Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 19

Divisoren

Eine meromorphe Funktion $f \neq 0$ auf einer riemannschen Fläche X besitzt in jedem Punkt $x \in X$ eine wohldefinierte Ordnung, die durch eine ganze Zahl gegeben ist. In einer lokalen Beschreibung als Laurentreihe mit dem lokalen Parameter z ist die Ordnung die ganze Zahl n mit

$$f(z) = z^n \cdot h$$

mit einer holomorphen nullstellenfreien Funktion h. Bei positiven n liegt in dem Punkt eine Nullstelle der Ordnung n vor und im negativen Fall liegt eine Polstelle der Ordnung $-n$ vor. Dieses für die meromorphe Funktion charakteristische Null- und Polstellenverhalten fasst man in dem folgenden Konzept zusammen.

Definition 19.1. Es sei X eine zusammenhängende riemannsche Fläche und $f \neq 0$ eine meromorphe Funktion auf X. Dann nennt man die formale Summe

$$\sum_{x \in X} \operatorname{ord}_x(f) \cdot x$$

den *Hauptdivisor* zu f. Er wird mit $\operatorname{div}(f)$ bezeichnet.

Beispiel 19.2. Es seien $P, Q \in \mathbb{C}[T]$ Polynome $\neq 0$ mit den Faktorzerlegungen $P = c \prod_{a \in A} (T-a)^{r_a}$ bzw. $Q = d \prod_{a \in A} (T-a)^{s_a}$, wobei A eine endliche Menge sei, die alle Nullstellen von P und von Q umfasse. Dann ist der Hauptdivisor zur rationalen Funktion P/Q gleich

$$\operatorname{div}(P/Q) = \sum_{a \in A} (r_a - s_a) \cdot a.$$

Beispiel 19.3. Die Identität auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, also die meromorphe Funktion z, besitzt den Hauptdivisor $0 - \infty$, wenn wir mit z die Variable auf $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und mit ∞ den unendlich fernen Punkt bezüglich dieser Einbettung bezeichnen.

Wegen Satz 3.5 bzw. der Definition von meromorphen Funktionen ist die Menge der Punkte, in denen die Ordnung nicht 0 ist, wo also eine Nullstelle oder ein Polstelle vorliegt, eine diskrete abgeschlossene Menge. Außerhalb dieser diskreten Menge ist die Funktion holomorph und invertierbar. Der Hauptdivisor ist also ein Divisor im Sinne der folgenden Definition.

Definition 19.4. Es sei X eine riemannsche Fläche. Man nennt eine formale Summe

$$\sum_{x \in X} n_x \cdot x$$

mit $n_x \in \mathbb{Z}$ und der Eigenschaft, dass außerhalb einer diskreten Teilmenge $T \subset X$ die Zahlen $n_x = 0$ sind, einen *Divisor* auf X.

Man spricht auch von einem *Weildivisor*. Einen Divisor kann man also schreiben als

$$D = \sum_{x \in T} n_x x$$

mit einer diskreten Teilmenge $T \subseteq X$ und mit $n_x \neq 0$ für $x \in T$. Man nennt T dann den *Träger* des Divisors. Für einen konkreten Divisor in $\mathbb{C}$ oder einer Teilmenge davon oder in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ besteht eine Verwechslungsgefahr zwischen den ganzzahligen Vorfaktoren und den Bezeichnungen für die Punkte. Diese kann man umgehen, indem man beispielsweise $7 \cdot \{1\} - 5 \cdot \{4\} + 3 \cdot \{\infty\}$ schreibt.

Definition 19.5. Es sei X eine riemannsche Fläche. Man nennt die Menge aller Divisoren auf X mit der punktweisen Addition die *Divisorengruppe* von X. Sie wird mit $\operatorname{Div}(X)$ bezeichnet.

Die Theorie unterscheidet sich wesentlich danach, ob die riemannsche Fläche kompakt oder nichtkompakt ist. Der Träger des Divisors ist stets eine abgeschlossene diskrete Teilmenge, im kompakten Fall bedeutet dies aber bereits, dass diese Menge endlich ist.

Definition 19.6. Man nennt einen Divisor

$$\sum_{x \in X} n_x \cdot x$$

auf einer riemannschen Fläche X *effektiv*, wenn $n_x \geq 0$ für alle $x \in X$ ist.

Lemma 19.7. *Es sei $f \neq 0$ eine meromorphe Funktion auf einer zusammenhängenden riemannschen Fläche X. Dann ist f genau dann holomorph, wenn der Hauptdivisor $\operatorname{div}(f)$ effektiv ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 19.1. □

Lemma 19.8. *Es sei X eine zusammenhängende riemannsche Fläche mit dem Körper $\mathcal{M}(X)$ der meromorphen Funktionen. Dann ist die Zuordnung*

$$\mathcal{M}(X)^\times \longrightarrow \operatorname{Div}(X),\ f \longmapsto \operatorname{div}(f),$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Siehe Aufgabe 19.3. □

Das Bild dieses Gruppenhomomorphismus ist die Gruppe der Hauptdivisoren, sie wird mit $\operatorname{HDiv}(X)$ bezeichnet.

