

普通結構學

上 冊

蔡 方 蔭 著

商 務 印 書 館 發 行

普通結構學

上册

蔡方蔭著

商務印書館發行

中華民國三十五年八月初版
中華民國三十八年八月四版

⊕(88324.1A)

普通結構學三冊

上冊基價貳拾元

印刷地點外另加運費

著者 蔡方蔭

發行人 陳懋解

上海河南中路

印刷所 商務印書館

發行所 各地商務印書館

版 翻
權 印
所 必
有 究

序

本書乃根據著者八年來(民國二十年至二十八年)在國立清華大學講授此科之經驗寫成。著者之講授此科也，前此向採用美國薩鮑二氏之結構理論 (Sutherland and Bowman: Structural Theory) 爲教本，以其解說新穎而簡要，習題豐富而精關，實刻下最善之西文教本也。但亦有未盡善之處焉。學者或常病其解說因力求簡要致不易了解，著者則病其取材未能賅括，解說不甚周詳，至其分章方法及其先後次序，亦未盡顧及講授時之便利。故著者講授時，仍須補充材料，自定系統，固未嘗奉之爲圭臬也。

著者久欲將歷年講授之教材，依其自定之系統寫成，付諸剞劂，出而問世。乃屢以教學牽掣，未暇握管。二十六年秋，著者自歐美考察歸國，適值清華大學一遷長沙，再徙昆明，校中圖書儀器，大半蕩然無存，致著者無法進行任何研究工作，遂立志將已有之教材，加以整理及補充，寫成此書。自二十七年八月中屬稿，五閱月有奇而上册脫稿，中下二册亦殺青有日。預計底稿共約一千二百頁之譜，計四十餘萬言。屬稿時期不及一年有半，至爲匆促，訛誤之處，自屬難免，如承國內專家隨時指正，著者當不勝感幸也。

本書之寫法，雖以大學教本爲主要對象，但同時亦擬作爲工

程師之參考書。故取材力求賅括，解說不厭周詳，於靜定平面結構之各種理論及方法，大致應有盡有，包羅無遺。爲便於教學起見，以大小字略軒輊其重要性，但教者對於教材之取舍，仍可自行斟酌，固不必拘泥於大字小字之間也。因篇幅較多，故分爲上中下三冊，上册計六章，所論大致限於結構學之通則及房屋等，涉及橋梁者至尠。中冊計三章，專論普通橋梁。下冊亦計三章，專論長跨橋梁及結構之變位。全書約適於一學年半或二學年之用。

寫此書時，雖曾參考西文書籍多種（主要參考書目錄見後），但既未嘗以任何書爲藍本，且有若干點係著者一得之愚，前此未曾發表者。僅就上册而論，例如第 4—12 節所論以求反力法分析桁架之應力，第 4—18 節所論結構靜定與穩定之通則等是。亦有採用他人之結果而由著者加以改良者，例如第 4—13 節所論指數應力法之用於非平行弦桁架者，係根據美國瓦 (J. A. L. Waddell) 氏之法，而由著者加以改良者。更有結果雖係與他書大致相同，但其表述方法，常力求合理，不苟從同，例如第 6—3 節關於計算鈹梁翼緣面積之公式是。至解說時所舉之例及其附圖，常取其極簡明而有普遍性及代表性者。複雜之圖，特殊之例，盡力避免，蓋前者使學者不易明瞭，而後者易使學者滋生誤解也。

著者對於本書章節之分法及其先後次序，煞費考慮，因西文書籍於此點均有可議之處，不可取法也。例如美國出版之教

本，幾一律(唯一例外，祇 Grinter 之書，即參考書中之第 3 種)將圖解力學另立一章，且置於全書之中部，任何結構之計算法，多半有數解與圖解二種。何以圖解法不能與數解法相提並論，而必另立一章，著者未見其當也。又有將感應圖另立一章(例如 Matthews 與 Soneson 二氏及 Urquhart 與 O'Rourke 二氏之書，即參考書中之第 10 及 23 種)，其病亦同。更有將橋梁桁架在呆荷重、均佈活荷重及集中活荷重下之應力分爲二章或三章(例如 Johnson, Bryan 與 Turneure 三氏 Matthews 與 Soneson 二氏及 Urquhart 與 O'Rourke 二氏等之書，即參考書中之第 6, 第 10 及第 23 種)，致其各章之內容，殊難免有重複之處。上述之分章方法，既不合乎邏輯，且不便於講授，其不可取法至爲明顯。本書之分章方法，全憑著者之管見，自信其或較合乎邏輯，且便於講授也。

習題爲習結構學時必需之重要工作，而欲學者明瞭習題之作法，必有例題。故本書對於例題及習題二項，曾嚴加選擇。例題必擇其有代表性者，其解答則必按步臚列，力求簡明。習題則必擇其有意義而足以啓發學者之思想者。習題之選擇，貴精而不在多。凡意義相同祇尺寸及荷重之數量不同者，盡力免去，否則習題太多，教者反有不易選擇之苦。第二至第四章習題中之結構，多不合乎實際情形，其功用蓋在訓練學者之思想，而使其澈底明瞭各種理論及方法之應用。其餘各章之習題，則力求與實際情形相符。於第五至第九章中，若干例題及習題均

有連貫性，蓋分之則各自成一題，合之則成爲某一結構之全部計算。此外若干不甚重要之理論及證明，多借例題表出，或列爲習題，蓋藉以節省篇幅也。所有習題，除少數係採自 Sutherland 與 Bowman 二氏及 Timoshenko 與 Young 二氏（即參考書中之第 20 及 22 種）及他氏之書外，其餘習題之來源有三：（一）著者在清華大學講授此科時歷年所命之月考及期考考題，（二）著者爲歷屆清華留美考試及中英庚款留英考試所命結構學之考題，及（三）著者爲本書新擬之題。習題有難易之分者，其排列常依先易後難之次序。較難者常附以提示，以免學者解答時有無從下手之苦。但有若干習題，頗爲繁難，學者非三復深思，恐不易得其解答。蓋本書之目的，在使學者澈底明瞭結構學中之各種理論及方法，並能加以靈敏之應用，以解答任何複雜之靜定結構。

本書中冊中關於鐵路及公路橋梁之討論，概依照我國交通部二十七年所公佈之新規範及準則。關於鐵路橋梁之中華活荷重制之各種圖表，多承交通部橋梁設計處錢少平技正賜予參考。又關於鐵路橋梁部份屬稿時，得與橋梁設計處唐文梯工程師不時商榷，獲教良多。本書之一部承唐工程師暨著者同事施嘉煬，劉仙洲，張有齡諸先生校閱一過，多所正是，均深銘感。關於本書之繪圖校勘等工作，國立西南聯合大學土木系助教諸君，時常襄助，而其中著者之門人鄒承曾，袁隨善二君費力特多，且對於本書之內容，偶贊一詞，常見嘉納。至本書附圖之描繪，

底稿之抄寫，先後由龐瑞，張明貴，李紫磨，張仲文四君及李晶女士擔任，本書之校對工作承著者門人金君啓疇擔任，於此一併致謝。

蔡方蔭

昆明國立西南聯合大學工學院


民國二十八年八月

例 言

1. 所有名詞，若係已習見或涵義甚顯者，如「荷重」，「力系」等，一概不註英文。其有不甚習見，或涵義有易發生誤解者，如「縱梁」「矩心」等，均附註英文。但祇以首次用該項名詞之處爲限。

2. 外國人名及地名除習見者如牛頓等，採用已通用之譯名外，其餘皆以一字譯其首音，如 Whipple 譯作費氏，並註明原文，以免全字譯音，佶屈聱牙，讀之不順。同名重見，且於隔已註明原文之處甚遠時，並再註明原文。

3. 長度以公尺計，重量以公噸計，且皆寫作不名數。其有已習用他種單位者，如單位應力以「公斤/平方公厘」計，則仍從之。至長度之較小者以公厘計，重量之較小者則以公斤計，惟均當特別註明，以免含混。

4. 圖中之直角，概以雙圓弧線表之，如 ，此乃德國書中之方法，甚可取也。

5. 凡書中所稱「我國規定」，於鐵路橋梁，係指我國交通部於民國二十七年七月所公佈之鐵路鋼橋規範所規定者而言，於公路橋梁係指我國前全國經濟委員會於民國二十五年九月所訂之公路橋梁涵洞工程設計暫行準則（已由交通部重行公佈）所規定者而言，並於括弧內註明條數。於鐵路橋梁規範用方括弧，

如[413]，於公路橋梁準則用圓括弧，如(11)，以便參考。

6. 本書之寫成，所參考之西文書籍及期刊甚夥，於特殊之著作，均於註脚中詳細註明，以便讀者可以參考原著。其較普通者，則概不列舉。主要西文參考書之目錄詳見下頁。

主要參考書目次

(以著者姓氏首字母之次序爲次序)

1. Bleich, Fr.—Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, 1924, Berlin.
2. Fuller, A. H. and Kerekes, F.—Analysis and Design of Steel Structures, 1936, New York.
3. Grinter, L. E.—Theory of Modern Steel Structures, Vols. I and II, 1936, New York.
4. Hool, G. A. and Kinne, W. S.—Stresses in Framed Structures, 1923, New York.
5. Hool, G. A. and Kinne, W. S.—Movable and Long-Span Steel Bridges, 1923, New York.
6. Johnson, J. B., Bryan, C. W. and Turneaure, F. E.—The Theory and Practice of Modern Framed Structures, Part I, 10th. Ed., 1926, and Part II, 9th. Ed., 1916, New York.
7. Kirchhoff, R.—Die Statik der Bauwerke. Bd. 1, 2. Aufl., 1928, Berlin.
8. Kirkham, J. E.—Highway Bridges, 1932, New York.
9. Kunz, F. C.—Design of Steel Bridges, 1914, New York.
10. Matthews, J. H. and Soneson, P. E.—Analysis of Framed Structures, 1935, New York.
11. Müller-Breslau, H.—Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Bd. I, 5. Aufl., 1912, und Bd. II, Abt. I, 5. Aufl., 1922, Stuttgart und Leipzig.
12. Ostenfeld, A.—Teknisk Statik, I, 1913, Copenhagen.
13. Pippard, A. J. S. and Baker, J. F.—The Analysis of Engineering Structures, 1936, London.
14. Salmon, E. H.—Materials and Structures, Vol. II, The Theory and Design of Structures, 1938, London.
15. Scharper, G.—Fest stählerne Brücken. 6. Aufl., 1934, Berlin.
16. Shedd, T. C. and Vawter, J.—Theory of Simple Structures, 1931, New York.
17. Spofford, C. M.—The Theory of Structures, 3rd Ed., 1928, New York.
18. Steinman, D. B.—Suspension Bridges, 2nd Ed., 1929, New York.
19. Steinman, D. B.—The Wichert Truss, 1932, New York.
20. Sutherland, H. and Bowman, H. L.—An Introduction to Structural Theory, and Design—Theory, 2nd Ed., 1935, New York.
21. Swain, G. F.—Structural Engineering—Stresses, Graphical Statics and Masonry, 1927, New York.
22. Timoshenko, S. and Young, D. H.—Engineering Mechanics—Statics, 1937, New York.
23. Urquhart, L. C. and O'Rourke, C. E.—Stresses in Simple Structures, 2nd Ed., 1932, New York.
24. Waddell, J. A. L.—Bridge Engineering, Vols. I and II, 1916, New York.

總目

上 册

- 第一章 緒論
- 第二章 靜力學要則
- 第三章 反力,切力及彎矩之通則
- 第四章 桁架應力之通則
- 第五章 屋頂桁架及工廠排架之應力
- 第六章 鈹梁

中 册

- 第七章 橋梁之反力,切力及彎矩
- 第八章 橋梁桁架之應力
- 第九章 橋梁在側力及縱力下之應力

下 册

- 第十章 長跨橋梁(一) —— 三鉸拱橋及三鉸加勁懸橋
- 第十一章 長跨橋梁(二) —— 懸臂橋及威氏桁架橋
- 第十二章 結構之變位

上册目次

第一章	緒論	1
1—1.	結構之定義	1
1—2.	結構之分類	2
1—3.	結構工程之內容	5
1—4.	結構所受之力	6
1—5.	結構之實際與理想情形	8
1—6.	本書之範圍	9
1—7.	本書所用之單位	10
第二章	靜力學要則	13
2—1.	力及力系	13
2—2.	力之合成	16
2—3.	力之分解	21
2—4.	索線多邊形	26
2—5.	用索線多邊形求力矩	33
2—6.	面積之靜矩, 慣性矩, 慣性積及旋動半徑圖解 法	35
2—7.	索線多邊形之透視軸	37
2—8.	經過二定點或三定點之索線多邊形	39
2—9.	力系之平衡	46

2—10.	力系平衡之定理	51
第三章	反力,切力及彎矩之通則	57
3—1.	反力之原素及分力	57
3—2.	靜定之反力	59
3—3.	反力與結構之穩定	61
3—4.	反力之靜定法	66
3—5.	結構支座之實際	72
3—6.	反力之圖解法	78
3—7.	反力之數解法	92
3—8.	用虛功原理求反力	99
3—9.	切力及彎矩之定義	102
3—10.	關於切力及彎矩之理論	105
3—11.	切力圖及彎矩圖	107
3—12.	荷重圖,切力圖及彎矩圖之關係	111
3—13.	切力圖及彎矩圖之圖解法	116
3—14.	橫梁對於切力圖及彎矩圖之影響	125
第四章	桁架應力之通則	129
4—1.	桁架之原素及接合	129
4—2.	桁架之發展	132
4—3.	桁架分析之略史	135
4—4.	桁架之理想情形	136
4—5.	桁架本身之靜定與穩定	141

4—6.	桁架分析法之一(節點之數解法).....	150
4—7.	桁架分析法之二(彎矩之數解法).....	155
4—8.	桁架分析法之三(切力之數解法).....	158
4—9.	桁架分析法之四(節點之圖解法).....	165
4—10.	桁架分析法之五(切力及彎矩之圖解法)....	174
4—11.	桁架分析法之六(圖解隔離法).....	176
4—12.	桁架分析法之七(求反力法).....	177
4—13.	桁架分析法之八(指數應力法).....	180
4—14.	桁架分析法之九(代替法).....	189
4—15.	桁架分析法之十(虛功法).....	194
4—16.	桁架分析法之十一(機動法).....	197
4—17.	多重腹桿桁架之近似分析法.....	200
4—18.	結構靜定與穩定之通則.....	204
第五章	屋頂桁架及工廠排架之應力	224
5—1.	屋頂之形式及構造.....	224
5—2.	屋頂桁架及工廠排架之型式.....	225
5—3.	屋頂之呆荷重.....	231
5—4.	屋頂之活荷重.....	234
5—5.	屋頂桁架之支座及反力.....	251
5—6.	工廠排架之接合及反力.....	254
5—7.	屋頂桁架之應力.....	260
5—8.	工廠排架之應力.....	276

5—9.	屋頂桁架及工廠排架之支撐	284
5—10.	多柱式及多層式排架之應力	295
5—11.	三鉸拱屋頂桁架之應力	301
第六章	鈹梁	306
6—1.	鈹梁之用途及其型式	306
6—2.	腹鈹	309
6—3.	翼緣	314
6—4.	蓋鈹之長度	322
6—5.	翼緣之鉚接	327
6—6.	翼緣之鐸接	339
6—7.	腹鈹之加勁桿	348
6—8.	鈹梁各部之拼接	353
6—9.	翼緣傾斜或彎曲之鈹梁	372
附錄一	鋼角之要素(德國制)	376
附錄二	鉚釘之值,心距,邊距及鋼角之標準鉚心線	377
	圖,例題及習題索引	378

普通結構學

上 册

第一章 緒論

1—1. 結構之定義 廣義言之，凡若干事物，依確定方法，組成互有關係之一體，皆可稱爲結構。^① 但於工程中，結構一名詞，乃指在一定力系之下而維持平衡之一部或數部之合體而言，如梁、柱、牆、房屋、橋梁、及堤壩等是。

於工程中，結構乃用以承受荷重於其作用點 (point of application) 而傳達於適宜之支點。如圖 1—1 示一梁，受一荷重 P 於 a 點而傳達之於兩端之支柱。此梁在其荷重及其支力下，維持平衡，故爲一結構。同時二支柱自梁端承受一部份荷重而傳達於地基，並維

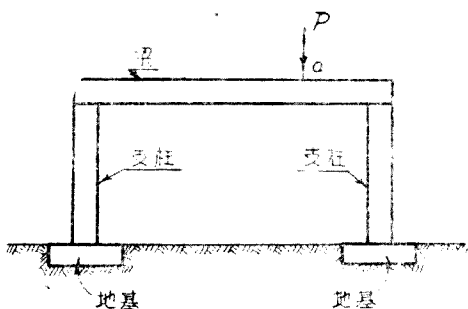


圖 1—1. 梁柱架

① 如社會學家常用「社會結構」，經濟學家常用「經濟結構」，地質學家常用「地質結構」等名詞。

持其平衡，故亦爲一結構。若合而視之，則梁及二柱之合體，亦爲一結構。

1—2. 結構之分類 結構之分類，可依各種之標準爲之。依其所用之材料，結構可分爲：(1) 木料結構，(2) 金屬〔鋼鐵及合質鋼 (alloy steel)〕結構，(3) 圬工 (磚石及混凝土等) 結構，(4) 各種材料合用之結構。但實際上除金屬結構可純用一種材料外，餘如木料結構常需鋼鐵以接合，磚石結構必需膠泥以黏合，混凝土結構更常需鋼筋以補其拉力強度之不逮，蓋皆各種材料合用之結構也。

依其構成之形式，結構可分爲：(1) 實體結構，與(2) 架成結構。如重力壩 (gravity dam) 及橋墩等，常係一實體之物，故爲實體結構。以若干直桿^①或梁柱，依一定方法聯合而成一體，卽爲架成結構。依其接合方法之不同，架成結構可分爲：(a) 桁架 (truss) 及 (b) 剛架 (rigid frame)。桁架中各桿之接合，係用可旋轉無阻之樞 (pin) 〔其作用與鉸 (hinge) 相同，其接合處稱爲鉸節 (hinged joint)〕 (圖1—2)，庶各桿間之角度，可以自由改變 (但實際多非如此)。剛架中各部之接合，係用固定方法〔如鉚接或銲接，其接合處爲剛節 (rigid joint)〕，或連續方法〔如混凝土結構之各部，係連續不斷，故剛架亦稱連續架 (continuous frame)〕 (圖1—3)，致各部間之角度，不能因荷

① 教堂中之舊式屋頂架，多有用曲桿者，但重要結構除拱 (arch) 外，常以不用曲桿爲是。

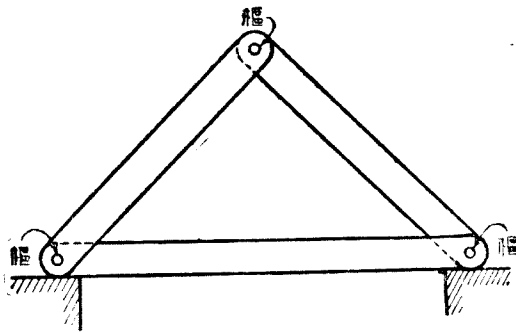


圖 1-2. 簡單樞接桁架

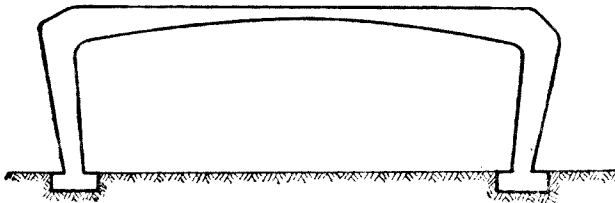


圖 1-3. 剛架橋

重或其他原因,稍有改變。

任何結構,常係以下列四種基本部份組成。即: (1) 拉桿 (祇受有拉力), (2) 柱, 撐, 及墩 (祇受有壓力), (3) 梁 (祇受有彎力), (4) 軸 (祇受有扭力, 除機器外, 平常橋梁及房屋不但用之極少, 且常極力避免之)。但結構之某部份, 視其所受力之性質如何, 常可兼有上述四種中二種以上之作用。

若架成結構及其所受之力, 計算時可視為皆在一平面之內者, 是為 平面架。如圖 1-4 所示之橋, 係二豎立桁架, 與縱梁 (stringer) 及橫梁 (floor beam) 所組成。計算時, 此二豎立桁

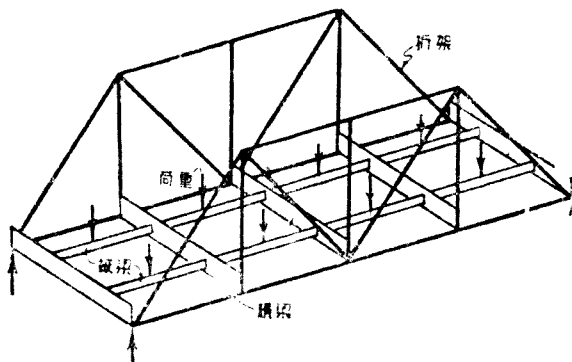


圖 1-4. 桁架橋梁之略圖

架及其所受之力，均可視為在桁架平面之內，故為平面架。反是則為空間架，如圖 1-5 所示之塔架是。

依其所在之地位，結構可分為：(1)上部結構 (superstructure) 及 (2)下部結構 (substructure)。如橋梁之桁架，常稱為橋梁之上部結構，橋墩及橋座，常稱為橋梁之下部結構。

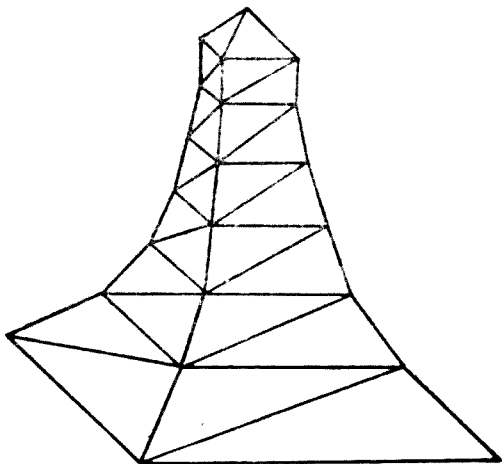


圖 1-5. 空間架

依其反力 (reactions) (即支力) 及應力 (stress) 之定法, 結構可分爲: (1) 靜定 (statically determinate) 結構, 及 (2) 靜不定 (statically indeterminate) 結構。凡結構之反力及應力, 祇需用靜力學即可算定者, 爲靜定結構。反是爲靜不定結構, 如圖 1—3 所示之剛架橋是。若祇其反力〔即外力 (outer forces) 之一種〕爲靜力學不能定者, 爲外力靜不定結構。若祇其應力〔即內力 (inner forces)〕爲靜力學不能定者, 爲內力靜不定結構。

1—3. **結構工程之內容** 結構工程爲土木工程之一部, 與其他各部之關係, 甚爲密切。如鐵路及道路工程中之橋梁, 水利工程中之堤壩, 衛生工程中之溝渠, 建築工程中之屋架等, 皆屬於結構工程之範圍。故結構工程爲土木工程中任何部所不可缺少者。此外如飛機之機架, 電力傳輸所需之塔架等, 亦皆在結構工程範圍之內。

建造一結構之先, 必有設計。設計可分爲二步: 第一步即就該結構之目的, 需要, 與其所在地之各種情形, 而決定其型式, 材料, 荷重, 及各部之大概尺寸等大綱, 使其能於安全而又經濟之條件下, 達其目的, 應其需要。試就造橋而論, 其橋身應用何種型式, 何種桁架, 何種材料, 應分爲若干跨, 每跨長度若干, 橋下淨空至少若干尺, 橋上荷重至多若干噸等等。凡此犖犖大端, 皆需視該橋之目的, 需要, 及其所在地之各種情形而定。此項大綱之設計, 既極重要而又極艱難, 工程師必有豐富之經驗, 敏銳

之判斷，精密之研究，始能因地制宜，妥爲規畫，學生在學校中，從書本上，至多祇可於其基本原則，稍窺門徑焉。

於偉大或有紀念性質之結構，美觀亦常爲大綱設計中應考慮之一要素，如是，則工程師必需有建築師之輔助及合作。

結構之大綱既經決定，吾人始知其型式，材料，尺寸，及荷重等，而後可進行第二步之設計。此第二步設計，又可約分爲三段：(1)根據靜力學及材料力學之原理，算定結構各部在荷重下所能發生之最大應力，即所謂結構分析 (structural analysis)。(2)根據材料力學之知識，算定結構各部之型式，大小，及其接合方法，即所謂結構設計 (structural design)。(3)根據製圖之藝術，繪製其全部總圖及各部詳圖，即所謂結構製圖 (structural drafting)。

結構製圖已完成之後，混凝土結構多係依圖就地製模建造。木料及鋼鐵結構，必須先依圖製成適合之式樣及尺寸，而後始能建造。

1—4. 結構所受之力 結構所受之力，可別爲二大類：即外力與內力。外力即結構自外面所受之力，如荷重及與荷重平衡之反力是。內力即結構內部因所受外力或他種之作用而發生之力，即應力是。

荷重又可分爲(1)呆荷重 (dead load)與(2)活荷重 (live load)。凡荷重長久存在，其位置及份量亦均不變者爲呆荷重，如結構自身之重量，及其所載之長久存在位置不變之他種重量

是。凡荷重存在不久，其位置及份量亦均無一定者，爲活荷重。活荷重又可分爲：(a) 行動荷重 (moving load)，如橋上行動之車輛人馬等是，(b) 可動荷重 (movable load)，如房屋中之傢具，房屋上之風雪壓力是。

故結構所受之力，可列表如下：



設計一結構之先，必需確知其所受之力。但結構自身之重量(呆荷重之一部)，非設計完成之後，不能確定。於此，工程師必先臆定結構自身之大概重量，而後進行設計。較尋常結構(如鐵路橋梁)之重量，可由已往經驗所得之公式或圖表而估計之，其結果與設計完成後所算得之實在重量，所差常甚微。於此，則已成之設計，或不需修改。但於非尋常之結構，此種修改，常爲必需；且有時須修改數次之多。此於結構自身重量，佔其所受之力之較大部份者爲尤然。1904年加拿大第一次所造之 Quebec 大橋，於建造時期中，不幸即遭傾毀，事後調查研究，始知即由於設計時所估計之重量，與實在重量相差太遠，而其設計未曾加以修改之故。

結構所受活荷重之決定，則更爲艱難而且重要。尋常之房屋及橋梁，其活荷重應爲若干，房屋規律 (building code) 或橋

梁規範(bridge specifications)常有明確之規定,可以遵循。但結構之非尋常者,其活荷重之決定,常需精密之研究,與敏銳之判斷,否則該結構不失之於不安全,即失之於不經濟。如我國各鐵路早年所造之橋梁,設計時所定之活荷重,多嫌太輕,至今日非經加固(strengthening)或改造後,不能通過較重或較速之機車。故活荷重之決定,不能祇以設計時所有之最重荷重為標準,必須顧及將來荷重之增加,此則有賴於工程師之研究與判斷焉。

1-5. 結構之實際與理想情形 無論如何簡單之結構,其實際情形,每甚複雜。為計算方便及簡易起見,常設法將其複雜之實際情形,化成簡單之理想情形。但此種化簡方法,必其所得之結果與實際情形所差不遠,始可用之。如圖 1-6 (a) 示

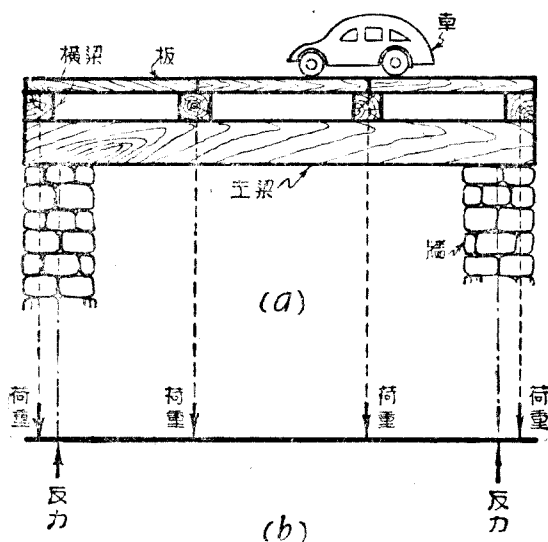


圖 1-6. 實際與理想結構之比較

一主梁 (main girder), 兩端支於牆上, 主梁上有橫梁; 橫梁上有板, 板上有一車。此結構固甚簡單, 但吾人欲依其實際情形, 而精確計算該主梁各點之應力, 固甚艱難; 即欲精確計算其兩端之反力, 亦非簡易。因反力必分佈於牆之寬度, 但係如何分佈, 吾人不易知之。惟通常計算時, 可將其化簡而成爲理想情形, 如圖 1-6 (b)。其所受之荷重, 可視爲集中於橫梁之中線, 而其反力亦可視爲集中於牆之中線, 均以箭頭表之^①。如此, 則反力之計算變爲簡易, 而所算得之結果, 與依實際情形所得者, 常相差不遠。若依理想情形所計算之結果, 與實際情形, 相差太多時, 則精確之計算, 常爲必要。但此不在本書範圍之內。總之, 讀者遇任何實際結構時, 當先設法使其化爲理想結構, 始能使其計算, 變爲簡易; 而實際情形, 何者可以化簡, 何者不可, 尤不可不加以精密之考慮。

1-6. 本書之範圍 本書題普通結構學, 其範圍常祇限於較簡單結構之分析, 即在任何荷重下其各部應力之計算, 結構工程之其他部份不與焉。所論之結構, 又大半限於靜定平面架。因設計既不在本書範圍之內, 故習題中每舉一桁架, 必示其型式, 尺寸, 及其荷重; 至其型式, 尺寸, 及荷重, 何以如此, 除有必要外, 多不論及。應力之計算, 亦完全以結構之理想情形爲本。

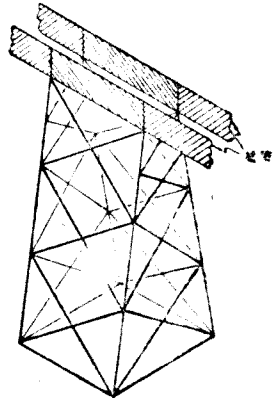
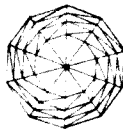
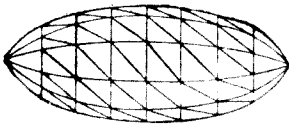
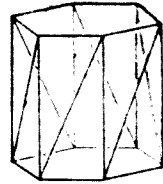
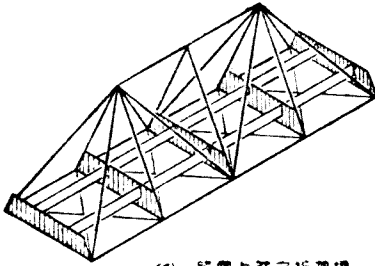
① 集中荷重, 亦係理想情形, 因荷重如真集中於一點或一線, 而點與線之面積均爲零, 則每單位面積所受之力, 必爲大至無窮, 此實際不可能也。

有人常謂：一優良之橋梁工程師，能設計任何結構。若確切言之，工程師若於橋梁及房屋之設計，有豐富之經驗，對於任何結構之設計，至少當知如何下手。故本書所論之結構，以橋梁為主，房屋次之，但所論之應力分析方法，多可應用於任何結構。

結構之材料，不外磚，石，木料，混凝土，及鋼鐵等。本書所論之應力分析方法，雖多可用於任何材料，但石料不能造桁架，木料多用於不重要或暫時之結構，混凝土結構常另有專書，且多係靜不定式，故本書所論，大半以鋼鐵結構為主要對象，蓋重要或永久之結構，多採用鋼鐵也。

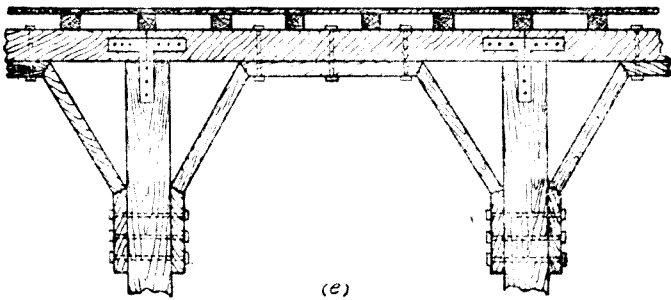
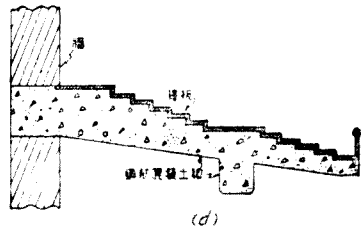
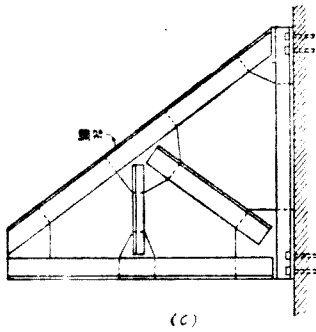
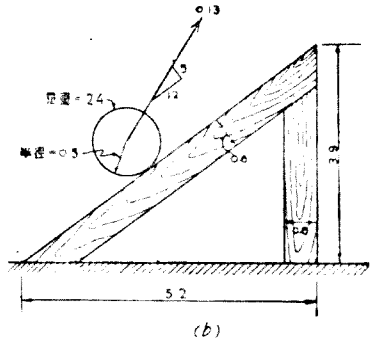
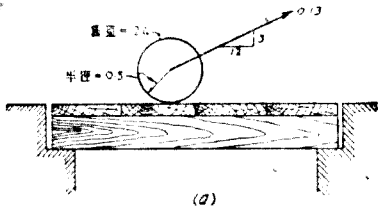
1—7. 本書所用之單位 我國之度量衡，早已採用公制〔即米(metric)制〕。故本書所用之單位，亦以公制為準。除特別註明者外，所有重量，均以公噸〔metric ton 即 1000 公斤 (kg.)〕為單位，所有長度，均以公尺 (meter) 為單位。且為簡便及一律起見，例題及習題中之重量及長度，祇寫其數目而不舉其單位（即寫作不名數），但有必要之處除外。（如均佈荷重，則於數目後加註「/公尺」。）惟截面之單位，若用公尺 (m.)，殊嫌太大而不便，故截面之寬長，多以公厘 (mm.) 計，其面積則多以平方公厘 (sq. mm.) 計，但均當特別註明。於單位應力 (unit stress)，及彈性係數 (modulus of elasticity) 等，則採用若干公斤 / 平方公厘，此與我國鐵路鋼橋規範所用者相同。

習題 1-1. 分析下列諸結構時何者所視作平面結構?何者不可?並說明理由。



習題 1-1.

習題 1—2. 圖示下列諸結構之實際情形，試將其變為理想情形，庶其分析可變為相當簡易。於(a)及(b)二結構並應註明其荷重之數量。



習題 1—2

第二章 靜力學要則

2—1. 力及力系 應力分析，以靜力學為基本，自不待言。本書之讀者，雖假定已習過靜力學，但為便利以後之應用起見，其中之若干要則，實有再簡賅說明之必要。

凡能使一物體有改變其靜止情形之趨勢者為力。力之種類甚多，最重要而又最尋常者，即地心之吸力。若欲完全確定一力，必須知其三原素，即(1)其數量 (magnitude)，(2)其作用點及(3)其傾向 (direction)。

力為一矢量 (vector)，故可以矢表之。圖 2—1 表一力 F 加於某物體。矢之長，依一定之比例表明其數量；矢頭之指向 (sense) 及矢之傾度 (inclination) i 角，表明其傾向；而其與物體之接

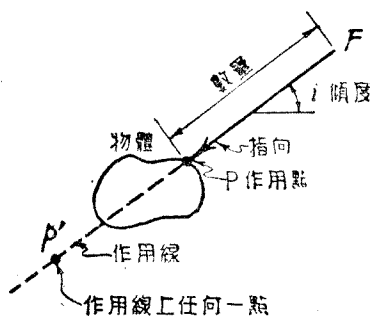


圖 2—1. 力之原素

觸點 p ，表明其作用點。1—5 節已述明，實際上無集中之力，故以矢表力，亦不過一種方便而又權宜之辦法。

由圖 2—1 可知力之傾向，實含二義，即其傾度與指向。力之傾度與作用點聯合而定其作用線 (line of action)。其實以作用線之任何一點 p' (圖 2—1) 與傾度，即可定力之作用線；

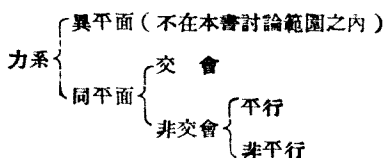
況根據力能傳遞 (transmissibility of force) 之原理，究以作用線之何點爲其作用點，亦有時不易確定。故定力之原素時，與其用其作用點，不如用其作用線上之任何一點，較爲確切合理。故力之原素，可列表如下：

力之原素	1. 數量 (以下以 m 代之)	}	作用線
	2. 作用線上之任何一點 (作用點即其一， 以下以 p 代之)		
	3. 傾度 (以下以 i 代之)	}	傾向
	4. 指向		

靜力學中，關於力之計算，固欲將上述四項原素，完全求得。但應用平衡定律以求力之數量時，同時即自然得其指向，一如解一代數方程，同時即求得其未知項之數量及其正負號。故於平衡之力系中，指向與數量，實非各自獨立之未知數。因此力之原素，實際祇有數量，作用線上之任何一點，及傾度三項；而所欲設法求得者，亦常祇限於此三項。

將若干力合併，而同時討論之，則此若干力可統稱之爲力系。力系可分爲 (1) 同平面 (coplanar) 力系及 (2) 異平面 (non-coplanar) 力系，視力系之作用線是否在同一平面之內而定。

平面力系，又可分爲 (1) 交會 (concurrent) 力系，及 (2) 非交會 (non-concurrent) 力系，視力系之作用線是否交會於一點而定。非交會力系又可分爲 (1) 平行 (parallel) 力系，及 (2) 非平行 (non-parallel) 力系。故力系之分類，可列表如下：



本書所論，既祇限於平面結構，故以後如未特別註明，所討論之力系，概係同平面者。

靜力學中受力系作用之物體，常假定為剛體(rigid body)。世既無絕對剛性之物體，故凡物體因力系之作用，必有變形。如是則力系之作用線，亦必因之稍有改變。但此種改變，常極微小而可以略去。故吾人應用靜力學時，若假設結構為剛體，當無甚差誤。

靜力學之應用，有數解與圖解二法。其優劣利弊，常係於結構之性質及應用人之偏好。通常言之，於正常整齊之結構，數解法既方便而又易精確；於畸形之結構，則圖解法常較數解法簡便，但不易精確。實際上工程師仍多喜用數解法，因採用此法，不但可達任何所欲之精確程度，且所有計算均可列成表格，同時由若干工程師分任之。若採用圖解法，則必由一二工程師自始至終，獨立任之，故常覺不便。雖然，採用數解法時，若隨手作一圖解法之略圖，常可使數解法之應用，較為簡易（例如例題3—1），故圖解法常可輔助數解法而使其應用易於明瞭。本書以後每舉一方法，常將數解法與圖解法並列，以備讀者將來實用時之選擇。

2—2. 力之合成 圖 2—2 (a) 示二力 F_1 與 F_2 ，交會於 A 點，其間之角度為 θ 。若以該二力為邊，作一平行四邊形〔稱

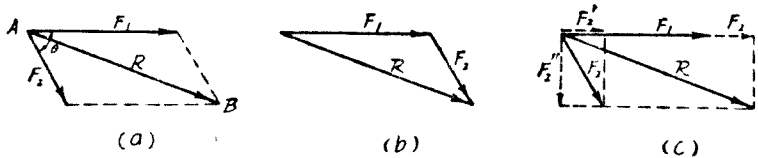


圖 2—2. 力平行四邊形及力三角形

為力平行四邊形 (force parallelogram)]，其對角線 AB 即表示 F_1 與 F_2 合力 (resultant) 之數量與作用線。此合力之作用，完全與 F_1 及 F_2 者相同。合力之數量，又可以下列方程計算之。

$$(2-1) \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta}$$

此合力 R 與 F_1 及 F_2 亦可成一三角形，稱為力三角形 (force triangle)。

較簡便而又易記之法，係先將 F_2 依下節所述之方法，分解二分力 (component) F_2' 及 F_2'' ，如圖 2—2 (c)。 F_2' 與 F_1 平行， F_2'' 與 F_1 垂直，如是則 F_1 與 F_2 之合力 R ，等於 $\sqrt{(F_1 + F_2')^2 + F_2''^2}$ 。用此法可以不必記憶方程 (2—1)。

若 F_1 與 F_2 係平行，其間之距離為 d ，而指向相同，則 $R = F_1 + F_2$ ，其指向與 F_1 及 F_2 相同。如圖 2—3 (a) 所示，於 F_1 之作用線上量定 F_2 ，於 F_2 之作用線上量定 F_1 ，作交叉線，將 F_1 與 F_2 之首尾交錯相連，其交點 A 即 R 作用線上

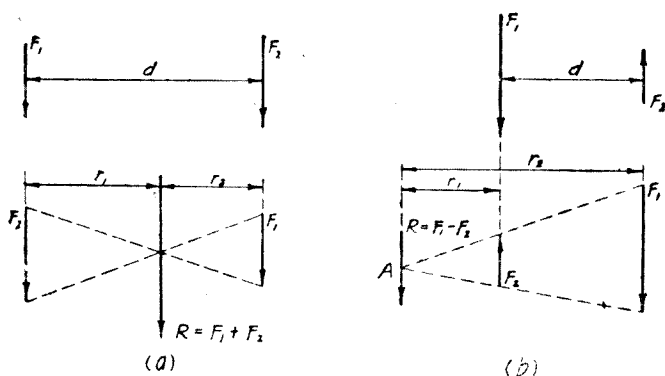


圖 2—3. 平行力系之合力

之一點。此作用線與 F_1 及 F_2 之距離 r_1 及 r_2 各如下：

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{F_2}{F_1 + F_2} d \\ r_2 &= \frac{F_1}{F_1 + F_2} d \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{F_2}{F_1} \quad (2-3)$$

方程(2—3)並可證明圖 2—3 (a)所示作圖法之正確。

若 F_1 與 F_2 之指向相反，而 $F_1 > F_2$ ，則 $R = F_1 - F_2$ ，其指向與 F_1 相同(向下)。 R 作用線之求法，如圖 2—3 (b) 所示，與圖 2—3 (a) 相似。方程(2—2) 及 (2—3) 亦均可用，惟需將 $F_1 + F_2$ 改為 $F_1 - F_2$ 。

若 F_1 與 F_2 近於平行，如圖 2—4 (a) 所示，其作用線之交點太遠，不易直接經過該交點而得其合力之作用線。於此，可先

作力三角形，求得

R 之數量，傾度，及

指向，如圖 2—4 (b)。

經過 F_1 作用線上

之任何一點 A ，作

AF 與 F_2 之作用

線平行。並作 AE ，

與圖 2—4 (b) 之 R

平行。再作 BC, BD ，

及 EF 三線。又由 C 點作 CG 與 EF 平行，與 BD 相交於

G 點，此 G 點即 R 作用線上之一點。經過 G 點作一線與 R

平行，即 F_1 與 F_2 合力 R 之作用線。①

若力系所含之力數，在二以上，無論其是否平行或交會於一

點，圖 2—2 至圖 2—4 之法，均可用之以求其合力。祇需先求

任何二力之合力，再求此合力與第三力之合力，依此遞進，即可

求得所有諸力之合力。如圖 2—5 (a) 所示，可先以 F_1 與 F_2

作力三角形〔圖 2—5 (b)〕，求得其合力 R_{1-2} 之數量，傾度，及

指向；其作用線必經過 F_1 與 F_2 作用線之交點 A 〔圖 2—5 (a)〕。

再以 R_{1-2} 與 F_3 作力三角形求得其合力 R_{1-2-3} 之數量，傾

度，及指向，其作用線必經過 R_{1-2} 與 F_3 作用線之交點 B 。圖

2—5 (b) 之二個力三角形，合之成爲力多邊形 (force polygon)，

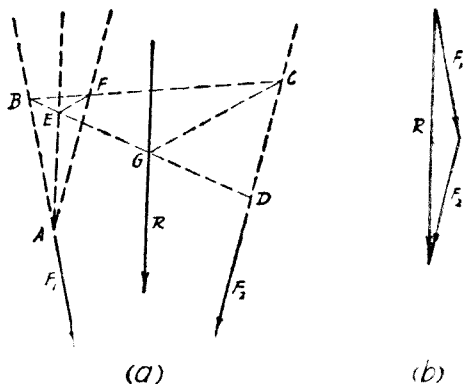


圖 2—4. 近於平行力系之合力

① 另一法見習題 2—4。

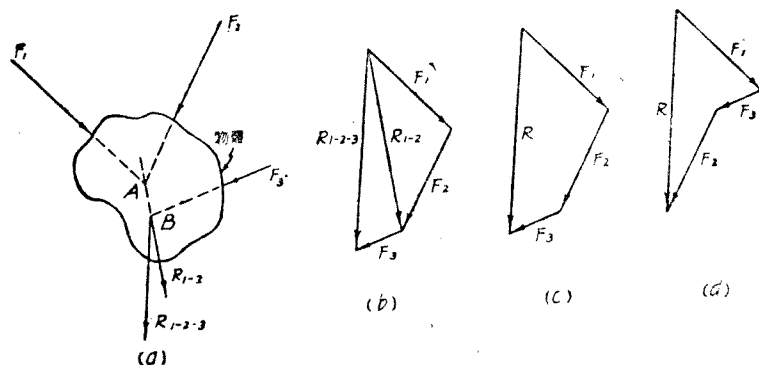


圖 2-5. 非交會非平行力系之合力

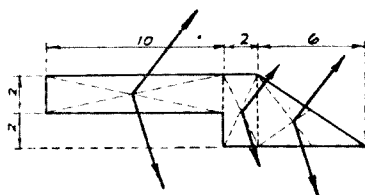
如圖 2-5 (c)。此圖有二點需注意：(1) 其中諸力之指向，係依同一之順序，而合力 R 之指向正與其相反；(2) 其中諸力之次序，不必拘一定之先後，如圖 2-5 (d)，係依 F_1 ， F_3 ，及 F_2 之次序，所得之合力 R ，與圖 2-5 (c) 所得者，毫無差異。若非交會力系所含之力太多，則上述求其合力作用線一點之法頗嫌繁瑣，遠不如採用下述索線多邊形 (funicular 或 string polygon) 法之方便。

於非交會非平行力系，如其所含之力較多，欲用數解法求其合力，必先將諸力依下節所述之法，分解為二分力，與坐標之 X 軸及 Y 軸平行，而後求其合力之數量，傾度，及指向。至其作用線之一點，須用范氏 (P. Varignon, 1654—1722) 關於力矩 (moments) 法之定理^① 以求之，手續頗為繁瑣。此即數解法不

① 范氏之定理謂：「同平面力系諸力對於該平面內任何點力矩之代數和，等於其合力對於該點之力矩，反之亦然。」

如圖解法方便之一例，且此法結構學中，用之極少，故不贅。

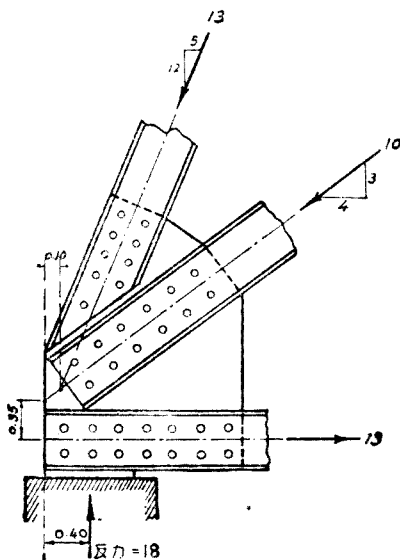
習題 2-1. 以上述求平行力系合力之圖解法，求此圖形之重心。



習題 2-1.

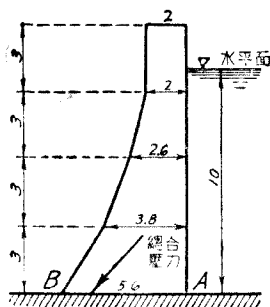
提示 將此圖形分爲三部份(即二長方形及一三角形)，並定其各部之重心。又將各部之面積，視爲集中於其重心之力，如圖所示。先使此諸力成任何同一傾向(傾度及指向)之力系，而求其合力之作用線。再使此諸力成任何其他同一傾向之力系，亦求其合力之作用線。此二合力作用線之交點，即該圖形之重心。

習題 2-2. 附圖示某桁架一剛節之應劣設計，用圖解及數解法，求所示諸力之合力。



習題 2-2.

習題 2-3. 附圖示一圪工之重力壩，圪工之重量約為 2.4 公噸 / 立方公尺。試取此壩長一公尺之一段，先以圖解法求此壩底 AB 平面之總合壓力。再以數解法校核所得之答案。並計算 A 點有無拉應力存在。



習題 2-3.

習題 2-4. 試另覓一圖解法，以求圖 2-4(a) 所示二力之合力作用線，並證明其正確。

提示 另以作用線相同而指向相反之任何二力，分別加於該二力作用線之尾或首，再求此四力之合力作用線。

2-3. 力之分解 力之分解 (resolution of force)，其意義及步驟，適與前述力之合成相反。後者係以一力代替若干力，而前者係以若干力代替一力。此一力與若干力之作用皆相同，此若干力稱為該一力之分力。

任何一力，雖可分解為任何數之交會或非交會分力，但一力分解為二分力之法，結構學中用之最多。且每次將一力分解為二分力，依此遞進，即可將一力分解為任何數之分力，故以下所論，祇於此法為限。

將一力分解為二分力，其分力之作用線必與該力之作用線平行或交會於一點。由此可知(1)某一力與其二分力不成平行

力系，即成交會力系；(2)根據范氏力矩之定理，則某一力可於其作用線上之任何一點，分解為二交會分力。

無論某一力與其二分力所成之力系，係平行或係交會，其分解法均有無窮之可能性。故必將分力之原素，加以適當之限定，其分解法始能確定不二。

先論交會之分力。於此，分力原素之限定，以下列三則，結構學中用之最多。^①

(1) 二分力之傾度已定，求其數量 設欲將某一力 F 分解為二分力，其傾度各與圖 2-6 (b) 之 a 及 b 線平行。即於 F 之尾，作一線與 b 或 a 平行；再於 F 之首，作一線與 a 或 b 平行，即得力三角形〔圖 2-6(a)〕。其二邊之長，即 F 之二

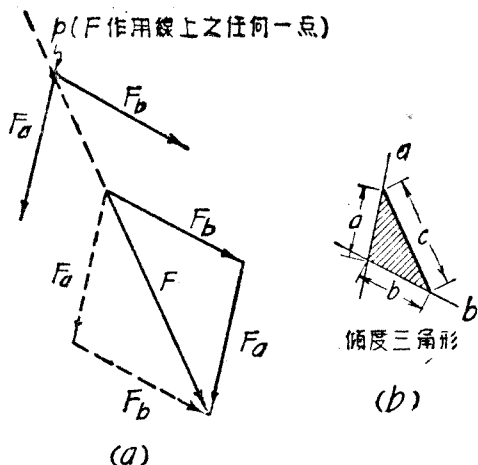


圖 2-6. 交會分力之圖解

① 其餘之例，見舊題 2-6。

分力 F_a 與 F_b 之數量，其指向係自 F 之尾，順序指向 F 之首。此分力之作用點，可置於 F 作用線上之任何一點 p 。若於圖 2—6 (b) 作 c 線與 F 之傾度平行，即得所謂傾度三角形 (inclination triangle)。設 a, b, c ，等於其各邊之長，則

$$\left. \begin{aligned} F_a &= F \frac{a}{c} \\ F_b &= F \frac{b}{c} \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

$$F = F_a \times \frac{c}{a} = F_b \times \frac{c}{b} \quad (2-5)$$

上列三方程式，極其簡單，以後論桁架之應力時，常需用之。

(2) 一分力之作用線及其他分力作用線上之一點均已定，求其數量 設欲將圖 2—7 (a) 所示之 F 分爲二分力，其第一分力之作用線爲 b 線，其第二分力之作用線，須經過 p 點。先將 F 之作用線與 b 線引長交於 A 點，作 Ap 線，即第二分力之作用線。再作力三角形如圖 2—7 (b)，即得其二分力 F_a 。

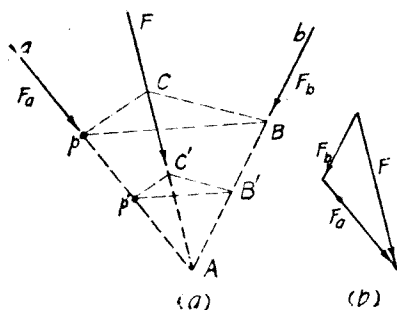


圖 2-7. 近於平行分力之圖解

與 F_b 之數量及傾向（故此例可視為上例中之特例）。若 F 之作用線與 b 線近於平行，則其交點 A 必太遠而不易確定，故 F_a 之作用線不易依上法求得。於此，可如圖 2—7(a) 所示，以 p 點為一頂點，作任何三角形 pBC 。再作一三角形 $p'B'C'$ ，其各邊與 pBC 者平行，得 p' 點。作 pp' 線，即 F_a 之作用線。以後所論求反力圖解法之一法，即根據於此。

(3) 一分力之傾度及數量均已定，求其他一分力之傾度及數量 此法最簡單，如圖 2—7 (b) 設 F 之一分力 F_a 之傾度及數量均已定，作力三角形即得 F 之他一分力 F_b 之傾度及數量。 F_a 與 F_b 指向之定法如前。

次論平行之分力。其分力原素之限定，有下列二則。

(1) 二分力之作用線已定，求其數量 設欲將某一力 F 分解為二分力 F_a 及 F_b ，其作用線各為其兩旁之 a 及 b 線〔圖 2—8(a)〕，求其數量。自 F 之尾 A 點，作任何線與 a 線交

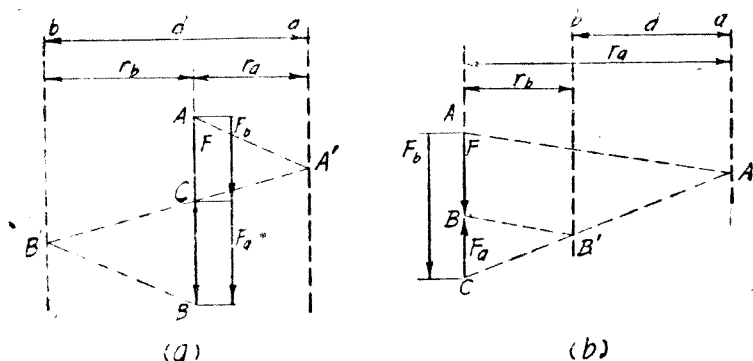


圖 2—8. 平行分力之圖解

於 A' 點。又自 F 之首 B 點，作 BB' 與 AA' 平行，並與 b 線交於 B' 點。聯 $A'B'$ 線，與 F 之作用線交於 C 點，則 $AC = F_b$ ， $CB = F_a$ 。其指向依 AC 及 CB 之順序。若 a 及 b 線均在 F 之一旁（如右旁），其解法相同，如圖 2—8 (b) 所示，若用數解法，則

$$\left. \begin{aligned} F_a &= F \times \frac{r_b}{d} \\ F_b &= F \times \frac{r_a}{d} \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

此法於以後論反力之圖解法時，亦採用之。

(2) 一分力之作用線及數量均已定，求其他分力之作用線及數量 如圖 2—8 所示，設 F_b 之作用線及數量均已定，求 F_a 之作用線及數量。先定 C 點，則 F_a 之數量等於 CB 。作 BB' ，並作 AA' 與 BB' 平行。聯 $B'C$ 線，與 AA' 交於 A' 點，此點即 F_a 作用線上之一點。圖 2—8 (a) 示 F_b 之數量小於 F 之解法，圖 2—8 (b) 示 F_b 之數量大於 F 之解法。 F_a 之指向常可觀察 F 及 F_b 之指向而定。

習題 2—5. 以圖解法求下列諸題中之分力，並以數解法校核之。

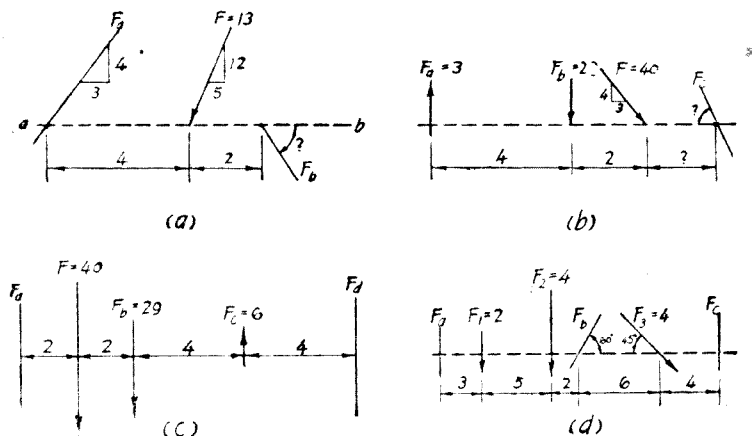
(a) 求分力 F_a 與 F_b 之數量及指向，並 F_b 之傾度。

(b) 分力 F_a 及 F_b 完全確定，求分力 F_c 之數量，作用線，及指向。

(c) 分力 F_b 與 F_c 完全確定，求分力 F_a 與 F_d 之數量及指向。

(d) 先求 F_1, F_2 與 F_3 之合力，再將此合力分為三分力 F_a, F_b ，與 F_c ，

而求其數量及指向。



習題 2-5.

習題 2-6. 將某一力分解為二交會之分力,其分力原素之限定,除本書已列舉之上三例外,試列舉其餘諸例,並說明其圖解法。若限定不適當時,是否有時有二答案,或無答案。試舉例以說明之。

2-4. 索線多邊形 任何同平面力系合力之數量,傾度,及指向,可以力多邊形求之。交會力系之作用點為已知,無需另求。至於非交會力系,而所含之力數又較多,則前述依此遞進求合力作用線之圖解法,殊覺繁瑣不便。此於力之分解亦然。蓋欲將某力系分解為二個或二個以上之分力,如習題 2-5 (d),必先求該力系之合力,而後始能應用前述力之分解法也。

於此,可採用索線多邊形法〔亦稱平衡多邊形法 (equilibrium polygon, 理由見後),茲分述如下:

(1) 用索線多邊形以求合力 圖 2-9 (a) 示任何同平面力系 F_1, F_2, \dots 等。此圖常稱為空間圖 (space diagram)。

圖 2—9(b) 示其力多邊形，及其合力 R 之數量，傾度，及指向。取任何一點 P ，稱爲極點(pole)。作 $P-0, P-1, \dots$ 等線，稱爲射線(rays)。於圖 2—9 (a) 亦作 $0-P, 1-P, \dots$ 等

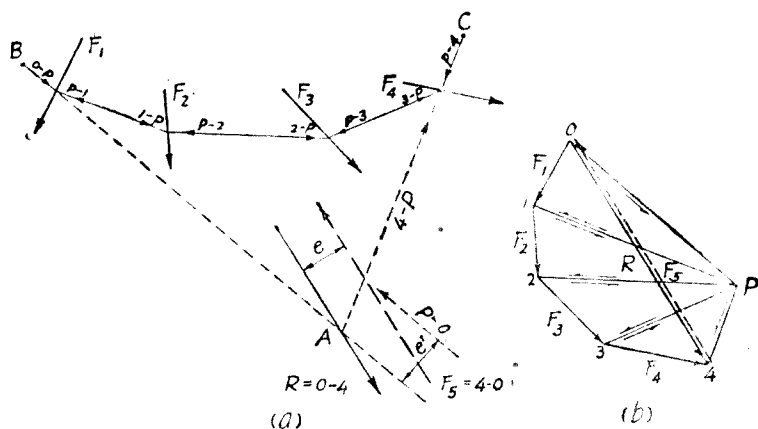


圖 2—9. 用索線多邊形求合力

線，稱爲索線(string)，各與圖 2—9 (b) 之射線平行，而相交於諸力之作用線上，即得此諸力之索線多邊形。圖 2—9 (b) 之諸射線，可視爲諸力之分力。如 $0-P$ 及 $P-1$ 爲 F_1 之分力， $1-P$ 及 $P-2$ 爲 F_2 之分力等，其指向如矢頭所示。故此力系 F_1, F_2, \dots 等已分解爲八個分力，而其中間三射線所示之六個分力，因數量相等，傾向相反而互相消去，所餘者祇首尾二索線 $0-P$ 及 $P-4$ 所示之二分力，即此力系可以 $0-P$ 及 $P-4$ 二分力代替之。故此力系合力之作用線，必經過 $0-P$ 及 $P-4$ 之交點 A [圖 2—9 (a)]。

設此力系增加一 F_6 ，其數量與傾度均與 R 相等，而其指

向與 R 相反，則圖 2-9 (b) 之力多邊形必成一閉合形，其指向依一定之順序。若 F_5 與 R 作用線間之距離為 e [圖 2-9(a)]，則此新力系之合力為一力偶 (couple)，其數量等於 $F_5 e$ 或 $R e$ 。又此新力系之諸力，可以數量及傾度相同而指向相反之二分力 $0-P$ 及 $P-0$ 代替之，故此新力系合力之力偶，亦可等於 e' ($0-P$)。設 F_5 與 R 之作用線相合 [F_5 即稱為該力系之平衡力 (equilibrant)]，則此力偶等於零，故此新力系成為平衡之力系；而圖 2-9 (a) 之首尾二索線 $0-P$ 及 $P-0$ 相合而成一線，即此索線多邊形亦成一閉合形。

索線多邊形之作法，一如力多邊形，不必拘一定之次序，但二者之次序必相同。

假設圖 2-9 (a) 之索線多邊形為一細繩 (重量甚微而質極柔軟)，固定於 B 及 C 二點，則此細繩在力系 F_1, F_2, F_3 ，及 F_4 之作用下，必成平衡狀態；而此細繩各段之拉應力，等於圖 2-9 (b) 中 $P-0, P-1, \dots$ 等所示之分力。其簡易之實驗法^①如下，先以任何二平行力 F_1 及 F_2 作一索線多邊形 $abcd$ 於黑板上 (圖 2-10)，於索線 ab 及 cd 上之任何點 a 及 d ，

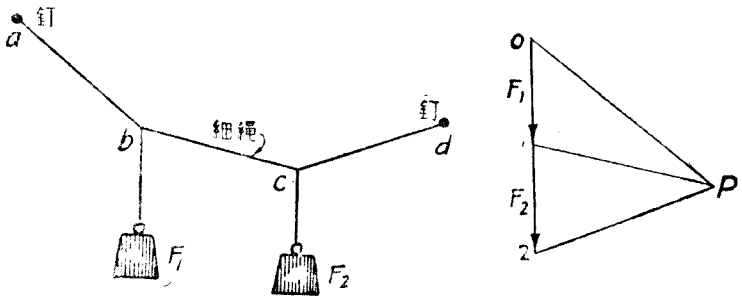


圖 2-10. 索線多邊形之實驗

① 讀者應親自作此簡易實驗。

釘二釘，再以一細繩，其長度等於 $abcd$ 。以 a 及 d 二端繫於釘上，再以二重量與 F_1 及 F_2 成比例者懸於 b 及 c 二點，則此細繩在此二重量下所成之平衡形，與前所作之索線多邊形恰相符合。索線多邊形名稱之來由以此，而其又稱為平衡多邊形亦以此。

(2) 用索線多邊形以求分力 任何同平面力系之合力，既依上法完全確定之後，則其任何分力，可依 2—3 節所述之法求之，並無不便，但下列二則，當加以注意。

(a) 將任何同平面力系分解為二分力，其一分力之作用線已定，而其他分力作用線上之一點亦已定，求其數量 設欲將任何同平面力系 F_1 及 F_2 [圖 2—11(a)] 分解為二分力 F_a 及 F_b ， F_b

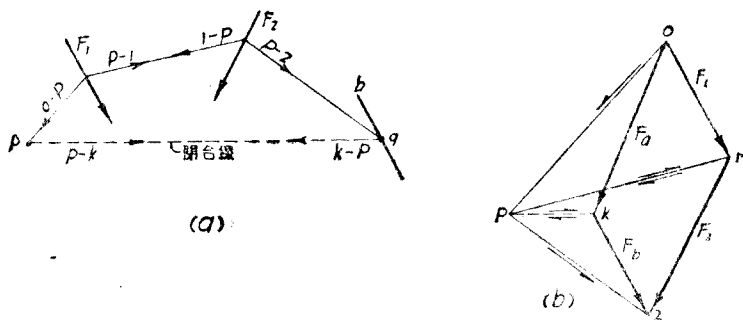


圖 2—11. 用索線多邊形求非平行分力

之作用線已定為 b 線， F_a 之作用線必經過 p 點。如圖 2—11(b) 所示，先作 F_1 及 F_2 之力多邊形，以任何點 P 為極點，作射線 $P-0$ ， $P-1$ ，及 $P-2$ 。再於圖 2—11(a) 作索線多邊形，其首索線 $0-P$ 經過 p 點，而尾索線 $P-2$ 與 b 線交於 q 點。聯 pq 閉合線，於圖 2—11(b) 作 $P-k$ 射線與 pq 平行，又作 $2-k$

與 b 線平行，並與 $P-k$ 相交於 k 點。聯 $0-k$ ，如是則 $0-k = F_a$ ， $k-2 = F_b$ ，即所求之分力。觀圖 2-11，可知 F_1 及 F_2 可以四分力 $0-P$ ， $P-k$ ， $k-2$ ，及 $2-0$ 代替之。前二分力之合力即 F_a ，後二分力之合力即 F_b ，而 F_a 及 F_b 與所定之條件，亦完全符合。

(b) 將任何同平面力系分解爲二分力，其作用線上之一點均已定，且其傾度須與該力系之合力平行求其數量 此題之解法有二：第一法與圖 2-11 相似，先以力多邊形求 F_1 與 F_2 之合力 R [圖 2-12 (b)]。經過二分力之作用線之一點 a 及 b ，作直線與 R 平行。於 a 或 b 線上，取任何點如 p 或 q ，作索線多邊形及閉合線如圖 2-12 (a)。於圖 2-12 (b)，作 $P-k$

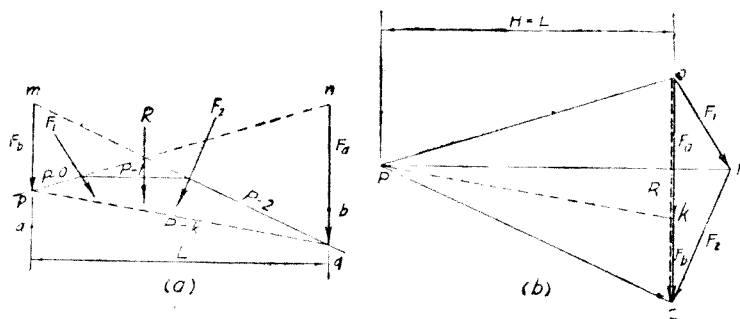


圖 2-12. 用索線多邊形求平行分力

與閉合線 pq 平行，並與 R 線交於 k 點。如是，則 $0-k = F_a$ ， $k-2 = F_b$ 。其證明與圖 2-11 同。第二法與圖 2-12 (a) 相似，惟需令圖 2-12 (b) 之極距 (pole distance) (即極點 P 與

R 作用線之垂直距) H , 等於此二分力作用線間之正距 (normal distance) L , 但不作閉合線 $P-k$ 。將 $P-0$ 延長與 b 線交於 n 點, 又將 $P-2$ 延長與 a 線交於 m 點。如是, 則 $mp = F_b$, $nq = F_a$ 。蓋圖 (a) 之二個三角形 mpq 及 npq 各與圖 (b) 之二個三角形 $2kP$ 及 $0kP$ 相等, 因前者之高度 L 與後者之高度 H 相等。此節所述諸法, 以後論反力及桁架之應力時, 常採用之。

索形曲線 於分佈之力, 則索線多邊形成一圓碗之曲線, 稱爲索形曲線 (funicular curve)。若圖 2-13(a) 之 $a' b' c' d' e'$ 爲任何分佈力之圖, 作豎線 aa', bb', cc', \dots 等將其分爲若干等寬之形, 其寬度愈小愈佳, 庶各形可視爲一梯形 (trapezoid) 而無大誤。再將各形之合力 (即多邊形之面積), 視爲集中力 F_1, F_2, \dots 等, 其作用線各經過其梯形之重心, 如前法作力多邊形如圖 2-13(b), 及索線多邊形, 如圖 2-13 (a)。再於此索線多邊形之內,

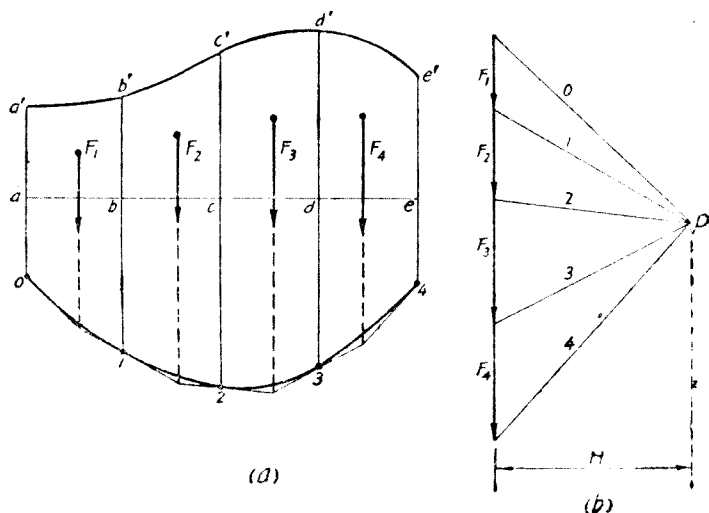


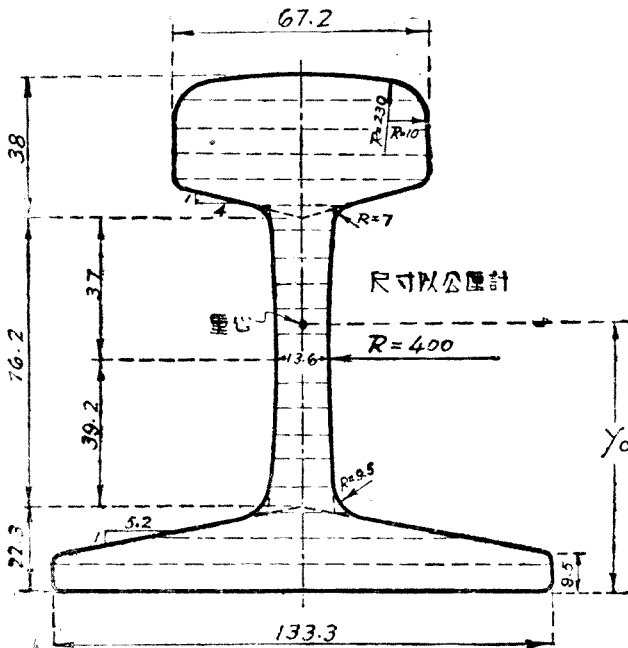
圖 2-13. 索形曲線

作一圓婉之曲線，於 $0, 1, 2, \dots$ 等點(即各索線與 aa', bb', cc', \dots 等引長之交點)，與各索線相切，即得此分佈力之索形曲線。

若將一柔軟而輕細之繩，其長等於此索形曲線 0 至 4 之長，其二端繫於 0 及 4 二點，則此繩在此分佈力之作用下，其彎曲形與此索形曲線相同。因此，若於索形曲線上之任何一點，作一切線，並於力多邊形作一射線與之平行，則此射線之長，即表示此繩中該點之拉力，而極距 H 表示此繩中最小之拉力，或此繩上任何點拉力之平分力。

於均勻分佈之力(即圖 2-13(a) 之 $a' b' c' d' e'$ 與 $abcde$ 平行)，則索形曲線即成爲一拋物線 (parabola)。

習題 2-7. 圖示我國標準鋼軌之截面及其尺寸，用索線多邊形，求其重心與底線之距離 y_0 。



習題 2-7.

提示 將該截面分為二十等高之橫條，將每條視為梯形，故其面積可以其高度中點之寬度代表之，並其重心亦可視為與其高度中點相合。

習題 2-8. 用索線多邊形解習題 2-2 及 2-3。

習題 2-9. 用索線多邊形解習題 2-5。

2-5. 用索線多邊形求力矩^① 索線多邊形亦可用之以求任何同平面力系對於某點之力矩。設欲求圖 2-14 (a) 所示力系 F_1, F_2, F_3 及 F_4 對於任何點如 p 點之力矩(即 M_p)，先用索線多邊形求其合力，並定 p 點與此合力作用線之正距 e ，故 $M_p = Re$ 。經過 p 點作一直線與 R 之作用線平行，與此力系之首索線 $P-0$ 交於 B 點，及尾索線 $P-4$ 交於 C 點(首尾索線 $P-0$ 及 $P-4$ 即表示合力 R 之二分力者)，並使 B

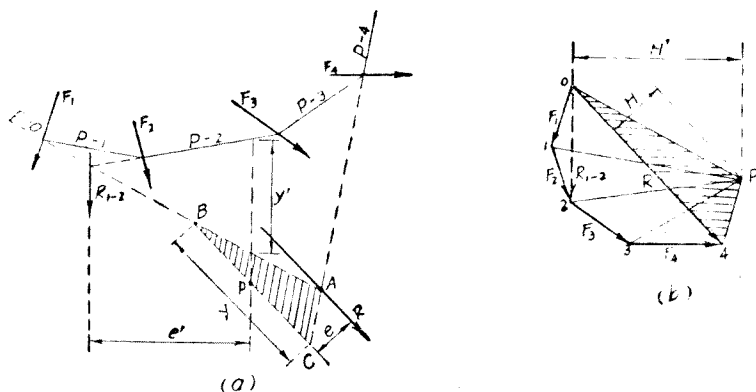
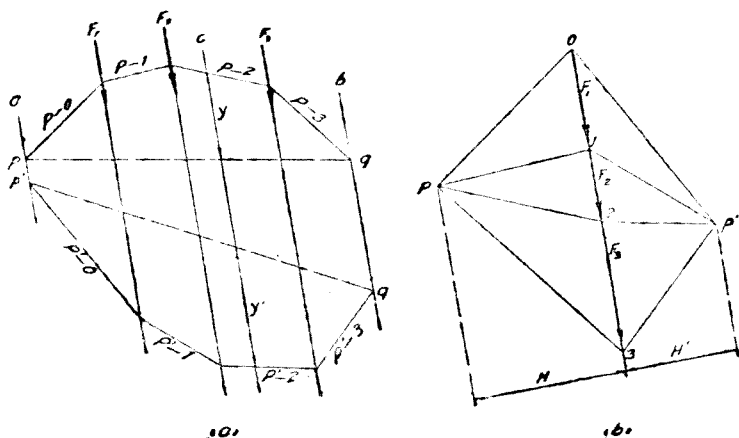


圖 2-14. 用索線多邊形求力矩

^① 此法乃瑞士之教授庫氏 (Carl Culmann) 1821—1881 所創，其所著之圖解力學 (Die graphische Statik) 一書，於 1866 年出版，在當時乃一空前巨著。

與 C 間之截距 (intercept) 爲 y 。由圖 2—14 (a) 及 (b), 可知 ABC 與 POA 係二相似三角形, 故 $R/H=y/e$, 或 $Re=Hy$, 所以 $M_p=Hy$ 。其中 H 爲極距, 其單位及比例尺與圖 2—14 (b) 力多邊形同, y 之單位及比例尺與圖 2—14 (a) 力系間之距離 (即空間圖) 所用者相同。同此, 則 F_1 及 F_2 對於 p 點之力矩, 即等於 $H'y'$ 。此法於此非平行力系, 似不如直接用 $M_p=Re$ 之簡便。但於平行力系, 如以後所論求梁之彎矩圖, 及下節所論求任何畸形面積之靜矩 (statical moment), 慣性矩 (moment of inertia) [亦稱二次矩 (second moment)], 慣性積 (product of inertia), 及旋動半徑 (radius of gyration) 等, 其便利遠勝於數解方法。

習題 2—10. 附圖示一任何平行力系 F_1, F_2, \dots 等。於其兩旁各作一直線 a 及 b , 與力系平行, 以任何點 P 爲極點, 其極距爲 H , 作一索線多邊



習題 2—10

形及閉合線 pq ，又以 P' 為極點，其極距為 H' ，作另一索線多邊形及閉合線 $p'q'$ 。於 a 及 b 二線間作任何直線 c ，亦與力系平行，其於此二索線多邊形之截距為 y 及 y' 。用上節之理論，求證 $\frac{y}{y_1} = -\frac{H'}{H}$ 。

2-6. 面積之靜矩，慣性矩，慣性積，及旋動半徑圖解法^① 求任何畸形面積之上述諸量，應先將該面積分為若干極小之面積，再將此項小面積視為與坐標軸平行之同指向平行力系，而後求之。圖 2-15(a) 示三個此種極小面積 A_1 A_2 及 A_3 ，及其與任何 X 及 Y 坐標(注意 X 及 Y 軸間之角度非直角)之關係。設吾人欲求 A_1 A_2 及 A_3 ，對於 X 軸之靜矩(即 M_x)，先將此三

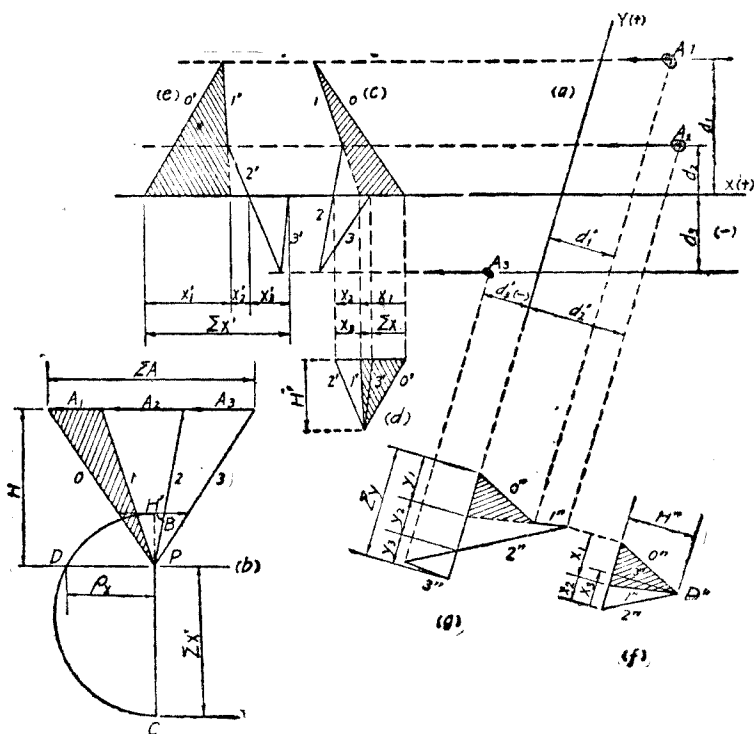


圖 2-15. 面積之靜矩，慣性矩，慣性積及旋動半徑之圖解法

① 此外尚有其他二法，但均需求某種面積，遠不如此法之簡便適用，故不贅

面積視作與 X 軸平行之同指向平行力系，作力多邊形如圖 2-15(b)，及索線多邊形如圖 2-15(c)。其各索線在 X 軸之截距為 X_1, X_2 在 X_3 (注意 X_3 爲負，因 d_3 爲負，故 X_3 之指向與 X_1 及 X_2 相反)。由圖(b)及圖(c)之相似三角形，可得 (2-7)

$$\frac{X_1}{d_1} = \frac{A_1}{H}$$

由此， $Hx_1 = A_1d_1$

同此， $Hx_2 = A_2d_2$

$$Hx_3 = A_3d_3$$

相加得 (2-7) $H\Sigma x = \Sigma Ad = Mx$

即所求對於 X 軸之解矩。

再將 X_1, X_2 ，及 X_3 ，視作與 X 軸平行之平行力系，作力多邊形如圖(d)及索線多邊形如圖(e)，其各索線在 X 軸上之截距為 X_1', X_2' ，及 X_3' 。由圖(d)及圖(e)之相似三角形，可得

$$\frac{X_1'}{d_1} = \frac{X_1}{H'}$$

但， $X_1 = \frac{A_1d_1}{H}$

故 $HH'X_1' = A_1d_1^2$

同此， $HH'X_2' = A_2d_2^2$

並 $HH'X_3' = A_3d_3^2$

相加得 (2-8) $HH'\Sigma X' = \Sigma Ad^2 = I_x$

即所求對於 X 軸之慣性矩，或二次矩。由此類推，而遞進，吾人可用此法以求三次矩 (即 ΣAd^3) 或四次矩 (即 ΣAd^4)，毫無限制或困難。

若欲求對於 X 軸之旋動半徑 (即 ρ_x)，於圖(b)索線 0 及 3 之間，量截距等於 H' ，而與 X 軸平行。由極點 P 作與 H' 之垂直線，得 B 點，並向下引長至 C 點，使 $PC = \Sigma x'$ 。以 BC 爲直徑，作半圓 BCD ，與經過 P 點之平線 (與 X 軸平行) 交於 D 點。如是，則 $DP = \rho_x$ ，即所求對於 X 軸之旋動半徑。茲證明如下：

由圖(b), 得 $\frac{BP}{H'} = \frac{H}{\Sigma A}$, 或 $BP = \frac{HH'}{\Sigma A}$

並 $DP = \sqrt{BF\Sigma x'}$

故 $DP = \sqrt{\frac{HH'\Sigma x'}{\Sigma A}} = \sqrt{\frac{x}{\Sigma A}} = \rho_x$ (2-9)

設欲求對於 X 及 Y 軸之慣性積 (即 I_{xy})。將圖(d)之 x_1, x_2 , 及 x_3 , 視作與 Y 軸平行之力系, 作力多邊形如圖(f), 及索線多邊形如圖(g)。其各索線在 Y 軸上截之距爲 y_1, y_2 , 及 y_3 。由此二圖之相似三角形, 可得

$$\frac{y_1}{d_1'} = \frac{x_1}{H''}$$

但, $X_1 = \frac{A_1 d_1}{H}$

故 $HH''y_1 = A_1 d_1 d_1'$

同此, $HH''y_2 = A_2 d_2 d_2'$

$$HH''y_3 = A_3 d_3 d_3'$$

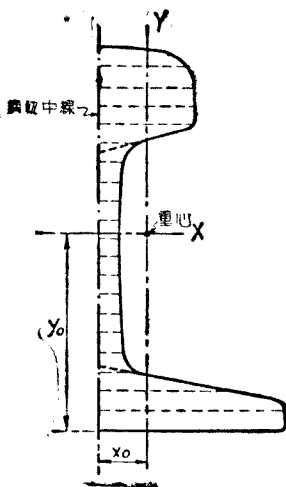
相加得 $HH''\Sigma y = \Sigma A d d' = I_{xy}$ (2-10)

即所求對於 X 及 Y 軸之慣性積。

習題 2-11. 取習題 2-7 所示鋼軌截面之一半 (左半, 或右半), 置 X 及 Y 平豎坐標於其重心。用圖解法求此面積之 M_x, I_x, ρ_x , 及 I_{xy} 。

2-7. 索線多邊形之透視軸 (axis of perspective) 於任何同平面之力系 F_1, F_2 , 及 F_3 (圖2-16), 以任何兩點 P 及 P' 爲極點, 作二索線多邊形, 則其每對相同索線之交點 a, b, \dots 等, 必在一與 $P-P'$ 平行之直線上。此直線稱爲索線多邊形之透視軸。證明如下:

如能證明 ab, bc , 及 cd , 均與 $P-P'$ 平行, 則該三線必在一直線上。茲以 bc 線爲例。於圖 2-16(a) 及 (b), 另加一 F_2' , 其數量及作用線均與



習題 2-11.

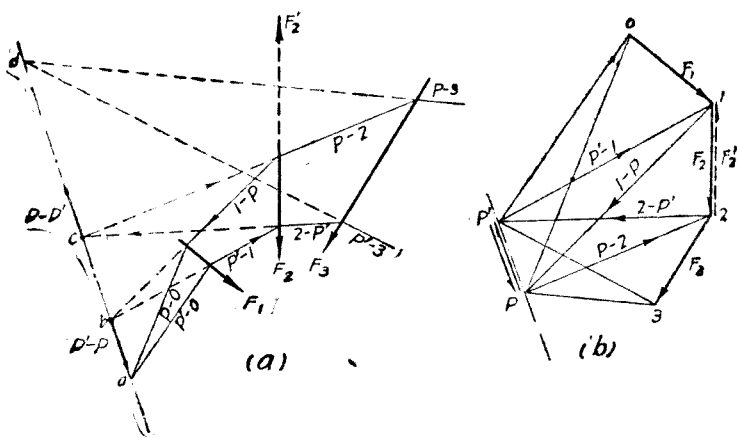


圖 2-16. 索線多邊形之透視軸

F_2 相同,但指向相反。於圖 2-16(b), $1-P$ 及 $P-2$ 可視為 F_2 之分力,而 $2-P'$ 及 $P'-1$ 可視作 F_2' 之分力。 F_2 與 F_2' 之合力既為零,則此四分之合力亦必為零。但 $P'-1$ 及 $1-P$ 之合力為 $P'-P$, $P-2$ 及 $2-P'$ 之合力為 $P-P'$, 故 $P'-P$ 與 $P-P'$ 之合力亦為零。於圖(a)則 $P'-P$ 之作用點為 b , 而 $P-P'$ 之作用點為 c , $P'-P$ 在 $P-P'$ 之合力既為零,則其作用線必與 bc 線相合,故 bc 必與圖(b)之 $P'-P$ 平行。同此,可證明 ab 及 cd 二線,均與 $P'-P$ 平行。如是,則 $a, b, c,$ 及 d 四交點,必同在一直線上。

若既知某力系之一索線多邊形,而不知該力系之力多邊形,用此法可作該力系之任何其他索線多邊形,其作法詳下節。

2-8. 經過二定點或三定點之索線多邊形 以上所述索線多邊形之作法,均可取任何點為極點,故對於任何同平面力系,可作無窮數之此種索線多邊形。故於索線多邊形之作法,常可加以相當之限制;而用索線多邊形以分析某種結構時,此種限制且屬必要。如欲以圖解法求楔形石拱(voussoir arch)之適宜拱形,及計算三鉸拱(three-hinged arch)之反力(見 3-6 節),必需使索線多邊形,經過二個或三個已定點。於此,可用下述之各種作法。

(1) 用先求合力之法 設欲於任何同平面力系 F_1 及 F_2 作一索線多邊形,經過已定之二點 p 及 q [圖 2-17(a)]。先以任何點 P' 為極點,作一任何索線多邊形,求 F_1 及 F_2 合力 R 之作用線。任何索線多邊形之首尾二索線,既表示 R 之分力,故必與 R 之作用線交會於一點。經過 q 作任何線 Anq 與 F_2 之作用線交於 n 點,並與 R 之作用線交於 A 點。作 Ap 線

與 F_1 之作用線交於 m 點，作 mn 線。 $pmnq$ 即所求之索線多邊形。於圖 2-17 (b)，作射線 $0-P$ ， $1-P$ ，及 $2-P$ ，各與 pm ， mn ，及 nq 平行，則該三射線必交會於一點 P ，即所求索線多邊形之極點也。 Anq 既係任何線，故經過二定點仍可作無窮數之索線多邊形。如將 Anq 之傾度〔即圖 2-17 (a) 傾度 i 〕再加以確定之限制，則其答案祇有一索線多邊形。若經過圖 (b) 之 P 點作一直線 Pk 與圖 (a) 之 pq 線平行，則根據 2-7 節透視軸之原理，以 Pk 線上任何一點為極點所作之索線多邊形，均可經過 p 及 q 二點。

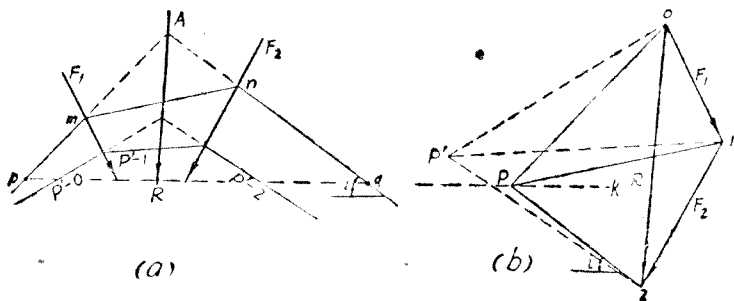


圖 2-17. 經過二定點作索線多邊形(用先求合力法)

(2) 用先求分力之法 如圖 2-18(a) 所示，先經過 q 點，作任何線 b 。以任何點 P' 為極點，依圖 2-11 用索線多邊形求分力之法，得圖 2-18(b) 之 k 點。無論所用之索線多邊形如何， k 點之位置必不變。經過 k 點作一線與 pq 平行，則以此線上之任何一點如 P 為極點，其經過 p 點所作之任何索線多邊形，亦必均經過 q 點。若限定其尾索線之傾度為 i ，自圖

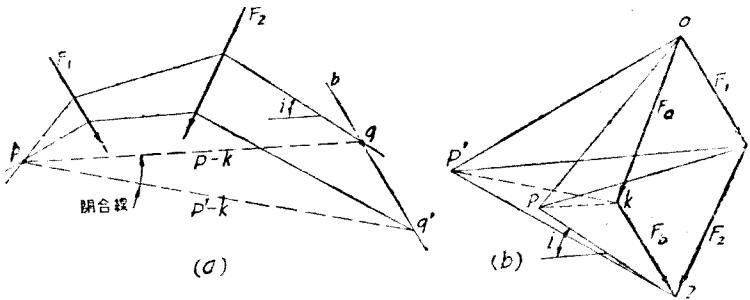


圖 2-18. 經過二定點作索線多邊形(用先求分力法)

2-18(b) 之 2 點, 作一傾度為 i 之線, 與 $P-k$ 交於 P , 即所求索線多邊形之極點。

(3) 用透視軸之法 如圖 2-19 所示, 先經過 p 點作任何索線多邊形, 如 $P-0, P-1$, 及 $P-2$ 。經過 q 點以任何傾度 i 作 Amq 線, 與 F_2 之作用線交於 m 點, 並與索線 $P-2$ 之引長線交於 A 點。作 Ap 線, 即索線多邊形之透視軸。將索線 $P-1$ 引長與 Ap 線交於 B 點, 作 Bm 與 F_1 之作用線交於 n 點。作 np , 得 $pmnq$, 即所求之索線多邊形。

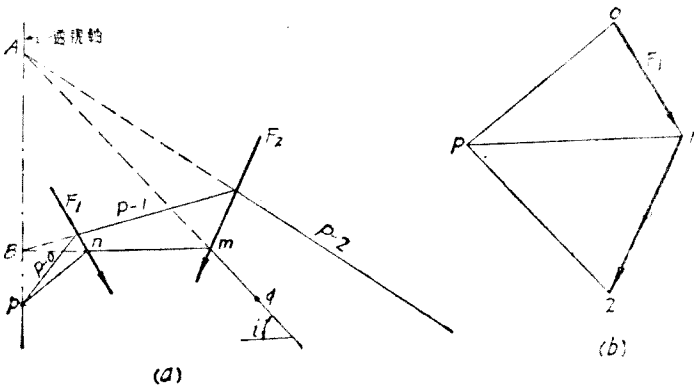


圖 2-19. 經過二定點作索線多邊形(用透視軸之法)

以上所作之索線多邊形，如其尾索線或首索線之傾度 i 未限定，仍有無窮數之索線多邊形，與所定之條件相合（即必須經過已定之 p 及 q 二點）。故可再將傾度 i ，加以限定，或再使其經過另一定點 r （但 r 不能與 p 及 q 二點同在一直線上，否則不可能）。故於任何同平面力系，可作一索線多邊形，經過不在一直線上之任何三點 $p, q,$ 及 r （圖2—20）。其法以上述三法之一，先考慮二定點，如 p 及 q 。再以同法考慮其他二定點如 p 及 r ，每次祇考慮所選定二定點間之力系，即可得所求經過此三定點 $p, q,$ 及 r 之索線多邊形。圖 2—20 示用先求分力法。先依圖 2—18 之作法，於 p 及 q 二定點求得 k 點，並作 $P-k$ 線，與 pq 線平行。再以同法依 p 及 r 二定點，求得 k' 點。並作 $P-k'$ 線，與 pr 線平行。 $P-k$ 與 $P-k'$ 二線之交點 P ，即所求經過三定點 $p, q,$ 及 r 索線多邊形之極點。注意圖 2—20(a) 之 a 及 b 二線，各係經過 r 及 q 定點所作之任何線，其傾度並無限制。如用先求合方法，

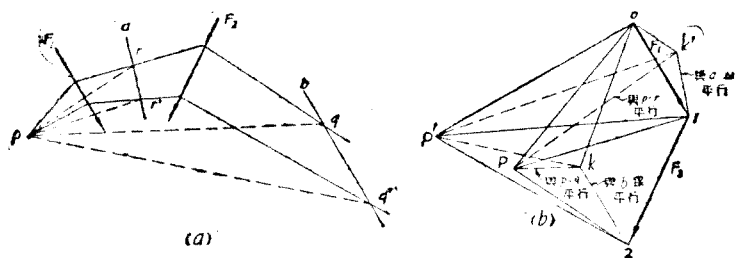


圖 2—20. 經過三定點作索線多邊形(用先求分力法)

則以上述相似之方法得與圖 2-17 (b) 中 Pk 線相同之二線，各與圖 2-20 (a) 之 pq 及 pr 平行，該二線之相交點即所求索線多邊形之極點。

此題亦可用透視軸之法解之，且較上述用先求分力法或用先求合力之法為簡便。如圖 2-21 (a)，先作任何索線多邊形之二索線 $P-0$ 及 $P-1$ ，各經過 p 及 r 二定點。再於圖 2-21 (b) 力多邊形之 0 及 1 點，依二線各與 $P-0$ 及 $P-1$ 平行，其交點 P 即此任何索線多邊形之極點。作索線 $P-2$ ，並引長與 pr 線（即透視軸）交於 A 點。作 Aq 線，與 F_2 之作用線交於 m 點。作 mr 線，與 F_1 之作用線交於 n 點。作 np 線，得 $pnrmq$ 線。即所求經過該三定點 p ， q ，及 r 之索線多邊形。其作法之正確，可於圖 2-16 或 2-19 見之，無需證明。

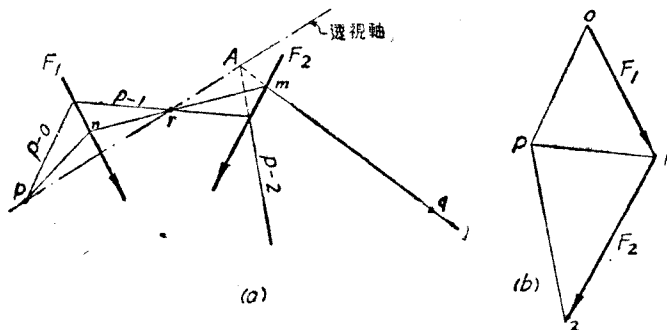


圖 2-21. 經過三定點作索線多邊形(用透視軸法)

此外尚有另一法，係根據三鉸拱反力圖解法之原理，詳見圖 3-18 及 8-19。

於平行力系，可用習題 2-10 之定理，作一索線多邊形，經過任何不在一直線上之三定點。圖 2-22(a) 示任何平行力系 F_1 及 F_2 ，及任何不在一直線上之三定點 p ， q ，及 r 。經過任何二定點 r 及 q ，各作 a 及 b 二直線，與力系平行。以任何極點 P' 作索線多邊形，其首索線經過 p 點（此首索線亦可不經過 p 點，惟其與閉合線之交點，必需在經過 p 點與力系平行之直

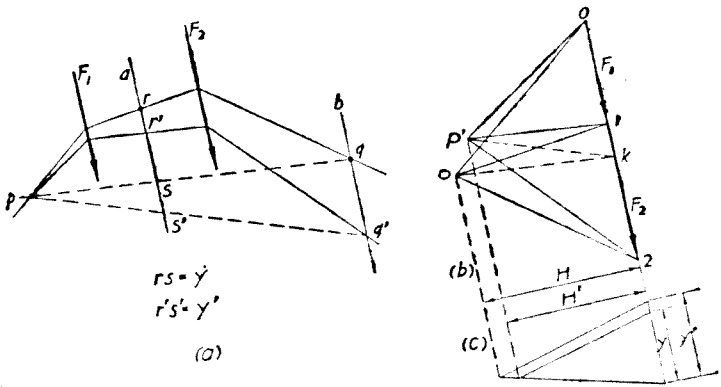
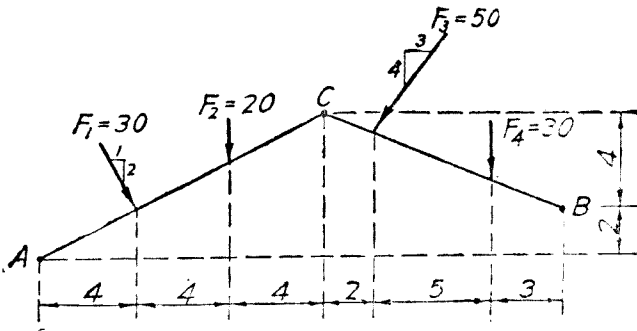


圖 2-22. 經過三定點作索線多邊形(平行力系)

線上。圖 2-20 之法用於平行力系時，亦可如此)。其第二及第三索線各與 a 線及 b 線交於 r' 及 q' 二點。作閉合線 pq' ，與 a 線交於 s' 點。於圖(b)，自極點 P' 作一線與 pq' 平行，並與力多邊形(即直線 0-1-2)交於 k 點。聯閉合線 pq ，與 a 線交於 s 點。並自 k 點作 $P-k$ 線，與 pq 平行，如圖 2-18，如是，若以 $P-k$ 線上之任何一點為極點，即可作一索線多邊形，經過 p 及 q 二定點；而索線多邊形之經過該三定點 p ， q ，及 r 者，其極點必在 $P-k$ 線上。圖(a)中之 $r's' = y'$ ，并 $rs = y$ 。依習題 2-10 之定理， $H/H' = y'/y$ ，於此 H' ， y' ，及 y 均係已知。作二相似之三角形如圖 2-22(c)，得 H ，即所求索線多邊形之極距。故 $P-k$ 線之 P 點，其極距等於 H 者，即所求索線多邊形之極點。此法祇可用於平行力系，其解法較上述二法均略為簡單。

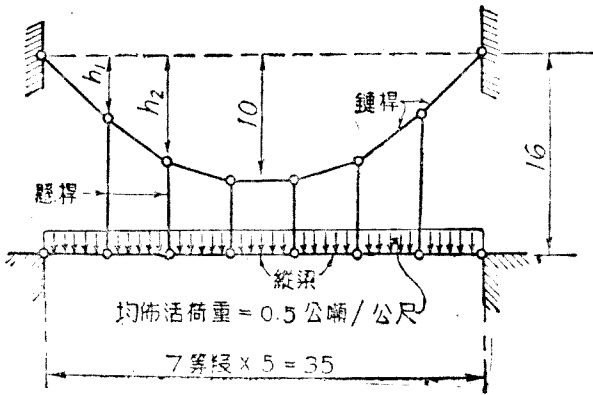
習題 2-12. 用下列三法，為此非交會非平行力系，作索線多邊形，經過 A ， B ，及 C 三定點。並求經過該三定點之索線所表示之分力，數量，傾度，及指向)

- (a) 先求合力法。
- (b) 先求分力法。
- (c) 透視軸法。



習題 2-12.

