

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 38

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 38.1. Wir betrachten die Relation auf der Menge der quadratischen $n \times n$ -Matrizen, bei der Matrizen M und N als äquivalent angesehen werden, wenn es Elementarmatrizen E_1, \dots, E_k mit $M = E_k \circ \dots \circ E_1 \circ N$ gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

Übungsaufgaben

AUFGABE 38.2. Es sei M die Menge der Leute im Kurs. Bestimme für die folgenden, durch eine Eigenschaft festgelegten Äquivalenzrelationen auf M , wer zu wem äquivalent ist.

- (1) Hat im gleichen Monat Geburtstag.
- (2) Hat das gleiche Zweitfach (neben Mathematik).
- (3) Wohnt in der gleichen Stadt.

AUFGABE 38.3. Wir betrachten die folgende Menge, deren Elemente gewisse Zahlenmengen sind.

$$M = \{\{2, 5, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 5, 7, 8\}, \{2, 7\}, \{4, 10, 14\}, \{3\}, \{8, 9\}, \{12, 15, 23\}\}.$$

Zeige, dass für Elemente $S, T \in M$ durch $S \sim T$, falls S und T die gleiche Anzahl an Elementen haben, eine Äquivalenzrelation auf M gegeben ist. Welche Elemente sind zueinander äquivalent, welche nicht?

AUFGABE 38.4. Wir betrachten auf der Menge der Tiere die Äquivalenzrelation, bei der zwei Tiere als äquivalent angesehen werden, wenn sie die gleiche Anzahl an Gliedmaßen besitzen. Welche der folgenden Tiere sind zueinander in diesem Sinne äquivalent?

Ein Elefant, eine Schlange, eine Forelle, ein Delphin, eine Blindschleiche, ein Schimpanse, ein Tausendfüßer, ein Wenigfüßer, ein Eichhörnchen, ein Erdferkel, eine Ameise, ein Raptor, ein Tetrapode, ein Mensch, ein Pinguin.

AUFGABE 38.5. In der Biologie werden die Lebewesen mittels verschiedener (mehr oder weniger feiner) Einteilungen klassifiziert. Wie nennt man die Rangstufen, zu denen der Mensch gehört? Man gebe für jede Rangstufe ein Lebewesen an, das sich bezüglich dieser Rangstufe vom Menschen unterscheidet, aber bezüglich der darüberliegenden Rangstufe mit dem Menschen übereinstimmt.



AUFGABE 38.6. Wir sagen, dass Tage zueinander äquivalent sind, wenn sie auf den gleichen Wochentag fallen. Welche der folgenden Tage sind zueinander äquivalent, welche nicht?

- (1) Der 11.11.1877,
- (2) Der 7.11.1877,
- (3) Der 14.11.1877,
- (4) Der 13.11.1877,
- (5) Der 30.10.1877,
- (6) Der 2.12.1877,
- (7) Der 6.1.1878,
- (8) Der 20.11.1877,
- (9) Der 23.10.1877,
- (10) Der 6.12.1877.

AUFGABE 38.7. Betrachte die zweielementige Menge $M = \{a, b\}$.

- (1) Bestimme alle Relationen auf M .
- (2) Welche dieser Relationen sind symmetrisch, reflexiv, transitiv?
- (3) Bei welchen Relationen handelt es sich um Äquivalenzrelationen?

AUFGABE 38.8. Es seien p und q zwei nichtäquivalente Aussagen. Welche der folgenden zusammengesetzten Aussagen sind zueinander äquivalent, welche nicht?

$$p, q, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow p), \neg p \vee q, p \vee \neg p.$$

AUFGABE 38.9.*

Seien M und N Mengen und sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Zeige, dass durch die Festlegung

$$x \sim y,$$

wenn

$$f(x) = f(y),$$

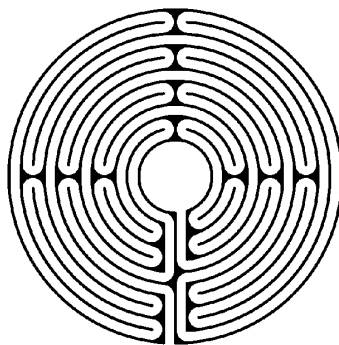
eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

AUFGABE 38.10. Zeige, dass die folgende Relation eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{Z} ist:

$$x \sim y, \text{ falls } 5 \text{ teilt } x - y.$$

Welche Zahlen sind bei dieser Relation äquivalent zueinander?

AUFGABE 38.11. Wir betrachten auf dem weißen Teil des angegebenen Labyrinths die Äquivalenzrelation, die dadurch festgelegt ist, dass zwei Punkte als äquivalent gelten, wenn man durch eine stetige Bewegung (also ohne Sprünge) von einem Punkt zum anderen Punkt gelangen kann. Zeige, dass ein Punkt außerhalb des äußeren Kreises und ein Punkt des inneren Kreises zueinander äquivalent sind.



