theta = \cos 2\theta + \frac{1}{3}(\cos 2\theta)^3 + \frac{1}{5}(\cos 2\theta)^5 + \dots$ 1859
- 設 $\sin \theta (1 + \tan^2 \alpha \tan^2 \beta)^{\frac{1}{2}} + \cos \theta (1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta)^{\frac{1}{2}} = \tan \alpha + \tan \beta$, 試用對數算式決定 θ 1860
- 若 $\tan^2 \theta$ 小於 1, 則 $\tan^2 \theta - \frac{1}{2} \tan^4 \theta + \frac{1}{3} \tan^6 \theta - \dots = \sin^2 \theta + \frac{1}{3} \sin^4 \theta + \frac{1}{5} \sin^6 \theta + \dots$ 1861

III. 表 之 用 法

(1) 對 數 表 及 三 角 函 數 表

- 求所設數之對數... .. 1862
- 用比例部分表, 求所設數之對數 1863
- 求對應於所設對數之數 1864
- 3670.257 及 12 61158 之積 1865

- .1234567 除以 54.87645 所得之商 1866
- .3180236 之立方 1867
- .3663265 之立方根 1868
- 求所設角之正弦... .. 1869
- 求對應於所設正弦之角 1870
- 求所設角之餘弦... .. 1871
- 求對應於所設餘弦之角 1872
- 求所設角之正弦之對數 1873
- 求對應於所設正弦對數之角 1874
- 求所設角之餘弦對數... .. 1875
- 求對應於所設餘弦對數之角 1876

(2) 三角函數表用法之問題

- 已知 $\sin 47^\circ = .7313537$, $\sin 48^\circ = 0.7431448$, 求 $\sin 47^\circ 1'$
... .. 1877
- 已知 $\sin 7^\circ 17' = 0.1267761$, 又 $\sin 7^\circ 18' = 0.1270646$, 求
 $\sin 7^\circ 17' 25''$ 1878
- 求 $\cos 63^\circ 67'.3$ 1879
- 求 $\tan 25^\circ 26'.7$ 1880
- 求 $\operatorname{cosec} 41^\circ 18'.2$ 1881
- 求 $\sec 38^\circ 27'.7$ 1882
- 設 $\cot A = 1.346$, 求 A 1883
- 設 $\sin A = 0.9479$, 求 A 1884
- 設 $\cos A = 0.96505$, 求 A 值 1885
- 設 $\tan A = 0.1733$, 求 A 1886

(3) 五位對數表之問題

- $\frac{(2.013)^2 \times (0.0593)^{\frac{3}{2}}}{(0.9124)^4}$ 1887
- $\log \frac{75}{16} - 2 \log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243}$ 之值 1888
- $\frac{(34.73)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[5]{2.539}}{\sqrt[3]{4.397} \times (3.456)^3}$ 1889
- 設 $\log 2 = .30103$, $\log 3 = .47712$, $\log 7 = .84510$, 求 $\sqrt[3]{6}$,
0.6, 0.0015, 4.05, 3.43 之對數 1890
- 已知 $\log 2 = .30103$, 又知 $\log 3 = .47712$, 求
 $\log(.0020736)^{\frac{1}{2}}$ 1891

- 解 $85^{-3x} = 12^{1-2x}$ 1892
- 解 $\left(\frac{203}{200}\right)^{2x} = 2$ 1893

(4) 七位對數表之問題

- 已知 $\log 12440 = 4.0948204$, 又 $\log 12441 = 4.0948553$, 求 $\log 12440.35$ 1894
- 已知 $\log 1.0686 = .0288152$, 又 $\log 1.0687 = .0288558$, 求有對數 .0288558 之數 1895
- 已知 $\log 23455 = 4.3702540$, $\log 23457 = 4.3702725$, 製中間諸數之比例部分表, 求 $\log .2345638$ 1896
- 已知 $\log 1.3325 = .1246672$, $\log 1.3326 = .1246998$, 求以 $-(1.8753145)$ 爲對數之數 1897
- 已知 $\log 3.855 = .5860244$, $\log 3.8551 = .5860356$, 求 $\log(.00385504)^{\frac{1}{4}}$ 1898
- 已知 $\log 24 = 1.3802112$, $\log 4.8989 = .6900986$, 以及 $\log 4.8990 = .6901074$, 求 $24^{\frac{1}{2}}$ 至小數第六位 ... 1899
- 已知 $\log 14271 = 4.1544544$, $\log 20313 = 4.3077741$, $\log 20314 = 4.3077954$, 求 $(142.71)^{\frac{1}{7}}$ 1900
- 知 $\log 7 = .8450980$, $\log 58751 = 4.7690153$, $\log 58752 = 4.7690227$, 求 $(.07)^{\frac{1}{5}}$, 但須至小數點下第七有效數字 1901
- 知 $\log 2 = .3010300$, $\log 5.743491 = .7591760$, 求 .0625 之五次根 1902
- 知 $\log 2.7 = .4313638$, $\log 5.172818 = .7137272$, 求 $27^{-\frac{1}{5}}$ 之值 1903
- 知 $\log 71953 = 4.8571394$ 及 1 之差爲 .0000061, 求 $\sqrt[5]{(0719585)}$ 1904
- 已知 $\log 103 = 2.0128372$, $\log 7440942 = 6.871628$, 求 $(1.03)^{-10}$ 1905
- 已知 $\log 105 = 2.0211893$, $\log 37689 = 4.5762140$, 求 $64 \times \{1 - (1.05)^{-20}\}$ 1906
- 知 $\log 2 = .301030$, $\log 1.562944 = .193943$, $\log 349485 = 5.543428$, $\log 3.655 = .562887$, $\log 3.656 = .563006$, 求 $5^{\sqrt{5}}$ 之近似值 1907
- 已知 $\log 12 = 1.0791812$, $\log 1.257915 = .0996512$, 以及 $\log 1.121568 = .0498256$, 求 $(1.44)^{-9} - (1.44)^{-12}$ 1908
- 已知有 $\log 105 = 2.0211893$, $\log 5303214 = 6.7245391$,

- $\log 3768894 = 6.576214$, 求 $\frac{1}{.05} \left\{ \frac{1}{(1.05)^{13}} - \frac{1}{(1.05)^{20}} \right\}$...
- 1909
- 已知 $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$, 計算 $\log \sin 60^\circ$, $\log(5 \sec 45^\circ)$ 1910
- 知 $\log 2 = .3010300$, 由方程式 $5^{6-4x} = 2^{x+3}$ 求 x 之近似值 1911
- 解 $\sqrt[3]{3.2} = \frac{1}{2}$, 但 $\log 2 = .3010300$, $\log 3 = .4771213$ 1912
- 解 $8^x \times 125^{2-x} = 2^{4x+3} \times 5^x$, 但 $\log 2 = .3010300$, $\log 5 = .6989700$ 1913
- 解 $3^{2x} \times 5^{3x-4} = 7^{x-1} \times 11^{2-x}$, 但 $\log 3 = .4771213$, $\log 5 = .6989700$, $\log 7 = .8450980$, $\log 11 = 1.0413927$ 1914
- 解 $2^{3x+2y} = 5$, $4^{2x} = 2^{2y+3}$, 但 $\log 2 = .3010300$, $\log 5 = .6989700$ 1915
- 解 $2^{3x-2y} = 5$, $2^{2x} = 2^{2y+3}$, 但 $\log 2 = .3010300$, $\log 5 = .6989700$ 1916
- 解 $3^{2x} \times 5^{3x-4} = 7^{x-1} \times 11^{2-x}$, 但 $\log 3 = .4771213$, $\log 5 = .6989700$, $\log 7 = .8450980$, 及 $\log 11 = 1.0413927$ 1917
- 解 $2^x \times 5^y = 1$, $5^{x+1} \times 2^y = 2$ 1918
- 解 $8^x = 4^y$, $16^y = 32(2^x)$ 1919

(5) 五位三角函數之對數之問題

- 求 $\log \sin 48^\circ 24' 54''$ 1920
- 求 $\log \cos 44^\circ 23' 42''$ 1921
- 求 $\log \tan 35^\circ 23' 54''$ 1922
- 求 $\log \cot 38^\circ 23' 12''$ 1923
- 按 $\log \sin x = 9.38690 - 10$ 求 x 1924
- 按 $\log \cos x = 9.98543 - 10$ 求 x 1925
- 按 $\log \tan x = 9.82092 - 10$ 求 x 1926
- 按 $\log \cot x = 0.17716$ 求 x 1927

(6) 七位三角函數之對數之問題

- 已知 $L \sin 17^\circ 1' = 9.4663483$, $L \sin 17^\circ = 9.4659353$, 求 $L \sin 17^\circ 0' 12''$ 1928
- 知 $L \sin 26^\circ 24' = 9.6480038$, $L \sin 26^\circ 25' = 9.6482582$,

- 角之餘割對數之變化,與角之變化約略成比例 1952
- 角之正割對數之變化,與角之變化約略成比例 1953
- 若角接近 60° , 則由七位正切真數表,大約可決定此角至秒之 $\frac{1}{200}$ 1954
- 若角近於 $64^\circ 36'$, 則得由其 $L \sin$ 決定其角大約至秒之 $\frac{1}{10}$, 但 $\log_e 10 \cdot \tan 64^\circ 36' = 4.8462$, 具表計算至小數第七位 1955
- 正切與餘切有同表差... .. 1956
- 正切之表差等於正弦之表差與餘弦之表差之和 1957
- 研究正切對數之表差之變化 1958

第七 三角形

I. 直角三角形之解法(理論)

- 知斜邊及一銳角,解直角 $\triangle ABC$ [C 爲直角] ... 1959
- 知斜邊及他一邊,解直角 $\triangle ABC$ [C 爲直角] ... 1960
- 知一邊及一銳角,解直角 $\triangle ABC$ [C 爲直角] ... 1961
- 知二邊,解直角 $\triangle ABC$ [C 爲直角] 1962
- 以 1, 2, 3 之長增加同量所得之長爲三邊,能作得直角 \triangle 否?若能作得 \triangle , 求此 \triangle 之角 1963
- 設直角 $\triangle ABC$ 之二邊爲 $2mn$ 及 $m^2 - n^2$, 求二銳角之半分之正切 [C 爲直角] 1964
- 知直角 $\triangle AEC$ 之斜邊及面積,求角及邊 [C 爲直角] 1965
- 試以直角 $\triangle ABC$ 之斜邊及直角之二等分線解本形 [C 爲直角] 1966
- 知直角 $\triangle ABC$ 中直角之二邊之差, 及此二邊在斜邊上之正射影之差,解本形 [C 爲直角] 1967
- 知直角之二邊之和, 及在此二邊上之高之正射影之和, 解直角 $\triangle ABC$ [C 爲直角] 1968
- 直角 $\triangle ABC$ 中, 知斜邊 c 及一銳角 A , 求內切圓之半徑 1969
- 直角 $\triangle ABC$ 中, 知內切圓之半徑 r 及高 h , 解本形 [C 爲直角] 1970
- 知直角 $\triangle ABC$ 之高 h , 及切直角之一邊之傍切圓半徑 r' , 解本形 [A 爲直角] 1971

II. 斜三角形之解法(理論)

- 知 $\triangle ABC$ 之二角及一邊,解本形 1973
- 知 $\triangle ABC$ 之二邊及夾角,解本形 1974
- 知二邊及其一之對角,解 $\triangle ABC$ 1975
- 知 $\triangle ABC$ 之三邊,解本形 1976
- 第六節 IV 中,業已證明三角函數表恆有不能用之不便,因而當自理論上推得數法,而擇其最適切之一法,且必須變更其解法.試例示之 1977
- 知二邊 a, b , 及二角之差 $A-B$, 解 $\triangle ABC$... 1978
- 知三角形 ABC 之三邊, 求三角形之他解法, 即用 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin S}{abc}$ 諸式, 求其面積及二小角 3054
- 知二邊之和 $a+b$, 及二角 A, B , 解 $\triangle ABC$... 1979
- 知一邊 a , 他二邊之和 $b+c$, 及一角 A , 解 $\triangle ABC$ 1980
- 知一角 B , 一邊 a , 及他二邊之和 $b+c$, 解 $\triangle ABC$ 1981
- 知 $\triangle ABC$ 之一邊, 對角, 及他二邊之和, 解此 \triangle 3044
- 知二角 B, C , 及二邊之和與他一邊之差 $b+c-a$, 解 $\triangle ABC$ 1982
- 知周 $a+b+c$, 及二角 A, B , 解 $\triangle ABC$ 1983
- 知一角 A , 二邊之和 $a+b$, 及 $a+c$, 解 $\triangle ABC$... 1984
- 知一邊 a , 一角 A , 及二邊之平方和 b^2+c^2 , 解 $\triangle ABC$ 1985
- 知一邊 a , 一角 A , 及二邊之平方差 b^2-c^2 , 解 $\triangle ABC$ 1986
- 知一邊 a , 一角 A , 及 $h^2+(b+c)^2=m^2$, 解 $\triangle ABC$ [但 h 爲由 A 所引之高] 1987
- 知一邊 a , 一角 A , 及他二邊之比 $\frac{b}{c}$, 解 $\triangle ABC$ 1988
- 知一邊 a , 他二邊之積 bc , 及一角 A , 解 $\triangle ABC$ 1989
- 知一角及二高, 解 $\triangle ABC$ 1990
- 知一角 A , 高 h , 及此高將邊 a 所分二部分之差, 解 $\triangle ABC$ 1991
- 知一角 A , 高 h , 及二邊之積 bc , 解 $\triangle ABC$... 1992
- 知二邊之積 bc , 二角之差 $B-C$, 及起自點 A 之中線, 解 $\triangle ABC$ 3049

- 知二邊之和 $b+c$, 一邊 a , 及高 h . 解 $\triangle ABC$... 1993
- 知高 h , 及二角 B, C , 解 $\triangle ABC$... 1994
- 知底, 高及底角之差, 解 $\triangle ABC$. 但底角俱為銳角 1995
- 知三高, 解 $\triangle ABC$... 1996
- 知直角 $\triangle ABC$ 之內切圓之半徑 r 及有同直角且其一角頂在斜邊上之正方形之邊, 解此 \triangle [A 為直角] ... 1972
- 知二邊 a, b , 及一角 A , 且知 b 大於 a , 命 c, c' 為所得之 \triangle 第三邊之二值, 則 $c^2 - 2cc' \cos 2A + c'^2 = 4a^2 \cos^2 A$... 1997
- 求兩可款中適合題意之二 \triangle 之面積之和 ... 1998
- 設 B_1, C_1 , 及 B_2, C_2 為兩可款中 $\triangle ABC$ 之二角, 則 $\frac{\sin C_1}{\sin B_1} + \frac{\sin C_2}{\sin B_2} = 2 \cos A$... 1999
- 兩可款中, 設 \triangle 之一之面積為他一之 n 倍, 而 b 為已知邊之大者, a 為小者, 則 $\frac{b}{a}$ 小於 $\frac{n+1}{n-1}$... 2000
- 若 $\log a + 10 = \log b + L \sin A$, 則 $\triangle ABC$ 有兩可款否 ... 2001
- 兩可款中, 若 B 與 90° 二者無甚相異, 則 $b \sin A$ 即可簡捷推得之, 又如在 $\tan B = \frac{b \sin A}{\sqrt{(a+b \sin A)(a-b \sin A)}}$, 或在 $\tan \left(45^\circ + \frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{a+b \sin A}{a-b \sin A}}$ 中亦得用之 ... 2002
- 試計算兩可款中第三邊之二值之差, 並由是求 \triangle 之未知量之驗法 ... 2003
- 知面積 S , 及二角 A, B , 解 $\triangle ABC$... 2004
- 知一邊 a , 一角 A , 及面積 S , 解 $\triangle ABC$... 2005
- 知面積 S , 一角 C , 及 $a+b-c=k$ (常數), 求 $\triangle ABC$ 中之邊 a, b, c , 及角 A, B ... 3048
- 知一邊 c , 二角之差 $A-B$, 及面積 S , 解 $\triangle ABC$ 2006
- $\triangle ABC$ 中, 知一角 A 及由此角所引之中線 m , 及面積 k^2 , 求邊 b 及 c ... 2007
- 設 $\triangle ABC$ 之三邊為連續之三整數, 又最大角為最小角之二倍, 求此三邊 ... 2008
- 知 $\triangle ABC$ 之二邊 b 及 c , 且此 \triangle 之面積等於第三邊 a 為邊之正三角形, 求邊 a 及角 A ... 2009
- 設 $\triangle ABC$ 中, 邊 a 等於其所對之高 h , 且邊 b 及邊 c 為已知, 計算角 A ... 2010
- 知 $\triangle ABC$ 之三角, 求一中線與邊間之角 ... 2011

- $\triangle ABC$ 中, 知角 A 及高 AD 將邊 a 所分之部分, 求 B 及 C 2012
- 在 $\triangle ABC$ 之一邊 AC 上, 按 AB 之長取 AD , 計算 BD 2013
- 設兩 $\triangle AB'C$, $AB''C$ 公有一邊 b 及一角 A , 且 a 等於 a' , 則 $\tan A = \cot \frac{1}{2}(C' + C'')$ 2014
- 知 $\triangle ABC$ 之一邊 a , 及二角 B, C , 求角 A 之二等分線之長 2015
- 解法之公式中, 有所設二邊及夾角之 \triangle 恆有之, 而限於一 2016
- 知 $\triangle ABC$ 之二邊 b 及 c , 計算夾角 A , 但由 A 所引之中線為 b 及 c 之比例中項 2017
- $\triangle ABC$ 中, 知二邊 b, c , 及一角 A , 試用 $c \sin A = a \sin C$ 及 $c \cos A = b - a \cos C$ 之式, 而不用對數式計算角 C 2018
- 設 a, b, c 及 A, B, C 為 \triangle 之元素; x, y, z 為聯立方程式 $\cos x = \frac{a}{b+c}, \cos y = \frac{b}{a+c}, \cos z = \frac{c}{a+b}$ 所決定之銳角, 檢驗次式: $\tan^2 \frac{x}{2} + \tan^2 \frac{y}{2} + \tan^2 \frac{z}{2} = 1, \tan \frac{x}{2} \tan \frac{y}{2} \times \tan \frac{z}{2} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$ 2019
- $\triangle ABC$ 中, 知二邊 b, c , 及一角 A , 試用對數式求由 A 所引之二等分線與中線 2020
- 已知引自同角頂 A 之高 h , 中線 m 及二等分線 β , 解 $\triangle ABC$ 3052
- $\triangle ABC$ 中, 知角 A , 及由角頂 A 所引之中線 m 及高 h , 解此 \triangle 2021
- 試以二邊 a, b , 及一對角 A 之項表 $\triangle ABC$ 之面積 2022
- 設 \triangle 之中邊為 b , 面積為 m^2 , 又角成等差級數, 試解此 $\triangle ABC$ 2023
- 知三傍切圓之半徑 r_1, r_2, r_3 , 解 $\triangle ABC$ 2024
- 知邊 a , 周 $2s$, 及內切圓之半徑 r , 解 $\triangle ABC$... 2025
- 知一角 A , 外接圓之半徑 R , 及內切圓之半徑 r , 解 $\triangle ABC$ 2026
- 知 $\triangle ABC$ 之一邊, 周, 及內切圓之半徑, 解此 \triangle ... 3045
- 知 $\triangle ABC$ 之一邊及對此邊之高, 以及內切圓之半徑, 解此 \triangle 3046

- 已知 $\triangle ABC$ 之高 h , 外接圓之半徑 R , 內切圓之半徑 r , 解此 \triangle 3047
- 知一邊 a , 一角 B , 及內切圓之半徑 r , 解 $\triangle ABC$ 2027
- 知二等邊 \triangle 之底及底角之二等分線, 求底角之半分, 且化之爲對數式 2028
- 已知 $\triangle ABC$ 之邊 a , 角 B 及引自頂點 A 之高 h 與邊 b 之差 $b-h=l$, 解此 \triangle 3055
- 3055 題可歸於下題, 即求以三角形之角頂 C 爲焦點, 邊 BC 之平行直線爲準線之拋物線與邊 BA 之二交點 3056
- 已知 $\triangle ABC$ 之外接圓之半徑 R , 二角之差 $B-C$, 及角 A 之二等分線 a , 解本形 3057
- 知三角形 ABC 之內切圓之半徑 r , 角 A , 及邊 b 爲高所分二分中, 接於角 A 之一分 d , 解此三角形 3066
- 設三角形 ABC 之外接圓之半徑爲單位, 知比 $\frac{a}{b+c} = \lambda$, 及三角形之外二等分線所生三角形中之比 $\frac{a'}{b'+c'} = \lambda'$, 解 \triangle 3050
- 已知 $\triangle ABC$ 之一角 A , 及此角之三等分線將對邊分作三分中之兩端之部分, 解此 \triangle 3051
- 由三角形 ABC 之垂心至各角頂之距離, 其比爲已知, 計算三角 3053
- 設三角形 ABC 之面積等於所設正方形, 邊 AB 等於所設直線 c , 二角之差 $A-B$ 等於一正角 α , 求角 A 及 B . 又問題恆成立否? 有多數之解否? 3058

III 直角三角形之解法

(1) 不用對數者

- $c=12, A=30^\circ, C=90^\circ$. 解 $\triangle ABC$ 2029
- $\triangle ABC$ 中, 知 $a=3, \sin A = \frac{3}{5}$, 求 $b, c, \sin B$, 但 C 爲直角 2030
- 設 $a=5\sqrt{3}, A=60^\circ, C=90^\circ$, 解直角 $\triangle ABC$.. 2031
- 解 $\triangle ABC$: 已知 $B=45^\circ, a=25$, 但 $C=90^\circ$, ... 2032
- $\triangle ABC$ 中, 知 $A=30^\circ, b=5$, 求 a 及 c , 但 C 爲直角 2033
- 解 $\triangle ABC$: 已知 $a=3\sqrt{2}, b=\sqrt{6}, C=90^\circ$... 2034
- C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, $a=20, c=40$, 求 b, A, B 2035
- 知 $c=12, a=3, C=90^\circ$, 解 $\triangle ABC$ 2036
- 解 $\triangle ABC$: 已知 $c=2000, b=287, C=90^\circ$.. 2037

- C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, 知 $a=37$, $c=100$, 解本形, 但 $\sin 21^\circ 43' = 0.37$, $\cos 21^\circ 43' = 0.93$ 2038
- 設 $a=5$, $b=6$, 解直角 $\triangle ABC$ 2039
- 解 $\triangle ABC$: 已知 $b=37$, $a=50$, $C=90^\circ$ 2040
- 解 $\triangle ABC$. 已知 $b=12$, $A=42^\circ 10'$, $C=90^\circ$... 2041
- C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, 知 $b=20$, $A=78^\circ 20'$, 求 c 2042
- C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, 知 $B=25^\circ 43'$, $c=100$, 求 A , a , b , 但 $\tan 25^\circ 43' = 0.482$, $\cos 25^\circ 43' = 0.901$... 2043
- 解 $\triangle ABC$: 已知 $c=16$, $B=38^\circ 20'$, $C=90^\circ$... 2044
- C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, $A=38^\circ 10'$, $c=50$, 求 a 2045
- 設一直線上有與其成 A 角且長 a 尺之直線, 求其正射影之長. 次, 設 $A=72^\circ$, $a=\sqrt{5}+1$, 則如何? ... 2046
- 有二等邊直角 $\triangle ABC$, B 爲直角, 將 BC 三等分於 E, F , 求角 EAF 及 FAC 之正切 2047
- A 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, 知 $\frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}$, 求 $\cos \frac{B-C}{2}$ 2048
- 設直角 $\triangle ABC$ 之一銳角之正切爲 0.75 , 其周爲 1 尺 2 寸, 求斜邊之長. 但 A 爲直角 2049
- C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, 知 $\tan A = \frac{11}{3}$, $AC = \frac{27}{11}$, 求 AB 2050
- $\triangle ABC$ 中, 知 $BC=50$, $B=30^\circ$, $C=120^\circ$, 求由頂點 A 至 BC 所引垂線之長 2051
- 計算前題中三角形之面積 2052
- $\triangle ABC$ 中, 知 $A=30^\circ$, $B=135^\circ$, $AB=100$ 尺, 求由 C 至 AB 之延線所引之垂線之長 2053
- 設 $\triangle ABC$ 中, AD 爲至 BC 之垂線, $AD=5$, $\hat{A}BD = 60^\circ$, $\hat{A}CD = 45^\circ$, 解本形 2054
- 直角 $\triangle PQR$ 中, 知 $QR=8$, $\hat{Q}RP = 60^\circ$, $\hat{Q}PR = 30^\circ$, 求由 Q 至斜邊 PR 所引垂線將斜邊所分二部之長 ... 2055
- 設 CD 爲至直線 DBA 所引之垂線 $CD=20$, $\hat{C}BA = 135^\circ$, $\hat{C}AD = 30^\circ$, 求 BA 2056
- 設 CD 爲至直線 DBA 所引之垂線, $AB=59$, $\hat{C}BD = 45^\circ$, $\hat{C}AB = 32^\circ 50'$, $\cot 32^\circ 50' = 1.5497$, 求 DC 及 BD 2057
- 知 $\triangle ABC$ 之頂角及底與高之比, 求由頂角至底所引之垂線將頂角所分各部之正切. 次, 設頂角爲 75° , 底與高之比爲 $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, 則如何? 2058

- 知一邊 a 及他二邊之差 $b-c=d$, 解 A 爲直角之 $\triangle ABC$, 且玩素之. 又設 $d = \frac{7}{13} = a$, 求三角及內切圓之半徑 ...
 2059
- 設 B 爲直角之 \triangle 之周爲 15 米, 其面積爲 0.275 平方米, 求三邊及三角以及內切圓之半徑 3100

(2) 五位對數

- C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, 知 $b=324.6$, $A=34^{\circ}27'30''$, 解此 \triangle 2060
- C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, 知 $a=6275.3$, $A=27^{\circ}35'45''$, 求此 \triangle 之元素 2061
- C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, 直角旁之二邊之長爲 3245.6, 273.5, 解此 \triangle 2062
- C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, 知 $c=12345$, $A=35^{\circ}24'30''$, 求他邊及角 2063
- C 爲直角之 $\triangle ABC$ 中, 知 $a=2468$, $c=3689$, 求 b , A . 及 B 2064