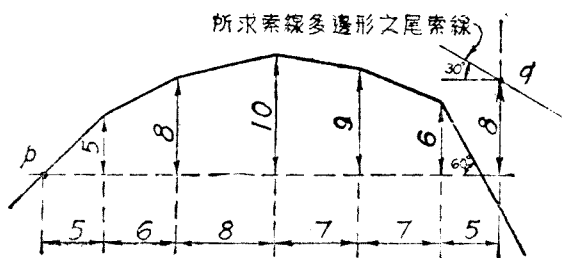
習題 2-13. 圖示一懸橋 (suspension bridge) 之略圖, 其上部之七鏈桿 (link), 兩端以樞相接, 各樞接點下垂懸桿。其下端繫以支橋面之縱梁, 求此橋在活荷重下之高度 h_1 及 h_2 , 並各鏈桿中之應力。



習題 2-13.

提示 根據 2-4 節之討論, 則此諸鏈桿在均佈活荷重下之形式, 必與以該活荷重所作之索線多邊形相同。此題之解法, 應作一索線多邊形經過二點抑三點? 又有一點可以注意, 若所示之活荷重指向向上, 則懸桿皆變為支柱, 而此鏈桿懸橋即成一倒置之鏈桿拱橋; 其解法完全相同。故懸橋與拱橋之結構原理, 完全相似, 不過實際上無此種鏈桿之拱橋耳。

習題 2-14. 圖示爲某平行豎向力系所作之一索線多邊形，試用透視軸之法，爲此力系作另一索線多邊形，經過 p 點及 q 點，而其經 q 點索線之傾度應爲 30° 。



習題 2-14.

2-9. 力系之平衡 結構物既需在一定力系之作用下，維持其平衡，故結構之分析，完全以力系之平衡爲根據。靜力學中力系之平衡，常稱爲靜平衡。意即謂結構物係靜止而不移動也。但於移動之結構物，如可移動橋梁(movable bridges)，飛機等，其中某結構單位之各部，常無相對的移動，故亦必維持靜平衡。其實即於結構之移動部份，若包含其加速度(acceleration)或惰性力(inertia forces)而論，則靜平衡仍必存在。故靜平衡定律之應用，固不僅限於靜止之結構物也。於同平面之任何力系，其靜平衡之定律，常以下列三方程表之，即：

$$(2-11) \quad \Sigma H = 0$$

$$(2-12) \quad \Sigma V = 0$$

$$(2-13) \quad \Sigma M = 0$$

其意即謂(1)於其平面內，某力系與平軸(horizontal axis or H -axis)平行之諸分力之代數和等於零。(2)於其平面內，某

力系與豎軸 (vertical axis or V -axis) 平行之諸分力之代數和等於零。 (3) 某力系之所有諸力對於其平面內任何一點之力矩之代數和等於零。

(1) 交會力系之平衡 解答交會力系之平衡問題，應用方程(2-11)及(2-12)即已足。蓋任何交會力系之合於 $\Sigma H=0$ 及 $\Sigma V=0$ 之條件者，其對於其平面內任何一點之力矩，當然等於零。故不需要第三方程 $\Sigma M=0$ 。

讀者應注意方程(2-11)及(2-12)之應用，並不限於平軸及豎軸〔圖 2-23 (a) 其中以雙圓弧表示直角，以後同此〕。若將此坐標旋轉任何角度如圖 2-23 (b)，該二方程仍可應用。故為普遍起見，該二方程常寫成

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

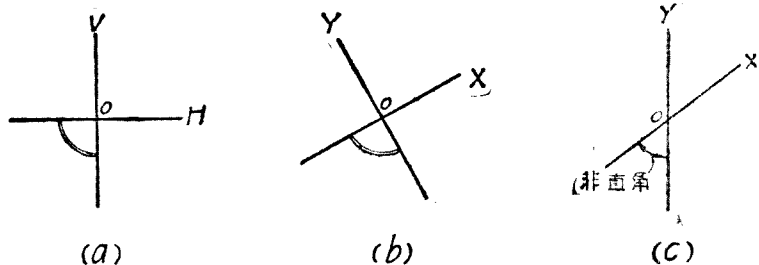


圖 2-23. 靜力學中常用之各種坐標軸

即將 H 及 V 軸改為 X 及 Y 二軸，仍成直角。但前二方程之普遍性仍可加以擴充，即二軸可成任何角度（二軸當然不能成爲一直線，如是則僅一軸矣）。如圖 2-23 (c)。以後

求桁架之應力時，於其有斜桿處，用圖 2—23 (b) 及 (c) 之坐標，常較為簡便。

交會力系之平衡，既然祇有二獨立方程，故關於此項問題之解答，每次祇能求一力或二力之二任何原素（即 2—1 節所述之 m 及 i ，交會力系之 p 係已知）。而於結構分析中，所欲求得者，常不外 (a) 二力之 m ，或 (b) 一力之 m 及 i 。

於圖解法，則交會力系平衡時，其力多邊形必成一閉合形；而其諸力之指向，必依一定之順序。如圖 2—9 (b) 所示之 F_1, F_2, F_3, F_4 ，及 F_5 是。蓋必如此，始能與方程 (2—11) 及 (2—12) 之條件相符合也。

至於交會力系平衡問題之圖解法，其原則如圖 2—24 所示。先求力系 F_1, F_2, \dots 之合力 R 。再反其指向，成爲此力系之平衡力 E 。再依所定之條件，將 E 分解爲二分力 F_a 及 F_b ，如是，則 F_a 及 F_b 與原有之力系 F_1, F_2, \dots 維持靜平衡。故

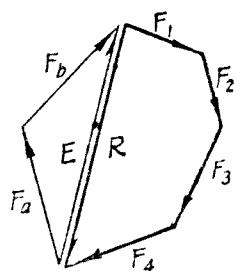


圖 2—24. 交會力系平衡問題圖解法之原則

力系平衡問題之圖解法，在原則上係聯合應用力之合成及力之分解法。此於任何力系皆然，不僅限於同平面之交會力系也。

(2) 平行力系之平衡 解答平行力系之平衡問題，應用靜平衡三方程之二即已足。若使豎軸與此項力系平行，則 $\Sigma H=0$ 方程變爲無用，蓋與平軸平行之分力皆爲零。如是，則祇需用

$\Sigma V=0$ 及 $\Sigma M=0$ 。但亦可不用 $\Sigma V=0$ ，而用 $\Sigma M=0$ 兩次，惟其矩心 (center of moment) 必為二不同之點^①。故

$$\left. \begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \\ \Sigma M_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

A 及 B 為不同之二矩心。有時用上列二方程較用方程 $\Sigma V=0$ 及 $\Sigma M=0$ 為便利，但此二法可作為互相校核之用。

因祇有二獨立方程，故每次亦祇能求一力或二力之二任何原素（即 2—1 節所述之 m 及 p ，平行力系之 i 係已知）。而於結構分析中，所欲求得者，常不外 (a) 二力之 m ，或 (b) 一力之 m 及 p 。

於圖解法，則平行力系平衡時，其力多邊形不但成一閉合形，且成一直線。其指向必依一定之順序；而其索線多邊形，亦必成一閉合形，此於 2—4 節即已說明。其圖解法之原則，亦係聯合應用力之合成及力之分解二法。

(3) 非交會非平行力系之平衡 解答非交會非平行力系之平衡問題，則靜平衡之三方程 $\Sigma H=0$ ， $\Sigma V=0$ 及 $\Sigma M=0$ 皆需應用。但亦可不用 $\Sigma H=0$ 或 $\Sigma V=0$ 而用 $\Sigma M=0$ 兩次，與上述之平行力系之平衡相似。故可不用方程 (2—11)，(2—12)，及 (2—13)，而用下列二組方程之一：

$$\left. \begin{aligned} \Sigma V &= 0 \\ \Sigma M_A &= 0 \\ \Sigma M_B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

① 於交會力系亦可用此法，但遠不如用 $\Sigma H=0$ 及 $\Sigma V=0$ 之簡便耳。

或

$$(2-17) \quad \left. \begin{aligned} \Sigma H &= 0 \\ \Sigma M_A &= 0 \\ \Sigma M_B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

且 $\Sigma H=0$ ，及 $\Sigma V=0$ 亦均可不用，而用 $\Sigma M=0$ 三次。如是得

$$(2-18) \quad \left. \begin{aligned} \Sigma M_A &= 0 \\ \Sigma M_B &= 0 \\ \Sigma M_C &= 0 \end{aligned} \right\}$$

惟此三矩心 A ， B ，及 C 不能在一直線上；否則所得之三方程中，祇有二方程係獨立，其餘一方程，雖有，亦等於無也。

因祇有二獨立方程，故每次祇能求三力之九原素（即三力之 m ， i ，及 p ）中之任何三項。於結構分析中，所欲求得者，常不外(a)一力之 m ， i ，及 p ；(b) 一力之 m ，另一力之 v_i ，及 i ；與(c) 三力之 m 。

於圖解法，則此項力系平衡時，其力多邊形必成一閉合形，其指向必依一定之順序，而其索線多邊形亦必成一閉合形。其圖解法之原則，亦係聯合應用力之合成及力之分解二法。

由上列之討論，可知結構分析，基於力系之平衡，而力系平衡問題之圖解法，係聯合應用力之合成及力之分解二法。惟此項應用，可以分為先後二步驟（即先求合力，再求其平衡力之分力），或同時為之，而成一步驟（即同時求合力及其平衡力之分

力,其合力不必求出)。著者於本章中,論力之合成及力之分解之圖解法時,不憚縷述,即以此故。

2-10. 力系平衡之定理 下列關於力系平衡之四項定理,於結構分析中,應用甚廣,且亦極其淺顯,幾於無需證明。但學者或多或少忽略之,或不明其應用,茲列舉於下,並略加解釋。

定理 1. 如二力維持其平衡,則其數量必相同,指向必相反,且其作用線必同在一直線上。 以上三條若有一不符,則此二力必皆等於零。此蓋直接根據於 $\Sigma X=0$ 或 $\Sigma Y=0$ 之條件,不待證明。若二力 F_1 及 F_2 [圖2-25(a)] 維持其平衡,而其間之角度不等於 180° , 則 $F_1 = F_2 = 0$ 。用此定理可以即知桁架某桿之應力是否為零。

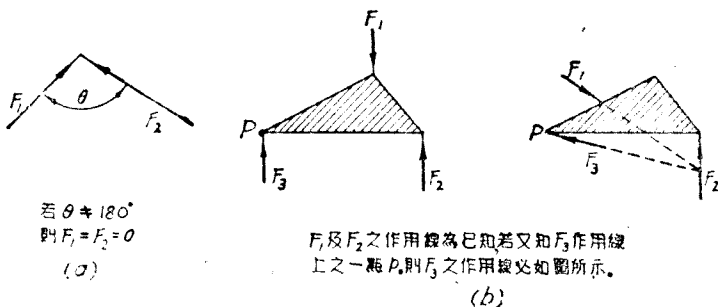
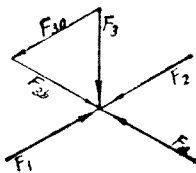


圖 2-25. 力系平衡之定理 1 及 2

定理 2. 如同平面之三力,維持其平衡,則其作用線若不平行,即必交會於一點。 根據定理 1, 則任何二力之合力,必與第三力在同一作用線上。如該二力平行,則第三力亦必與之平行。如該二力不平行,則第三力必經過其交點。若第三力作用

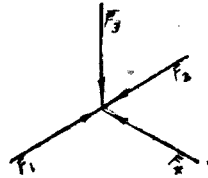
線之一點為已知，依此定理，即極易定其作用線，如圖 2—25(b) 所示。此定理於求結構之反力，及桁架之應力時應用極多。

定理 3. 若同平面交會之四力 F_1, F_2, F_3 及 F_4 維持其平衡，而其中任何二力 F_1 及 F_2 係在同一作用線，若將第三力 F_3 分解二分力，其一分力 F_{3a} 與前二力 F_1 及 F_2 平行，其他分力 F_{3b} 與第四力 F_4 平行。則於數量上 $F_4 = F_{3b}$ ；並 $F_1 - F_2 = F_{3a}$ [圖 2—26 (a)]。若 $F_3 = 0$ ，則於數量上 $F_4 = 0$ 並 $F_1 = F_2$ [圖



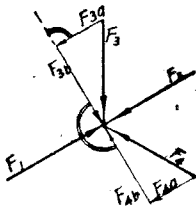
若 F_{3a} 與 F_1 及 F_2 平行
 F_{3b} 與 F_4 平行
 則 $F_4 = F_{3b}$
 $F_1 - F_2 = F_{3a}$

(a)



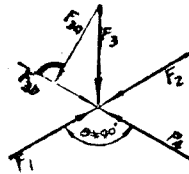
若 $F_3 = 0$
 則 $F_4 = 0$
 $F_1 = F_2$

(b)



若 F_{3a} 與 F_1 及 F_2 垂直
 F_{3b} 與 F_4 垂直
 則 $F_{3a} = F_{4b}$
 $F_1 - F_2 = F_{3a} + F_{4a}$

(c)



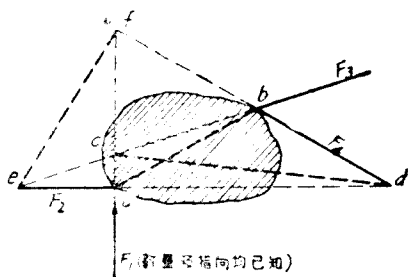
若 F_{3a} 與 F_4 垂直
 F_{3b} 與 F_1 垂直
 則 $F_4 = F_{3b}$
 此解法絕對錯誤

(d)

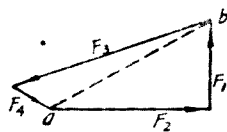
圖 2—26. 力系平衡之定理 3

2—26(b)]。此蓋根據 $\Sigma X=0$ 及 $\Sigma Y=0$ ，並採用圖 2—23(c) 之坐標，不待證明。此定理亦可以圖 2—26(c) 所示之法表述之，但不如圖 2—26(a) 所示者之簡捷。圖 2—26(d) 示常見之絕對謬誤解法，學者應加以注意，而極力避免之。用此定理以求桁架之應力，常可得簡捷之解法。

定理 4 若將維持平衡之任何同平面力系，以任何方法，分爲二組。則其一組之合力，與其他組之合力，必數量相同，指向相反，且同在一作用線上。此定理係直接根據定理 1 不待證明。圖 2—27(a) 示一維持平衡之任何同平面力系 F_1, F_2, F_3 ，及 F_4 。 F_1 之作用線，數量，及指向，均係已知。 F_2, F_3, F_4 ，

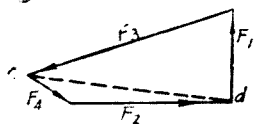


(a)



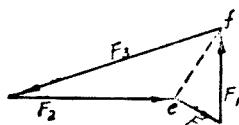
先求 F_2
 F_1 與 F_2 為一組
 F_3 與 F_4 為一組

(b)



先求 F_3
 F_1 與 F_3 為一組
 F_2 與 F_4 為一組

(c)



先求 F_4
 F_1 與 F_2 為一組
 F_2 與 F_3 為一組

(d)

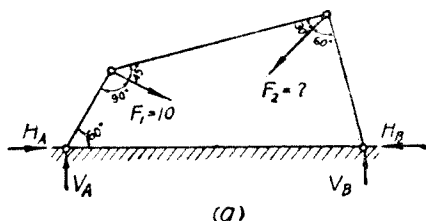
圖 2—27. 力系平衡之定理 4

之作用線，亦均已知，求其數量。若欲先求 F_2 之數量（指向可同時求得），將 F_1 與 F_2 為一組，其合力之作用線，必經過 a 點。其他一組 F_3 與 F_4 合力之作用線，必經過 b 點。但此二合力之作用線，既必同在一直線，根據定理 1，則 ab 必為此二合力之共同作用線。於是，如圖 2—27(b) 所示，作力三角形，即得 F_2 之數量及指向。再作另一力三角形，又得 F_3 及 F_4 之數量及指向。圖 2—27(c) 及 (d)，各示先求 F_3 及先求 F_4 之圖解法，其解法與圖 2—27 (b) 相似，無需解釋。此定理用之以求結構之反力，及桁架應力，極為方便。若 F_2 與 F_3 平行，而又需先求 F_4 。則 F_1 與 F_4 合力之作用線 ef ，必與 F_2 及 F_3 平行；而由 ef 求 F_2 及 F_3 之數量，需用圖 2—8 平行分力之解法。於此，若先求 F_2 或 F_3 （即 F_2 及 F_3 二力不同在一組），較為簡便。若 F_2 ， F_3 ，及 F_4 ，三力均係平行，則 F_1 亦必與之平行，否則 F_1 必為零。若 F_2 ， F_3 ，及 F_4 ，三力交會於一點，則 F_1 亦必經過其交會點，否則 F_1 亦必為零。若 F_1 ， F_2 ， F_3 ，及 F_4 四力均係平行，或交會於一點，則 F_2 ， F_3 ，及 F_4 ，三力之數量，不能祇用靜力學求得。蓋於平行或交會力系之靜平衡，均祇有二個獨立方程，當然不能求得三個未知項也。故圖 2—27 中之 F_2 ， F_3 ，及 F_4 三力，決不能皆係平行，或交會於一點，否則成為靜力學不能解之例。

以上四定理，極其淺顯，以後應用之處甚多，學者必須嫻熟之。

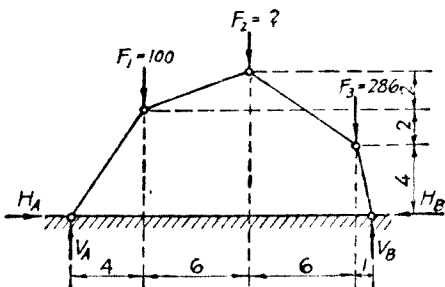
習題 2-15. 圖(a)

及 (b) 各示一鏈桿結構，若將鏈桿之自身之重量略去， F_2 之值應為幾何，庶此二結構之形狀，得如圖所示，不致改變？並求 V_A ， H_A ， V_B ，及 H_B 之值。



(a)

習題 2-16. 解答任何同平面力系之平衡問題，前已說明，可以連用 $\Sigma M=0$ 三次，得 $\Sigma M_A=0$ ， $\Sigma M_B=0$ ，及 $\Sigma M_C=0$ 三方程。何以 A, B, 及 C 三矩心，不能在一直線上？試設法證明之，並舉一例。

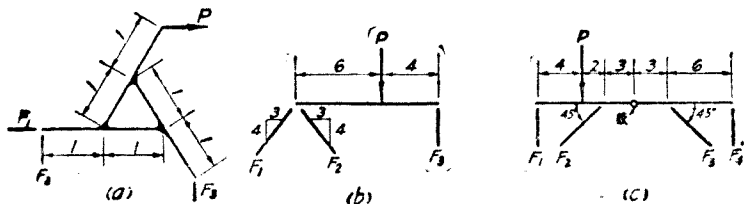


(b)

習題 2-15.

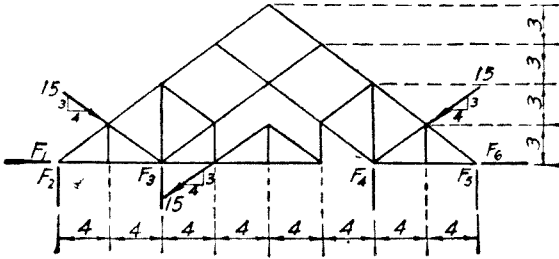
習題 2-17. 此三結構，均在所示之力系下，維持平衡。未知之力 F_1 ， F_2 ，……等之作用線如圖所示。以圖解法求其數量及指向。2-10 節所舉關於力系平衡之四條定理，何條可用於此？應用何條最為簡便？試以簡圖表明各種可能之解法。

提示 (c) 腳之鉸，當然不能抵抗任何彎矩，故其任何一邊之合力作用線，必經過此鉸。



習題 2-17.

習題 2—18. 此結構在所示之力系下，維持平衡。所有諸力之作用線，均如圖所示。試應用 2—10 節所舉關於力系平衡之定理，及最簡捷之圖解法，求 (a) 應力為零之諸桿，及 (b) 所有未知力 F_1, F_2, \dots 等之數量及指向。



習題 2—18.

第三章 反力,切力,及彎矩之通則

3—1. 反力之原素及分力 反力乃結構支座因任何荷重作用所發生之反應作用，庶結構得以維持其靜平衡。普通言之，欲分析任何結構各部之應力，常須先求其反力。^① 反力既為力之一種，故其必需求得之原素，亦有三項，即：(1)數量，(2)傾度，及(3)其作用線之任何一點（為方便起見，此三項以後仍分別以 m , i 及 p 代之）。因此一反力之獨立未知項祇有三。此三未知項，亦可以反力之分力（以下簡稱分反力）表之。如

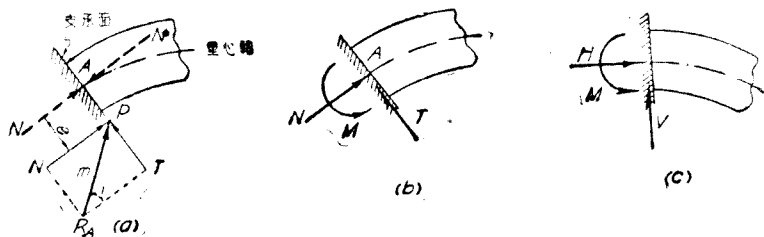


圖 3—1. 反力之分力

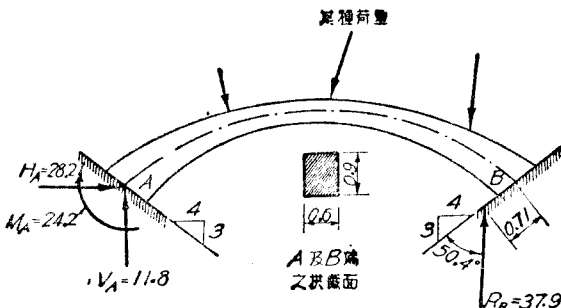
圖 3—1(a)，示某結構之一端固定於其支承面，其反力之合力為 R_A ；此反力 R_A 可分解為二分力 N 及 T 。 N 與支承面垂

① 其例外有三：(1) 於任何結構之懸臂 (cantilever) 部份，及桁架之副桿，求其中之應力，自不需先求其反力。(2) 於本身不穩定，必藉反力始能穩定之桁架，欲求其反力有時須預先或同時求其各桿之應力。(3) 分析桁架時，如採用虛功法或機動法，亦不需先求其反力。(2)及(3)二點，當於第四章內詳論之。

直，稱為正分力； T 與支承面平行，稱為切分力。若於 A 點（即結構重心軸與支承面之交點）另加二力 N ，其指向相反，如是則經過 p 點之正分力 N 又分解為一經過 A 點之正分力 N （即向軸力），及一轉分力（即力偶或力矩） $M=Ne$ ，如圖 3-1(b) 所示。若支承面為豎立，則正分力 N 變為平分力，而切分力 T 變為豎分力。故反力之三未知項，亦可以其正，切，轉，三分力；或平，豎，轉，三分力表之。而此三分力之未知項，均祇有 m 一項，因其他二項 i 及 p 均為已知也。若知反力之正與切二分力，即等於知反力之 m 及 i ；若知反力之正與轉二分力，即等於知反力之 p ；若反力之三分力均為已知，即等於反力之 m ， i 及 p 均為已知。此種將反力之三未知項視作其三分力之法，有時且屬必要，例如欲求圖 3-1 所示結構 A 端之壓，彎，切，三應力時非知其反力之三分力不可。

習題 3-1. 圖示一固定端之混凝土拱橋及其在某種荷重下之反力，求下列諸項：

(a) A 端總反力 R_A 之 m ， i ， p 及其正與切二分力（即 N_A 及 T_A ）。



習題 3-1.

(b) B 端總反力 R_B 之正與切二分力 (即 N_B 及 T_B), 及平, 豎, 與轉三分力 (即 H_B, V_B 及 M_B)。

(c) A 及 B 端上下面之纖維應力 (以公斤/平方公厘計)。

3-2. 靜定之反力 凡結構之反力, 祇需應用靜平衡之定律, 即可算定者, 為靜定之反力; 否則為靜不定之反力, 其討論不在本書範圍之內。靜平衡之定律, 祇有 $\Sigma H=0$, $\Sigma V=0$, 及 $\Sigma M=0$ 三方程。三方程祇能定三個獨立未知項, 多既不能, 少亦不可。故於任何本身穩定之結構, 其反力如係靜定, 則其獨立分反力^①或反力之獨立原素之總數, 必等於三。若多於三, 則其反力必係靜不定, 其多於三之數, 稱為靜不定之次數。如是, 則結構即成為所謂外力靜不定之結構。若少於三, 則此結構必不能於任何荷重下維持其平衡, 即或能於某種特別荷重下維持其平衡, 但必係不穩定之平衡; 蓋荷重之作用線, 如稍有改變, 則其平衡立即失去。設 r 為結構獨立分反力之總數,

$$\text{如反力係靜定, 則} \quad r=3 \quad (3-1)$$

$$\text{如反力係靜不定, 則} \quad r>3 \quad (3-2)$$

$$\text{如結構係不穩定, 則} \quad r<3 \quad (3-3)$$

方程(3-2)祇可用於本身穩定之結構, 如結構本身不穩定, 雖 $r>3$, 其反力仍可成為靜定。如圖 3-2 所示之梁, 中有一鉸, 不能抵抗任何彎矩, 乃一本身不穩定之結構, 故其獨立分

① 關於獨立反分力及非獨立反分力之分別, 見後 3-4 節, 並圖 3-7 (a) 及 (b)。

反力雖有四 (即 R_A, R_B 等……之 m)，而仍係靜定〔於原則上，此圖與習題 2—17 (c) 完全相同〕。蓋除靜平衡之三方程外，尚有 E 點之彎矩等於零，即 $M_E=0$ 之一方程。有四獨立方程，即可定 (但有時亦不能定，見圖 3—4 及 3—24) 四個獨立分反力。此種本身不穩定必藉 $r>3$ 始能穩定之結構，極屬尋常，於桁架中尤多。實際上，如以後所論之三鉸拱及威氏桁架 (Wichert truss)，均屬此類，當於第四章中詳論之。

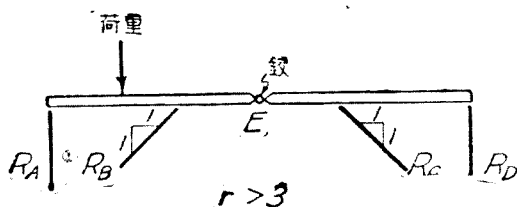
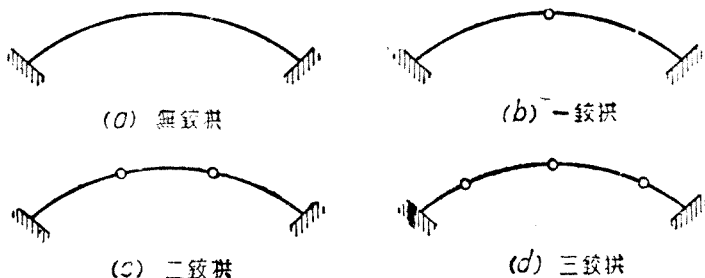


圖 3—2. 多於三之靜定反力

習題 3—2. 圖示四種不同之拱，於任何荷重下，何者之反力係靜定？何



習題 3—2.

① 注意 $M_E=0$ 與 $\Sigma M=0$ 根本不同， $\Sigma M=0$ 乃指結構所有諸力對於其平面內任何一點之力矩代數和等於零，而 $M_E=0$ 乃指 E 點之彎矩等於零，即該點任何一邊所有諸力，對於該點之力矩等於零，讀者應明瞭其區別。

者之反力係靜不定?其靜不定之次數若何?並說明其理由。

3-3. 反力與結構之穩定 方程(3-3)所表示之不穩定結構,蓋有二義:其一,結構之荷重與反力不能維持靜平衡。如圖3-3(a)之梁,其荷重係斜向,而二反力 R_A 及 R_B 爲豎向,因此無靜平衡,故不穩定。其二,結構在某種特別荷重下,其反力可使其維持平衡,但係不穩定之平衡。如圖3-3(b)之梁,其荷重及二反力均係豎向,因此能維持靜平衡,但荷重之作用線如有改變,或此梁受任何其他外來之偶然影響,即失去平衡而不穩定矣。若此梁再加一反力 R_C ,不與 R_A 及 R_B 平行,如圖3-3(c)所示,雖在此特種荷重下,其 m 爲零,但無此反力,則此梁即不能在任何荷重下維持其靜平衡,而此梁亦不能稱爲穩定之結構。故結構必須在任何荷重下維持其靜平衡,始能稱爲

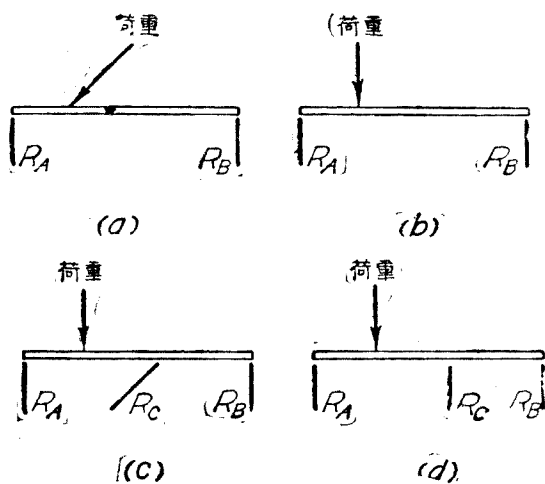


圖 3-3. 結構之是否穩定

穩定之結構。若圖 3-3(c) 之 R_C 與 R_A 及 R_B 平行，如圖 3-3(d)，則此梁既不穩定，且同時係一靜不定結構。

所謂結構之穩定靜平衡者，即在任何荷重下結構任何部份不能稍有移動〔其因彈性應變 (strain) 之變位 (deflection)，不屬於此類〕故有若干結構，其反分力之數，雖與能有之方程數相等，但亦係不穩定之結構。圖 3-2 已說明係一穩定結構，若其反力 R_B 及 R_C 之作用線改變如圖 3-4(a)，即成爲不穩定之結構。先假設鉸點 E 有向下之移動 δ ，如是，則

$$R_D = \frac{Pb}{2a}$$

並
$$R_C = \frac{aR_D}{\delta} = \frac{Pb}{2\delta}$$

但此梁原係平直，故 $\delta=0$ ，則 $R_C = \infty$ 。即在此荷重下，如此梁必保持其平直，則 R_C 之數量必大至無窮。 R_C 既不能大至無窮，故無論 P 之數量如何微小，此梁之 E 點必有向下之移動，否則此梁不能維持其靜平衡，故此梁之原形實不穩定。且不知其 δ 之值，則 R_C 之數量亦無法以靜力學算定，故此梁亦係一靜不定結構。此種必稍有移動而後始有平衡之結構，稱爲危形 (critical form) 結構，亦即不穩定之結構。又圖 3-4 (b) 所示之三鉸在一直線上的梁，於原則與圖 3-4 (a) 完全相同。由此可知若結構有三鉸在一直線上，

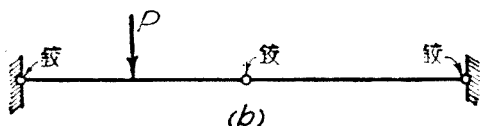
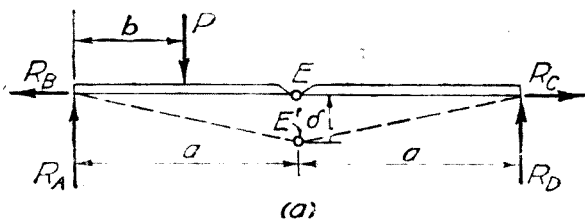


圖 3-4. 危形結構之例

而此外又無其他適當之控制，則此結構必係危形，而其反力且係靜不定。

由以上之討論，可知結構在任何荷重及反力之作用下，是否穩定，不僅與其分反力之總數有關，必視其分反力之作用線如何而定。 穩定之結構，在任何荷重下必不能稍有移動，故從移動之觀點，以定反力與結構穩定之關係，不但合理，抑且簡便。圖 3—5 (a) 示在同一平面內之 A 及 B 二體。 B 代表本身穩定之結構， A 代表支承結構之物體，如橋墩或地基等。如結構在任何外力之作用下係穩定，則 A 與 B 必不能有絲毫相對的移動。設以一鏈桿 1 將 A 及 B 聯合，則 B 在任何荷重 P 之作用下，對於 A 不能有與鏈桿 1 平行之任何相對的移動，但仍可有與鏈桿 1 垂直及旋轉之相對移動。若加另一鏈桿 2 不與鏈桿 1 平行，則 B 在任何荷重 P 之作用下，對於 A 不能有任何相對之移動，但仍可有相對的旋轉，而其旋轉心 (center of rotation) 必在鏈桿 1 及 2 引長之交點 I ，故 I 點為一虛鉸 (imaginary hinge)。若再加一鏈桿，不經過 I 點，則 B 在任何荷重下，對於 A 不能有任何相對的移動。換言之，如欲將 B 與 A 之相對位置，加以固定，祇需用三個不平行不交

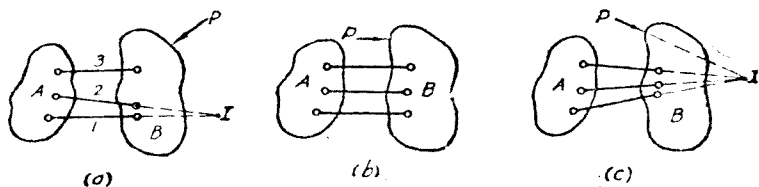


圖 3—5. 反力與結構穩定之關係

會於一點之鏈桿，以聯合之。鏈桿之數少於三固不能，但多於三亦不可。若將鏈桿視作三個獨立分反力之作用線，即可知任何本身穩定之結構，在任何荷重及反力之作用下而能穩定，則其獨立分反力之總數，必為三；其作用線必不能平行，或交會於一點。若三分反力之作用線係平行，如圖 (b)，則荷重 P 亦必與之平行，始能維持平衡。若三分反力之作用線係交會於一點，如圖 (c)，則荷重 P 亦必交會於該點，始能維持平衡。但二者之平衡，均不穩定，且其反力均係靜不定。蓋於平行或交會力系之靜平衡，均祇有二方程，故此三分反力之數量，不能算定，此於第二章中已言及之。

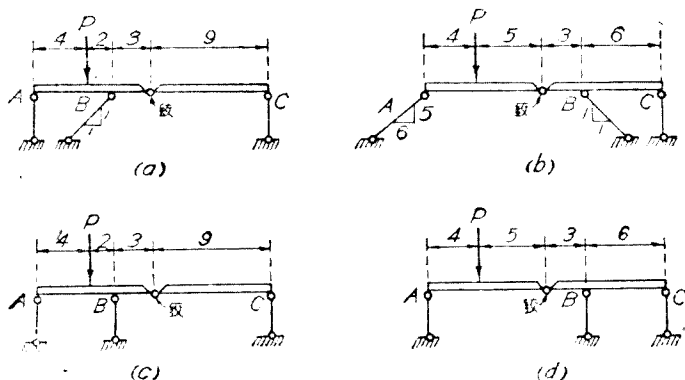
由是可知，本身穩定之結構，若對於其反力亦係穩定而又靜定，則必係 $r=3$ ；但凡 $r=3$ 之結構，對於其反力不一定皆係穩定或靜定。

結構本身之是否穩定，亦可依上述之原則定之。即將圖 3-5 之 A 及 B 二體，視作一結構之二個本身穩定部份，並觀察此二部份間之聯合桿是否與上述之條件相符。此點當於第四章論桁架之穩定時，再詳述之。

上述以鏈桿代表支座之分反力，或結構中之聯合桿，並非完全基於幻想。實際上橋梁之支座，確有採用鏈桿者〔參閱圖 3-11 (a) 及 (c)〕。至樞接桁架之桿，有時即係鏈桿〔常稱為眼桿 (eyebars)，因其二端各有一孔眼〕。而分析任何桁架之應力時，皆假定其全係鏈桿所組成。故計算反力時，可以鏈桿

代表其任何分反力之作用線,而得同一不變之解答。

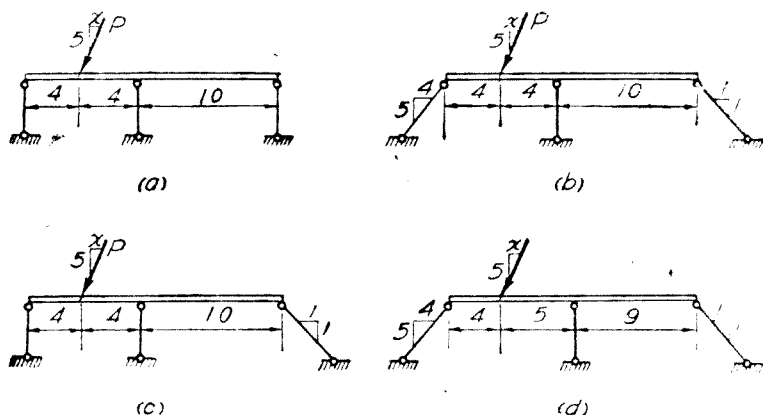
習題 3-3. 此四結構是否皆係不穩定? 於所示之荷重 P 下,何者有穩定之平衡?何者有不穩定之平衡?何者竟不能維持其靜平衡?試說明之,並舉其理由。



習題 3-3.

習題 3-4. 此四結構中,其獨立分反力之數 r 均等於三,何者係穩定或不穩定? 在所示之二種傾度不同之荷重下,何者能維持其靜平衡,或不能維持其靜平衡? 如能維持其靜平衡,何者係靜定或靜不定? 將答案以一 \checkmark 記號,填入下列附表之相當方格中,並說明其理由。

習題 3-4.	(a)		(b)		(c)		(d)	
穩定								
不穩定								
荷重之傾度	$x=0$	$x=2$	$x=0$	$x=2$	$x=0$	$x=2$	$x=0$	$x=2$
不能維持靜平衡								
能維持靜定								
靜平衡								



習題 3-4.

3-4. 反力之靜定法 3-6 (a) 示一梁，其兩端支承於牆上，受一荷重 P ，此乃一極端簡單之結構，同時實乃一絕對靜不定之結構。蓋其兩端之二反力 R_A 及 R_B 共有六原素（即 $2m, 2i, 2j$ ），均係未知，決非僅用靜平衡之三方程可以算定。其實此二反力之原素，所依賴之因素太多，即應用最高深最繁雜

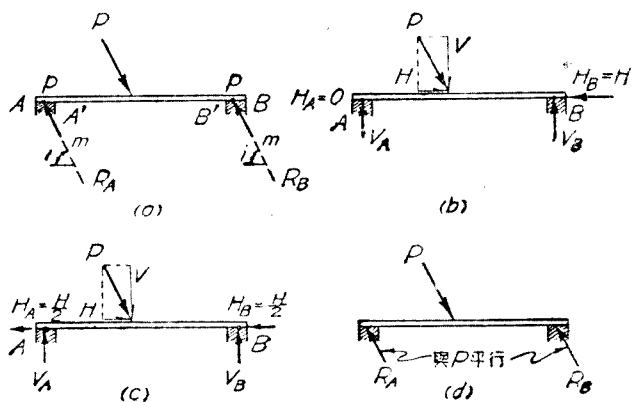


圖 2-6. 假定之靜定反力

之彈性學理論,恐亦無法精確算定之。故工程中之結構,實際上無一係靜定者。但此並非謂此二反力之原素,實際上其本身非切實確定,不過無法以算定之耳。

故欲使此梁之反力成爲靜定,必假定其未知六原素之三爲已知。因此,除常假定二反力 R_A 及 R_B 之 p 在牆之中心線(即 AA' 及 BB' 之中點)外,關於其 $2m$ 或 $2i$ 尙需作一假定。於此,可選擇下列三法之一:(1)荷重 P 之平分力 H ,完全由其一端(A 端或 B 端)之反力支承,如圖 3—6 (b),即 $H_B = H$, $H_A = 0$ 。(2)荷重 P 之平分力 H 由二端之反力均等支承,如圖 3—6(c) 即 $H_A = H_B = 0.5H$ 。(3)二反力 R_A 及 R_B 之傾度與荷重 P 之傾度相同(即兩端平分反力之分派,與其豎分反力相同,即 $H_A/H_B = V_A/V_B$)。以上三種假定之優劣,殊未易言。蓋所得之答案,均極約略也。故此種反力靜定之假定法,祇可用於短跨或不重要之結構。

於長跨或重要之結構,上述之假定法既不能用,故必設法將反力之某原素,實際上變爲已知,庶其反力確切成爲靜定。於此可用下列各式之支座。

I. 定向支座 若將二個以上之輓軸(roller),置於結構支端及支承面之間,如圖 3—7(a),並將其間之摩阻力略去,則支端 $A B$ 可以有與支承面平行之自由移動。故其分反力 T 必等於零,而反力 R 即等於分反力 N 。如是,則反力之 i ,確實係已知,未知者僅其二原素 m 及 p ,或其二分力 N 及 M

($M=Pe$)而已。反力 R 亦可等於零,如是,則支端 AB 之反力祇有一轉分力 M 而無正分力 N 。但有二點必須注意: (1) 各輓軸所施之反力,必經過其圓截面之中心,且必與支承面成垂直,但其指向並未確定。故 R 之指向可與圖(a)所示者相反,即其所受之力可變為拉力而非壓力。此於實際上或有困難,但非絕不可能,而於理論上尤須如此。(2) R 或 N 亦可分解為 V 及 H 二分力,但 i 既係已知,即 V 與 H 之關係已確定,故 V 及 H 非獨立之二分反力。根據(1)點,則無論結構之荷重如何,其支端 AB 之傾度,必不能改變,故此種支座,可稱為定向^①

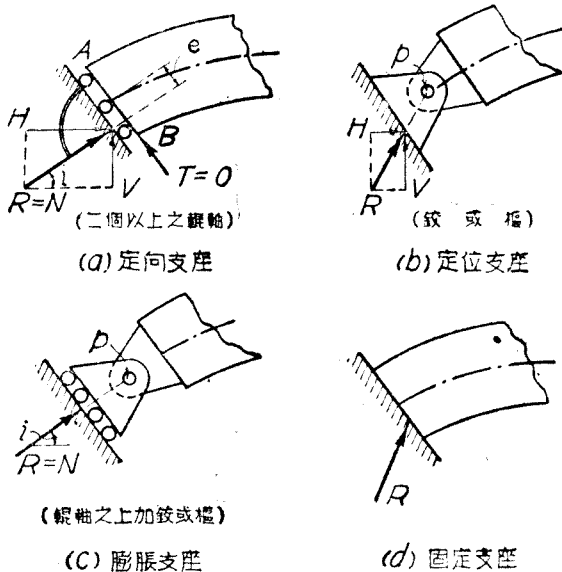


圖 3-7. 各種支座之原理

① 本應稱為傾度固定之支座,但嫌太長。若稱定傾,又似不適耳。故改稱定向。雖其含義不甚確切,但與英文名詞,亦無不合。又材料力學中所討論之兩端固定梁,其一端之支承法,實應如此,否則,梁中必有軸向壓力,不可略去不論。

(fixed in direction) 支座, 其通常符號如表 I 之 I (a)。但


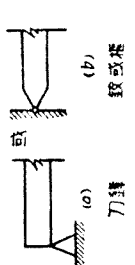
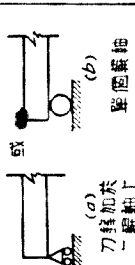

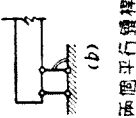
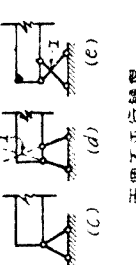
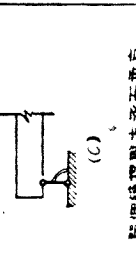
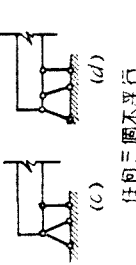
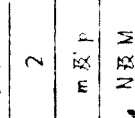
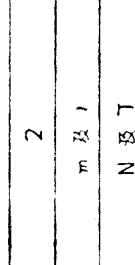
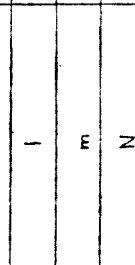
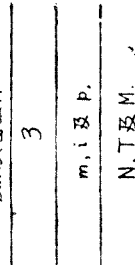
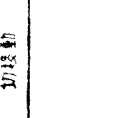
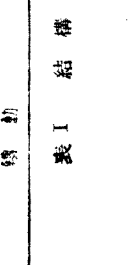
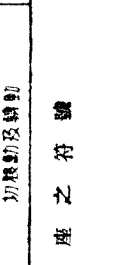
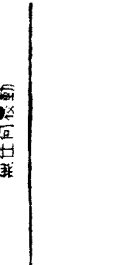

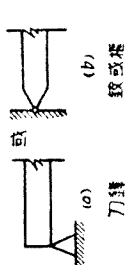
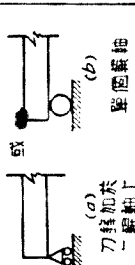

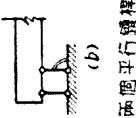
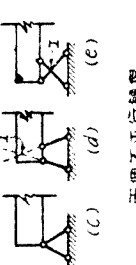
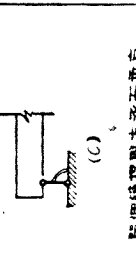
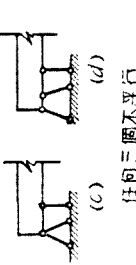
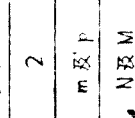
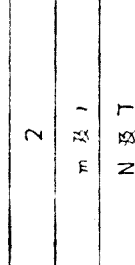
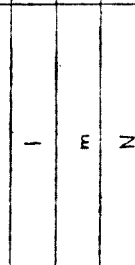
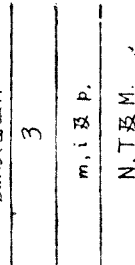
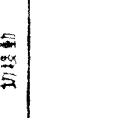
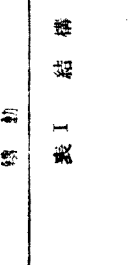
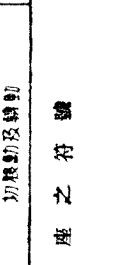
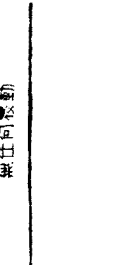
	I 定向支座	II 定位支座	III = I + II 離線支座	IV = I + III 固定支座
支座之通常符號  (a) 兩個以上之線軸  (b) 刀鋒或滾絞或橋  (c) 刀鋒加於二線軸上 或  (d) 刀鋒及單線軸排列	 (a) 刀鋒  (b) 或或橋  (c) 刀鋒加於二線軸上 或  (d) 刀鋒及單線軸排列	 (a) 刀鋒  (b) 或或橋  (c) 刀鋒加於二線軸上 或  (d) 刀鋒及單線軸排列	 (a) 刀鋒  (b) 或或橋  (c) 刀鋒加於二線軸上 或  (d) 刀鋒及單線軸排列	
支座之變程符號  (a) 兩個平行線軸與支承面垂直  (b) 兩個不平行的線軸  (c) 兩個不平行的線軸與支承面垂直  (d) 兩個不平行的線軸	 (a) 兩個平行線軸與支承面垂直  (b) 兩個不平行的線軸  (c) 兩個不平行的線軸與支承面垂直  (d) 兩個不平行的線軸	 (a) 兩個平行線軸與支承面垂直  (b) 兩個不平行的線軸  (c) 兩個不平行的線軸與支承面垂直  (d) 兩個不平行的線軸	 (a) 兩個平行線軸與支承面垂直  (b) 兩個不平行的線軸  (c) 兩個不平行的線軸與支承面垂直  (d) 兩個不平行的線軸	
數目	2	2	1	3
反力之種類	m 及 p	m 及 i	m	m, i 及 p.
反力之方向	N 及 M	N 及 T	N	N, T 及 M.
可能移動	切線動	轉動	切線動及轉動	無任何移動

表 I 結構支座的符號

亦可以二個平行並與支承面垂直之鏈桿表之，如 I (b)。此種支座雖實際上採用之者極少，但於理論上頗有討論之價值。

II. 定位支座 若支座用一毫無摩阻之鉸或樞，如圖 3-7(b)，則反力 R 必經過其圓截面之中心 p 。如是，則其作用線之一點 p ，確實係已知，未知者，僅其二原素 m 及 i ，或其二分力 N 及 T ，或 V 及 H 。因 i 係未知，故其二分反力係二獨立之未知項。用此種支座時，結構之支端，可以自由轉動，但其鉸或樞之位置不能改變，故可稱為定位 (fixed in position) 支座。其通常符號係用一刀鋒 (knife-edge，即平常天秤中所用之支點) 或用一小圈，各如表 I 中之 II (a) 或 II (b)。但亦可以二個不平行之鏈桿表之，如表 I 中之 II (c)，II (d) 及 II (e)，此三者不同之點，僅在其鉸(或虛鉸) I 點之位置耳。

III. 膨脹支座 若將圖 3-7 (a) 之定向支座及 (b) 之定位支座聯合採用。即若干輓軸之上，加鉸或樞，如圖 3-7(c)，則反力 R 之 i 及 p 確實均係已知，其未知者，僅其 m 而已。用此種支座時，結構之支端，既可自由轉動，復有與支承面平行之自由移動，故可稱為膨脹 (expansion) 支座。其通常符號係用刀鋒加於二輓軸之上，或單個輓軸，各如表 I 中之 III (a) 及 III (b)。但亦可以一與支承面垂直之鏈桿表之，如表 I 中之 III (c)。於長跨橋梁，其膨脹支座之須承受向下之負號反力者，實際上常採用 III (c) 之鏈桿式，詳見第十一章。

IV. 固定支座 若將圖 3-7 (b) 之定位支座與 (c) 之膨

脹支座排列,即成固定支座,相當於圖 3—7 (d) 所示者。其反力之三原素 m , i , 及 p ; 或三分力 N , T , 及 M , 均係未知。用此種支座時,結構之支端,絕對無任何移動或轉動。但實際上,除鋼筋混凝土結構或差可如此外,於鋼鐵結構,其支端雖可用鋼螺栓 (bolt) 釘固於混泥土地基上,但欲其於荷重下絕對無任何轉動或移動,似不可能。故固定支座,鋼鐵結構中用之較少。此種支座之通常符號如表 I 之 IV(a) 或 IV(b)。其鏈桿符號,係用三個不平行不交會於一點之鏈桿,如表 I 中之 IV(c) 或 IV(d)。

注意表 I 中各式鏈桿支座,不但代表各式支座之性質,且其中鏈桿之數,即等於其反力未知項之數。此種以鏈桿代表各式支座,並非純粹一種符號或幻想,已於 3—3 節中言之。蓋實際上各式支座,均可以鏈桿代替之,而於其反力之分派,毫無影響。又如圖 3—8 (a) 所示某結構中之鉸,可以任何二個不平行之鏈桿代替之,如圖 (b) 或 (c)。若其交會點 I 與圖(a)鉸之位置相同,則圖 (a), (b), 及 (c) 之反力,當絕對相同。

用鏈桿支座之原理,有時可以將一極複雜之結構化簡。如

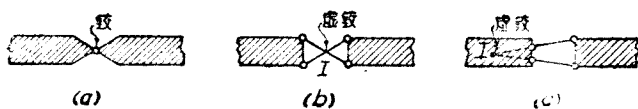


圖 3—8. 不平行之二鏈桿相當於一鉸

圖 3—9 (a) 所示之桁架，初視之頗覺複雜，若將 $A B C$ 視爲桁架之本身，其餘視爲二鏈桿支座，並將其逐步化簡，如圖 (b)，(c)，及 (d)。如此，則求 $A B C$ 桁架 A 及 B 二支點之反力甚易（注意 V_A 及 H_A 係二獨立之分反力，而 V_B 及 H_B 係二非獨立之分反力）。既知此二反力，反其指向，卽成此二鏈桿支座之荷重。如是則其中各桿之應力及其反力，均不難求得。反是，一簡單之桁架如圖 (d) 或 (c)，亦可用鏈桿代替支座之原理，將其變爲圖 (a) 或更複雜之桁架。

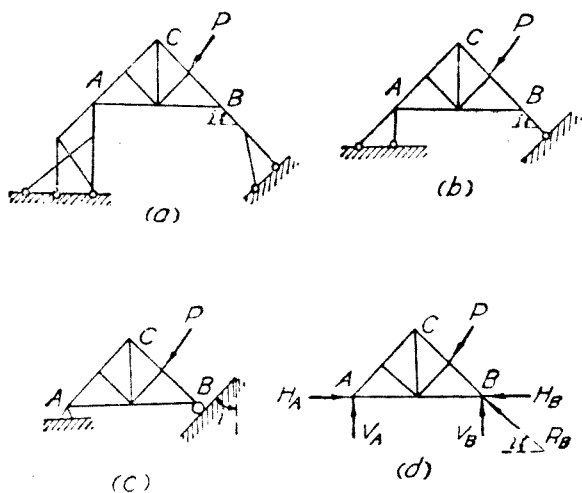


圖 3—9. 用鏈桿支座之原理將複雜結構化簡

3—5. 結構支座之實際 實際上，兩端支承之任何結構〔兩端支承之梁稱爲簡單梁 (simple beam)。兩端支承之橋，稱爲簡單跨 (simple span)〕。其一端常用一種定位支座〔常

稱爲固定端 (fixed end)], 其他一端常用一種膨脹支座〔常稱爲膨脹端(expansion end)〕。蓋如此,則結構既恰合前述穩定之條件,且其反力又係靜定。故結構如受有平荷重(horizontal load)時,如屋頂桁架之風力,或鐵路橋梁上機車之挽力(tractive force),其反力完全由定位支座承受。此外結構因彈性應變或溫度升降而跨度必稍有伸縮,故其一端必有膨脹支座,庶其跨度可以伸縮自如。由此可知跨度愈長,則膨脹支座之需要亦愈切。圖 3—10 示各式之膨脹支座。其最簡單者如圖 (a), 結構之支端,釘一底板(sole plate),再於支牆或橋座上,置一承板

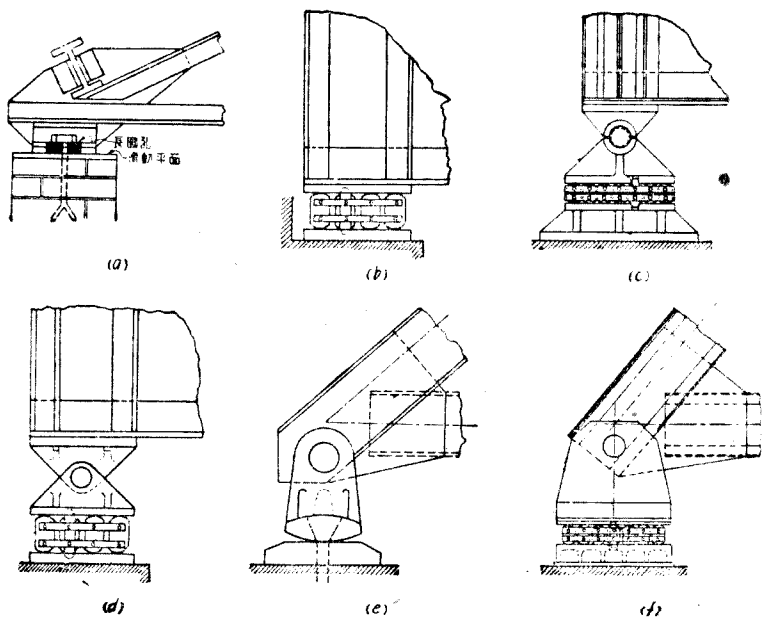


圖 3—10. 各式之膨脹支座

(bearing 或 bed plate), 以螺栓將此端釘於支牆或橋座上, 但底板之孔係長圓形 (長形縱向), 故此二板之間, 有相當之滑動 (sliding)。此種滑動支座, 祇可用於屋頂桁架或跨度甚短之板梁 (plate girder) 橋。於跨度稍長或荷重太大之板梁橋, 可用圖 (b) 之輓軸支座。〔注意: 因輓軸不能受拉力, 故與圖 3—7 (a) 所示者原理稍異。因其轉動不多, 故可將圓輓軸之兩旁截去, 成爲截圓 (segmental) 輓軸, 庶可排列較緊。〕但其採用, 亦祇限於跨度不超過 20 公尺之橋梁。蓋跨度若太長, 其支端之角變位 (angular deflection) 必較大, 如是, 則反力不能均分於各輓軸, 故此種支座, 常以不用爲是。圖 (c) 及 (d) 之支座, 與圖 3—7 (c) 所示者, 原則上完全相同, 用於板梁橋及桁架橋均可。其鉸或樞係置其下端輓軸之中線, 故無論結構支端之角變位如何, 其反力常可假定係均分於各輓軸。圖 (e) 之支座, 稱爲搖擺支座 (rocker bearing), 簡易適宜, 故近年來公路橋梁, 幾一律用之。圖 (f) 示鐵路桁架橋梁所通用之膨脹支座。

若將圖 3—10 (b), (c), (d) 及 (f) 之諸輓軸取去, 而代以高度相等之橋墊 (pedestal), 或將圖 (e) 之圓底改爲平底, 錨定於橋座, 均成爲定位支座。影片 I 示圖 3—10 (f) 之膨脹支座及與其相配合之定位支座。影片 II 示圖 3—10 (e) 之膨脹支座。膨脹支座亦可採用一鏈桿或眼桿, 如圖 3—11 (a) 所示, 其形式與表 I 中之 III (c) 完全相同。圖 3—10 (b) 至

(f)之支座，祇能承受向上之正號反力，但圖 3—11(a)之支座，可以承受向上或向下之正負號反力，此其優點。同此，定位支座亦可採用表 I 中 II (c) 或 (d) 之二鏈桿式。例如圖 3—11 (b) 之定位支座，可以圖 3—11 (c) 之支座代替之。但二者並非完全相同。蓋前者反力之未知項為一數量



影片 I. 定位支座(後面)及膠
脹支座(前面)



影片 II 膠脹支座之另一式

及一傾度，而後者反力之未知項為二數量。故採用定位支座時，如欲使其反力之傾度確定，則圖 3—11(c)式之支座，最為適宜。圖 3—11(a)及 (c) 之二種支座德國多採用之，英美採用之者極少。

鋼鐵樓房或其他結構中

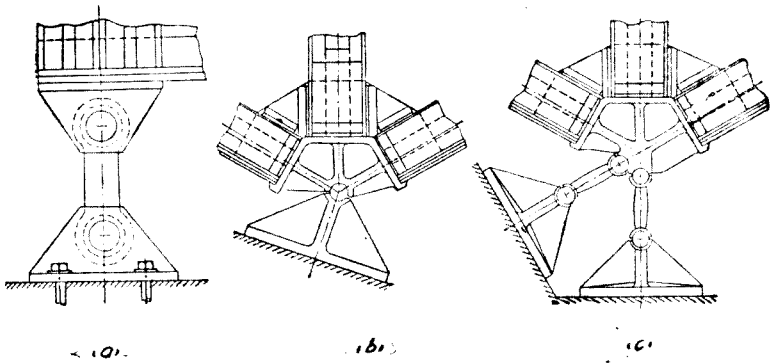


圖 3-11. 鏈桿支座之例

之梁，常用鉚釘或電焊與支柱相接合，其性質係相當固定。但刻下設計，仍多視作簡單梁。故計算時，亦常假設其一端為定位支座，其他一端為膨脹支座，庶其反力可以靜定，而計算較簡易也。但鋼筋混凝土屋架中之梁，決不可如此計算。

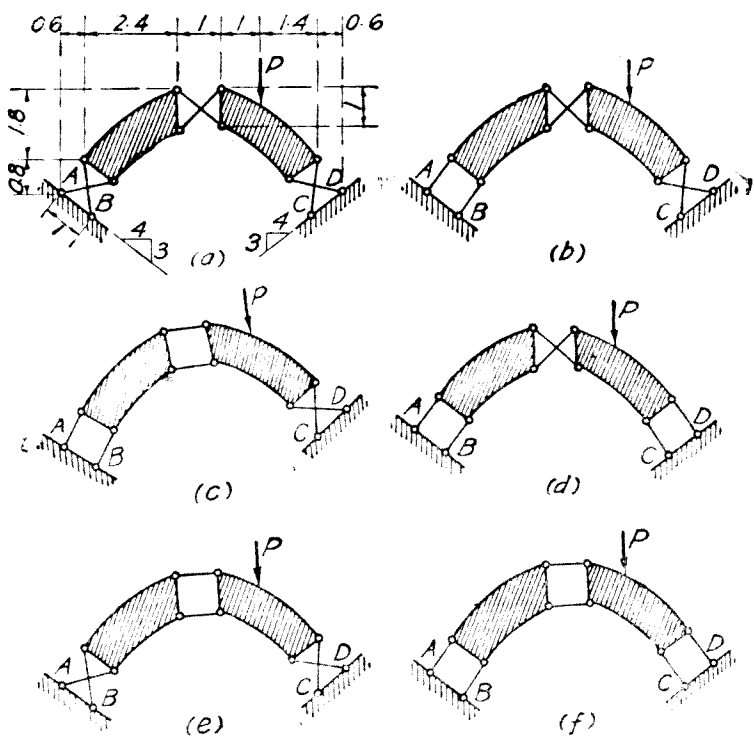
本書所論者，既限於靜定結構，故無論其實際如何，均假設其一支座係定位式，其符號概用表 I 中之 II (a)，其餘支座概係膨脹式，其符號概用表 I 中之 III (b)。

習題 3-5. 圖示六拱，其尺寸及荷重均相同，在所示之荷重下何者能或不能維持平衡？何者係靜定或靜不定？如係靜不定，其次數如何？並說明各答案之理由。

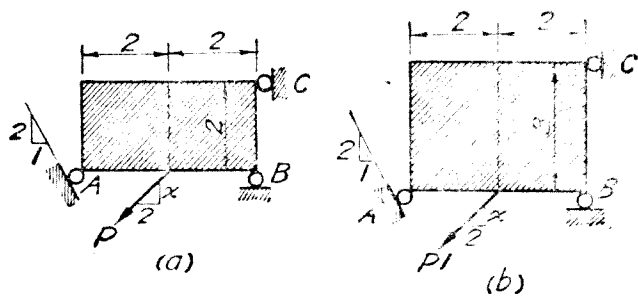
提示 依二端總反力之必需條件，應用靜平衡之定理，視其能否維持靜平衡。

習題 3-6. 此二結構，何者係穩定或不穩定？在所示之二種傾度不同 ($x=2$ 及 $x=3$) 之荷重下，何者能或不能維持其靜平衡？如能維持其靜平衡，何者係靜定或靜不定？試說明之，並舉其理由。

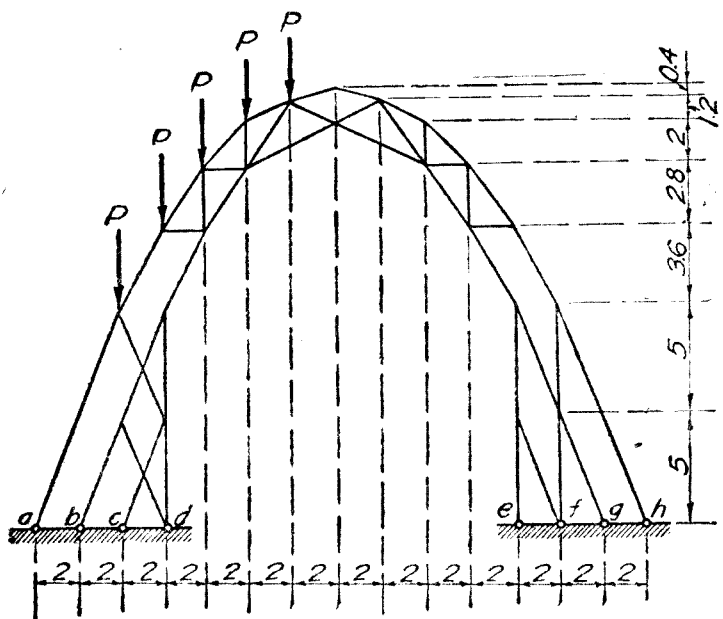
習題 3-7 試應用鏈桿支座之原理，如圖 3-9 所示之例，將此複雜桁架，化為簡單，庶其支點 a, b, c ……諸點之反力，可以求得。



習題 3-5.



習題 3-6.



習題 3—7.

3—6. 反力之圖解法 以圖解法求反力之原理，於第二章中已詳述之，茲將其應用再行說明。

如結構所受之力系，未明白顯示，則常需設法先將其全體力系（荷重及反力）明白顯示於結構之上，而後始能求其反力，此法當於下節論反力之數解法時，舉例以說明之。

若荷重祇係一力或二力，或其力數雖多，但其合力之作用線，極明顯易見（如均佈荷重或數量相等之平行力系）。則求反力時，用 2—3 節力之分解之法；或 2—10 節力系靜平衡定理 2 或 4，最為簡便，否則須用索線多邊形求合力及分力之

方法。如圖 3-12(a) 之梁, 受有一荷重 P , 其 R_A 之作用點及 R_B 之作用線均係已知。應用靜平衡定理 2, 則 P , R_A 及 R_B 之作用線, 必交會於一點, 故 R_A 之作用線, 必經過 P 及 R_B 作用線之交點 C 。 R_A 及 R_B 之作用線既已知, 其數量可用力三角形求得, 如圖 (b)。因此並可求得其平豎反分力 H_A V_A ……等。若 P 及 R_B 作用線之交點 C 太遠, 則先作任何三角形 ABC' 再作一三角形 abc 與其相似, 得 a 點, 則 Aa 即 R_A 之作用線, 其理由與圖 2-7 同。

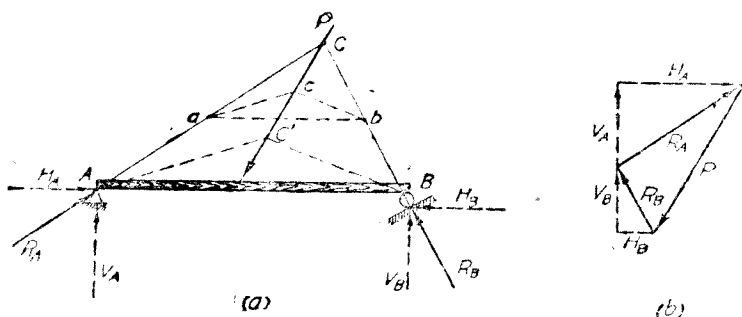


圖 3-12. 用靜平衡定理 2 求反力之圖解法

圖 3-13 (a) 之梁, 受有二荷重 P_1 及 P_2 。求此梁之反力, 用靜平衡定理 4, 最為簡捷。若將此二力分為二組, P_1 及 P_2 為一組, R_A 及 R_B 為一組。以 P_1 及 P_2 作力三角形, 如圖 (b), 得其合力之傾度及數量。於圖 (a) 經過 C' 點得其作用線 CC' 。根據靜平衡定理 4, 則 CC' , 亦即 R_A 及 R_B 合力之作用線。由是即得 R_A 之作用線。故 R_A 及 R_B 之數

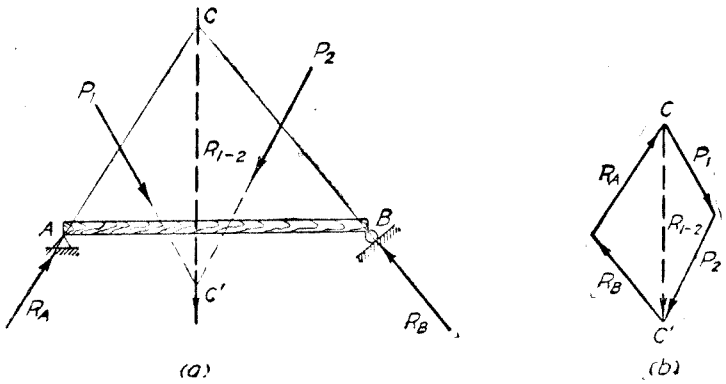


圖 3—13. 用靜平衡定理 4 求反力之圖解法

量，可於圖 (b) 之力三角形求得。若 P_1 及 P_2 作用線之交點 C' 或 R_A 及 R_B 作用線交點 C 太遠，均可作二相似之三角形，如圖 3—12(a)，以求 R_{1-2} 或 R_A 之作用線。

若荷重之力數太多，最簡捷之法，即用索線多邊形求合力或求分力之法，先求得荷重之合力，而後用索線多邊形求荷重之分力而合於反力之條件者，再反其指向，即得其反力。如圖 3—14

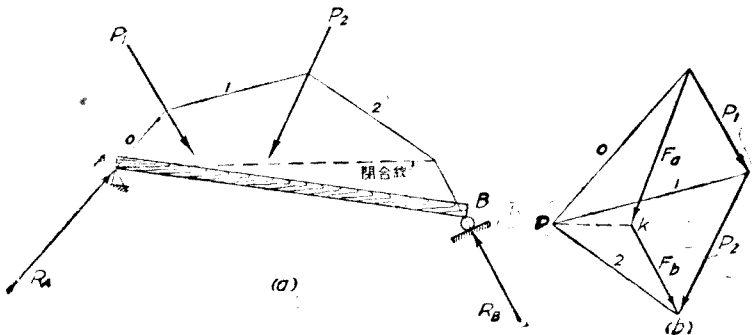


圖 3—14. 用索線多邊形求反力之圖解法

所示, 先依圖 2—11 之法, 將荷重 P_1 及 P_2 分解爲二分力, 其一經過定點 A , 其他一分力之作用線與 B 點之支承面成垂直, 得分力 F_a 及 F_b , 如圖(b)。反其指向, 即得 R_A 及 R_B , 如圖(a)。

若荷重之合力爲已知, 而其反力且與之平行, 可用圖 2—8 之法, 先求分力, 再反其指向, 即得反力。但其作圖法, 可稍加改變。如圖 3—15, 於 R_B 之作用線上, 量定 $B''B' = P$, 作任何線 $A'B'$, 並作 $A'B''$ 與 P 之作用線交於 C 點, 經過 C

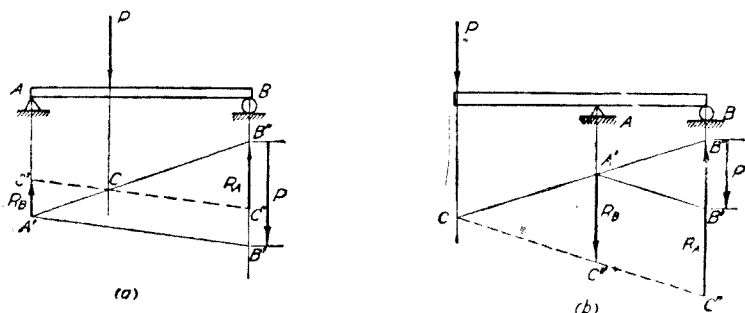


圖 3—15. 平行反力之圖解法(單個荷重)

點作一線與 $A'B'$ 平行, 並與 R_A 之作用線交於 C' 及 R_B 之作用線交於 C'' 。如是, 則 $A'C' = R_B$, $C''B'' = R_A$ 並定其指向。圖(a)及(b)各示求簡單梁及懸臂梁反力之法。

於多數平行之荷重, 且其反力亦與其平行, 則求反力仍以索線多邊形爲簡捷。若使力多邊形之極距 H 等於梁跨 L 之長, 如圖 3—16(b), 則其首尾二索線 0 及 3 於 R_A 作用線上之截距等於 R_B , 其於 R_B 作用線上之截距等於 R_A , 如圖 3—16(a)。

其理由與圖 2—12 同。若荷重 P_1 , P_2 及 P_3 間之距離係固定, 而其在梁上之位置有改變時, 則用此法以求此梁在荷重位置不同時之反力, 最為簡捷。如圖 3—16(a), 設梁 AB 荷重之位置變為梁 $A'B'$, 則 $R_{A'}$, 及 $R_{B'}$ 之求法, 與上相同。

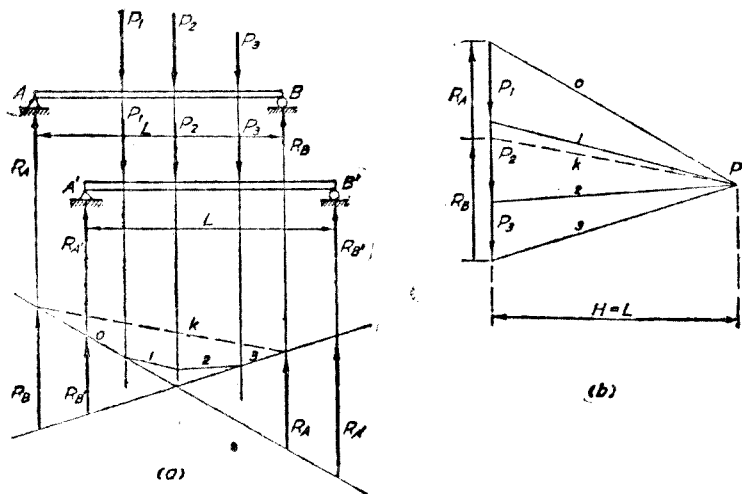


圖 3—16. 平行反力之圖解法(多數荷重)

圖 3—17(a) 示一三鉸拱, 其左部(AC)受一任何荷重 P 。

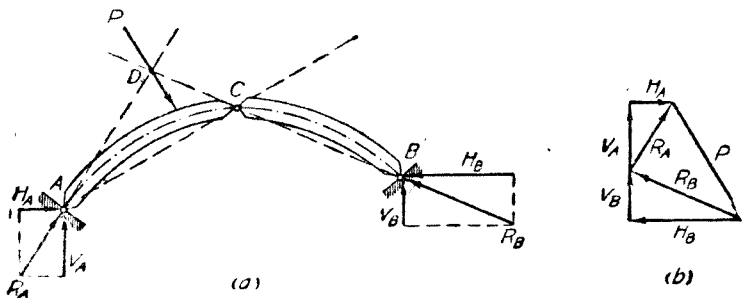


圖 3—17. 三鉸拱反力之圖解法(一)

因其中間之鉸 C , 既不能抵抗任何彎矩, 故其左部或右部所有

外力之合力作用線,均必經過此鉸。其右部之外力,祇有一反力 R_B , 故 R_B 之作用線必經過鉸 C , 於是其作用線即為 BC 直線。將此線引長,與荷重 P 之作用線交於 D 點,根據 2—10 之平衡定理 2, 則 R_A 之作用線,必為 AD 。作力三角形如圖 (b), 即得 R_A 及 R_B 之數量及指向。又將 R_A 及 R_B 各分解為平豎二分力,即得 $H_A, V_A, H_B,$ 及 V_B 。

若荷重 P 之位置改變,但仍在拱之左部,則其與二反力之交點 D , 必仍在 BC 引長線之上。同此,若荷重 P 移至拱之右部,則其與二反力之交點亦必在 AC 引長線之上。故 AC 及 BC 二引長線,稱為反力軌跡 (reaction locus)。

若拱之左右二部均有一荷重,可用上法先求任一荷重之二反力,次求其他一荷重之二反力,再求每支點二反力之合力,即得該拱在其左右二部荷重下之反力。

若拱之左右二部,均有多數荷重,如圖 3—18(a)。可先用任何法各求其左部及右部荷重之合力,而後再用上法求其反力。如圖 3—18 所示之拱,其左部有荷重 P_1 及 P_2 , 其右部有荷重 P_3 及 P_4 。先用索線多邊形各求其左右二部荷重之合力 R_L 及 R_R , 次用上法求荷重 R_L 之二反力 R_{AL} 及 R_{BL} , 再求荷重 R_R 之二反力 R_{AR} 及 R_{BR} 。再如圖(b)求 R_{AL} 與 R_{AR} 之合力 R_A ; 及 R_{BL} 與 R_{BR} 之合力 R_B , 即該拱在 $P_1, P_2, P_3,$ 及 P_4 作用下之二反力。

祇用索線多邊形,亦可求得三鉸拱之二反力。如拱受有多

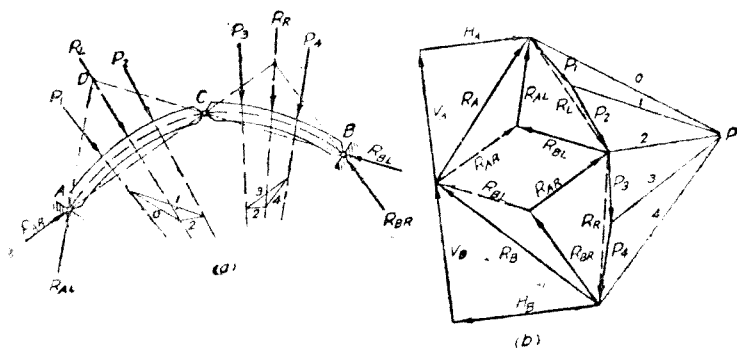


圖 3—18. 三鉸拱反力之圖解法(二)

數荷重時，此法且較上法為簡便。圖 3—19 示用此法求圖 3—18 三鉸拱之二反力 R_A 及 R_B 之法。二反力之作用線，必各經過鉸 A 及 B 。 R_A, P_1 及 P_2 合力（或 R_B, P_3 及 P_4 之合力）之作用線，必經過鉸 C 。故經過 A, B 及 C 三鉸，作一索線多邊形，如 $0'-1'-2'-3'-4'$ ，則其首尾二索線 $0'$ 及 $4'$ ，必各為 R_A 及 R_B 之作用線，而其經過鉸 C 之索線 $2'$ ，必為鉸 C 所受壓力（即拱左部或右部外力之合力）之作用線。既知 R_A 及 R_B 之作用線，作力多邊形如圖 3—19 (b)，即得其數量及指向。觀察圖 (b)，則此法之原理益顯明，圖 3—19 中 $0'-1'-2'-3'-4'$ 索線多邊形之作法，與圖 2—20 所示者大同小異。圖 3—19(a) 之 CC' 線，係經過一鉸 C 之任何一直線，其傾度並無限制。若鉸 C 亦有一荷重，則此荷重可視為屬於拱之左部或右部，並將此荷重之作用線，用為 CC' 線，均無不可。

若三鉸拱及其荷重，均係對稱，則鉸 C 壓力之豎分力必為零。故經過鉸 C 之索線，係一平線。如是，若作一索線多邊

形經鉸 C 及其他一鉸, 並使經過鉸 C 之索線為平線, 即可求得其二相同之反力。

比較圖 3—18 及圖 3—19, 可知圖 3—18 之法, 亦可用以作經過三定點之索線多邊形。

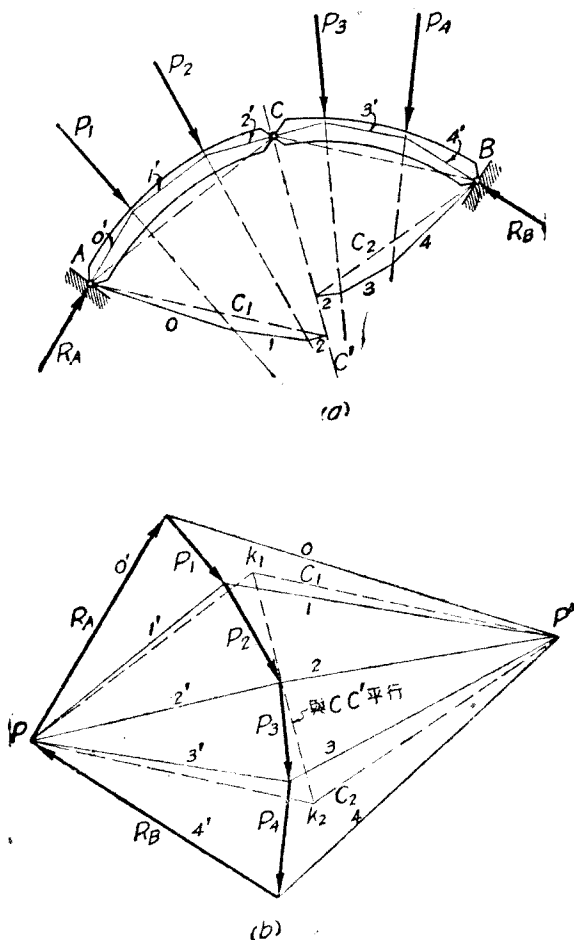


圖 3—19. 三鉸拱反力之圖解法(三)

爲易於明瞭起見，故以上特舉較簡單之例。但圖解法可以直接或間接用於求任何靜定結構之反力，其簡捷與否，蓋視結構之性質而定；有時且較數解法易於明瞭。圖 3—20(a) 之梁中有一鉸，其獨立分反力之數爲四（與圖 3—2 相同）。如用圖解法，則反力 R_A 及 R_B 之合力 R_1 之作用線，必經過該二反力之交點 F 。反力 R_C 及 R_D 之合力 R_2 之作用線，必經過該二反力之交點 G 及鉸 E ，蓋 E 點之彎矩必等於零。如是，則 EG 即 R_2 之作用線。此線與荷重 P 相交於 H ，根據靜平衡定理 2， R_1 之作用線，必爲 FH 。如圖 3—20(b)，作三個力三角形，即得其四分反力 R_A, R_B, \dots 之數量及指向。此圖之圖解法與圖 3—17 完全相同。故此梁亦可視爲屬於三鉸拱一類。如是，則作一索線多邊形，經過 $F, E, \text{及 } G$ 三定點，亦可求得其反力。^①

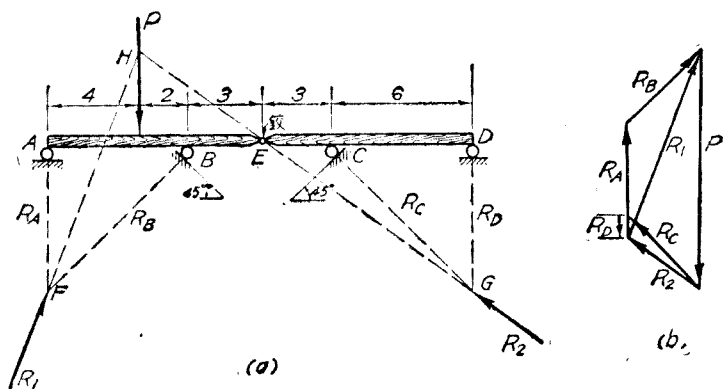


圖 3—20. 有鉸梁反力之圖解法

① 其解法列爲習題 3—10。

又如圖 3-21
 (a)之結構,欲求其
 A, B, ……等點之反
 力,似甚繁難。但
 以圖解法求之,則
 殊簡易。蓋 A 及
 B 二點總反力 R_1
 既不能等於零(若
 R_1 等於零,則總反
 力必係一力偶或力
 矩,非鉸 E 所能抵
 抗,故不可能),則
 必與支承面 AB
 垂直,並經過鉸 E;
 而 C 及 D 二點總
 反力 R_2 ,亦必與支
 承面 CD 垂直。且
 根據靜平衡定理 2,
 此三力 P, R_1 , 及
 R_2 必交會於一點。
 准此,則 R_1 及 R_2
 之作用線必如圖 3-21(a);而其數量及指向必如圖 3-21(b)。

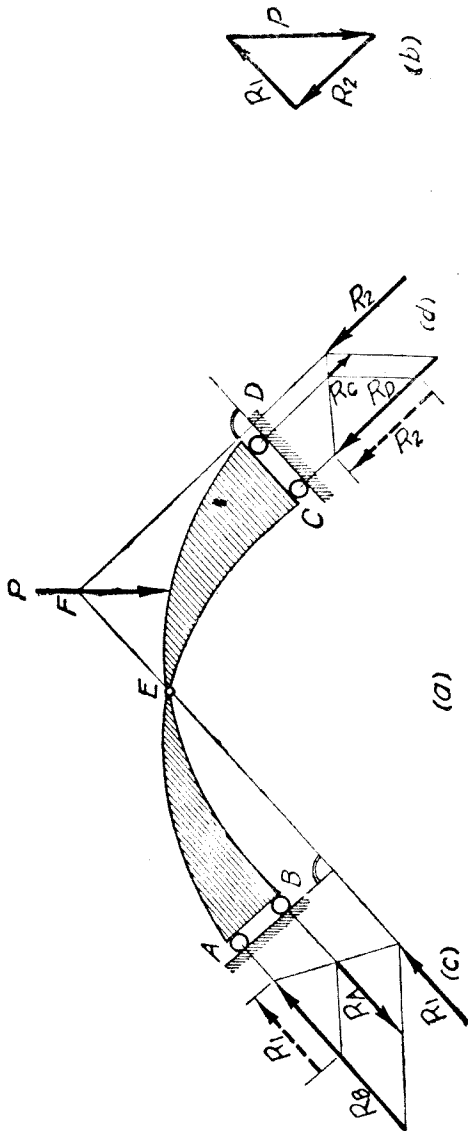


圖 3-21. 反力圖解法之簡捷

再將 R_1 及 R_2 各分解為二分力 R_A 與 R_B ，及 R_C 與 R_D ，如圖 3—21(c) 及 (d)，即得其數量及指向，至為簡明。故即欲用數解法以求反力，若作一圖解法之略圖，亦可使數解法之計算較為明確。

圖解求反力法，亦可用之以證明任何靜定結構，在某荷重下是否能維持平衡，由此可知其是否係一穩定之結構。圖 3—22(a) 示一靜定之結構，其中 CD 面與 AB 線成垂直，但是否穩定，不易證明。若加任何荷重 P 於其右部，則 CD 面既祇能抵抗與其垂直之力，故 R_A 之傾度，必與 CD 垂直。但根據靜平衡定理 2，則 R_A ， R_B ，

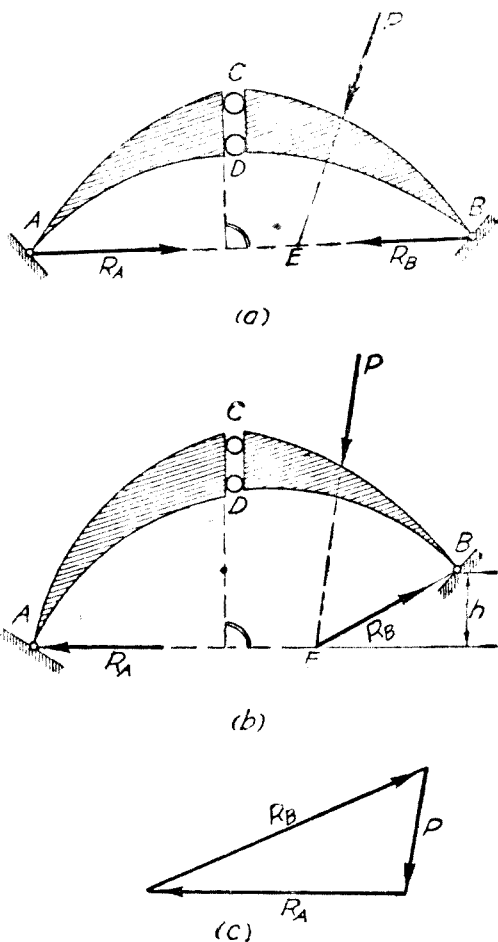
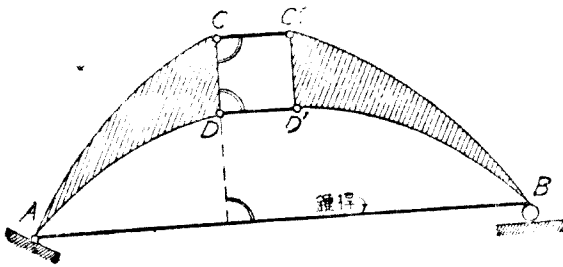


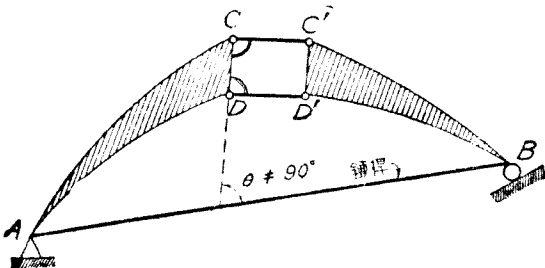
圖 3—22. 用反力圖解法證明結構在某荷重下是否能維持靜平衡

及 P 之作用線，必交會於 E 點。而 R_A 及 R_B 之作用線係在一直線上，故除非 $P=0$ ，此結構不能維持靜平衡。故此結構係一不穩定之結構。若 A 及 B 二支點之高度不同，如圖 3-22 (b)，即能維持靜平衡。其反力 R_A 及 R_B 可以力三角形求之，如圖 3-22 (c)。

圖 3-22 (a) 及 (b) 二結構之是否穩定，亦可以鏈桿之原理證明之。若將圖 (a) 結構之 C 及 D 二軛軸，代以與 CD 面垂直之 CC' 及 DD' 二鏈桿，並加一鏈桿 AB ，以承受 B 端之平分反力，將 B 端鉸支座改為軛軸支座，如圖 3-23 (a)。如是則此結構變為二剛體 ACD 及 $BC'D'$ ，藉三個平行之鏈桿 AB ， CC' ，及 DD' 聯合而成，故不穩定。同此，圖 3-22 (b) 之



(a) 三鏈桿平行



(b) 三鏈桿不平行亦不交會於一點

圖 3-23. 用三鏈桿之原理證明結構是否穩定

結構，可改爲圖 3-23(b) 之結構，如是，則其 ACD 及 BCD' 二剛體間之三聯合桿，既不平行，亦不交會於一點，故係一穩定之結構。圖 3-22 之結構，可視爲屬於三鉸拱一類，不過其中間係一虛鉸，且其位置在無窮之遠。

圖 3-24 所示三鉸在一直線上之結構，亦可以鏈桿之原理證明其係不穩定。圖 3-24(a) 之結構，有三鉸在一直線上，其中間之鉸 C ，可依圖 3-8 之例，代以二交叉之鏈桿，再依圖 3-23 之例，加一鏈桿 AB ，並將其 B 端之鉸支座改爲輾軸支座，如圖 3-24(b)。如是，則此結構成爲二剛體藉三個交會於一點之鏈桿聯合而成，故不穩定。由是可知，三鉸在一直線上，相當於交會於一點之三聯合鏈桿。

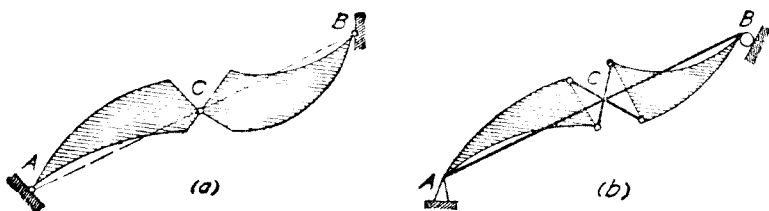


圖 3-24. 用三鏈桿之原理證明結構如有三鉸在一直線上即不穩定

習題 3-8. 於習題 3-4 諸結構中，擇其靜定而能維持靜平衡者，用圖解法求其三鏈桿中之應力。

習題 3-9. 於習題 3-5 諸結構中，擇其靜定而能維持靜平衡者，用圖解法求其 A, B, C, D 四點之反力。若其中有靜定而不能維持靜平衡者，亦用圖解法證明之。

習題 3-10. 作一索線多邊形經過 F, E ，及 G 三點，求圖 3-20 所示結構之四反力。設荷重 $P=9$ 。

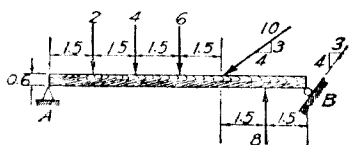
習題 3-11. 用圖解法求習題 3-7 結構 a, b, c, \dots 等支點之反力。

習題 3-12. 用最簡捷之圖解法，求下列結構各支點之平豎分反力。

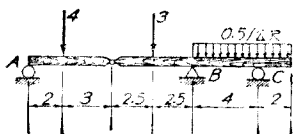
提示 最簡捷之法大概如下：——

(a) 用索線多邊形。

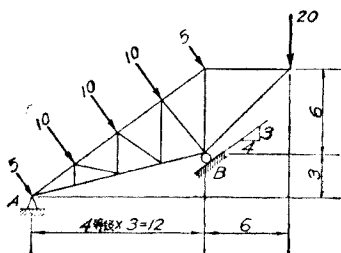
(b) 用平行力之分解法，先求 R_A 。再用同法求 R_B 及 R_C 。



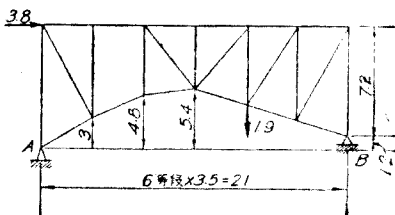
(a)



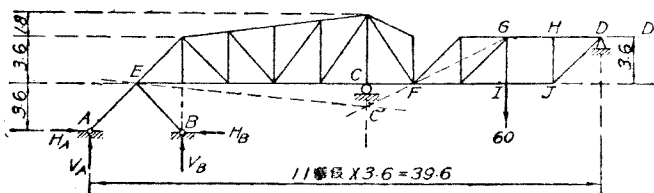
(b)



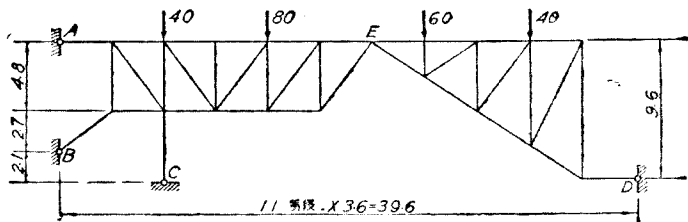
(c)



(d)



(e)



(f)

習題 3-12.