Definition 19.9. Zwei Divisoren D_1 und D_2 auf einer zusammenhängenden riemannschen Fläche heißen *linear äquivalent*, wenn ihre Differenz $D_1 - D_2$ ein Hauptdivisor ist.

Definition 19.10. Es sei X eine zusammenhängende riemannsche Fläche mit dem Körper $\mathcal{M}(X)$ der meromorphen Funktionen. Man nennt die Restklassengruppe

$$\operatorname{Div}(X)/\operatorname{HDiv}(X)$$

die *Divisorenklassengruppe* von X. Sie wird mit $\operatorname{DKG}(X)$ bezeichnet.

Über die Zuordnung

$$U \longmapsto \operatorname{Div}(U)$$

ist eine Garbe von kommutativen Gruppen auf X gegeben, die wir mit $\mathcal{D}iv_X$ bezeichnen, siehe Aufgabe 19.5.

Lemma 19.11. *Es sei X eine zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann liegt eine kurze exakte Garbensequenz*

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathcal{M}_X^\times \stackrel{\operatorname{div}(-)}{\longrightarrow} \mathcal{D}iv_X \longrightarrow 0$$

vor, wobei in der Mitte die Garbe der meromorphen Funktionen $\neq 0$ und rechts die Garbe der Divisoren steht. Insbesondere ist

$$\mathcal{M}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times \cong \mathcal{D}iv_X .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 19.7. □

Die Divisorenklassengruppe werden wir später als die erste Kohomologiegruppe der Einheitengarbe interpretieren.

Der Rückzug von Divisoren

Definition 19.12. Zu einer nichtkonstanten holomorphen Abbildung $\varphi : X \longrightarrow Y$ zwischen zusammenhängenden riemannschen Flächen X und Y und einem Divisor $D = \sum_{y \in Y} n_y \cdot y$ nennt man

$$\varphi^*(D) = \sum_{x \in X} \operatorname{Verz}(x|\varphi(x)) n_{\varphi(x)} \cdot x$$

den *zurückgezogenene Divisor* zu D.

Zu einem einzelnen Punkt $y \in Y$, aufgefasst als Divisor, ist der zurückgezogene Divisor gleich $\sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} \operatorname{Verz}(x|y) \cdot x$. Dies ist also im Wesentlichen die Faser über y, wobei allerdings die *Verzweigungspunkte*, also Punkte, wo die Verzweigungsordnung ≥ 2 ist, mehrfach gezählt werden. Der Rückzug ist ein Gruppenhomomorphismus $\operatorname{Div}(Y) \to \operatorname{Div}(X)$, siehe Aufgabe 19.9.

Lemma 19.13. *Zu einer nichtkonstanten holomorphen Abbildung*

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

zwischen zusammenhängenden riemannschen Flächen und einem Hauptdivisor $D = \sum_y n_y \cdot y = \operatorname{div}(f)$ *auf* Y *zu einer meromorphen Funktion* $f \neq 0$ *auf* Y *stimmt der zurückgezogene Divisor* $\varphi^*(D)$ *mit dem Hauptdivisor zu* $f \circ \varphi$ *überein.*

Beweis. Sei $x \in X$ fixiert und $y = \varphi(x)$ der Bildpunkt. Die Ordnung des zurückgezogenen Divisors $\varphi^* D$ in x ist nach Definition gleich $\operatorname{Verz}(x|y) n_y$, wobei n_y die Ordnung von D in y ist, also die Ordnung k der meromorphen Funktion f auf Y in y. Mit einem lokalen Parameter z um y, mit dessen Hilfe ja die Verzweigungsordnung von φ definiert wird, kann man in einer offenen Umgebung von y

$$f = uz^k$$

mit einer holomorphen Einheit u schreiben. Dann ist die Ordnung von $f \circ \varphi$ in x gleich

$$\begin{aligned}
\operatorname{ord}_x(f \circ \varphi) &= \operatorname{ord}_x(uz^k \circ \varphi) \\
&= \operatorname{ord}_x((u \circ \varphi)(z \circ \varphi)^k) \\
&= \operatorname{ord}_x((z \circ \varphi)^k) \\
&= k \operatorname{ord}_x(z \circ \varphi) \\
&= k \operatorname{Verz}(x|y).
\end{aligned}$$

□

Korollar 19.14. *Zu einer meromorphen Funktion* $f \neq 0$ *auf einer zusammenhängenden riemannschen Fläche stimmt der Hauptdivisor* $\operatorname{div}(f)$ *mit dem zurückgezogenen Divisor* $f^*(0 - \infty)$ *zum Divisor* $0 - \infty$ *auf der projektiven Geraden unter der nach Satz 18.6 zugehörigen holomorphen Abbildung* $f\colon X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ *überein.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 19.13, angewendet auf die Identität auf der projektiven Geraden. Wenn man diese als meromorphe Funktion auffasst, so ist deren Hauptdivisor gleich $0 - \infty$. □

Lemma 19.15. *Eine nichtkonstante holomorphe Abbildung*

$$\varphi\colon X \longrightarrow Y$$

zwischen zusammenhängenden riemannschen Flächen induziert über das Zurückziehen von Divisoren einen Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{DKG}(Y) \longrightarrow \operatorname{DKG}(X),\ [D] \longmapsto [\varphi^*(D)].$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 19.13. □

Der Grad eines Divisors

Definition 19.16. Es sei X eine kompakte riemannsche Fläche und

$$D = \sum_{x \in X} n_x \cdot x$$

ein Divisor auf X. Man nennt $\sum_{x \in X} n_x$ den *Grad* des Divisors.