(3) 七位對數

- 知 $a=4258.39$, $B=32^{\circ}12'29''.8$, $C=90^{\circ}$, 解 $\triangle ABC$ 2065
- 已知 $b=6384.263$, 又其對角 $B=48^{\circ}23'55''.32$, 求解 C 爲直角之 $\triangle ABC$ 2066
- 知 $a=496.738$, $b=305.624$, 解 C 爲直角之 $\triangle ABC$ 2067
- 直角 $\triangle ABC$ 中, 知斜邊 c 爲 6953, $b=3$, 求 B . 但 $\log 3.475 = .5409548$, $\log 6.953 = .8421722$, $L \sin 44^{\circ}59'15'' = 9.8493902$ 及 $1''$ 之差爲 .0000021 2068
- 直角 \triangle 中, $a=34828.43$ 米, $B=48^{\circ}35'27''$, 計算 b . 又設邊 a 一定, 邊 b 增加 20 米, 則角 B 增加幾何 ... 2069
- 設直角三角形中, 直角之二等分線將斜邊分爲 4.319 米與 5.238 米二部, 求此 \triangle 之角 2070

IV. 斜三角形之解法

(1) 不用對數者

- 設 \triangle 之二邊爲 5 尺及 7 尺, 其夾角爲 60° , 求第三邊及面

- 積... .. 2071
- 有 $\triangle ABC$, 一邊爲他邊之半, 其夾角爲 60° , 他角如何
... .. 2072
- $\triangle ABC$ 中, 若 $A=30^\circ$, $b=100$, $a=40$, 則生兩可款否 ...
... .. 2073
- 設 $A=18^\circ$, $a=4$, $b=4+\sqrt{80}$, 解 $\triangle ABC$... 2074
- 設 $A=15^\circ$, $a=4$, $b=4+\sqrt{48}$, 解 $\triangle ABC$... 2075
- 設 \triangle 之二邊爲 300 尺及 120 尺, 其夾角爲 150° , 則面積
如何 2076
- $\triangle ABC$ 中, $a=\sqrt{2}$, $b=10$, $\sin A=\frac{1}{4}$, 求 c ... 2077
- 有 \triangle , 其二邊爲 3 及 12, 夾角爲 30° , 求與其等積之二等邊
直角 \triangle 之斜邊 2078
- $\triangle ABC$ 中, $\sin B=.25$, $a=5$, $b=2.5$, 求角 A ... 2079
- $\triangle ABC$ 中, $b=1$, $c=\sqrt{2}$, $A=45^\circ$, 試不用表而求他二角
之正弦及餘弦 2080
- 設 $\triangle ABC$ 之一邊爲 30 尺, 兩鄰角爲 $22^\circ\frac{1}{2}$ 及 $112^\circ\frac{1}{2}$, 求面
積... .. 2081
- 設 \triangle 之二角爲 15° 及 45° , 其夾邊爲 10 尺, 求面積 ...
... .. 2082
- 有 \triangle , 其三邊成 $2:\sqrt{6}:1+\sqrt{3}$ 之比, 求其各角... 2083
- 設 \triangle 之三邊爲 24, 30, 18, 求其面積 2084
- 設 \triangle 之三邊爲 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, 試不用表而求角 ...
... .. 2085
- 設 \triangle 之三邊爲 171, 204, 195, 求面積及至 171 之邊所引
之高 2086
- \triangle 之各邊爲 3, 5, 6, 求其內切圓及外接圓之半徑之比 ...
... .. 2087
- 設 \triangle 之三邊爲 39, 40, 25, 求由各角頂至對邊所引三垂線
之長 2088
- $\triangle ABC$ 中, $a=13$, $b=14$, $c=15$, 求 r 及 R ... 2089
- 設 $\triangle ABC$ 之三邊爲 17, 10, 21, 求 r_1, r_2, r_3 ... 2090
- 設 $\triangle ABC$ 之面積爲 96, 三傍切圓之半徑爲 8, 12, 24, 求
三邊 2091
- $\triangle ABC$ 中, $A=75^\circ$, $C=45^\circ$, 及由 A 至 BC 所引垂線之長
爲 12 尺, 求三邊之長... .. 2092
- 設二等邊 $\triangle ABC$ 之等邊爲 2 米, 其面積爲 1 平方米, 求底
及底角... .. 2093
- $\triangle ABC$ 中, $A=60^\circ$, $b=c(2+\sqrt{3})$, 求 $\tan\frac{B-C}{2}$, 及 B, C

- 2094
 ●設 $\triangle ABC$ 之三高爲 20 米, 15 米, 及 12 米, 求面積及三邊
 2095
 ●設地球之表面上高 h 之一點對於地平之俯角爲 a , 求地
 球之半徑 2096

(2) 五位對數

- $\triangle ABC$ 中, 設 $A=78^{\circ} 23'.2$, $B=52^{\circ} 16'.3$, $a=796.3$, 求
 b, c 2097
 ●設 $A=45^{\circ} 41'$, $C=62^{\circ} 5'$, $b=100$, 求 B, c, a ... 2098
 ●設 $a=123$, $B=29^{\circ} 14'$, $C=124^{\circ}$, 求 A, b, c ... 2099
 ● $b=27$, $c=23$, $A=44^{\circ} 30'$, 求 B, C, a 2100
 ●設 $a=15$, $b=7$, $c=13$, 求 A, B, C 2101
 ●設 $a=654$, $b=784$, $c=598$, 求面積 2102
 ●設 $a=23.46$, $b=35.79$, $A=28^{\circ} 35'.4$, 求 C, c 2103
 ●設 $b=483.7$, $c=379.4$, $B=34^{\circ} 11'$, 求 A, C 及 a 2104
 ●設 $\triangle ABC$ 中, (I) $A=30^{\circ}$, $a=125$, $c=250$. (II) $A=30^{\circ}$,
 $a=200$, $c=250$. (III) $A=30^{\circ}$, $a=200$, $c=125$, 其中何
 款爲兩可款... .. 2105

(3) 七位對數

- $a=542.27$, $B=67^{\circ} 28' 47''$, $C=64^{\circ} 42' 54''$, 解此 \triangle ...
 2106
 ●已知 $a=156$, $B=39^{\circ} 40'$, $C=72^{\circ} 21'$, 解此 \triangle ... 2107
 ●已知 $b=63.279$, $c=56.283$, $A=46^{\circ} 29' 35''$, 求 B, C, a
 2108
 ●已知 $a=10$, $b=30$, $\log \sin A = \bar{1}.5228787$, 求 B ...
 2109
 ●設 $\triangle ABC$ 之二邊爲 18 及 2, 夾角爲 55° , 則他二角各如
 何? 但 $\log 2 = .3010300$, 又 $L \cot 27^{\circ} 30' = 10.2835233$,
 $L \tan 56^{\circ} 56' = 10.1863769$, 及 $1'$ 之差爲 .0002763 ...
 2110
 ●有 $\triangle ABC$, 其二邊之比如 9 與 7, 夾角爲 $64^{\circ} 12'$, 求他各
 角. 但 $\log 2 = .3010300$, $L \tan 57^{\circ} 54' = 10.2025255$, 又
 $L \tan 11^{\circ} 16' = 9.2993216$, $L \tan 11^{\circ} 17' = 9.2999804$...
 2111
 ●已知 $a=70$, $b=35$, $C=36^{\circ} 52' 12''$, 求他各角. 但 $\log 3$
 $= .4771213$, $L \cot 18^{\circ} 26' 6'' = 10.4771213$... 2112

- 設 $\triangle ABC$ 之二邊之比如 9 與 7, 夾角為 $47^{\circ} 25'$, 求他各角. 但 $\log 2 = .3010300$, $L \tan 66^{\circ} 17' 30'' = 10.3573942$, $L \tan 15^{\circ} 53' = 9.4541479$ 及 $1'$ 二者之差為 .0004797 ...
... .. 2113
- $\triangle ABC$ 中, $a=30$, $b=20$, 其夾角為 22° , 求他各角. 但 $L \cot 11^{\circ} = 10.7113477$, $L \tan 45^{\circ} 48' = 10.0121294$, $L \tan 45^{\circ} 49' = 10.0123821$, $\log 2 = .3010300$, ... 2114
- $\triangle ABC$ 中, $b=14$, $c=11$, $A=60^{\circ}$, 求證 $B=71^{\circ} 44' 29''$. 但 $L \tan 11^{\circ} 44' 29'' = 9.3177364$, $\log 2 = .3010300$, $\log 3 = .4771213$ 2115
- 設 $\triangle ABC$ 之二邊為 80 及 100, 夾角為 60° , 求其他各角. 但已知 $\log 3 = .4771213$, $L \tan 19^{\circ} 53' 36'' = 9.2843156$ 2116
- 設 $\triangle ABC$ 之二邊為 3 及 5, 夾角為 120° , 求其他各角. 但已知 $\log 4.8 = .6812412$, $L \tan 8^{\circ} 12' = 9.1586706$, 及 $60'$ 之差為 .008940 2117
- 設 $\triangle ABC$ 中, $\frac{a}{b} = 12$, $C=60^{\circ}$, 則他各角如何? 但 $\log 3 = .4771213$, $L \cot 9^{\circ} 49' = 10.7618797$ 及 $1'$ 二者之差為 .0007514 2118
- 已知 $\log b = 3.2714872$, $\log c = 1.1159263$ 及 $A = 69^{\circ} 51' 28''.5$, 解 $\triangle ABC$ 2119
- 設 $\triangle ABC$ 二邊之長已知為 8870.5 米, 及 13121.5 米, 其間夾角已知為 $65^{\circ} 16' 30''$, 求第三邊 2120
- $\triangle A.C$ 中, $a=35960.18$, $b=98712.97$, $C=35^{\circ} 18' 57''.17$, 求 A, B, c 及 S 2121
- 設 $\triangle ABC$ 之二邊及其夾角為 187.1212 米, 93.1478 米, 及 $70^{\circ} 47' 25''.4$, 求 (I) 他二角, (II) 第三邊, (III) 面積, (IV) 內切圓之半徑, (V) 自內心至各角頂之距離 2122
- 計算前題中 \triangle 之外接圓半徑 2123
- 已知 $a=279$, $b=386$, $c=393$, 求 A, B, C ... 2124
- 已知 $a=18$, $b=20$, $c=22$, 求 $L \tan \frac{A}{2}$. 但已知 $\log 2 = .3010300$, $\log 3 = .4771213$ 2125
- 設 $\triangle ABC$ 之各邊為 7, 8, 9, 試決定各角. 但已檢得 $\log 2 = .3010300$, $L \tan 24^{\circ} 5' 40'' = 9.6595069$, $L \tan 24^{\circ} 5' 50'' = 9.6595634$, $L \tan 29^{\circ} 12' 20'' = 9.7474183$, 及 $L \tan 29^{\circ} 12' 30'' = 9.7474577$ 2126
- 設 $\triangle ABC$ 之各邊為 32, 40, 66, 求最大角. 但 $\log 207$

- $=2.3159703$, $\log 1073 = 3.0305997$, 以及 $L \cot 66^\circ 18'$
 $=9.6424342$. 又 $1'$ 之差為 $.0003434 \dots \dots$ **2127**
- 設 $\triangle ABC$ 之各邊為 $4, 5, 6$, 求角 B . 但 $\log 2 = .3010300$,
 $L \cos 27^\circ 53' = 9.9464040$ 及 $1'$ 之差為 $.0000669$ **2128**
- 試應用 $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\left\{ \frac{s(s-a)}{bc} \right\}}$ 之公式, 以求各邊為 $5, 6, 7$
 之 \triangle 之最大角, 但已知 $\log 6 = .7781513$, $L \cos 39^\circ 14'$
 $=9.8890644$ 及 $60''$ 之差為 $.0001032 \dots \dots$ **2129**
- 設 $\triangle ABC$ 中, $a = 2597.845$ 米, $b = 3084.327$ 米, 又 c
 $= 2136.737$ 米, 求角, 面積, 內切圓, 及外接圓之半徑 \dots
 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **2130**
- 設 $\triangle ABC$ 中, $a = 73.4$, $b = 64.9$, $B = 48^\circ 13' 25''$, 求 A ,
 $C, c \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **2131**
- 設 $\triangle ABC$ 中, $a = 49263$, $b = 59375$, $B = 83^\circ 27' 46''$, 求
 $A, C, c \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **2132**
- 設 $\triangle ABC$ 中, $a = 2$, $c = 3$, $L \sin A = 9.5228787$, 求 C . 但
 $\log 3 = .4771213 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **2133**
- 設 $\triangle ABC$ 中, $a = 3428.58$ 米, $B = 108^\circ 15' 27''$, $C = 47^\circ 25'$
 $47''$, 求邊 a 所對之高 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **2134**
- 設 \triangle 之二邊為 65 及 25 , 其對角之差為 60° , 知 $\log 3$
 $= .4771213$, $\log 2 = .3010300$, $L \tan 52^\circ 24' = 10.1134508$,
 $L \tan 50^\circ 25' = 10.1137122$, 求各角 $\dots \dots \dots$ **2135**
- 設 $\triangle ABC$ 中, $b = 45.49$, $c = 34.58$, 及 $A = 69^\circ$, 求由 A 所
 引之中線 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **2136**
- 設 $\triangle ABC$ 之周為 1.20 米, 二角為 $35^\circ 17' 15''$ 及 $62^\circ 43' 30''$,
 計算三邊 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **2137**
- $\triangle ABC$ 中, 設 $b = 517.135$ 米, $c = 862.256$ 米, 而 A 適合
 $\cos 2A = 1.375(\cos A - \sin A)$, 計算 B, C, a 及 S **2138**
- 已知 $\triangle ABC$ 之全面積 $S = 18937.07$, 二邊之和 $a + b$
 $= 1045.7$, 及乘積 $ab = 271744$, 解本形 $\dots \dots \dots$ **2139**
- 於 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 842.752$, $B = 64^\circ 45' 28''.6$, $C = 42^\circ$
 $25' 17''$, 求 (I) 自內心至頂點 B 之距離 OB , (II) 內切圓
 之半徑, (III) 頂點 A 與內切圓凸弧間之三角形一部分中
 內切圓之半徑 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **3082**
- 已知 $\triangle ABC$ 之二角 $A = 39^\circ 27' 28''.3$, $B = 58^\circ 12' 37''.29$,
 又自頂點 A 引邊 BC 之平行線而 \triangle 繞此直線迴轉時所生
 之體積 $V = 729$ 平方米, 求三邊 $\dots \dots \dots \dots \dots$ **3094**
- 於 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b = 3.087$, $c = 2.314$, $A = 30^\circ 25' 30''$,
 求繞 \triangle 迴轉時生成之體積 $\dots \dots \dots \dots \dots \dots$ **3098**

V. 複 雜 之 解 法

(1) 三 角 形

- 底邊 12 寸,頂角 60 度之 \triangle ,求其外接圓之半徑 **2140**
- 設 $\triangle ABC$ 之三角爲 1, $3/7$, $14/469$, 試求比例於三中線之三數... .. **2156**
- 知二等邊 $\triangle ABC$ 之底 a 及頂角 A , 求其內切及外接圓半徑之差.. .. **2149**

(2) 平 行 四 邊 形, 菱 形

- 設平行四邊形二邊之長爲 8 尺及 12 尺,其夾角爲 60° , 求對角線之長 **2142**
- 設菱形之角爲 54° , 其大對角線爲 1.25 米, 求其邊及面積... .. **2144**
- 設菱形之一角爲 $37^\circ 24' 36''$, 而兩對角線之和爲 465 米, 試計算其邊... .. **2147**

(3) 梯 形

- 知梯形之四邊 a, b, c, d , 求各角 **2146**
- 設梯形之高爲 h , 小底爲 b , 又不平行之二邊爲 a 及 c , 求角及面積. 又設 $a=42, b=68, c=75, h=15$, 實計之... .. **2148**
- 知梯形之四邊,今以其大底爲軸,而迴轉之. 計算其所生之體積. 又本題之結果中,設 $AB=100, DC=35, AD=40$, 及 $BC=48$. 而計算此旋轉體之體積 **3073**
- 梯形之二底爲 2801.87 米及 1925.34 米,又已知兩邊爲 1402.448 米, 1227.142 米時,求其角及面積 ... **3090**
- 梯形之兩底爲 247.9 米, 358.6 米,又兩邊爲 141.3 米, 187.4 米時, 求 (I) 自兩對角線之交點至兩底之距離 (II) 梯形之角 **3093**

(4) 四 邊 形

- 四邊形 $ABCD$ 中,知三邊 $AB=a, BC=b, CD=c$, 兩對角線 $AC=p, BD=q$, 求 $AD=x$ **2143**
- 設四邊形之一雙對角爲直角, 且知他一角與此角旁之兩邊,解四邊形 **2145**

- 已知四邊形之三邊及第四邊之兩端之角，解本形 3059
- 在四邊形 ABCD 中，已知對角線 AC，角 ABD, DBC, ADB, BDC，求四邊與對角線之夾角 3064
- 已知四邊形 ABCD 之四邊 a, b, c, d 及面積 s ，解本形 3086

(5) 內接外切四邊形

- 知圓之內接四邊形 ABCD 之四邊 a, b, c, d ，求其兩對角線 δ, δ' 間之角 2150
- 設四邊形之相對二角互為補角，其順次所取各邊 a, b, c, d 分別為 3, 5, 4, 4，求其內切圓及外接圓之半徑及面積 2158
- 已知自圓之中心至內接四邊形 ABCD 之四邊之距離，解此四邊形 3078
- 已知圓之內接四邊形 ABCD 之三邊與二對角線之角，求第四邊 3085
- 在圓之內接四邊形中，設 $B=87^{\circ}38'47''$ ， $a=713.68576$ 米， $b=557.34875$ 米， $d-c=50.35$ 米，求半徑 R，邊 d, c ，角 A 及面積 S 3095
- 已知圓外切四邊形 ABCD 之周與角，解本形 ... 3060
- 已知圓外切四邊形之四邊 a, b, c, d 及內接圓之半徑 r ，解本形 3087

(6) 多角形

- 五邊形之各邊皆為 1.175 米，其角順次為 $113^{\circ}, 104^{\circ}, 115^{\circ}, 100^{\circ}4'8''$ ，求其面積 3091
- 一圓之內接正多角形之面積與外切同邊數正多角形之面積之比問 3 與 4，求其邊數 2159
- 半徑為 0.75 米之圓，求其內接正十九邊形之周 2162

(7) 角，平行線

- 知一角 α 及其一邊上之二點至他邊之距離為 d 及 d' ，求過此二點且切他邊之圓之半徑 2152
- 設角 BAC 之二邊與過其頂點之鉛垂線所成之角為已知，求角 ABC 在水平面上之正射影 2153
- 設一圓切已知角 α 之正切，正割，及其弧，求其半徑。試說

- 明其所以得二值之理由。又若所得值之一等於圓之半徑，則 $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ，證之 2157
- 在所設角之兩邊間，自此角之二等分線上之一定點引一定長之直線 3062
- 於所設二平行線等遠 $[l]$ 之一平行線上，有二所設點 [其距離為 d]，試由其一點引一直線，令在其平行線間之部分張於他點之角為 45° 2151

(8) 圓

- 設兩餘弧之弦為 $\sqrt{13}$ 及 $\sqrt{6}$ ，求圓之半徑及兩弧之度數 2160
- 設有一象限，求引一切線，令 $OP + OQ = m$ ，但 m 為一定之長，且 $OM = R$ 為所設量 3061
- 由半圓 ACA' 之一端 A' 引一切線，試更由他端 A 引一直線 ACB 與之相交，令其在圓周與切線間之部分 CB 等於定長 2161
- 作一正三角形，其頂點在所與之三同心圓之三圓周上 3101

(9) 兩 圓

- 知二圓之中心距離 a ，外公切線之角 2α ，內公切線之角 2β ，求兩圓之半徑。又試令 $a = 714$ 米， $\alpha = 36^\circ 8'$ ， $\beta = 75^\circ 48'$ ，而計算之 2154
- 已知兩圓之半徑為 3 米及 4 米，二中心間之距離為 2 米，求 (I) 以二中心及二圓周交點之一為頂點之三角形之面積，(II) 公弦之長，(III) 對此弦之二弧之長，(IV) 二圓之公共部分之面積 3097
- 有兩圓周，其半徑之比為 1.8，在中心聯結之線上有一點 O ，係距一中心為 200 米，他中心為 300 米者，自 O 點見一圓周之角等於他圓周之角之三倍，求兩圓周之半徑 3099

(10) 多 面 體

- 計算立方體之兩對角線間之角 2155
- 有一方錐，其底邊為 200 尺，各稜為 150 尺，求各面之斜度。但 $\log 2 = .30103$ ， $\text{Ltan } 26^\circ 33' = 9.69838$ ， $\text{Ltan } 26^\circ 34' = 9.69900$ 2163

- 試計算正四面體之棱在底面之傾斜角 及此體之二面角
... .. 2164
- 已知四面體 $S-ABC$ 之底邊 AB, BC , 角 BAC , 及頂點 S
在由 $\triangle ABC$ 之重心 O 所引之此三角形面之垂線上, 且 SC
等於所設長. 求此四面體之諸棱及體積 3067
- 知正三角錐之底之邊與高, 計算兩平面角, 又不用邊與高,
試求二平面角之關係 3068
- 正六角錐體 $A-BCDEFG$ 之二相接傍面之角之餘弦, 試以
底之棱與錐體之高表之 3084
- 試以棱之長計算四面體 $ABCD$ 之體積 3088
- 以平行六面體之三棱與三棱互成之角, 計算體積
... .. 3089

(11) 旋轉體

- 設圓錐體之頂角為 $2a$, 其內切球之半徑為 R , 求其體積
... .. 2165
- 一圓錐體之體積為 450 立方米, 頂角為 $37^{\circ}25'50''$, 求其
全面積 2166
- 弓形繞一直徑迴轉而生之體積得以弓形弧之中心角 α 與
中心至弦之距離 h 及此垂線與迴轉軸 (即直徑) 所成之角
 β 表之 3079
- 以地球之面積為單位, 計算極圈內地球球缺之面積及體
積 [各極圈距極 $23^{\circ}28'$] 3096

(12) 變化之研究

- 試將三角形 ABC 之外接圓之半徑 R 以邊 b, c 及角 A 之
項表之. 又設邊 b, c 不易, 令角 A 變化, 而研究半徑之變
化 3071
- 有一圓及其平面上之一點 A , 設將圓之直徑迴轉, 則由 A
視其兩端之角之變化如何, 試依對數式研究之 3082
- 有一圓, 自其平面內之一定點 A 引成定角 α 之任意二直
線 ABC, ADE , 試研究圓內二弦 BC, DE 之長之乘積之變化
... .. 3083

VI. 測量應用

(1) 理論

(I) 高

- 設一目標得在同一水平面上行近之, 求此目標之高之測

- 定法 2167
- 設水平面上之一目標，可望而不可即，求其高及距離 2168
- 在前題中，與目標之底端在同一水平面上之點，若不能求得，則如何 2169
- 塔上立一旗竿，竿高 l 尺，一人望塔頂，得仰角 B ，望竿頂，得仰角 A ，求塔高 2181
- 自塔脚望樹頂，得仰角 α ，登塔 h 尺再望之，得仰角 β ，求樹高 2182
- 有塔立於丘上，一人測其頂及底之仰角，得 α 及 β 。次，退後 l 尺，再測塔頂之仰角，得 γ ，求塔之高及丘之高 2183
- 一塔之基不可達，且不在平地上，用何測塔之高 2184
- 距高 h 之塔為 a 之地上見塔頂與山頂成一直線，從塔脚得山頂之仰角 α ，求山之高 2188
- 環塔有一池，其闊與塔之高等，距池 c 尺處又有一塔，其高為 a 尺，第一塔張 45° 之角於第二塔之頂，求第一塔之高 2189
- 一塔高 h ，由其頂望地上之一直線，得視角為一直角，又其兩端之俯角為 α 及 β ，求直線之長及至塔頂之距離 2191
- 由地上之一點，測塔頂之仰角，由是向塔行 30 尺測之，則塔頂之仰角為前之 2 倍，更向塔行 $10\sqrt{3}$ 尺，則塔頂之仰角又為前之 2 倍，求最初之仰角 2192
- 由甲地向塔進 a 而達乙地，更進 b 而達丙地，在乙地之塔之仰角，與在甲地之仰角，互為餘角，在丙地之仰角，等於在甲地之二倍。求自甲地至塔基之距離，在甲地之仰角，及塔之高 2195
- 一人測塔頂及立於塔上之旗竿之仰角，得 α 及 $90^\circ - \alpha$ ，由是退 a 尺，更測塔頂之仰角，得前之半分，求竿長 2196
- 斜面 ABC 與垂直方向成角 α ，其上有一塔 PQ ，在 A 及 B 視塔，分別得角 β 及 γ ，而 $AB = a$ ，求塔之高 h 2199
- 在塔南之一地測塔頂之仰角，得 α ，由其塔西行 l ，再測其仰角，得 β ，塔高幾何 2200
- 就塔基所在之水平面上，擇一距塔基 a 尺之地，視塔及塔尖，得等角，今設塔之高為 h 尺，則塔尖之高為 $\left(\frac{a^2+h^2}{a^2-h^2}\right)h$

