經濟叢書社叢書之二

財政商業高等利息計算法

商務印書館發行

經濟叢書社叢書之二

財政商業高等利息計算法

張國鈞於
財政商業專科学校譯

商務印書館發行

凡　例

一本書專論銀行存款之計息法,公債票公司債票之算定價格法,計算收益法,創業計劃之計算利益法,有獎債券及其他特種債票之還本法等。說理詳盡。引例博賅凡具中學之數學程度者。皆能習之。商業學校可採爲課本。銀行公司財政官廳以及從事工商業,買賣公債股票有獎儲蓄者。尤視爲獲利之寶筏。投資之南針。

一本書卷末附有日息表,年息表,複利表,現價表,年金終價表,年金現價表,年賦金表等。以便習者查考。不必另求他本。

一本書練習問題。另印解法。以便習者正誤之用。

一本書之編纂。以澤田吾一之本爲主。而次序另加訂正。

一習者研習本書既畢。欲求深造。可參考歐美日本諸作。茲爲介紹如下。

澤田吾一著高等利息算(日本東京)

原口亮平著高等利息算(日本東京)

E. W. Skinner—Mathematical Theory of Investment (New York)

R. Todhunter—Institute of Actuaries Textbook, Part 1. Interest

C. E. Sprague—Accountancy of Investment (New York)

(以上計算法)

矢野恆太著金利精覽(日本東京)

姚生范漢譯金利精覽(日本東京)

W. H. Oakes—Tables of Compound Interest (London)

M. Rollins—Present Worth Tables

S. Spitzer—Tabellen für die Zinses-Zinsen-und Renten-Rechnung (Wien)

W. M. Werker—Die Zusammengesetzte Zinsen-und Zeitrenten-oder Annuitätenrechnung (Berlin u. Utrecht).

(以上利息表)

J. Deghuée—Tables of Bond Values (New York)

M. Rollins—Tables showing the Net Returns from Bonds and other Redeemable Securities

(以上債票價值表)

蓋氏對數表(上海商務印書館)

Chamber's Mathematical Tables

(以上對數表)

一本書數字太多。庸有錯誤。再版訂正

注意　書中 γ 係 r 之誤

財政商業高等利息計算法

目錄

財政商業高等利息計算法

第一編　單利法及複利法

第一章　單利法

第一節　求利息法

運用本金所得子息。謂之利息。利息增殖。若按期間為比例。所生利息不再生息者。謂之單利法。其計算法以本金與利率與期間三者相乘之積為利息。

單利法之應用。其期間不致過長。若問題中之期間為年數。則利率應為週年幾分幾釐。計算利息之公式如下。

$$利息=本金\times年利率\times年數$$

反之。若問題中之期間為月數。則應將週年利率以十二月分之化為月利率。公式作

$$利息=本金\times\frac{年利率}{12}\times月數$$

又有求若干日之利息者。則年利率須化為日利率。計算方法有以一年為三百六十五日者。有以一年為三百六十日者。不能一致。其公式如下。

$$利息=本金\times\frac{年利率}{365}\times日數$$

$$或\quad 利息=本金\times\frac{年利率}{360}\times日數$$

本書末尾附表中。載有年利率換算日利率之表。應用

時可資參考也。

（例題1）本金三十五萬元。按年利率六釐。問八十五日之利息若干。

$$利息 = 350000 \times \frac{0.06 \times 85}{365}$$

$$= 4890.4109$$

答四千八百九十元四角一分。

（例題2）存戶某甲。在銀行立有往來存款帳。帳上各存款餘額與存款日數如下。按週息二釐五毫計算其利息。

計 1000元存十日　1500元存十五日　1800元存三日
2300元存九日　2500元存五日　2000元存八日
1600元存六日　1400元存四日　600元存十日
300元存五日　100元存十五日

（解）先以各餘額與日數相乘。得各積數。積數相加。以週息二釐五毫之日利率乘之。卽得利息。

各積數相加如下。

$$10000+22500+5400+20700+12500+16000+9600+5600+6000+1500+1500=111300$$

查附表中年利率換算日利率表。得 $0.025 \div 360 = 0.00006944$。各銀行大抵用 0.00007。以便計算。玆從銀行之例。

$$111300 \times 0.00007 = \underset{元}{7}.791$$

答七元七角九分。

第二節　求本利合計法

就前節公式計算利息。再加本金。即得本利之合計數。否則若按下列公式計算亦可。（按期間爲月數。則利率應化爲月率。期間爲日數。利率應化爲日率。以下統稱期間利率。不分年月日。學者可按題意分別類推。）

本利合計＝本金×（1＋利率）×期間

（注意）各銀行之定期存款。適用前二種計算法。往來存款在一期以內。亦適用之。

第三節　求本金法

已知利息期間利率欲求本金者。其公式如下。

本金＝利息÷（利率×期間）

或　本金＝本利合計÷（1＋利率×期間）

第四節　求利率法

求利率之公式如下。

利率＝利息÷（本金×期間）

第五節　求期間法

求期間之公式如下。

期間＝利息÷（本金×利率）

第二章　單利求利息之簡法

第一節　除三遞退法

(The third, tenth and tenth rule)

凡每年以三百六十五日計息者。適用此法。法以本金與年利率與日數三者相乘之積。二倍之。將小數點移前三位。而與此數之三分之一,三十分之一,(就三分之一數將小數點移前一位。即係三十分之一數。)及三百分之一(就前數將小數點再移前一位。即係三百分之一數。)諸數相加。然其結果較之眞値。約大萬分之一。故再減去萬分之一數。(就前得數將小數點移前四位。即其萬分之一數。)即得利息之數矣。算式如下。

先就$\frac{1}{365}$變形

$$\frac{1}{365}=\frac{2}{730}=2\times\left\{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{300}\right\}\times\frac{10}{10001}$$

$$=2\times\left\{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{300}\right\}\times\frac{1}{1000}\times\left\{1-\frac{1}{10000}\right\}$$

$$\times 1.\dot{0}000000\dot{1}$$

故 $$\frac{本金\times年利率\times日數}{365}$$

$$=本金\times年利率\times日數\times 2\times\frac{1}{1000}\times\left\{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{30}+\frac{1}{300}\right\}$$

$$\times\left\{1-\frac{1}{10000}\right\}\times 1.\dot{0}000000\dot{1}$$

(例題1)本金三十五萬元。按年利率六釐。每年作三百六十五日計。試算八十五日之利息。

35 0000

× 85 ………………日數

175

280

2975 0000

× 0.06……………年利率

1785 000

× 2 ………………二倍之

3570.000

1190 ……………上數之三分之一

119.……………上數退後一位

+ 11.9……………上數再退後一位

4890.900 ………以上四數之合計

− .48909 ……上數退後四位

4890.41091 ……答數

答四千八百九十元四角一分。

按此法所得之答數。較之眞值。約小一億分之一。遇十萬元之利息。約小一釐。所差甚微。無關出入。普通應用。已可採用。若再求精密之值。可就前答數再加退後八位之數。即得最精之值。較之眞值僅小一京分之一矣。

試就上法演算。得

$$\begin{array}{r} 4890.41091 \\ \\ 489041091 \\ \hline 4890.4109589041091 \end{array}$$

按前章例題 1 算法證之

$$\frac{350000\times0.06\times85}{365}=\frac{1785000}{365}=4890\ \dot{4}1095890\dot{4}1095890\dot{4}$$

答數之小數點後第十三位。差4890……等數。欲求符合。可再遞加退後十六位之數。及所得答數退後三十二位之數等。此屬學理。所差太微。固無補於實際也。

第二節 一釐法(One per cent method)

此亦單利計息之一簡法。凡一年以三百六十日計息者。適用之。法取各種利率按利率一釐應得之日數。製成一表。以爲標準。計算時以問題中日數分析爲數個數目。內中一個必須與表中該利率一釐應得之日數相同。此爲標準數。其餘諸數目爲標準數之倍數或分數。將本金小數點移前二位。卽得標準日數之利息。其餘日數之利息。自可按比例計算利息。諸利息數目相加。卽利息之總數矣。

若問題中日數較少於表中利率一釐應得之日數者。可由標準日數減去標準日數之若干分數。以適應於問題中之日數。其利息仍就本金縮小百倍再減此數之若干分數。卽得利息數矣。

利率一釐應得之日數表

年利率	利率一釐應得之日數
3%	120
4%	90
$4\frac{1}{2}$%	80
5%	72
6%	60
8%	45
9%	40
10%	36
12%	30
15%	24
18%	20

（例題2）按年利率四釐。求五萬四千七百五十元存一百十四日之利息。

（甲法）先分析114日。得$114=90+15+9$。

90日　　547.50…本金小數點移前二位。即九十日之利息數。

$+15$日$=\frac{1}{6}\times 90$　　$+91.25$…十五日之利息數。

$+\ 9$日$=\frac{1}{10}\times 90$　　$+54.75$…九日之利息數。

114日　　693.50…一百十四日之總利息數。

又（乙法）$114=90+30-6$

$$\begin{array}{llll}
 & 90\text{日} & 547.50 & \cdots\text{本金小數點移前二位。即九十日之利息數。} \\
+ & 30\text{日}=\frac{1}{3}\times 90 & +182.50 & \cdots\text{三十日之利息數} \\
- & 6\text{日}=\frac{1}{5}\times 30 & -\ 36.50 & \cdots\text{減去六日之利息數。} \\
\hline
 & 114\text{日} & 693.50 & \cdots\text{一百十四日之總利息數。}
\end{array}$$

答六百九十三元五角。

第三章　複利法

第一節　求本利合計法

複利法者。以一年或半年一月或數月爲一期。每期所生利息。次期作本。加入本金。再生利息。俗所謂利上加利者是也。此法應用最廣。凡長期之存款或放款。皆適用之。其計算法以第一期末之本利合計。作爲第二期初之本金。第二期末之本利合計。又作爲第三期初之本金。第三期末之本利合計。又作爲第四期初之本金。如此遞推。均按等比級數計算。故增殖較單利法爲速。

凡論算學。須先立公式。演算公式。以字母代數。較便計算。本書亦從此例。以下各公式。試以 r 代年利率。以 P 代本金。以 M 代本利合計。以 n 代期數。以 R 代利息。

第一期末之本利合計。當作$p+pr$。即$p(1+r)$。

第二期末之本利合計爲第一期末之本利合計。再乘$(1+r)$。故當作$p(1+r)(1+r)$即$p(1+r)^2$。

第三期末之本利合計。又爲第二期末之本利合計再乘$(1+r)$。故當作$p(1+r)^3$。

第四期末之本利合計。當作$p(1+r)^4$。

因此第n期末之本利合計。當作$p(1+r)^n$。

故求n期末本利合計。公式如下。

$$M=P(1+r)^n$$

本書末尾所附複利表。以本金1爲本位。按各種利率。計算自一期以至三十期之本利合計。卽公式$(1+r)^n$之數。製爲一表。凡遇計算複利時。照所求之利率。向表中尋本利合計數。以本金乘之即得。故應用此表。可省計算之勞。

某期末本利合計數。又曰終價。故複利表又曰終價表。

凡既知本利合計。欲單求利息者。可由本利合計減本金。卽得利息。其公式作

$$R=M-P$$

（注意）本書各問題中。不書明以一個月半年或一年爲一期者。統作一年一期解釋之。

（例題1）設有二萬五千元。按複利週年六釐五毫計算。期數爲十八年。問本利合計若干。

（解）先檢複利表六釐五毫欄內。期數十八之數爲

3.10665438。此即$(1.065)^{18}$之值。

故　　本利合計$=25000\times 3.10665438$

$$=77666.3595\text{元}$$

答七萬七千六百六十六元三角六分。

（例題2）本金八千元。依半年爲一期之複利法。按週年五釐計算。問十二年末本利合計若干。

（解）週年五釐。每半年爲一期。則半年利率爲二釐五毫。而十二年共得二十四期。故檢複利表內二釐五毫欄二十四期之數。得1.80872595。此爲$(1.025)^{24}$之值。

$$\text{本利合計}=8000\times(1.025)^{24}$$

$$=8000\times 1.80872595$$

$$=14469.8076$$

答一萬四千四百六十九元八角一分。

（例題3）本金一元。按五釐利率。求四十二期之本利合計。若複利表中無四十二期之數。此題可按下法。將四十二期分爲三十期及十二期兩數。以此二者之本利合計相乘。所得積數。即四十二期之本利合計。

（解）$(1.05)^{42}=(1.05)^{30}\times(1.05)^{12}$

查複利表得

$$M=4.32194238\times 1.79585633$$

$$=7.76158756$$

答七元七角六分。

（例題4）前題求本利合計法。亦可由對數計算之。

（解） $M=(1.05)^{42}$

$\log M=42\times\log 1.05$

查對數表。得

$\log 1.05=0.0211892991$

$42\times\log 1.05=0.889950562$

再查此數之眞數。得 7.761587。

答七元七角六分。

（注意）各銀行長期之定期存款。整存整付存款。若按複利計算。適用此法。

第二節　求現價法

前節論本金若干。至若干期後本利合計若干者。謂之求終價法。今反其道而行之。例如已知若干期後本利合計若干。而欲求其原有之本金若干者。謂之求現價法。設以M代本利合計之金額。以 n 代期數。以 γ 代利率。以P代現價。其計算現價之公式如下。

$$P=\frac{M}{(1+\gamma)^n}$$

先由複利表求 $(1+\gamma)^n$ 數。以此數除到期本利合計數。卽得現價。然爲便利起見。卽以本金 1 爲本位。按各種利率及期數。製 $\frac{1}{(1+\gamma)^n}$ 之表。謂之現價表。附於本書末尾。學者於推算現價時。可逕取現價表中數目乘本利合計（卽終價）。卽得現價矣。

（例題5）按複利率週年五釐五毫計算。八年後可得三萬元。問其現價若干。

（解）先於現價表上$5\frac{1}{2}\%$欄。求期數8之數。得0.65159887。即$\frac{1}{(1.0055)^8}$之值。以三萬乘之。即得

$$現價=30000\times0.65159887$$

$$=\underset{元}{19547.9661}$$

答一萬九千五百四十七元九角七分。

（例題6）年利率六釐。按半年爲一期之複利法。十五年後得本利合計七百元。問現在本金若干元。

（解）週年利率六釐。即半年利率三釐。而十五年即三十期。故於現價表查三釐欄。求期數三十之數。得0.41199。則

$$現價=700\times0.41199$$

$$=\underset{元}{288.393}$$

答二百八十八元三角九分。

（例題7）本利合計一元。按四釐七毫五絲利率。求五十三期之現價。

（解）此期數爲現價表所不載。可將五十三期分爲三十期之現價及二十三期之現價。二者相乘之積。即五十三期之現價矣。

$$\frac{1}{(1.0475)^{53}}=\frac{1}{(1.0475)^{30}}\times\frac{1}{(1.0475)^{23}}$$

查現價表$\frac{1}{(1.0475)^{30}}=0.24853$

$$\frac{1}{(1.0475)^{23}}=0.34392$$

$$0.24853\times0.34392=0.085474$$

答0.085474。

（例題8）前題所求現價。其期數大於表中所載。亦可由對數表計算之。

（解）$\log 1.0475=0.0201540316$

$53\times\log 1.0475=1.068163675$

$$\log\frac{1}{(1.0475)^{53}}=8.931836325-10$$

再查此數之眞數。得0.08547445。與前題答數相同。

第三節　求期數法

既知本金本利合計及利率三項。而求期數者。無論用複利表或用現價表均可。所得答數亦同。惟遇期數中有不滿一期之端數時。則答數稍差。試以例題說明之。

（例題9）依複利法。年利率七釐。問經過幾年後。本利合計可爲本金之二倍。

第一解法（用複利表數）

（解）查複利表七釐欄。十期之本利合計爲本金1之1.9672倍。十一期之本利合計爲本金1之2.1049倍。故知欲求正合二倍。當在十期有餘。按下法計算。可知不滿一期之端數。

$$2-1.9672=0.0328$$

$$2.1049-1.9672=0.1377$$

$$0.1377:0.0328=\underset{\text{月}}{12}:\underset{\text{月}}{x}$$

$$x=\underset{\text{月}}{2.8}$$

答二月餘。

前法僅知在十年二月有餘。得本金之二倍。若用下法。并可推算十年後過若干日。正得本金之二倍數。

$$2-1.9672=0.0328$$

$$2.1049-1.9672=0.1377$$

$$0.1377:0.0328=\underset{\text{日}}{365}:\underset{\text{日}}{x}$$

$$x=\frac{0.0328\times365}{0.1377}=87\text{日弱}$$

答十年又八十七日。

第二解法（用現價表數）

（解）用現價表時。應以現價爲本金。故本利合計爲1。求現價爲0.5。卽合題旨。今查現價表七釐欄0.5之數。在十期與十一期之間。用比例式試以y爲未知數。推求之。

$$0.50835-0.5=0.00835$$

$$0.50835-0.47509=0.03326$$

$$0.03326:0.00835=365:y$$

$$y=\frac{0.00835\times365}{0.03326}=91.6$$

答十年又九十二日。

上法答數。較第一法答數多五日。若以第二法之答數

乘$\frac{0.47509}{0.5}$。則亦得八十七日。答數當以八十七日為準。茲將第一解法及第二解法。用公式說明如下。

第一解法（用複利表數）

試以M為本利合計。

$$M_1 = 1.9672$$

$$M = 2.0000$$

$$M_2 = 2.1049$$

比例式為 $M_2 - M_1 : M - M_1 = 365 : x \qquad (1)$

$$x = \frac{365(M - M_1)}{M_2 - M_1} \qquad (2)$$

因 $M_2 = M_1 \times (1 + \gamma) =$

故 $M_2 - M_1 = M_1(1 + \gamma) - M_1 = M_1\gamma$

按前比例式得

$$x = \frac{365(M - M_1)}{M_1\gamma}$$

故 $M - M_1 = M_1\gamma \frac{x}{365}$

此答數在不滿一期之端數。係從單利法算得者。

第二解法（用現價表數）

試以P為現價。

$$P_1 = 0.50835$$

$$P = 0.50000$$

$$P_2 = 0.47509$$

比例式為$P_1 - P_2 : P_1 - P = 365 : y \qquad (3)$

$$y=\frac{365(P_1-P)}{P_1-P_2} \tag{4}$$

(2) 式之 x 與 (4) 之 y 相差之點爲 y 大於 x。

卽 $\frac{P_1-P}{P_1-P_2}$ 大於 $\frac{M-M_1}{M_2-M_1}$

何故

因 $$\frac{M-M_1}{M_2-M_1}=\frac{\frac{1}{P}-\frac{1}{P_1}}{\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_1}}=\frac{P_1-P}{PP_1}\div\frac{P_1-P_2}{P_1P_2}=\frac{P_1P_2(P_1-P)}{PP_1(P_1-P_2)}$$

$$=\frac{P_1-P}{P_1-P_2}\times\frac{P_2}{P} \tag{5}$$

故 $$x=y\times\frac{P_2}{P} \tag{6}$$

$$=\frac{91.6\times0.47509}{0.5}$$

$$=87$$

按 $\frac{P_2}{P}$ 之數大致近於1。故在普通問題。祇求大概者。卽由現價表推算不滿一期之端數後。不必定以 $\frac{P_2}{P}$ 乘之。以省手續。

凡遇求期數之問題。若利率爲複利表或現價表所不載者。可由對數推算期數。因 $M=P(1+\gamma)^n$ 故得公式如下。

$$n=\frac{\log M-\log P}{\log(1+\gamma)}$$

（例題10）按複利法。年利率五釐三毫七絲。本金三百元。問幾年後可得本利合計一千四百元。

（解）$1400=300\times(1.0537)^x$

$$x=\frac{\log 1400-\log 300}{\log 1.0537}=\frac{3.1461280-2.4771213}{0.0227170}$$

$$=29.4$$　答二十九年餘。

第四節　求利率法

欲求利率。法由對數表求$\frac{M}{P}$之 n 乘根。再去 1。卽得利率之答數。公式應作

$$\gamma=\sqrt[n]{\frac{M}{P}}-1$$

（例題11）本金七百元。四十年間本利合計爲一萬五千元。問按複利法年利率幾何。

（解）$15000=700(1+\gamma)^{40}$

$$\log(1+\gamma)=\frac{\log 15000-\log 700}{40}=\frac{4.1760913-2.8450980}{40}$$

$$=0.03327483$$

查對數表得此數之眞數爲1.079630。

答七釐九毫六絲三忽。

練習問題

（1）本金四千元。年利六釐。問十年間之本金複利合計若干。　答7163.39。

（2）本金一千八百元。年利七釐。十六年期。問複利若干。　答3513.89。

（3）本金三千元。按半年一期之複利法。年利五釐。問十一年得幾何。　答5164.71。

（4）按複利法。年利四釐五毫。問二十五年後二千元之現價若干。　答665.46。

(5) 按複利法。年利六釐。問十八年後一千五百元之現價幾何。　答525.52。

(6) 按年利七釐之複利法存款。問至幾年幾月後。本利合計爲本金之三倍。　答十六年三個月(弱)。

(7) 按年利五釐之複利法。本金二千四百元。問至幾年幾月後成七千元。　答二十一年十一個月(餘)。

(8) 年利六釐。按半年爲一期之複利法。問至幾年幾月後。本利合計爲本金之二倍。

答十一年九個月(弱)。

第二編 年金法

第一章 等比級數

研究年金計算原理。不外數學中之等比級數。故等比級數列爲一章。俾初學者有所循徑。

有數若干。其大小順次。有一定之階級者。謂之級數。等比級數者。相隣兩項之比相等之級數也。譬如第二項爲第一項之二倍。第三項又爲第二項之二倍。第四項又爲第三項之二倍。於是二爲公比。而此諸項爲等比級數。又曰幾何級數。

例如3, 6, 12, 24爲等比級數。其公比爲2。又例如8, 2, 0.5, 0.125 之公比爲 $\frac{1}{4}$。即 0.25 之等比級數也。

設以 A 爲等比級數之初項。以 a 爲公比。則第二項爲 Aa。第三項爲 Aa^2。第四項爲 Aa^3 …………。第 n 項爲 Aa^{n-1}。求諸項之和。公式如下。

試以 S 代諸項之和。

$$S=A+Aa+Aa^2+\cdots\cdots+Aa^{n-1} \qquad (第一式)$$

以 a 乘之。得

$$aS=Aa+Aa^2+Aa^3+\cdots\cdots+Aa^n \qquad (第二式)$$

自第二式減第一式得

$$aS-S=Aa^n-A$$

故　$S=A\dfrac{a^n-1}{a-1}$

若 a 小於1，則如下式。

$$S=A\frac{1-a^n}{1-a}$$

若求末項。其公式如下。

$$Aa^{n-1}=A\times a^{n-1}$$

若求首項。其公式如下。

$$A=\frac{Aa^{n-1}}{a^{n-1}}$$

若求公比。其公式如下。

$$a=\sqrt[n-1]{\frac{Aa^{n-1}}{A}}$$

第二章　年金之種類

一次存款而分期提用。或分期存款而一次提用。每期存支之額相等。而至本利皆盡爲止者。曰年金法。其每期存支之額。曰年金。其分期存入之額。盡屬本金。若係分期提取者。則每期年金額內。混合本利。初期年金。內中本少息多。以後期數愈多。則提本愈多。利隨本減。故年金額內。本漸多而息漸少矣。年金有確實年金及生命年金之二種。

(甲) 確實年金者。於每年某預定之各期。授受一定之金額。謂之確實年金。確實年金可分四種。

(1) 定期年金（或曰有限年金）　約定支付年金以若干年爲限者。謂之定期年金。

(2) 永續年金　約定永遠支付年金。幷無停付年限者。謂之永續年金。

(3) 延期年金　約定前幾年不付年金、幾年後起支付年金以若干年爲限者。謂之延期年金。

(4) 延期永續年金　約定前幾年不付年金。幾年後起永遠支付年金幷無停付年限者。謂之延期永續年金

(注意) 本文單云年金。係指普通定期年金而言。

(乙) 生命年金者。以關係生命之事項發生爲條件。起付年金。或停付年金者。謂之生命年金。生命年金屬於保險學範圍。本文從略。本文所謂年金。專論四種確實年金。

第三章　定期年金

第一節　求終價法

每期積存同一金額。至若干期後。其本利合計數曰年金之終價。定期年金約定每年爲一期。或若干月日爲一期。每期授受年金之間隔皆相同。而就年金之授受時期與本利合計算定時期之關係。可分爲二種。

(甲) 期末付年金之終價　定期年金在授受最後之年金時。計算本利合計者。曰期末付年金之終價。卽在每

期期末時授受年金。且於期末時計算本利合計之謂也。

(乙) 期首付年金之終價　定期年金自授受最後之年金時以後。經過一期時。計算本利者。曰期首付年金之終價。即在每期期首時。授受年金。而於期末時計算本利合計之謂也。

(甲) 設以 A 爲年金。n 爲積存年數。γ 爲年利率。M 爲終價。計算期末付年金終價之原理如下。

第一年之年金自第二年起生利息。其本利合計爲 $A(1+\gamma)^{n-1}$。

第二年之年金自第三年起生利息。其本利合計爲 $A(1+\gamma)^{n-2}$。

以下準此類推。

故期末付年金之本利合計如下。

$$M = A(1+\gamma)^{n-1} + A(1+\gamma)^{n-2} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots + A(1+\gamma)^{2} + A(1+\gamma) + A$$

$$= A\{1 + (1+\gamma) + (1+\gamma)^{2} + \cdots\cdots + (1+\gamma)^{n-1}\}$$

按等比級數之公式。得期末付年金終價之公式如下。

$$M = A\frac{(1+\gamma)^{n}-1}{(1+\gamma)-1}$$

即　$$M = A\frac{(1+\gamma)^{n}-1}{\gamma}$$

(例題1) 每年年底存二百元。年利率爲七釐。問第五年年終。本利合計若干。

(解) 第一年末之二百元。至第五年終。得本利合計 $200 \times (1.07)^4$。

第二年末之二百元。至第五年終。得本利合計 $200 \times (1.07)^3$。

第三年末之二百元。至第五年終。得本利合計 $200 \times (1.07)^2$。

第四年末之二百元。至第五年終。得本利合計 200×1.07。

第五年末之二百元。仍爲200元。

以上各本利合計相加。得總本利合計1150.15元。

若按公式。得

$$總本利合計 = 200 \times \frac{(1.07)^5 - 1}{0.07} = 1150.15$$

答一千一百五十元一角五分

(乙) 期首付年金較期末付年金多一期。第一年之年金自第一年起卽生利息。本利合計爲 $A(1+\gamma)^n$。

第二年之年金自第二年起卽生利息。其本利合計爲 $A(1+\gamma)^{n-1}$

以下類推。故

$$M = A(1+\gamma)^n + A(1+\gamma)^{n-1} \cdots\cdots + A(1+\gamma)^2 + A(1+\gamma)$$

因得公式 $M = A\frac{(1+\gamma)^{n+1} - 1}{\gamma} - A$

卽期末付年金終價以 $(1+\gamma)$ 乘之所得之結果。

(例題2) 每年年初存二百元。年利率爲七釐。問第

年年終本利合計若干。

(解)　第一年初之二百元。至第五年終。得本利合計 $200 \times (1.07)^5$。

第二年初之二百元。至第五年終。得本利合計 $200 \times (1.07)^4$。

第三年初之二百元。至第五年終。得本利合計 $200 \times (1.07)^3$。

第四年初之二百元。至第五年終。得本利合計 $200 \times (1.07)^2$。

第五年初之二百元。至第五年終。得本利合計 $200 \times (1.07)$。

以上各本利合計相加。得總本利合計1230.66元。

若按公式。得

$$總本利合計 = 200 \times \frac{(1.07)^6 - 1}{0.07} - 200 = 1230.66$$

答一千二百三十元六角六分

(注意) 本書單稱年金之終價或本利合計。而不附期首付期末付字樣者。皆指期末付而言。

第二節　求現價法

定期年金至期滿後之本利合計曰年金終價。若在定期之初。欲求今後若干年期年金之現在價值。曰年金現價。

計算年金之現價。視最初年金之授受時間與現價計算時期之關係。可分爲二種。

(甲) 自現價計算時至第一回年金授受時。相隔滿一期者。謂之期末付年金現價。

(乙) 在現價計算時授受第一回年金者。謂之期首付年金之現價。

(甲) 設以A為年金。n為今後繼續支付年金之年數。γ為年利率。P為現價。計算期末付年金現價法如下。

一年後應付年金A之現價為 $\frac{A}{1+\gamma}$。

二年後應付年金A之現價為 $\frac{A}{(1+\gamma)^2}$

三年後應付年金A之現價為 $\frac{A}{(1+\gamma)^3}$

其餘準此。故

$$P=\frac{A}{1+\gamma}+\frac{A}{(1+\gamma)^2}+\frac{A}{(1+\gamma)^3}+\cdots+\frac{A}{(1+\gamma)^n}$$