(c)用靜平衡定理 2 或 4。

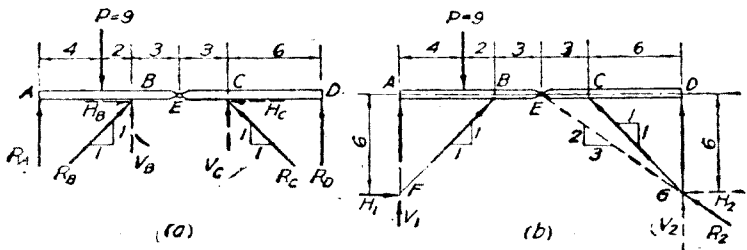
(d)先定虛鉸之位置，並將此結構視為一三鉸拱。再用圖 3-17 所示之解法。

(e)注意鏈桿 GH 及 IJ 各相當於一輻軸，故其任何一邊合力之作用線必與 GH 及 IJ 平行（即 GH 間之切力等於零，或 $V_{GH}=0$ ）。再用 $M_F=0$ ，即可定 R_D 。再考慮結構 ECD 全部之靜平衡，應用定理 2，即可得 R_C 及 R_E ，由是可得 H_A ， V_A ， H_B ，及 V_B 。此結構之全部共有七個分反力，除靜平衡之三方程外，尚有 $V_{GH}=0$ ， $M_F=0$ ，及 $M_E=0$ 。但由 $M_F=0$ ，可得二獨立方程，即 $H_A=V_A$ ，及 $H_B=V_B$ 。因此 $M_E=0$ 實等於二獨立方程。故共有七個方程，足以求七個未知分反力。注意圖中 $D'G$ ， GFC' 及 $C'E$ 等虛線之意義及其應用。

(f)先求鉸 E 各透荷重之合力。考慮結構右部 ED 之靜平衡，即可得 R_D 及 R_E ，再考慮其左部 $ABCE$ 之靜平衡應用定理 4 即可得 R_A ， R_B ，及 R_C 。

3-7. 反力之數解法 用數解法以求反力，即應用前章所述靜平衡之三方程。但即在同一習題，其應用之步驟，並無一定。且有繁簡之分。至如何可得最簡捷之步驟，殊無一定規則。蓋全在學者之心靈手敏，熟能生巧耳。茲舉例如下：

例題 3-1. 設圖 3-20 之荷重 $P=9$ ，用數解法，求其四反力。



例題 3-1.

第一解答: [尋常解法, 見圖(a)].

注意: $H_B = V_B$ 並 $H_C = V_C$

$$\Sigma H = 0, \quad H_B - H_C = 0 \quad \text{故 } V_B = V_C \quad (a)$$

$$\Sigma V = 0, \quad R_A + V_B + V_C + R_D - 9 = 0 \quad (b)$$

$$\Sigma M_A = 0, \quad 6V_B + 12V_C + 18R_D - 4 \times 9 = 0 \quad (c)$$

$$M_E = 0, \quad 3V_C + 9R_D = 0, \quad \text{故 } R_D = -\frac{1}{3}V_C \quad (d)$$

將方程 (a) 及 (d) 代入方程 (c) 中, 並化簡, 即得,

$$12V_C - 36 = 0, \quad \text{故 } V_C = +3 \uparrow \text{ 如是 } R_C = +3\sqrt{2} = +4.24 \swarrow$$

由方程(a), $V_B = +3 \uparrow \quad R_B = +4.24 \nearrow$

由方程(d), $R_D = -1.00 \downarrow$

由方程(b), $R_A = +4.0 \uparrow$

校核 $\Sigma M_D = 0$

$$9 \times 14 = -126$$

$$4 \times 18 = \quad \quad \quad +72$$

$$3 \times 12 = \quad \quad \quad +36$$

$$3 \times 6 = \quad \quad \quad +18$$

$$\frac{-126 \quad \quad \quad +126}{\quad \quad \quad} \text{ 無誤}$$

解釋 圖(a)中各反力之指向, 皆係假定。如所得之答案為正號, 則假定之指向為正確, 故向上。如得負號, 則其正確指向與所假定者相反, 故向下。

校核 中力矩之正負號, 常以順時針轉者為正, 逆時針轉者為負, 但反之亦無不可。

所有計算, 應簡明整潔。亂雜污晦, 均當切戒。學者須知, 實際上, 工程師之計算, 常需經過他人一次或數次之校核, 故計算時, 應顧及校核者能明瞭所有之步驟。太詳細非但失之於瑣碎, 且為時間所不許。太簡略則又易失之於晦暗。如何始可稱為恰到好处, 全在學者自行斟酌。

上列之計算, 係先將四方程全行寫出, 再解諸聯立方程, 以求該四未知項, 乃極尋常之步驟。但其簡捷, 遠不如下列之第二解答。

第二解答: [簡捷解法, 見圖(b) 及 (a)].

$$\Sigma M_F = 0: \quad V_2 = +9 \times \frac{4}{18} = +2 \uparrow$$

$$H_2 = \frac{3}{2} V_2 = +3 \leftarrow$$

$$\begin{aligned}
 \text{故} \quad H_C &= +3\leftarrow, & R_C &= +3\sqrt{2} = +4.24\swarrow \\
 V_C &= +3\uparrow, & R_D &= V_2 - V_C = -1.00\downarrow \\
 \Sigma H &= 0: & H_B - H_C &= 0, \quad \text{故} \quad H_B = +3\rightarrow \\
 V_B &= +3\uparrow & R_B &= +3\sqrt{2} = +4.24\swarrow \\
 \Sigma V &= 0: & R_A &= 9 - (3+3-1) = +4.00\uparrow
 \end{aligned}$$

解釋 先定 R_A 與 R_B 及 R_C 與 R_D 合力之交點 F 及 G ，並注意其高度相同，如圖 (b)。故該四反力 R_A, R_B, \dots 可以另四分反力 H_1, V_1, H_2 ，及 V_2 代替之。如是，用 $\Sigma M_F = 0$ ，即可求得 V_2 作 EG 線，即得 R_2 之作用線。由其傾度，即求得 H_2 。其餘之計算，均極簡明，無待解釋。注意 H_1 及 V_1 不必求得。

作 EG 線，乃圖解法之一部。有此一線，即可免去第一解答中之聯立方程。2-1 節之末曾謂：即用數解法，若畫一圖解法之略圖，有時常可得極簡捷之計算，此即其例。

例題 3-2。用數解法，求此結構 A 及 D 二支點之平豎分反力。(I) 繩釘於梁上之 E 點。(II) 梁無 AE 桿，繩釘於另一支點 F 。

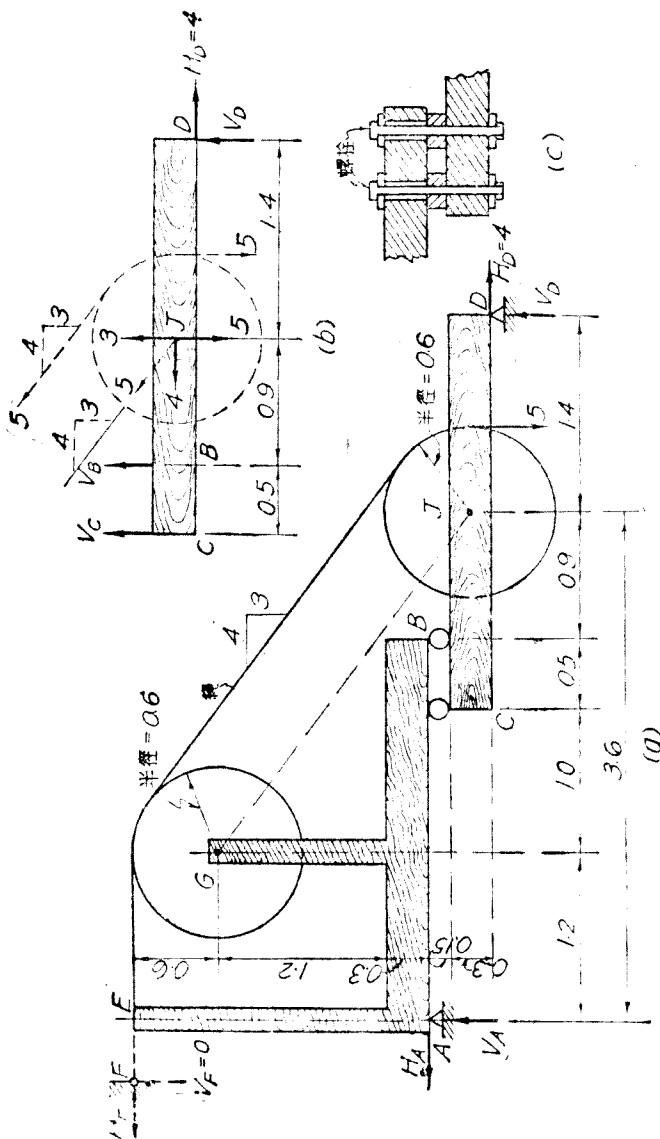
解答：

I. 繩釘於梁上之 E 點：

$$\begin{aligned}
 \text{由圖 (b)，用 } \Sigma H &= 0, & H_D &= \underline{4} \rightarrow \\
 \text{考慮此結構全體之靜平衡：} & & \Sigma M_A &= 0, \\
 5V_D + 0.45 \times 4 - 4.2 \times 5 &= 0 & \text{故} & V_D = \underline{+3.84} \uparrow \\
 \Sigma H &= 0, & H_A &= 4 \leftarrow \\
 \Sigma V &= 0, & V_A &= 5 - 3.84 = \underline{1.16} \uparrow
 \end{aligned}$$

II. 梁無 AE 桿，繩釘於另一支點 F ：

$$\begin{aligned}
 \text{與 I 相同，} & & H_D &= \underline{4} \rightarrow \\
 \text{繩中任何點之拉力，必等於荷重，用 } \Sigma H &= 0 \text{ 於 } F \text{ 點，則} & & \\
 & & H_F &= \underline{5} \leftarrow \\
 \text{考慮此結構全體之靜平衡，} \Sigma M_A &= 0, & & \\
 5V_D + 0.45 \times 4 - 4.2 \times 5 + 2.1 \times 5 &= 0 & \text{故} & V_D = \underline{+1.74} \uparrow
 \end{aligned}$$



例題 3-2.

$$\Sigma H=0, \quad H_A=4-5=-1 \rightarrow$$

$$\Sigma V=0, \quad V_A=5-1.74=3.26 \uparrow$$

解釋 先求二滑輪間繩之傾度，但其傾度即等於 GJ 線之傾度，故極易求得（有時求繩之傾度，不能如此簡易）

繩中任何點之拉力，均應為 5。此拉力由滑輪及其中心之樞 J ，而傳達於梁，故梁 CBD 因荷重而得之力系，如圖 (b) 之實線箭頭所示。

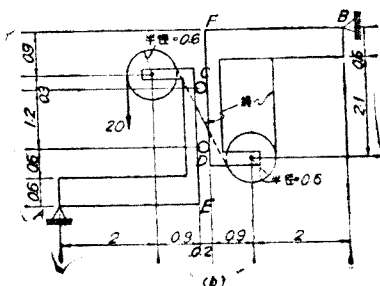
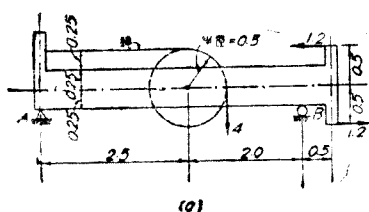
C 及 B 二樞軸，乃理想情形，其實際情形可如圖 (c) 所示，即用二螺栓，將二梁拚接而成一梁。

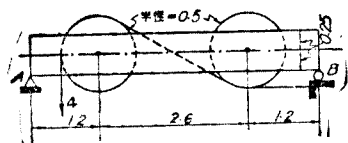
既知 H_D 之後，求 V_D 時，於例 1 繩不必剪斷。若將繩剪斷，使其拉力傳達於此二梁之 G 及 J 二點，如圖 (b)，而後用 $\Sigma M_A=0$ 以求 V_D 亦可。但不如前法之簡捷。惟如欲求此二梁之切力及彎矩，則必需如此。

桁架之反力，常與其各桿之佈置有密切之關係，此於習題 3—11 及 3—12(d) 及 (e) 可以見之。且有時欲求其反力，必預先或同時求其中若干桿之應力，已於 56 頁註脚 1 說明。此項反力之求法，當於 4—18 節中述之。

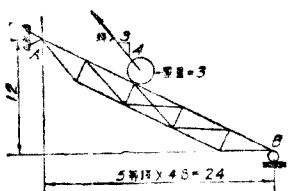
習題 3—13。用數解法求下列結構各支點之水平及垂直反力，並用圖解法校核 (b) 及 (g) 二結構之答案。

提示 結構 (b) 與圖 3—22 之結構相似，結構 (g) 與習題 3—12 之 (d) 相似，皆屬於三鉸拱一類。

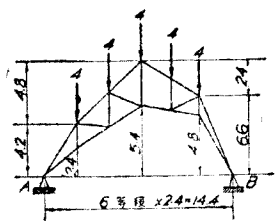




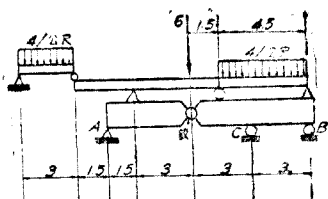
(c)



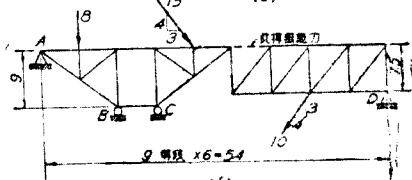
(e)



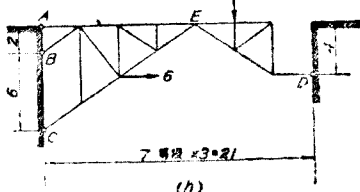
(g)



(d)



(f)



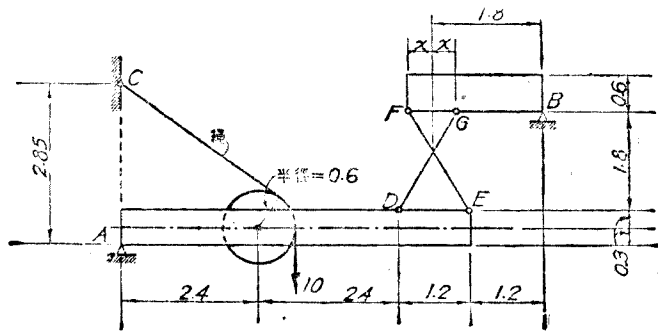
(h)

習題 3-13.

習題 3-14. 用數解法及圖解法求此結構各支點之平豎分反力。(a)

$\alpha=0.6$, 及 (b) $\alpha=0.3$.

提示 此結構亦屬於三鉸拱一類, 解答時如遇有困難, 應說明其理由。



習題 3-14.

習題 3-15.

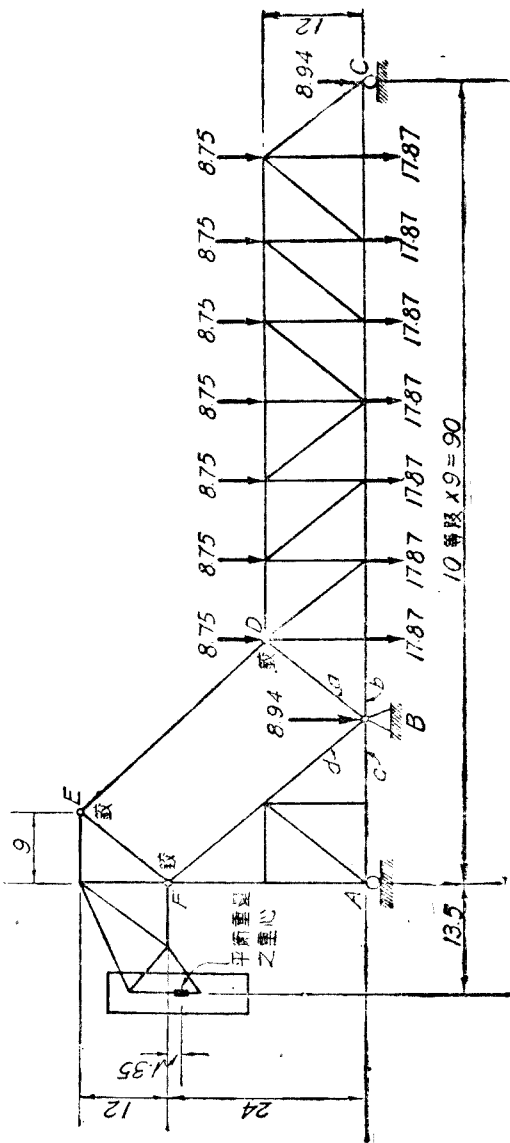
圖示單開之上轉橋 (basculin bridge)。用數解法求以下諸項：

(a) 若此橋身之重如圖所示，並將各鉸之摩阻力略去不計，求必需之平衡重量 (counterweight) (即使反力 $V_c = 0$)

(b) 先使此橋關閉如圖所示，再使其向上轉開 60° ，在此二種情形之下，求 A 及 B 二支點由於橋身重量及平衡重量之反力。

(c) 又在 (b) 之二種情形下，求鉸 B 上因橋身重量所致之反力。

提示 求 (c) 時，應先求在 $V_c = 0$ 之情形下 DE 桿中之力。



習題 3-15.

3-8. 用虛功原理①求反力 設某質點 (particle) A (圖 3-25(a)) 受有任何一力 F , 並可依任何傾度移動。若該質點不論因任何原因, 有極小②之移位 $AA' = \delta$ 。此項移位, 稱為虛移位 (virtual displacement)。如是, 則 F 所作之功 (work) W , 必為

$$W = F \delta \cos \theta$$

於圖 3-25(a) F 及 $\delta \cos \theta$ 之指向相同, 故其功之符號為正, 否則為負。

若此質點受有維持平衡之任何力系, 如 F_1, F_2 , 及 F_3 (圖 3-25(b)), 而由其 A 至 A' 之移位如前。若以 AA' 為 X 軸, 因此力系係平衡, 故

$$\Sigma X = F_1 \cos \theta_1 + F_2 \cos \theta_2 + F_3 \cos \theta_3 = 0$$

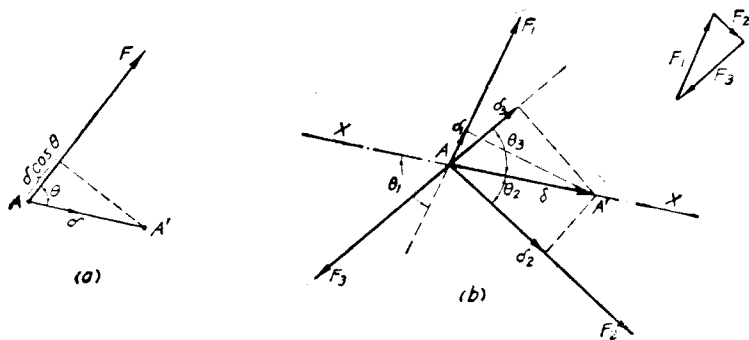


圖 3-25. 質點之虛功原理

再乘以 δ , 則

$$F_1 \delta \cos \theta_1 + F_2 \delta \cos \theta_2 + F_3 \delta \cos \theta_3 = 0$$

$$\text{或} \quad \Sigma F \delta \cos \theta = 0 \quad (3-4)$$

$$\text{或} \quad F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 + F_3 \delta_3 \dots = 0 \quad (3-5)$$

其中 δ_1, δ_2 , 及 δ_3 , 各係 δ 在 F_1, F_2 , 及 F_3 作用線上之分移位。由此

① 虛功原理, 創於蓋 (Galileo, 1564-1642) 氏 及 史 (Stevinus, 1548-1620) 氏。但此理論之最後成立 (1717), 則應歸功於柏 (John Bernoulli, 1654-1782) 氏。而 那 (Lagrange) 氏於 1788 年首先以代數式表述之。至首先應用此理論以求反力及桁架之應力, 乃 蒲 Poisson, 1781-1840) 氏。

② 力學及結構學中所討論之移位, 皆以數量極小者為限。

可知，設一質點在任何力系下維持平衡，不論因任何原因而有任意移位，則此力系所作之總功等於零，此即質點之虛功理論也。所以稱為虛功者，即因力系與移位二者之一係虛設，且各自獨立不相牽制，此虛功理論之基本概念，讀者應澈底了解。此理論可推廣而用之剛體或彈性體之結構。且此理論可推廣而用之於力矩 M 及角移位 α ，故

$$(3-6) \quad \Sigma Ma = 0$$

如是，則結構之虛功理論，可述之如下：設一結構在任何力系（力或力矩）下維持平衡（靜平衡或彈性平衡）^① 不論因任何原因而有與其控制情形相符之任意極小虛移位，則此力系所作之總功必等於零。此理論可用之以求反力，切力，彎矩，應力等；而用之以求上述諸項之感應線或感應圖 (influence line or diagram)，尤為簡捷。且可用之於靜定或靜不定之結構。茲先述用此理論以求靜定反力之法如下。

圖 3—26(a) 示一簡單梁 AB ，其 C 點受有一荷重 P 。設欲求其支點 A 之反力 R_A ，先將其 A 端之支座移去，而代以 R_A ，如圖(b)，庶該端可以上

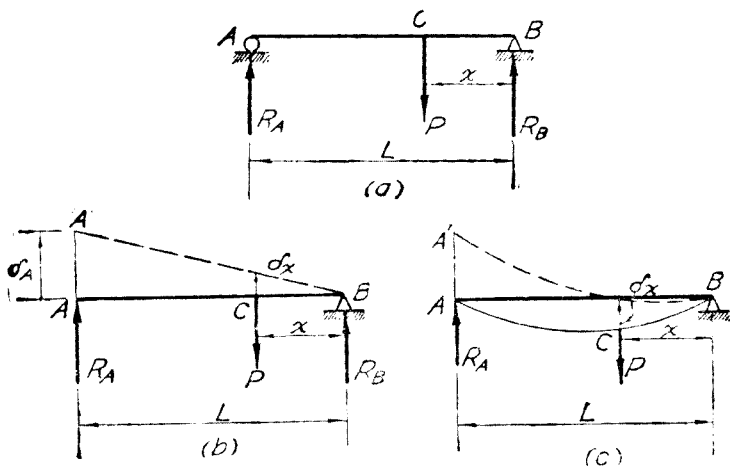


圖 3—26. 用虛功原理求結構之反力(一)

- ① 分析靜不定結。時，除應考慮其靜平衡外，尚須考慮其各部之彈性變形，而使其一致相符，即考慮其彈性平衡也。

下移動。再使該端有任意極小之虛移位 δ_A , 則 A 端移至 A' 。因 δ_A 係極小, 故 A 及 A' 可視為在一豎線上。但其 B 端並未移物, 於是此梁之位置, 變為 $A'B$ 。此即所謂「與其控制情形相符之極小虛移位」。假設 R_A 之指向係向上, 因 P , R_A , 及 R_B 係平衡力系, 故用方程 (3-5), 則

$$R_A \delta_A - P \delta_B = 0$$

但
$$\frac{\delta_x}{\delta_A} = \frac{x}{L}$$

故
$$R_A = +P \frac{\delta_x}{\delta_A} = +P \frac{x}{L} \uparrow$$

設梁 AB 並非剛體, 故在荷重 P 下必有變位, 如圖 3-26(C) 之 ACB 。如前法則 δ_B 與 δ_A 之比, 並不改變。因圖 (b) 及 (c) 中三角形 $AA'B$ 各點之高度, 亦不改變。

試再取一較複雜之結構, 如圖 3-27 (a)。設欲求此結構在荷重 P 下

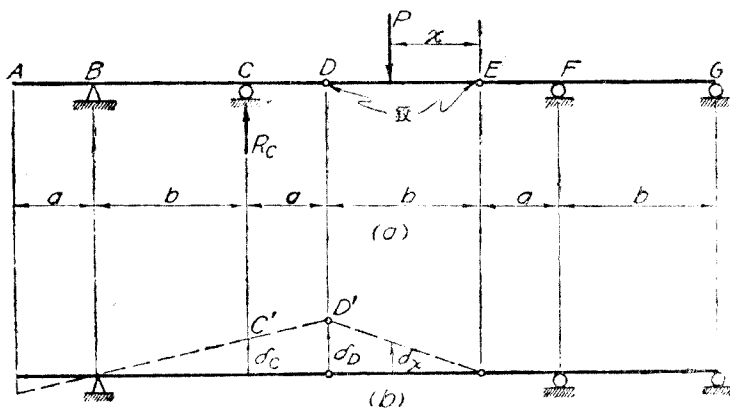


圖 3-27. 用虛功原理求結構之反力(二)

支點 C 之反力, 如前法, 使 C 點有任意極小之虛移位 δ_C , 則此結構與其控制情形相符之虛移位, 必如圖 3-27 (b)。用方程 (3-5), 得

$$R_C \delta_C - P \delta_x = 0$$

$$R_C = P \frac{\delta_x}{\delta_C} \uparrow$$

$$\text{但} \quad \delta_D = \delta_C \frac{a+b}{b} = \delta_a \frac{b}{x}$$

$$\text{故} \quad \frac{\delta_a}{\delta_C} = \frac{x(a+b)}{b^2}$$

$$\text{所以} \quad R_C = P \frac{x(a+b)}{b^2} \uparrow$$

如欲求其他支點之反力，必再用此法，故每次祇能求得一反力，此其不便之處。但用此法可知某支點反力與荷重位置改變之關係，此乃此法最優異之點。如圖 3—27(b)，可知如 P 置於 D 點，則 R_C 為最大；如 P 置於 E 與 G 間之任何一點，則 R_C 為零，如 P 置於 A 點，則 R_C 為負，故指向向下，此即以後所論感應圖之意義。故用此法以求感應圖，其簡捷蓋無超其右者；而用之於靜不定結構尤然。

習題 3—16。用虛功之原理，求習題 3—12 中結構 (b) 各支點之反力，及結構 (e) 支點 C 之反力。

3—9. **切力及彎矩之定義** 研究任何結構中之應力，唯一之方法，即於所欲求應力之處，以任何形之截面，將結構隔離為二部。再應用靜力學之定律，於其一部，而研究隔離面之內力必需如何，庶可與該部已知之外力維持靜平衡。

用此種分析法時，常遇外力之二種函數，即：切力及彎矩。圖 3—28 (a) 示一簡單梁，受有豎荷重 P_1, P_2, \dots 等。設欲求截面 © 之應力，依上述之法，以一與梁軸垂直之截面 ©，將此梁於 C 點隔離為 ④ 及 ③ 二部，如圖 (b)。試先考慮該截面左邊隔離體 ④ 之靜平衡。普通言之， R_A 不一定等於 P_1 。若設 $R_A > P_1$ ，則截面 © 必有向下之切力 V_C 等於 $R_A - P_1$ ，庶可滿足 $\Sigma V = 0$ 之條件，而此 V_C 乃隔離體 ③ 加於隔離體

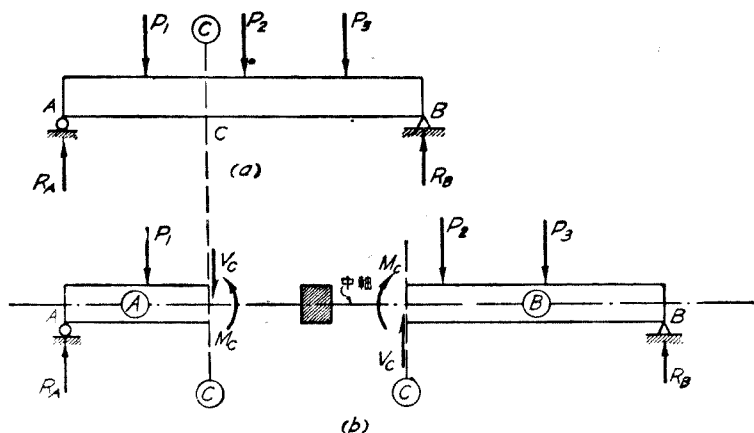


圖 3-28. 梁之切力及彎矩

④ 者。 故任何截面之切力，乃該截面任何一邊所有與該截面平行外力之代數和。

再用 $\Sigma M=0$ ，則隔離體 (B) 亦必有一逆時計針向之內力矩 M_C ，加於隔離體 (A) 之截面 (C)；而 M_C 與外力 R_A 及 P_1 之力矩維持平衡。該外力矩稱為彎矩或外矩 (external moment)，而內力矩稱為抗矩 (resisting moment) 或內矩 (internal moment)。故於數量上，內矩 = 外矩；或抗矩 = 彎矩。但內矩或抗矩乃對於該梁截面之中軸 (neutral axis) 而言，故 任何截面之彎矩，乃該截面任何一邊所有外力之合力，對於該截面中軸之力矩。

上述之切力 V_C 及抗矩 M_C ，既係隔離體 (B) 加於隔離體 (A) 者，依牛頓 (Sir Isaac Newton, 1642—1727) 「有力作用必有反力作用」之定律，則隔離體 (A) 亦必有數量相同指向相反之

切力 V_c 及抗矩 M_c 加於隔離體 (a) 之截面 (c)，庶隔離體 (b) 亦能維持靜平衡。

學者須知：所謂切力及彎矩者，不過僅上列定義之簡便代名詞。因分析結構時，常遇此二項外力之函數。為簡便起見，故用切力及彎矩二名詞以代替上列之定義。學者對此二名詞，如覺有含混不清之處，則擷去此二名詞，仍用上列定義，亦決無不可。

切力及彎矩均有正負號之別，普通常設某截面之切力使其左部有向上移動之趨勢者為正號，如圖 3—29 (a)、否則為負號。於彎矩，常設使受彎矩部分之兩端有向上彎曲之趨勢者為正號〔即其上面有壓應力，下面有拉應力，如圖 3—29 (b)〕，否

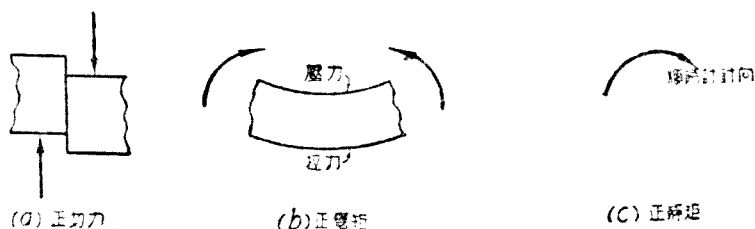


圖 3—29. 正號之切力，彎矩，及靜矩

則為負號。但此種正負號與靜矩所用者，其定義根本不同。於靜矩，常以其旋轉趨勢係順時針向者為正號〔如圖 3—29 (c)〕，否則為負。於結構學中，此二種正負號常需同時採用，學者務必明其區別而免淆混。

於結構之豎立部份，常將其自右向左側看如一梁，以其左為上，其右為下，則上述切力及彎矩之正負號，即可採用。

3-10. 關於切力及彎矩之理論 下列三理論, 於計算切力及彎矩時, 頗有幫助。

(1) 切力及彎矩之疊加 若干力對於某截面之總切力及總彎矩, 等於各個力對於該截面切力及彎矩之代數和。此即疊加原理(principle of superposition)之應用。學者應注意凡函數

受結構變形之影響者, 一概不能採用此原理。理論上, 結構中之函數, 多受其變形之影響; 但實際上, 此項影響, 有時可以略去, 有時不可略去。切力及彎矩所受結構變形之影響, 常可略去, 故疊加原理可以採用, 其例如圖 3-30。

(2) 二截面彎矩之關係 任何截面 B 之彎矩(M_B), 等於任何其他截面 A 之彎矩(M_A), 加(代數加法) A 截面之切力(V_A), 乘此二截面間之距離(d_{B-A}), 再加(代

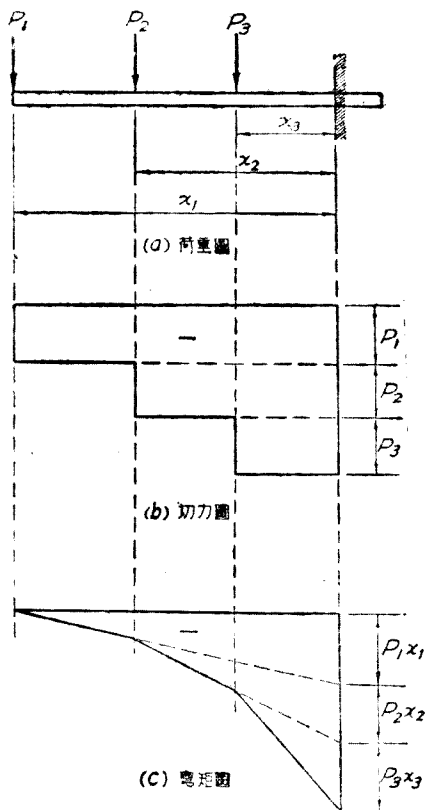


圖 3-30. 切力及彎矩之疊加

數加法)此二截面間所有荷重對於截面 B 之彎矩 (M_{B-A})。①

以方程式表之,則

$$(3-7) \quad M_B = M_A \pm V_A d_{B-A} \pm M_{B-A}$$

(3) 彎矩之互等 於簡單梁上任何一點 b , 置一豎向荷重 P , 則該梁上任何其他一點 a 之彎矩 (M_{ab}), 等於該梁 b 點因同一荷重 P 置於 a 點之彎矩 (M_{ba})。此即彎矩互等之理論。

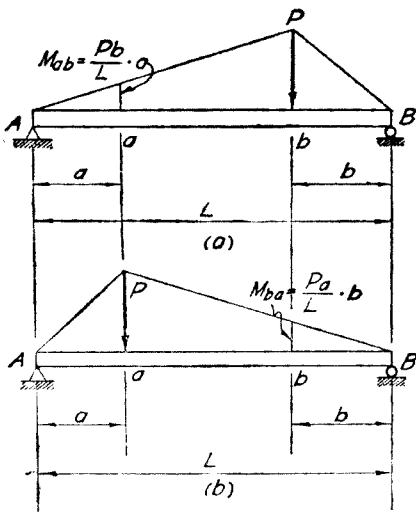


圖 3-31. 彎矩之互等

圖 3-31 (a) 示一簡單梁, 其 b 點有荷重 P , 其任何其他一點 a 之彎矩為 M_{ab} 。若將 P 移至 a 點, 其 b 點之彎矩為 M_{ba} , 如圖 3-31(b), 則

$$M_{ab} = \frac{Pb}{L} \times a$$

並
$$M_{ba} = \frac{Pa}{L} \times b$$

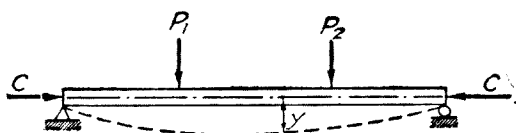
故 (3-8)
$$M_{ab} = M_{ba}$$

注意: 此理論祇能用

於二端支承之簡單梁, 以後論彎矩之感應圖時, 當用此理論。

習題 3-17. 圖示一細長之簡單梁, 其兩端受有向軸壓力 C 及荷重 P_1 與 P_2 。求此梁任何截面之彎矩時, 是否可用疊加原理? 試切實說明答案之理由 (如能用數學方法證明更佳)。

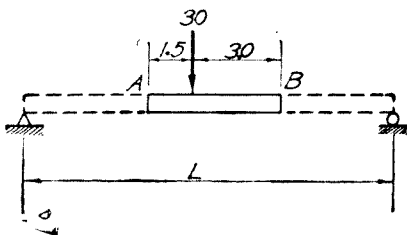
① 其證明列為習題 3-18(a)



習題 3-17.

提示 任何截面之彎矩,與該截面之變位 y 有關係。

習題 3-18. (a)試舉一最普遍之例,證明方程(3-7)之正確。(b) AB 係某較長簡單梁之一段,若截面 A 及 B 之彎矩均等於 $+30$,求此梁之跨度 L 。

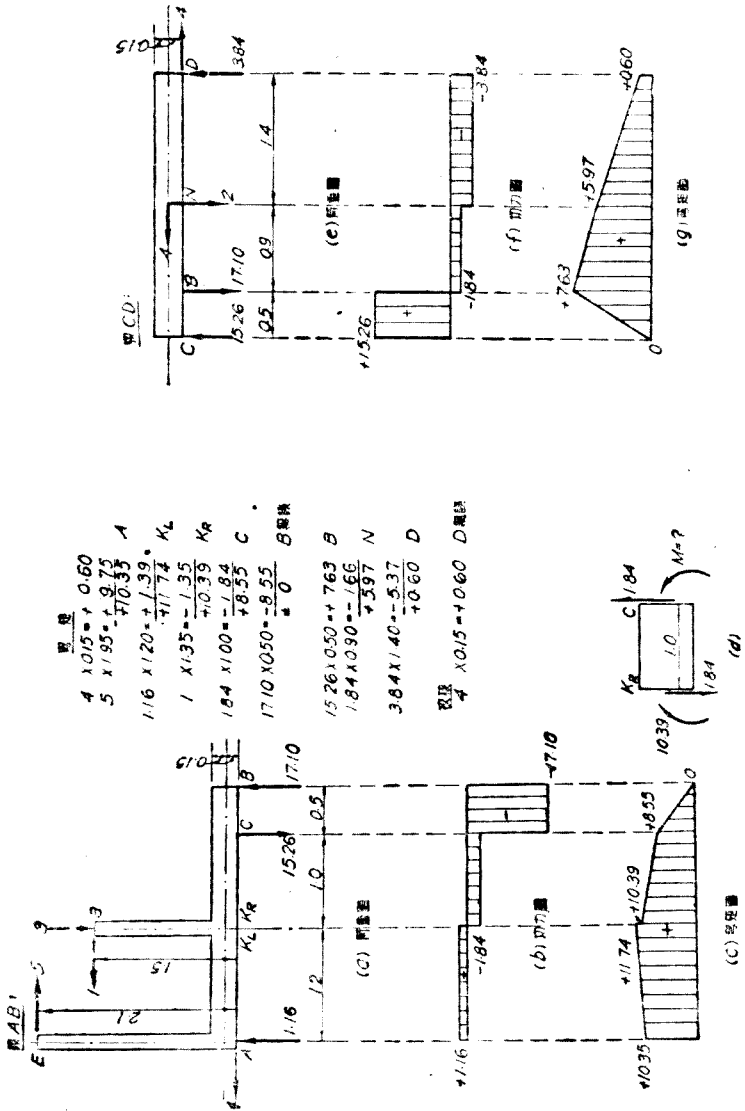


習題 3-18(b).

習題 3-19. 若將一豎向荷重 P 置於簡單梁跨度上之任何一點 a , 其彎矩圖對於 a 點之彎矩,有何其他意義? 試解釋並證明之。

3-11. 切力圖及彎矩圖 分析結構時,常需知其跨度上各點切力及彎矩之改變。於此,可作切力圖及彎矩圖。此圖任何點自底線之高度,即等於該點切力或彎矩之值。其正號者常在底線之上,負號者常在底線之下。於結構之豎立部份,則常以該部之左右分別其正負號。切力圖及彎矩圖底線常係一水平線,但任何非水平線或曲線亦可採用,於圖解法中,尤多如此。茲舉例如下:

例題 3-3. 作例題 3-2 (I) 中梁 AB 及 CD 之切力圖及彎矩圖。



例題 3-3.

解答:

(a) 先求梁 CD 之 V_B [見例題 3-2 圖 (b)] 及 V_C

$$\Sigma M_C = 0, 2.8 \times 3.84 + 0.15 \times 4 - 1.4 \times 2 + 0.5 V_B = 0$$

$$V_B = -17.10 \downarrow$$

$$\Sigma V = 0, 3.84 - 17.10 - 2 + V_C = 0$$

$$V_C = +15.26 \uparrow$$

故梁 AB 之 V_B 及 V_C 爲

$$V_B = 17.10 \uparrow, \quad V_C = 15.26 \downarrow$$

校核

$$\Sigma M_A = 0$$

$$15.26 \times 2.2 = +33.57$$

$$5 \times 2.1 = +10.50$$

$$3 \times 1.2 = +3.60$$

$$17.10 \times 2.7 = -46.17$$

$$1 \times 1.5 = -1.50$$

$$+47.67 \qquad -47.67 \text{ 無誤}$$

(b) 作切力圖及彎矩圖 (見附圖):

解釋 求梁 AB 上之力系與例題 3-2 圖 (b) 相似, 無需解釋。

求切力圖時, 祇力系或其分力之與梁軸垂直者有關係, 所有之平力, 均與切力無關。

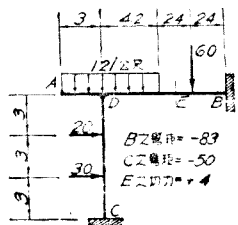
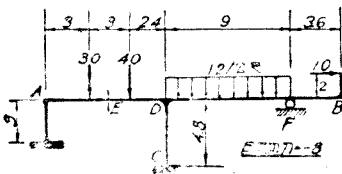
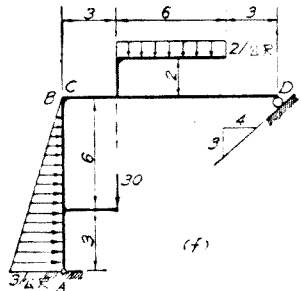
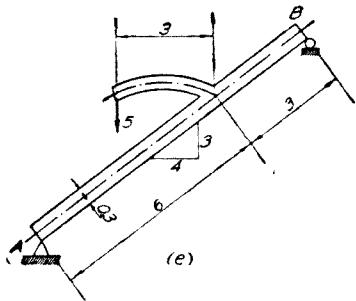
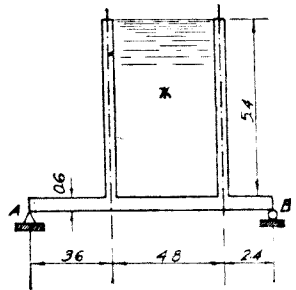
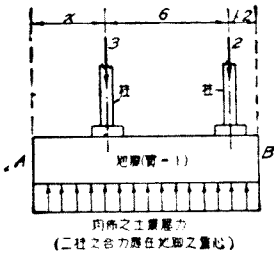
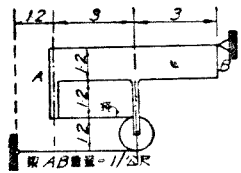
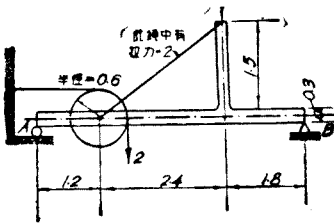
彎矩之計算, 係由左至右。依 3-10 節之理論 2 (即方程 3-7), 按步計算, 簡明而不易有誤。於梁 AB , 由 K_R 之彎矩求 C 之彎矩, 如圖 (d)。於梁 CD , 由 B 求 N 及由 N 求 D 之彎矩, 其方法亦同。

習題 3-20. 作下列各梁之切力圖及彎矩圖:

(a) 習題 3-13: (a) 與 (d) 之梁 AB , (b) 之梁 AE 及 EF 。

(b) 習題 3-14: (a) 之梁 ADE 及 FGB 。

習題 3-21. 作下列梁 AB 及 CD 之切力圖及彎矩圖。



3-12. 荷重圖,切力圖,及彎矩圖之關係 一平直之梁,在任何荷重^①下,其荷重圖切力圖及彎矩圖三者之間,有極周密之關係。此項關係,不但可用之以校正此三圖在原理上是否正確相符,若某圖為已知,且可用之以直接求其他二圖^②。茲分

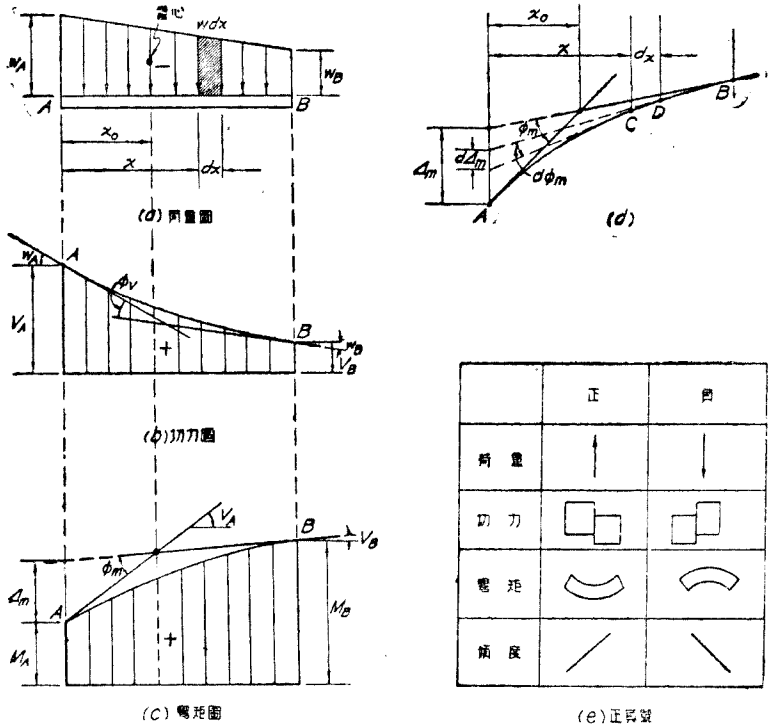


圖 3-32. 荷重圖,切力圖,及彎矩圖之關係

- ① 如荷重不與梁軸成垂直時,可於其作用線與梁軸之交點,將荷重分解為二分力。第一分力之作用線,與梁軸同在一直線上,第二分力之作用線,與梁軸成垂直。因第一分力與梁之彎矩及切力均無關,故荷重情形,變為與圖 3-32(a) 所示者相同。如是則所有之關係,仍然存在。
- ② 惟荷重圖如有平向荷重時,則由切力圖或彎矩圖求其他二圖,常不祇一個答案。

五條述之如下(圖 3—32):

(1) 切力圖任何點之傾度, 等於該點之荷重。 彎矩圖任何點之傾度, 等於該點之切力。 以方程表之, 則

$$(3-9) \quad w = \frac{dV}{dx}$$

$$(3-10) \quad V = \frac{dM}{dx}$$

由是可知, 如任何點之彎矩為最大, 則切力圖於該點必改變其正負號。換言之, 亦可謂任何點之荷重, 等於該點切力之改變率; 而任何點之切力, 又等於該點彎矩之改變率。若遇集中荷重, 則此切力圖及彎矩圖之傾度均必驟然改變。但集中荷重乃一理想情形, 故實際上切力圖無豎線, 而彎矩圖亦無尖頂, 其比較見圖 3—33。

(2) 切力圖任何二點間之差(或改變), 等於該二點間之荷重。 彎矩圖任何二點間之差(或改變), 等於切力圖該二點間之面積。 以方程表之, 則

$$(3-11) \quad V = \int w dx \quad \text{或} \quad V_B - V_A = \int_A^B w dx$$

$$(3-12) \quad M = \int V dx \quad \text{或} \quad M_B - M_A = \int_A^B V dx$$

第一條表示其微分關係, 而此條則表示其積分關係, 二者正相反也。

(3) 於切力圖上任何二點作二切線, 則其間之角度 (ϕ_c), 等於該二點荷重之差。 於彎矩圖上任何二點作二切線, 則其間

之角度(ϕ_m), 等於該二點切力之差, 或該二點間之荷重。

以方程表之, 則

$$\phi_v = w_B - w_A \quad (3-13)$$

$$\phi_m = V_B - V_A = \int_A^B w dx \quad (3-14)$$

(4) 若於彎矩圖上任何一點 B 作一切線, 則其上任何其他一點 A 與 B 點切線之豎距(Δ_m), 等於 A 及 B 二點間荷重, 對於 A 點之靜矩。以方程表之, 則

$$\Delta_m = \int_A^B w x dx \quad (3-15)$$

其證明見圖 3-32(d)。由此圖可得

$$d\Delta_m = x d\phi_m$$

但 $d\phi_m = dV = w dx$

故 $d\Delta_m = w x dx$

由是 $\Delta_m = \int_A^B w x dx$

(5) 於彎矩圖上任何二點, 作二切線, 其交點與該二點間荷重圖之重心 (或荷重合力作用線與梁軸之交點) ①, 在同一

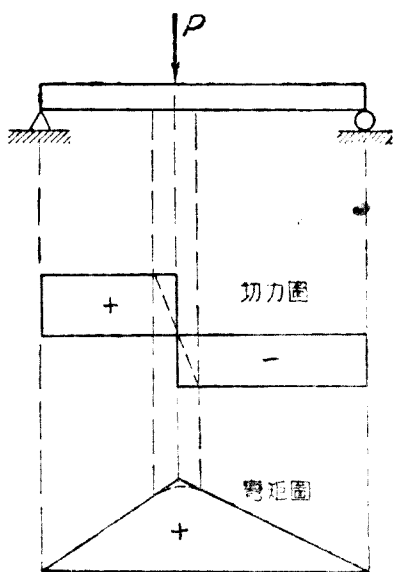


圖 3-33.

切力圖及彎矩圖之理想及實際情形

① 其理由見第 111 頁註①。

豎線上。

由圖 3-32 (d) 則此交點與 A 點之橫距 x_0 爲

$$(3-16) \quad x_0 = \frac{\Delta_m}{\phi_m} = \frac{\int_A^B wx dx}{\int_A^B w dx}$$

蓋由方程 (2-14) 及 (3-15), 則該二點間荷重圖重心與 A 點之橫距亦爲 x_0 ①。

上述五項關係, 見圖 3-32 (a), (b), (c) 及 (d), 其中 AB 爲某梁之任何一段。若各項之正負號, 採用圖 3-32 (e) 所示者, 則上述五項關係之正負號, 亦自然相符。

上述五項關係, 頗爲重要, 且可推廣而及於梁之角變位圖及線變位圖, 以後當總論之。

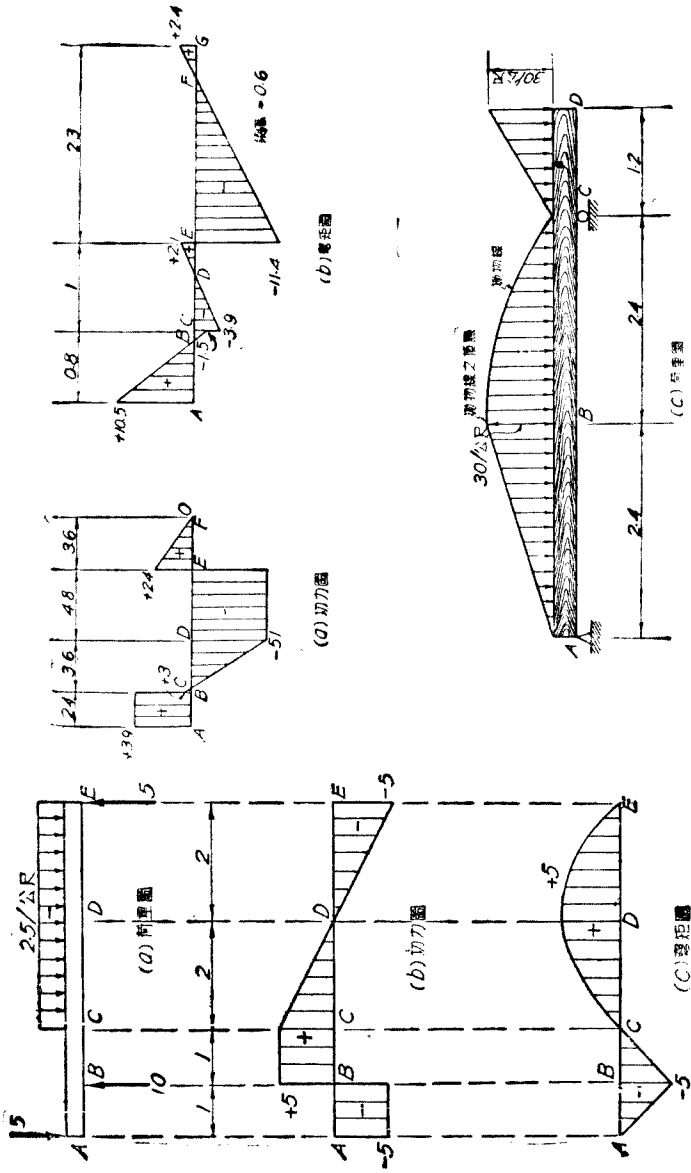
例題 3-4. 設僅此梁之切力圖爲已知, 試根據此圖, 求其荷重圖及彎矩圖。

解答

(a) **求荷重圖** A 點之切力爲 -5, 則該點必有一向下之集中荷重 5。B 點之切力由 -5 改變爲 +5, 則該點必有一向上之集中荷重 10。AB 間及 BC 間切力圖之傾度爲零, 故無任何荷重。CE 間切力圖之傾度係恆數, 其號爲負, 故 CE 間必有向下之均佈荷重, 其每公尺長度之數量等於切力圖之傾度, 即 $5 \div 2 = 2.5$ / 公尺。

(b) **求彎矩圖** AB 間切力係恆數, 且係負號, 故其間彎矩圖之傾度, 必爲負號之恆數, 即 \。 M_A 必爲零, 故 M_B 必等於 AB 間切力圖之面積, 即 $-5 \times 1 = -5$ 。同此, $M_C = -5 \times 1 + 5 \times 1 = 0$ 。CE 間之彎矩圖必係一拋物線, 而其最大高度, 必在 D 點。故 M_D 必等於 CD 間切力圖之面積, 即 $+5(2/2) = +5$ 。

① 另一用索形曲線之證明法, 列爲習題 3-23。



習題 3-22.

例題 3-4.

習題 3-22. 圖示荷重圖, 切力圖, 或彎矩圖三者之一。根據 3-12 節所述之關係, 各求其他二圖, 並逐步加以解釋。

3-13. 切力圖及彎矩圖之圖解法 任何力系對於其平面內某一點之靜矩, 可用圖解法求之, 已於 2-5 節說明。故結構任何點在任何荷重下之彎矩, 亦可用圖解法求之, 自無待論。惟此法常不如數解法之簡賅耳。

若結構所受之荷重係豎向, 或其荷重與反力平行, 則其切力圖及彎矩圖均可用圖解法求之, 且常較數解法為簡便而準確。

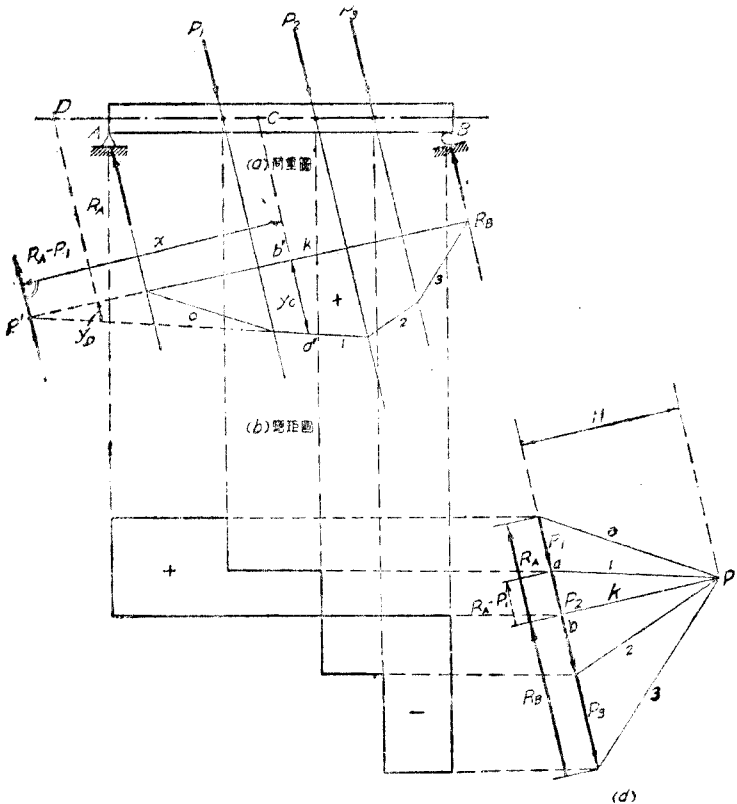


圖 3-84. 切力圖及彎矩圖之圖解法 (集中荷重)

圖 3-34(a) 示一梁,其荷重與反力均平行。作力多邊形如圖 (d), 及索線多邊形如圖 (b), 則此索線多邊形與荷重平行之高度,乘以極距 H , 即係此梁之彎矩圖。如任何點 C 之彎矩 M_C , 即等於 $H y_C$ 。將索線 k 及 l 引長, 交於 P' 點, 則 C 點左邊合力 $R_A - P_1$ 之作用線, 必經過 P' , 故

$$M_C = (R_A - P_1)x$$

由三角形 abP 及 $a'b'P'$ 之相似, 則

$$\frac{R_A - P_1}{H} = \frac{y_C}{x}$$

故 $M_C = (R_A - P_1)x = H y_C$

y_C 所表示者為距離, 其比例尺與梁之跨度同。 H 所表示者為力, 其比例尺與力多邊形同。 同此, $R_A - P_1$ 對於 D 點之彎矩 M_D 等於 $H y_D$ 。 其切力圖如圖 (C)。

於非平行之力系, 可將各力於其與梁軸之交點, 分解為二分力, 其作用線各與梁軸成垂直及相合。 然後取與梁軸成垂直之諸分力, 作索線多邊形, 即可得此梁之彎矩圖, 其詳細解法見例題 3-6。

於分佈荷重, 可依圖 2-13 之法, 將其分為若干極小之集中荷重, 如圖 3-35。 若祇求梁跨上任何一點之切力及彎矩, 其解法如圖 3-36。 設欲求 C 點之切力及彎矩。 經過 C 點作一豎線, 將荷重分為 DC 及 CE 二部, 並求其面積及重心 (即合力 R_{DC} 與 R_{CE} 及其作用點), 作力多邊形, 如圖 (b), 及索線多邊形如圖 (a), 即得 y_C 及 V_C 。

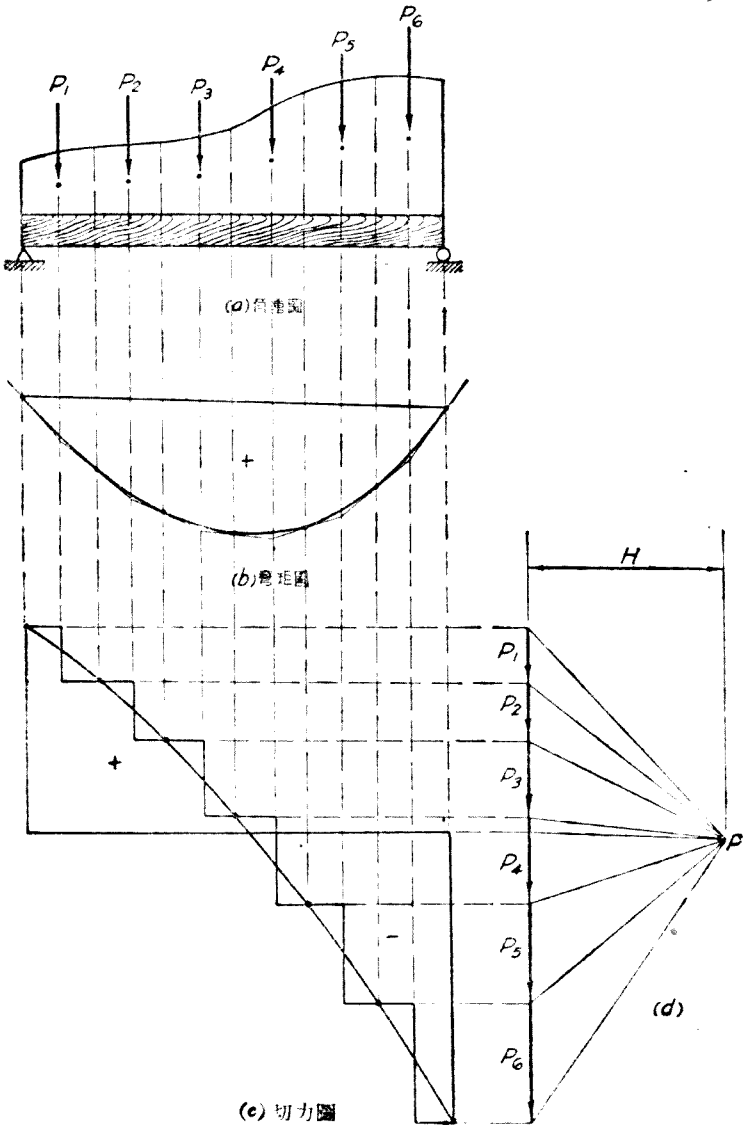


圖 3-35. 剪力圖及彎矩圖之圖解法(任何分佈荷重)

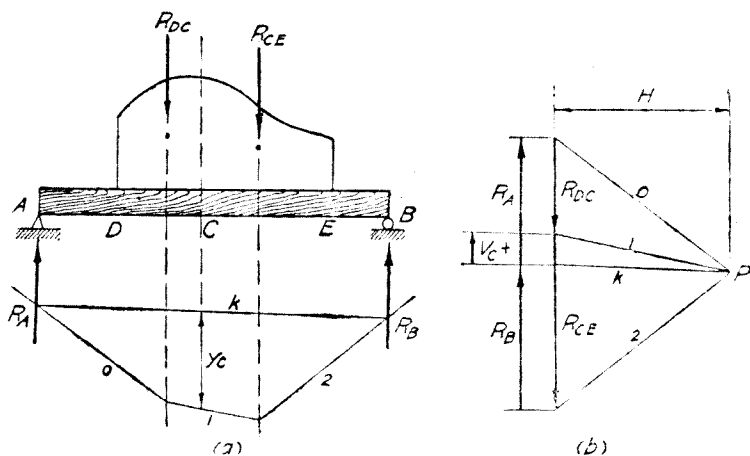


圖 3-36. 任何一點之切力及彎矩(任何分佈荷重)

於均佈荷重，則不必用圖 2-13 之法。蓋梁之任何一段，若祇受有均佈荷重，則該部之彎矩圖，必係一拋物線。圖 3-37 (a) 示一梁，其 DE 一段受有均佈荷重 w /公尺。先將其合力 wl ，視作一集中荷重，其作用點為 U 。如前法得彎矩圖 abc ，如圖 (b)；及切力圖 $a'e'f'b'$ 如圖 (c)。此即集中荷重之彎矩圖及切力圖。再自梁之 D 及 E 二點，作二豎線，與彎矩圖交於 d 及 e 二點；並與切力圖交於 d' 及 e' 二點。於 d 及 e 二點之間，彎矩圖必係一拋物線，故作拋物線 dfe 與 ad 及 eb 各於 d 及 e 點相切。其最簡易作法，如圖 (b)，將 dc 及 ce 各分爲若干等份，而以 1, 2, …… 等記其分點，如圖 (b)，作 1—1, 2—2, …… 等線，再作一圓婉之曲線，與該線等相切，即得拋物線 dfe 。故此梁之彎矩圖爲 $adfeb$ 。於 d' 及 e' 二

點之間，切力圖必係一直線，故此梁之切力圖為 $a'd'e'e'b'$ 。審察圖 (b) 及 (c)，可知彎矩圖可分為 $adeb$ 及拋物線 dfe 二部，

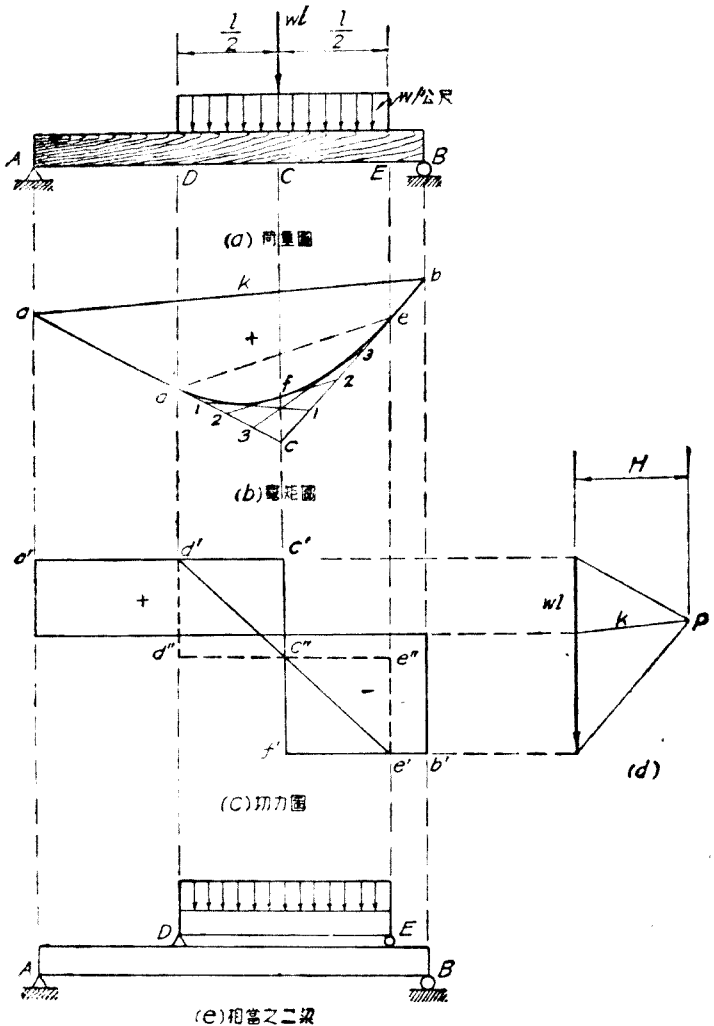


圖 8-37. 切力圖及彎矩圖之圖解法(均佈荷重)

切力圖可分爲 $a'd'd''c''e''e'b'$ 及二個三角形 $d'd''c''$ 與 $c''e''e'$ 二部。若將圖 (a) 之梁 AB , 代以相當之二梁 AB 及 DE , 如圖 (e), 則 $adeb$ 及 $a'd'd''c''e''e'b'$ 各爲梁 AB 之彎矩圖及切力圖, 而拋物線 dfe 及三角形 $d'd''c''$ 及 $c''e''e'$ 各爲梁 DE 之彎矩圖及切力圖。故圖 (a) 梁 AB 之彎矩圖及切力圖, 乃圖 (e) AB 及 DE 二梁者, 相加 (代數加法) 而成。

若所求者爲跨度上任何一點 C 之彎矩與切力, 先將均佈荷重視作集中荷重, 得彎矩圖如圖 3-38 (a) 之 abc 。於 DC 及 CE 之間作中線, 與 ac 及 bc 各相交於 d 及 e 點, 作 de

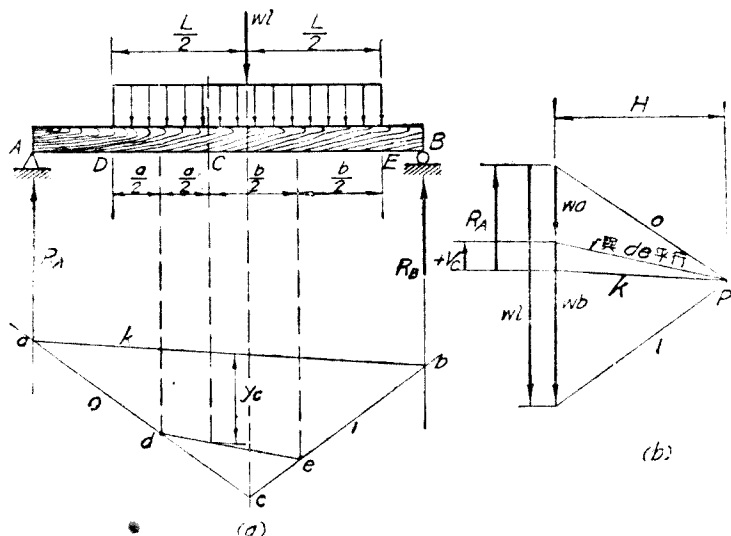


圖 3-38. 任何一點之切力及彎矩(均佈荷重)

線, 得 y_c , 而 $M_c = Hy_c$ 。其解法即將此均佈荷重, 分爲 wa 及 wb 二集中荷重, 而圖 (a) 之 $adeb$ 卽其索線多邊形。其理由

與圖 3—36 (a) 相同。於圖 (b) 之力多邊形，經過極點 P 作一線與 dc 平行，即得 C 點之切力 V_C 。

習題 3—23. 試用圖 2—13 索形曲線之原理，證明本節第 5 條所述彎矩圖與荷重圖關係之正確。

提示 將彎矩圖視作一細軟之懸繩，在荷重圖之作用下，其中任何二點之應力與其間荷重之合力之關係如何？

例題 3—5. 用圖解法求此梁之切力圖及彎矩圖。

解譯 先將圖 (a) 均佈荷重分為若干段，將每段視為集中荷重，得圖 (b)，如梁上原有集中荷重，最好即以之為均佈荷重分段之點，庶各段祇有均佈荷重而無集中荷重，否則必用疊加法，較為繁瑣。

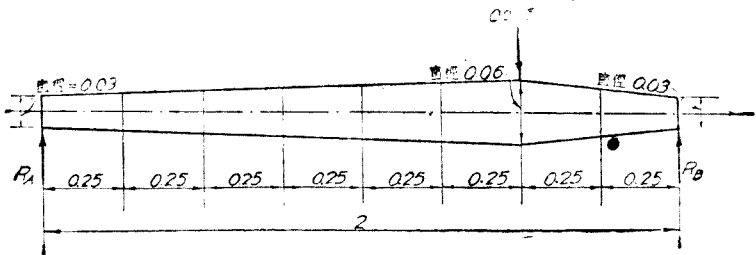
先得此改合集中荷重之彎矩圖，再依圖 3—37 (b) 之法，作三拋物線，即得所求之彎矩圖，其底線係 ac 及 cb 二拋物線及直線 bd 。彎矩在此線之上者為正號，在此線之下為負號。

於懸臂梁求切力圖時，需先將圖 (c) 力多邊形之諸力，依其在梁上自左至右之次序，即 $R_A, P_1, P_2, P_3, R_B, P_4$ ，之先後次序排列，始可得此改合集中荷重之切力圖，如圖 (d)。再作 $a'c'$ ， $c'b''$ ，及 $b'e'$ 三斜線，得 $a'c'e'b''b'e'$ ，即此梁之切力圖。

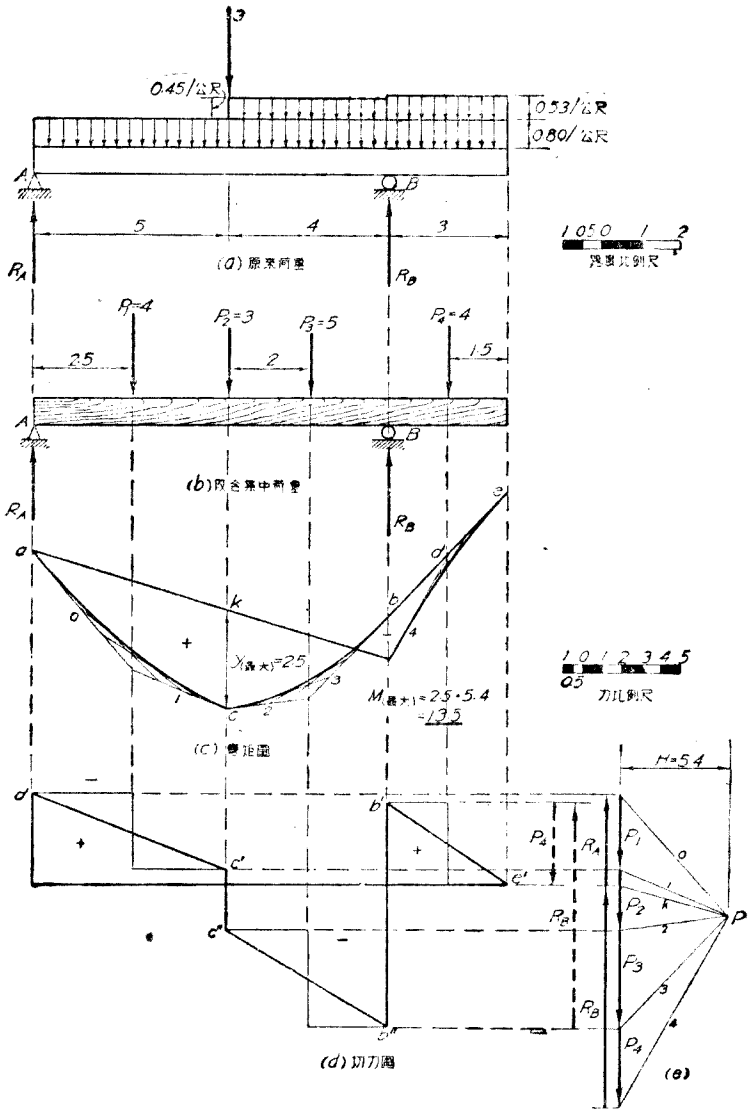
習題 3—24. 用圖解法，求下列諸結構切力圖及彎矩圖：習題 3—21 (c) 之地脚 AB 。及習題 3—22 (c) 之梁 $ABCD$ 。

習題 3—25. 用圖解法，求此鋼圓軸在其自身重量及所示荷重下之切力圖及彎矩圖，並求最大彎矩及其位置。鋼重 $=7.75$ / 立方公尺

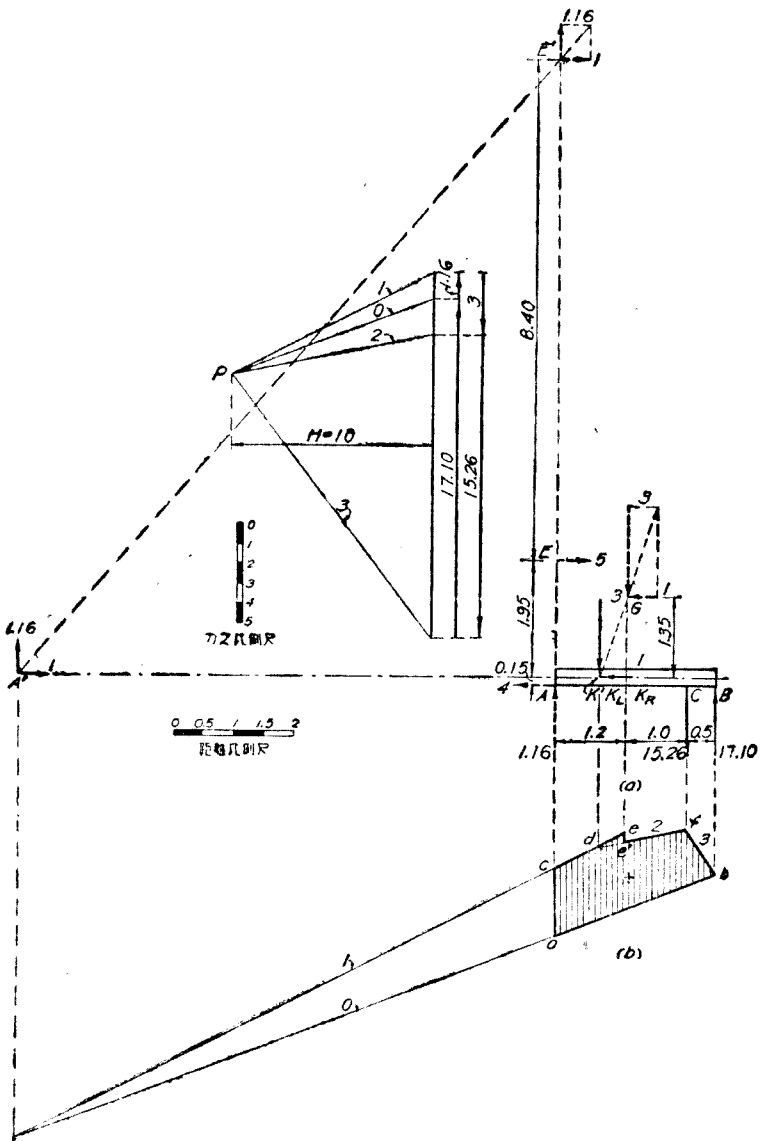
提示 將此圓軸分為八等段，如圖所示。將每段視作粗細一律之圓軸，其直徑即等於每段中線之直徑。



習題 3—25.



例題 3-5



例題 3-8.

例題 3-6. 用圖解法求例題 3-3 梁 AB 之彎矩圖。

解釋 所有解法見附圖。 A 點平力 4 及 B 點平力 5 之合力為平力 1，指向向右，其作用點為 E' 。 $EE' = 4 \times 2.1 = 8.4$ 。 此平力 1 與豎力 1.16 之合力，與梁軸相交於 A' 點。 同此， O 點平力 1 與豎力 3 之合力，與梁軸相交於 K' 點。 故梁 AB 之力系如附圖(a)之實線所示。 其二平力與彎矩毫無關係，取其四豎力作索線多邊形，如附圖 (b)。 但豎力 1.16 實係在 A 點，而豎力 3 實係在 K_L 或 K_R 點。 故經過 A 點作一豎線，與索線 1 及 O 各相交於 c 及 a 二點。 同此，於 K_L 或 K_R 作一豎線，與索線 1 及 3 各相交於 e 及 e' 二點。 故 $acdee'fb$ 圖之豎距，乘以極距 H ，即係梁 AB 之彎矩圖。 與例題 3-3 附圖 (c) 所指示者相似。 於此題圖解法當然不及數解法之簡便，但可證明圖 3-34 之法，並不限於平行力系。

習題 3-26. 用圖解法求習題 3-13 (b) 梁 ADC 及 BCD 之彎矩圖。

3-14. **橫梁對於切力圖及彎矩圖之影響** 若干結構之活荷重及其呆荷重之一部，並非直接加於其上，乃經過所謂橫梁者，而間接加於其上。 於橋梁固多半如是(見 1-2 節)，即他項結構，如房屋，亦多如此。 其方式略如圖 1-6。

結構若有橫梁，則荷重之加於縱梁者，必經過橫梁始能達於結構。 荷重既不能直接加於結構之上，則橫梁間之切力圖及彎矩圖必為一直線。

圖 3-39 (a) 示有橫梁結構之一部，受有二集中荷重 P_1 及 P_2 。 若此荷重直接加於主梁，則其切力圖及彎矩圖如圖 (b) 及 (c) 之虛線所示。 若荷重由橫梁而加於主梁，可將二橫梁間虛線切力圖之上下二平線引長，各與其左右二橫梁之中線分別相交於 m 及 n 點。 聯 mn ，與該二橫梁間荷重 P 之作用線

相交於 q 點，此係根據圖 2—8 (a) 所示平行分力之分解法。因此則有橫梁時主梁之切力圖必經過 q 點，其切力圖及彎矩圖如圖 (b) 及 (c) 之實線所示。圖 (c) 中上部之二個小三角形即各係該處縱梁之彎矩圖。由此二圖可知：

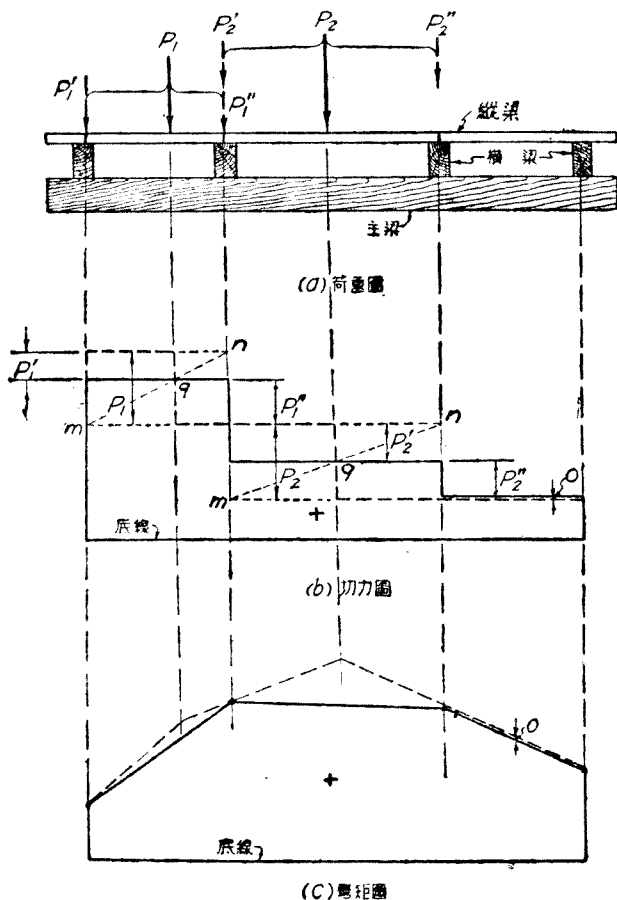


圖 3—89. 橫梁對於切力圖及彎矩圖之影響

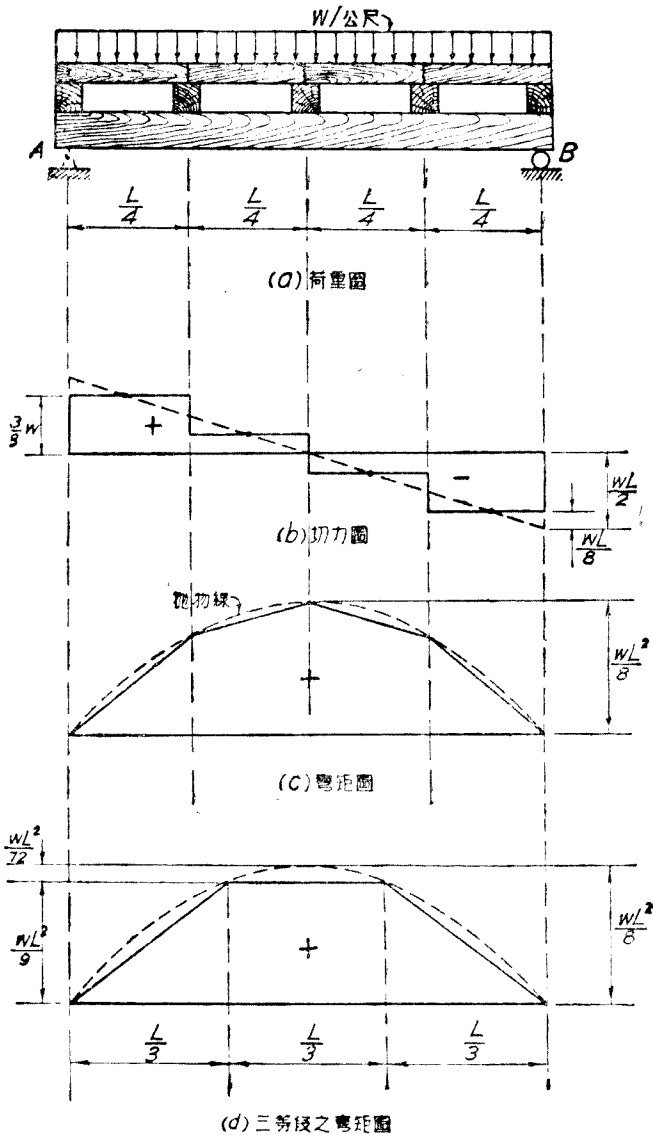


圖 3-40. 有橫梁之切力圖及彎矩圖 (均佈荷重)

1. 有橫梁之結構，無論其荷重如何，其切力圖及彎矩圖之折斷點，必在有橫梁之處。

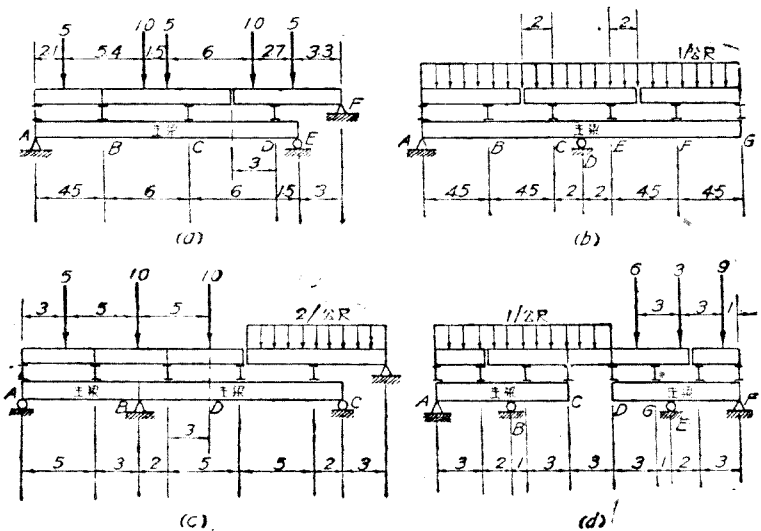
2. 橫梁處切力之改變，即等於該橫梁之反力〔如圖(a)及(b)之 P''_1 及 P''_2 〕。

3. 橫梁處之彎矩，與無橫梁者相同。

4. 橫梁間如無荷重，則該段之切力圖及彎矩圖與無橫梁者相同。

圖 3-40 示結構在均佈荷重下之切力圖及彎矩圖。其虛線示無橫梁者，實線示有橫梁者。於此例則有橫梁者之最大端切力較無橫梁者小 $wL/8$ ，即 25%。但最大中線彎矩，均為 $wL^2/8$ 。若少用一橫梁，而將跨度分為三等段，則有橫梁者之最大中線彎矩較無橫梁者小 $wL^2/72$ ，即 11%。故用橫梁而使其等段或奇數者，常較無橫梁或偶數等段為經濟。

習題 3-27. 用最簡捷之方法，求以下四結構中主梁之切力圖及彎矩圖。



習題 3-27

第四章 桁架應力之通則

4—1. 桁架之原素及接合 桁架乃架成結構中之最重要者。其組成係以若干直桿，在一平面之內，端端相接，其本身或與其支力之作用聯合，成爲一穩定之結構，俾能承受任何荷重而轉達於其支座。

依幾何之原理，三角形三邊之長度如係已定，則其形式不能改變。故桁架本身如能成爲一穩定之結構，則其中所包含之平面形，除他種外，必有若干三角形。故三角形乃桁架之基本形式。

圖 4—1 示桁架最普通之一例，全係三角形所組成。其接

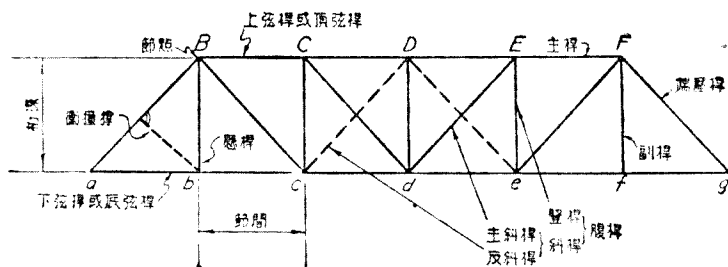


圖 4—1. 桁架之原素及名稱

合之點稱爲節，或節點。二相鄰節點間之一段稱爲節間 (panel)。其高度稱爲桁深 (depth of truss)。其上部 BF 稱爲上弦或頂弦 (upper 或 top chord); 其中之各桿 (member) 如 BC, CD, \dots 等，稱爲上弦桿或頂弦桿。其下部 ag 稱爲

下弦或底弦 (lower 或 bottom chord); 其中之各桿如 ab , bc , …… 等稱爲下弦桿或底弦桿。二弦間之各桿如 aB , Bb , Bc , …… 稱爲腹桿 (web member)。腹桿之豎立者, 如 Bo , Cc , …… 等稱爲豎桿 (vertical), 其傾斜者, 如 Bc , Cd , …… 等, 稱爲斜桿 (diagonal)。兩端之斜桿, 稱爲端壓桿 (end post)。如有二斜桿成交叉形, 其一稱爲主斜桿 (main diagonal), 如 Od ; 另一稱爲反斜桿 (counter), 如 cD 。凡荷重必須置於桁架上之特別一節點或數節點, 其中始有應力之桿, 稱爲副桿 (secondary member)。如 Bb 及 Ff 二桿, 荷重必須各置於 b 及 f 點, 其中始有應力, 否則其應力必爲零。 Bb 及 Ff 二桿, 亦稱爲懸桿 (hanger 或 suspender)。反是, 無論荷重置於桁架上之任何一節點, 其中均有應力之桿, 稱爲主桿 (main member)。圖中除上舉之 Bb 及 Ff 二副桿外, 其餘均係主桿。如該特別之節點無荷重時, 其副桿可以取去而不影響桁架之穩定, 但主桿則否。此乃區別主桿與副桿之又一方法。有時於橋梁之兩端節間中各添置一衝撞撐 (collision strut) 與端壓桿成垂直, 其功用專在支撐及維護端壓桿藉以減短端壓桿之長度, 並使其不致有因偶然衝撞而損壞之虞。

圖 4-1 中以英文大寫字母爲上弦之諸節點之記號, 以其小寫字母爲下弦之諸節點之記號, 乃一極便利之法。蓋視記某桿之字母如何, 即可知其爲上弦桿 (記號爲二個大字母), 或下弦桿 (記號爲二個小字母), 或豎桿 (記號爲相同之大小字母), 或斜桿 (記號爲不同之大小字母) 等。惟於橋梁桁架, 其上下弦諸節點常各以 U (Upper 之首字母) 及 L (Lower 之首字母) 二大字母,

並於右下角加數字如 U_1, L_2, \dots 等以記之。此外尚有所謂鮑 (Pow) 氏記號，通常祇於以後所述之節點圖解法用之。

鋼鐵桁架各桿之接合，於理論應不用鉚接（或銲接）而用樞接，庶各桿可自由旋轉無阻。但實際上，除美國之鐵路橋梁桁架，於過去數十年中，曾以樞接為標準外，樞接桁架在歐洲之採用終極少。樞接與鉚接。二者比較之，則樞接桁架之優點在 (1) 材料較省，(2) 各桿之彎應力較小，(3) 建立及修換較速；而鉚接桁架之優點，在 (1) 剛度較大，(2) 節點無磨耗。但數十年來之經驗，表示二者之價值，大約相等。於短跨桁架，因鉚接者剛度較大，而材料並不多費，故絕對較樞接桁架為優良。但於長跨桁架，樞接者之剛度常夠充足，並有時材料或稍省。至謂樞接之節點，可以自由旋轉，已實際不確，此於年久有銹之桁架尤然。因此即在美國，近年來工程師關於此點之意見，顯有改變。故美國鐵路工程協會之鋼橋規範即規定跨度在 46 至 90 公尺之間，以鉚接桁架為宜。我國鐵道部於 1937 年修正鋼橋規範時，即有人建議將樞接橋梁之規範完全略去。但鐵道部之意見，以為：「……短跨度時，鉚接橋梁確較樞接橋梁為優良，故後者之應用已日見稀少。惟在長跨度時，樞接橋梁之優點較為顯著，故未見完全淘汰耳。……」^① 故仍規定跨長在 100 公尺以上者，以樞接桁架為宜，但「工程師如認為無需要時，儘可不採用。」^②

以上僅就橋梁桁架而論。於他種結構之桁架，則用樞接者

①② 見鐵道部技監室所編印之修正鋼橋規範書設計及材料兩部份草案摘要及意見彙錄，1937 年出版，50 頁。

絕少，故以往概用鉚接。惟近年來電銲日漸發達，房屋及他種結構用之頗多，歐洲較美國尤甚。於橋梁桁架，除加固多用電銲外，完全用銲接者，尚不多觀。但將來必有完全代替鉚接之一日。

4—2. 桁架之發展 首次用若干三角形製成桁架者，乃十六世紀中葉之一意大利建築師名芭(Andrea Palladio, 1518—1580 氏者。芭氏雖不明桁架之原理，但彼所造之四種桁架，如圖 4—2 所示，與現代所用者，實際相同，頗堪注意。所奇者，芭氏如此之重要發明，此後二百餘年中，竟曾無另一人能注意及之。迄至十八世紀中葉(1758年)一瑞士木工名穀(Ulric Grubenmann) 氏者，始造一跨長約 52 公尺之木料桁架橋梁於萊因(Rhine) 河上，後彼又

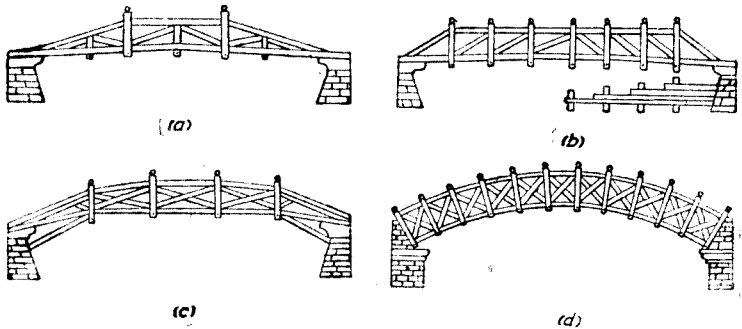


圖 4—2. 芭氏之桁架

造一跨長約 120 公尺之木料桁架橋梁，當被視為空前絕後之長跨木料桁架。此二橋皆各得其用，迄至 1799 年始被拿破崙一世所毀。

自十八世紀中葉至十九世紀中葉一百年間，歐洲及美國所造之桁架甚多，但均係桁架與拱聯合採用，不但形式極其複雜，遠不如芭氏桁架之簡單合理，且在豎向荷重下，兩端之反力尚有平分力。蓋皆非純粹之桁架也。至 1820 年美國之唐(Ithiel Town) 氏發明格式 (lattice) 桁架，如圖 4—3 (a)，完全以木料釘成，在豎向荷重下，祇有豎向反力，實係芭氏桁架而後之第一純粹之桁架也。惟其中之雙重斜桿，能承受壓力及拉力，其應力之分佈，又不如芭氏

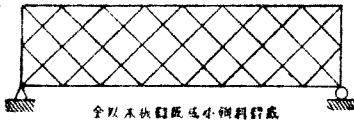
桁架之簡單。故唐氏桁架，雖係一純粹桁架，但非一簡單桁架。至 1840 年，美國之浩 (William Howe) 氏發明一桁架，如圖 4—3 (b)，其中之雙重斜桿祇能承受壓力，實係芭氏桁架而後第一純粹而又簡單之桁架也。^① 1844 年，白氏二人 (Thomas W. 及 Caleb Pratt)，發明一桁架，如圖 4—3 (c)，其中之雙重斜桿祇能承受拉力，故此桁架與浩氏者相似而實相反。該二氏之桁架，均係聯合採用木料與熟鐵為材料。

就材料而論，鐵橋較石橋及木橋均晚。最早之鐵橋，乃 1776 年所製英國塞汶 (Severn) 河上之生鐵拱橋，但最早之全鐵桁架，乃美國博 (Wendell Bollman) 氏於 1840 年所發明，稱為博氏桁架，如圖 4—3 (d)，其中拉桿係熟鐵，壓桿係生鐵。此桁架於 1840—1850 年間，美國之鐵路橋梁用之甚多。1851 年，美國芬 (Albert Fink) 氏發明一桁架；如圖 4—3 (e)，其原理與博氏桁架同，但其中之長斜桿，變為較短，乃一改良之點。博芬二氏之桁架，在靜荷重 (static load) 下，其下弦桿均無應力，故有時可以擷去，如此，則此二桁架實係所謂桁梁 (trussed beam) 之變相。

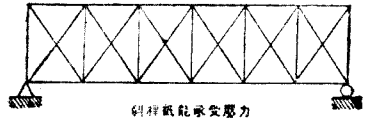
1851 年，英國之倭 (Warren) 氏發明一桁架，如圖 4—3 (f)，其相隣二節間中之斜桿，傾向相反。1852 年，美國之費 (Squire Whipple) 氏發明一桁架，如圖 4—3 (g)，其斜桿跨過二節間。此二氏之桁架，實乃現代鋼鐵桁架之始。現代所用之白氏桁架，乃係單斜桿制者如圖 4—3 (h)。此外，1865 年，美國浦 (Simeon S. Post) 氏發明一桁架，其腹桿無豎立者，如圖 4—3 (i)。於 1865—1880 年間，美國之鐵路及道路橋梁用之頗多。1887 年，美國之裴 (George H. Pegram) 氏發明裴氏桁架，如圖 4—3 (j)，其腹桿亦無豎立者，上弦諸節在一圓弧上，其半徑則使諸腹壓桿之長，大約相同，上弦諸桿之長度亦相同，其兩端斜桿之傾度為 45° ，此二桁架既極複雜，並無任何優點，早已無用之者。

① 在浩氏之前，尚有美國人郎 (Long) 氏於 1830 年，發明一簡單桁架，略如浩氏桁架，但在豎向荷重下，其兩端之反力，仍有平分力，故非一純粹之桁架。

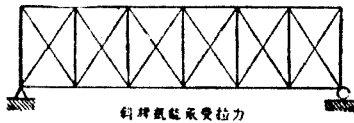
現下房屋及橋梁之桁架，於木料常用浩氏式，於鋼鐵常用倭氏及白氏二氏。若橋梁之跨度太長（約長於 60 公尺），則倭白二式尚須稍加以改變，此



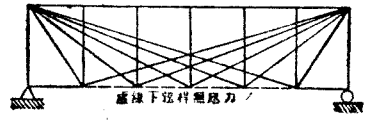
(a) 浩氏 (Town) 格式桁架 (1820 至現在)



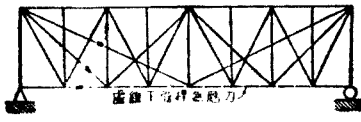
(b) 浩氏 (Howe) 桁架 (1840 至現在)



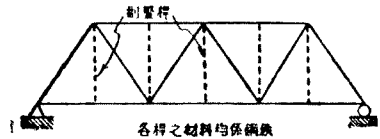
(c) 白氏 (Pratt) 桁架 (1844 至現在)



