Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 8

Bisher haben wir beringte Räume betrachtet, bei denen der zugrunde liegende Raum in einem gewissen Sinn zuerst da war, ein beliebiger topologischer Raum, eine reelle Mannigfaltigkeit, eine komplexe Mannigfaltigkeit, und woraus sich in natürlicher Weise eine Garbe von kommutativen Ringen als eine Garbe von stetigen, differenzierbaren, holomorphen Funktionen entwickelt hat. Als Funktionen waren die einzelnen Elemente dieser Ringe vertraut, die Ringe selbst waren aber im Allgemeinen sehr groß und unübersichtlich. Man kann sich umgekehrt fragen, inwiefern man jeden kommutativen Ring als einen globalen Schnittring eines beringten Raumes erhalten kann, oder ob es einen beringten Raum gibt, der die Eigenschaften des Ringes besonders gut widerspiegelt und hilft, die Ringe besser zu verstehen. Diese Fragen werden wir in dieser und der folgenden Vorlesung positiv beantworten. Die dabei entstehenden beringten Räume sind zugleich die lokalen Bausteine der algebraischen Geometrie.

Das Spektrum eines kommutativen Ringes

Definition 8.1. Zu einem kommutativen Ring R nennt man die Menge der Primideale von R das *Spektrum* von R, geschrieben

$$\operatorname{Spek}(R).$$

Man spricht auch von einem *affinen Schema*.

Definition 8.2. Auf dem Spektrum eines kommutativen Ringes R ist die *Zariski-Topologie* dadurch gegeben, dass zu einer beliebigen Teilmenge $T \subseteq R$ die Mengen

$$D(T) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \mid T \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

als offen erklärt werden.

Für einelementige Teilmengen $T = \{f\}$ schreiben wir $D(f)$ statt $D(\{f\})$.

Lemma 8.3. *Die Zariski-Topologie auf dem Spektrum* $\operatorname{Spek}(R)$ *eines kommutativen Ringes R ist in der Tat eine Topologie.*

Beweis. Es ist $D(0) = \emptyset$ und $D(1) = \operatorname{Spek}(R)$, da jedes Primideal die 0 und kein Primideal die 1 enthält.

Zu einer beliebigen Familie T_i, $i \in I$, aus Teilmengen $T_i \subseteq R$ ist

$$\bigcup_{i\in I} D(T_i) = D\left(\bigcup_{i\in I} T_i\right).$$

Dabei ist die Inklusion $\subseteq$ klar, da $T_i \subseteq \bigcup_{i\in I} T_i$ gilt und da aus $S \subseteq T$ stets $D(S) \subseteq D(T)$ folgt. Für die andere Inklusion sei $\mathfrak{p} \in D\big(\bigcup_{i\in I} T_i\big)$. D.h. es gibt ein $f \in \bigcup_{i\in I} T_i$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Somit gibt es ein $i \in I$ mit $f \in T_i$ und daher $\mathfrak{p} \in D(T_i)$ für dieses i.

Zu einer endlichen Familie $T_1, \ldots, T_n$ aus Teilmengen $T_i \subseteq R$ ist

$$\bigcap_{i=1}^{n} D(T_i) \, = \, D(T_1 \cdots T_n).$$

Dabei bezeichnet $T_1 \cdots T_n$ die Menge aller Produkte $f_1 \cdots f_n$ mit $f_i \in T_i$. Hierbei ist die Inklusion $\supseteq$ klar. Für die umgekehrte Inklusion sei $\mathfrak{p} \in D(T_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$ vorausgesetzt. Das bedeutet, dass es $f_i \in T_i$ mit $f_i \notin \mathfrak{p}$ gibt. Aufgrund der Primidealeigenschaft ist dann $f_1 \cdots f_n \notin \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in D(T_1 \cdots T_n)$. □

Wir betrachten das Spektrum stets als topologischen Raum. Die Primideale sind die Punkte dieses Raumes. Wir schreiben häufig $X = \operatorname{Spek}(R)$ und $x \in X$, um die geometrische Sichtweise zu betonen. Für das Primideal, das durch x repräsentiert wird, schreibt man dann wiederum $\mathfrak{p}_x$.