等於以 $(1+\gamma)^n$ 除前節之級數。故計算期末付年金現價之公式如下。

$$P=A\frac{(1+\gamma)^n-1}{\gamma(1+\gamma)^n}=\frac{A}{\gamma}\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^n}\right\}$$

以 υ 代 $\frac{1}{1+\gamma}$ 則 $P=\frac{A(1-\upsilon^n)}{\gamma}$。

υ^n 即現價表中所記之數。

(例題3) 今欲於每年年終。得三千六百元之年金。以二十年為限。與銀行訂明。每年利息以一分五釐計算。問應存若干本金。

按公式得 $\dfrac{3600\times\left(1-\dfrac{1}{(1.15)^{20}}\right)}{0.15}$

$$=\frac{3600\times(1-0.06110028)}{0.15}$$

$$=22533.5933$$

答二萬二千五百三十三元五角九分。

(乙) 計算期首付年金之現價。各期年金現價如下。

一年後應付年金A之現價爲 $\dfrac{A}{1+\gamma}$。

二年後應付年金A之現價爲 $\dfrac{A}{(1+\gamma)^2}$。

其餘類推。故

$$P=A+\frac{A}{1+\gamma}+\frac{A}{(1+\gamma)^2}+\cdots\cdots+\frac{A}{(1+\gamma)^{n-1}}$$

$$=A+\frac{A}{\gamma}\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^{n-1}}\right\}$$

以 υ 代 $\dfrac{1}{1+\gamma}$。得 $P=A+\dfrac{A}{\gamma}(1-\upsilon^{n-1})$。

卽期末付年金現價乘 $(1+\gamma)$ 所得之結果。

(例題4) 欲於每年年初得三千六百元之年金。以二十年爲期。年息一分五釐。問應存若干本金。

按公式得 $3600+\dfrac{3600\times\{1-(1.15)^{19}\}}{0.15}$

$$=3600+\frac{3600\times(1-0.07017896)}{0.15}$$

$$=25915.71$$

答二萬五千九百十五元七角一分。

（注意）本書單稱年金現價。而不附期首付期末付字樣者。皆指期末付年金現價而言。

第三節　求年金額法

凡已知年金現價或年金終價。求每期年金額者。其公式如下。

（甲）求每期期末付年金額。

（1）已知期末付年金終價之公式。（以M代期末付年金現價。A代年金額。）

$$A=\frac{M\gamma}{(1+\gamma)^{n}-1}$$

（2）已知期末付年金現價之公式。（以P代期末付年金現價。）

$$A=\frac{P\gamma(1+\gamma)^{n}}{(1+\gamma)^{n}-1}$$

（乙）求每期期首付年金額。

（1）已知期首付年金終價之公式。（以M代期末付年金終價。

$$A=\frac{M\gamma}{(1+\gamma)^{n+1}-(1+\gamma)}$$

（2）已知期首付年金現價之公式。（以P代期首付年金現價。）

$$A=\frac{P\gamma(1+\gamma)^{n}}{(1+\gamma)^{n+1}-(1+\gamma)}$$

第四節　求年金期數法

已知年金終價每期年金額及利率。欲求期數之公式如下。

(甲) 求期末付年金之期數。

$$n=\frac{\log\left(\frac{M\gamma}{A}+1\right)}{\log \cancel{\gamma}\ 1+r}$$

(乙) 求期首付年金之期數。

$$n=\frac{\log\left(\frac{M\gamma}{A(1+\gamma)}+1\right)}{\log \gamma}$$

(注意一) 本章各公式。皆以一年爲一期。若求半年爲一期者。算式相同。惟 A 應改爲每半年積存之金額。γ 改爲半年之利率。n 改爲半年一期之期數。以下第四,五,六章各公式。均倣此例。

(注意二) 各銀行之零存整付存款。適用本章期首付年金求終價法及求年金額法。整存零付存款適用本章期末付年金求現價法及求年金額法。惟 A, γ, n, 等符號。均改爲每月一期之數。

第四章　延期年金

第一節　求現價法

定期年金而約定於幾年前不付年金。自幾年以後。始付年金。以若干年爲限者。謂之延期年金。

(甲) 設以每年應得年金爲A。約定自m年以後開始授受年金。故在m年之次年。(卽第m+1年。)取第一回之年金。以後每年期末取年金一回。至n年爲止。則此項年金之現價公式如下。

$$P=\frac{A}{(1+\gamma)^{m+1}}+\frac{A}{(1+\gamma)^{m+2}}+\cdots\cdots+\frac{A}{(1+\gamma)^{m+n}}$$

$$=\frac{A\{(1+\gamma)^{n}-1\}}{\gamma(1+\gamma)^{m+n}}=\frac{A}{\gamma}\left\{\frac{1}{(1+\gamma)^{m}}-\frac{1}{(1+\gamma)^{m+n}}\right\}$$

(按此係期末付延期年金。m年以內。不取年金。自其次年終(卽滿一年終)。爲計算第一回年金之時期。故公式中當作延期m+1年。)

前式係期末付延期年金之現價。若係期首付延期m+1年。自m+2年年初。付第一回年金。以後續付n年爲限之年金現價。亦適用此公式。

(例題1) 預定初五年不領年金。自第六年起。每半年末領用年金二千元。以五年爲限。按年利一分二釐。半年複利。問最初應存若干。

$$\frac{2000}{0.06}\left\{\frac{1}{(1.06)^{10}}-\frac{1}{(1.06)^{20}}\right\}$$

查現價表得

$$\frac{1}{(1.06)^{10}}=0.55839478$$

$$\frac{1}{(1.06)^{20}}=0.31180473$$

$$\frac{2000}{0.06}\times 0.24659005=8219.668$$

答八千二百十九元六角七分。

（乙）期首付延期m年。m年以後。續付n年之年金現價。其公式如下。

$$P=\frac{A}{(1+\gamma)^{m}}+\frac{A}{(1+\gamma)^{m+1}}+\frac{A}{(1+\gamma)^{m+2}}+\cdots\cdots+\frac{A}{(1+\gamma)^{m+n-1}}$$

$$=\frac{A\{(1+\gamma)^{n}-1\}}{\gamma(1+\gamma)^{m+n-1}}=\frac{A}{\gamma}\left\{\frac{1}{(1+\gamma)^{m-1}}-\frac{1}{(1+\gamma)^{m+n-1}}\right\}$$

（例題2）約定前五年半（即十一期）。不領年金。自第六年下半年起。每半年初領用年金二千元。以五年爲限。按年利率一分二釐。半年複利。問最初應存本金若干。

$$\frac{2000}{0.06}\left\{\frac{1}{(1.06)^{10}}-\frac{1}{(1.06)^{20}}\right\}$$

$$=8219.668$$

答八千二百十九元六角七分。

（按此題與前題。雖有期末付與期首付之分。而第十一期末付與第十二期首付。相差一日。第二十期末付與第二十一期首付。相差亦祇一日。故兩題算法。併無出入。）

（例題3）約定前五年。不領年金。自第六年起。每半年爲一期。期首領年金二千元。以五年爲限。按年利率一分二釐。半年複利。問應存本金若干。

$$\frac{2000}{0.06}\left\{\frac{1}{(1.06)^{9}}-\frac{1}{(1.06)^{20}}\right\}$$

$$=\frac{2000\times 0.28009373}{0.06}$$

$$=9336.457$$

答九千三百三十六元四角五分七釐。

（注意）以上各公式。皆以一年爲一期。若求每半年一期或每月一期者。仍適用之。惟 A, γ, n, 等符號。均改爲半年一期或每月一期之數。

第五章　永續年金

第一節　求現價法

永遠繼續之年金。謂之永續年金。例如每年欲得 A 元之年金。試問現時應存本金若干。即預存若干本金。以後每年可以收入 A 元之利息。永遠繼續。并無年限。計算此項現價。曰永續年金之現價。其公式如下。

（甲）期末付永續年金之現價 $P=\frac{A}{\gamma}$

（乙）求期首付永續年金之現價。祇須以 $(1+\gamma)$ 乘期末付永續年金之現價。即得

$$P=\frac{A(1+\gamma)}{\gamma}\quad 即\ A+\frac{A}{\gamma}$$

（注意一）以上各公式。皆以一年爲一期。若求半年一期或每月一期者。仍適用之。惟 A, γ, n, 等符號。均改爲半年一期或每月一期之數。

(注意二) 各銀行之整存支息存款。若係永遠支息不定還本之年限者。適用本章永續年金之公式。普通定期之整存支息存款。適用單利法之求利息法。

第六章　延期永續年金

第一節　求現價法

約定前幾年不付年金。自某年起。永遠支付之年金。曰延期永續年金。例如預定延期m年。自其翌年(即m+1年)爲始。永遠支付A數之年金。試問現存本金若干。庶至m年。可得本利合計$\frac{A}{\gamma}$。且m+1年以後。能每年收入A元之利息。此種計算法。謂之延期永續年金求現價法。其公式如下。

(甲) 期末付延期永續年金之現價$P=\frac{A}{\gamma(1+\gamma)^{m}}$。

(乙) 期首付延期永續年金之現價$P=\frac{A}{\gamma(1+\gamma)^{m-1}}$。

(注意) 以上各公式。皆以一年爲一期。若求半年一期每月一期者。仍適用之。惟A, γ, n, 等符號。均改爲半年一期或每月一期之數。

第七章　按期儲蓄存款

儲蓄存款有以每一個月每二個月每三個月存款一次。每次存一定之金額。至一年或數年後。提取本利合計者。其計算利息之法。大抵以六個月爲一期。每期複利。一期以

內。從單利計算。自次期始作複利。(按定期年金算法。付款期與計息期一致。此法係期首付款。付款期及計息期不一致。此二者不同之點也。)

第一節 按月存款一次之儲蓄存款

(甲) 求終價法

儲蓄存款約定每月初存一元。六個月後。其本利合計(六個月內從單利法)如下。

$$\left(1+\frac{6\gamma}{12}\right)+\left(1+\frac{5\gamma}{12}\right)+\left(1+\frac{4\gamma}{12}\right)+\left(1+\frac{3\gamma}{12}\right)+$$
$$\left(1+\frac{2\gamma}{12}\right)+\left(1+\frac{\gamma}{12}\right)$$
$$=6+\frac{21\gamma}{12}=6+\frac{7\gamma}{4}$$

以後無論何期。期內之存款至期末時。皆得上式之本利合計數。自次期從複利法生息。故 n 期間之總本利合計(以M代總本利合計數。)如下。

$$M=\left(6+\frac{7\gamma}{4}\right)\left\{\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)^{n-1}+\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+\right.$$
$$\left.\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)+1\right\}$$

以 s 代 $\frac{\gamma}{2}$。得

$$M=\left(6+\frac{7s}{2}\right)\left\{\left(1+s\right)^{n-1}+\left(1+s\right)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\right.$$
$$\left.\left(1+s\right)+1\right\}$$

若期數過多。可由下式計算。較爲便利。(由等比級數之公式。化{　}內之式。)

$$M=\left(6+\frac{7s}{2}\right)\frac{(1+s)^n-1}{s}$$

(例題1) 每月存一元。年利率四釐二毫。問三年後本利合計若干。

(解)
$$M=\left(6+\frac{7s}{2}\right)\frac{(1+s)^6-1}{s}$$
$$=6.0735\times6.32396=38.4086$$

答三十八元四角一分。

(乙) 求每次存款額法

既知終價。欲求每次存款額者。適用下法。例如欲求n期後得本利合計百元。則每月應存之數。(以A代每次存款額A)公式如下。

$$A=\frac{100}{M}=\frac{100s}{\left(6+\frac{7s}{2}\right)\left\{(1+s)^n-1\right\}}$$

(例題2) 按前例題。欲三年後得本利五十元。問每次應存若干。

(解)　$50\div38.4086$　答一元三角。

第二節　每二個月存款一次之儲蓄存款

(甲) 求終價法

儲蓄存款約定每二個月存款一次。每次存一元。計算利息。以半年爲一期。則一期內之存款本利合計。至期末時應如下式。

$$\left(1+\frac{6\gamma}{12}\right)+\left(1+\frac{4\gamma}{12}\right)+\left(1+\frac{2\gamma}{12}\right)=3+\frac{12\gamma}{12}=3+\gamma$$

設 $\frac{\gamma}{2}=s$。則n期間之總本利合計。爲

$$M=\left(3+2s\right)\left\{(1+s)^{n-1}+(1+s)^{n-2}+\cdots\cdots+(1+s)+1\right\}$$

化爲公式如下。

$$M=\left(3+2s\right)\frac{(1+s)^{n}-1}{s}$$

（例題3）複利率年四釐二毫。每二個月存一元。問二年後本利合計若干。

（解）　本題 $\gamma=0.042$,故 $s=0.021$, 期數爲4

$$M=\left(3+2s\right)\left\{(1+s)^{3}+(1+s)^{2}+(1+s)+1\right\}$$

$$=3.042\times4.12777=12.557$$

答十二元五角六分

（乙）求每次存款額法

欲求n期後取得本利百元。則每二個月之存款額公式如下。

$$A=\frac{100}{M}=\frac{100s}{(3+2s)\{(1+s)^{n}-1\}}$$

（例題4）年利率四釐二毫。每二個月存款一次。至二年後本利合計得五十元。問每次存款若干。

（解）　以前例題之M除50。卽得每次存款額。

$$50\div12.557=3.98$$

答三元九角八分

第三節 每三個月存款一次之儲蓄存款

(甲) 求終價法

儲蓄存款約定每三個月存款一次。每次存一元。計息以半年爲一期者。其公式如下。

$$\left(1+\frac{6\gamma}{12}\right)+\left(1+\frac{3\gamma}{12}\right)=2+\frac{9\gamma}{12}=2+\frac{3\gamma}{4}$$

若 $\frac{\gamma}{2}=s$。則至n期間之總本利合計。得

$$M=\left(2+\frac{3s}{2}\right)\left\{(1+s)^{n-1}+(1+s)^{n-2}+\cdots\cdots+(1+s)+1\right\}$$

化爲公式得 $M=\left(2+\frac{3s}{2}\right)\frac{(1+s)^n-1}{s}$

(乙) 求每次存款額法

例如欲求n期後取得本利合計百元。則每三個月一次之存款額公式如下。

$$A=\frac{100}{M}=\frac{100s}{\left(2+\frac{3s}{2}\right)\left\{(1+s)^n-1\right\}}$$

練習問題

(1) 年金八百元。年利率五釐。問六年之本利合計若干。

答5441.53

(2) 年金九百元。年利率六釐五毫。問四年之終價如何。

答 3966.46

(3) 年金五百元。年利率七釐。問八年之現價若干。

答 2985.65

(4) 永續年金一百五十元。年利率六釐三毫。問現價若干。

答 2380.95

(5) 延期三年永續年金四百元。年利率五釐五毫。問其現價若干。

答 6193.55

(6) 延期二年後繼續四年之年金一千二百元。年利率五釐。問其現價若干

答 3859.54

(7) 複利率年六釐。(半年爲一期。) 每二個月存款十元。問滿三年後本利合計幾何。

答 197.93

(8) 複利率年五釐。(半年爲一期。) 問每月當存若干。至四年始得一百五十元之本利合計。

答 2.82

(9) 第一習題改爲期首付年金。問其終價。

答 5713.60

(10) 第一習題答數五千四百四十一元五角三分。求其年金額。及第九習題答數五千七百十三元六角。求其年

金額。

答 800

(11) 第三習題改爲期首付年金。問其現價若干。

答 3194.64

(12) 第三習題答數二千九百八十五元六角五分。及第十一習題答數三千一百九十四元六角四分。求二數之年金額。

答 500

第三編　年賦償還法

第一章　償還之種類

歸還借款之辦法。可分二種。

(甲)一次償還借款之全部者。曰一次償還。或曰躉還。

(乙)分數次償還借款者。曰年賦償還。或曰分還。或曰攤還。

分還之中。又分二種。每年分還之額相等者。謂之均等分還。每年分還之額不等者。謂之不等分還。

均等分還之中。又細分爲二種。(一)每年分還之額相等。而內中不盡屬本金。卽借款應付之利息。亦合併在內者。謂之本利合計均等分還。(二)每年分還之額相等。內中盡屬本金。而利息另計者。謂之本金均等分還。普通所稱均等分還。皆指第一種而言。

第二章　均等分還法

第一節　本利合計均等分還法

關於公債及債券之償還計算法。另有專篇。本章僅述普通借貸之本利合計均等分還法。所謂本利合計均等分還法者。借主借款若干。訂定分期攤還。以若干年還清。每期所還之額相等。曰年賦金。內中本利參合。初期年賦金還本

少而付息多。以後利隨本減。則年賦金內本多而息少矣。論年賦性質。與年金同。所不同者。年賦爲借款之年金。而年金爲存款之年金耳。卽其借款本金及年賦金之關係。亦與年金現價及年金額之關係相同。故其計算法亦同。

（甲）求年賦金法。（與年金之求年金額法相同）

設以P爲本金。A爲年賦金。

$$P=\frac{A}{1+\gamma}+\frac{A}{(1+\gamma)^2}+\cdots\cdots+\frac{A}{(1+\gamma)^n}$$

$$=A\frac{(1+\gamma)^n-1}{\gamma(1+\gamma)^n}$$

故 $$A=\frac{P\gamma(1+\gamma)^n}{(1+\gamma)^n-1}$$

（例題1）借款一千元。於五年內均等分還。年利率八釐。問年賦金若干。作年賦償還明細表。

（解）　適用公式

$$A=\frac{1000\times0.08\times(1.08)^5}{(1.08)^5-1}=\frac{1000\times0.08\times1.46932808}{0.46932808}$$

$$=250.456$$

答二百五十元四角五分六釐

償還明細表

年	本金餘額	利息	年賦償還金
1	1000.00	80.00	250.46
2	829.54	66.36	250.46
3	645.44	51.64	250.46
4	446.62	35.73	250.46
5	231.89	18.55	250.44

端數四捨五入。故末年差二分。

第二節　延期本利合計均等分還法

(甲) 求年賦金法

在借款時。訂明幾年以內不還本利。自幾年以後。按本利合計均等分還法。每年還定額之年賦金者。謂之延期本利合計均等分還法。例如約定 m 年以內。不付年賦金。至 m 年之次年年終。始付年賦金。n 年還清本利。故第一次年賦金應在第 m + 1 年支付。其計算公式如下。

$$P=\frac{A}{(1+\gamma)^{m+1}}+\frac{A}{(1+\gamma)^{m+2}}+\cdots\cdots+\frac{A}{(1+\gamma)^{m+n}}$$

$$=\frac{A\{(1+\gamma)^{n}-1\}}{\gamma(1+\gamma)^{m+n}}$$

故 $A=\frac{P\gamma(1+\gamma)^{m+n}}{(1+\gamma)^{n}-1}$

(注意) 日本各銀行所採用之年賦償還法。大抵以每年之年賦金額。分爲二等分。勻作二次支付。每半年付還一次者居多。

(例題2) 借款二千元。前三年不付年賦金。自第四年起。作五年均等分還。年利率一分。問每年年賦金若干。

(解)　適用公式

$$A=\frac{2000\times 0.1\times(1.1)^{8}}{(1.1)^{5}-1}=\frac{200\times 2.1435888}{0.61051}=702.23$$

答七百零二元二角三分

償還明細表

年	本金餘額	利息	年賦償還金
1	2000.00	200.00	無
2	2200.00	220.00	無
3	2420.00	242.00	無
4	2662.00	266.20	702.23
5	2225.97	222.60	702.23
6	1746.34	174.63	702.23
7	1218.74	121.87	702.23
8	638.38	63.84	702.22

第三章　不等分還法

第一節　遞加分還法

(甲) 求年賦金法

不等分還法可任意分配。種類不一。茲舉遞加分還及延期遞加分還爲例。

(例題1) 借款一千元。五年內按遞加分還法還淸。每年以第一年償還額爲遞加額。年利率七釐。問年賦金若干。

(解)　以A爲第一年償還額。以v代$\frac{1}{1.07}$。公式如下。

$$1000=Av+2Av^2+3Av^3+4Av^4+5Av^5$$

$$\text{故}\quad A=1000\div(v+2v^2+3v^3+4v^4+5v^5)$$

此除數如遇年數過多。可由第五編第一章高等級數

之公式計算。然年數少時。可直接由表計算各項。而合計之。本題以除數及被除數乘 $(1.07)^5$。較便計算。

$$A=1000\times(1.07)^5\div(1.07^4+2\times1.07^3+3\times1.07^2+1.07+5)$$

$$=1402.55173\div16.475582=85.129$$

償還明細表

年	本金餘額	利息	年賦償還金
1	1000.00	70.00	85.13
2	984.87	68.94	170.26
3	883.55	61.85	255.39
4	690.01	48.30	340.52
5	397.79	27.85	425.64

第二節　延期遞加兼均等分還法

(甲) 求年賦金法

(例題2) 借款一萬元。前二年不付年賦金。自第三年末，開始償還。每年遞加。至第六年末。此後每年照第六年末所還之額償還。至第十年末還清。但知遞加額與第一回之償還額同。利率按年八釐。問年賦金若干。

(解)　　設以A為第三年末第一回之償還額。又以 v 代 $\frac{1}{1.08}$ 演算公式如下。

$$10000=Av^3+2Av^4+3Av^5+4A(v^6+v^7+v^8+v^9+v^{10})$$

故 $A=10000\div\{v^3+2v^4+3v^5+4(v^6+v^7+v^8+v^9+v^{10})\}$

而　$v^3+2v^4=3v^5=4.30564$(現價表中數目相加)

（年數多者。可用第五編高等級數公式。）

$$4(v^6+v^7+v^8+v^9+v^{10})=10.86948$$

（上式係用延期均等分還公式）

前二數合計$=15.17512$

$$A=10000\div15.17512=658.973$$

$2A=1317.946$　　$3A=1976.919$　　$4A=2635.892$

償還明細表

年	本金餘額	利息	年賦金
1	10000.00	800.00	無
2	10800.00	864.00	無
3	11664.00	933.12	658.97
4	11938.15	955.05	1317.95
5	11575.25	926.02	1976.92
6	10524.35	841.95	2635.89
7	8730.41	698.43	2635.89
8	6792.95	543.44	2635.89
9	4700.50	376.04	2635.89
10	2440.65	195.25	2635.90

最末之年賦金。因四捨五入之故。差一分。（按此種償還法最宜於農工業）

練習問題

（1）借款四萬元。年利六釐。於七年內均等分還。年賦金若干。

答7165.40

(2) 借款千元。年利九釐。欲於十年內均等分還。問年賦金若干。且製年賦償還明細表。

答155.82

(3) 年利七釐。前三年不付年賦金。此後六年。每年還八百元。問原借若干元。(求現價法)

答3112.80

(4) 借款一千元。初三年不付年賦金。此後六年均等分還。年利九釐。問年賦金若干。

答288.69

(5) 每半年存五百元。年利七釐。每年作二期計算。問七年之本利若干。

答8838.49

(6) 今後十年內。欲每年得六百元之年金。年利五釐。每年二期。問今存若干。

答9353.50

(7) 借款三萬元。前二年不付年賦金。此後八年內均等分還。年利六釐。以半年爲一期。問年賦金若干。

答2688.08

第四編　公債及債券

第一章　一次全還法

第一節　求利率法

政府發行之公債票、市政公所發行之市債票。公司發行之公司債票。統名之曰債票或債券。債票之額面、大抵爲萬千百十元之整數。發行價格或與面額相等。或小於面額。情形不一。發行之後、因信用關係、市價或在面額之上、或在面額之下。不能一定。債票之利息、向例規定於票面、如六釐債票。承購百元者、每年得六元之利息、由發行人規定每年作一次付息。或分作兩次或四次付息。其額面本金有作一次全還者。有分年攤還者、論債票之利息。有票面利率與實際利率之分、例如以百元買入年息六釐之債券、券額百元。每半年付息一次、是於上半年末、即可先領三元之利息、設以此三元又投資於他事業者、更得三元之六釐利息。至下半年末、實收一百零三元之利息。是六釐息債票。半年付息一次者、實際利率爲六釐零九絲。若分爲四季付息、實際利率爲六釐一毫三絲六忽四微。其算式如下。

六釐債票分期付息		實得年利率
每一年付息者	$1.06-1$	$=6.0000\%$
每半年付息者	1.03^2-1	$=6.0900\%$
每季付息者	1.015^4-1	$=6.1364\%$
每月付息者	$1.005^{12}-1$	$=6.1678\%$
每日付息者	$\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{335}-1$	$=6.1826\%$

（甲）求實際年利率法

凡已知債票之票面利率。欲求分期付息之實得利率者。公式如下。

以 n 代期數。以 p 代劵面年利率。以 γ 代實得年利率。

$$\gamma=\left(1+\frac{p}{n}\right)^{n}-1$$

（例題1）求六釐息債票。每日付息之實得年利率。

$$實際年利率=\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{365}-1$$

查對數表

$$\log.\ 0.06 = \bar{2}.7781513$$

$$\log.\ 365 = 2.5622929$$

故 $\log.\ (0.06\div365) = \bar{4}.2158584$

$\bar{4}.2158584$ 之眞數爲 0.0001643835

$\gamma=(1+0.0001643835)^{365}-1$

$=1.0001643835^{365}-1$

1.0001643835 之對數爲 0.00007138

$0.00007138\times365=0.02605370$

0.02605370 之眞數爲 1.061826

$\gamma=1.061826-1$

$=0.061826$

或 $=6.1826\%$

答年利率爲六釐一毫八絲二忽六微

（乙）求票面年利率法

反之若已知實際年利率。欲求票面利率之公式如下。

$$p=\left(\sqrt[n]{1+\gamma}-1\right)\times n$$

（按本書例題及習題。爲簡便起見。對於半年利率三釐。改爲年利率時。即以二倍之爲六釐。不計其實際利率也。）

第二節 求現價法

論債票之價格。有面價與市價之分。例如六釐公債額面百元。是爲面價百元。而市價不必爲百元。例如百元之六釐債券。規定滿十年償還者。而以五十元購入。每年取息六元。是以五十元投資。而得六元之收益。俟此券十年滿期。則到期可取回百元之本金。是五十元之本金。至十年期滿。又得本利合計百元之收益。故此債票之票面利率爲六釐。而論其收益之利率。則不止六釐。反之若百元之劵而以百二十元買入時。則收益不及六釐矣。計算收益利率之方法。另詳後篇。本章專論求現價方法。

求債票現價時。所定收益利率得視市面利率大小。而自定一率。以計算此項投資之現價。是否合算。譬如某種債劵利息五釐。每年付息一次。七年還本。市價九七折。假如投資於他種債劵。可得六釐之利益。則以六釐爲收益利率。計算此債劵之現價。如例題一之用法。得九十四元。今此種債劵之市價爲九十七元。則與其以九十七元購此。不若購他種債劵爲合算。倘市價爲九十元。比現價爲小者。則寧購此

種債券。得利較厚。

一次全還之債票。求債票本息之現價。係由債票利息之現價及本金之現價相加而得。求債票利息之現價。仿期末付年金現價之公式。求債票本金之現價。仿複利法之求現價公式。例題如下。