- 尺... .. 2202
- 一點與塔基在同一之水平面上，自此點望塔，得仰角 α ，又由此點直上 a 尺望塔，得仰角 β ，則塔之高 h 爲 $a \cos \beta \times \sin \alpha \operatorname{cosec}(\alpha - \beta)$ 2204
- 水平面上有傾於北方之一塔，今於其正南方距塔基 a, b 之二處測之，則塔之仰角爲 α 及 β 。茲設塔之傾度爲 θ ，其垂直高爲 h ，則得 $\tan \theta = \frac{h-a}{b \cot \alpha - a \cot \beta}$ ，而 $h = \frac{b-a}{\cot \beta - \cot \alpha}$ 2218
- 高 a 丈之目標豎於塔頂之上，與塔基在同水平面上，且距塔基 b 丈之地，視此目標，得角 γ ，求塔高 ... 2219
- 設水平面上之三角形 ABC 中， $AB=c, BC=a, AC=b$ 。今設有一塔於 C ，其高 $CD=h$ ，角 ADB 爲 δ ，求高 h 2227
- 一技士，立於戶前，越壁而遙望直立之塔，得角 α ，塔頂與壁頂在一直線上，於是彼復登其所立處之屋頂，測得塔之仰角 β 。今設知家之高，技士之高不計，求塔及壁之高 2253
- 設 PC 爲水平線 ABC 上之高，今爲求 PC 起見，在 A 測得仰角 α 度，在 B 測得仰角 β 度，而 AB 之長爲 a ，則 $PC = a \times \sin \alpha \sin \beta \operatorname{cosec}(\beta - \alpha)$ 2205
- 有一藥研形之溪谷，研口之闊爲 l ，上架水平之橋，其與溪谷兩岸之斜面所成之角，分別爲 α 及 β ，則由溪谷之底至橋之高等於 $l/(\cot \alpha + \cot \beta)$ 2206
- 有一直立之目標桿，在過其足之一水平線上，有三點 A, B, C ，由此測之，知 B 處之仰角，等於 A 處仰角之二倍， C 處之仰角，等於 A 處仰角之三倍。命 $AB=a, BC=b$ 。求證目標之高爲 $\frac{a}{2b} \sqrt{(a+b)(3b-a)}$ 。又設 A 處仰角之正切爲 $\frac{1}{3}$ ，則 $5a=13b$ 2220
- 設 $ABCD$ 爲一水平直線，今由點 D 直上之點 P 測已知距離 AB 及 BC ，知其含同角 α 。命 $AB=a, BC=b$ ，則 $PD = \frac{2ab(a+b)\tan \alpha}{(a-b)^2 + (a+b)^2 \tan^2 \alpha}$ 2225
- 一人將其眼密附於地，沿一竿越壁遙望窗頂，得仰角 α ，於是攀登此竿 c 尺，則見全窗，且測得窗及壁頂之仰角 β 及 γ ，則由地上至窗之最下部之高爲 $\frac{c(\tan \alpha - \tan \beta + \tan \gamma)}{\tan \alpha - \tan \beta}$ 2256

- 試測定山之高 2170
- 由山麓依最短之路徑至山巔，設其路與水平面所成之斜度初為 α ，至中途突然增加而為 β ，其後即不變。達山巔後，檢視風雨計，知已登至 n 里之高。由是觀測山麓之起點，得俯角為 γ ，則其行程必為 $n \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right) / \left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2} \times \sin\gamma\right)$ 2230
- 一人行於一直線之路上，其前面有二丘，測其絕頂之仰角，得 α, α' ，但一丘在他丘之後，後丘之麓為前丘所掩蔽。由是進 c 里，後丘全為前丘所掩蔽。更進一里，測前丘之仰角得 β 。求二丘之高 2232
- 兩地與山麓在一平面上，由山巔望此兩地，得俯角 α 及 β ，又此兩地間之距離 c 含於山麓之角為 γ ，求證山之高為 $\frac{c \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos \phi}$ ，但 $\sin^2 \phi = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cos^2 \frac{\gamma}{2}$ 2257

(II) 距離

- 有可望而不可即之一點，試測定其距離 2171
- 有兩目標，可望而不可即，求其間之距離 2172
- 試由一點引一直線，令平行於過二不可達之點之直線 2173
- 過二不可達之點引一直線，求他一點至此直線之距離 2174
- 試決定三點是否在一直線上 2175
- 設 A, B, C 三點中，兩兩聯結所得直線之長為已知，命 P 為與 A, B, C 在同平面上之任意點，試在 P 測角 APC 及 BPC ，以求由 A, B, C 等各點至 P 之距離 ... 8176
- 第 2176 題所研討之問題中，若 $\alpha + \beta + C = \pi$ ，則 $\phi = \frac{1}{2}\pi$ ，但證其法不能由已知件求得之 2242
- 前題中設 $\alpha + \beta + C = 180^\circ$ ，試應用三角形 ABC 中正弦之關係，以證 $\phi = 45^\circ$ 2177
- 有一測量技士，欲測量不可到之三點 A, B, C 間之距離，彼最初之位置與 A 及 B 成一直線，嗣後復由是依與 AB 直交之方向前進而測之，因而至與 A, C 及 B, C 成一直線之二位置，且於其地測是等直線之方位。問 A, B, C 間各距離之測定法 2215
- A, B, C 為與測量技士在同平面之三目標， AC 等於 CB ，且

- AC, CB 互相直交, 又在點 O 測定 AC, CB 分別含角 α, β , 於是由 O 依直交 CO 之方向 OO' 進行, 至 $OO' = d$ 處, 測得 AC, CB 分別含角 α', β' . 求 AB 之距離 2240
- 一人行於直線道上, 向若干距離外之目標前進, 在途中 A, B, C 三點, 測定目標之仰角 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$, 然則約略言之, $AB = 3BC$ 2258
- 一原野成三角形 ABC, 今欲測定邊 BC, 但所得測定者, 僅為過 A 而切於 BC 之圓內之四線, 則測此四線後, BC 之測定方法如何 7243
- 某校校舍之長, 張 30° 之角於某點, 然則過校舍之兩端與測點之圓之直徑, 等於校舍之 2 倍 2190
- 設 A 及 B 為在同水平面上之二目標, 點 P 亦在此水平面上, AB 含於點 P 之角 α 業已測定. 又設二人在此平面上, 依直交 PA, PB 之方向進行, 至 Q, R 二點而觀測 AB. 知其又含角 α . 命 PQ, PR 為 a, b , 求 AB 之長 ... 2239
- 一技士欲測量一正方形砲臺之闊, 此砲臺位於若干距離外之一丘上. 初, 在其一隅之正北測之, 知其一面含角 α , 由是向正東進 a 尺測之, 知其面仍含角 α , 由是更進 b 尺, 知在其面他一隅之正北方, 則砲臺之闊為 $(a+b)\sec\phi$ 尺. 但已知 $\tan\phi = \frac{b \tan\alpha}{a+b}$ 2237
- 有甲乙二人, 俱在同一點 C, 以若干之水平角, 視二目標 A 及 B, 其後甲依 AC 之方向, 乙依 BC 之方向, 行若干之距離, 視二目標 A 及 B, 則所得之水平角各為在 C 時所得之半. 今設已知在 C 之水平角及所行之距離, 求 AB 之距離 2244
- 於二點 A, B, 遙望地上之二物體, 得 $\hat{CAD} = \hat{CBD} = \alpha$, 若設 $AB = c$, $\hat{ABD} + \hat{BAC} = \sigma$ 時, 求 C, D 之距離 ... 3076
- 一艦向正北進, 見二燈臺在與航路成 α 角之直線上, 若艦之航路, 轉向西北, 則行 a 杆後, 見一燈臺在艦之正東, 一燈臺在東北. 求兩燈臺之距離 2212
- 有二柱直立於河岸, 命之為 AB, CD, 距離 AC 等於高 AB. 又在河之對岸正對 A 之一點 E 上, AB 及 CD 含等角. 則河寬之二乘幕等於 $\frac{AB^2}{CD - AB}$, 又 AD 及 BC 含等角於 E 2216
- 河之對岸, 有兩目標, 其間之距離為 c , 今沿河之此岸同距離之二處測之, 得含 c 之角 α 及 β , 求河闊, 但河之兩岸平行 2236

- 有同高之二旗竿，相距 x 尺。今在此二旗竿足所在之直線上，擇一距二竿之近者為 b 尺之地 [不在旗竿與旗竿之間]，以望二旗竿，則近者含 a 度之角，遠者含 β 度之角。求證 $x = b(\tan a \cot \beta - 1)$ 2201
- 設紀念碑 ABCD 立於過 P 之水平面上，AB, AC, AD 等部分張於 P 之角分別為 α, β, γ 。命 $AB = a, AC = b, AD = c, AP = x, \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ，則 $(a + b + c)x^2 = abc$ 2203
- 有一高 a 尺之旗竿，立於高 b 尺之塔頂上，茲欲於塔基之水平面上擇一點，令觀測者視旗竿及塔得相等之角，則眼至塔基之距離當如何？但 h 為眼之高 2217
- 將竿之上端置於壁頂，則此竿與過壁頂之水平面成角 A ，又將竿之上端置於窗戶，則竿之下端較前遠於壁 a 尺，且其斜度為 B ，然則壁頂與窗戶之垂直距離為 $a \cot \frac{1}{2}(A + B)$ 2250

(III) 仰角，俯角

- 設塔 CD 之高為 h 尺，二物體 A, B 在過塔脚 C 之一水平線上，茲由塔頂 D 望 A, B，則其俯角為 $45^\circ - A$ ，及 $45^\circ + A$ ，求二物體之距離 2178
- 設雲之仰角為 α ，其映於湖水之像之俯角為 β ，雲之高 m 倍於眼之高，則 $\tan \beta = \frac{m+1}{m-1} \tan \alpha$ 2179
- 湖面上高 h 尺之處，停雲一朵，望之得仰角 α ，同時望其湖中之像，得俯角 β ，求雲高 2180
- 一人在高 h 尺之絕壁頂上，見正西方一船，得俯角 α ，自此經一時，見此船於南方，其俯角為 β ，求船每時之速度 2193
- 一人自山麓測山頂之仰角，得 2α ，由是沿傾斜角為 α 之山坡，向頂上行 1 哩，再測山頂之仰角得 3α ，求山之高 2194
- 有一木製之二等邊三角形板，面太陽而垂直立於地上。設三角形之底為 $2a$ 尺，高為 h 尺，太陽之仰角為 30° ，求此三角形之影之頂角之半分之正切 2207
- 某日正午，一人立於高出海面 h 丈之絕壁，在其子午圈之平面中，有雲一朵，測其仰角，得 α ，測其海面上之影，得俯角 β 。設其人對雲觀測時，太陽在其後方，其仰角為 γ ，則雲高於海面 $\frac{h \sin \gamma \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta \sin(\gamma + \alpha)}$ 2226

- 有一塔,其周環以池.某日正午,塔頂之影距池岸 45 尺.太陽轉至正西時,塔頂之影距池岸 120 尺.設兩影之端相距 375 尺,由池岸之任意點測塔頂之仰角,得 60° , 求塔高及正午時太陽之仰角 2233
- 有高 a 及 a' 尺,且互成 γ 角之二垂壁,其影在太陽之正南,其闊為 b 及 b' , 設 α 為水平上太陽之仰角, β 為第一壁與子午線所成之角,則 $\cot^2 \alpha = \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b'^2}{a'^2}\right) \operatorname{cosec}^2 \gamma + \frac{2bb'}{aa'}$
 $\times \cot \gamma \operatorname{cosec} \gamma$, 及 $\cot \beta = \frac{aa'}{a'b} \operatorname{cosec} \gamma + \cot \gamma$... 3077
- 由同水平面上之二點望一目標,得仰角 α, β , 在聯結此二點之直線上擇一點,令其至前二點之距離為 a, b , 設由此第三點望同目標,得仰角 γ , 則目標之高為 $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \times \{ab(a+b)\}^{\frac{1}{2}} / \{a \sin^2 \alpha (\sin^2 \gamma - \sin^2 \beta) + b \sin^2 \beta (\sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha)\}^{\frac{1}{2}}$ 2231
- 在日光下測一旗竿,第一次,由影端至竿足之距離為 a , 第二次為 b , 設 h 為旗竿之高, α 為二次測量所得太陽仰角之差,則 $h^2 + h(b-a) \cot \alpha + ab = 0$ 2251

(IV) 輕 氣 球

- 空中懸一輕氣球,二技師在平地上觀之,各得仰角 α . 二人之距離為 d . 若自一技師視他技師至輕氣球之距離,則其角為 β . 求輕氣球之高 2198
- 由一砲臺望敵方之輕氣球,知其方向為北,仰角為 α . 在此砲臺迤東 l 距離處,有另一砲臺. 由後一砲臺望此輕氣球,知其方向為西北. 求輕氣球之高,及第二砲臺上所得之仰角 2208
- 空中懸一球狀之輕氣球,其半徑為 r , 觀測者窺之,其中心之仰角為 β , 氣球所含之角為 α , 求輕氣球之高 2214
- 空中有一輕氣球,由甲乙丙三處望之各得 $45^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, 而甲及乙在丙之西及北. 求決定輕氣球高之方程式 2245

(V) 等 角, 最 大 角

- 在塔 ED 上立一旗竿 DC, P 為過塔脚 E 之水平線上之一點,由 P 望之,知 $\hat{EPD} = B$, $\hat{DPC} = A$, 次由 P 向 E 進 l , 而至 Q, 再望之,得 $\hat{DQC} = A$. 求塔之高 2185
- 設立於塔 BC 上之旗竿 CD, 在距 B' 之地上張最大之角

- A, 求塔之高及竿之長... .. 2186
- 塔頂上有一旗竿, 距塔基 a 尺處, 旗竿含 α 度之角, 又在同直線上, 距塔基 b 尺處, 亦含 α 度之角, 求旗竿之長 2187
- 一人在一直線之路上, 前進至某處, 觀測二個目標, 知其含最大角 α , 由是更進 c , 見二目標若相合爲一者然, 其方向與路線成角 β . 則此二目標間之距離等於 $\frac{2c \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ 2221
- 設 2221 題中, 在兩目標成最大角時, 測定各目標與直線路所成之角, 又測定 c , 求兩目標間之距離 ... 2259
- 有二點 P, Q, 在 P 南之一地 L 上望之, 知 $\hat{P}LQ = A$. 次, 由 L 西行 a 而至 M, 知 $\hat{P}MQ = A$. 依同方向更進 b 而達 Q 南之 N. 然則 P, Q 之距離爲 $\sqrt{(a+b)^2 + b^2 \tan^2 A}$ 2228
- 知二點 A, B 之距離含於同水平面上之二點 C, D 之角相等, 則 $AB \sin CBD = CD \sin ADB$ 2229
- 在相距 c 之二水平地上, 遙望山上之紀念碑, 知其仰角爲 α, β , 又在過此二地之垂直面上含同一之角, 則紀念碑高 $c \cos(\beta + \alpha) / \sin(\beta - \alpha)$ 2252

(VI) 方 向, 角

- 直線狀之路傍, 有三電桿 A, B, C, 其距離相等, 設點 P 上含 AB, BC 之角, 其正切爲 τ, τ' , 又設 PB 與路 BC 所成角之正切爲 T, 則 $\frac{2}{T} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}$ 2211
- 設 ABC 乃 C 爲直角之三角形. 今由 B 及 C 測 A 處之塔之仰角, 得 15° 及 45° , 然則 $\tan B = \frac{1}{2} \{3^{\frac{1}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}}\}$ 2210
- 兩汽船依平行之航路同一之方向航行, 初由一汽船望他汽船, 知其視線與直北之方向成 α' 之角, 經一時後, 此線變爲 β' , 更 1 時後, 此角又變爲 γ' , 求兩船航路之方向 2241
- 有一塔立於斜面之上, 命其塔基爲 A, 在此斜面上之點 C 測塔所含之角, 得 α . 在直線 AC 之延線上取點 D, 令 $CD = AC$, 由 D 測塔所含之角, 得 β . 設 ϕ 爲塔及 AC 間之角, 則 $\cot \phi = 2 \cot \alpha - \cot \beta$, 又在他直線 AC'D' 上作同一之測量, 得 $\tan \alpha' = 2 \tan \beta'$, 命角 CAC' 爲 γ , 斜面與水平

- 面之斜度爲 θ , 則 $\sin \theta \sin \gamma = \cos \phi$ 2234
- 設遠近二山之巔爲 A 及 A' , BC 爲一直線狀之水平路, 在此路之某處望二山, 近山之巔適掩遠山之巔, 則 $\sin \alpha \sin \beta' = \sin \alpha' \sin \beta$. 但 α 爲由路上之任意點 B 望 A 所得之仰角, β 爲角 ABC , 又 α' , β' 爲由路上之任意點 B' 望 A' 所得與前同樣之量 2238
- 設由 B 及 C 二處至他處 A 之距離爲 b 及 c , 求角 BAC 時有障礙物, 故不能實際目擊角 BAC . 因此在距 A 爲 n [n 爲極小之數] 之 O 地, 測定角 BOC , 卽 α , 及角 AOC , 卽 β [擇點 O 時, 須注意令三角形 ABC 全在三角形 OBC 之內], 命 θ 爲角 $(BAC - BOC)$ 之弧度, 則約略言之, $\theta = n \left\{ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{b} + \frac{\sin \beta}{c} \right\}$ 2246
- 設 A, B, C 三點在一平面上, 此平面與水平面所成之斜度爲 θ , 其中 C 爲最低點. 今已知 CA 與水平之斜度爲 α , 及 CB 與水平之斜度爲 β , 且已知角 ACB 爲 γ , 則 $\sin^2 \theta \sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$. 其證如何 ... 2254

(VII) 立體

- 設水平面 P 上有二點 A, B , 其距離爲 d , 平面外有一點 C , 角 BAC 爲 α , 角 ABC 爲 β , 又 AC 與平面 P 所成之角爲 γ , 求 C 至平面 P 之距離 2197
- 在一水平面上, 測圓塔之高及闊, 知其分別含角 α 及 β , 其後行近圓塔 a 尺測之, 知其分別含角 α' 及 β' , 然則圓塔之高及半徑如何? 並求 $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ 間之關係式 2260
- 設前題圓塔之闊所含之角中, 有誤差 δ , 從而計得之半徑 r 中, 有最大誤差 ρ , 則 ρ 由方程式 $\frac{2\rho}{r} = \cot \frac{1}{4}(\beta' - \beta) \times \left\{ \operatorname{cosec} \frac{\beta}{2} \operatorname{cosec} \frac{\beta'}{2} \cot \frac{\beta}{2} \cot \frac{\beta'}{2} \right\} \delta$ 得之, 其證如何? 若 $\beta = 60^\circ$, $\beta' = 120^\circ$, $\delta = 6'$ 之弧度, 則所得半徑之最大誤差與此半徑之比之近似數如何 2261
- 設一圓形之塔, 或井欄不可達, 則其半徑之定法如何 2213
- 一平面上有二圓形之貯水池, 其中心距離爲 d . 試在此平面上求一點, 由此點望二池之角, 各等於已知之二角 3081

(VIII) 近似值, 誤差

- 設地球之半徑為 r , 則由高 h 之一點之視水平之距離, 約為 $\sqrt{2rh}$ 2209
- 一盾闊 2 丈, 設相距 1350 丈, 求其所含角之近似數 2224
- 一塔之高為 a , 其頂上有一旗竿, 在距塔 b 處觀測之, 知此旗竿含一小角 θ , 求證約略言之, 旗竿之長為 $\frac{a^2+b^2}{b}\theta$ 2255
- 有一高廈, 今由其屋基, 沿一水平線, 測若干之長, 又由此水平線之端測量頂之仰角, 以決定廈之高. 茲記測得之仰角有小差, 則廈高之誤差如何 2222
- 有一已解得之三角形, 其已知件為 A, b, c . 若 A 有小差, 則 B 從而生若何之誤差 2223
- 知 $A=30^\circ, b=3\sqrt{3}, a=3$, 解三角形 ABC , 設測定角 A 時生 $2''$ 之誤差, 則角 B 從而所生之近似誤差如何 2235
- 距塔基 100 丈之地望塔, 其頂之仰角為 45° . 今精密覆測之, 則其仰角及距離中有 $1'$ 及 1 尺之誤差, 然則塔高之最大誤差近似值如何 2247
- 設三角形 ABC 之一邊 a 及其對角 A 一定不易, 則他二邊之小變數 γ 及 β 得以關係式 $\gamma \sec C + \beta \sec B = 0$ 聯結之 2249
- 設 P, Q, R 為一直線上之三所設點, 由某點 S 觀 PQ, QR 之距離, 知其含等角. 設此觀測所得之角, 有小差 a , 則計算由 Q 至 S 之距離時, 所得之誤差如何 2262
- 一塔上有一頂尖, 距塔 a 處望之. 塔及頂尖含同角, 設塔高為 b , 試以 b 及 a 求頂尖之高. 又設塔高之小差為 β , 從而所生之頂尖高之誤差為 γ , 求證 $\frac{\gamma}{c} = \frac{\beta}{b} \left(1 + \frac{4a^2b^2}{a^4 - b^4} \right)$ 2248

(2) 用三角函數表者

- C 為直角之三角形 ABC 中, 一邊 BC 為 4 尺, 角 ABC 為 $24^\circ 35' 23''$, 邊 AC 為幾何? 但 $\tan 24^\circ 35' = .45748$, $\tan 24^\circ 36' = .45784$ 2263
- 紀念碑之高為 200 尺, 在同水平面上測之, 得其仰角

- 3° 30', 然則測點與碑之距離如何 2264
- 由某處望 66 丈之高山頂, 得仰角 41° 18', 然則山頂與觀測者之距離如何? 但 $\sin 41^\circ 18' = 0.66$ 2265
- 有高 132 尺之斷崖, 在崖底之水平面上之一點觀之, 得仰角 41° 18', 求自崖頂至觀測者之距離. 但 $\operatorname{cosec} 41^\circ 18' = 1.5151$ 2266
- 自高出水面 326 尺之岩頂上望一短艇, 得俯角 24°. 然則自岩至短艇之距離若何 3267
- 一人立於橋上, 見一汽船向橋進行, 測其俯角, 得 7° 30', 設此人之眼, 高出水面 5 丈, 船之速度為每時 18 里, 則此船經幾時而至橋下... .. 2268
- 由小山頂上向正南方望二墩, 得俯角 45' 及 22', 設二墩間之距離為一里, $\cot 22' = 2.475$, 求小山之高 2269
- 由高出海面 30 丈之燈台頂, 向正西望二岩, 得俯角 75' 及 15', 求二岩間之距離. 但 $\cot 75' = 0.268$, $\cot 15' = 3.732$ 2270
- 自高出地平面 250 米之山上, 觀測平地上與觀測者在同一垂直面上之二點, 得俯角 28' 及 32' 2", 求二點間之距離... .. 2271
- 在某處望一塔, 得俯角 7° 10', 向塔進 100 丈, 得仰角 30° 20', 然則塔高如何? 但 $\cot 7^\circ 10' = 7.9530$, 及 $\cot 30^\circ 20' = 1.7090$ 2272
- 有煙囪二, 其一較他一高 15 丈, 聯結其頂之直線, 與水平成角 27° 2'. 與地面之交點距小煙囪 50 丈, 然則大煙囪之高幾何? 但 $\tan 27^\circ 2' = 0.51$ 2273
- 塔上有一避雷針, 長 2 枳, 由地上之一點望之, 其上端及下端之仰角為 44° 20', 及 42° 10', 然則塔高幾何 2274
- 二橋高 60 尺及 40 尺, 聯結其頂之直線與水平面成角 33° 41', 則二橋之距離如何? 但 $\cot 33^\circ 41' = 1.5$ 2275
- 一燈台高出水平面上 30 丈, 其西方有二艇, 自燈台望之, 得俯角 62° 30', 18° 50'. 二艇之距離如何 ... 2276
- 直線狀之海岸上有 A, B 二點, 相距 165.2 枳, 由是望海上之一船 C, 知 $\hat{C}A\hat{B} = 62^\circ 30'$, $\hat{C}B\hat{A} = 76^\circ 15'$. 船至海岸之距離如何 2277
- 一船向正南開航, 望見其正西有二燈台, 航行 10 哩後, 見二燈台在西北及西北西之方向, 求由初觀測之位置至二燈台之距離... .. 2278

- 在距塔 ALB 48 尺高 14 尺之台上之 C 望塔, 知 $\hat{ACL} = \hat{LCB}$, 若 $AL = 30$ 尺, 則塔之高爲幾何... .. 2312
- 設東西二地 A, B , 相距 1 哩, 由此望輕氣球, 知其方向爲西北及東北, 仰角皆爲 45° . 球之高爲幾哩... .. 2313
- 有一輕氣球飛揚於空中, 自其正南之甲地望之, 仰角爲 60° , 同時自甲地正東 1 里之乙地望之, 仰角爲 45° . 輕氣球之高爲何... .. 2314
- 有一圓柱台, 建於河岸上, 高 200 尺, 上塑一佛像, 高 30 尺. 今自對岸測佛像, 知其所含之角, 等於台下高 6 尺之人所含之角, 然則河闊如何... .. 2315
- 高 20 尺之旗竿, 立於高 10 尺之城壁上, 此旗竿張於地上某點之角, 有正切 0.5, 然則城壁張於其點之角, 正切如何... .. 2316
- 塔 BCD 立於水平面上, 其頂上有塔尖 DE , 由水平線 BA 之一端 A , 見 BC 及 DE 含等角, 今設 $BC = 9$ 尺, $CD = 72$ 尺, $DE = 36$ 尺, 則 BA 之距離如何... .. 2317
- 有一直立之棒, 其影之長與棒之比爲 $\sqrt{3}:1$. 今將此棒在垂直面上迴轉, 令其下端固定, 且保持影恆在同一方向, 然則影之長等於最初之影之長時, 棒與水平面所成之角如何... .. 2318
- 塔東有二地, 相隔 200 尺, 望塔頂, 得 45° 及 30° . 塔高幾何... .. 2319
- 在市樓之窗中, 測對屋之高, 知其含直角, 而屋頂之仰角爲 60° , 今設街寬 30 尺, 則屋高如何... .. 2320
- 有等高之煙囪二, 自其基底聯結之直線上之一點望之, 較近之煙囪之仰角爲 60° , 今依此直線之垂直方向行 80 尺而測之, 則兩煙囪之仰角爲 45° 及 30° . 求兩煙囪之高及其間之距離... .. 2321
- 有成正三角形之三點, 其兩兩之距離皆爲 500 呎, 由一點 D 觀二邊 AB 及 AC , 其角各爲 120° , 則 AD 之距離幾何... .. 2322
- 由地上之一點, 望空中之輕氣球, 得視角 30° , 中心之仰角 45° , 設此球之直徑爲 6 丈, 則其中心至地面之鉛直高幾何... .. 2323
- 燈臺 L 之西南及南 15° 東有二船 A, B , AB 之方向爲東南, AL 之長爲 4 哩. 二船之距離如何... .. 2324
- 一船向正東開航, 某時船中一人觀測正南拋錨之他二船, 由是航行 3 哩後測之, 見此二船自西偏南 60° 及 30° , 求此時觀測者至二船之距離... .. 3225