Die Komplemente der offenen Mengen, also die abgeschlossenen Mengen in der Zariski-Topologie, werden mit

$$V(T) \, = \, \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R) \mid T \subseteq \mathfrak{p}\}$$

bezeichnet.

Proposition 8.4. *Für das Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$ eines kommutativen Ringes R gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Es ist $D(T) = D(\mathfrak{a})$, wobei $\mathfrak{a}$ das durch T erzeugte Ideal (Radikal) in R sei. Man kann sich also bei der Beschreibung der offenen Teilmengen auf die Radikale von R beschränken.*

(2) *Für eine Familie $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$, von Idealen in R ist*

$$\bigcup_{i\in I} D(\mathfrak{a}_i) \, = \, D\left(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\right).$$

(3) *Für eine endliche Familie $\mathfrak{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, von Idealen in R ist*

$$\bigcap_{i=1}^{n} D(\mathfrak{a}_i) \, = \, D\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i\right) \, = \, D(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n).$$

(4) *Es ist $D(\mathfrak{a}) = X$ genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ das Einheitsideal ist.*

(5) *Es ist $D(\mathfrak{a}) \subseteq D(\mathfrak{b})$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{b})$ gilt.*

(6) *Das Spektrum ist genau dann leer, wenn R der Nullring ist.*

(7) *Es ist $D(\mathfrak{a}) = \emptyset$ genau dann, wenn $\mathfrak{a}$ nur nilpotente Elemente enthält.*

(8) *Die offenen Mengen $D(f)$, $f \in R$, bilden eine Basis der Topologie.*

(9) *Eine Familie von offenen Mengen $D(\mathfrak{a}_i)$, $i \in I$, ist genau dann eine Überdeckung von X, wenn die Ideale $\mathfrak{a}_i$ zusammen das Einheitsideal erzeugen.*

Beweis. (1). Die Inklusion $\subseteq$ ist klar. Die andere Inklusion beweisen wir durch Kontraposition und nehmen $\mathfrak{p} \notin D(T)$ an. Dann ist $T \subseteq \mathfrak{p}$ und somit gilt

$$\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{p},$$

da ein Primideal ein Radikalideal ist. Daher ist auch $\mathfrak{p} \notin D(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}))$. (2) und (3) sind klar nach (1) und dem Beweis zu Lemma 8.3. (4). Wenn $\mathfrak{a}$ nicht das Einheitsideal ist, so gibt es nach Aufgabe 8.1 ein maximales Ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{m} \notin D(\mathfrak{a})$. (5). Die Implikation von rechts nach links ist klar. Für die Umkehrung sei $\mathfrak{a} \not\subseteq \operatorname{rad}(\mathfrak{b})$ vorausgesetzt. Dann gibt es ein $f \in \mathfrak{a}$ mit $f^n \notin \mathfrak{b}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es auch ein Primideal $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{p} \in D(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{p} \notin D(\mathfrak{b})$. (6). Der Nullring besitzt kein Primideal. Ein vom Nullring verschiedener kommutativer Ring besitzt nach Aufgabe 8.1 maximale Ideale. (7). Jedes Primideal enthält sämtliche nilpotenten Elemente, also ist $V(\mathfrak{a}) = X$ für ein solches Ideal. Wenn dagegen $\mathfrak{a}$ ein nicht nilpotentes Element f enthält, so gibt es nach Aufgabe 8.5 auch ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$, also ist $\mathfrak{p} \in D(f) \subseteq D(\mathfrak{a})$. (8). Dies folgt direkt aus $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$. (9) folgt aus und (2) und (4). $\square$