（例題2）七年後償還之五釐債券。額面百元。收益利率六釐。問現價若干。

（解）（甲）債券利息及收益利息皆一年一回者。

$$利息之現價=\frac{5}{1.06}+\frac{5}{(1.06)^2}+\frac{5}{(1.06)^3}+\frac{5}{(1.06)^4}+\cdots\cdots+\frac{5}{(1.06)^7}$$

$$=\frac{5}{0.06}\left\{1-\frac{1}{(1.06)^7}\right\}=27.91$$

$$本金償還額之現價=\frac{100}{(1.06)^7}=66.51$$

二數合計 $27.91+66.51=94.42$

答九十四元四角二分

（乙）債券利息幷收益利息皆一年二回者。

$$利息之現價=\frac{2.5}{1.03}+\frac{2.5}{(1.03)^2}+\frac{2.5}{(1.03)^3}+\cdots\cdots+\frac{5}{(1.03)^{14}}$$

$$=\frac{2.5}{0.03}\left\{1-\frac{1}{(1.03)^{14}}\right\}=28.24$$

$$本金償還額之現價=\frac{100}{(1.03)^{14}}=66.11$$

此二數合計 $28.24+66.11=94.35$

答九十四元三角五分

(丙) 債券利息係一年付一次。收益利息係一年付二次者。

$$利息之現價=\frac{5}{(1.03)^2}+\frac{5}{(1.03)^4}+\frac{5}{(1.03)^6}+\cdots\cdots+\frac{5}{(1.03)^{14}}$$

$$=\frac{5}{0.0609}\left\{1-\frac{1}{(1.03)^{14}}\right\}=27.82$$

$$本金償還額之現價=\frac{100}{(1.03)^{14}}=66.11$$

二數合計 $27.82+66.11=93.93$

答九十三元九角三分

上述之計算法。演爲公式如下。

設以 K 爲額面金額。p 爲券面之年利率。以 γ 爲收益之年利率。以 n 爲至償還時之期數。以 S 代 $\frac{\gamma}{2}$。

(甲) 債券利息及收益利息皆一年一回之公式。

$$P=\frac{Kp}{\gamma}\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^n}\right\}+\frac{K}{(1+\gamma)^n}$$

$$=\frac{Kp}{\gamma}+\left(K-\frac{Kp}{\gamma}\right)\frac{1}{(1+\gamma)^n}$$

(乙) 債券利息及收益利息皆一年二回之公式。

$$P=\frac{Kp}{2S}\left\{1-\frac{1}{(1+S)^{2n}}\right\}+\frac{K}{(1+S)^{2n}}$$

$$=\frac{Kp}{2S}+\left(K-\frac{Kp}{2S}\right)\frac{1}{(1+S)^{2n}}$$

(丙)債劵利息係一年一回而收益利係一年二回之公式。

$$P=\frac{Kp}{2S+S}\left\{1-\frac{1}{(1+S)^{2n}}\right\}+\frac{K}{(1+S)^{2n}}$$

第二章　年賦償還法

第一節　不等分還法

(甲)求現價法

債劵還本除一次全還外。尚有分還法。分還之中。又有均等分還及不等分還之分。茲先論不等分還法舉例如下。

(例題1)五釐債劵額面一千元。分三次償還。第一次在四年後償還三百元。第二次在五年後償還二百元。第三次在六年後償還五百元。收益台年利率五釐五毫。問現價幾何。

(第一解法)

因償還年限之不同。而分別計算現價。三現價合計。卽得本息合計之現價。

設以P爲四年後應還三百元之本利現價。以P_2爲五年後應還二百元之本利現價。以P_3爲六年後應還五百元之本利現價。以v字代$\frac{1}{1.055}$其公式如下。

$$P_1=\frac{15}{0.055}(1-v^4)+300v^4$$

$$P_2=\frac{10}{0.055}(1-v^5)+200v^5$$

$$P_3=\frac{25}{0.055}(1-v^6)+500v^6$$

$v=\frac{1}{1.055}$ 查現價表五釐五毫欄。求 v^4, v^5, v^6 諸數。

$v^4=0.80722$　$v^5=0.76513$　$v^6=0.72525$

故 $P_1=294.74$　$P_2=195.73$　$P_3=487.52$

仍 $P_1+P_2+P_3=294.74+195.73+487.52=977.99$

答九百七十七元九角九分

（第二解法）

由各年之收入計算之。

（甲）自第一年至第三年。每年得50元之收入。

（乙）第四年得利息50元及還本300元之收入。

（丙）第五年得利息35元及還本200元之收入。

（丁）第六年得利息25元及還本500元之收入。

甲之現價。可用年金現價之計算法。或用年金現價表（按五釐五毫欄三年期數計算。）亦可。得

甲之現價　$50\times2.69793=134.90$

乙之現價　$350\times0.80722=282.53$

丙之現價　$235\times0.76513=179.80$

丁之現價　$525\times0.72525=380.76$

977.99

答九百七十七元九角九分

第二節　均等分還法

(甲) 求現價法

債劵還本每年相同者。即年賦金辦法。以既知數如前節方法計算。或按下列公式計算。均可。

試以K爲債劵總額面。以 p 爲劵面年利率。以 m 爲不還本（延期）之期數。以 n 爲還本之期數。（故每回之償還金額爲 $\frac{K}{n}$。）以 m ＋ n 爲總期數。以 γ 爲收益年利率。試計算此債之現價。

(子) 一年一期之公式　（延期）

試以 P_1 代第一回還本及其全利息額（即自發行以至償還之利息全額）之現價。以 P_2 代第二回還本及其全利息額。（以下類推。）以 P_n 代第 n 回之還本及其全利息額。又以 R 代每期之總債劵利息。（即Kp）其公式如下。

$$P_1=\frac{R}{n}\left\{\frac{1}{1+\gamma}+\frac{1}{(1+\gamma)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(1+\gamma)^{m+1}}\right\}+\frac{\frac{K}{n}}{(1+\gamma)^{m+1}}$$

由等比級數公式。得下式。但以 v 代 $\frac{1}{1+\gamma}$。

$$P_1=\frac{R}{n\gamma}\left\{1-v^{m+1}\right\}+\frac{Kv^{m+1}}{n}$$

$$=\frac{R}{n\gamma}+\frac{1}{n}\left(K-\frac{R}{\gamma}\right)v^{m+1}$$

$$P_2=\frac{R}{n\gamma}+\frac{1}{n}\left(K-\frac{R}{\gamma}\right)v^{m+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n=\frac{R}{n\gamma}+\frac{1}{n}\left(K-\frac{R}{\gamma}\right)v^{m+n}$$

本題所求之答數爲$P_1\,P_2\,P_3\cdots\cdots P_n$之合計。以 P 代之。

$$P=P_1+P_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+P_n$$

$$=n\times\frac{R}{n\gamma}+\frac{1}{n}\left(K-\frac{R}{\gamma}\right)(v^{m+1}+v^{m+2}+\cdots\cdots+v^{m+n})$$

$$=\frac{R}{\gamma}+\frac{1}{n\gamma}\left(K-\frac{R}{\gamma}\right)(v^{m}-v^{m+n})$$

（例題2）證劵額面一千元。年利率七釐。前十五年不還本。償還期間五年。收益年利率五釐。一年一期。問現價若干。

按公式

$$K=1000,\quad p=0.07,\quad m=15,\quad n=5,$$

$$\gamma=0.05,\quad R=Kp=70$$

$$P=\frac{70}{0.05}+\frac{1}{5\times 0.05}\left(1000-\frac{70}{0.05}\right)(v^{15}-v^{20})$$

查現價表 $v^{15}=0.48102,\quad v^{20}=0.37689$

故 $$=1400+\frac{-400}{0.25}\times 0.10413$$

$$=1233.39$$

答一千二百三十三元三角九分

（丑）半年一期之公式（延期）

若求半年一期。則公式中 R 應作 $\frac{Kp}{2}$。以 S 代之。γ 應作 $\frac{\gamma}{2}$ 以 s 代之。以 v 代 $\frac{1}{1+s}$。公式如下。

$$P=\frac{S}{s}+\frac{1}{ns}\left(K-\frac{S}{s}\right)(v^{m}-v^{m+n})$$

（例題3）六釐證券額面十萬元。每年六月末日及十二月末日付半年利息一次。今後第六年之六月末日爲第一回還本。本金於十年間分二十回還清。每回還五千元。收益年利率五釐。按半年一期之複利法計算。今於第一回還本之五年六月前。計算現價。問應得若干。

按前公式

$K=100000,\quad p=0.06,\quad \therefore S=3000,\quad m=10,$

$n=20,\quad \gamma=0.05,\quad \therefore s=0.025$

$$P=\frac{3000}{0.025}+\frac{1}{20\times0.025}\left(100000-\frac{3000}{0.025}\right)(v^{10}-v^{30})$$

$v=\dfrac{1}{1.025}$ 查現價表 $v^{10}=0.78119840$

$v^{30}=0.47674269$

故 $P=120000.00-12178.23=107821.77$

答十萬零七千八百二十一元七角七分

練習問題

（題中不明言半年一期之收益者。皆指一年一期而言。）

（1）年息七釐五毫之債券。額面百元。每年付息一次。六年後還本。收益按複利法年五釐計算。問現價幾何。

答 112.69

(2) 年息$4\frac{1}{2}$%債劵額面百元。每年付息二次。十年後償還。收益年率六釐。按半年一期之複利。問現價幾何。

答88.84

(3) 五釐債劵額面二千元。第三年後先還四百元。第四年後又還六百元。第五年後再還一千元。收益按年利率六釐五毫計算。問現價幾何。

答1890.94

(4) 四釐息債劵。前三年不還本。此後五年均等還本。收益按年息六釐計算。問其價格如何。

答每百元票合90.25

(5) 五釐息債劵。前二年不還本。此後四年均等還本。收益按年五釐五毫計算。問其價格如何。

答額面百元合98.07

(6) 買進機器一部。五年間得三千元之收益。以後按原價之半變賣。按年六釐計算利息。問其現價若干。

答約20175元

(7) 有額面五千元之股票。今後三年內得一分之股利。以後三年間得八釐之股利。以後永遠得五釐之股利。收益按年五釐五毫之利率計算。問其現價如何。

答約5565元

(8) 有五釐額面一千元證劵。每年六月十二月末日

付息一次。定於第十一年之六月末日第一次還本。以後半年一次。計分十次均等還清。收益按年六釐。（半年一期之複利法。）今於第一次還本前十年六個月。計算其價格。

答912.05

第五編 特種債券

第一章 高等級數

第一節 求合計法

研究遞加遞減債券之計算法。適用高等級數求合計法。故於例題之先。冠以此章。

茲就計算利息之範圍。舉示求高等級數之合計法算式幾則如下。

(問題1) 求 $1, 2a, 3a^2, 4a^3, \cdots\cdots na^{n-1}$ 之合計。

(解) 試以 S 代合計則

$$S=1+2a+3a^2+4a^3+\cdots\cdots+na^{n-1} \qquad (1)$$

故 $$aS=a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots\cdots+na^n \qquad (2)$$

自(2)式減(1)式。

$$(a-1)S=na^n-(1+a+a^2+a^3+\cdots\cdots+a^{n-1})$$

以右邊之括弧內之式爲等比級數。而其合計爲 $\frac{a^n-1}{a-1}$。

故

$$(a-1)S=na^n-\frac{a^n-1}{a-1}$$

故 $$S=\frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2}=\frac{1+na^{n+1}-(n+1)a^n}{(a-1)^2}$$

若 a 小於 1 時。可書如下式。

$$S=\frac{1-a^n}{(1-a)^2}-\frac{na^n}{1-a}=\frac{1+na^{n+1}-(n+1)a^n}{(1-a)^2}$$

（問題2）求$A,(A+1)a,(A+2)a^2,(A+3)a^3,\cdots\cdots(A+n)a^n$之合計。

（解）試以S代合計。

$$S=A+(A+1)a+(A+2)a^2+\cdots\cdots+(A+n)a^n$$

$$=A(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^n)+a(1+2a+3a^2+\cdots\cdots+na^{n-1}$$

由等比級數之公式及前題之公式得

$$S=\frac{A(a^{n+1}-1)}{a-1}+\frac{a+na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}}{(a-1)^2}$$

$$=\frac{(A+n)a^{n+1}-A}{a-1}-\frac{a^{n+1}-a}{(a-1)^2}$$

（問題3）求$A,(A-1)a,(A-2)a^2,(A-3)a^3,\cdots\cdots(A-n)a^n$之合計。

（解）以S代合計。

$$S=A+(A-1)a+(A-2)a^2+\cdots\cdots+(A-n)a^n$$

$$=A(1+a+a^2+\cdots\cdots+a^n)-a(1+2a+3a^2+\cdots\cdots+na^{n-1})$$

如前題方法得下式。

$$S=\frac{A(a^{n+1}-1)}{a-1}-\frac{a+na^{n+2}-(n+1)a^{n+1}}{(a-1)^2}$$

$$=\frac{(A-n)a^{n+1}-A}{a-1}+\frac{a^{n+1}-a}{(a-1)^2}$$

（問題4）求$n,(n-1)a,(n-2)a,^2(n-3)a,^3\cdots\cdots3a^{n-3}$,
$2a^{n-2},a^{n-1}$之合計。

(解) 試以S代合計數。

$$S=n+(n-1)a+(n-2)a^2+\cdots\cdots 3a^{n-3}+2a^{n-2}+a^{n-1}$$

即按前題方法以A代n而計算合計數。(在前題雖續至a^n若以$A=n$時則前題之末項當爲$(n-n)a^n$自然消滅而爲續至a^{n-1}之級數。)仍適用前題結果之式。

$$S=\frac{a^{n+1}-a}{(a-1)^2}-\frac{n}{a-1}$$

若a小於1時。可改書下式。

$$S=\frac{n}{1-a}-\frac{a-a^{n+1}}{(1-a)^2}$$

第二節 用年金終價表及年金現價表求合計之捷法前節諸問題。若用年金終價表及年金現價表計算。較爲便捷。

(甲) 用年金終價表法

年金終價表中所記載之數。以符號說明之如下。(爲便利計。以R代$1+\gamma$)。

第一年 1

第二年 $1+R$

第三年 $1+R+R^2$

第四年 $1+R+R^2+R^3$

…………………………

第n年 $1+R+R^2+R^3+\cdots\cdots\cdots+R^{n-1}$

合計之。得

$$n+(n-1)R+(n-2)R^2+(n-3)R^3+\cdots\cdots+2R^{n-2}+R^{n-1}$$

故前節問題4之$a=1+\gamma$之合計。卽年金終價表中第一年至第n年之n個數之合計。凡類此之問題。均準此答解。

（1）例如欲計算$4+3(1.05)+2(1.05)^2+(1.05)^3$。卽以年金終價表之始四數相加。卽得。

第一年之數	1
第二年之數	2.05
第三年之數	3.1525
第四年之數	4.310125
	10.512625

（2）又例如欲計算下式。

$$4(1.05)+3(1.05)^2+2(1.05)^3+(1.05)^4$$

可以年金終價表之始五數之合計減5。卽得答數。蓋因

$$4R+3R^2+2R^3+R^4=(5+4R+3R^2+2R^3+R^4)-5$$

（3）基於同一理由欲計算下式。

$$4(1.05)^2+3(1.05)^3+2(1.05)^4+(1.05)^5$$

可合計年金終價表之始六數。減去$6+5(1+\gamma)$。卽可。

（乙）用年金現價表法

以v代$\dfrac{1}{1+\gamma}$時。求下式。

$nv+(n-1)v^2+(n-2)v^3+\cdots\cdots+3v^{n-2}+2v^{n-1}+v^n$

可由年金現價表之第一年至第n年之n個數相加。蓋年金現價表所記載者。爲

第一年　v

第二年　$v+v^2$

第三年　$v+v^2+v^3$

…………………………

第n年　$v+v^2+v^3+\cdots\cdots v^n$

而此合計。正與前記級數之合計同。

凡類此之合計。皆適用此法。仿前三例計算之。姑不舉例。

第三節　應用問題（求年賦金額）

（問題5）借款K元。於n年間用遞加分還法還清。問其年賦金額。但第一次之償還額。係遞加額之p倍。又年利率爲γ。

（解）以X代遞加額。以v代$\frac{1}{1+\gamma}$。

$K=pXv+(p+1)Xv^2+(p+2)Xv^3+\cdots\cdots+(p+n-1)Xv^n$

$X=K\div\{pv+(p+1)v^2+(p+2)v^3+\cdots\cdots+(p+n-1)v^n\}$

此{　}內之式。得由第一節問題（2）法。化繁爲簡。或用前節之算法皆可。

（問題6）借款K元。1年內不還本。此後m年間遞加分還。再以後n年間均等分還還清。但知遞加額等於第一

次償還額。又均等分還中之年賦金額等於遞加分還之末年之額。年利率爲 γ。問其每年年賦金額。(此與第三編第三章例題(2)同一形式。)

(解) 試以 X 代第一次償還額。以 v 代 $\frac{1}{1+\gamma}$。則

$$K=X\{v^{l+1}+2v^{l+2}+\cdots\cdots+mv^{l+m}$$
$$+m(v^{l+m+1}+v^{l+m+2}+\cdots\cdots+v^{l+m+n})\}$$

適用等比級數之公式。

$$v^{l+1}+2v^{l+2}+\cdots\cdots+mv^{l+m}=v^l\frac{1-v^m-m(1-v)v^m}{\gamma(1-v)}$$

$$v^{l+m+1}+v^{l+m+2}+\cdots\cdots+v^{l+m+n}=v^{l+m}\frac{1-v^n}{\gamma}$$

故 $$K=Xv^l\left\{\frac{1-v^m-m(1-v)v^m}{\gamma(1-v)}+\frac{mv^m(1-v^n)}{\gamma}\right\}$$

$$=Xv^l\frac{1-v^m-m(1-v)v^{m+n}}{\gamma(1-v)}$$

今爲簡便起見。以 p 代 $l+m$。以 q 代 $l+m+n$。則

$$K=X\frac{v^l-v^p-m(v^q-v^{q+1})}{\gamma(1-v)}$$

故 $$X=\frac{\gamma(1-v)K}{v^l-v^p-m(v^q-v^{q+1})}$$

第二章 遞加及遞減分還之債劵

第一節 遞加分還法

(甲) 求年賦金法

（例題1）發行四釐債券額面十萬元。（每券額面五十元。）分五年還清。但發行者於每年支付本利之數。遞加一千元。（遞加分還法）

（解）以K表示額面金額十萬元。以D表示支出遞加額一千元。以v代$\frac{1}{1.04}$以X代初年之支出。

$$K=Xv+(X+D)v^2+(X+2D)v^3+(X+3D)v^4+(X+4D)v^5$$

$$X=\frac{K-D(v^2+2v^3+3v^4+v^5)}{v+v^2+v^3+v^4+v^5}$$

此分子之級數。在年數多時。由本編高等級數之合計公式計算。年數少由現價表作各項之值。合計之。分母之值。查本書末之年金現價表。

茲代入實數得

$$X=\frac{100000-1000\times 8.55467}{4.451822}$$

$=20541.1$

答第一年之獎金爲二萬零五百四十一元一角以下遞推

第一年末償還金	20541.1元
第二年末償還金	21541.1元
第三年末償還金	22541.1元
第四年末償還金	23541.1元
第五年末償還金	24541.1元

本題之債券額面爲五十元。不滿五十元之數。即不能

還。應結轉至次年。其計算法如下。

第一年之計算

本年年賦金……………………………………20541.1

本年付息4%(本金十萬元之利息)…………4000.0

16541.1

應還本金數

16541.1÷50=330張（償還債券張數）　餘41.1

本金……………………………………………100000

本年還本………………………………………16500

次年本金………………………………………83500

第二年之計算

前年餘存應還未還之數………………………41.1

$41.1之利息4%………………………………1.6

本年年賦金……………………………………21541.1

21583.8

本年付息4%(本金八萬三千五百元之利息)……3340.0

18243.8

應還本金數

18243.8÷50=364張（償還債券張數）　餘43.8

本年初本金餘額………………………………83500

本年還本………………………………………18200

次年本金………………………………………65300

第三年之計算

前年餘存應還未還之數……………………………43.8

$43.8之利息4%……………………………………1.8

本年年賦金………………………………………22541.1

22586.7

本年付息4%(本金六萬五千三百元之利息)……2612.0

19974.7

19974.7÷50=399張(償還債券張數)　餘24.7

本年初本金餘額…………………………………65300

本年還本…………………………………………19950

次年本金…………………………………………45350

第四年之計算

前年餘存應還未還之數……………………………24.7

$24.7之利息4%……………………………………1.0

本年年賦金………………………………………23541.1

23566.8

本年付息4%(本金四萬五千三百五十元之利息)1814.0

21752.8

21752.8÷50=435張(償還債券張數)　餘2.8

本年初本金餘額…………………………………45350

本年還本…………………………………………21750

次年本金…………………………………………23600

第五年之計算

前年餘存應還未還之數……………………………2.8

$2.8之利息4%……………………………………0.1

本年年賦金…………………………………………24541.1
24544.0

本年付息4%(本金二萬三千六百元之利息)……944.0
23600.0

23600÷50=472張(償還債券張數)

年份	還本 債券張數	還本 金額	每年初本金餘額	利息 4%	支出合計
1	330	16500	100000	4000	20500
2	364	18200	83500	3340	21540
3	399	19950	65300	2612	22562
4	435	21750	45350	1814	23564
5	472	23600	23600	944	24544
	2000	100000	317750	12710	112710

第二節　遞減分還法

(甲) 求年賦金法

若係每年遞減分還法。仍按前例之公式。將D之符號相反。即得。

$$X=\frac{K+D(v^2+2v^3+3v^4+4v^5)}{v+v^2+v^3+v^4+v^5}$$

第三章　附利息及奬金之債券

附利息及奬之債券者。對於未還本之債券。每年除付一定之利息而外。於還本時。以餘款分配持票人。謂之奬金。通例分大小奬數個。(例如千元,五百元,百元,十元等。)以

抽籤方法定得獎人。故中獎者。除領還本利而外。更得意外獎金也。

雖持票人之中獎與否。係屬任運。而在發行債券者。每年獎金總額。則有定數。應於發行時計算之。此種計算與抽籤無關。

第一節　均等分還法

(甲) 求年賦金法

茲先述均等分還之例題數則如下。

(例題1) 茲欲發行附利附獎之債券十萬元。本金分五年均等分還。對於未還本之債券。付年率四釐之利息。且每年附帶獎金。年年獎額相等。全體收益合年利率六釐。問每年之獎額若干。(均等獎金法)

(解) 試以K代債券總額十萬元。T代每年還本額二萬元。v代 $\frac{1}{1.06}$。a代二萬元之四釐息八百元。5a, 4a, 3a, 2a, a等代第一年至第五年歷年利息。X代每年之獎金額。歷年支付金額如下。

第一年支付額	$T+5a+X$
第二年支付額	$T+4a+X$
第三年支付額	$T+3a+X$
第四年支付額	$T+2a+X$
第五年支付額	$T+a+X$

故　$K=(T+5a+X)v+(T+4a+X)v^2+(T+3a+X)v^3+$

$(T+2a+X)v^4+(T+a+X)v^5$

若 $v+v^2+v^3+v^4+v^5=A$

$5v+4v^2+3v^3+2v^4+v^5=B$

則 $K=TA+aB+XA$

故 $X=(K-TA-aB)\div A$

若年數少則A及B之值。可合計諸項之值之和數。遇年數多時。可由公式求等比級數之和。以得A值。再由本編求高等級數之合計。求B之值。

今 $v=\frac{1}{1.06}$。由現價表查得

$A=v+v^2+v^3+v^4+v^5=4.21236379$

由高等級數求合計捷法之公式如下。

$B=5v+4v^2+3v^3+2v^4+v^5=13.12727025$

$X=(100000-84247.276-10501.816)\div 4.2123638$

$=1246.55$

答每年獎額一千二百四十六元五角五分。

償還明細表

年	本金餘額	本利餘額	收益利息 6%	還本	付息 4%	獎金	利息餘額
1	100000	100000.00	6000.00	20000	4000	1246.55	753.45
2	80000	80753.45	4845.21	20000	3200	1246.55	1152.11
3	60000	61152.11	3669.13	20000	2400	1246.55	1174.69
4	40000	41174.69	2470.48	20000	1600	1246.55	798.62
5	20000	20798.62	1247.92	20000	800	1246.55	0.00

(例題2)發行附利息及獎金之債券十萬元。分五年均等分還。未還本之債券。付四釐利息。全體收益合年利率六釐。自三年以後。每年給獎九百元。但知第二年之獎金。較第一年少五百元。問第一年第二年之獎金若干。(不均等獎金法)

(解)仍按前題。以K, T, a, v, 代諸數。以b代第三年以後每年獎金九百元之數。以c代第一年與第二年獎金差額之五百元。以X代第二年與第三年獎金差額之未知數。

$$K=(T+5a+X+c+b)v+(T+4a+X+b)v^2+$$
$$(T+3a+b)v^3+(T+2a+b)v^4+(T+a+b)v^5$$

若 $v+v^2+v^3+v^4+v^5=A$

$5v+4v^2+3v^3+2v^4+v^5=B$

則 $K=TA+aB+bA+X(v+v^2)+cv$

$X=(K-TA-aB-bA-cv)\div(v+v^2)$

以實數插入。得

$$X=538.94$$

故 第二年之獎金$=1438.94$

第一年之獎金$=1938.94$

答第一年獎金一千九百三十八元九角四分。

償還明細表

年	本金餘額	本利餘額	收益利率 6%	還本	付息 4%	獎金	利息餘額
1	100000	100000.00	6000.00	20000	4000	1938.94	61.06
2	80000	80061.06	4803.66	20000	3200	1438.94	225.78
3	60000	60225.78	3613.55	20000	2400	900.00	539.33
4	40000	40539.33	2432.36	20000	1600	900.00	471.69
5	20000	20471.69	1228.31	20000	800	900.00	0.00

（附記）若問題僅有第一年第二年獎金數。求第三年以後之獎金者。則仍就前式。以X代已知數。以b代未知數。而解方程式。即得。

又若問題中係自第二年以後獎金相等者。則原式改如下。

$$K=TA+aB+bA+Xv$$

第二節　本利合計均等分還法

（甲）求年賦金法

（例題3）　今欲發行附利息及獎金之債劵百萬元。(每劵百元。)五年分還。利息按年三釐。獎金及利息合年率五釐之收益。但知每年之支出。年年相等。求每年之還本額及獎額。（標準法）

（解）以K代債劵額面金額百萬元。以G代本利合計均等分還法之年賦金。

$$G=\frac{K\times0.05\times(1.05)^5}{(1.05)^5-1}=230974.80$$

以T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,代各年之還本額。

第一年之獎金 $T_1\times0.02$

第二年之獎金 $T_2\times0.02\times(1.05+1)$

第三年之獎金 $T_3\times0.02\times(1.05^2+1.05+1)$

第四年之獎金 $T_4\times0.02\times(1.05^3+1.05^2+1.05+1)$

第五年之獎金 $T_5\times0.02\times(1.05^4+1.05^3+1.05^2+1.05+1)$

第一年之支出 $K\times0.03+T_1+T_1\times0.02$

故 $$T_1=\frac{G-K\times0.03}{1.02}$$

第二年之支出 $(K-T_1)\times0.03+T_2+T_2\times0.02\times(1.05+1)$

故 $$T_2=\frac{G-(K-T_1)\times0.03}{1+0.02\times(1.05+1)}$$

第三年之支出 $(K-T_1-T_2)\times0.03+T_3+T_3\times0.02\times(1.05^2+1.05+1)$

故 $$T_3=\frac{G-(K-T_1-T_2)\times0.03}{1+0.02\times(1.05^2+1.05+1)}$$

以下依此類推。

以問題中實數計算如下。

第一年之計算

年賦金……………………………………230974.80

本年付息三釐(本金百萬元之利息)……30000.00

(本年還本及給獎額)…………………200974.80

200974.80÷102=1970(還本債券張數)

本年還本……………………………197000.00 ⎫
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　⎬ =200940.80
本年獎金……………………………3940.00 ⎭ 　34.80