- 某日上午十時，自燈臺觀測駛向東南一小汽船，見其在東北 9° 湮外，又在此日下午一時，此小汽船之位置自東偏南 15° ，求小汽船每時之速度及第二次觀測時自燈臺至小汽船之距離 2326
- 一測量船航行於海上，見海濱一砲臺，測其方位，知為東北東，由是東進 4 里，見同砲臺在北北東之方位，然則自一第二觀測點至砲臺之距離分別為 $\sqrt{16+8\sqrt{2}}$ 及 $\sqrt{16-8\sqrt{2}}$ 湮... .. 2327
- 一汽船向北方駛行，在某時見正西一直線上有二個燈臺，由是駛行一時後，見此二燈臺一在西南之方位，一在南南西之方位，設燈臺間之距離為 8 湮，則汽船之速度如何 2328

(3) 單含已知三角函數者

- 自距煙囪底 300 尺之地望煙囪，得仰角 30° ，煙囪之高如何 2279
- 有一直立之樹木，在距其根 6 丈之地上測之，得其仰角 60° ，樹木之高如何 2280
- 有一塔，在同水平面上距其基礎 100 丈之處測其高，知其含 30° 之角，然則塔高如何 2281
- 在距塔基 86.6 尺之地望塔，得仰角 30° ，塔高如何 2282
- 在高 160 尺之船檣頂上，測一小艇之俯角，得 30° ，則船與艇之距離如何 2283
- 在距塔脚 86.6 尺處，測塔頂之仰角，得 30° ，則塔頂至觀測者之距離如何 2284
- 一梯長 45 尺，其上端倚於壁頂，下端置於地上，壁與梯成 30° 之角，然則壁之高及自壁至梯脚之距離如何 2285
- 有直交之甲乙二直線，設長 a 尺之直線與甲所成之角為 30° ，求此直在甲乙二直線上之正射影 2286
- 設太陽之仰角為 30° ，則高 4 丈之電柱之影如何 2287
- 高 6 尺之竿，其影為 $2\sqrt{3}$ 尺，求太陽之仰角 ... 2288
- 一直立之棒，其影為棒高之二倍，試計算太陽之光線與地平線所成之角 2289
- 自高 117 尺之塔頂，測高 37 尺之屋頂，得俯角 30° ，然則自塔至屋之距離如何... .. 2290
- 測塔之影，得其長 100 尺，同時測高 9 尺之電柱之影，得

- $3\sqrt{3}$ 尺, 然則太陽之仰角及塔之高如何 2291
- 斜度爲 $\frac{1}{2}$ 之路, 長 1 里 120 丈, 設斜度爲 $\frac{1}{2}$ 之路, 與前同高, 則長幾里 2292
- 一路長 100 尺, 與水平面成 45° 之傾斜, 若將傾斜改爲 30° , 則路長幾尺 2293
- 有一直立之塔, 在其底之水平面上之一點 A 測之, 則塔在正北, 含角 15° , 於是恆以同角度測塔, 而前進 100 丈, 則見塔在東北, 然則此塔之高及至 A 之距離如何 2294
- 有一塔, 在其正南之一地 A 測之, 得仰角 30° , 在 A 之正西距 A 爲 a 之一地 B 測之, 得仰角 18° , 然則塔之高爲 $a/\sqrt{2+2\sqrt{5}}$ 2295
- 塔之正東有二地, 相距 200 丈, 由此二地望塔頂, 得仰角 45° 及 30° , 求塔高 2296
- 一燈台高出海面 200 尺, 自其頂上測二船之俯角, 得 45° 及 30° , 兩船之方向, 一在正南, 一在正北, 二船之距離如何 2297
- 設直立之塔之頂爲 P, 基礎爲 Q, 水平面上之二點 A, B 之距離爲 32 尺, $\hat{QAB} = 90^\circ$, $\cot PAQ = \frac{2}{3}$, $\cot PBQ = \frac{3}{4}$, 則塔高幾何 2298
- 在地上之一點望煙囪之頂, 得仰角 60° , 由此點直上 40 尺, 再測之, 得仰角 45° , 然則煙囪之高及由其頂至二觀測點之距離如何 2299
- 一塔與一樓建於同一水平面上, 樓之高爲 30 尺, 由樓底望塔頂, 得仰角 45° , 由樓頂望之, 得仰角 30° , 求塔高及塔至樓之距離 2300
- 自高 300 尺之塔頂望他塔頂, 得俯角 30° , 二塔間之距離爲 90 尺, 小塔之高爲幾何 2301
- 設 A, B 爲海面上之二點, 其間之距離爲 2500 呎, 自 A, B 兩處, 望直線 AB 直上之輕氣球 C, 則視線與水平面所成之角分別爲 45° 及 60° , 然則輕氣球在水平面上之高如何 2302
- 在直線狀之海岸上, 有三點 A, B, C, 而 $AB = BC = 2$ 哩, 今一船依垂直於此岸之方向而來, 在某點上見 AC 張 60° 之角, 由是航 10 分後, 見 AC 張 120° 之角, 然則船速每時幾何? 但船向 B 進航 2303
- 河岸上之二點 A, B, 相距 100 丈, 由是望對岸之一點 P, 知 $\hat{PAB} = 60^\circ$, $\hat{PBA} = 45^\circ$, 河闊如何 2304
- 一人立於河岸, 測對岸之樹, 知其含 60° 之角, 嗣退 40 丈測之, 則爲 30° , 然則樹高及河闊各如何 2305

- 一人立於塔前，測其頂之仰角，得 30° ，由是向塔行 100 尺再測之，得 75° ，求塔之高及自初觀測點至塔之距離 ... 2306
- 設 AB 為一直線狀之河岸，一人立於點 A，望對岸之點 C，測角 BAC，得 30° ，沿川行 400 尺而至 B，測角 ABC，得 60° ，求河闊 ... 2307
- 有一拋錨之汽船，自直線狀之海岸上擇一點測之，與海岸線成 30° 之角，沿海岸線前行 300 丈，再測之，成 60° 之角，求自海岸線至汽船之最近距離。但已測知此距離不滿 200 丈 ... 2308
- 某海岸上有一斷崖，崖上建一高 100 尺之燈台，今在崖麓之海濱望燈台頂及崖頂，分別得仰角 75° 及 30° ，求斷崖之高 ... 2309
- 由山麓望山頂，得仰角 45° ，由是循 30° 傾斜之直線狀路向頂上升 1 哩，再測頂之仰角，得 60° ，山高幾何 ... 2310
- 由山麓之一處 B，測其絕頂 A 之仰角，得 60° ，由是向絕頂攀登 1760 丈，而達一地 C，測角 BCA，得 135° ，今設山路之斜度為 30° ，則山高幾何 ... 2311
- 一船之桅頂，高出海面 64 呎，由是遙見燈臺之光於水平，嗣向燈臺駛航 30 分後，登高出海面 16 呎之甲板，適見此光，今假定地球為半徑 4000 哩之圓球，試計算船之速度 ... 2329
- 一火車，由 A 站依西西南之方向行至 B 站，在 A 站時，見有二塔俱在北西北之方位；在 B 站時，見一塔之方位，自北偏東 $7^\circ\frac{1}{2}$ ，一塔之方位，自北偏東 $37^\circ\frac{1}{2}$ ，今設二塔之距離為 1.5 哩，自 A 至 B 需 2 分，則此火車每時之速度如何 ... 2330
- 一船航向西南，見停泊之二船於北西北及西西北，更行五哩，又見此二船於北及西北，求二船之距離 ... 2331
- 一人在某地望一山頂，得仰角 30° ，於是按所攜之地圖，〔五萬分之一〕，而測山頂與觀測點之水平距離，得 2 寸，又設此山高出海面 6400 尺，則其地高出海面幾尺 ... 2332
- 山上有一高塔，磴道之傾斜角為 30° ，測量師立於山麓，測塔頂與塔脚之角距，得 15° ，由是沿磴道向塔行 485 尺，再測塔頂與塔脚之角，得 30° ，求塔高及自塔脚至山麓之距離 ... 2333
- 在一地望高 h 尺之塔，適在正南，其仰角為 60° ，由是向

正西行至 A, 仰角爲 45° , 更依同方向行至 B, 仰角爲 30° , 求 AB 之距離 2334

(4) 用五位對數表者

- 2167 題中, 設 $AB = 14.982$, $\hat{DCS} = 43^\circ 19'$, $\hat{SCZ} = 32^\circ 27'$, $CB = 1.2$, 則目標之高如何? 但以呎爲單位 ... 2335
- 2169 題中, 設 $BC = 158.27$, $\hat{ACB} = 52^\circ 28'$, $\hat{ABC} = 61^\circ 19'$, $\hat{ABS} = 25^\circ 17'$, $\hat{SBZ} = 52^\circ 34'$, 則燈臺之高如何? 但以呎爲單位 2336
- 2170 題中, 設 $BC = 577.19$, $\hat{ACB} = 58^\circ 25'$, $\hat{ABC} = 67^\circ 47'$, $\hat{ABH} = 39^\circ 38'$, 求山之高. 但測器之高爲 1.25, 單位爲呎 2337
- 2171 題中, 設 $AB = 248$ 呎, $A = 39^\circ 28'$, $B = 71^\circ 42'$, 求 AC 2338
- 一人欲測山之高, 在某所得山頂之仰角 15° , 由是向山在水平線上進 7.2 里, 又得山頂之仰角 75° , 山之高如何 2339
- 次之圖中, 設 $AB = 352$ 丈, $\hat{CAB} = 95^\circ 17'$, $\hat{DAB} = 41^\circ 28'$, $\hat{CBA} = 53^\circ 36'$, $\hat{DBA} = 103^\circ 51'$, $\hat{DBC} = 57^\circ 43'$, 求 CD 2340
- 在山頂上測同方向之二屋, 得俯角 $23^\circ 20'$ 及 $18^\circ 10'$, 又二屋之距離爲 449 丈, 求山高 2341
- 一人自點 B 望山頂 C, 得 $27^\circ 18'$, 又在同水平面上退後 500 丈而自點 A 測之, 得 $16^\circ 10'$, 求山高. 但 A, B, C 在同一平面上 2342
- 一人見北及北 30° 西之方向, 有二物體 A, B, 由是依北西之方向進 10 里, 則 A, B 之方向變爲北東及東, 問 A, B 之距離如何 2343
- 由山麓望岩之上端, 得仰角 47° , 由是登 32° 傾斜之直線狀山路, 向岩行 1000 尺, 再測岩之仰角, 得 77° , 求岩之高 2344
- 一船航向北方, 見一燈臺在北東及北北東之方向, 由是行 20 哩後, 再望二燈臺, 見皆在東方. 求二燈臺之距離 2345
- 有一向南 $59^\circ 5'$ 東延長且高 20 尺之土壁, 太陽在南方仰角爲 30° 時, 此壁之影之闊爲幾何 2346

(5) 用四位或六位對數表者

- 設 $B = 60^\circ 40'$, $C = 59^\circ 10'$, $a = 10.62$, 求 b ... 2347
- 設軍艦之甲板與海岸之一點在同水平面, 由此點測橋頂

- 之仰角,得 $2^{\circ}4'34''$. 今設橋之高爲 150 尺,則此點至橋之水平距離如何 2348
- ⑧一直立之旗竿,投於地上之影長 23.27 尺,此時太陽之仰角爲 $44^{\circ}48'$,然則旗竿之長幾何 2349
- ⑨設角 B 爲 $38^{\circ}26'8''$,角 C 爲 $72^{\circ}15'6''$,邊 BC 爲 1824.5 尺,求角 B 之對邊之長 2350
- ⑩設 $A=32^{\circ}47'4''$, $B=44^{\circ}17'27''$, $b=372.67$,計算 a 2351

(6) 用七位對數表者

- ⑪高 150 尺之塔在其所立之水平面上,留 75 尺之影,則太陽之仰角如何 2352
- ⑫河岸 B 上,立有一人,望其對岸之塔 PC, 知其在眼之水平直線上含 $55'$ 之角. 今此人退 30 尺,自點 A 又望之. 知其含 $48'$ 之角,求河闊 2353
- ⑬一走索者,欲緣 196 尺之索登 100 尺之塔,然則當以幾何之斜度登索 2354
- ⑭有 40° 傾斜之一低丘,其傍有 60° 傾斜之一高峯吃峙,今由低丘之麓登斜面 64 尺,而望高峯上之目標,知其頂上之仰角爲 $70'$, 其下底之仰角爲 $40'$, 然則此目標之高如何 2355
- ⑮設 A 及 B 爲與塔基在同平面上之二點,由 A 測塔之仰角爲 $65^{\circ}25'$, 由 B 得 $39^{\circ}47'$, 又 AB 之距離爲 32.28 呎,塔之高如何? 但塔基與 A, B 在一直線上 2356
- ⑯小山之麓有一塔,在小山之上 [斜而] 取基線 AB, 測其長, 但此基線之延線過塔脚. 由 A, B 二點, 測得塔之仰角 α 及 β , 由基線 AB 之一點 C 測得塔脚之俯角 γ . 求塔之高. [應用] $AB=10$ 呎, $\alpha=37^{\circ}12'41''.5$, $\beta=60^{\circ}8'14''$, $\gamma=72^{\circ}56'18''.5$ 2357
- ⑰定平地上二點 P 及 Q 之距離,但在 A 及 B 測得 $AB=394.82$ 呎, $\hat{P}AB=75^{\circ}28'41''.6$, $\hat{Q}AB=28^{\circ}40'51''.3$, $\hat{P}BQ=83^{\circ}11'17''.8$, $\hat{A}BP=41^{\circ}10'32''.7$... 2358

第八 逆三角函數

I. 證明問題

(1) 基本式

- $\sin \theta = x$ 時, $\cos \theta = \sqrt{1-x^2}$, 從而 $\theta = \sin^{-1}x$, 及 θ

- $\cos^{-1}a \pm \cos^{-1}b = \cos^{-1}[ab \mp \sqrt{\{(1-a^2)(1-b^2)\}}] \dots \dots 2375$
 ● $\cos^{-1} \frac{9}{\sqrt{82}} + \cos^{-1} \frac{5}{\sqrt{41}} = 45^\circ \dots \dots 2376$
 ● $\sin^{-1}a \pm \cos^{-1}b = \cos^{-1}\{b\sqrt{1-a^2} \mp a\sqrt{1-b^2}\} \dots \dots 2377$
 ● $2 \sin^{-1}a = \sin^{-1}2a\sqrt{1-a^2} \dots \dots 2378$
 ● $\cos^{-1}x = 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} \dots \dots 2379$
 ● $2 \cos^{-1}a = \cos^{-1}(2a^2 - 1) \dots \dots 2380$
 ● $3 \cos^{-1}a = \cos^{-1}(4a^3 - 3a) \dots \dots 2406$

(3) 和及差之正切

- $\tan^{-1}a \pm \tan^{-1}b = \tan^{-1} \frac{a \pm b}{1 \mp ab} \dots \dots 2381$
 ● $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = 45^\circ \dots \dots 2382$
 ● $\tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{1}{47} \dots \dots 2383$
 ● $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = 45^\circ \dots \dots 2384$
 ● $\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} \dots \dots 2385$
 ● $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} \dots \dots 2386$
 ● $\tan^{-1}a = \tan^{-1} \frac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1} \frac{b-c}{1+bc} + \tan^{-1}c \dots \dots 2387$
 ● $\tan^{-1}\{(\sqrt{2}+1)\tan a\} - \tan^{-1}\{(\sqrt{2}-1)\tan a\} = \tan^{-1}(\sin 2a) \dots \dots 2388$
 ● $2 \tan^{-1}a = \tan^{-1} \frac{2a}{1-a^2} \dots \dots 2389$
 ● $\tan^{-1} \frac{3}{4} = 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} \dots \dots 2390$
 ● $2 \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = 45^\circ \dots \dots 2391$
 ● $\tan^{-1}5 - \tan^{-1}3 + \tan^{-1} \frac{7}{9} = n\pi + \frac{\pi}{4} \dots \dots 2392$
 ● $2 \tan^{-1} \frac{1}{8} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4} \dots \dots 2393$
 ● $3 \tan^{-1}a = \tan^{-1} \frac{3a-a^3}{1-3a^2} \dots \dots 2407$

- $4 \tan^{-1} \frac{1}{5} = \tan^{-1} \frac{120}{119} \dots \dots \dots 2394$
- $4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} = 45^\circ \dots \dots \dots 2395$
- $4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{4}{70} + \tan^{-1} \frac{1}{99} = 45^\circ \dots \dots 2396$
- $\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - 2 \tan^{-1} \frac{1}{408} + \tan^{-1} \frac{1}{1393} \dots 2397$
- $\frac{\pi}{4} = 5 \tan^{-1} \frac{1}{7} + 2 \tan^{-1} \frac{3}{79} \dots \dots \dots 2398$
- $2 \tan^{-1} y = \sin^{-1} \frac{2y}{1+y^2} \dots \dots \dots 2399$
- $2 \tan^{-1} \frac{8}{15} = \sin^{-1} \frac{240}{289} \dots \dots \dots 2400$
- $2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{x}{a}} = \cos^{-1} \frac{a-x}{a+x} \dots \dots \dots 2401$
- $\tan(2 \tan^{-1} a) = 2 \tan(\tan^{-1} a + \tan^{-1} a^3) \dots \dots 2402$
- $\tan^{-1} \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \tan^{-1} \frac{2b-a}{a\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} \dots \dots \dots 2403$
- $\tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \tan 2A \right) + \tan^{-1}(\cot A) + \tan^{-1}(\cot^3 A) = 0 \dots$
 $\dots \dots \dots 2404$
- 求 $3 \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{26} - \frac{\pi}{4}$ 之正切 2408
- $2 \tan^{-1} a = \cos^{-1} \frac{1-a^2}{1+a^2} \dots \dots \dots 2405$
- $3 \tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{1}{20} = \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} \frac{1}{1985} \dots \dots 2409$

(4) 和及差之餘切

- $\cot^{-1} a \pm \cot^{-1} b = \cot^{-1} \frac{ab \mp 1}{b \pm a} \dots \dots \dots 2410$
- $\cot^{-1} \frac{3}{4} + \cot^{-1} \frac{1}{7} = 135^\circ \dots \dots \dots 2411$
- $2 \cot^{-1} a = \cot^{-1} \frac{a^2-1}{2a} \dots \dots \dots 2413$

(5) 雜題

- $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1} 3 = 45^\circ \dots \dots \dots 2412$
- $\sin^{-1} \frac{12}{13} = \cot^{-1} \frac{5}{12} \dots \dots \dots 2361$

- $\cos^{-1} \frac{29}{29} - \tan^{-1} \frac{16}{64} = \cos^{-1} \frac{1596}{1885} \dots \dots \dots 2414$
- $2 \cot^{-1} 17 + \cos^{-1} \frac{3}{5} = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{125}{117} \dots \dots \dots 2415$
- $\sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{x+a}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{x}{a}} \dots \dots \dots 2416$
- $\frac{2b}{a} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{a}{b}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{a}{b}\right) \dots \dots \dots 2417$
- $\frac{a^3}{2} \operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{a}{b}\right) + \frac{b^3}{2} \cos^2\left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{a}\right) = (a+b) \times (a^2 + b^2) \dots \dots \dots 2418$
- $\tan^2 \theta = \tan(\theta - \alpha) \tan(\theta - \beta)$ 時, $2\theta = \tan^{-1} \frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \dots \dots \dots 2419$
- $\sec \theta - \operatorname{cosec} \theta = \frac{4}{3}$ 時, $\theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{4} \dots \dots \dots 2420$
- $\sin(\pi \cos \theta) = \cos^2 \pi \sin \theta$ 時, $\theta = \pm \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{3}{4} \dots \dots \dots 2421$
- $\sin^{-1} \frac{2b+a-c}{a+c} \pm 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{(a+b)}{(a+c)}}$ 之一值爲 $\frac{\pi}{2}$ 之奇數倍
 $\dots \dots \dots 2422$
- $\tan^{-1} \frac{x}{y} = \tan^{-1} \frac{c_1 x - c_2}{c_1 y + x} + \tan^{-1} \frac{c_2 - c_1}{c_2 c_1 + 1} + \tan^{-1} \frac{c_3 - c_2}{c_3 c_2 + 1} + \dots \dots + \tan^{-1} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_n c_{n-1} + 1} + \tan^{-1} \frac{1}{c_n}$; $\dots c_1, c_2, \dots, c_n$
 爲任意數 $\dots \dots \dots 2423$
- $\sin^{-1} \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \sin^{-1} \frac{2a'b'}{a'^2 + b'^2}$ 等若干角之和得表成
 $\sin^{-1} \frac{2mn}{m^2 + n^2}$ 之形, 但 m 及 n 爲 a, b, a', b' 等之有理
 式 $\dots \dots \dots 2424$
- 求 $\sin^{-1} \frac{(-1)^m}{2}$ 之普遍值, 但 m 爲整數 $\dots \dots \dots 2425$
- 求 $\cos^{-1} \frac{(-1)^m}{2}$ 之普遍值, 但 m 爲整數 $\dots \dots \dots 2426$
- 求 $\tan^{-1}(-1)^m$ 之普遍值, 但 m 爲整數 $\dots \dots \dots 2427$
- $\sin^{-1} \frac{x}{a} + \sin^{-1} \frac{y}{b} = \sin^{-1} \frac{c^2}{ab}$ 時, $b^2 x^2 + 2xy(a^2 b^2 - c^4)^{\frac{1}{2}} + a^2 y^2 = c^4 \dots \dots \dots 3102$
- $2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) = \cos^{-1} \frac{b+a \cos x}{a+b \cos x} \dots \dots \dots 3107$

II. 方 程 式

(1) 解

- $\sin^{-1}x + \sin^{-1}\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \dots \dots \dots 2428$
- $\sin^{-1}2x - \sin^{-1}x\sqrt{3} = \sin^{-1}x \dots \dots \dots 2429$
- $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1}x \dots \dots \dots 2431$
- $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = n\pi + \frac{3x}{4} \dots \dots \dots 2430$
- $2 \tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} + \sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2} \dots \dots \dots 2432$
- $\tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1}x + \tan^{-1}(x+1) = \tan^{-1}3x \dots \dots \dots 2433$
- $\tan^{-1}\frac{1}{a-1} = \tan^{-1}\frac{1}{x} + \tan^{-1}\frac{1}{a^2-x+1} \dots \dots \dots 2434$
- $\cot^{-1}x + \cot^{-1}(n^2-x+1) = \cot^{-1}(n-1) \dots \dots \dots 2435$
- $\sin^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} = 60^\circ \dots \dots \dots 2436$
- $\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\sec^{-1}5x = 45^\circ \dots \dots \dots 2437$
- $\cot^{-1}\frac{1}{x+1} + \cot^{-1}\frac{1}{x-1} = \tan^{-1}3x - \tan^{-1}x \dots \dots \dots 2438$
- $\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\sec^{-1}5x = \frac{\pi}{4} \dots \dots \dots 3103$
- $\tan^{-1}\frac{1}{4} + 2 \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{6} + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{1}{4}\pi \dots \dots \dots 2439$
- $3 \tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}} - \tan^{-1}\frac{1}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{3} \dots \dots \dots 2441$
- $\tan(\cos^{-1}\sqrt{x}) = \sin(\cot^{-1}\frac{1}{2}) \dots \dots \dots 3104$
- $\sin\{2 \cos^{-1}(\cot 2 \tan^{-1}x)\} = 0 \dots \dots \dots 2440$

(2) 雜 題

- 以 a 之項求 $\cos 4(\tan^{-1}a)$ 之值 $\dots \dots \dots 2442$
- 適合 $\tan^{-1}x + \cot^{-1}y = \tan^{-1}3$ 之一切正整數解答 $\dots \dots \dots 2444$
- $\phi = \tan^{-1}\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}$ 及 $\theta = \tan^{-1}\frac{2x-k}{k\sqrt{3}}$ 時, $\phi - \theta$ 之一值為 $\frac{1}{6}\pi \dots \dots \dots 3105$
- $\tan^{-1}ax + \frac{1}{2}\sec^{-1}bx = \frac{1}{4}\pi$ 時, $x^2 = \frac{1}{2ab-a^2}$ 為其一解答 $\dots \dots \dots 3106$
- $\sin^2\theta + \sin^2\phi = \frac{1}{2}$ 時, $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 為適合方程式

- $\psi = \sin^{-1}(\sin \theta + \sin \phi) + \sin^{-1}(\sin \theta - \sin \phi)$ 之 ψ 之一值 2443
- c 為正整數時, $\cot^{-1}x + \cot^{-1}y = \cot^{-1}c$ 之正整數解答數等於 $1 + c^2$ 之約數之數, 但 $\tan^{-1}c + \tan^{-1}y = \tan^{-1}c$ 無一正整數解答 2445
- $\sin^{-1} \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{\sqrt{(a^2 - c^2)}} - \sin^{-1} \frac{c\sqrt{(a^2 - a^2)}}{x\sqrt{(a^2 - c^2)}}$ 之一值為 $\sin^{-1} \frac{x^2 - ac}{x(a - c)}$ 3108

第九 方程式

I. 角有限制者

- 為適合次式而較 360° 小之一切正角 (I) $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, (II) $\tan \theta = -\sqrt{3}$, (III) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (IV) $\tan \theta = -1$ 2446
- 適合 $2 \cos \theta = \sec \theta$ 之 θ 值 2447
- 適合 $3 \tan \theta = \cot \theta$ 之 θ 值 2448
- 適合 $\sec 5A = \operatorname{cosec} A$ 之 A 值 2449
- 適合 $\cot A = \tan A$ 之 A 值 2450
- 適合 $\sin 2A = \cos 4A$ 之 A 值 2451
- 適合 $2 \sin A = \operatorname{cosec} A$ 之 A 值 2452
- 適合次式之角之值. (I) $4 \sin \theta = \operatorname{cosec} \theta$. (II) $4 \sin \theta - 3 \times \operatorname{cosec} \theta = 0$. (III) $\sin 5A = \cos 4A$. (IV) $4 \cos \theta - 3 \times \sec \theta = 0$. (V) $\tan 3\theta = \cot 2\theta$. (VI) $\tan \theta + 3 \cot \theta = 4$. (VII) $2 \sin^2 \theta + \sqrt{2} \cos \theta = 2$. (VIII) $\cos^2 \theta - \sqrt{3} \times \cos \theta + \frac{3}{4} = 0$ 2453
- 適合 $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 1$ 之 360° 以內之正角 2454
- 適合 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 之 360° 以內之正角 ... 2455
- 適合 $\operatorname{cosec} \theta - 4 \sin \theta = 2$ 之 360° 以內之正角 2456
- 適合次式之 180° 以內之正角. (I) $\sin 4\theta + \sin \theta = 0$. (II) $\cos \theta - \cos 3\theta = \sin 2\theta$. (III) $\cos 3\theta + \cos 2\theta + \cos \theta = 0$ 2457
- 適合次式之 360° 以內之正角. (I) $\cos 2\theta + 2 \sin^2 2\theta = 1$. (II) $8 \cot \theta = \sec^2 \frac{\theta}{2} + \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2}$. (III) $\tan \theta + \cot \theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$ 2458