AUFGABE 38.12. Wir betrachten die Produktmenge $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Wir fixieren wie in Beispiel 38.15 die Sprünge

$$\pm(2, 0) \text{ und } \pm(3, 3),$$

und sagen, dass zwei Punkte $P = (a, b)$, $Q = (c, d) \in M$ äquivalent sind, wenn man ausgehend von P den Punkt Q mit einer Folge von diesen Sprüngen aus erreichen kann.

- (1) Zeige, dass die Punkte $P = (4, -3)$ und $P = (3, 6)$ zueinander äquivalent sind.
- (2) Zeige, dass die Punkte $P = (4, -3)$ und $P = (3, 7)$ nicht zueinander äquivalent sind.

AUFGABE 38.13. Die Äquatorflöhe leben auf den vollen Metern eines 40000 Kilometer langen kreisrunden Bandes. Sie verfügen nur über einen Sprung, der sie sieben Meter nach vorne oder nach hinten bringt (und der beliebig oft wiederholt werden kann). Können sich alle Flöhe begegnen?

AUFGABE 38.14. Wir betrachten die rationalen Zahlen

$$\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 3, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, 4, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{5}.$$

- (1) Welche dieser Zahlen sind unter der Gaußklammeräquivalenzrelation („Vorkommaäquivalenzrelation“, siehe Beispiel 38.12) zueinander äquivalent?
- (2) Welche dieser Zahlen sind unter der Bruchanteiläquivalenzrelation („Nachkommaäquivalenzrelation“) zueinander äquivalent?

AUFGABE 38.15.*

Es sei K ein Körper und $U \subseteq K^n$ ein Untervektorraum. Wir betrachten die Relation auf dem K^n , die durch

$$v_1 \sim v_2 \text{ genau dann, wenn } v_1 - v_2 \in U$$

definiert ist. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

AUFGABE 38.16. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgende Relation auf $\text{Mat}_n(K)$.

$$M \sim N, \text{ falls es eine invertierbare Matrix } B \text{ gibt mit } M = BNB^{-1}.$$

Zeige, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

AUFGABE 38.17.*

Sei G eine Gruppe. Betrachte die Relation \sim auf G , die durch

$$x \sim y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x = y^{-1}$$

erklärt ist. Zeige, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

AUFGABE 38.18. Es sei M eine Menge und $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie von Äquivalenzrelationen auf M . Zeige, dass durch den Durchschnitt $R := \bigcap_{i \in I} R_i$ wieder eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Gilt dies auch für $\bigcup_{i \in I} R_i$?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 38.19. (3 Punkte)

Zeige, dass die folgenden Äquivalenzrelationen auf der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} übereinstimmen.

- (1) Die Einerziffer in der Zifferndarstellung zur Basis 7 von a und b ist gleich.
- (2) Die Differenz $a - b$ ist ein Vielfaches der 7.
- (3) a und b haben bei der Division durch 7 den gleichen Rest.

AUFGABE 38.20. (2 Punkte)

Wir betrachten für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ die symmetrische Differenz

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Wir setzen $A \sim B$, falls $A \Delta B$ endlich ist. Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ definiert wird.

AUFGABE 38.21. (4 Punkte)

Alle Springmäuse leben in \mathbb{Z}^2 und verfügen über zwei Sprünge, nämlich den Sprung $\pm(3, 4)$ und den Sprung $\pm(5, 2)$. Wie viele Springmaus-Populationen gibt es? Die Springmäuse Albert, Beate, Erich, Heinz, Sabine und Frida sitzen in den Positionen

$$(14, 11), (13, 15), (17, 12), (15, 19), (16, 16) \text{ und } (12, 20).$$

Welche Springmäuse können sich begegnen?

AUFGABE 38.22. (3 Punkte)

Es seien M_1 und M_2 Mengen und \sim_1 sei eine Äquivalenzrelation auf M_1 und \sim_2 sei eine Äquivalenzrelation auf M_2 . Betrachte die Relation \sim auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$, die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ und } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt,}$$

definiert ist. Zeige, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

Zeige ferner, dass auf $M_1 \times M_2$ die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ oder } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt,}$$

definierte Relation keine Äquivalenzrelation ist.

AUFGABE 38.23. (3 Punkte)

Seien M und N Mengen und sei $f: M \rightarrow N$ eine Abbildung. Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf N . Zeige, dass durch $x \equiv x'$, falls $f(x) \sim f(x')$ gilt, eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird.

Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Biological classification de.svg , Autor = Benutzer Pengo auf Commons, Lizenz = 2
- Quelle = ModernChartresStyleLabyrinth.svg , Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz = 4
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7