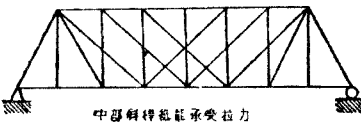
(d) 博氏 (Bollman) 桁架 (1840-1850)



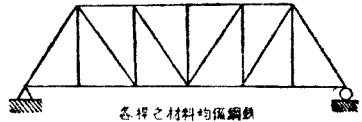
(e) 芬氏 (Fink) 桁架 (1851 - 1876)



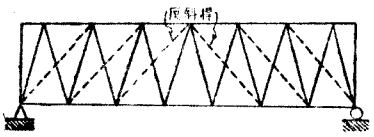
(f) 倭氏 (Warren) 桁架 (1850 至現在)



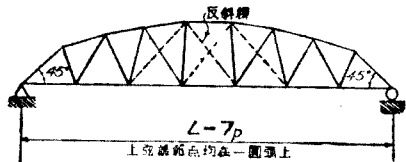
(g) 蓋氏 (Whipple) 桁架 (1852-1890)



(h) 白氏 (White) 桁架 (現代式)



(i) 浦氏 (Post) 桁架 (1865-1880)



(j) 裴氏 (Pegasus) 桁架 (1887)

圖 4-3. 桁架發展之主要型式

當於第八章中論之。工廠房屋中之輕小桁架，刻下仍有採用唐氏桁架者，多係以木料釘成，或以小鋼料鑄成，以其經濟而又剛勁也。此外圖 4-3 所示之其他桁架，均嫌陳舊，現在無用之者。

4-3. 桁架分析之略史 結構工程之技藝，雖肇端西曆紀元前數千年，但結構分析乃一比較晚近之科學。德國教授羅 (H. Lorenz) ①氏之言曰：「於上古及中古時期，凡有文化之民族，對於建築，雖曾有顯著之建樹，但於當時之文獻中，關於結構之強度及材料之性質，絕無絲毫足徵之記錄。藝匠之輩，皆以墨守成規為滿足，且代代相傳，視為祕訣，其能然而生巧，推陳出新者甚渺。」此種情形，迄至十七世紀之初葉，未有改變，而結構學之發展成為廣博一貫之科學，實始於十九世紀之中葉。

桁架之發明，雖早在十六世紀之中葉，而自十八世紀中葉以後一百年中，桁架之採用亦甚多，但其設計與建造，大都出於工匠之手，既不知材料之強度，更不明其中之應力如何，蓋一切設計，全憑經驗與判斷耳。

桁架之分析，可謂始於一位蘭工程師名史 (Simon Stevinus, 1548—1620) 氏者。彼假明力之合成及分解之原理，並粗知力三角形之應用。對於與桁架節點類似之懸繩問題，曾加以研究，並於 1608 年發表其結果。此後范 (P. Varignon) 氏亦曾研究此懸繩之問題，並發表力之四邊平行形之定律及指明力多邊形與索線多邊形之若干應用。十九世紀之初葉，若干法國之大工程師應用范氏之原理於各種結構學之問題，但並無顯著之進步。迄至 1847 年，英國之費 即前述費氏桁架之發明者) 氏發表其橋梁建築 (A Work on Bridge Building) 一書，始將桁架分析及設計之正確理論，充分說明，故費氏實乃以正確而又充分之方法分析桁架應力之第一人。現下所用之節點法 (method of joints)，雖非費氏之原法，但實原於費氏，其創始之功不可沒也。

所最奇者，於 1776 年，法國物理家谷 (Coulomb, 1736—1806) 氏即已有梁之正確理論。於 1826 年，法國數學家那 (C. L. M. Navier, 1785—1836) 氏不但完成梁之理論，並發表拱及連續梁之分析。而比較簡易之桁架分析，何晚至 1847 年，始行明瞭，但事實確係如此。大概因初期之桁架，其

① 見所著工程彈性學 (Technische Elastizitätslehre), 641—645 頁。

腹桿之佈置，多極其複雜，即現下亦不易分析其應力，故前此之工程師對於其中應力之分析，遂不得不漠然置之。費氏而後，關於桁架分析之重要發現，遂紛至沓來，其最著者如 1863 年，德國教授立 (August Ritter) 氏發表其隔離法 (method of sections) ①，指明用彎矩及切力之原理，求桁架應力之法，此法即現下仍用之。故歐洲常以立氏為以正確方法分析桁架應力之第一人。

1864 年，英國物理家麥 (James Clerk Maxwell, 1830—1879) 氏發表所謂麥氏應力圖 (Maxwell's stress diagram)，即節點之圖解法。1866 年，瑞士教授庫 (Culmann) 氏發表其圖解力學 (Die Graphische Statik) 之巨著。

1867 年，德國教授溫 (Winkler) 氏發明一感應線之法，至是普通桁架之分析法，始粲然大備。

4—4. 桁架之理想情形 讀者習靜力學時，已知所計算桁架各桿之應力，祇有向軸 (axial) 應力 [亦稱直接 (direct) 應力]，即純粹之拉應力或壓應力，此外並無彎應力或切應力，此蓋本乎桁架之理想情形也。桁架之理想情形如下：

(1) 桁架所有之節點皆係鉸節，故各桿間之角度，可以自由改變。因此桁架因荷重或他種作用而有變形，其各部皆仍舊平直而無彎曲 [圖 4—4(a)]。

(2) 所有會聚於一節點之各桿，其重心軸 (centroidal axes，即通過一桿各截面重心之軸)，皆在一平面之內 (稱爲桁架之中心平面)，並交會於一點 (圖 4—5)，而此點且與鉸節之中心點相合。

(3) 所有荷重 (包括各桿自身之重) 均在桁架中心平面之

① 本書所述之彎矩法 (method of moments) 及切力法 (method of shears)，均屬於此法。

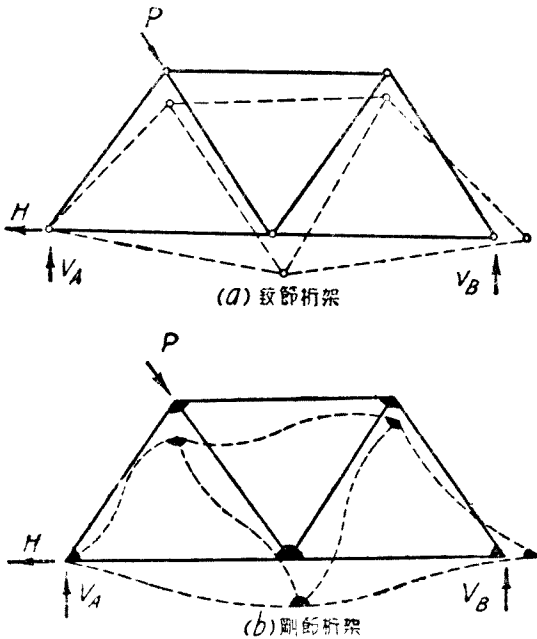


圖 4—4. 鉸節與剛節桁架變形之比較

內，且均集中於桁架之節點。

(4) 所有各桿之重心軸，係絕對平直。

上述四項理想情形，實際皆不能完全實現，試略論之。

(1) 剛節（即鉚接與銲接）之桁架，其各桿間之角度不能自由改變，固無待論；即鉸節桁架，多少亦有若干摩阻力（friction resistance），使其各桿間之角度，不能完全自由改變，此於年代較久鉸節銹蝕之桁架為尤然。況桁架之上弦桿，於節點處常係連續不斷（圖 4—5），則其間之角度更不能稍有改變。至現下橋梁及房屋之桁架，多用剛節，鉸節桁架似已成過去。若

各桿間之角度，不能自由改變，而各桿因應力又有伸縮之變形，則各桿勢必彎曲而成 S 形，如圖 4—4 (b)。

(2) 因設計時各桿截面所採用之形式及佈置之不同，會聚

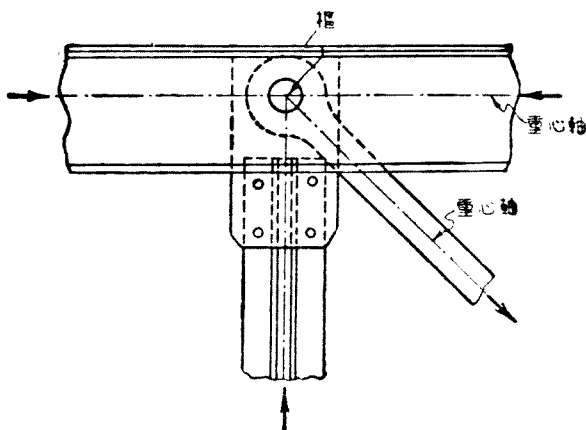


圖 4—5. 桁架之鉸節

於一節點各桿之重心中軸，常不易會交於一點：即使其能交會於一點，而此點亦有時不能與鉸節或剛節之中心點相合。因此，各桿常因偏心 (eccentric) 作用，而有彎曲。

(3) 於不重要之屋頂架，上弦之節點間，常支有標 (purlin) [圖 4—6 (a)]，故荷重並不常集中於節點。於橋梁則荷重雖常經橫梁而達於桁架之節點，但上承 (deck) 式 (亦稱把式) 之桁架橋梁，有時將縱梁及橫梁完全省去，而枕木即直接置於桁架上弦桿之上 [圖 4—6 (b)]，如是則荷重亦非集中於節點。不過此種佈置，僅跨度不甚長 (約在 40 公尺以下) 之橋梁用之。於橋梁及重要屋頂桁架，活荷重及呆荷重之一部，雖可使其集中

於各節點，但各桿自身之重量決不能如此。故各桿必有梁之彎曲作用，不過此項彎應力與各桿因活荷重所生之直接應力比，常甚微小，蓋各桿自身之重量與活荷重比較，亦常甚微小也。

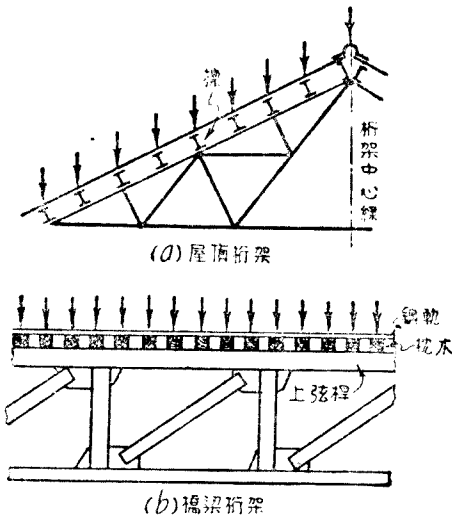


圖 4-6. 荷重不在桁架節點之例

(4) 世上決無絕對平直之物，若製造時各桿稍不平直，則其直接應力必使其有彎曲作用，不過亦甚微小。

故桁架若具有上述四項理想情形，即使因荷重之作用而有變形，但各桿仍必依舊平直，毫無彎曲，因此各桿祇有直接應力。若上述四項理想情形，有任何一項不能完全實現，則桁架因荷重而變形，其各桿必有彎曲〔圖 4—4 (b)〕。如是，則各桿除有直接應力之外，必尚有彎應力。為易於區別起見，其依理想情形所計算之直接應力，常稱為初應力(primary stress)，其因任何

理想情形不能實現而發生之彎應力，常稱爲次應力 (secondary stress)。但初次兩字，祇表示必須先計算直接應力，而後始能計算其彎應力，並非於其重要性有所軒輊也。

進一步言，即使上述之理想情形完全實現，而依靜力學所計算桁架各桿之應力，於理想上亦非絕對準確。蓋桁架各桿之應力，與各桿間之角度有密切關係。各桿有應力必有變形，則其間之角度亦必稍有改變，如是依原有角度所計算之應力，在桁架變形後即不準確矣。不過各桿因應力而發生之變形常甚微〔就鋼鐵桁架而論，設其各桿之最大應力約爲 12.7 公斤/平方公厘，彈性係數爲 21,000 公斤/平方公厘，則其應變 (strain) 約爲 $12.7 \div 21000 = 0.0006$ ，即每一公尺最多改變 0.6 公厘〕，其影響於應力之準確更不足道矣。但爲使依靜力學所計算之應力絕對正確起見，常假定結構之各桿均爲剛體，即在任何應力之下不能有變形發生，此又一種理想情形也。

雖然，桁架之理想情形，實際上不能完全實現，既如上所論。則依靜力學所計算各桿之直接應力，與實際情形果相差幾何？根據實地測驗之結果^①，已證明即在剛節之桁架，根據鉸節情形所算得之直接應力，與實際情形相差殊微。不惟此也，即桁架各節點因荷重所發生之變位，亦完全由於其各桿因初應力之變形（伸長或縮短），其次應力於此幾無何影響。此專就最重要之第一理想情形而論，其他三項理想情形，或可設法使其實現，或其

① 見 Parcel 與 Murey 所著之靜不定應力 (Statically Indeterminate Stresses) 第二版，1936 年，268—269 頁。

影響甚微，實際上均可假定完全存在也。

次應力之大小，當然與桁架之形式及荷重之大小有關，不可一概而論。但根據實驗之結果，則各桿之次應力^①常不超過該部初應力百分之三十。因次應力之計算，頗為繁難，故設計桁架時常假設其為初應力百分之三十或四十，多數部份之次應力，常不及此。故此種方法，頗不經濟，但頗省事，且亦相當安全。

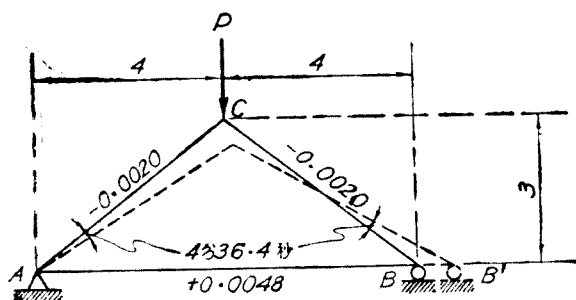
桁架之設計及建造時，亦可設法使其各桿在荷重下之次應力，成為極小或全無。前數年印度某鐵路 Nerbudda 河上之橋梁，即係如此設計。^② 蓋既無次應力，則各部之工作應力 (working stress) 可以相當提高。如此則各桿之截面小，材料省，固甚經濟也。

習題 4-1. 圖示一絞節三角桁架在荷重 P 之作用下， AB 桿之拉長為 0.0048，而 AC 及 BC 二桿之壓短為 0.0020。因此其 A 及 B 二角之減小為 4 分 36.4 秒。在此桁架變形如圖虛線所示之後，其各桿之應力若何？若與桁架未變形時之應力比較，其增減之百分數各幾何？計算應力時至少應算至五位有效數字。

4-5. 桁架本身之靜定與穩定 三角形既為一穩定形，故若以三桿接合成一三角形為起首，以後依任何方式，每次增加二桿與一節點，即可得一本身靜定與穩定之桁架。如圖 4-7 所示之四桁架，皆以 1-2-3 三角形(圖中之有斜線者)為起首，

① 次應力即各桿最外纖維(extreme fiber)因彎曲所生之應力，自無待論。

② 見 H. J. Nichols 所著預加橋梁之應力 (Pre-stressing Bridge Girders), 刊於英國倫敦土木工程師學會會刊 1937 年 2 月號 91 頁。



習題 4-1.

以後依數字之次序，每增加二桿與一節點，故皆係本身靜定並穩定之桁架。依此法所組成之桁架，稱為簡單桁架 (simple truss)。由圖 4—7 可知：本身穩定之桁架，並不須全係三角形所組成。

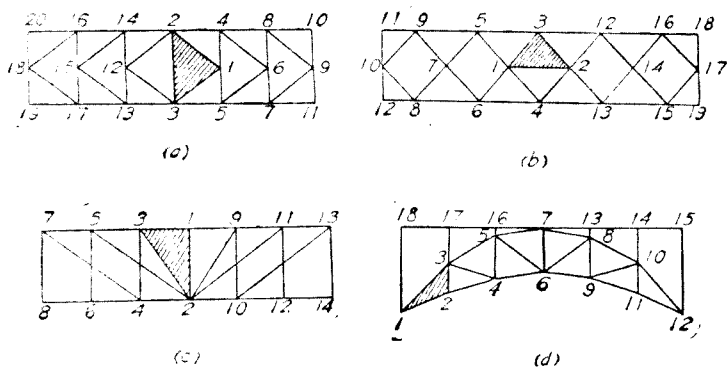


圖 4-7. 簡單桁架之例

由上述本身靜定與穩定桁架之組成法，可知其桿數與節點數有一定之關係，蓋若將起首三角形之三桿及三節點除去，則剩餘之桿數，必倍於所剩餘之節點數。設 $b =$ 桁架所有之桿

數， j = 其所有之節點數，則

$$l - 3 = 2(j - 3)$$

$$\text{或} \quad b = 2j - 3 \quad (4-1)$$

故桁架本身如係靜定並穩定，則其桿數與節點數之關係，必與方程 (4-1) 相符。若 $b > 2j - 3$ 則桁架本身必係靜不定，即所謂內力靜不定之結構。其多於 $2j - 3$ 之桿，稱為贅餘桿 (redundant bar)。若 $b < 2j - 3$ ，則桁架本身必不穩定。

於 3-3 節中，曾指明結構穩定與其反力之關係，不僅在其獨立分反力之總數，必視其作用線如何而定。於方程 (4-1) 之應用亦然，圖 4-8 (a) 示一桁架，係依上述之法組成，其中

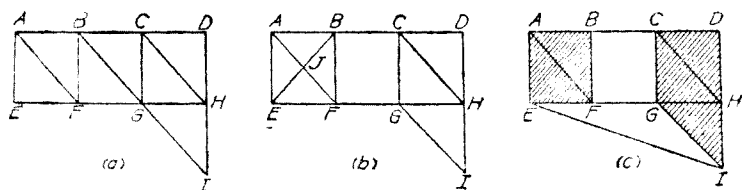


圖 4-8. 桁架穩定與其中諸桿佈置之關係(一)

$b = 15$, $j = 9$, 故 $15 = 2 \times 9 - 3$, 與方程 (4-1) 正相符合。若將桿 BG 移去，而添一桿 AF ，如圖 4-8 (b)，其 b 與 j 之關係，雖仍與方程 (4-1) 相符，但此桁架本身即變為不穩定。因節間 BC 不能抵抗任何切力，而同時節間 AB 變為靜不定，因其中有二斜桿 AF 及 BE 可以抵抗切力，至每桿抵抗若干切力，非靜力學所能定也。又此二桿之交點 J 是否係第一節點，與方程 (4-1) 之應用，及此二桿中之應力，均絕無關係。

蓋 J 點如係節點，則 AF 及 BE 二桿變為四桿，比較 J 點非一節點時增加二桿及一節點，正與方程 (4-1) 之原理相合。至此二桿中之應力，無論 J 點是否係一節點，均不應有任何改變，此蓋根據 J 點靜平衡之定律也。

若將桿 BG 移去而添一桿 EI ，如圖 4-8 (c)，其 b 與 j 之關係，仍與方程 (4-1) 相符，但此桁架仍係穩定。蓋若將此桁架視作二簡單桁架 $ABEF$ 及 $CDHIG$ ，藉 BC 、 FG ，及 EI 三桿聯合而成；而此三桿既非平行又非交會於一點，故此二簡單桁架無任何相對移動，即仍係一本身穩定之桁架。此項以若干簡單桁架藉數聯合桿聯合而成之桁架，稱為聯合桁架 (compound truss)。圖 4-9 (a) 所示之桁架，亦係一聯合桁架，因

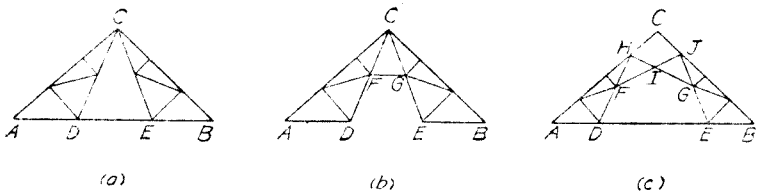


圖 4-9. 聯合桁架與簡單桁架之區別

係由二簡單桁架 ACD 及 BCE 藉鉸點 C 及 DE 桿聯合而成，而一鉸固相當二不平行之桿（見圖 3-8）。若將 DE 桿改為 FG 桿，如圖 (b)，即成一簡單桁架。圖 (c) 亦係一聯合桁架，因其係由二簡單桁架 ADH 及 BEJ 藉 DE 、 FJ 及 GH 三桿聯合而成，後二桿之交點 I 亦相當於一鉸。至 CH 及 CJ 二桿，則係最後增加者。

圖 4—10 (a) 示一極簡單之桁架。若將 AE 桿改爲 AD 桿， CE 桿改爲 CF 桿，而 J 點並非一節點，如圖 (b)，則此桁架桿數與節點數之關係，雖仍與方程 (4—1) 相符，但成爲危形。蓋 ABC 三鉸節及 DEF 三鉸節均在一直線，而 BE 桿並不能控制其兩端之移動。設此桁架之支承及荷重如圖 (b) 所示，則 B 及 E 二節點必有向下之移動，故此桁架與圖 3—4 之結構相同，其中各桿應力之分佈，與其變形有密切關係，非祇用靜力學可以計算，故係靜不定結構。故危形桁架係一既不穩定又不靜定之結構。圖 4—10 (c) 及 (d) 之二桁架，亦係危狀，因

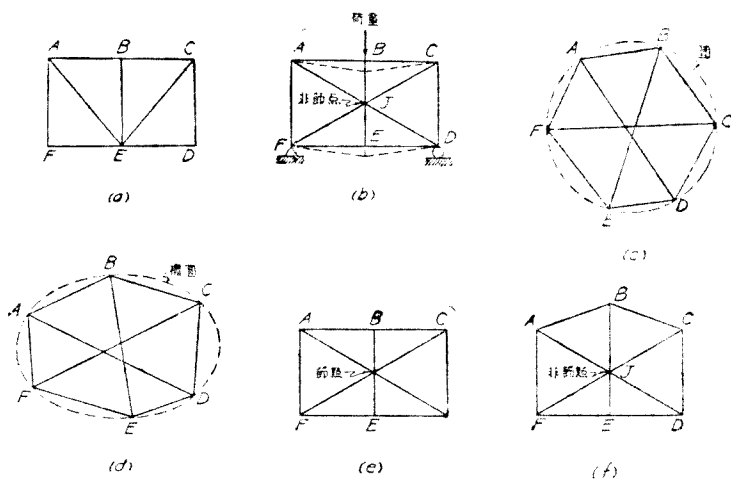


圖 4—10. 桁架穩定與其中諸桿佈置之關係(二)

其六節點均全在一圓錐截面形上，其證明需根據以後 4—16 節

所述彌 (Müller-Breslau, 1851—1925) 氏之結構機動理論^① (kinematic theory of structure), 及數學中之帕 (Pascal) 氏理論,^② 茲不贅述。

若圖 4—10 (b) 桁架之 J 點係一節點, 如圖 (e), 即成一穩定之桁架, 但非靜定。因其中 $b=12$, $j=7$, 而 $12 > 2 \times 7 - 3$, 故二桿之交點, 是否一節點, 雖絕無關係; 但三桿之交點, 是否一節點, 可使其桁架之性質完全不同。

若圖 4—10 (b) 桁架之 B 點與 A 及 C 二點不在同一直線上, 而 J 點仍非一節點, 如圖 (f), 即成一既穩定而又靜定之桁架。蓋 B 點既不能稍有移動, 則 E 點亦不能稍有移動, 故 BE 桿可控制其 E 端之移動。

圖 4—10 中之 (b) (c) (d) 及 (f) 四桁架, 其組成之方法, 與簡單桁架及聯合桁架均不同, 故稱爲複雜桁架 (complex truss)。

用上述三種桁架之組成方法, 常可知某桁架本身是否靜定或穩定。除危狀桁架多屬於複雜桁架, 其靜定或穩定與否, 必用求應力之方法 (或結構之機

① 見彌氏所著之結構之圖學力學 (Die Graphische Statik der Baukonstruktionen) 一書, 其中述此理論最詳, 全書計三巨冊, 於 1920 至 1927 年先後出版, 乃結構學中之唯一巨著。此外讀者可參閱丁 (Timoshenko) 氏及楊 (Young) 氏所著之工程力學——靜力學 (Engineering Mechanics—Statics) 1937 年出版, 311 至 313 頁; 或藍 (Lamb) 氏所著之靜力學 (Statics) 1928 年三版, 127 至 130 頁。

② 帕氏之理論: 「若任何六邊形之頂點均在一圓錐截面形上, 則三對相對邊引長之交點在一直線上。」

動理論詳 4—16 節) 外, 於簡單桁架, 可依其組成法, 視其有無不合每增加二桿即增加一節點之處, 如有增加一桿而不增加節點之處, 則此桁架本身必係靜不定, 而此項增加桿之數, 即係其靜不定次數, 否則該桁架本身不但係靜定, 抑且必是穩定。蓋未有簡單桁架而本身不穩定者。於聯合桁架, 可先定其本身靜定而又穩定之部份, 再觀察各部份之聯合桿是否係不平行又不交會於一點之三桿 (注意一鉸等於不平行之二聯合桿), 若其聯合桿之數少於三, 或其數雖等於三, 但係平行或交會於一點, 則該桁架本身必係不穩定。若其聯合桿之數多於三, 無論其是否平行或交會於一點, 則該桁架本身必係靜不定。若其聯合桿之數多於三, 而又全係平行或交會於一點, 則該桁架本身又必同時係不穩定。

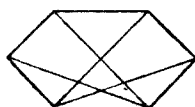
有時桁架之某節間中有二交叉斜桿, 似係靜不定。但此二斜桿因其本身性質或其接合方法之不同, 祇能承受一種應力 (拉力或壓力)。如圖 4—11 (a) 係鋼鐵桁架之某一節間, 其中二交叉斜桿, 係細長之眼桿, 故祇能承受拉力不能承受壓力。如此節間受有正號之切力, 則其變形如圖 (c), 其中 AC 桿有拉應力, BD 桿無應力。若切力為負號, 則 BD 桿有拉應力, AC 桿無應力。故此二桿, 一係主斜桿, 一係反斜桿, 二桿決不能同時皆有應力。因此該節間之靜不定, 實係虛偽, 而應用方程 (4—1) 時, 二桿祇能算作一桿。圖 (b) 示木料桁架之某一節間, 其中亦有二交叉之斜桿。木料本身本可承受壓力及拉力, 但木料拉力斜桿兩端之接合, 極不易有優良之設計, 因此設計時, 常視作壓桿。故圖 (b) 與圖 (a) 之原理相似而相反。

由上述之討論, 可知桁架本身如係靜定並穩定, 則其桿數與節點數之關係必與方程 (4—1) 相符。但桁架桿數與節點數

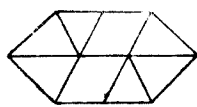
習題 4-3. 下列諸桁架,若祇根據方程 (4-1), 何者其本身係穩定或不穩定? 何者其本身係靜定或靜不定?



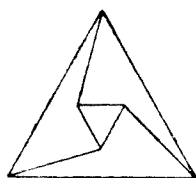
(a)



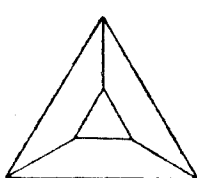
(b)



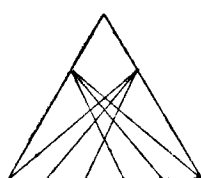
(c)



(d)



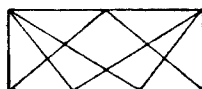
(e)



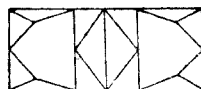
(f)



(g)



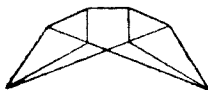
(h)



(i)



(j)



(k)

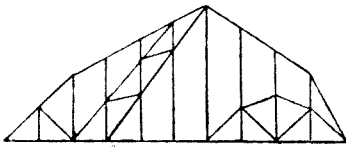


(l)

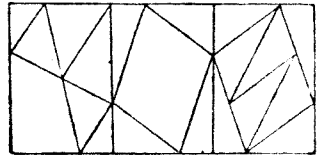
習題 4-3.

習題 4-4. 習題 4-3 之諸桁架中, 何者係簡單桁架? 何者係聯合桁架? 何者係複雜桁架? 如係簡單桁架, 即以數字記其諸點, 藉以指明其組成之次序。如係聯合桁架, 即以斜線表明其本身簡單桁架部份。由此法所得諸桁架之穩定與靜定情形, 與習題 4-3 者有無不同?

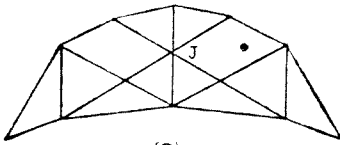
習題 4-5. 下列諸桁架, 屬於何類? 試由各類桁架之組成法, 定其是否靜定及穩定。(c) 及 (d) 二桁架之 J 點, 是否一節點, 有何影響?



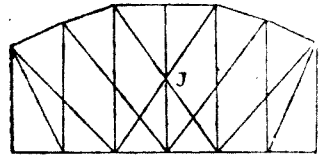
(a)



(b)



(c)



(d)

習題 4-5.

4-6. 桁架分析法之一(節點之數解法) 桁架在任何荷重之下,其各節點必維持其平衡。依桁架之理想情形,交會一節點諸桿之內力(即應力)與該節點所受之外力(荷重及反力),成一平面之交會力系。故依次應用同平面交會力系平衡之定律於桁架之各節點,即可先後求得各桿之應力。此即所謂桁架分析之節點法。亦即桁架分析最早之法,由美國費氏於 1847 年發表者。

此法係將桁架之各節點依次隔離,並應用二平衡方程($\Sigma H=0$ 及 $\Sigma V=0$ 或 $\Sigma X=0$ 及 $\Sigma Y=0$)以求交會一節點二桿中之應力,故此法有下列三項限制:

(1) 每次考慮任何一節點之平衡時,祇能求得二未知項(即二桿中應力之數量)。因祇有二平衡方程也。

(2) 此法用於簡單桁架最為適宜,因其組成係增加二桿即

增加一節點，而最後所得之節點必祇有二桿。故應用此法於諸節點之次序，若與其所組成之次序相反，常較方便。於聯合桁架常需先用他法將其聯合桿中之應力求得，始能用此法，否則常有相當之困難，但可另設法以克服之。此法雖亦可用於複雜桁架，但常不如後述之代替法簡易。

(3) 用此法必自桁架之一端起首，若祇求桁架中部任何一桿(副桿除外)之應力，此法殊不簡便。

但此法之優點，即在能自行校核其解答之正確。故欲求一桁架中所有諸桿之應力時，此法常較他法為適宜。

用此法時應明瞭 2—10 節所述力系平衡之定理 1 及 4，茲舉二例如下：

例題 4-1. 用節點之數解法，求此桁架中各桿之應力。

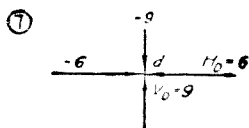
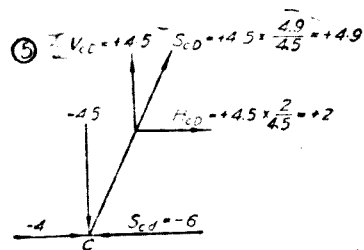
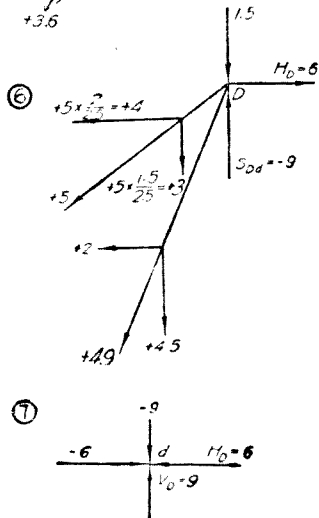
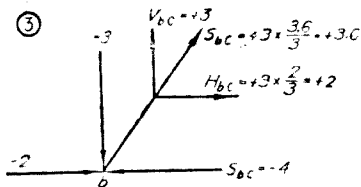
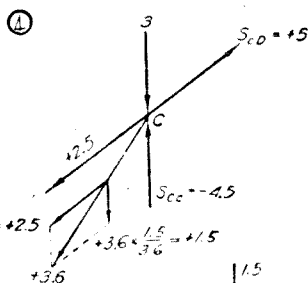
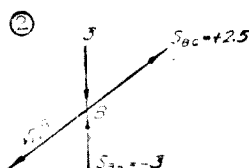
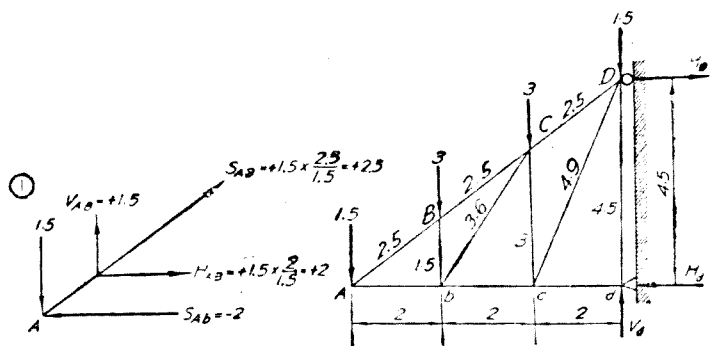
解釋 求懸臂桁架之應力，不必先求其反力，且反力可由 D 及 d 二節點之平衡求得，如是可與考慮外力平衡所求得之反力相較核。

諸節點考慮之次序，為 $A \rightarrow B \rightarrow b \rightarrow C \rightarrow c \rightarrow D \rightarrow d$ 。若將其所組成之次序視作 $d \rightarrow D \rightarrow c \rightarrow C \rightarrow b \rightarrow B \rightarrow A$ ，則二者正相反。

考慮 B 及 C 二節點之平衡時，其二坐標間之角度，並非直角，蓋如此為簡捷。

應力與分應力之計算，皆用桁架三角形各邊長之比，而不用三角衡，既簡便而又清晰。

考慮節點之平衡時，每節點均作一隔離體之圖，並示其力系之指向。初學者應如此，但稍嫺熟後，即不必如此。可將各桿之應力直接寫於桁架總圖中，所有加減，均用心算。其方法見下列之例題。



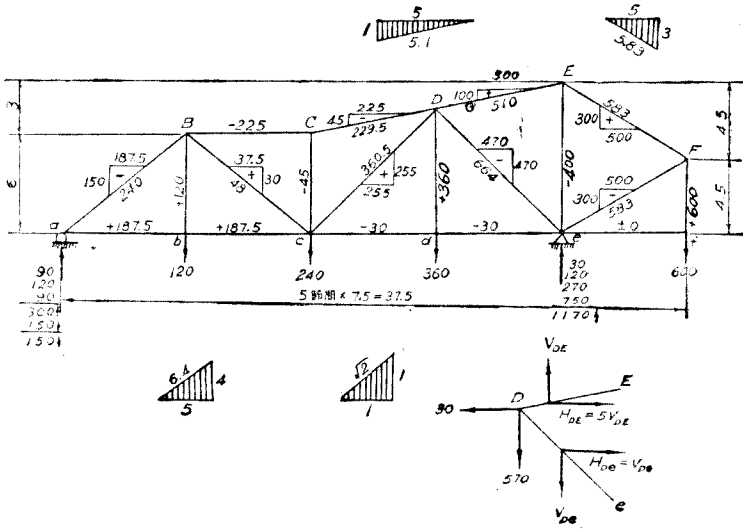
例題 4-1.

例題 4-2 用節點之數解法,求此桁架中各桿之應力。

解釋 注意反力之求法,既簡捷而又不易錯誤。以節點 a 為起首,得

$$V_{cB} = -150 \text{ 及 } H_{cB} = -150 \times \frac{5}{4} = -187.5, \text{ 故 } S_{ab} = +187.5.$$

再依次考慮節點 b, B, C, c 及 d , 每次祇有二未知之應力, 且不需解聯立方程。惟至節點 D 求 DE 及 Dc 二桿之應力時, 必用聯立方程, 或圖 4-12 之方法。注意 CD, cD , 及 dD 均已知其平分應力之代數和為 $30 \leftarrow$, 其豎分應力為 $570 \downarrow$, 假設 DE 及 Dc 皆為拉應力, 而 $H_{DE} = 5 V_{DE}$, 及 $H_{Dc} = V_{Dc}$, 由附圖可得,



例題 4-2.

$$V_{DE} - V_{Dc} - 570 = 0$$

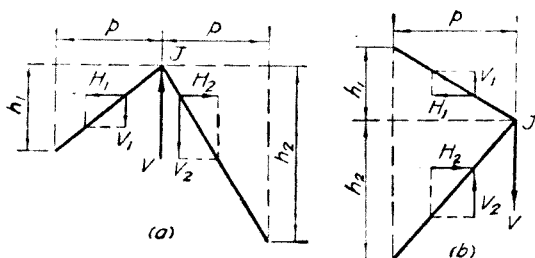
$$(+15)V_{DE} + V_{Dc} - 390 = 0$$

$$\frac{36V_{DE} \quad -600 = 0}{\quad \quad \quad} \text{ 故 } V_{DE} = +100$$

V_{DE} 之應力係正號, 蓋有二義: 其一, 即其指向與前此所假定者相同。其二, 前此假定 V_{DE} 為拉應力, 故實際 V_{DE} 仍為拉應力。反是, 若所得之結果為負號, 則為壓應力。此種以正號(+)表示拉應力, 負號(-)表示壓應力, 乃

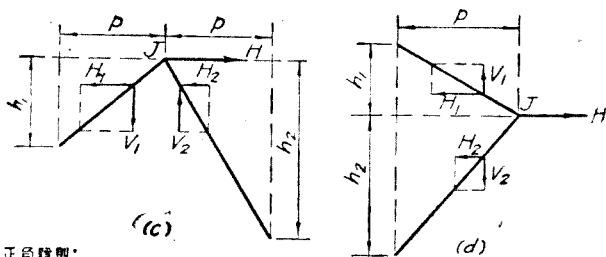
最通行之法。若計算時假定未知之應力均為拉應力，則所得之正負號，即與其實際應力之正負號相符。既知 V_{DE} 之後，即可得 V_{De} , H_{DE} , 及 H_{De} 。

再次即至 E 及 F 二節點。此二節點之情形，各如圖 4-12 (a) 及 (b) 所示於節點法中常見之，故應特別注意。如圖 4-12 (a) 及 (b) 所示，若不



不計其正負號則：

$$H_1 = H_2, \quad V_1 = V \times \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \quad V_2 = V \times \frac{h_2}{h_1 + h_2}$$



不計其正負號則：

$$V_1 = V_2, \quad H_1 = H \times \frac{h_2}{h_1 + h_2}, \quad H_2 = H \times \frac{h_1}{h_1 + h_2}$$

圖 4-12. 節點法中常見之情形

計其正負號，則此二斜桿之平分應力 H_1 及 H_2 必相等，而其豎分應力 V_1 及 V_2 則與其豎高度 h_1 及 h_2 成正比例。同此，若 J 點之荷重 H 係水平，如圖 4-12 (c) 及 (d)，亦不計其正負號，則此二斜桿之豎分應力 V_1 及 V_2 必相等，而其平分應力 H_1 及 H_2 則與其豎高度 h_1 及 h_2 成反比例。若 J 點之荷重係斜向，可先分為平豎二分力，再依圖 4-12 所示之法，分別求該二桿在該平豎二分力下之分應力，而後用代數加法，求其合應力。

於節點 e ，可用反力以資校核。

4—7. 桁架分析法之二(彎矩之數解法) 若所求之應力，爲桁架中部之一桿或數桿，則以本節所述之彎矩法，及下節所述之切力法，最爲簡捷。此二法常統稱爲隔離法，乃立 (August Ritter) 氏於 1863 年所發明。

此法先以任何適宜形狀之截面，將桁架之一部分與其他部隔離。若此截面所截斷之桿數不多於三，且係不平行而又不交會於一點者，則用 $\Sigma M=0$ 於任何二桿之交會點，考慮該隔離體全部之平衡，即可求得其第三桿之應力。該交會點稱爲第三桿之矩心。矩心與第三桿之正矩，稱爲該桿之矩臂。

若截面所截斷之桿多於三，則除所欲求應力之桿外，其餘諸桿必經過該桿之矩心，或其應力爲已知，或其應力對於該矩心之力矩自行消去（即該截面截斷該桿二次）。否則此法不能直接採用。

至截面之形狀，則視桁架之形式，及所求應力之桿而異。通常用者不外直線，曲線， U 形，及圓形四種。圖 4—13 示求 a 桿應力時之各種截面，其有斜線部份，即係應考慮平衡之隔離體。

此法祇能用於簡單桁架及聯合桁架。 於複雜桁架，必先用他法求得某一桿之應力，而後始能用此法。茲舉例如下：

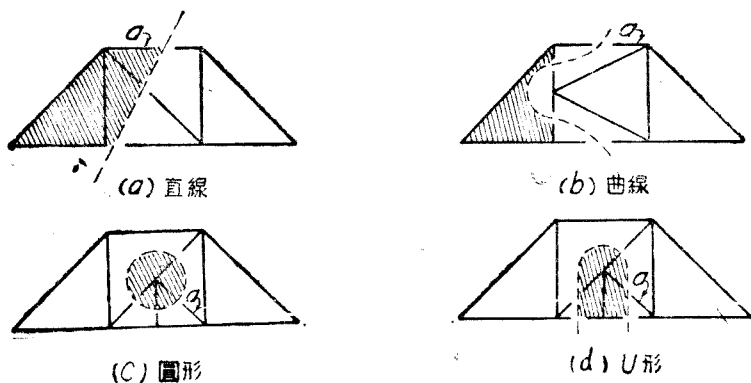
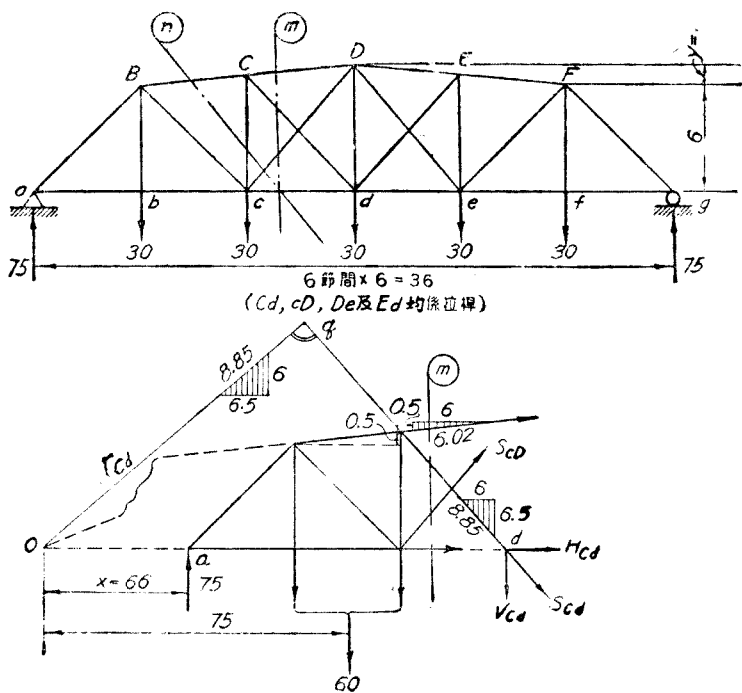


圖 4-13 隔離法之各種通常截面形

例題 4-3. 用彎矩法求此桁架中 Cd, cD, CD 及 Cc 諸桿之應力。



例題 4-3.

解答 先求 CD 及 cd 二桿之交點 O 與 a 之 x 距。

$$\frac{x+6}{6} = \frac{6}{0.5}, \quad x=66$$

Cd 及 cD 二斜桿既係拉桿，則二桿不能同時皆有應力，故其中一桿之應力必為零。以一 \odot 截面將桁架分為二部，考慮左部隔離體之平衡，用 $\Sigma M_0 = 0$ ，則，

$$-75 \times 66 = -4950 \curvearrowright$$

$$+60 \times 75 = +4500 \curvearrowleft$$

$$-450 \curvearrowleft$$

此不平衡之力矩 -450 ，必應有力矩 $+450 \curvearrowright$ 與之平衡。觀附圖可知 S_{cD} 對於 O 點之力矩為負號，故 $S_{cD} = 0$ 。並

$$S_{Cd} = + \frac{450}{r_{Cd}}$$

由三角形 odq 與 r_{Ca} 之傾度三角形之相似，則

$$\frac{r_{Cd}}{O_d} = \frac{6.5}{8.85} \quad \text{故} \quad r_{Cd} = \frac{6.5}{8.85} \times 84 = \underline{61.7}$$

$$S_{Cd} = + \frac{450}{61.7} = +\underline{7.29}$$

但此法先求 r_{Cd} 較為繁瑣。若將 S_{Cd} 於節點 d 分解為平豎二分應力， H_{Cd} 及 V_{Cd} ，而 H_{Cd} 對於 O 點之力矩為零，根據范氏關於力距之理論，則

$$V_{Cd} = + \frac{450}{84} = +\underline{5.36}$$

由是

$$S_{Cd} = 5.36 \times \frac{8.85}{6.5} = +\underline{7.29}$$

若學者對於此法嫻熟後，則如附圖隔離體可不畫出，較為簡省。故求 CD 斜桿之應力時，仍用截面 \odot ，並假定其應力為拉力。於節點 D 將其分解為平豎二分應力，用 $\Sigma M_d = 0$ ，則，

$$75 \times 18 - 60 \times 9 + 7H_{CD} = 0$$

故

$$H_{CD} = - \frac{810}{7} = -\underline{115.7}$$

$$S_{CD} = -115.7 \times \frac{6.02}{6} = -\underline{116.1}$$

若用 r_{CD} 直接求 S_{CD} ，則 $r_{CD} = \frac{7 \times 6}{6.02} = 6.98$ 。

$$S_{cD} = -\frac{810}{6.98} = -116.1$$

注意 810 等於此桁架在所示荷重下節點 d 之彎矩 M_d ，若將節點荷重視作均佈荷重，則，

$$S_{cD} = -\frac{M_d}{r_{cD}} = -\frac{wL^2}{8r_{cD}} = -\frac{\left(\frac{30}{6}\right)(36)^2}{8 \times 6.98} = -\frac{810}{6.98} = -116.1$$

由是可知：於數量上，桁架任何弦桿之應力，等於其矩心節點之彎矩，以其矩臂除之

求豎桿 Cc 之應力時，用截面 \textcircled{c} ，以 O 為矩心， O_c 為矩臂，並假定其應力為拉力，則

$$-75 \times 66 + 60 \times 75 - 78 S_{Cc} = 0,$$

$$\text{故 } S_{Cc} = -\frac{450}{78} = -5.77$$

若所有荷重皆由下弦之諸節點移至下弦之諸節點，以上關於 cD , Cd , 及 CD 三桿應力之計算，仍不變。但豎桿 Cc 之應力，則不同。蓋節點 c 之荷重已移至節點 C ，即不在所用隔離體之上，如是則

$$-75 \times 66 + 30 \times 72 - 78 S_{Cc} = 0$$

$$\text{故 } S_{Cc} = -\frac{2700}{78} = -35.77$$

注意二者之差 $35.77 - 5.77 = 30$ ，即節點 c 之荷重。由是可知：荷重在下弦抑在上弦，與桁架弦桿及斜桿之應力毫無關係，但豎桿之應力則有改變；而其改變之數量，即等於節點之荷重。

4—8. 桁架分析法之三(切力之數解法) 切力法與彎矩法，同屬於隔離法，其不同之點，即一用彎矩之原理，一用切力之原理。設例題 4—3 桁架之上弦與下弦平行，則二者之交點 O 必在無窮之遠。如是，則用彎矩法求 Cd 及 cD 二桿之應力為不可能。於此，可用切力法。故此法用以求上下弦平行桁架在豎向荷重下腹桿之應力，最為適宜。

若隔離體所受之外力係豎向，而其截面所截斷之上下二弦

桿亦係平行(桁架之上下弦桿或不全係平行),則用此法以求該截面所截斷腹桿之應力,常甚簡捷,惟須將其應力分解為二分量,其一係豎向,其他與截斷之上下弦桿平行,其豎分應力,即等於該截面之切力。若此腹桿係一豎桿,則其應力即等於該截面之切力。

例題 4—3 中求 S_{C_c} 之方程,可寫作:

$$-75x + 60(x+9) - (x+12)S_{C_c} = 0$$

若此桁架之上弦桿與下弦桿平行(即附圖中 $y=0$),則 $x=\infty$,故上列方程中 $x+9$ 及 $x+12$ 中之 9 及 12,均可略去不計,若將 x 消去,該方程即變為,

$$-15 + 60 - S_{C_c} = 0,$$

即 S_{C_c} 之數量等於截面 ⑩ 之切力,此即切力法也。故將切力法視作彎矩法之特例,亦無不可。

此法亦祇能用於簡單桁架及聯合桁架。於複雜桁架,亦必先用他法求得某一桿之應力,而後始能用此法。茲舉例如下:

例題 4—4. 用切力法求此桁架中 Bc, cD , 及 dD 諸桿之應力。

解答 以截面 ⑩ 將此桁架隔離為二部,考慮其左部之平衡,並假定 Bc 桿之應力為拉力,則

$$45 - 30 - V_{Bc} = 0,$$

$$V_{Bc} = +15,$$

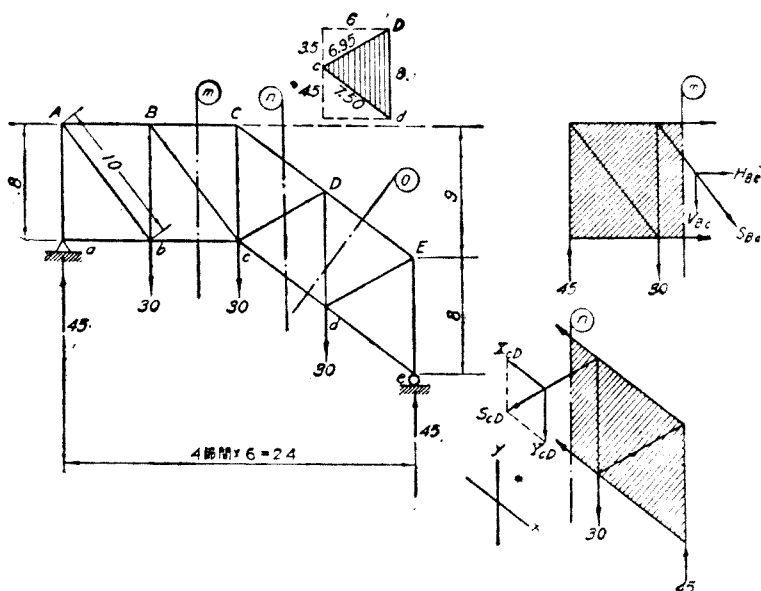
$$S_{Bc} = +15 \times \frac{10}{8} = +18.75,$$

以截面 ⑪ 將桁架隔離為二部,假定 cD 桿之應力為拉力,並將其分解為 X_{cD} 及 Y_{cD} 二分量,前者與弦桿 CD 平行,後者係豎向。考慮截面 ⑪ 右部之平衡,則

$$45 - 30 - Y_{cD} = 0,$$

$$Y_{cD} = +15,$$

$$S_{cD} = +15 \times \frac{6.95}{8} = +13.03,$$



例題 4—4.

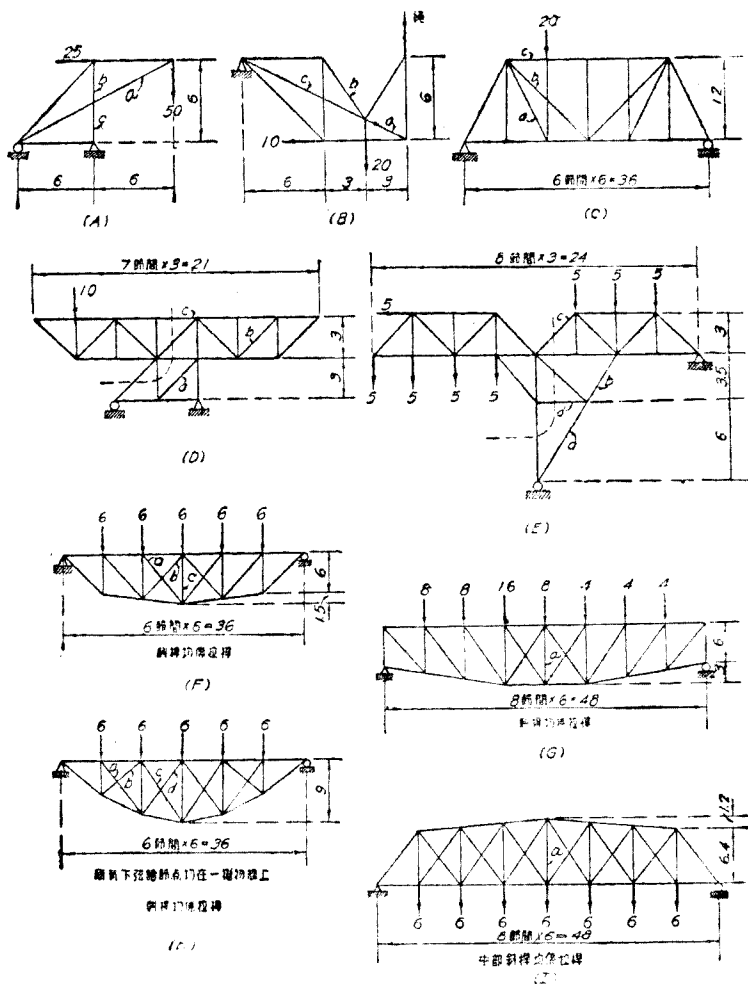
同此以截面 ①，即可求得

$$S_{dD} = \underline{-15},$$

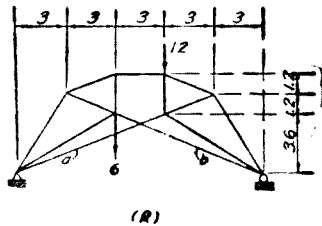
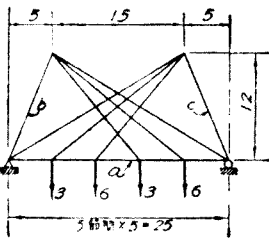
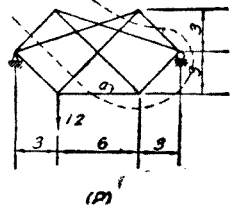
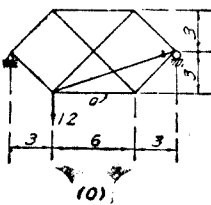
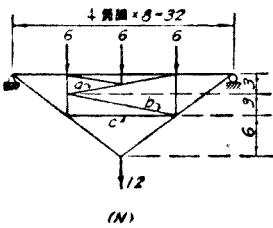
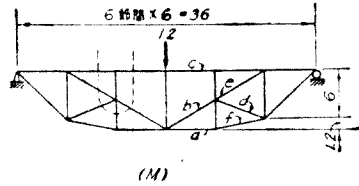
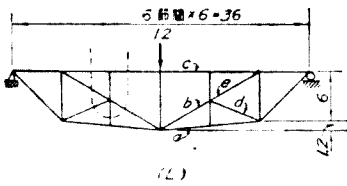
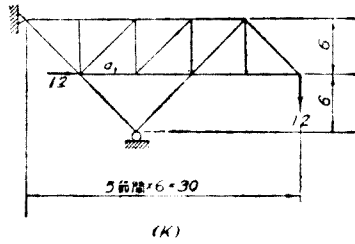
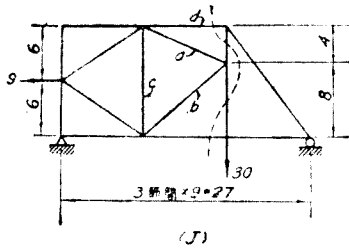
習題 4—6. 用節點之數解法，求習題 3—12 中桁架 (c) 及習題 3—13 中桁架 (g) 所有各桿之應力。

習題 4—7. 用最適宜之法，求下列諸桁架中英文字母所指定各桿之應力。

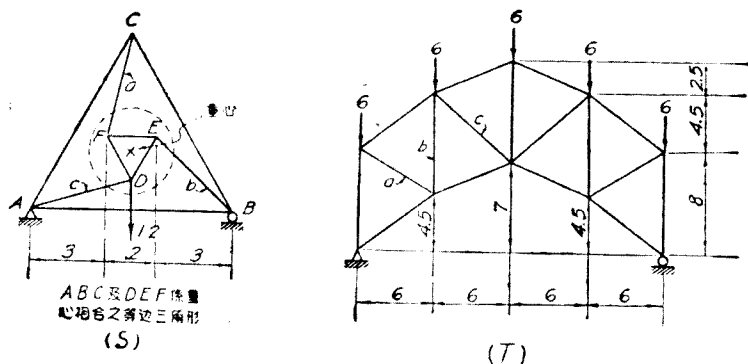
提示 普通言之，桁架應力之分析，若始終用一法，並非最適宜最簡捷之步驟。故常須視桁架之組織，將數法聯合採用。例如例題 4—2，若先用彎矩法，求得 CD 及 DE 二弦桿之豎分應力，再用切力法，求得 Bc, cD ，及 Dc 三斜桿之豎分應力，然後再用節點法，以求其餘諸桿之應力，其步驟必較自始至終全用節點法為簡捷。故解下列諸題時，學者應細心研究，以何法為最簡捷，學者未加思索之先，最好勿讀下列之提示。



習題 4-7. (未完)

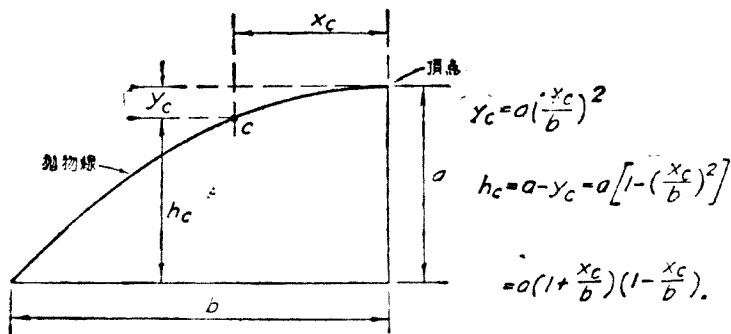


習題 4-7. (續, 未完)



習題 4-7. (續,完)

- (A) 全用節點法。
 (B) a 桿用節點法, b 桿用彎矩法, c 桿用切力法。
 (C) a 桿用節點法, b 桿用切力法, c 桿用彎矩法。
 (D) a 桿用節點法, 自二支點算起, b 桿用切力法, c 桿用彎矩法。其截面如圖虛線所示。
 (E) 不必先將反力求得, a 桿用節點法, $b, c,$ 及 d 三桿, 均用彎矩法, 求 d 所用之截面, 如圖虛線所示。
 (F) a 及 b 二桿, 用彎矩法, 與例題 4-3 相同, c 桿用節點法。
 (G) 用切力法。
 (H) 全用彎矩法, 與例題 4-3 相同。如得特殊之解答, 應思其何以如此? 並注意各節點桁深之最簡易求法, 如圖 4-

圖 4-14. 拋物線上任何點高度(h_c)之簡易求法。

(I) 先用彎矩法，再用節點法。

(J) a 及 b 二桿用切力法及圖 4-12 (b) 之原理。 c 桿用節點法，或切力法，但需先求其他一斜桿之豎分應力。

(K) 用彎矩法。

(L) a, b, c ，及 d 四桿，均用彎矩法。求 d 桿所用之截面，如圖虛線所示。注意其所截斷壓桿之應力為零。 e 桿用節點法。

(M) 此題與(L)表面相似，但絕不相同。 a, c ，及 d 三桿均用彎矩法。 d 桿所用之截面，如圖虛線所示。 b 桿用切力法。 e 及 f 二桿均用節點法。

(N) a, b ，及 c 三桿，均用節點法，但須先用他法求其他桿之應力。

(O) 用節點法，自其左支點起。

(P) 此桁架屬於何類？用彎矩法，所用之截面如圖虛線所示。

(Q) 與(P)相同，亦可用節點法，但步驟太繁。

(R) 用彎矩法。

(S) 與(P)相同，所用之截面，係圖虛線所示之圓圈。

(T) a 及 c 二桿用切力法，與例題 4-4 之 cD 桿相同， b 桿用彎矩法。

習題 4-8. 將習題 4-7 諸桁架中所有應力為零之桿指出。

習題 4-9. 求習題 3-15 上轉橋在所示荷重下 a, b, c 及 d 四桿之應力，先設此橋係關下，再設此橋係向上開 60° 。

習題 4-10. 例題 4-3 之桁架。(a) y 之值應為若干，庶在所示之荷重下，其 Cd 及 cD 二斜桿之應力均為零？(b) y 之值應大於若干，庶 cD 桿有應力而 Cd 桿無應力。

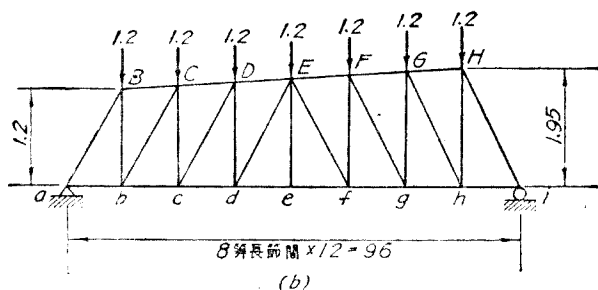
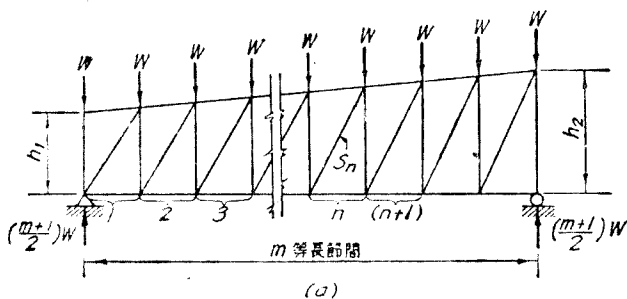
習題 4-11. (a) 圖示一桁架，共有 m 等長節間。其兩端之桁深，各為 h_1 及 h_2 。其上弦(或下弦)諸節點均受有相同之豎立荷重 W 。自左支點數起，任何第 n 節間中斜桿之應力設為 S_n ，求證：若

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{1 + \frac{m(m-2n+1)}{n(n-1)}}$$

則 $S_n = 0$ ，又 S_n 為拉力或壓力時，其 h_1/h_2 比之值各應如何？

(b) 圖示木料桁架，其所有斜桿祇能承受壓力。用題(a)之方程，研究此桁架諸斜桿之傾度是否有誤。

(c) 題(a)之方程是否可用於對稱之桁架，其兩端之桁深為 h_1 ，其中線之桁深為 h_2 [即其右半與題 (a) 之桁架相同]？



習題 4-11.

4-9. 桁架分析法之四(節點之圖解法) 節點圖解之原理，與前述之數解法相同，不過係採用 2-9 節所述交會力系平衡之圖解法。其所欲求得者，常係二應力之數量(指向在內)。試以例題 4-1 之桁架為例。

圖 4-15(a) 示該桁架及其荷重，其諸外力(荷重及反力)之間，各以一英文大寫字母記之。桁架之諸三角形中，各以一數字記之。因此每一外力以其兩旁之英文大寫字母記之，而桁架之每一桿以其旁之一英文大寫字母與一數字，或兩旁之數字記之，

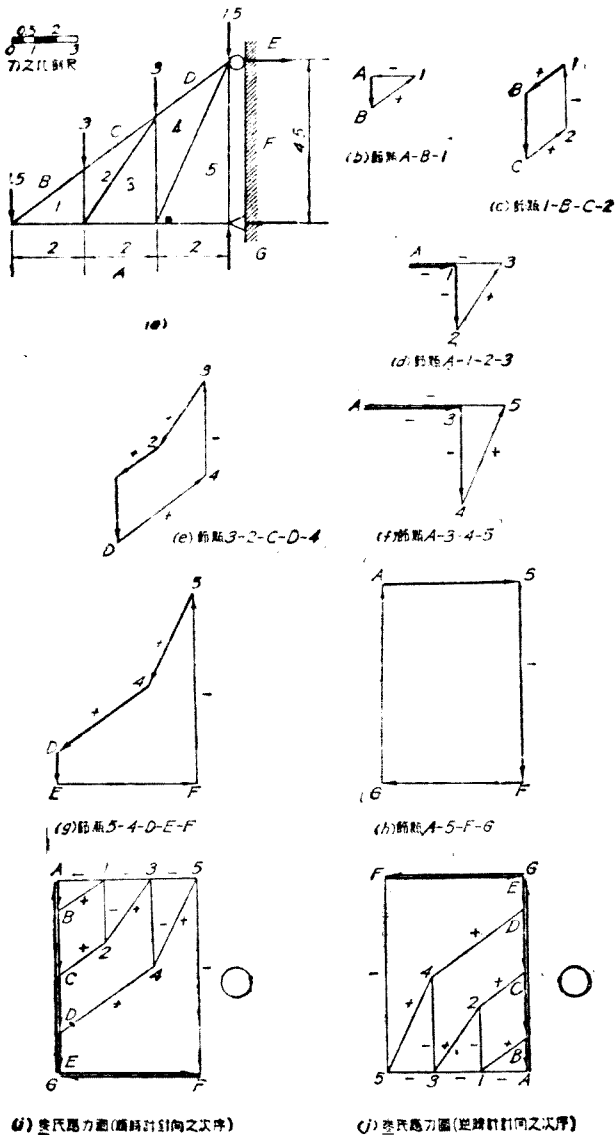


圖 4-15. 節點之圖解法

如左端之荷重 1.5，以 $A-B$ 或 $B-A$ 記之，視讀法係順時計針向抑係逆時計針向而定。於力多邊形中，該荷重之兩端即以 A 及 B 二英文大字母記之。此種記號，雖係恆 (Henrici) 氏所創，但常稱為鮑 (Robert H. Bow) 氏記號^①，用於節點之圖解法，最為方便。

先考慮節點 $A-B-1$ 之平衡。作一力多邊形，荷重 $A-B$ 為已知，其未知者僅 $B-1$ 及 $1-A$ 二桿應力之數量。如圖 4-15 (b)，分作荷重 $A-B$ ，自其 B 端作一線與 $B-1$ 桿平行，又自其 A 端作另一線與 $1-A$ 桿平行，此二線之交點為 1 。 $A-B$ 之指向為已知， $B-1$ 及 $1-A$ 之指向必依一定之順序，如圖 (b)，故讀各桿之記號時，若繞所考慮之節點依順時計針之次序，則得 $B-1$ 及 $1-A$ ，依此記號之次序，於力多邊形即得其指向。但 $B-1$ 之指向係背離所考慮之節點，故為拉力； $1-A$ 之指向係傾向所考慮之節點，故為壓力。各桿應力之正負號，可用此法定之，而圖 (b) 所示之箭頭，實無需要。

再考慮節點 $1-B-C-2$ 之平衡。 $1-B$ 及 $B-C$ 均係已知，未知者僅 $C-2$ 及 $2-1$ 二桿應力之數量。如圖 4-15 (c)，先作 $1-B$ 及 $B-C$ ，自 C 點作一線與 $C-2$ 平行，自 1 點作一線與 $2-1$ 平行，即得 $C-2$ 及 $2-1$ 之數量。其指向係 $1-B-C-2$ 之次序。 $C-2$ 之指向係背離所考慮之節

① 見所著之架成結構建造之經濟學 (Economics of Construction in relation to Framed Structures), 1872 年在倫敦出版。

點，故爲拉力；2-1 之指向，係傾向所考慮之節點，故爲壓力。同此，再依次考慮其餘諸節點之平衡，如圖 (d), (e), (f), (g), 及 (h)，每次可求得二桿之應力。於此諸圖中，有下列數點應注意：

(1) 其已知者，皆以粗線表之，其未知而欲求得者，皆以細線表之。

(2) 各桿之記號，皆依繞所考慮節點之順時計針向而定。其力多邊形中力之指向，則依其記號之順序而定。至某力係拉力抑係壓力，則視其指向係背離抑傾向所考慮之節點而定。

(3) 此法一如節點之數解法，祇可用於簡單桁架。各節點考慮之次序，應與其所組成之次序相反。如用此法於聯合桁架或複雜桁架，必有困難，但可設法以克服之。

觀圖 4-15 (b) 至 (h) 諸力多邊形，可知該桁架中每桿之應力，均曾畫過二次。爲簡便起見，可將其重複之力略去，使諸圖聯合成爲一圖，如圖 4-15 (i)，其中粗線表示外力，細線表示內力。此圖稱爲麥 (Maxwell) 氏^① 應力圖，或簡稱麥氏圖。其外力之多邊形以粗線表之，亦係依順時計針向之次序，其內力多邊形則以細線表之，其左旁有箭頭之圓圈，即表示此圖之作係順時計針向之次序。

① 見所著之論交互圖及力圖 (On Reciprocal Figures and Diagrams of Forces) 一文，於 1864 年四月在倫敦哲學雜誌發表。此後 1872 年意大利算學家克 (E. Cremona) 氏亦發表此法，故歐洲大陸常稱此圖爲克氏圖。但亦有合稱麥克二氏圖者。

作圖 4—15 (b) 至 (h) 力之多邊形時，本可依任何次序，但如欲將諸力多邊形聯合成一麥氏圖，則考慮諸節點之平衡作力多邊形時，必順一定之次序。其次序係順時計針向，或係逆時計針向均可。惟前者較方便。圖 4—15 (j) 即依逆時計針向次序所作之麥氏圖。注意其中外力之力多邊形，亦係逆時計針向之次序。

實際上麥氏圖之作法，並不必考慮每節點之平衡。先作外力之多邊形，其次序係順時計針向，如圖 4—15 (i) 之粗線部份。（其反力 $E-F$, $F-G$ 及 $G-A$ 必先求得。）再考慮節點 $A-B-1$ 之平衡，於 A 點作 $A-1$ 線，與 $1-A$ 桿平行，於 B 點作 $B-1$ 線，與 $B-1$ 桿平行。即得 1 點。再考慮節點 $1-B-C-2$ ，於 1 點作 $1-2$ 線與 $2-1$ 桿平行，於 C 點作 $C-2$ 線，與 $C-2$ 桿平行，得 2 點。准此，每次作二線而定一點，繼續求得 3, 4, 及 5, 諸點。最後自 F 點作一線與 $5-F$ 平行，其他端應與 5 點相合，否則所作之麥氏圖，必不精確。故若先求得其反力，則此圖能自行校核。

交互圖 圖 4—16 (a) ABC 為任何三角形， D 為其中之任何一點，作 AD, BD , 及 CD 。將 AB, BC, \dots 等線平分為二等段，並各作一垂直線，如 $xy \perp AD, xz \perp BD, xw \perp AB$ 。 xy, xz , 及 xw , 必交會於一點 x , 因 x 點為經過 ABD 三點之圓心。同此， xw, zw 及 yw 必交會於 w 點，因 w 點為經過 ABC 三點之圓心。若將圖 $ABCD$ 與圖 $wxyz$ 比較，則其一圖中成一三角形之三線，與其他圖中交會於一點之三線，各成垂直，此二圖稱為交互圖 (reciprocal figures)。蓋第一圖對於第二圖之關係，與第二圖對於第一圖之關係，有交互性質也。若作六線與圖 4—16 (a) 之 ABD 圖之各線平行，

如 $x'y' \parallel AD, w'y' \parallel AC$ 等, 得圖 4-16 (b), 與圖 4-16(a) 之圖 $wxyz$ 相似。圖 4-16 (a) 之圖 $ABCD$ 與圖 4-16(b) 之圖 $w'x'y'z'$ 亦係交互圖。

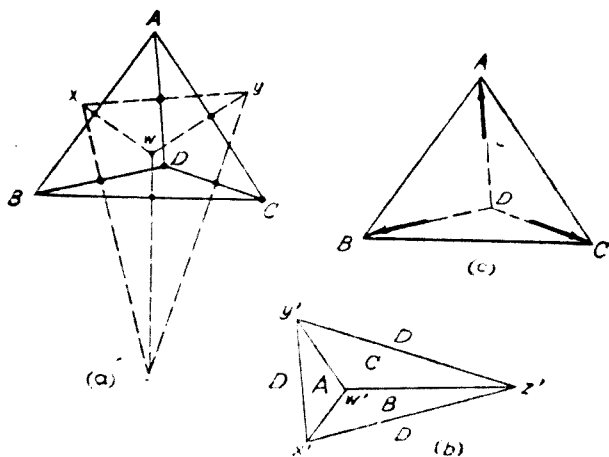


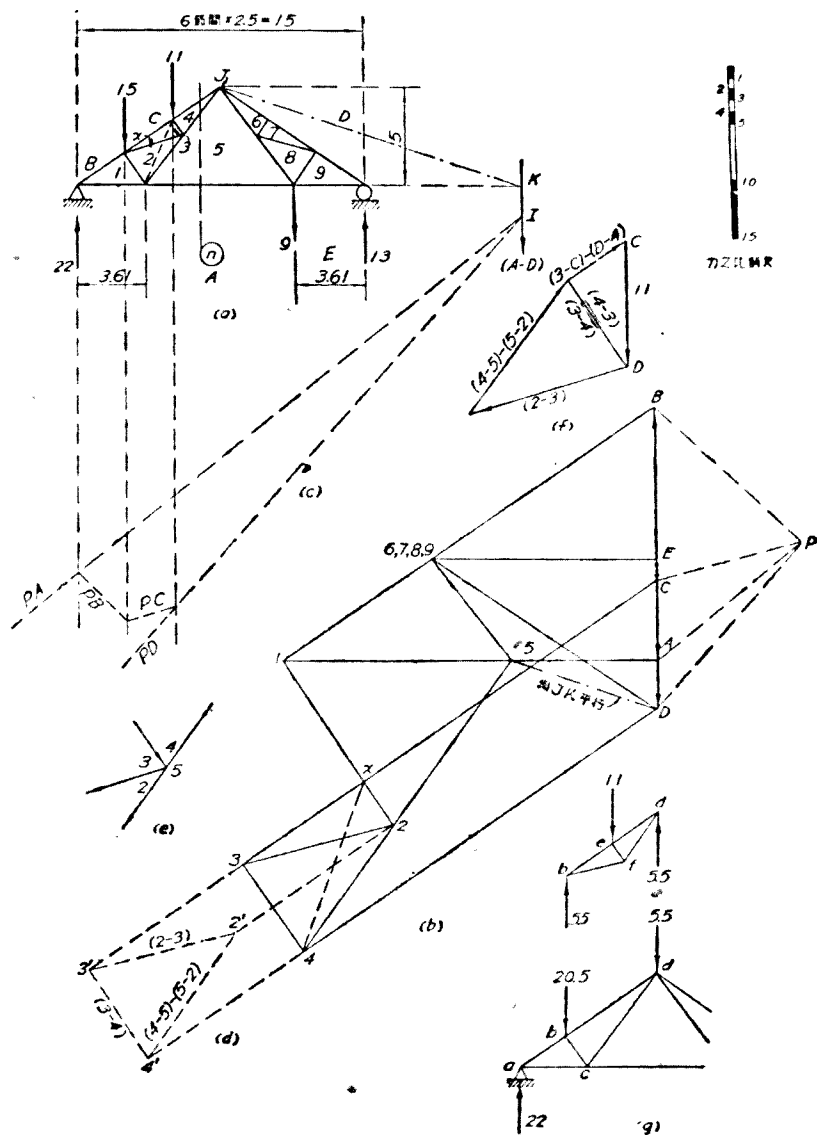
圖 4-16. 交互圖

由是可知：於二圖之任一圖中，取交會一點之三線，而他一圖中之與此三線平行之三線，成一閉合之多邊形，則此二圖亦係交互圖。設圖 4-16 (a) 之三角形 ABC 為一桁架，其節點 A, B 及 C 受有平衡之三力，其作用線交會於 D 點，如圖 4-16 (c)。此三力之數量及傾度可以圖 4-16 (b) 之三角形 $x'y'z'$ 代表之，其中之鮑氏記號，即用以表示該三力。再考慮節點 A 之平衡，則外力 AD 及 AB 與 AC 二桿之應力，必成一三角形，即圖 4-16 (b) 之三角形 $w'x'y'$ 。其餘二節點 B 及 C 之情形亦相同。故桁架及其外力之圖，與其麥氏圖成爲有交互性之二圖。准此，則圖 4-15 (a) 與 (i) 或 (j) 亦係交互圖。首先研究交互圖之性質者爲麥 Maxwell 氏（見注 11 所舉之參考）。其後克 Cremona 氏並曾研究力多邊形與索線多邊形之交互性。

例題 4-5. 用麥氏圖求此桁架諸桿之應力。

解釋 先用任何法求其反力，再依繞此桁架順時針向之次序，作外力之力多邊形，如圖 (b) 之 BD 直線。

次以節點 $A-B-1$ 起首，於圖 (b) 之 B 點，作一線與 $B-1$ 桿平行，於



例題 4-5

A 點作一線與 $1-4$ 桿平行。此二線之交點為 1 ，其次應考慮節點 $B-C-3-2-1$ ，或 $A-1-2-5$ ，但皆有三未知項。故此法不能直接定 2 點。蓋此桁架為一聯合桁架，用節點圖解法必有此項困難。克服此項困難之方法頗多，其重要者有六，茲列舉如下：

(1) 用彎矩法以桁架頂點 J 為矩心，求 $5-4$ 之應力。既知 $5-4$ 之應力，即可於圖 b 上定 5 點。於 5 點作一線與 $2-5$ 桿平行，於 1 點作一線與 $1-2$ 桿平行，其交點即 2 點。

(2) 求 $5-4$ 之應力，亦可用 $2-10$ 節平衡定理 4 之圖解法 (圖 2-27)，以截面 \textcircled{a} 將桁架隔離為二部，其左部必於三外力及 $D-4, 4-5$ ，與 $5-4$ 三桿之應力下，維持平衡。作索線多邊形如圖 (c)，求其三外力合力 $A-D$ 之作用線，得 IK 線；與 $5-4$ 桿之延長線相交於 K 點。作 JK 線，即 $A-D$ 與 $5-4$ 之合力作用線。於圖 (b) 自 D 點作一線與 JK 平行，與 $A-1$ 線相交於 5 點。既得 5 點，其餘與上法相同。

(3) 由上二法可知 $D-4$ 桿之應力，與截面 \textcircled{a} 左邊桁架中各桿之位置，絕無關係。若以 $x-4$ 桿 (圖 (a) 之虛線) 暫時代替 $2-3$ 及 $3-4$ 二桿 (圖 (a) 之 2 及 3 二記號暫時不用)。即可定 x 及 4 點，既知 4 點，即可依次定 $2, 3, 5$ ，諸點。

(4) 既定 1 點之後，自 1 點作一線與桿 $1-2$ 平行，則 2 點必在此線上。自 C 點作一線與桿 $C-3$ 平行，則 3 點必在此線上。自 D 點作一線與桿 $D-4$ 平行，則 4 點亦必在此線上。自 $C-3'$ 線上之任何點 $3'$ ，作 $3'-4'$ 線，與桿 $3-4$ 平行，如圖 (d)。自 $3'$ 及 $4'$ 二點各作一線與桿 $2-3$ 及桿 $4-5$ 或桿 $5-2$ 平行，得其交點 $2'$ 。注意 $2'-3'-4'$ 三角形，即節點 $2-3-4-5$ 之力多邊形，其中 $4'-2'$ 等於 $4-5$ 與 $5-2$ 二桿應力之差 (圖 (e))。故 $2'-2'-4'$ 三角形，係 $2-3-4$ 三點在麥氏圖上之相對位置，但 2 點必在前此自 1 點所作與桿 $1-2$ 平行之線 (即 $1-2$ 線) 上，故自 $2'$ 點作一線與桿 $3-C$ 平行，其與 $1-2$ 線交點即 2 點。

(5) 先考慮節點 $C-D-4-5$ 之平衡。作力多邊形如圖 (f)，得桿 $4-3$ 之應力。再考慮節點 $2-3-4-5$ 之平衡。作力多邊形如圖 (f)，得桿 $2-3$ 之應力，既知桿 $2-3$ 之應力，於圖 (d) 之 $3'$ 點，作一線與桿 $2-3$ 平行，

並使 $2'-3'$ 等於 $2-3$ ，即得 $2'$ 點，如前法即可得 2 點。此法與前法相似，惟定 $2'$ 點時，不作圖 (d) 之 $3'-4'$ ，及 $4'-2'$ 二線，而作一圖 (f)。

(6) 注意桁架 $2-3$ ， $3-C$ ， $D-4$ ， $4-5$ ，及 $4-3$ 可視作一副桁架 (secondary truss)。故可以與主桁架分開，如圖 (g)，得二個簡單桁架。用麥氏圖求此二桁架中各桿之應力，均毫無困難。既求得此二桁架中各桿之應力，用疊加法，即得原來桁架中各桿之應力如

$$3-C = bd + be,$$

$$D-4 = bd + cd,$$

$$4-3 = ef,$$

$$2-3 = bf,$$

$$4-5 = cd + fd,$$

$$5-2 = cd.$$

上述六種方法中，大約以(3)法為最簡捷，(4)法次之，(1)法係數解法，(2)法不易精確，(5)及(6)二法均稍繁瑣，但有時亦非用之不可。蓋何法最適宜，仍應視桁架之情形而定。

習題 4—12. 用麥氏圖求以下桁架中諸桿之應力：

(a) 習題 3—7 中之桁架。

(b) 習題 4—7 中之桁架 (J)，(l)，及 (T)。

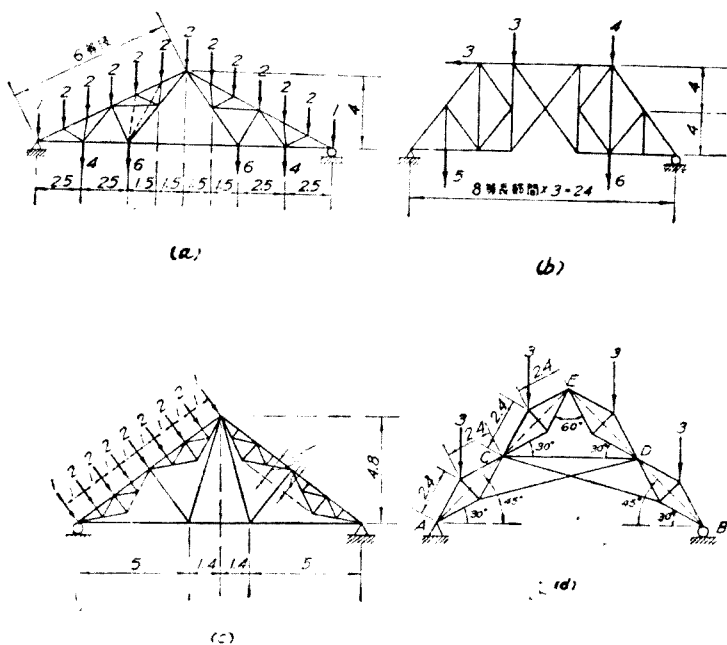
習題 4—13. 用麥氏圖求下列聯合桁架中諸桿之應力。

提示 (a) 桁架及荷重既係對稱，故祇需作此桁架一半之麥氏圖。遇有困難時，用上述之(3)法，最簡便。其暫時代替之桿，如虛線所示。

(b) 遇有困難時，試用上述之(1)，(2)，(3)三種方法，以資比較。

(c) 需用上述之(6)法，將其上弦桿之四小桁架，視作副桁架。

(d) 需將此桁架分離為二，其一為 $ABCD$ ，係一簡單桁架，其一為 CDE ，仍係一聯合桁架 (即三鉸拱)。



習題 4-13.

4-10. 桁架分析法之五(切力及彎矩之圖解法) 於上下弦平行之桁架,其豎桿之應力及斜桿之豎分應力,均等於其節間之切力,而切力圖,可以圖解法求之。其上下弦桿之應力 S 等於其矩心節點之彎矩 M , 除以桁深 h , 即 $S=M/h$, 而彎矩亦可以圖解法求之。切力圖及彎矩圖之圖解法已於 3-13 節中詳述之,並曾證明:

$$M = Hy$$

故

$$S = \frac{M}{h} = \frac{H}{h}y$$

其中 M 等於任何節點之彎矩, y 等於該節點索線多邊形與其

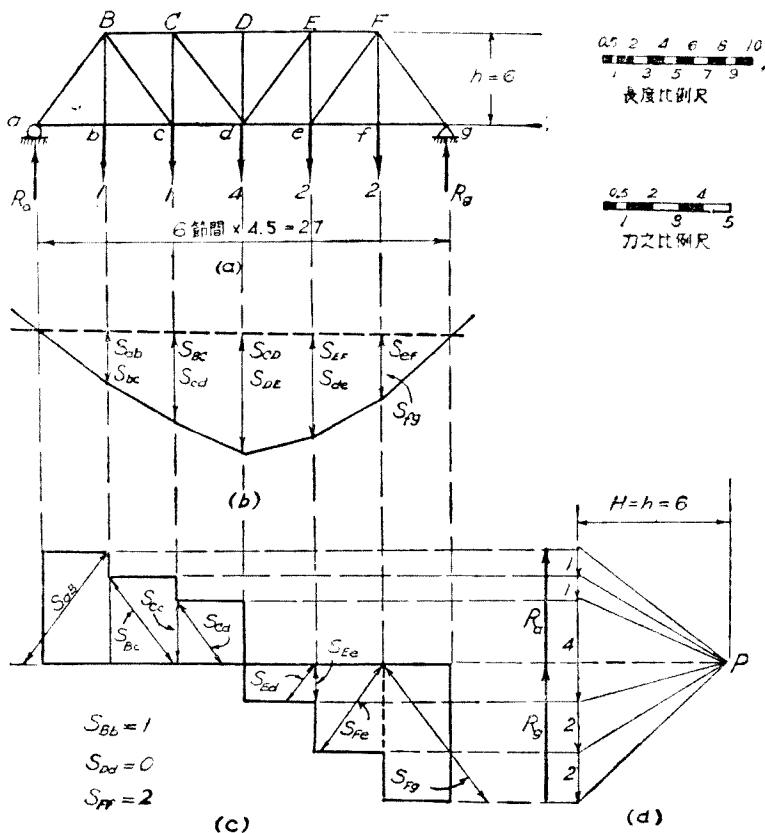
閉合線間之豎截距， H 等於力多邊形之極距，若使 $H=h$ ，則

$$S=y \quad (4-2)$$

注意 H 及 S 所表示者為力，而 h 及 y 所表示者為長度，故 $H=h$ 及 $S=y$ ，祇係數量上相等而已，有時使 $H=h$ ，於作圖不甚準確，則用 H 為 h 之整數倍數或分數亦可。

於上下弦桿不平行之桁架，其節點之桁深不同，故不能使 $H=h$ ，但可用 $S=M/r$ 。 r 為弦桿之知臂，至其腹桿之應力，可用圖 3-34 求 M_D 之法，但較繁瑣耳。

用此法時，應力之正負號，當以觀察定之。



例題 4-6.

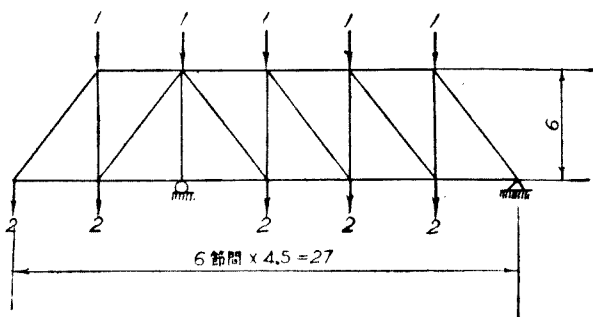
例題 4—6. 用切力及彎矩之圖解法，求此桁架中諸桿之應力。

解釋 因 $H=h=6$ ，故圖(b)之彎矩圖，即成爲弦桿應力圖，其所表示者爲力，但其比例尺係長度，與桁架之跨度所用者相同。

斜桿之豎分應力既等於其節間之切力，故自切力圖上之一角，作一線與斜桿平行，即得其應力。豎桿之應力，即等於其節間之切力。

副桿 Bb, Dd ，及 Ff 之應力，不能用此法求之。用節點法，則一望而知，故其應力另記於旁。

習題 4—14. 用切力及彎矩之圖解法，求此桁架中諸桿之應力。



習題 4—14.

提示 於懸臂結構，作切力圖時，其外力之多邊形，必須依其先後之次序，如例題 3—5 之附圖(e)。

習題 4—15. 用彎矩之圖解法，求例題 4—1 桁架中諸桿之應力。

提示 求腹桿之應力時，其矩心均係 A 點，該點彎矩(或力矩)之圖解法，見 2—5 節。

4—11. 桁架分析法之六(圖解隔離法) 此法與 2—10 節之平衡定理 4 (圖 2—27) 完全相同，乃庫 (Culmann) 氏所發明，故亦稱爲庫氏法^①。

① 此外尚有立(A. Ritter)氏及齊(Zimmermann)氏之圖解法，但均其繁瑣，刻下已無用之者，故不贅述。讀者可參閱利(W. Ritter)氏所著圖解力學之應用(Anwendungen der Graphische Statik)第二卷，1890年，在瑞士出版。

隔離法既爲彎矩法及切力法之總稱，故凡可採用該二法時，均可採用此法，惟隔離截面所截斷之桿數，如多於三時，其多餘之桿，必受 4—7 節所述之限制，否則此法亦不能採用。

圖 2—27 所示之四力，其數量及指向已知之 F_1 ，於此爲隔離體所受諸力中已知者（荷重，反力，及截斷桿之應力已知者）之合力。故用此法，常須先用他法求此諸力之合力。其 F_2 ， F_3 ，及 F_4 ，於此爲所截斷三桿之應力。此三桿必不能平行或交會於一點，否則桁架必係內力靜不定之桁架。其理與 2—10 節所述者同。

求聯合桁架之聯合桿應力時，此法最爲適宜。

此法之應用，與例題 4—5 之解釋 (2) 相同（即作 JK 線以求桿 5—A 之應力），故不再舉例。

習題 4—16. 用圖解隔離法解答習題 4—7 中之 (P), (Q), (R), (S) 及 (T)。

4—12. 桁架分析法之七（求反力法） ① 用隔離法分析桁架時，其隔離體必在其外力及所截斷諸桿之應力作用下，維持平衡，故可將此隔離體（其截斷之諸桿除外）視爲一剛體之結構，其所受之外力視爲荷重，並將其截斷諸桿之應力視爲反力。故 3—6, 3—7 或 3—8 節所述之任何求反力法，均可用以求桁架中某桿之應力。

第三章表 1 中已表明結構之任何支座，可以鏈桿代替之。依桁架之理想情形，其所有諸桿皆係鏈桿。鏈桿既可以代替支座，故支座亦未嘗不可以代鏈桿。如是，則此法之意義更爲明顯。

此法之圖解法，與上述之圖解隔離法極相似。惟隔離體所受之外力較多

① 此法乃本書著者所創，雖係採用成法，但其步驟及意義，均未經前人道及。

於一，用圖解隔離法時，必先求其合力。但用此法之圖解時，則不著此步驟。此即二法不同之點。故隔離體祇有一外力時，則此法之圖解法與圖解隔離法完全相同。

圖 4-17 (a) 示以一截面 (m) 所得之桁架隔離體，藉以求 CD 、 Cd 及 cd 三

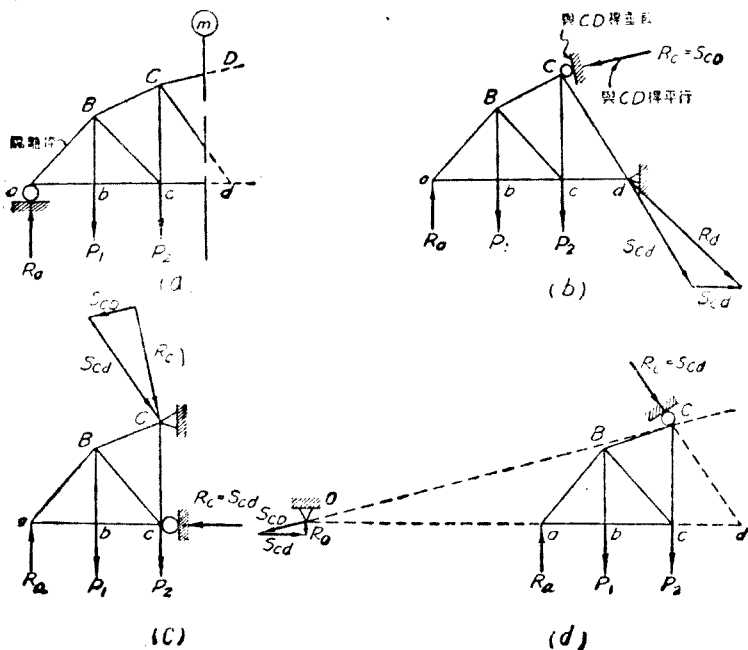


圖 4-17. 桁架分析之求反力法

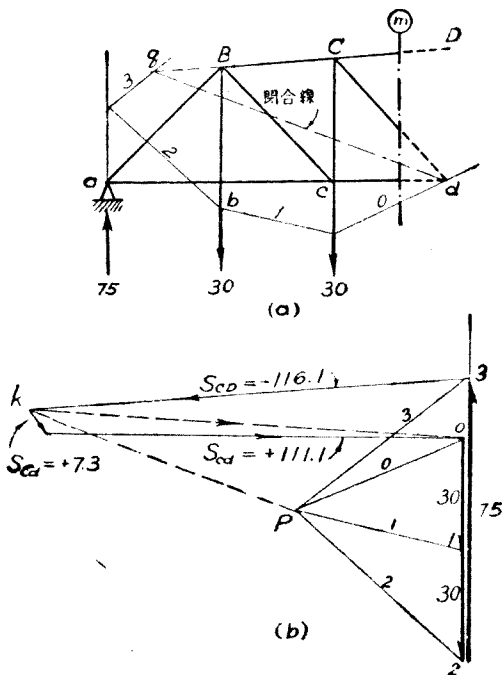
桿之應力。將 CD 桿視為一鏈桿，而代以一輻軸支座 C ，其支承面與 CD 桿垂直。並於 Cd 及 cd 二桿之交點 d ，置一鉸支座；如圖 (b)。如是，則支座 C 之反力 R_C 即等於 CD 桿之應力。支座 d 之反力 R_d ，即等於 Cd 及 cd 二桿應力之合力，將此反力分解為二分力，各與 Cd 及 cd 二桿平行，即得該二桿之應力。

若將 cd 或 Cd 桿視為一鏈桿，而以一輻軸支座代替之，各如圖 (c) 或 (d)，亦無不可。

應用此法時，實際上並不必要以支座代替諸桿，作一圖如 (b), (c), 或 (d), 祇須以一桿之應力，視作一輻軸支座之反力即可，茲舉例如下：

例題 4-7. 用求反力之圖解法，求例題 4-3 桁架中 CD , Cd , cd 及 cD 四桿之應力。

解釋 Cd 及 cd 二斜桿既係拉桿，故在同一荷重下，只一斜桿有應力，其他一斜桿之應力必為零。用此法時，可先假設其一斜桿之應力為零，再求其他一斜桿之應力，若該桿之應力為拉力，則假設無誤，否則其實際情形與所假設者正相反。但於此例題，既知 $S_{cd}=0$ ，故不需此步驟，並可將該桿略去。



例題 4-7.