Proposition 8.5. *Für das Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$ eines kommutativen Ringes R gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Der Abschluss einer Teilmenge $T \subseteq X$ ist $V\left(\bigcap_{x \in T} \mathfrak{p}_x\right)$.*
(2) *Der Abschluss eines Punktes $x \in X$ ist $V(\mathfrak{p}_x)$.*
(3) *Ein Punkt $x \in \operatorname{Spek}(R)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{p}_x$ ein maximales Ideal ist.*

Beweis. (1). Für $y \in T$ ist $y \in V(\mathfrak{p}_y) \subseteq V\left(\bigcap_{x \in T} \mathfrak{p}_x\right)$, so dass die angegebene Menge eine abgeschlossene Menge ist, die T umfasst. Sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal mit $\mathfrak{q} \in V\left(\bigcap_{x \in T} \mathfrak{p}_x\right)$, also $\bigcap_{x \in T} \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{q}$. Um zu zeigen, dass $\mathfrak{q}$ auch zum Abschluss von T gehört, muss man zeigen, dass T jede offene Umgebung von $\mathfrak{q}$ schneidet. Sei also $\mathfrak{q} \in D(f)$, d.h. $f \notin \mathfrak{q}$. Dann ist auch $f \notin \bigcap_{x \in T} \mathfrak{p}_x$ und somit gibt es ein $x \in T$ mit $f \notin \mathfrak{p}_x$. Also ist $\mathfrak{p}_x \in D(f)$ und somit $T \cap D(f) \neq \emptyset$. (2) ist ein Spezialfall von (1). (3) folgt aus (2). $\square$

Korollar 8.6. *Das Spektrum $X = \operatorname{Spek}(R)$ eines kommutativen Ringes R ist quasikompakt.*

Beweis. Nach Proposition 8.4 (9) ist $X = \bigcup_{i \in I} D(\mathfrak{a}_i)$ genau dann, wenn die Ideale $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$, zusammen das Einheitsideal erzeugen. Das von der Familie erzeugte Ideal besteht aus allen endlichen Summen $f_1 + \cdots + f_n$ mit $f_j \in \mathfrak{a}_{i_j}$. Wenn also das Einheitsideal erzeugt wird, so bedeutet dies, dass es eine endliche Auswahl $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ und Elemente $f_j \in \mathfrak{a}_{i_j}$ mit $\sum_{j=1}^{n} f_j = 1$

gibt. Dann ist aber

$$X = D(1) = \bigcup_{j=1}^{n} D(f_j) = \bigcup_{j=1}^{n} D(\mathfrak{a}_{i_j})$$

und somit ist eine endliche überdeckende Teilfamilie gefunden. □

Das Spektrum ist nur in Ausnahmesituationen ein Hausdorffraum, d.h. im Allgemeinen kann man zwei Punkte des Spektrums nicht durch offene Umgebungen trennen.

Beispiel 8.7. Ein Körper hat bekanntlich nur zwei Ideale, nämlich das Einheitsideal K, das kein Primideal ist, und das Nullideal 0, das ein Primideal ist. Das Spektrum eines Körpers besteht also aus einem einzigen Punkt.

Beispiel 8.8. Die Primideale in $\mathbb{Z}$ sind einerseits die maximalen Ideale (p), wobei p eine Primzahl ist, und andererseits das Nullideal 0. Die maximalen Ideale bilden die abgeschlossenen Punkte von $\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$. Das Nullideal ist darin ein weiterer nicht abgeschlossener Punkt. Die einzige abgeschlossene Menge, in der dieser Punkt enthalten ist, ist die ganze Menge. Die abgeschlossenen Mengen in $\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$ sind neben der Gesamtmenge die endlichen Teilmengen aus maximalen Idealen.

Man visualisiert $\operatorname{Spek}(\mathbb{Z})$ als eine (gedachte Gerade), auf der die Primzahlen diskret liegen, während der Nullpunkt ein fetter Punkt ist, der die gesamte Gerade repräsentiert.