餘數歸入次年

本金…………………………………………1000000

本年還本……………………………………197000

次年本金……………………………………803000

第二年之計算

年賦金……………………………………230974.80

前年餘數歸入本年…………………………34.80

$34.80之利息 ……………………………1.74

231011.34

本年付息三釐(本金八十萬零三千元之利息) 24090.00

（本年還本及給獎額）………………206921.34

206921.34÷104.10=1987（還本債券張數）

本年還本……………………………198700.00 ⎫
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　⎬ =206846.70
本年獎金……………………………8146.70 ⎭ 　74.64

餘數歸入次年

（以下各年之計算從略）

償還明細表

年	還本		獎金	本金餘額	利息 3%	支出合計
	債券張數	金額				
1	1970	197000	3940.00	1000000	30000	230940.00
2	1987	198700	8146.70	803000	24090	230936.70
3	2003	200300	12618.90	604300	18129	231049.90
4	2014	201400	17360.68	404000	12120	230880.68
5	2026	202600	22387.30	202600	6078	231065.30
	10000	1000000	64453.58	3013900	90417	1154870.58

第三節 本利獎金均等分還法

(甲) 求年賦金法

(例題4) 發行附利息及獎金債券一萬張。每張百元。年利三釐。每年獎金遞減一千八百元。而收益年利率五釐。各年之總支出額(即本金,利息,獎金三者之合計。)相等。五年還清。欲算年賦還本及初年之獎金。(遞減獎金法)

(解) 本金共計一百萬元。每年五釐之收益利率。五年還清。試以G為本利合計均等分還法之年賦金。

$$G = 1000000 \times \frac{0.05 \times 1.05^5}{1.05^5 - 1} = 230974.80$$

以T_1, T_2, T_3, T_4, T_5,等為第一年至第五年之還本額。以X為初年之獎金額。以K為本金百萬元。以a為獎金之

遞減額一千八百元以 r 爲 3% 之利率。

$$T_1+X+Kr=G \qquad (1)$$

$$T_2+X-a+(K-T_1)r=G \qquad (2)$$

$$T_3+X-2a+(K-T_1-T_2)r=G \qquad (3)$$

$$T_4+X-3a+(K-T_1-T_2-T_3)r=G \qquad (4)$$

$$T_5+X-4a+(K-T_1-T_2-T_3-T_4)r=G \qquad (5)$$

$$T_1+T_2+T_3+T_4+T_5=K \qquad (6)$$

由 (1) 及 (2) 引算下式。

$$T_2=T_1(1+r)+a$$

以 u 代 $1+r$。

$$T_2=T_1u+a \qquad (7)$$

由 (2) 及 (3) 引算下式。

$$T_3=T_2(1+r)+a=T_1(1+r)^2+a(1+r)+a$$

$$=T_1u^2+a(u+1) \qquad (8)$$

類推得 $T_4=T_3(1+r)+a=T_1u^3+a(u^2+u+1)$ (9)

$$T_5=T_4(1+r)+a=T_1u^4+a(u^3+u^2+u+1) \qquad (10)$$

自 (7) 至 (10) 之四式合計得

$$K=T_1(1+u+u^2+u^3+u^4)+a(u^3+2u^2+3u+4)$$

令 $1+u+u^2+u^3+u^4=\frac{u^5-1}{r}$ 以 A 代之。

u^3+2u^2+3u+4 以 B 代之。

〔B 之値若在年數多時可由第一章高等級數之合計

公式計算。較爲便利。年數少時。即由複利表合計各項可也。〕

$$K=T_1A+aB \qquad \therefore T_1=\frac{K-aB}{A}$$

以得 T_1 法按 (7) 至 (10) 各式計算 T_2, T_3, T_4, T_5。

塡入實數之算式如下。

$$T_1=\frac{1000000-1800\times 10.304527}{5.30913581}=184860.94$$

以 184860.94 用於 (1) 式。得

$$X=16113.86$$

再如前題分段計算各年之數。（此處從略）

償還明細表

年份	還本 張數	還本 金額	獎金	本金餘額	利息	支出合計
第一年	1848張	184800	16113.86	1000000	30000	230913.86
第二年	1922張	192200	14313.86	815200	24456	230969.86
第三年	1998張	199800	12513.86	623000	18690	231003.86
第四年	2076張	207600	10713.86	423200	12696	231009.86
第五年	2156張	215600	8913.86	215600	6468	230981.86
總數	10000張	1000000	62569.30	3077000	92310	1154879.30

（例題5）發行附利息及獎金之債券一萬張。每張一百元。利息年率三釐。獎金對於還本金爲一定之成數。每年

收益合年息五釐。各年之總支出額相等。五年還清(獎金對於還本金額爲一定之成數法)。

(解) 以 q 爲獎金對於還本金額之成數。其他符號同前。

$$T_1 = G - Kr - T_1 q$$

$$\therefore (1+q)\,T_1 = G - Kr \qquad (1)$$

$$T_2 = G - (K - T_1)\,r - T_2 q$$

$$\therefore (1+q)\,T_2 = G - Kr + T_1 r = (G - Kr)\left(1 + \frac{r}{1+q}\right) \qquad (2)$$

$$T_3 = G - (K - T_1 - T_2)\,r - T_3 q$$

$$\therefore (1+q)\,T_3 = G - Kr + T_1 r + T_2 r$$

$$= (G - Kr)\left(1 + \frac{r}{1+q}\right)^2 \qquad (3)$$

$$T_4 = G - (K - T_1 - T_2 - T_3)\,r - T_4 q$$

$$\therefore (1+q)\,T_4 = (G - Kr)\left(1 + \frac{r}{1+q}\right)^3 \qquad (4)$$

$$T_5 = G - (K - T_1 - T_2 - T_3 - T_4)\,r - T_5 q$$

$$\therefore (1+q)\,T_5 = (G - Kr)\left(1 + \frac{r}{1+q}\right)^4 \qquad (5)$$

(1) 至 (5) 式相加

$$(1+q)\,K = (G - Kr)\left\{1 + \left(1 + \frac{r}{1+q}\right) + \left(1 + \frac{r}{1+q}\right)^2 + \left(1 + \frac{r}{1+q}\right)^3 + \left(1 + \frac{r}{1+q}\right)^4\right\}$$

$$= (G - Kr)\left\{\left(1 + \frac{r}{1+q}\right)^5 - 1\right\} \div \frac{r}{1+q}$$

故 $\gamma K=(G-K\gamma)\left\{\left(1+\frac{\gamma}{1+q}\right)^5-1\right\}$

故 $1+\frac{\gamma}{1+q}=\sqrt[5]{\frac{G}{G-K\gamma}}$

故 $1+q=\frac{\gamma}{\sqrt[5]{G\div(G-K\gamma)}-1}$

以問題中實數換入計算之得

$$\sqrt[5]{G\div(G-K\gamma)}=1.0282166$$

$$1+q=\frac{0.03}{1.0282166-1}=1.06320$$

由 (1) 式

$$T_1=\frac{G-K\gamma}{1+q}=\frac{230974.80-30000}{1.06320}=189028$$

故第一次還本。計還百元券一千八百九十張。其端數二十八元。（幷此二十八元一年之利息。）加併於第二年償還年賦額中。茲將各年應還之數列下。

年份	還本 張數	還本 金額	獎金	本金餘額	利息	支出合計
第一年	1890張	189000	11944.80	1000000	30000	230944.80
第二年	1943張	194300	12279.76	811000	24330	230909.76
第三年	1999張	199900	12633.68	616700	18501	231034.68
第四年	2055張	205500	12987.60	416800	12504	230991.60
第五年	2113張	211300	13354.16	211300	6339	230993.16
	10000張	1000000	63200.00	3055800	91674	1154874.00

第六編　收益計算法前編

第一章　插入法(又名補間法)之要旨

欲求債券殖利所得收益之利率。以用高次方程式解法爲正軌。(詳見第七編)然普通應用。無需乎多數之小數位者。自可採簡便之插入法。

插入法又名補間法。其應用頗廣。凡利息表,對數表,死亡表等有目數與主數(例如利息表上橫欄之利率。縱欄之期數。皆謂之目數。表中本利合計數。謂之主數。)者。求介乎兩目數中間之某目數應得之主數時。適用此法。例如複利表中5%,5½%,6%等利率。(卽目數。)而欲求五釐三毫七絲之本利合計。(卽主數。)用此插入法。

又求介乎兩主數中間之某主數應得之目數時。亦適用此法。例如有本利合計若干。欲求其利率或期數用此插入法。

通例所用之對數表若其目數(卽眞數)密。則表中主數之差。比較甚小。故通例單以比例式處理其端數。此卽二數插入法是也。然在不密之利息表。用二數之插入法。其得數不及三數插入法之精密。然插入法三數者。又不及四數,五數,六數之精密。蓋所採之數愈多。則其答數愈精。

按二毫五間隔之現價表。用二數插入法求利率者。可至毫位絲位以下。卽不準確。欲求絲位以下正確之數。當用

三數插入法,或高次方程式法。按五毫間隔之現價表,用二數插入法。可知利率至毫位之大概。再求精密。則用三數插入法推算之。

第二章　插入法之應用

第一節　二數插入法(又曰比例部分法)

(甲)求利率法

(例題1)二十年後償還之五釐公債。額面百元。以九十三元之市價買進。問收益年率若干。

(解)論此公債市價九十三元之性質。爲每年五元繼續二十年之年金現價。及末年還本百元之現價。二者之合計。列爲公式如下。(以γ代收益年率。)

$$\frac{5}{\gamma}\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^{20}}\right\}+\frac{100}{(1+\gamma)^{20}}=93 \qquad (1)$$

$\frac{5}{\gamma}\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^{20}}\right\}$爲每年五元繼續二十年年金之現價。(即第二編求年金現價法之公式。)

$\frac{100}{(1+\gamma)^{20}}$爲二十年後還本一百元之現價。(即第一編求現價法之公式。)

先推測利率之答數。約係何數。設假定爲五釐五毫者。則式中γ均改爲五釐五毫試算之得

$$\frac{5}{0.055}\left\{1-\frac{1}{(1.055)^{20}}\right\}+\frac{100}{(1.055)^{20}}=\frac{5\times(1-0.34273)}{0.055}$$
$$+100\times0.34273=94.025$$

買價僅九十三元。可見利率尚較五釐五毫為大。查現價表五釐五毫之下。即為五釐七毫五。試再以此率代γ。得

$$\frac{5}{0.0575}\left\{1-\frac{1}{(1.0575)^{20}}\right\}+\frac{100}{(1.0575)^{20}}$$

$$=\frac{5\times(1-0.32688)}{0.0575}+100\times0.32688=91.220$$

若$\gamma=0.055$　　則現價$=94.025$　(甲)

$\gamma=S$　　則現價$=93.000$　(乙)

$\gamma=0.0575$　　則現價$=91.220$　(丙)

就前數作比例式

(甲與丙兩現價之差)：(甲與乙兩現價之差)

=(甲與丙γ之差)：x

即　　$2.805:1.025=0.0025:x$

$$x=0.00091$$

0.055加0.00091得

$$0.055+0.0009=0.0559$$

答五釐五毫九絲

此答數至絲位止。絲位以下。是否正確。當用三數插入法求之。

(注意)凡一次償還之公債。欲求其收益年率。適用下列公式。

$$\frac{B}{\gamma}\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^{n}}\right\}+\frac{A}{(1+\gamma)^{n}}=C$$

此式以A代額面金額。B代一期之利息。C代現價。γ代收益利率。n代至還本日之期數。

（例題2）今投資於某業。初二年間無利益。後三年得一分之利益。其翌年末。資本增七成五分。讓於他人。但知最後之年有八釐之利益。問收益對於資本金之利率如何。

（解）試定資本金爲千元。申解如下。

第一年及第二年無收入。

第三年至第七年。五年內每年四十元之收入。

第八年至第十年。三年內每年百元之收入。

第十一年終。得一千八百三十元(1750+80)之收入。

試以 $\frac{1}{1+\gamma}=v$。自第三年至第七年。每年四十元。收入之現價。按延期年金之公式。即 $\frac{40}{\gamma}(v^2-v^7)$。再加以後收入之現價。得下式。

$$\underbrace{\frac{40}{\gamma}(v^2-v^7)}_{(子)}+\underbrace{100(v^8+v^9+v^{10})}_{(丑)}+\underbrace{1830v^{11}}_{(寅)}$$

推察本題之答數不易。故以8%試算之。得

(子)之值	136.92
(丑)之值	150.37
(寅)之值	784.86
	1072.15

8% 率。又覺太低。與千元相差七十二元之多。乃以9%計算之。得

(子) 之值	130.95
(丑) 之值	138.47
(寅) 之值	709.19
	978.61

9%之率又嫌微高。試再以$8\frac{3}{4}$%計算之。得

(子) 之值	132.41
(丑) 之值	141.34
(寅) 之值	727.33
	1001.08

可見答數之利率。在$8\frac{3}{4}$%與9%之間。試以比例式列之如下。

若 $\gamma=8\frac{3}{4}\%$　　則現價 = 1001.08　　(甲)

$\gamma=?$　　則現價 = 1000.00　　(乙)

$\gamma=9\%$　　則現價 = 978.61　　(丙)

甲丙之差　　甲乙之差　　甲丙利率之差

$$22.47 : 1.08 = 0.0025 : x$$

$$x=0.00012$$

$$0.0875+0.00012=0.08762$$

答八釐七毫六絲二忽

(注意) 本題初不知利率應作何數。試以8%採之。視其答數。(卽1072.15) 是否與投資擬定之千元相近。若較大則

再用稍高之利率探之。較小則用低率探之。不妨取利息表中三四位數目。試算大概。至得最相近之數。而後再取利息表多位小數精算之。至少須得二個近似利率。(如前題之$8\frac{3}{4}\%$及9%。)其推測之數。一比千元微多。一比千元微少。其餘相距較遠之利率。可以棄之。此二數插入法名稱之所由來也。若在三數四數插入法。則探用近似之利率。必須三個四個。方能應用。

前題答數。絲位以上正確。忽位須用三數插入法方能確定。(見下節各例題。)

明 細 表

年	年首資金	算定利息	收入	年末餘額
1	1000.0	87.6	無	1087.6
2	1087.6	95.3	無	1182.9
3	1182.9	103.6	40	1246.5
4	1246.5	109.2	40	1315.7
5	1315.7	115.3	40	1391.0
6	1391.0	121.9	40	1472.9
7	1472.9	129.1	40	1562.0
8	1562.0	136.9	100	1598.9
9	1598.9	140.1	100	1639.0
10	1639.0	143.6	100	1682.6
11	1682.6	147.4	1830	0.0

(例題3)本金三百元。於十七年內。本利合計七百元。問年利率如何。

（解）本題以對數表及二毫五絲間隔之現價表計算。用二數插入法求其答數。（但欲確知絲忽以下之小數位者。當用三數插入法或高次方程式法解之。）

本題本利合計七百元。而本金僅三百元。求其本利合計一元之現價 $\frac{300}{700}=0.42857$。而現價表第十七期行。查0.42857數。知利率在5%及 $5\frac{1}{4}\%$ 之間。即

$\gamma=5\%$　則現價 $=0.43630$　（甲）

$\gamma=?$　則現價 $=0.42857$　（乙）

$\gamma=5\frac{1}{4}\%$　則現價 $=0.41901$　（丙）

（甲丙之差）（甲乙之差）

$$0.01729 : 0.00773 = 0.0025 : x$$

$$x-0.0011$$

$$0.05+0.0011=0.0511$$

答五釐一毫一絲

第二節　三數插入法

（甲）求利率法

較二數插入法精密之算法。爲三數插入法。以答數相近之利率三個。每個利率之間隔相等。插入公式。而計算現價。再按前節比例式之第一項而加以修正。卽自下列公式計算所得之值爲比例式之第一項。至此式之起源。當於第四章中述之。

$$N_2 \text{與} \left(N_1 + \frac{(N_1+N_3-2N_2)(1-m)}{2}\right) \text{之差}$$

此處以N代問題中之現價。N與N_1之差爲N_2與N_1之差所除。以m代除得之商數。

差號用～。（～號係表示二數之中。自大數減小數之符號。即表示差之絕對值者。）則上式如下。

$$N_2 \sim \left(N_1 + \frac{(N_1+N_3-2N_2)(1-m)}{2}\right)$$

$$\text{而} m = (N \sim N_1) \div (N_2 \sim N_1)$$

上列算式係N數之大小在N_1與N_2之間。適用之。若N在N_2與N_3之間便用下式。

$$N_3 \sim \left(N_2 + \frac{N_1+N_3-2N_2)(1-m)}{2}\right)$$

$$\text{而} m = (N \sim N_2) \div (N_3 \sim N_2)$$

（例題4）二十五年後償還之六釐公債額面百元。以九十五元買進。問收益利率若干。

（解）以前章例題方法計算公債之現價如下式。

$$\frac{6}{\gamma}\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^{25}}\right\}+\frac{100}{(1+\gamma)^{25}}$$

本題之答數約在6%以上。

先試以$6\frac{1}{2}$%計算之。得

$$\frac{6}{0.065}\left\{1-0.20714\right\}+20.714=93.901$$

又以$6\frac{1}{4}$%及$6\frac{3}{4}$%計算之。得

$\gamma=6\frac{1}{4}\%$ 則現價$=96.879$

$\gamma=6\frac{3}{4}\%$ 則現價$=91.059$

演列下式。

若 $\gamma_1=6\frac{1}{4}\%$ 則$N_1=96.879$

$\gamma=?$ 則$N=95$

$\gamma_2=6\frac{1}{2}\%$ 則$N_2=93.901$

$\gamma_3=6\frac{3}{4}\%$ 則$N3=91.059$

故$N_1+N_3-2N_2=96.879+91.059-187.802=0.136$

$$m=(N\sim N_1)\div(N_2\sim N_1)=1.879\div2.978=0.63$$

$$N_2\sim\left(N_1+\frac{(N_1+N_3-2N_2)(1-m)}{2}\right)$$

$$=93.901\sim(96.879+0.025)=3.003$$

$$3.003:1.879=0.0025:x$$

$$x=0.00156$$

$$\gamma=0.0625+0.00156=0.06406$$

答六釐四毫零六忽

按若依前節之二數插入法計算。用N_1及N_2兩數求N，得$x=0.00158$。此用N_1,N_2,N_3三數求N。得$x=0.00156$。較為精密也。

（例題5）就前節例題1。以此法計算之如下。

前章僅有二數。

$\gamma_1=0.055$ 則現價$=94.025$

$\gamma_2=0.0575$ 則現價$=91.220$

本章添一數。

$\gamma_3=0.06$　　　現價 $=88.530$

得 $\dfrac{5(1-0.31180)}{0.06}+100\times 0.31180=57.350+31.180$

$=88.530$

$\gamma_1=0.055$　　則　$N_1=94.025$

$\gamma=?$　　〃　$N=93$

$\gamma_2=0.0575$　　〃　$N_2=91.220$

$\gamma_3=0.06$　　〃　$N_3=88.530$

$N_1+N_3-2N_2=94.025+88.530-182.440=0.115$

$m=(N\sim N_1)\div(N_2\sim N_1)=1.025\div 2.805=0.37$

$N_2\sim\left(N_1+\dfrac{(N_1+N_3-2N_2)(1-m)}{2}\right)=91.220\sim(94.025$

$+0.036)=2.841$

$2.841:1.025=0.0025:x$

$x=0.000902$　故 $\gamma=0.05590$

答五釐五毫九絲

（例題6）每月初存入一元二角九分。按半年一期之複利法。三個年後。（即三十六個月後。）收入本利合計五十元。問合年利率幾何。

（解）按半年一期之複利法。三十六個月爲六期。其第一回至第回之月賦金。於第一期末。本利合計如下。

$\gamma=$ 年利率　$A=1.29$

公式 $A\left(1+\frac{6\gamma}{12}\right)+A\left(1+\frac{5\gamma}{12}\right)+A\left(1+\frac{4\gamma}{12}\right)$

$$+A\left(1+\frac{3\gamma}{12}\right)+\left(1+\frac{2\gamma}{12}\right)+A\left(1+\frac{\gamma}{12}\right)$$

$$=A\left(6+\frac{21\gamma}{12}\right)=A\left(6+\frac{7\gamma}{4}\right)$$

此第一期末之本利合計。此後五期。亦從複利法增殖。至第六期末時。第一期末之本利合計如下。

$$A\left(6+\frac{7\gamma}{4}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)^5$$

據同一理由。第二期六個月之本利。至第六期末如下。

$$A\left(6+\frac{7\gamma}{4}\right)\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)^4$$

第三四期依此類推。

至第六期末。總本利合計、當如下式。

$$A\left(6+\frac{7\gamma}{4}\right)\left\{\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)^5+\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)^4+\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)^3+\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)+1\right\} \qquad (1)$$

今以\$1.29換A。而欲求前式之值爲\$50。問γ應作何數。先就前式以S代$\frac{\gamma}{2}$。再以1.29除之。得下式。

$$\left(6+\frac{7s}{2}\right)\left\{(1+s)^5+(1+s)^4+(1+s)^3+(1+s)^2+(1+s)\right.$$

$$\left.+1\right\} \qquad (2)$$

本問題(2)式之值$\frac{50}{1.29}$。即38.760。欲求s之值。

(2)式{ }內之式。等於 $\frac{(1+s)^6-1}{s}$。故(2)式可改爲下式。

$$\left(6+\frac{7s}{2}\right)\frac{(1+s)^6-1}{s} \tag{3}$$

本題之利率。試推察之。知與5%相近。於是以0.025爲s之值。求(2)式或(3)式之值如下。

$$6.0875\times 6.3877=38.885 \tag{4}$$

此數比實值 $\frac{50}{1.29}=38.760$ 爲大。故以較 $2\frac{1}{2}\%$ 低之2%代s。求(2)式或(3)式如下。

$$6.07\times 6.3081=38.291 \tag{5}$$

再以3%代s。得

$$6.105\times 6.4684=39.489 \tag{6}$$

由此三數。按公式算法。得

$s_1=0.02$	則	$N_1=38.291$
$s\ =?$	則	$N\ =38.760$
$s_2=0.025$	則	$N_2=38.885$
$s_3=0.03$	則	$N_3=39.489$

$$N_1+N_3-2N_2=38.291+38.489-77.770=0.010$$

$$m=(N\sim N_1)\div(N_2\sim N_1)=0.469\div 0.594=0.79$$

$$N_2\sim\left(N_1+\frac{(N_1+N_3-2N_2)(1-m)}{2}\right)=38.885\sim(38.291+0.001)=0.593$$

$$0.593:0.469=0.005:x$$

$x=0.00395$

$s=0.02+0.00395=0.02395$

$\gamma=0.0479$ 答四釐七毫九絲

如上題年數不多。用二數插入法計算。所得答數仍同。

（例題7）以三數插入法解前節例題(2)如下。

$\gamma_1=8\frac{1}{2}\%$ 則 $N_1=1024.15$

$\gamma_2=8\frac{3}{4}\%$ 則 $N_2=1001.08$

$\gamma=?$ 則 $N=1000.00$

$\gamma=9\%$ 則 $N_3=978.61$

$N^1+N_3+2N_2=0.60$

$m=(\sim N_2)\div(N^3\sim N_2)=1.08\div 22.47=0.05$

$$N_3\sim\left(N_2+\frac{(N_1+N_3-2N_2)(1-m)}{2}\right)=978.61\sim(1001.08+0.29)=22.76$$

$22.76:1.08=0.0025:x$

$x=0.000119$

$\gamma=0.0875+0.00012=0.08762$

答八釐七毫六絲二忽

（例題8）有六釐息債劵。每年六月末日及十二月末日付半年息各一次。第七年六月末日。爲第一回還本。自第七年始。二十年內。（卽四十回。）均等分還。問此項債劵若於今年初。以一百零三元之市價買額面一百元之票。按半年一期之複利法。其收益年利率當合幾何。

(解) 債券額面百元。每期利息爲三元。由第四編第二節半年一期之均等分還法公式。作現價方程式。

$$\frac{3}{s}+\frac{1}{40s}\left(100-\frac{3}{s}\right)\left(\frac{1}{x^{12}}-\frac{1}{x^{52}}\right)=103 \qquad (1)$$

買價爲一百零三元。則收益利率自在六釐以下。半年利率不及三釐。試以 $s=0.0275$ 計算。

以 $s=0.0275$, 故 $x=1.0275$。查現價表得

$$\frac{1}{x^{12}}=0.72213$$

$$\frac{1}{x^{52}}=\frac{1}{x^{30}}\times\frac{1}{x^{22}}=0.44314\times0.55055=0.24397$$

用此數計算 (1) 式之左邊。得 105.1392。

再以 $s=0.03$ 及 $s=0.0325$ 計算諸值。得

$s_1=0.0275$	則	$N_1=105.1392$
$s=?$	則	$N=103.0000$
$s_2=0.03$	則	$N_2=100.0000$
$s_3=0.0325$	則	$N_3=\ 95.2173$

按照公式得 $s=0.028519$。再二倍之。卽得年利率 0.05704。

答五釐七毫零四忽

(例題 9) 某種五釐債券。每年六月十二月末日付息一次。自今年數起之第九年六月末日。付還第一回本金。自第九年起。十年以內作二十回還本。此券係於今年八月末日。以九十八元買進一百元之票額。問收益按半年複利法計算。其週年利率幾何。

（解）債票額面一百元。每期利息二元五角。至今年（卽第一年）十二月末日方程式如下。（第一年已過。）

$$\frac{2.5}{s}+\frac{1}{20s}\left(100-\frac{2.5}{s}\right)\left(\frac{1}{x^{14}}-\frac{1}{x^{34}}\right)+2.5$$

$$=98\left(1+\frac{4}{6}s\right) \qquad (2)$$

故 $$\frac{2.5}{s}+\frac{1}{20s}\left(100-\frac{2.5}{s}\right)\left(\frac{1}{x^{14}}-\frac{1}{x^{34}}\right)+2.5-98\times\frac{4s}{6}$$

$$=98 \qquad (3)$$

買價爲九十八元。故知收益不止五釐。試先以半年利率 $s=0.0275$ 計算。

$s=0.0275$　　則　　$x=1.0275$。查現價表

$$\frac{1}{x^{14}}=0.68400$$

$$\frac{1}{x^{34}}=\frac{1}{x^{30}}\times\frac{1}{x^{4}}=0.44314\times0.89717=0.39757$$

按法算(3)式之左邊。得 96.3468 再以 $s=0.025$ 及 $s=0.03$ 計算諸值。得

$s_1=0.025$	則	$N_1=100.8667$
$s=?$	則	$N=98.0000$
$s_2=0.0275$	則	$N_2=96.3468$
$s_3=0.03$	則	$N_3=92.0714$

按照公式得 $s=0.026569$。再二倍之。卽得週年利率 0.05314。　　答五釐三毫一絲四忽

練習問題(上)

(1) 十年後還本之四釐債劵。額面百元。以九十元買得。問收益之年利率若干。　答0.05315

(2) 本金百元。十六年間。本金與複利合計二百五十元。問年利率如何。(照現價表算。)　答0.05894

(3) 本金五百五十元。於十二年間。本金與複利合計一千二百元。按半年一期之複利。問年利率若干。(照現價表算。)　答0.0661

(4) 五釐息公債票一千元。定爲五年後還二百元。六年後還三百元。七年後還五百元。今以九百四十元買入。問收益合年利率若干。

(本題之原式)　以v代 $\frac{1}{1+\gamma}$

$$\frac{10}{\gamma}\left(1-v^5\right)+200v^5+\frac{15}{\gamma}\left(1-v^6\right)+300v^6+\frac{25}{\gamma}\left(1-v^7\right)+500v^7=940$$

$$\text{卽}\ \frac{50+(200\gamma-10)v^5+(300\gamma-15)v^6+(500\gamma-25)v^7}{\gamma}=940$$

答0.0618

(5) 某種五釐公債。自今年起算。第八年末,第十年末,第十二年末,第十四年末,四次均等分還。今於第一年年初。以九十六元買額面一百元。問收益年利率幾何。答0.05499