先作一外力之力多邊形，如圖 (b)。以任何點 P 為極點，作一索線多邊形，其首索線 0 經過節點 d ，其尾索線 3 與 CD 桿之引長相交於 g 點。作閉合線 dq ，如圖 (a)。自圖 (b) 之極點 P ，作一線與 dq 平行。又自圖 (b)

之 3 點，作一線與 CD 桿平行。此二線相交於 k 點，故 $3-k$ 等於 CD 桿之應力，其指向係傾向該隔離體，故為壓力。 $k-O$ 等於 Cd 及 cd 二桿應力之合力，將此合力分解為二分力，各與 Cd 及 cd 二桿平行，即得該二桿之應力，均係拉力。此題圖解之意義，一如圖 3-14。

習題 4-17. 用求反力之圖解法解習題 4-7 中之下列諸題。

(P) 桁架中 a 桿之應力 ($S_b=0$)。

(G) 桁架中 a 桿之應力。

(Q) 桁架中 a, b , 及 c 三桿之應力。

(T) 桁架中 c 桿之應力。

4-13. 桁架分析法之八(指數應力法) 指數應力(index stress)法，乃自前述節點數解法脫化而來，故指數應力之計算與節點之數解法相同，於平弦桿用 $\Sigma H=0$ 考慮節點之平衡，惟所計算者係各桿之指數應力而非其平分應力，於斜桿或豎桿用 $\Sigma V=0$ 。但考慮平衡時採用節點法或切力法均可，所計算者亦係指數應力。此法用之於在豎向荷重下等長節間而上下弦又平行之桁架常較節點法為簡便。若桁架之上下弦不平行用之亦不繁雜，惟於節間長度不一律之桁架，則此法頗繁雜而不適用。故本節所述之方法，祇以在豎向荷重下等長節間之桁架為限。茲將此法用於上下弦平行及非平行之桁架者，分別述之如下：

(1) 上下弦平行之桁架 於上下弦平行之桁架，任何桿之指數應力（以下以 S 代表平行弦桁架中各桿之指數應力）均與桿之豎分應力有關，故各桿指數應力之意義如下：

$$(4-3) \quad (a) \text{ 任何桿之實在應力} = \text{指數應力} \times \frac{\text{桿長}}{\text{桁深}}。$$

(b) 豎桿之指數應力，等於其實在應力。

(c) 斜桿之指數應力等於其豎分應力。

(d) 某平弦桿之應力，乃若干斜桿之平分應力加減而成，故此若干斜桿之豎分應力加減所得之數，即係該平弦桿之指數應力。

(e) 於等長節間之平行弦桁架，其各桿之指數應力，與桁深及節間之長度，毫無關係。

上列(b)及(c)二條及方程(4-3)對於(b)及(c)二條之應用，均甚顯然，不

待證明。茲將(d)條及方程(4—3)關於(d)條之應用,證明如下:

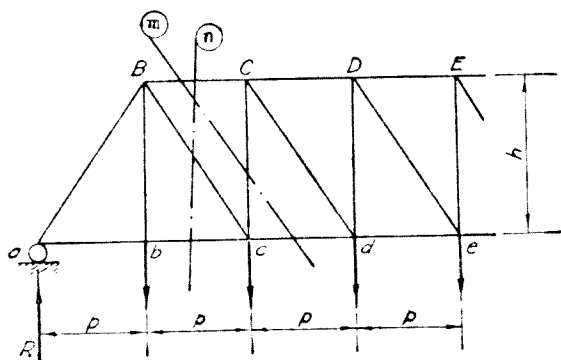


圖 4—18. 等長節間之平行弦桁架

圖 4—18 示一等長節間之平行弦桁架,其深度為 h , 其節間長度均為 p , 其荷重均係豎向,用節點法於節點 a , 則

$$S_{ab} = \pm H_{cB} = \pm V_{cB} \times \frac{p}{h}$$

同時
$$S_{ab} = \bar{S}_{ab} \times \frac{p}{h}$$

故
$$S_{ab} = \pm V_{cB}$$

$$S_{bc} = S_{ab}$$

並
$$S_{cd} = S_{ab} \pm H_{Bc} = \pm H_{aB} \pm H_{Bc} = (\pm V_{aB} \pm V_{Bc}) \frac{p}{h}$$

同時
$$S_{cd} = \bar{S}_{cd} \times \frac{p}{h}$$

故
$$\bar{S}_{cd} = \pm V_{aB} \pm V_{Bc} \quad (4-4)$$

因此
$$S_{de} = \pm H_{aB} \pm H_{Bc} \pm H_{Cd} = (\pm V_{aB} \pm V_{Bc} \pm V_{Cd}) \frac{p}{h}$$

同時
$$S_{de} = \bar{S}_{de} \times \frac{p}{h}$$

故
$$\bar{S}_{de} = \pm V_{aB} \pm V_{Bc} \pm V_{Cd} \quad (4-5)$$

即已證明 de 桿之應力,等於 aB , B 及 Cd 三斜桿分應力加減所得之數,而 de 桿之指數應力,等於該三桿豎分應力加減所得之數。此即(d)條之理論。茲舉例如下:

$$-30 = -(-150) + (+30) - (+210) = -30$$

注意若將節間之長度或桁深改變，則各桿之指數應力仍不變。

習題 4—18. 用指數應力法，求習題 4—14 桁架中諸桿之應力。

(2) 上下弦桿不平行之桁架 ① 未述此法之先，應先明瞭弦三角形(chord triangle)之意義。於尋常無反斜桿之桁架，每一弦桿與二腹桿，成一三角形，即稱為該弦桿之弦三角形。圖 4—18 之三角形 BCE 為弦桿 BC 之弦三角形。

於弦桿不平行之桁架，其各桿指數應力(以下以 \bar{S} 代表之)之求法如下：

(a) 先假設其上下弦桿係平行，用前法求其各桿之指數應力，得指數應力 \bar{S}_0 。

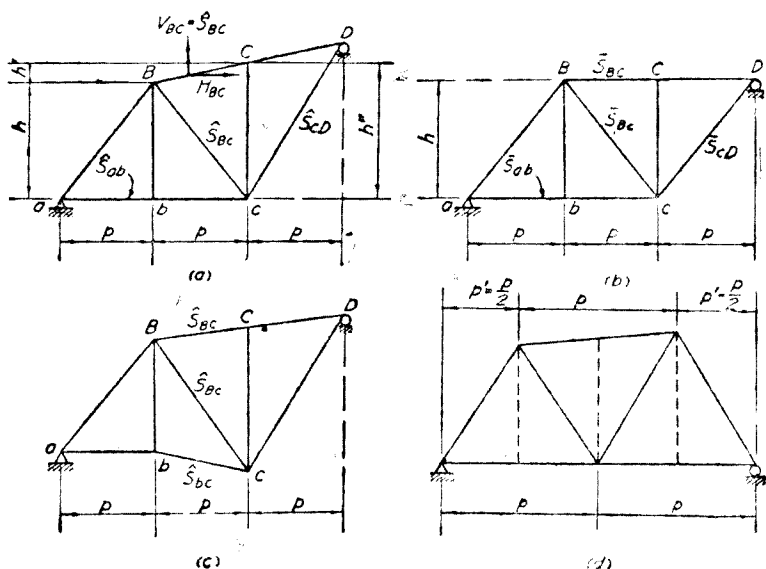


圖 4—19. 非平行弦桁架之指數應力

① 此法原於美國之瓦(J. A. L. Waddell, 1854—1938)氏，見所著之橋梁工程(Bridge Engineering)，第一卷，159頁。本節所述之法，係由本書著者加以改良者。此外美國之史(C. M. Spofford)氏亦有一法，見所著之結構理論(Theory of Structures)，184頁，但遠不如上法之簡便，故不贅述。

(b) 將斜向弦桿之 \bar{S} ，乘以其豎投影高度與其弦三角形豎高度（自其二腹桿之交點至該弦桿之豎距，故與尋常三角形之高度不同，見圖 4—19(a)）之比，即得其指數應力 \hat{S} （即其豎分應力），其證明如下：

如欲求圖 4—19(a) 非平行弦桁架中弦桿 BC 之指數應力 \hat{S}_{BC} ，先假設其上下弦桿係平行，如圖 4—19(b)，求得 \hat{S}_{BC} 。值

$$S_{BC} = S_{BC} \times \frac{h}{p} = \frac{M_c}{h} \times \frac{h}{p} = \frac{M_c}{p}$$

$$\hat{S}_{BC} = V_{BC} = H_{BC} \times \frac{h'}{p} = \frac{M_c}{h''} \times \frac{h'}{p} = \frac{M_c}{p} \times \frac{h'}{h''}$$

$$\text{故 (4-7) } \quad \hat{S}_{BC} = \bar{S}_{BC} \times \frac{h'}{h''}$$

其中 M_c 係桁架在荷重下節點 c 之彎矩， h' 係弦桿 BC 之豎投影高度，而 h'' 係弦三角形 BCc 之豎高度。

(c) 用節點法或切力法，將該弦桿之弦三角形之其他二桿之指數應力 \bar{S} ，加以改正，即得其指數應力 \hat{S} 。如

$$(4-8) \quad \hat{S}_{Bc} = \bar{S}_{Bc} \pm \hat{S}_{BC}$$

$$\text{及 (4-9) } \quad \hat{S}_{Cc} = \bar{S}_{Cc} \pm \hat{S}_{BC} \pm \hat{S}_{cB}$$

若某腹桿相鄰之二個弦三角形中，其二弦桿均非平弦桿，如圖 4—19(e) 之腹桿 Bc 及弦桿 BC 與 bc ，則 Bc 桿指數應力改正時，應將 BC 及 bc 二弦桿之指數應力均計入如下：

$$(4-10) \quad \hat{S}_{Bc} = \bar{S}_{Bc} \pm \hat{S}_{BC} \pm \hat{S}_{bc}$$

(d) 其餘之平弦桿及腹桿之指數應力，不需改正，即 $\hat{S} = \bar{S}$ 。故祇與斜弦桿成弦三角形之腹桿，需要改正。平弦桿不需改正之證明見下：

(e)

$$(4-11) \quad \text{斜桿(腹桿及弦桿)之實在應力} = \frac{\text{指數應力} \times \text{桿長}}{\text{桿之豎投影高度}}$$

$$(4-12) \quad \text{平弦桿之實在應力} = \frac{\text{指數應力} \times \text{桿長}}{\text{弦三角形之豎高度}}$$

斜桿無論係腹桿抑或弦桿，其指數應力均係其豎分應力。故方程(4-11)不需證明。方程(4-12)與 (a) 條互相關聯，故聯合證明如下。以圖 4—19 之弦桿 ab 為例，於桁架(b)，

$$\bar{S}_{ab} = S_{ab} \times \frac{h}{p} = \frac{M_B}{h} \times \frac{h}{p} = \frac{M_B}{p}$$

於桁架(a),

$$S_{ab} = \frac{M_B}{h} \times \frac{p}{p} = \frac{M_B}{p} \times \frac{p}{h} = \bar{S}_{ab} \times \frac{p}{h}$$

但依方程(4-12),

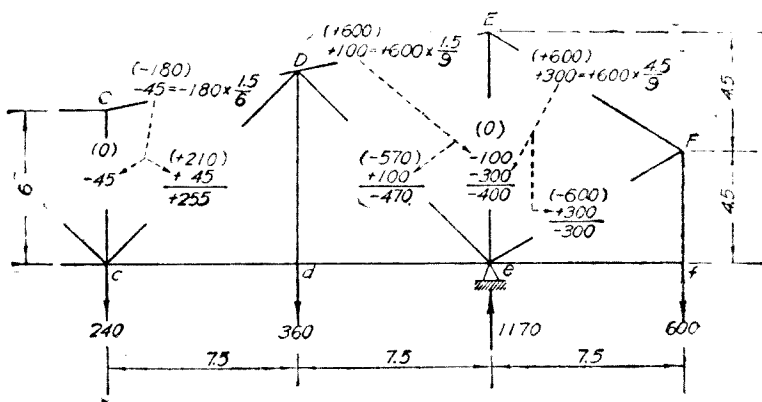
$$S_{ab} = S_{ab} \times \frac{p}{h}$$

其中 p 等於弦桿 ab 之長, h 等於其弦三角形 aBb 之豎高度, 故

$$\hat{S}_{ab} = \bar{S}_{ab} \quad (4-13)$$

於無豎桿之桁架, 如倭(Warren)氏桁架(圖 4-19(d)), 上法亦可用, 惟其上部兩端之桁幅長度 p' , 必為 p 之半, 庶加入應力為零之三豎桿後(圖(d)之虛線), 該桁架仍成為等長節間之桁架, 否則無論其上下弦桿是否平行, 本節中所述之諸法均不能用。

例題 4-9. 用指數應力法, 求例題 4-2 桁架中諸桿之應力。



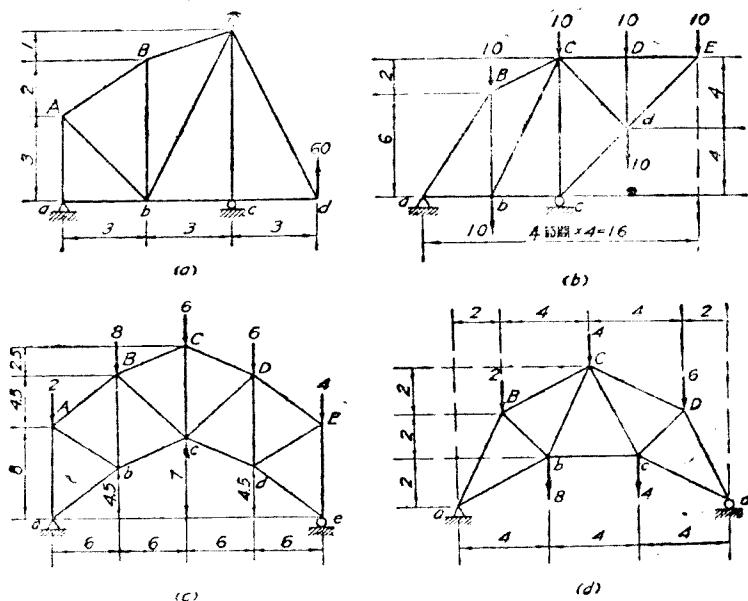
例題 4-9.

解答 若將該桁架視為平行弦桁架, 則其各桿之指數應力 \hat{S} 與例題 4-8 所得者, 完全相同, 故不必計算 \hat{S} 。其需要改正者, 祇三個弦三角形 CDc , DEe , 及 EFe 三邊之諸桿。其改正如下:

附圖括弧中之指數應力，係抄自例題 4—8 弦桿 CD, DE ，及 EF 指數應力之改正，係依上述(b)條之法。 CD 桿之豎分應力，既係 -45 ，考慮節點 C 之平衡，則 Cc 桿之應力(原為零)必 -45 。再考慮節點 c 之平衡，則 cD 桿之豎分應力(原係 $+210$)必增加 $+45$ ，故其指數應力為 $+255$ 。 Ee 桿之改正，係考慮節點 E 之平衡，用方程 4—9。此題各桿實在應力之計算如附表，其計算係用方程(4—11)及(4—12)，所得之結果與例題 4—2 者相符。

	桿	指 數 應 力	乘 數	實 在 應 力
弦	BC	-180	$7.5/6$	-225
	CD	-45	$7.65/1.5$	-229.5
	DE	$+100$		$+510$
	EF	$+300$	$8.75/4.5$	$+583$
	ab, bc	$+150$	$7.5/6$	$+187.5$
桿	cd, de	-30	1	-30
	cf	0	$7.5/4.5$	0
斜	aB	-150	$9.6/6$	-240
	Bc	$+30$		$+18$
	cD	$+255$	$10.61/7.5$	$+320.5$
	De	-470		-664
	cF	-300	$8.75/4.5$	-583
豎	Bb	$+120$	1	$+120$
	Cc	-45		-45
	Dd	$+360$		$+360$
	Ee	-400		-400
	Ff	$+600$		$+600$

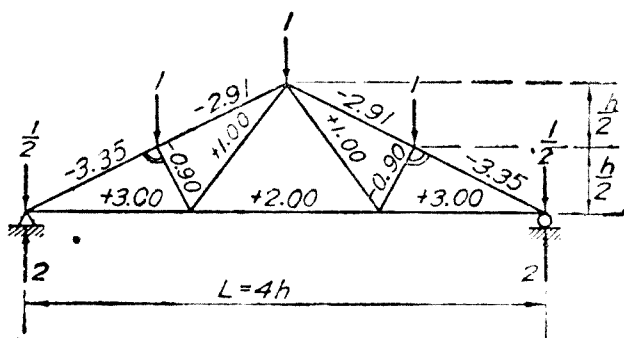
習題 4—19. 用指數應力法，求下列桁架諸桿之應力。



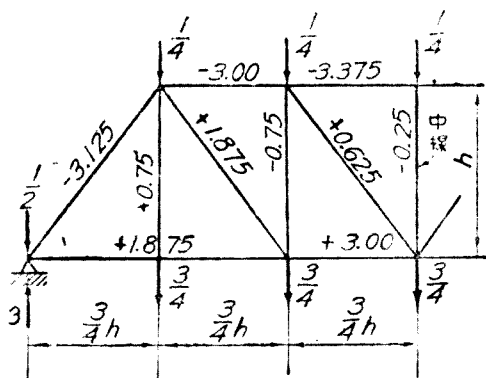
習題 4-19.

應力係數 等長節間之桁架，受均佈荷重時，其各節點之集中荷重均相等。

若先假定各節點之集中荷重均為一而求其應力，再乘以實在荷重之數量，即得其實在應力。此項以節點集中荷重為一所得之應力，稱為應力係數 (stress coefficient)。此項應力係數，可用於任何數量之荷重，乃其優點。且於形式有幾何相似性之桁架，其各桿之應力，祇與桁深與跨度之比有關，而與二者之絕對值無關。故分析若干形式及荷重均相似之桁架時，用此法頗為方便。圖 4-20(a) 示一屋頂桁架之應力係數。圖 4-20(b) 示一橋梁桁架之應力係數，其節點集中荷重 1 係分佈於上下二弦。



(a)



(b)

圖 4—20. 應力係數

習題 4—20. (a) 若 $L=3h$, 求圖 4—20(a) 桁架中各桿之應力係數。

(b) 若節點集荷重 1 有 $\frac{1}{3}$ 在上弦, $\frac{2}{3}$ 在下弦, 求 4—20 (b) 桁架中各桿

之應力係數。

4-14. 桁架分析法之九(代替法) ① 上述桁架分析之八種方法,多能用於簡單桁架或聯合桁架。於複雜桁架(惟節點及彎矩之數解法有時能用於此項桁架,見例題 4-10 及習題 4-22,可用代替法(method of substitution)。惟代替法之應用,並不祇限於複雜桁架。凡上述八種分析法所能應用之桁架,此法均可應用,亦不繁雜,惟常無此需要耳。故代替法可視為靜定桁架分析法中最普通之一。②

圖 4-21 (a) 示一靜定而又穩定③之複雜桁架,受任何荷重 P_1, P_2 , 及

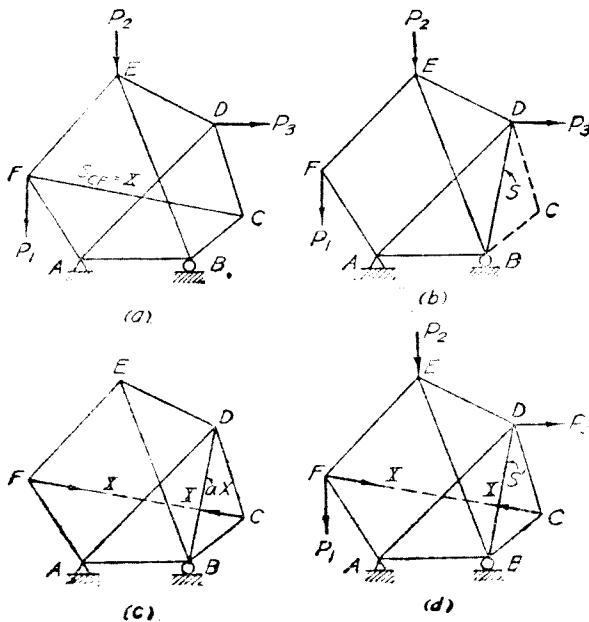


圖 4-21 代替法(一)

- ① 此法係德國亨 (L. Henneberg) 氏所創,見所著之剛系靜力學 (Statik der Starrer Systeme), 1886 年出版,並參閱本書著者之用代替法求威氏桁架之反力 Reactions of Wichert Truss by Method of Substitution一文,載國立清華大學理科報告甲種,第二卷,第六期,365 頁。
- ② 尙有下二節所述之虛功法及機動法,亦係普通之桁架分析法。
- ③ 圖 4-21 (a) 之桁架,如不合乎圖 4-10 (c) 及 (d) 之情形,當然係穩定之桁架。

P_3 。但其中任何桿，如 CF 之應力 X ，不易以上述之八種分析方法計算之。若將 CF 桿移去，而以任何桿如 BD 代替之，如圖 4-21(b)。則此桁架仍係靜定而且穩定。設 S 為圖 (b) 中 BD 桿之應力，其計算極易。蓋圖 (b) 之桁架，係一簡單桁架，而其以虛線所示之二桿 BC 及 CD ，其應力又皆為零。再將荷重移去，假設 CF 桿有拉應力 X (即 S_{CF})，如圖 (c)。又設 a 為 $X=1$ 時 BD 桿中之應力，則 CF 應力為 X 時， BD 桿中之應力必為 aX 。 a 之值亦極易計算(注意 a 之值與荷重無關係)。若將圖 (b) 及 (c) 之二桁架相疊加，如圖 (d)，並設 S' 為 BD 桿在荷重及 CF 桿拉應力 X 作用下之應力，則

$$(4-14) \quad S' = S + aX$$

若此另加之桿 BD 無應力(即 $S'=0$)，則圖 (d) 之桁架與圖 (a) 者完全相同。如是，若使 $S'=0$ ，即可定 CF 桿中之應力 X ，故

$$S' = 0 = S + aX,$$

$$(4-15) \quad S_{CF} = X = -\frac{S}{a}$$

既知 X 之值，其他諸桿之應力，不難以節點法或其他分析法求得。

於更複雜之桁架，或需以另二或數桿以代替其中之二或數桿，始可解答，故普通言之，可用下列方程：

$$(4-16) \quad \left. \begin{aligned} S_1' &= 0 = S_1 + a_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \dots \\ S_2' &= 0 = S_2 + a_2 X_1 + \beta_2 X_2 + \gamma_2 X_3 + \dots \\ S_3' &= 0 = S_3 + a_3 X_1 + \beta_3 X_2 + \gamma_3 X_3 + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\}$$

其中 X_1, X_2, X_3, \dots = 被代替桿中之應力。 S_1, S_2, S_3, \dots = 另加代替桿 1, 2, 3, \dots 在荷重 P 下並 $X_1 = X_2 = X_3 = \dots = 0$ 時之應力。 a_1, a_2, a_3, \dots = 另加代替桿 1, 2, 3, \dots 在 $X_1 = 1$ 時(荷重 $= X_2 = X_3 = \dots = 0$) 之應力。 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ = 另加代替桿 1, 2, 3, \dots 在 $X_2 = 1$ 時(荷重 $= X_1 = X_3 = \dots = 0$) 之應力。 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ = 另加代替桿 1, 2, 3, \dots 在 $X_3 = 1$ 時(荷重 $= X_1 = X_2 = X_4 = \dots = 0$) 之應力。用行列式解方程 (4-16)，得

$$(4-17) \quad X_1 = -\frac{N_1}{D}, \quad X_2 = -\frac{N_2}{D}, \quad X_3 = -\frac{N_3}{D}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \begin{vmatrix} S_1 \beta_1 \gamma_1 \cdots \\ S_2 \beta_2 \gamma_2 \cdots \\ S_3 \beta_3 \gamma_3 \cdots \\ \cdots \\ a_1 \beta_1 S_1 \cdots \\ a_2 \beta_2 S_2 \cdots \\ a_3 \beta_3 S_3 \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}, & N_2 &= \begin{vmatrix} a_1 S_1 \gamma_1 \cdots \\ a_2 S_2 \gamma_2 \cdots \\ a_3 S_3 \gamma_3 \cdots \\ \cdots \\ a_1 \beta_1 \gamma_1 \cdots \\ a_2 \beta_2 \gamma_2 \cdots \\ a_3 \beta_3 \gamma_3 \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}, \\
 N_3 &= \begin{vmatrix} a_1 \beta_1 S_1 \cdots \\ a_2 \beta_2 S_2 \cdots \\ a_3 \beta_3 S_3 \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}, & D &= \begin{vmatrix} a_1 \beta_1 \gamma_1 \cdots \\ a_2 \beta_2 \gamma_2 \cdots \\ a_3 \beta_3 \gamma_3 \cdots \\ \cdots \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

前已言之代替法可用以分析任何靜定之桁架。圖 4—22(a) 示一簡單桁架。若欲求其 a 桿之應力，可另加一 b 桿以代替之而用此法。

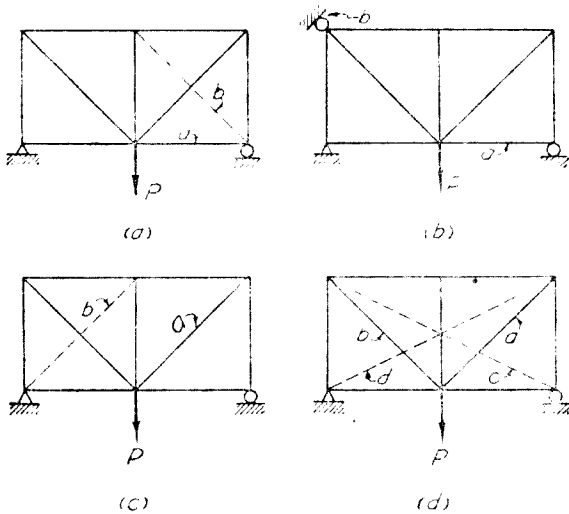


圖 4—22. 代替法 (二)

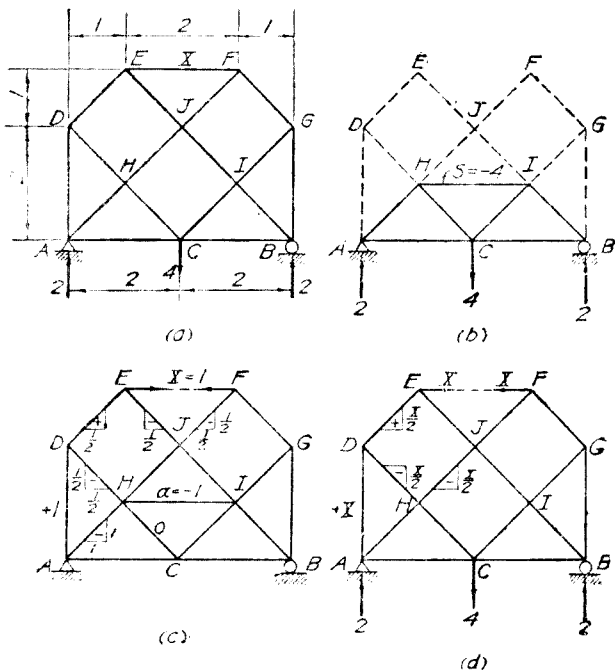
此法並不限於桿之互相代替，桿與支座亦可以彼此代替^①。如求圖 4—22(b) 桁架中 a 桿之應力可以一輻軸支座 b 之反力代替之。同此支座亦可以桁架之桿代替之。故此法亦可用以求靜定反分力數多於三之桁架反力，此點

① 此點係本書著者所推廣，亨氏原法未述及之。

當於 4-18 中論之。

用此法時，桿及支座應如何代替，毫無限制。惟代替後所得之新結構，亦必係靜定而又穩定，應使代替桿之應力或代替支座之反力，易於計算。如圖 4-22 (c)，若以 b 桿代替 a 桿，則所得之新結構，既不靜定，又不穩定。又如圖 4-22 (d)，若以 c 及 d 二桿各代替 a 及 b 二桿，則所得之新結構，如圖 4-10 (b) 或 (e)，非不穩定，即不靜定，是皆用此法時應特別注意之點。

例題 4-10. 用代替法求此複雜桁架中 EF 桿之應力。



例題 4-10.

解答 (1) 本題之桁架如附圖 (a)，其中 H, I, J ，是否係節點，絕無關係，若以 HI 桿代替 EF 桿，如附圖 (b)，應用 2-10 節之平衡定理 1，即可知附圖 (b) 中虛線所示諸桿之應力皆為零。其有應力之諸桿，成一極簡單之優(Warren)式桁架。用彎矩之數解法，即可求得 HI 桿之應力 $S = -4$ 。

再將荷重移去，並使 EF 之應力（假設為拉力） $X=1$ ，如附圖(c) 用節點之解法，及圖 4-12 (b) 所示之法，依 $F \rightarrow D \rightarrow I$ 及 $F \rightarrow I \rightarrow H$ 之次序，考慮諸節點之平衡，即極易求得 HI 桿之應力 $a=-1$ 應用方程 (4-15)，則 EF 桿中之應力 X 為

$$X = -\frac{S}{a} = -\frac{-4}{-1} = -4$$

既知 EF 桿之應力，其餘諸桿之應力，可以用節點法求得，毫無困難。

(2) 此點亦可以節點法解之。如圖(d)所示，先設 EF 桿之應力為拉力 X ，用圖 4-12 之法，求得 AF 桿之豎分應力為 $-X/2$ ，及 AD 桿之應力為 $+X$ ，再考慮節點 A 之平衡，用 $\Sigma V=0$ ，得

$$X - \frac{X}{2} + 2 = 0,$$

故 $X = -4$ 。

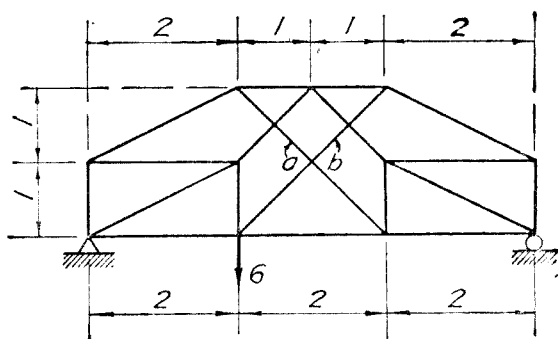
又此結構及其荷重均係對稱，故考慮節點 C 之平衡，即可得 $V_{CD} = V_{CA} = +2$ ，由此即可用節點法求得 EF 桿之應力。節點法用於此題雖亦甚簡易，但於較繁雜之桁架，其簡易常不及代替法。此結構亦可以彎矩法解之，列為習題 4-22。

習題 4-21. 用代替法但以另一代替桿（即不用 HI 桿），求例題 4-10 桁架中 EF 桿之應力。

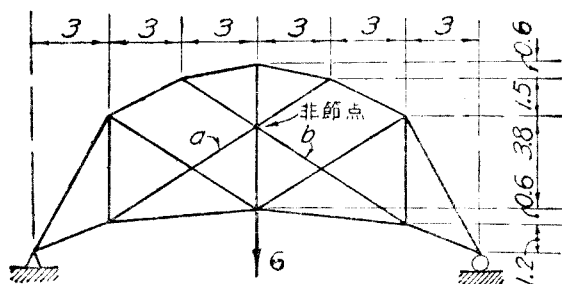
習題 4-22. 用彎矩之數解法，求例題 4-10 桁架中 EF 桿之應力。

習題 4-23. 用代替法求習題 4-7 中 (o)（簡單桁架）及 (p)（聯合桁架）二桁架 a 桿之應力，計算時均須用一輻軸支座代替 a 桿。

習題 4-24. 用代替法求下列桁架 a 及 b 二桿之應力。



(a)

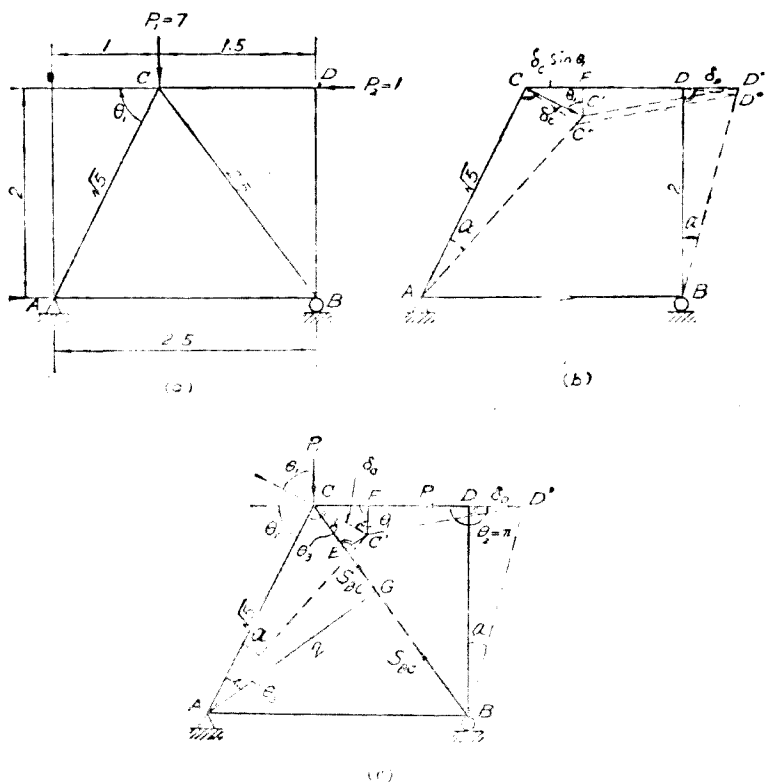


(b)

習題 4—24.

4—15. 桁架分析法之十(虛功法) 於原則上,用虛功法以求桁架中之應力,與3—8節所述用同法以求反力完全相同。先將所欲求應力之桿移去,而代以其應力(常先假定為拉力),並將此應力視作一外力,靜定之桁架,若移去一桿,必變為不穩定而有移動,若使此桁架某節點有極小之虛移位,則其餘諸節點(支點之節點當然不能移位),亦必有與控制情形相符之虛移位,若應用方程(3—4)於受有外力之諸節點,即可求得該桿之應力。故應用此法時,必先求得受有外力諸節點之虛移位,但所需者祇其相對之值,其絕對值若干,毫無需要,茲舉例如下:

例題 4-11. 用虛功法求此桁架 CB 桿之應力。



例題 4-11.

解答 附圖(a)示該桁架及其荷重。若將 BC 桿移去，如附圖(b)，則此桁架成一可移動之四邊形。假設此四邊形向右移動，而節點 C 移至 C' ，節點 D 移至 D' 。節點 A 及 B 係支點，當然不能移動。該桿既皆假定為剛體，故 $AC''=AC, BD''=BD, C''D''=CD$ ，因此 CC'' 及 DD'' 二移位，各為以 A 及 B 為圓心之圓弧，此即 C 及 D 二節點移位之控制情形。但 CC'' 及 DD'' 二移位既極小，故可視為各與 AC 及 BD 成垂直，如 $CC'= \delta_c$ ， $DD'= \delta_D$ ，及 $C'D'=CD$ ，並無差誤。如附圖(c)所示， C' 及 D'

各與 C'' 及 D'' 之位置似相差甚大，蓋因所示之移位 δ_C 及 δ_D 與 AC 及 BD 二桿之長度相比太大之故。若移位與桿長相比，成爲極小，則實際上 C' 及 D' 之位置，將各與 C'' 及 D'' 者相合。此種以垂直線代替圓弧之辦法將來於第十二章論結構之變位時，亦必需採用。

$C'D'$ 既可視作與 CD 相等，同時 $C'D'$ 亦可視作與 FD' 相等，則 $DD' = CF$ ，或 $\delta_D = \delta_C \sin \theta$ ，由附圖(a) $\sin \theta = 2/\sqrt{5}$

$$\frac{\delta_D}{\delta_C} = \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

即 C 及 D 二節點虛移位與控制情形相符之相對值。注意於此例中 AC 及 BD 二桿轉動之角 α 係相等。

如附圖(c)所示，節點 C 有豎向荷重 P_1 ，其作用線與 δ_C 間之角爲 θ_1 。該節點又有 BC 桿之拉應力 S_{BC} ，其作用線與 δ_C 間之角爲 θ_3 。節點 D 有平向荷重 P_2 ，其作用線與 δ_D 間之角爲 $\theta_2 = \pi$ 。應用方程(3-4)，得

$$(4-18) \quad P_1 \delta_C \cos \theta_1 + P_2 \delta_D \cos \theta_2 + S_{BC} \delta_C \cos \theta_3 = 0$$

$$\text{故} \quad S_{BC} = -P_1 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_3} - P_2 \frac{\delta_D \cos \theta_2}{\delta_C \cos \theta_3}$$

其中 $\cos \theta_1 = 1/\sqrt{5}$ [見附圖(a)及(c)]， $\cos \theta_2 = -1$ ，及 $\cos \theta_3 = 2/\sqrt{5}$ ，其求法如下：自 A 作一線與 BC 垂直，並與其交於 G 點，注意 $CC'E$ 與 ACG 係二相似三角形，故

$$\cos \theta_3 = \frac{CE}{CC'} = \frac{AG}{AC} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

以 δ_D/δ_C ，及 $\cos \theta_1$ ， $\cos \theta_2$ ，……等之值代入方程(4-18)中，即得

$$\begin{aligned} S_{BC} &= -P_1 \times \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} - P_2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{-1}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \\ &= -\frac{P_1}{2} + P_2 = -\frac{7}{2} + 1 = -2.5 \end{aligned}$$

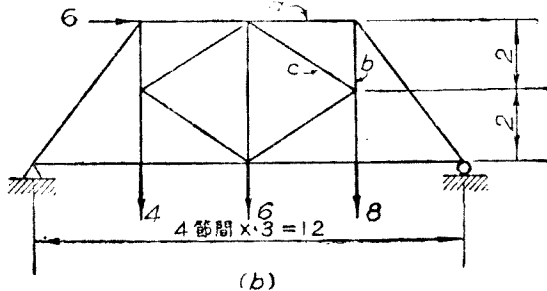
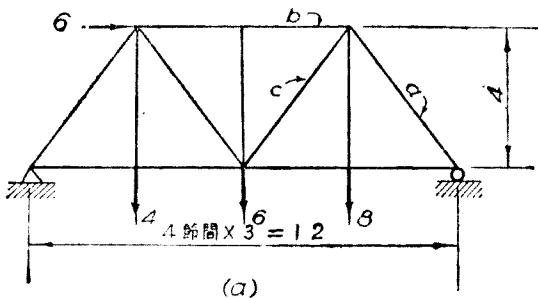
觀察圖(c)，可知 $\delta_C \cos \theta_1 = C'F$ ， $\delta_D \cos \theta_2 = -DD'$ ，及 $\delta_C \cos \theta_3 = CE$ ，即 δ_C 及 δ_D 各於 P_1 ， P_2 ，及 S_{BC} 作用線上之分移位也。故方程(4-18)可寫成

$$(4-19) \quad P_1(C'F) - P_2(DD') + S_{BC}(CE) = 0$$

$C'F$, DD' , 及 CE 之值, 亦可於附圖(c)中量定之。但不易準確

此法似較繁瑣, 但亦係一最普通之桁架分析法。可用於任何類之靜定桁架, 而不必先求其反力。且下節所述之機動法(kinematic method), 即完全以此法為根據。用此法以求桁架應力之感應線, 最為適宜。若此法與第十二章所述維(Williot)氏之結構變位圖解法聯合採用, 其簡捷常為任何他法所不及。

習題 4—25. 用虛功法求下列二桁架中 a , b , 及 c 三桿之應力。



習題 4—25.

4—16. 桁架分析法之十一(機動法) 用上述之虛功法以求桁架中任何桿之應力, 必須求得受有外力諸節點虛移位之相對值。若桁架之此項節點甚多, 則用虛功法頗非簡易, 於此, 可用本節所述之機動法。

此法係彌(Müller-Breslau)氏^①於 1887 年所創, 亦稱結構之機動理論,

① 見第 146 頁註脚 ① 所舉彌氏之書, 第一卷 54 及 55 節。

茲以例題 4—11 爲例，述之如下：

將例題 4—11 桁架之 BC 桿移去，而代以其拉應力，其 C 及 D 二節點之虛移位 δ_C 及 δ_D ，係各與 AC 及 BD 桿成垂直，如例 4—11 附圖 (b) 及 (c) 所示，將 AC 及 BD 二桿引長，相交於 I 點。如圖 4—23 (a)，則虛移位 δ_C 及 δ_D 相當於以 I 爲轉心之轉動，^①而 I 點稱爲 CD 桿之瞬心 (instantaneous center)。^② 瞬心之意義及實際，與圖 3—8 所示之虛鉸相彷彿。因此 δ_D 及 δ_C 之相對值，必與 DI 及 CI 之長度成正比例，或

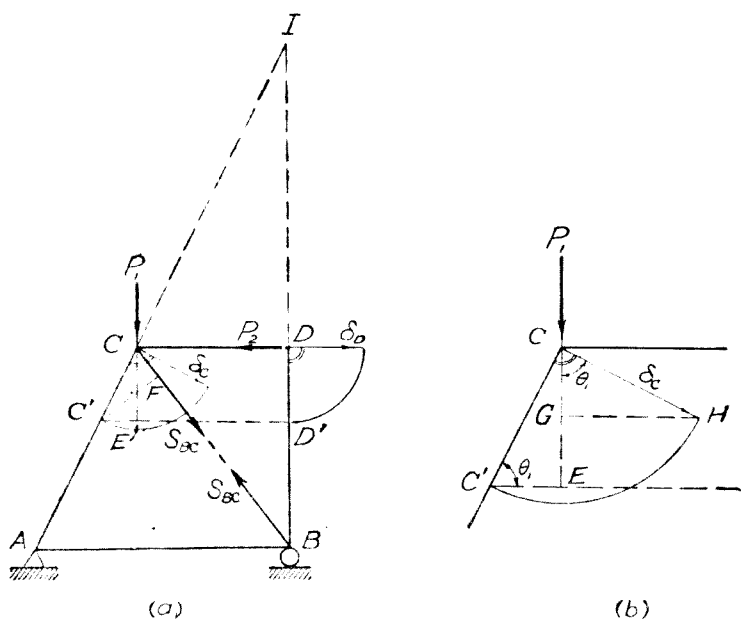


圖 4—23. 機動法 (一)

$$(4-10) \quad \frac{\delta_D}{\delta_C} = \frac{DI}{CI}$$

① 「凡平面內之移位，均可相當於轉動」之理論，係查 (M. Charles) 氏於 1830 年所創。

② 瞬心係柏 (J. Bernoulli) 氏於 1742 年所發現。

再將 δ_D 及 δ_C 各繞 D 及 C 二節點轉 90° ，得 D' 及 C' 二點，即 $\delta_D = DD'$ ，及 $\delta_C = CC'$ ，代入方程(4—20)中，得

$$\frac{DD'}{CC'} = \frac{DI}{CI} \quad (4-21)$$

由方程(4—21)，可知圖 4—23(a)之 $C'D'$ 線與 CD 桿平行。

再觀察圖 4—23 (b)， CGH 及 $C'E$ 係二相等之三角形，故 $\delta_C \cos\theta_1 = CG = C'E$ ，如是則方程(4—18)之首項為

$$P_1 \delta_C \cos \theta_1 = P_1 (C'E) \quad (4-22)$$

其中 $P_1 (C'E)$ 係外力 P_1 對於 C' 之力矩。故方程 (4—18) 可寫成(圖 4—23(c))，

$$P_1 (C'E) - P_2 (DD') + S_{BC} (C'F) = 0 \quad (4-23)$$

由是可知：虛功方程，即相當於諸節點之外力(荷重及 S_{BC})各對於其 C' 及 D' 之力矩方程(應注意力矩之正負號)，而 C' 及 D' 二點之位置，可作任何直線與 CD 桿平行而定。蓋所需者祇 $C'E, DD'$ ，及 $C'F$ 之相對值，而量定其值時，可用任何適宜之比例尺。故方程(4—23)雖與方程(4—19)相似，但其應用之簡便則遠過之。

此法用於複雜桁架，其優點尤為顯然。試以此法求圖 4—21(a) 桁架中 CF 桿之應力。先知虛功法，將 CF 桿移去，而代以其拉應力 S_{CF} ，如圖

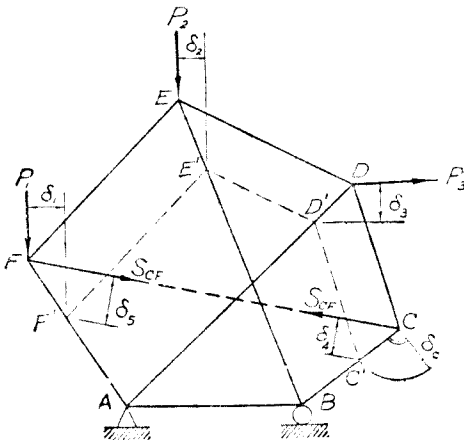


圖 4—24. 機動法(二)

4—24。再考慮其各節點之虛移位。自 C 點起，假設 C 點有虛移位 δ_C ，與 BC 桿垂直。將虛移位轉 90° ，得 C' 點。自 C' 點作一線與 CD 平行，並與 AD 桿交於 D' 點， DD' 即 D 點之虛移位。注意此圖之 $ABCD$ 四邊形，與圖 4—23(a) 之 $ABCD$ 四邊形相彷彿，故求虛移位之方法亦相同。

同此，作 $D'E'$ 與 DE 桿平行，得 E 點之虛移位 EE' 。作 $E'F'$ 與 EF 桿平行，得 F 點之虛移位 FF' 。圖 4—24 之 $C'D'E'F'$ 稱爲此桁架之虛移位圖。應用各節點之力矩方程（與方程(4—23)相似），得

$$P_1\delta_1 + P_2\delta_2 - P_3\delta_3 + S_{CF}\delta_4 - S_{CF}\delta_5 = 0$$

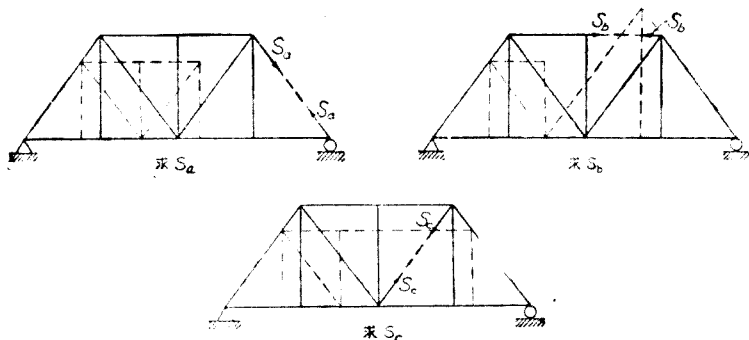
$$\text{由此(4—24)} \quad S_{CF} = \frac{P_1\delta_1 + P_2\delta_2 - P_3\delta_3}{\delta_5 - \delta_4} = \frac{\Sigma M}{\delta_5 - \delta_4}$$

$$\text{其中} \quad \Sigma M = P_1\delta_1 + P_2\delta_2 - P_3\delta_3$$

上列解答，比 4—14 節用代替法之解答較爲簡捷，且不必先求其反力。但結構如過於繁複，則其虛移位圖有時頗不易求得。此法可用以決定某桁架之是否穩定，而於複雜桁架如圖 4—11 所示者，尤爲方便。此點當於 4—18 節詳論之。

習題 4—26。用機動法解答習題 4—25。

提示 習題 4—25 (a) 桁架之三個虛移位圖，如下圖所示，試細心研究其意義，作法，及用。



習題 4—26。

4—17。多重腹桿桁架之近似分析法 多數舊式桁架，如圖 4—3 所示者，皆有雙重或多重腹桿，若干工程師以爲如此可增

加桁架之剛勁，其爲靜不定式，自不待論。此種桁架之精確分析，當然不在本書範圍之內，茲僅述其近似分析法如下。

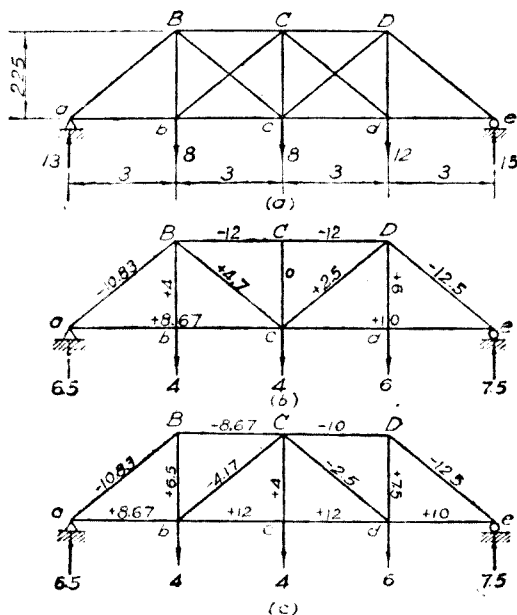
此種桁架縱欲用精確法分析之，亦當先用近似法求其諸桿之近似應力及近似截面面積。蓋用精確分析法時，必須知其中諸桿之截面面積(或其相對值)，如此項面積不本乎經驗而加以假定，則必先用此近似分析法。此種桁架爲現下仍採用者，恐僅唐(Town)氏之格式桁架一種。若唐氏桁架以輕小之鋼料製之，並採用銲接，頗爲剛勁而經濟。用之工廠中以承受較輕之荷重，尙屬適宜。分析此項桁架時，近似法於實際上常夠準確。故近似法並非完全無用而又無價值者。

近似法主要之點，即係假定多重腹桿桁架分開而成爲二個或更多之分析架(component truss)。原桁架之弦桿及端桿，爲諸分析架所共有，而腹桿則各分析架，多自成一系統(豎桿有時亦係共有者)。原桁架之荷重，亦分與諸分析架，其分法常視腹桿之分法而定。茲舉例如下，並將其答案與以較精確法所得者比較之，庶學者得明瞭此近似法之近似程度、實際如何。

例題 4—12. 用近似法求此雙重腹桿桁架中諸桿之應力

解釋 將此桁架分爲二分桁架，荷重各得一半，如附圖 (b) 及 (c)，弦桿及豎桿爲二分桁架所共有，故該桿等 (b) 及 (c) 之應力相加(代數加法)，始得其 (a) 之應力。此項將荷重平分於二分桁架，等於將桁架中部二節間之切力，由其二交叉斜桿各承一半。附表示用此近似法與精確法所得應力之比較，觀此表可知：用近似法所得之結果，除 Bc 及 cD 二桿之應力稍小， Cd 桿之應力性質不同及 Cc 桿之應力略大外，其餘諸桿之應力，均所差不多，且有與精確法之結果完全相同者。又表中用精確法所得之應力，係根據表中第

二行所列各桿截面面積之相對值，若此值改變，則第三行之應力，亦隨之改變，故表中應力之比較，並非完全確定。



例題 4-12.

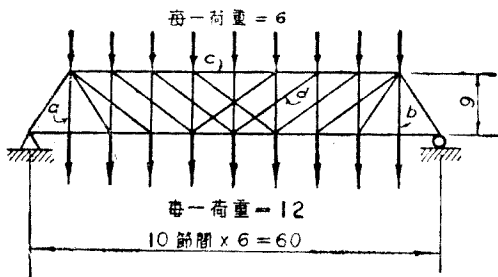
習題 4-27. 用近似法，求下列諸多重腹桿桁架中 $a, b, c,$ 及 d 各桿之應力。

提示 (a) 費氏桁架有雙重腹桿，若假定其中部之二交叉斜桿在一定荷重下，祇有一桿有應力。再將任何一腹桿移去（副桿 a 及 b 並端斜桿除外），則此桁架變為靜定。用近似法，需將其分為二分桁架，惟 a 及 b 二副桿及其上下二端之荷重，可屬於任何分桁架。其分派有二法：(1) 副桿 a 及 b 為二分桁架所共有，其上下二端之荷重，各得一半；(2) 副桿及其二端之荷重，當屬於何分桁架，應以各桿應力成爲最大爲準。分析此桁架時，應二法並用，以資比較。

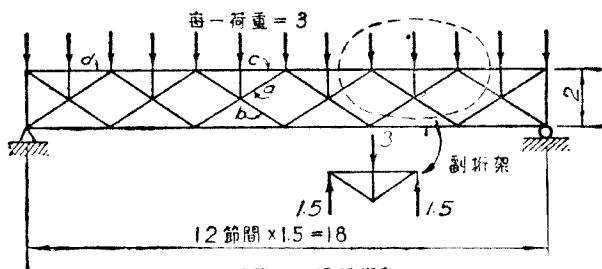
(b) 此桁架有雙重腹桿及副桁架。分析時先將副豎桿及其上端之荷重略去，再將副桁架之應力加於主桁架之斜桿。

(c) 此桁架亦有副桁架，分析方法與 (b) 相似。

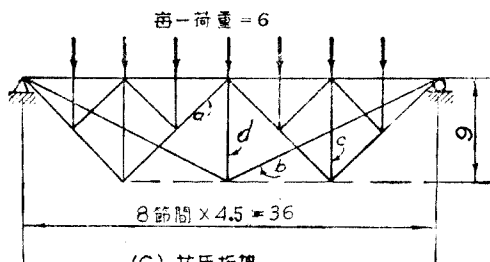
(d) 此桁架有四重腹桿，故分析時應分為四分析架。



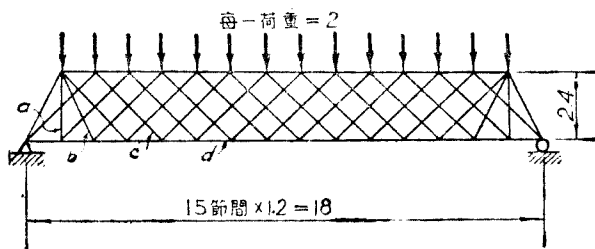
(a) 喬氏桁架



(b) 双重腹桿之倭氏桁架



(c) 芬氏桁架



(d) 唐氏格式桁架

習題 4-27.

精確法與近似法所得之應力比較表

桿	各桿截面面積之相對值	精確法所得之應力	近似法所得之應力
<i>ab</i>	2	+17.33	+17.33
<i>bc</i>		+18.63	+20.67
<i>cd</i>		+19.59	+22.00
<i>de</i>		+20.00	+20.00
<i>aB</i>	3.35	-21.67	-21.67
<i>BC</i>		-22.70	-20.67
<i>CD</i>		-24.41	-22.00
<i>De</i>		-25.00	-25.00
<i>Bc</i>	1	+ 6.70	+ 4.17
<i>bC</i>		- 1.63	- 4.17
<i>cD</i>		+ 5.51	+ 2.50
<i>Cd</i>		+ 0.51	- 2.50
<i>Bb</i>		+ 8.98	+10.50
<i>Cc</i>		+ 0.67	+ 4.00
<i>Dd</i>		+11.69	+13.50

4-18. 結構靜定與穩定之通則 於 3-2 及 3-3 節曾闡明若本身穩定之結構，對於其反力係靜定並穩定，則其獨立分反力之數必等於三，即 $r=3$ 。此蓋專就結構之外力而論。於 4-5 節又曾闡明桁架本身如係靜定並穩定，則其桿數與節點數之關係，必與方程(4-1)相符，即 $b=2j-3$ 。此蓋專就內力而論。前此所舉之例題及習題中，其獨立分反力之數係多於三，

而其桁架之桿數 b 亦少於 $2j-3$ 。故專就外力論係靜不定之結構，專就內力論係不穩定之結構，但合之則成一靜定而又穩定之結構。蓋如前述之代替法，可將桁架之某桿移去，而增加一分反力以代替之，使其未知項之數仍不改變。故研究結構之靜定與穩定，必將外力與內力同時並論，始切合實際。

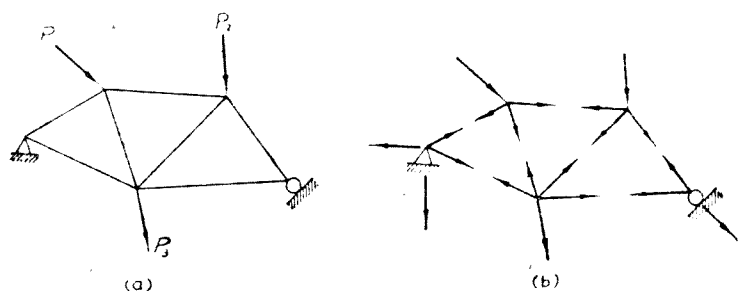


圖 4—25. 桁架諸節點外力與內力之平衡

圖 4—25 (a) 示一結構，其未知項共有 r 獨立分反力及 b 桿之應力。若用節點法考慮諸節點之平衡，如圖 (b)，每節點有二獨立方程（即 $\sum H=0$ 及 $\sum V=0$ ），共有 $2j$ 獨立方程，若此結構係靜定而又穩定，則

$$b+r=2j \quad (4-25)$$

若使 $r=3$ ，則方程 (4—25) 與方程 (4—1) 完全相同。故方程 (4—1) 祇可用於 $r=3$ 之結構，蓋專就內力考慮結構之靜定與穩定，即等於假設其獨立分反力之數為三也。若

$$b+r>2j, \quad (4-26)$$

則結構必係靜不定，蓋未知項之數多於方程之數。若

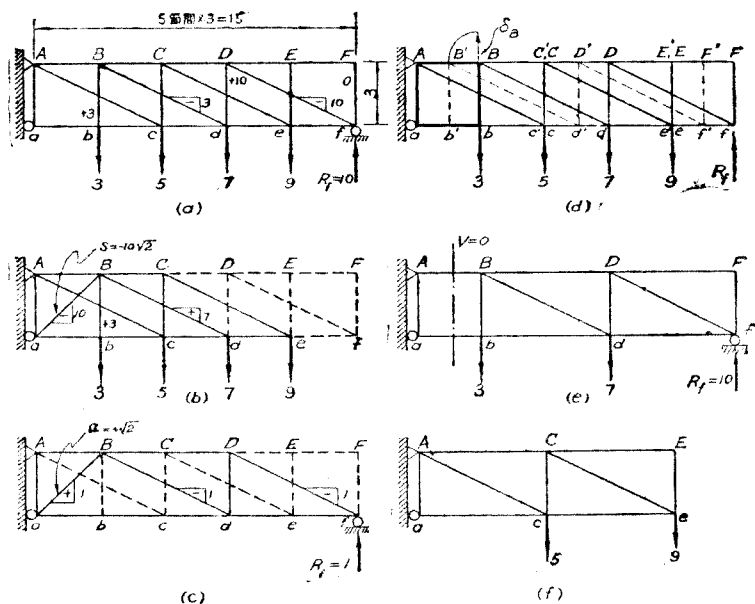
(4-27)

$$b+r < 2j$$

則結構必係不穩定，蓋方程之數多於未知項之數。

應用上列三方程時，凡虛偽靜不定節間中之二交叉斜桿，應均以一桿計。於複雜之結構，並常須考慮其中桿之佈置。

例題 4-13. 用方程(4-25)，考慮此結構是否靜定？如係靜定，並求其支點 f 之反力。



例題 4-13.

解答 此結構及其荷重如附圖 (a) 所示，其 $b=20$ ， $r=4$ ， $j=12$ ，應用方程 (4-25)，則 $20+4=2 \times 12$ ，故係一靜定之結構。

求此結構 f 支點反力 R_f 之法，大約有四，茲列舉如下：

(1) 節點法 如附圖 (a) 所示，依 $b \rightarrow B \rightarrow d \rightarrow D \rightarrow f$ 之次序，考慮諸節點之平衡，最終至 Df 桿之豎分應力為 -10 。但 Ff 桿之應力為零，故 $R_f=$

10↑。此法與例題 4—10 解答(2)所用之法相似，惟更簡易耳。

(2) 代替法 先將 f 支點移去，另以一適宜之桿如 aB 代替之。求得此桿之應力 $S = -10\sqrt{2}$ ，如附圖(b)所示。再將所有之荷重移去，並設 $R_f = 1 \uparrow$ ，求得 aB 桿之應力 $a = +\sqrt{2}$ ，如附圖(c)，應用方程(4—15)，得

$$R_f = -\frac{S}{a} = -\frac{-10\sqrt{2}}{+\sqrt{2}} = +10 \uparrow$$

附圖(b)及(c)虛線所示之諸桿，其應力皆為零。

(3) 機動法 先將 f 點之輻軸支座移去，而代以其反力 R_f ，則此結構必有移動。自 B 點(或 b 點)起，其虛位 δ_B 必與 AB 桿垂直，將 δ_B 轉 90° ，得 B' 。再依圖 4—24 之法，即得此結構之虛移位圖 $B'b'D'd'$ ……等，如附圖(d)所示。應用方程(4—23)，得

$$3(bb') + 7(dd') - R_f(ff') = 0$$

由附圖(d)，可知 $bb' = dd' = ff'$ ，故

$$R_f = +10 \uparrow$$

(4) 分析架法 此桁架有雙重腹桿，故可依 4—17 所述之法。將此桁架分為二分桁架，如附圖(e)及(f)，觀附圖(e)，可知 AB 節間不能抵抗任何切力。用 $\Sigma V = 0$ ，於此節間，即得

$$R_f = 10 \uparrow$$

由以上之計算，可知 c 及 e 二節點之荷動，與 R_f 完全無關，觀察附圖(e)及(f)愈為顯明。

以上四法中，大約以節點法最簡明，代替法步驟大多，而機動法雖簡而不甚明瞭。但究以何法為最簡便，當視結構之性質而定，不可一概而論。

習題 4—28. 用方程(4—25)考慮下列諸結構是否靜定？如係靜定，即用最簡捷之方法，求各支點之反力，並指明其他可能之解法。

提示 本題諸結構之最簡捷之解法大約如下：

(a) 用節點法，自節點 C 起首，先求若干桿之應力，再求反力，與例題 4—13 之解答(i)相同。此桁架稱為剪式(Scissor)桁架。

(b) 與(a)相同。

(c) 與(a)相似，用節點法，先考慮 C 及 H 二節點，注意支點 I 祇有豎

向反力，其值等於 HI 桿之應力。

(d) 用代替法，此題可否用節點法？如可用，其步驟若何？

(e) 先求諸豎桿之應力，並將其視為此拱上弦諸節點之荷重。再用代替法求二支點之平分反力。其上下弦諸節點之高度，可用圖 4—14 所示之方程序求之。此題可否用節點法？如可用，其步驟如何？

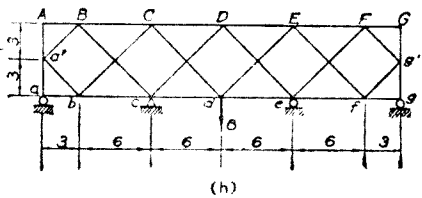
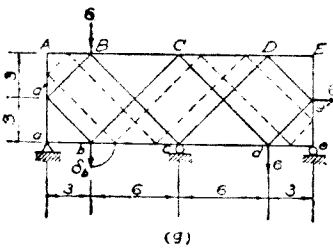
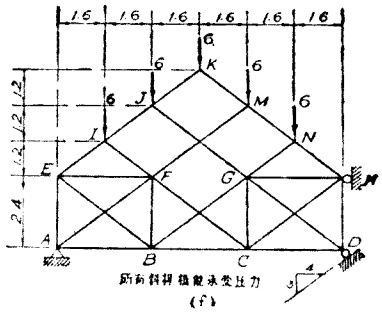
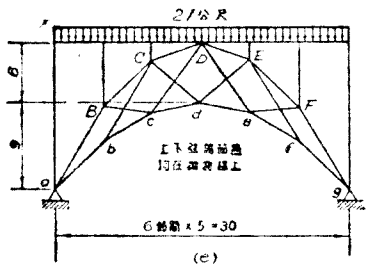
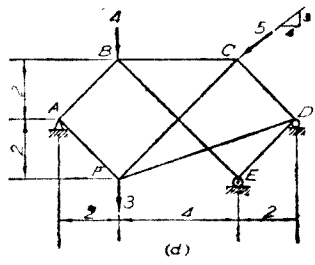
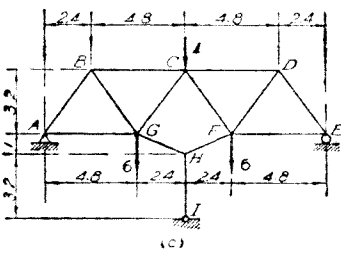
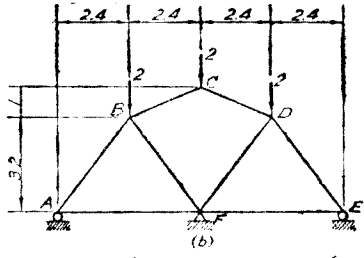
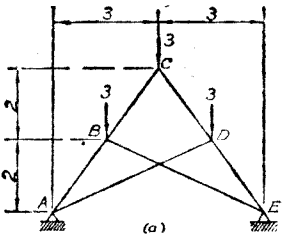
(f) 先求此結構上部諸斜桿之應力，並將其視為 E, F, G ，及 H 諸點之荷重。再設支點 A 之豎分反力大於或小於 E 及 F 二節點荷重之和，由此可知 BG 及 CF 二交叉斜桿中，何者有應力，何者無應力。用彎矩法，以節點 B 或 C 為矩心，即可求得支點 A 之豎分反力，如其值與前所假定者相符，則所得之答案係正確。否則其實際情形與前所假定者正相反。如用代替法，則將支點 H 之輻軸支座移去，而另加一 FG 桿以代替之。

(g) 用機動法，將節點 c 之輻軸支座移去，並將其豎反力視為一荷重，則此結構之虛移位圖如虛線所示。代替法當然亦可採用，但不如機動法之簡捷。此桁架與 (h) 桁架皆稱為勞(Rauten)氏桁架。

(h) 依方程 (4—26) 此結構雖係靜不定。但因此結構及荷重有對稱性，故其反力亦可以靜力學之法求之。用節點法，自節點 d 起首，即可求得兩端支點之豎反力。故靜不定之結構有時在某特殊之荷重下變為靜定。

(i) 注意此結構之對稱性及 gH 與 Ij 二桿已略去。用切力法，先求 $G'H$ 及 IJ' 二桿之應力，由此可求得諸懸桿之應力。將此諸懸桿之應力視為荷重，則此結構成爲三個簡單跨，即可求得諸支點之反力。

(j) 用代替法，將 g 及 m 二節點之輻軸支座移去，而代以 1 及 2 二桿 (附圖虛線所示)。此題表明威(Wichert)氏桁架在對稱及非對稱之荷重下，均能維持靜平衡。故係一穩定之結構。但威氏桁架並非常係如此，參閱例題 4—14 及圖 4—30。



習題 4-28. (未完)

奧氏方程 方程(4-25)雖較方程(4-1)為普遍,但仍有一大缺點,即該方程祇能用於全用鉸節之結構。於全用剛節或剛節鉸節合用之結構,則必用下列之奧(A. Ostenfeld)^①氏方程,以決定其是否靜定。

方程(4-25)之由來,係以桿之應力為未知項,再考慮各節點之平衡,而得所需之方程。奧氏之方程,則以各節點之力為未知項,再考慮各桿之平衡而得所需要之方程。此奧氏方程與方程(4-25)不同之點。

圖 4-26 (a) 示接合二桿之鉸節,稱為一次鉸節,以 h_1 記之。將此二

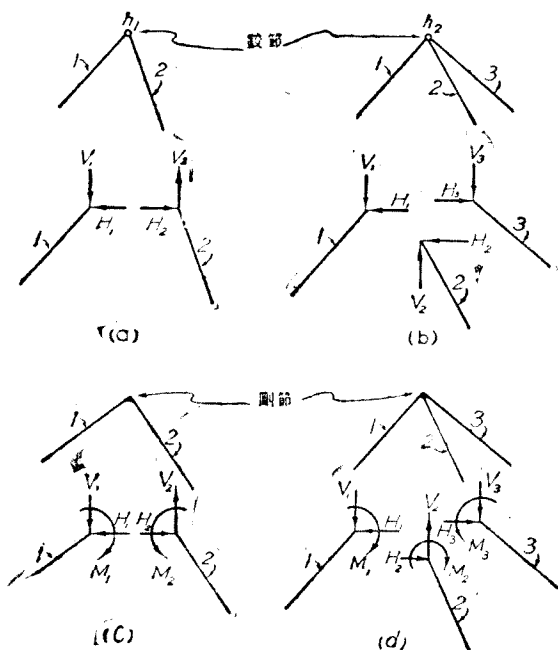


圖 4-26. 奧氏方程之原理

① 見所著之工程靜力學 (Teknisk Statik) (係用丹麥文寫成), 第一卷, 1913 年於丹麥京城出版。奧氏原來之方程,相當於方程(4-30)與(4-25)之聯合,故有不需之重複。方程(4-30)乃本書著者所化簡者。

桿隔離而代以其平豎分應力，如 $H_1, V_1, H_2,$ 及 V_2 等四未知項。再用 $\Sigma H=0$ 及 $\Sigma V=0$ ，則此四未知項即減至二獨立未知項。故每個一次鉸節，有二獨立未知項。設 h_1 並等於某結構中所有 h_1 鉸節之數，則此項鉸節之獨立未知項之總數為 $2h_1$ 。

圖 4—16 (b) 示接合三桿之鉸節，稱為二次鉸節，以 h_2 記之。每個二次鉸節有四獨立未知項。設 h_2 並等於某結構中所有 h_2 鉸節之數，則此項鉸節之獨立未知項之總數為 $4h_2$ 。同此，則某結構所有鉸節獨立未知項之總數為

$$(4-28) \quad 2h_1 + 4h_2 + 6h_3 + \dots + 2nh_n = 2(h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + nh_n)$$

其次考慮剛節之獨立未知項，圖 4—26 (c) 接合二桿之剛節，稱為一次剛節，以 s_1 記之，其未知項共有六。再用 $\Sigma H=0, \Sigma V=0,$ 及 $\Sigma M=0$ ，則此六未知項即減至三獨立未知項。設 s_1 並等於某結構中所有 s_1 剛節之數，則此項剛節之獨立未知項之總數為 $3s_1$ 。圖 4—26 (d) 示接合三桿之剛節，稱為二次剛節，以 s_2 記之。每個二次剛節有六獨立未知項。設 s_2 並等於某結構中所有 s_2 剛節之數，則此剛節獨立未知項之總數為 $6s_2$ 。同此，則某結構所有剛節獨立未知項之總數為

$$(4-29) \quad 3s_1 + 6s_2 + \dots + 3ns_n = 3(s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \dots + ns_n)$$

復次，考慮所有之方程，無論桿之兩端係鉸節抑係剛節，考慮每桿之平衡，均有三個方程，設 b 等於某結構中之桿數，則所有方程之數為 $3b$ 。於靜定而又穩定之結構，則以方程 (4—28) 及 (4—29) 所表之未知項數，再加以結構之獨立分反力數 r ， $\textcircled{1}$ 必等於 $3b$ 。如是，即得化簡之奧氏方程如下：

$$(4-30) \quad 3b = r + 2(h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + nh_n) + 3(s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \dots + ns_n)$$

$$(4-31) \quad 3b < r + 2(h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + nh_n) + 3(s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \dots + ns_n)$$

則結構必係靜不定，若

$\textcircled{1}$ 方程 (4—30) 之 r ，亦可略去，惟計算節點之次數時，支座亦應作為一桿，而輻軸支座並應以一鏈桿代替之，應用時較為不便。

$$3b > r + 2(h_1 + 2h_2 + 3h_3 + \dots + nh_n) + 3(s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \dots + ns_n) \quad (4-32)$$

則結構必係不穩定。

應用此方程時，有下列三點當注意：

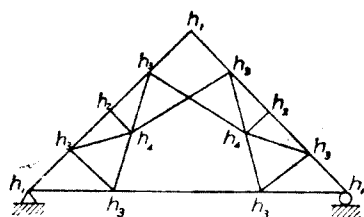
(1) 凡結構中本身靜定而又穩定之部分，均可視作相當於一桿。圖 4-27

(a) 所示之結構，係一靜定之結構。蓋 $3 \times 23 = 3 + 2(3 + 2 \times 2 + 3 \times 6 + 4 \times 2)$

與方程 (4-30) 正相符。若將此結構中之靜定而又穩定部份 (即圖 4-27 (b)

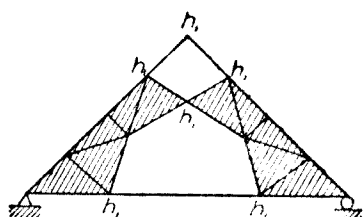
之有斜線部份，該二部份皆係簡單桁架) 視作二桿，則 $3 \times 5 = 3 + 2 \times 6$ ，仍與方

程 (4-30) 相符，但計算時較為簡便。



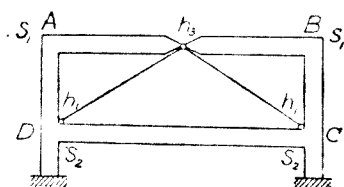
$$\begin{aligned} h_1 &= 3, & h_2 &= 2, & h_3 &= 6, \\ h_4 &= 2, & b &= 23, & r &= 3. \end{aligned}$$

(a)



$$h_1 = 6, \quad b = 5, \quad r = 3$$

(b)



$$\begin{aligned} h_1 &= 2, & h_3 &= 1, & S_1 &= 2, \\ S_2 &= 2, & b &= 9, & r &= 6. \end{aligned}$$

$$\text{或 } \begin{aligned} h_1 &= 2, & h_3 &= 1, & S_1 &= 2, \\ S_2 &= 0, & b &= 5, & r &= 6. \end{aligned}$$

(c)

圖 4-27. 應用奧氏方程之例

(2) 凡結構中二桿之連續點，無論是否平直，或是否有另一桿接合於該點，該二桿均可視作一桿，而不計其剛節。如圖 4-27 (c) 所示，若將 A 及 B 二點視作 s_1 ，而 C 及 D 二點視作 s_2 ，則 $b=9$ ，故 $6 + 2(2 + 3 \times 1) + 3$

$(2 + 2 \times 2) - 3 \times 9 = 34 - 27 = 7$ ，即此結構係七次靜不定。A 及 B 二點亦可

視作二桿之連續點，而不計及其 s_1 ，C 及 D 二點有三桿之剛節，其中二桿亦

可視作連續於該點，故前者之 s_2 變為 s_1 ，但如此則 $b=5$ ，故 $6 + 2(2 + 3 \times 1)$

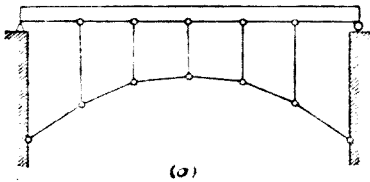
$+3 \times 2 - 3 \times 5 = 22 - 15 = 7$ ，此結構仍係七次靜不定。但其計算較前法略為簡易。

(3) 如用此方程以決定某桁架之本身是否靜定（即祇計其內力不計其外力），則 $r=3$ 。

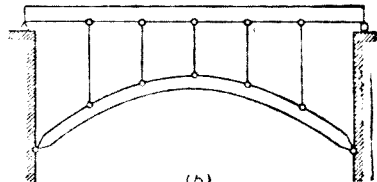
習題 4-29. 用奧氏方程決定習題 4-5 中之諸桁架其本身是否靜定？解答時應將其中之靜定而又穩定之部份視作一桿。

習題 4-30. 用奧氏方程決定習題 4-28 中結構是否靜定？解答時應將其中之靜定而又穩定部份視作一桿。

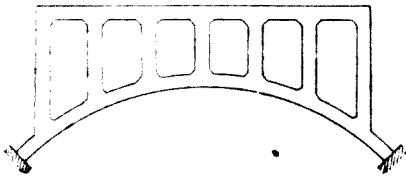
習題 4-31. 用奧氏方程，決定下列諸結構，是否靜定或靜不定？如係靜不定，其次數如何？



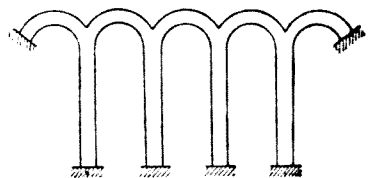
(a)



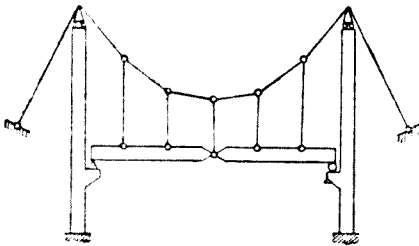
(b)



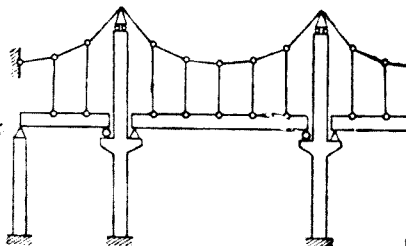
(c)



(d)

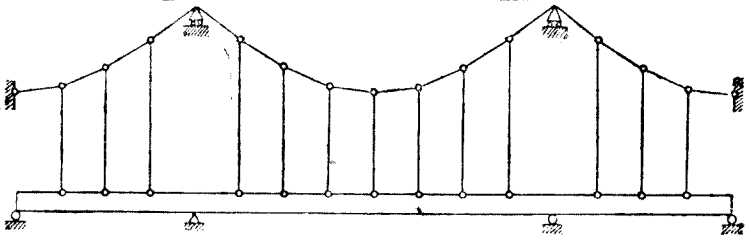


(e)

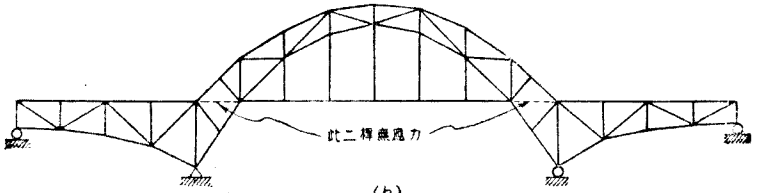


(f)

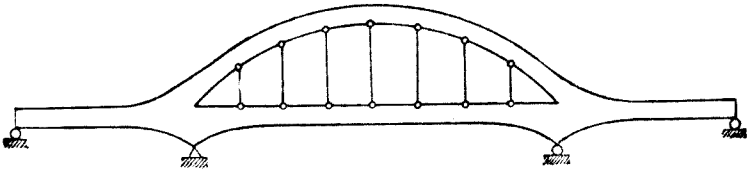
習題 4-31. (未完)



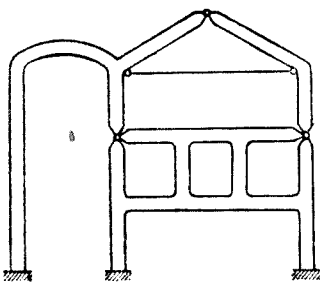
(g)



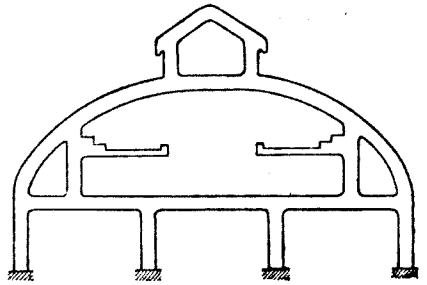
(h)



(i)



(j)



(k)

結構之靜定及穩定，實非一簡易問題，由 3—2, 3—3, 及 4—5 諸節之討論，已可概見。比較言之，若欲知任何結構之是否靜定，尚非難事。蓋除去若干少數之例外（如圖 3—4 之結構，依方程(4—25)或(4—30)係靜定，但實係一靜不定之危形結構，又如習題 4—28(A) 係一靜不定之結構，但在任何對稱之荷重下，即成爲一靜定之結構。又如圖 4—29 之結構，係一靜定而不穩定之結構，但在所示之特殊荷重下成爲有平衡而靜不定之結構）。結構之是否靜定，常可以方程(4—25)或(4—30)並考慮其中桿之佈置以決定之，但結構之穩定問題，則非如此簡易。蓋穩定之結構雖必與方程(4—25)或(4—30)相符，但與方程(4—25)或(4—30)相符之結構，則未必係一穩定之結構。故方程(4—25)或(4—30)不能用以完全決定任何結構之是否穩定。據本書著者所知，刻下尚無最普遍之方程，可以最簡捷之步驟，用以決定任何結構之是否穩定。以下所述之三法，半係採自彌 (Müller-Breslau) 氏，半係本書著者之管見，似爲刻下最完善之法。

(1) 用三鏈桿之原理 三鏈桿之原理，可用以決定聯合桁架之本身是否穩定？已於 4—5 節詳述之。若干結構，表面觀之，雖非一聯合桁架，但可使其變爲一相當之聯合桁架，而後用三鏈桿之原理，以決定其是否穩定。圖 4—28(a) 示一結構與方程(4—25)及(4—30)均相符。但該結構之是否穩定，須視其各部之尺寸而定。若依圖 3—23 及 3—24 之法，另加一鏈桿 AD 以代替節點 D 之一獨立分反力，如圖 4—28(b) 所示，與方程 (4—25) 及 (4—30) 仍均相符，但此結構成爲一聯合桁架。若其三聯合桿 AD, BC 及 EF 既不平行又不交會於一點，如圖 4—28(b)，則圖(a)之結構係一穩定之結構。若此三聯合桿係平行，如圖(c)，或交會於一點 I ，如圖(d)，則皆係不穩定之結構。此外其他結構，有時亦可化簡而應用三鏈桿之原理。

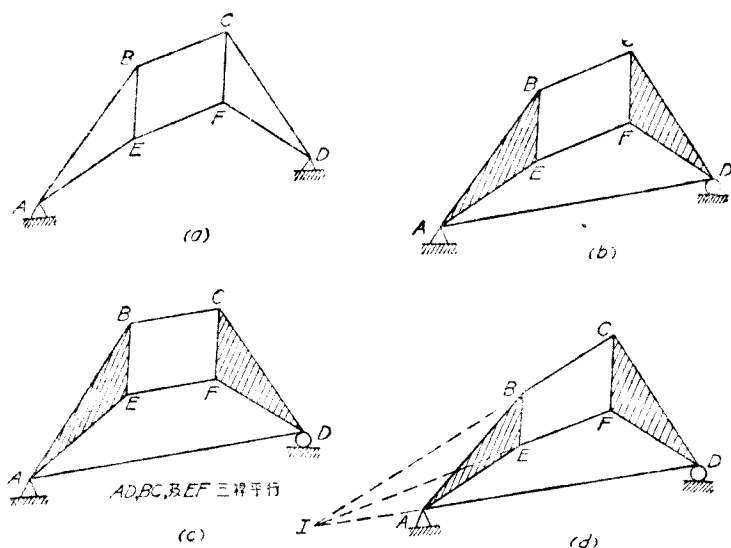


圖 4—28. 用三鏈桿之原理決定結構之是否穩定

(2) 用求應力或反力法 如某靜定之結構，在某荷重下，能維持平衡，則其反力或其中諸桿之應力，必可用上述諸分析法求得。如某靜定之結構，能在任何荷重下維持平衡，則該結構必係一穩定之結構。故用求反力或應力之法，即可決定某結構之是否穩定？於結構之含有複雜桁架者，上述之三鏈桿原理，不能採用，尤非用此法不可。求複雜桁架反力或應力之法，彌 (Müller-Breslau) 氏建議先設其諸桿之應力為 X_1, X_2, \dots 等，再如圖 4—25(b) 所示考慮其諸節點之平衡，得 $2j$ 聯立方程。而後用與方程 (4—17) 相似之行列表，解此聯立方程而求其諸桿之應力 X_1, X_2, \dots 等。若其分母行列式 $D=0$ ，而其分子之行列表 $N \neq 0$ ，則 $X_1 = X_2 = \dots = \infty$ ，即此結構在所受之荷重下，不能維持平衡，故不穩定。此彌氏之理論也。彌氏之法，雖極巧妙，而且正確，但並不完善。蓋 $D=0$ 並 $N=0$ 時，則結構之情形如何，彌氏並未說明。況用此法須解 $2j$ 數之聯立方程，於節點甚多之結構，殊為困難，此彌氏方法之缺點也。

由是可知：凡不穩定之結構，而在某荷重之下又不能維持平衡者，其反力

或其所有諸桿之應力，必皆為無窮。反是，凡在任何荷重下，其反力或其諸桿之應力皆為無窮之結構，必係不穩定之結構。此說可視為不穩定結構之定義。不穩定結構之反力或其所有諸桿之應力既皆為無窮，則求應力時，可用 4-14 節所述之代替法，求其反力或其一桿之應力即已足。故此法之簡易，遠勝於解 $2j$ 聯立方程也。用代替法時，注意方程 (4-17) 分母之行列式 D ，祇與結構之形式及尺寸有關，而與荷重無關。故 $D=0$ 時，則此結構必不能於所有各種荷重下皆維持平衡，如是，則此結構必係不穩定之結構。至於方程 (4-17) 分子之行列式 N 之影響，可分條述之如下：

(a) $D=0$ ，並 $N \neq 0$ ，則 $X = \infty$ ，結構係不穩定，且在所受之荷重下，不能維持平衡。

(b) $D=0$ ，並 $N=0$ ，則 $X=0/0$ ，於算學為不定式。結構係不穩定，但在所受之特殊荷重下，能維持不穩定之平衡。至 X 之值，有時係靜定，有時係靜不定。

(c) 若 $D \neq 0$ ，則 $N \neq 0$ ，或 $N=0$ ，結構均係穩定，反之，故穩定之結構，必係 $D \neq 0$ 。

(3) 用機動法 用機動法，亦可決定結構之是否穩定：以圖 4-23 之結構為例，若 $\delta_c = \delta_d$ ，依方程 (4-24)

$$S_{CF} = \frac{\sum M}{0} = \infty,$$

則該結構亦成爲不穩定。若於圖 4-24 作 $C'F'$ 線，則此線必與 CF 桿平行。故虛移位圖 $ABC'D'E'F'$ 之各線，與結構 $ABCDEF$ 之各桿平行，但二者並無幾何上之完全相似性，其意義與 $D=0$ 之條件相同。故凡結構之有此情形者皆不穩定。

又如圖 4-29 (a) 之結構，與方程 (4-25) 及 4-3(c) 均相符，但亦係一不穩定之結構。假設 E 及 F 二節點各有虛移位 δ_E 與 δ_F 各與 AE 及 BF 成垂直，則 AE 及 BF 引長之交點 I ，即 E 及 F 二點之瞬心。如圖所示，與 C 點支承平面垂直之 CI 線，亦經過 I 點，故 C 點亦有以 I 點爲瞬心之虛移位 δ_C 。如是則此結構相當於交會一點之三鏈桿，如圖 4-29 (b)，即係一不穩定之結構。若此結構所受任何荷重之合力 P 亦經過 I 點，則此

結構有不穩定之平衡，但成爲一靜不定結構，性質與圖 4-28 (d) 之結構完全相似。

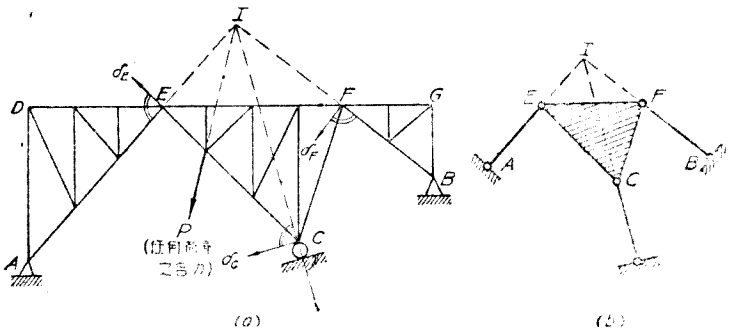


圖 4-29. 不穩定結構之例

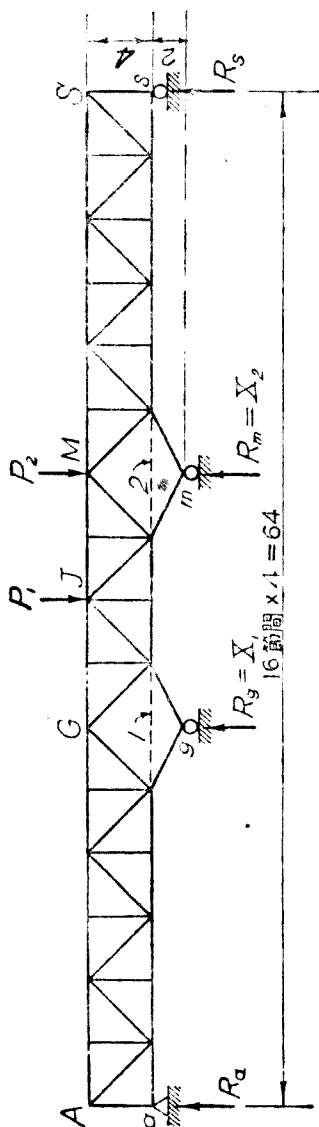
由上列之討論，可知結構之穩定問題，極其複雜。凡結構之與方程 (4-27) 或 (4-32) 相符者，固不穩定。但與方程 (4-25) 或 (4-30) 相符者，未必即係穩定。爲簡明起見，茲將結構與方程 (4-25) 或 (4-30) 相符者之穩定情形，列表如下：

結構之穩定情形 [結構與方程 (4-25) 或 (4-30) 相符]	穩定	($D \neq 0$, 在任何荷重下能維持平衡)
		能維持平衡 ($D=0, N=0$, 祇在某特殊荷重下)
	不穩定	不能維持平衡 - 危形結構 (靜不定) ($D=0, N \neq 0$, 在任何荷重下)

至上列之三法，何者最爲簡捷適宜，蓋視結構之情形而定，殊無一定之規律，茲舉例如下：

例題 4-11. 用代替法求此結構之反力，藉以證明此結構是否穩定。

又在 (a) 及 (b) 二種荷重下，何者能維持平衡？何者不能？如能維持平衡，其反力是否靜定？



(a) $P_1 = 1, P_2 = 0.$ (b) $P_1 = 0, P_2 = 1.$

例 4-14.

解答 (a) 將節點 g 及 m 之支座移去, 而另加 1 及 2 二桿以代替之。
求得 $S_1 = S_2 = +3$, 再將荷重移去, 設 $R_y = X_1 = 1 \uparrow$, 求得 $a_1 = a_2 = -9/4$,
又設 $R_m = X_2 = 1 \uparrow$, 求得 $\beta_1 = \beta_2 = -9/4$, 用方程(4-17), 則

$$X_1 = X_2 = - \frac{\begin{vmatrix} +3 & -\frac{9}{4} \\ +3 & -\frac{9}{4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} \end{vmatrix}} = - \frac{N}{D} = - \frac{0}{0} \text{ (不定式)}$$

$D=0$, 此結構係不穩定, 但在此對稱之荷重下, 能維持平衡, 用方程(4-16)得

$$3 - \frac{9}{4}X_1 - \frac{9}{4}X_2 = 0.$$

但由此結構及荷重之對稱性, 得

$$X_1 = X_2,$$

故

$$3 - \frac{9}{2}X_1 = 0,$$

$$X_1 = X_2 = R_y = R_m = +\frac{2}{3} \uparrow$$

並

$$R_a = R_c = -\frac{1}{6} \downarrow$$

故此結構之反力係靜定。

(b) $a_1 = a_2 = \beta_1 = \beta_2 = -9/4$, 因其值與荷重無關。但 $S_1 = +9/4, S_2 = +15/4$, 用方程(4-17), 則

$$X_1 = - \frac{\begin{vmatrix} +\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} \\ +\frac{15}{4} & -\frac{9}{4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} & -\frac{9}{4} \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{27}{8}}{0} = \infty$$

故所有反力均係無窮。如是, 則此結構在此非對稱之荷重下, 不能維持平衡。

注意, 此結構與習題 4-28(j) 所示者極相似, 其不同者祇其中部節間之數而已。

若習題 4-28(j) 結構中部之節間數不變, 而將其兩端之節間數改為 1.5, 如圖 4-50, 則此結構不但不穩定, 且在任何荷重下均不能維持平衡。

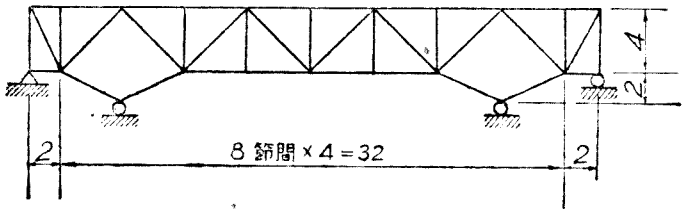
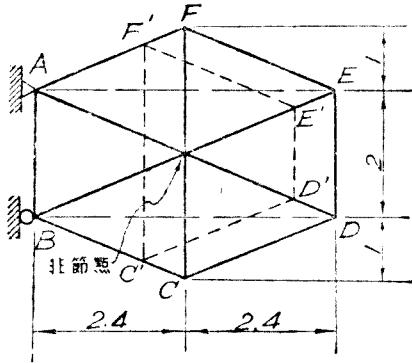


圖 4-30. 在任何荷重下不能維持平衡之結構

例題 4-15. 用機動法證明此結構是否穩定?

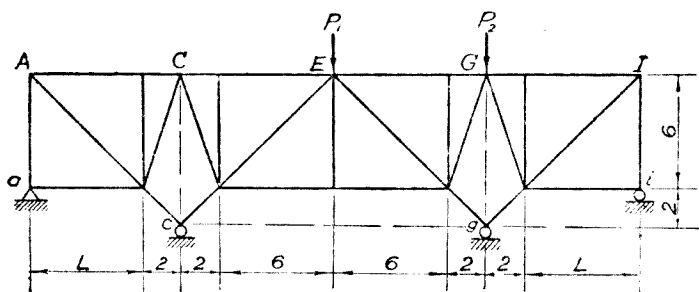
解答 將 CF 桿移去, 作虛移位圖 $ABC'D'E'F'$, 其中各線與結構 AB $CDEF$ 之各桿皆平行, 故此結構係不穩定。



例題 4-15.

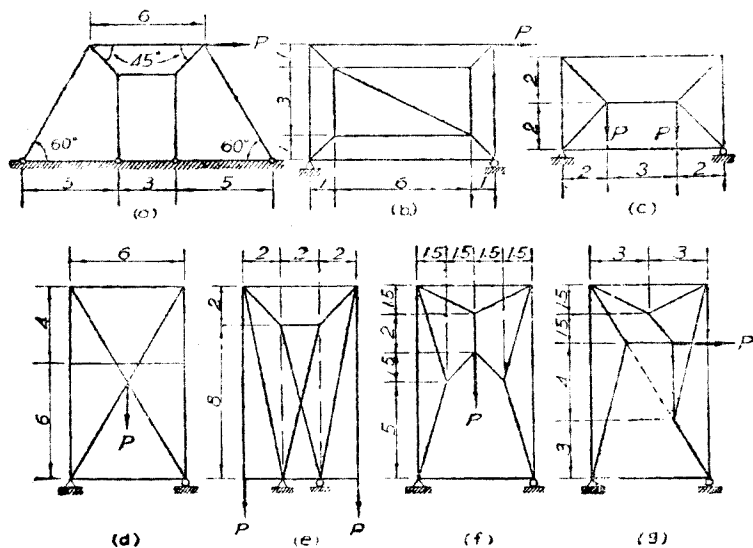
習題 4-32. 用代替法求此結構之反力, 藉以證明此結構之是否穩定, 與其尺寸及荷重有無關係? 如係不穩定, 何者能維持平衡? 何者不能? 並將 D 及 N 之值及答案用一 \checkmark 記號, 填入附表中。

	L	荷 重		D	N	不 穩 定	
		P_1	P_2			穩定	有平衡
(a)	6	3	0				
(b)	6	3	2				
(c)	2	3	0				
(d)	6	3	2				



習題 4-32.

習題 4-33. 用最適宜最簡捷之方法，研究下列諸結構之穩定情形。



習題 4-33.