- 適合次式之正角[不過 360°]. (I) $2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta - 3 = 0$.
 (II) $\cos \theta + \tan \theta = \sec \theta$. (III) $\sec^2 \theta - 2 \tan^2 \theta = 2$...
 2459
- $\sin(90^\circ - A) + \sin(180^\circ - A) = 0$ 時, A 之絕對值之最小者
 2460
- 適合 $\sin^2 \theta + \sqrt{3} \cos \theta - \frac{7}{4} = 0$ 之 θ 值. 但 $\theta < 90^\circ$
 2461
- 適合 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = 0$ 之 θ 最小值 434
- 適合 $2 \sin^2 \theta - 5 \cos \theta - 4 = 0$ 之 θ 最小值 435
- 適合 $4 \sin^2 \theta - 2(\sqrt{3} + 1) \sin \theta + \sqrt{3} = 0$ 之 θ 值, 但 $\theta < 90^\circ$
 2462
- $89524.67 \cos x + 24508.75 \sin x = 89785$ 之根中, 在
 0° 與 90° 之間者 2463
- $\tan 3x = \sqrt{\left(\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \beta}\right)}$ 中, 設 $\alpha = 27^\circ 43' 17''$, $\beta = 49^\circ$
 $18' 36''$ 時, 在 0° 與 180° 間之一切 x 值 2464
- 適合 $\tan^2 \theta - (\sqrt{3} + 1) \tan \theta + \sqrt{3} = 0$ 之 θ 值, 但 $\theta < 90^\circ$
 2465
- 將 30° 之角二分, 令其一之正弦爲他一之正弦之 3 倍 ...
 2466
- 在 0° 與 180° 之間, 適合 $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 3$ 之一切 x
 值 2467
- 在 0° 與 180° 之間, 適合 $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ 之一切 x 值
 2468
- 適合 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \left(\frac{8\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ 之 θ 最小正
 值 2469
- 知 $\sin^2(n+1)\theta = \sin^2 n\theta + \sin^2(n-1)\theta$, 且 $(n+1)\theta$, $n\theta$,
 $(n-1)\theta$ 爲三角形之角, 求 n 之整數值 2470
- 在 790° 與 880° 之間, 適合 $\tan 2\theta = \sqrt{3}$ 之 θ ... 2476
- 適合 $\tan \theta = 1$, 而在 0° 及 900° 間之一切角 ... 428

II. 角無限制者

(1) \sin

- 適合 $\sin \theta = 1$ 之 θ 普遍值 505
- $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 504
- $\sin^2 \theta = \sin^2 \alpha$ 506

- $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ 2474
- $\sin^2 2\theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \sin 3\theta$ 2496
- $2 \sin \theta \sin 3\theta - \sin^2 2\theta = 0$ 2497
- $\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$ 2498
- $\sin 5\theta = 16 \sin^5 \theta$ 2503
- $2 \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta = 2$ 2506
- $4 \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta = 3$ 2507
- $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$ 2512
- $2 \sin 2\theta - 4 \sin(\theta + 30^\circ) + \sqrt{3} = 0$ 2521
- $\sin^2 2\theta - \sin^2 \theta = \sin^2 \frac{\pi}{6}$ 2528
- $\sin \alpha + \sin(x - \alpha) + \sin(2x + \alpha) = \sin(x + \alpha) + \sin(2x - \alpha)$
... .. 2532
- $\sin \theta \sin 3\theta = \frac{1}{2}$ 2536
- $4 \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta = 3$ 2537
- $\sin 9\theta + \sin 5\theta + 2 \sin^2 \theta = 1$ 2539
- $\sin \frac{1}{2}(n+1)\theta + \sin \frac{1}{2}(n-1)\theta = \sin \theta$ 2541
- $\sin 3\theta = 8 \sin^3 \theta$ 2542
- $2(\sin 2\theta + \sin 2\phi) = 1 = 2 \sin(\theta + \phi)$ 2609
- $\sin 7x - \sin x = \sin 3x$ 3115
- $\sin^2(x + 15^\circ) - \sin^2(x - 15^\circ) = \frac{1}{4}$ 3112
- 由 $\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$ 可得 $a-b = n\pi$ 及 $a+b = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, 但 n 爲不定整數 3114
- $x+y=a$, 及 $\sin x + \sin y = b$ 2602
- $x+y=a$ 及 $\sin x \sin y = b$ 2603
- $x+y=a$, 及 $\frac{\sin x}{\sin y} = b$ 2604
- 分角 90° 爲二部, 令其一之正弦爲他一正弦之 2 倍, 而求各部之正弦 3117
- 解方程式 $\sin \theta + \sin 3\theta = \sin 2\theta + \sin 4\theta$, 而在 0 與 2π 間, θ 有七正值 2513
- 設 $\sin 3A = n \sin A$ 除 0 或二直角或二直角之若干倍之值外, 對於 A 之任意值爲真, 則 n 在 3 及 -1 之間, 又設 $n=2$, 解此方程式 2611
- b 爲正, $\sin^2 x + 2b \sin x + c = 0$ 時, 欲令 $\sin x$ 有適合之二值, 其條件如何 2619

(2) cos

- 適合 $\cos \theta = 1$ 之 θ 普遍值 510

- $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 509
- $\sec^2 \theta = \cos^2 a$ 511
- $\cos^2 \theta = 1$ 2473
- $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ 2474
- $\cos 2\theta - \cos 120^\circ = \cos \theta - \cos 60^\circ$ 2500
- $\cos 2A = (\sqrt{3} - \sqrt{2})\cos A + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1$ 2505
- $2 \cos \theta \cos 3\theta + 1 = 0$ 2510
- $\cos 4x + \cos 2x + \cos x = 0$ 2524
- $\cos x + \cos 7x = \cos 4x$ 2525
- $\cos \theta \cos 3\theta = \cos 5\theta \cos 7\theta$ 2530
- $\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = \cos \theta$ 2534
- $\cos 9\theta = \cos 5\theta - \cos \theta$ 2551
- A 爲三角形之內角, $\cos A = -\frac{1}{2}$ 時, $\sin A$ 及 $\tan A$ 之值
... .. 430
- 適合 $\cos \theta \cos \phi + 1 = 0$ 之 θ 及 ϕ 值 2612
- 適合 $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$, 而在 0° 及 90° 間之一切角 ... 429
- 由 $\cos 2x + b \cos x + c = 0$, 求 $\cos x$. 設 b 爲正, 欲令 $\cos x$
至少有一個適當之值, 其條件如何 2620
- $\theta = \cos \theta$ 必有一解答, 而以一爲限, 又 θ 之值較 $|\pi|$ 小 ...
... .. 3125
- 方程式 $\cos \theta = \theta$ 中, β 爲 θ 之近似值 [但較真值大] 時,
 $\beta - \frac{\beta - \cos \beta}{1 + \cos \beta}$ 爲更精密之值 [但較真值大] ... 3126

(3) \tan .

- $\tan \theta = 1$ 517
- $\tan^2 \theta = \tan^2 a$ 519
- $\tan^2 \theta = \frac{1}{2}$ 520
- $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ 2474
- $3 \tan(\theta - 15^\circ) = \tan(\theta + 15^\circ)$ 2569
- $\tan \theta + \tan 3\theta = 2 \tan 2\theta$ 2576
- $\tan \theta + \tan(\theta - 45^\circ) = 2$ 2578
- $\tan 5\theta = \tan \theta$ 2583
- $\tan \theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = 0$ 2584
- $\tan \theta + \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan \theta \tan 2\theta = \sqrt{3}$ 2585
- $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$ 3116

- $\tan 3\theta + \tan 2\theta + \tan \theta = 0$ 時, $\tan \theta$ **2593**
- 解 $\tan x + \tan y = a$, $x + y = b$, 且既求 **3121**
- $\tan^2 A + B = \sqrt{3}$, $\tan(A - B) = 1$ **2600**
- $b \tan 3x = a + \sqrt{(a^2 + b^2)}$ 中, 設 $a = 42537.8$, $b = 36723.7$, 求驗證此方程式之 x 值在 0° 與 180° 之間者 ... **3124**
- $\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x = 0$ 時, $5x = n\pi$, 或 $2x = (2m + 1)\pi$, 或 $8 \cos 2x = 1 \pm \sqrt{17}$ **2598**
- $\tan x = \tan \beta \tan(a + x)$ 時, 求 $\tan x$, 而欲令 $\tan x$ 爲實量, $\tan \beta$ 必須不在 $(\sec a - \tan a)^2$ 及 $(\sec a + \tan a)^2$ 之間 **2740**

(4) cot.

- $\cot 2\theta - \cot \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ **2572**
- $\cot 4\theta = \cot \theta$ **518**

(5) sec.

- $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$ **2540**
- $\sec^2 \theta = 2$ **512**
- $3 \sec^4 \theta + 8 = 10 \sec^2 \theta$ **2552**
- $\sec(\frac{1}{4}\pi + x) + \sec(\frac{1}{4}\pi - x) = 2\sqrt{2}$ **2554**
- 若 a 與 b 不等, $\sec^2 \theta = \frac{4ab}{(a+b)^2}$ 成立否 **445**

(6) cosec.

- $\cos \theta = \text{cosec } \frac{\theta}{2}$ **2529**
- $\text{cosec}^2 \theta = \frac{4}{3}$ **507**

(7) sin. cos.

- (I) $\sin x = \cos x$. (II) $\sin^2 x + \cos^2 x$. (III) $\sin x = \cos 2x$ **2472**
- $2 \sin(A + 30^\circ) = \cos A$ **2477**
- $2 \sin^2 \theta = 3 \cos \theta$ **2478**
- $\cos m\theta = \sin n\theta$ **521**
- $\sin \theta + \cos \theta = 1$ **2479**
- $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$ **2480**
- $\cos \theta - \sin \theta = \cos a - \sin a$ **2481**
- $\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta = 1$ **2482**

● $-\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta = 1$	2483
● $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$	2484
● $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = \sqrt{2}$	2485
● $\cos 2\theta = \cos \theta + \sin \theta$	2486
● $\cos \theta - \sin \theta = \sqrt{2}$	2487
● $(2 + \sqrt{3}) \cos \theta = 1 - \sin \theta$	2488
● $\cos 2\theta = (\sqrt{2} + 1) \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$	2489
● $\cos 2\theta - \cos 4\theta = \sin \theta$	2490
● $\cos \theta - \cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta = 0$	2491
● $\sin^2 \theta - 2 \cos \theta + \frac{1}{4} = 0$	2492
● $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 2 \sin 2\theta$	2493
● $\sin 2\theta - \cos 2\theta - \sin \theta + \cos \theta = 0$	2499
● $5 \sin x = \cos 2x + 2$	2504
● $\sin^2 x + \cos 2x = \cos x$	2508
● $\sin(\theta + a) + \cos(\theta + a) = \sin(\theta - a) + \cos(\theta - a)$	2509
● $2 \sin^3 \theta + 3 \cos^2 \theta + \sin \theta = 3$	2511
● $\sin \theta (\cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta + \cos 8\theta) = \sin 4\theta$	2514
● $\sin 7\theta + \sin 5\theta - \cos 2\theta = 1$	2515
● $\cos^3 \theta \sin 3\theta + \sin^3 \theta \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{8}$	2516
● $\cos^3 \theta \sin 3\theta + \sin^3 \theta \cos 3\theta = \frac{1}{4}$	2517
● $\cos^3 \theta - \cos \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 1$	2518
● $4 \sin \theta \cos \theta + 1 - 2(\sin \theta + \cos \theta) = 0$	2519
● $4 \sin \theta \cos \theta + 1 + 2(\sin \theta + \cos \theta) = 0$	2523
● $\sin \theta - \cos \theta = 4 \cos^2 \theta \sin \theta$	2520
● $\sin 5\theta + \sin 3\theta + \sqrt{2}(\sin \theta + \cos \theta) \cos \theta = 0$	2522
● $\sin 2\theta = \cos \theta$	2526
● $\cos \theta - \cos 2\theta = \sin 3\theta$	2527
● $4 \sin x \sin(x - a) = 2 \cos a - 1$	2531
● $\cos(x + \frac{1}{2}a) + \cos(x + \frac{1}{2}a) = \sin a$	2533
● $2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)(1 + \sin \theta) = 1 + \cos 2\theta$	2538
● $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$	2543
● $\cos 3\theta + \sin 3\theta = \cos \theta + \sin \theta$	2544
● $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3}$	2547
● $a \sin x + b \cos x = c$	2548
● $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$	2550
● $\cos 3\theta + \cos 5\theta + \sqrt{2}(\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta = 0$	2560
● $8 \sin\left(\theta - \frac{1}{3}\pi\right) \cos^3 \theta + 8 \cos\left(\theta - \frac{1}{3}\pi\right) \sin^3 \theta - 6 \sin\left(2\theta - \frac{1}{3}\pi\right)$	

- $=\sqrt{3}$ 2561
- $\sin \theta + \sin \phi = 1, \cos \theta + \cos \phi = 1$ 2606
- $x + y = 90^\circ, \sin x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2607
- $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{3x}{2}$... 3118
- $\frac{1}{2} \sin^2 x \cos x + \frac{1}{6} (1 - \cos x)^3 \frac{1}{2} \sin^2 x (1 - \cos x) = 0$ 3113
- $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$ 3111
- $\cos \theta - \sin \theta = \sin \theta \cos \theta$ 3109
- $\frac{\sin \theta}{x} = \frac{\cos \theta}{y}$, 及 $\frac{\sin^2 \theta}{y^2} + \frac{\cos^2 \theta}{x^2} = \frac{6}{x^2 + y^2}$ 時, 得 θ 值之公式
如何 2608
- $\sin \theta = -\frac{1}{2}$, 及 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 時, θ 之一切值 514
- 化 $\cos^2 \theta - \cos^2 a = 2 \cos^3 \theta (\cos \theta - \cos a) - 2 \sin^3 \theta (\sin \theta - \sin a)$ 成最簡形, 且解之 2535
- $\sin 3\theta = \sin \theta \cos 2\theta$ 時, $\theta = \frac{1}{2}n\pi$. 但 n 為零或整數 ...
... .. 2545
- 求驗證 $0.4235 \sin x + 0.116 \cos x = 0.3818$ 之角
... .. 2553
- $\cos x \cos(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\beta) = \sin \beta \cos \frac{1}{2}x$ 時, $\cos \frac{1}{2}x$... 2563
- $\cos(A+B) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin(A-B) = \frac{1}{2}$ 2599
- $\sin A + \sin B = 1, \cos A + \cos B = \sqrt{2}$ 時, $A - B = n \cdot 360^\circ \pm 60^\circ$ 2601
- $\cos(\theta + 3\phi) = \sin(2\theta + 2\phi)$, 及 $\sin(\phi + 3\theta) = \cos(2\theta + 2\phi)$
時, 非 $\theta = (3m - 5n) \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{16}\pi$, 及 $\phi = (3n - 5m) \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{16}\pi$,
即 $\phi - \theta = 2m\pi - \frac{1}{2}\pi$, 但 m 及 n 為整數 2610
- $\sin(a + \beta) \cos \gamma = \sin(a + \gamma) \cos \beta$ 時, $\beta - \gamma$ 為 π 之若干倍,
或 a 為 $\frac{1}{2}\pi$ 之奇數若干倍 2618
- 設 $\cos x = \sin a$ 為方程式 $\cos x \sin^2 x = \sin a \cos^2 a$ 之一
解答, 由此方程式求 $\cos x$ 2622
- 求驗證 $x \cos y = 324.6219, x \sin y = -549.7827$ 之正數
 x , 及 0 與 360° 間之角 y 3123
- 解 $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = m$, 對於 m 如何之值,
解答成立? 又 $m = \frac{1}{2}$ 時, x 之值 3119

(S) $\tan, \cot.$

- $\tan A = \cot 3A$ 2475

- $x \tan x + b \cot x = c$ 2549
- $\tan \theta + \cot \theta = 2$ 2556
- $\cot \theta + \tan \theta = 4$ 2557
- $\tan x - \cot x = 1$ 2558
- $\cot \theta - \tan \theta = 2$ 2559
- $\cot \theta - \tan \theta = \cot a - \tan a$ 2570
- $2 \cot 2\theta - \tan 2\theta = 3 \cot 3\theta$ 2577
- $\cot \theta - \tan \theta)^2(2 - \sqrt{3}) = 4(2 + \sqrt{3})$ 2589
- $\tan^3 x + \cot^3 x = m^3 - 3m$ 2594
- $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$ 2595
- 由方程式 $\tan x + ab \cot x = a + b$ 求 $\tan x$... 2592
- $\tan(2\alpha - 3\beta) = \cot(3\alpha - 2\beta)$, 及 $\tan(2\alpha + 3\beta) = \cot(3\alpha + 2\beta)$ 時, α 及 β 俱為 $\frac{1}{10}\pi$ 之若干倍 2617
- 在有 $\tan(\cot x) = \cot(\tan x)$ 關係時, x 之實數值由 $\sin 2x = \frac{4}{(2n+1)\pi}$ 得之, 但 n 為 -1 以外之任意整數 2613
- $\tan(\pi \cot \theta) = \cot(\pi \tan \theta)$ 時, $\tan \theta = \frac{1}{4}(2n+1) \pm \sqrt{(4n^2 + 4n - 15)}$, 但 n 為正或負整數 2616

(9) sin. tan.

- $\tan(45^\circ + \theta) = 1 + \sin 2\theta$ 2581
- $(1 - \tan \theta)(1 + \sin 2\theta) = 1 + \tan \theta$ 2590
- $\tan 2x = \frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha}$ 中, $a = 46^\circ 27.55'$, $b = 3994.68$, $\alpha = 51^\circ 57' 44''$, $\beta = 63^\circ 18' 27''$ 時, 0° 與 180° 間之根 3122

(10) cos. tan.

- $\tan \theta + \cos 2\theta = 1$ 2575
- $\tan(\alpha + x)\tan(\alpha - x) = \frac{1 - 2 \cos 2\alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha}$ 2591
- $2 \cos x \cos y = 1$, $\tan x + \tan y = 2$ 3120
- 某角之餘弦與其正切如 3 與 2 時, 此角之普偏值 2621

(11) cot. cosec.

- $\operatorname{cosec} \theta + \cot \theta = \sqrt{3}$ 2565

- $\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta = 1$ 2566
- $\cot 5\theta - \cot 2\theta = \operatorname{cosec} 2\theta$ 2574
- $\cot 2^{x-1}a - \cot 2^x a = \operatorname{cosec} 3a$ 2605
- $3 \operatorname{cosec}^2 \theta - 8 \cot \theta + 2 = 0$ 時, 角 θ 之值. 但 $\log \tan 30^\circ 57'$
 $= \bar{1}.77791$, $\log \tan 30^\circ 58' = \bar{1}.77820$, $\log 6 = .77815$...
 2597

(12) 二函數雜題

- $\operatorname{cosec} \theta - \sin \theta = 0$ 2495
- $\operatorname{cosec} \theta - 4 \sin \theta = 2$ 2502
- $\sec \theta - \cos \theta = 0$ 2494
- $\cot \theta = 2 \cos \theta$ 2471
- $6 \cot^2 \theta = 1 + 4 \cos^2 \theta$ 2579
- $\sec^2 \theta + 3 \operatorname{cosec}^2 \theta = 8$ 2501
- $\sec \theta + \tan \theta = \sqrt{3}$ 2567
- $\tan a + \sec 2\theta = 1$ 2582
- $2 + 4 \tan^2 \theta = 5 \tan \theta \sec \theta$ 2571

(13) 三函數

- $\sin 2\theta = 3 \tan \theta \cos 2\theta$ 2573
- $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \tan \theta = 2$ 2555
- $\sec x = \sin x + 2 \cos x$ 3110
- $\tan 2\theta - 8 \cos^2 \theta - \cot \theta$ 2580
- $\sec^2 \frac{1}{2} x + \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2} x - 16 \cot x$ 2596
- $\cot 15^\circ \cos \theta + \sin \theta = 1$ 2546
- $\tan 3\theta - \tan \theta = 2 \cos \theta \sec 3\theta$ 2568
- $\tan \theta + 2 \cot 2\theta = \sin \theta \left(1 + \tan \theta \tan \frac{\theta}{2} \right)$... 2588

(14) 雜題

- $\cot \theta - \tan \theta = \cos \theta + \sin \theta$ 2587
- $(4 - \sqrt{3})(\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta) = 4(\sin \theta \tan \theta + \cos \theta \cot \theta)$...
 2586
- $m \operatorname{vers} \theta = n \operatorname{vers}'(a - \theta)$ 2564
- 與 a 有同正弦之角皆含於公式 $\left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - a \right)$ 之
 中 2614

- 與 a 有同餘弦之角皆含於公式 $(n + \frac{1}{2})\pi + (-1)^n(a - \frac{\pi}{2})$ 之中 2615
- $v = \frac{\sin x}{\sin a} = \frac{\sin y}{\sin b} = \frac{\sin z}{\sin c}$, 及 $x + y + z = 2\pi$ 時, v, x, y, z 之值, 但 a, b, c 爲各不相等之有限數 2562
- $\sin(\pi \cot \theta) = \cos(\pi \tan \theta)$ 時, $\operatorname{cosec} 2\theta$ 或 $\cot 2\theta$ 成 $m + \frac{1}{2}$ 之形, 但 m 爲正或負整數 3003

第十 消 去 法

(1) 消 去 (一)

- $x = a \cos \phi, y = b \sin \phi$ 中, ϕ 2623
- $\tan(a + \phi) = m, \tan(a - \phi) = n$ 中, ϕ 2624
- $\sec \theta = a, \tan \theta = b$ 中, θ 2625
- $\sec \theta = a$, 及 $\cot \theta = b$ 中, θ 2626
- $\operatorname{cosec} \theta = a, \cot \theta = b$ 中, θ 2627
- $x = a \tan^2 \phi, y = 2a \cot \phi$ 中, ϕ 2628
- $x = a \cos^3 \phi$, 及 $y = b \sin^3 \phi$ 中, ϕ 2629
- $\cos \theta + \sin \theta = a$, 及 $\cos \theta - \sin \theta = b$ 中, θ ... 2630
- $a \sin \theta + b \cos \theta = a'$, 及 $a \cos \theta - b \sin \theta = b'$ 中, θ 2631
- $\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1$, 及 $\frac{x}{a} \sin \theta - \frac{y}{b} \cos \theta = 1$ 中, θ 2632
- $\sin \phi - \cos \phi = m$, 及 $\sin 2\phi = n$ 中, ϕ 2633
- $\sin a = m \sin \beta$ 及 $\tan a = n \tan \beta$ 中, β 2634
- $\cos \theta + \sin \theta = a$, 及 $\cos 2\theta = b$ 中, θ 2636
- $\sin \theta + \cos \theta = a$, 及 $\sin 2\theta + \cos 2\theta = b$ 中, θ ... 2637
- $\cos \theta - \sin \theta = b$, 及 $\cos 3\theta + \sin 3\theta = a$ 中, θ ... 2638
- $x = \sec \phi - \cos \phi$, 及 $y = \operatorname{cosec} \phi - \sin \phi$ 中, ϕ 2639
- $\cos(\theta - \alpha) = a$, 及 $\sin(\theta - \beta) = b$ 中, θ 2640
- $\tan \theta + \sin \theta = m, \tan \theta - \sin \theta = n$ 中, θ ... 2641
- $x = \sin \theta + \cos \theta, y = \tan \theta + \cot \theta$ 中, θ ... 2642
- $a = \cot \theta + \cos \theta, b = \cot \theta - \cos \theta$ 中, θ 2643
- $x = \cot \theta + \tan \theta, y = \operatorname{cosec} \theta - \sin \theta$ 中, θ ... 2644
- $a \cos \theta - x \tan \theta = y, b \sec \theta + y \tan \theta = x$ 中, θ 2645
- $m \sec \phi = 1 + \tan \phi, n \sec \phi = 1 - \tan \phi$ 中, ϕ ... 2646