(6) 投資起業。最初一年間無利益。第二年末得五釐利益。其後三年間得一分之利益。以後按資本金加二成。轉

讓於他人。問收益之年利率幾何。　答0.0981

(7) 投資起業。最初一年無利益。其後二年間。每年得三釐利益。其後三年間。每年得九釐利益。翌年（卽第七年）得六釐利益。年底按資本金加四成。讓於他人。問對於資本金之收益。合年利率若干。　答0.0939

(8) 每月之始。以一元八角存入銀行。四年後。（四十八個月後。）本利合計一百元。其利息係按半年複利。問其年利率若干。　答0.0712

第三章　插入法算式之說明

第一節　求終價及現價法

第一法　四數插入法

插入法之公式及應用例題。已見前章。然於原理。未加說明。茲以函數原理說明插入法之算式。初學者若以爲過於深邃。可以從略。但按前章公式布演。已足應用矣。

按 $(1+\gamma)^n$ 公式製成之表。曰複利表。按 $\frac{1}{(1+\gamma)^n}$ 公式製成之表。曰現價表。而表中所載利率。僅有釐毫。不及細數。故用插入法以求端數。說明之法。先以利率 γ 化爲 k 及 w 之二部分。故 $\gamma=k+w$。本利合計之 $(1+\gamma)^n=(1+k+w)^n$。其中 w 之數。比 $1+k$ 爲小。

$(1+\gamma)^n$ 卽 $(1+k+w)^n$。用乘法得 w 之 n 次式如下。

$$p_0+p_1w+w+p_2w^2+p_3w^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots p_nw^n \qquad (1)$$

又 $\frac{1}{(1+\gamma)^n}$ 卽 $\frac{1}{(1+k+w)^n}$ 以前式除分子 1 之式。故 w 之冪。順列如下式。

$$q_0+q_1w+q_2w^2+q_3w^3+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

此除法不可切斷。故項數繼續。可至無限。然 w 爲小於 1 之數。w 之冪愈高。其數愈小。過小數可從省略。在 (1) 式過小之數亦可省去。

(詳 Todhunter 氏大代數學 Convergency 條)

如本利合計，現價，及其他各種利息問題之算式。皆得以 $1+k+w$ 代 $1+\gamma$。用乘法除法等整頓之。遂得下式。(爲便利計。w^4 以下從省。)

$$A+Bw+Cw^2+Dw^3+Ew^4+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

以 y 字代表此式。書如下式。

$$y=A+Bw+Cw^2+Dw^3 \quad (4)$$

此 A, B, C, D 之值。乃自問題之值之基本算式直接算得者。例如 $(1+\gamma)^n$ 卽 $(1+k+w)^n$。又 $\frac{1}{(1+\gamma)^n}$ 卽 $\frac{1}{(1+k+w)^n}$ 如上法用乘法或除法所得之結果。比較對照 (4) 式。可決定 A, B, C, D 之值。然計算繁雜。通例以表中所載之利率及主數之數行算出之。以下述說其算法。

通例複利表及現價表利率之間隔。大抵相等。(例如 4%, 4½%, 5%, 5½%, …… 則每五毫相間。) 以 γ 代問題中所求之利率。又取表中利率較 γ 稍小與稍大者各二。自小至

大。順序以$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$,代之。又以 y 代$\gamma$之主數。以 y_1,y_2,y_3,y_4,代$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$之主數。因$\gamma = k+w$。得各 w 之值。

$$\gamma_1 - k = w_1,\quad \gamma_2 - k = w_2,\quad \gamma_3 - k = w_3,\quad \gamma_4 - k = w_4 \qquad (5)$$

再得方程式如下。

$$\left.\begin{array}{ll} \text{利率爲}\gamma_1 \text{ 則} & A+Bw_1+Cw_1^2+Dw_1^3=y_1 \\ \text{利率爲}\gamma_2 \text{ 則} & A+Bw_2+Cw_2^2+Dw_2^3=y_2 \\ \text{利率爲}\gamma_3 \text{ 則} & A+Bw_3+Cw_3^2+Dw_3^3=y_3 \\ \text{利率爲}\gamma_4 \text{ 則} & A+Bw_4+Cw_4^2+Dw_4^3=y_4 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

此式之 w_1, w_2, w_3, w_4, 及 y_1, y_2, y_3, y_4, 皆已知數。通常此四方程式。以多元一次方程式解法。求 A, B, C, D 之值爲易。然不若利用$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$之相等間隔。作此解之公式。

試以$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$之相等間隔爲 h。則

$$w_1 = -h,\qquad w_2 = 0,\qquad w_3 = h,\qquad w_4 = 2h, \qquad (7)$$

(例如表中利率爲 4%, $4\frac{1}{2}$%, 5%, $5\frac{1}{2}$% 時。則 $h=\frac{1}{2}$%。)

(6) 式以 h 代 w。改書如下。

$$A - Bh + Ch^2 - Dh^3 = y_1 \qquad (8)$$

$$A = y_2 \qquad (9)$$

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 = y_3 \qquad (10)$$

$$A + 2Bh + 4Ch^2 + 8Dh^3 = y_4 \qquad (11)$$

自 (9) 減 (8) 得 $Bh - Ch^2 + Dh^3 = y_2 - y_1$ (12)

自 (10) 減 (9) 得 $Bh + Ch^2 + Dh^3 = y_3 - y_2$ (13)

自 (11) 減 (10) 得 $Bh + 3Ch^2 + 7Dh^3 = y_4 - y_3$ (14)

又爲便利起見。以a^1, a, a_1，代此方程式右邊。(卽y_1, y_2, y_3, y_4，四數順次相接之二數之差。) 稱第一差。又以b, b_1，代a^1, a, a_1，三數相接之二數之差。以 c 代b_1-b之差。稱第三差。故

$$\left.\begin{array}{ll}\text{第一差} & y_2-y_1=a^1,\ y_3-y_2=a,\ y_4-y_3=a_1, \\ \text{第二差} & a-a^1=b,\ a_1-a=b_1, \\ \text{第三差} & b_1-b=c,\end{array}\right\} \quad (15)$$

再自 (13) 減 (12) 得　$2Ch^2=a-a^1=b$　(16)

自 (14) 減 (13) 得　$2Ch^2+6Dh^3=a_1-a=b_1$　(17)

自 (17) 減 (16) 得　$6Dh^3=b_1-b=c$　(18)

自此諸式算出 A, B, C, D 之値。

$$\left.\begin{array}{l}A=y_2 \\ B=\left(a-\dfrac{b}{2}-\dfrac{c}{6}\right)\div h \\ C=\dfrac{b}{2}\div h^2 \\ D=\dfrac{c}{6}\div h^3\end{array}\right\} \quad (19)$$

以 A, B, C, D 之値代入 (4) 式。則 (4) 式如下式。

$$y=y_2+\left(a-\frac{b}{2}-\frac{c}{6}\right)\frac{w}{h}+\frac{bw^2}{2h^2}+\frac{cw^3}{6h^3} \quad (20)$$

而以 m 代$\frac{w}{h}$。卽$\frac{\gamma-\gamma_2}{h}$。則

$$y=y_2+\left(a-\frac{b}{2}-\frac{c}{6}\right)m+\frac{b}{2}m^2+\frac{c}{6}m^3 \quad (21)$$

即 $y=y_2+ma-\frac{m-m^2}{2}b-\frac{m-m^3}{6}c$ (22)

改書如下。

$$y=y_2+ma-\frac{m(1-m)}{2}b-\frac{m(1-m)(1+m)}{6}c \quad (23)$$

此爲四數插入法之公式。但 $m=\frac{w}{h}$。即問題中所求之利率減γ_2。再以表中利率之相等間隔數除之所得之結果也。

再以實例演習此公式之用法如下。

（例題1）用五毫間隔（卽利率之相等間隔爲五毫。）複利表。求四釐三毫五絲之利率。對於本金1元。十五年之本利合計。

(解) 就表中取四釐三毫五絲上下之利率四個。卽$3\frac{1}{2}\%$, 4%, $4\frac{1}{2}\%$, 5%,欄內第15期之數。而求其第一差,第二差,第三差,如下。

利率	主數	第一差	第二差	第三差
$3\frac{1}{2}\%$	1.67535			
		0.12559		
4%	1.80094		0.00875	
		0.13434		0.00056
$4\frac{1}{2}\%$	1.93528		0.00931	
		0.14365		
5%	2.07893			

與前述說明中之記號相對照。

利率	主數	第一差	第二差	第三差
γ_1	y_1			
		a^1		
γ_2	y_2		b	
		a		c
γ_3	y_3		b_1	
		a_1		
γ_4	y_4			

又 $m=\frac{w}{h}$。而 w 即問題所求之利率。$4\frac{35}{100}\%$ 與第二列之利率4%之差數。h 即 $\frac{1}{2}\%$。故

$$m=\frac{w}{h}=\frac{\gamma-\gamma_2}{h}=\frac{0.0435-0.04}{0.005}=\frac{0.0035}{0.005}=0.7$$

再得　$1-m=0.3$

$1+m=1.7$

公式所要之主數,第一差,第二差,第三差等。均能於前記二表中對照得之。

$y_2=1.80094$

$a=0.13434,\quad b=0.00875,\quad c=0\ 00056,$

以諸數代入公式。即可得本問題之解答。

$$y=1.80094+0.7\times0.13434-\frac{0.7\times0.3}{2}\times0.00875$$

$$-\frac{0.7\times0.3\times1.7}{6}\times0.00056=1.89403$$

答本利合計1.89403

（例題2）年金額爲1。用五毫間隔之年金現價表。求年利率四釐六毫七絲。十年之年金現價。

(解) 就表中取利率及主數之四組。求各差數如下。

4%	8.11090			
		-0.19818		
$4\frac{1}{2}$%	7.91272		$+0.00719$	
		-0.19099		-0.00030
5%	7.72173		$+0.00689$	
		-0.18410		
$5\frac{1}{2}$%	7.53763			

$$m=\frac{w}{h}=\frac{\gamma-\gamma_2}{h}=\frac{0.0467-0.045}{0.005}=\frac{0.0017}{0.005}=0.34$$

$1-m=0.66,\qquad 1+m=1.34,$

$y_2=7.91272,\qquad a=-0.19099,$

$b=+0.00719,\qquad c=-0.00030,$

$$y=7.91272+0.34\times(-0.19099)-\frac{0.34\times0.66}{2}\times0.00719$$

$$-\frac{0.34\times0.66\times1.34}{6}\times(-0.00030)$$

$=7.91272-0.0649366-0.0008067+0.0000150$

$=7.84699$　　　　答年金現價7.84699

第二法　二數插入法(比例部分法)

就第一法之(3)式。省去w^2以下高羃各項。得

$$y=A+Bw$$

自此式決定A及B之值。而足成γ及y二組之值。法以γ代問題所求之利率。更以γ_1及γ_2代利息表中大於γ及小於γ之利率。以y代問題所求之主數。又y_1及y_2代利息表中γ_1及γ_2之主數。定$y_1-y_2=a$。定$\frac{\gamma-\gamma_1}{h}=m$。如前節方程式解

法得下式。

$$y=y_1+ma$$

此卽通常之比例部分法也。蓋上式之ma與下列比例式之答數相同。

$$h:\gamma-\gamma_1=a:(?)$$

第三法　三數插入法

(甲) 求終價及現價法

就第一法之(3)式。省去w^3以下高羃各項。得

$$y=A+Bw+Cw^2$$

再於表中取三組利率及主數。各定爲$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,$及$y_1,y_2,y_3$。問題之利率在$\gamma_1$及$\gamma_2$之間。問題所求之主數y。亦在$y_1$及$y_2$之間。又以

$$y_2-y_1=a\qquad y_3-y_2=a_1\qquad a_1-a=b$$

如第一節方法得下式。

$$y=y_1+ma-\frac{m(1-m)}{2}b$$

此處$m=\dfrac{\gamma-\gamma_1}{h}$

用三數插入法所得之値。自較二數之比例部分爲精密。

上式問題之利率γ。其大小應在γ_1及γ_2之間。若γ在γ_2及γ_3之間時。則當用下式。

$$y=y_2+ma_1-\frac{m(1-m)}{2}b$$

此處 $m=\dfrac{\gamma-\gamma_2}{h}$

（例題3）第一法例題1。試再以三數插入法計算之。

（解）用五毫間隔之複利表。以三數插入法計算小數至四位止。（第五位小數用四捨五入法消去之。）

取複利表利率及主數各三組。求第一差及第二差。

利率	主數	第一差	第二差
4%	1.8009		
		0.1344	
$4\frac{1}{2}$%	1.9353		0.0092
		0.1436	
5%	2.0789		

$$m=\frac{0.0435-0.04}{0.005}=0.7$$

$$1-m=0.3$$

$y_1=1.8009,\qquad a=0.1344,\qquad b=0.0092,$

取諸數代入公式。

$$y=y_1+ma-\frac{m(1-m)}{2}b$$

$$=1.8009+0.7\times0.1344-\frac{0.7\times0.3}{2}\times0.0092$$

$$=1.8940$$

答本利合計1.8940

（例題4）求年利率七釐六毫四絲。滿二十年後一元之現價。用三數插入法計算。

(解) 用二毫五絲間隔之現價表。

$7\frac{1}{2}\%$	0.23541		
		-0.01068	
$7\frac{3}{4}\%$	0.22473		$+0.00050$
		-0.01018	
8%	0.21455		

$$m=\frac{0.0764-0.075}{0.0025}=\frac{0.0014}{0.0025}=0.56$$

$$1-m=0.44$$

$$y_1=0.23541,\qquad a=-0.01068,\qquad b=+0.00050,$$

$$y=0.23541+0.56\times(-0.01068)-\frac{0.56\times0.44}{2}\times0.00050$$

$$=0.22937$$

此例題所求之數係第一數與第二數之間。用此解法。若所求之數在第二數與第三數之間時。則解法微有不同。試舉例題(5)爲證。

(例題5) 求年利率七釐九毫滿二十年一元之現價。仍採用前例題之數。惟所求之數。係在第二數與第三數之間。故公式應作下式。

$$y=y_2+ma_1-\frac{m(1-m)}{2}b$$

$$m=\frac{\gamma-\gamma_2}{h}\quad(\text{見前})$$

三數之第一差第二差。仍如前例題惟

$$m=\frac{0.079-0.0775}{0.0025}=\frac{0.0015}{0.0025}=0.6$$

$$1-m=0.4$$

$$y_2=0.22473,\qquad a_1=-0.01018,\qquad b=+0.00050,$$

$$y=y_2+ma_1-\frac{m(1-m)}{2}b$$

$$=0.22473+0.6\times(-0.01018)-\frac{0.6\times0.4}{2}\times0.00050$$

$$=0.21856$$

第四法　五數及六數之插入法

就第一法之(3)式。採用至w^5項。故

$$y=A+Bw+Cw^2+Dw^3+Ew^4+Fw^5$$

佈置利率及主數六列。求第一差,第二差,第三差,第四差,第五差如下。

利率	主數	第一差	第二差	第三差	第四差	第五差
γ_1	y_1					
		a''				
γ_2	y_2		b'			
		a'		c'		
γ_3	y_3		b		d	
		a		c		e
γ_4	y_4		b_1		d_1	
		a_1		c_1		
γ_5	y_5		b_2			
		a_2				
γ_6	y_6					

按第一法同樣之進行。得下式。卽六數插入法之公

$$y=y^3+ma-\frac{m(1-m)}{2}b-\frac{m(1-m)(1-m)}{2\times3}c$$

$$+\frac{m(1-m)(1+m)(2-m)}{2\times3\times4}d$$

$$+\frac{m(1-m)(1+m)(2-m)(2+m)}{2\times3\times4\times5}e$$

此處 $m=\frac{\gamma-\gamma_3}{h}$

此公式省去最後之項。卽成五數插入法之公式。

第二節　求利率法

前章所述諸例題。均係已知利率求主數者。本章例題。適得其反。係已知主數而求利率者。計舉三法。分述如下。

第一法二數插入法（卽比例部分法）

用五毫間隔之利息表。以二數插入法。可求至利率之毫位止。用二毫五絲間隔之現價表。以二數插入法。可求至利率之絲位止。

例題除參照本編第二章諸例外。再舉一例。以示梗概。

（例題6）十八年本利合計爲本金之三倍。問年利率幾何。

（解）考複利表期數18各主數。知本題之答數。當在6% 與 $6\frac{1}{2}$% 之間。茲取表中之數。用二數插入法如下。

利率	本利合計	
6%	2.854	(甲)
?	3.000	(乙)
$6\frac{1}{2}$%	3.107	(丙)

甲丙本利合計之差　0.253

甲乙本利合計之差　0.146

$0.253:0.146=0.005:x,\qquad x=0.0029$

$0.06+0.0029=0.0629$

答六釐三毫

本題雖至絲位。然時有一二絲之差。欲知此等精細之研究。當參考本編第四章插入法之程度。

本題若二毫五絲間隔之現價表解此題。則其答數更爲精細。可至絲位止。本利合計爲本金之三倍云者。對於1之現値當爲$\frac{1}{3}$卽0.33333之主數。查現價表當在$6\frac{1}{4}\%$與$6\frac{1}{2}\%$之間。

$6\frac{1}{4}\%$	0.33580	(甲)
?	0.33333	(乙)
$6\frac{1}{2}\%$	0.32189	(丙)

甲丙之差0.01391,　　甲乙之差0.00247,

$0.01391:0.00247=0.0025:x$

$x=0.00044$

$0.0625+0.00044=0.06294$

答六釐二毫九絲四忽

本題若求絲位以下確實與否。當採三數以上插入法。

第二法　逆用三數插入法

三數插入法之公式。

$$v=y_1+ma-\frac{m(1-m)}{2}b \qquad (1)$$

$$m=\frac{\gamma-\gamma_1}{h} \qquad 故\ \gamma=\gamma_1+mh \tag{2}$$

先求近似數。省略(1)之末項。成 $y=y_1+ma$。自此算出第一近似值。命之爲 m_1。卽

$$m_1=\frac{y-y_1}{a} \tag{3}$$

以此代入(1)式之末項。可算出m之值。卽

$$m=\left\{y-y_1+\frac{m_1(1-m_1)}{2}b\right\}\div a \tag{4}$$

此m之值。命之爲 m_2。以此代入(4)式之 m_1。而得m之值。命之爲 m_3。又以 m_3 代入(2)式。以算出γ之值。

(註)若 m_2 與 m_1 之差甚微小時。則 m_3 與 m_2(論其有效部分)相同。可不必求 m_3。直以 m_2 代入(2)式。較爲省事。

按本編第二章第二節之方法。得改書如下。

$$y-y_1=m\left\{a-\frac{1-m}{2}b\right\} \tag{5}$$

而 $a=y_2-y_1$ (6)

$b=y_3-y_2-(y_2-y_1)=y_1+y_3-2y_2$ (7)

故 (5)式爲

$$y-y_1=m\left\{y_2-y_1-\frac{(y_1+y_3-2y_2)(1-m)}{2}\right\} \tag{8}$$

而 $m=\frac{\gamma-\gamma_1}{h}$。成下列比例式。

$$\left\{y_2-y_1-\frac{(y_1+y_3-2y_2)(1-m)}{2}\right\}:y-y_1=h:\gamma-\gamma_1$$

此卽本編第二章第二節所述之公式。其例題亦適用於此。故不再揭。

第三法　逆用四數插入法

四數插入法公式如下。

$$y=y_2+ma-\frac{m(1-m)}{2}b-\frac{m(1-m)(1+m)}{6}e$$

變而爲

$$m=\left\{y-y_2+\frac{m(1-m)}{2}b+\frac{m(1-m)(1+m)}{6}c\right\}\div a \quad (1)$$

以 $m=\frac{\gamma-\gamma_2}{h}$

$$\gamma=\gamma_2+mh \quad (2)$$

省去(1)右邊{　}內之末二項。算出m之第一近似值。命之爲m_1。

$$m_1=(y-y_2)\div a \quad (3)$$

以m_1之值代入(1)式右邊之m。而計算(1)式之右邊。算出m之值。命之爲m_2。次以m_2再代入(1)式右邊之m。而計算(1)式之右邊。命之爲m_3。若此m_3與m_2所差甚微時。卽以m_3作爲m之正值。代入(2)式之m。以決定γ之值。反之若m_3與m_2相差較大。則仍以m_3代入(1)式右邊之m。而計算(1)式之右邊。命之爲m_4。以m_4適用於(2)式。而求γ之值。

(例題7) 既知$3\frac{1}{2}\%$之主數爲2.1315。4%之主數爲2.3699。$4\frac{1}{2}\%$之主數爲2.6337。5%之主數爲2.9253。欲求主數

2.4500之利率。

(解)	$3\frac{1}{2}\%$	2.1315			
			0.2384		
	4%	2.3699		0.0254	
			0.2638		0.0024
	$4\frac{1}{2}\%$	2.6337		0.0278	
			0.2916		
	5%	2.9253			

$y_2=2.3699,\quad a=0.2638,\quad b=0.0254,\quad c=0.0024,$

$y=2.4500,$

$$m_1=(y-y_2)\div a=(2.4500-2.3699)\div 0.2638$$

$$=0.0801\div 0.2638=0.3$$

代入(1)式右邊之m_1則

$$m=\left\{2.4500-2.3699+\frac{0.3\times 0.7}{2}\times 0.0254\right.$$

$$\left.+\frac{0.3\times 0.7\times 1.3}{6}\times 0.0024\right\}\div 0.2638$$

$$=0.0829\div 0.2638=0.314$$

$$\gamma=0.04+0.314\times 0.005=0.04157$$

（本題若以$m_2=0.314$。代入(1)式右邊。而改算之。其結果相同。）

答四釐一毫五絲七忽

（例題8）用五毫間隔之現價表取本編第一章例題2以四數插入法計算之如下。

(解) 按本編第二章算式。就8%, $8\frac{1}{2}\%$, 9%, $9\frac{1}{2}\%$四利率。而計算其現價。得第一差,第二差,第三差,如下。

8%	1072.151			
		−47.997		
$8\frac{1}{2}$%	1024.154		+2.452	
		−45.545		−0.137
9%	978.609		+2.315	
		−43.230		
$9\frac{1}{2}$%	935.379			

（此處小數取三位。以免末位生差數。）

$y=1000.00,\qquad y_2=1024.154,$

$a=-45.545,\qquad b=+2.452,\qquad c=-0.137,$

由 (3) 式得

$$m_1=(y-y_2)\div a$$
$$=-24.154\div(-45.545)=0.53$$

換置此 m_1 之值於（1）式右邊之 m。而以前記諸值代入 y, y_2, a, b, c 等。得

$$m=(1000.000-1024.154+0.305-0.009)\div(-45.545)$$
$$=0.5238$$

再以此值換入（1）式右邊之 m。而改算之結果相同。故以此爲 m 之值。換置於（2）式。而計算 γ 之值。得

$$\gamma=0.085+0.5238\times0.005$$
$$=0.087619$$

答八釐七毫六絲二忽

第四章　插入法之程度

欲求介乎二目數中間某一目數之主數時。當採用何

種插入法。（卽二數,三數,以至五六數之插入法。）最爲合宜。此不可不辨者也。

插入法公式中。第二差,第三差等之係數之值爲m。自0以至於1。有一定之極限。卽

第二差之係數 $\frac{m(1-m)}{2}$ 爲 m=0.5時。其極大之值爲0.125。

第三差之係數 $\frac{m(1-m)(1+m)}{6}$ 爲 m=0.577強時。其極大之值爲0.0641強。

第四差之係數 $\frac{m(1-m)(1+m)(2-m)}{24}$ 爲 m=0.5時。其極大之值爲0.0234强。

玆以0.1至0.9各數。作爲m之值。列各係數之值如下表。

m	$\frac{m(1-m)}{2}$	$\frac{m(1-m)(1+m)}{6}$	$\frac{m(1-m)(1+m)(2-m)}{25}$
0.1	0.045	0.0165	0.0078　(強)
0.2	0.08	0.032	0.0144
0.3	0.105	0.0455	0.0193　(強)
0.4	0.12	0.056	0.0224
0.5	0.125	0.0625	0.0234　(強)
0.6	0.12	0.064	0.0224
0.7	0.105	0.0595	0.0193　(強)
0.8	0.08	0.048	0.0144
0.9	0.045	0.0285	0.0078　(強)

故欲知可否用四數插入法。應先取五數而求其第四差（卽d。）由下記之標準決之。（但d之值。係以小數之末位爲單位。）

$$\left.\begin{array}{ll} m=0.5\text{時。} & d\text{在21以下。}\\ m=0.4\text{或}0.6\text{時。} & d\text{在22以下。}\\ m=0.3\text{或}0.6\text{時。} & d\text{在25以下。}\\ m=0.2\text{或}0.8\text{時。} & d\text{在34以下。}\\ m=0.1\text{或}0.9\text{時。} & d\text{在64以下。}\end{array}\right\}\text{則}$$

因屬於d項爲0.5以下。故可用四數插入法。

又欲知可否用三數插入法。應先取四數而求其第三差。卽c。然屬於c項之值。（卽用四捨五入法去小數之末位。以免計算小數末位之煩。）

m＝0.6之近傍。則c要在7以下。

m＝0.5或0.7。則c要在8以下。

（其他由前記之表決定限界。）

練習問題下

(1) 於2%，2½%，3%，3½%之年利率。對於一元滿二十五年之本利合計。（用複利表）如下。

利率	本利合計
2%	1.6406
2½%	1.8539
3%	2.0938

$3\frac{1}{2}\%$	2.3632

以此四數爲基礎。求年利率二釐八毫。對於本金一元之本利合計。　　答 1.9945

(2) 已知數如下。求七釐一毫之數。

$6\frac{1}{2}\%$	2.41487
7%	2.57853
$7\frac{1}{2}\%$	2.75244
8%	2.93719

答 2.61247

(3) 已知數如下。求五釐四毫二絲之數。

$4\frac{1}{2}\%$	26.8551
5%	28.1324
$5\frac{1}{2}\%$	29.4812
6%	30.9057

答 29.2604

(4) 已知數如下。求九釐三毫五絲之數。

$8\frac{1}{2}\%$	0.15315
9%	0.13778
$9\frac{1}{2}\%$	0.12402
10%	0.11168

答 0.12799

(5) 已知數如下。求四釐六毫五絲之數。

4%	17.2920
$4\frac{1}{2}\%$	16.2889
5%	15.3725
$5\frac{1}{2}\%$	14.5337

答 16.0053

(6) 本金百元。於二十一年間。本利合計爲三百四十五元。問年利率如何。用四數插入法。已知各數如下。

$5\frac{1}{2}\%$	3.0782,	6%	3.3996
$6\frac{1}{2}\%$	3.7527,	7%	4.1406

答六釐零七絲四忽

(7) 已知數如下。求 12.6218 之利率。

4%	13.5903
$4\frac{1}{2}\%$	13.0079
5%	12.4622
$5\frac{1}{2}\%$	11.9504

答四釐八毫五忽

第七編　收益計算法後編

第一章　高次方程式解法之原理

計算收益。用本文附表。按第六編第二章中之第一法或第二法。可得解答。若再求精密。則由第六編第三章之第三法。(如例題8。)可算精值。然一分(10%)以上之利息表。爲書中所罕見。故過高率之利息。前述之插入法。不便應用。惟適用高次方程式解法。方爲解求收益問題之正軌。

高次方程式解法。以牛端(Newton)法爲最適用於利息問題。以其易於得解答之近似值也。以下之說明。卽本牛端法。

例如方程式。

$$px^4+qx^3+\gamma x^2+sx+t=0 \qquad (1)$$

欲知適合於 x 之近似值。卽以 a 代 x 之近似值。以 $a+y$ 代 x 之值。

以 $x=a+y$。換置於原方程式。得

$$p(a^4+4a^3y+6a^2y^2+4ay^3+y^4)$$

$$\left.\begin{aligned}&+q(a^3+3a^2y+3ay^2+y^2)\\&+\gamma(a^2+2ay+y^3)\\&+s(a+y)\\&+t\end{aligned}\right\}=0 \qquad (2)$$

即

$$\left.\begin{aligned}&pa^4+qa^3+\gamma a^2+sa+t\\&+y(4pa^3+3qa^2+2\gamma a+s)\\&+y^2(6pa^2+3qa+\gamma)\\&+y^3(4pa+q)\\&+py^4\end{aligned}\right\}=0 \qquad (3)$$