Beispiel 8.9. Für den Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K vermitteln die sogenannten Punktideale eine gute geometrische Vorstellung von $\operatorname{Spek}(R)$. Ein Punktideal hat die Form

$$(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \ldots, X_n - a_n)$$

zu einem festen Tupel $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in K^n$. Ein Punktideal ist der Kern des durch $X_i \mapsto a_i$ festgelegten K-Algebrahomomorphismus

$$\varphi_a \colon R \longrightarrow K$$

und daher ein maximales Ideal. Diese Zuordnung definiert insgesamt eine injektive Abbildung

$$K^n \longrightarrow \operatorname{Spek}(R).$$

Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, so werden dadurch sogar alle maximale Ideale von R erfasst. Daher stellt man sich das Spektrum des Polynomrings in n Variablen als den affinen Raum vor, der allerdings auch noch weitere nichtabgeschlossene Punkte enthält. Zu einem Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ besitzt $V(f) \cap K^n$ eine anschauliche Interpretation: Es ist $a \in V(f) \cap K^n$ genau dann, wenn $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ ist.

Funktorielle Eigenschaften

Proposition 8.10. *Es sei*

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Zuordnung*

$$\varphi^*\colon\ \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R),\ \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^*(\mathfrak{p}) := \varphi^{-1}(\mathfrak{p}),$$

ist (wohldefiniert und) stetig.

(2) *Es ist* $(\varphi^*)^{-1}(D(\mathfrak{a})) = D(\mathfrak{a}S)$ *für jedes Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq R$.

(3) *Für einen weiteren Ringhomomorphismus*

$$\psi\colon\ S \longrightarrow T$$

gilt $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Beweis. Die Abbildung ist nach Aufgabe 8.9 wohldefiniert. Zur Stetigkeit ist die Aussage (2) zu zeigen. Wir argumentieren mit den abgeschlossenen Mengen. Für ein Primideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spek}(S)$ ist $\varphi^*(\mathfrak{q}) \in V(\mathfrak{a})$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ist. Dies ist äquivalent zu $\varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q}$ und ebenso zu $\mathfrak{a}S \subseteq \mathfrak{q}$. (3) ist klar. □

Die in der vorstehenden Aussage eingeführte stetige Abbildung heißt *Spektrumsabbildung* (zu dem gegebenen Ringhomomorphismus). Bei einem Unterring $R \subseteq S$ geht es einfach um die Zuordnung $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \cap R$. In diesem Fall spricht man auch von „Runterschneiden“.

Proposition 8.11. *Es sei R ein kommutativer Ring. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu einem Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq R$ *und der Restklassenabbildung*

$$q\colon\ R \longrightarrow R/\mathfrak{a}$$

ist die Spektrumsabbildung

$$q^*\colon\ \operatorname{Spek}(R/\mathfrak{a}) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

eine abgeschlossene Einbettung, deren Bild $V(\mathfrak{a})$ *ist.*

(2) *Zu einem multiplikativen System* $M \subseteq R$ *ist die zur kanonischen Abbildung*

$$\iota\colon\ R \longrightarrow R_M$$

gehörige Abbildung

$$\iota^*\colon\ \operatorname{Spek}(R_M) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

injektiv, und das Bild besteht aus der Menge der Primideale von R, die zu M disjunkt sind.