- $x=3 \cos \phi + \cos 3\phi, y=3 \sin \phi - \sin 3\phi$ 中, ϕ **2647**
- $x+y=3-\cos 4\theta, x-y=4 \sin 2\theta$ 中, θ ... **2648**
- $x=\sin \theta + \cos \theta \sin 2\theta, y=\cos \theta + \sin \theta \sin 2\theta$ 中, θ ...
... .. **2649**
- $y \cos \phi - x \sin \phi = a \cos 2\phi, y \sin \phi + x \cos \phi = 2a \sin 2\phi$
中, ϕ **2651**
- $\cos(a+x)=m, \cos(a-x)=n$ 中, x **2657**
- $x=\tan^2\theta(a \tan \theta - x), y=\sec^2\theta(y - a \sec \theta)$ 中, θ
... .. **2658**
- $(a-b)\sin(\theta+\phi)=(a+b)\sin(\theta-\phi), a \tan \frac{1}{2}\theta - b \tan \frac{1}{2}\phi = c$
中, θ **2661**
- $\frac{x}{a} = \frac{\sec^2\theta - \cos^2\theta}{\sec^2\theta + \cos^2\theta}, \frac{2b}{y} = \sec^2\theta + \cos^2\theta$ 中, θ ... **2671**
- $(a+b)\tan(\theta-\phi)=(a-b)\tan(\theta+\phi), a \cos 2\phi + b \cos 2\theta = c$
中, θ **2672**
- $m = (\operatorname{cosec} \theta - \sin \theta)^2, n = (\sec \theta - \cos \theta)^2$ 中, θ
... .. **2676**
- $x \sin \theta - y \cos \theta = \sqrt{(x^2+y^2)}, \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{1}{x^2+y^2}$ 中
 θ **2677**
- $x \tan(a-\beta) = y \tan(a+\beta), (x-y)\cos 2a + (x+y)\cos 2\beta = z$
中, a **2680**
- $a \sin\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right) + b \sin\left(\theta - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{c}{\sqrt{2}}$, 及 $a \cos\left(\theta - \frac{1}{4}\pi\right) + b \cos\left(\theta + \frac{1}{4}\pi\right) = c \sin\left(2\theta + \frac{1}{4}\pi\right)$ 中, θ ... **2681**
- $n \sin \theta - m \cos \theta = 2m \sin \phi, n \sin 2\theta - m \cos 2\phi = n$ 中,
 ϕ **2685**
- $m \sin 2\theta = n \sin \theta, p \cos 2\theta = q \cos \theta$ 中, θ ... **2686**
- $\sin^2 \theta - p \sin \theta + m = 0$, 及 $\cos^2 \theta - q \cos \theta + n = 0$ 中, θ
... .. **2691**
- $a \tan \theta + b \sec \theta = h$, 及 $a \cot \theta + b \cos \theta = k$ 中, θ
... .. **2692**
- $x = a \cos \theta(2 \cos 2\theta - 1), y = b \sin \theta(4 \cos^2\theta - 1)$ 中, θ ...
... .. **2694**
- $a \cos \theta - b \sin \theta = c, 2ab \cos 2\theta + (a^2 - b^2)\sin 2\theta = 2c^2$ 中,
 θ **2698**
- $\sin^2\theta - p \sin \theta + 1 = 0$, 及 $\cos^2\theta - q \cos \theta + 1 = 0$ 中, θ ...
... .. **2690**

- $\frac{1}{a} \cos \theta \cos \gamma + \frac{1}{b} \sin \theta \sin \gamma = \frac{1}{c}$ 中, 設 θ 之二值爲 α, β , 則 $(b^2 + c^2 - a^2) \cos \alpha \cos \beta + (a^2 + c^2 - b^2) \sin \alpha \sin \beta = a^2 + b^2 - c^2$ 2663
- 欲以 θ 之同一值適合 $a \sec^2 \theta - b \cos \theta = 2a, b \cos^2 \theta - a \times \sec \theta = 2b$, 其條件如何 2664
- 適合 $\sin \theta + \sin \phi = p, \cos \theta + \cos \phi = q$ 之一切 θ 值, 包含於 $n\pi - \alpha + (-1)^n \beta$ 式中. 但 α 及 β 爲由 $\tan \alpha = \frac{q}{p}, \sin \beta = \frac{1}{2} \sqrt{(p^2 + q^2)}$ 所決定之角 2687
- $\tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \beta \tan \frac{1}{2} \gamma \tan \frac{1}{2} \delta + 1 = 0, \Sigma \tan \frac{1}{2} \alpha \tan \frac{1}{2} \beta = 0$ 時, $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) = 0$ 2689

第 十 一

I. 值之變化及極限

(1) 求 證

- 若 θ 爲小於 $\frac{\pi}{2}$ 之正角, 則 $\frac{\theta}{\sin \theta}$ 次第與 θ 俱增大 2699
- 若 θ 爲小於 $\frac{\pi}{2}$ 之正角, 則 $\frac{\theta}{\tan \theta}$ 隨 θ 之增加而減少 2700

(2) 研究變化

- 函數 $\sin^2 x - 2 \sin x + 3$ 2701
- 函數 $4 \sin^2 x - 3 \sin x + 8$ 2702

(3) 歸於零時

- 時之弧與其弦之比, 在弧將歸於零時, 歸於 1 ... 2703
- 試求在 h 之值趨近於零時, 比 $\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$ 之極限 2708
- 試求在 h 之值將歸於零時, 比 $\frac{\tan(a+h) - \tan a}{h}$ 之極限 2709
- 求 x 將歸於零時 $\pi \sin \frac{\pi x}{2} / \left(4x \cos \frac{\pi x}{2} \right)$ 之極限 2710

- 設 θ 漸漸減少而為 0, 求 $\sin \frac{\theta}{2} \cos 2\theta / \text{vers } \theta \cot \theta$, 及 $\tan^2 \theta / (\sec 2\theta - 1)$ 之極限值 2704
- 設 θ 無限減少, 則 $\frac{\sin 4\theta \cot \theta}{\text{vers } 2\theta \cot^2 2\theta}$ 之極限如何 2705
- 若 $x=0$, 則 $\frac{\tan x}{1-\cos x}$ 之值如何 2715
- 設 x 趨近 0, 求 $(\cos ax)^{\cos^{-2} bx}$ 之極限 ... 2722
- 設 θ 值無限減少, 則 $\frac{\sin a\theta}{\sin b\theta}$ 及 $\frac{\text{vers } a\theta}{\text{vers } b\theta}$ 之極限如何 2724

(4) 無限增大時

- n 無限增加時, $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \dots \dots \cos \frac{x}{2^n}$ 之極限... 2706
- n 無限增大時, $\left(\cos \frac{a}{n}\right)^n$ 之極限 2719
- n 無限增大時, $\left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^2}$ 之極限 2720
- n 無限增大時, $\left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^3}$ 之極限 2721
- n 無限增大時, $\left(\sin \frac{a}{n} / \frac{a}{n}\right)^n$ 之極限 2723
- n 為無窮大時, $\left(\cos \frac{a}{n}\right)^{\cot^2 \frac{\beta}{n}}$ 之極限 2729
- $\left(\frac{x-1}{x}\right)^x$ 隨 x 之由 1 漸漸增大而不絕增大. 又 x 無限增大時, 此式之極限 2725
- $\left(1 - \tan^2 \frac{a}{2}\right) \left(1 - \tan^2 \frac{a}{2^2}\right) \left(1 - \tan^2 \frac{a}{2^3}\right) \dots \dots$ (至於無窮)
 $= \frac{a}{\tan a} \dots \dots \dots 2707$

(5) 求 值

- $x = \frac{\pi}{6}$ 時, $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) / (1 - 2 \sin x)$ 2711
- $x = \frac{\pi}{2}$ 時, $(1 - \sin x) \tan^2 x$ 2712
- $r = 45^\circ$ 時, $\frac{\cos(x + 45^\circ)}{1 - \tan x}$ 2713
- $x = 60^\circ$ 時, $\frac{\sin(x - 60^\circ)}{1 - 4 \cos^2 x}$ 2714

- $x = \frac{\pi}{3}$ 時, $\frac{1-2\cos x}{\sin 3x}$ 2717
- $a=b$ 時, $\frac{\sin a - \sin b}{\tan a - \tan b}$ 2716

(6) 雜題

- 試就三角形 ABC, 作式 $a = (b-c)\cos\frac{A}{2} / \sin\frac{B-C}{2}$, 又命 $b=c$ 而玩索之 2718
- 若 $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{863}{864}$, 則 θ 殆為 $5'$ 2727
- 設三角形之一角為 30° , 其隣邊為 1 尺, 又其對邊為 250 尺, 則他銳角為幾分 2726
- 若 γ 不較 $\frac{1}{2}\pi$ 大, 則 $\sin\theta\{1+\sin(\gamma-\theta)\}$ 隨 θ 之由 0 增大至 γ , 而不絕增大 2728

II. 不等式

(1) 求證

- $\sin^2\alpha + \sin^2\beta > 2(\sin\alpha + \sin\beta - 1)$ 2731
- 方程式 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ 中三銳角之和較 180° 小 2735
- $\alpha = 60^\circ$ 時, $\alpha - \sin\alpha < \frac{\alpha^3}{4}$ 2736
- θ 為正, 且較 $\frac{\pi}{2}$ 小時, $\sin\theta$ 較 $\tan\theta - \frac{\tan^3\theta}{2}$ 大 2737
- 若 θ 在 0 及 π 之間, 則 $\cot\frac{\theta}{2}$ 決不較 $1 + \cot\theta$ 小 2738
- 若 $\tan\theta = n \tan\phi$, 則 $\tan^2(\theta - \phi)$ 不能超過 $\frac{(n-1)^2}{4n}$ 2739
- 若 θ 在 0 及 $\frac{\pi}{2}$ 之間, 則 $\theta - \sin\theta$ 較 $\tan\theta - \theta$ 小 2742
- 若 θ 為較 $\frac{\pi}{2}$ 小之正角, 則 $\sqrt{\cos\theta}$ 較 $\cos\frac{\theta}{\sqrt{2}}$ 小 2743
- 若 A, B, C 為適合方程式 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$ 之正角, 則 $A+B+C$ 較 90° 大 2741
- 設角 A, B, C 各較 90° 小, 則 $\sin(A+B+C)$ 較 $\sin A + \sin B + \sin C$ 小 2734

- α, β 各為小於象限之正弧時, $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$
 3004

(2) 三角形 A, B, C 中

- $C > 90^\circ$ 時, $\tan A \tan B < 1$ 2730
 ● 除 $A = B = C$ 外, $8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ 較 1 小 ... 2732
 ● $\sin A + \sin B + \sin C < \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ 2733

III. 極大極小

(1) 極大值

- $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$ 2744
 ● $a \cos(\alpha + \theta) + b \sin \theta$ 2746
 ● $p \cos \theta + q \sin(\alpha + \theta)$ 2747
 ● $1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x$ 2752
 ● $(5 - \sin x)(2 + \sin x)$ 2753
 ● $\frac{\tan^2 \theta - \cot^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta + \cot^2 \theta - 1}$ 2754
 ● 二銳角 α 及 β 之和等於一定角 σ 時, $\cos \alpha \cos \beta$ 及 $\cos \alpha + \cos \beta$ 2763
 ● 在 0 及 π 之間, 求令 $\sin \theta \cos(\beta - \theta)$ 為最大之 θ 值, 但 β 為 0 及 $\frac{\pi}{2}$ 間之已知角 2756
 ● 設 x 及 y 變化時, 其和為常數, 則 $\sin x + \sin y$ 變化時, 其界限如何? 又求其極大值 2758
 ● 三角形 ABC 中, $\sin A + \sin B + \sin C$ 2765
 ● 三角形 ABC 中, $\cos A + \cos B + \cos C$ 2766
 ● 三角形 ABC 中, $\cos A \cos B \cos C$ 2769
 ● 知三角形 ABC 之一邊 a 與對角 A, 求其面積之極大值
 2776
 ● 設四邊形二對角線之長為 h 及 k , A 為其交角, 則其最大外接矩形之面積為 $\frac{1}{2}hk(1 + \sin A)$ 2778
 ● 知直交之二直線, 及其一直線上之二點 B 及 C, 試在他直線上取長 AM, 令由點 M 至 B 及 C 二點之視線成最大之角 2779
 ● 在正方形之各邊上就外側作相等之二等邊三角形, 則正方形須如何而後所生八邊形之面積為極大? 但二等邊三角形之邊 c 為所設量 2780

- 作所設二平行線之公垂線，令由此平行線外之所設點至公垂線之視角為最大... .. 2783
- 求扇形內面積最大之內接矩形，又對於扇形角為 120° ， 240° 時，試加以玩索 2784
- 求圓之弓形內有最大面積之內接矩形 2785
- 由直角三角形之高之足，在高之兩側引等斜之二直線，令內接三角形之面積為最大... .. 3127
- 設 A, B, C 為三角形之各角，則 $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ 不能較 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 大 2775

(2) 極小值

- $p \cot \theta + q \tan \theta$ 2748
- $4 \sin^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta$ 2749
- $8 \sec^2 \theta + 18 \cos^2 \theta$ 2750
- $3 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$ 2751
- a, β 在 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，其和為定角 σ 時， $\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} \beta$ 2762
- a, b, c, k 為常數， a, β, γ 為有 $a \tan a + b \tan \beta + c \tan \gamma = k$ 關係之變數時， $\tan^2 a + \tan^2 \beta + \tan^2 \gamma$... 2781
- 三角形 ABC 中， $\cot A + \cot B + \cot C$ 2767
- 三角形 ABC 中， $\sec A + \sec B + \sec C$ 2768
- 三角形 ABC 中， $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2}$... 2771
- 三角形 ABC 中， $\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C$ 2772
- 三角形 ABC 中， $2 \cot A + 2 \cot B + 2 \cot C$ 之值決不小於 $\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C$ 2674
- 若 $A + B + C = 90^\circ$ ，則 $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C$ 之最小值為 1 2773

(3) 極大極小值

- $p \sin \theta + q \cos \theta$ 2745
- $\sin x \cos^3 x$ 2782
- x 及 y 變化，其和為常數時， $\sin x \sin y$ 2757
- a, β 在 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，其和為定角 σ 時， $\sin a + \sin \beta$ 2759
- a, β 在 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，其和為定角 σ 時， $\tan a + \tan \beta$...

- 2760
- 設 α 爲在 0° 與 90° 間之角, 求令 $\tan \alpha \tan x + \cot \alpha \cot x$ 爲極大或極小之 x 值 [在 0° 與 180° 之間者]... 2761
- α, β 在 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間, 其和爲定角 σ 時, $\sin \alpha \sin \beta$... 2764
- 三角形 ABC 中, $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$... 2770
- 設三角形之三邊成等比級數, 則此級數之公比較 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 大, 而較 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 小 2777
- $\frac{\sec^2 \theta - \tan \theta}{\sec^2 \theta + \tan \theta}$ 不大於 3 亦不小於 $\frac{1}{3}$ 2755

第十二

I. 對稱式

- $A+B+C=\pi$ 時, (I) $\Sigma \sin 2A = 4 \Pi \sin A$. (II) $\Sigma \sin A = 4 \Pi \cos \frac{A}{2}$. (III) $\Sigma \tan A = \Pi \tan A$. (IV) $\Sigma \tan \frac{B}{2} \times \tan \frac{C}{2} = 1$ 2786
- 三角形 ABC 中, $\Sigma a^3 \cos A = abc(1 + 4 \Pi \cos A)$ 2790
- 由方程式 $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ 及 $a \cos \phi + b \sin \phi = c$ 求比 $a:b:c$ 2787
- 設方程式 $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ 中, θ 之二值爲 α 及 β , 求 $4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2}$, $\sin \alpha + \sin \beta$, $\sin \alpha \sin \beta$ 之值 2788
- 由 $\cos \theta + \cos \phi = a$ 及 $\sin \theta + \sin \phi = b$, 求 $\cos(\theta + \phi)$ 及 $\sin 2\theta + \sin 2\phi$ 之值 2789

II. 交代式

- $\Sigma \cos(\alpha + \theta) \sin(\beta - \gamma) = 0$ 2791
- (I) $\Sigma \tan(\beta - \gamma) = \Pi \tan(\beta - \gamma)$, 及 (II) $\Sigma \tan \beta \tan \gamma \times \tan(\beta - \gamma) = -\Pi \tan(\beta - \gamma)$ 2792
- $(y+z)\tan \alpha + (z+x)\tan \beta + (x+y)\tan \gamma = 0$, 及 $x \tan \beta \times \tan \gamma + y \tan \gamma \tan \alpha + z \tan \alpha \tan \beta = x + y + z$ 時, $x \sin 2\alpha + y \sin 2\beta + z \sin 2\gamma = 0$ 2793

III. 代數學及三角法中公式之變換

- 用代數學之公式, $\Sigma \sin(\alpha + \theta) \sin(\alpha - \theta) \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta$

- 數, $\cos n\theta + \sqrt{(-1)\sin n\theta}$ 爲 $\{\cos \theta + \sqrt{(-1)\sin \theta}\}^n$ 之一值 2808
- 由前題已知 n 爲分數時, $\cos n\theta + \sqrt{(-1)\sin n\theta}$ 乃 $\{\cos \theta + \sqrt{(-1)\sin \theta}\}^n$ 之一值. 試述盡得此最後式之值之方法 2809
- 試用 De Moivre 氏定理, 求 $a + b\sqrt{(-1)}$ 形之式之 n 次根 2810
- 試用 De Moivre 氏定理, 證明 $\cos n\theta = \cos^n \theta - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \times \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \frac{[n(n-1)(n-2)(n-3)]}{4!} \cos^{n-4} \theta \times \sin^4 \theta - \dots$, $\sin n\theta = n \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \times \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \cos^{n-5} \theta \sin^5 \theta - \dots$, 且研究其末項 2811
- 試由 $\sin n\theta$ 及 $\cos n\theta$ 之公式, 導出以 $\tan \theta$ 之幂爲項, 表 $\tan n\theta$ 之展開式 2812
- 有若干之角, 皆不相等, 求其和之正弦, 餘弦, 及正切之普遍公式 2813
- 試將 $\sin a$ 及 $\cos a$ 展開爲 a 之幂級數, 但 a 表角之弧度 3814
- 設以測角之任意單位示角, 將前題之公式變形 3815
- 展開 $\sin a$ 及 $\cos a$ 所得之級數, 不論 a 有如何之值, 恆爲收斂級數 2816
- 設三角形 ABC 之角 C 甚鈍, 則邊 c 殆等於 $(a+b) \left\{ 1 - \frac{ab\theta^2}{(a+b)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$ 2817
- 求 $(-1)^{\frac{1}{3}}$ 之諸值 2818
- 求 $\{1 + \sqrt{(-1)}\}^{\frac{1}{3}}$ 之三值 2819
- $\frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{2165}{2166}$ 時, θ 約爲 3° 之弧度 2820
- $\tan x = a_1 x + \frac{a_3 x^3}{3} + \frac{a_5 x^5}{5} + \dots$ 時, $a_{2n+1} = \frac{(2n+1)2n}{2} \times a_{2n-1} - \frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)}{4} a_{2n-3} + \dots + (-1)^{n+1} \times (2n+1)a_1 + (-1)^n \dots$ 2821
- 設 $\frac{bc}{(a+b)(a+c)}$ 式中之 a , 今以 $\cos 2a + \sqrt{(-1)\sin 2a}$ 代入, 又 b 及 c 以同樣之式代入, 而將其結果化成 $A+B \times \sqrt{(-1)}$ 之形, 試以 α, β, γ 爲項表 A 及 B 之值 ...

- 2822
- $\{\cos \theta + \cos \phi + \sqrt{(-1)(\sin \theta + \sin \phi)}\}^n + \{\cos \theta + \cos \phi - \sqrt{(-1)(\sin \theta + \sin \phi)}\}^n = 2^{n-1} \left(\cos \frac{\theta - \phi}{2}\right)^n \cos \frac{n(\theta + \phi)}{2}$
 2823
- 求圓之小弧之長, 有次之定則, 試證明之. 即由半弧之弦之 8 倍, 減全弧之弦, 所餘之 $\frac{1}{3}$ 約等於其弧之長 ... 2824
- 假定 $x = \cos 2\theta + \sqrt{(-1)\sin 2\theta}$, 同時又就 a, b, c 作同樣之假定, 試依此由假定 $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(a-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$ 恆等式, 導出下式: $\frac{\sin(\theta - \beta)\sin(\theta - \gamma)}{\sin(a - \beta)\sin(a - \gamma)}$
 $\times \sin 2(\theta - a) + \frac{\sin(\theta - \gamma)\tan(\theta - a)}{\sin(\beta - \gamma)\sin(\beta - a)} \times \sin 2(\theta - \beta)$
 $+ \frac{\sin(\theta - a)\sin(\theta - \beta)}{\sin(\gamma - a)\sin(\gamma - \beta)} \sin 2(\theta - \gamma) = 0$ 2825
- 方程式 $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ 之四根爲 $\cos 36^\circ \pm \sqrt{(-1)} \times \sin 36^\circ$ 及 $\cos 108^\circ \pm \sqrt{(-1)} \sin 108^\circ$ 2826
- $k^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos a$, $\tan \beta = \frac{b \sin a}{a - b \cos a}$ 時, $\{a[\cos \theta + \sqrt{(-1)\sin \theta}] - b[\cos \theta - a + \sqrt{(-1)\sin \theta - a}]\}^{\frac{1}{n}}$ 之一值爲 $k^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \frac{\theta + \beta}{n} + \sqrt{(-1)\sin \frac{\theta + \beta}{n}} \right\}$ 2827
- 試由方程式 $[\cos \theta + \sqrt{(-1)\sin \theta}][\cos 2\theta + \sqrt{(-1)\sin 2\theta}] \dots [\cos n\theta + \sqrt{(-1)\sin n\theta}] = 1$ 求 θ 之普遍值 2828

第十四

三角函數之展開式

- 設 $\cos \theta + \sqrt{(-1)\sin \theta}$ 表以 x , 則 $x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\theta$, 及 $x^n - \frac{1}{x^n} = 2\sqrt{(-1)\sin n\theta}$ 2829
- 設 n 爲正整數, 試以 θ 之倍數之餘弦表 $\cos^n \theta$ 2830
- 設 n 爲偶數, 且爲正整數, 試以 θ 之倍數之餘弦表 $\sin^n \theta$
 2831
- 設 n 爲奇數, 且爲正整數, 試以 θ 之倍數之正弦表 $\sin^n \theta$
 2832
- 設 n 爲正整數, 試以 $\cos \theta$ 之降冪級數表 $\cos n\theta$ 2833

- 設 n 為正偶數, 試展開 $\cos n\theta$ 為 $\sin^2\theta$ 之冪級數 **2834**
- n 為正偶數時, 試證 $\sin n\theta = n \cos \theta \left\{ \sin \theta - \frac{n^2-2^2}{3!} \sin^3\theta + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!} \sin^5\theta - \dots \right\} \dots \dots \dots$ **2835**
- n 為奇數時, 試仿前求證 $\sin n\theta = n \sin \theta - \frac{n(n^2-1)}{3!} \sin^3\theta + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!} \sin^5\theta - \dots$, $\cos n\theta = \cos \theta \left\{ 1 - \frac{n^2-1}{1 \cdot 2} \times \sin^2\theta + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!} \sin^4\theta - \dots \right\} \dots$ **2835** 注意
- n 為偶整數時, $(-1)^{\frac{n}{2}} \cos n\theta = 1 - \frac{n^2}{2!} \cos^2\theta + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!} \times \cos^4\theta - \dots$, $(-1)^{\frac{n}{2}+1} \sin n\theta = n \sin \theta \left\{ \cos \theta - \frac{n^2-2^2}{3!} \times \cos^3\theta + \frac{(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!} \cos^5\theta - \dots \right\}$, n 為奇整數時, $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos n\theta = n \cos \theta - \frac{n(n^2-1)}{3!} \cos^3\theta + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!} \times \cos^5\theta - \dots$, $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin n\theta = \sin \theta \left\{ 1 - \frac{n^2-1}{2!} \cos^2\theta + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!} \cos^4\theta - \dots \right\} \dots \dots \dots$ **2836**
- 試以 θ 之倍數之餘弦為項表明 $(\sin \theta)^{4n+2} \dots$ **2837**
- 試以 θ 之倍數之正弦為項表明 $(\sin \theta)^{4n+1} \dots$ **2838**
- 試以 θ 之倍數之餘弦為項表明 $(\cos \theta)^{2n} \dots$ **2839**
- 簡化 $\frac{\cos 6\theta + 6 \cos 4\theta + 15 \cos 2\theta + 10}{\cos 5\theta + 5 \cos 3\theta + 10 \cos \theta} \dots \dots$ **2840**
- 試以 θ 之諸倍數之正弦為項表 $\sin^5\theta \cos^6\theta \dots$ **2841**

第十五

餘弦及正弦之指數值

- $\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, 從而 $\tan x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1} \{ e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} \}} \dots \dots \dots$ **2842**
- 試以 $\tan \theta$ 之冪表 $\theta \dots \dots \dots$ **2843**
- $\tan \theta = x$ 時, $\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$ **2843** 注意
- [Euler 氏級數] $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots + \frac{1}{3}$

- $-\frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 7^7} + \dots \dots \dots 2844$
- [Machin 氏級數] $\frac{\pi}{4} = 4 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \dots \right\}$
 $-\left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3(329)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \dots \dots \right\} \dots \dots 2845$
- $\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{70} + \tan^{-1} \frac{1}{99} \dots \dots 2845$ 注意
- 知 $\sin x = n \sin(x+a)$, 試以 n 之冪表 $x \dots \dots 2846$
- 知 $\tan x = n \tan y$, 求 x 之級數 $\dots \dots 2847$
- 以 x 之冪表 $e^{ax} \cos bx$ 之之中, x^n 之係數如何 2848
- 以 x 之冪表 $e^{ax} \sin bx$ 之式中, x^n 之係數如何 2849
- 知三角形之二邊及夾角, 求第三邊對數之級數 2850
- 試應用正弦, 餘弦之指數值, 求證 $\frac{\sin 2\theta}{1 - \cos 2\theta} = \cot \theta \dots \dots 2851$
- 知三角形 ABC 之角 C, 內隣邊 a, b 殆相等, 則他二邊殆等於 $90^\circ - \frac{C}{2} \pm \frac{180^\circ}{\pi} \left\{ \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} \right)^3 \right\} \dots \dots 2852$
- 設三角形之二邊為 a 及 b , 其對角為 A 及 B, 則 $\log b - \log a = \cos 2A - \cos 2B + \frac{1}{2} (\cos 4A - \cos 4B) + \frac{1}{2} (\cos 6A - \cos 6B) + \dots \dots 2853$
- 若 $A + Bi = \log(m + ni)$, 則 $\tan B = \frac{n}{m}$, 及 $2A = \log(n^2 + m^2) \dots \dots 2854$
- 將 $\cos(\theta + \phi i)$ 及 $\sin(\theta + \phi i)$ 化成 $a + \beta i$ 之形 2855
- 設 $u = (a + bi)^{p+qi}$, 試將 $\log u$ 化成 $a + \beta i$ 之形 2856
- 試將 $(a + bi)^{p+qi}$ 化成 $a + \beta i$ 之形 $\dots \dots 2857$
- $\{\sin(a - \theta) - e^{\pm ai} \sin \theta\}^n = \sin^{n-1} a \{\sin(a - n\theta) + e^{\pm ai} \times \sin n\theta\} \dots \dots 2858$

