Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 1

Riemannsche Flächen sind Flächen, die „lokal“ so „aussehen“ wie eine offene Kreisscheibe innerhalb der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Deshalb nimmt die Theorie der riemannschen Flächen immer wieder Bezug auf Eigenschaften von Teilmengen der komplexen Zahlen und von darauf definierten Funktionen. Letzteres ist der Gegenstand der (komplexen) Funktionentheorie, die das lokale Fundament für die riemannschen Flächen bildet.

Holomorphe Funktionen

Wir fassen einige wichtige Ergebnisse der komplexen Funktionentheorie zusammen. In den Anfängervorlesungen werden differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bzw. von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ (und höherdimensionale Varianten in Analysis II) in der Regel parallel behandelt, wir verwenden $\mathbb{K}$ als gemeinsames Symbol für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Beispielsweise ist die Definition der Differenzierbarkeit (und zwar egal, ob man mit dem Limes im Sinne von Definition 18.2 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) oder mit linearer Approximierbarkeit im Sinne von Satz 18.5 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) arbeitet) unabhängig vom Grundkörper - im reellen Fall ist der Limes über einem Intervall zu nehmen, im komplexen Fall über einer offenen Kreisumgebung. Bei wichtigen Gesetzmäßigkeiten wie der Produktregel, der Quotientenregel, der Kettenregel, der Ableitung der Umkehrfunktion etc. gibt es weder in der Formulierung noch im Beweis einen Unterschied. Es gibt aber auch Aspekte der Differentialrechnung, wo sich die reelle von der komplexen Situation unterscheidet. Die Besonderheiten in der komplexen Situation werden in der (komplexen) Funktionentheorie behandelt. Grundsätzlich kann man sagen, dass die komplexe Differenzierbarkeit sehr viel stärkere Implikationen mit sich führt als die reelle Differenzierbarkeit. Wir erwähnen ohne Beweis einige Hauptresultate der Funktionentheorie, im Reellen ist es sehr einfach, Gegenbeispiele zu diesen Aussagen anzugeben.

Definition 1.1. Eine auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ definierte Funktion

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$$

heißt *holomorph*, wenn sie komplex-differenzierbar ist.

Polynome, rationale Funktionen, die Exponentialfunktion, die trigonometrischen Funktionen sind komplex-differenzierbar, also holomorph. Warum ein neuer Begriff? Von holomorph spricht man eigentlich nur dann, wenn der folgende Satz schon bekannt ist und man dann beliebig zwischen den verschiedenen Konzepten hin- und herwechseln kann.

Satz 1.2. *Für eine auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ definierte Funktion*

$$f: U \longrightarrow \mathbb{C}$$

sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist komplex-differenzierbar.*
(2) *f ist unendlich oft komplex differenzierbar.*
(3) *f lässt sich in jedem Punkt in eine Potenzreihe entwickeln.*

Eine diskrete Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Teilmenge mit der Eigenschaft, dass es zu jedem Punkt $P \in D$ eine Kreisumgebung $U(P,r)$ mit $U(P,r) \cap D = \{P\}$ gibt. Polynome $\neq 0$ besitzen nach Korollar 11.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) nur endlich viele Nullstellen und endliche Teilmengen sind diskret. Aber auch die trigonometrischen Funktionen und die komplexe Exponentialfunktion besitzen eine diskrete (aber nicht endliche) Nullstellenmenge. Dies gilt für beliebige holomorphe Funktionen.

Satz 1.3. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine zusammenhängende offene Teilmenge und $f: U \to \mathbb{C}$ eine von der Nullfunktion verschiedene holomorphe Funktion. Dann ist die Nullstellenmenge von f diskret (in U).*

Eine zusammenhängende offene Teilmenge in $\mathbb{C}$ nennt man auch ein *Gebiet*. Die beiden folgenden Aussagen (die zweite heißt *Identitätssatz*) folgen daraus unmittelbar.

Korollar 1.4. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine zusammenhängende offene Teilmenge und $f: U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn die Nullstellenmenge von f einen Häufungspunkt in U besitzt, so ist f die Nullfunktion.*

Beweis. Dies ist eine Umformulierung von Satz 1.3. □

Es kann dabei aber durchaus sein, dass die Nullstellenmenge einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ besitzt.

Korollar 1.5. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine zusammenhängende offene Teilmenge und seien $f, g: U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Die Übereinstimmungsmenge von f und g, also $\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ besitze einen Häufungspunkt in U. Dann ist $f = g$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Korollar 1.4, wenn man die Differenz $f - g$ betrachtet. □

Die beiden folgenden Sätze heißen *Maximumsprinzip* und *Satz von Liouville*.

Satz 1.6. *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft: Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$ mit*

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|$$

für alle $z \in G$. Dann ist f konstant.