因 y 之値甚小。故 y^2, y^3, y^4, 之値。更小一層。今假設 y^2, y^3, y^4, 幾等於零。故（3）式之第三行以下。可以捨去。僅採第一行,第二行計算之可也。

$$pa^4+qa^3+\gamma a^2+sa+t+y(4pa^3+3qa^2+2\gamma a+s)=0 \quad (4)$$

故 $$y=-\frac{pa^4+qa^3+\gamma a^2+sa+t}{4pa^3+3qa^2+2\gamma a+s} \qquad (5)$$

此分數式之分子爲（1）原式左邊。以 a 代入 x 之式。其分母爲分子之各項之指數。以係數乘之。而減去指數 1 個之式。（但最末不含 a 之項。廢棄不計。）

因 $x=a+y$

故 $$x=a-\frac{pa^4+qa^3+\gamma a^2+sa+t}{4pa^3+3qa^2+2\gamma a+s} \qquad (6)$$

但此值對於原方程式。並非眞正適合者。故先假設比於近似值 a 更近一層之眞値。以 a 爲第一近似値。以前記之値爲第二近似値。

欲求更近眞値一層。則取自（6）式所得之値。（即第二近似値。）代入（6）式之 a。以得第三近似値。

又欲求精密。則以第三近似値再代入（6）式之 a。以

得第四近似值。如此反復推算。所得之值。愈爲精確。

故解高次方程式。運算極繁。而其順序甚簡。試列示其順序於次。

（第一條）先以方程式化爲整數。集其諸項於一邊爲一式。（命此式爲甲式。）

（第二條）若甲式中有未知數（x）之多項式乘積時。實行乘法。而化爲未知數羃數之列。（命此式爲甲′式。）而行下法。（若甲式爲單項羃之列時。可逕行下法。）

以各項未知數之指數乘各本項。而其指數減一個作爲一式。（命此式爲乙式。）（但捨去不含 x 之獨立項。）

（此乙式爲甲式或甲′式之第一導來式或第一導來函數。）

（第三條）由試算求 x 之近似值。命之爲 a。卽第一近似值。

（第四條）以 a 代入甲式之 x。成爲一式又以 a 代入乙式之 x。又成一式。乃以後式除前式。而得一商數。

自 a 減去前商數。（用代數學減法。）命其結果爲 b。卽第二近似值。

（第五條）次以 b 如前條 a 之辦法。以得第三近似值

c。又以c如前條之辦法得第四近似值d。

以下依此類推而得極精密之值。

（但普通應用卽以得第三近似值爲止。）

第二章 高次方程式法解之應用

以問題之要件作方程式。若其方程式爲分數時。先化爲整數之方程式。然後以前章方法解之。

（例題1）二十年後償還之六釐債券。額面百元。以百零四元之時價買入。問其收益合年利率幾釐。

（此題以現價表按第六編方法亦可解答。茲爲指示高次方程式解法之實用起見。以本法說明之。）

試先以代數文字說明。

每年之利息爲B元。

償還年限爲n年。

債券面額爲A元。

買入之時價爲C元。

求收益年利率γ爲若干。

（解）按第六編第二章例題1方法。得方程式如下。

$$\frac{B}{\gamma}\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^n}\right\}+\frac{A}{(1+\gamma)^n}=C \qquad (1)$$

此式中$\frac{B}{\gamma}\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^n}\right\}$一節。爲每年B元繼續n年之年金現價。$\frac{A}{(1+\gamma)^n}$爲n年後A元償還金之現價。此二者合

計爲買價C。

(1)式以 $\gamma(1+\gamma)^n$ 乘之。化爲整數。集諸項於一邊爲一式。

$$C\gamma(1+\gamma)^n-B(1+\gamma)^n+B-A\gamma \qquad (2)$$

(此係集諸項於右邊者。故第一項仍爲正號。)

以 $1+\gamma=x$ 代入前式。即前章法則中之甲式。

$$\text{甲式} \quad C(x-1)x^n-Bx^n+B-A(x-1) \qquad (3)$$

實行乘法而整頓之爲甲′式。

$$\text{甲}'\text{式} \quad Cx^{n+1}-(C+B)x^n-Ax+A+B \qquad (4)$$

按前章第二條方法。以各項之指數乘各項。而原指數減去一個。截去末項不含 x 之 A+B。得乙式。

$$\text{乙式} \quad (n+1)Cx^n-n(C+B)x^{n-1}-A \qquad (5)$$

次以 a 爲 x 之近似值。而求第二近似值如下。

$$x=a-\frac{Ca^{n+1}-(C+B)a^n-Aa+A+B}{(n-1)Ca^n-n(C+B)a^{n-1}-A} \qquad (6)$$

今取本題之實數。記入此等諸式。先示最初之原方程式。

$$\frac{6}{\gamma}\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^{20}}\right\}+\frac{100}{(1+\gamma)^{20}}=104 \qquad (7)$$

以 $\gamma(1+\gamma)^{20}$ 乘諸項。使化爲整數。而集諸項於右邊爲一式。以 $1+\gamma=x$ 代入。

$$\text{甲式} \quad 104(x-1)x^{20}-6(x^{20}-1)-100(x-1) \qquad (8)$$

實行乘法而整頓之。

甲式 $104x^{21}-110x^{20}-100x+106$ (9)

由第二條法則作乙式。

$$21\times104x^{20}-20\times110x^{19}-100$$

即乙式 $2184x^{20}-2200x^{19}-100$ (10)

次由試算探答數之概數。大約在$5\frac{1}{2}\%$與6%之間。知其近於$5\frac{1}{2}\%$。則以$5\frac{1}{2}\%$為第一近似值。即$a=1.055$。而求第二近似值如下。

$$x=a=\frac{104a^{21}-100a^{20}-100a+106}{2184a^{20}-2200a^{19}-100} \tag{11}$$

$$=1.055-\frac{104\times(1.055)^{21}-110\times(1.055)^{20}-105.5+106}{2184\times(1.055)^{20}-2200\times(1.055)^{19}-100}$$

$$=1.055-\frac{320.136-320.953-105.5+106}{6372.38-6084.42-100}$$

$$=1.055-\frac{-0.317}{187.96}=1.055+0.0017$$

$$=1.0567$$

此 1.0567 即第二近似值。再代入 (11) 式之 a。以得第三近似值如下。

$$x=1.0567-\frac{104\times(1.0567)^{21}-110\times(1.0567)^{20}-105.67+106}{2184\times(1.0567)^{20}-2200\times(1.0567)^{19}-100}$$

$$=1.0567-\frac{331.146-331.457-105.67+106}{6580.9-6273.4-100}$$

$$=1.0567-\frac{0.019}{207.5}=1.0567-0.0001=1.0566$$

答五釐六毫六絲

（例題2）十二年後償還四釐公債。面額百元。以八十八元之時價買入。問收益如何。

（解）本題與前題同形。故由第六編之方法。可以解決。此處試以高次方程式解法解之。

按前題之公式。換置本題之實數。

$$A=100,\qquad B=4,\qquad n=12,\qquad C=88,$$

按前題解法先探解答之概數。知與$5\frac{1}{2}\%$相近。（因此處買價較面額爲小。故知收益較利息大。）

$$a=1.055$$

$$x=a-\frac{88a^{13}-92a^{12}-100a+104}{1144a^{12}-1104a^{11}-100} \qquad (12)$$

$$=1.055-\frac{0.096}{85.5}=1.055-0.0011=1.0539$$

以此第二近似值1.0539代入(12)式之a。再求第三近似值。

$$x=1.0539-\frac{0.006}{81.1}=1.0539-0.0001=1.0538$$

答五釐三毫八絲

第三章　作方程式應注意之點

（甲）年數短時。不用年金之算式。而以各年之數相加。

作方程式。較便計算。

例如四年後償還之五釐公債。額面百元。以九十四元買入。問其收益當年利率幾何。

先以代數文字說明之。設以額面金額百元爲A。五釐之利息爲B。買價九十四元爲C。以每年之數作方程式。

$$B\left\{\frac{1}{1+\gamma}+\frac{1}{(1+\gamma)^2}+\frac{1}{(1+\gamma)^3}+\frac{1}{(1+\gamma)^4}\right\}$$

$$+\frac{A}{(1+\gamma)^4}=C \qquad (1)$$

以 $(1+\gamma)^4$ 乘之。使化爲整數。再以 x 代 $1+\gamma$。集諸於右邊得

$$Cx^4-B(x^3+x^2+x)-(A+B)=0 \qquad (2)$$

再以第一章之方法解此方程式。

(乙) $\frac{1}{1+\gamma}$ 可作爲一未知數。而以 x 代之。以免化整之煩。

例如前條之例題中之 (1) 式。可作

$$B(x+x^2+x^3+x^4)+Ax^4=C \qquad (3)$$

卽 $(A+B)x^4+B(x^3+x^2+x)-C=0 \qquad (4)$

以下按第一章之方法解之但最後須以 x 之值除 1。以算出 $1+\gamma$ 之值。

(丙) 本應作現價方程式。而代以本利合計之方程式。亦可省化分數爲整數之勞。

例如前例題計算買價C四年後之本利合計。爲

$$C(1+\gamma)^4 \tag{5}$$

公債所得之收入之本利合計（四年後）爲

$$B\left\{(1+\gamma)^3+(1+\gamma)^2+(1+\gamma)+1\right\}+A \tag{6}$$

此二式必係同價。故

$$C(1+\gamma)^4=B\left\{(1+\gamma)^3+(1+\gamma)^2+(1+\gamma)+1\right\}+A \tag{7}$$

以$x=1+\gamma$。而集諸項於左邊。得

$$Cx^4-B(x^3+x^2+x)-(A+B)=0 \tag{8}$$

此與前記之(2)式一致。

（例題）以五千元買地皮房屋。經營事業。第一年無利益。第二年以後。每年得八釐之利益。於第五年末。將地皮房屋以及營業一切財產變賣。得一萬二千元。問收益當年利率幾何。

（解）計算現價

$$5000=400\left\{\frac{1}{(1+\gamma)^2}+\frac{1}{(1+\gamma)^3}+\frac{1}{(1+\gamma)^4}+\frac{1}{(1+\gamma)^5}\right.$$
$$\left.+\frac{12000}{(1+\gamma)^5}\right\} \tag{1}$$

以$(1+\gamma)^5$乘之。使化整方程式。

$$5000(1+\gamma)^5-400\left\{(1+\gamma)^3+(1+\gamma)^2+(1+\gamma)+1\right\}$$
$$-12000=0 \tag{2}$$

爲計算便利計。以100除全式。再以x代$1+\gamma$。得

$$50x^5-4(x^3+x^2+x+1)-120=0 \qquad (3)$$

本題不計營業中之利益。僅五年後之價。即爲本金之二倍四。比較複利表中數目。知本題答數。當在二分至二分五釐之間。先試以二分五釐計算之。

$$50\times3.0518-4\times5.7656-120=9.53$$

知二分五釐利率過高。再以二分計算如下。

$$50\times2.4883-4\times5.368-120=-17.06$$

先用比例部分法。

$$9.53-(-17.06)=26.59$$

$$26.59:17.06=0.05:x$$

$$x=0.032$$

故以1.232爲第一近似值代入下式之a。

$$a-\frac{50a^5-4(a^3+a^2+a+1)-120}{250a^4-4(3a^2+2a+1)}$$

即 $1.232-\dfrac{141.913-22.480-120}{576.0-32.1}=1.232-\dfrac{-0.567}{543.9}$

$$=1.232+0.0010=1.2330$$

答二分三釐三毫

第四章　高次近似值之公式

求公債收益問題。通例算至第三近似值爲止。茲說明求類似於第三近似值之一便法。

第一章所示之四次方程式。

$$px^4+qx^3+\gamma x^2+sx+t=0 \tag{1}$$

以 $a+y$ 代 x 如下式。

$$\left.\begin{array}{l} pa^4+qa^3+\gamma a^2+sa+t \\ +y(4pa^3+3qa^2+2\gamma a+s) \\ +y^2(6pa^2+3qa+\gamma) \\ +y^3(4pa+q) \\ +py^4 \end{array}\right\}=0 \tag{2}$$

此方程式省略 y^3 以上之冪。而成二次方程式。由二次方程式得類似第三近似值之數。

而作此二次方程式。不行換置法。無論如何高次。即用機械的作之。亦可。

(2) 式之第一行之式。(卽不含 y 之部分。) 卽係原式以 a 代 x 者。命之爲 f。

次 y 之係數爲原式之第一導來式。(第一章第二條之乙式。) 以 a 代 x 者。命之爲 g。

(按第一導來式者。卽以各 x 之指數乘原式之各項。而指數減 1。再棄去不含 x 之各項所得之式是也。)

再次 y^2 之係數。爲原式之第二導來式。以 a 代 x 者 (命之爲 h。) 之二分之一。

(按第二導來式。卽就原式之第一導來式。以各 x 之指類乘各項。而其指數減 1。再棄去不含 x 之各項所得之

式也。)

(以此機械的方法。求 y 及 y^2 之係數。考其理由。乃根據下列之二項定理法所得者也。

$$(a+y)^n=a^n+na^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}y^2+\cdots\cdots\cdots$$

二次方程式如下。

$$f+gy+\frac{h}{2}y^2=0 \qquad (3)$$

即 $$hy^2+2gy+2f=0 \qquad (4)$$

解此二次方程式。在通常之方法。可作一公式。以資應用。今說明作公式之理如下。

二次方程式(4)之根爲

$$y=\frac{-g\pm\sqrt{g^2-2hf}}{h}$$

f之值甚微小。自 f 之高冪。求 g^2-2hf 之平方根。得

$$\sqrt{g^2-2hf}=g-\frac{hf}{g}-\frac{h^2f^2}{2g^3}-\cdots\cdots\cdots \qquad (5)$$

故 $$y=\frac{-g\pm\sqrt{g^2-2hf}}{h}$$

$$=\frac{-g\pm}{h}\left(\frac{g}{h}-\frac{f}{g}-\frac{hf^2}{2g^3}-\cdots\cdots\cdots\right) \qquad (6)$$

取二根之小者。省去 f^3 以上之項。

$$y=-\frac{f}{g}-\frac{hf^2}{2g^3} \qquad (7)$$

故 $$x=a-\frac{f}{g}-\frac{hf^2}{2g^3} \qquad (8)$$

通常卽用上式。倘求高次之近似值當用下式。

$$x = a - \frac{f}{g} - \frac{hf^2}{2g^3} - \left(\frac{h^2}{2g^2} - \frac{k}{6g}\right)\frac{f^3}{g^3} \qquad (9)$$

此處之 k 爲原式之第三導來式。以 a 代入者也。(卽 h 之第一導來式。)

(例題1) 本編第二章例題 1。用本章之公式(8)計算如下。

$$f = 104\times(1.055)^{21} - 110\times(1.055)^{20} - 100\times1.055 + 100 + 6$$
$$= -0.317$$
$$g = 21\times104\times(1.055)^{20} - 20\times110\times(1.055)^{19} - 100$$
$$= 187.96$$
$$h = 20\times21\times104\times(1.055)^{19} - 19\times20\times110\times(1.055)^{18}$$
$$= 11226$$

故　$$x = 1.055 - \frac{-0.317}{187.96} - \frac{11200\times(-0.32)^2}{2\times(190)^3}$$
$$= 1.055 + 0.00169 - 0.00009$$
$$= 1.0566$$

計算 $\frac{hf^2}{2g^3}$ 時。其各因數取二位或三位之近似數。卽可。如 f 之值爲 −0.32。g 之值爲 190。又如 h 之值爲 11200 等。(計算 $(190)^3$ 時。可作爲 190×190×180。藉以減殺 187.96 作 190 所生之差。)

答五釐六毫六絲

（例題2）第六編練習問題（上）第四題以本章之方法解之。以 $v=\frac{1}{x}$ 及 $\gamma=x-1$ 代入原式。化爲整數。且集諸項於一邊。

$$940x^8-990x^7-200x^3-90x^2-185x+525=0$$

$$f=940a^8-990a^7-200a^3-90a^2-185a+525$$

$$g=7520a^7-6930a^6-600a^2-180a-185$$

$$h=52640a^6-41580a^5-1200a-180$$

以1.06爲第一近似值代a。

$$f=-0.8040$$

$$g=427.00$$

$$h=175.76$$

$$x=a-\frac{f}{g}-\frac{hf^2}{2g^3}=1.06-\frac{-0.8040}{427.00}-\frac{17600\times0.650}{2\times78000000}$$

$$=1.06+0\ 0\ )188-0.00007$$

$$=1.06181$$

答六釐一毫八絲一忽

練習問題

作以下各項之第一導來式。

(1) $x^4+8x^3+4x^2-9x+7$

答 $4x^3+24x^2-8x-9$

(2) $7x^5-6x^4+15x-100$

答 $35x^4-24x^3+15$

(3) $20x^7-50x^6+18x^5-240x+165.8$

答 $140x^6-300x^5+90x^4-240$

(4) $52x^{18}+40x^{17}-25x^{16}+72x^2-105x-28.35$

答 $936x^{17}+680x^{16}-400x^{15}+144x-105$

(5) $8x(6x^{20}-5x^{19})-109x^{20}-7x(x-1)+83$

答 $1008x^{20}-2980x^{19}-14x+7$

(6) $6(x-1)(x^{10}+8x^9)-(x-1)(9-x)-58$

答 $66x^{10}+420x^9-432x^8+2x-10$

以下各方程式之未知數之第一近似值爲 a。作求第二近似值之式。

(7) $5x^3+8x^2-6x-9=0$

答 $a-\dfrac{5a^3+8a^2-6a-9}{15a^2+16a-6}$

(8) $7x^3-9x=10x^4-8x^2-5$

答 $a-\dfrac{7a^3-10a^5+8a^2-9a+5}{21a^2-40a^3+16a-9}$

(9) $10x^{15}-7x^{14}+23x^2=5x+27$

答 $a-\dfrac{10a^{15}-7a^{14}+23a^2-5a-27}{150a^{14}-98a^{13}+46a-5}$

(10) $7x(x^{12}+6x^{11})-8x^{12}=9x(x-3)+90$

答 $a-\dfrac{7a^{13}+34a^{12}-9a^2+27a-90}{91a^{12}+408a^{11}-18a+27}$

(11) $5x(x^{20}-8x^{19})=3(x-1)(x+7)-82$

答 $a-\dfrac{5a^{21}-40a^{20}-3a^{2}-18a+103}{105a^{20}-800a^{19}-6a-18}$

(12) $\dfrac{10}{x-1}\left(1-\dfrac{1}{x^{10}}\right)+\dfrac{100}{x^{10}}=108$

答 $a-\dfrac{108a^{11}-118a^{10}-100a+110}{1188a^{10}-1180a^{9}-100}$

(13) $\dfrac{7x+5}{x-1}\left(1-\dfrac{1}{x^{6}}\right)+\dfrac{75}{x^{8}}=\dfrac{50}{x}+87$

答 $a-\dfrac{80a^{9}-42a^{8}-50a^{7}+7a^{3}-5a^{2}-75a+75}{720a^{8}-336a^{7}-350a^{6}+21a^{2}+10a-75}$

(14) 次之方程式以 1.05 爲第一近似值。求第二近似值。

$$\frac{5}{x-1}\left(1-\frac{1}{x^{4}}\right)+\frac{100}{x^{4}}=97$$

答五釐八毫七絲

(15) 前題求第三近似值

答五釐八毫六絲三忽

(16) 次之方程式以1.05爲第一近似值。求x之值。(但算至忽位止。)

$$\frac{4}{x}+\frac{8}{x^{2}}+\frac{11}{x^{3}}+\frac{109}{x^{4}}=110$$

答五釐零六絲三忽

(17) 前二題由第六編第二章之方法計算。

答同上

(18) 受第一年末十元,第二年末十五元,第四年末百

元之權利。今於第一年始。以九十八元買得。問其收益合年利率若干。

答七釐二毫三絲三忽

(19) 受第一年末十五元,第三年末二十元,第五年末百元之權利。今於第一年始,以一百零三元買得。問收益合年利率若干。

答六釐六毫六絲

(20) 前題之權利。於第一年之半。以一百零三元買得,問收益合年利率若干。(但出款之利息。於第一年撥入本金。)

答七釐五毫九絲

(21) 取得三年間每年末得五元,第四年末得一百零五元之權利。今於第一年四月底,以九十六元買入。問收益合年利率若干。(但出款之利息。於第一年末撥入本金。)

答六釐七毫七絲

(22) 受取第一年末十元,第二年末五元,第三年末四元,第五年一百零三元之權利。今於第一年七月底。以九十九元五角買得。問收益合年利率若干。(但出款之利息。於第一年末撥入本金。)

答五釐四毫二絲

(注意一) 問題 (20) (21) (22) 作第一年末之價之方程式。

例如問題(20)

$$15+\frac{20}{x^2}+\frac{100}{x^4}=103+103\times\frac{6}{12}(x-1)$$

此方程式化整及集諸項於一邊。均行第一章之方法。

欲以第六編第二章之方法解之者。須將前方程式右邊之第二項移置左邊。

$$15+\frac{20}{x^2}+\frac{100}{x^4}-103\times\frac{6}{12}(x-1)=103$$

此式左邊之價。按表中利率計算。行第六編第二章方法。

問題(21)

$$5+\frac{5}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{105}{x^3}=96+96\times\frac{8}{12}(x-1)$$

若行第六編第二章之方法。則作下式。

$$5+\frac{5}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{105}{x^3}-96\times\frac{8}{12}(x-1)=96$$

(注意二)本文附錄二毫五絲之現價表取小數五位以計算收益。可得利率至忽位。若更求精密。欲算至更底之位次者。由第六編第二章第二法所得之值爲第一近似值。行第七編之方法亦可。

附表

第一　日息換算年息表

第二　年息換算日息表

第三　複利表

第四　現價表

第五　年金終價表

第六　年金現價表

第七　年賦金表

說明

複利表卽本金1之本利合計表。公式$=(1+\gamma)^n$

現價表卽本利合計1之本金表。公式$=\dfrac{1}{(1+\gamma)^n}$

年金終價表卽每期積存1之本利合計表公式$=A\dfrac{(1+\gamma)^n-1}{\gamma}$表中爲期末付年金終價。若求期首付年金終價者。可尋表中$(n+1)$期之本利合計。減1卽得n期之期首付年金終價。例如欲求利率五釐五年期首付年金終價。取表中六年期末付年金終價。6.80191281減1=5.80191281卽

五年期首付年金終價$=A\dfrac{(1+\gamma)^{n+1}-1}{\gamma}-A$

年金現價表卽每期積存1之現價表。公式$=\dfrac{A}{\gamma}$

$\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^n}\right\}$ 表中爲期末付年金現價。若求期首付年金現價者。可尋表中 $(n-1)$ 期之現價加 1。卽得 n 期之期首付年金現價。例如欲五釐五年期首付年金現價。取表中四年期末付年金現價 3.54595050 加 $1=4.54595050$ 卽五年期首付年金現價 $=\frac{A}{\gamma}\left\{1-\frac{1}{(1+\gamma)^{n-1}}\right\}+A$

年賦金表卽本金 1 之年賦金表。公式 $=\frac{P\gamma(1+\gamma)^n}{(1+\gamma)^n-1}$ 表中爲期末付年賦金。若求期首付年賦金者。先求前法。求期首付年金現價。以期首付年金現價爲法。以 1 爲實除之。卽得期首付年賦金。例如欲求五釐五年期首付年賦金。以五年期首付年金現價 4.54595050 爲法以 1 爲實除之。得 $\frac{1}{4.54595050}=0.219978$ 卽五年期首付年賦金 $=$

$$\frac{P\gamma(1+\gamma)^n}{(1+\gamma)^{n+1}-(1+\gamma)}$$

日息換算年息表

日利率	年利率 (日利率×365)	年利率 (日利率×360)	日利率	年利率 (日利率×365)	年利率 (日利率×360)
0.00001	0.00365	0.00360	0.00026	0.09490	0.09360
0.00002	0.00730	0.00720	0.00027	0.09855	0.09720
0.00003	0.01095	0.01080	0.00028	0.10220	0.10080
0.00004	0.01460	0.01440	0.00029	0.10585	0.10440
0.00005	0.01825	0.01800	0.00030	0.10950	0.10800
0.00006	0.02190	0.02160	0.00031	0.11315	0.11160
0.00007	0.02555	0.02520	0.00032	0.11680	0.11520
0.00008	0.02920	0.02880	0.00033	0.12045	0.11880
0.00009	0.03285	0.03240	0.00034	0.12410	0.12240
0.00010	0.03650	0.03600	0.00035	0.12775	0.12600
0.00011	0.04015	0.03960	0.00036	0.13140	0.12960
0.00012	0.04380	0.04320	0.00037	0.13505	0.13320
0.00013	0.04745	0.04680	0.00038	0.13870	0.13680
0.00014	0.05110	0.05040	0.00039	0.14235	0.14040
0.00015	0.05475	0.05400	0.00040	0.14600	0.14400
0.00016	0.05840	0.05760	0.00041	0.14965	0.14760
0.00017	0.06205	0.06120	0.00042	0.15330	0.15120
0.00018	0.06570	0.06480	0.00043	0.15695	0.15480
0.00019	0.06935	0.06840	0.00044	0.16060	0.15840
0.00020	0.07300	0.07200	0.00045	0.16425	0.16200
0.00021	0.07665	0.07560	0.00046	0.16790	0.16560
0.00022	0.08030	0.07920	0.00047	0.17155	0.16920
0.00023	0.08395	0.08280	0.00048	0.17520	0.17280
0.00024	0.08760	0.08640	0.00049	0.17880	0.17640
0.00025	0.09125	0.09000	0.00050	0.18250	0.18000

年息換算日息表

年利率	日利率 (年利率÷365)	日利率 (年利率÷360)	年利率	日利率 (年利率÷365)	日利率 (年利率÷360)
0.0025	0.00000685	0.00006944	0.0800	0.00021918	0.00022222
0.0050	0.00001370	0.00001389	0.0850	0.00023288	0.00023611
0.0075	0.00002055	0.00002083	0.0900	0.00024658	0.00025000
0.0100	0.00002740	0.00002778	0.0950	0.00026027	0.00026389
0.0125	0.00003425	0.00003472	0.1000	0.00027397	0.00027778
0.0150	0.00004110	0.00004167	0.1050	0.00028767	0.00029167
0.0175	0.00004795	0.00004851	0.1100	0.00030137	0.00030556
0.0200	0.00005479	0.00005556	0.1150	0.00031507	0.00031944
0.0225	0.00006164	0.00006250	0.1200	0.00032877	0.00033333
0.0250	0.00006849	0.00006944	0.1250	0.00034247	0.00034722
0.0275	0.00007534	0.00007639	0.1300	0.00035616	0.00036111
0.0300	0.00008219	0.00008333	0.1350	0.00036986	0.00037500
0.0325	0.00008904	0.00009028	0.1400	0.00038356	0.00038889
0.0350	0.00009589	0.00009722	0.1450	0.00039726	0.00040278
0.0375	0.00010274	0.00010417	0.1500	0.00041096	0.00041667
0.0400	0.00010959	0.00011111	0.1550	0.00042466	0.00043056
0.0425	0.00011644	0.00011806	0.1600	0.00043836	0.00044444
0.0450	0.00012329	0.00012500	0.1650	0.00045205	0.00045806
0.0475	0.00013014	0.00013194	0.1700	0.00046575	0.00047222
0.0500	0.00013699	0.00013889	0.1750	0.00047945	0.00048611
0.0550	0.00015068	0.00015278	0.1800	0.00049315	0.00050000
0.0600	0.00016438	0.00016667	0.1850	0.00050685	0.00051389
0.0650	0.00017808	0.00018056	0.1900	0.00052055	0.00052778
0.0700	0.00019178	0.00019444	0.1950	0.00053425	0.00054167
0.0750	0.00020548	0.00020833	0.2000	0.00054795	0.00055556