第十六 級數之和

- 設諸角成等差級數, 求其餘弦之和, 及正弦之和 2859
- $\cos a - \cos(a + 2\beta) + \cos(a + 4\beta) - \dots \dots$ (至 n 項) 之和 $\dots \dots 2860$
- $\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} 4a + \dots \dots$ (至 n 項) 之和 $\dots \dots 2861$
- $\frac{1}{\cos a \cos 3a} + \frac{1}{\cos 3a \cos 5a} + 1/(\cos 5a \cos 7a) \dots \dots$ (至 n

- 項)之和 2862
- $\sin a \sin(a+\beta) + \sin(a+\beta) \sin(a+2\beta) + \sin(a+2\beta) \sin(a+3\beta) + \dots$ (至 n 項) 之和 2863
- 求 $\sin^2 a + \sin^2(a+\beta) + \sin^2(a+2\beta) + \dots$ (至 n 項) 之和 2864
- $\frac{1}{\sin a \sin 2a} + \frac{1}{\sin 2a \sin 3a} + \dots$ (至 n 項) 之和 2865
- $\sin a \sin 2a + \sin 2a \sin 3a + \sin 3a \sin 4a + \dots$ (至 n 項) 之和 2866
- 求 $\frac{1}{1 + \tan a \tan 2a} + \frac{1}{1 + \tan 2a \tan 4a} + \frac{1}{1 + \tan 3a \tan 6a} + \dots$ (至 n 項) 之和 2867
- $\frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} + \frac{2 \tan 2a}{1 + \tan^2 2a} + \frac{2 \tan 3a}{1 + \tan^2 3a} + \dots$ (至 n 項) 之和 2868
- $\tan^{-1} \frac{1}{1+1.2} + \tan^{-1} \frac{1}{1+2.3} + \tan^{-1} \frac{1}{1+3.4} + \dots$ 至無限項數之和 2869
- $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \left(\frac{x}{1+1.2.x^2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{x}{1+2.3.x^2} \right) + \dots$ 至項數無限之和 2870
- 內接於圓作等邊多角形, 由圓周上之任意點至各角頂引弦, 求此弦之平方和及四次幂和 2871
- 以 n 邊正多角形之各邊為底, 以其一角頂為頂點之諸三角形, 其內切圓之半徑之和為 $2R \left(1 - n \sin^2 \frac{\pi}{2n} \right)$, 但 R 為此多角形外接圓之半徑 2872
- 前題中內切圓之諸面積之和為 $16\pi R^2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} \left\{ \frac{n}{4} \sin^2 \frac{\pi}{2n} + \frac{n-4}{8} \right\}$ 2873
- 設 $2n$ 等分圓周於 A, P, Q 等點, 在 A, P, Q 等點引切線, 自直徑 OA 之一端 O 至其上引垂線 OA, OB, OC 等, 則得 $OA^2 + OB^2 + OC^2 + \dots = 3n$ (半徑)² 2874
- 試 $n = \infty$, 則次比之極限如何? 即 $\left\{ \sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{2\pi}{2n} + \sin \frac{3\pi}{2n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{2n} \right\} / \left\{ \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{2n} + \frac{3\pi}{2n} + \dots + \frac{n\pi}{2n} \right\}$ 3875

第十七

三角函數式之因數分解

- $x^n - 1$ 2876

- $OP^{2n} - 2OP^n \cdot OB^n \cos \theta + OB^{2n} = PB^2 \cdot PC^2 \cdot PD^2$ [至 n 因數] 2887
- (Cote 氏圓之性質) De Moivre 氏圓中, 延長 OP , 令交圓於 A , 命弧 $AB = BC = \frac{2\pi}{n}$, 則 $OP^n \sim OB^n = PB \cdot PC \times PD \dots$ (至 n 因數). 又將 AB, BC 等弧二等分於 a, b 等, 則 $OP^n + OB^n = Pa \cdot Pb \cdot Pc \dots$ (至 n 因數) 2888
- 求無窮級數 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ 之總和 ... 2889
- 求無窮級數 $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \dots$ 之總和. 又試命 $n=2$ 2890
- $\alpha = \frac{\pi}{4n}$ 時, $\sin \alpha \sin 5\alpha \sin 9\alpha \dots \sin (4n-3)\alpha = 2^{-n+\frac{1}{2}}$ 2891
- 有 n 邊多角形, 內接於圓, 其各邊張於中心之角為 $a, 2a, 3a, \dots, na$, 則此多角形之面積與此圓內接 n 邊正多角形之面積之比等於 $\sin \frac{1}{2}na$ 與 $n \sin \frac{1}{2}a$ 之比 ... 2892
- 圓之內接 n 邊正多角形中, 由一角頂至他各角頂所引直線之積等於 na^{n-1} , 但 a 為圓之半徑 2893
- 由半徑 a 之圓周上之任意點, 至 $2n$ 邊外切正多角形之各邊引垂線 $p_1, p_2, \dots, p_{2n-1}, p_{2n}$, 則 $p_1 p_3 p_5 \dots p_{2n-1} + p_2 p_4 \dots p_{2n} = \frac{a^n}{2^{n-2}}$ 2894
- 作圓之內接多角形, 外切於其各角頂更作一多角形, 則由圓周上之任意點至內接多角形之各邊所引垂線之積, 等於由同點至外切多角形之各邊所引之垂線之積 2895
- 由 $\sin \theta$ 之因數式, 證 $\pi = 3 \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{144}{143} \cdot \frac{24}{323} \cdot \frac{576}{575} \dots$ 2896
- n 為偶數時, $\tan \phi \tan \left(\phi + \frac{\pi}{n} \right) \tan \left(\phi + \frac{2\pi}{n} \right) \dots \tan \left(\phi + \frac{n-1}{n} \pi \right) = (-1)^{\frac{n}{2}}$ 2897
- $\sin 5A - \cos 5A = 16 \cos(A-27^\circ) \cos(A+9^\circ) \sin(A+27^\circ) \times \sin(A-9^\circ) (\cos A - \sin A)$ 2898
- $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.1.6.6.8.8 \dots}{1.3.3.5.5.7.7.9 \dots}$ 2889
- $\sqrt{2} = \frac{4.36.100.196.324 \dots}{3.35.99.195.323 \dots}$ 2900

- 設 RV 為直角雙曲線上之點 R 至任意直徑 OQ 若之縱線，
 $u = 2 \times$ 扇形 QOR/OA^2 ，則 $\cosh u = \frac{OV}{OQ}$ 及 $\sinh u = \frac{VR}{OQ}$...
 2915
- $$\left. \begin{aligned} \cosh(u \pm v) &= \cosh u \cosh v \pm \sinh u \sinh v \\ \sinh(u \pm v) &= \sinh u \cosh v \pm \cosh u \sinh v \\ \tanh(u \pm v) &= \frac{\tanh u \pm \tanh v}{1 \pm \tanh u \tanh v} \end{aligned} \right\}$$
- $$\left. \begin{aligned} \cosh 2u &= \cosh^2 u + \sinh^2 u = 2 \cosh^2 u - 1 \\ &= 2 \sinh^2 u + 1 \\ \sinh 2u &= 2 \cosh u \sinh u \\ \tanh 2u &= \frac{2 \tanh u}{1 + \tanh^2 u} \end{aligned} \right\}$$
- $$\left. \begin{aligned} \cosh S + \cosh D &= 2 \cosh \frac{S+D}{2} \cosh \frac{S-D}{2} \\ \cosh S - \sinh D &= 2 \cosh \frac{S+D}{2} \sinh \frac{S-D}{2} \\ \sinh S + \cosh D &= 2 \sinh \frac{S+D}{2} \cosh \frac{S-D}{2} \\ \sinh S - \sinh D &= 2 \cosh \frac{S+D}{2} \sinh \frac{S-D}{2} \end{aligned} \right\}$$
- 2916
- 何謂 Gudermannian 函數 2917
- 作雙曲線函數之曲線 2918
- 求證直角雙曲線之一分枝與兩漸近線間之面積無窮大 ...
 2919
- $1 - \frac{\sinh^2 \alpha}{\sinh^2 \beta} = \cosh^2 \alpha \left(1 - \frac{\tanh^2 \alpha}{\tanh^2 \beta} \right)$ 2920
- $\cosh^2 \alpha \left(1 + \frac{\tanh^2 \alpha}{\tanh^2 \beta} \right) = 1 + \frac{\sinh^2 \alpha}{\sinh^2 \beta}$ 2921
- $\frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + 1} = \tanh x$ 及 $\frac{\sinh 2x}{\cosh 2x - 1} = \coth x$... 2922
- $\sinh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 - \tanh^2 x}$ 2923
- $\cosh 2x = \frac{1 + \tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x}$ 2924
- $\cosh 2x + \sinh 2x = \frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}$ 2925
- $2 \cos^2 x \cosh^2 y + 2 \sin^2 x \sinh^2 y = \cos 2x + \cosh 2y$...
 2926
- $2 \coth 2x - \coth x = \tanh x$ 2927

- n 爲任意正整數時, $(\cosh n + \sinh u)^n = \cosh nu + \sinh nu$
 2945
- $v = 2 \cosh u$, $v_n = 2 \cosh nu$ 時, $v_{n+1} = v_n - v_{n-1}$ 2946
- 應用前題之公式求證次之各式, $v_2 = v^2 - 2$, $v_3 = v^3 - 3v$,
 $v_4 = v^4 - 4v^2 + 2$, $v_5 = v^5 - 5v^3 + 5v$, $v_6 = v^6 - 6v^4 + 5v^2 - 2$
 2547
- $\sinh^{-1} a - \sinh^{-1} b = \sinh^{-1} \{a\sqrt{(b^2 + 1)} - b\sqrt{(a^2 + 1)}\}$
 2948
- $\tan^{-1} \left(\frac{\tan 2\theta + \tanh 2\phi}{\tan 2\theta - \tanh 2\phi} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\tan \theta - \tanh \phi}{\tan \theta + \tanh \phi} \right)$
 $= \tan^{-1}(\cot \theta \coth \phi) \dots \dots \dots$ 2949
- 應用幾何學, $\tanh(u+v) = \frac{\tanh u + \tanh v}{1 + \tanh u \tanh v} \dots$ 2950

第二門 球面三角之部

第 一

球面三角形中邊與角之關係

- [補題] 試比較小圓張任意中心角之弧與大圓張等中心角之弧 3128
- 三角形一角之餘弦, 試以各邊之正弦餘弦之項表之 3129
- 球面三角形一角之正弦, 試以各邊之三角函數表之 3130
- 球面三角形各角之正弦, 與其對邊之正弦成比例 3131
- $\cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos C \dots \dots$ 3132
- 三角形一角半分之正弦, 餘弦, 及正切, 試表之爲各邊之函數 3133
- $4n^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c \dots$
 3133 注意
- 三角形一邊之餘弦, 試以各角之正弦及餘弦表之 3134
- 三角形一邊半分之正弦, 餘弦, 及正切, 試表之爲角之函數 3135
- $4N^2 = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C \dots$
 3135 注意
- Napier 氏比例式

$$\tan \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \cot \frac{C}{2},$$

$$\tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \cot \frac{C}{2},$$

$$\tan \frac{1}{2}(a+b) = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \cot \frac{c}{2},$$

$$\tan \frac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \cot \frac{c}{2} \quad \dots \quad \mathbf{3136}$$

● Delambre 氏比例式

$$\cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C,$$

$$\cos \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C,$$

$$\sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C,$$

$$\sin \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C \dots \quad \mathbf{3137}$$

● 二球面三角形中，若彼此之二邊分別相等，而其夾角不等，則第三邊不相等，角之大者，其第三邊較大，其逆亦真。

... .. $\mathbf{3138}$

● 球面三角形 ABC 中，設 $A = a$ ，則 B 與 b 或相等，或互為補角，就 C 及 c 亦然 $\mathbf{3139}$

● 設球面三角形 ABC 之一角，等於他二角之和，則最長邊為對角至其中點之距離之 2 倍 $\mathbf{3140}$

● 極三角形在何時與原三角形一致 $\mathbf{3131}$

● 球面三角形 ABC 中，設邊 AB 之中點為 D，則 $\cos AC + \cos BC = 2 \cos \frac{1}{2}AB \cos CD$ $\mathbf{3142}$

● 設球面上之四點 A, B, C, D，以大圓之弧聯結之，命 E, F 分別為弧 AC, BD 之中點，則 $\cos AB + \cos BC + \cos CD + \cos DA = 4 \cos AE \cos BF \cos FE$ $\mathbf{3143}$

● 球面三角形 ABC 中， $A = B = 2C$ 時， $\cos a \cos \frac{a}{2} = \cos \left(c + \frac{a}{2} \right)$ $\mathbf{3144}$

● 設球面三角形 ABC 之二角分別等於其對邊，則其餘之一邊為其餘一角之補角，設此三角形有二個象限及二個直角，則其餘一邊等於其餘一角 $\mathbf{3145}$

● 球面等邊三角形 ABC 中， $2 \cos \frac{a}{2} \sin \frac{A}{2} = 1$ $\mathbf{3146}$

● 球面等邊三角形 ABC 中， $\tan^2 \frac{a}{2} = 1 - 2 \cos A$ 。又試由是求等邊三角形之邊及角之界限 $\mathbf{3147}$

● 球面等邊三角形 ABC 中， $\sec A = 1 + \sec a$ $\mathbf{3148}$

● 以球面三角形 ABC 之三邊之半，作一新三角形，命 θ 為

- 新二邊 $\frac{b}{2}$ 及 $\frac{c}{2}$ 間之角 則 $\cos \theta = \cos A + \frac{1}{2} \tan \frac{b}{2} \tan \frac{c}{2} \times \sin 2\theta$ 3149
- 設 AB, CD 為相交於 E 之二象限弧, 今若將其各端以大圓聯結之, 則 $\cos AEC = \cos AC \cos BD - \cos BC \cos AD$..
... .. 3150
- 球面三角形 ABC 中, 若 $b+c=\pi$, 則 $\sin 2B + \sin 2C = 0$
... .. 3151
- 設球面三角形 ABC 之二邊 AB, AC 二等分於 D 及 E, 聯結大圓弧 DE, 命 DE 之極為 P, 以大圓弧聯結 PB, PD, PE, PC, 則角 BPC 為角 DPE 之 2 倍 3152
- 球面三角形 ABC 中, $\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A = \sin B \times \sin C - \cos B \cos C \cos a$ 3153
- 設 D 為球面三角形 ABC 之邊 BC 上之任意點, 則 $\cos AD \times \sin BC = \cos AB \sin DC + \cos AC \sin BD$... 3154
- 球面三角形 ABC 中, 設由 A, B, C 分別至其對邊所引垂直弧之長為 θ, ϕ, ψ , 則 $\sin a \sin \theta = \sin b \sin \phi = \sin c \sin \psi = \sqrt{(1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c)}$...
... .. 3155
- 設球面三角形 ABC 中, 將角 A, B, C 二等分, 而止於對邊之弧為 θ, ϕ, ψ 時, $\cot \theta \cos \frac{A}{2} + \cot \phi \cos \frac{B}{2} + \cot \psi \cos \frac{C}{2} = \cot a + \cot b + \cot c$ 3156
- 在球面上作小圓之內接四邊形 ABCD, 令其兩對邊 A 及 C 恆在一直徑之兩端, 則各邊餘弦之和為常數 ... 3157
- 設球面三角形 ABC 之各邊皆為象限, P 為形內之任意點, 則 $\cos PA \cos PB \cos PC + \cot BPC \cot CPA \cot APB = 0$, $\tan ABP \tan BCP \tan CAP = 1$ 3158
- 設 O 為球面等邊三角形 ABC 之中點, P 為球面上之任意點, 則 $1 + (\tan PO \tan OA)^2 (\cos PA + \cos PB + \cos PC)^2 = \cos^2 PA + \cos^2 PB + \cos^2 PC - \cos PA \cos PB - \cos PB \cos PC - \cos PC \times \cos PA$ 3159
- 球面上有三點, 自此各點至一大圓周上之他三點引弧, 命其餘弦為 $a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''$; 則 $ab''c' + a'bc'' + a''b'c = ab'c'' + a'b''c + a''bc'$ 3160
- 同緯度上有二港, 其經度之差為 2λ , 其公緯度為 l . 今自其一港至他港之航路, 若依正東或正西取之, 則較大圓周上所取者遠, $2r\{\lambda \cos l - \sin^{-1}(\sin \lambda \cos l)\}$. 但 λ 為弧度, r 為地球之半徑 3161
- 一汽船, 以等速沿大圓航駛, 經同時間而觀測, 其三位置之

緯度爲 l_1, l_2, l_3 , 各時間中所進航之路程爲 s , 則 $s = r \cos^{-1} [\{\sin \frac{1}{2}(l_1 + l_3) \cos \frac{1}{2}(l_1 - l_3)\} / \sin l_2]$, 但 r 爲地球之半徑. 又其經度之變化, 可以此三緯度求得之 3162

第二

球面直角三角形之解法

- 就斜角三角形所得 3129, 3131, 3132, 3134 題等之公式, 其對應之直角三角形之解法所必要之公式如何? 又試由此公式導出直角三角形之性質 3163
- 設球面三角形 ABC 之各邊皆爲象限, O 爲內切圓之極, P 爲球面上之任意點, 則 $(\cos PA + \cos PB + \cos PC)^2 = 3 \times \cos^2 PO$ 3164
- 已知斜邊 c 與一角 A , 解直角三角形 ABC ... 3165
- 已知一邊 b 及隣角 A , 解直角三角形 ABC ... 3166
- 已知二邊 a 及 b , 解直角三角形 ABC 3167
- 知斜邊 c 及一邊 a , 解直角三角形 ABC 3168
- 知二角 A 及 B , 解直角三角形 ABC 3169
- 知一邊 a 及對角 A , 解直角三角形 ABC 3170
- C 爲直角之三角形 ABC 中, $\sin^2 \frac{c}{2} = \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{b}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} \times \sin^2 \frac{b}{2}$ 3171
- C 爲直角之三角形 ABC 中, $\tan \frac{1}{2}(c+a) \tan \frac{1}{2}(c-a) = \tan^2 \frac{b}{2}$ 3172
- C 爲直角之三角形 ABC 中, $\sin(c-b) = \tan^2 \frac{A}{2} \sin(c+b)$ 3173
- C 爲直角之球面 $\triangle ABC$ 中, $\sin a \tan \frac{1}{2} A - \sin b \tan \frac{1}{2} B = \sin(a-b)$ 3174
- C 爲直角之球面三角形 ABC 中, $\sin(c-a) = \sin b \cos a \times \tan \frac{1}{2} B$, $\sin(c-a) = \tan b \cos c \tan \frac{1}{2} B$ 3175
- 設 ABC 乃 C 爲直角之球面三角形, $\cos A = \cos^2 a$, 而 A 非直角, 則視 b 及 c 俱較 $\frac{\pi}{2}$ 小或大, 而 $b+c = \frac{\pi}{2}$, 或 $b+c = \frac{3\pi}{2}$ 3176
- C 爲直角之球面三角形 ABC 中, 設 α, β 爲由直角垂直於斜邊及二等分斜邊所引之弧, 則 $\sin^2 \frac{c}{2} (1 + \sin^2 \alpha) = \sin^2 \beta$

- 3177
- 球面三角形 ABC 中, 設 C 為直角, D 為 AB 之中點, 則 $4 \cos^2 \frac{c}{2} \sin^2 CD = \sin^2 a + \sin^2 b$ 3178
- 球面直角三角形 ABC 中, 設由直角頂 C 至斜邊 AB 所引垂直弧之長為 δ , 則 $\cot \delta = \sqrt{(\cot^2 a + \cot^2 b)}$... 3179
- 設 OAA_1 乃 A_1 為直角, A 為銳角之球面三角形, 引大圆弧 A_1A_2 , 令與 OA 垂直, 又引 A_2A_3 , 令與 OA_1 垂直, 如是以往, 則 $A_n A_{n+1}$ 在 n 為無窮大時等於 O . 又求 $\cos AA_1 \cos A_1 A_2 \times \cos A_2 A_3 \dots$ 至無窮之值 3180
- 設 ABC 為球面直角三角形, A 非直角, 若 $A = a$, 則 c 及 b 為象限 3181
- 任意球面三角形 ABC 中, 由 C 引 AB 之垂直弧之長為 δ , 則 $\cos \delta = \operatorname{cosec} c (\cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a \cos b \cos c)^{\frac{1}{2}}$ 3182
- 設球之大圓為 ABC ; AA' , BB' , CC' 為與 ABC 垂直之大圆弧, 此各弧在 ABC 之同傍時為正, 則 A' , B' , C' 在一大圓周上之條件為 $\tan AA' \sin BC + \tan BB' \sin CA + \tan CC' \times \sin AB = 0$ 3183
- 設任意球面三角形之角 A, B, C 所引之垂線, 與對邊之交點分別為 D, E, F , 設 $\tan BD \tan CE \tan AF = \tan DC \tan EA \times \tan FB$ 3184
- 設 Ox, Oy 為球之直交之二大圓, P 為在他大圓 AB 上之任意點, 而 $OC = p$ 為由 O 至 AB 之垂直弧, 其與 Ox 所成之角為 $COx = \alpha$. 今設 PM, PN 為 Ox, Oy 之垂直弧, $OM = x, ON = y$, 則 $\cos \alpha \tan x + \sin \alpha \tan y = \tan p$... 3185
- 設球面上有一點, 今以球面上二大圓為軸, 在各軸上取一點, 令各距軸之交點為 $\frac{\pi}{2}$, 聯結前點與此二交點作大圓, 令前二大圓為此二大圓所截取之部分為 θ 及 ϕ , 以 θ 及 ϕ 決定前點之位置, 則 $(\theta, \phi), (\theta', \phi'), (\theta'', \phi'')$ 三點在同一大圓周上時, $\tan \phi (\tan \theta' - \tan \theta'') + \tan \phi' (\tan \theta'' - \tan \theta') + \tan \phi'' (\tan \theta - \tan \theta'') = 0$ 3186
- 設球面上有一點, 今以球面上二大圓為軸, 在各軸上取一點, 令各距軸之交點為 90° , 聯結前點與此二交點, 作大圓, 於是此一大圓之方程式為 $\tan \theta \cot \alpha + \tan \phi \cot \beta = 1$ 3187
- 球面三角形 ABC 中, 若 $A = \frac{\pi}{5}, B = \frac{\pi}{3}, C = \frac{\pi}{2}$, 則 $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ 3188

第三

球面斜三角形之解法

- 斜三角形 ABC, 在次之數款中, 得屬於直角三角形之解法.
 (I) 已知邊之一等於象限時. (II) 已知之諸元中, 有二等邊或二等角時. (III) 已知之諸元中, 有互成補角之二邊, 或二角時 3189
- 知三邊 a, b, c , 解斜三角形 ABC 3190
- 知三角 A, B, C, 解斜三角形 ABC 3191
- 知二邊 a, b 及夾角 C, 解斜三角形 ABC 3192
- 知二角 A, B 及夾邊 c , 解斜三角形 ABC 3193
- 知二邊 a, b , 及其一邊之對角 A, 解斜三角形 ABC 3194
- 知二角 A, B 及其一之對邊 a , 解斜三角形 ABC 3195
- 玩索 3194 題之兩可款 3196
- 設球面三角形三邊分別為 $105^\circ, 90^\circ, 75^\circ$, 則各角之正弦如何 3197
- 球面三角形 ABC 中, $\tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B = \frac{\sin(s-c)}{\sin s}$. 又知一邊, 一隣角, 及他二邊之和, 解三角形 3198
- 知一邊, 一隣角, 他二角之和, 解球面三角形 ABC 3199
- 一球面三角形 ABC, 其二邊之和等於半圓周, 然則聯結頂點與底之中點之弧如何 3200
- 球面三角形 ABC 中, 設 a, b, c 為已知. 且 c 為象限 則各角如何? 又由對角至 c 引垂線 δ , 則 $\cos^2 \delta = \cos^2 a + \cos^2 b$ 3201
- 將球面三角形 ABC 之一邊四等分, 命順次各部在對角所包容之角為 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, 則 $\sin(\theta_1 + \theta_2) \sin \theta_3 \sin \theta_4 = \sin(\theta_3 + \theta_4) \sin \theta_1 \sin \theta_2$ 3202
- 在球面三角形 ABC 中, 若 $A = B = 2C$, 則 $8 \sin\left(a + \frac{c}{2}\right) \times \sin^2 \frac{c}{2} \cos \frac{c}{2} = \sin^3 a$ 3203
- 在球面三角形 ABC 中, 設 $A = B = 2C$, 則 $8 \sin^2 \frac{C}{2} \left(\cos s + \sin \frac{C}{2} \right) \left(\cos \frac{c}{2} / \cos a \right) = 1$ 3204
- 設 ABC 乃 BC 為底之球面二等邊三角形, 以弧 DE 二等分二等邊, 則 $\sin \frac{DE}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{BC}{2} \sec \frac{AC}{2}$ 3205

- 球面三角形 ABC 中，知 A, a, b ，且三角形兩可，命第三邊之兩值爲 c_1, c_2 ，則 $\tan \frac{1}{2}c_1 \tan \frac{1}{2}c_2 = \tan \frac{1}{2}(b-a) \tan \frac{1}{2}(b+a)$ 3206