第五章 屋頂桁架及工廠排架之應力

5—1. 屋頂之型式及構造 屋頂之型式雖多，但可別為平頂，坡頂，及圓頂三大類。其選擇大都根據建築上之考慮，此外如屋頂之遮蓋及構造，亦常影響於屋頂之型式。譬如用瓦蓋者，必用坡頂，否則雨水不易暢流；鋼筋混凝土構造，多用平頂而蓋以數層油毛氈及瀝青，以其易於建造，且免瀝青因天熱融化而下流也。

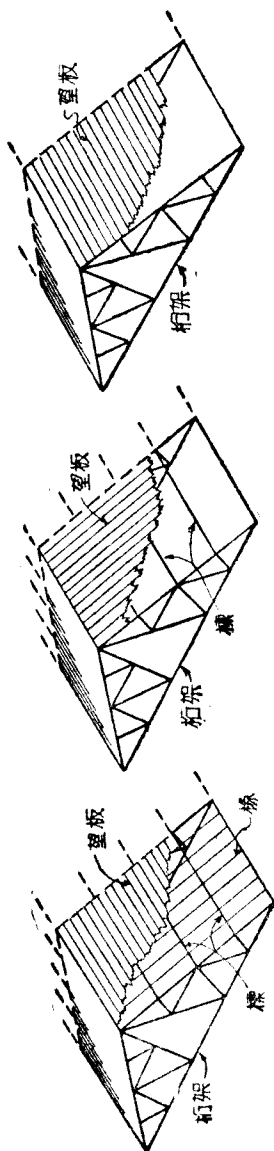
無論屋頂之型式如何，若其下需有寬敞無阻之空間，如大工廠，飛機庫，大會堂等，其屋頂常需以桁架承之。蓋屋頂之跨度甚大而承之以梁，或嫌剛勁不足，或失之於不經濟，皆非適宜。

於通常之構造，屋頂桁架上各節點置有檁，與桁架垂直。檁上有椽（rafter），與檁垂直而與桁架平行。椽上鋪望板（sheathing），望板上再鋪屋頂遮蓋，如圖 5—1 (a)。於木料構造，如用厚約 20 公厘之望板，則椽之距間約在 0.3 至 0.4 公尺之間。此種椽檁俱備之構造，常嫌笨重。如木料望板稍厚，或用鋼筋混凝土或金屬等望板時，可將椽略去，望板直接置於檁上，成為有檁無椽之結構，如圖 5—1 (b)。惟檁之距間不能太長。因此，如桁架之距間不甚長時（約在 4 公尺以下）椽檁俱可省去，使望板直接支於桁架上，成為椽檁俱無之結構，如圖 5—1 (c)。後二種構造法，用之於鋼料桁架，最為適宜。

有時為經濟及簡單起見，標亦可置於桁架上弦諸節點之間，如圖 4—6 (a)。雖此圖與圖 5—1(c)之上弦桿，因有彎應力而截面面積必增大，但此種佈置，常使桁架之型式變為簡單，而材料亦常節省。標之距間，常以不超過 2.5 公尺為宜。

於平頂及兩邊有坡度之屋頂（我國稱為硬山式或懸山式），其構造常較簡單。若屋頂四邊均有坡度（如我國之廡殿式或畧殿式），或各種型式合用，則於主桁架之外，常需採用若干輔桁架，如圖 5—2 所示之例。此類屋頂之構造，常較複雜，但此係屬於結構設計之範圍，故從略。

5—2. 屋頂桁架及工廠
 檯架之型式 圖 5—3 示屋



(c) 標置於標

(b) 有標無標

(a) 標置於標

圖 5—1. 屋頂之構造 (一)

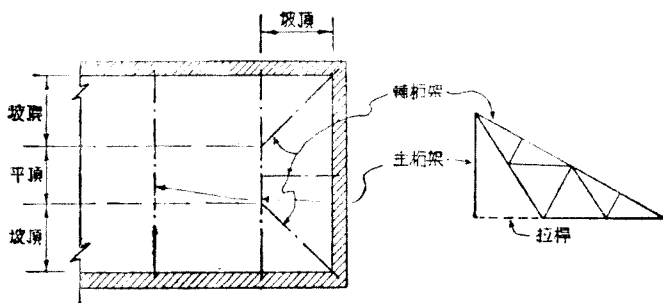


圖 5—2. 屋頂(象殿式)之構造(二)

頂桁架之各種型式。(a) 爲雄柱(king post)式〔其豎桿實係一垂桿(sag-tie), 用以避免下弦桿之下垂, 並非一柱〕。(b) 爲雌柱(queen post)式, 此二式皆屋頂桁架之最簡單者。(c) 爲剪(scissor)式, (d) 爲錘梁(hammer beam)式, 此二式用於坡度甚大而跨度不甚長之屋頂, 最爲適宜, 並可加以彫飾, 故教堂多用之。(e) 及 (f) 皆爲浩(Howe)氏式, (e) 爲坡頂, (f) 爲平頂, 此二桁架斜桿之傾度正相反, 蓋必如此則在呆荷重下始皆爲壓桿也。(g) 爲格(lattice)式。(h) 爲比國式。(i) 及 (j) 皆爲白(Pratt)氏式, 此二桁架斜桿之傾度亦正相反, 並各與浩氏式相反。蓋如此則在呆荷重下始皆爲拉桿也。(k) 爲倭(Warren)氏式, 其上虛線所示之部份爲通風頂(monitor), 用以流通空氣並增加光亮, 故工廠多用之。(l) 爲芬(Fink)氏式, (m) 爲改變芬氏式, (n) 爲升起(cambered)芬氏式, 亦稱法國式, 蓋桁架之下弦如太長, 常顯出下垂之象, 頗礙觀瞻, 故略爲升起。(o) 爲扇式, 乃由芬氏式改變而成。(p) 爲四角

(quadrangular)式，其中部斜桿之傾度與兩旁者正相反，蓋使其皆成爲拉桿也(參閱習題 4—11)。(q)爲三鉸拱，用於跨度極大(約 30 公尺以上)之屋頂，常稱經濟適宜。其下之拉桿，係用以承受平分反力，常藏於地面之下。(r)爲鋸齒式，寬闊之工廠常用之，其天窗常向北，以避直接陽光。(s)爲改變鋸齒式，其天窗係豎立，故雨水不易流入，雪亦不易積於其上，故較(r)之鋸齒式爲佳。

圖 5—3 祇示屋頂桁架之主要型式，採用時均可稍加以改變，以適合實際情形。茲略舉其可以改變之點如下：

(1) (e) 至 (s) 諸桁架之節間數，可以減少或增加，或用副桿再分之〔如 (j) 及 (n) 之虛線所示〕，視其跨度之長短及其上標之距間而定。

(2) (e) 至 (q) 諸桁架，均可加通風頂。

(3) (f), (g), (j), 及 (k) 諸桁架之上弦，可改爲平直、或弧形，或稍帶坡度。

(4) (l) 至 (o) 諸桁架之下弦，均可升起。

(5) 芬氏式及扇式之構造法，可以聯合採用，以適合上弦所需之任何節間數，成爲此二式之合式。

屋頂桁架之材料，不外木料，鋼鐵及鋼筋混凝土。生鐵及熟鐵之桁架，早年曾用之，刻下已成過去。混凝土因拉力強度不足，不適桁架之拉桿，用之甚少。刻下屋頂桁架之材料，多用木料或鋼料。圖 5—3 中之 (d) 係全用木料，(g) 係全用木料

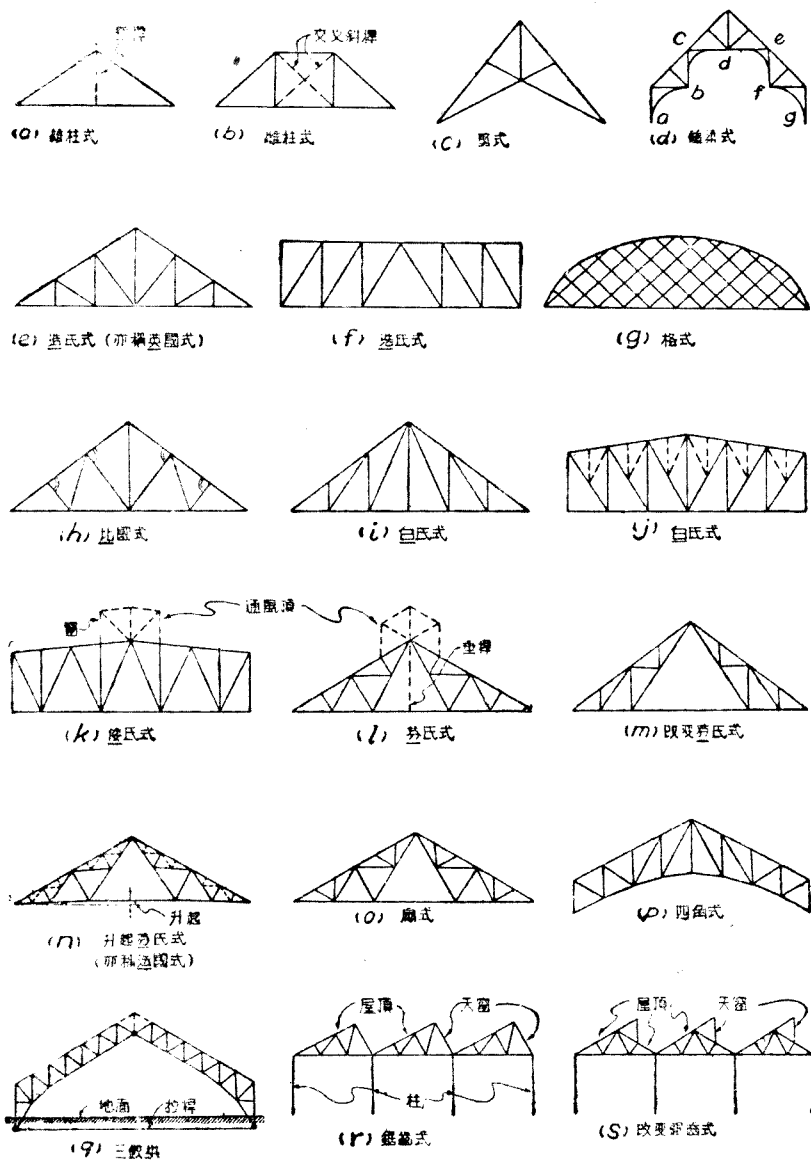


圖 5-3. 屋頂桁架之主要型式

或輕鋼料，(a)，(b)，(c)，(d)，(e)，(f)，及(h)之腹桿，在呆荷重者為拉桿者，係用圓鋼條，其餘均係用木料。(i)至(s)常全用鋼料。

圖 5—3 所示諸桁架之跨度，亦常有相當之限制。如(a)之最大跨度約為 5 公尺。(b)，(c)，及(d)之最大跨度均為 9 公尺。(e)至(p)之跨度約自 6 公尺至 20 公尺，但浩氏白氏及四角諸式之節間數增加後，跨度可加長至 30 公尺。三鉸拱之跨度常在 30 尺以上，刻下最長者，推美國俄亥俄 (Ohio) 州之固異 (Goodyear) 飛艇庫所用之三鉸拱，其跨度為 99 公尺有奇。

屋頂桁架之距間，應為若干，全係一經濟問題。根據以往之估算及經驗，若桁架跨度在 18 公尺之下，其最經濟之距間約為其跨度之 $\frac{1}{4}$ ，但常用 4.5 公尺。於桁架跨度在 18 至 30 公尺之間者，其最經濟之距間，約為其跨度之 $\frac{1}{4}$ 至 $\frac{1}{3}$ ，即自 4.5 至 6 公尺。但實際上屋頂桁架之距間，常被其他條件所限制，而不能採用最經濟之距間。

於對稱式之坡頂桁架，如圖 5—3 之 (e)，(h)，(i) 等，其中線高度與跨度之比，稱為坡度 (pitch)。於屋頂材料之需要相當坡度者，常以 $\frac{1}{4}$ 至 $\frac{1}{3}$ 之坡度最為經濟適宜。

屋頂桁架之選擇，因所含之因素太多，殊無一定之規律。大約視 (1) 屋頂之材料及其所需之坡度，(2) 桁架之跨度及材

料，(3)房屋之性質等而定。普通言之，於木料桁架常用浩式，於坡頂之鋼料桁架，常用白氏式或芬氏式，於平頂或坡度極小之鋼料桁架，常用口氏或倭氏式。

屋頂桁架係支承於牆上或柱上（木柱鋼柱或鋼筋混凝土柱）。若三角形之桁架支承於二柱之上，為穩定起見，其二上角應加隅支撐(knee brace)，如圖 5—4 (a)。若桁架之兩端有相

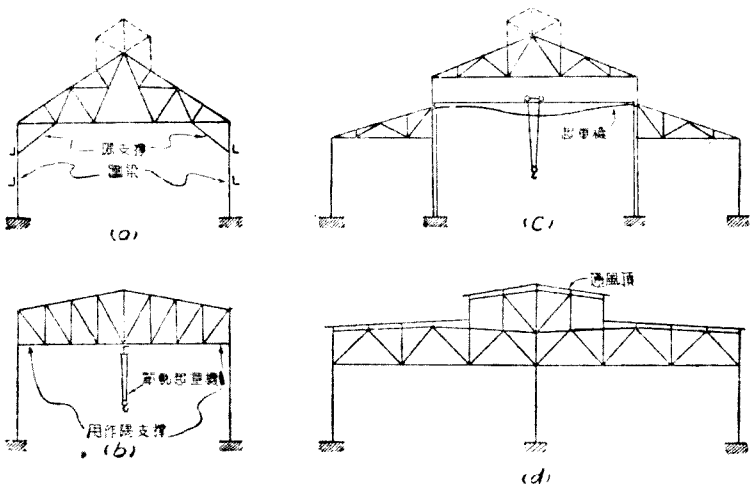


圖 5—4. 工廠排架之例

當高度，則支柱成為桁架之端豎桿，與其上下弦相接合，故不必另加隅支撐，如圖 5—4 (b)。此種屋頂桁架與二柱之合體，成為排架 (bent)，其用於工廠房屋者，稱為工廠樑架。圖 5—4 示工廠排架最普通之例，二相鄰之排架成為一排間 (bay)，其距間稱為排距。影片 III 示工廠排架之實際情形。

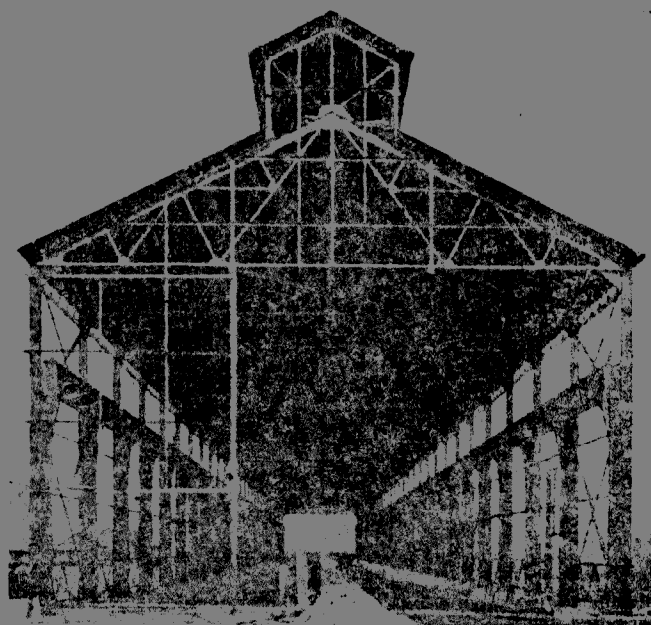


圖 5-3 工廠排架

工廠之圍牆如用磚牆，屋頂桁架常可支於牆上而將柱略去。若屋頂桁架支承於柱上，則圍牆多用波紋白鐵皮，或水泥板條牆，或水泥鋼網 (expanded metal lath) 牆，如此則柱上需有若干橫梁，稱為圍梁 (girt)，以支承之，如圖 5-1 (a) 所示。圍梁之作用及計算方法，與屋頂之檁相似。工廠之牆亦有全用玻璃磚者，取其光亮異常充足也。惟價值甚昂，即在美國刻下採用之者亦不多。

5-3. 屋頂之呆荷重 屋頂之呆荷重，包括屋頂之遮蓋，望板，灰頂棚，椽，檁，及桁架等項。

各種通用屋頂遮蓋，望板，及灰頂棚之重量如表 II。檁檁

之重量，可以直接計算，但表 II 中所列之值，亦可斟酌採用。

表 II. 屋頂之各項重量

材 料	公斤/平方公尺(屋頂坡面)
波紋白鐵皮	5 至 16
油毛氈及瀝青	10
油毛氈及瀝青(三層至五層)上加 小石子一層	16 至 40
石板石	34 至 49
瓦	40 至 100
木料望板(厚約 25 公厘)	15 至 20
煤矽混凝土望板(厚約 75 公厘)	36 至 120
碎磚石混凝土望板(厚約 75 公厘)	175
灰頂棚	40 至 50
木料椽	7 至 20
木料檁	10 至 20
鋼料檁	10 至 25

屋頂桁架之重量，必需先行估計。根據已往之經驗，工程師曾求得若干公式及表格，以輔助此項估計。惟屋頂桁架之重量，常視其型式，坡度，跨度，距間，材料，荷重，及所根據之設計規範等而定。公式及表格，勢不能包括上列所有之因素。故欲其十分準確，自不可能。屋頂桁架之跨度在 25 公尺以下者，其本身之重量，常祇佔其所支總荷重之一小部份(約百分之十至十五)，故估計如略有差誤，常不十分重要。於跨度較長之屋

頂桁架，工程師應於設計完成之後，計算其實在重量，視其與前所估計者是否相符。若所估計之重量太輕，應即修改其設計。於跨度極長而型式特殊之屋頂桁架，如三鉸拱桁架，其重量常佔其所支總荷重之大部份，其估計既需相當精確，而又無公式表格可資輔助，於此，工程師必需本乎其經驗，先作初步之估計，再修改一二次，始可得其精確之重量。

估計屋頂桁架重量之通用公式如下：^①

$$\text{木料桁架} \quad w = 1.2 L + 2.5 \quad (5-1)$$

$$\text{鋼料桁架(普通)} \quad w = 1.2 L + 3.7 \quad (5-2)$$

$$\text{鋼料桁架(工廠)} \quad w = \frac{P}{45} \left(1 + 0.38 \frac{L}{\sqrt{A}} \right) \quad (5-3)$$

其中 w = 桁架之重量，以公斤/平方公尺(屋頂平投影面)計。

L = 桁架之跨長，以公尺計。

A = 桁架之距間，以公尺計。

P = 桁架所能支承之荷重(桁架本身之重不在內)，以公斤/平方公尺(屋頂平投影面)計。

上列三公式用於坡度為 $\frac{1}{4}$ 之桁架，較為準確。若坡度太小(近於平頂)或太大，應各加減約百分之十。桁架之重量，常視作均佈荷重而均勻分置於其上弦之諸節點。於跨度甚長或質量甚重之桁架，其重量之一部份(至多 $\frac{1}{3}$)應置於其下弦之諸

① 公式(5-1)係哲(H. S. Jacoby)氏所創，公式(5-2)係浩(M. A. Howe)氏所創，公式(5-3)係克(M. S. Ketchum)氏所創，此三公式原皆係用英制，經著者改成公制

節點。

屋頂桁架之上下弦常有支撐架(見 5—9 節),於鋼料桁架其重量常在 2.5 至 7.5 公斤/平方公尺(屋頂平投影面)之間,估計時常用 5 公斤之數。

5—4. 屋頂之活荷重 屋頂之活荷重共有三種:(1)風荷重,(2)雪或冰荷重,(3)其他活荷重。茲分述之如下:

(1)風荷重 風荷重之多寡,在其壓力,而壓力之多寡在其速度。故欲求風荷重必先知風壓力與其速度之關係。

風壓力乃空氣對於某阻礙體之衝擊力,而風壓力之大小,即等空氣動量(momentum)之改變。假如空氣為理想流體,若截面為 A 之氣流,垂直注射於面積大於 A 之固定板上,則氣流被阻而改其流向,致氣流之動量改變,遂發生壓力。根據動力學之原則,每秒鐘氣流動量之改變,即等於風壓力。故:

$$(5-4) \quad F = MV$$

$$\text{而}(5-5) \quad MV = \frac{WT}{g} = \frac{wAV^2}{g}$$

其中 F 等於風壓力, M 及 W 各等於每秒鐘內氣流衝擊於固定板上者之質量及重量, V 等於氣流之速度, A 等於氣流之截面面積, w 等於空氣之密度, g = 重力加速度。故與風向成垂直之風壓力 P (以公斤/平方公尺計) 為

$$(5-6) \quad P = \frac{F}{A} = \frac{w}{g} V^2$$

以 $w = 1.293$ 公斤/立方公尺 (在溫度攝氏零點氣壓 760。

厘公之情形下), $g=9.82$ 公尺/平方秒代入, 若 V 以公里/小時計, 則

$$P = \frac{1.293}{9.82} (0.2778)^2 V^2 = 0.01017 V^2 \quad (5-7)$$

方程 (5-7) 係根據圖 5-5 (a) 之情形所得。但實際上置一固定板於空氣中如圖 5-5 (b), 其與圖 5-5 (a) 不同之點有二: 第一, 動量之改變並不完全, 故實際上之風壓力應小於方程 (5-7) 所得者。第二, 板之背風面有真空, 使板向風面之

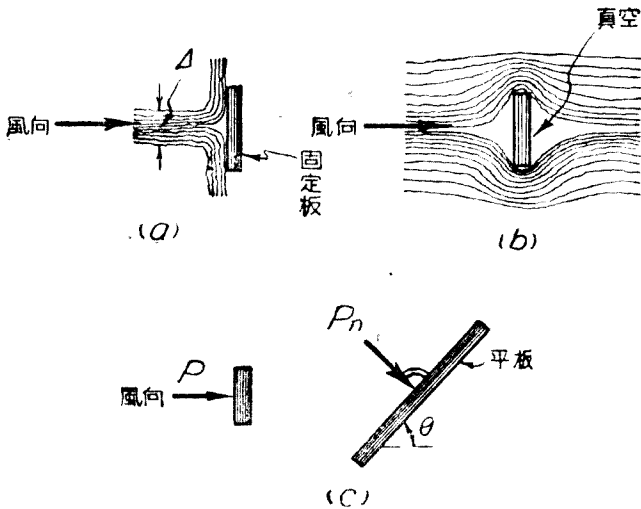


圖 5-5. 風壓力

壓力增加, 故實際上之風壓力, 應大於方程 (5-7) 所得者。但究竟如何調劑、理論上殊不易計算。由若干實驗之結果, 方程 (5-7) 之係數常在 0.00497 至 0.00736 之間, 其值與空氣之

壓力，溫度，及濕度，均有關係，而 0.0059 係刻下所通用之值。

故①

$$(5-8) \quad P=0.0059 V^2$$

某一地之風速度，如能達其最高限度，於某結構之壽命，亦不過數次而已。但工程師估計結構之風荷重時，不能不計及其最大可能之風速度。由歐美各國之氣象記錄，知已往之最大風速度常在每小時 130 至 200 公里之間，惟最近(1934 年 4 月 12 日)美國東北部之華盛頓山上之風速度，曾達每小時 372 公里之記錄，但此係絕對之例外。由若干試驗及記錄，又知大風接近地面時，因樹木及房屋之阻礙，常使空氣成爲亂流 (turbulent flow)，故即在一地，各處之風速度，並非同時一律。且風速度爲最大之面積常甚小，而其存在之時間亦甚短。刻下估計風荷重時，於城市中不甚高之結構，常用 $P=100$ 或 150 公斤/平方公尺 (約相當於 $V=130$ 或 160 公里/小時)。若結構高於 150 公尺，自此以上， P 之值應逐漸增加，約每增高三公尺增加 1 公斤/平方公尺。② 蓋高度愈增，阻礙愈少，故風之速度亦愈大也。風向常假定係與地面平行。

若二平行之平板，其平面與風向垂直，而二平板之距離不甚大，則向風之板對於其後之板其遮蔽 (shielding) 作用。如屋頂四週有女兒牆 (parapet

① 最近美國土木工程師會之風壓力委員會建議用 $P=0.0048 V^2$ ，見該會會刊 1936 年 3 月號。

② 此係美國土木工程師會之風壓力委員會所建議。美國計算高樓之風壓力時多採用之。

wall)。對於屋頂之下部，亦有遮蔽作用，使氣流向上而改變屋頂之風荷重，其遮蔽之性質，視女兒牆及屋頂高度而定，刻下尚無法精確估計。若屋頂近於平頂，而四週有相當高度之女兒牆，以資遮蔽，則風荷重有時可略去，遮蔽作用對於橋梁之風荷重，亦甚有影響，當於第九章中詳論之。

方程 (5-8) 祇能用於正方形平板，其平面與風向係垂直者，否則該方程不能採用，若將方程(5-8)寫成

$$P=0.0059CV^2 \quad (5-9)$$

其中 C 係一恆數，視受風壓力物體之形狀及位置而定，即可應用於各種物體。各種物體 C 之值如表 III 所示，用方程 (5-9) 所求得之 P ，再乘之以物體與風向成垂直之投影，即得該物體所受風荷重之總量。

表 III. C 之值

受風壓力之物體	位 置	C
正方及圓形平板	平面與風向成垂直	1.0
長方形平板 (長與寬之比=15)	平面與風向成垂直	1.2
長方形平板 (長與寬之比=30)	平面與風向成垂直	1.4
長方形平板 (長與寬之比=60)	平面與風向成垂直	1.6
立方體	一面與風向成垂直	0.9 至 1.05
立方體	對角線與風向成垂直	0.63
圓柱體	高度與風向成垂直	0.52
八角柱體	高度與風向成垂直	0.60
球體		0.36

若平板之平面與風向非垂直，如圖 5-5 (c)。假定風向係水平，而平板與水平成 θ 角，其所受之正(normal)壓力 P_n (亦以公斤/平方公尺計)，與方程 (5-8) 所求 P 之比，不能以簡

單力學之理論求之，英國物理學家萊 (Rayleigh) 氏曾根據流體力學之原理，求得下列公式：

$$(5-10) \quad \frac{P_n}{P} = \frac{(4+\pi)\sin\theta}{4+\pi\sin\theta}$$

此公式祇計及其向風之壓力，其後面因真空所發生之吸力，未會計入。英國之哈 (Hutton) 氏根據其 1786 至 1787 年之實驗，求得下列公式：

$$(5-11) \quad \frac{P_n}{P} = \sin\theta^{1.84 \cos\theta - 1}$$

1829 年法國工程師篤 (Duchemin) 氏亦根據其實驗，求得下列公式：

$$(5-12) \quad \frac{P_n}{P} = \frac{2 \sin\theta}{1 + \sin^2\theta}$$

篤氏之公式乃刻下公認為最確切者。依此公式，則 P_n/P 之值如表 IV。

表 IV. P_n 之值(依篤氏公式)

θ 角 之 值			平板之坡度	P_n (公斤/平方公尺)	
度	分	秒		$P=100$	$P=150$
5	0	0	17.3	26.0	
10	0	0	33.7	50.6	

15	0	0		48.5	72.8
18	25	6	1/6	57.7	86.5
20	0	0		61.2	91.9
21	48	5	1/5	63.0	99.0
26	33	54	1/4	74.7	112.0
30	0	0		80.0	120.0
28	41	24	1/3	85.0	127.5
40	0	0		91.0	136.5
45	0	0	1/2	94.3	141.4
50	0	0		96.6	144.9
	0	0		99.0	148.5
90	0	0		100.0	150.0

克(M. S. Ketchum)氏建議用一直線性之公式：

$$\frac{P_n}{P} = \frac{\theta^\circ}{45^\circ} \quad (5-13)$$

若 θ 角小於 35° ，則克氏公式所得之結果與哈氏公式所得者頗相近。

上述之估計坡度平板正壓力之公式，常用以估計坡度屋頂之風荷重，但二者之性質並不相同。根據若干實驗，^① 已知房屋之風荷重有下列二特點：第一，房屋之背風方面有負壓力或吸力存在，此係伊(Irminger)氏約於1894年發現。圖5—6示實驗之結果。(a)係英國思(Stanton)氏所得，(b)示美國之固異

① 最著者推英國思(Thomas E. Stanton)氏及丹麥伊(Irminger)羅(Nøkkentved)二氏之實驗。

(Goodyear) 飛艇庫之實驗風荷重圖, 用以作設計之根據者 ①

第二, 除房屋之外面有外壓力外, 房屋之內尚有內壓力, 自外壓力減去(代數減法)內壓力, 即得房屋之淨壓力, 於平常關閉之房屋, 內壓力常係負壓力或吸力。

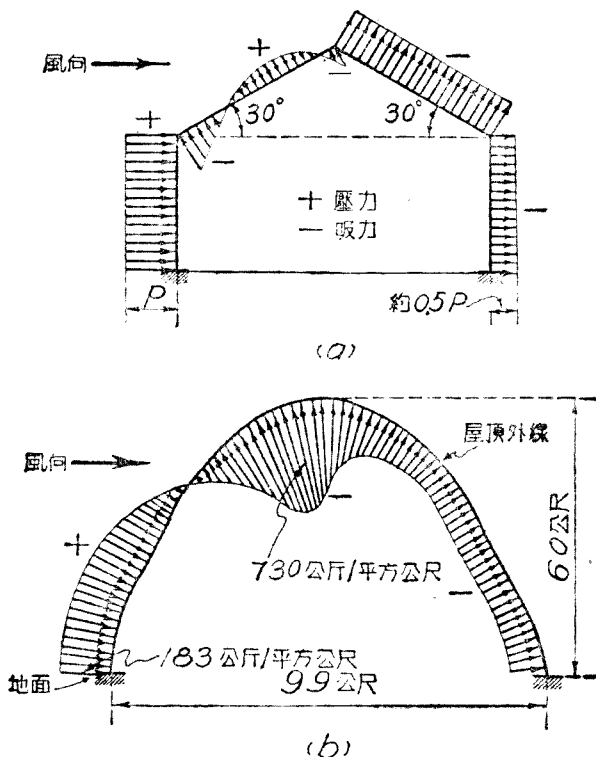


圖 5-6. 房屋之風荷重

如方程 (5-10) 至 (5-13), 設

$$(5-14) \quad K = \frac{P_n}{P}$$

① 見美國土木工程師會出版之土木工程 1930 年 11 月號, 71-76 頁。

其中 K 爲外內壓力相減之淨壓力係數,故

$$K = K_e - K_i \quad (5-15)$$

其中 K_e = 外壓力之 P_e/P , 而 K_i = 內壓力之 P_i/P 。根據英國思氏之實驗,^① K 之值如表 V。

表 V. K 之值(坡度屋頂,根據英國之實驗)

θ 角 (度)	坡 度	K 之 值		
		向風之部	背風之部	
			平常房屋	敞開房屋
22	1/5	+0.3	-0.5	極小,可以略去 不計。
26.6	1/4	+0.4	-0.6	
30		+0.47	-0.7	
34	1/3	+0.6	-0.75	
45	1/2	+0.88	-0.9	
60		+1.06	-1.0	

+ = 壓力, - = 吸力

於敞開房屋(祇有屋頂而無牆壁),風由屋頂上下吹過,使背風屋頂之內外壓力大約平衡,故該部淨壓力極小,可以略去不計。

美國土木工程師之風應力委員會^②根據所有實驗之結果,建議 K_e 之最大值,如表 VI。

① 見英國土木工程師會會刊第 156 卷(1913—年),78 頁;第 171 卷(1967—8 年),175 頁;及第 219 卷(1924—5 年),125 頁。

② 見該委員會之第五次報告,載該會會刊 1936 年,3 月號。

表 VI. K_s 之值 (坡度屋頂根據美國之建議)

θ 角 (度)	K_s 之 值	
	向 風 部	背 風 部
≤ 20	-0.7	-0.7
20 至 30	$(0.07\theta - 2.1)$	
30	0	
30 至 60	$(0.03\theta - 0.9)$	
> 60	0.9	

K_s 之值, 與房屋門窗之情形有關係。丹麥伊 (Irmingier) 羅 (Nøkkentved) 二氏以爲 K_s 常係負壓力或吸力, 其值約在 -0.25 至 -0.35 之間

於弧形屋頂, 其風荷重之分佈, 更爲複雜。前舉之美國委員會建議如下: 如圖 5-7 所示, $ADCEB$ 爲弧形屋頂之形式, 其高度 h 與跨度 L 之比爲 r , 經過 AB 及 C 三點, 作一圓弧, 其圓心爲 O , 圓心角爲 ϕ , 將 ϕ 分爲

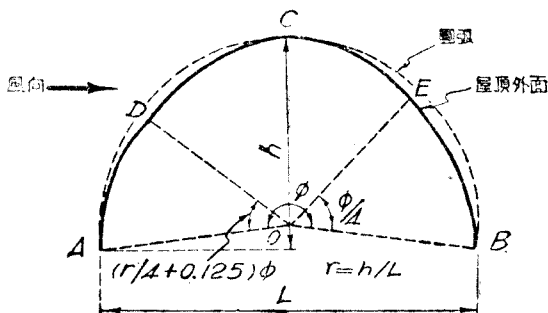


圖 5-7. 弧形屋頂之風荷重

三部，其向風之部爲 $(r/4+0.125)\phi$ ，背風之部爲 $\phi/4$ ，得 D 及 E 二點。

故此弧形屋頂分爲 AD, DE 及 EB 三部。此三部 K_e 之值，如表 VII：

表 VII. K_e 之值(弧形屋頂，根據美國建議)

$r = \frac{h}{L}$ 之值	K_e 之 值			
	向 風 之 部 AD		中 部 DE	背 風 之 部 EB
	A 及 B 二點 不在地面上	A 及 B 二點 在地面上		
≤ 0.2	-0.9			
0.2 至 0.35	$-(2.1-6r)$	$+1.4r$	$-(r+0.7)$	-0.5
$\geq 0.35^*$	$+(2.8r-0.7)$			

* 原報告作 0.25，似有誤，茲改爲 0.35。

上述屋頂風荷重之各種求法，雖大致不差，並不完全一致相符。加以風之速度及其與風壓力之關係，亦不易確定，故風荷重實係一種極複雜之問題，其有待於將來之研究者正多。美國之白 (W. Watters Pagon) 氏曾寫空氣動力學與土木工程師 (Aerodynamics and the Civil Engineer) ①一文，根據空氣動力學之理論，闡述風壓力對於結構之作用頗詳，學者不可不讀之。

(2) 雪荷重 屋頂雪荷重應爲若干，大約視地方而定。我

① 刊於美國之工程新聞紀錄 (Engineering News-Record)，分載於 1934 年 3 月 15 日至 1935 年 10 月 31 日各期中。

國北方之雪白多於中部，而南方有常年不見雪之地方。新下之乾雪，每立方公尺重約 128 公斤。壓緊之雪，每立方公尺重約 192 公斤，而極濕之雪或與冰雹混合，每立方公尺可重 480 公斤。乾雪甚易被風吹去，故不必顧慮，惟積雪之重量，則不可不計及。普通言之，屋頂所受之最大雪荷重，約在 25 至 150 公斤/平方公尺（屋頂坡面）之間。於我國中部（揚子江流域一帶），若屋頂之坡度為 $1/3$ 或 $1/4$ ，則屋頂坡面每平方公尺之雪荷重，約在 60 至 100 公斤之間。於南部則 25 至 50 公斤即已足。於坡度更大之屋頂，可用上列數之半，而於平頂應約加倍。

若干工程師於雪荷重之外，尚加冰荷重一項，其數量常係 50 公斤/平方公尺（屋頂坡面）。惟計算時，冰荷重實際相當於雪荷重之最小數量，故即於極寒冷之區域，冰荷重亦似無另列一項之必要。

最大之風荷重及最大之雪荷重決不能同時存在，因雪之一部必被風吹去。故如用最大之風荷重時，則雪荷重常用其最大重量之半。

有時將風及雪之荷重聯合計算，視作一均勻分佈之豎向荷重，加於屋頂之全部。此於平常之木料或鋼料屋頂桁架而其跨度不超過 30 公尺其坡度不超過 $1/2$ 者，所得結果常夠精確。但分析則極為簡便。惟用此項荷重時，風之負壓力不能計入，是其缺點。且祇可用於兩端支於牆上之屋頂桁架，不可用於工

廠檣架之屋頂。蓋用此項荷重時，不能求得在風荷重下隅支撐之應力及柱之彎應力與切應力也。此項風雪聯合荷重，常稱為相當豎向荷重 (equivalent vertical load) 或代替荷重 (alternate load)。其值約如表 VIII^①：

表 VIII. 屋頂之風雪代替荷重
(以公斤/平方公尺(屋頂坡面)計)

區 域	屋 頂 之 坡 度 或 θ 角 度				
	平 頂	1/5	1/4	1/3	45° 至 60°
北 部	225	185	125	150	150
中 部	175	135	125	125	150
南 部	160	110	125	125	150

表 VIII 所列之代替荷重，原祇合美國之用，在我國祇可供參考。其實代替荷重應力為若干，視屋頂之坡度，風雪荷重之比較數量，及各項應力之如何相加以得其設計應力 (design stress) 為準，不可一概而論，若屋頂桁架各桿之設計應力已求得，其每桿之代替荷重，可以下列方程求之：

$$\frac{\text{代替荷重} + \text{呆荷重}}{\text{呆荷重}} = \frac{\text{設計應力}}{\text{呆應力}}$$

$$\text{或} \quad \text{代替荷重} = \text{設計應力} \times \frac{\text{呆荷重}}{\text{呆應力}} - \text{呆荷重} \quad (5-16)$$

取諸桿代替荷重之大約平均數，即得桁架之代替荷重。惟決定

① 採自齊 (Kidder) 巴 (Parker) 二氏之建築師及營造師手冊 (Architects' and Builders' Handbook)，已略加刪改。

代替荷重之先，其設計應力常係未知。但於屋頂桁架之計算有相當經驗者，代替荷重之決定，並無困難。普通言之，代替荷重至少應為 125 公斤/平方公尺（屋頂坡面），於極溫暖之區域，可減至 100 公斤/平方公尺（屋頂坡面）。

(3) 其他活荷重 除風雪而外，屋頂桁架所支之其他活荷重，殊無一定，視房屋之情形而異，於平頂其上或有屋頂花園，則人及傢俱之重量，當然須計入，惟不能與最大之風雪荷重同時存在。或屋頂桁架支承一吊樓，或有機器，或起重機〔如圖 5—4 b 所示之單軌起重機〕等，其確實荷重，均應加於桁架之相當節點。影片 IV 示工廠中之起重機：



影片 IV. 工廠中之起重機

例題 5—1. 試估計分析此屋頂桁架應用之節點總荷重。此房屋在揚子江流域。

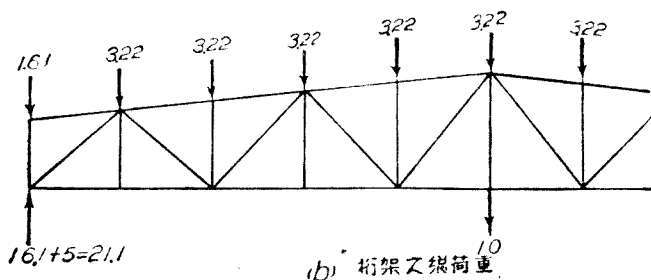
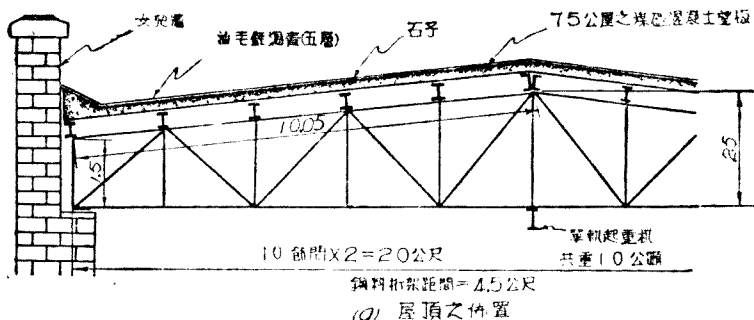
解答 屋頂近於平頂，而四週又有女兒牆遮蔽，故風荷重可以略去。在揚子江流域，雪荷重本可以每平方公尺（屋頂坡面）100 公斤，但因有女兒牆，

以增加至 150 公斤為宜。

油毛氈瀝青及石子之屋頂遮蓋,重約 40 公斤/平方公尺。

煤渣混凝土望板,厚 75 公厘,重約 120 公斤/平方公尺。

鋼材,重約 10 公斤/平方公尺。



例題 5-1.

鋼料屋頂桁架,用公式 (5-2),則 $W=1.2 \times 20 + 3.7 = 27.7$ 。因係近於平頂,加百分之十,得 $27.7 \times 1.1 = 30.5$ 公斤/平方公尺。

支撐架重約 5 公斤/平方公尺。

雪荷重	= 150
屋頂遮蓋	= 40
望板	= 120
鋼材	= 10
桁架	= 30.5
支撐架	= 5

355.5 公斤/平方公尺(屋頂坡面)

$$\text{上弦節點總荷重} = 355.5 \times 10.05 \times 4.5 \times \frac{1}{5} = 3,216 \text{ 公斤}$$

$$= 3.22 \text{ 公噸}$$

分析此桁架時之節點總荷重如附圖(b)。計算屋頂桁架之重量 30.5, 應以屋頂平投影面計, 但於此桁架屋頂之平投影面與坡面所差無幾, 故為計算時方便起見, 亦用屋頂之坡面。

例題 5—2. 設風向自左向右, $P=100$ 公斤/平方公尺, 試估計此屋頂桁架之風荷重。(a)根據篤氏公式, (b)根據英國之實驗, (c)根據美國之建議,

解答 (a)此屋頂之坡度為 $1/4$, 由表 IV 得 $P_n=74.5$ 。故節點風荷重為〔附圖(b)〕:

$$74.5 \times 1.677 \times 5 = 625 \text{ 公斤} = 0.625 \text{ 公噸}$$

(b)根據英國之實驗, 由表 V, 向風部之節點風荷重(壓力)為

$$+100 \times 0.4 \times 1.677 \times 5 = +335 \text{ 公斤} = +0.335 \text{ 公噸}$$

背風部之節點風荷重(吸力)為,

$$-100 \times 0.6 \times 1.677 \times 5 = -503 \text{ 公斤} = -0.503 \text{ 公噸}$$

荷重之佈置如附圖(c)。

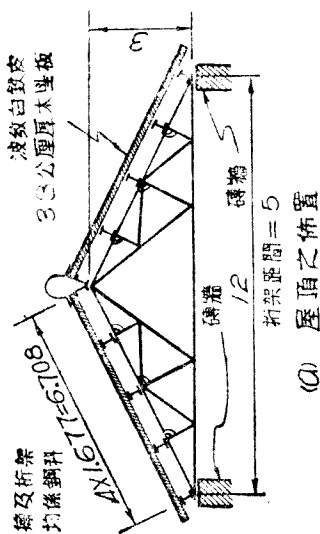
(c)根據美國之建議, 並假定內壓 $K_i = -0.30$, 坡度為 $1/4$ 之 θ 角度為 26.6 度由表 VI 及方程(5—15), 則向風部之節點荷重(壓力)為,

$$\begin{aligned} +100[(0.67 \times 26.6 - 2.1) - (-0.30)] 1.677 \times 5 &= +50 \text{ 公斤} \\ &= +0.050 \text{ 公噸} \end{aligned}$$

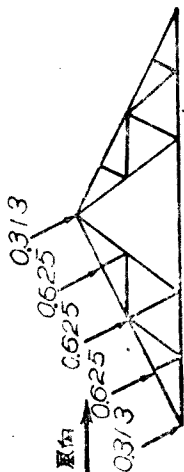
背風部之節點風荷重(吸力)為,

$$100[-0.7 - (-0.3)] 1.677 \times 5 = -335 \text{ 公斤} = -0.335 \text{ 公噸}$$

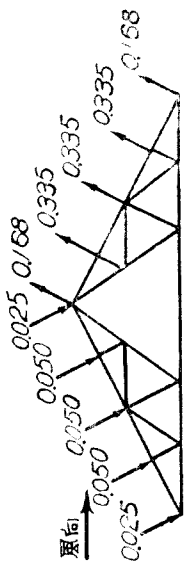
荷重之佈置如附圖(d)。



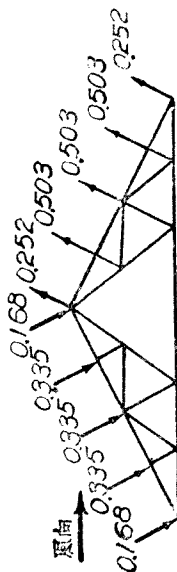
(a) 屋頂之佈置



(b) 根據瑞氏之公式



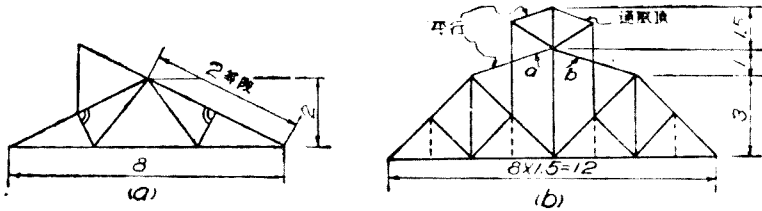
(c) 根據英國之試驗



(d) 根據英國之試驗

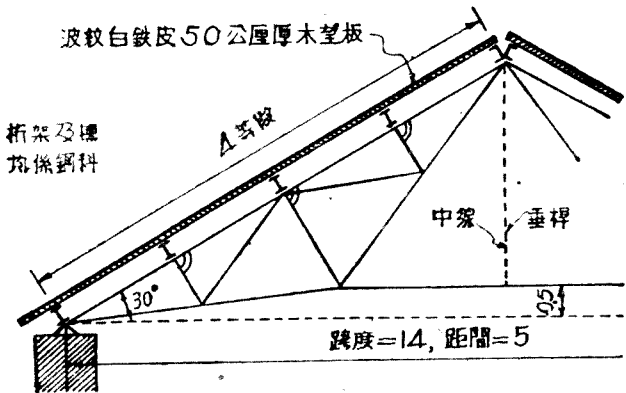
例題 5-2.

習題 5-1. 根據萬氏公式求此二屋頂桁架之節點風荷重。設風向自左向右, $P=100$ 公斤/平方公尺。桁架間距為 4 公尺。



習題 5-1.

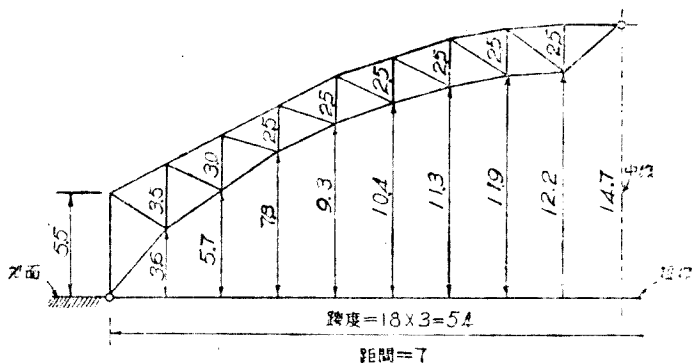
習題 5-2. 附圖示一芬氏升起式屋頂桁架, 建於北方區域, 試估計其雪荷重, 風荷重 (風自左向右)。估計風荷重時, 用下列三法: (a) 根據萬氏公式, (b) 根據英國之實驗, (c) 根據美國之建議。並以圖示各荷重下之節點荷重。



習題 5-2

習題 5-3 附圖示一屋頂三鉸拱之左半。根據美國之建議。估計其風荷重。風向自左向右, 最大速度為 160 公里/小時, 其背風豎立牆之吸力,

- 可假設等於向風豎立牆壓力之一半。作圖表示上弦諸節點之風荷重。



習題 5-3.

習題 5-4 一圓柱形烟肉，高 60 公尺，其外圍之直徑，頂上係 4 公尺，底下係 5.5 公尺。若風之速度為 130 公里/小時，求其底下因風荷重之彎距。

5-5. 屋頂桁架之支座及反力 木料屋頂桁架及鋼料屋頂桁架之跨度不甚長者（約不超過 12 公尺），若支承於牆上，其兩端常用長螺栓錨定(anchor)於牆上，使其無因溫度升降而漲縮之自由。用此種支座之屋頂桁架 在風荷重下，其反力係靜不定，如欲使其反力成為靜定，則必假定(1)其兩端之平分反力相等，如圖 5-8 (c) [與圖 3-6 (c) 相同]；或(2)其兩端之反力與風荷重平行如圖 5-8 (d) [與圖 3-6 (d) 相同]。於鋼料屋頂桁架之跨度較長者（約在 12 公尺以上 21 公尺以下），則一端必用滑動支座，如圖 3-10 (a)，庶桁架因溫度之升降能伸縮自由。滑動支座常有摩擦，於年久有銹者尤然，故仍有平分反力，其數量等於其豎分反力乘以摩擦係數。因此求桁架荷重

之反力時，仍須有圖 5—8 (c) 或 (d) 之假定。

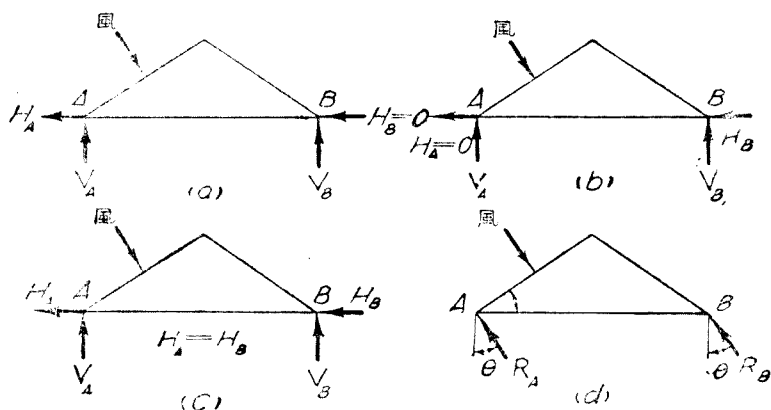


圖 5—8. 屋頂桁架之反力

於跨度特長(約在 21 公尺以上)之鋼料屋頂桁架，如有拉桿之三鉸拱，其一端必用承台〔如圖 3—11(a)〕或鉸支座〔如圖 3—11(b)〕以錨定之，其他一端必用輓軸支座或搖擺支座〔如圖 3—11(b) 至 (f)〕，庶桁架因溫度之升降能漲縮自由，不致發生溫度應力；而其在風荷重下之反力，亦能確定，如圖 5—8 (a) 或 (b)，視其膨漲支座在右端抑在左端而定。

教堂中之舊式屋頂桁架，如圖 5—3 之 (c) 及 (d)，無論支於牆上或接於柱上，其在風荷重下之反力，常係靜不定。惟圖 5—3 (d) 之鏈梁式桁架之反力極其有趣。bd 及 df 二曲桿常祇能承受壓力，不能承受拉力，而在豎向之呆荷重下，該二桿之應力均為零。在自左向右之風荷重下，bd 桿之應力為零，故可移去。如是，若 a 及 g 二點係固定，則於理論，此桁架成一三鉸拱。其三鉸在 a、c 及 g 三點，惟實際上 c 點常非一鉸耳。

第三章所述反力之各種數解及圖解法，均可用於屋頂桁架，自無待論。於風荷重下，屋頂桁架之兩端平分反力 H_A 及 H_B ，無論如圖 5—8 所示之何法分佈，均與兩端之豎分反力 V_A 及 V_B 無關，故此二項分反力之求法，可分二步驟。

風荷重反力之圖解法，除第三章所述者外，亦可用圖 5—9

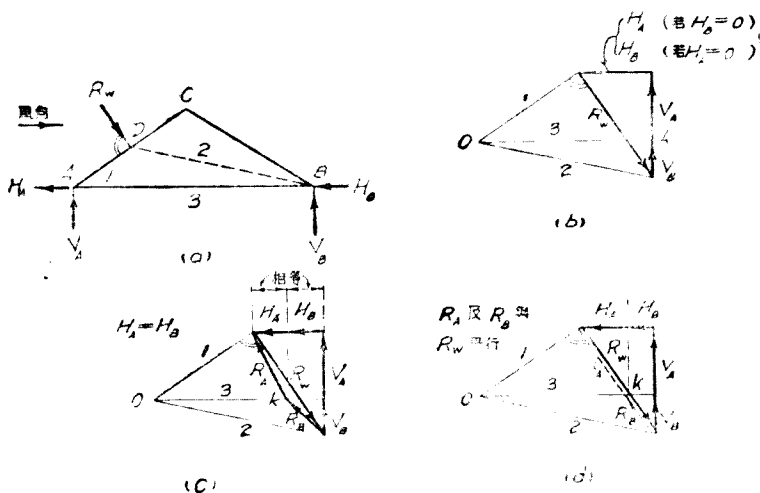


圖 5—9 屋頂桁架風反力之圖解法

所示者。圖 5—9 (a) 示一屋頂桁架及其風荷重之合力 R_w 。聯 DB 線。如其兩端平分反力之分佈如圖 5—8 (a) 或 (b)，則其圖解如圖 5—9 (b) 所示。將 R_w 分解為平豎二分力，反其平分力之指向，即得 H_A (若 $H_B=0$) 或 H_B (若 $H_A=0$)。自 R_w 之尾作射線 1 與 AD 平行，自 R_w 之首作射線 2 與 DB 平行，自此二射線之交點 O 作射線 3，與 AB 平行，並與 R_w 之豎分力相交於 k 點，即得 V_A 及 V_B 之數量，蓋圖 5—

9 (a) 之三角形 ABD 可視作一索線多邊形，而 AB 爲其閉合線。故圖 5—9 (b) 之作法，與第三章所述求反力之圖解法同。圖 5—9 (c) 及 (d) 各示圖 5—8 (c) 及 (d) 反力情形之圖解法，其方法及意義與圖 5—9 (b) 相似。

若屋頂之風荷重一邊有壓力，其他一邊有吸力，上述之法亦可採用，惟須先分別求壓力及吸力之反力，而後求其反力之合力；亦可先求壓力及吸力之合力，而後用第三章所述之任何方法，求其反力。後法或較前法簡便。

習題 5—5。求習題 5—1 中二屋頂桁架之風荷重反力。假定其兩端反力均與風荷重之合力平行。

習題 5—6。用數解法求習題 5—2 屋頂桁架在三種風荷重下之反力。假定其兩端之平分反力係相等。

習題 5—7。用圖解法求習題 5—3 之反力。

5—6. 工廠排架之接合及反力 若屋頂桁架之兩端支於二

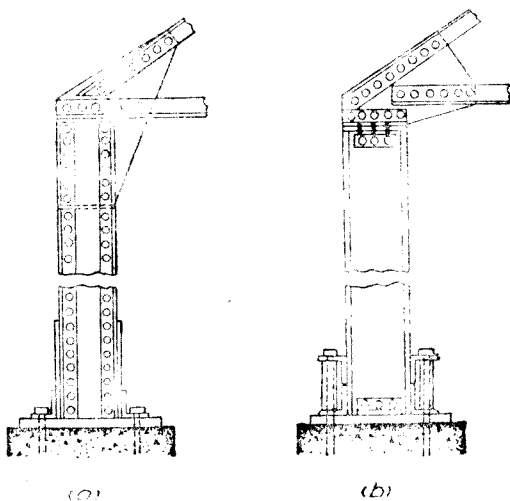


圖 5—10. 工廠排架之支座及接合

柱之上，即成工廠排架。桁架與柱之接合如圖 5—10 所示(隅支撐未示出)。圖 (a) 多用於合成(built-up)之鋼柱，而圖 (b) 則多用於整個之鋼柱。此二種接合法，皆使桁架固定於柱上，成一相當之剛節。如桁架因溫度升降而有漲縮，必全賴柱之彈性移動。若此項柱置於牆內，柱與牆之間，應有充分之空隙，庶牆不致因柱彈性移動而有損裂。

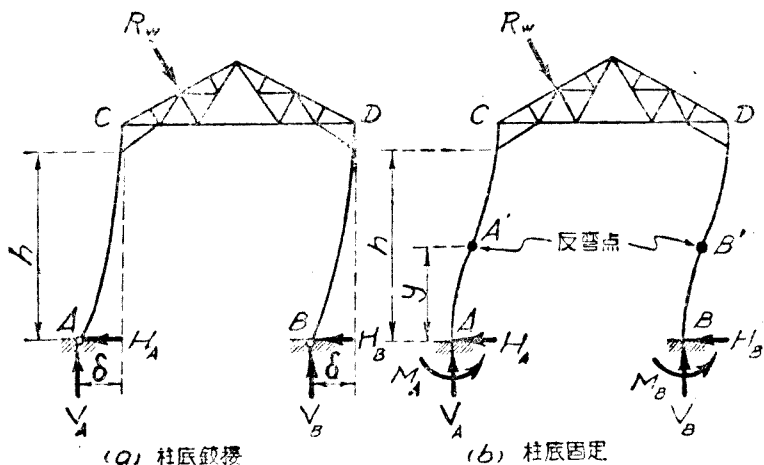
柱底如用長螺栓錨定於鋼筋混凝土地腳上，如圖 5—10，則柱與地腳之接合，亦係相當固定，否則柱底與地腳之接合，祇能視作鉸節。

如排架之柱底係鉸接於地腳上，如圖 5—11 (a)，則在風荷重之下，其柱底之獨立分反力有四。係靜不定式，故欲使其成為靜定，常假定 $H_A = H_B$ ，即二柱所受之切力相同。若二柱之材料、截面，及長度均相同，並假定 CD 長度之改變可以略去，則 $H_A = H_B$ 之假定，與實際相符。蓋如圖 5—11 (a) 所示， AC 及 BD 二柱可視作二懸臂梁，固定於其與隅支撐之節點，則 A 及 B 二端之變位各為，

$$\delta = \frac{H_A h^3}{3EI} = \frac{H_B h^3}{3EI} \quad (5-17)$$

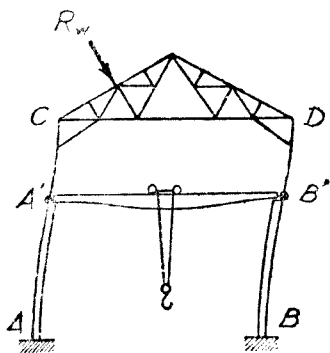
其中 E 為材料之彈性係數， I 為截面對其中軸(與紙面垂直)之惰性矩。若二柱之 E 及 I 均相同，則 $H_A = H_B$ 。若二柱之 E 相同(即材料相同)，而 I 及 h 不同，則

$$\frac{H_A}{H_B} = \frac{h_i^3 / I_{BD}}{h_{AC}^3 / I_{AC}} \quad (5-18)$$



(a) 柱底鉸接

(b) 柱底固定



(c) 下大上小之柱

圖 5-11. 排架之風反力

故二柱底平分反力(即柱之切力)之分配與其 $h^3 I$ 成反比例。

若二柱底係固定於地脚上, 如圖 5-11(b), 則在風荷重之下, 其柱底之獨立反分力有六, 係三次靜不定之結構。故除假定 $H_A = H_B$ 外, 尚須假定二柱反彎點(point of contraflexure)

A' 及 B' 之位置。若柱之切面上下一律，而其上下二端固定之程度相同，則其反變點在其高度之中點。即圖 5-11 (b) 中 $y=h/2$ 。若其上下二端固定之程度不同，則其反變點之位置，必較近於固定程度較小之一端。實際言之，排架二柱之上端係相當固定，而其下端固定之程度，常較其上端者略差，故計算時常假定 y 之值在 $h/3$ 及 $h/2$ 之間。若建造時對於柱底之固定，不加以注意，則分析時祇可視作鉸接。工廠排架之二柱，常支有起重機，故起重機之支座以下柱之惰性矩增加甚大，其反變點之位置，因之改變。若柱底係固定，則計算時常假設其反變點與柱改變截面之處極其接近，如圖 5-11 (c)。

於柱底鉸接之排架，其反力之求法，與屋頂桁架者相似。於豎向之呆荷重及雪荷重下，其二柱之平分反力常假設為零。於風荷重下，則不然，其反力之圖解法，如圖 5-12 所示，其方法及意義與圖 5-9 (a) 及 (c) 相同，不必另加解釋。根據靜平

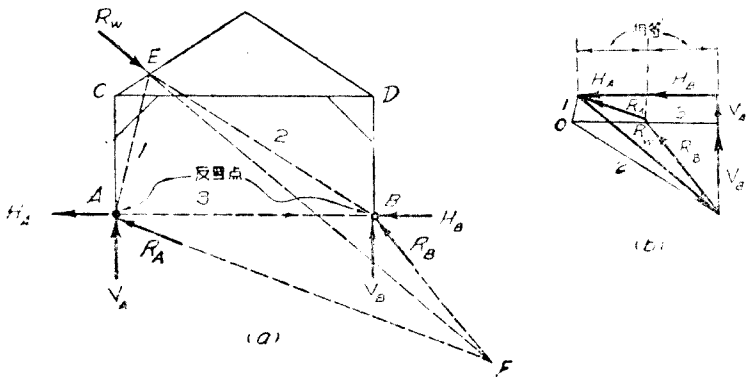
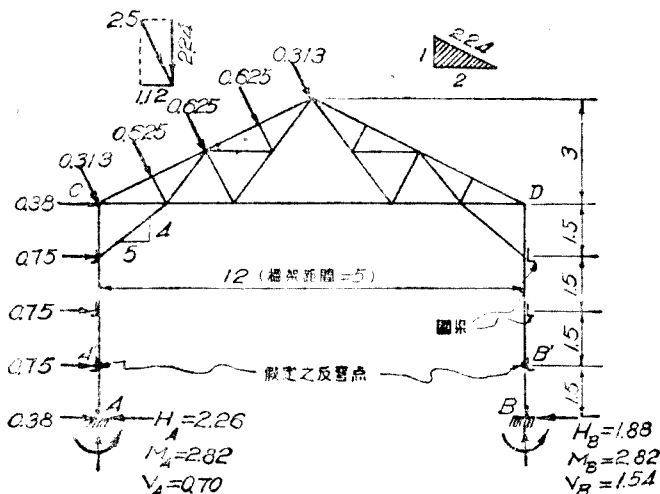


圖 5-12. 檣架風反力之圖解法

衡之定理二， R_W, R_A 及 I_B 應交會於 F 點，解答是否正確，可以此法校核之。

於柱底固定之排架，應先決定其二柱反彎點 A' 及 B' 之位置，再將此二點以上之部份加以隔離，而視作一柱底鉸接之檣架，而求得二柱於該二點之切力，及直接應力。再考慮二反彎點之彎矩等於零，即可求得其固定柱底之六個分反力。

例題 5-3. 用數解法求此工廠排架在風荷重下之反力。假設其二柱之反彎點在其隅支撐以下高度三分之一，並假設風壓力 $P=100$ 公斤/平方公尺。用邁氏公式計算 P_n 。



例題 5-3.

解答 此排架與例題 5-2 相同，故其屋頂之風荷重，可採用例題 5-1 解答 (a) 之答案，不必另行計算。其合力為 $4 \times 0.625 = 25$ ，再分為平豎二分力，如圖所示。圍梁之風荷重等於 $100 \times 5 \times 1.5 = 750$ 公斤 = 0.75 公噸。假設二柱最下段之切力相等，則

$$H_B = \frac{1}{2}(1.12 + 0.38 + 3 \times 0.75) = \underline{1.88} \leftarrow$$

$$H_A = 1.88 + 0.38 = \underline{2.26} \leftarrow$$

用 $\Sigma M = 0$, 以 A' 爲矩心, 考慮其以上部份之平衡, 得

$$V_B = \frac{1}{12}(2 \times 0.75 \times 2.25 + 0.38 \times 4.5 + 1.12 \times 6 + 2.24 \times 3) = \underline{1.54} \uparrow$$

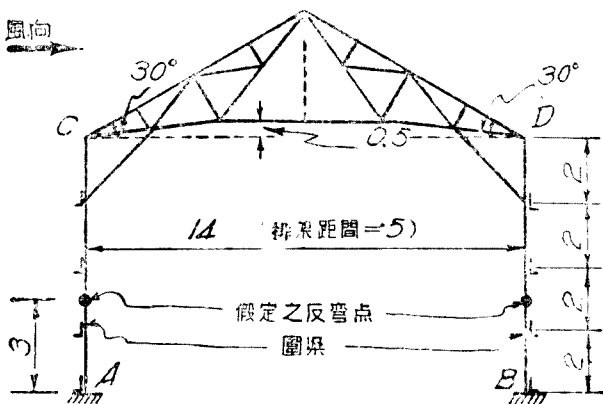
$$V_A = 2.24 - 1.54 = \underline{0.70} \uparrow$$

考慮二柱反彎點以下部份之平衡, 用 $\Sigma M = 0$, 各以 A' 及 B' 爲矩心, 得

$$M_A = M_B = 1.88 \times 1.5 = \underline{2.82} \curvearrowright$$

習題 5-8. 用數解法求前面所列桁架之反力。

習題 5-9. 用圖解法求此工廠桁架在風荷重下之反力。 假設風壓力 $P = 100$ 公斤/平方公尺, 用篤氏公式計算 P_n 。(注意此屋頂桁架與習題 5-2 所示者相同)。



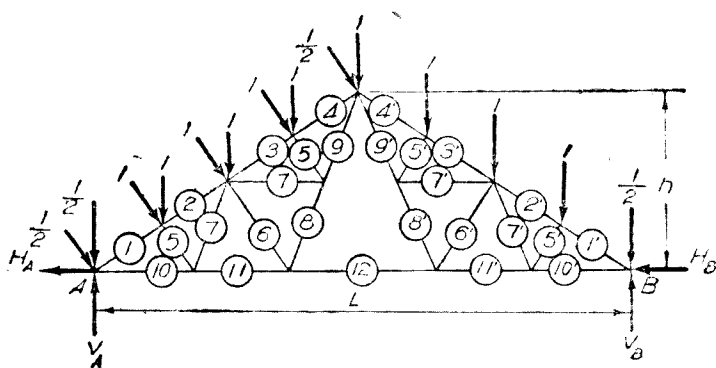
習題 5-9.

習題 5-10. 工廠檯架及其向風部圍梁風荷重(壓力)與例題 5-3 相同, 其背風部圍梁風荷重(吸力)爲向風部之半, 其屋頂桁架之風荷重與例題 5-2 附圖 (d) 所示者相同, 求此桁架之反力。

5-7. 屋頂桁架之應力 求屋頂桁架之應力時, 除極簡單

或平行弦之桁架，多用數解法外，常以麥 (Maxwell) 氏之圖解法為簡便。於通常之屋頂桁架，如圖 5-3 之 (e) 浩 氏式，(l) 至 (n) 各種芬 氏式，及 (o) 扇式等，如用 4-3 節所述之應力係數法，尤為簡便。若干書籍^①中，常載有各種通常屋頂桁架在各種荷重下之應力係數表，實用頗為便利。下列之表 IX，即係芬 氏屋頂桁架之應力係數表，列入以示其例。如有多數之某種桁架需分析而又無此項應力係數表時，即先計算一表，亦常稱便利。

表 IX. 芬 氏屋頂桁架之應力係數表



① 例如胡 (Hool) 韓 (Johnson) 二氏所著之房屋建造手冊 (Handbook of Building Construction) 第 1 卷，1929 年 2 版，478 至 510 頁載有各種通常屋頂桁架之應力係數表共 32 表，本書所列之表 IX，即採自該書。

$$n = \frac{L}{h}, \quad N = \sqrt{h^2 + 4}$$

桿	n 之 值		3	2 $\sqrt{3}$	4	5	6
	坡 度	角 度					
	1/3		33°-41'-24"	1/3.46	1/4	1/5	1/6
			30°		26°-33'-54"	21°-48'-5"	18°-55'-6"

通用公式

呆 荷 重 及 雪 荷 重 下 之 應 力 係 數

1,1'	-7N/4	-6.31	-7.00	-7.83	-9.42	-11.07
2,2'	-(7N ² -8)/4N	-5.76	-6.50	-7.38	-9.05	-10.75
3,3'	-(7N ² -16)/4N	-5.20	-6.00	-6.93	-8.68	-10.43
4,4'	-(7N ² -24)/4N	-4.65	-5.50	-6.46	-8.3	-10.12

5,5'	$-n/N$	-0.832	-0.865	-0.891	-0.923	-0.849
6,6'	$-2n/N$	-1.66	-1.73	-1.79	-1.83	-1.90
7,7'	$+n/4$	+0.15	+0.87	+1.00	+1.25	+1.50
8,8'	$+n/2$	+1.50	+1.73	+2.00	+2.50	+3.00
9,9'	$+3n/4$	+2.25	+2.60	+3.00	+3.75	+4.50
10,10'	$+7n/4$	+5.25	+6.67	+7.00	+8.75	+10.50
11,11'	$+3n/2$	+4.50	+5.20	+6.00	+7.50	+9.00
12	$+n$	+3.00	+3.46	+4.00	+5.00	+6.00

風荷重下之應力係數(風向自左向右, 5'至9'之應力 = (

1,2,3,4	$-(5n^2-8)/4n$	-3.68	-3.75	-4.50	-5.83	-7.17
1',2',3',4'	$-N^2/2n$	-2.17	-2.31	-2.50	-2.90	-3.33

5	-1	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00	-1.00
6	-2	-2.00	-2.00	-2.00	-2.00	-2.00	-2.00
7	+N/4	+0.502	+1.00	+1.12	+1.35	+1.58	+1.58
8	+N/2	+1.80	+2.00	+2.24	+2.70	+3.16	+3.16
9	+3N/4	+2.71	+3.00	+3.35	+4.05	+4.24	+4.24
V_A	$(3n^2-4)/Nn$	2.12	2.31	2.46	2.64	2.74	2.74
V_B	N/n	1.20	1.15	1.12	1.08	1.50	1.50

風荷重下之應力係數 ($H_H=0$, 反力情形如圖 5-8(a))

10	+5N/4	+4.51	+5.00	+5.59	+6.73	+7.90	+7.90
11	+N	+3.61	+4.00	+4.47	+5.39	+6.32	+6.32
12, 11', 10'	+N/2	+1.80	+2.00	+2.24	+2.69	+3.16	+3.16

H_A	$8/N$	2.22	2.00	1.79	1.49	1.27
H_B	0	0	0	0	0	0

風荷重下之應力係數 ($H_A=0$, 反力情形如圖 5-8(b))

10	$+(5n^2-12)/4N$	+2.28	+3.60	+3.80	+5.26	+6.65
11	$+(n^2-4)/N$	+1.39	+2.00	+2.68	+3.92	+5.68
12, 11', 10'	$+(n^2-12)/2N$	-0.415	0	+0.447	+1.21	+1.90
H_A	0	0	0	0	0	0
H_B	$8/N$	2.22	2.00	1.79	1.49	1.27

風荷重下之應力係數 ($H_A=H_B$, 反力情形如圖 5-8(c))

10	$+(5n^2+4)/4N$	+3.40	+4.60	+4.70	+6.02	+7.28
----	----------------	-------	-------	-------	-------	-------

11	$+n^2/N$	+2.49	+3.00	+3.58	+1.66	+5.70
12, 11', 10'	$+(n^2-4)/2N$	+0.693	+1.60	+1.34	+1.96	+2.53
H_A	$4/N$	1.11	1.00	0.894	0.746	0.633
H_B	$4/N$	1.11	1.00	0.894	0.746	0.633

風荷重下之應力係數(反力與風荷重平行反力情形如圖5-8(d))

10	$+(5n^2-8)N/4n^2$	+3.71	+4.33	+5.03	+6.31	+7.56
11	$+(n^2-2)N/n^2$	+2.81	+3.34	+3.92	+4.96	+5.97
12, 11', 10'	$+(n^2-4)N/2n^2$	+1.01	+1.33	+1.68	+2.25	+2.81
H_A	$2(3n^2-4)/Nn^2$	1.42	1.33	1.23	1.05	0.915
H_B	$2N/n^2$	0.803	0.667	0.558	0.431	0.331

由表 IX 可知：此屋頂桁架因其下弦係平直，故在風荷重下，其兩端之平分反力如何分配，祇與其下弦諸桿之應力有關係。（屋頂桁架之下弦非平直者非如此。）又可知：如屋頂之坡度愈大，則其中各桿之應力愈小。表 IX 亦可以計算風荷重為吸力時桁架之應力，惟各桿應力之符號，與表中所列者正相反。

若屋頂桁架上有通風頂，如圖 5—3 (l) 所示，其本身係靜不定，故分析時，應作適宜之假定。最好將通風頂與桁架分開，使其成為靜定而易於分析。圖 5—13(a) 示有通風頂桁架之一部

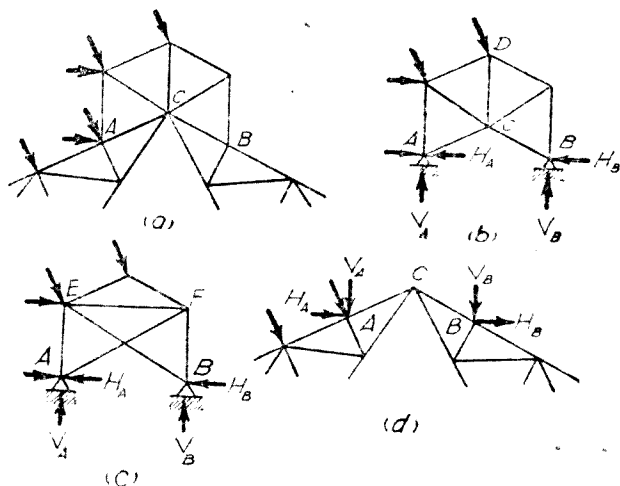


圖 5—13. 有通風頂桁架之分析法

及其風荷重。將通風頂分開如圖 5—13 (b)，其 A 及 B 二點係鉸支座，故亦係靜不定。分析時可假定 AC 及 BC 均係拉桿，或其應力相等（即切力由此二桿均等承受），由此可求得 H_A

及 H_B 之值，及其中各桿之應力。於豎向之荷重（如呆荷重雪荷重）下， AC 及 BC 二桿之應力均可假定為零。若通風頂之構造如圖 5—13 (c) 所示，其 AF 及 BE 二桿之情形，與圖 (b) 之 AC 及 BC 相同。將通風頂之四分反力反其指向，即成屋頂桁架之荷重，如圖 5—13 (d)。又圖 (b) 通風頂之 AC 及 BC 二桿係與屋頂桁架所共有，故該二桿圖 (b) 之應力，與圖 (d) 者相加，始得其總應力。

分析屋頂桁架時，常分別計算在各種荷重下之應力，然後依可能而又合理之情形，將在某數種荷重下之應力相加，得各桿之最大應力（即最大數量之拉力），及最小應力（即最大數量之壓力），俾可設計各桿之截面。故此種最大及最小應力，亦常稱為設計應力。

求最大或最小應力時，各種荷重之可能而合理之相加法甚多，但通用者如下：

(1) 呆荷重及雪荷重。

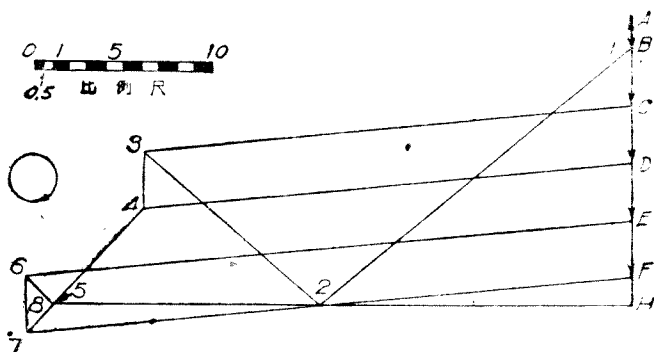
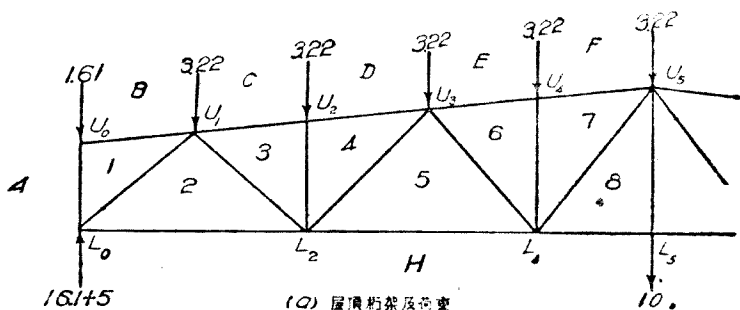
(2) 呆荷重及風荷重（風向向右或向左）。

(3) 呆荷重，雪荷重之半，及風荷重（風向向右或向左）。

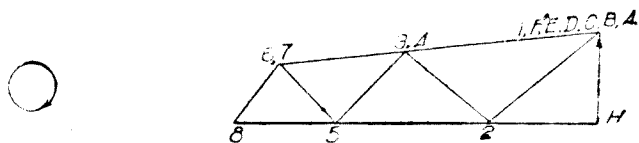
尚有第(4)相加法，即呆荷重，雪荷重，及風荷重之半或三分之一（風向向右或向左）。蓋最大之雪荷重及風荷重，不能同時存在。若桁架受有其他活荷重，均應加入上列三項中。普通言之，第(2)項常小於第(3)項，至第(1)及第(3)二項何者較大，則視雪及風荷重之比較大小而定。

如用風雪之代替荷重(見表 VIII),則其與呆荷重及其他活荷重相加之應力,即係設計應力,故用代替荷重時,分析較為簡易。

例題 5-4. 用麥氏應力圖求例題 5-1 中屋頂桁架各桿之設計應力。



(b) 應力圖(呆荷重及雪荷重)



(c) 應力圖(單軌起重機)

例題 5-4

應力 (例 5-4)

桿	呆 及 雪	起 重 機	設 計 應 力
U_0U_1	0	0	0
U_1U_3	-27.4	-10.9	-38.3
U_3U_5	-34.0	-18.0	-52.0
L_0L_2	+17.2	+ 6.1	+23.3
L_2L_4	+32.4	+14.7	+47.1
L_4L_5	+32.6	+20.5	+53.1
L_3U_0	- 1.6	0	- 1.6
L_0U_1	-22.6	- 8.0	-30.6
L_2U_1	+13.0	+ 6.2	+19.2
L_2U_2	- 3.2	0	- 3.2
L_2U_3	- 7.5	- 5.6	-13.1
L_4U_3	+ 2.1	+ 4.6	+ 6.7
L_4U_4	- 3.2	0	- 3.2
L_4U_5	+ 2.1	- 4.2	$\begin{cases} +2.1 \\ -3.0 \end{cases}$
L_5U_5	0	+10.0	+10.0

解釋 因既無風荷重，故呆荷重與雪荷重合併作應力圖如附圖 (b)。因此桁架係對稱，祇須為其左半作應力圖。

起重機之應力圖如附圖 (c)。

除 L_4U_5 桿外，所有各桿之應力均係相加，因二者之正負號相同。 L_4U_5 之最大應力為 +2.1，其呆應力為 $+(2.1 \times 2)(5.5 \div 355.5) = +1.2$ (見例題 5-1 荷重之計算)。故 L_4U_5 之最小應力為 $-4.2 + 1.2 = -3.0$ 。所

右應力見附表，其值皆自查氏應力圖量得，與用數解法所得之值，或微有差誤。

例題 5—5. 用應力係數法（即表 IX）求例題 5—2 附圖 (b), (c) 及 (c) 屋頂桁架之風應力。假設其兩端之平分反力相等。

解釋 桿之記號如表 IX。此屋頂桁架之坡度為 1/4，第 5 行仍係以節點風荷重乘應力係數，但記錄時並倒其次序。如以 -0.503 乘桿 10 之應力

屋頂桁架風應力（風向向右）計算表（例題 5—5）

桿	風應力係數 (表 IX)	(b)			(c)			(d)		
		風荷重 (0.625)	風壓力 (0.335)	風吸力 (-0.503)	風應力 (相加)	風壓力 (0.335)	風吸力 (-0.335)	風應力 (相加)		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)		
1,2,3,4,	-4.50	-2.81	-1.51	+1.26	-0.25	-0.23	+0.81	+0.61		
5	-1.00	-0.63	-0.3	0	-0.3	-0.65	0	-0.65		
6	-2.10	-1.25	-0.67	0	-0.67	-0.10	0	-0.10		
7	+1.12	+0.70	+0.38	0	+0.38	+0.16	0	-0.16		
8	+2.24	+1.40	+0.72	0	+0.72	+0.11	0	-0.11		
9	+3.35	+2.10	+1.12	0	+1.12	+0.17	0	-0.17		
10	+4.70	+2.94	+1.40	-0.68	+0.72	+0.24	-0.45	-0.23		
11	+3.38	+2.24	+1.14	-0.68	+0.56	+0.18	-0.45	-0.27		
12	+1.34	+0.84	+0.45	-0.68	-0.23	+0.67	-0.45	+0.22		
11'	+1.34	+0.84	+0.45	-1.81	-1.36	+0.67	-1.14	+0.47		
10'	+1.34	+0.84	+0.45	-2.37	-1.92	+0.67	-1.40	-0.73		
9'	0	0	0	-1.69	-1.69	0	-1.12	-1.12		
8'	0	0	0	-1.14	-1.14	0	-0.75	-0.75		
7'	0	0	0	-0.67	-0.67	0	-0.38	-0.38		
6'	0	0	0	+1.01	+1.01	0	+0.67	-0.67		
5'	0	0	0	+0.50	+0.50	0	+0.31	-0.31		
1',2', 3',4,	-2.50	-1.56	-0.84	+2.27	+2.27	-0.13	+1.51	+1.38		

係數 +4.70 得 -1.92, 但記錄於桿 10' 之後。第(8)行同此。惟此法祇能用於桁架兩端不分反力相等之例, 學者應自作一圖, 以明其理由。

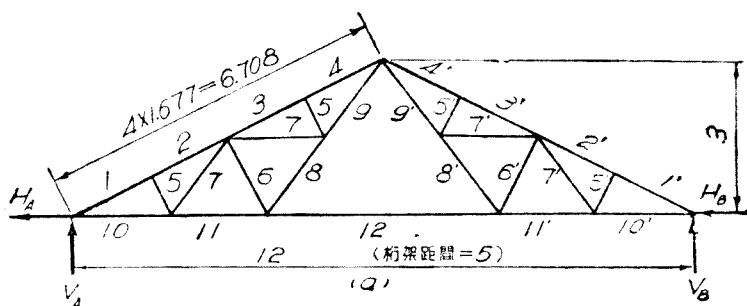
例題 5-6. 求例題 5-2 附圖(a)屋頂桁架各桿之設計應力。其風荷重如例題 5-2 附圖(b) (根據篤氏公式), 雪荷重為 100 公斤/平方公尺(屋頂坡面), 呆荷重係表 II 估計, 約為 70 公斤/平方公尺(屋頂坡面)。其兩端風反力之情形, 與其各桿之設計應力有何影響? 並用代替荷重計算設計應力。

解答:

$$\text{節點呆荷重} = 70 \times 1.68 \times 5 = 588 \text{ 公斤} = 0.59 \text{ 公噸}$$

$$\text{節點雪荷重} = 100 \times 1.68 \times 5 = 840 \text{ 公斤} = 0.84 \text{ 公噸}$$

$$\text{節點風荷重} = 0.625 \text{ [見例題 5-2 附圖(a)]}$$



例題 5-6.

桁架各桿之記號與表 IX 所用者相同。設計應力之計算, 見附表。其第(1)行之呆應力係數係抄自表 IX (坡度為 1/4)。雪應力亦用此應力係數計算, 因其與呆荷重皆係均佈荷重也。第(5)行上半之風應力(風向向右)係抄自例題 5-5 計算表之第(3)行。第(6)行上半之風應力(風向向左)係抄自該表之第(3)行, 但將其中 1', 2', 3', ... 各桿之應力, 視作附圖 1, 2, 3, ... 各桿之應力。蓋在 $H_A = H_B$ 及反力與風荷重平行之二種情形下, 於風向向左時, 若將風荷重桁架及反力均經過空間轉 180 度, 則風荷重及反力與風向向右時相同。惟 1', 2', 3', ... 各桿與 1, 2, 3, ... 各桿互換其位置。但在 $H_A = 0$ 或 $H_B = 0$ 之情形下, 不能如此。蓋 $H_A = 0$ 或 $H_B = 0$

時，則該端係鉸軸支座，而支座之位置係固定，故反力不能經過空間轉 180 度也。

第 (5) 及第 (6) 二行下半風應力之計算，係採用表 IX 之應力係數，學者應自行明瞭其計算之方法。

於 $H_A = H_B$ 或反力與風荷重平行之情形下，桁架各桿之設計應力有對稱性，故計算其一邊各桿之設計應力即已足。於 $H_A = 0$ 或 $H_B = 0$ 之情形下，則不然，但亦祇影響其下弦各桿之設計應力，故計算表中將其下弦之五桿完全列入，惟此桁架之設計時，實際上必使其成為對稱式，於 10, 10', 11, 11' 四桿之設計應力，常取其最大者

計算表中之第 (7) 行示何種應力如何相加可得第 (8) 行各桿之設計應力。觀察第 (8) 行各下弦桿之設計應力，可知屋頂桁架兩端之風反力情形如何，影響於其中各桿之設計應力者甚微。

第 (9) 行示用代替荷重所得之設計應力。代替荷重以 125 公斤/平方公尺 (屋頂坡面) 計，係採自表 VIII，故代替荷重與呆荷重之節點荷重總量為

$$(125 + 70) \times 1.68 \times 5 = 1640 \text{ 公斤} = 1.64 \text{ 公噸}$$

以 1.64 公噸乘各桿之呆應力係數，即得設計應力。比較第 (8) 及第 (9) 二行各桿之設計應力，可知用代替荷重所得之值於弦桿覺稍大，於腹桿覺稍小，但非常係如此。如欲計算代替荷重應為若干最為適宜，可以 1 及 7 二桿為例，應用方程 (5-16)，則

$$\text{桿 1 之代替荷重} = 11.21 \times \frac{70}{4.63} - 70 = 100$$

$$\text{桿 7 之代替荷重} = 1.71 \times \frac{70}{0.59} - 70 = 133$$

故上述計算時用代替荷重 = 115 最為適宜。

屋頂桁架之設計應力(例題 5—6)

桿	呆應力	力應力	雪應力	雪應力之半	風應力			設計應力	代替荷重之設計應力	風反力情形
	係數				向	右	向			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	
1	-7.33	-4.63	-6.78	-3.39	-2.81	-1.56	2+3	-11.21	-12.90	$H_A = H_B$
2	-7.38	-4.35	-6.21	-3.10	-2.81	-1.56	2+3	-10.55	-12.10	
3	-6.93	-4.09	-5.82	-2.91	-2.81	-1.56	2+3	-9.91	-11.40	
4	-6.38	-3.81	-5.44	-2.72	-2.81	-1.56	2+4+5	-9.34	-10.60	
5	-0.894	-0.73	-0.75	-0.38	-0.63	0	2+4+5	-1.54	-1.46	
6	-1.79	-1.06	-1.52	-0.76	-1.25	0	2+4+5	-3.07	-2.93	
7	+1.00	+0.59	+0.81	+0.42	+0.70	0	2+4+5	-1.71	+1.64	
8	+2.00	+1.18	+1.68	+0.84	+1.40	0	2+4+5	+3.42	+3.28	
9	+3.00	+1.77	+2.52	+1.26	+2.10	0	2+4+5	+5.13	+4.92	
10	+7.00	+4.13	+5.88	+2.94	+2.94	+0.84	2+3	+10.01	+11.48	
11	+6.00	+3.54	+5.04	+2.52	+2.24	+0.84	2+3	+8.58	+9.84	
12	+4.00	+2.36	+3.36	+1.68	+0.84	+0.84	2+3	+5.72	+6.56	
10	+7.00	+4.13	+5.88	+2.94	+3.14	+1.05	2+4+5	+10.21	+11.48	風反力與風荷重平行
11	+6.00	+3.54	+5.04	+2.52	+2.45	+1.05	2+3	+8.58	+9.84	
12	+4.00	+2.36	+3.36	+1.68	+1.05	+1.05	2+3	+5.72	+6.56	
10	+7.00	+4.13	+5.88	+2.94	+3.48	+0.28	2+4+5	+10.55	+11.48	$H_B = 0$
11	+6.00	+3.54	+5.04	+2.52	+2.80	+0.28	2+4+5	+8.86	+9.84	
12	+4.00	+2.36	+3.36	+1.68	+1.40	+0.28	2+3	+5.72	+6.56	
11'	+6.00	+3.54	+5.04	+2.52	+1.40	+1.67	2+3	+8.58	+9.84	
10'	+7.00	+4.13	+5.88	+2.94	+1.40	+2.37	2+3	+10.01	+11.48	

求之，故求雪應力時不必作麥氏圖。

5-8. **工廠排架之應力** 工廠排架在豎向荷重（呆荷重及雪荷重等）下，其二柱之下端常假定祇有豎反力，已於 5-6 節論及之。故其上端之隅支撐亦假定無應力（實際上有應力），而二柱亦祇有直接應力。至於桁架與二柱上端之接合，雖係剛節，如圖 5-10 所示，但分析時常視作鉸節，此與計算應力時常將任何鉚接桁架視作樞節桁架同。故在呆荷重及雪荷重下，排架之應力與兩端支於牆上之屋頂桁架，完全相同。

於風荷重下，其柱底既不能假定祇有豎反力，而隅支撐亦不能假定無應力。故工廠排架之風應力，與兩端支於牆上之屋頂桁架完全不同。圖 5-14(a) 示一柱底鉸接之工廠排架，其風荷重及反力均係已知。如欲求其各桿之應力，可用 $a-a$ 及 $b-b$ 截面，將其隔離為三部，如圖 5-14 (b), (c), 及 (d)。其中 C 及 D 二節點皆假定係鉸節。先考慮柱 AC 之平衡，

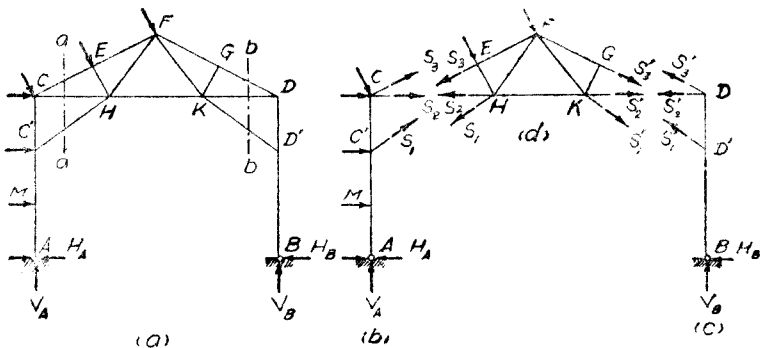


圖 5-14 工廠排架之風應力（柱底鉸接）

如圖 5—14 (b), 其所受諸力之未知項, 祇有 $S_1, S_2,$ 及 S_3 之數量及指向。用 $\Sigma M_C=0$ 得 S_1 , 用 $\Sigma V=0$ 及 $\Sigma H=0$ 考慮隔離體全部之平衡, 即可先後求得 S_3 及 S_2 。同此, 考慮柱 BD 之平衡, 如圖 5—14 (c), 可先後得 $S_1', S_2',$ 及 S_3' 。 S_1 及 S_1' 各係隅支撐 $C'H$ 及 $D'K$ 之應力, $S_2, S_3, S_2',$ 及 S_3' 則各係桁架中 $CH, CE, DK,$ 及 DG 四桿之應力, 反其指向, 即成桁架 $EFGHK$ 之反力, 如圖 5—14 (d)。其中其餘各桿之應力, 可以數解或圖解法求之。

因柱底之平反力及隅支撐之應力, 故 AC 及 BD 二柱除

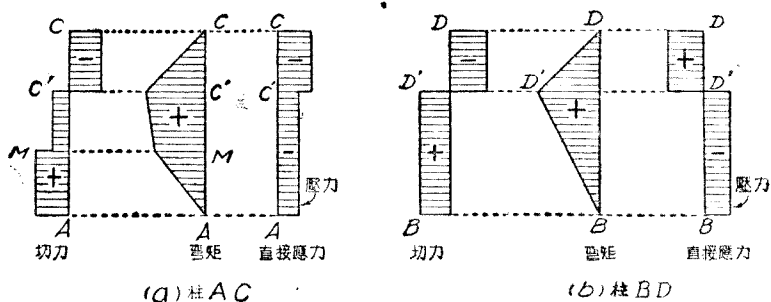


圖 5—15. 柱之切力, 彎矩, 及直接應力圖(風荷重)

有直接應力外, 尚有切力及彎矩。若將二柱自右向左橫看, 成爲二梁, 並以正號之切力及彎矩畫於其左, 而負號者畫於其右, 即得切力圖, 彎矩圖, 及直接應力圖, 約如圖 5—15 所示。

工廠檯架之風應力, 亦可全用圖解法求之, 如圖 5—16 所示, 惟須另加輔桿 $CC'', C'C'', \dots$ 等 (其中斜桿之傾度, 並無限制)。並將柱 AC 上 C' 及 M 點之荷重, 各移至 C'' 及 M'

二點。如是則 AC 及 BD 二柱無任何切力及彎矩，而排架亦變爲一通常之桁架，其中諸桿之應力，可全用麥氏應力圖求之。用此法所得桁架 CDF 中各桿及隅支撐 $C'H$ 與 $D'K$ 之應力，均係正確，但所得 AC 與 BD 二柱之應力，均非正確，而諸輔

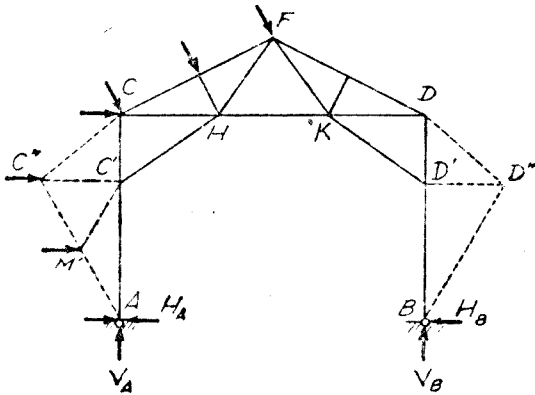


圖 5—16. 工廠排架應力之圖解法

桿之應力，更無意義，均應棄置之。

如工廠排架二柱之柱底係固定，則其自二柱反彎點以上之部份，可視作柱底鉸接之排架，其應力之求法與上述者完全相同。至反彎點以下之二柱可視作二豎立之懸臂梁。

工廠中常需有起重機，而起重機梁之兩端，係支於排架之二柱，如圖 5—4 (c)。其支承或用一托座 (bracket)，如圖 5—17 (a)，或將柱之下部加大，如圖 5—17 (b)。柱 AC 均受有偏心彎矩 P_e ，而二柱之底，並有向內之水平反力 H_A 及 H_B ，其數量靜不定。根據高等分析法，並假定其屋頂桁架之剛度爲無窮，則

$$(5-19) \quad H_A = H_B = \frac{1.5 P_e (h^2 - a^2)}{h^3 + a^3 \left(\frac{I_1}{I_2} - 1 \right)}$$

既知 H_A ，則柱之彎矩圖如圖 5-17(e)。若隅支撐不甚剛勁，柱之 CC' 必略有變形。如是，於方程(5-19)中可用 h_1 代替 h 。

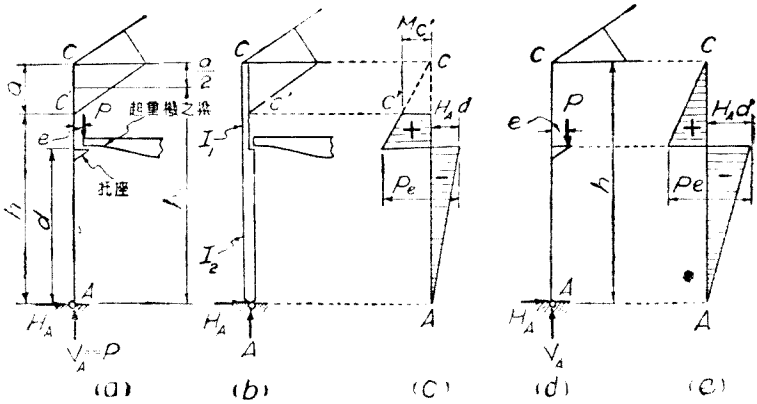


圖 5-17. 支有起重機之柱

若排架之高度不大，必將隅支撐略去，始可安置起重機，如圖 5-17(d)，則柱之上端 C 可視作鉸節，如是，則 H_A 變為

靜定，即

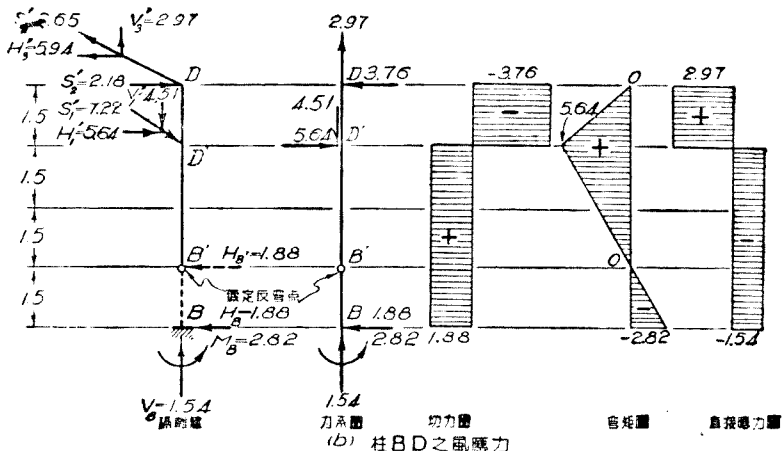
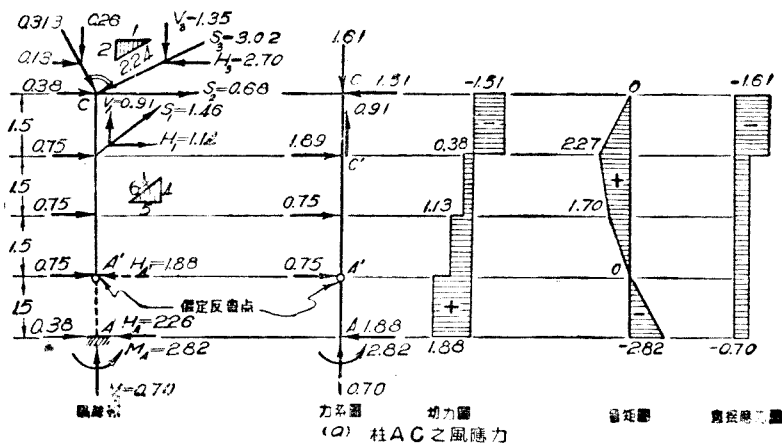
$$H_A = \frac{Pe}{h} \quad (5-2)$$

此柱之彎矩圖如圖 5-17(e)。

若排架柱底係固定，則其二柱自反彎點以上之部份，與圖 5-17 所示柱底鉸接之排架相同。

例題 5-7. 求例題 5-3 工廠排架之設計應力。其屋頂桁架及其呆荷重與雪荷重均與例題 5-6 相同，其風荷重與例題 5-3 相同。

解答 在呆荷重及雪荷重下，其二柱底之平分反力，及隅支撐之應力既均等於零，故其屋頂桁架之呆及雪應力，與例題 5-6 所求得者完全相同，此題中所需求得者，祇二柱及桁架之風應力。



例題 5-7. (未完)

$$H_1 = \frac{1}{1.5} (1.88 \times 4.5 - 3 \times 7.5 \times 3) = \underline{1.14} \rightarrow$$

並 $V_1 = 1.14 \times \frac{4}{5} = \underline{0.91} \uparrow$

$$S_1 = 1.14 \times \frac{6.4}{5} = \underline{1.46} \nearrow$$

用 $\Sigma V = 0$, 再考慮該部份之平衡, 得

$$V_3 = 0.70 + 0.91 - 0.26 = \underline{1.35} \downarrow$$

並 $H_3 = 1.35 \times \frac{2}{1} = \underline{2.70} \leftarrow$

$$S_3 = 1.35 \times \frac{2.24}{1} = \underline{3.02} \swarrow$$

用 $\Sigma H = 0$, 復考慮該部份之平衡, 得

$$S_2 = 1.88 + 2.70 - 0.13 - 0.28 - 3 \times 0.75 - 1.14 = \underline{0.98} \rightarrow$$

將柱 AC 所受力系化簡, 得附圖 (a) 之力系圖。其切力, 彎矩及直接應力諸圖均如附圖 (b) 所示, 其意義與圖 5-15 所示者相同。

同此, 柱 BD 之隔離體, 力系圖, 及切力, 彎矩, 與直接應力諸圖, 均如附圖 (c) 所示。其解法與柱 AC 相同, 且較為簡易, 其各桿之應力如下:

$$S_1' = \underline{7.22} \searrow$$

$$S_2' = \underline{2.8} \rightarrow$$

$$S_3' = \underline{6.65} \swarrow$$

AC 及 BD 二柱之隔離體中, 有二點須注意: (1) 節點 C 及 D 雖假定係鉸節, 但 $\Sigma H \neq 0$, 若將柱頂段之切力計入始合 $\Sigma H = 0$ 之條件。(2) C' 及 D' 二節點不能假定係鉸節, 因於該二點, 二柱不但有切力, 而且有彎矩。

桁架之隔離體及力系圖如附圖 (c), 其六反力與以上求得之 S_1, S_2, \dots 等, 數量相同, 而指向相反。其麥氏應力圖如附圖 (d), 其中粗線 $A-B-C-D \dots$ 等示荷重及反力之力多邊形, 而細線示諸桿之應力。注意 3'-5 桿係用以暫時代替 3-4 及 4-5 二桿者。

桁架隔離體及力系圖亦可如附圖 (e) 所示, 將二柱 C, C', D , 及 D' 諸點之切力與風荷重之合力, 用作該四點之反力, 或如附圖 (f) 所示, 將二柱頂段之切力與直接應力及二隅支撐之平衡分應力用作桁架之反力, 但二法均遠不如

排架之設計應力 (例題 5-7)

桿	應力		雪應力		風應力		力相加		行數		設計應力		代替荷重之設計應力
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)			
A-J	-4.63	-6.58	-3.29	-3.02	+6.65	1+5	1+2	+ 2.02	-11.21	-12.90			
B-1	-4.35	-6.26	-3.10	-3.02	+6.65	1+5	1+2	+ 2.30	-10.55	-12.10			
C-4	-4.09	-5.82	-2.91	-1.96	+1.66	---	1+2	---	- 9.91	-11.40			
D-5	-3.81	-5.44	-2.72	-1.96	+1.66	---	1+2	---	- 9.25	-10.60			
J-1	-0.53	-0.75	-0.38	-0.63	0	---	1+3+4	---	- 1.54	- 1.46			
4-5	-0.53	-0.75	-0.38	-0.63	0	---	1+3+4	---	- 1.54	- 1.46			
2-3	-1.16	-1.52	-0.76	-1.80	+2.56	1+5	1+3+4	+ 1.50	- 3.62	- 2.93			
1-2	+0.59	+0.84	+0.42	+1.88	-5.63	1+3+4	1+3+5	+ 2.98	+ 5.04	+ 1.64			
3-4	+0.59	+0.84	+0.42	+0.70	0	1+3+4	---	+ 1.71	---	+ 1.64			
3-6	+1.18	+1.68	+0.84	+2.04	-2.85	1+3+4	1+5	+ 4.16	- 1.67	+ 3.28			
5-6	+1.77	+2.52	+1.26	+2.72	-2.85	1+3+4	1+5	+ 5.75	- 1.18	+ 4.92			
I-J	+4.13	+5.88	+2.94	+0.68	-2.18	1+2	---	+10.01	---	+11.48			
H-2	+3.54	+5.04	+2.52	+0.43	-4.4	1+2	1+5	+ 8.58	- 0.94	+ 9.84			
H-6	+2.36	+3.36	+1.68	-1.63	-1.63	1+2	---	+ 5.72	---	+ 6.56			
H-I	0	0	0	+1.46	-7.22	4	5	+ 1.46	- 7.22	0			

附圖(c)之簡易。

設計應力之計算，見附表，其中(1)，(2)，(3)，及(10)四行，係抄自例題 5-6 之附表。其中(4)及(5)二行，係抄自本例題之附圖(c)。表中祇包括桁架左半之諸桿，因呆應力及雪應力兩半相同，而其左半之風向左應力，等於其右半風向右之應力。

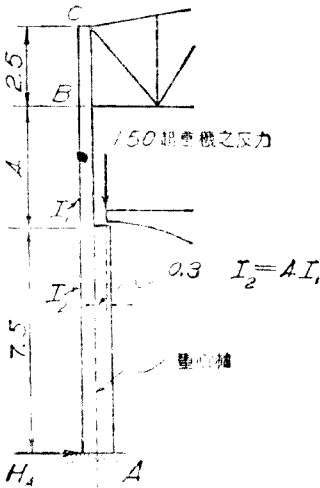
此表有二點應注意：(1)多數之桿均有反復應力(reversal of stress)，故設計時拉力及壓力均應顧及。此係排架與兩端支於牆上之屋頂桁架根本不同之點。(2)除少數桿外，用代替荷重所得之設計應力，常與實際情形相差

太遠，故代替荷重決不可用之以計算排架之設計應力。

二柱之設計應力未列入表中，因其在風荷重下有切應力及彎應力，與桁架之桿應力根本不同。

習題 5—14. 求習題 5—8 所列三排架中二柱之切力，彎矩，及直接應力圖。

習題 5—15. 用圖解法求習題 5—8(a)及(b)桁架部份之應力。



習題 5—17.