Satz 19.17. *Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Dann ist der Grad eines Hauptdivisors gleich* 0.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 18.7 oder aus Korollar 19.14 in Verbindung mit Korollar 9.9. □

Satz 19.18. *Die Divisorenklassengruppe der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ ist $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir zeigen, dass jeder Divisor vom Grad 0 ein Hauptdivisor ist. Sei also $\sum_{x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} n_x \cdot x$ ein Divisor mit $\sum_{x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} n_x = 0$. Wir können annehmen, dass die Ordnung am unendlich fernen Punkt ∞ gleich 0 ist, so dass die relevanten Punkte sich in

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

befinden. Wir trennen nach Nullstellen- und Polstellendivisor und schreiben

$$\sum_{x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} n_x \cdot x = \sum_{x \in A} r_x \cdot x - \sum_{x \in B} s_x \cdot x$$

mit disjunkten endlichen Mengen A und B und mit $r_x, s_x \geq 1$, wobei wegen der Gradvoraussetzung die beiden Teildivisoren den gleichen Grad besitzen. Wir betrachten die rationale Funktion

$$\frac{\prod_{x \in A} (T - x)^{r_x}}{\prod_{x \in B} (T - x)^{s_x}} .$$

Diese besitzt in den Punkten aus $\mathbb{C}$ die vorgegebenen Ordnungen. Sie kann als meromorphe Funktion auf der gesamten projektiven Geraden aufgefasst werden und hat im unendlich fernen Punkt wegen der Gleichgradigkeit von Zähler und Nenner den Wert 1 als Limes und somit dort die Ordnung 0. □

Satz 19.19. *Auf der projektiven Geraden ist jede meromorphe Funktion rational.*

Beweis. Es sei f eine meromorphe Funktion $\neq 0$ auf $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und sei D der zugehörige Hauptdivisor zu f. Nach Satz 19.17 ist sein Grad gleich 0 und nach dem Beweis zu Satz 19.18 gibt es eine rationale Funktion g, die ebenfalls diesen Divisor als Hauptdivisor besitzt. Also ist $\frac{f}{g}$ eine meromorphe Funktion, die weder Pol- noch Nullstellen besitzt und insbesondere nach Lemma 19.7 überall definiert ist, also holomorph. Nach Satz 3.7 ist sie konstant und somit ist $f = cg$ mit $c \in \mathbb{C}$. □

Der Körper der meromorphen Funktionen auf der projektiven Geraden (siehe Satz 18.3) ist also einfach gleich $\mathbb{C}(z)$, dem Körper der rationalen Funktionen in einer Variablen. Offene Teilmengen davon, beispielsweise $\mathbb{C}$ selbst, besitzen einen deutlich größeren Körper der meromorphen Funktionen. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zwischen der Theorie der riemannschen Flächen und der Theorie der algebraischen Kurven über $\mathbb{C}$, wo jede offene Menge den gleichen Funktionenkörper besitzt.

Lemma 19.20. *Es sei* $\varphi\colon X \to Y$ *eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen den zusammenhängenden kompakten riemannschen Fläche* X *und* Y. *Dann gilt für einen Divisor* D *auf* Y *die Beziehung*

$$\operatorname{Grad}(\varphi^*(D)) = \operatorname{Grad}(\varphi) \cdot \operatorname{Grad}(D).$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für einen Divisor der Form $D = 1y$ mit einem Punkt $y \in Y$ zu zeigen, da der Rückzug eines Divisors und ebenso der Grad eines Divisors additiv ist. Daher folgt die Aussage aus Satz 9.8. $\square$

Aufgrund von Satz 19.17 besitzt jeder Hauptdivisor auf einer kompakten zusammenhängenden riemannschen Fläche den Grad 0. Dies bedeutet insbesondere, dass linear äquivalente Divisoren den gleichen Grad besitzen und dass der Grad eine Eigenschaft der Divisorklasse ist. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition 19.21. Es sei X eine kompakte zusammenhängende riemannsche Fläche. Man nennt

$$\operatorname{DKG}_0(X) = \operatorname{Div}_0(X)/\operatorname{HDiv}(X)$$

die *Divisorenklassengruppe vom Grad 0* zu X.

Für die projektive Gerade ist nach Satz 19.18 die Divsiorenklassengruppe vom Grad 0 trivial, siehe auch Aufgabe 19.12.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7