第四 內切圓，外接圓等

- 求已知三角形之內切小圓之弧半徑 3207
- 求已知三角形傍切圓之弧半徑 3208
- 求已知三角形之外接圓之弧半徑 3209
- 以已知三角形爲基本形之聯係三角形，其外接小圓之弧半徑如何 3210
- 設已知三角形內切圓之弧半徑爲 r ，外接圓之弧半徑爲 R ，則 $(\cot r + \tan R)^2 = \frac{1}{4n^2}(\sin a + \sin b + \sin c)^2 - 1$ 3211
- $(\cot r_1 - \tan A)^2 = \frac{1}{4n^2}(\sin b + \sin c - \sin a)^2 - 1$ 3211 注意
- 任意三角形 ABC 中， $\tan r_1 \tan r_2 \tan r_3 = \tan r \sin^2 s$ 3212
- 任意三角形 ABC 中， $\tan R + \cot r = \tan R_1 + \cot r_1 = \tan R_2 + \cot r_2 = \tan R_3 + \cot r_3 = \frac{1}{2}(\cot r + \cot r_1 + \cot r_2 + \cot r_3)$ 3213
- 任意三角形 ABC 中， $\tan^2 R + \tan^2 R_1 + \tan^2 R_2 + \tan^2 R_3 = \cot^2 r + \cot^2 r_1 + \cot^2 r_2 + \cot^2 r_3$ 3214
- 任意三角形 ABC 中， $\frac{\tan r_1 + \tan r_2 + \tan r_3 - \tan r}{\cot r_1 + \cot r_2 + \cot r_3 - \cot r} = \frac{1}{2} \times (1 + \cos a + \cos b + \cos c)$ 3215
- 任意三角形 ABC 中， $\operatorname{co-sec}^2 r = \cot(s-a)\cot(s-b) + \cot(s-b)\cot(s-c) + \cot(s-c)\cot(s-a)$ 3216
- 任意三角形 ABC 中， $\operatorname{co-sec}^2 r_1 = \cot(s-b)\cot(s-c) - \cot s \times \cot(s-b) - \cot s \cot(s-c)$ 3217
- 任意三角形 ABC 中， $\tan R_1 \tan R_2 \tan R_3 = \tan R \sec^2 S$ 3218
- 等邊三角形中， $\tan R = 2 \tan r$ 3219
- 設等邊三角形爲 ABC ，其外接圓之極爲 P ，命 Q 爲球面上之任意點，則 $\cos QA + \cos QB + \cos QC = 3 \cos PA \cos PQ$ 3220
- 在各角爲 120° 之球面三角形內，作三個小圓，令各圓切他二圓及三角形之兩邊，則各小圓之半徑爲 30° 。又三小圓

之中心與極三角形之角頂合 3221

第 五

球面三角形之面積及過剩

●設球面過剩以 E 表之, $\sin \frac{1}{2}E = \sqrt{\{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)\} / (2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c)}$. [Cagnoli 氏定理]
 3222

● $\tan \frac{1}{4}E = \sqrt{\{\tan \frac{1}{2}s \tan \frac{1}{2}(s-a) \tan \frac{1}{2}(s-b) \tan \frac{1}{2}(s-c)\}}$
 [Lhuillier 氏定理] 3223

● $\cos \frac{1}{2}E = \{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b + \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos C\} \sec \frac{1}{2}c$, $\tan \frac{1}{2}E = (\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \sin C) / (\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b + \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos C)$,
 $\cos \frac{1}{2}E = (\cos^2 \frac{1}{2}a + \cos^2 \frac{1}{2}b + \cos^2 \frac{1}{2}c - 1) / (2 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \times \cos \frac{1}{2}c)$, $\sin^2 \frac{1}{4}E = \{\sin \frac{1}{2}s \sin \frac{1}{2}(s-a) \sin \frac{1}{2}(s-b) \sin \frac{1}{2}(s-c)\} / (\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c)$, $\cos^2 \frac{1}{4}E = \{\cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}(s-a) \times \cos \frac{1}{2}(s-b) \cos \frac{1}{2}(s-c)\} / (\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c)$, $\sin(C - \frac{1}{2}E) = \sqrt{\{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)\} / (2 \sin \frac{1}{2}a \times \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c)}$, $\cos(C - \frac{1}{2}E) = (\cos^2 \frac{1}{2}c - \cos^2 \frac{1}{2}a - \cos^2 \frac{1}{2}b + 1) / (2 \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c)$, $\sin^2(\frac{1}{2}C - \frac{1}{4}E) = \{\cos \frac{1}{2}s \sin \frac{1}{2}(s-a) \sin \frac{1}{2}(s-b) \cos \frac{1}{2}(s-c)\} / (\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c)$, $\cos^2(\frac{1}{2}C - \frac{1}{4}E) = \{\sin \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}(s-a) \cos \frac{1}{2}(s-b) \sin \frac{1}{2}(s-c)\} / (\sin \frac{1}{2}a \times \sin \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c)$ 3224

●球面上有一等邊三角形, 其面積為球面積之四分之一, 則其各角及各邊如何 3225

●設球面上有一等邊且等角之 n 邊多角形, 求其面積, 又設其面積為球面積之半, 試決定各角之值 ... 3226

●設球面三角形 ABC 中, $a = b = \frac{\pi}{3}$ 及 $c = \frac{\pi}{2}$, 則 $E = \cos^{-1} \frac{1}{3}$
 3227

●設球面三角形 ABC 之角 C 為直角, 則 $\sin \frac{1}{2}E = \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \times \sec \frac{1}{2}c$, 而 $\cos \frac{1}{2}E = \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \sec \frac{1}{2}c$... 3228

●球面三角形 ABC 中, 若 C 為直角, 則 $\frac{\sin^2 c}{\cos c} \cos E = \frac{\sin^2 a}{\cos a} + \frac{\sin^2 b}{\cos b}$ 3229

●球面三角形 ABC 中, $a = b$, $C = \frac{\pi}{2}$ 時, $\tan E = \frac{\sin^2 a}{2 \cos a}$
 3230

●球面直角三角形 ABC 中, 各角之和較 4 直角小 3231

●過球面三角形 ABC 之一邊上之已知點, 作一大圓弧, 令由

- 三角形截取之部分,等於已知面積 3232
- 球面三角形 ABC 中, $\cos C = -\tan \frac{a}{2} \tan \frac{b}{2}$ 時, $C = A + B$.
... .. 3233
- 設球面三角形 ABC 之各角之和為 4 直角, 則 $\cos^2 \frac{1}{2}a + \cos^2 \frac{1}{2}b + \cos^2 \frac{1}{2}c = 1$ 3234
- 在球面三角形 ABC 中, $\sin s = \{\sin \frac{1}{2}E \sin(A - \frac{1}{2}E) \sin(B - \frac{1}{2}E) \sin(C - \frac{1}{2}E)\}^{\frac{1}{2}} / (2 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C)$... 3235
- 知球面三角形 ABC 之二邊, 求其面積為極大時 3236
- 求球面上大圓弧所成之正多角形 [邊數已知] 之面積. 設 a 為小圓之弧半徑, 則小圓面積與球之全面積有 a 之正矢與 2 之比 3237
- 半徑 r 之球面上, 有相切於 P, Q, R 之三小圓, 其弧半徑為 r_1, r_2, r_3 , 其中心為 A, B, C, 則面積 $PQR = (A \cos r_1 + B \times \cos r_2 + C \cos r_3 - \pi)r^2$ 3238
- 設球面三角形之角頂為 A, B, C, 其對邊之中點分別為 A', B', C', 其球面過剩為 E, 則 $\cos \frac{1}{2}E = \cos A'B' / \cos \frac{1}{2}c = \cos B'C' / \cos \frac{1}{2}a = \cos C'A' / \cos \frac{1}{2}b$ 3239
- 聯結球面三角形 ABC 各邊之中點之大圓弧, 若有一為象限, 則他二亦為象限 3240

第六 近似公式

- 設球之半徑較球面三角形之邊甚大, 則已知球面三角形之二邊及其夾角時, 此二邊之弦間之角可發見之 3241
- 設球面三角形之各邊較球之半徑甚小, 則球面三角形之各角, 較以其邊為邊之平面三角形之各角, 大球面過剩之三分之一 [是曰 Legendre 氏定理] 3242
- 試示應用 Legendre 氏定理於球面三角形之近似解法之方法 3243
- 求球面過剩之近似值 3244
- 求 $\frac{\sin A}{\sin B}$ 或 $\frac{\sin a}{\sin b}$ 之近似值 3245
- 求 $\cot B - \cot A$ 之近似值 3246
- 因 Legendre 氏定理計算時, 球面三角形一邊之長中所生誤差之近似數如何? 3247
- 將球面三角形 ABC 之二邊 AB, AC 延長至 B', C', 令 BB', CB' 分別為 AB, AC 之補角之半, 則弧 B'C' 張於球之中心之角, 與弦 AB 及 AC 間之角等 3248

- 試由公式 $\tan^2 \frac{A}{2} = \left\{ \sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(c+a-b) \right\} / \left\{ \sin \frac{1}{2}(b+c-a) \sin \frac{1}{2}(a+b+c) \right\}$ 導 Legendre 氏定理 3249
- 由 3245 題及 3246 題, 約 $\log \beta = \log a + \log \sin B + \frac{S}{3r^2} \times (\cot A - \cot B) \dots \dots \dots 3250$
- 3242 題中之近似法, 若連續至 r^4 之項, 則可得約 $\cos A = \cos A' - \frac{\beta\gamma \sin^2 A'}{6r^2} + \frac{\beta\gamma(a^2 - 3\beta - 3\gamma^2)\sin^2 A}{180r^4} \dots 3251$
- 由前題之結果, 若 $A = A' + \theta$, 則約 $\theta = \frac{\beta\gamma \sin A'}{6r^2} \{1 + (7\beta^2 + 7\gamma^2 + a^2)/120r^2\} \dots \dots \dots 3252$

第七 測地術之問題

- 設地面球上所作之球面三角形, 其面積之平方呎數為已知, 求以秒計算其球面過剩之法則 3253
- 就一三角形觀測之, 可得各角為 $42^\circ 2' 32''$, $67^\circ 55' 39''$, $70^\circ 1' 48''$, 角 A 之對邊長 27404.2 呎, 求觀測之誤差 3254
- 觀測三角形之三角, 且假定其一邊 例如 a 為已知, 試發見一三角形, 令觀測之誤差, 對他二邊之影響為最小 3255
- 求水平上小角距之二點間之水平角. 但二點標間之角, 及其仰角或俯角為已知 3256

第八

球面三角形邊角之小變差

- 設球面三角形 ABC 之一邊 c 及其對角 C 為常數, 求他二元之小變差間之聯結式 3257
- 球面三角形 ABC 中, 若 a 及 b 分別增加微小之 δa 及 δb , 而 C 及 c 為常數, 則 $\delta a / \sqrt{1 - n^2 \sin^2 a} + \delta b / \sqrt{1 - n^2 \sin^2 b} = 0$, 但 $n = \sin C / \sin c$ 3258
- 球面三角形 ABC 中, 設 C 及 c 為常數, 若施小變化於 a , 則他邊及角所生之變化如何? 又面積之變化如何 3259
- 球面三角形 ABC 中, 設 A 及 c 為常數, 求證聯結他邊及

- 角之二小變差之以次各方程式. $b \sin C = \delta B \sin a$, $\delta \sin C = -\delta C \tan a$, $\delta a \tan C = \delta B \sin a$, $\delta a \tan C = -\delta C \tan a$, $\delta b \cos C = \delta t$, $\delta B \cos a = -\delta C \dots \dots \dots 3260$
- 球面三角形 ABC 中, 設 b 及 c 爲常數, 求證聯結他邊及角之二小變差之以次各方程式. $\delta B \tan C = \delta C \tan B$, $\delta a \cot C = -\delta B \sin a$, $\delta a = \delta A \sin c \sin B$. $\delta A \sin B \cos C = -\delta B \times \sin A \dots \dots \dots 3261$
- 球面三角形 ABC 中, 設 B 及 C 爲常數. 求證聯結他邊及角之二小變差之以次諸方程式. $\delta b \tan c = \delta c \tan b$, $\delta A \times \cot c = \delta b \sin A$, 及 $\delta A = \delta a \sin b \sin C$, $\delta a \sin B \cos c = \delta b \sin A \dots \dots \dots 3262$
- 球面三角形 ABC 中, 設 A 及 C 爲常數, b 以細小之量增加, 則 a 隨 c 之較象限小或大而增或減 $\dots \dots 3263$

第九

平面及球面三角法公式之聯結

- 試由含三角形之諸項 [其一爲邊] 之球面三角法公式, 導出其對應之平面三角法公式 $\dots \dots \dots 3264$
- 求球之小圓之方程式 $\dots \dots \dots 3265$
- 設 OA , OB , OC 三弧相交於一點, 由 OB 上之任意點 P 至 OA 引垂直弧 PM , 及至 OC 引垂直弧 PN , 此時 $\sin PM$ 與 $\sin PN$ 之比與弧 OB 上 P 之位置無關 $\dots \dots 3266$
- 由 P_1 及 P_2 二點, 至一定角弧引垂線, 又由過 P_1 及 P_2 之大圓弧上之一點 P 至同一之定弧引垂線, 命 $PP_1 = \theta$, $PP_2 = \theta_2$, 且命由 P , P_1 , 及 P_2 所引之垂線分別爲 x , x_1 , 及 x_2 . 則 $\sin x = \frac{\sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \sin x_1 + \frac{\sin \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \sin x_2 \dots \dots \dots 3267$
- 由球面三角形之各角至對邊引垂直之三弧, 交於同一之點 $\dots \dots \dots 3268$
- 自球面三角形之各角頂至對邊之中點所引之三弧, 交於同一點. 若自此點至邊 a , b , c 所引之垂線分別爲 x , y , z , 則 $\frac{\sin z}{\sin B \sin C} = \frac{\sin y}{\sin C \sin A} = \frac{\sin x}{\sin A \sin B} \quad 3268$ 注意
- 任意球面三角形中, 切其內切圓及傍切圓之小圓恆得在球面上決定之 $\dots \dots \dots 3269$
- 九點圓與球面三角形各邊之交點之位置如何 $\dots 3270$
- 由前題並再前題中所論圓之極至三角形各邊所引垂直弧

- 之位置如何... .. 3271
- 設 3268 題中所決定之點爲 P, 3269 題中所決定之點爲 G, 前題, 再前題, 等中所論之圓之極爲 N, 則 P, G, N 在一大圓周上... .. 3272
- 設球之半徑無限增大, 試由公式 $\sin \frac{a}{2}$
 $= \sqrt{\left\{ \frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C} \right\}}$ [見 3135 題] 設法導出求平面
 三角形之面積之公式, 即 $\frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ 3273
- 設 ABC, abc 爲一切關係相等僅位置稍異之二球面或平面三角形, 則 $\cos ABb \cos BCc \cos CAa + \cos ACc \cos CBb \times \cos BAa = 0$ 3274
- 試由 Napier 氏比例式, 導出平面三角法中之公式 3275
- 試由 Delamber 氏比例式導出平面三角法之之公式 3276
- 試由公式 $\cos \frac{c}{2} \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2} \cos \frac{a+b}{2}$ [3137 題] 導出以各邊及一角求平面三角形面積之公式... .. 3277
- 3203 題中, 若球之半徑爲無窮大, 則得如何之結果... .. 3278
- 由球面三角形之角 C 至聯結邊 a 及 b 之中點之弧引垂線, 則此垂線與邊 a 成角 S-B, 與邊 b 成角 S-A 3279
- 由球面三角形 ABC 之各角至聯結隣邊中點之弧引垂線, 則此各垂線交於同一之點. 又若由此交點至邊 a, b, c 所引垂線分別爲 x, y, z, 則 $\sin x / \{\sin(S-B)\sin(S-C)\} = \sin y / \{\sin(S-C)\sin(S-A)\} = \sin z / \{\sin(S-A)\sin(S-B)\}$ 3280
- 過球面三角形 ABC 之各角引一弧, 令其與一邊所成之角等於底上之垂線與他邊所成之角, 則此各弧交於同一之點, 又設由此交點至邊 a, b, c 所引之垂線分別爲 x, y, z, 則 $\frac{\sin x}{\cos A} = \frac{\sin y}{\cos B} = \frac{\sin z}{\cos C}$ 3-81
- 在 3280 題及 3281 題中所決定之二點與 3273 題之點 N 在一大圓周上. 又試述平面幾何學中之對應定理 3282
- 設球面三角形之一角爲常數, 則夾之之二邊增大時, 其面積及他二角之和亦增大 3283
- 設球面三角形二角之二等分弧相等, 而被二等分之二角

之和較 180° 小,則被二等分之二角相等 3284

第十 多面體

- 求正多面體隣接二面間之角 3285
- 求正多面體之內切球及外接球之半徑 3286
- 求正多面體之面積及體積... .. 3287
- 試以平行六面體之諸稜及其交角,求其體積 ... 3288
- 試以平行六面體之各稜及其互相之傾斜求其對角線 3289
- 求四面體之體積... .. 3290
- 一平面上有所設之四點, 求聯結此四點之直線間之關係 3291
- 試以四面體之六稜求其體積 3292
- 球面上有所設之四點, 求聯結此四點之六大圓弧間之關係... .. 3293
- 求四面體之外接球之半徑... .. 3294
- 設正多面體二面之傾斜為 l , 則 $\cos l$ 在四面體中為 $\frac{1}{3}$, 立方體中為零, 八面體中為 $-\frac{1}{3}$, 十二面體中為 $-\frac{1}{3}\sqrt{5}$, 二十面體中為 $-\frac{1}{3}\sqrt{5}$ 3295
- 試以 3285 題之記法, 求證切正多面體之面及其各隣面延伸部之球之半徑為 $\frac{1}{2}a \cot \frac{\pi}{m} \cot \frac{1}{2}l$ 3296
- 求切正四面體之一面及他三面延伸部之球之半徑... .. 3297
- 設正四面體之內切球及外接球之半徑分別為 a, b , 則 $b = 3a$ 3298
- 設正四面體內接球之半徑為 a , 切其各稜之球之半徑為 R , 則 $R^2 = 3a^2$ 3299
- 設正四面體內切球之半徑為 a , 其一面及他面延伸部之切球之半徑為 R' , 則 $R' = 2a$ 3300
- 有立方體及正八面體, 設外切於同一已知球, 則此二體之外接球相等, 又其逆亦真... .. 3301
- 有正十二面體及正二十面體, 設外切於同一已知球, 則此二體之外接球相等, 又其逆亦真 3302
- 作一正四面體及一正八面體, 令內接同一之球, 試比較此二體之內切球之半徑... .. 3303
- 平行六面體四對角線自乘之和, 為各稜自乘和之 4 倍 3304

- 以任意平行六面體之各角頂為中心，作相等之球，則平行六面體被夾截之部分之和，等於球之全體積 ... 3305
- 在立方體內作一正八面體，其法令八面體之各角頂，在立方體之面之中心，此時立方體之體積為八面體體積之6倍 ... 3306
- 除立方體外，以同種之正多面體若干個不能填充已知之空間，然若借有相等之面之四面體及八面體，即能填充，但四面體之數，須為八面體數之2倍 ... 3308
- 在半徑 ρ 之球面上作三角形，聯結其各角頂於中心，則生一錐體，此錐體之體積為 $\frac{1}{3}\rho^3\sqrt{(\tan r \tan r_1 \tan r_2 \tan r_3)}$ ，但 r, r_1, r_2, r_3 為此三角形之內切圓及傍切圓之半徑 ... 3308
- 內接於半徑 r 之球，作正四面體，以各角頂為極，作四相等之小圓，且令相切，於是即得各圓所包球面部分之面積為 $2\pi r^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$... 3309
- 設 O 為球面三角形 ABC 內之任意點，則任意二邊之正弦與其夾角之正弦之積為 $\sin AO \sin BO \sin CO \{ \cot AO \sin BOC + \cot BO \sin COA + \cot CO \sin AOB \}$... 3010

第十一 球面上之弧

- 設 ABC 乃各邊為象限弧之球面三角形，今命 T 為同球面上之一任意點，則 $\cos^2 TA + \cos^2 TB + \cos^2 TC = 1$ 3311
- 設 ABC 乃各邊為象限弧之球面三角形，命 T 及 U 為同球面上之任意點，則 $\cos TU = \cos TA \cos UA + \cos TB \cos UB + \cos TC \cos UC$... 3312
- 球面上有若干定點，命之為 H_1, H_2, H_3, \dots ，又設 T 為此球面上之任意點，今將 T 與各定點聯結，試推究表此弧之餘弦之和之式 ... 3313
- 作正多面體之外接球，由球面上之一任意點至多面體之各立體角引弧，則此諸弧之餘弦之和為零 ... 3314
- 球面上有若干定點，命為 H_1, H_2, H_3, \dots ，又設 T 為此球面上之任意點，今 T 與此諸定點聯結，則所得諸弧餘弦之平方和之式如何 ... 3315
- 作正多面體之外接球，由球面上之任意點至多面體之各立體角頂點引弧，求此諸弧餘弦之平方和 ... 3316
- 球面上有若干定點，命為 H_1, H_2, H_3, \dots ，由此球面上之任意二點 T 及 U ，至是等定點引諸弧，求其中對應二弧之

- 設球面三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 之極分別為 A', B', C', 則三大圓 AA', BB', CC' 交於同一之點 P, 而 $\cos PA \times \cos BC = \cos PB \cos CA = \cos PC \cos AB$... **3329**
- 由球面三角形 ABC 之各角頂引直交對邊於 D, E, G 之三弧 AD, BE, CE, 命其交點為 O, 則 $\frac{\tan AD}{\tan OD}, \frac{\tan BE}{\tan OE}, \frac{\tan CF}{\tan OF}$ 三者分別等於 $1 + \frac{\cos A}{\cos B \cos C}, 1 + \frac{\cos B}{\cos A \cos C}, 1 + \frac{\cos C}{\cos A \cos B}$... **3330**
- 由球面三角形 ABC 之各角頂, 至對引邊垂直大圓弧, 命為 p, q, r, 將是等分弧分成 (α, α'), (β, β'), (γ, γ') 部分, 則 $\tan \alpha \tan \alpha' = \tan \beta \tan \beta' = \tan \gamma \tan \gamma'$, 及 $\frac{\cos p}{\cos \alpha \cos \alpha'}$ $= \frac{\cos q}{\cos \beta \cos \beta'} = \frac{\cos r}{\cos \gamma \cos \gamma'}$... **3331**
- 由球面三角形 ABC 之各角頂至對邊之中點引弧, 命 α, α' 為邊 a 之二等分弧之二部分, 則 $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = 2 \cos \frac{a}{2}$ **3332**
- 球面三角形 ABC 中, 命二等分邊 AB, AC 之大圓弧與 BC 之延弧之交點為 Q, 則 $\cos AQ \sin \frac{a}{2} = \sin \frac{c-b}{2} \sin \frac{c+b}{2}$... **3333**
- 設 ABCD 為球面四邊形, 延長其二對邊 AB, CD, 令交於 E, 又延長 AD, BC, 令交於 F, 則由 E 至此四邊形之對角線所引之二垂直弧之正弦比, 等於由 F 所引二弧之正弦比... **3334**
- 設 ABCD 為球面四邊形, 延長邊 AB, DC, 令交於 P, 又延長 AD, BC, 令交於 Q, 又命對角線 AC, BD 之交點為 R, 則 $\sin AB \sin CD \cos P \sim \sin AD \sin BC \cos Q = \sin AC \sin BD \times \cos R$... **3335**
- 設球面三角形 ABC 中, 角應於之 A 角通弦三角形之角為 A', 則 $\cos A' = \sin(S - A) \cos \frac{1}{2} a$... **3336**
- 球面三角形外接圓半徑之正切, 若為兩切圓半徑正切之 2 倍, 則此三角形為等邊 ... **3337**
- 一圓與中心 O 之球有同一之半徑之圓弧 AP 與球面三角形二邊中之大者相等, 依同方向取弧 AQ, 令與小邊等, 將 AP 之正弦 PM 分於 E, 令 $\frac{EM}{PM}$ 與二邊夾角之真數餘弦等, 平行於在 Q 之圓之切線引 EZ, 則此球面三角形之一邊等於弧 QPZ ... **3338**

- 過球面三角形 ABC 內之任意點 P, 由各角頂 A, B, C 引大圓弧 命其交對邊於 a, b, c, 則 $\frac{\sin Pa \cos PA}{\sin Aa} + \frac{\sin Pb \cos PB}{\sin Bb} + \frac{\sin Pc \cos PC}{\sin Cc} = 1 \dots \dots \dots 3339$
- 設 A 及 B 為地球上赤道同傍之二地, A 距赤道較 B 更遠, 自 B 至 A 之方角, 較與 B 在同緯度之他任意地更正東, 然則自 B 至 A 之方角如何 $\dots \dots \dots 3340$
- 試由 3188 題中所設之結果, 說明正十二面體之成立 $\dots \dots \dots 3341$
- 設 A, B 為球面上之二定點, P 為此面上之任意點, a 及 b 為已知之常數, 則在 AB 或 AB 之延弧上, 恆可求得一點 S, 令 $a \cos AP + b \cos BP = s \cos SP$ 但 s 為常數 $\dots \dots \dots 3342$
- 設 A, B, C, \dots 為球面上之若干定點, a, b, c, \dots 為若干已知常數 又 P 為如 $a \cos AP + b \cos BP + c \cos CP + \dots = k$ 之球面上之一點, 則 P 之軌跡為圓, 但 k 為常數 $\dots \dots \dots 3343$

第十三

球面三角形解法之應用

I. 直角三角形

- 知 $a = 37^\circ 48' 12''$, $b = 50^\circ 44' 16''$, $C = 90^\circ$, 求 c $\dots \dots \dots 3344$
- 知 $A = 55^\circ 32' 45''$, $C = 90^\circ$, $c = 98^\circ 14' 24''$, 求 a $\dots \dots \dots 3345$
- 知 $A = 46^\circ 15' 25''$, $C = 90^\circ$, $a = 42^\circ 18' 45''$, 求 c $\dots \dots \dots 3346$
- 知 $c = 61^\circ 4' 56''$, $a = 40^\circ 31' 20''$, $C = 90^\circ$, 求 b, A, B $\dots \dots \dots 3347$
- 知 $A = 36^\circ$, $B = 60^\circ$, $A = 90^\circ$, 求 a, b, c $\dots \dots \dots 3348$
- 知 $c = 90^\circ$, $a = 138^\circ 4'$, $b = 109^\circ 41'$, 求 A, B, C 3349
- 知 $c = 90^\circ$, $A = 131^\circ 30'$, $B = 120^\circ 32'$, 求 C, a, b $\dots \dots \dots 3350$

II. 斜三角形

- 知 $a = 70^\circ 14' 20''$, $b = 49^\circ 24' 10''$, $c = 38^\circ 46' 10''$, 求

- A, B, C... .. 3351
- 知 $a = 68^{\circ} 20' 25''$, $b = 52^{\circ} 18' 15''$, $C = 117^{\circ} 12' 20''$, 求
A, B, c... .. 3352
- 知 $a = 50^{\circ} 45' 20''$, $b = 69^{\circ} 12' 40''$, $A = 44^{\circ} 22' 10''$, 求
B, C, c... .. 3353
- 知 $A = 129^{\circ} 5' 20''$, $B = 142^{\circ} 12' 42''$, $C = 105^{\circ} 8' 10''$, 求
 a, b, c 3354