習題 5—16. 求習題 5—9 所列桁架之設計應力。

提示 此排架之屋頂桁架與習題 5—2 及 5—13 相同，故梁應力，彎應力，及代替荷重之設計應力，均不必再行計算。此題其餘之步驟及作法，與例題 5—7 完全相同。

習題 5—17. 圖示一工廠排架之左邊柱支有一起重機之梁。柱之上段小而下段大，其右邊之柱與此完全相同。假設柱底係完全固定，而柱之頂段 BC，係以鉸節與桁架接合。求 H_A 之值及柱 AC 之切力及彎矩圖。

5—9. 屋頂桁架及工廠排架之支撐 前此計算屋頂桁架或工廠排架之風應力時，曾假定風向與桁架之平面平行，對於風向之與桁架平面垂直者，未曾計及。房屋之構造，係以若干屋頂桁架或排架排列成行而成。其間雖有檁或望板以資聯接，但此若干成行之屋頂桁架或排架，對於與其平面垂直之縱向風力，其穩度甚微。故欲使此若干成行之屋頂桁架或排架在任何風

向之風荷重下成一穩定之單位，則其間必有相當之支撐。

屋頂桁架之支撐，常置於其上下弦平面之內。於其上弦之平面，可用鋼鐵之拉桿，將相鄰之二桁架交叉支撐，屋脊處有脊撐(ridge strut)如圖 5—18(b)。於其下弦之平面，二相鄰桁架間亦有交叉支撐，常用輕細之鋼角，此外並有若干縱撐，貫通房屋之全長，如圖 5—18(c)。此項縱撐除作為支撐架之腹桿外，並可減少房屋因風衝擊力所發生之振動。

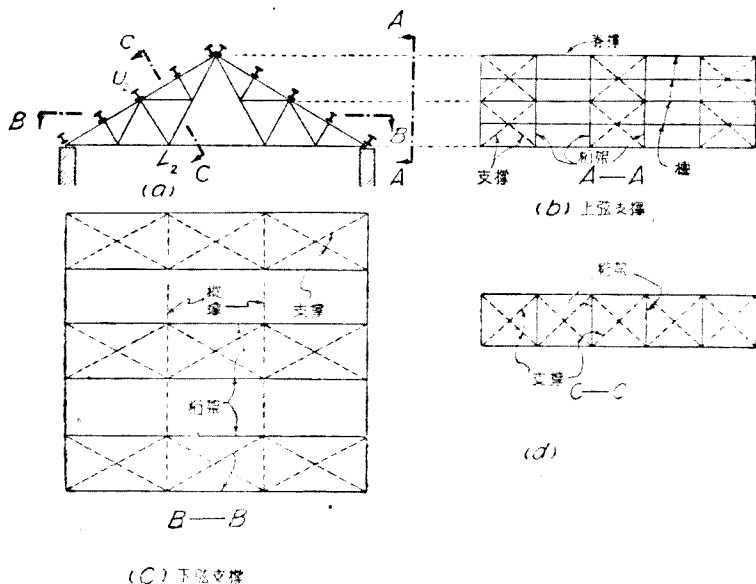


圖 5—18. 屋頂桁架之支撐

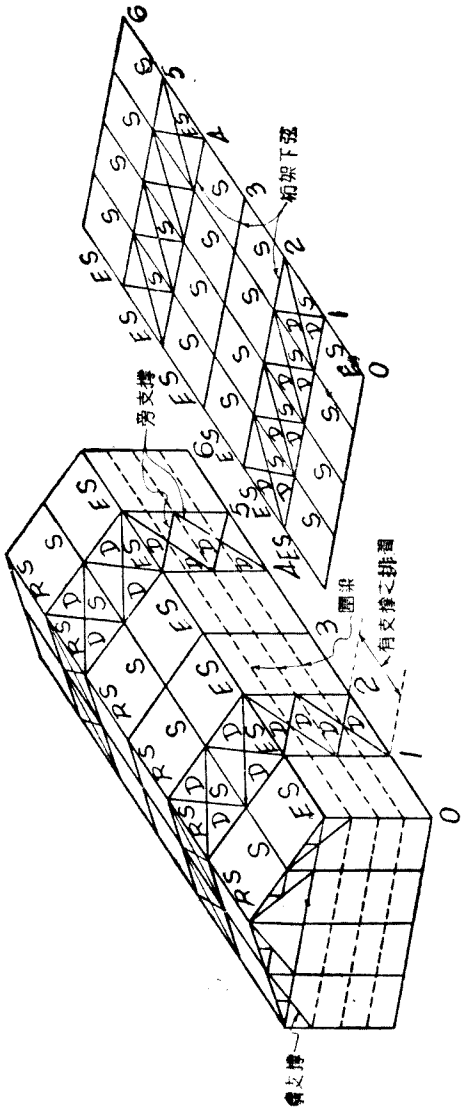
房屋兩端之桁架距間，常有上述之支撐，此外每隔一或二距間，亦有支撐。若房屋之兩端無桁架（即檁之一端支於兩端之牆上），則支撐可置於其次之桁架距間。

若屋頂桁架之跨度較長或距間較大，則所有桁架之距間，尚需有若干縱桁架，貫過房屋之全長，如圖 5—18 (d)，其作用與縱撐相似。

屋頂桁架支撐之佈置，常因桁架之型式及所需穩定及剛勁之程度而異。圖 5—18 所示，不過極普通之例而已。

工廠排架之支撐，常係聯合採用檣架之側面抗彎強度及交叉支撐。有時排架之側面抗彎強度甚微或全無，則在任何風向風荷重下，穩定及剛勁全賴其交叉支撐。

若排架有隅支撐，其側面抗彎強度可以抵抗風向與其平面平行之風荷重。但風向與其平面垂直之風荷重，必藉交叉支撐以資抵抗。圖 5—19 示此項交叉支撐之大概佈置。此工廠共有七排架，其六排間中有交叉支撐者有二，皆稱為有支撐檣間。此二有支撐排間之上下弦及兩旁均有完全之交叉支撐，每支撐排間之交叉支撐 D 與其前後之上下弦桿，柱，及縱撐 S ， ES (ES 稱為簷撐) 等，成一雙重腹桿之桁架，以柱底之地基為其支座。此項桁架可以抵抗縱向之風荷重。交叉支撐 D 常係拉桿，但有時亦用壓桿。簷撐 ES 有時係一小桁架，若縱撐 S ，脊撐 RS ，及簷撐 ES ，均係壓桿，依理則全房之長，有一有支撐排間即已足。但為增加剛勁及避免振動起見，全房之長，常有若干有支撐排間，其數目及佈置，可由工程師斟酌而決定之。



(a) 上弦區兩旁支撐 (b) 下弦之支撐
 圖 5-19. 有偶支撐桁架之支撐

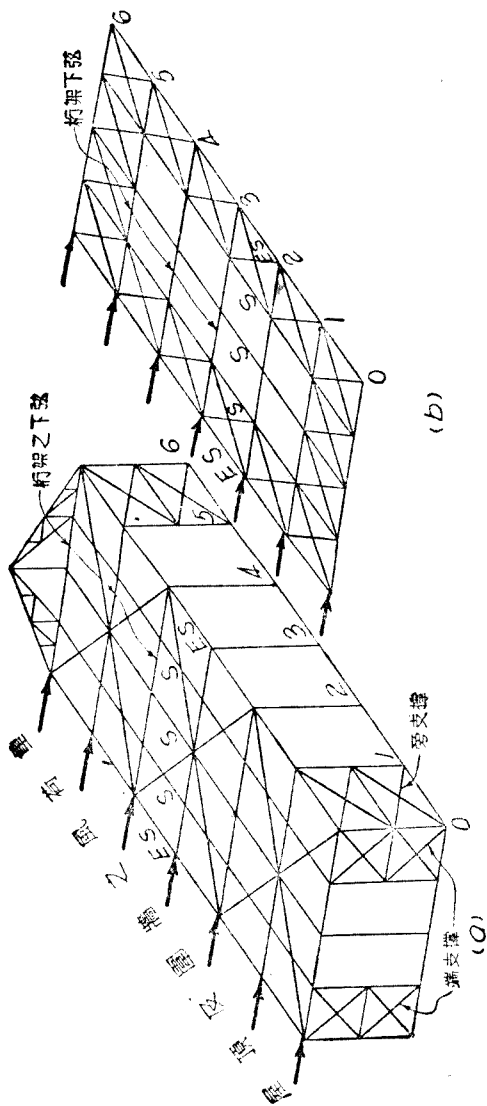


圖 5-20. 無隅支撐排架之下弦支撐

若排架接近二柱之處，須有極大之淨高（如工廠之設有起重機者）時，則隅支撐常須擱去，如此，則除非二柱之底係完全固定於其地基，否則排架之側抗彎強度必甚微，或全無。故排架之剛勁，亦必惟交叉支撐是賴。於此，可使其下弦平面之支撐成爲完全之桁架，如圖 5—20 (a)。（圖中祇房屋一端之桁架示出，排間 0—1 及 5—6 中桁架之上弦亦有交叉支撐與圖 5—19 相似，亦未示出。）此桁架在風向與排架面平行之風荷重下，其反力藉房屋兩端之端支撐而達於地基。圖 5—20 (b) 示下弦支撐之又一法。爲增加房屋之剛勁起見，圖 5—20 (a) 與圖 5—19 (b) 所示之二種下弦支撐，常聯合採用，如圖 5—21。如是，若任何排架受有縱向荷重，此項支撐可使其分佈於其他排架。

圖 5—20 與 5—21 中之排架，不用隅支撐而用交叉支撐，常較圖 5—19 中排架用隅支撐者爲優。因前法之剛勁既較大，且排架之二柱無彎矩及切力，故二柱之截面變爲較小，頗爲經

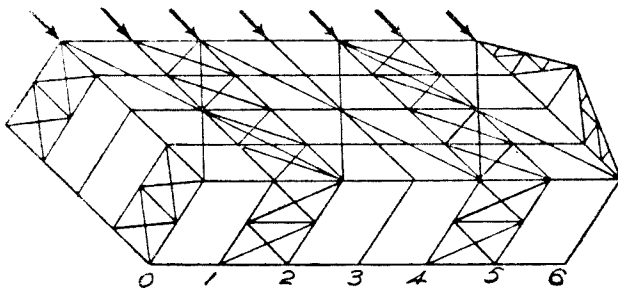


圖 5—21. 檣架兩種支撐之合用

濟。但工廠之兩旁及兩端需有門窗甚多者，交叉支撐，自不能採用。

於平頂或近於平頂之房屋桁架，上弦平面之支撐，不甚重要，故常略去。其下弦平面之支撐如圖 5—21。此項支撐於房屋之穩度雖不需要，但可增加其剛勁，於工廠中有重大之起重機者，尤稱適宜。其簷撐有時係一小桁架，如圖 5—22，而有支撐排間中之縱撐(圖 5—22 中之 S 桿)，亦有時係小桁架，與簷撐相同。

柱間之支撐如圖 5—19 至 5—22 所示，均係二層。若房屋稍低或較高，可改用單層或三層，均以交叉支撐之傾度約合 45 度為宜。

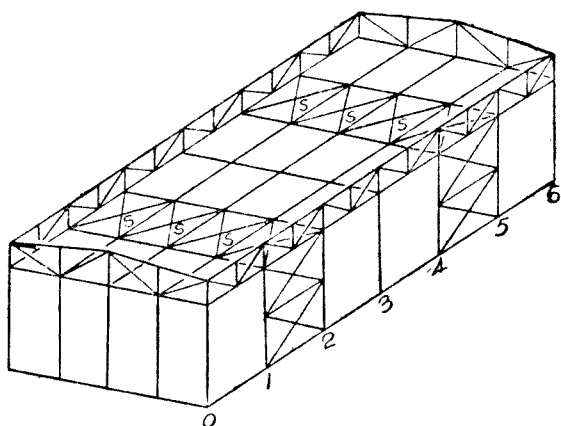


圖 5—22. 平頂排架之支撐

支撐桿中之應力，常不能準確計算，其截面之大小，若在設計規範所限定最大纖比(slenderness ratio)以內，常足以承受風

應力而有餘。但工程師對於房屋支撐全體之作用，必須明瞭，庶其所計劃之支撐，能充分抵抗任何風向之風荷重。

交叉支撐，多用拉桿，常使其較所需要之長度略短，每公尺約短 0.2 公厘，庶造成後其中約有 4 公斤/平方公厘之原拉應力。此法可使房屋之構造成一剛勁之單位，而交叉支撐在風荷重下，其一桿之拉力增加，其他一桿之壓力與原拉力相消，不致使其彎曲。故計算時可假定節間之切力，由二交叉斜桿平分承受，或假定祇其中之一桿有拉應力。視交叉支撐之設計及建造時之情形而定。

設計房屋兩端之交叉支撐時，應以該端所受之風荷重全量為準，其中部之交叉支撐，祇可視為增加房屋剛勁之用。

各部交叉支撐架節點風荷重之求法及其應力之計算，約如圖 5—23 所示。圖 (a) 之有斜線面積之風荷重，係由房屋右半之各部交叉支撐架所承受。其中 a_1 及 a_2 之風荷重 F_1 及 F_2 各係上弦交叉支撐架節點 ① 及 ② 之節點風荷重。設 P 為每單位面積之風荷重，則 $F_1 = P a_1$ ， $F_2 = P a_2$ ，如圖 (b)。若將上弦交叉支撐架之全部展平，如圖 (c)，並假設其節間之切力，由二交叉斜桿平分承受，則其反力 R_3 係分佈於兩旁之前後二節點，故 $R_3 = (F_1 + F_2) / 2$ 。此四反力 R_3 必由兩旁之交叉支撐架傳達於地基。又圖 (c) 之弦桿，並非在一平面之內，故節點 ① 兩旁之弦桿，尚有豎分應力，此豎分應力又必使屋頂桁架有應力，但於工廠房屋之計算，常略去之。

下弦交叉支撐架祇節點 ④ 有風荷重 F_4 ，如圖 (d)，其風荷重面積為 b_1

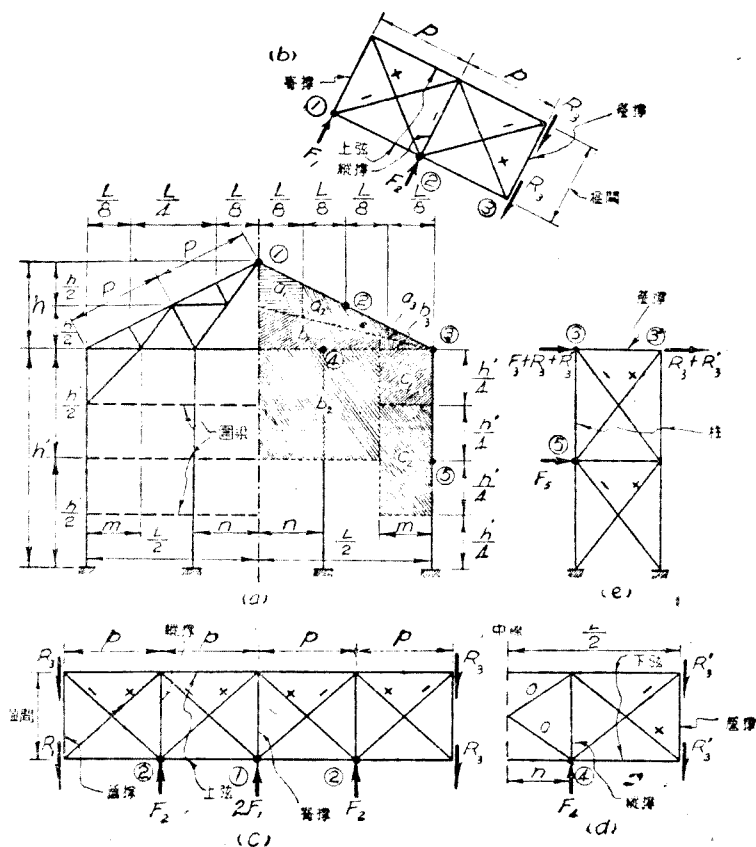


圖 5-23. 工廠排架支撐應力之計算(一)

及 b_2 , 故 $F_4 = P(b_1 + b_2)$, 其兩端之反力 $R_3' = F_4/2$, 亦必由兩旁之交叉支撐架傳達於地基。

兩旁交叉支撐架之節點風荷重如圖(e)所示, 其節點 ⑤ 之 $F_5 = P c_2$, 其頂端前節點 ③ 有 $F_3 = P(a_3 + b_3 + c_1)$ 及 R_3 與 R_3' , 後二者係圖(b)及(d)右端前節點之反力; 故節點 ③ 之風荷重為 $F_3 + R_3 + R_3'$ 。其頂端後節點 ④ 之風荷重為 $R_3 + R_3'$, 即圖(b)及(d)右端後節點之反力, 故圖(e)有斜線面

積之風荷重，最後係全部由兩旁之交叉支撐架承受而傳達於地基，至各部交叉支撐架應力之計算，均以二交叉斜桿之應力數量相等為根據，其方法與 4—17 節所述者相同。圖 (a) 右半無斜線面積所受之風荷重，係由圍梁及柱傳達於地基，故各部支撐架不受其影響。

圖 5—23(a) 有斜線面積 a_1, a_2, \dots 等之劃分，係以查氏桁架及圖 5—23(b), (d), 及 (e) 交叉支撐之佈置為準。若桁架或各部之支撐佈置改變，則 a_1, a_2, \dots 等面積當另行依求反力之方法劃分之，不能皆以圖 5—23(a) 所示者為準。

於無隔支撐之排架受有風向與檼架平面平行之風荷重時，其下弦交叉支撐架之分析，如圖 5—24 所示。圖 (a) 示求兩端交叉支撐架應力之法。若假設交叉斜桿祇能承受拉力，則惟傾度如 \backslash 之斜桿有應力，其豎分應力等於

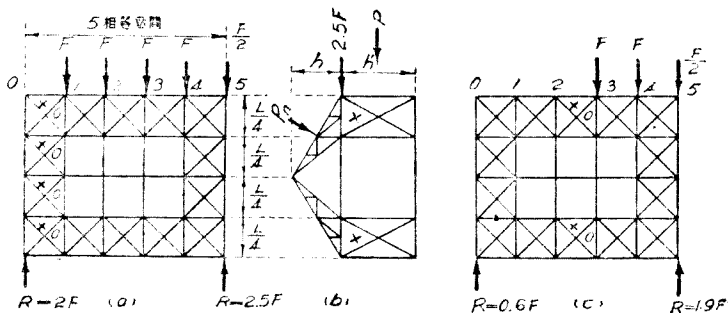
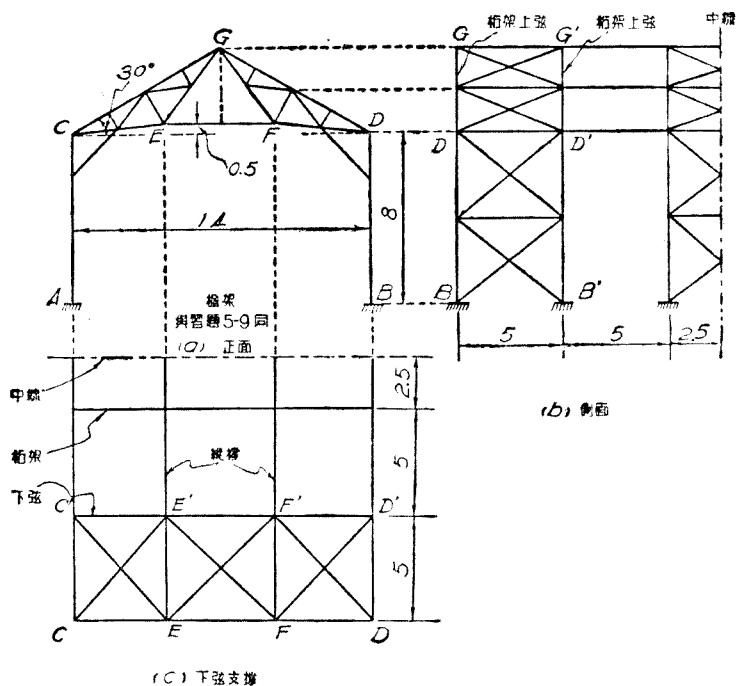


圖 5—24. 工廠排架支撐應力之計算(二)

$R/4$ 或 $F/2$ ，其右端反力 $R=2.5F$ 。二端之反力均係由兩端之交叉支撐架傳達於地基，如圖 (b)。節點風荷重 $F=(P_u h + Ph'/2) \times$ 排間之距離。圖 (a) 所示之風荷重，既係對稱，故其中段交叉支撐架之應力應為零。但計算時常將風荷重視作行動荷重，故計算其中段交叉支撐之應力時，應將節點 0, 1, 及 2 之風荷重移去，如圖 (二)，如是得左端之反力 $R=0.6F$ ，而傾度如 \backslash 斜桿之豎分應力等於 $0.3F$ ，前已說明，交叉支撐桿截面之大小，常為設計

規範所規定最大之纖比所限制，故房屋中某部所有之交叉支撐桿，實際上常大小一律，因此其中段交叉支撐桿之應力，自更不必計算。

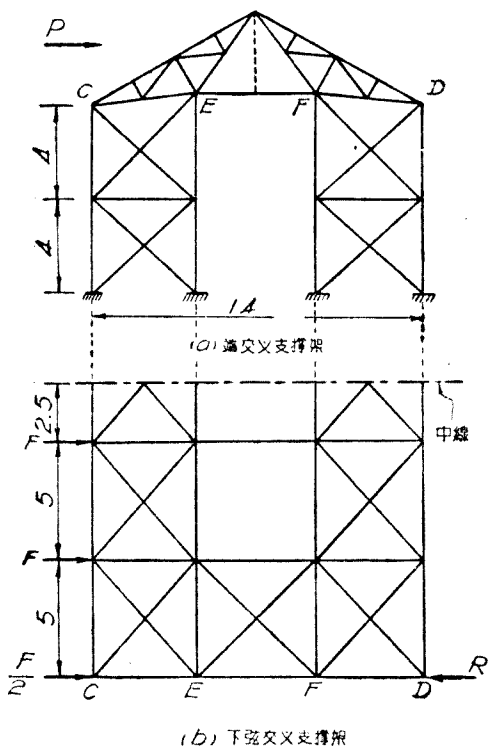
習題 5-18. 設此房屋之一端受有縱向風荷重 100 公斤/平方公尺。



習題 5-18.

求上下弦及兩旁交叉支撐架各桿之應力。假設節間之切力，由二交叉斜桿平分受。

習題 5-19. 若習題 5-18 之排架，不用隅支撐，其兩端及下弦之交叉支撐架如附圖(a)及(b)所示。若此房屋受有側向風荷重 $P=100$ 公斤/平方公尺，求該二部交叉支撐架各桿之最大應力。屋頂坡面之風壓力 P_n 用馮氏公式計算，並假設節間之切力，由二交叉斜桿平分承受。



習題 5-19.

5-10. 多柱式及多層式檣架之應力 如圖 5-22 所示，簷撐之小桁架及成行之柱合成一多柱式之檣架，此項排架於豎向荷重下，各排間之桁架，皆視作簡單跨，故係靜定式。但在側力如風荷重下，其桁架不能視作簡單跨，故成爲靜不定式，如欲以靜力學求其應力，必需有若干假定。

圖 5-25 (a) 示一多柱式之排架，其排間有三。若其四柱之底，均係固定於地基，則共有十二個分反力，故爲九次靜不定

積不同，如 A_1, A_2, \dots 等，根據假定 (3) 及梁應力之公式 $f = My/I$ ，可得

$$f = \frac{My}{\sum Ay^2} \quad (5-21)$$

其中 $M = Ph'$ ， $y =$ 任何柱軸與排架中軸（即諸柱截面面積之重心軸）之正距， $A =$ 任何柱之截面面積， $f =$ 任何柱之單位直接應力，故柱 ① 底之豎分反力 V_A 為

$$V_A = f_1 A_1 = \frac{Ph' y_1 A_1}{\sum Ay^2} \quad (5-22)$$

其餘諸柱底之豎反分力之計算，與此相同。

若諸柱之柱底，係鉸接於地基，則假定 (1) 成為無用。

反力既求得之後，其桁架之應力，可依圖 5-14 (b), (c), 及 (d) 之方法求之。如圖 5-25 所示，用截面 ③，即可求得右邊桁架諸桿之應力。將 a, b ，及 c 三桿之應力，視作加於中間桁架之外力，並用截面 ②，即可求得中間桁架諸桿之應力。準此，自左向右，可求得所有桁架諸桿之應力。諸柱之剪力，彎矩，及直接應力圖，均與圖 5-15 所示者相似。

於較複雜之多柱式排架如圖 5-26 (a) 所示者，最好以高等分析法計算之。如用上述之近似分析法，應以初步設計時為限。至圖 5-26 (b) 之排架，其側面抗彎強度幾全賴其中間之排架，上述之近似分析法，或可採用。

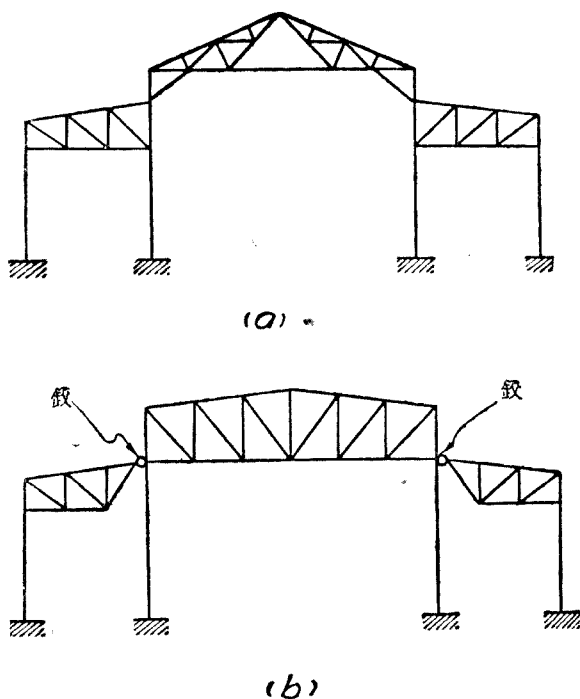


圖 5—26. 較複雜之多柱式排架

於多層式之排架，可自頂層起，用上述之法，每層依次分別分析之。圖 5—27 (a) 示一雙層之檣架。可將頂層視作一單層之排架，用上述之法，求得諸柱反彎點之平豎分反力，再反其指向，加於反彎點，視作下層之外力，如圖 5—27 (b)，再分析之。由此類推，任何層數之排架，均可以以上法分析之。故此法亦可用之以估計高樓骨骼架之風應力。

圖 5—27 (c) 亦係一雙層排架。若梁 ab 與二外柱之接合係剛節，則該二柱每層各有一反彎點，但平常梁與柱之鉚接，

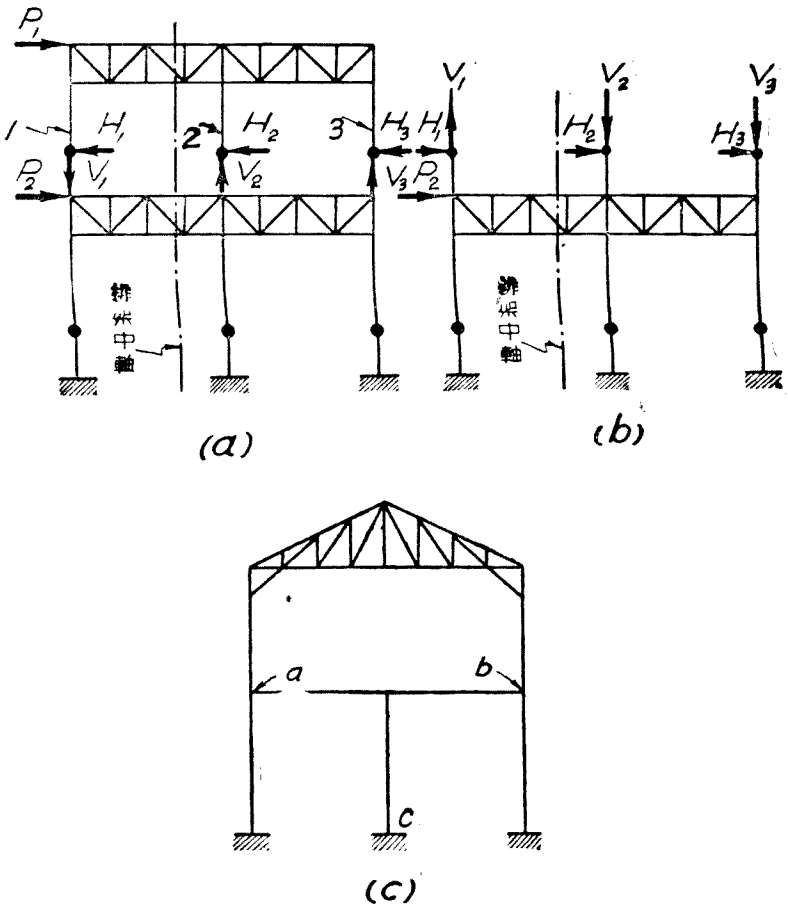
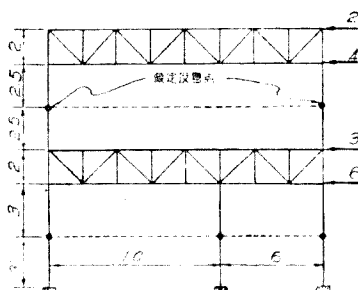


圖 5—27. 多層式排架之分析

多不能抵抗相當之彎矩，故祇可視作鉸節。如是，則該二外柱仍各祇有一反彎點，同此其中心柱亦不能抵抗相當之切力，故分析時，可將其中間之梁柱略去。因此，此雙層排架，實際上等於一單層排架。

習題 5—23. 求此雙層排架柱底之反力，諸柱之截面均相同。



習題 5—23.

5—11. 三鉸拱屋頂桁架之應力 三鉸拱反力之求法，已於第三章中論之。至其應力之求法，除答案需十分精確時，必用數解法外，常以圖解法較為簡捷。

圖 5—28 (a) 示一三鉸拱屋頂架之左半及其風荷重。其右半與此相同，且無風荷重，故未示出。先依 5—6 節之法，求其反力，於此例最好先用一索線多邊形，求風荷重之合力，再依右鉸 B 之反力 R_B 必經過 C 鉸，及三非平行之平衡力系必交會一點之原理以求之。如風荷重之合力 R_A 及 R_B 近於平行，可用圖 2—7 之法。

既知其左半反力，其應力可用麥氏應力圖求之，如圖 5—28 (b)。至其右半之應力之求法，與此相似，故不贅。圖 5—28 (a) 之三鉸拱，係極簡單之例，故其麥氏應力圖並不複雜。若三鉸拱之節間數較多，則麥氏應力圖常極綜錯紛繁。美國之莫 (David A. Molitor) 氏得較簡之法如下：

① 見美國之工程新聞記錄週刊 1929 年 4 月 26 日份。

以圖 5—28 (c) R_A 與 R_C 之交點 P 爲極點，爲風荷重作一索線多邊形，其首索線 $P-D$ 經過 A 鉸，並與 R_A 同在一線上。則其尾索線必經過 C 鉸，並與 R_C 同在一線上，如圖

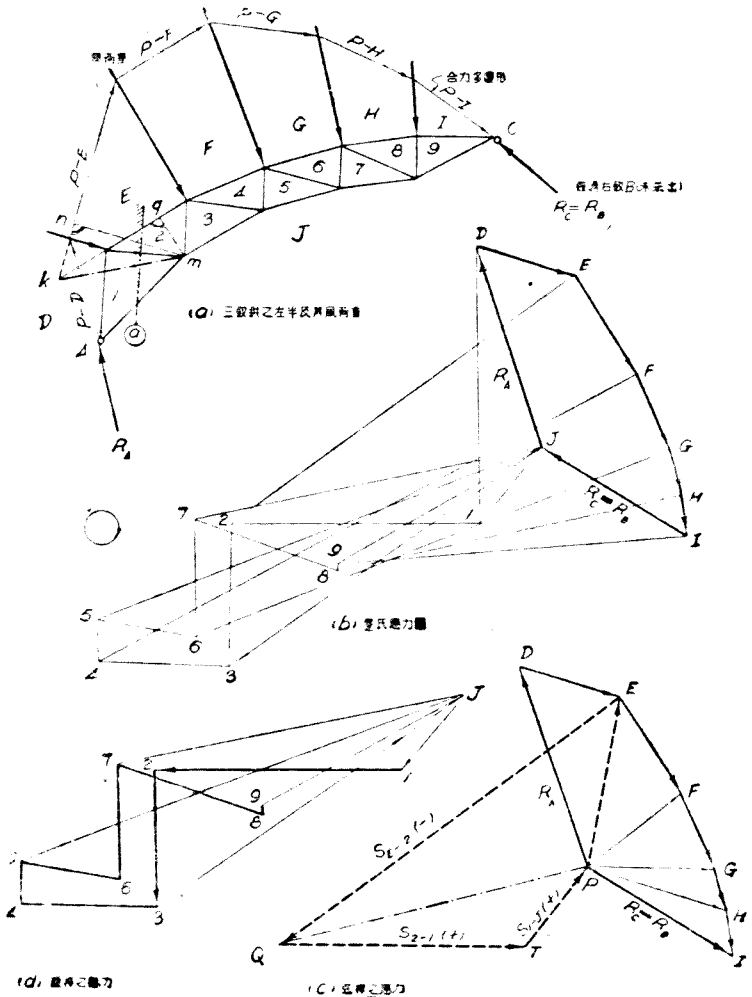


圖 5—28. 三鉸拱應力之圖解法

5—28 (a)。蓋前已言之，於三鉸拱之索線多邊形若其首尾二索線及一中索線經過三鉸，則其首尾二索線即其二端反力之作用線。於此例則 $R_C = R_B$ ，因圖 5—28 (a) 之三鉸拱，其右半無風荷重也。此索線多邊形之各索線均成爲其左邊所有外力之合力作用線。如索線 $P-E$ 即其左 R_1 及 $D-E$ 二力之合力作用線，其合力之數量及指向，可於圖 5—28 (c) 得之。故圖 5—28 (a) 之索線多邊形，亦可稱爲合力多邊形。既得此合力多邊形，則所有諸弦桿之應力可以彎矩之數解法或圖解隔離法求之。如圖 5—28 (a) 所示，以截面 ② 並考慮其左邊隔離體之平衡，則 $E-2$ 桿之應力 S_{E-2} 爲

$$S_{E-2} = -\frac{(P-E)mn}{mq}$$

其中合力 $P-E$ 之數量及 mn 與 mq 可各自圖 5—28 (c) 及 (a) 量得。若用圖解隔離法，可將 $E-2$ 延長與 $P-E$ 之延長線相交於 k 點。聯 mk (如 $E-2$ 及 $P-E$ 二線近於平行，其交點 k 必太遠，如是可依圖 2—7 之法，作 mk 線)。於圖 5—28 (c)，自極點 P 作一線與 mk 平行，又自 E 點作一線與 $E-2$ 平行，此二線相交於 Q 點，故 $EQ = S_{E-2}$ 。同此，並可求得 $TP = S_{1-2}$ ，及 $QT = S_{2-1}$ ，其解釋已詳於 4—11 節。既求得諸弦桿之應力，其所有諸腹桿之應力，可用圖 5—28 (d) 之法另求之。自任何一點 J 作若干直線，與諸下弦桿 $J-1, J-3, \dots$ 等平行，並量定其應力，得 1, 2, …… 等點。用節點之圖解法，並考慮節點 m 之平衡，自點 1 作一線與 $1-2$ 桿平行，又

自點 3 作一線與 2—3 桿平行，即得其支點 2，觀圖 5—28(d)，可知： $J-1-2-3-J$ 係節點 m 之力系平衡圖，由此即得 S_{1-2} 及 S_{2-3} 。圖 5—28(d) 係考慮下弦諸節點之平衡，而求諸腹桿之應力，若考慮上弦諸節點之平衡，亦無不可。惟上弦有荷重，不如用下弦之簡便，但必要時亦可用之，以資校核。

觀圖 5—28(a)，可知三鉸拱在風荷重下，其兩端之平分反力之指向均可與風荷重平分力之指向相反，如圖 5—29(a) 所示。

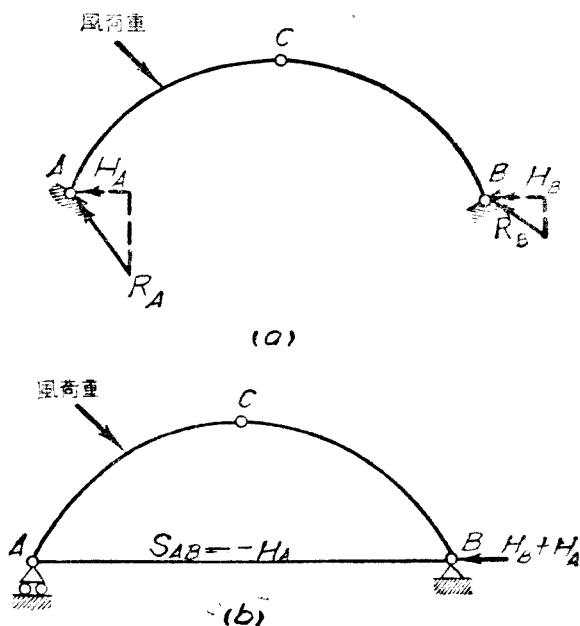


圖 5—29. 三鉸拱拉桿之風應力

若三鉸拱兩端之間有一拉桿 AB ，而 A 端係一輻軸支座如圖 5—29(b) 所示，則拉桿變為壓桿，其應力之數量等於 H_A ，而其 B 端之平分反力，自等於 $H_B + H_A$ 。故設計此拉桿時，應研究

其是否有時受有壓力。

習題 5-24. 三鉸拱及其節點風荷重, 均與習題 5-3 相同。(a) 用簡捷之圖解法, 求其反力。(b) 用麥氏應力圖求左半之諸桿之應力, 及 (c) 用合力多邊形及圖解隔離法, 求其右半諸弦桿之應力, 並用圖 5-28 (d) 之法, 考慮其上弦諸節點之平衡, 求其右半諸腹桿之應力。

第六章 鈹梁

6—1. 鈹梁之用途及其型式 鈹梁乃一截面較大之合成鋼梁，故其荷重量常在鋼軛梁（俗稱工字鋼，以其截面之形式係一工字）與桁架之間。鐵路橋梁之跨度短於 10 公尺者，常以用鋼軛梁爲宜。若跨度長於 10 公尺而短於 30 公尺，則常以鈹梁爲經濟 [102] (2 丙)。惟近年來歐洲大陸新建之若干長跨大橋，亦多用鈹梁而不用桁架，蓋以其製造及架設之費用，常較桁架爲省也。公路橋梁用鈹梁者較少。跨度之短於 20 公尺者鋼軛梁，鋼筋混凝土梁，及木料桁架均適用。至跨度之在 20 公尺以上者，常用桁架。除橋梁外，鋼架房屋及他種結構中，亦常用鈹梁以承受較重之集中荷重，如柱荷重，而傳達於其兩端之支柱。影片 V 及 VI 示橋梁所用之鈹梁。

鈹梁可分爲腹鈹(web plate)及翼緣(flange)二部。翼緣係以鋼角，鋼鈹，鋼槽，或鋼軛梁之一部爲之，常另加蓋鈹(cover plate)及側鈹(side plate)等。腹鈹常係一鋼鈹，但亦有多至四鋼鈹者。圖 6—1 示鈹梁之通用截面，其中(a)爲鉚接鈹梁之最普通型式。如欲將截面面積加大，可用較大之鋼角及增加蓋鈹之數目。（但蓋鈹如太多，常爲設計規範所不許 [414]。）(b)爲鐸接鈹梁之普通型式，其外蓋鈹應較裏蓋鈹稍狹或稍寬，俾便鐸接。(c)及(d)示面積較大之截面。(e)爲匣形鈹梁

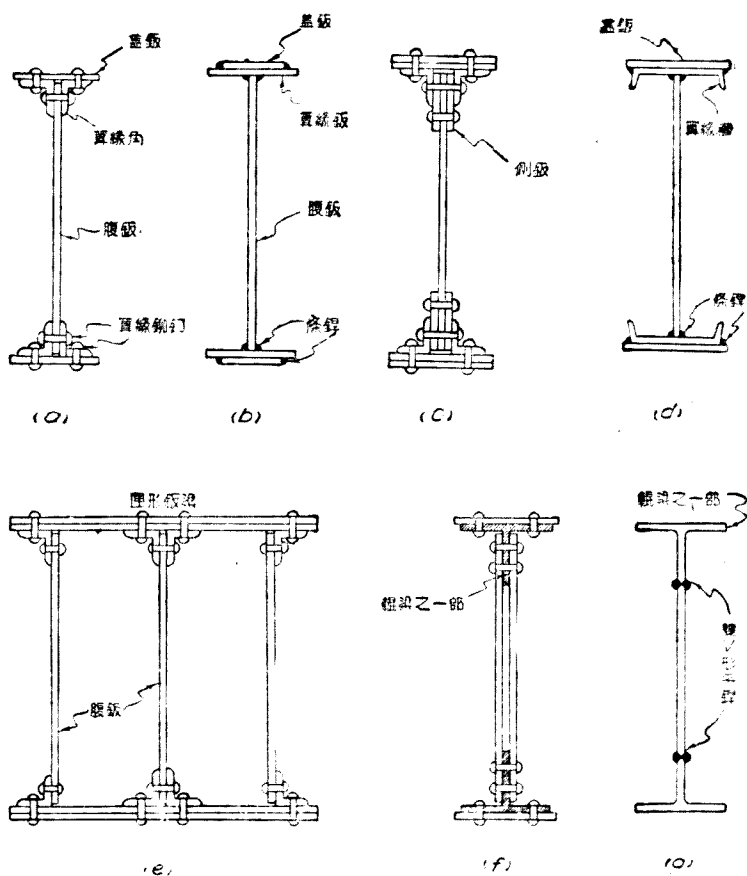


圖 6-1. 鋼梁之通用截面

(box girder), 於荷重甚大而梁深度又受有限制時用之。(f) 之翼緣不用鋼角而用鋼軋梁之一部, 乃晚近之發明^①。其翼緣與腹板之接合, 能容較多之鉚釘, 而翼緣面積之大部份係與腹板直接接合, 乃其優點, 至其用途與匣形鋼梁同。(g) 之翼緣亦係軋

① 見工程新聞紀錄 1931 年 10 月 29 日刊。

梁之一部，惟用平鋸與腹鋸接合。鋸梁截面之選擇，常以配合簡單及製造容易為準。

鋸梁之上下翼緣常係平直，但為材料之經濟起見，其下翼緣有時使其成彎曲或傾斜形。如圖 6-2 所示之 (a) 起重機之鋸梁，(b) 房屋中之鋸梁，及 (c) 寬橋中之橫梁鋸梁是。

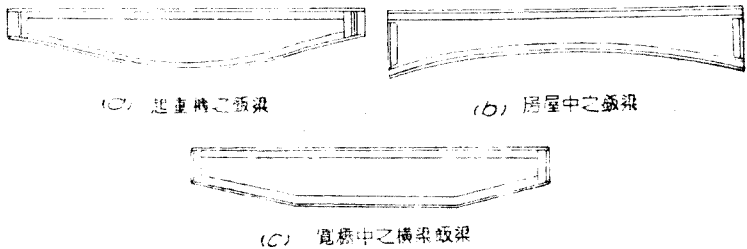


圖 6-2. 翼緣彎曲或傾斜之鋸梁

因運輸之限制，鋸梁之長度，常以不超過 3 公尺為宜。但鋸梁之長至 4 公尺者亦有時可設法運輸。若再長必分數段運輸，而後再於工地拼接，但此法以不用為是。至鋸梁之深度與腹鋸之寬度相差無幾，鋼鋸之最大寬度常在 3 公尺左右，如再寬則必需拼接。且因運輸之限制，拼接亦常須在工地為之。故鋸之深度，以不超過 3 公尺為宜。

為經濟及剛勁起見，鋸梁之深跨比亦常有相當之限度。約跨度稍短時，深跨比約以 $1/8$ 為宜，跨度稍長時，深跨比可以稍小，惟不宜小於 $1/12$ [105]。通長深跨比，於橋梁鋸梁約在 $1/10$ 左右，於房屋鋸梁約在 $1/12$ 左右。但因鋸梁下所需淨空或他項限制，鋸梁之深跨比有時不能採用上舉之值。鋸梁之

承受極大集中荷梁者，其所需之深度常較上舉者為大。

根據鉸梁之彎矩，准許應力，及其腹鉸之厚度等，即可求得其材料最省之深度公式。但因鉸梁所需材料之多寡，包含之因數太多而又多不易以數學表述之，該項公式之價值，殊有疑問。根據實際經驗，鉸梁之深度與其經濟限度有相當差異者，其所需增加之材料，至為有限；而有時因冒然採用經濟深度，竟增加鉸梁之他項費用，或招致意外之困難，反使其成為不經濟之鉸梁。故此項公式，殊無敘述之必要。

鉸梁之分析與設計，常不能分離。其中若干細節，每被設計規範所限制，不必加以分析。亦有刻下尚無精確方法以分析之者。以下所論，雖專以分析為主，但有時仍不免涉及設計之範圍，蓋鉸梁之性質，固如是也。

6—2. 腹鉸 鉸梁原係一梁，故用材料力學中計算梁應力之公式，以計鉸梁之應力，自屬適當。於鉚接鉸梁，用上述公式並無不便。惟計算鉚接鉸梁之應力時，於其受拉力部份，必將鉚釘孔眼自全截面減去，以求其淨截面。（若干設計規範且規定其受壓力部份亦應用淨截面。我國新近公佈之鐵路鋼橋規範，亦係如此 [413]，似未免過於嚴格。）採用上述公式，未免較繁。腹鉸之功用，自可以抵抗切力及彎矩，但其抵抗切力之能力遠超過於其抵抗彎矩之能力，故腹鉸中之主要應力為切應力。計算切應力之公式如下：

$$v = \frac{VQ}{tI} \quad (6-1)$$

其中 v = 任何平面 $x-x$ 上 [圖 6-3(a)] 之單位切應力, V = 梁中某截面之切力, Q = 梁截面在 $x-x$ 線以上部份對於中軸之靜矩, I = 梁截面對於中軸之慣性矩, t = $x-x$ 線處梁截面之寬度, 鉸梁之截面與輓梁極相似, 茲試以輓梁為例, 其某截面各平

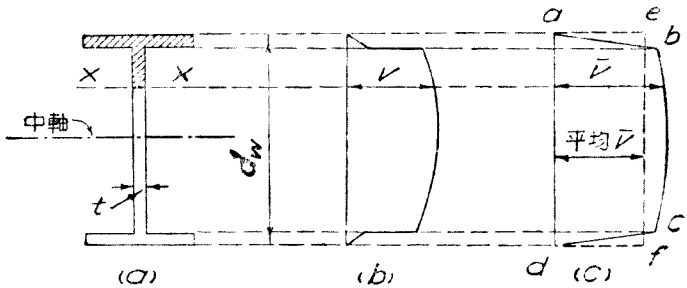


圖 6-3. 輓梁之切應力

面單位切應力之改變如圖 6-3 (b)。由此可知切力之大部份為腹板所承受, 其為翼緣所承受者極少。設 $\bar{v} = vt$ = 任何平面 $x-x$ 上之切應力, 以跨度之單位長度若干公斤計, 則

$$(6-2) \quad \bar{v} = \frac{VQ}{I}$$

\bar{v} 之改變略如圖 6-3 (c) 之 $abcd$, 其面積與該截面之切力 V 相等。若以 \bar{v} 之平均值及腹板之深度 d_w 作一長方形 $adef$, 其面積與 $abcd$ 者相等, 則

$$(\text{平均 } \bar{v})d_w = (\text{平均 } v)td_w = V$$

$$\text{或}(6-3) \quad \text{平均 } v = \frac{V}{td_w} = \frac{V}{A_w}$$

其中 A_w = 腹板之全面積。用方程(6-3)求得之平均 v 較用

方程 (6-1) 求得中軸之最大 v 約小百分之二十左右。但規定腹鋁之准許切應力 (我國規定為 7.5 公斤/平方公厘 [301]) 如稍低, 則用平均 v 固無不安全之弊。故實際上計算鋁梁之切應力, 幾一律採用方程 (6-3), 以其省時而所得之結果又無大差誤也。

腹鋁常係高而且薄, 不能承受稍大之壓力, 其中因平豎切應力而生之對角壓力 (diagonal compression) (圖 6-4 (a)), 能使腹鋁有發生屈潰 (buckling) 或波皺 (wrinkling) 之趨勢, 如

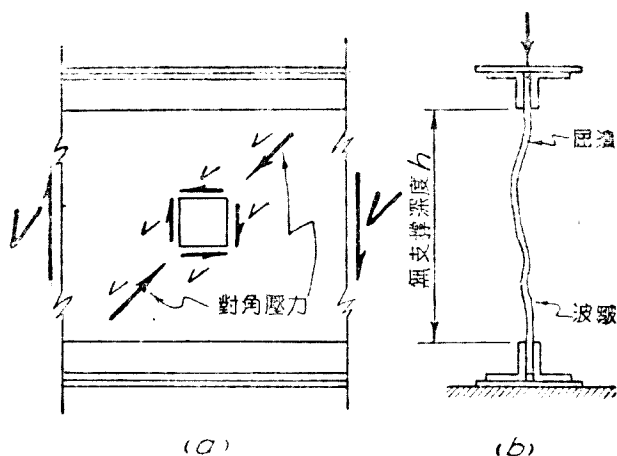


圖 6-4. 腹鋁之屈潰及綳摺

圖 6-4 (b)。同時, 若鋁梁某點受有較大之集中荷重 (如支點之反力), 亦能使其腹鋁發生屈潰或波皺。由已往之經驗, 凡腹鋁之無支撐深度 h (即上下翼緣間之淨距, 見圖 6-5) 不超過其厚度 t 之 60 倍, 則因對角壓力所致之屈潰或波皺, 不致發生。

如 $h \geq 30 t$ ，則必用成對之加勁桿 (stiffener)，鉚於或鉚於腹板之兩面 [420]，以避免屈潰或波皺。其詳法當於 6—5 節述之。

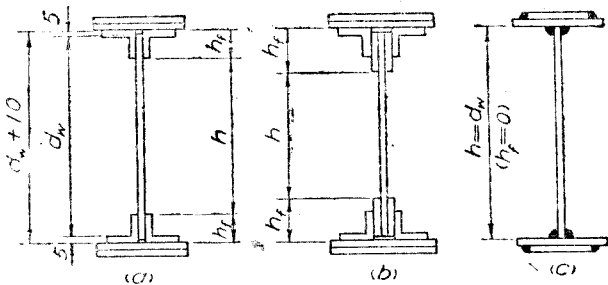


圖 6—5. 腹板之無支撐深度 (h)

腹板之厚度，於板梁之全長中，常使其一律。但於極重大之板梁，而某段之切力又大於其餘各段切力之數倍時，則腹板之厚度，當以其餘各段中之最大切力為準，於某段中，再加二加固板，鉚於或鉚於腹板之兩面。或於某段另用一較厚之腹板，與其餘各段之腹板拼接。

為避免加勁角或加勁板之數目太多起見，腹板之厚度 t 常規定不得小於其無支撐深度 h 之 $1/170$ (即 $t \geq h/170$) [418]。又為預防銹蝕起見，橋梁板梁之腹板及其他任何部份之最少厚度，規定為 10 公厘 (英制 $3/8$ 吋) [403]，但於房屋中所用之板梁，因其外圍有避火材料之保護，其腹板及其他任何部份之最小厚度，可減至 8 公厘 (英制 $5/16$ 吋)。

例題 6—1. 一鉚接板梁之腹板為 1000×10 公釐，其上下翼緣各係 -300×16 公厘之板。若准計單位切應力為 7.5 公斤/平方公厘 [301]，用

方程(6-1)及(6-3)各求其最大准許切力。

解答：

用方程(6-3),
$$v = \frac{V}{A_w}$$

故
$$V = vA_w = \frac{7.5}{1,600} \times 1000 \times 10 = 75 \text{ 公噸}$$

用方程(6-1),
$$v = \frac{VQ}{I}$$
, 應先計算 Q 及 I 之值。

$$I = \frac{(1000)^3 \times 10}{12} + 300 \times 16 \times (508)^2 \times 2$$

$$= 3,311 \times 10^6 \text{ (公厘)}^4$$

(二翼緣鋸對於本身平重心軸之 I 因比較極小, 故不必計入。)

$$Q = 300 \times 16 \times 508 + 500 \times 10 \times 250$$

$$= 3.69 \times 10^6 \text{ (公厘)}^3$$

故
$$V = \frac{vI}{Q} = \left(\frac{7.5}{1,600} \right) \left(\frac{10 \times 3,311 \times 10^6}{3.69 \times 10^6} \right)$$

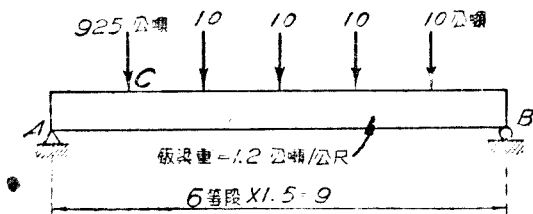
$$= 69 \text{ 公噸}$$

用方程(6-3)所得之答案, 較用方程(6-1)所得者約大 8.7%。但並非表示用方程(6-3)所得之答案不安全。因准許單位切應力之規定時, 已計及此點也。腹鋸 h/t 之值小於 170 而大於 60, 故必須用加勁鋸[426]。

習題 6-1. 一鉚接鋸梁之腹鋸為 1800×17 公厘, 其上下翼緣各係二 $150 \times 150 \times 19$ 公厘之鋼角(鋼角之各項要素見附錄一), 及一 360×16 公厘之鋼鋸所組成。鋼角之背均較腹鋸之深度突出 5 公厘(如圖 5-6(a)), 若最大切力 $V = 148$ 公噸, 用方程(6-1)及(6-3)各求其最大及平均單位切應力計算方程(6-1)中之 I 及 Q 時, 可暫時用全截面(即不減去鉚釘孔之面積)。此鋸梁之腹鋸需用加勁桿否?

習題 6-2. 一鉚接鋸梁之荷重如附圖所示, 其腹鋸之深度為 1400 公厘。用方程(6-3)求其腹鋸之厚度及 AC 段二加固鋸之深度及厚度。假

設其四翼緣角爲 $200 \times 200 \times 16$ 公厘，並無側板。准許單位切應力爲 7.5 公斤/平方公厘。



習題 6—2

6—3. 翼緣 腹板之功用，專在抵抗切力，而翼緣之功用，則專在抵抗彎矩，與桁架之弦桿相同。翼緣之各種形式已見圖 6—1，其上下翼緣常係相同。關於翼緣中鋼角及蓋板面積之配合，設計規範中常有若干規定 [414]，但此屬於設計之範圍，故不論及。

求鋼梁任何截面之最大纖維應力，自可用下列梁應力之公式：

$$(6-4) \quad f = \frac{My}{I}$$

$$\text{或 } (6-5) \quad f = \frac{M}{Z}$$

其中 f = 纖維應力， M = 該截面之彎矩， I = 梁截面對於中軸之慣性矩， y = 最外纖維與中軸之距， $Z = I/y$ = 梁截面係數。我國規定准許纖維拉應力 (f_t) 爲 12.5 公斤/平方公厘，准許纖維壓應力 (f_c) 則視受壓翼緣之無支撐長度 (l) 及翼緣寬度 (b) 而定。我國之規定如下 [301]：

$$f_c \leq 12.5 - \frac{1}{300} \left(\frac{l}{b} \right)^2 \quad (6-6)$$

其中 l/b 之值不得超過 40。

採用方程 (6-4) 或 (6-5) 時，於鉚接鉸梁毫無問題。但於鉚接鉸梁，因翼緣及腹鉸均有多數鉚孔，故有全截面及淨截面之區別，較為繁瑣，若假設鉚釘時係紅熱，且受壓力，故鉚釘能將鉚孔完全塞滿。如是，則有鉚孔之處，固可假定能承受壓力，但決不能承受拉力。故計算方程 (6-5) 中之 I 及 y (即中軸之位置) 時，其淨面積究應如何，殊頗確定。根據美國最近之實驗，^① 則 (1) 鉚接鉸梁中軸之位置，較用全面積所算得略高，但相差甚微；(2) 其 I 之有效值，約為用全面積所算得之 92% 至 98%，且與翼緣鉚孔之直徑及心距有關；及 (3) 其上下翼緣之最大纖維應力，實際較用淨面積 (祇減去受拉力翼緣之鉚孔) 所算得者略小，惟因所實驗之鉸梁不多，上述三項結論之真確，尚有待於將來實驗之證明。茲列四種不同之方法如下：

(1) 於腹鉸有加勁桿及拼接之截面，計算其淨截面時，其下半之鉚孔亦當減去，故該截面中軸之位置自較其餘截面為高。因此，鉸梁中軸必非一水平直線而係一波紋曲線，約如圖 6-6 (a)。惟腹鉸鉚孔之平距離，較翼緣者為遠 (我國規定鉚釘之最大心距不能超過鉚釘直徑之 7 倍) [434]，其對於中軸位置之

① 見立 (S. B. Lilly) 卡 (S. T. Carpenter) 二氏所著 鉚接鉸梁之有效慣性矩 一文，載 美國土木工程師會會刊，1939 年 10 月號，1407 頁。

影響甚小而可以略去。故計算中軸之位置時，祇應將受拉力翼緣之鉚孔減去，以求其淨截面如圖 6—6(b)。但最大彎矩或正在腹板有鉚孔之截面，故計算 I 時，應將受拉力一邊腹板之鉚孔亦減去，以求其淨截面，如圖 6—6(c)，此法似最合理，用於計算最大纖維應力及設計鉚梁之截面均可。

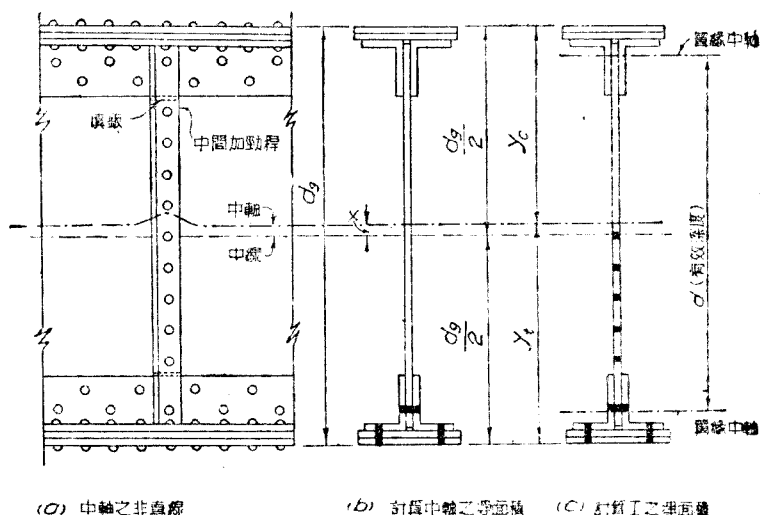


圖 6-6. 鉚接鉚梁之淨截面及中軸

(2) 上法之應用，頗為繁瑣，且是否與實際情形相符，尚未可知，故不如用較簡易之法。即計算最大纖維壓應力時，用不減去任何鉚孔之全截面，計算最大纖維拉應力時，用減去翼緣及腹板所有鉚孔之淨截面。而二者之中軸之位置，均與中線相同。此法初視之，似不合理。但須知計算最大纖維壓應力時， I 及 y_c 之值均加大，而計算最大纖維拉應力時， I 及 y_t 之值

均減小。故所得之答案與用(1)法所得者，相差常祇百分之二左右。

(3)我國規定鉸梁皆須用惰性矩法〔即用方程(6—5)]計算之，並規定其受壓翼緣亦應如受拉翼緣，用淨截面計算[413]。至計算淨截面時，腹鉸之鉚孔是否應減去，則無明確之規定。此法似太嚴格。為安全起見，用此法以計算鉸梁之截面，固無不可。若用此法以計算鉸梁之最大纖維應力，恐與實際情形不符甚遠。

(4)計算鉸梁截面之惰性矩 I ，尚有一近似之法，且用之於設計，尤為簡便。設 A_f = 翼緣全截面或淨截面之面積， d = 上下二翼緣中軸間之距離，稱為鉸梁之有效深度。假定鉸梁之中軸在其腹鉸之中線，則二翼緣之惰性矩 I_f 為

$$I_f = 2\left(A_f \times \frac{d^2}{4}\right) = A_f \times \frac{d^2}{2} \quad (6-7)$$

假設腹鉸之深度 d_w 與 d 約略相等，則腹鉸之惰性矩 I_w 為

$$I_w = A_w \times \frac{d^2}{12} = 2\left(\frac{1}{6}A_w \times \frac{d^2}{4}\right) = \frac{1}{6}A_w \times \frac{d^2}{2} \quad (6-8)$$

比較方程(6—7)與(6—8)，可知 $A_w/6$ 相當於翼緣之面積，故常稱為腹鉸之相當翼緣面積。若將 $A_w/6$ 乘以 $3/4$ 以求其大約淨面積，得 $A_w/8$ 。將方程(6—8)中之 $A_w/6$ 改為 $A_w/8$ ，並與方程(6—7)相加，即得鉸梁截面對於其中線之惰性矩，如是，則

$$I = \left(A_f + \frac{1}{8}A_w\right) \frac{d^2}{2} \quad (6-9)$$

其中 $A_f + \frac{1}{8} A_w$, 常稱為翼緣之有效總面積。

又假設 $y = d_g/2$, 則方程(6—4)可寫成

$$(6-10) \quad f = \frac{M d_g}{(A_f + \frac{1}{8} A_w) d^2}$$

$$(6-11) \quad Z = (A_f + \frac{1}{8} A_w) \frac{d^2}{d_g}$$

其中 A_f 之值, 計算 f_c 時可用全截面, 計算 f_t 時可用淨截面。

方程(6—10)或(6—11)可用之於直接計算鉸梁所需之翼緣面積。蓋既知 M, f , 及 A_w 之後, 再假定 d 及 d_g 之值, 即可求得所需 A_f 之值。

計算淨截面時, 常使鉚孔之直徑較鉚釘之直徑大 3 公厘 [40S]。故如用直徑 19 公厘 (英制 3/4 吋) 之鉚釘, 其鉚孔之直徑應作為 22 公厘, 如用直徑 22 公厘 (英制 7/8 吋) 之鉚釘, 其鉚孔之直徑應作為 25 公厘等。

求翼緣之淨截面時, 應減去之鉚孔數, 殊無一定之規則, 但下列三條, 大致不差, 至少可供參考:

(1) 於無蓋鉸之翼緣, 減去距梁軸最遠之一水平鉚孔。

(2) 於有蓋鉸之翼緣而其翼緣角二肢之寬均不超過 100 公厘時, 減去二豎立鉚孔。

(3) 於有蓋鉸之翼緣而其翼緣角一肢或二肢之寬不大於 130 公厘時, 減去距梁軸最遠之一水平鉚孔及二豎立鉚孔。

於平常情形之下, 每翼緣角至多祇需減去三鉚孔。因每翼

緣角所有之鉚孔，不能同在一截面也。鋼角之鉚心線 (guage line) 常有一定標準，視其肢寬而定，詳見附錄二 *I*。

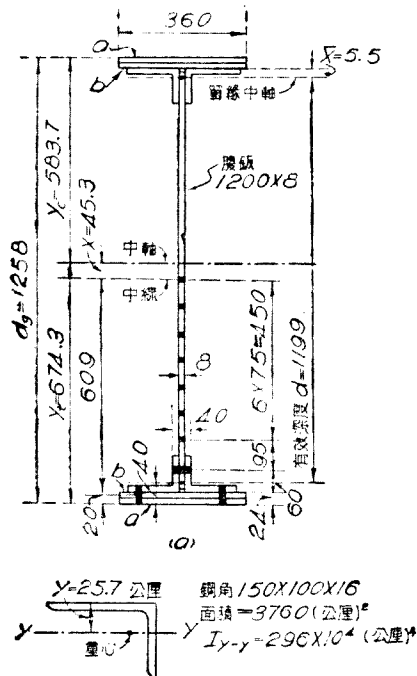
例題 6-2. 某房屋中之鋸梁其最大截面之組成如下：

1 腹 鋸 1200×8 公厘

4 翼緣角 150×100×16 公厘

4 蓋 鋸 360×12 公厘

若該截面之彎矩為正號 210 公噸公尺，鉚釘直徑為 22 公厘，其位置如



(b)
例題 6-2.

附圖所示。用本節所述之 (1), (2), (3), 及 (4) 法 (即方程 (6—10)), 求其上下二翼緣之最大纖維應力。

解答 第(1)法:

先用如圖 6—6 (b) 之淨截面, 求其中軸之位置, 此項淨截面之面積如下:

	全面積	減去鉚孔之面積	淨面積
2 翼緣角 $150 \times 100 \times 16$	7,520	$4 \times 25 \times 16 = 1600$	5,920
2 蓋 鐵 360×12	8,640	$2 \times 25 \times 21 = 1200$	7,440
共	16,160		13,360
1 腹 板 1200×8	9,600	$1 \times 25 \times 8 = 200$	9,400

$$r = \frac{25 \times 40 \times 545 + 2 \times 25 \times 40 \times 609}{16,160 + 13,360 + 9,400} = \frac{1,763,000}{38,920} = 45.3 \text{ 公厘}$$

求 I 時所用淨截面如圖 6—6(c)。先求全截面對於中線之 I :

$$\text{腹 鐵: } \frac{8 \times 1200^3}{12} = 1,152 \times 10^6 (\text{公厘})^4$$

$$\text{翼緣角: } 4 [2,960,000 + 3,760 \times (579.3)^2] = 5,659 \times 10^6$$

$$\text{蓋 鐵: } 2 \left[\frac{360 \times (21)^3}{12} + 360 \times 24 \times (617)^2 \right] = \frac{6,579 \times 10^6}{12,796 \times 10^6}$$

共

減去翼緣鉚孔:

$$2 \times 25 \times 40 \times (609)^2 + 1 \times 25 \times 40 \times (545)^2 = 1,039 \times 10^6$$

減去腹鐵鉚孔:

$$25 \times 8 \times [75^2 + (150)^2 + \dots + (450)^2] = \frac{162 \times 10^6}{-1,141 \times 10^6}$$

$$\text{淨截面對於中線之 } I = 11,649 \times 10^6$$

$$\text{減去 } (38,920 - 7 \times 25 \times 8) \times (45.3)^2 = -77 \times 10^6$$

$$\text{淨截面對於中軸之 } I = 11,572 \times 10^6 (\text{公厘})^4$$

$$f_c = \frac{210 \times 10^6 \times 674.3}{11,572 \times 10^6} = 11.4 \text{ 公斤/平方公厘}$$

$$f = \frac{210 \times 10^6 \times 583.7}{11,572 \times 10^6} = 10.6 \text{ 公斤/平方公厘}$$

既知 f_c , 可用方程(6—6)求受壓翼緣之准許無支撐長度(l), 則

$$10.6 \leq 12.5 - \frac{1}{300} \left(\frac{l}{360} \right)^2$$

$l \leq 8600$ 公厘，或 8.6 公尺

第(2)法：

$$\text{全截面對於中線之 } I = 12,790 \times 10^6 \text{ (公厘)}^4$$

$$\text{減去所有鉚孔 } 2 \times 1,141 \times 10^6 = \underline{- 2,282 \times 10^6}$$

$$\text{淨截面對於中線之 } I = 10,508 \times 10^6 \text{ (公厘)}^4$$

$$y_t = y_c = d_o/2 = 629$$

$$f_t = \frac{210 \times 10^6 \times 629}{10,508 \times 10^6} = 12.6 \text{ 公斤/平方公厘}$$

$$f_c = \frac{210 \times 10^6 \times 629}{12,790 \times 10^6} = 10.3 \text{ 公斤/平方公厘}$$

第(3)法：

$$\text{全截面對於中線之 } I = 12,790 \times 10^6 \text{ (公厘)}^4$$

$$\text{減去上下翼緣之鉚孔 } 2 \times 1,039 \times 10^6 = \underline{- 2,078 \times 10^6}$$

$$\text{淨截面對於中線之 } I = 10,712 \times 10^6 \text{ (公厘)}^4$$

$$f_c = f_t = \frac{210 \times 10^6 \times 629}{10,712 \times 10^6} = 12.3 \text{ 公斤/平方公厘}$$

第(4)法：

先求翼緣截面之重心(其中鉚孔常不減去)，

$$x = \frac{7,520 \times 25.7 - 8,640 \times 12}{7,520 + 8,640} = \frac{89,584}{16,160} = 5.5 \text{ 公厘}$$

$$A_f \text{ (淨截面)} + \frac{1}{8} A_w = 13,360 + \frac{1}{8} \times 9,600 = 14,560 \text{ 平方公厘}$$

$$A_f \text{ (全截面)} + \frac{1}{8} A_w = 16,160 + \frac{1}{8} \times 9,600 = 17,360 \text{ 平方公厘}$$

$$d = 1,210 - 2 \times 5.5 = 1,199 \text{ 公厘}$$

$$d_o = 1,210 + 2 \times 24 = 1,258 \text{ 公厘}$$

$$f_t = \frac{210 \times 10^6 \times 1,258}{14,560 \times (1,199)^2} = 12.6 \text{ 公斤/平方公厘}$$

$$f_c = \frac{210 \times 10^6 \times 1,258}{17,360 \times (1,199)^2} = 10.6 \text{ 公斤/平方公厘}$$

比較上列四法之答案，所差均極微，惟第(3)法所得 $f_c = f_t$ ，與實際情形毫不相符。第(2)及第(4)二法，均較第(1)法為簡便，而第(4)法可用之

直接計算所需之翼緣面積 此非他法所能，故設計時多用之。

習題 6—3. 一鉚接鉚梁最大截面之組成如下：

1 腹 鉚 1800×11

4 翼緣角 $150 \times 150 \times 19$

6 蓋 鉚 360×16

鉚釘直徑為 22 公厘，受壓翼緣之無支撐長度 (l) 為 4.5 公尺。若 $f_c = 12.5$ 公斤/平方公厘，而 f_t 依方程 (6—6) 計算，則此截面所能承受之最大彎矩為若干公噸公尺？用本節所述之四法計算，以資比較。

習題 6—4. 用方程 (6—10) 求習題 6—2 鉚梁最大彎矩截面受拉翼緣所需蓋鉚之數目及其厚度 (注意我國規定 [414] 任何蓋鉚不可較翼緣角為厚)。蓋鉚之全寬均為 500 公厘，鉚釘之直徑為 22 公厘，准許纖維拉應力為 12.5 公斤/平方公厘。假定腹鉚之二加固鉚應伸長至 C 點之右，其長度當於習題 6—5 中定之。

6—4. 蓋鉚之長度 鉚梁翼緣最大面積之計算，既以最大彎矩之截面為準，若其他截面之彎矩變小，為節省鋼料起見，翼緣之面積可以向鉚梁之兩端，逐漸減小。主要翼緣角應與鉚梁之長度相等，作為加勁腹鉚之用，不可截短。此外如蓋鉚，側鉚，其他翼緣角，以及腹鉚之加固鉚等，於不需要之處，均可截去，其方法均相同。

於橋梁鉚梁，其與上下翼緣角鄰接之蓋鉚，常亦使之與鉚梁等長 [414]，但於房屋鉚梁，並不需要如此，其餘截短之蓋鉚，為安全起見，其兩端至少應各伸出其理論端點以外 300 公厘 [414]。

蓋鉚之截短，常以其受拉翼緣為準，其受壓翼緣各蓋鉚之長度，則使之與受拉翼緣者相同。

使方程 (6—5) 及 (6—10) 中之纖維應力 f 成一恆數，則

該二方程式可寫成

$$MocZ \quad (6-12)$$

及
$$Moc \left(A_f + \frac{1}{8} A_w \right) \frac{d^3}{d_g} \quad (6-13)$$

而
$$Z = \left(A_f + \frac{1}{8} A_w \right) \frac{d^2}{d_g} \quad (6-11)$$

即鋼梁各段之抗矩與其截面係數 Z 成正比例。若將其截面之蓋板截去，則該截面之 A_f, d ，及 d_g 均行改變^①，故求各蓋板之

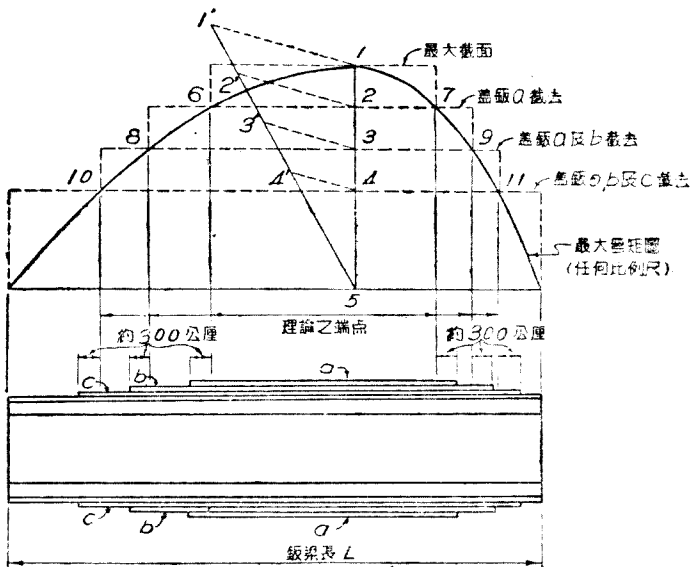


圖 6-7. 蓋板長度之圖解法

- ① 所有現行之教本，幾一律假定蓋板截去後， d 及 d_g 均不改變，故 Moc $A_f + A_w/8$ ，其謬誤自屬顯然。雖此法於實際或關係不大，但理論謬誤，究不可為訓。

長度，包含二種手續：(1)求鈹梁之最大彎矩圖，(2)計算每對蓋鈹逐次截去後之截面係數。其圖解法如圖 6-7 所示。先以任何比例尺作鈹梁之最大彎矩圖，其中 1—5 豎線代表其最大值。自 5 點作任何斜線 1'—5，並以任何適宜之比例尺，將最大截面及每對蓋鈹截去後之諸截面係數，各如距離 1'—5, 2'—5, 3'—5 等，記於 1'—5 線上，得 1', 2', 3' 諸點。聯 1'—1 線，並作 2'—2, 3'—3 等線，與之平行，得 1, 2, 3 諸點。經過 1, 2, 3 諸點，作直線與彎矩圖之底線平行，並與彎矩圖相交於 6, 7, 8, 9 諸點，即諸蓋鈹之理論端點。故 6—7, 8—9, 及 10—11 各為蓋鈹 a, b, c 之理論長度。於其兩端各伸長約 300 公厘，即得其實在長度（於橋梁鈹梁，則此與翼緣角鄰接之蓋鈹 c 之實在長度應與鈹梁之長度相等）。鈹梁之實際最大截面，常較最大彎矩所需要之截面稍為盈餘，但圖 6-7 之解法，此項盈餘未曾計入，蓋如此較為安全，且所差甚微也。

若最大彎矩圖係一拋物線，則用數解法或較為簡易。如圖

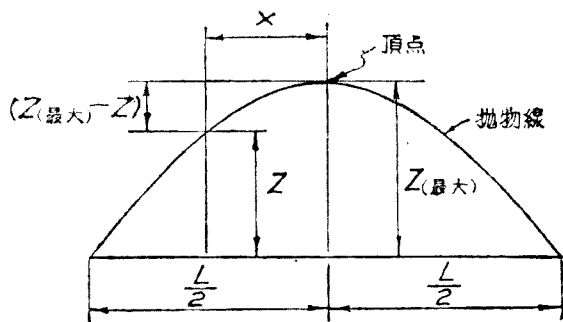


圖 6-8. 彎矩圖為一拋物線時蓋鈹長度之數解法

6—8 所示，其中最大高度代表鈹梁之最大截面係數 $Z_{(\text{最大})}$ ， Z 為某對蓋鈹截去後之截面係數， X 為某蓋鈹理論端點與跨中心之距離。故 $2X$ 即等於某蓋鈹理論長度 L' 。依拋物線之性質，則

$$\frac{Z_{(\text{最大})} - Z}{Z_{(\text{最大})}} = \frac{X^2}{(L'/2)^2} \quad (6-14)$$

故

$$L' = 2X = L \sqrt{1 - \frac{Z}{Z_{(\text{最大})}}} \quad (6-15)$$

鐵路鈹梁橋之最大彎矩圖包括呆荷重及機車之活荷重。於下承橋 (through bridge) 之鈹梁，此種最大之彎矩圖即係聯合各節點最大彎矩之若干直線 (呆荷重之彎矩圖原係一拋物線，但亦可視為係若干直線)，上承橋 (deck bridge) 之鈹梁常直接支承橋面，其最大彎矩圖與一拋物線相似，而兩旁略為高出，故不能用 (6-15) 之拋物線方程，美國之哈 (H. D. Hussey) ① 氏曾將方程 (6-15) 稍加改變，以合於上述之情形。其方程如下：

$$L' = L \sqrt{1 - \frac{Z}{1.05 Z_{(\text{最大})}}} \quad (6-16)$$

美國孔 (F. C. Kunz) ② 氏假定上承鈹梁橋之近似最大彎矩圖為一底線長為 $0.9L$ (跨度) 之拋物線，於中線分開，而加入一長 $0.1L$ 之直線，如圖 6—9 所示。根據此近似最大彎矩圖，孔氏建議下列公式，以計算上承鈹梁橋蓋鈹之長度。

$$L' = L \left(0.1 + 0.9 \sqrt{1 - \frac{Z}{Z_{(\text{最大})}}} \right) \quad (6-17)$$

① 見美國土木工程師會出版之土木工程，1932年7月號，455頁，但經著者稍加改變。

② 見所著鋼橋設計，156頁。

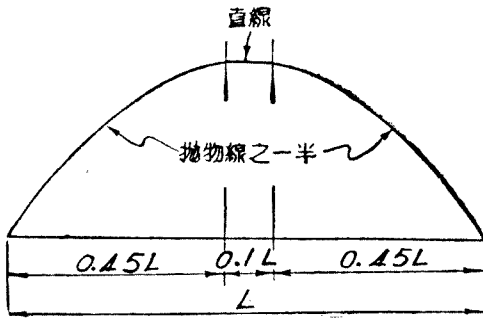


圖 6-9. 上承鉸梁橋之近似最大彎矩圖

例題 6-3. 設例題 6-2 中鉸梁之跨長為 15 公尺，而其最大彎矩圖係一拋物線，用數解法求其蓋板 a 及 b 之理論及實際長度。

解答

先求各截面之截面係數 Z 如下表：

	A_1 (淨)	$A_1 + \frac{1}{8}A_w$	d	d_y	d^2/d_y	Z
	平方公厘	平方公厘	公	厘	厘	立方公厘
最大截面	13,360	14,560	1,199	1,278	1,143	166×10^5 (最大)
蓋板 a 截去	9,640	10,840	1,182	1,234	1,132	123×10^5
蓋板 a 及 b 截去	6,720*	7,920	1,159	1,210	1,110	88×10^5

* 每角祇減去一鉚孔。

用方程 (6-15) 則蓋板 a 及 b 之理論長度如下：

$$L'_a = 15 \sqrt{1 - \frac{123}{166}} = 15 \times 0.51 = 7.65 \text{ 公尺}$$

$$\text{實際長度} = 7.65 + 0.60 \approx 8.4 \text{ 公尺}$$

$$L'_b = 15 \sqrt{1 - \frac{88}{166}} = 15 \times 0.69 = 10.35 \text{ 公尺}$$

$$\text{實際長度} = 10.35 + 0.60 \approx 11.0 \text{ 公尺}$$

習題 6-5. 用圖解法求習題 6-4 鉸梁中二腹板加固板及所有蓋板在

C 點 (見習題 6-2 之附圖) 以右之理論及實際端點。計算時以受拉翼緣之淨截面為準。先將腹鈹之二加固鈹同時截去，再行依自外向內之先後次序，截去諸蓋鈹。

6-5. 翼緣之鈹接 鈹梁之各部，如腹鈹、翼緣角，及蓋鈹等，必用鈹接或銲接，庶在荷重下其各部可成爲一體。銲接刻下仍在發展時期，故鈹梁尚多用鈹接。惟將來銲接必可完全或一大部份代替鈹接，則似無疑問。茲先述鈹接之計算法。

在工廠中製造時所釘之鈹釘，稱爲廠中鈹釘，在工地建造時所釘之鈹釘，稱爲工地鈹釘。二者又各有機鈹及人鈹之分。以強度及效率而論，則機鈹勝於人鈹，廠中鈹釘又勝於工地鈹釘。故設計時常以多用廠中鈹釘爲宜。人鈹鈹釘，除無鈹機之時外，自以不用爲是。

鈹釘本身之強度，常爲二種應力所限制，即切應力及承應力。我國規定鐵路橋梁鈹釘之准許單位應力如下表 [301] (我國規定公路橋梁鈹釘之准許單位應力與下表稍有出入)：

鈹 釘 之 種 類	切 應 力 承 應 力	
	公斤/平方公厘	
廠中機鈹之鈹釘	9.0	18.0
工地機鈹之鈹釘	8.0	16.0
工地人鈹之鈹釘	7.0	14.0

每個鈹釘之准許強度，常稱爲鈹釘之值，附錄二 A 及 B 示各種直徑機鈹鈹釘之單切力(single shear)及承力值。其中直徑 19 公厘 (英制 3/4 吋) 及 22 公厘 (英制 7/8 吋) 乃最通用者。

鋼梁中鉚釘之最大直徑，視其所用鋼角之肢寬而定，其規定大約如附錄二 *D* 所示。我國規定若鋼角之大小係由應力計算而決定，則其中鉚釘之最大直徑，不得超過其肢寬四分之一 [433]。

任何相鄰二鉚釘中心間之最小距離，不得小於其直徑之 3 倍 [431]，而其順應力向之中心距，最大不得超過其直徑之 7 倍 [434]。至鉚中心至鋼邊之最小邊距，不得小於其直徑 $1\frac{3}{4}$ 倍或 $1\frac{1}{2}$ 倍，視鋼邊係剪截邊抑係軋軋邊或刨平邊而定 [432]。各種大小鉚釘之最小心距，適宜心距，最大心距，及最小邊距等，詳見附錄二 *C*。

接合翼緣與腹鋼之鉚釘，稱為翼緣之平鉚釘，接合翼緣角與蓋鋼之鉚釘，稱為翼緣之豎鉚釘，茲分別述之如下。

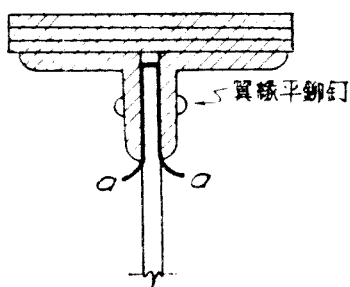


圖 6-10. 翼緣與腹鋼間之平切力

(1) 翼緣平鉚釘 若翼緣平鉚釘之功用祇在抵抗圖 6-10 倒 U 形截面 *a-a* 之平切力 \bar{v} ，其值之計算亦用方程 (6-2)，其中 Q 之值，即翼緣面積對於鋼梁中軸之靜矩。設 R = 鉚釘之值 (依

雙切 (double shear) 或承力計算，當視腹鋼之厚薄而定)，則以 \bar{v} 除 R ，即得鉚釘之心距 (pitch) p ，故

$$p = \frac{R}{\bar{v}} = \frac{RI}{VQ} \quad (6-18)$$

若鉸釘係單行，則心距為相鄰二鉸釘中心於鉸心線上之半距離，如圖 6-11(a)。若鉸釘係交錯之雙行，則心距為某鉸心線上一鉸釘中心與其他鉸心線之相鄰鉸釘中心之半距離，如圖 6-11(b)。

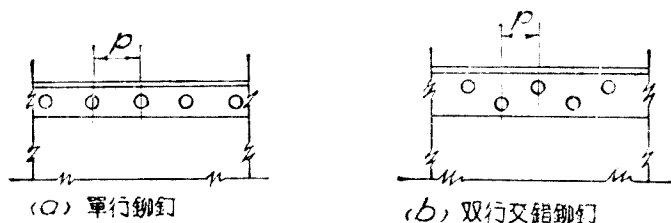


圖 6-11. 翼緣平鉸釘之心距

由方程 (6-18)，可知 p 之值與 R 及 RI 成正比例，而與 V 成反比例。而 p 最小之值必在 I/VQ 最小之截面。

若假定鉸梁之中軸在其腹鉸之中線，則 Q 之值等於 $A_d/2$ ，以此值及方程 (6-9) I 之近似值代入方程 (6-2) 中，則

$$\bar{v} = \frac{I}{d} \times \frac{A_f}{A_f + \frac{1}{8}A_w} \quad (6-19)$$

故

$$P = \frac{R}{\bar{v}} = \frac{Rd}{V} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{A_w}{A_f} \right) \quad (6-20)$$

由方程 (6-20) 可知 p 之值隨 V 、 d 及 A_f 之值而改變。至 A_f 之值於受壓翼緣用全面積，於受拉翼緣用淨面積，但由方程 (6-20) 可知在同一截面，受壓翼緣 p 之值，常較受拉翼緣者

爲小。於上下翼緣相同之鈹梁，爲繪圖及製造之簡便起見，實際上常祇計算受壓翼緣之鉚心距，而使受拉翼緣者與之相同。

若某翼緣因有其他特別接合而必需將其鉚心距稍加改變時，自屬例外。

若將方程 (6-19) 及 (6-20) 中之 $\frac{1}{8}A_w$ 略去不計，則得

更近似而常用之方程如下：

$$(6-21) \quad \bar{v} = \frac{V}{d}$$

$$(6-22) \quad p = \frac{Kd}{V}$$

以方程 (6-21) 及 (6-22) 各與方程 (6-19) 及 (6-20) 比較，可知用方程 (6-21) 所得 \bar{v} 之值常大於方程 (6-19) 所得者，而用方程 (6-22) 所得 p 之值常小於方程 (6-20) 所得者。故方程 (6-20) 及 (6-22) 雖欠精確，但均簡便而又安全，因此通常多採用之。

方程 (6-21) 亦可以另一法求得之。以截面 $a-a$ 及 $b-b$ 自鈹梁隔離長爲 Δx 之一段，如圖 6-12(a)，並考慮該隔離體在所示力系下之平衡，如圖 6-12(b)，若 $a-a$ 及 $b-b$ 間無豎向荷重，用 $\Sigma V=0$ ，則該二截面之切力 V 必數量相同而指向相反。用 $\Sigma H=0$ ，則 $\Delta C = \Delta T$ 。因翼緣合應力之增加率與翼緣及腹鈹間平均切力之增加率絕對相同，故

$$\bar{v} = \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

用 $\Sigma M=0$ 於 e 點，則

$$d\Delta C - V\Delta x = 0$$

或

$$\Delta C = \Delta T = \frac{V}{d} \Delta x$$

故

$$\bar{v} = \frac{V}{d} \quad (6-21)$$

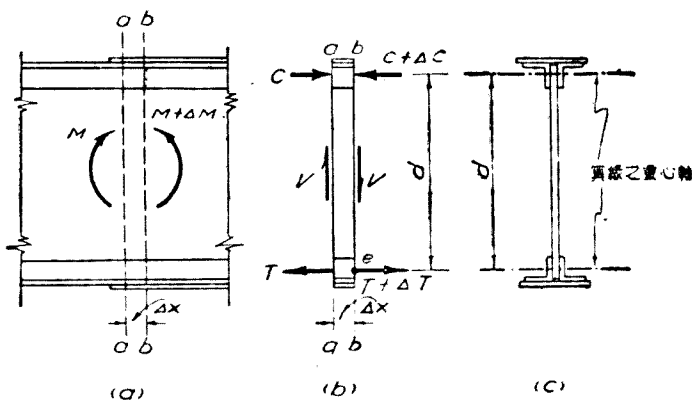


圖 6-12. 翼緣與腹鉸間平均切力之近似計算

方程 (6-22) 與彎矩圖聯合應用, 可得下述求翼緣半鉚釘心距之圖解法。

由材料力學, 可知

$$V = \frac{\Delta M}{\Delta x}$$

由方程 (6-22) 則

$$\frac{R}{p} = \frac{V}{d} = \frac{\Delta M}{d \Delta x} = \frac{\Delta M}{\Delta x d}$$

若

$$R = \frac{\Delta M}{d}$$

則

$$p = \Delta x$$

如圖 6-13(a) 所示, 先將彎矩圖 $a-b-c$ 各段之值, 除以其各段 d 之值, 得 M/d 圖, 如 $a-b-c'$ 。於縱坐標軸, 以與 M/d 圖相同之比例尺, 量定鉚釘之值 R 得 1, 2, 3, … 諸點。由諸點作直線與彎矩圖之底線平行, 而與 M/d 圖相交於若干點, 由該若干點各作縱線, 其間之距離, 即所求之鉚釘心距。因作圖時曾使 $R = \Delta M/d$, 故 $\Delta x = p$ 。若鉸梁之有效深度 d 於鉸梁之全長中係一恆數, 則作圖時可使 1, 2, 3, … 諸點間之豎距等於 Rd , 其比例尺與彎矩圖者相同。並用彎矩圖以求鉚釘心距。用此法所求得者, 係鉸梁全長中翼緣鉚釘心

距之實在改變值。

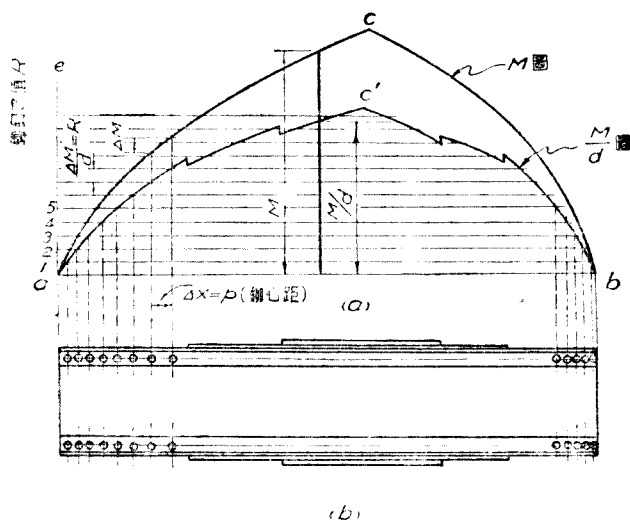


圖 6-13. 翼緣平鉚釘心距之圖解法

若切力 T 之值逐漸改變，則鉚心距 p 之值亦應隨之逐漸改變，如此則實際上頗感不便。故於不支承橫梁之鉚梁（如上承橋），常將鉚梁全長分為若干段，每段長約 0.6 公尺至 1.5 公尺，每段中之鉚心距常使其成一恆數。即一律採用該段中所需之最小鉚心距。並常以有中間加勁桿（見下 6-7 節）之處，為分段之點。於支承橫梁之鉚梁（如下承橋），則一律以有橫梁之處為鉚心距分段之點。蓋其間之切力 T 之改變，常甚微小也。

若鉚梁之上或下翼緣，支承任何豎向荷重，如上承橋之橋面，常直接支承於鉚梁之上翼緣，則該翼緣之平鉚釘，除必需抵抗平切力外，尚需抵抗豎切力。故鉚心距之計算，必以其平豎切力之合力為準，如圖 6-14 所示，設鉚釘 a 之心距為 p ，則

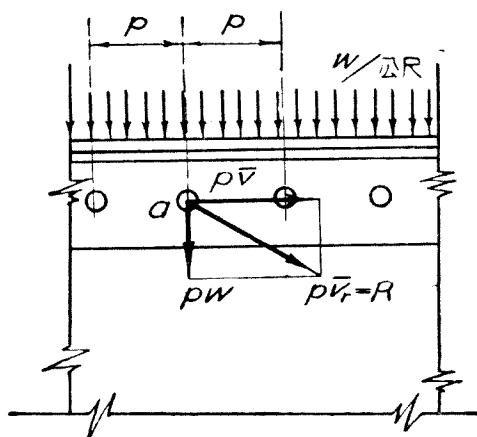


圖 6-14. 受有平豎切力之翼緣平鉚釘

其所受之平豎切力各為 $p\bar{v}$ 及 pw ，其合力為 $p\bar{v}_r$ ，

$$\text{故 } \bar{v}_r = \sqrt{\bar{v}^2 + w^2} \quad (6-23)$$

其 w 為翼緣所受之直接豎向荷重，以公噸/公尺計，因此

$$p = \frac{R}{\bar{v}_r} \quad (6-24)$$

方程 (6-23) 中 \bar{v} 之值，可用方程 (6-2)，(6-19)，或 (6-21) 計算之。

於上承式之鐵路鋼梁橋計算其上翼緣平鉚釘時所用之 w ，應等於機車主輪之重量均佈於一公尺長度之上 [415] (見 7-9 節)，並加以同量之衝擊力 (見 7-10 節)。

(2) 翼緣豎鉚釘 翼緣豎鉚釘之功用，係抵抗諸蓋板間及蓋板與翼緣間之平切力，故其計算與翼緣平鉚釘相似，而方程 (6-18) 亦仍可用，僅其 Q 之值不同而已。如圖 6-15 所示。

其中二豎鉚釘必抵抗平面 1—1, 2—2, 及 3—3 之平切力。其中平面 1—1, Q 之值係最大, 故最大之平切力在 1—1 平面。而翼緣豎鉚釘心距之計算, 亦以此為準。

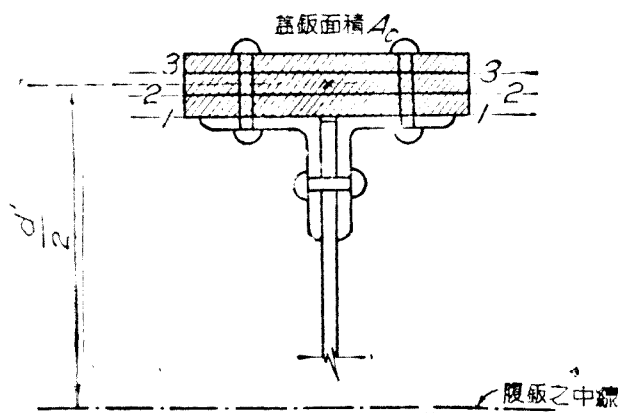


圖 6-15. 翼緣之豎鉚釘

設 A_c 為所有蓋板之面積, d' 為上下翼緣 A_f 重心間之距離, 並如前假設鋼梁之中軸在其腹板之中線, 則方程 (6-2) 中 Q 之值為 $A_c d' / 2$, 故

$$(6-25) \quad \bar{v} = \frac{Vd'}{d^2} \times \frac{A_c}{A_f + \frac{1}{8}A_w}$$

$$(6-26) \quad p = \frac{2R}{v} = \frac{2Rd^2}{Vd'} \times \frac{A_f + \frac{1}{8}A_w}{A_c}$$

其中鉚釘之值 R , 常依單切力計算, A_c 及 A_f 之值於受壓翼緣用全截面, 於受拉翼緣用淨截面。但前者之鉚心距常較後者為小, 故計算時亦以受壓翼緣為準, 而使受拉翼緣者與之相同。

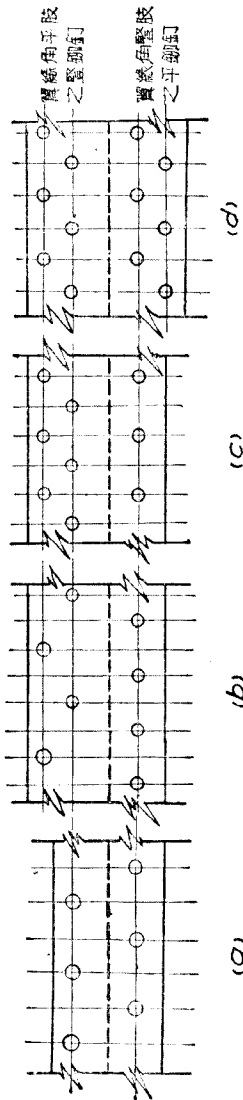


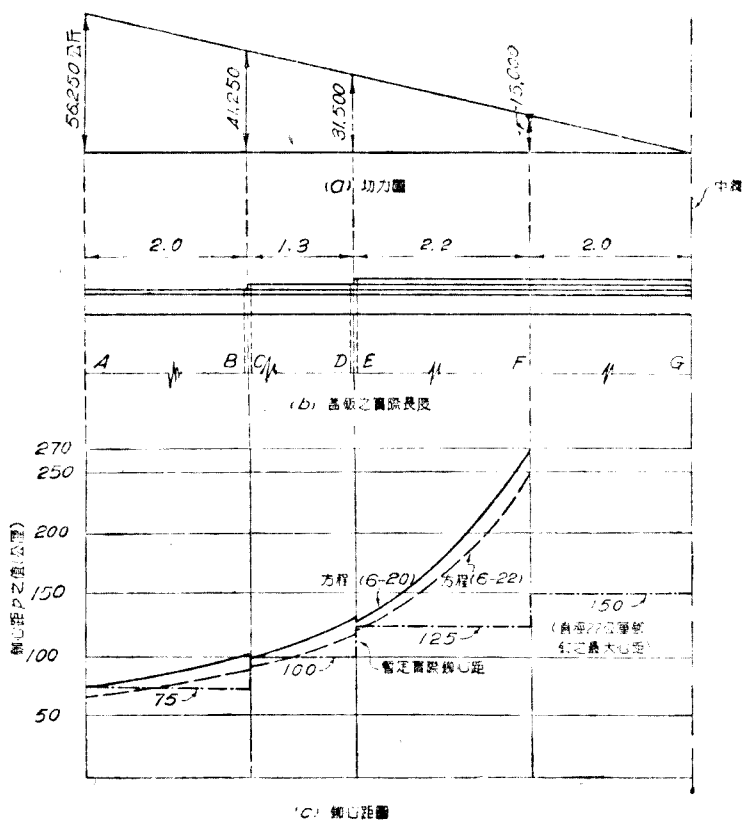
圖 6—16. 翼緣角中平豎鉚釘之佈置

方程 (6—26) 所得之 p 常較方程 (6—20) 所得者為大，因此若使翼緣之豎鉚釘心距與其平鉚釘心距相同，常略超過其需要。為繪圖及製造時之簡便起見，實際上多係如此，圖 6—16 示翼緣角中平豎鉚釘之標準佈置，其二肢係展開於一平面之內。

於蓋鈹之兩端長約 0.5 公尺之中，常使其豎鉚心距較小，庶該蓋鈹之應力，能傳達於其下之蓋鈹 [414]。蓋鈹之寬度不超過約 450 公厘者，可用二行豎鉚釘，若寬於 450 公厘，則需用四行豎鉚釘，並使其交錯適宜。

例題 6—4. 求例題 6—2 及 6—3 中鈹梁受壓翼緣平鉚釘之心距，若其均佈總荷重為 7.5 公噸/公尺，但非直接加於任何翼緣之上。鉚釘係廠中機鉚。

解答 其切力圖如附圖 (a) 所示。其諸蓋鈹之實際長度 [見附圖 (b)]，及有效深度 d 之值，已於例題 6—3 中求得。其 A_f (全截面) 之值，可取自例題 6—2 之附表，鉚釘心距可依截面 A, B, C, \dots 等計算所有之計算，均見附表，其中 p 之值係先用方程 (6—



例題 6-4。

22) 計算,再用方程(6-20)計算,以資比較。可見前者之值,常小於後者。二者 p 之值均示於附圖(c)。至實際 p 之值,應暫定如附圖(c)之階形線(其最大 p 之值為 150 公厘)。因 p 之改變常在有中間加勁桿之處,而其位置尚未計算也。至受拉翼緣平鉚釘之心距及上下二翼緣豎鉚釘之心距,當使之與受壓翼緣平鉚釘之心距相同,不必計算。蓋板兩端之鉚釘數,應稍增加,俾可發揮其強度。其計算法與鉚接相似,詳見例題 6-5 解答之末,茲不贅。

$$R = 22 \times 8 \times 18 = 3168 \text{ 公斤} \quad \frac{1}{8} A_w = \frac{1}{8} \times 1200 \times 8 = 1200 \text{ 平方公厘}$$

截 面	V	d	A_f (全)	$1 + \frac{\frac{1}{8} A_w}{A_f}$	p 之 值 方 程 (6-22)	p 之 值 方 程 (6-21)
	公斤	公厘	平方公厘		公	厘
A	56,250	1,159	7,520	1.14	66	76
B	41,250				89	102
C	41,250	1,182	11,840	1.10	91	100
D	31,500				119	131
E	31,500	1,199	16,160	1.07	120	128
F	15,000				251	270
G	0				∞	∞

習題 6-6. 用方程(6-22)及(6-20)計算習題 6-2, 6-4, 及 6-5, 鋼梁受壓翼緣平鋼釘之心距。作圖表示其改變, 並暫定其實際鋼釘心距(鋼釘係廠中機釘)。

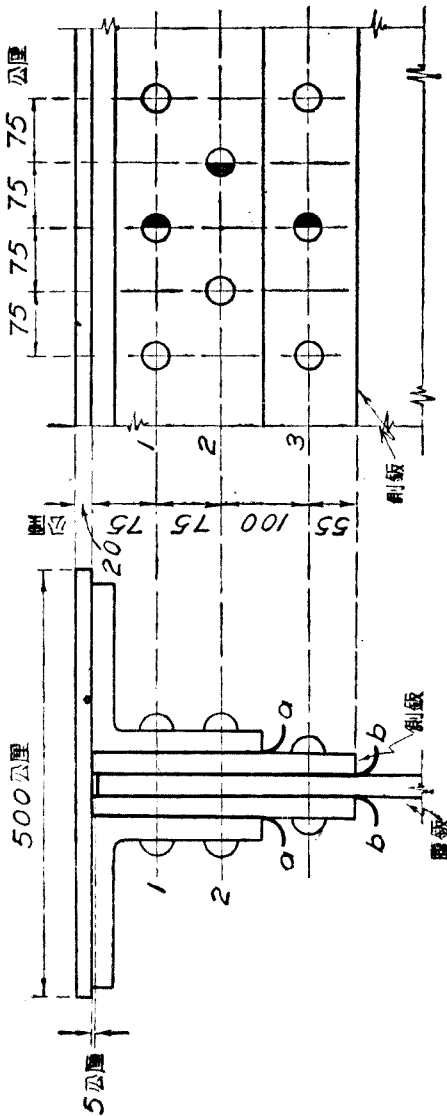
習題 6-7. 若例題 6-4 鋼梁之均佈荷重 7.5 公噸/公尺係直接加於其上翼緣之上, 則該翼緣平鋼釘之心距應如何? 試用方程 (6-19), (6-23) 及(6-24)計算。鋼釘之值, 與該例題同。

習題 6-8. 一鋼梁某端之截面組成如下:

- 1 腹 鋼 : 100×16 公厘
- 4 側 鋼 300×16 公厘
- 4 翼緣角 200×200×20 公厘
- 2 蓋 鋼 500×20 公厘

其翼緣及其平鋼釘之佈置如附圖所示。鋼釘之直徑為 25 公厘, 係廠中機釘, 其上翼緣並無直接荷重。若其平鋼釘之心距為 75 公厘交錯式, 如附圖所示, 求該端之最大准許切力之公噸數。

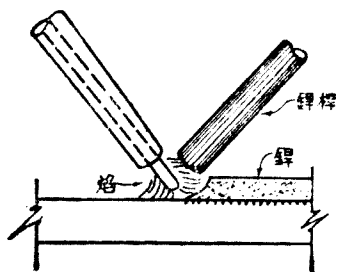
提示 由方程(6-18)可知 $V = RI/pQ$ 。先計算 a-a 截面 1 及 2 兩行鋼釘所能抵抗之切力, 其鋼釘之值依雙切力計算, 再計算 b-b 截面 1, 2 及 3, 三行鋼釘所能抵抗之切力, 其鋼釘之值依承力計算, 並應乘以 1.5, 因



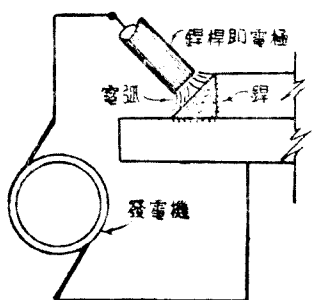
習題 6-8.