複利表

利率／期數	二釐 2%	二釐五毫 2½%	三釐 3%	三釐五毫 3½%	四釐 4%
1	1.02	1.025	1.03	1.035	1.04
2	1.0404	1.050625	1.0609	1.071225	1.0816
3	1.061208	1.07689063	1.092727	1.10871788	1.124864
4	1.08243216	1.10381289	1.12550881	1.14752300	1.16985856
5	1.10408080	1.13140821	1.15927407	1.18768631	1.21665290
6	1.12616242	1.15969342	1.19405230	1.22925533	1.26531902
7	1.14868567	1.18868575	1.22987387	1.27227926	1.31593178
8	1.17165938	1.21840290	1.26677008	1.31680904	1.36856905
9	1.19509257	1.24886297	1.30477318	1.36289735	1.42331181
10	1.21899442	1.28008454	1.34391638	1.41059876	1.48024428
11	1.24337431	1.31208666	1.38423387	1.45996972	1.53945406
12	1.26824179	1.34488882	1.42576089	1.51106866	1.60103222
13	1.29360663	1.37851104	1.46853371	1.56395606	1.66507351
14	1.31947876	1.41297382	1.51258972	1.61869452	1.73167645
15	1.34586834	1.44829817	1.55796742	1.67534883	1.80094351
16	1.37278571	1.48450562	1.60470644	1.73398604	1.87298125
17	1.40024142	1.52161826	1.65284763	1.79467555	1.94790050
18	1.42824625	1.55965872	1.70243306	1.85748920	2.02581652
19	1.45681117	1.59865019	1.75350605	1.92250132	2.10684918
20	1.48594740	1.63861644	1.80611123	1.98978886	2.19112314
21	1.51566634	1.67958185	1.86029457	2.05943147	2.27876807
22	1.54597967	1.72157140	1.91610341	2.13151158	2.36991879
23	1.57689926	1.76461068	1.97358651	2.20611448	2.46471554
24	1.60843725	1.80872595	2.03279411	2.28332849	2.56330416
25	1.64060599	1.85394410	2.09377793	2.36324498	2.66583633
26	1.67341811	1.90029270	2.15659127	2.44595856	2.77246978
27	1.70688648	1.94780002	2.22128901	2.53156711	2.88336858
28	1.74102421	1.99649502	2.28792768	2.62017196	2.99870332
29	1.77584160	2.04640739	2.35656551	2.71187795	3.11865145
30	1.81136158	2.09756758	2.42726247	2.80679370	3.24339751

複　利　表

利率 / 期數	四釐五毫 4½%	五　釐 5%	五釐五毫 5½%	六　釐 6%	六釐五毫 6½%
1	1.045	1.05	1.055	1.06	1.065
2	1.092025	1.1025	1.113025	1.1236	1.134225
3	1.14116613	1.157625	1.17424138	1.191016	1.20794963
4	1.19251860	1.21550625	1.23882465	1.26247696	1.28646635
5	1.24618194	1.27628156	1.30696001	1.33822558	1.37008666
6	1.30226012	1.34009564	1.37884281	1.41851911	1.45914230
7	1.36086183	1.40710042	1.45467916	1.50363026	1.55398655
8	1.42210061	1.47745544	1.53468651	1.59384807	1.65499567
9	1.48609514	1.55132822	1.61909427	1.68947896	1.76257039
10	1.55296942	1.62889463	1.70814446	1.79084770	1.87713747
11	1.62285305	1.71033936	1.80209240	1.89829856	1.99915140
12	1.69588143	1.79585633	1.90120749	2.01219647	2.12909624
13	1.77219610	1.88564914	2.00577390	2.13292826	2.26748750
14	1.85194492	1.97993160	2.11609146	2.26090396	2.41487418
15	1.93528244	2.07892818	2.23247649	2.39655819	2.57184101
16	2.02237015	2.18287459	2.35526270	2.54035168	2.73901067
17	2.11337681	2.29201832	2.48480215	2.69277279	2.91704637
18	2.20847877	2.40661923	2.62146627	2.85433915	3.10665438
19	2.30786031	2.52695020	2.76564691	3.02559950	3.30858691
20	2.41171402	2.65329771	2.91775749	3.20713547	3.52364506
21	2.52024116	2.78596259	3.07823415	3.39956360	3.75268199
22	2.63365201	2.92526072	3.24753703	3.60353742	3.99660632
23	2.75216635	3.07152376	3.42615157	3.81974966	4.25638573
24	2.87601383	3.22509994	3.61458990	4.04893464	4.53305081
25	3.00543446	3.38635494	3.81339235	4.29187072	4.82769911
26	3.14067901	3.55567269	4.02312893	4.54938296	5.14149955
27	3.28200956	3.73345632	4.24440102	4.82234594	5.47569702
28	3.42969695	3.92012914	4.47784307	5.11168670	5.83161733
29	3.58403649	4.11613560	4.72412444	5.41838790	6.21067245
30	3.74531813	4.32194238	4.98395129	5.74349117	6.61436616

複　利　表

利率 期數	七釐 7%	七釐五毫 7½%	八釐 8%	八釐五毫 8½%	九釐 9%
1	1.07	1.075	1.08	1.085	1.09
2	1.1449	1.155625	1.1664	1.177225	1.1881
3	1.225043	1.24229688	1.259712	1.27728913	1.295029
4	1.31079601	1.33546914	1.36048896	1.38585870	1.41158161
5	1.40255173	1.43562933	1.46932808	1.50365669	1.53862395
6	1.50073035	1.54330153	1.58687432	1.63146751	1.67710011
7	1.60578148	1.65904914	1.71382427	1.77014225	1.82803912
8	1.71818618	1.78347783	1.85093021	1.92060434	1.99256264
9	1.83845921	1.91723866	1.99900463	2.08385571	2.17189328
10	1.96715136	2.06103156	2.15892500	2.26098344	2.36736367
11	2.10485195	2.21560893	2.33163900	2.45316703	2.58042641
12	2.25219159	2.38177960	2.51817012	2.66168623	2.81266478
13	2.40984500	2.56041307	2.71962373	2.88792956	3.06580461
14	2.57853415	2.75244405	2.93719362	3.13340357	3.34172703
15	2.75903154	2.95887735	3.17216911	3.39974288	3.64248246
16	2.95216375	3.18079315	3.42594264	3.68872102	3.97030588
17	3.15881521	3.41935264	3.70001805	4.00226231	4.32763341
18	3.37993228	3.67580409	3.99601950	4.34245461	4.71712042
19	3.61652754	3.95148940	4.31570106	4.71156325	5.14166125
20	3.86968446	4.24785110	4.66095714	5.11204612	5.60441077
21	4.14056237	4.56643993	5.03383372	5.54657005	6.10880774
22	4.43040174	4.90892293	5.43654041	6.01802850	6.65860043
23	4.74052986	5.27709215	5.87146365	6.52956092	7.25787447
24	5.07236695	5.67287406	6.34118074	7.08457360	7.91108317
25	5.42743264	6.09833961	6.84847520	7.68676236	8.62308066
26	5.80735292	6.55571508	7.39635321	8.34013716	9.39915792
27	6.21386763	7.04739371	7.98806147	9.04904881	10.24508213
28	6.64883836	7.57594824	8.62710639	9.81821796	11.16713952
29	7.11425705	8.14414436	9.31727490	10.65276649	12.17218208
30	7.61225504	8.75495519	10.06265689	11.55825164	13.26767847

複　利　表

利率 期數	九釐五毫 9½%	一　分 10%		
1	1.095	1.1		
2	1.199025	1.21		
3	1.31293238	1.331		
4	1.43766095	1.4641		
5	1.57423874	1.61051		
6	1.72379142	1.771561		
7	1.88755161	1.9487171		
8	2.06686901	2.14358881		
9	2.26322156	2.35794769		
10	2.47822761	2.59374246		
11	2.71365924	2.85311671		
12	2.97145686	3.13842838		
13	3.25374527	3.45227121		
14	3.56285107	3.79749834		
15	3.90132192	4.17724817		
16	4.27194750	4.59497299		
17	4.67778251	5.05447028		
18	5.12217185	5.55991731		
19	5.90877818	6.11590904		
20	6.14161210	6.72749995		
21	6.72506525	7.40024994		
22	7.36394645	8.14027494		
23	8.06352137	8.95430243		
24	8.82955590	9.84973268		
25	9.66836371	10.83470594		
26	10.58685826	11.91817654		
27	11.59260979	13.10999419		
28	12.69390772	14.42099361		
29	13.89982896	15.86309297		
30	15.22031271	17.44940227		

複　利　表（一分以上）

利率＼期數	一分五釐 15%	二　分 20%	二分五釐 25%	三　分 30%
1	1.15	1.2	1.25	1.3
2	1.3225	1.44	1.5625	1.69
3	1.5209	1.728	1.9531	2.197
4	1.7490	2.0736	2.4414	2.8561
5	2.0114	2.4883	3.0518	3.7129
6	2.3131	2.9860	3.8147	4.8268
7	2.6600	3.5832	4.7684	6.2749
8	3.0590	4.2998	5.9605	8.1573
9	3.5179	5.1598	7.4506	10.6045
10	4.0455	6.1917	9.3132	13.7858

現　價　表

利率 期數	二　釐 2%	二釐二毫五絲 2¼%	二釐五毫 2½%	二釐七毫五絲 2¾%	三　釐 3%
1	.98039216	.97799511	.97560976	.97323601	.97087379
2	.96116878	.95647444	.95181440	.94718833	.94259591
3	.94232233	.93542732	.92859941	.92183779	.91514166
4	.92384543	.91484335	.90595064	.89716573	.88848705
5	.90573081	.89471232	.88385429	.87315400	.86260878
6	.88797138	.87502427	.86229687	.84978491	.83748426
7	.87056018	.85576946	.84126524	.82704128	.81309151
8	.85349037	.83693835	.82074657	.80490635	.78940923
9	.83675527	.81852161	80072836	.78336385	.76641673
10	.82034830	.80051013	.78119840	.76239791	.74409391
11	.80426304	.78289499	.76214478	.74199310	.72242128
12	.78849318	.76566748	.74355589	.72213440	.70137988
13	.77303253	.74881905	.72542038	.70280720	.68095134
14	.75787502	.73234137	.70772720	.68399728	.66111781
15	.74301473	.71622628	.69046556	.66569078	.64186195
16	.72844581	.70046580	.67362493	.64787424	.62316694
17	.71416256	.68505212	.65719506	.63053454	.60501645
18	.70015937	.66997763	.64116591	.61365892	.58739461
19	.68643076	.65523484	.62552772	.59723496	.57028603
20	.67297133	.64081647	.61027094	.58125057	.55367575
21	.65977582	.62671538	.59538629	.56569398	.53754928
22	.64683904	.61292457	.58086467	.55055375	.52189250
23	.63415592	.59943724	.56669724	.53581874	.50669175
24	.62172149	.58624668	.55287535	.52147809	.49193374
25	.60953087	.57334639	.53939059	.50752126	.47760557
26	.59757928	.56072997	.52623472	.49393796	.46369473
27	.58586204	.54839117	.51339973	.48071821	.45018906
28	.57437455	.53632388	.50087778	.46785227	.43707675
29	.56311231	.52452213	.48866125	.45533068	.42434636
30	.55207089	.51298008	.47674269	.44314421	.41198676

現價表

利率 / 期數	三釐二毫五絲 $3\frac{1}{4}\%$	三釐五毫 $3\frac{1}{2}\%$	三釐七毫五絲 $3\frac{3}{4}\%$	四釐 4%	四釐二毫五絲 $4\frac{1}{4}\%$
1	.96852300	.96618357	.96385542	.96153846	.95923261
2	.93803681	.93351070	.92901727	.92455621	.92012721
3	.90851022	.90194271	.89543834	.88899636	.88261603
4	.87991305	.87144223	.86307310	.85480419	.84663408
5	.85221603	.84197317	.83187768	.82192711	.81211902
6	.82539083	.81350064	.80180981	.79031453	.77901105
7	.79941000	.78599096	.77282874	.75991781	.74725281
8	.77424698	.75941156	.74489517	.73069021	.71678926
9	.74087601	.73373097	.71797125	.70258674	.68756764
10	.72627216	.70891881	.69202048	.67556417	.65953730
11	.70341129	.68494571	.66700769	.64958093	.63264969
12	.68127002	.66178330	.64289898	.62459705	.60685822
13	.65982568	.63940415	.61966167	.60057409	.58211819
14	.63905635	.61778179	.59726426	.57747508	.55838676
15	.61894078	.59689062	.57567639	.55526450	.53562279
16	.59945838	.57670591	.55486881	.53390818	.51378685
17	.58058923	.55720378	.53481331	.51337325	.49284110
18	.56231402	.53836114	.51548271	.49362812	.47274926
19	.54461407	.52015569	.49685080	.47464242	.45347650
20	.52747125	.50256588	.47889234	.45638695	.43498945
21	.51086804	.48557090	.46158298	.43883360	.41725607
22	.49478745	.46915063	.44489926	.42195539	.40024563
23	.47921302	.45328563	.42881856	.40572633	.38392866
24	.46412884	.43795713	.41331910	.39012147	.36827689
25	.44951945	.42314699	.39837985	.37511630	.35326321
26	.43536993	.40883767	.38398058	.36068923	.33886159
27	.42166579	.39501224	.37010176	.34681657	.32504709
28	.40839302	.38165434	.35672459	.33347747	.31179577
29	.39553803	.36874815	.34383093	.32065141	.29908467
30	.38308768	.35627841	.33140331	.30831867	.28689177

現　價　表

利率 期數	四釐五毫 4½%	四釐七毫五絲 4¾%	五　釐 5%	五釐二毫五絲 5¼%	五釐五毫 5½%
1	.95693780	.95465394	.95238095	.95011876	.94786730
2	.91572995	.91136114	.90702948	.90272567	.89845242
3	.87629660	.87003737	.86383760	.85769660	.85161366
4	.83856134	.83058460	.82270247	.81491363	.80721674
5	.80245105	.79292086	.78352617	.77426473	.76513435
6	.76789574	.75696502	.74621540	.73564345	.72524583
7	.73482846	.72263964	.71068133	.69894865	.68743681
8	.70318513	.68987077	.67683936	.66408423	.65159887
9	.67290443	.65858785	.64490892	.63095888	.61762926
10	.64392768	.62872349	.61391325	.59948588	.58543058
11	.61619874	.60021335	.58467929	.56958278	.55491050
12	.58966386	.57299604	.55683742	.54117129	.52598152
13	.56427164	.54701293	.53032135	.51417699	.49856068
14	.53997286	.52220804	.50506795	.48852921	.47256937
15	.51672044	.49852797	.48101710	.46416077	.44793305
16	.40446932	.47592169	.45811152	.44100786	.42458109
17	.47317639	.45434051	.43629669	.41900984	.40244653
18	.45280037	.43373796	.41552065	.39810911	.38146590
19	.43330179	.41406065	.39573396	.37825094	.36157906
20	.41464286	.39529322	.37688948	.35938331	.34272896
21	.39678743	.37736823	.35894236	.34145683	.32486158
22	.37970089	.36025607	.34184987	.32442454	.30792567
23	.36335013	.34391987	.32557131	.30824185	.29187267
24	.34770347	.32832446	.31006791	.29286636	.27665656
25	.33273060	.31343624	.29530277	.27825783	.26223370
26	.31840248	.29922314	.28124073	.26437798	.24856275
27	.30469137	.28565455	.26784832	.25119048	.23560450
28	.29157069	.27270124	.25509364	.23866079	.22332181
29	.27901502	.26033531	.24294632	.22675609	.21167944
30	.26700002	.24853013	.23137745	.21544522	.20064402

現　價　表

利率 期數	五釐七毫五絲 $5\frac{3}{4}\%$	六釐 6%	六釐二毫五絲 $6\frac{1}{4}\%$	六釐五絲 $6\frac{1}{2}\%$	七釐 7%
1	.94562648	.94339623	.94117647	.93896714	.93457944
2	.89420944	.88999644	.88581315	.88165928	.87343873
3	.84558812	.83961928	.83370649	.82784909	.81629788
4	.79961051	.79209366	.78466493	.77732309	.76289521
5	.75613287	.74725817	.73850817	.72988084	.71298618
6	.71501927	.70496054	.69506652	.68533412	.66634222
7	.67614115	.66505711	.65418025	.64350621	.62274974
8	.63937697	.62741237	.61569906	.60423119	.58200910
9	.60461180	.59189846	.57948147	.56735323	.54393374
10	.57173692	.55839478	.54539432	.53272604	.50834929
11	.54064957	.52678753	.51331230	.50021224	.47509280
12	.51125255	.49696936	.48311746	.46968285	.44401196
13	.48345395	.46883902	.45469879	.44101676	.41496445
14	.45716685	.44230096	.42795180	.41410025	.38781724
15	.43230908	.41726505	.40277818	.38882652	.36244602
16	.40880291	.39364628	.37908533	.36509533	.33873460
17	.38657486	.37136442	.35678619	.34281251	.31657439
18	.36555542	.35034379	.33579877	.32188969	.29586392
19	.34567889	.33051301	.31604590	.30224384	.27650832
20	.32688311	.31180473	.29745497	.28379703	.25841900
21	.30910932	.29415540	.27995762	.26647608	.24151309
22	.29230196	.27750510	.26348952	.25021228	.22571317
23	.27640847	.26179726	.24799014	.23494111	.21094688
24	.26137917	.24697855	.23340248	.22060198	.19714662
25	.24716706	.23299863	.21967292	.20713801	.18424918
26	.23372772	.21981003	.20675099	.19449579	.17219549
27	.22101912	.20736795	.19458917	.18262515	.16093037
28	.20900153	.19563014	.18314274	.17147902	.15040221
29	.19763738	.18455674	.17236964	.16101316	.14056282
30	.18689114	.17411013	.16223025	.15118607	.13136712

現價表

利率 / 期數	七釐五毫 7½%	八釐 8%	八釐五毫 8½%	九釐 9%	九釐五毫 9½%
1	.93023256	.92592593	.29165899	.91743119	.91324201
2	.86533261	.85733882	.84945529	.84167999	.83401097
3	.80496057	.79383224	.78290810	.77218348	.76165385
4	.74880053	.73502985	.72157428	.70842521	.69557429
5	.69655863	.68058320	.66504542	.64993139	.63522767
6	.64796152	.63016963	.61294509	.59626733	.58011659
7	.60275490	.58349040	.56492635	.54703424	.52978684
8	.56070223	.54026888	.52066945	50186628	.48382360
9	.52158347	.50024897	.47987968	.46042778	.44184803
10	.48519393	.46319349	.44228542	.42241081	.40351419
11	.45134319	.42888286	.40763633	.38753285	.36850611
12	.41985413	.39711376	.37570168	.35553473	.33653526
13	.39056198	.36769792	.34626883	.32617865	.30733813
14	.36331347	.34046104	.31914178	.29924647	.28067410
15	.33796602	.31524170	.29413989	.27453804	.25632337
16	.31438699	.29189047	.27109667	.25186976	.23408527
17	.29245302	.27026895	.24985869	.23107318	.21377651
18	.27204932	.25024903	.23028458	.21199374	.19522969
19	.25306913	.23171206	.21224378	19448967	.17829195
20	.23541315	.21454821	.19561639	.17843089	.16282370
21	.21898897	.19865575	.18029160	.16369806	.14869744
22	.20371067	.18394051	.16616738	.15018171	.13579675
23	.18949830	.17031528	.15314965	.13778139	.12401530
24	.17627749	.15769934	.14115176	.12640494	.11325598
25	.16397906	.14601790	.13009378	.11596784	.10343012
26	.15253866	.13520176	.11990210	.10639251	.09445673
27	.14189643	.12518682	.11050885	.09760781	.08626185
28	.13199668	.11591372	.10185148	.08954845	.07877795
29	.12278761	.10732752	.09387233	.08215454	.07194333
30	.11422103	.09937733	.08651828	.07537114	.06570167

現 價 表

利率 期數	一分 10%				
1	.90909091				
2	.82644628				
3	.75131480				
4	.68301346				
5	.62092132				
6	.56447393				
7	.51315812				
8	.46650738				
9	.42409762				
10	.38554329				
11	.35049390				
12	.31863082				
13	.28966438				
14	.26333125				
15	.23939205				
16	.21762914				
17	.19784467				
18	.17985879				
19	.16350799				
20	.14864363				
21	.13513057				
22	12284597				
23	.11167816				
24	.10152560				
25	.09229600				
26	.08390545				
27	.07627768				
28	.06934335				
29	.06303941				
30	.05730855				

現價表(六釐以上)

利率 期數	六釐 6%	六釐二毫五絲 $6\frac{1}{4}\%$	六釐五毫 $6\frac{1}{2}\%$	六釐七毫五絲 $6\frac{3}{4}\%$	七釐 7%
1	0.94340	0.94118	0.93897	0.93677	0.93458
2	0.89000	0.88581	0.88166	0.87753	0.87344
3	0.83962	0.83371	0.82785	0.82205	0.81630
4	0.79209	0.78466	0.77732	0.77007	0.76290
5	0.74726	0.73851	0.72988	0.72137	0.71299
6	0.70496	0.69507	0.68533	0.67576	0.66634
7	0.66506	0.65418	0.64351	0.63303	0.62275
8	0.62741	0.61570	0.60423	0.59300	0.58201
9	0.59190	0.57948	0.56735	0.55551	0.54393
10	0.55839	0.54539	0.53273	0.52038	0.50835
11	0.52679	0.51331	0.50021	0.48748	0.47509
12	0.49697	0.48312	0.46968	0.45665	0.44401
13	0.46884	0.45470	0.44102	0.42778	0.41496
14	0.44230	0.42795	0.41410	0.40072	0.38782
15	0.41727	0.40278	0.38883	0.37539	0.36245
16	0.39365	0.37909	0.36510	0.35165	0.33873
17	0.37136	0.35679	0.34281	0.32942	0.31657
18	0.35034	0.33580	0.32189	0.30859	0.29586
19	0.33051	0.31605	0.30224	0.28907	0.27651
20	0.31180	0.29745	0.28380	0.27080	0.25842
21	0.29416	0.27996	0.26648	0.25367	0.24151
22	0.27751	0.26349	0.25021	0.23763	0.22571
23	0.26180	0.24799	0.23494	0.22261	0.21095
24	0.24698	0.23340	0 22060	0.20853	0.19715
25	0.23300	0.21967	0.20714	0.19535	0.18425

現價表（六釐以上）

利率 期數	七釐二毫五絲 $7\frac{1}{4}\%$	七釐五毫 $7\frac{1}{2}\%$	七釐七毫五絲 $7\frac{3}{4}\%$	八釐 8%	八釐二毫五絲 $8\frac{1}{4}\%$
1	0.93240	0.93023	0.92807	0.92593	0.92379
2	0.86937	0.86533	0.86132	0.85734	0.85338
3	0.81060	0.80496	0.79937	0.79383	0.78834
4	0.75581	0.74880	0.74188	0.73503	0.72826
5	0.70471	0.69656	0.68852	0.68058	0.67276
6	0.65708	0.64796	0.63899	0.63017	0.62149
7	0.61266	0.60275	0.59303	0.58349	0.57412
8	0.57124	0.56070	0.55038	0.54027	0.53037
9	0.53263	0.52158	0.51079	0.50025	0.48995
10	0.49662	0.48519	0.47405	0.46319	0.45261
11	0.46305	0.45134	0.43996	0.42888	0.41811
12	0.43175	0.41985	0.40831	0.39711	0.38625
13	0.40256	0.39056	0.37894	0.36770	0.35681
14	0.37535	0.36331	0.35169	0.34046	0.32962
15	0.34998	0.33797	0.32639	0.31524	0.30450
16	0.32632	0.31439	0.30292	0.29189	0.28129
17	0.30426	0.29245	0.28113	0.27027	0.25985
18	0.28369	0.27205	0.26091	0.25025	0.24005
19	0.26452	0.25307	0.24214	0.23171	0.22175
20	0.24663	0.23541	0.22473	0.21455	0.20485
21	0.22996	0.21899	0.20856	0.19866	0.18924
22	0.21442	0.20371	0.19356	0.18394	0.17482
23	0.19992	0.18950	0.17964	0.17032	0.16149
24	0.18641	0.17628	0.16672	0.15770	0.14919
25	0.17381	0.16398	0.15473	0.14602	0.13782

現價表(六釐以上)

利率 期數	八釐五毫 8½%	八釐七毫五絲 8¾%	九釐 9%	九釐二毫五絲 9¼%	九釐五毫 9½%
1	0.92166	0.91954	0.91743	0.91533	0.91324
2	0.84946	0.84555	0.84168	0.83783	0.83401
3	0.78291	0.77752	0.77218	0.76689	0.76165
4	0.72157	0.71496	0.70843	0.70196	0.69557
5	0.66505	0.65744	0.64993	0.64253	0.63523
6	0.61295	0.60454	0.59627	0.58813	0.58012
7	0.56493	0.55590	0.54703	0.53833	0.52979
8	0.52067	0.51117	0.50187	0.49275	0.48382
9	0.47988	0.47004	0.46043	0.45103	0.44185
10	0.44229	0.43222	0.42241	0.41284	0.40351
11	0.40764	0.39745	0.38753	0.37789	0.36851
12	0.37570	0.36547	0.35553	0.34589	0.33654
13	0.34627	0.33606	0.32618	0.31661	0.30734
14	0.31914	0.30902	0.29925	0.28980	0.28067
15	0.29414	0.28416	0.27454	0.26526	0.25632
16	0.27110	0.26130	0.25187	0.24280	0.23409
17	0.24986	0.24027	0.23107	0.22225	0.21378
18	0.23028	0.22094	0.21199	0.20343	0.19523
19	0.21224	0.20316	0.19449	0.18621	0.17829
20	0.19562	0.18682	0.17843	0.17044	0.16282
21	0.18029	0.17179	0.16370	0.15601	0.14870
22	0.16617	0.15796	0.15018	0.14280	0.13580
23	0.15315	0.14525	0.13778	0.13071	0.12402
24	0.14115	0.13357	0.12640	0.11964	0.11326
25	0.13009	0.12282	0.11597	0.10951	0.10343

現價表（六釐以上）

利率 / 期數	九釐七毫五絲 9¾%	一分 10%	一分五釐 15%	二分 20%	二分五釐 25%	三分 30%
1	0.91116	0.90909	0.8696	0.8333	0.8000	0.7692
2	0.83022	0.82645	0.7561	0.6944	0.6400	0.5917
3	0.75646	0.75131	0.6575	0.5787	0.5120	0.4552
4	0.68926	0.68301	0.5718	0.4823	0.4096	0.3501
5	0.62803	0.62092	0.4972	0.4019	0.3277	0.2693
6	0.57223	0.56447	0.4323	0.3349	0.2621	0.2072
7	0.52140	0.51316	0.3759	0.2791	0.2097	0.1594
8	0.47508	0.46651	0.3269	0.2326	0.1678	0.1226
9	0.43287	0.42410	0.2843	0.1938	0.1342	0.0943
10	0.39442	0.38554	0.2472	0.1615	0.1074	0.0725
11	0.35938	0.35049				
12	0.32745	0.31863				
13	0.29836	0.28966				
14	0.27185	0.26333				
15	0.24770	0.23939				
16	0.22056	0.21763				
17	0.20565	0.19784				
18	0.18738	0.17986				
19	0.17073	0.16351				
20	0.15556	0.14864				
21	0.14174	0.13513				
22	0.12915	0.12285				
23	0.11768	0.11168				
24	0.10722	0.10153				
25	0.09770	0.09230				