Satz 1.7. *Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die beschränkt sei. Dann ist f konstant.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 1.6. □

Die Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung

Die komplexen Zahlen bilden einen zweidimensionalen reellen Vektorraum mit der reellen Basis 1 und i. Entsprechend kann man eine auf einer (zumeist offenen) Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$ definerte Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ auch als eine Abbildung $G \to \mathbb{R}^2$ auffassen und die komplexe Differenzierbarkeit in der einen Variablen z mit der reellen partiellen Differenzierbarkeit der beiden Komponentenfunktionen bezüglich den reellen Koordinaten x und y in Beziehung setzen. Die Bedingungen in der folgenden Aussage heißen die *Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen*.

Satz 1.8. *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine im Punkt $P \in G$ reell-differenzierbare Abbildung. Es sei $f = g + \mathrm{i}h$ mit reellwertigen Funktionen $g, h\colon G \to \mathbb{R}$. Sei $z = x + \mathrm{i}y$. Dann ist f genau dann in P komplex-differenzierbar, wenn für die reellen partiellen Ableitungen die Beziehungen*

$$\frac{\partial g}{\partial y}(P) = -\frac{\partial h}{\partial x}(P) \text{ und } \frac{\partial h}{\partial y}(P) = \frac{\partial g}{\partial x}(P)$$

gelten.

Beweis. Die Jacobi-Matrix im Punkt P ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(P) & \frac{\partial g}{\partial y}(P) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(P) & \frac{\partial h}{\partial y}(P) \end{pmatrix}.$$

Diese beschreibt eine reell-lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

bezüglich der reellen Basis 1 und i und die komplexe Differenzierbarkeit bedeutet, dass sie auch komplex-linear ist. Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl $a + b\mathrm{i}$ wird reell durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

beschrieben, und die Bedingungen im Satz beschreiben genau diese Beziehungen. □

Bei einer reell differenzierbaren Abbildung

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist das totale Differential in einem Punkt $P \in \mathbb{C}$ eine reell-lineare Abbildung

$$(Df)_P\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Diese wird zumeist durch eine Matrix bezüglich der reellen Sandardbasis 1 und i beschrieben. Nach Lemma Anhang 1.2 kann man jede reell-lineare Abbildung zwischen komplexen Vektorräumen in eindeutiger Weise als eine Summe einer komplex-linearen und einer komplex-antilinearen Abbildung schreiben. Im Fall der reellen Differenzierbarkeit setzt man daher

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Es gilt dann umgekehrt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{i}\left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right).$$

Korollar 1.9. *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine reell-differenzierbare Abbildung. Genau dann ist f auf G komplex-differenzierbar, wenn $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ auf G gilt. In diesem Fall ist*

$$f' = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Beweis. Wir schreiben $f = g + h\mathrm{i}$ mit reellwertigen Funktionen. Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial x} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right)\right).\end{aligned}$$

Die Bedingungen in Satz 1.8 für die komplexe Differenzierbarkeit besagen gerade, dass die beiden Komponentenfunktionen gleich 0 sind. Es ist generell

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Unter der Voraussetzung verschwindet der vordere zweite Summand. Daher ist $\frac{\partial f}{\partial z}(P)$ gleich der ersten Spalte der Jacobi-Matrix, und dies ist $f'(P)$. $\square$

Wenn man für eine reell-differenzierbare Funktion $f = g + \mathrm{i}h$ zerlegt, so ist

$$\begin{aligned}&(Df)_P\\ =\ &\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)\\ =\ &\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(P) & \frac{\partial g}{\partial y}(P) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(P) & \frac{\partial h}{\partial y}(P) \end{pmatrix}\\ =\ &\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(P) + \frac{\partial h}{\partial y}(P) & -\frac{\partial h}{\partial x}(P) + \frac{\partial g}{\partial y}(P) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(P) - \frac{\partial g}{\partial y}(P) & \frac{\partial g}{\partial x}(P) + \frac{\partial h}{\partial y}(P) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(P) - \frac{\partial h}{\partial y}(P) & \frac{\partial h}{\partial x}(P) + \frac{\partial g}{\partial y}(P) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(P) + \frac{\partial g}{\partial y}(P) & -\frac{\partial g}{\partial x}(P) + \frac{\partial h}{\partial y}(P) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

die Zerlegung des totales Differentials bzw. der Jacobi-Matrix in $\mathbb{C}$-lineare und antilineare Matrizen. Dabei ist f genau dann holomorph, wenn die zweite Matrix zur Nullmatrix wird.

Umkehrabbildung und implizite Abbildungen

Zu den wichtigsten Sätzen aus der Analysis 2 gehören der Satz über die Umkehrabbildung und der Satz über implizite Abbildungen, an deren komplexe Versionen wir erinnern.