每節心距中均有一個半鉚釘(見附圖之黑半圓)。 所求得二切力之較小者, 即該端之最大准許切力。 I 之值可以方程(6-9)計算之, 所有計算, 自以受壓翼緣為準。

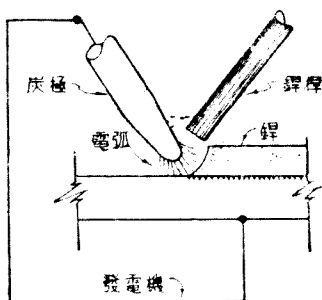
6—6. 翼緣之銲接 結構所用之銲接，全係所謂熔銲 (fusion welding)。即將銲料熔化而接合，不必加以壓力或錘擊。熔銲之熱力，得自電弧者，稱為電銲。其得自氧炔炬(oxyacetylene)者，稱為氣銲(gas welding)。電銲之電極，可用銲桿或炭桿，其方法各如圖 6—17 所示。



(a) 氣銲(氧炔炬法)



(b) 電銲(銲桿為電極)



(c) 電銲(炭桿為電極)

圖 6—17. 銲接之方法

銲接可分為條銲 (fillet welds) 及平銲 (butt weld) 二類。平銲又有單 V 形及雙 V 形之別。其截面及各部名稱各如圖 6—18(a), (b) 及 (c) 所示。條銲之在銲接部份之一端者，稱為端銲。其在銲接部分之兩邊者，稱為邊銲。如圖 6—19 (a)。

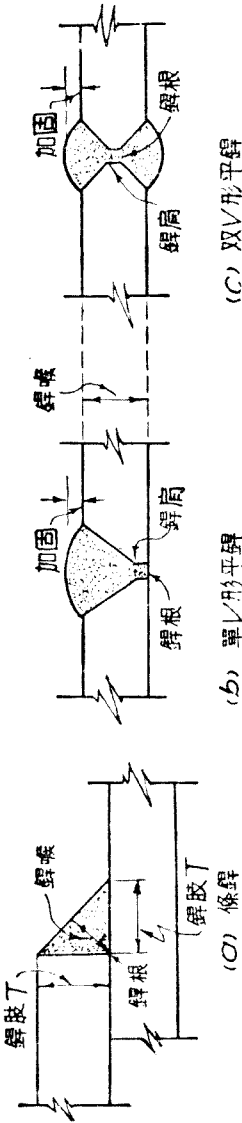


圖 6-18. 銲接之型式

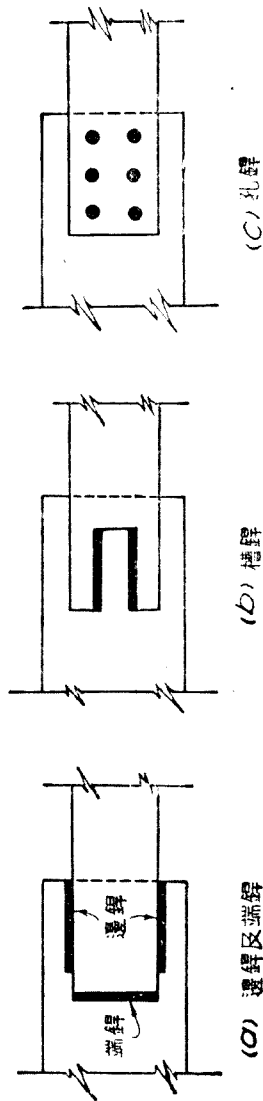


圖 6-19. 銲接之名稱

若將銲接部分截成一槽而加以邊銲，稱爲槽銲 (slot weld) 如圖 6—19 (b)。若將銲接部份鑽若干孔眼而加以銲接，稱爲孔銲 (plug weld)，如圖 6—19 (c)。條銲時又可使銲條連續或分段，各成爲連銲與節銲。

欲知銲接之計算方法，須先知其在荷重下之破裂狀態。由多數實驗之結果，得知條銲(無論邊銲或端銲)之兩銲肢，如銲接時得充分熔化，其破裂皆由於銲喉之切應力，如圖 6—20 (a)。於平銲之有加固者，其破裂常在所銲接之部份，如圖 6—20 (b)。若平銲而無加固，則其破裂當在銲接之處，如圖 6—20 (c)。但銲接時如用極強之電極及銲料，則平銲雖無加固，其強度亦常大於平常結構鋼之強度，故破裂將仍在銲接之部份。由是可知，無論銲接之型式如何，其危險之截面，常在銲喉。故銲接應力之計算，均以銲喉之截面爲準。我國刻下採用

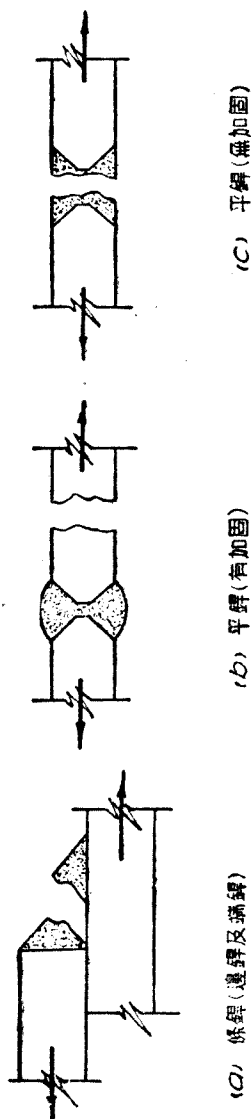


圖 6—20. 銲接之破裂狀態

銲接較少，故對於銲接之准許應力，尚無規定，美國銲接會 (American Welding Society) 關於此項准許應力規定如下：

銲喉之切應力	7.95 公斤/平方公厘
銲喉之拉應力	9.14 公斤/平方公厘
銲喉之壓應力	12.66 公斤/平方公厘

邊銲之強度，當然依照切應力計算。至於端銲應力之通常計算法，如圖 6—21。設端銲之長度為 1 公厘，則其銲喉截面之正

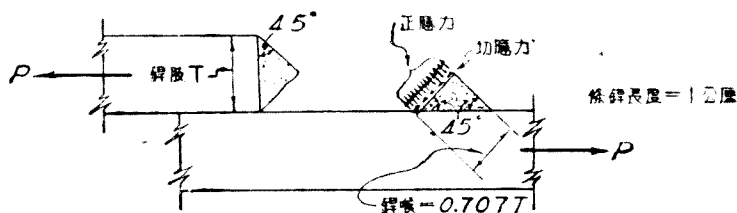


圖 6—21. 端銲之應力

應力或切應力乘以該截面之面積 $0.707 T$ ，均當等於荷重 P ，但依上述之規定，准許切應力較准許拉或壓應力為少，故端銲之強度，亦應以切應力計算。因此，邊銲及端銲准許強度如下：

$$F = 7.95 \times 0.707 T = 5.62 T \text{ 公斤/公厘}$$

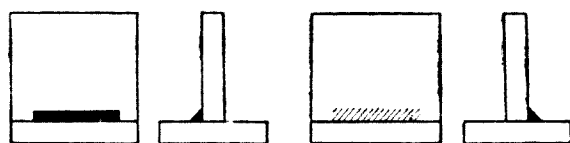
條銲銲肢之寬度 T 以 10 公厘 (英制 3/8 吋) 者最為通常，但至狹不能小於 6 公厘。如需再寬，可用 13 公厘，16 公厘，或 19 公厘 (英制各為 1/2 吋，5/8 吋，或 3/4 吋)。但與 10 公厘者相比，則銲肢寬度愈大者，其強度之增切率愈較其所需銲料之增加率為小。故銲肢如寬於 10 公厘，於銲料甚不經濟。且如用手工電銲法，其電極之直徑常約為 5 公厘 (英制

3/16 吋), 則鈹肢之寬於 10 公厘者, 必須走鈹二次以上。故鈹肢如寬於 10 公厘, 於人工亦不經濟。因此, 無絕對之需要, 鈹肢不宜寬於 10 公厘。

條鈹之長度常規定不能小於其鈹肢之 4 倍。平鈹之最小長度, 常規定為其鈹喉之 4 倍。

平鈹之強度, 當依其實際所受之應力計算。

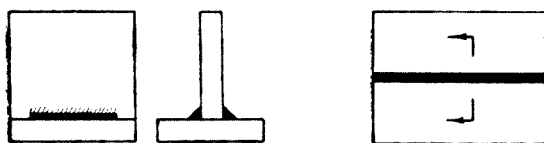
繪圖時條鈹及平鈹之符號^①, 如圖 6—22 所示。



近面 -

遠面

(a) 條鈹



兩面

應示鈹接之截面
及鈹接之方法

(a) 條鈹

(b) 平鈹

圖 6—22. 鈹接之符號

除鈹梁各部之拼接, 當用平鈹外(見 6—8 節), 其翼緣各部

① 此項符號係美國鈹接會於 1931 年所採用者, 此後 1934 及 1937 年均有改變, 最後 1937 年所採用之符號, 雖簡便適用, 但初學頗不易明瞭。且圖 6—22 之符號與歐洲各國所採用者亦極相似, 故本書仍沿用之, 俟將來我國有規定之符號時再行更改。

間之接合當然一律用條銲。且除蓋板之兩端常加用端銲外，其餘均用邊銲。翼緣之條銲，可用連銲或節銲。於連銲，銲條之長度與所銲接部份之長度相等，故計算時祇須計算其平均切力 \bar{v} 所需之最大銲肢寬度 T ，即

$$(6-27) \quad T = \frac{\bar{v}}{F} = \frac{\bar{v}}{5.62}$$

於節銲，先定銲接之肢寬及長度，再依其准許強度計算其心距，其方法與 6-5 節所述計算鉚心距之方法完全相同。若 \bar{v} 之值係一恆數，或改變極小，則連銲尚可採用，否則常以節銲為經濟適宜。

如圖 6-23 所示， a 為節銲之長， b 為其間之淨距，則其心距 p 為 $a+b$ ，而每節銲之准許強度為 $5.62 Ta$ ，依方程 (6-18)，則其心距 p 為

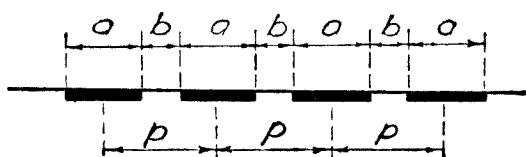


圖 6-23. 節銲之計算

$$(6-28) \quad p = a + b = \frac{5.62 Ta}{\bar{v}}$$

$$(6-29) \quad \frac{b}{a} = \frac{5.62 T}{\bar{v}} - 1$$

既知 \bar{v} 及 T 後，用方程(6-29)，即可計算節銲之淨距 b 與其長度 a 之比，若 $b=0$ ，即變為連銲，而方程(6-29)亦即變為(6-27)。如用兩條銲接，則上列二方程中之 5.62，均以 2 乘之。

鋸接鋸梁既不用翼緣角，且無鉚孔，故計算平切力時，其截面慣性矩 I 之值，不難以普通之準確方法計算之。如計算 I ， \bar{v} ，及 p ，時用方程 (6-9)，(6-19) 及 (6-20) 之近似法，則其中之 $\frac{1}{8} A_w$ 均應改為 $\frac{1}{6} A_w$ ，因須用腹鋸之全截面也。諸翼緣鋸間之鋸接，自亦不必使之與翼緣及腹鋸間之鋸接相同。

前已述及鋸接鋸梁所有翼緣鋸寬度，必依次逐一加大，或依次逐一縮小，庶任何二鋸之間，可用邊鋸，如圖 6-24 (a)。因鋸接時常以電極及鋸桿向下為方便，故為鋸接時之方便起見，其上翼緣諸鋸之寬度常向上逐一縮小，而其下翼緣諸鋸之寬度，則

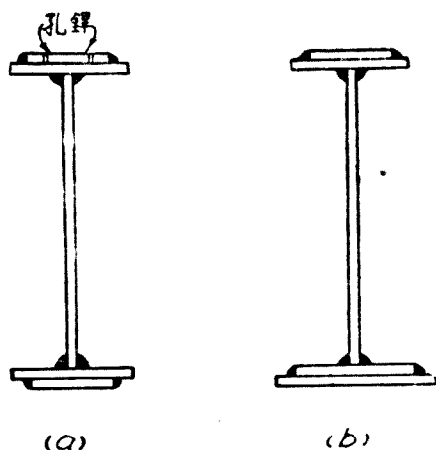


圖 6-24. 鋸梁翼緣之鋸接

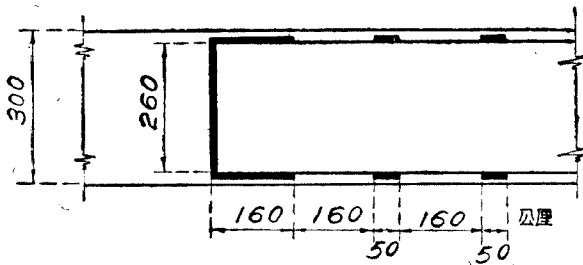
向下逐一加大，如圖 6-24 (b)。若翼緣鋸之寬度大於其厚度 20 或 30 倍時，則其與其向外鄰鋸之接合，除用邊鋸及端鋸外，尚須加用若干孔鋸，如圖 6-24 (a)。每截斷翼緣鋸之兩端，

應一律加用端銲。

例題 6-5. 一銲接鉸梁之最大截面如下：

- 1 腹 鉸 1000×10 公厘
- 2 翼緣鉸 300×16 公厘
- 2 蓋 鉸 260×16 公厘

其跨度為 8 公尺，兩端支承，2 蓋鉸之實際長度為 4 公尺（其兩端之截去長度相等）。若此鉸梁跨度之中點受有集中荷重 64 公噸。鉸梁本身之重量為 0.22 公噸 故實際可以略去。試計算其翼緣及蓋鉸之銲接。



例題 6-5.

解答 於其半跨長度中，其剪力 $V=32$ 公噸，係一恆數，故其兩端 2 公尺中及其中部 4 公尺中之銲接，均係一律而無改變。先計算各截面之 I 及 Q 如下：

I 之計算：

$$\begin{aligned}
 1 \text{ 腹 鉸} & \frac{(1000)^3 \times 10}{12} & = 833 \times 10^6 (\text{公厘})^4 \\
 2 \text{ 翼緣鉸} & 2 \times 300 \times 16 \times (508)^2 & = 2,477 \times 10^6 (\text{公厘})^4 \\
 & & \text{共 } 3,310 \times 10^6 (\text{公厘})^4 \\
 2 \text{ 蓋 鉸} & 2 \times 260 \times 16 \times (524)^2 & = 2,285 \times 10^6 (\text{公厘})^4 \\
 & & \text{共 } 5,595 \times 10^6 (\text{公厘})^4
 \end{aligned}$$

Q 之計算：

$$\begin{aligned}
 2 \text{ 翼緣鉸} & 300 \times 16 \times 508 & = 2.438 \times 10^6 (\text{公厘})^3 \\
 2 \text{ 蓋 鉸} & 260 \times 16 \times 524 & = 2.180 \times 10^6 (\text{公厘})^3 \\
 & & \text{共 } 4.618 \times 10^6 (\text{公厘})^3
 \end{aligned}$$

兩端 2 公尺中翼緣之銲接：

$$\bar{v} = \frac{32 \times 1,000 \times 2.438 \times 10^6}{3,310 \times 10^6} = 23.5 \text{ 公斤/公厘}$$

若用兩條連銲，則用方程(6-27)，得銲肢寬度 T 如下：

$$T = \frac{23.5}{2 \times 5.62} = 2.1 \text{ 公厘}$$

2.1 公厘之銲肢太小，如用 10 公厘銲肢之連銲，則甚不經濟，故以下均採用兩條 10 公厘銲肢之節銲，用方程(6-29)，則

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \times 5.62 \times 10}{23.5} - 1 = 3.8$$

可採用 $a = 50$ 公厘之節銲，其淨距為 $50 \times 3.8 = 190$ 公厘，其心距為 240 公厘。

中部 4 公尺中翼緣之銲接：

$$\bar{v} = \frac{32 \times 1,000 \times 4.618 \times 10^6}{5,595 \times 10^7} = 26.5 \text{ 公斤/公厘}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \times 5.62 \times 10}{26.5} - 1 = 3.28$$

可採用 $a = 50$ 公厘， $b = 50 \times 3.28 \approx 160$ 公厘，其心距為 210 公厘。

蓋鈹之銲接：

$$\bar{v} = \frac{32 \times 1,000 \times 2.180 \times 10^6}{5,595 \times 10^6} = 12.5 \text{ 公斤/公厘}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2 \times 5.62 \times 10}{12.5} - 1 = 8.0$$

可採用 $a = 50$ 公厘，則 $b = 50 \times 8 = 400$ 公厘，但太長，實際上 b 之值以不超過 160 公厘為宜。故心距為 210 公厘。

於截短蓋鈹之兩端，尚需另加端銲及邊銲，以發揮其強度。計算之法如下：於鄰近蓋鈹理論端點以外之處，其應力為 12.5，而其截面係數為 $3,310 \times 10^6 \div 516$ 。於鄰近蓋鈹理論端點以內之處，其截面係數為 $5,595 \times 10^6 \div 532$ ，故該處之應力為

$$12.5 \times \frac{3,310 \times 10^6}{516} \times \frac{532}{5,595 \times 10^6} = 7.7 \text{ 公斤/平方公厘}$$

故蓋板理論端點所受之總應力爲

$$7.7 \times 260 \times 16 = 32,000 \text{ 公斤}$$

欲使蓋板於其理論端點能發揮此力，必於其以外加以鉗接，其端鉗之強度爲

$$260 \times 5.62 \times 10 = 14,600 \text{ 公斤}$$

有 32,000 減 14,600 得 17,400，必用二條邊鉗。故邊鉗之長度爲

$$\frac{17,400}{2 \times 5.62 \times 10} = 155 \text{ 公厘 用 } 160 \text{ 公厘。}$$

故蓋板兩端之鉗接如附圖所示。

習題 6-9. 一鉗接板梁之最大截面如下：

1 腹板 1200×11 公厘

2 翼緣板 300×22 公厘

2 蓋板 260×20 公厘

若其跨長爲 10 公尺，兩端支承受，有均佈荷重，共計 15 公噸/公尺。求下列諸項：

(a) 2 蓋板之理論及實際長度。

(b) 計劃翼緣兩端之節鉗，其肢寬，長度，淨距，及心距，各應如何？

(c) 設均用節鉗，肢寬爲 10 公厘，長度爲 50 公厘，求跨度一半中翼緣及蓋板節鉗心距之改變圖，並決定其實際心距。

(d) 求蓋板兩端之端鉗及邊鉗長度。

6-7. **腹板之加勁桿** 腹板之加勁桿，可別爲二類，即承力加勁桿及中間加勁桿。承力加勁桿係用以傳遞下翼緣所受之反力於腹板，或上翼緣所受之集中荷重於腹板或其下之支座。中間加勁桿則用以加勁腹板，使其不致因對角壓力而發生屈潰或波皺。並保護腹板，免其於製造，運輸，及建造時受任何損傷。

於鉗接板梁，腹板之加勁桿常係以成對之鋼角，豎立而鉗於

腹板之兩面。於銲接鋼梁，常用豎立之鋼板、條銲於腹板之兩面，其寬度與腹板成垂直。於鉚接鋼梁如用直加勁桿，則其與腹板之間必加一填板 (filler)，其厚度與翼緣角者相同，如圖 6—

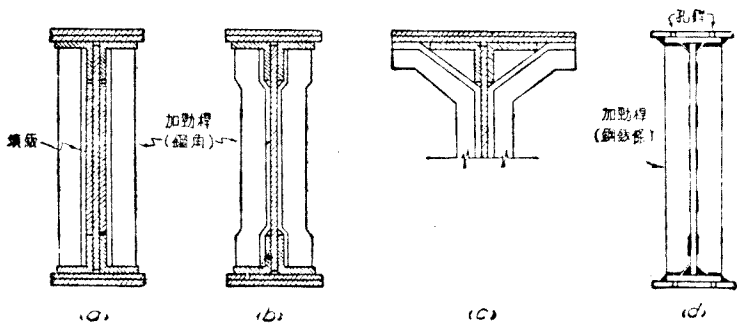


圖 6—25. 腹板之加勁桿

25 (a)。若不用填板，則加勁桿之兩端，必繞翼緣角之豎肢彎曲，如圖 6—25 (b)。此法於歐洲用之較多，美國及我國鮮用之。圖 6—25 (c) (參閱影片 V 中上層之鋼梁) 示兼用腹板加勁桿以支撐較寬之蓋板，極不經濟，應避免不用。圖 6—25 (d) 示銲接鋼梁之加勁桿。

承力加勁桿，當然不能彎曲。其兩端常須刨平，而與上下翼緣角之伸出肢相緊接，並需有充分之承力面積 (bearing area)。但中間加勁桿不需如此。故承力加勁桿實係一柱，其每對間所包含之填板及腹板，亦可視為係柱截面之一部。惟其荷重自受重端最大之量，逐漸減少至他端而成爲零。故用平常之柱公式時，其無支撐之長度，應爲加勁桿長度之半，而其旋動半徑 ρ 則應用其對於與腹板平行之軸者。因其於與腹板平面

平行之方向，不能有曲潰也。惟我國規定，不論其纖比如何，加勁桿之准許壓應力，一律爲 12.5 公斤/平方公厘[301]。

中間加勁桿之截面，常無計算之法。於鉚接鈹梁，若翼緣角之伸出肢爲 150 公厘，常用 $130 \times 75 \times 10$ 公厘之鋼角。若翼緣角之伸出肢爲 200 公厘，常用 $150 \times 90 \times 10$ 公厘之鋼角。其短肢鉚於腹鈹，而長肢伸出（我國規定中間加勁角伸出肢之寬度不得超過其厚度之 16 倍，並不得小於 50 公厘加鈹梁深度之 $1/30$ [420]）。於銲接鈹梁，可用寬厚與上列鋼角伸出肢相同之鋼鈹條。於房屋之鈹梁，其加勁桿之厚度或可減至 8 公厘。

中間加勁桿之淨距，以前常係聚訟紛紛之問題，惟多數工程師均贊同其間之淨距不能超過上下翼緣間之淨距（即圖 6—5 中之 h ），或 1.8 公尺（英制 6 呎）[420]。於此二限度之內，中間加勁桿之距離，究應如何計算，則各是其是。所建議之公式亦殊多。蓋中間加勁桿之淨距，實係薄鈹之屈潰問題，但過去若干工程師均以柱之理論研究之，雖頗近似，但殊嫌不確切。故所得之公式，亦祇合乎近似而安全之條件而已。最近美國之丁（S. Timoshenko）氏應用柏（G. H. Bryan）^① 氏之薄鈹穩定之理論得公式如下：^②

① 見英國倫敦算學會刊 22 卷(1891 年) 54 頁。

② 見所著之「關於結構之彈性穩定問題」載美國土木工程師會年刊 94 卷(1930 年) 1014 至 1017 頁。

$$v_{cr} = \frac{kE\pi^2 t^2}{12(h')^2 \left[1 - \left(\frac{1}{m}\right)^2\right]} \quad (6-30)$$

其中 h' = 中間加勁桿之淨距， v_{cr} = 臨界切應力，在此應力下腹鉸之屈潰開始。 E = 鋼料之彈性係數， $1/m$ = 鋼料之蒲 (Poisson) 氏比，其值約為 0.3， k = 一係數，其值與 h/h' 之比有關係，但其關係頗為複雜 (h = 上下翼緣間之淨距)。方程 (6-30) 之應用，殊覺不便，因其中 k 之值，不易計算。後又經美國之浩 (O. E. Hovey) ① 氏哈 (H. D. Hussey) ② 氏及美國鐵路工程協會等之改良，得英制之方程如下：

$$h' = 255,000t \sqrt[3]{\frac{t}{hv^2}} \quad (6-31)$$

其中 h/t ，及 h 均以英吋計， v 為切應力，以磅/平方英寸計。美國鐵路工程協會 1935 年所公佈之鋼橋規範即採用此方程。若將方程 (6-31) 改為公制，得

$$h' = 2,000t \sqrt[3]{\frac{t}{hv^2}} \quad (6-32)$$

其中 h/t 及 h 均以公厘計， v 以公斤/平方公厘計。我國交通部最近公佈之鋼橋規範 [402] 即採用此方程。

於下承鉸梁橋，其諸節點處，均應有鋼鉸之加勁支撐，以支撐其上翼緣 [421] (見影片 VI)。於上承鉸梁橋隔相當之距離 (此項距離不得長於 5 公尺 [427])，應有豎支架 (cross frame)

① 見工程新聞紀錄 1931 年 3 月 12 日刊 446 頁。

② 見工程新聞紀錄 1931 年 4 月 9 日刊 622 頁。

(見影片 VI)。二者均須與中間加勁桿相接合，故下承鈹梁橋之諸節點處，及上承鈹梁橋之有豎支架處，均需有一中間加勁桿。於房屋中，橫梁之支於鈹梁而其反力不甚大者，亦常與鈹梁之中間加勁桿相接合，故有橫梁之處，亦需有一中間加勁桿。由此可知，中間加勁桿之距離，常為實際情形所限制。任何理論精確之方程，亦祇能規定其距離之最大限度而已。

承力加勁桿之鉚接或銲接，應足以支持所有荷重而傳達於腹鈹。中間加勁桿之鉚接或銲接，於理論尚無法計算，常以判斷及經驗決定之。為方便起見，常使中間加勁桿鉚釘或節銲之位置與兩端承力加勁桿者同在一平線，並可每隔一鉚釘或一節銲省去一鉚釘或一節銲，但所餘鉚釘或節銲之心距，不能太長。

例題 6-6. 於例題 6-4 之鈹梁，中間加勁桿是否需要，如需要，其理論淨距應若何？

解答：

腹鈹之 $h/t = (1200 + 10) - 2 \times 1(0) / 8 = 1010 / 8 = 126 > 80$ ，故需要中間加勁桿，其理論之淨距如下：

$$\text{端切應力} = \frac{7.5}{1,200 \times 8} \times \frac{15}{2} = 5.82 \text{ 公斤/平方公厘}$$

$$h' = 2000 \times 8 \sqrt{\frac{8}{1,010 \times (5.82)^2}} = \frac{3,190}{\sqrt{(5.82)^2}} = 948 \text{ 公厘}$$

$$5.82 \times \frac{7.5 - 0.98}{7.5} = 5.07$$

$$h' = \frac{3,190}{\sqrt{(5.07)^2}} = 1080 \text{ 公厘} > 1010 \text{ 公厘。}$$

故除兩端加勁桿之理論淨距，應均為 984 公厘外，其餘加勁桿之淨距，應均用上下翼緣之淨距 1010 公厘。

習題 6-10. 設習題 6-3 中鈹梁之跨長為 18 公尺，而其均佈總荷重

爲 15 公噸/公尺。中開加勁桿是否需要,如需要,其理論之淨距離若何?

6—8. 鈹梁各部之拼接 如非必要時,鈹梁各部之拼接,應避免之。但因鋼料能有之長度,水陸運輸之不便等限制,於極長之鈹梁,各部之拼接,或常不可避免。

鈹梁之拼接,可分爲廠中拼接及工地拼接二種。於廠中拼接,在同一截面處,不宜有任何二部同被拼接(我國規定亦如此[416])。於工地拼接,所有各部之拼接,應在相當距離之內,圖 6—26 示工地拼接之標準形式。建造時,先支建鈹梁之一半,其他一半可由水平位置插入拼接鈹之中。

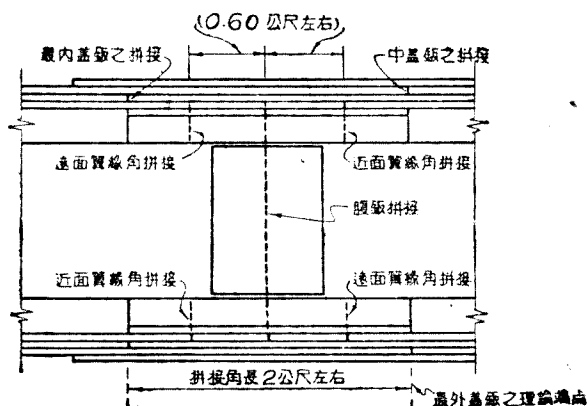


圖 C—26. 鈹梁之工地拼接

所有拼接,應以最直接而有效之方法,傳遞被拼接部份之應力。拼接應置於翼緣面積有剩餘之截面,此項截面,當然在每蓋板理論端點之內。

若干規範規定拼接與被拼接部份應強度相等,甚至有規定拼接之面積應略大於(自百分之十至二十五)被拼接部份者。

於鉚接鈹梁之受壓力部份如需拼接，不可使其兩端相接觸，而藉以傳遞應力。故其兩端應離開約 5 公厘之譜，而使拼接鉚釘傳遞所有之應力。

鉚接鈹梁各部之拼接，自以採用圖 6—18 (b) 或 (c) 所示之平鉚為適宜而且經濟。非必要時，其加固不可除去。此種平鉚拼接之計算，自無討論之必要。如必加用拼接鈹及條鉚時，其鉚接之計算，亦與拼接鉚釘者極其相似，故下述鈹梁各部之拼接法，概以鉚釘拼接為限，茲分三部述之如下：

(1) 腹鈹之鉚釘拼接 若干規範規定腹鈹拼接之抗彎及抗切強度，必須與腹鈹本身者相等[416] (我國亦規定如此[417])。但此項規定，殊過於嚴格。因拼接之位置極少在最大切力之截面也。比較合理而又經濟之辦法，即拼接之抗彎強度與腹鈹者相等，而同時又能抵抗其所在截面之切力。

腹鈹鉚釘拼接之三種最通用型式，如圖 6—27 所示。其中 (a) 為最簡單而最普通之型式。其主要強度在抵抗切力，故常稱為切力拼接。其兩邊鉚釘之行數，不能小於二，亦不宜多於三。(b) 式常稱為彎矩拼接，其中 M 鈹之主要功用，在抵抗彎矩，而 I 鈹之主要功用，在抵抗切力。此種拼接於較深之鈹梁多用之，於較淺之鈹梁，自不相宜。若 (a) 式拼接兩邊用二行或三行鉚釘，尚不足時，其餘之鉚釘，可置於翼緣角並加用側鈹 F ，成為 (c) 式。常稱為合理拼接。若拼接處有剩餘面積，或有一蓋鈹可以伸長以作此用，則 F 鈹可以略去。(a) 及 (b)

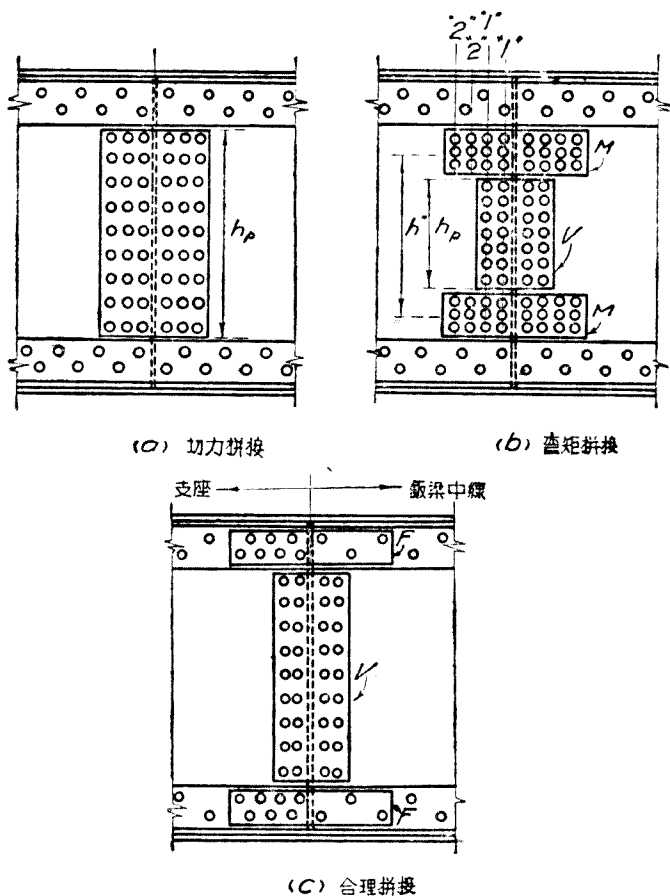


圖 6—27. 腹板鉚釘拼接之通用型式

式拼接宜置於有中間加勁桿之處，俾加勁桿可作為加勁拼接之用。如此則拼接板之厚度，宜與翼緣角者相等，庶其與加勁桿之間不必再用填板。

腹板拼接之計算，可分為二步驟。其一，計算其兩面拼接板之大小及厚度。其二，計算鉚釘之數目及其佈置。茲將(a)。

(b) 及 (c) 三式腹板拼接之計算法分述於下：

(a) 切力拼接之計算法 設 t' 爲一拼接板之厚度， h_p 爲其高度。若二拼接板之抗切強度與腹板相等，則二者截面之面積亦必相等，故

$$(6-33) \quad t' = \frac{t}{2} \times \frac{d_w}{h_p}$$

若二拼接之抗彎強度與腹板相等，則二者截面之慣性矩(假定腹板中軸與腹板之中線相同)亦必相等，故

$$(6-34) \quad t' = \frac{t}{2} \left(\frac{d_w}{h_p} \right)^3$$

因 d_w 不能小於 h_p ，故用方程 (6-34) 所得之 t' ，必常大於方程 (6-33) 所得者。因此，計算祇須用方程 (6-34)。

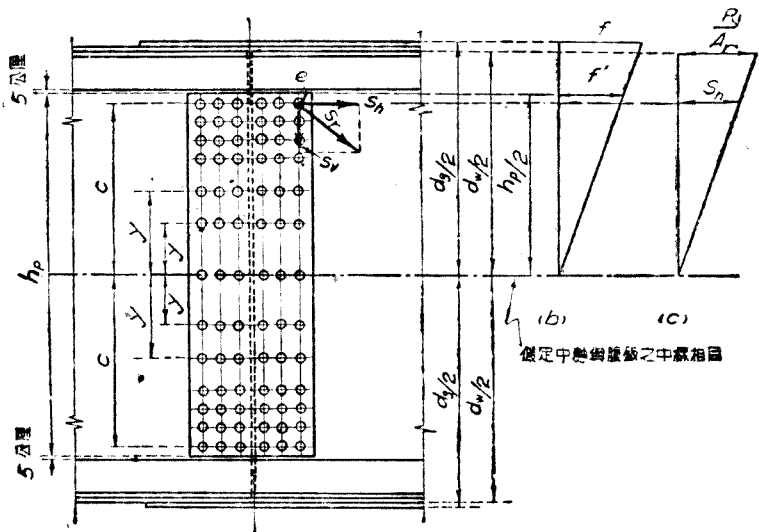


圖 6-28. 腹板切力拼接之計算

由圖 6-28 (b)可知

$$\frac{f}{a} = \frac{2}{h_p} \quad (6-35)$$

其中 f 爲准許拉應力，若已知腹鉸之抗矩 M_w ，則方程 (6-34) t' 值亦可用下列方程計算之：

$$M_w = \frac{3}{4} \times \frac{2t'h_p^3}{12} \times \frac{fh_p}{d_g} \times \frac{2}{h_p}$$

或
$$t' = \frac{4M_w d_g}{fh_p^3} \quad (6-36)$$

上列方程中之 $3/4$ ，係用以得拼接鉸淨面積之惰性矩，其中 M_w 之值，可用下列方程計算之：

$$M_w = \frac{ftd_w^3}{8d_g} \quad (6-37)$$

拼接鉸之深度 h_p 之值，常等於上下翼緣間之淨距 h 減去 10 公厘。其寬度則視所需鉸釘之行數而定。

鉸釘之佈置，應各行相同，並應與腹鉸之中線成對稱式。每行中之鉸心距，可一律不變或加以改變，計算時可先定每行之鉸釘數及其心距，而後求其所需之行數。設

N = 拼接線一邊所需之鉸釘行數，

n = 每行中之鉸釘數，

y = 任何鉸釘與腹鉸中線之豎距離，

c = 最遠鉸釘與腹鉸中線之豎距離，

s_a = 最遠鉸釘在彎矩下之准許單位平應力，

a_v = 任何鉸釘在切力下之豎應力，

ε_r = 最遠鉚釘在彎矩及切力下之准許單位應力

A_r = 一鉚釘之截面面積

$R = A_r s_r$ = 鉚釘之值

$$L_m = \frac{M_w}{V}$$

p = 每行中鉚釘心距不變時之鉚心距

一行鉚釘在彎矩下之 s_h 為

$$(6-38) \quad s_h = \frac{M_w c}{A_r \Sigma y^2}$$

方程 (6-38) 與計算梁彎應力之方程 (6-4) 極相似, 其中之 I 即 $A_r \Sigma y^2$, 故 N 行心距相同鉚釘在彎矩下之 s_h 約為^①

$$(6-39) \quad s_h = \frac{M_w c}{N A_r \Sigma y^2}$$

由圖 6-28, 則 s_h 不得超過下列之值,

$$(6-40) \quad s_h = \frac{R}{A_r} \times \frac{2c}{d_w}$$

代入方程 (6-39) 中, 則

$$(6-41) \quad N = \frac{M_w d_w}{2 R \Sigma y^2}$$

假定切力 V 係由所有鉚釘 Nn 均勻承受, 則

$$(6-42) \quad s_v = \frac{V}{N n A_r}$$

但 S_r 亦不得超過 $\frac{R}{A_r}$ 之值, 故

① 於理應用極慣性矩 $I_x + I_y$, 但 I_y 之值較小, 故可略去, 得 $I_x = N A_r \Sigma y^2$, 且如此所得 s_h 之值較用極慣性矩所得者稍大。

$$R^2 = A_r^2 s_r^2 = A_r^2 (s_h^2 + s_v^2) = \frac{V^2}{N^2 n^2} \left[n^2 L_m^2 \left(\frac{c}{\Sigma y^2} \right)^2 + 1 \right]$$

$$\text{或} \quad N = \frac{V}{nR} \sqrt{n^2 L_m^2 \left(\frac{c}{\Sigma y^2} \right)^2 + 1} \quad (6-43)$$

計算時於方程 (6-41) 及 (6-43) 所得 N 之值中採用其較大者。

若每行中鈹釘之心距 p 係一律不變，則可得 ①

$$\Sigma y^2 = \frac{p^2 n(n^2 - 1)}{12}$$

$$c = \frac{p(n+1)}{2}$$

$$\text{故} \quad \frac{c}{\Sigma y^2} = \frac{6}{pn(n+1)}$$

代入方程 (6-41) 及 (6-43) 中，即得，

$$N = \frac{6M_w d_w}{Rp^2 n(n^2 - 1)} \quad (6-44)$$

$$N = \frac{V}{nR} \sqrt{\left(\frac{6}{n+1} \times \frac{L_m}{p} \right)^2 + 1} \quad (6-45)$$

若計算所得之 N 小於 2，至少應用 2 行。亦可將每行之鈹釘數減少，至 N 之值幾等於 2 為止。若計算所得之 N 大於 3，則應將每行之鈹釘數增加，如不能增加，則以用 (b) 或 (c) 式之拼接為宜。

為約略估計所需之鈹釘數 Nn 起見，可將方程 (6-44) 中之 $(n^2 - 1)$ 改為

① 見瓦 (Waddell) 氏所著之橋梁工程 (Bridge Engineering) 第一卷 299

n^2 ，並使 $n_p = h_p$ ，則該方程變為

$$(6-46) \quad Nn = \frac{6M_w d_w}{R h_p^2}$$

又將方程(6-45)之 $(n+1)p$ 改為 h_p ，則該方程變為

$$(6-47) \quad Nn = \frac{V}{R} \sqrt{\left(\frac{6L_m}{h_p}\right)^2 + 1}$$

取上列二方程所得 Nn 值之較大者，均勻佈置，即得鉚釘之大約數目及佈置，然後用方程(6-44)及(6-45)以校核其 N 之值。故方程(6-46)及(6-47)用之於初步設計，最為方便。

(b) 彎矩拼接之計算法 腹板彎矩拼接之計算方法有二：

第一法，即將 M 及 V 板並其中之鉚釘，視作一體，以抵抗彎矩及切力。第二法，即以 V 板及其中之鉚釘祇抵抗切力，而 M 板及其中之鉚釘祇抵抗彎矩。第一法較為合理，但第二法之應用較為簡便。

如用第一法，則 V 及 M 板厚度之計算，與 (a) 式者相同。其中鉚釘之數目及佈置，必先決定，而後用下列二方程計算其抗矩：

$$(6-48) \quad M_w = \frac{2R(N\Sigma y^2)}{d_w}$$

$$(6-49) \quad M_w = \frac{(N\Sigma y^2)}{c} \sqrt{R^2 - \left(\frac{V}{Nn}\right)^2}$$

上列二方程各由方程(6-41)及(6-43)得來。其中 $(N\Sigma y^2)$ 係包含拼接線每邊所有鉚釘計算。用上列二方程所算得 M_w 之值，均不能小於用方程(6-37)所算得腹板之抗矩。或先決

定“1”行之鉚釘〔圖 6—27 (b)〕，再求所需“2”行鉚釘之行數。其方法與下述 (c) 式之計算法相似。

如用第二法， V 鈹之厚度可用方程 (6—33) 計算，腹鈹兩面二 M 鈹之淨截面面積 A_p 可用下列方程計算：

$$A_p = \frac{td_w^3}{8h''^2} \quad (6-50)$$

其中 h'' 為上下二 M 鈹之中心距，如圖 6—27 (b) 所示。

V 鈹中拼接線每邊之鉚釘行數為

$$Nn = \frac{V}{R} \quad (6-51)$$

M 鈹中拼接線每邊之鉚釘行數，可用方程 (6—41) 計算。其中 Σy^2 應包含上下二 M 鈹中每行所有之鉚釘，或用下列方程亦可：

$$N = \frac{M_w d_w}{n'' R h''^2} \quad (6-52)$$

其中 $n'' =$ M 鈹中每行之鉚釘數。

(c) 合理拼接之計算法 腹鈹合理拼接之計算法 亦有二：第一法即以 V 鈹及其中之鉚釘抵抗切力之全部，並抵抗其所能抵抗之彎矩，其剩餘之彎矩，則由二 F 鈹及其中之鉚釘抵抗之。第二法即以 V 鈹及其中之鉚釘抵抗切力之全部，並抵抗其所遮蓋腹鈹部份所能抵抗之彎矩。其剩餘之彎矩則由二 F 鈹及其中之鉚釘抵抗之。

於第一法設 V 鈹中鉚釘所能抵抗之彎矩為 VL'_m ，其 L'_m 之值可將方程 (6—43) 加以改變而計算之，即

$$(6-53) \quad L'_m = \frac{\sum y^2}{cn} \sqrt{\left(\frac{NnR}{V}\right)^2 - 1}$$

其中 N 爲 2 或 3，故 F 鈹所抵抗之剩餘彎矩 M'_w

$$(6-54) \quad M'_w = (L_m - L'_m) V$$

其中 $L_m = \frac{M_w}{V}$ 。但根據方程(6-41)，則 M'_w 之值爲

$$(6-55) \quad M'_w = M_w - \frac{2NR\sum y^2}{d_w}$$

計算時，應採用方程(6-54)及(6-55)中 M'_w 值之較大者。

若 V 鈹中每行中鉚釘之心距 p 係一律不變，則方程(6-53)

及(6-55)各變爲

$$(6-56) \quad L'_m = \frac{p(n+1)}{6} \sqrt{\left(\frac{NnR}{V}\right)^2 - 1}$$

$$(6-57) \quad M'_w = M_w - \frac{NRp^2n(n^2-1)}{6d}$$

若用第二法，則 V 鈹所抵抗之彎矩 M''_w 可以 h_p 代替 d_w 於方程(6-37)中，而計算之，即

$$(6-58) \quad M''_w = \frac{f h_p^3}{8 d_g}$$

$$\text{並得}(6-59) \quad L''_m = \frac{M''_w}{V}$$

故 F 鈹所抵抗之剩餘彎矩爲

$$(6-60) \quad M'_w = M_w - M''_w = \frac{ft(d_w^3 - h_p^3)}{8 d_g}$$

於第一法及第二法中， V 鈹之厚度可用方程(6-33)及(6-36)計算，而採用其較大之值。但方程(6-36)之 M_w 應

改爲由方程(6—58)所算得之 M''_w 。翼緣兩面二 F 鋁之淨截面面積 A'_p 爲

$$A'_p = \frac{M''_w d_p}{f d_w^2} \quad (6-61)$$

前已述及若拼接截面有多餘之翼緣淨面積與 A'_p 相等,則 F 鋁可以略去不用。或將一或二蓋鋁伸長若干而蓋過拼接截面以代替 F 鋁亦可。

於第一法, V 鋁中之鉚釘行數 N 爲 2 或 3, 係預先估定。於第二法, V 鋁之鉚釘行數 N 可用於方程(6—41)及(6—43)計算,而取其較大之值。惟該二方程中之 M_w 及 L_m 各應改爲 M''_w 及 L''_m 。

F 鋁中拼接線每邊之鉚釘數 n' 可用下列方程計算之。

$$n' = \frac{M''_w}{R d_w} \quad (6-62)$$

於方程(6—61)及(6—62)中, M''_w 必須與所採用之方法相符。於第一法,則 M''_w 爲方程(6—54)及(6—55)所得之較大值。於第二法,則 M''_w 之值以方程(6—60)計算。

F 鋁中之 n' 鉚釘祇須加於拼接線之近於彎矩減少之一邊。圖 6—29 (b) 示腹鋁無拼接處之截面“1”—“1”, 圖 6—29 (c) 示腹鋁拼接處之截面“2”—“2”。二圖中之箭頭, 皆表示各部應力之指向。由此二圖可知翼緣平鉚釘之在彎矩減少方面者之應力, 因有二 F 鋁而增加。故該邊 F 鋁中之鉚釘數必增加 n' 。但翼緣平鉚釘之在彎矩增加方面者之應力, 係四重切

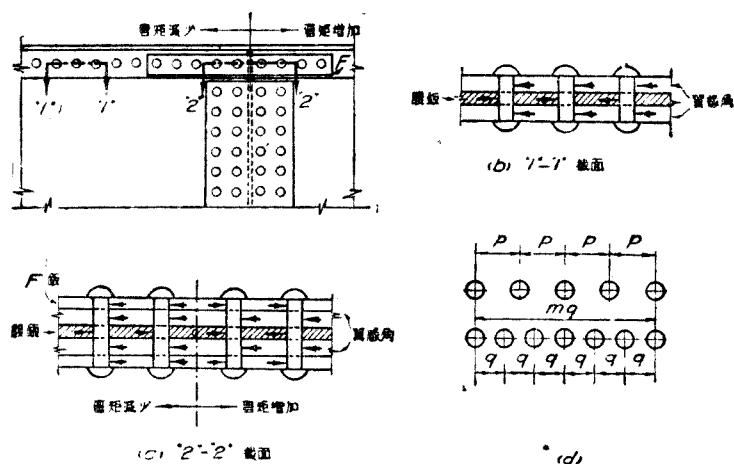


圖 6—29. 腹板合理拼接之計算

力，故 F 腹板反有使其應力減小之趨勢，因此該邊之鉚釘數不必增加。若拼接線在彎矩為恆數之處，則其二邊之鉚釘數均應增加。

設 p = 腹板拼接處翼緣平鉚釘之原來算得心距， q = 因增加 n' 鉚釘而改小之心距 (q 常用鉚釘之准許最小心距)， m = 所需 q 心距之數，俾可容納所增加之 n' 鉚釘。如圖 6—29 (d) 所示，

$$m - \frac{mq}{p} = n'$$

由此 (6—63)

$$m = \frac{n'p}{(p-q)}$$

若腹板之深度太大，或需用水平拼接，其二拼接板之總厚度，至少應等於腹板之厚度。至其拼接鉚釘，全在抗抵拼接處之

平切力，其計算與翼緣鉚釘者極其相似，故不贅述。

(2) 翼緣角之鉚釘拼接 於可能範圍之內，翼緣角之拼接應極力避免。鋼角之最大長度，常可達 30 公尺，故除極長之鋼梁外，翼緣角常不需拼接。翼緣角如需拼接，常係工地拼接。於任何同一截面不得有二翼緣角被拼接[416]。

翼緣角之拼接，常依受拉翼緣計算，而使受壓翼緣者相同。因拼接部份不得藉兩端接觸以傳遞應力也。

翼緣角拼接應用鋼角，其淨截面至少應等於被拼接之翼緣角之淨截面（若干規範規定前者約大於後者百分之十）。若翼緣角之厚度約在 16 公厘以下，其拼接角可用與翼緣角肢寬相同而較厚之鋼角，將其肢之伸出部份截去，並將其外角磨圓，如圖 6—30 (a) 所示。如翼緣角之厚度較大，則如上法所需拼接角之厚度或太大。於是可加一鋼板或加另一鋼角於翼緣之他面，如圖 6—30 (b) 或 (c) 所示。若將一蓋板伸長以遮過翼緣角之拼接處，亦可算作翼緣角之拼接截面之一部。

拼接角之鉚釘必需能發揮其強度，而鉚釘之心距，必須用最小者（但心距如太小必致減小翼緣角及拼接角之淨截面），庶拼接角不至太長，而應力之傳遞，能於最短之距離中完成。

所需之鉚釘數，視拼接之佈置而定。於圖 6—30 (a) 之拼接，其翼緣平豎鉚釘均可算作拼接之用。至圖 6—30 (b) 或 (c) 之拼接，稱為間接拼接，因其另加之拼接角或板，不與被拼接角直接接觸。於此，拼接鉚釘之數應略增加。若翼緣應力之增

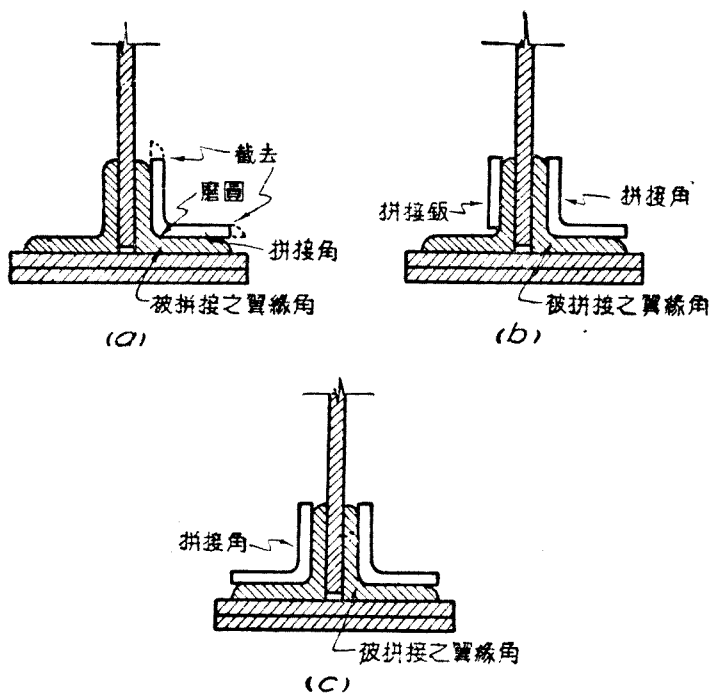


圖 6—30. 翼緣角之拼接

加率不大，則增加二或三鉚釘即可。

(3) 蓋板之鉚釘拼接 最外之蓋板係最長者，故常不需拼接。如必需時，其拼接法如圖 6—31 (a)。拼接板之寬厚，均與被拼接之蓋板相同。

任何其他蓋板之拼接，常在其相鄰外蓋板之理論端點，庶後者之伸長，即可用作前者之拼接板，如圖 6—31 (b)，若後者之厚度較前者為小，或需另加一板，以補足其截面面積。有時須於翼緣之上面加一板以拼接其非相鄰之蓋板。如圖 6—31

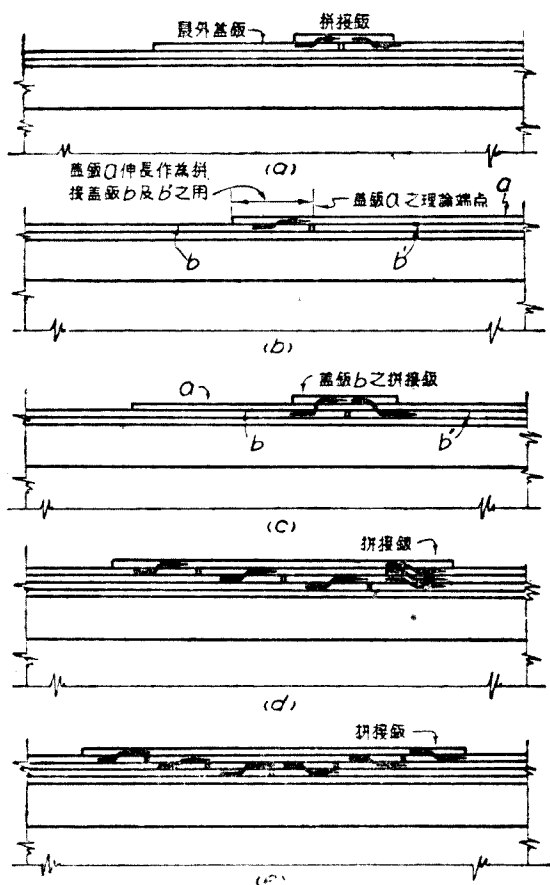


圖 6—31. 蓋板之拼接

(c), 即成爲間接拼接。

拼接鉚釘必須能發揮拼接板之強度。如圖 6—31 (b) 之拼接, 可將蓋板 “b” 之應力視作係經過拼接鉚釘而傳遞於蓋板 “a”, 蓋板 “b” 可視作係自拼接處起首之另一蓋板, 故其該端之鉚釘心距, 必須較爲緊湊。於間接拼接如圖 6—31 (c)

其鉚釘對於傳遞應力之效率不及直接拼接。故拼接鉚釘之數必須增加。最通常之規則，即拼接板與被拼接板之間每隔一板應將鉚釘之數較計算所得者增加三分之一。

若所有蓋板，均需拼接，可用一拼接板拼接之，如圖 6—31 (d)，稱為鱗形拼接。惟拼接板之厚度，應與蓋板之最厚者相同，而所有相鄰蓋板掩蓋之長度，必須能容納所需之拼接鉚釘。諸蓋板間之應力傳遞，如圖中之箭頭所示。圖 6—31 (e) 稱為埋頭拼接，用於工地拼接，最為相宜。

例題 6—7. 設某橋梁板梁之腹板必需拼接，而其拼接處該板梁之截面如下：

1 腹板 1800×11

4 翼緣角 $150 \times 150 \times 19$

6 蓋板 360×16

試依「腹板拼接之抗彎及抗切強度，必須與腹板本身者相等」之規定，計算其腹板之各式鉚釘拼接。鉚釘之直徑為 22 公厘。

解答 (a) 切力拼接：

$$d_g = 1800 + 10 + 6 \times 16 = 1,906 \text{ 公厘}$$

$$h_p = 1800 - 2 \times 150 = 1,500 \text{ 公厘}$$

$$f = 12.5 \text{ 公斤/平方公厘}, \quad v = 7.5 \text{ 公斤/平方公厘},$$

22 公厘鉚釘值 $R = 4,356$ (依 11 公厘腹板之承力見附錄二 A)。

$$\text{用方程(6—37), } M_w = \frac{12.5 \times 11 \times (1,800)^3}{8 \times 1,906} = 52,800,000 \text{ 公斤公厘}$$

$$\text{用方程(6—3), } V = 7.5 \times 11 \times 1,800 = 148,500 \text{ 公斤}$$

$$L_m = \frac{52,800,000}{148,500} = 355 \text{ 公厘}$$

$$\text{用方程(6—46), } N_n = \frac{6 \times 52,800,000 \times 1,800}{4,356 \times (1,500)^2} = 57.5$$

$$\text{用方程(6-47), } N_n = \frac{148,500}{4,356} \sqrt{\left(\frac{6 \times 355}{1500}\right)^2 + 1} = 59.5$$

所算得拼接每邊之鉚釘約數為 60，分為三行，每行 20。但 $h_p = 1,500$ 公厘，上下兩端各除去鉚釘邊矩 50 公厘，剩餘 1400 公厘，若每行用 21 鉚釘，則心距數為 20，得均勻心距 70 公厘，恰為適宜，故暫採用 63 鉚釘，分為三行，每行 21 鉚釘。

$$\text{用方程(6-44), } N = \frac{6 \times 52,800,000 \times 1,800}{4,356 \times 70^2 \times 21(21^2 - 1)} = 2.9$$

$$\text{用方程(6-45), } N = \frac{148,500}{21 \times 4,356} \sqrt{\left(\frac{6}{22} \times \frac{355}{70}\right)^2 + 1} = 2.8$$

故採用 $N = 3, n = 21$ ，其佈置如附圖(a)。

$$\text{用方程(6-34), } t' = \frac{11}{2} \left(\frac{1,800}{1,500}\right)^3 = 9.5 \approx 10 \text{ 公厘}$$

故採用 2 拼接鈹 $500 \times 10 \times 1,500$ 公厘。

(b) 彎矩拼接(依第二法計算):

$$\text{用方程(6-51), } Nn = \frac{148,500}{4,356} = 34.2 \approx 36$$

採用 $N = 3, n = 12$ ，假定 $n' = 3$ ，鉚釘之佈置如附圖(b)，則 $h'' = 1,240$ 公厘， $h_p = 970$ 公厘，

$$\text{用方程(6-52), } N = \frac{52,800,000 \times 1,800}{3 \times 4,356 \times (1,240)^2} = 4.7 \approx 5$$

故採用 $N = 5$ ，用方程(6-33)，

$$t' = \frac{11}{2} \times \frac{1,800}{970} = 10.2 \approx 11 \text{ 公厘}$$

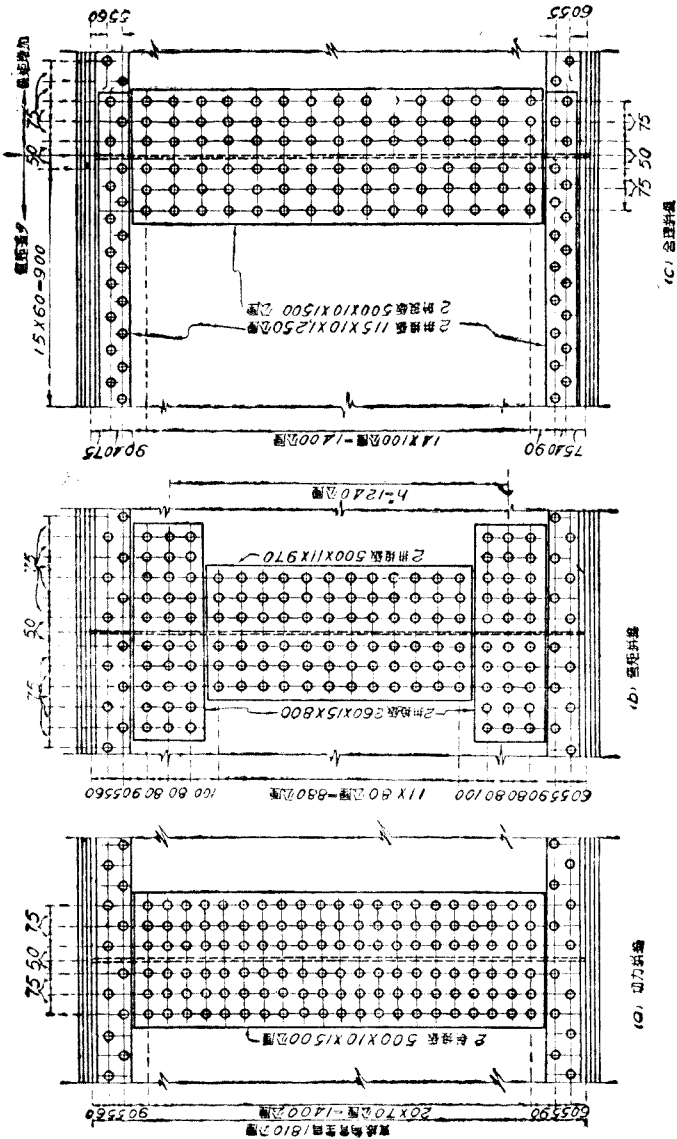
故二 V 鈹採用 $500 \times 11 \times 970$ 公厘。

$$\text{用方程(6-50), } Ap = \frac{11 \times (1,800)^3}{8 \times (1,240)^2} = 5,200 \text{ 平方公厘}$$

若 M 鈹之深度，採用 260 公厘，則其厚度為 $5,200 \div 2(260 - 3 \times 25) = 14.1 \approx 15$ 公厘。故四 M 鈹採用 $260 \times 15 \times 800$ 公厘。此拼接之佈置如附圖(b)，

(c) 合理拼接(依第二法計算):

$$\text{用方程(6-58), } M''_w = \frac{12.5 \times 11 \times (1,500)^3}{8 \times 1,906} = 30,500,000 \text{ 公斤公厘}$$



例題 6-7.

用方程(6-59),
$$L''_m = \frac{30,500,000}{148,500} = 206 \text{ 公厘}$$

先試用如附圖(a)之切力拼接,用方程(6-44)及(6-45),

$$N = \frac{6 \times 30,500,000 \times 1,500}{4,356 \times 7(2 \times 21 + 21^2 - 1)} = 1.7$$

$$N = \frac{148,500}{21 \times 4,356} \sqrt{\left(\frac{6}{22} \times \frac{26}{70}\right)^2 + 1} = 2.09$$

故 n 之數可以減少,試用 $n=15$, $p=100$ 公厘,用方程(6-44)及(6-45),

$$N = \frac{6 \times 30,500,000 \times 1,800}{4,356 \times 16(2 \times 15 + 15^2 - 1)} = 2.25$$

$$N = \frac{148,500}{15 \times 4,356} \sqrt{\left(\frac{6}{16} \times \frac{26}{100}\right)^2 + 1} = 2.85$$

故採用 $N=3$, $n=15$, 其佈置如附圖(c)。用方程(6-33)及(6-36)

$$t' = \frac{11}{2} \times \frac{1,800}{1,500} = 6.6 \text{ 公厘}$$

$$t' = \frac{4 \times 30,500,000 \times 1,906}{12.5 \times (1,500)^3} = 5.5 \text{ 公厘}$$

採用最小厚度 10 公厘,故二 V 鋁爲 $500 \times 10 \times 1,500$ 公厘。

$$M'_{ic} = 72,800,000 - 30,500,000 = 22,300,000 \text{ 公斤公厘}$$

用方程(6-61),
$$A'_{ip} = \frac{22,300,000 \times 1,906}{12.5 \times (1,800)^2} = 1,140 \text{ 平方公厘}$$

假設腹板拼接處之翼緣面積無多餘,故必需用 F 鋁。 F 鋁係鉚於翼緣角之內,其寬度應避去翼緣角之內圓角($r=16$ 見附錄一),並應減去二鉚釘孔(因必採用最小心距),故其淨寬度爲 $150 - (19 + 16 + 2 \times 25) = 65$ 公厘,其厚度爲 $1040 \div (2 \times 65) = 8 \approx 10$ 公厘,用方程(6-62),

$$n' = \frac{22,300,000}{4,356 \times 1,800} = 2.85$$

用方程(6-63), 設 $p=75$ 公厘, $q=60$ 公厘,

$$m = \frac{2.85 \times 75}{75 - 60} = 14.3 \approx 15$$

因 F 鋁之寬度太小,故該處翼緣角中平鉚釘之心距線必更改如附圖(c), 四 F 鋁採用 $115 \times 10 \times 1250$ 公厘。

習題 6-11. 計算例題 6-7 腹板切力拼接中最遠鉚釘之平壓力 (s_x)

及合應力(s_r)。

習題 6-12. 腹板之彎矩拼接如例題 6-7 解答 (b), 用其第一法, 計算其中最遠鉚釘之平應力(s)及合應力(s_r)。

習題 6-13 (a) 計算例題 6-7 腹板合理拼接之 V 板及其中鉚釘所能抵抗之彎矩。惟該項鉚釘同時並須抵抗腹板所能抵抗之切力。(b) 用計算合理拼接之第一法, 求該拼接中 F 板之大小及其中拼接鉚釘之數目及心距, 並作詳圖示其佈置方法。

習題 6-14. 設某板梁之腹板必需拼接, 而其拼接處該板梁之截面與例題 6-2 附圖所示者相同, 試依「腹板拼接之抗彎及抗切強度必須與腹板本身者相等」之規定, 計算其切力拼接之拼接板及鉚釘, 並作詳圖以表明其佈置之方法。

6-9. **翼緣傾斜或彎曲之板梁** 為節省鋼料起見, 常使板梁之下翼緣成傾斜或彎曲形, 如圖 6-2 所示。翼緣傾斜板梁之應力分析法, 如圖 6-32 (a) 所示。傾斜翼緣之總應力 T ,

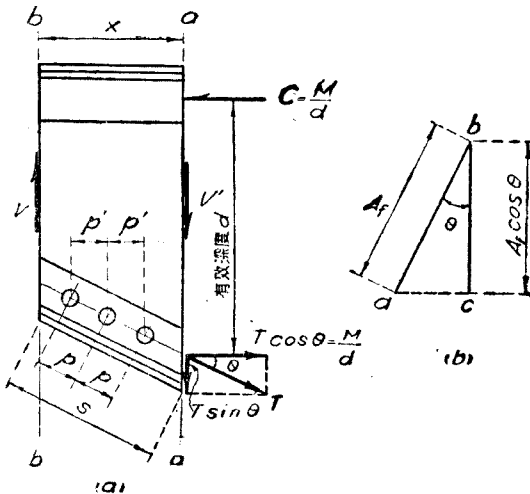


圖 6-32. 傾斜翼緣之計算

有一總平分應力，其數量等於彎矩 M 除以鋸梁之有效深度 d ，故

$$T \cos \theta = \frac{M}{d} \quad (6-64)$$

或
$$T = \frac{M}{d \cos \theta} \quad (6-65)$$

同時 T 亦有總豎分應力，其數量為

$$T \sin \theta = \frac{M}{d} \tan \theta \quad (6-66)$$

但 $T \sin \theta$ 可使截面 $a-a$ 之切力減少或增加。設截面 $a-a$ 之切力原為 V ，因 $T \sin \theta$ 之作用而改變為 V' ， V' 稱為改變切力，則，

$$\begin{aligned} V' &= V \pm T \sin \theta \\ &= V \pm \frac{M}{d} \tan \theta \end{aligned} \quad (6-67)$$

故計算腹鋸之切應力，應用改變應力 V' 。

如圖 6-32 (b) 所示，設 ab 為與下翼緣垂直之翼緣截面 A_f ， bc 為 A_f 之豎投影截面，其值為 $A_f \cos \theta$ ，故關於該傾斜翼緣之任何計算，方程 (6-9)，(6-10) 及 (6-11) 均應改變如下：

$$I = (A_f \cos \theta + \frac{1}{8} A_w) \frac{d^2}{2} \quad (6-68)$$

$$f = \frac{M d_g}{(A_f \cos \theta + \frac{1}{8} A_w) d^2} \quad (6-69)$$

$$Z = (A_f \cos \theta + \frac{1}{8} A_w) \frac{d^2}{d_g} \quad (6-70)$$

其中 A_f 爲全截面或淨截面，視傾斜翼緣係受壓力或受拉力而定。

計算傾斜翼緣之銲接或鉚釘時，可用方程(6—19)，(6—20)及(6—22)，而將其中之 V 改爲 V' ， A_f 改爲 $A_f \cos \theta$ ，得方程如下：

$$(6-71) \quad \bar{v} = \frac{V'}{d} \times \frac{A_f \cos \theta}{A_f \cos \theta + \frac{1}{8} A_w}$$

$$(6-72) \quad p = \frac{R}{\bar{v}} = \frac{Rd}{V'} \left(1 + \frac{\frac{1}{8} A_w}{A_f \cos \theta} \right)$$

$$(6-73) \quad p = \frac{Rd}{V'}$$

如圖 6—32 (a) 所示，用上列方程所計算 p 之值爲鉚釘之傾斜心距，其水平心距 p' 爲

$$(6-74) \quad p' = p \cos \theta$$

若翼緣係彎曲形，計算時可取各點切線之 θ ，上列方程均可採凡。

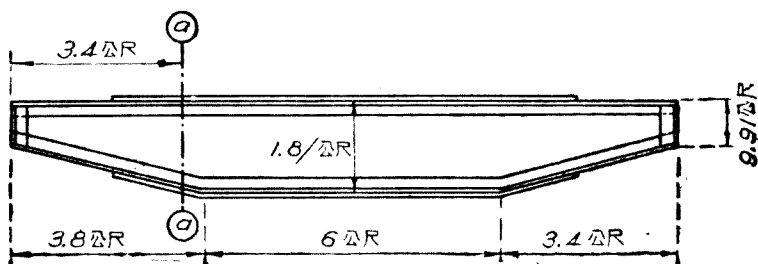
習題 6—15. 一下翼緣傾斜之鉚梁，如附圖所示，其最大截面之組成如下：

- 1 腹 飯 1800×10 公厘
- 4 翼緣角 150×150×13 公厘
- 2 蓋 飯 360×13 公厘

鉚釘之直徑爲 22 公厘，若切面 $a-a$ 之切力爲 45 公噸，彎矩爲 220 公噸公尺，試計算該截面以下之三項：

(a) 腹飯之平均單位切應力，

- (b) 上下翼緣之最大纖維應力〔用方程 (6-10) 及 (6-69)〕，
 (c) 下翼緣平銲釘心距〔用方程 (6-27)〕。



習題 6-15.



每肢面積



不帶筋角

附錄一。鑄角之要素(註面制)

肢寬 (公厘+公厘)	厚 (公厘)	r (公厘)	面積 (公厘) ²	重量 (公厘/公厘)	J(公厘) ²	Z(公厘) ²	P(公厘)	X=y (公厘)	最小r (公厘)	可許代時之 英制型(吋吋)
50x50	9	8	10.1	7.90	31.8	7.57	1.78	1.80	1.17	3/4 x 3/4
	10		11.1	8.62	34.9	8.41	1.78	1.83	1.5	3/4 x 3/4
65x65	9	9	11.0	8.62	41.3	9.04	1.94	1.93	1.25	3/4 x 3/4
	10		12.1	9.49	44.3	9.76	1.91	1.96	1.24	3/4 x 3/4
75x75	10	10	14.1	11.1	71.4	13.5	2.23	2.21	1.43	3/4 x 3/4
	11		15.4	12.1	75.8	14.4	2.25	2.24	1.42	3/4 x 3/4
80x80	10	10	15.1	11.9	87.5	15.5	2.41	2.34	1.54	3/4 x 3/4
	11		17.9	14.1	102	18.2	2.39	2.41	1.55	3/4 x 3/4
90x90	10	11	17.1	13.5	125	19.5	2.70	2.58	1.73	3/4 x 3/4
	11		18.7	14.7	138	21.6	2.72	2.62	1.75	3/4 x 3/4
	13		21.8	17.1	158	25.1	2.69	2.70	1.74	3/4 x 3/4
	14		23.4	18.4	163	26.0	2.64	2.73	1.73	3/4 x 3/4
100x100	10	12	26.4	20.7	185	30.1	2.66	2.81	1.73	3/4 x 3/4
	11		19.2	15.1	177	24.7	3.04	2.82	1.95	4/4 x 3/4
	11		20.9	16.4	192	26.3	3.03	2.85	1.95	4/4 x 3/4
	13		24.5	19.2	219	31.0	2.99	2.93	1.94	4/4 x 3/4
130x130	14	14	26.2	20.6	235	33.5	3.00	2.98	1.94	4/4 x 3/4
	16		29.6	23.2	263	38.0	2.94	3.08	1.94	4/4 x 3/4
	12		30.0	23.6	472	50.4	3.97	3.64	2.54	5/4 x 3/4
	13		32.3	25.4	502	53.9	3.94	3.68	2.51	5/4 x 3/4
150x150	14	16	34.7	27.2	540	58.2	3.94	3.72	2.53	5/4 x 3/4
	16		39.3	30.9	605	65.8	3.92	3.80	2.52	5/4 x 3/4
	12		34.8	27.4	737	67.7	4.60	4.12	2.95	6/4 x 3/4
	13		37.6	29.5	790	72.9	4.58	4.18	2.95	6/4 x 3/4
200x200	14	18	40.3	31.6	845	78.2	4.52	4.21	2.94	6/4 x 3/4
	15		45.7	35.9	949	88.7	4.55	4.29	2.93	6/4 x 3/4
	19		53.7	42.2	1098	103	4.52	4.38	2.92	6/4 x 3/4
	14		54.4	42.7	2048	141	6.13	5.46	3.95	8/4 x 3/4
16	18	61.8	48.5	2340	162	6.15	5.52	3.91	8/4 x 3/4	
		20	76.4	59.9	2850	199	6.11	5.68	3.89	8/4 x 3/4
22	83.5	65.5	3099	210	6.09	5.73	3.91	8/4 x 3/4		

肢寬 (公厘+公厘)	厚 (公厘)	r (公厘)	面積 (公厘) ²	重量 (公厘/公厘)	X-X 軸				Y-Y 軸				最小r (公厘)	可許代時之 英制型(吋吋)
					J(公厘) ²	Z(公厘) ²	P(公厘)	X(公厘)	J(公厘) ²	Z(公厘) ²	P(公厘)	Y(公厘)		
65x65	10	7	11.1	8.68	42.9	9.18	1.97	2.11	27.9	7.17	1.52	1.61	1.13	3/4 x 3/4
75x65	10	8	13.1	10.3	68.4	13.3	2.29	2.33	47.3	10.2	1.90	1.86	1.33	3/4 x 3/4
100x75	10	10	16.7	13.1	162	23.8	3.11	3.19	77.6	14.0	2.16	1.95	1.61	4/4 x 3/4
	12		19.7	15.4	189	28.1	3.10	3.27	89.3	16.3	2.13	2.03	1.58	4/4 x 3/4
150x75	10	10.5	19.6	15.4	337	39.4	4.14	4.45	82.9	14.4	2.08	1.98	1.61	5/4 x 3/4
	11		21.5	16.9	367	43.2	4.13	4.30	90.2	15.7	2.05	1.77	1.61	5/4 x 3/4
	12		23.3	18.3	393	46.5	4.12	4.33	96.5	17.0	2.04	1.81	1.60	5/4 x 3/4
130x90	10	12	21.2	16.6	358	40.5	4.11	4.15	141	20.6	2.58	2.18	1.93	5/4 x 3/4
	11		23.2	18.2	392	44.6	4.11	4.21	194	22.7	2.58	2.23	1.94	5/4 x 3/4
	12		25.1	19.7	420	48.0	4.09	4.24	165	24.4	2.56	2.26	1.92	5/4 x 3/4
150x90	10	12.5	29.0	22.8	480	53.3	4.07	4.32	187	28.1	2.54	2.34	1.91	5/4 x 3/4
	13		23.2	18.2	332	33.1	4.79	4.99	146	21.0	2.51	2.23	1.94	6/4 x 3/4
150x100	10	15	29.7	23.3	672	68.0	4.76	5.11	181	26.6	2.48	2.15	1.92	6/4 x 3/4
	13		24.2	19.0	332	34.1	4.78	4.80	198	23.8	2.86	2.34	2.15	6/4 x 3/4
14	15	31.0	24.5	696	69.3	4.73	4.93	248	32.9	2.83	2.46	2.14	6/4 x 3/4	
		15	33.2	26.1	744	74.1	4.73	4.91	264	35.2	2.82	2.50	2.14	6/4 x 3/4
15	15	37.6	29.5	832	83.7	4.70	5.05	296	39.8	2.80	2.57	2.14	6/4 x 3/4	

附錄二 卸釘之值心距邊距及鋼角之標準卸心線

A. 區中螺絲之卸釘值 (以每個卸釘重千公斤計)

各種厚度 (公厘) 之承力 (1.6 公斤 / 公厘²)

卸釘 直徑 公厘	各種厚度 (公厘) 之承力 (1.6 公斤 / 公厘 ²)																			
	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25			
16	201	1909	2304	2592	2880	3160	3456	3744	4032	4320	4608	4896	5184	5472	5760	6048	6336	6624	6912	7200
19	283	2547	2736	3078	3420	3760	4104	4446	4788	5130	5472	5814	6156	6498	6840	7182	7524	7866	8208	8550
22	380	3420	3168	3564	3960	4356	4752	5148	5544	5940	6336	6732	7128	7524	7920	8316	8712	9108	9504	9900
25	491	4419	3600	4020	4320	4620	4920	5220	5520	5820	6120	6420	6720	7020	7320	7620	7920	8220	8520	8820

B. 工地螺絲之卸釘值 (以每個卸釘重千公斤計)

各種厚度 (公厘) 之承力 (1.6 公斤 / 公厘²)

卸釘 直徑 公厘	各種厚度 (公厘) 之承力 (1.6 公斤 / 公厘 ²)																			
	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25			
16	201	1608	2049	2304	2560	2816	3072	3328	3584	3840	4096	4352	4608	4864	5120	5376	5632	5888	6144	6400
19	281	2264	2432	2736	3040	3344	3648	3952	4256	4560	4864	5168	5472	5776	6080	6384	6688	6992	7296	7600
22	380	3040	2816	3168	3520	3872	4224	4576	4928	5280	5632	5984	6336	6688	7040	7392	7744	8096	8448	8800
25	491	3928	3200	3600	4000	4400	4800	5200	5600	6000	6400	6800	7200	7600	8000	8400	8800	9200	9600	10000

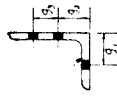
左側圖以右之承力請大於實切力

C. 卸釘之心距及邊距 (均以公厘計)

卸釘 直徑 公厘	最小 心距	最大 心距	鋼角之值		最小 邊距
			鋼角之值	鋼角之值	
16	50	55	60	100	30
19	60	65	75	130	35
22	70	75	85	150	40
25	80	85	100	175	45

D. 鋼角之標準卸心線及其可用之最大卸釘 (均以公厘計)

卸釘 直徑 公厘	鋼角之標準卸心線及其可用之最大卸釘 (均以公厘計)																			
	60	65	70	75	80	85	90	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210
9	35	35	35	45	45	45	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
最大 卸釘	16	16	16	19	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22



圖,例題及習題索引

A. 圖之部

圖	頁數	圖	頁數	圖	頁數	圖	頁數	圖	頁數
1-1	1	3-1	57	3-34	116	4-27	213	6-2	308
1-2	3	3-2	60	3-35	118	4-28	217	6-3	310
1-3	3	3-3	61	3-36	119	4-29	219	6-4	311
1-4	4	3-4	62	3-37	120	5-1	225	6-5	312
1-5	4	3-5	63	3-38	121	5-2	226	6-6	316
1-6	8	3-6	66	3-39	126	5-3	228	6-7	323
2-1	13	3-7	68	3-40	127	5-4	230	6-8	324
2-2	16	3-8	71	4-1	129	5-5	235	6-9	326
2-3	17	3-9	72	4-2	132	5-6	240	6-10	328
2-4	18	3-10	73	4-3	134	5-7	242	6-11	329
2-5	19	3-11	76	4-4	137	5-8	252	6-12	331
2-6	22	3-12	79	4-5	138	5-9	253	6-13	332
2-7	23	3-13	80	4-6	139	5-10	254	6-14	333
2-8	24	3-14	80	4-7	142	5-11	256	6-15	334
2-9	27	3-15	81	4-8	143	5-12	257	6-16	335
2-10	28	3-16	82	4-9	144	5-13	267	6-17	339
2-11	29	3-17	82	4-10	145	5-14	276	6-18	341
2-12	30	3-18	84	4-11	148	5-15	277	6-19	340
2-13	31	3-19	85	4-12	154	5-16	278	6-20	341
2-14	33	3-20	86	4-13	156	5-17	279	6-21	342
2-15	35	3-21	87	4-14	163	5-18	285	6-22	343
2-16	38	3-22	88	4-15	166	5-19	287	6-23	344
2-17	40	3-23	89	4-16	170	5-20	288	6-24	345
2-18	41	3-24	90	4-17	178	5-21	289	6-25	349
2-19	41	3-25	99	4-18	181	5-22	290	6-26	353
2-20	42	3-26	100	4-19	183	5-23	292	6-27	355
2-21	43	3-27	101	4-20	188	5-24	293	6-28	356
2-22	44	3-28	103	4-21	189	5-25	296	6-29	361
2-23	47	3-29	104	4-22	191	5-26	298	6-30	366
2-24	48	3-30	105	4-23	198	5-27	299	6-31	367
2-25	51	3-31	106	4-24	199	5-28	302	6-32	372
2-26	52	3-32	111	4-25	205	5-29	304		
2-27	53	3-33	113	4-26	211	6-1	307		

B. 例題之部

例題	頁數	例題	頁數	例題	頁數	例題	頁數	例題	頁數
3-1	92	4-2	153	4-9	185	5-1	246	6-1	312
3-2	94	4-3	156	4-10	192	5-2	248	6-2	319
3-3	107	4-4	159	4-11	195	5-3	258	6-3	326
3-4	114	4-5	170	4-12	201	5-4	269	6-4	335
3-5	122	4-6	175	4-13	206	5-5	271	6-5	346
3-6	125	4-7	179	4-14	219	5-6	272	6-6	352
4-1	151	4-8	182	4-15	222	5-7	279	6-7	368

C. 習題之部

習題	頁數	習題	頁數	習題	頁數	習題	頁數	習題	頁數
1-1	11	3-5	76	4-2	148	4-26	200	5-17	284
1-2	12	3-6	76	4-3	149	4-27	202	5-18	294
2-1	20	3-7	76	4-4	149	4-28	207	5-19	294
2-2	20	3-8	90	4-5	149	4-29	214	5-20	309
2-3	21	3-9	90	4-6	160	4-30	214	5-21	300
2-4	21	3-10	90	4-7	160	4-31	214	5-22	300
2-5	25	3-11	90	4-8	164	4-32	222	5-23	301
2-6	26	3-12	90	4-9	164	4-33	223	5-24	305
2-7	32	3-13	96	4-10	161	5-1	250	6-1	313
2-8	33	3-14	97	4-11	164	5-2	250	6-2	313
2-9	33	3-15	93	4-12	173	5-3	250	6-3	322
2-10	34	3-16	102	4-13	173	5-4	251	6-4	322
2-11	37	3-17	106	4-14	176	5-5	254	6-5	326
2-12	44	3-18	107	4-15	176	5-6	254	6-6	337
2-13	45	3-19	107	4-16	177	5-7	254	6-7	337
2-14	46	3-20	109	4-17	180	5-8	260	6-8	337
2-15	55	3-21	109	4-18	183	5-9	260	6-9	348
2-16	55	3-22	116	4-19	186	5-10	260	6-10	352
2-17	55	3-23	122	4-20	188	5-11	275	6-11	371
2-18	56	3-24	122	4-21	193	5-12	275	6-12	372
3-1	58	3-25	122	4-22	193	5-13	275	6-13	372
3-2	60	3-26	125	4-23	193	5-14	284	6-14	372
3-3	65	3-27	128	4-24	193	5-15	284	6-15	374
3-4	65	4-1	141	4-25	197	5-16	284		