(3) *Zu* $f \in R$ *ist die zur kanonischen Abbildung*

$$\iota\colon\ R \longrightarrow R_f$$

gehörige Abbildung

$$\iota^*\colon\ \operatorname{Spek}(R_f) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

eine offene Einbettung, deren Bild gleich $D(f)$ *ist.*

Beweis. (1) folgt aus Aufgabe 8.6: Die Primideale in $R/\mathfrak{a}$ entsprechen über $\mathfrak{p} \mapsto q^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$ den Primidealen von R, die $\mathfrak{a}$ enthalten. Die angegebene Abbildung ist also bijektiv und hat das beschriebene Bild. Zu einem Ideal $\mathfrak{b} \subseteq R/\mathfrak{a}$ und einem Primideal $\mathfrak{p} \subseteq R/\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ genau dann, wenn

$$\mathfrak{b} + \mathfrak{a} \,=\, q^{-1}(\mathfrak{b}) \,\subseteq\, \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$$

gilt. Also ist das Bild von $V(\mathfrak{b})$ gleich $V(\mathfrak{b}+\mathfrak{a})$ und damit abgeschlossen. Für (2) siehe Aufgabe 8.7. (3). Da für ein Primideal $\mathfrak{p}$ und ein Element $f \in R$ die Beziehung $f \notin \mathfrak{p}$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{p}$ zum multiplikativen System $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ disjunkt ist, folgt aus Teil (2), dass die Abbildung injektiv ist und dass ihr Bild gleich $D(f)$ ist. Das gleiche Argument, angewendet auf $g \in R$ bzw. $\frac{g}{1} \in R_f$ zeigt, dass das Bild von $D(g) \subseteq \operatorname{Spek}(R_f)$ gleich $D(fg)$ und damit offen ist. $\square$

Lemma 8.12. *Es sei*

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen zwei kommutativen Ringen und es sei

$$\varphi^*\colon\ \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R),\ \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^*(\mathfrak{p}),$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann ist die Faser über einem Primideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spek}(R)$ *gleich* $\operatorname{Spek}\big((S/\mathfrak{q}S)_{\varphi(R\setminus\mathfrak{q})}\big)$*. D.h. die Faser besteht aus allen Primidealen* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(S)$ *mit* $\mathfrak{q}S \subseteq \mathfrak{p}$ *und mit* $\mathfrak{p} \cap \varphi(R \setminus \mathfrak{q}) = \emptyset$.

Beweis. Aufgrund von Proposition 8.11 müssen wir nur die zweite Formulierung beweisen. Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq S$ gilt $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \,=\, \mathfrak{q}$ genau dann, wenn sowohl $\varphi(\mathfrak{q}) \,\subseteq\, \mathfrak{p}$ als auch $\varphi(R \setminus \mathfrak{q}) \,\subseteq\, S \setminus \mathfrak{p}$ gilt. Die erste Bedingung ist zu $\mathfrak{q}S \,\subseteq\, \mathfrak{p}$ und die zweite Bedingung ist zu

$$\varphi(R \setminus \mathfrak{q}) \cap \mathfrak{p} \,=\, \emptyset$$

äquivalent. $\square$

Insbesondere ist die Faser eines Spektrumsmorphismus über einem Punkt selbst wieder das Spektrum eines Ringes. Ein Spezialfall der vorstehenden Aussage ist, dass die Faser über einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ gleich $\operatorname{Spek}(S/\mathfrak{m}S)$ ist, da in diesem Fall aus $\mathfrak{m}S \subseteq \mathfrak{p}$ sofort $\mathfrak{m} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ folgt und wegen der Maximalität Gleichheit gelten muss. Bei einem Integritätsbereich R und dem Nullideal erübrigt es sich, das Erweiterungsideal zu betrachten, die Faser wird einfach durch $\operatorname{Spek}\big(S_{\varphi(R\setminus\{0\})}\big)$ beschrieben.

Korollar 8.13. *Es sei*

$$\varphi\colon\ R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus zwischen kommutativen Ringen und es sei

$$\varphi^*\colon\ \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R),\ \mathfrak{p} \longmapsto \varphi^*(\mathfrak{p}),$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann ist die Faser über einem Primideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spek}(R)$ *genau dann leer, wenn* $\mathfrak{q}S \cap \varphi(R \setminus \mathfrak{q}) \neq \emptyset$.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 8.12 und Proposition 8.4 (6). $\square$

Abbildungsverzeichnis