年　金　終　價　表

利率 期數	四　釐 4%	四釐五毫 4½%	五　釐 5%	五釐五毫 5½%
1	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000
2	2.04000000	2.04500000	2.05000000	2.05500000
3	3.12160000	3.13702500	3.15250000	3.16802500
4	4.24640000	4.27819113	4.31012500	4.34226638
5	5.41632256	5.47070973	5.52563125	5.58109103
5	6.63297546	6.71689166	6.80191281	6.88805103
7	7.89829448	8.01915179	8.14200845	8.26689384
8	9.21422626	9.38001362	9.54910888	9.72157300
9	10.58279531	10.80211423	11.02656432	11.25625951
10	12.00610712	12.28820937	12.57789254	12.87535379
11	13.48635141	13.84117879	14.20678716	14.58349825
12	15.02580546	15.46403184	15.91712652	16.38559065
13	16.62683768	17.15991327	17.71298285	18.28679814
14	18.29191119	18.93210937	19.59863199	20.29257203
15	20.02358764	20.78405429	21.57856359	22.40866350
16	21.82453114	22.71933673	23.65749177	24.64113999
17	23.69751239	24.74170689	25.84036636	26.99640269
18	25.64541288	26.85508370	28.13238467	29.48120483
19	27.67122940	29.06356246	30.53900391	32.10267110
20	29.77807858	31.37142277	33.06595410	34.86831801
21	31.96920172	33.78313680	35.71925181	37.78607550
22	34.24796979	36.30337795	38.50521440	40.86430065
23	36.61788858	38.93702996	41.43047512	44.11184669
24	39.08260412	41.68919631	44.50199887	47.53799825
25	41.64590829	44.56521015	47.72709882	51.15258816
26	44.31174462	47.57064460	51.11345376	54.96598051
27	47.08421440	50.71132361	54.66912645	58.98910943
28	49.96758298	53.99333317	58.40258277	63.23351045
29	52.96628630	57.42303316	62.32271191	67.71135353
30	56.08493775	61.00706966	66.43884750	72.43547797

年　金　終　價　表

利率 / 期數	六　釐 6%	六釐五毫 6½%	七　釐 7%	七釐五毫 7½%
1	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000
2	2.06000000	2.06500000	2.07000000	2.07500000
3	3.18360000	3.19922500	3.21490000	3.23062500
4	4.37461600	4.40717463	4.43994300	4.47292188
5	5.63709296	5.69364098	5.75073901	5.80839102
6	6.97531854	7.06372764	7.15329074	7.24402034
7	8.39383765	8.52286994	8.65402109	8.78732187
8	9.89746791	10.07685648	10.25980257	10.44637101
9	11.49131598	11.73185215	11.97798875	12.22984883
10	13.18079494	13.49442254	13.81644796	14.14708750
11	14.97164264	15.37156001	15.78359932	16.20811906
12	16.86994120	17.37071141	17.88845127	18.42372799
13	18.88213767	19.49980765	20.14064286	20.80550759
14	21.01506593	21.76729515	22.55048786	23.36592066
15	23.27596988	24.18216933	25.12902201	26.11836470
16	25.67252808	26.75401034	27.88805355	24.07724206
17	28.21287976	29.49302101	30.84021730	32.25803521
18	30.90565255	32.41006738	33.99903251	35.67738785
19	33.75999170	35.51672176	37.37896479	39.35319194
20	36.78559120	38.82530867	40.99549232	43.30468134
21	39.99272668	42.34895373	44.86517678	47.55253244
22	43.39229028	46.10163573	49.00573916	52.11897237
23	46.99582769	50.09824205	53.43614090	57.02789530
24	50.81557735	54.35462778	58.17667076	62.30498744
25	54.86451200	58.88767859	63.24903772	67.97786150
26	59.15638272	63.71537769	68.67647036	74.07620112
27	63.70576568	68.85687725	74.48382328	80.63191620
28	68.52811162	74.33257427	80.69769091	87.67930991
29	73.63979832	80.16419159	87.34652927	95.25525806
30	79.05818622	86.37486405	94.46078632	103.39940252

年 金 終 價 表

利率 期數	八釐 8%	八釐五毫 8½%	九釐 9%	九釐五毫 9½%
1	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000
2	2.08000000	2.08500000	2.09000000	2.09500000
3	3.24640000	3.26222500	3.27810000	3.29402500
4	4.50611200	4.53951413	4.57312900	4.60695738
5	5.86660096	5.92537283	5.98471061	6.04461833
6	7.33592904	7.42902952	7.52333456	7.61885707
7	8.92280336	9.06049702	9.20043468	9.34264849
8	10.63662763	10.83063927	11.02847380	11.23020009
9	12.48755784	12.75124361	13.02103644	13.29706910
10	14.48656247	14.83509932	15.19292972	15.56029067
11	16.64548746	17.09608276	17.56029339	18.03851828
12	18.97712646	19.54924979	20.14071980	20.75217752
13	21.49529658	22.21093603	22.95338458	23.72363438
14	24.21492030	25.09886559	26.01918919	26.97737965
15	27.15211393	28.23226916	29.36091622	30.54023072
16	30.32428304	31.63201204	33.00339868	34.44155263
17	33.75022569	35.32073306	36.97370456	38.71350013
18	37.45024374	39.32299538	41.30133797	43.39128265
19	41.44626324	43.66544998	46.01845839	48.51345450
20	45.76196430	48.37701323	51.16011964	54.12223267
21	50.42292144	53.48905036	56.76453041	60.26384478
22	55.45675516	59.03562940	62.87333815	66.98891003
23	60.89329557	65.05365790	69.53193858	74.35285649
24	66.76475922	71.58321882	76.78981305	82.41637785
25	73.10593995	78.66779242	84.70089623	91.24593375
26	79.95441515	86.35455478	93.32397689	100.91429745
27	87.35076836	94.69469193	102.72313481	111.50115571
28	95.33882983	103.74374075	112.96821694	123.09376551
29	103.96593622	113.56195871	124.13535646	135.78767323
30	113.28321111	124.21472520	136.30753855	149.68750218

年金終價表

利率 期數	一分 10%			
1	1.00000000			
2	2.10000000			
3	3.31000000			
4	4.64100000			
5	6.10510000			
6	7.71561000			
7	9.48717100			
8	11.43588810			
9	13.57947691			
10	15.93742460			
11	18.53116706			
12	21.38428377			
13	24.52271214			
14	27.97498336			
15	31.77248169			
16	35.94972986			
17	40.54470285			
18	45.59917313			
19	51.15909045			
20	57.27499949			
21	64.00249944			
22	71.40274939			
23	79.54302433			
24	88.49732676			
25	98.34705943			
26	109.18176538			
27	121.09994191			
28	134.20993611			
29	148.63092972			
30	164.49402269			

年金現價表

期數＼利率	四釐 4%	四釐五毫 $4\frac{1}{2}\%$	五釐 5%	五釐五毫 $5\frac{1}{2}\%$
1	0.96153846	0.95693780	0.95238095	0.94786730
2	1.88609467	1.87266775	1.85941043	1.84631971
3	2.77509103	2.74896435	2.72324803	2.69793338
4	3.62989522	3.58752570	3.54595050	3.50515012
5	4.45182233	4.38997674	4.32947667	4.27028448
6	5.24213686	5.15787248	5.07569206	4.99553031
7	6.00205467	5.89270094	5.78637340	5.68296712
8	6.73274487	6.59588607	6.46321276	6.33456599
9	7.43533161	7.26879050	7.10782168	6.95219525
10	8.11089578	7.91271818	7.72173493	7.53762583
11	8.76047671	8.52891692	8.30641422	8.09253633
12	9.38507376	9.11858078	8.86325164	8.61851785
13	9.98564785	9.68285242	9.39357299	9.11707853
14	10.56312293	10.22282528	9.89864097	9.58964790
15	11.11838743	10.73954573	10.37965804	10.03758094
16	11.65229561	11.23401505	10.83776956	10.46216203
17	12.16566885	11.70719143	11.27406625	10.86460856
18	12.65929697	12.15999180	11.68958690	11.24607447
19	13.13393940	12.59329359	12.08532086	11.60765352
20	13.59032634	13.00793645	12.46221034	11.95038249
21	14.02915995	13.40472388	12.82115271	12.27524406
22	14.45111533	13.78442476	13.16300258	12.58316973
23	14.85684167	14.14777489	13.48857388	12.87504240
24	15.24696314	14.49547837	13.79864179	13.15169895
25	15.62207994	14.82820896	14.09394457	13.41393266
26	15.98276918	15.14661145	14.37518530	13.66249541
27	16.32958575	15.45130282	14.64303362	13.89809991
28	16.66306322	15.74287351	14.89812726	14.12142172
29	16.98371463	16.02188853	15.14107358	14.33310116
30	17.29203330	16.28888854	15.37245103	14.53374517

年金現價表

利率 期數	六釐 6%	六釐五毫 6½%	七釐 7%	七釐五毫 7½%
1	0.94339623	0.93896714	0.93457944	0.93023256
2	1.83339267	1.82062642	1.80801817	1.79556517
3	2.67301195	2.64847551	2.62431604	2.60052574
4	3.46510561	3.42579860	3.38721126	3.34932627
5	4.21236379	4.15567944	4.10019744	4.04588490
6	4.91732433	4.84101356	4.76653966	4.69384642
7	5.58238144	5.48451977	5.38928940	5.29660132
8	6.20979381	6.08875096	5.97129851	5.85730355
9	6.80169227	6.65610419	6.51523225	6.37888703
10	7.36008705	7.18883022	7.02358154	6.86408096
11	7.88687458	7.68904246	7.49867434	7.31542415
12	8.38384394	8.15872532	7.94268630	7.73527827
13	8.85268296	8.59974208	8.35765074	8.12584026
14	9.29498393	9.01384233	8.74546799	8.48915373
15	9.71224899	9.40266885	9.10791401	8.82711974
16	10.10589527	9.76776418	9.44664860	9.14150674
17	10.47725969	10.11057670	9.76322299	9.43395976
18	10.82760348	10.43246638	10.05908691	9.70600908
19	11.15811649	10.73471022	10.33559524	9.95907821
20	11.46992122	11.01850725	10.59401425	10.19449136
21	11.76407662	11.28498333	10.83552733	10.41348033
22	12.04158172	11.53519562	11.06124050	10.61719101
23	12.30337898	11.77013673	11.27218738	10.80668931
24	12.55035753	11.99073871	11.46933400	10.98296680
25	12.78335616	12.19787672	11.65358318	11.14694586
26	13.00316619	12.39237251	11.82577867	11.29948452
27	13.21053414	12.57499766	11.98670904	11.44138095
28	13.40616428	12.74647668	12.13711125	11.57337763
29	13.59072102	12.90748984	12.27767407	11.69616524
30	13.76483115	13.05867591	12.40904118	11.81038627

年金現價表

利率 期數	八釐 8%	八釐五毫 8½%	九釐 9%	九釐五毫 9½%
1	0.92592593	0.92165899	0.91743119	0.91324201
2	1.78326475	1.77111427	1.75911119	1.74725298
3	2.57709699	2.55402237	2.53129467	2.50890683
4	3.31212684	3.27559666	3.23971988	3.20448112
5	3.99271004	3.94064208	3.88965126	3.83970879
6	4.62287966	4.55358717	4.48591859	4.41982538
7	5.20637006	5.11851352	5.03295284	4.94961222
8	5.74663894	5.63918297	5.53481911	5.43343581
9	6.24688791	6.11906264	5.99524689	5.87528385
10	6.71008140	6.56134806	6.41765770	6.27879803
11	7.13896426	6.96898439	6.80519055	6.64730414
12	7.53607802	7.34468607	7.16072528	6.98383940
13	7.90377594	7.69095490	7.48690392	7.29117753
14	8.24423698	8.01009668	7.78615039	7.57185163
15	8.55947869	8.30423658	8.06068843	7.82817500
16	8.85136916	8.57533325	8.31255819	8.06226028
17	9.12163811	8.82519194	8.54363137	8.27603678
18	9.37188714	9.05547644	8.75562511	8.47126647
19	9.60359920	9.26772022	8.95011478	8.64955842
20	9.81814741	9.46333661	9.12854567	8.81238212
21	10.01680316	9.64362821	9.29224373	8.96107956
22	10.20074366	9.80979559	9.44242544	9.09687631
23	10.37105895	9.96294524	9.58020683	9.22089161
24	10.52875828	10.10409700	9.70661177	9.33414759
25	10.67477619	10.23419078	9.82257930	9.43757770
26	10.80997795	10.35409288	9.92897211	9.53303443
27	10.93516477	10.46460174	10.02657992	9.61829629
28	11.05107849	10.56645321	10.11612837	9.69707423
29	11.15840601	10.66032554	10.19828291	9.76901756
30	11.25778334	10.74684382	10.27365404	9.83471924

年　金　現　價　表

利率 期數	一分 10%			
1	0.90909091			
2	1.73553719			
3	2.48685199			
4	3.16986545			
5	3.79078677			
6	4.35526070			
7	4.86841882			
8	5.33492620			
9	5.75902382			
10	6.14456711			
11	6.49506101			
12	6.81369182			
13	7.10335620			
14	7.36668746			
15	7.60607951			
16	7.82370864			
17	8.02155331			
18	8.20141210			
19	8.36492009			
20	8.51356372			
21	8.64869429			
22	8.77154026			
23	8.88321842			
24	8.98474402			
25	9.07704002			
26	9.16094547			
27	9.23722316			
28	9.30656651			
29	9.36960591			
30	9.42691447			

年賦金表

利率 期數	四釐 4%	四釐五毫 4½%	五釐 5%	五釐五毫 5½%
1	1.04000000	1.04500000	1.05000000	1.05500000
2	.53019608	.53399756	.53780488	.54161800
3	.36034854	.36377336	.36720856	.37065407
4	.27549005	.27874365	.28201183	.28529449
5	.22402711	.22779164	.23097480	.23417644
6	.19076100	.19387839	.19701747	.20017895
7	.16660961	.16970147	.17281982	.17596442
8	.14852783	.15160965	.15472181	.15786401
9	.13449299	.13757447	.14069008	.14383946
10	.12329094	.12637882	.12950458	.13266777
11	.11414904	.11724818	.12038889	.12357065
12	.10655217	.10966619	.11282541	.11602923
13	.10014373	.10327535	.10645577	.10968426
14	.09466897	.09782032	.10102397	.10427912
15	.08994110	.09311381	.09634229	.09962560
16	.08582000	.08901537	.09226991	.09558254
17	.08219852	.08541758	.08869914	.09204197
18	.07899333	.08223690	.08554622	.08891992
19	.07613862	.07940734	.08274501	.08615006
20	.07358175	.07687614	.08024259	.08367933
21	.07128011	.07460057	.07799611	.08146478
22	.06919881	.07254565	.07597051	.07947123
23	.06730906	.07068249	.07413682	.07766965
24	.06558683	.06898703	.07247090	.07603580
25	.06401196	.06743903	.07095246	.07454935
26	.06256738	.06602137	.06956432	.07319307
27	.06123854	.06471946	.06829186	.07195228
28	.06001298	.06352081	.06712253	.07081440
29	.05887993	.06241461	.06604551	.06976857
30	.05783010	.06139154	.06505144	.06880539

年 賦 金 表

利率 期數	六釐 6%	六釐五毫 6½%	七釐 7%	七釐五毫 7½%
1	1.06000000	1.06500000	1.07000000	1.07500000
2	.54543689	.54926150	.55309170	.55692771
3	.37410981	.37757570	.38105166	.38453763
4	.28859149	.29190274	.29522812	.29856751
5	.23739640	.24063454	.24389069	.24716472
6	.20336263	.20656831	.20979580	.21304489
7	.17913502	.18233137	.18555322	.18880032
8	.16103594	.16423730	.16746776	.17072702
9	.14702224	.15023803	.15348647	.15675716
10	.13586796	.13910469	.14237750	.14568593
11	.12679294	.13005521	.13335690	.13669747
12	.11927703	.12256817	.12590199	.12927783
13	.11296011	.11628256	.11965085	.12306420
14	.10758491	.11094048	.11434494	.11779737
15	.10296276	.10635278	.10979462	.11328724
16	.09895214	.10237757	.10585765	.10939116
17	.09544480	.09890633	.10242519	.10600003
18	.09235654	.09585461	.09941260	.10302896
19	.08962086	.09315575	.09675301	.10041090
20	.08718456	.09075640	.09439293	.09809219
21	.08500455	.08861333	.09228900	.09602937
22	.08304557	.08669120	.09040577	.09418687
23	.08127848	.08496078	.08871393	.09253528
24	.07967900	.08339770	.08718902	.09105008
25	.07822672	.08198148	.08581052	.08971067
26	.07690435	.08069480	.08456103	.08849961
27	.07569717	.07952228	.08342573	.08740204
28	.07459255	.07845305	.08239193	.08640520
29	.07357961	.07747440	.08144865	.08549811
30	.07264891	.07657744	.08058640	.08467124

年 賦 金 表

利率 期數	八 釐 8%	八釐五毫 8½%	九 釐 9%	九釐五毫 9½%
1	1.08000000	1.08500000	1.09000000	1.09500000
2	.56076923	.56461631	.56846890	.57232697
3	.38803351	.39153925	.39505476	.39857997
4	.30192080	.30528789	.30866866	.31206300
5	.25045645	.25376575	.25709246	.26043642
6	.21631539	.21960708	.22291978	.22625328
7	.19207240	.19536922	.19869052	.20203603
8	.17401476	.17733065	.18067438	.18404561
9	.16007971	.16342372	.16679880	.17020454
10	.14902949	.15240771	.15582009	.15926615
11	.14007634	.14349293	.14694666	.15043692
12	.13269502	.13615286	.13965066	.14318771
13	.12652181	.13002287	.13356656	.13715206
14	.12129685	.12484244	.12843317	.13206809
15	.11682954	.12042046	.12405888	.12774370
16	.11297687	.11661354	.12029991	.12403470
17	.10962943	.11331198	.11704625	.12083078
18	.10670210	.11043041	.11421229	.11804610
19	.10412763	.10790140	.11173041	.11561284
20	.10185221	.10567097	.10954647	.11347670
21	.09983225	.10369541	.10761663	.11159370
22	.09803207	.10193892	.10590499	.10992784
23	.09642217	.10037193	.10438188	.10844938
24	.09497796	.09896975	.10302256	.10713351
25	.09367878	.09771168	.10180625	.10595939
26	.09250713	.09658016	.10071536	.10490940
27	.09144809	.09556025	.09973491	.10396852
28	.09048891	.09463914	.09885205	.10312389
29	.08961854	.09380577	.09805572	.10236444
30	.08882743	.09305058	.09733635	.10168058

年賦金表

利率 期數	一分 10%			
1	1.10000000			
2	.57619048			
3	.40211480			
4	.31547080			
5	.26379748			
6	.22960738			
7	.20540550			
8	.18744402			
9	.17364054			
10	.16274539			
11	.15396314			
12	.14676332			
13	.14077852			
14	.13574622			
15	.13147378			
16	.12781662			
17	.12466413			
18	.12193022			
19	.11954687			
20	.11745962			
21	.11562439			
22	.11400506			
23	.11257181			
24	.11129978			
25	.11016807			
26	.10915904			
27	.10825764			
28	.10745101			
29	.10672807			
30	.10607925			

利息計算用名詞英漢對照表

A

Accumulation factor, 累積因子數.
,, of discount, 折扣累積數.
,, schedule, 累積明細表.
Actuaries' or combined experience mortality table, 精算人經驗死亡率表.
American experience mortality table, 美國經驗死亡率表.
Amortization, 償還; 還本; 年賦償還法.
Amortization schedule, 償還明細表.
Amount, 本利合計, 終價.
Amount due, 期日支付數; 到期支付數.
Amount of annuity, 年金終價.
Annual instalment, 年賦償還.
Annual rent, 年賦金; 年金額.
Annuity, 年金.
Annuity certain, 確實年金; 確定年金.
,, due, 期首年金.
,, that 1 will purchase, 以 1 爲年金現價.
Annuity that will amount to 1, 以 1 爲年金終價.
Approximation method, 比例部分法.
Arithmetical means, 算術中數; 相加平均數.
Arithmetical progression, 算術級數; 等差級數.

B

Banker's discount, 銀行貼現.
Benefit, 利益.
Binomial theorem, 二項式定理.
Bond, 債票.
Bond yield, 債票收益.
Book value, 帳面價值, 本位幣.
Brigg's logarithm, 布氏對數.

C

Capitalization, 估計資本; 求永續年金之現價法.
Capitalized cost, 成本加永續年金之現價數.
Cash surrender value, 退費; 退還現款數.
Characteristic, 指標.
Combinations, 排列法.
Commercial discount, 商業貼現.
Common logarithm, 普通對數.
Commutation columns, 變換數.
Compound interest, 複利法.
Contingent annuity. 事變年金.
Continued process, 連續法.
Continuous annuity, 繼續年金.
Convergent series, 收斂級數.
Conversion interval, 複利期間.
Convertation, 換算.

D

Death rate, 死亡率.
Decreasing annuity, 遞減年金.
Deferred annuity, 延期年金.
Deferred life annuity, 延期生命年金; 延期人壽年金.
Depreciation, 折減; 折舊.
,, fund, 折減償却金.
Discount, 折扣; 貼現; 貼現息.
Discount on bond, 債票折價.
Divergent series, 發散級數; 開展級數.

E

Effective rate of discount, 眞貼現率.
Effective rate of interest, 眞利率; 實得利率; 實際利率.
Endowment insurance, 養老保險.
Equated maturity, 平均期日.
Equated time, 劃一期限.
Equation of payments, 平均期日法; 付款均一.
Expansion, 展開式.
Exponent, 指數; 方數.
Exponential theorem, 指數定理.

F

Final value, 終價.
Finite difference, 定限差.
Forborne annuity, 墊收年金.
Force of discount, 貼現力.
,, ,, interest, 利力.
Functions, 函數.

G

General term, 公項.
Geometrical means, 幾何中數; 相乘平均.

Geometrical progression, 幾何級數;等比級數.
Gross or office premium, 總保費.

I

Immediate annuity, 卽時年金;期末年金.
Income, 收益.
Increasing annuity, 遞加年金.
Initial value, 首數.
Instalment bond, 年賦償還債票.
Interest, 利息.
Interpolation method, 插入法;補間法.

J

Joint life annuity, 聯合生命年金;聯合人壽年金.

L

Leading difference, 首數.
Life annuity, 生命年金;人壽年金.
Limited annuity, 定期年金;有限年金.
Limited payment life policy, 限年付款終身年金.
Loading, 開支分攤費.
Loan value, 借款價率.
Logarithm, 對數.
Logarithmic series, 對數級.

M

Mantissa, 假數.

N

Napierian logarithm, 那氏對數.
Natural logarithm, 自然對數.
Net annual premium, 每年純保費.
,, profit, 純利益;純盈利.
,, single premium, 一次純保費.
Nominal amount, 額面金額.
,, rate, 名稱利率;虛利率.
,, rate of discount, 名稱貼現率.

O

One per cent method, 一釐法.
Ordinary life policy, 普通終身保險.
Ordinary or immediate annuity, 普通年金;期末年金.

P

Par value of bond, 債票平價.
Payable half yearly, 半年付.
,, m time a year, 每年m次付.
,, quarterly, 三個月付;按季付.
Perpetuity, 永續年金.
Premium, 保險費;保費.
Present value, 現價.
,, worth, 現價.
Price to be paid on redemption, 償還金額.
Principal, 本金.
Probability, 偶然律;公算論.
Product, 積數.
Purchase price of bond, 債票買價.

R

Rate of discount, 貼現率;貼現息率.
,, ,, dividend, 股息率.
,, ,, interest, 利率.
,, ,, interest borne by annuity, 年金利率.
Rate of interest realized by invester, 投資利率.
Rate of profit, 盈利率;利益率.
Rate per annum, 週息;年息.
,, ,, diem, 日息.
,, ,, mense, 月息.
Redemption fund, 償還準備金.
Residual value, 殘價.

S

Simple interest, 單利法.
Sinking fund, 償債基金;均等分還.
Surrender charge, 退保應攤費.

T

Temporary annuity, 生存年金.
Term, 用期.
Term insurance, 定期保險.
Terminal reserve, 期終準備金.
The third, tenth and tenth rule, 除三遞退法.
To convert, 轉化.
True discount, 眞貼現.

V

Valuation of bond, 債票估價.
Variable, 變數.
Variable quantity, 變數.
Varying annuity, 變額年金.
Verification or checking formula, 檢查式.

W

Whole life insurance, 終身保險.
Working formula, 計算式.

Y

Yield, 收益.

表 I. 自然數之四位對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449
111	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488
112	0492	0496	0500	0504	0508	0612	0515	0519	0523	0527
113	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565
114	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603
115	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641
116	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678
117	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715
118	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752
119	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788
120	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824
121	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860
122	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896
123	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931
124	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966
125	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000
126	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035
127	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069
128	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1093	1096	1099	1103
129	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136
130	1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169
131	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202
132	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235
133	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268
134	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300
135	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332
136	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1355	1358	1361	1364
137	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396
138	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427
139	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458
140	1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489
141	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520
142	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550
143	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581
144	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611
145	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641
146	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670
147	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700
148	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729
149	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758
150	1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787
數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

比例部分

尾碼 \ 差	5	4	3	2
1	0.5	0.4	0.3	0.2
2	1.0	0.8	0.6	0.4
3	1.5	1.2	0.9	0.6
4	2.0	1.6	1.2	0.8
5	2.5	2.0	1.5	1.0
6	3.0	2.4	1.8	1.2
7	3.5	2.8	2.1	1.4
8	4.0	3.2	2.4	1.6
9	4.5	3.6	2.7	1.8

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787
151	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816
152	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844
153	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872
154	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901
155	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928
156	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956
157	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984
158	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011
159	2014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038
160	2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066
161	2068	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092
162	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119
163	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146
164	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172
165	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198
166	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225
167	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251
168	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276
169	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302
170	2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327
171	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353
172	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378
173	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403
174	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428
175	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453
176	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477
177	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502
178	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526
179	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550
180	2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574
181	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598
182	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622
183	2625	2627	2629	2632	2634	2636	2639	2641	2643	2646
184	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669
185	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693
186	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716
187	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739
188	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762
189	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785
190	2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808
191	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831
192	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853
193	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876
194	2878	2880	2883	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898
195	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920
196	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942
197	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964
198	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986
199	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3006	3008
200	3010	3012	3015	3017	3019	3021	3023	3025	3028	3030
數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

比例部分

尾碼	差 3
1	0.3
2	0.6
3	0.9
4	1.2
5	1.5
6	1.8
7	2.1
8	2.4
9	2.7

尾碼	差 2
1	0.2
2	0.4
3	0.6
4	0.8
5	1.0
6	1.2
7	1.4
8	1.6
9	1.8

表1. 自然數之四位對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5900
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

比例部分

尾碼	差 22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
1	2.2	2.1	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1
2	4.4	4.2	4.0	3.8	3.6	3.4	3.2	3.0	2.8	2.6	2.4	2.2
3	6.6	6.3	6.0	5.7	5.4	5.1	4.8	4.5	4.2	3.9	3.6	3.3
4	8.8	8.4	8.0	7.6	7.2	6.8	6.4	6.0	5.6	5.2	4.8	4.4
5	11.0	10.5	10.0	9.5	9.0	8.5	8.0	7.5	7.0	6.5	6.0	5.5
6	13.2	12.6	12.0	11.4	10.8	10.2	9.6	9.0	8.4	7.8	7.2	6.6
7	15.4	14.7	14.0	13.3	12.6	11.9	11.2	10.5	9.8	9.1	8.4	7.7
8	17.6	16.8	16.0	15.2	14.4	13.6	12.8	12.0	11.2	10.4	9.6	8.8
9	19.8	18.9	18.0	17.1	16.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	9.9

表1 自然數之四位對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

比例部分

尾碼	差 10	差 9	差 8	差 7	差 6	差 5	差 4
1	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
2	2.0	1.8	1.6	1.4	1.2	1.0	0.8
3	3.0	2.7	2.4	2.1	1.8	1.5	1.2
4	4.0	3.6	3.2	2.8	2.4	2.0	1.6
5	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0
6	6.0	5.4	4.8	4.2	3.6	3.0	2.4
7	7.0	6.3	5.6	4.9	4.2	3.5	2.8
8	8.0	7.2	6.4	5.6	4.8	4.0	[illegible]
9	9.0	8.1	7.2	6.3	5.4	4.5	3.6

中華民國十二年九月初版
中華民國二十一年九月國難後第一版
中華民國二十四年五月國難後第三版

經濟叢書社叢書 財政[illegible]

每冊[illegible]
外埠[illegible]

編著者 [illegible]

發行人 [illegible] 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

一七五三上
滬