Satz 1.10. *Es seien V_1 und V_2 endlichdimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume, sei $G \subseteq V_1$ offen und es sei*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt derart, dass das totale Differential

$$(D\varphi)_P$$

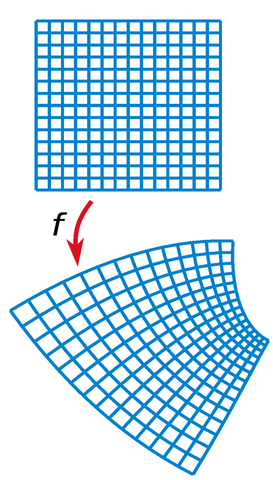
bijektiv ist. Dann gibt es eine offene Menge $U_1 \subseteq G$ und eine offene Menge $U_2 \subseteq V_2$ mit $P \in U_1$ und mit $\varphi(P) \in U_2$ derart, dass φ eine Bijektion

$$\varphi|_{U_1}\colon\, U_1 \longrightarrow U_2$$

induziert, und dass die Umkehrabbildung

$$(\varphi|_{U_1})^{-1}\colon\, U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist.



Eine biholomorphe Abbildung besitzt eine weitere starke Eigenschaft, sie ist winkeltreu.

Wir nennen eine bijektive holomorphe Abbildung zwischen offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$ *biholomorph*, der Satz behauptet also, dass eine komplex-differenzierbare Abbildung, wenn das totale Differential in einem Punkt bijektiv ist, dort auf einer offenen Umgebung bereits eine biholomorphe Abbildung induziert. Schon die eindimensionale Situation von diesem Satz ist eine starke Aussage. Wir formulieren sie direkt für holomorphe Funktionen.

KOROLLAR 1.11. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $P \in U$ ein Punkt und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f'(P) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $P \in V \subseteq U$ und eine offene Umgebung $f(P) \in W \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass die Einschränkung von f auf V biholomorph zu W ist.*

Beweis. Dies ist der eindimensionale Spezialfall von Satz 1.10. □

SATZ 1.12. *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und sei*

$$\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ und es sei

$$Z = \varphi^{-1}(\varphi(P))$$

die Faser durch P. Das totale Differential $(D\varphi)_P$ sei surjektiv. Dann gibt es eine offene Menge $P \in W$, $W \subseteq G$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{C}^{n-m}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi\colon V \longrightarrow W$$

derart, dass $\psi(V) \subseteq Z \cap W$ ist und ψ eine Bijektion

$$\psi\colon V \longrightarrow Z \cap W$$

induziert. Die Abbildung ψ ist in jedem Punkt $Q \in V$ regulär und für das totale Differential von ψ gilt

$$(D\varphi)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0.$$

Der Satz behauptet insbesondere, dass die Faser lokal in Bijektion zu einer offenen Menge des $\mathbb{C}^{n-m}$ steht. Man kann aber im Moment noch nicht sagen, dass die Faser lokal biholomorph zum $\mathbb{C}^{n-m}$ ist, da wir noch keine holomorphe Struktur auf der Faser erklärt haben. Dies ist eben eine der Aufgaben der komplexen Analysis, wozu die riemannschen Flächen gehören. Für die Theorie der riemannschen Flächen ist bereits der Fall $n = 2$ und $m = 1$ entscheidend. Die Stärke der Aussage zeigt sich in der folgenden Anwendung über die Existenz von Wurzeln aus Funktionen.

SATZ 1.13. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge, $P \in U$ ein Punkt und $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(P) \neq 0$. Es sei $k \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es eine offene Umgebung $P \in V \subseteq U$ und eine holomorphe Funktion $h\colon V \to \mathbb{C}$ mit $f = h^k$.*

Beweis. Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$\varphi\colon\ U \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ (z,w) \longmapsto f(z) - w^k,$$

in zwei Variablen, es sei $Q \in \mathbb{C}$ ein Punkt mit $Q^k = f(P)$. Es ist $\varphi(P,Q) = 0$. Die Abbildung φ besitzt die partiellen Ableitungen $f'(z)$ und kw^{k-1}. Im Punkt (P,Q) ist definitiv die zweite partielle Ableitung $\neq 0$, daher ist das totale Differential in diesem Punkt surjektiv und man kann (eine explizite Version von) Satz 1.8 anwenden. D.h. es gibt eine auf einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktion

$$V \longrightarrow \mathbb{C}^2,\ z \longmapsto (z, h(z)),$$

die auf der Faser von φ über 0 liegt. Damit ist

$$\varphi(z, h(z)) = f(z) - h(z)^n = 0,$$

also $h(z)^n = f(z)$. □

Abbildungsverzeichnis